WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA W GDAŃSKU

JÓZEF WEŁNIAK

GEOMETRIA ANALITYCZNA

GDAŃSK 1968

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA W GDAŃSKU

JÓZEF WEŁNIAK

GEOMETRIA ANALITYCZNA

GDAŃSK 1968

R e c e n z e n c i

Z.prof.mgr Kazimierz Buczkowski
Z.prof.mgr Kazimierz Mosingiewicz

Dział Wydawniczy Wyższej Szkoły Pedagogicznej
Gdańsk, ul. Sobieskiego 18

Zam. 1299, nakład 1000 egz, zezw. E9 z dn. 18.I.1968 r.

SPIS RZECZY

Rozdział I
O wektorach i układach współrzędnych

Rozdział II

Prosta i okrąg na płaszczyźnie

Rozdział IV

Krzywe stożkowe

Rozdział V

Linie stopnia drugiego

Rozdział VI

Przykłady powierzchni

Rozdział VII

Przekształcenia geometryczne

ROZDZIAŁ I

O WEKTORACH I UKŁADACH WSPÓŁRZĘDNYCH

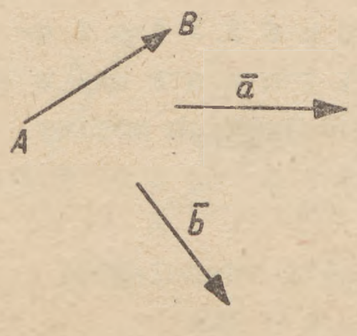
§ 1. POJĘCIE WEKTORA

1. <u>Wektory i skalary</u>.

Odcinek, w którym jeden z końców przyjęto jako początek, a drugi jako koniec nazywamy *odcinkiem skierowanym* lub *wektorem*.

Wektor, którego początkiem jest punkt A, a końcem punkt B, oznaczamy symbolem $\overline{AB}$. Dla oznaczenia wektorów używamy również małych liter z kreską, np. $\bar{a}$, $\bar{b}$. Na rysunku zaznaczamy wektor, umieszczając strzałkę przy końcu wektora. Początek wektora nazywamy także punktem *zaczepienia* wektora. Z każdego odcinka AB mogą powstać dwa wektory - jeden $\overline{AB}$, jeżeli odcinkowi nadamy zwrot od A do B - drugi $\overline{BA}$, jeżeli odcinkowi nadamy zwrot od B do A.

Punkty zaliczamy również do wektorów, których początek pokrywa się z końcem i nazywamy wektorami *zerowymi*. Wektory zerowe będziemy oznaczać cyfrą zero.



Rys. 1

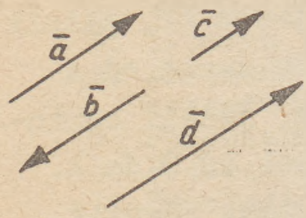
Długością wektora $\overline{AB}$ nazywamy długość odcinka AB i oznaczamy ją symbolem $|\overline{AB}|$.

W fizyce występują wielkości jak np. przesunięcie (droga), prędkość, przyśpieszenie, siła, których dokładne opisanie wymaga podania nie tylko wartości liczbowej (miary), ale i kierunku. Wielkości takie nazywamy wielkościami wektorowymi. Wielkości wektorowe przedstawiamy przy pomocy odcinków skierowanych, które wtedy są obrazami geometrycznymi wektorowych wielkości fizycznych i ułatwiają nam zrozumienie pewnych zagadnień.

W fizyce spotykamy również wielkości, które przy przyjętej jednostce są w zupełności określone jedną liczbą (miarą). Wielkości te nazywamy wielkościami skalarnymi, a liczby je określające - skalarami. Wielkościami skalarnymi są np. masa, gęstość, praca, odstęp czasu, temperatura. Nazwa skalar pochodzi stąd, że wartość tych wielkości możemy odczytać na skali odpowiedniego przyrządu pomiarowego.

2. Kierunek i zwrot wektora.

Wektory niezerowe, które leżą na jednej prostej lub na prostych równoległych nazywamy wektorami równoległymi (współliniowymi, kolinearnymi). O wektorach równoległych mówimy też, że mają ten sam kierunek.



Rys. 2

Wektory o tym samym kierunku (czyli równoległe) mogą posiadać ten sam zwrot lub zwroty przeciwne. Rozróżniamy więc pojęcie kierunku i pojęcie zwrotu. Prosta i proste do niej równoległe reprezentują jeden kierunek i dwa zwroty.

3. <u>Wektory swobodne i umiejscowione.</u>

Dwa wektory niezerowe $\bar{a}$ i $\bar{b}$ nazywamy **r ó w n y m i**, jeżeli są równoległe, są równej długości i mają te same zwroty.

Wszystkie wektory zerowe uważamy za równe.

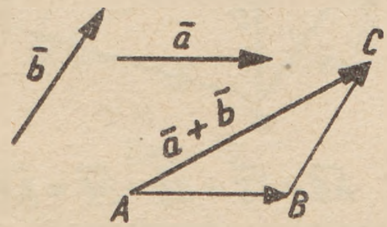
W określeniu równości dwóch wektorów nie narzucono ich punktom zaczepienia żadnych warunków, wobec tego mając wektor $\bar{a}$ możemy go zastąpić innym wektorem $\bar{b}$, uzyskanym przez przesunięcie równoległe wektora $\bar{a}$.

Wektory, których określenie równości pozwala na przesunięcie równoległe w przestrzeni nazywamy wektorami **s w o b o d n y m i**.

W niektórych rozważaniach położenie punktu zaczepienia wektora nie będzie obojętne, położenie to będzie ograniczone np. warunkiem przynależności do pewnego stałego punktu, do pewnej prostej lub pewnej powierzchni. W takich wypadkach rozpatrywane wektory będziemy nazywać wektorami **u m i e j s c o w i o n y m i** lub **z w i ą z a n y m i**.

4. <u>Dodawanie wektorów.</u>

Jeżeli dane są dwa wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$, to ich sumą nazywamy wektor otrzymany w następujący sposób:

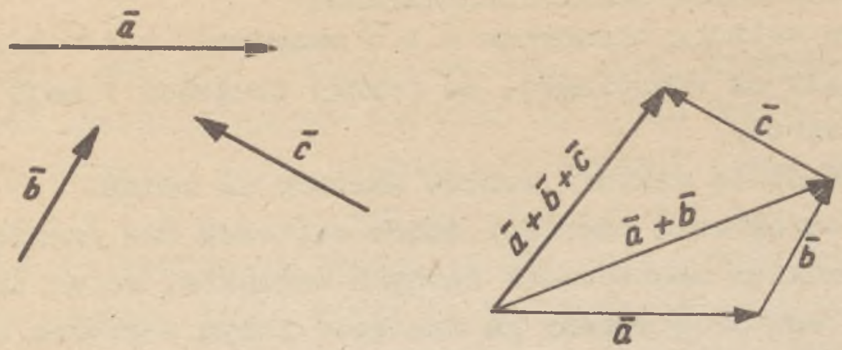


Rys. 3

w dowolnym punkcie A jako punkcie zaczepienia kreślimy wektor $\overline{AB}$ równy wektorowi $\bar{a}$ (rys.3), następnie w punkcie B jako punkcie zaczepienia wektor $\overline{BC}$ równy wektorowi $\bar{b}$. Wektor $\overline{AC}$ nazywamy sumą wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ i oznaczamy przez $\bar{a} + \bar{b}$.

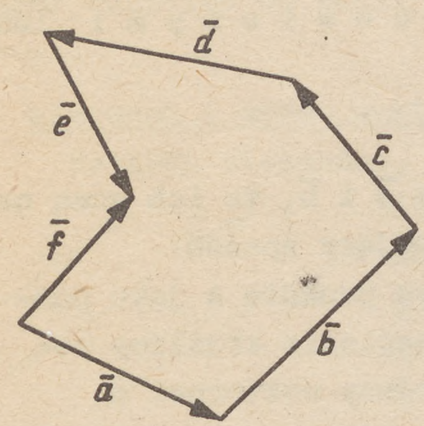
Sumę trzech wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ określamy jako sumę wektora $\bar{a} + \bar{b}$ i $\bar{c}$ (rys. 4).

Z definicji dodawania dwóch wektorów i ze sposobu wyznaczania sumy trzech wektorów wynika, że jeżeli ma-



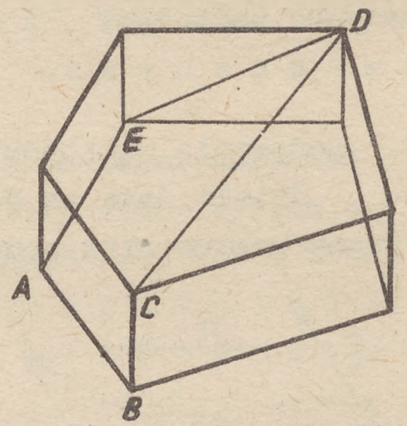
Rys. 4

my daną dowolną skończoną liczbę wektorów, to ich sumę otrzymujemy kreśląc linię łamaną w ten sposób, by koniec pierwszego wektora był początkiem drugiego, koniec drugiego początkiem trzeciego itd. Sumą wszystkich danych wektorów jest wektor, którego początek znajduje się w początku linii łamanej, a koniec w końcu linii łamanej (rys. 5 i 6).



$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e}=\bar{f}$

Rys. 5

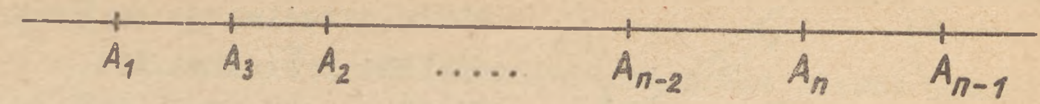


$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE}$

Rys. 6

Z kolei wniosek: jeżeli linia łamana skonstruowana w opisany sposób jest linią łamaną zamkniętą, to suma rozpatrywanych wektorów jest wektorem zerowym.

Szczególnym przypadkiem dodawania wektorów jest dodawanie wektorów równoległych. Mianowicie jeżeli danych jest n wektorów równoległych $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$... ... $\overline{A_{n-1}A_n}$, to konstruując ich sumę, otrzymamy linię łamaną, której wszystkie boki należą do jednej linii prostej (rys.7)



Rys. 7

Możemy więc powiedzieć, że jeżeli na prostej mamy n punktów $A_1, A_2, \dots A_{n-1}, A_n$ dowolnie uporządkowanych, to istnieje związek

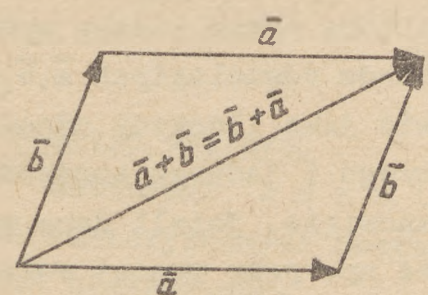
$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+ \dots\dots \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n}$$

Z łatwością można udowodnić, że przy dodawaniu wektorów słuszne jest prawo p r z e m i e n n o ś c i (rys.8)

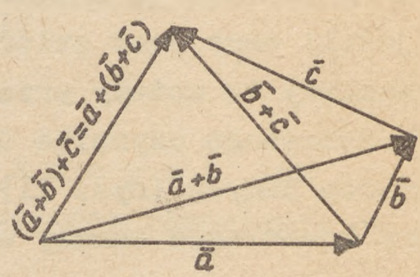
$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

i prawo ł ą c z n o ś c i (rys.9)

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$$



Rys. 8

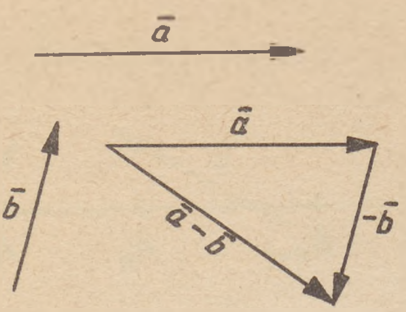


Rys. 9

5. Odejmowanie wektorów.

Zanim określimy odejmowanie wektorów wprowadzimy najpierw pojęcie wektorów przeciwnych.

Dwa wektory niezerowe nazywamy p r z e c i w n y m i, jeżeli są równoległe, są równej długości i mają zwroty przeciwne. Przykładem wektorów przeciwnych są wektory $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$. Wektor przeciwny do $\overline{AB}$ oznaczamy też przez $-\overline{AB}$.



Rys. 10

R ó ż n i c ę w e k t o r ó w $\bar{a}$ i $\bar{b}$ określamy jako sumę wektora $\bar{a}$ i wektora przeciwnego do $\bar{b}$ tj. wektora $-\bar{b}$ (rys.10). Różnicę wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ oznaczamy przez $\bar{a} - \bar{b}$.

6. <u>Mnożenie wektora przez liczbę.</u>

Jeżeli dany jest wektor niezerowy $\bar{a}$ i liczba rzeczywista m, to przez m $\bar{a}$ oznaczamy nowy wektor, którego

1^{o} długość wynosi $|m||\bar{a}|$,

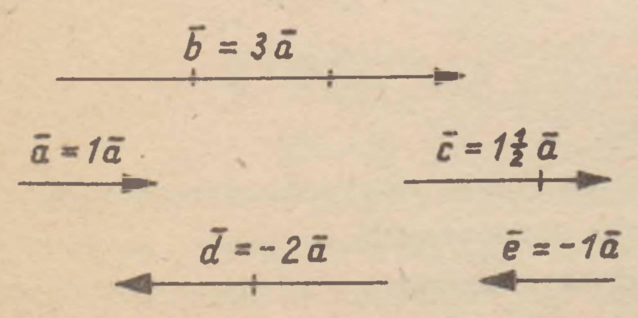
2^{o} kierunek jest ten sam co wektora $\bar{a}$,

3^{o} zwrot jest ten sam co $\bar{a}$, jeżeli $m > o$;

zwrot jest przeciwny do zwrotu $\bar{a}$, jeżeli $m < o$.

Jeżeli m = o lub $\bar{a}$ jest wektorem zerowym, to wektor m $\bar{a}$ jest wektorem zerowym.

Z określenia mnożenia wektora przez liczbę wynika, że jeżeli dany jest zbiór wektorów równoległych $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$..., to wektory te możemy przedstawić jako iloczyny odpowiednio dobranego czynnika liczbowego i jednego spośród wektorów danych (rys. 11). Mianowicie, jeżeli dane wektory równoległe chcemy wyrazić np. przy pomocy wektora $\bar{a}$ w postaci m $\bar{a}$, to dla wektorów o zwrocie zgodnym ze zwrotem wektora $\bar{a}$ należy przyjąć jako czynniki liczbowe m długości tych wektorów, mierzonych odcinkiem a jako

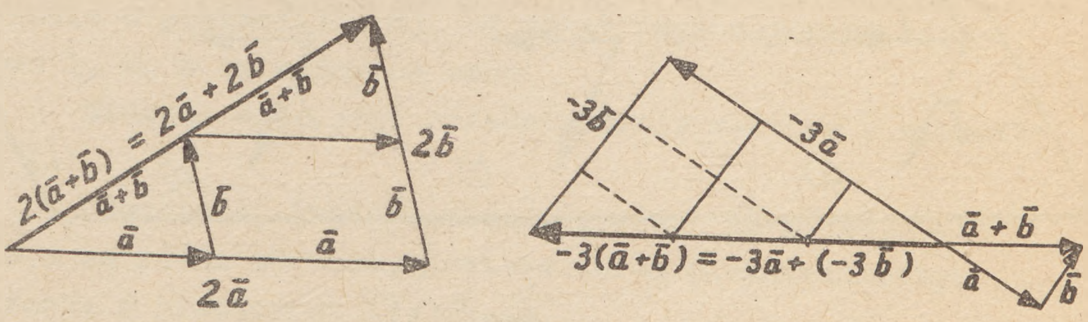


Rys.11

jednostką długości. Dla wektorów o zwrocie przeciwnym do wektora $\bar{a}$ należy przyjąć jako czynniki m liczby przeciwne ich długościom; dla wektorów zerowych - liczbę zero.

Z definicji mnożenia wektora przez liczbę wynikają natychmiast następujące prawa:

$$m (n\bar{a}) = (m n) \bar{a}$$
$$(m + n) \bar{a} = m \bar{a} + n \bar{a}$$
$$m (\bar{a} + \bar{b}) = m \bar{a} + m \bar{b} \quad \text{(rys.12)}$$



Rys. 12

7. Rozkład wektora.

Wektorami komplanarnymi lub współpłaszczyznowymi nazywamy wektory równoległe do jednej płaszczyzny.

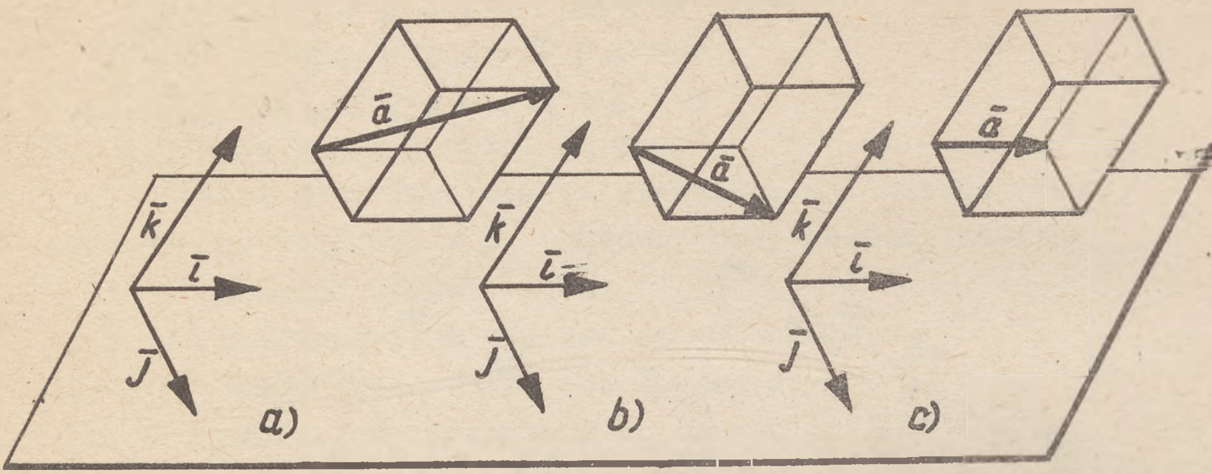
Jeżeli wektory są komplanarne, to przesunięte równolegle do wspólnego punktu zaczepienia znajdą się w jednej płaszczyźnie.

Każde dwa wektory są zawsze komplanarne.

Wektory, które nie są równoległe do jednej płaszczyzny, nazywamy wektorami niekomplanarnymi.

Jeżeli dane są trzy wektory niekomplanarne $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, to czwarty wektor niezerowy $\bar{a}$ może względem wektorów $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ zajmować jedno z trzech następujących położeń:

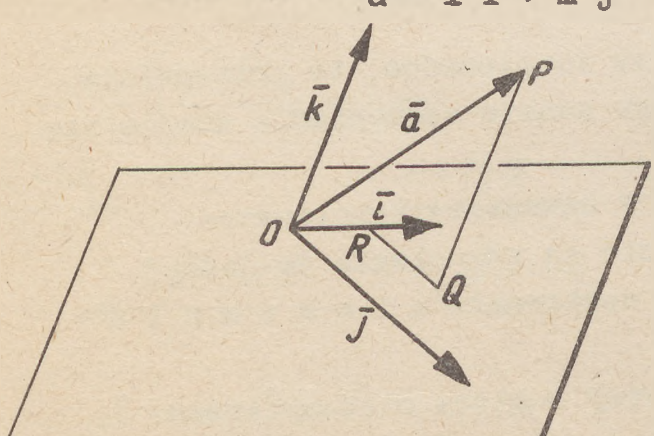
1) nie jest komplanarny z żadną parą $\overline{ij}$, $\overline{jk}$, $\overline{ki}$ (rys. 13 a)
2) jest komplanarny (równoległy) z jedną parą $\overline{ij}$, $\overline{jk}$, $\overline{ki}$ (rys. 13 b)
3) jest kolinearny (równoległy) z jednym z wektorów $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (rys. 13 c)



Rys. 13

1) Niech wektor $\bar{a}$ będzie niekomplanarny z żadną z płaszczyzn określonych wektorami $\overline{ij}$, $\overline{jk}$, $\overline{ki}$. Wykażemy, że w tym wypadku istnieje układ 3 liczb l,m,n różnych od zera i to tylko jeden, że

$$\bar{a} = l\,\bar{i} + m\,\bar{j} + n\,\bar{k} \qquad (1)$$



Rys. 14

Celem przeprowadzenia dowodu przesuwamy równolegle wektory $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ i $\bar{a}$ do wspólnego punktu zaczepienia O (rys.14). Przez punkt P, t.zn.przez koniec wektora $\bar{a}$, prowadzimy równo-

ległą do wektora $\bar{k}$ i jej punkt przecięcia z płaszczyzną wektorów $\bar{i}$ $\bar{j}$ oznaczamy przez Q .[1)]
Następnie przez punkt Q prowadzimy równoległą do wektora $\bar{j}$ i jej punkt przecięcia z wektorem $\bar{i}$ lub jego przedłużeniem oznaczamy przez R.[2)]

Wektor $\bar{a}$ jest sumą 3 wektorów niezerowych $\overline{OR}$, $\overline{RQ}$, $\overline{QP}$.

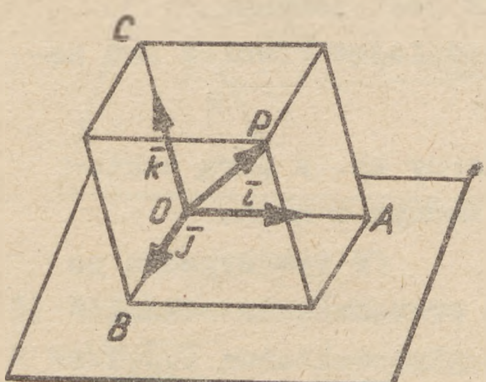
Mamy więc, że

$$\bar{a} = \overline{OR} + \overline{RQ} + \overline{QP}$$

Wektory, na które rozłożył się wektor $\bar{a}$, są odpowiednio równoległe do wektorów $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ i dają się wobec tego wyrazić w postaci $l\bar{i}$, $m\bar{j}$, $n\bar{k}$, przy czym czynniki liczbowe l, m, n są różne od zera

Słuszne więc jest przedstawienie wektora $\bar{a}$ w postaci (1).

Odwrotnie, każdy wektor w postaci $l\bar{i}+m\bar{j}+n\bar{k}$, gdzie l,m,n są różne od zera, jest wektorem niekomplanarnym z żadną z płaszczyzn $\bar{i}\bar{j}$, $\bar{j}\bar{k}$, $\bar{k}\bar{i}$.



Rys. 15

Istotnie, wektor $l\bar{i}=\overline{OA}$, $m\bar{j}=\overline{OB}$, $n\bar{k}=\overline{OC}$, gdzie punkty A, B, C należą do prostych pokrywających się odpowiednio z wektorami $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (rys. 15). Tworząc sumę wektorów $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ otrzymamy wektor $\overline{OP}$, który jako przekątna równoległościanu nie jest komplanarny z żadną

---

1) Proste przetnie płaszczyznę $\bar{i}\bar{j}$, bo jeśli jest równoległą do $\bar{k}$, to jest do płaszczyzny $\bar{i}\bar{j}$ nierównoległą.

2) Prosta QR przetnie wektor $\bar{i}$ lub jego przedłużenie, jeżeli bowiem jest równoległą do wektora $\bar{j}$, to jest do wektora $\bar{i}$ nierównoległą.

z jego ścian, a więc jest niekomplanarny z płaszczyznami $\overline{ij}$, $\overline{jk}$, $\overline{ki}$.

Układ 3 wektorów niekomplanarnych $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ przy pomocy których wyraziliśmy wektor $\bar{a}$ nazywamy układem w e k t o r ó w   p o d s t a w o w y c h lub b a z ą przestrzeni trójwymiarowej.

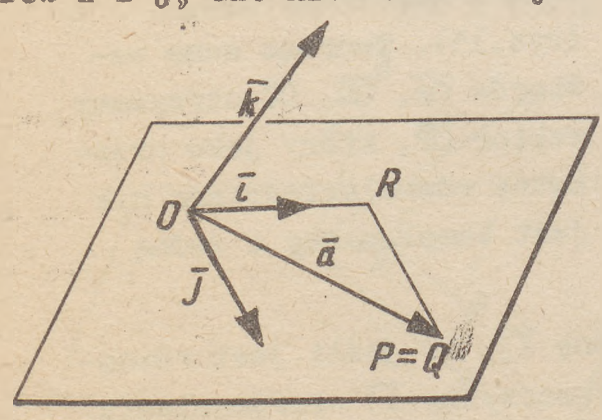
Wektory $\overline{OR} = l\bar{i}$, $\overline{RQ} = m\bar{j}$, $\overline{QP} = n\bar{k}$ (rys.14), czyli składniki na które rozłożył się wektor $\bar{a}$, nazywamy s k ł a d o w y m i   w e k t o r o w y m i wektora $\bar{a}$, uporządkowaną trójką liczb l, m, n - s k ł a d o w y m i   s k a l a r n y m i lub krótko s k ł a d o w y m i x) lub m i e r a m i składowych wektorowych lub też w s p ó ł r z ę d n y m i wektora $\bar{a}$ w bazie $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ lub układzie wektorów podstawowych $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$.

Dla zaznaczenia, że wektor $\bar{a}$ ma składowe (lub współrzędne) l,m,n używamy symbolu $\bar{a}\,\{l,m,n\}$

Należy jeszcze wykazać, że przedstawienie wektora $\bar{a}$ w postaci (1) w bazie $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ jest jedyne.

Wykażemy to później, uwzględniając również dwa następne wypadki.

2) Niech wektor $\bar{a}$ będzie komplanarny np. z parą wektorów $\bar{i}$ i $\bar{j}$, ale nie kolinearny z żadnym z nich.



Rys. 16

W tym wypadku po przesunięciu równoległym wektorów $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ i $\bar{a}$ do wspólnego punktu zaczepienia O (rys.16) wektor $\bar{a}$ znajdzie się w płaszczyźnie wektorów $\bar{i}$ i $\bar{j}$, punkt P pokryje się z punktem Q i wektor $\overline{QP}$ staje się

x) Terminu "składowa" używamy więc w dwóch znaczeniach, w wypadkach więc gdy termin ten oznaczać będzie wektor będziemy wyraźnie mówić "składowa wektorowa".

wektorem zerowym.

Wektor $\bar{a}$ możemy wyrazić w postaci

$$\bar{a} = l\bar{i} + m\bar{j} + o \cdot \bar{k}$$

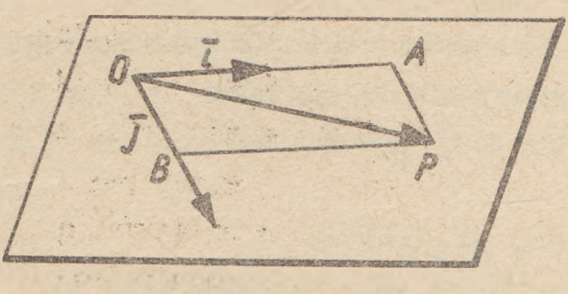
lub

$$\bar{a} = l\bar{i} + m\bar{j} \qquad (2)$$

Wektor $\bar{a}$ ma więc w bazie przestrzeni trójwymiarowej $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ składowe $l \neq 0$, $m \neq 0$, $n = 0$, a w bazie przestrzeni dwuwymiarowej $\bar{i}$, $\bar{j}$ - składowe (lub współrzędne) l,m, co notujemy symbolem $\bar{a}\{l,m\}$.

Każdy wektor $\bar{a}$ komplanarny z wektorami $\bar{i}$ i $\bar{j}$ możemy więc zbudować w sposób określony związkiem (2) pod warunkiem, że wektory $\bar{i}$ i $\bar{j}$ jako wektory podstawowe nie są kolinearne.

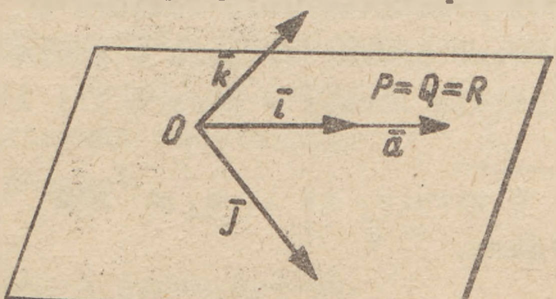
Odwrotnie, jeżeli l,m są dowolnymi liczbami różnymi od zera, to wektor $l\bar{i} + m\bar{j}$ jest wektorem komplanarnym z wektorami $\bar{i}$ i $\bar{j}$ i do żadnego z nich nierównoległym. Dowód przebiega podobnie jak w przypadku 1) z tą różnicą, że wektor $\overline{OP}$ jest teraz przekątną równoległoboku (rys.17) o bokach OA i OB, nie jest więc kolinearny z żadnym z boków.



Rys. 17

3) Niech wektor $\bar{a}$ będzie wektorem kolinearnym z jednym z wektorów podstawowych np. z wektorem $\bar{i}$.

Po równoległym przesunięciu wektorów $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ i $\bar{a}$ do wspólnego punktu zaczepienia O (rys. 18) wektor $\bar{a}$ pokryje się z prostą do której należy wektor $\bar{i}$, punkty P,Q,R pokryją się ze sobą, wektory $\overline{QP}$, $\overline{RQ}$ stają się wektorami zerowymi.



Rys. 18

Wektor $\bar{a}$ możemy wyrazić:

1) w bazie $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ w postaci

$$\bar{a} = l\bar{i} + 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k} \quad (l \neq 0)$$

2) w bazie $\bar{i},\bar{j}$ tj. w bazie przestrzeni dwuwymiarowej w postaci

$$\bar{a} = l\bar{i} + 0 \cdot \bar{j}$$

3) w bazie przestrzeni jednowymiarowej $\bar{i}$ w postaci

$$\bar{a} = l\bar{i}$$

Wektor $\bar{i}$ jako baza przestrzeni jednowymiarowej winien być wektorem niezerowym.
Wektor $\bar{a}$ w tym przypadku ma w układzie wektorów podstawowych $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ współrzędne $l \neq 0$, $m = 0$, $n = 0$, co notujemy symbolem $\bar{a}\{l, 0, 0\}$, w układzie wektorów, podstawowych $\bar{i},\bar{j}$ - współrzędne $l \neq 0$, $m = 0$, co notujemy symbolem $\bar{a}\{l, 0\}$ i przy wektorze podstawowym $\bar{i}$ - współrzędną l, co oznaczamy symbolem $\bar{a}\{l\}$

Wykazaliśmy, że w układzie wektorów podstawowych $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ wektor $\bar{a}$ można przedstawić w postaci

$$\bar{a} = l\,\bar{i} + m\,\bar{j} + n\,\bar{k}, \qquad (1)$$

gdzie

$$l^2 + m^2 + n^2 > 0^{1)}$$

Należy jeszcze wykazać, że to przedstawienie wektora $\bar{a}$ w bazie $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ jest jedyne t.zn., że nie ma innej trójki liczb l', m', n' takiej, by również

$$\bar{a} = l'\,\bar{i} + m'\,\bar{j} + n'\,\bar{k} \qquad (2)$$

Przypuśćmy, że oprócz przedstawienia wektora $\bar{a}$ w postaci (1) istnieje jeszcze przedstawienie w postaci (2), przy czym nie wszystkie liczby w parach l i l',

---

1) warunek $l^2 + m^2 + n^2 > 0$ wyraża, że l, m, n nie są jednocześnie równe zeru.

m i m', n i n' są równe t.zn. że zachodzi przynajmniej jedna z nierówności:

$$l \neq l', \quad m \neq m', \quad n \neq n' \qquad (3)$$

Z porównania (1) i (2) mamy

$$l\bar{i} + m\bar{j} + n\bar{k} = l'\bar{i} + m'\bar{j} + n'\bar{k},$$

a dalej

$$(l-l')\bar{i} + (m-m')\bar{j} + (n-n')\bar{k} = 0 \qquad (4)$$

Jeżeli zachodzą wszystkie trzy nierówności (3), to dzieląc np. przez $l - l' \neq 0$ mamy:

$$\bar{i} = \frac{m' - m}{l - l'}\bar{j} + \frac{n' - n}{l - l'}\bar{k}$$

Na podstawie jednak rozważań poprzednich (w wypadku 2) związek ten wyraża, że wektor $\bar{i}$ jest komplanarny z wektorami $\bar{j}$ i $\bar{k}$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem $l - l' = 0$ i wobec tego

$$l = l'$$

Dzieląc równość (4) przez $m - m' \neq 0$, a następnie przez $n - n' \neq 0$ dochodzimy również do związków sprzecznych z założeniem. Zatem $m - m' = 0$ i $n - n' = 0$ czyli

$$m = m' \quad \text{i} \quad n = n'$$

W przypadkach, gdy spełnione byłyby dwie spośród nierówności, a trzecia nie lub tylko jedna, a dwie pozostałe nie, tok rozumowania jest podobny.

Twierdzenie o jednoznacznym sposobie przedstawiania wektora przy pomocy wektorów podstawowych jest również słuszne dla przestrzeni dwuwymiarowej na płaszczyźnie i liniowej (na prostej).

Jeżeli mianowicie wektor $\bar{a}$ jest komplanarny z wektorami podstawowymi $\bar{i}$ i $\bar{j}$, to można go wyrazić w postaci

$$\bar{a} = l\,\bar{i} + m\,\bar{j}$$

tylko w jeden sposób.

Jeżeli wektor $\bar{a}$ jest kolinearny z wektorem $\bar{i}$, to istnieje tylko jedna liczba l taka, że

$$\bar{a} = l\,\bar{i}.$$

8. <u>Twierdzenie o składowych wektorów.</u>

1) Składowe (współrzędne) sumy dwóch wektorów równają się sumie składowych (współrzędnych) tych wektorów.

2) Składowe iloczynu wektora przez liczbę równają się iloczynowi składowych tego wektora przez liczbę.

Dowody tych twierdzeń przeprowadzimy dla przestrzeni trójwymiarowej.

1) W układzie wektorów podstawowych $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ dane są wektory $\bar{a}\{l_1, m_1, n_1\}$ i $\bar{b}\{l_2, m_2, n_2\}$. Z określenia współrzędnych wektora wynika

$$\bar{a} = l_1\,\bar{i} + m_1\,\bar{j} + n_1\,\bar{k},$$

$$\bar{b} = l_2\,\bar{i} + m_2\,\bar{j} + n_2\,\bar{k}.$$

Tworząc sumę wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$, otrzymujemy

$$\bar{a} + \bar{b} = l_1\,\bar{i} + m_1\,\bar{j} + n_1\,\bar{k} + l_2\,\bar{i} + m_2\,\bar{j} + n_2\,\bar{k},$$

co na podstawie poznanych praw (str. 7) możemy napisać w postaci

$$\bar{a} + \bar{b} = (l_1 + l_2)\,\bar{i} + (m_1 + m_2)\,\bar{j} + (n_1 + n_2)\,\bar{k}$$

Z postaci tej wynika, że liczby

$$l_1 + l_2,\ m_1 + m_2,\ n_1 + n_2$$

są składowymi wektora $\bar{a} + \bar{b}$ w bazie $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

2) Jeżeli dany jest wektor $\bar{a}\{l, m, n\}$ i dowolna liczba s, to możemy napisać, że

$$\bar{a} = l\,\bar{i} + m\,\bar{j} + n\,\bar{k}$$

i $$s\cdot\bar{a} = sl\,\bar{i} + sm\,\bar{j} + sn\,\bar{k},$$

skąd bezpośrednio wynika, że liczby

$$sl,\ sm\ ,\ sn$$

są składowymi wektora $s\,\bar{a}$.

Twierdzenia 1) i 2) są szczególnymi przypadkami ogólniejszego twierdzenia, mianowicie :

Składowe kombinacji liniowej wektorów równają się kombinacji liniowej składowych tych wektorów.

Kombinacją np. liniową 3 wektorów $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ nazywamy wektor $\bar{w} = r\,\bar{a} + s\,\bar{b} + t\,\bar{c}$, gdzie r, s, t są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli więc dane są wektory

$$\bar{a}\left\{l_1, m_1, n_1\right\},\quad \bar{b}\left\{l_2, m_2, n_2\right\},\quad \bar{c}\left\{l_3, m_3, n_3\right\},$$

to składowymi wektora $\bar{w}$ są liczby :

$$\begin{aligned} &r\,l_1 + s\,l_2 + t\,l_3, \\ &r\,m_1 + s\,m_2 + t\,m_3, \\ &r\,n_1 + s\,n_2 + t\,n_3, \end{aligned} \tag{5}$$

o czym łatwo można się przekonać.

Bezpośrednim wnioskiem z tego twierdzenia jest twierdzenie:

Składowe różnicy dwóch wektorów równają się różnicy ich współrzędnych.

§ 2. KĄTY

1. Kąt zwykły, kąty wektorów i osi.

Wiemy z geometrii elementarnej, że dwie różne półproste l_1 i l_2, mające wspólny początek O, dzielą płaszczyznę na dwa obszary, z których każdy nazywa się kątem (zwykłym).

Również, gdy półproste l_1 i l_2, mające wspólny początek, pokrywają się, to tworzą dwa kąty, mianowicie kąt zerowy i kąt pełny.

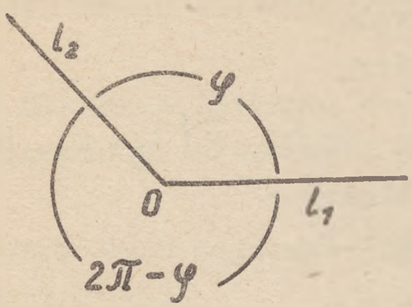
Miary kątów powszechnie określa się przy użyciu jednostki stopniowej lub łukowej (w radianach).

Miarą łukową kąta pełnego jest 2π, półpełnego π, zerowego - zero.

Dwie półproste o wspólnym początku tworzą 2 kąty; jeżeli φ jest miarą jednego kąta, to miara drugiego wynosi $2\pi - \varphi$ (rys.19). W każdym razie miara φ j e d n e g o z dwóch kątów utworzonych przez 2 półproste spełnia zawsze nierówność

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

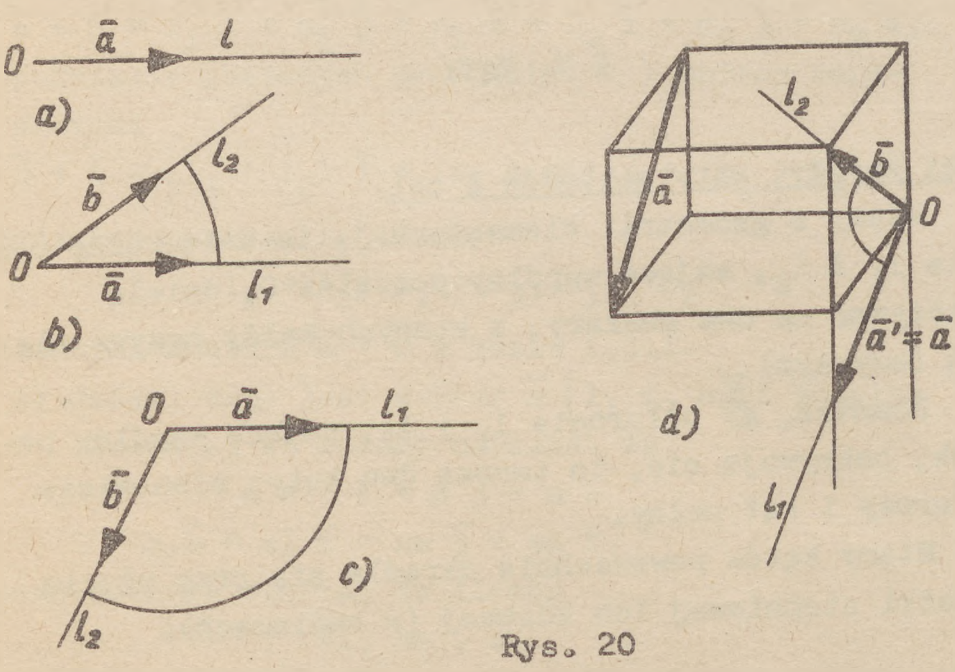
zawsze bowiem jeden z dwóch kątów mieści się w półpłaszczyźnie.



Rys. 19

K ą t m i ę d z y w e k t o r a m i i o s i a m i.

Każdy wektor niezerowy określa półprostą mianowicie półprostą, która pokrywa się z tym wektomrem i posiada ten sam początek (rys. 20 a).



Rys. 20

1) Jeżeli dwa wektory mają wspólny początek, to kątem między tymi wektorami nazywamy kąt między pół-

prostymi określonymi przez te wektory, którego miara φ spełnia nierówność:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

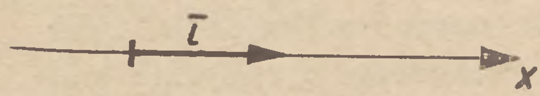
t.zn. kąt mieszczący (rys. 20 b, c) się w półpłaszczyźnie.

2) Jeżeli dwa wektory nie mają wspólnego początku, to kątem między tymi wektorami nazywamy kąt uzyskany przez przesunięcie równoległe tych wektorów do wspólnego punktu zaczepienia (rys. 20 d)

P o j ę c i e o s i.

Jeżeli dany jest wektor niezerowy $\bar{\imath}$, leżący na prostej x, to wszystkie wektory leżące na prostej x mają zwroty zgodne ze zwrotem wektora $\bar{\imath}$ lub zwroty przeciwne.

Jeżeli zwrot wektora $\bar{\imath}$ przyjmiemy jako dodatni, to prostą x z tak określonym zwrotem dodatnim nazywamy o s i ą. Mówiąc, że wektor $\bar{\imath}$ określa oś, rozumiemy przez to prostą, która pokrywa się z wektorem $\bar{\imath}$ i posiada jego zwrot jako zwrot dodatni. Na rysunku oś oznaczamy, umieszczając strzałkę wskazującą dodatni zwrot prostej (rys. 21).

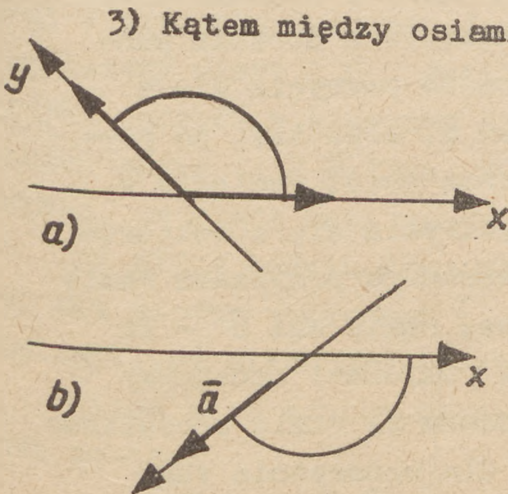


Rys. 21

3) Kątem między osiami nazywamy kąt między wektorami mającymi kierunek i zwrot tych osi (rys. 22a).

4) Kątem między wektorem i osią nazywamy kąt między tą osią i osią określoną tym wektorem (rys. 22 b).

Kąty powyżej określone nazywamy kątami zwykłymi lub n i e z o r i e n t o w a n y m i, krótko ką-



Rys. 22

tami.

Kąt zwykły jest wyznaczony, jeżeli dana jest wartość $\cos\varphi$, równanie bowiem trygonometryczne

$$\cos\varphi = m,$$

gdy $-1 \leqslant m \leqslant 1$ posiada tylko jedno rozwiązanie spełniające warunek

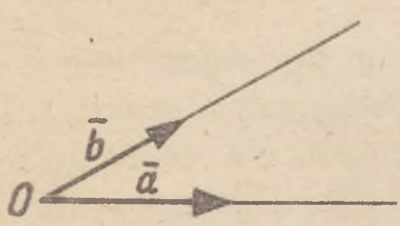
$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

Kąty i ich miary oznaczamy bądź literami alfabetu greckiego, bądź symbolami postaci $\sphericalangle(a,b)$, $\sphericalangle(x,y)$, przy czym litery w nawiasach oznaczają ramiona kąta. Symbole $\sphericalangle(a,b)$ i $\sphericalangle(b,a)$, jeżeli rozważamy kąty niezorientowane, oznaczają ten sam kąt.

2. Kąt zorientowany.

Podobnie jak w przypadku odcinka przez wyróżnienie początku i końca odcinka otrzymaliśmy pojęcie wektora (odcinka zorientowanego), tak również w przypadku kąta przez wyróżnienie ramienia początkowego i ramienia końcowego możemy otrzymać pojęcie kąta zorientowanego.

Niech będzie dany kąt między wektorami $\bar{a}$ i $\bar{b}$ o wspólnym początku w punkcie O (rys.23). Możemy uważać, że kąt ten powstał przez obrót wektora $\bar{a}$ dookoła punktu O aż do pokrycia się z wektorem $\bar{b}$, albo też, że powstał przez obrót ramienia $\bar{b}$ aż do pokrycia się z wektorem $\bar{a}$. W pierwszym przypadku ramię $\bar{a}$ (ruchome) uważamy za początkowe, ramię zaś $\bar{b}$ - za końcowe i kąt z tak wyróżnionymi ramionami oznaczymy symbolem $\sphericalangle(\widehat{a,b})$. W drugim przypadku za ramię początkowe uważamy $\bar{b}$, za ramię końcowe $\bar{a}$ i dla oznaczenia tego kąta użyjemy symbolu $\sphericalangle(\widehat{b,a})$. Kąty $\sphericalangle(\widehat{a,b})$ i $\sphericalangle(\widehat{b,a})$ są więc różne, różnią się bowiem porządkiem ramion, po-



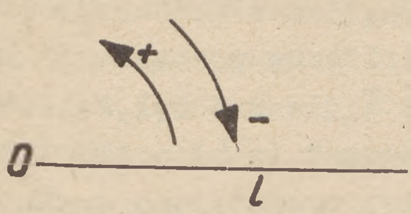
Rys. 23

dobnie jak różne są wektory $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$.

Kąt, którego jedno z ramion wyróżniono jako początkowe, a drugie jako końcowe, nazywamy *kątem zorientowanym*.

Miary kąta zorientowanego.

Kąt w nowym ujęciu uważamy za wynik obrotu półprostej na płaszczyźnie. Chcąc mówić o mierze kąta zorientowanego, musimy ustalić kierunek obrotu dodatniego i ujemnego na płaszczyźnie. Półprosta l (rys.24) może obracać się na płaszczyźnie w dwu przeciwnych kierunkach - zgodnie z obrotem wskazówek zegara lub przeciwnie. Jeżeli jeden z tych kierunków obrotu przyjmiemy jako dodatni, a drugi jako ujemny, to płaszczyznę z ustalonym dodatnim kierunkiem obrotu nazywamy *płaszczyzną zorientowaną*. Kierunek dodatni obrotu płaszczyzny zorientowanej zaznaczamy na rysunku łukiem, opatrzonym strzałką wskazującą kierunek dodatni obiegu.



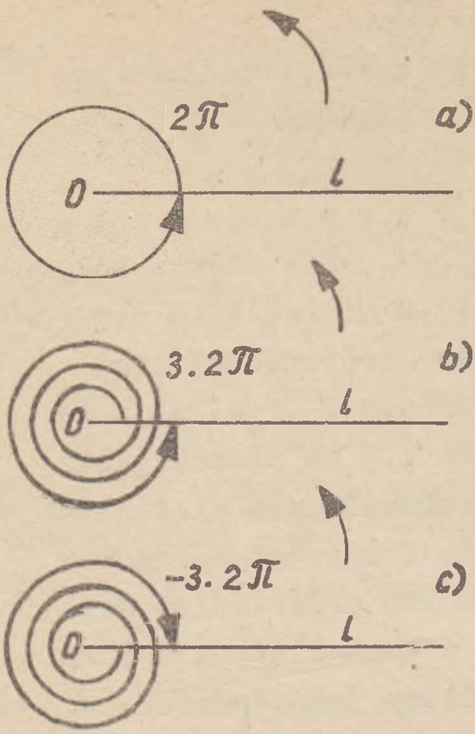
Rys. 24

1) Niech będzie dana płaszczyzna zorientowana oraz półprosta l. Jeżeli półprostą l wykona jeden pełny obrót w kierunku dodatnim (rys. 25 a), to kątowi temu przypiszemy miarę 2π. Jeżeli półprostą l wykona k pełnych obrotów w kierunku dodatnim, to kątowi przypiszemy miarę $k \cdot 2\pi$ (rys. 25 b), jeżeli w kierunku ujemnym, to miara kąta wynosi $-k \cdot 2\pi$ (rys.25 c).

2) Niech będzie dana płaszczyzna zorientowana oraz kąt między wektorami $\overline{a}$ i $\overline{b}$, którego miarą jako kąta zwykłego niech będzie liczba φ (rys.26).

Miarą kąta zorientowanego $(\widehat{a,b})$ jest każda z liczb postaci

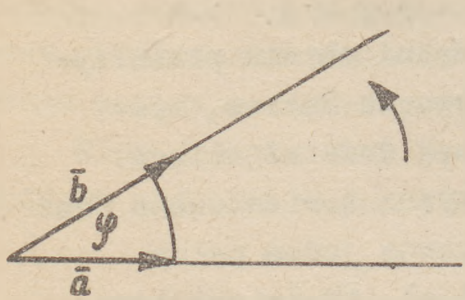
$$\varphi + 2k\pi, \quad \text{dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (1)$$



Rys. 25

Istotnie, kąt $(\widehat{ab})$ możemy uważać jako wynik obrotu ramienia $\bar{a}$ o kąt φ w kierunku dodatnim lub też jako wynik obrotu ramienia $\bar{a}$ składającego się z k pełnych obrotów oraz obrotu o kąt φ.

Miarami kąta $(\widehat{ab})$ będą liczby dodatnie φ, $\varphi+2\pi$, $\varphi+2\cdot2\pi$, $\varphi+3\cdot2\pi$, ... czyli liczby postaci $\varphi+2k\pi$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ Kąt jednak $(\widehat{ab})$ możemy również uważać jako wynik obrotu ramienia $\bar{a}$ w kierunku ujemnym. Jeżeli przy obrocie w tym kierunku ramię $\bar{a}$ pierwszy raz pokryje się z ramieniem $\bar{b}$, to miarą tego kąta jest $-2\pi+\varphi$, jeżeli ramię $\bar{a}$ pokryje ramię $\bar{b}$ za k-tym razem, to kątowi przypiszemy miarę $-2k\pi+\varphi$.



Rys. 26

Miarami kąta $(\widehat{ab})$ przy obrocie ramienia ruchomego (początkowego) w kierunku ujemnym są liczby ujemne

$$-2\pi+\varphi, \quad 2(-2\pi)+\varphi, \quad 3(-2\pi)+\varphi, \ldots,$$

czyli liczby postaci

$$\varphi+2k\pi \quad \text{dla } k = -1, -2, \ldots$$

Uwzględniając miary uzyskane przy obrocie ramienia początkowego w kierunku dodatnim i w kierunku ujemnym otrzymamy liczby postaci (1). Kąt zorientowany posiada więc nieskończenie wiele miar dodatnich i ujemnych różniących się o całkowitą wielokrotność liczby 2π.

Miarę kąta $(\widehat{a\,b})$ będziemy oznaczać również symbolem $\sphericalangle\,(\widehat{a\,b})$.

Miarami kąta $(\widehat{ba})$ są liczby

$$-\varphi + 2k\pi \quad \text{dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

a więc liczby przeciwne do miar kąta $(\widehat{a\,b})$.

Kąt zorientowany nie jest jednoznacznie określony wartością cosinusa. Np., jeżeli

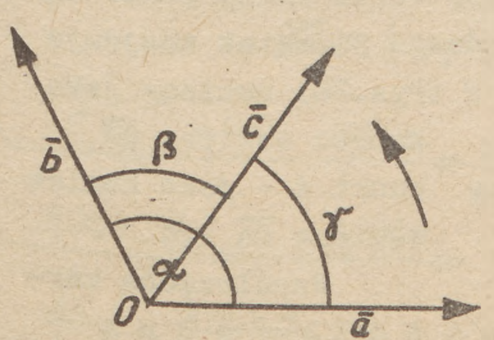
$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ to } \varphi = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

i wobec tego cos wyznacza nam dwa kąty: jeden o miarach $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ i drugi o miarach $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$; jeżeli więc pierwszy oznaczymy przez $\sphericalangle\,(\widehat{l_1, l_2})$, to drugi możemy oznaczyć przez $\sphericalangle\,(\widehat{l_2, l_1})$. Natomiast kąt zorientowany jest jednoznacznie określony, jeżeli dana jest jego wartość cosinusa i sinusa. I tak, jeżeli $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$, to $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, czyli w tym przypadku, $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ określają jednoznacznie jeden spośród dwóch poprzednich kątów mianowicie $\sphericalangle\,(\widehat{l_2, l_1})$.

Jeżeli na płaszczyźnie zorientowanej ze wspólnego punktu O wyprowadzimy trzy wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, to dowolne miary kątów $\sphericalangle\,(\widehat{a,b})$, $\sphericalangle\,(\widehat{b,c})$, $\sphericalangle\,(\widehat{c,a})$ spełniają związek

$$\sphericalangle\,(\widehat{a,b}) + \sphericalangle\,(\widehat{b,c}) + \sphericalangle\,(\widehat{c,a}) = 2k\pi, \qquad (2)$$

gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



Rys. 27

Istotnie, jeżeli wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ zajmują położenie jak na rys. 27 i miarami kątów $(\bar{a},\bar{b})$, $(\bar{b},\bar{c})$, $(\bar{c},\bar{a})$ jako kątów zwykłych są liczby α, β, γ, to

$$\sphericalangle\,(\widehat{a,b}) = \alpha + 2k_1\pi$$

$$\sphericalangle\,(\widehat{b,c}) = -\beta + 2k_2\pi$$

$$\sphericalangle\,(\widehat{c,a}) = -\gamma + 2k_3\pi$$

Mamy więc

$$\measuredangle(\widehat{a,b})+\measuredangle(\widehat{b,c})+\measuredangle(\widehat{c,a})=\alpha-\beta-\gamma+2(k_1+k_2+k_3)\pi\ ,$$

ale

$$\gamma=\alpha\ \dot{-}\ \beta\ ,$$

wobec tego

$$\measuredangle(\widehat{a,b}) + (\widehat{b,c}) + (\widehat{c,a}) = 2(k_1 + k_2 + k_3)\pi$$

Oznaczając sumę $k_1 + k_2 + k_3$, która jest liczbą całkowitą przez k, otrzymamy związek (2).

Związek (2) można uogólnić na dowolną liczbę wektorów, leżących w jednej płaszczyźnie. Jeżeli wektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$ należą do jednej płaszczyzny zorientowanej, to

$$\measuredangle(\widehat{a_1,a_2})+\measuredangle(\widehat{a_2,a_3})+\ \ldots\ +\measuredangle(\widehat{a_{n-1},a_n})+\measuredangle(\widehat{a_n,a_1}) = 2k\pi \quad (3)$$

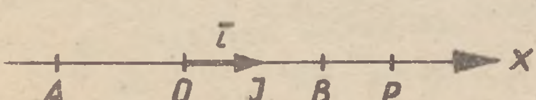
Związek ten pod nazwą t w i e r d z e n i a C h a s l e s'a x) bywa często stosowany w postaci

$$\measuredangle(\widehat{a_1,a_2})+\measuredangle(\widehat{a_2,a_3}) +\ \ldots\ +\measuredangle(\widehat{a_{n-1},a_n}) = \measuredangle(\widehat{a_1,a_n}) \quad (4)$$

§ 3. WSPÓŁRZĘDNE PUNKTU

1. Współrzędne punktu na prostej.

Mając daną oś x wraz z wektorem podstawowym $\bar{I}$, którego długość równa się jednostce długości, obieramy na niej stały punkt O. Możemy teraz każdy punkt osi uważać jako koniec wektora, którego początek znajduje się w punkcie O. A więc punkt P (rys.28) uważamy jako koniec wektora $\overline{OP}$, punkt A - jako koniec wektora $\overline{OA}$ itd.



Rys. 28

Współrzędną kartezjańską punktu lub krótko w s p ó ł r z ę d n ą p u n k t u P nazywamy współrzędną (składową) wektora, którego koniec znajduje się w punkcie P, a początek w punkcie O.

---
x) Czytaj: Szala.

Punkt P o współrzędnej x oznaczamy symbolem P (x).

Jeżeli więc dane są np. punkty $A(-1\frac{1}{2})$, $B(2)$, $C(x_o)$ to oznacza to, że

$$\overline{OA} = -1\frac{1}{2}\,\bar{i}$$
$$\overline{OB} = 2\,\bar{i}$$
$$\overline{OC} = x_o\,\bar{i}$$

Oś x nazywamy *osią współrzędnych*, punkt O - *początkiem współrzędnych*, wektor i - *wektorem jednostkowym* lub *wersorem*.

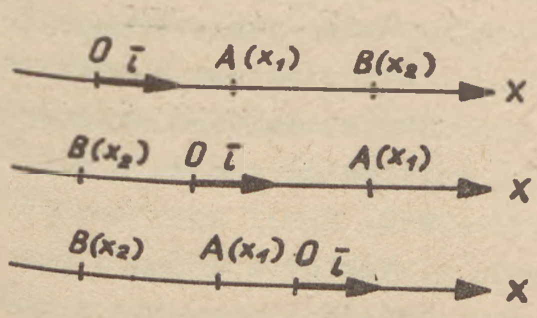
Punkt O dzieli oś x na dwie półproste. Punkty jednej półprostej mają współrzędne dodatnie, drugiej półprostej - ujemne, punkt O ma współrzędną zero.

Wprowadzając pojęcie współrzędnej punktu na osi, przypisaliśmy każdemu punktowi prostej x jedną liczbę rzeczywistą i odwrotnie, każdej liczbie rzeczywistej jeden punkt osi. Różnym punktom odpowiadają różne współrzędne, różnym liczbom - różne punkty.

2. Składowa wektora na osi współrzędnych.

Niech na osi współrzędnych leży wektor $\overline{AB}$, określony współrzędnymi punktów $A(x_1)$ i $B(x_2)$. Wykażemy, że składowa (współrzędna) wektora $\overline{AB}$ równa się różnicy współrzędnej punktu końcowego x_2 i punktu początkowego x_1, czyli że

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\,\bar{i} \tag{10}$$



Rys. 29

Dowód : Niezależnie od uporządkowania punktów O, A, B na osi x (rys. 29) mamy :

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB},$$

skąd

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA},$$

ale

$$\overline{OB} = x_2\bar{i},\quad \overline{OA} = x_1\bar{i},$$

więc

$$\overline{AB} = x_2\overline{i} - x_1\overline{i} = (x_2 - x_1)\overline{i}$$

3. Długość wektora na osi współrzednych.

Jeżeli wektor $\overline{AB}$ jest dany jak w zagadnieniu poprzednim, to jego długość wyraża się wzorem

$$|\overline{AB}| = |x_2 - x_1| \qquad (1)$$

Istotnie, jeżeli zwrot wektora $\overline{AB}$ jest zgodny ze zwrotem dodatnim osi, to jego współrzędna jest dodatnia i równa się długości wektora, czyli

$$|\overline{AB}| = x_2 - x_1$$

W przypadku, gdy zwrot wektora $\overline{AB}$ jest ujemny, to współrzędna jest też ujemna. Długość wektora równa się liczbie przeciwnej do współrzędnej t.zn.

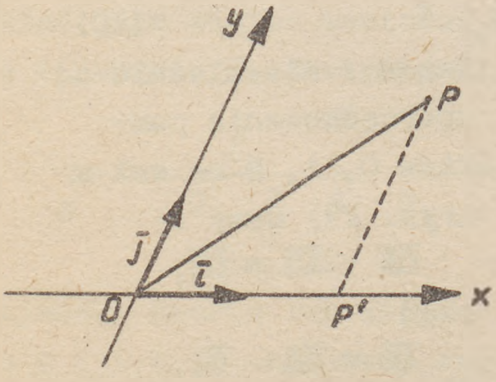
$$|\overline{AB}| = -(x_2 - x_1)$$

W obu więc przypadkach, niezależnie od zwrotu wektora $\overline{AB}$, długość wektora równa się bezwzględnej wartości współrzędnej, czyli że

$$|\overline{AB}| = |x_2 - x_1|$$

4. Współrzędne punktu na płaszczyźnie.

Niech będą dane na płaszczyźnie dwie przecinające się w punkcie O osi - oś x z wektorem jednostkowym $\overline{i}$, oś y z wektorem jednostkowym $\overline{j}$ oraz dowolny punkt P (rys.30).



Rys. 30

Każdy punkt P płaszczyzny możemy uważać za koniec wektora, którego początek znajduje się w O.

Wektor o końcu w punkcie P i początku w punkcie O będziemy nazywać promieniem wodzącym punktu P.

Jeżeli $P'P \parallel y$, to promień wodzący punktu P w myśl wyników poprzednich rozważań (str.11) wyraża się w bazie wektorów $\bar{i}, \bar{j}$ w postaci

$$\overline{OP} = l\,\bar{i} + m\,\bar{j},$$

gdzie $l\,\bar{i} = OP'$, $m\,\bar{j} = P'P$

Parę liczb l,m, czyli składowe (współrzędne) promienia wodzącego punktu P nazywamy kartezjańskimi współrzędnymi punktu, lub krótko - współrzędnymi punktu P w układzie Oxy.

Pierwszą z nich l nazywamy odciętą punktu P, drugą m - rzędną punktu P. Oś x nazywamy osią odciętych, oś y- osią rzędnych, układ dwóch osi x i y - układem osi współrzędnych lub krótko układem Oxy, punkt O - początkiem układu.

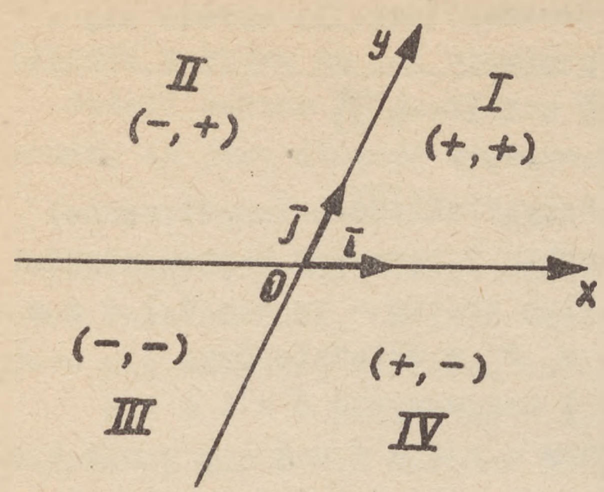
Punkt P o współrzędnych l, m oznaczamy symbolem P (l,m).

Jeżeli dane są np. punkty A (3,4), B(-3,5), $C(x_o,y_o)$ to znaczy to, że

$$\overline{OA} = 3\,\bar{i} + 4\,\bar{j},$$
$$\overline{OB} = -3\,\bar{i} + 5\,\bar{j},$$
$$\overline{OC} = x_o\bar{i} + y_o\bar{j},$$

Ze sposobu określenia współrzędnych punktu na płaszczyźnie wynika, że każdemu punktowi płaszczyzny układu Oxy odpowiada jedna para liczb x,y zwana współrzędnymi punktu i na odwrót każdej parze liczb x, y, uważanej za współrzędne punktu, odpowiada jeden punkt. Różnym punktom odpowiadają różne pary liczb, różnym parom liczb - różne punkty.

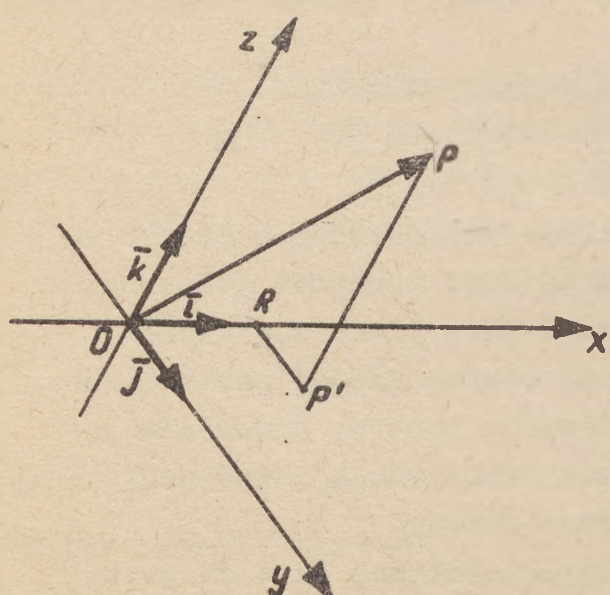
Osie układu dzielą płaszczyznę na 4 ćwiartki, które oznaczamy cyframi rzymskimi. Znaki współrzędnych punktów w poszczególnych ćwiartkach przedstawione są na rys. 31. Punkty leżące na osiach mają jedną współrzędną zero. Punkt O ma obie współrzędne równe zeru. W dalszych rozważaniach będziemy na ogół posługiwać się prostokątnym układem współrzędnych tj. układem, którego osie są do siebie prostopadłe.



Rys. 31

5. Współrzędne punktu w przestrzeni.

Dane są trzy osie x,y,z, przecinające się w punkcie O i nie leżące w jednej płaszczyźnie. Na osiach tych przyjmujemy odpowiednio wektory $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ jako wektory jednostkowe (rys.32).



Rys. 32

Każdy punkt P w przestrzeni, podobnie jak poprzednio na płaszczyźnie, możemy uważać za koniec wektora, którego początek znajduje się w punkcie O. Wektor taki będziemy nazywać p r o m i e n i e m w o d z ą c y m p u n k t u P. Wektor $\overline{OP}$ zgodnie z twierdzeniem (str.8) o rozkładzie wektora można przedstawić w postaci

$$\overline{OP} = l\,\overline{i} + m\,\overline{j} + n\,\overline{k},$$

gdzie

$$l\overline{i} = \overline{OR},\ m\overline{j} = \overline{RP'}\ ,\ n\overline{k} = \overline{P'P}.$$

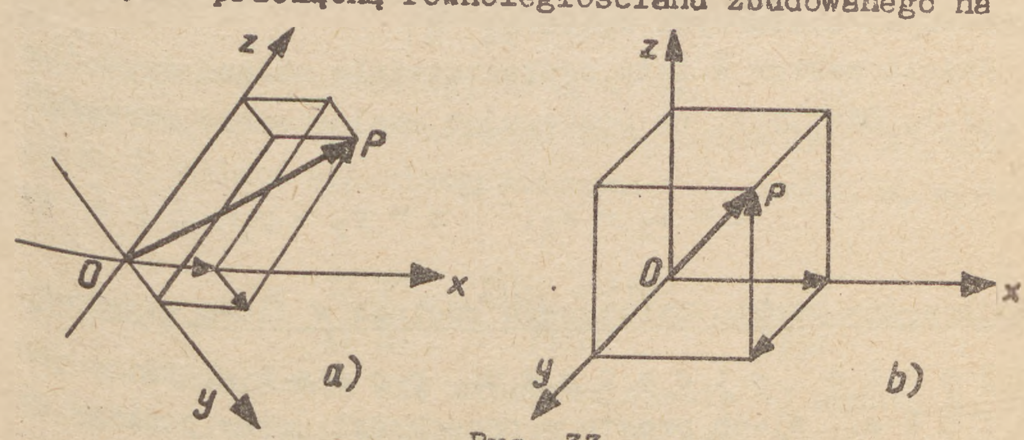
Układ trzech liczb l,m,n, które są składowymi (współrzędnymi) promienia wodzącego punktu P nazywamy. w s p ó ł r z ę d n y m i p u n k t u P w układzie Oxyz.

Punkt P o współrzędnych l,m,n oznaczamy symbolem P (l,m,n).

Osie x,y,z nazywamy osiami współrzędnych, punkt O - początkiem układu współrzędnych, płaszczyzny Oxy, Oyz, Ozx - p ł a s z c z y z n a m i u k ł a d u współrzędnych.

Płaszczyzny układu współrzędnych dzielą przestrzeń na osiem części.

Podobnie jak na płaszczyźnie będziemy również w przestrzeni trójwymiarowej posługiwać się przeważnie prostokątnym układem współrzędnych, to jest układem, którego osi są do siebie prostopadłe. Układy, których osi nie są do siebie prostopadłe nazywamy u k o ś n o-k ą t n y m i u k ł a d a m i współrzędnych.
Promień wodzący punktu P o współrzędnych różnych od zera jest przekątną równoległościanu zbudowanego na



Rys. 33

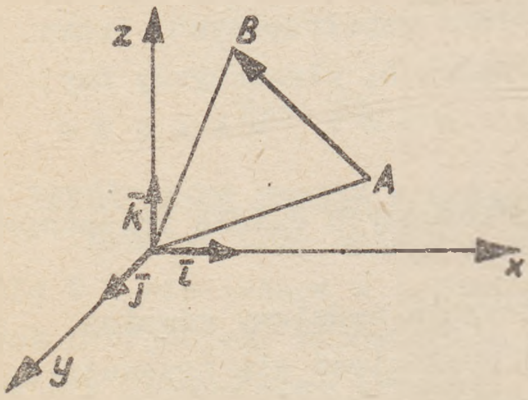
składowych wektorowych promienia wodzącego (rys.33a). W przypadku prostokątnego układu współrzędnych równoległościan staje się prostopadłościanem (rys. 33 b).

6. Składowe wektora w układzie współrzędnych.

W układzie Oxyz dany jest wektor $\bar{a}$ przez współrzędne początku wektora $A(x_1, y_1, z_1)$ i końca $B(x_2, y_2, z_2)$ (rys. 34).

Wykażemy, że składowymi (współrzędnymi) wektora $\bar{a}$ w układzie Oxyz są liczby:

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1$$



Rys. 34

Istotnie,

$$\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB},$$

skąd

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA},$$

ale

$$\overline{OB} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k},$$

$$\overline{OA} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k},$$

wobec tego

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\,\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\,\bar{k}$$

Zgodnie więc z określeniem składowych, liczby

$$x_2 - x_1, \; y_2 - y_1, \; z_2 - z_1$$

są składowymi skalarnymi wektora.

Jeżeli wektor $\bar{a}$ leży w płaszczyźnie układu Oxy i $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, to postępując analogicznie otrzymemy

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1$$

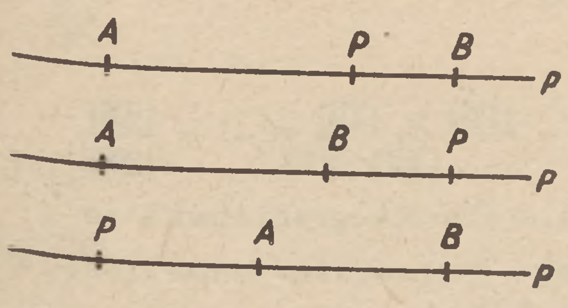
7. Współrzędne punktu dzielącego odcinek w danym stosunku.

1) P o j ę c i e s t o s u n k u p o d z i a ł u o d c i n k a. Niech prosta p przechodzi przez punkty

A i B. Wówczas, jeżeli punkt P jest dowolnym punktem prostej, różnym od B, mamy

$$\overline{AP} = \lambda\, \overline{PB}$$

Liczbę λ nazywamy **stosunkiem podziału odcinka** AB przez punkt P.
Liczba λ, zależnie od położenia punktu P na prostej, (rys.35) przyjmuje różne wartości.



Rys. 35

a) Jeżeli punkt P leży między punktami A i B, to zwroty wektorów $\overline{AP}$ i $\overline{PB}$ są zgodne i wobec tego $\lambda > 0$. W tym przypadku λ równa się ilorazowi długości wektorów $\overline{AP}$ i $\overline{PB}$ tj.

$$\lambda = \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|}$$

W szczególności, jeżeli P jest środkiem odcinka AB, to $\lambda = 1$.

b) Jeżeli punkt P leży poza odcinkiem AB po stronie punktu B, to wektory $\overline{AP}$ i $\overline{PB}$ mają zwroty przeciwne, więc $\lambda < 0$.
Korzystając, ze związków

$$\lambda = -\frac{|\overline{A\ P}|}{|\overline{P\ B}|} \quad \text{i} \quad |\overline{A\ P}| > |\overline{P\ B}|$$

możemy podać dokładniej, że $\lambda < -1$.
Chcąc zbadać w tym przypadku zachowanie się λ, gdy punkt P oddala się nieograniczenie od punktu B, wyrazimy λ w postaci

$$\lambda = -\frac{|\overline{A\ P}|}{|\overline{P\ B}|} = -\frac{|\overline{AB}| + |\overline{BP}|}{|\overline{PB}|} = -\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{PB}|} - 1.$$

Gdy punkt P oddala się nieograniczenie od punktu B, to stosunek długości wektorów $\overline{AB}$ i $\overline{PB}$ dąży do zera, λ więc rośnie do -1

c) Jeżeli punkt P leży poza odcinkiem AB po stronie punktu A, to λ jest również ujemne, ze związków jednak

$$\lambda = -\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} \quad \text{i} \quad |\overline{AP}| < |\overline{PB}|$$

wynika, że $-1 < \lambda < 0$

Z postaci

$$\lambda = -\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = -\frac{|\overline{PB}| - |\overline{AB}|}{|\overline{PB}|} = -1 + \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{PB}|}$$

wynika, że gdy punkt P oddala się nieograniczenie od punktu A, to λ maleje do -1

d) Jeżeli $P = A$, to $\lambda = 0$

e) Jeżeli $P = B$, to λ jest nieokreślone. Gdy P zbliża się do punktu B od strony punktu A (lewej) to λ dąży do $+\infty$, jeżeli zbliża się do punktu B od strony przeciwnej (prawej), to λ dąży do $-\infty$.

Każdemu więc położeniu punktu P na prostej, z wyjątkiem przypadku $P = B$, odpowiada jedna wartość λ i odwrotnie każdej wartości $\lambda \neq -1$ odpowiada jeden punkt na prostej P.

2) Współrzędne punktu, dzielącego odcinek w danym stosunku.

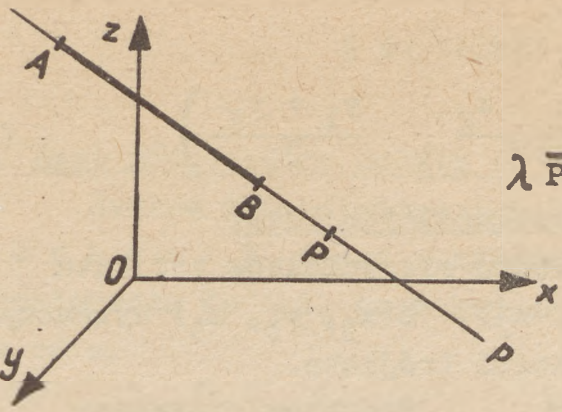
W układzie Oxyz dane są na prostej p dwa punkty $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ oraz punkt P dzielący odcinek AB w danym stosunku równym λ (rys.36). Mamy wyznaczyć współrzędne punktu P.

Oznaczmy nieznane współrzędne punktu P przez x_3, y_3, z_3.

Dane jest, że

$$\overline{AP} = \lambda \cdot \overline{PB}$$

Składowe wektorów $\overline{AP}$, $\overline{PB}$, $\lambda\,\overline{PB}$ wyrażają się następująco:



Rys. 36

$$\overline{AP}\{x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\}$$
$$\overline{PB}\{x_2-x_3, y_2-y_3, z_2-z_3\}$$
$$\lambda\,\overline{PB}\{\lambda(x_2-x_3),\ \lambda(y_2-y_3),\ \lambda(z_2-z_3)\}$$

W tej samej bazie $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, współrzędne wektorów równych są równe, wobec tego

$$x_3-x_1 = \lambda(x_2 - x_3)$$
$$y_3-y_1 = \lambda(y_2 - y_3)$$
$$z_3-z_1 = \lambda(z_2 - z_3)$$

Z tych równań otrzymujemy współrzędne punktu P:

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},$$
$$y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \qquad (2)$$
$$z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},$$

Jeżeli prosta p leży w płaszczyźnie Oxy, to rozwiązując analogicznie otrzymamy jako współrzędne punktu P:

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},$$
$$y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (3)$$

8. Współrzedne środka odcinka.

Jeżeli S jest środkiem odcinka $\overline{AB}$, to $AS = 1.\overline{SB}$, czyli dla wyznaczenia współrzędnych punkt S możemy korzystać ze wzorów (2) i (3), biorąc $\lambda = 1$.

W układzie Oxyz otrzymujemy:

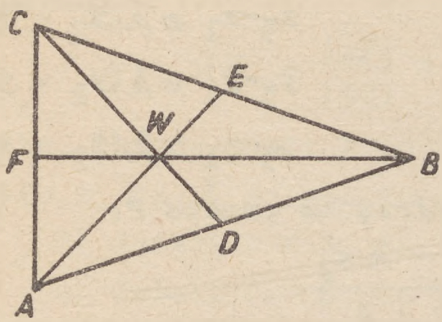
$$S\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right) \qquad (4)$$

w układzie Oxy

$$S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \qquad (5)$$

9. <u>Współrzędne środka cieżkości trójkata.</u>

Mając dane współrzędne wierzchołków trójkąta $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ wyznaczymy współrzędne środka ciężkości trójkąta.



Rys. 37

Środkiem ciężkości trójkąta nazywamy punkt przecięcia się środkowych trójkąta. Z geometrii elementarnej wiemy, że jeżeli CD (rys.37) jest środkową trójkąta i W jest środkiem ciężkości trójkąta, to $\overline{DW} = \frac{1}{2}\,\overline{WC}$

Współrzędne punktu D równają się

$$\frac{x_1+x_2}{2}, \quad \frac{y_1+y_2}{2}, \quad \frac{z_1+z_2}{2},$$

współrzędne punktu C: x_3, y_3, z_3.

Jeżeli współrzędne punktu W oznaczymy przez x_4, y_4, z_4, to korzystając z wzoru (2) otrzymamy:

$$x_4 = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{2}\,x_3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

Podobnie otrzymamy

$$y_4 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z_4 = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

Zatem

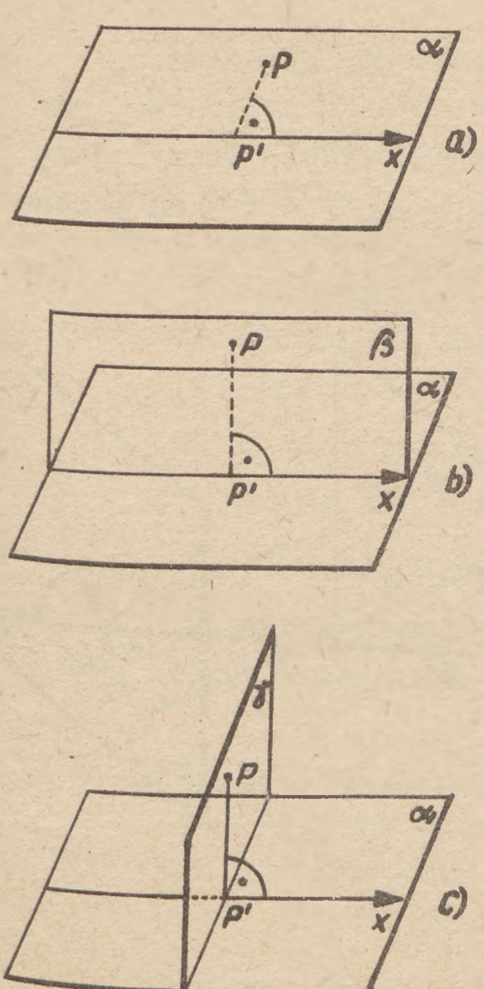
$$W\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \quad \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right). \qquad (6)$$

W geometrii płaskiej, tj. w układzie Oxy aktualne są tylko pierwsze dwie współrzędne.

§ 4. RZUT WEKTORA

1. Rzut prostokątny punktu na oś.

Rzutem prostokątnym lub krótko r z u t e m p u n k t u P na oś x nazywamy punkt P', w którym prostopadła do osi, przechodząca przez punkt P, przecina oś x.



Rys. 38

Prostą PP', wyznaczającą rzut punktu P, nazywamy p r o m i e n i e m r z u t u j ą c y m punktu P.

1) Jeżeli punkt P znajduje się z osią x na wspólnej płaszczyźnie α, rzut punktu P konstruujemy, prowadząc na tej płaszczyźnie promień rzutujący punktu P (rys. 38a).

2) Jeżeli punkt P znajduje się poza płaszczyzną α na której znajduje się oś x (rys. 38b), prowadzimy przez oś x i punkt P płaszczyznę β i w tej płaszczyźnie prowadzimy promień rzutujący punktu P lub też (rys. 38c) przez punkt P prowadzimy płaszczyznę γ prostopadłą do osi x i jej punkt przecięcia z osią x jest rzutem punktu P. Istotnie, płaszczyzna γ jako prostopadła do osi x jest miejscem geometrycznym prostych prostopadłych do osi x przecho-

dzących przez P'. Prosta więc PP' jest promieniem rzutującym punktu P i wyznacza rzut punktu P na osi x.

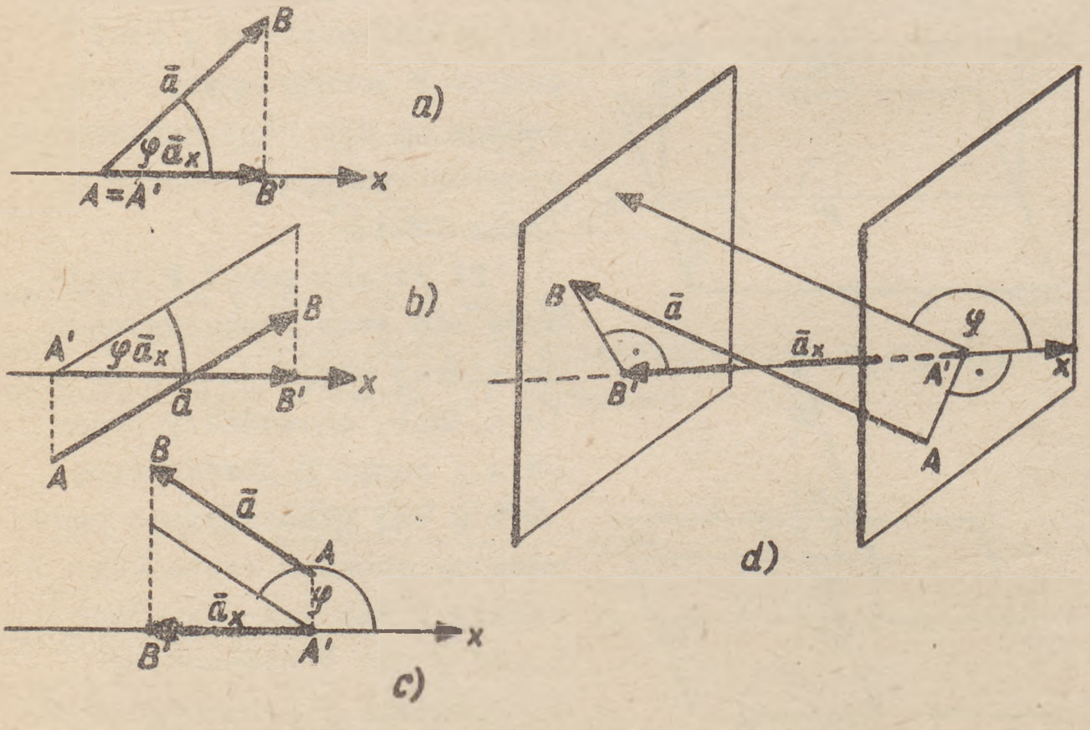
Rzut punktu P na oś x oznaczamy symbolem P' lub P_x.

2) <u>Rzut prostokątny wektora na oś.</u>

R z u t e m p r o s t o k ą t n y m w e k t o r a $\bar{a}$ na oś x nazywamy wektor, którego początkiem jest rzut początku wektora $\bar{a}$, a końcem rzut końca wektora $\bar{a}$.

Rzut wektora $\bar{a}$ na oś x oznaczamy symbolem $\bar{a}_x$.

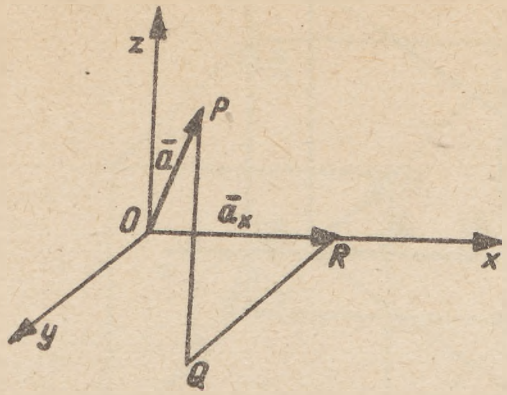
Konstrukcje rzutu wektora na oś w przypadku, gdy wektor $\bar{a}$ i oś x leżą w jednej płaszczyźnie odczytujemy z rys. 39 a, b i c, w przypadku zaś gdy $\bar{a}$ i x są skośne z rys. 39 d.



Rys. 39

Jeżeli $\bar{i}$ jest wektorem jednostkowym osi x, φ -kątem wektora $\bar{a}$ z osią x (rys. 39), to rzut wektora $\bar{a}$ na oś x wyraża się wzorem

$$\bar{a}_x = |\bar{a}| \cos \varphi \cdot \bar{i}$$



Rys. 40

Jeżeli wektor $\bar{a}$ odniesiemy do prostokątnego układu Oxyz, to bezpośrednio zauważymy (rys. 40), że rzut wektora $\bar{a}$ na oś x jest jego składową wektorową w kierunku osi x, a czynnik liczbowy $|\bar{a}| \cos \varphi$ - składową skalarną względem osi x.

Składową skalarną wektora $\bar{a}$ względem osi x oznaczymy symbolem a_x

Jeżeli $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, to $a_x \geqslant 0$; jeżeli $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi$, to $a_x < 0$

Z równoważności terminów składowa wektora i rzut wektora wynikają bezpośrednio następujące prawa:

1) Jeżeli $\bar{a} = \bar{b}$, to $\bar{a}_x = \bar{b}_x$ i $a_x = b_x$

2) Jeżeli m jest dowolną liczbą rzeczywistą, to $(m\,\bar{a})_x = m\,\bar{a}_x$

3) $(\bar{a} + \bar{b})_x = \bar{a}_x + \bar{b}_x$

Ostatnie prawo jest słuszne dla dowolnej skończonej liczby składników.

3. Rzuty wektora na osi układu współrzędnych.

Jeżeli w prostokątnym układzie Oxyz dany jest wektor $\bar{a}$ przez współrzędne początku

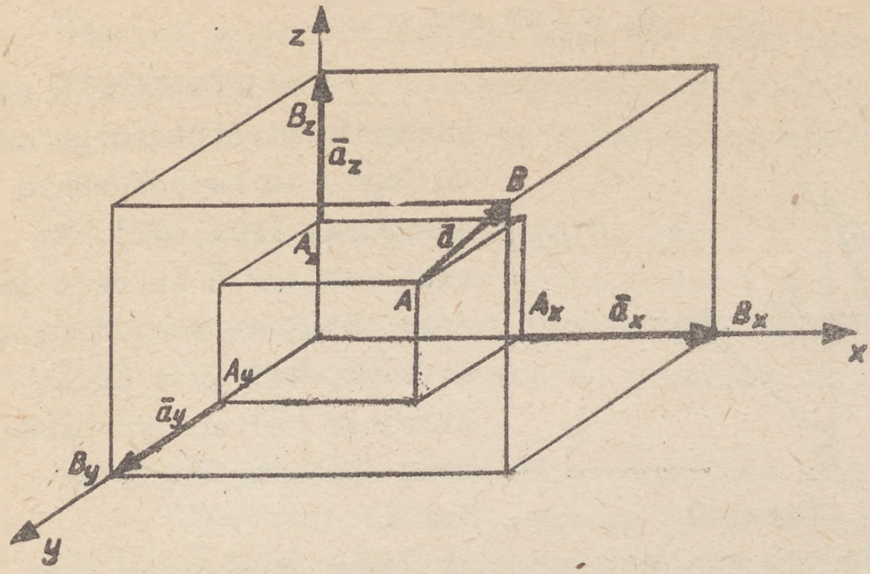
$$A(x_1, y_1, z_1) \text{ i końca } B(x_2, y_2, z_2),$$

to

$$\bar{a} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}$$

ale

$$(x_2 - x_1)\,\bar{i} = \bar{a}_x,$$
$$(y_2 - y_1)\,\bar{j} = \bar{a}_y,$$
$$(z_2 - z_1)\bar{k} = \bar{a}_z$$



Rys. 41

Rzuty więc wektora na osi układu współrzędnych (rys.41) są składowymi wektorowymi wektora, czyli

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z$$

Jeżeli α, β, γ są kątami, jakie wektor $\bar{a}$ tworzy z osiami układu, to

$\bar{a}_x = |\bar{a}| \cos\alpha\ \bar{i}$, $\bar{a}_y = |\bar{a}| \cos\beta\ \bar{j}$, $\bar{a}_z = |\bar{a}| \cos\gamma\ \bar{k}$,

wobec tego liczby:

$$a_x = |\bar{a}| \cos\alpha = x_2 - x_1,$$
$$a_y = |\bar{a}| \cos\beta = y_2 - y_1,$$
$$a_z = |\bar{a}| \cos\gamma = z_2 - z_1$$

są składowymi skalarnymi (współrzędnymi) wektora w układzie prostokątnym Oxyz.

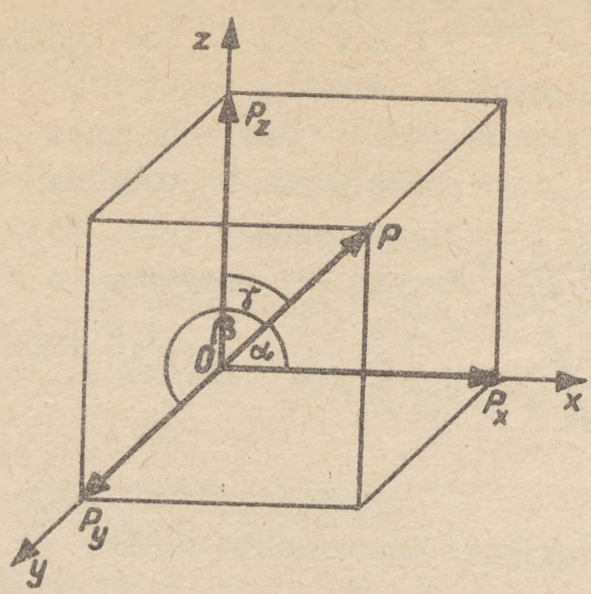
W szczególności, jeżeli wektor jest promieniem wodzącym punktu P (x,y,z) (rys.42), to

$$\overline{OP} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k},$$

ale

$$x\,\bar{i} = \overline{OP}_x,\ y\bar{j} = \overline{OP}_y,\ z\bar{k} = \overline{OP}_z$$

czyli, że współrzędne punktu P są miarami rzutów



Rys. 42

promienia wodzącego punktu P na osi układu x, y, z.

Jeżeli wektor $\bar{a}$, określony punktami $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, leży w płaszczyźnie prostokątnego układu współrzędnych (rys. 43), analogicznie mamy:

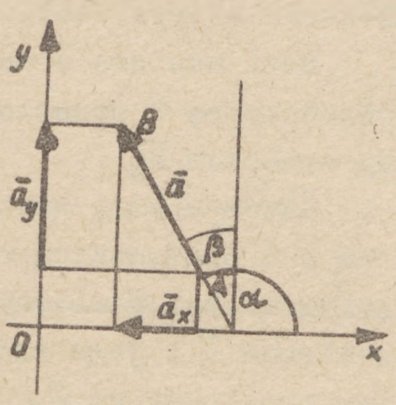
$$\bar{a} = (a_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j},$$

$$(x_2 - x_1)\bar{i} = \bar{a}_x,$$

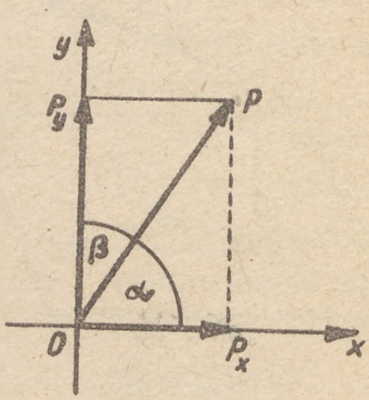
$$(y_2 - y_1)\bar{j} = \bar{a}_y,$$

więc $\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y$,

a dalej $\bar{a}_x = |\bar{a}| \cos\alpha\, \bar{i}$, $\bar{a}_y = |\bar{a}| \cos\beta\, \bar{j}$,



Rys. 43



Rys. 44

więc $a_x = |\bar{a}| \cos\alpha = x_2 - x_1$,

$a_y = |\bar{a}| \cos\beta = y_2 - y_1$

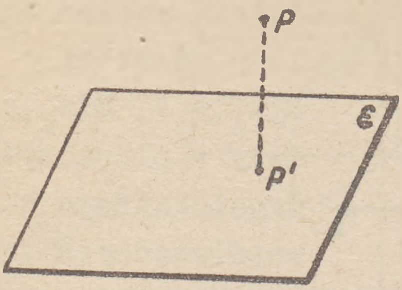
Jeżeli wektor jest promieniem wodzącym punktu $P(x, y)$ (rys. 44), to

$$\overline{OP} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j}$$

$$x\bar{i} = \overline{OP}_x, \quad y\bar{j} = \overline{OP}_y$$

4. <u>Rzut prostokątny punktu na płaszczyznę.</u>

R z u t e m p r o s t o k ą t n y m lub krótko rzutem punktu P na płaszczyznę ε nazywamy punkt P', w którym prostopadła do płaszczyzny ε, przechodząca przez punkt P przecina płaszczyznę ε (rys. 45). Prostą PP' nazywamy p r o m i e n i e m r z u t u j ą c y m punktu P.

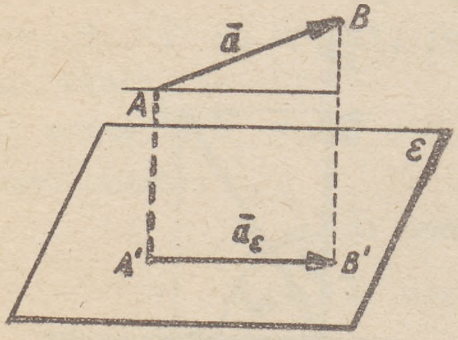


Rys. 45

5. <u>Rzut prostokątny wektora na płaszczyznę.</u>

R z u t e m p r o s t o k ą t n y m wektora $\bar{a}$ na płaszczyznę ε nazywamy wektor, którego początkiem jest rzut początku wektora $\bar{a}$, a końcem rzut końca wektora $\bar{a}$ (rys. 46).

Rzut wektora $\bar{a}$ na płaszczyznę ε oznaczamy symbolem $\bar{a}_\varepsilon$.



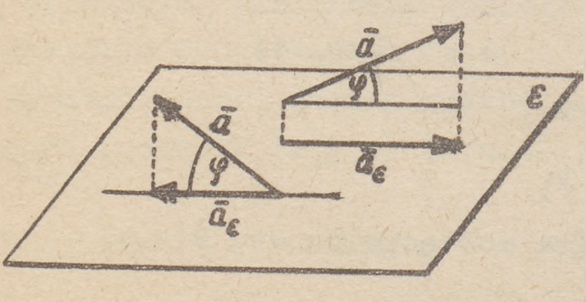
Rys. 46

Kątem między wektorem $\bar{a}$ a płaszczyzną ε nazywamy kąt φ między wektorem $\bar{a}$ a jego rzutem prostokątnym $\bar{a}_\varepsilon$ (rys. 47), którego miara spełnia warunek

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Długość rzutu wektora na płaszczyznę ε wyraża się wzorem

$$|\bar{a}_\varepsilon| = |\bar{a}| \cos\varphi$$



Rys. 47

Z definicji rzutu wektora na płaszczyznę wynikają z łatwością następujące prawa:

1) Rzuty wektorów równych są równe t.zn., jeżeli $\bar{a} = \bar{b}$, to $\bar{a}_\varepsilon = \bar{b}_\varepsilon$

2) Rzut sumy wektorów równa się sumie rzutów poszczególnych składników t.zn.

$$(\bar{a} + \bar{b})_\varepsilon = \bar{a}_\varepsilon + \bar{b}_\varepsilon$$

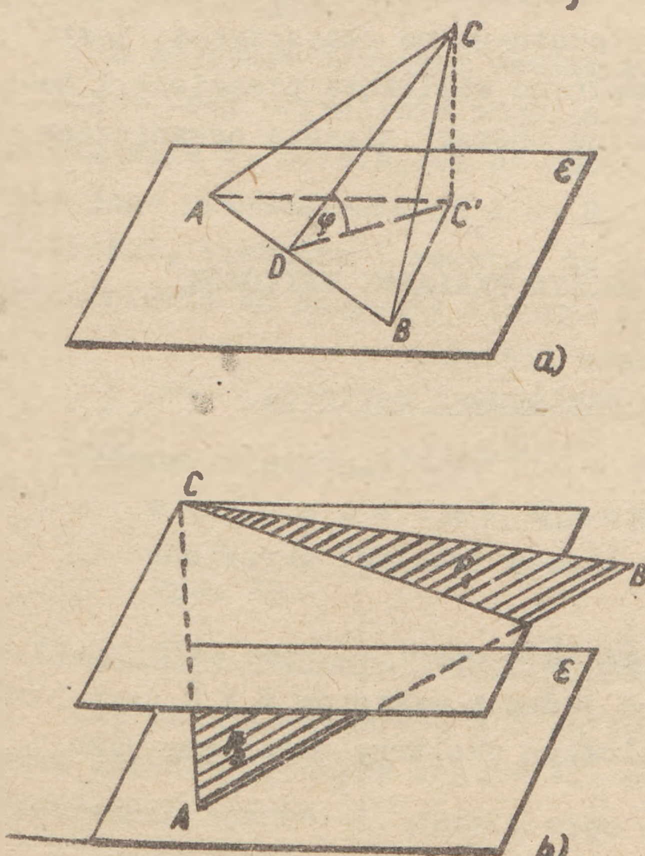
3) Jeżeli dany jest wektor $\bar{a}$ i m jest dowolną liczbą rzeczywistą, to

$$(m\,\bar{a})_\varepsilon = m\,\bar{a}_\varepsilon$$

6. <u>Pole rzutu trójkąta.</u>

Jeżeli płaszczyzna trójkąta ABC tworzy z płaszczyzną rzutu ε kąt φ i P oraz P' oznaczają pole trójkąta i pole jego rzutu prostokątnego na płaszczyznę ε, to zachodzi związek :

$$P' = P \cos\varphi$$



Rys. 48

W dowodzie rozróżnimy dwa przypadki :

1) Jeden z boków trójkąta leży na płaszczyźnie rzutu (rys. 48a) lub jest do niej równoległy.

Jeżeli trójkąt ABC' jest rzutem prostokątnym trójkąta ABC na płaszczyznę ε, to

$$P' = \frac{1}{2}\,|AB|\,|DC'|$$

ale

$$|DC'| = |DC| \cos\varphi$$

więc

$$P' = \frac{1}{2}|AB|\,|DC| \cos\varphi$$

Ponieważ

$$\frac{1}{2}\,|AB|\,|DC| = P,$$

więc

$$P' = P\cos\varphi .$$

2) Jeżeli żaden z boków trójkąta ABC nie jest równoległy do płaszczyzny rzutu ε (rys. 48 b), to prowadząc przez odpowiedni wierzchołek trójkąta płaszczyznę równoległą do płaszczyzny ε, rozcinamy trójkąt na dwa trójkąty, z których każdy spełnia założenia przypadku 1).

Mamy więc, że

$$P_1' = P_1 \cos\varphi ,$$

$$P_2' = P_2 \cos\varphi ,$$

a dalej

$$P' = P_1' + P_2' = (P_1 + P_2)\cos\varphi = P\cos\varphi$$

Wzór, wyrażakjący związek między polem trójkąta, a polem jego rzutu prostokątnego na płaszczyznę, jest słuszny również dla dowolnego wielokąta płaskiego i daje się uogólnić na dowolne obszary płaskie ograniczone.

§ 4. ILOCZYN SKALARNY WEKTORÓW

1. Określenie iloczynu skalarnego wektorów.

1) Jeżeli wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są niezerowe i tworzą kąt ν, to **iloczynem skalarnym** tych wektorów nazywamy liczbę (skalar) określoną iloczynem

$$|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\nu$$

2) Jeżeli chociaż jeden z wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ jest wektorem zerowym, to iloczyn skalarny określamy jako liczbę zero.

Iloczyn skalarny wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ oznaczamy symbolem $\bar{a}.\bar{b}$. Używając tego symbolu, możemy określenie iloczynu skalarnego zapisać w przypadku wektorów niezerowych w postaci

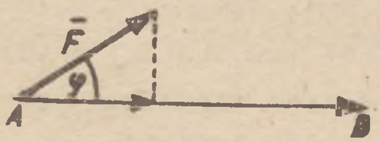
$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}|\;|\bar{b}|\;\cos \nu\;; \qquad (1)$$

w przypadku, gdy chociaż jeden z wektorów jest wektorem zerowym w postaci

$$\bar{a}\,.\,\bar{b} = 0$$

Jeżeli wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są niezerowe, to iloczyn $|\bar{b}|$ $\cos\nu$ wyraża składową skalarną wektora $\bar{b}$ względem osi wektora $\bar{a}$ (str. 37), iloczyn zaś $|\bar{a}|$ $\cos\nu$ - składową skalarną wektora $\bar{a}$ względem osi wektora $\bar{b}$. W przypadku więc wektorów niezerowych możemy powiedzieć, że iloczyn skalarny dwóch wektorów równa się iloczynowi długości pierwszego wektora przez składową (skalarną) drugiego względem kierunku, określonego wektorem pierwszym.

Z pojęciem iloczynu skalarnego spotykamy się w fizyce przy określeniu pojęcia pracy. Mianowicie, jeżeli siła F, działająca na punkt materialny podczas jego przesunięcia od A do B, jest stała co do wielkości, kierunku i zwrotu, to pracą siły F na przesunięciu AB nazywamy iloczyn skalarny $\bar{F}.\overline{AB}$.



Jeżeli więc pracę oznaczymy przez L, kąt między $\bar{F}$ i $\overline{AB}$ przez φ, to

$$L = \bar{F}.\overline{AB} = |\bar{F}|.|\overline{AB}|\cos\varphi$$

Rys. 49

2. <u>Szczególne wartości iloczynu skalarnego.</u>

1) Jeżeli wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są kolinearne, to w przypadku zwrotów zgodnych $\cos\nu = +1$, w przypadku zwrotów przeciwnych $\cos\nu = -1$. Jeżeli więc wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są

kolinearne, to

$$\bar{a}\circ\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \quad \text{lub} \quad \bar{a}\circ\bar{b} = -|\bar{a}|\,|\bar{b}|$$

W szczególności

$$\bar{a}\circ\bar{a} = |\bar{a}|^2$$

Iloczyn $\bar{a}\circ\bar{a}$ oznaczamy symbolem $\bar{a}^2$.

Jeżeli i, j, k są wektorami jednostkowymi prostokątnego układu Oxyz, to

$$\bar{i}^2 = 1, \; \bar{j}^2 = 1, \; \bar{k}^2 = 1$$

2) Jeżeli wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są do siebie prostopadłe, to $\cos\nu = 0$, więc $\bar{a}\circ\bar{b} = 0$.
Odwrotnie, jeżeli $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są niezerowe i $\bar{a}\circ\bar{b}=0$, to wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ tworzą kąt prosty.

Dla wektorów $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ w prostokątnym układzie Oxyz mamy :

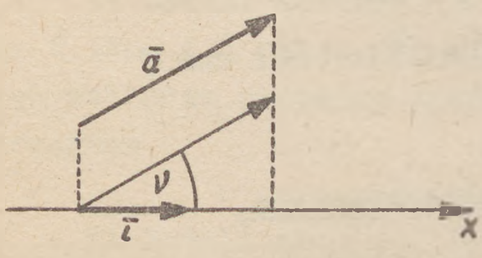
$$\bar{i}\bar{j}=0, \; \bar{j}\bar{k}=0, \; \bar{k}\bar{i}=0$$

3) Jeżeli $\bar{a}\circ\bar{b} > 0$, to wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są niezerowe i tworzą kąt ostry.
Jeżeli $\bar{a}\circ\bar{b} < 0$, to wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są niezerowe i tworzą kąt rozwarty.
Jeżeli $\bar{a}\circ\bar{b} = 0$, to wektory są niezerowe i tworzą kąt prosty albo przynajmniej jeden z nich jest wektorem zerowym.

4) Jeżeli wektor $\bar{a}$ jest wektorem niezerowym, wektor $\bar{i}$ wektorem jednostkowym (rys. 50), to

$$\bar{a}\circ\bar{i} = |\bar{a}| \cos\nu = a_x \qquad (2)$$

Iloczyn więc skalarny wektora niezerowego przez wektor jednostkowy równa się składowej (współrzędnej) tego wektora względem osi wektora jednostkowego.



Rys. 50

Analogicznie, iloczyn $\bar{a}\circ\bar{b}$ możemy traktować jako składową (skalarną) wektora $\bar{a}$ względem osi wektorów $\bar{b}$, przyjętego za wektor jednostkowy.

3. Własności iloczynu skalarnego.

1) Iloczyn skalarny jest przemienny t. zn.

$$\bar{a} \circ \bar{b} = \bar{b} \circ \bar{a} \qquad (3)$$

Własność ta wynika z definicji iloczynu skalarnego. Mamy bowiem dla wektorów niezerowych

$$\bar{a} \circ \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos \nu$$

$$\bar{b} \circ \bar{a} = |\bar{b}||\bar{a}| \cos \nu$$

oraz, gdy przynajmniej jeden z wektorów jest wektorem zerowym

$$\bar{a} \circ \bar{b} = 0$$

$$\bar{b} \circ \bar{a} = 0$$

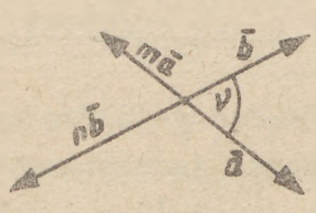
2) Jeżeli m i n są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to

$$(m\bar{a}) \circ (n\bar{b}) = (mn)(\bar{a} \circ \bar{b}) \qquad (4)$$

Słuszność tego związku dowodzi się z łatwością w oparciu o definicję iloczynu skalarnego z uwzględnieniem różnych przypadków ze względu na znaki m i n.

Dla przypkładu dowód w przypadku, gdy $m < 0$ i $n < 0$:

Wektory $\bar{a}$ i $m\bar{a}$ tworzą parę wektorów kolinearnych o przeciwnych zwrotach, podobną parę tworzą wektory $\bar{b}$ i $n\bar{b}$ (rys. 51). Kąty wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ oraz $m\bar{a}$ i $n\bar{b}$ jako kąty wierzchołkowe są równe. Mamy więc, że



Rys. 51

$$(m\bar{a}) \circ (n\bar{b}) = |m\bar{a}||n\bar{b}| \cos \nu =$$
$$= (-m|\bar{a}|)(-n|\bar{b}|) = mn |\bar{a}||\bar{b}| \cos \nu =$$
$$= (mn)(\bar{a} \circ \bar{b})$$

3) Prawo rozdzielności iloczynu skalarnego względem dodawania:

$$\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c} \qquad (5)$$

Jeżeli wektor $\bar{a}$ lub chociaż jeden z wektorów $\bar{b}$ lub $\bar{c}$ jest wektorem zerowym, twierdzenie jest oczywiste.

Niech wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ będą wektorami niezerowymi. Iloczyn $(\bar{b}+\bar{c})\bar{a}$ możemy interpretować jako składową skalarną wektora $\bar{b}+\bar{c}$ względem osi x, określonej wektorem $\bar{a}$ jako wektorem jednostkowym (str.42) czyli

$$(\bar{b}+\bar{c})\,\bar{a} = (\bar{b}+\bar{c})_x, \text{ gdy } |\bar{a}| = 1$$

Podobnie

$$\bar{b}\cdot\bar{a} = b_x \text{ i } \bar{c}\cdot\bar{a} = c_x$$

Ale składowa sumy równa się sumie składowych, więc

$$(b+c)_x = b_x + c_x$$

lub inaczej

$$(\bar{b}+\bar{c})\bar{a} = \bar{b}\bar{a} + \bar{c}\cdot\bar{a}$$

Stosując prawo przemienności dla poszczególnych iloczynów otrzymamy

$$\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$$

4) Prawo łączności dla iloczynu skalarnego nie zachodzi t.zn.

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})\cdot\bar{c} \neq \bar{a}(\bar{b}\cdot\bar{c}) \qquad (6)$$

Istotnie, iloczyn $\bar{a}\cdot\bar{b}$ jest liczbą, iloczyn $(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}$ jest wektorem kolinearnym z $\bar{c}$. Podobnie iloczyn $\bar{b}\bar{c}$ jest liczbą, a iloczyn $\bar{a}(\bar{b}\cdot\bar{c})$ jest wektorem kolinearnym z $\bar{a}$. Wektory więc $(\bar{a}\bar{b})\bar{c}$ i $\bar{a}(\bar{b}\bar{c})$ mogą być równe tylko w szczególnych przypadkach.

4. Iloczyn skalarny wektorów wyrażony przez składowe czynników.

Niech będzie dany prostokątny układ współrzędnych Oxyz, w którym wektory $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ są wektorami jednostkowymi oraz niech będą dane dwa wektory $\bar{a}\,\{a_x, a_y, a_z\}$ i $\bar{b}\,\{b_x, b_y, b_z\}$

Wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ możemy wyrazić w postaci

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

$$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k},$$

a iloczyn skalarny wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ w postaci

$$\bar{a}\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}).$$

Wykonując naznaczone działania i mając na uwadze, że

$$\bar{i}\bar{j} = \bar{j}\bar{k} = \bar{k}\bar{i} = 0$$

$$\text{i} \quad \bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1$$

otrzymujemy

$$\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{7}$$

Rozwiązując to samo zagadnienie na płaszczyźnie układu Oxy otrzymujemy

$$\bar{a}.\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y, \tag{8}$$

5. <u>Długość wektora, długość odcinka.</u>

Mając w układzie Oxyz wektor $\bar{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$ możemy napisać

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|\,|\bar{a}| = |\bar{a}|^2$$

Jeżeli we wzorze (7) przyjmiemy $\bar{b} = \bar{a}$, to otrzymamy

$$\bar{a}^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Porównując prawe strony uzyskanych równości, otrzymamy wzór

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{9}$$

wyrażający długość wektora przy pomocy składowych.

Jeżeli wektor $\bar{a}$ jest określony przez współrzędne początku $A(x_1, y_1, z_1)$ i końca $B(x_2, y_2, z_2)$, to

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1,$$

i wzór (9) przyjmuje postać :

$$|\bar{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{10}$$

Wzór ostatni wyraża też długość odcinka łączącego punkty A i B.

W płaszczyźnie układu Oxy wzory (9) i (10) mają postać

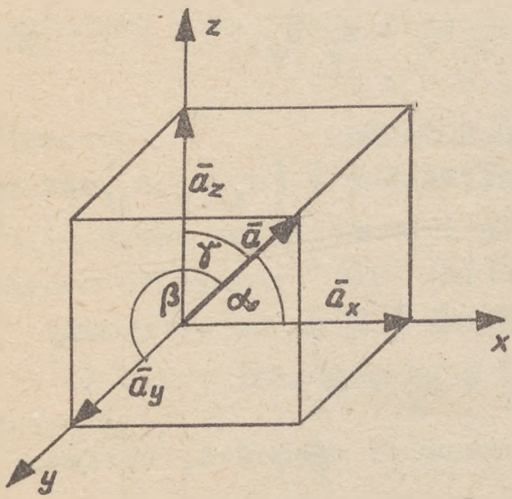
$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \tag{11}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (12)$$

§ 6. KĄT MIĘDZY WEKTORAMI

1. Cosinusy kierunkowe wektora.

Niech będzie dany prostokątny układ Oxyz, w którym $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$ oraz wektor $\bar{a}$, tworzący z osiami układu kąty α, β, γ (rys. 52).



Rys. 52

C o s i n u s a m i k i e r u n k o w y m i wektora $\bar{a}$ w układzie Oxyz nazywamy cosinusy kątów tego wektora z osiami układu, a więc $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Wszystkie wektory kolinearne z $\bar{a}$ i posiadające ten sam zwrot co $\bar{a}$ mają te same cosinusy kierunkowe, tworzą bowiem jednakowe kąty z osiami układu. Wektory kolinearne z $\bar{a}$, o zwrocie przeciwnym do zwrotu wektora $\bar{a}$ posiadają jako cosinusy kierunkowe $-\cos\alpha$, $-\cos\beta$, $-\cos\gamma$, tworzą bowiem z osiami kąty $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$,

Twierdzenie: Cosinusy kierunkowe każdego wektora niezerowego spełniają związek

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (1)$$

Dowód: Składowe wektora $\bar{a}$ względem osi układu są rzutami prostokątnymi tego wektora na osi układu t.zn.

$$\bar{a}_x = a_x\bar{i}, \quad \bar{a}_y = a_y\bar{j}, \quad \bar{a}_z = a_z\bar{k},$$

Wobec tego

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|},$$

a dalej

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{|\bar{a}|^2} = \frac{|\bar{a}|^2}{|\bar{a}|^2} = 1$$

c.b.d.o.

Odwrotnie, każdą trójkę liczb r,s,t, spełniającą związek

$$r^2 + s^2 + t^2 = 1,$$

możemy uważać za cosinusy kierunkowe pewnego wektora.

Dowód: Obierzmy punkt P(r,s,t). Wtedy ze względu na

$$r^2 + s^2 + t^2 = 1$$

mamy

$$|\overline{OP}| = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2} = 1$$

Wektor $\overline{OP}$ jako promień wodzący punktu P wyraża się w postaci

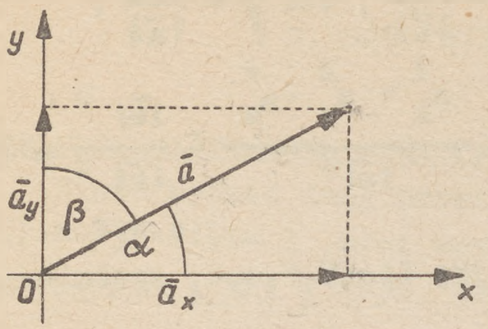
$$\overline{OP} = r\bar{i} + s\bar{j} + t\bar{k},$$

wektory więc $r\bar{i}$, $s\bar{j}$, $t\bar{k}$ są składowymi wektora $\overline{OP}$, są one jednocześnie rzutami prostokątnymi wektora $\overline{OP}$ na osi układu. Oznaczając kąty wektora $\overline{OP}$ z osiami układu przez α, β, γ, mamy

$$\cos\alpha = \frac{r}{|\overline{OP}|} = r, \quad \cos\beta = \frac{s}{|\overline{OP}|} = s, \quad \cos\gamma = \frac{t}{|\overline{OP}|} = t$$

Liczby więc r,s,t, spełniające związek $r^2+s^2+t^2 = 1$, są cosinusami kierunkowymi wektora $\overline{OP}$ i wszystkich wektorów z nim kolinearnych i posiadających ten sam zwrot. Zauważamy jednocześnie, że cosinusy kierunkowe wektora są współrzędnymi wektora jednostkowego, posiadającego kierunek i zwrot wektora danego.

Jeżeli wektor $\bar{a}$ leży w płaszczyźnie układu Oxy, to cosinusy kierunkowe wektora $\bar{a}$ w układzie Oxy (rys. 53) określamy podobnie, jak w układzie przestrzennym Oxyz.



Rys. 53

Cosinusy kierunkowe wektora w tym wypadku spełniają związek

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,$$

bo

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|},$$

$$\cos\beta = \sin\alpha = \frac{a_y}{|\bar{a}|}$$

Odwrotnie, każdą parę liczb r, s, spełniającą warunek

$$r^2 + s^2 = 1$$

możemy zawsze uważać za cosinusy kierunkowe pewnego wektora, mianowicie za cosinusy kierunkowe każdego wektora kolinearnego z wektorem jednostkowym, określonym współrzędnymi r i s. Dowód przeprowadza się podobnie jak w układzie Oxyz.

2. Cosinusy kierunkowe osi i prostej.

C o s i n u s y   k i e r u n k o w e   o s i

Jeżeli wektor $\bar{a}$ określa oś (leży na niej i jego zwrot przyjęto jako zwrot dodatni osi), to cosinusami kierunkowymi osi nazywamy cosinusy kierunkowe wektora $\bar{a}$.

C o s i n u s y   k i e r u n k o w e   p r o s t e j

Jeżeli dana jest prosta p i kolinearny z nią wektor $\bar{a}$, to prosta p określa dwie osi: jedną, na której zwrot wektora $\bar{a}$ przyjęto jako dodatni, drugą - o zwrocie przeciwnym do poprzedniego.

Cosinusy kierunkowe obu osi uważamy za cosinusy kierunkowe prostej.

W układzie Oxyz prosta p posiada więc dwie trójki cosinusów kierunkowych różniących się znakami, a w układzie Oxy dwie pary cosinusów kierunkowych.

3. Kąt między wektorami.

Niech w prostokątnym układzie Oxyz będą dane dwa wektory $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{b}\{b_x, b_y, b_z\}$. Wyznaczymy cosinus i sinus kąta między wektorami.

Z określenia iloczynu skalarnego mamy

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\nu$$

Iloczyn ten wyraża się przez składowe wzorem :

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Porównując prawe strony obu wzorów otrzymamy

$$\cos\nu = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|} \qquad (2)$$

lub

$$\cos\nu = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \qquad (3)$$

Możemy cos wyrazić również przez cosinusy kierunkowe danych wektorów.

Jeżeli wektor $\bar{a}$ tworzy z osiami układu kąty α, β, γ, a wektor $\bar{b}$ - kąty α', β', γ', to

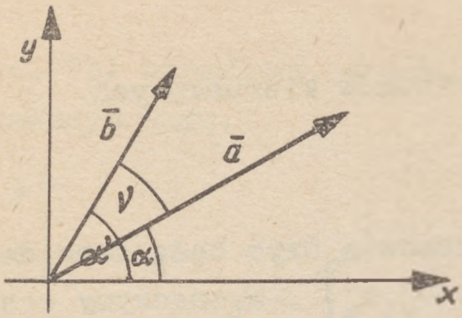
$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$$

$$\cos\alpha' = \frac{b_x}{|\bar{b}|}, \quad \cos\beta' = \frac{b_y}{|\bar{b}|}, \quad \cos\gamma' = \frac{b_z}{|\bar{b}|}$$

Korzystając z tych związków we wzorze (2), otrzymamy

$$\cos\nu = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \qquad (4)$$

Jeżeli wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ leżą w płaszczyźnie układu Oxy, to postępując podobnie otrzymamy wzory:



Rys. 54

$$\cos\nu = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|} \tag{5}$$

$\cos\nu = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta'$,
a ponieważ
$\cos\beta = \sin\alpha$ i $\cos\beta' = \sin\alpha'$,
ostatni wzór możemy napisać
też w postaci

$$\cos\nu = \cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha' \tag{6}$$

Z kolei wyznaczymy $\sin\nu$.

W układzie Oxyz mamy:

$$\sin^2\nu = 1-\cos^2\nu = 1-(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')^2$$

lub

$$\sin^2\nu = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') +$$
$$- (\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma')^2$$

Prawą stronę tej równości przekształcamy, korzystając z tożsamości Lagrange'a:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 =$$
$$= (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2$$

Otrzymujemy:

$$\sin^2\nu = \begin{vmatrix} \cos\beta, \cos\gamma \\ \cos\beta', \cos\gamma' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\gamma, \cos\alpha \\ \cos\gamma', \cos\alpha' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\alpha, \cos\beta \\ \cos\alpha', \cos\beta' \end{vmatrix}^2 \tag{7}$$

Ponieważ kąt ν spełnia warunek $0 \leq \nu \leq \pi$
więc $\sin\nu$ jest liczbą nieujemną, czyli

$$\sin\nu = \sqrt{\begin{vmatrix} \cos\beta, \cos\gamma \\ \cos\beta', \cos\gamma' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\gamma, \cos\alpha \\ \cos\gamma', \cos\alpha' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\alpha, \cos\beta \\ \cos\alpha', \cos\beta \end{vmatrix}^2} \tag{8}$$

Jeżeli w otrzymanym wzorze cosinusy kierunkowe wyrazimy przez odpowiednie składowe wektorów, to wzór przyjmie postać

$$\sin\nu = \frac{1}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}\sqrt{\begin{vmatrix} a_y, a_z \\ b_y, b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z, a_x \\ b_z, b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x, a_y \\ b_x, b_y \end{vmatrix}^2} \tag{9}$$

Jeżeli wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ leżą w płaszczyźnie układu Oxy, to wzór na $\sin\nu$ możemy otrzymać ze wzoru (8), przyjmując $\gamma = \frac{\pi}{2}$ i $\gamma' = \frac{\pi}{2}$

Otrzymamy wtedy

$$\sin\nu = \sqrt{\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta \\ \cos\alpha', & \cos\beta' \end{vmatrix}^2} = \left|\begin{vmatrix} \cos\alpha, & \cos\beta \\ \cos\alpha', & \cos\beta' \end{vmatrix}\right|^{x)},$$

lub w postaci

$$\sin\nu = |\cos\alpha, \cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta| =$$
$$= |\cos\alpha, \sin\alpha' - \cos\alpha'\sin\alpha| = \sin(\alpha'-\alpha)| \qquad (10)$$

Chcąc że wzoru (9) uzyskać wzór wyrażający sinus kąta przez składowe wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ należy przyjąć $a_z = 0$, $b_z = 0$. Otrzymujemy wtedy

$$\sin\nu = \frac{|a_x b_y - a_y b_x|}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|} \qquad (11)$$

Wzór na $\sin\nu$ możemy też otrzymać bezpośrednio:

Jeżeli $\alpha' > \alpha$, to $\nu = \alpha' - \alpha$ i

$$\sin\nu = \sin\alpha'\cos\alpha - \cos\alpha'\sin\alpha = |\sin(\alpha'-\alpha)|$$

Jeżeli $\alpha' < \alpha$, to $\nu = \alpha - \alpha'$ i

$$\sin\nu = \sin\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha' = |\sin(\alpha'-\alpha)|$$

W obu więc przypadkach mamy wzór:

$$\sin\nu = |\sin\alpha'\cos\alpha - \cos\alpha'\sin\alpha|$$

Jeżeli kąt między wektorami $\bar{a}$ i $\bar{b}$ uważamy za kąt zorientowany, wtedy

$$\sin\sphericalangle(\widehat{ab}) = \sin(\alpha'-\alpha) \qquad (11a)$$

i $\sin\sphericalangle(\widehat{ab}) > 0$, jeżeli $\alpha' > \alpha$, $\sin\sphericalangle(\widehat{a,b}) < 0$, jeżeli $\alpha' < \alpha$

4. <u>Warunki równoległości i prostopadłości wektorów.</u>

W a r u n e k   P r o s t o p a d ł o ś c i   w e k t o r ó w.

Warunek prostopadłości dwóch wektorów otrzymujemy ze wzoru na $\cos\nu$. Jeżeli wektory są prostopadłe, to $\cos\nu = 0$ i odwrotnie, gdy $\cos\nu = 0$, to wektory są pro-

x) znak bezwzględnej wartości.

stopadłe. Warunkiem więc koniecznym i dostatecznym prostopadłości dwóch wektorów w układzie Oxyz jest

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \tag{12}$$

lub

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0 \tag{13}$$

W układzie Oxy warunek ten przyjmuje postać

$$a_x b_x + a_y b_y = 0 \tag{14}$$

lub

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \sin\alpha \sin\alpha' = 0 \tag{15}$$

W a r u n k i   r ó w n o l e g ł o ś c i   d w ó c h   w e k t o r ó w.

Wektory są równoległe, gdy $\sin\nu = 0$ i odwrotnie. Warunki więc równoległości dwóch wektorów w układzie Oxyz otrzymamy ze wzoru (8) lub (9). Z postaci wzoru (9) wynika, że $\sin\nu = 0$, jeżeli

$$\begin{vmatrix} a_y, & a_z \\ b_y, & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z, & a_x \\ b_z, & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x, & a_y \\ b_x, & b_y \end{vmatrix}^2 = 0$$

Suma trzech kwadratów równa się zeru wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ze składników tej sumy równa się zeru.

Otrzymujemy więc, że

$$\left.\begin{aligned} a_y b_z - a_z b_y &= 0 \\ a_z b_x - a_x b_z &= 0 \\ a_x b_y - a_y b_x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

lub

$$a_y b_z = a_z b_y,$$

$$a_z b_x = a_x b_z,$$

$$a_x b_y = a_y b_x,$$

a dalej jako warunek równoległości proporcję

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \tag{16}$$

Jeżeli stosunki te oznaczymy przez λ, to przy $\lambda > 0$ wektory są równoległe i zgodnie skierowane, przy $\lambda < 0$ są równoległe i niezgodnie skierowane.

Warunki równoległości wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ ustaliliśmy przy założeniu, że wektory te nie są komplanarne z żadną z płaszczyzn układu współrzędnych t.zn. żadna ze współrzędnych tych wektorów nie równa się zeru. W przypadkach szczególnych warunki te ulegają pewnym zmianom.

Niech wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ będą komplanarne z jedną z płaszczyzn układu (ale niekolinearne z żadną osią) np. z płaszczyzną xy, czyli niech $a_z = 0$ i $b_z = 0$. W tym przypadku we wzorze (9) suma trzech kwadratów redukuje się do jednego składnika

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2$$

i $\sin \gamma = 0$, gdy

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$$

Jeżeli wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są kolinearne z jedną z osi układu np. z osią x, czyli jeżeli $a_y = a_z = 0$ i $b_y = b_z = 0$, to oczywiście są równoległe.

Jeżeli warunki równoległości wektorów wyprowadzimy ze wzoru (8), to postępując podobnie jak poprzednio, otrzymamy

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{\cos\beta}{\cos\beta'} = \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'} = \mu$$

Wartości stosunków μ, jak się przekonamy, nie może być dowolna. Podstawiając

$$\cos\alpha = \mu\cos\alpha', \ \cos\beta = \mu\cos\beta', \ \cos\gamma = \mu\cos\gamma'$$

do równości

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

i mając na uwadze, że

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

Otrzymujemy

$$\mu^2 = 1, \text{ a stąd } \mu = \pm 1$$

Dla $\mu = +1$ wektory są zgodnie skierowane, dla $\mu = -1$, - przeciwnie.

Warunki równoległości wektorów, leżących w płaszczyźnie Oxy wynikają ze wzoru (10) lub (11) Jako warunek konieczny i dostateczny równoległości wektorów w przypadku ogólnym otrzymujemy:

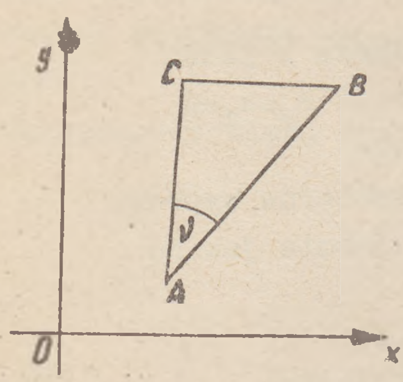
$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}$$

lub

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \pm 1.$$

5. Pole trójkąta na płaszczyźnie i w przestrzeni.

P o l e t r ó j k ą t a n a p ł a s z c z y ź n i e u k ł a d u.



Rys. 55

W prostokątnym układzie Oxy dany jest trójkąt ABC (rys.55) przez współrzędne wierzchołków: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. Oznaczmy pole trójkąta przez S i zastosujemy znany wzór, w którym pole trójkąta wyraża się połową iloczynu długości boków przez sinus kąta zawartego między nimi.

Mamy

$$S = \frac{1}{2}\,|\overline{AB}|\,|\overline{AC}|\,\sin\nu$$

Sinus kąta ν między wektorami $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ w myśl wzoru (11) wyraża się

$$\sin\nu = \frac{|AB_xAC_y - AB_yAC_x|}{|\overline{AB}|\,|\overline{AC}|}$$

wobec tego

$$S = \frac{1}{2}\left| AB_x\, AC_y - AB_y \cdot AC_x \right|,$$

ale

$$AB_x = x_2-x_1, \quad AB_y = y_2-y_1$$

$$AC_x = x_3-x_1, \quad AC_y = y_3-y_1\ ,$$

zatem

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)\right|$$

lub w innej postaci

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1 \end{vmatrix} \right|,$$

Wyznacznik występujący we wzorze na S równa się wyznacznikowi

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2-x_1, & y_2-y_1, & 0 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1, & 0 \end{vmatrix},$$

o czym przekonujemy się, rozwijając ostatni wyznacznik według elementów trzeciej kolumny.

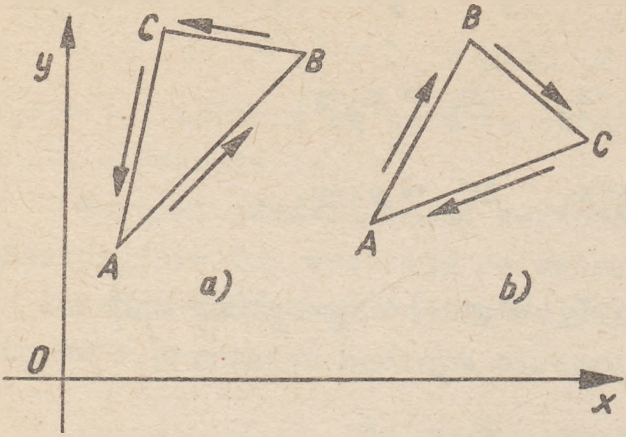
Wyznacznik ten nie zmieni wartości, jeżeli elementy pierwszego wiersza dodamy do elementów wiersza 2-go i 3-go, otrzymamy wtedy

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

Pole więc trójkąta ABC wyraża się wzorem

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} \right| \qquad (17)$$

Gdybyśmy we wzorze nie uwzględnili znaku bezwzględnej wartości, to pole trójkąta wyraziłoby się liczbą dodatnią lub ujemną w zależności od tego, czy obiegając trójkąt ABC wzdłuż boków AB, BC, CA, mamy obszar trójkąta po lewej (rys. 56a), czy też po prawej ręce (rys. 56 b).



Rys. 56

Do sprawy znaku pola trójkąta wrócimy przy rozważaniach na temat orientacji układu wektorów.

P o l e   t r ó j k ą t a   w   p r z e s t r z e n i

Dany jest prostokątny układ Oxyz oraz trójkąt ABC, określony współrzędnymi wierzchołków :

$$A\,(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2),\ C(x_3, y_3, z_3).$$

Wykażemy, że pole trójkąta wyraża się wzorem

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1, & x_1, & 1 \\ z_2, & x_2, & 1 \\ z_3, & x_3, & 1 \end{vmatrix}^2} \qquad (18)$$

W dowodzie skorzystamy z twierdzenia (str. 39) :
Jeżeli S jest polem trójkąta, a φ kątem nachylenia płaszczyzny trójkąta do płaszczyzny rzutu ε, to pole S' rzutu trójkąta równa się $S \cos \varphi$

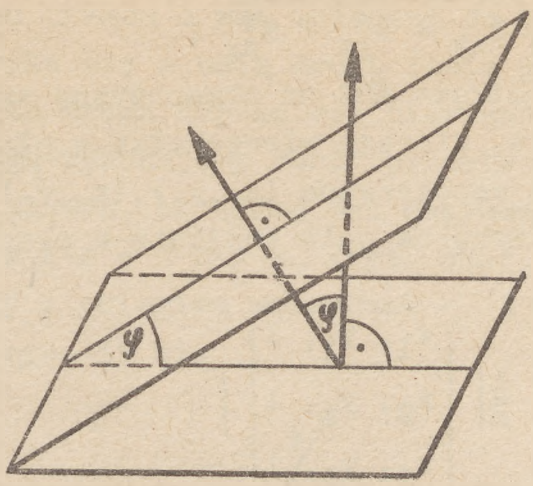
Oznaczając przez S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} pola rzutów trójkąta na płaszczyzny układu współrzędnych xy, yz, zx, a przez α, β, γ kąty płaszczyzny trójkąta z płaszczyznami układu mamy:

$$S_{xy} = S \cos \alpha\,,$$

$$S_{yz} = S \cos \beta\,,$$

$$S_{zx} = S \cos \gamma\,,$$

Miarą kąta dwuściennego jest kąt liniowy równy kątowi między dwiema osiami prostopadłymi odpowiednio do ścian



Rys. 57

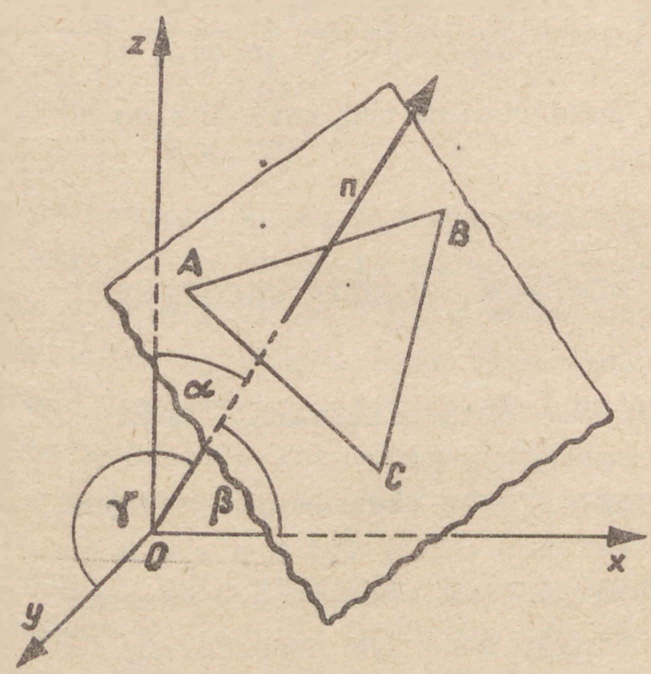
kąta dwuściennego (rys. 57).
Jeżeli więc dany jest trójkąt ABC w układzie Oxyz i z początku układu wystawimy oś n, prostopadłą do płaszczyzny trójkąta (rys. 58), to ponieważ

oś z jest prostopadła do płaszczyzny xy, oś n jest prostopadła do płaszczyzny trójkąta, więc

$$\sphericalangle(z, n) = \alpha,$$

Ponieważ oś x jest prostopadła do płaszczyzny yz, a oś n jest prostopadła do płaszczyzny trójkąta, więc

$$\sphericalangle(x,n) = \beta .$$



Rys. 58

Z podobnych względów $\sphericalangle(y,n)=\gamma$
Cosinusy kątów α, β, γ jako cosinusy kierunkowe osi n spełniają związek

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Możemy zapisać :

$$S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2 = S^2\cos^2\alpha + S^2\cos^2\beta + S^2\cos^2\gamma = S^2,$$

skąd

$$S = \sqrt{S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2}\ ; \tag{19}$$

S_{xy} jest polem rzutu trójkąta ABC na płaszczyznę xy, jest więc polem trójkąta, którego wierzchołki w płaszczyźnie układu Oxy mają współrzędne (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3). Na podstawie wzoru na pole trójkąta w płaszczyźnie układu pole

$$S_{xy} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Podobnie S_{yz} jest polem trójkąta w płaszczyźnie Oyz o wierzchołkach (y_1,z_1), (y_2,z_2), (y_3,z_3), a S_{zx} polem trójkąta w płaszczyźnie Ozx o wierzchołkach (z_1,x_1), (z_2,x_2), (z_3,x_3). Zatem

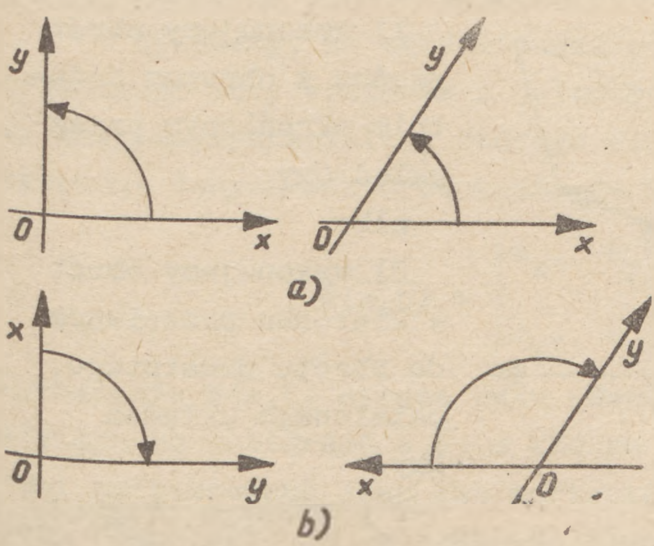
$$S_{yz} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} \right| \qquad S_{zx} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} z_1, & x_1, & 1 \\ z_2, & x_2, & 1 \\ z_3, & x_3, & 1 \end{vmatrix} \right|$$

Podstawiając otrzymane pola rzutów trójkąta ABC do (19), otrzymamy wzór (18).

§ 7. ORIENTACJA UKŁADU WEKTORÓW, ILOCZYN WEKTOROWY.

1. Układy osi prawoskrętne i lewoskrętne na płaszczyźnie.

Mając na płaszczyźnie dany układ współrzędnych Oxy będziemy go uważać za *uporządkowaną parę osi* t.zn. za parę, w której oś x uważamy za pierwszą, oś y - za drugą. Poza tym płaszczyznę układu Oxy uważamy za płaszczyznę zorientowaną, dla której za dodatni kierunek obrotu przyjęto kierunek, w którym należy obrócić pierwszą oś (t.zn.oś x) dookoła początku układu o kąt mniejszy od półpełnego, by oś ta pokryła się z osią drugą (osią y). Jeżeli przy sprowadzaniu drogą obrotu osi pierwszej do pokrycia z osią drugą wykonujemy obrót przeciwny do obiegu wskazówek zegara, to układ osi nazywamy u k ł a d e m p r a w o s k r ę t n y m (rys. 59a), jeżeli obrót jest zgodny z obiegiem wskazówek - l e w o s k r ę t n y m (rys. 59 b).



Rys. 59

Na ogół na płaszczyźnie będziemy się posługiwać układami prawoskrętnymi.

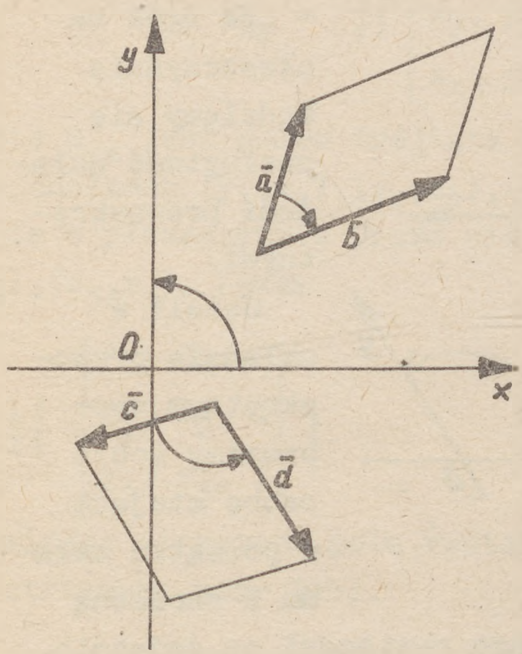
Jeżeli w układzie prawoskrętnym wyobrazimy sobie osobę stojącą w początku układu i zwróconą twarzą do obszaru kąta, którego ramionami są dodatnie półosi układu, to osoba ta chcąc sprowadzić oś x do pokrycia z osią y drogą obrotu winna użyć prawej ręki. W układzie lewoskrętnym, żeby tego dokonać, musi posłużyć się lewą ręką.

Reguła ta pozwala z łatwością rozpoznać rodzaj układu osi - będziemy ją nazywać regułą "człowieczka".

2. <u>Orientacja pary wektorów na płaszczyźnie</u>.

Niech w układzie prostokątnym Oxy będzie dana u p o r z ą d k o w a n a para w e k t o r ó w niezerowych $\overline{a},\overline{b}$,t.zn. para, w której za wektor pierwszy uważamy wektor wymieniony na pierwszym miejscu, za drugi - wektor podany na drugim miejscu. Niech składowymi tych wektorów będą odpowiednio liczby a_x, a_y oraz b_x, b_y.

Jeżeli wektory te nie są kolinearne, to po sprowadzeniu do wspólnego punktu zaczepienia możemy na nich "rozpiąć" równoległobok (rys. 60). Sprowadzając teraz wektor pierwszy drogą obrotu o kąt możliwie najmniejszy do pokrycia z wektorem drugim, możemy spotkać jeden z dwóch następujących przypadków :



Rys. 60

1) wykonujemy obrót zgodny z obrotem dodatnim określonym przez układ Oxy

albo

2) wykonujemy obrót w kierunku przeciwnym do obrotu dodatniego, ustalonego układem Oxy.

W pierwszym przypadku mówimy, że uporządkowana para wektorów $\bar{a}, \bar{b}$ posiada o r i e n t a c j ę z g o d n ą z układem Oxy, w drugim przypadku - o r i e n t a c j ę n i e z g o d n ą (przeciwną).

Jeżeli np. dany układ Oxy jest prawoskrętny i para uporządkowana wektorów $\bar{a}, \bar{b}$ jest zgodnie zorientowana, to para ta stanowi prawoskrętny układ wektorów; jeżeli natomiast para wektorów jest niezgodnie zorientowana, to para ta tworzy lewoskrętny układ wektorów.

Przy ocenie orientacji pary wektorów można posłużyć się regułą "człowieczka", podaną dla rozróżnienia układów prawo i lewoskrętnych osi. W tym przypadku należy "człowieczka" ustawić we wspólnym punkcie zaczepienia wektorów, twarzą do pola równoległoboku rozpiętego na wektorach. Jeżeli przy obrocie pierwszego wektora "człowieczek" musi użyć lewej ręki, to para wektorów jest lewoskrętna, jeżeli prawej - to prawoskrętna. Para $\bar{a},\bar{b}$ na rys. 60 jest niezgodnie zorientowana z układem współrzędnych, zaś para $\bar{c},\bar{d}$, - zgodnie zorientowana.

Wykażemy, że zgodność względnie niezgodność orientacji pary wektorów z układem Oxy wiąże się ze znakiem wyznacznika, którego elementami są składowe danych wektorów t.zn. ze znakiem

$$W(\bar{a},\bar{b}) = \begin{vmatrix} a_x, & a_y \\ b_x, & b_y \end{vmatrix}$$

Wyznacznik $W(\bar{a},\bar{b})$ wyraża pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\bar{a},\bar{b}$, w którym kąt między wektorami potraktowano jako kąt zorientowany. Istotnie pole równoległoboku wyraża się iloczynem długości boków przez sinus kąta zawartego między tymi bokami, czyli

$$S = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin \sphericalangle (\widehat{a\ b}) \qquad (1)$$

Ponieważ

$$\sin \sphericalangle (\widehat{a\ b}) = \frac{a_x b_y - a_y b_x}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}\,, \quad ^{x)}$$

więc

$$S = a_x b_y - a_y b_x = W\,(\bar{a},\bar{b})$$

Znak S a przez to $W(\bar{a},\bar{b})$ jest zgodny ze znakiem $\sin (\widehat{a,b})$. Znak zaś $\sin (\widehat{a,b})$, jak łatwo zauważyć, jest tylko wtedy dodatni, gdy wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są zgodnie zorientowane z układem Oxy i ujemny - gdy są niezgo-

x) str.51 wzór 11a

dnie zorientowane.

Słuszne więc jest twierdzenie:

Jeżeli para wektorów $\bar{a}, \bar{b}$ jest zgodnie zorientowana z układem Oxy, to $W(\bar{a},\bar{b}) > 0$, jeżeli niezgodnie zorientowana - to $W(\bar{a}, \bar{b}) < 0$ i odwrotnie.

Wniosek:

Jeżeli w parze $\bar{a},\bar{b}$ zmienimy porządek wektorów, to para zmieni orientację na przeciwną. Istotnie, jeżeli dana jest para $\bar{a}, \bar{b}$ dla której $W(\bar{a},\bar{b}) > 0$ i utworzymy parę $\bar{b},\bar{a}$, to

$$W(\bar{b},\bar{a}) = \begin{vmatrix} b_x, & b_y \\ a_x, & a_y \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_x, & a_y \\ b_x, & b_y \end{vmatrix} = - W(\bar{a},\bar{b}),$$

czyli $W(\bar{b},\bar{a}) < 0$

Rozważając na str. 56 pole trójkąta ABC stwierdziliśmy, że pole to wyraża się liczbą dodatnią lub ujemną w zależności od tego, czy obiegając trójkąt ABC wzdłuż boków AB, BC, CA mamy obszar trójkąta po lewej, czy też po prawej stronie. Obecnie, po wprowadzeniu pojęcia orientacji dwóch wektorów możemy powiedzieć, że pole trójkąta jest dodatnie lub ujemne, zależnie od tego czy para wektorów AB i AC posiada orientację zgodną z układem współrzędnych, czy też niezgodną.

Rozważymy jeszcze przypadek, gdy $W(\bar{a},\bar{b}) = 0$. Okażemy, że w tym przypadku wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są kolinearne. Z równości

$$a_x b_y - a_y b_x = 0$$

wynika proporcja

$$\frac{a_x}{b_y} = \frac{a_y}{b_y},$$

znana nam jako warunek równoległości wektorów. Słuszne jest również twierdzenie odwrotne. Mając bowiem

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \lambda$$

możemy napisać

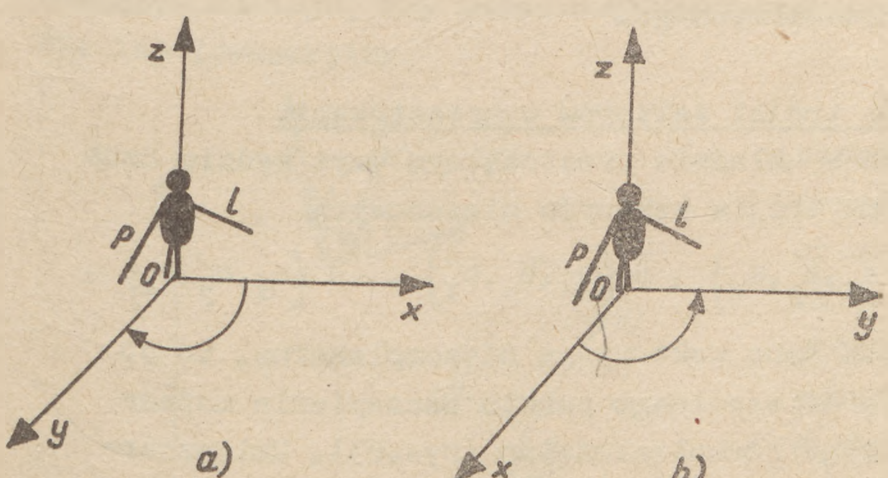
$$a_x = \lambda\, b_x\ ,\ a_y = \lambda\, b_y ,$$

a dalej

$$W(\bar{a},\bar{b}) = \begin{vmatrix} \lambda b_x, & \lambda\, b_y \\ b_x, & b_y \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} b_x, & b_y \\ b_x, & b_y \end{vmatrix} = 0$$

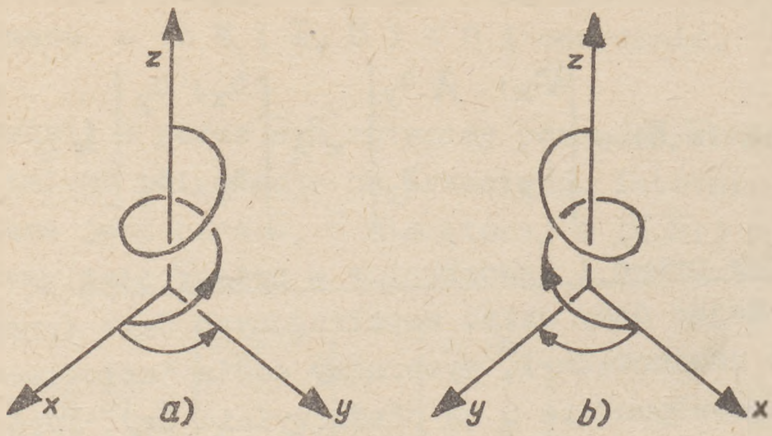
3. Układy prawo i lewoskrętne w przestrzeni.

Mając dany układ współrzędnych Oxyz (prostokątny lub ukośnokątny), wyobraźmy sobie "człowieczka" stojącego w punkcie O na płaszczyźnie Oxy, zwróconego głową w kierunku dodatnim osi z, a twarzą do I-szej ćwiartki układu Oxy, Jeżeli "człowieczek" ustawiony w opisanej pozycji ma oś x po lewej ręce (rys. 61a) to układ Oxyz nazywamy l e w o s k r ę t n y m, jeżeli po prawej ręce (rys.61 b) - p r a w o s k r ę t n y m.



Rys. 61

Przy rozróżnianiu układów prawo i lewoskrętnych możemy też posłużyć się pojęciem skrętu śruby. Mianowicie, jeżeli śrubę zgodnie skierowaną z osią z obracamy w kierunku obrotu dodatniego płaszczyzny Oxy i obrót ten jest obrotem śruby wkręcanej, to układ Oxyz nazywamy prawoskrętnym (rys. 62a), jeżeli obrót śruby jest obrotem śruby wykręcanej, to mamy układ lewoskrętny.



Rys. 62

Oczywiście umowa ta odnosi się do powszechnie używanych śrub, które są śrubami prawoskrętnymi. Gdyby śruba była lewoskrętna (rys. 62 b), to kierunek wkręcania byłby zgodny z kierunkiem dodatnim obrotu płaszczyzny Oxy układu lewoskrętnego.

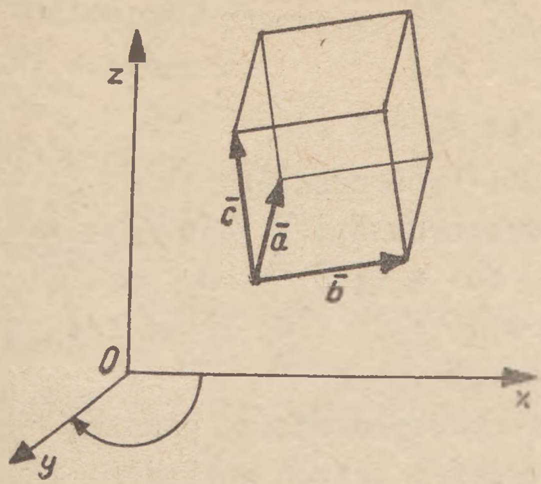
4. Orientacja trójki wektorów w przestrzeni.

Niech w układzie prostokątnym Oxyz będzie dana uporządkowana trójka wektorów niezerowych

$$\bar{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}, \quad \bar{b}\left\{b_x, b_y, b_z\right\}, \quad \bar{c}\left\{c_x, c_y, c_z\right\},$$

Jeżeli dane wektory są niekomplanarne, to po sprowadzeniu do wspólnego punktu zaczepienia możemy na nich rozpiąć równoległościan (rys.63). Umieszczając teraz "człowieczka" we wspólnym punkcie zaczepienia wektorów na płaszczyźnie równoległoboku rozpiętego na pierwszych dwóch wektorach, a opartego plecami o trzeci wektor, możemy spotkać jeden z dwóch przypadków:

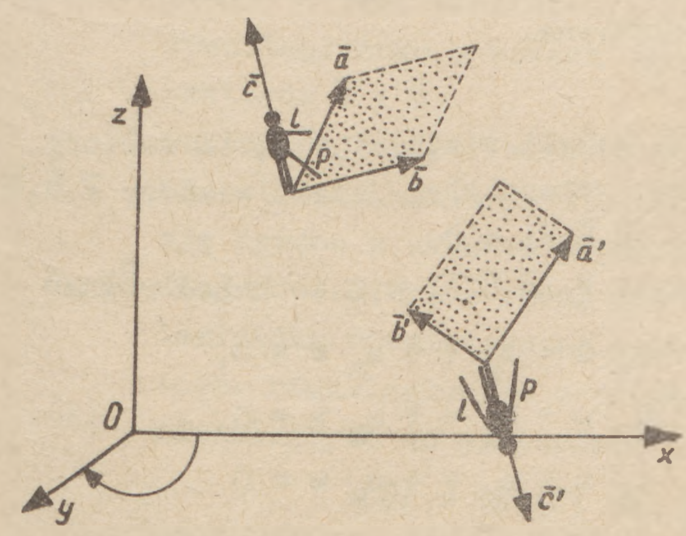
1) człowieczek obracając pierwszy wektor do pokrycia się z drugim użyje lewej ręki. W tym przypadku



Rys. 63

uporządkowaną trójkę wektorów nazywamy l e w o s k r ę t n ą i jeżeli układ Oxyz jest również lewoskrętny, to powiemy, że trójka wektorów posiada o r i e n t a c j ę z g o d n ą z układem współrzędnych, jeżeli natomiast układ Oxyz jest p r a w o s k r ę t n y to trójka wektorów posiada o r i e n t a c j ę n i e z g o d n ą (przeciwną).

2) człowieczek obracając pierwszy wektor do pokrycia się z drugim użyje prawej ręki. W tym przypadku uporządkowaną trójkę wektorów nazywamy prawoskrętną i zgodnie lub niezgodnie zorientowaną z układem Oxyz w zależności od tego, czy układ współrzędnych jest prawo, czy też lewoskrętny.



Rys. 64

Układ wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ przedstawiony na rysunku 64 jest układem lewoskrętnym, a więc zgodnie zorientowanym z układem Oxyz; układ $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$, jest układem prawoskrętnym.

W przestrzeni, podobnie jak na płaszczyźnie, orientacja układu trzech wektorów łączy się ze znakiem wyznacznika

$$W(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x, & a_y, & a_z \\ b_x, & b_y, & b_z \\ c_x, & c_y, & c_z \end{vmatrix}$$

Słuszne jest mianowicie twierdzenie:

Jeżeli układ trzech wektorów $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ jest zgodnie zorientowany z układem Oxyz, to $W(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) > 0$, jeżeli niezgodnie zorientowany, to $W(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) < 0$, Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

Dowód tego twierdzenia przeprowadzimy później przy omawianiu iloczynu mieszanego trzech wektorów. Pokażemy wtedy, że bezwzględna wartość wyznacznika $W(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ wyraża objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$.

Jeżeli w trójce uporządkowanej wektorów niekomplanarnych $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ przestawimy dwa wektory lub zmienimy zwrot jednego wektora na przeciwny, to orientacja trójki wektorów zmieni się na przeciwną. Wynika to bezpośrednio z wyznacznika $W(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$, który zmienia znak, gdy przedstawimy dwa wiersze lub elementom jednego wiersza zmienimy znaki na przeciwne.

Udowodnimy, że jeżeli $W(a,b,c) = 0$, to wektory $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ są komplanarne i odwrotnie, jeżeli wektory $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ są komplanarne, to $W(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 0$.

Istotnie, jeżeli $W(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 0$ to układ równań

$$\begin{aligned} a_x u + a_y v + a_z w &= 0, \\ b_x u + b_y v + b_z w &= 0, \qquad (2) \\ c_x u + c_y v + c_z w &= 0 \end{aligned}$$

ma rozwiązanie u,v,w, w którym nie wszystkie liczby u,v,w są zerami. Traktując liczby u,v,w jako współrzędne pewnego wektora $\bar{r}$, stwierdzamy na podstawie równań (2), że wektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, są do tego wektora prostopadłe a przez to równoległe do jednej płaszczyzny, mianowicie równoległe do płaszczyzny prostopadłej do wektora $\overline{r}$.

Odwrotnie, jeżeli wektory $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ są komplanarne z pewną płaszczyzną, to są prostopadłe do wektora niezerowego $\overline{r}\{u, v, w\}$, prostopadłego do tej płaszczyzny.

Z warunków prostopadłości 2 wektorów otrzymujemy układ (2), który posiada rozwiązanie niezerowe u,v,w, a wobec tego wyznacznik układu równań

$$W(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) = 0.$$

5. <u>Iloczyn wektorowy - określenie.</u>

Dany jest prostokątny układ współrzędnych Oxyz oraz para wektorów $\overline{a},\overline{b}$.

1) Jeżeli wektory $\overline{a}$ i $\overline{b}$ są niezerowe i niekolinearne, to ich i l o c z y n e m w e k t o r o w y m nazywamy wektor $\overline{c}$, spełniający następujące trzy warunki:

1° wektor $\overline{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny równoległoboku o bokach równoległych do wektorów $\overline{a}$ i $\overline{b}$,

2° wektor $\overline{c}$ jest tak skierowany, że uporządkowana trójka wektorów $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ posiada orientację zgodną z układem współrzędnych,

3° długość wektora $\overline{c}$ równa się mierze pola równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overline{a}$ i $\overline{b}$ t.zn. równoległoboku o długości boków $|\overline{a}|$ i $|\overline{b}|$, równoległych do wektorów $\overline{a}$ i $\overline{b}$, czyli

$$|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\overline{a}$ i $\overline{b}$.

2) Jeżeli wektory $\overline{a}$ i $\overline{b}$ są kolinearne lub chociaż jeden z nich jest wektorem zerowym, to ich iloczynem wektorowym nazywamy wektor zerowy.

Iloczyn wektorowy wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ oznaczamy symbolem $\bar{a} \times \bar{b}$. W podręcznikach spotyka się też inne symbole jak np. $[\bar{a},\bar{b}]$, $\bar{a}\wedge\bar{b}$, $V\,\bar{a}\,\bar{b}$.

Jeżeli $\bar{e}$ jest wektorem jednostkowym, posiadającym zwrot i kierunek wektora $\bar{a} \times \bar{b}$, to iloczyn wektorowy możemy napisać w postaci

$$\bar{a} \times \bar{b} = |\bar{a} \times \bar{b}|\,\bar{e}, \tag{3}$$

gdzie

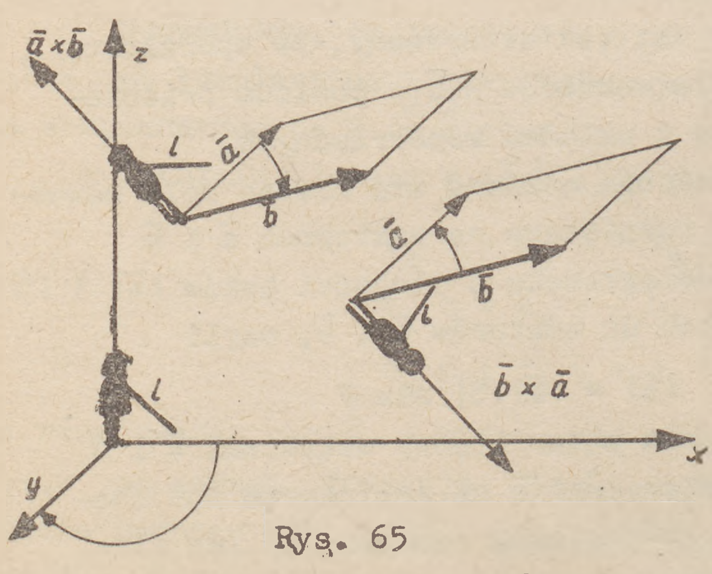
$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\,\sin\varphi\,. \tag{4}$$

6. <u>Własności i szczególne wartości iloczynu wektorowego.</u>

1) Do iloczynu wektorowego wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ nie stosuje się na ogół prawo przemienności t.zn.

$$\bar{a} \times \bar{b} \neq \bar{b} \times \bar{a}.$$

Jeżeli bowiem wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są niezerowe i niekolinearne to wektory $\bar{a} \times \bar{b}$ i $\bar{b} \times \bar{a}$ są równoległe (są prostopadłe do tej samej płaszczyzny), mają te same długości, co wynika z warunku 3°, różnią się jednak zwrotami, co zauważymy konstruując trójkę $\bar{a},\bar{b},\bar{a} \times \bar{b}$ i trójkę $\bar{b},\bar{a}, \bar{b} \times \bar{a}$ (rys.65).



Rys. 65

W tym przypadku wektory $\bar{a} \times \bar{b}$ i $\bar{b} \times \bar{a}$ są wektorami przeciwnymi, czyli

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}) \tag{5}$$

Jeżeli wektory $\bar{a},\bar{b}$ są kolinearne, lub chociaż jeden z nich jest wektorem zerowym, to w myśl definicji

$$\bar{a} \times \bar{b} = 0$$
$$\text{i} \quad \bar{b} \times \bar{a} = 0$$

czyli

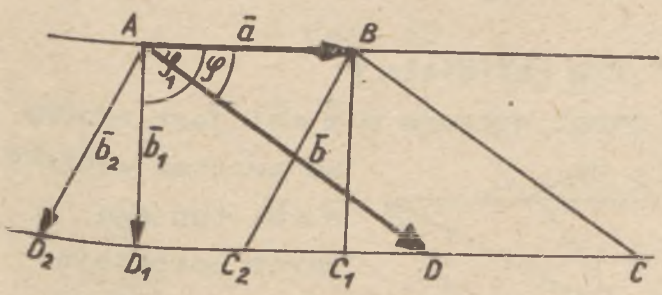
$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{a} = 0.$$

2). Iloczyny wektorowe wektorów jednostkowych układu prostokątnego Oxyz.

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że

$$\begin{aligned} &\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}, \\ &\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}, \ \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}, \ \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}, \\ &\bar{i} \times \bar{i} = 0, \ \bar{j} \times \bar{j} = 0, \ \bar{k} \times \bar{k} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

3) Ponieważ pola równoległoboków o wspólnej podstawie i równych wysokościach są równe (rys. 66), więc iloczyn wektorowy $\bar{a} \times \bar{b}$ nie zmieni się, jeżeli zachowując jeden z wektorów np. $\bar{a}$, drugi wektor $\bar{b}$ zastąpimy wektorem $\bar{b}_1$ tak dobranym, by pole równoległoboku rozpiętego na parze wektorów $\bar{a}, \bar{b}_1$ o kącie φ_1 spełniającym warunek $0 < \varphi_1 < \pi$ x/ równało się polu równoległoboku zbudowanemu na wektorach $\bar{a}$ i $\bar{b}$.



Rys. 66

4) Jeżeli m i n są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to słuszne są wzory:

$$(m\,\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (m\,\bar{b}) = m\,(\bar{a} \times \bar{b}) \tag{7}$$

$$(m\,\bar{a}) \times (n\,\bar{b}) = m\,n\,(\bar{a} \times \bar{b}) \tag{8}$$

x/ Jeżeli warunek ten jest spełniony, to zachowana jest orientacja układu wektorów $\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{a} \times \bar{b}_1$

W dowodzie wzoru (7) należy uwzględnić różne przypadki w zależności od wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ oraz znaku liczby m. Dla przykładu przeprowadzimy dowód w przypadku, gdy $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są niezerowe i niekolinearne i $m > 0$.

1°. Wektory $(m\bar{a}) \times \bar{b}$, $\bar{a} \times (m\bar{b})$, $m(\bar{a} \times \bar{b})$ posiadają ten sam kierunek, są bowiem prostopadłe do płaszczyzny równoległoboku o bokach równoległych do $\bar{a}$ i $\bar{b}$.

2°. Wektory te są równej długości, gdyż

$|m\bar{a} \times \bar{b}| = |m\bar{a}||\bar{b}| \sin\varphi = m|\bar{a}||\bar{b}| \sin\varphi$

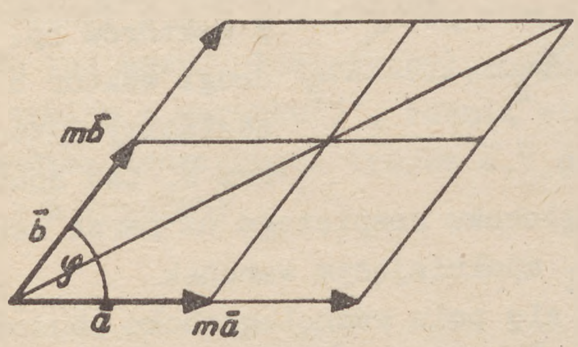
gdzie φ jest kątem między wektorami $\bar{a}$ i $\bar{b}$, również

$|\bar{a} \times m\bar{b}| = |\bar{a}||m\bar{b}| \sin\varphi = m|\bar{a}||\bar{b}| \sin\varphi$

oraz

$|m(\bar{a} \times \bar{b})| = m|\bar{a}||\bar{b}| \sin\varphi$

3°. Przy $m > 0$ zwrot wektora $m(\bar{a} \times \bar{b})$ jest zgodny ze zwrotem wektora $\bar{a} \times \bar{b}$; ten sam zwrot posiadają również wektory $(m\bar{a}) \times \bar{b}$ i $\bar{a} \times m\bar{b}$ gdyż orientacja trójek wektorów:



Rys. 67

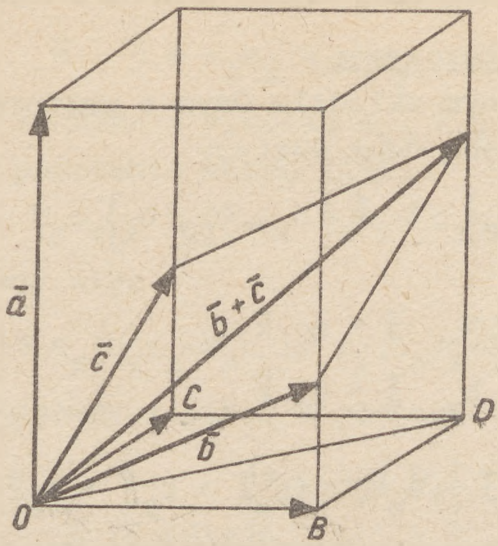
$\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}$,
$m\bar{a}, \bar{b}, m\bar{a} \times \bar{b}$,
$\bar{a}, m\bar{b}, \bar{a} \times m\bar{b}$

jest zgodna, o czym można przekonać się, badając znak wyznacznika W dla każdej trójki.

5. Do iloczynu wektorowego stosuje się prawo rozdzielności względem dodawania tzn. słuszna jest równość :

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} \qquad (9)$$

Dowód w przypadku, gdy wektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ są niekomplanarne (rys. 68):



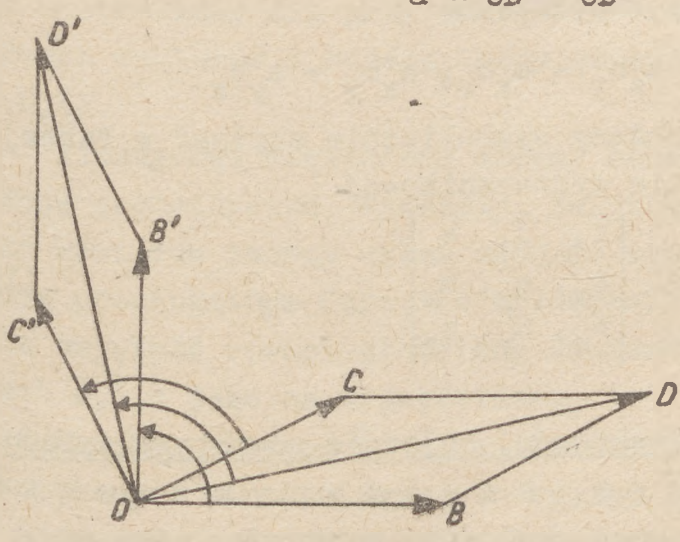
Rys. 68

Zgodnie z własnością 3) iloczynu wektorowego mamy

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \overline{OB}$$
$$\bar{a} \times \bar{c} = \bar{a} \times \overline{OC} \qquad (10)$$
$$\bar{a} \times (\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a} \times \overline{OD},$$

a dalej, jeżeli rys.69 przedstawia podstawę równoległościanu prostego i punkty B', C', D' są punktami leżącymi w płaszczyźnie tej podstawy, to

$$\bar{a} \times \overline{OB} = \overline{OB}'$$
$$\bar{a} \times \overline{OC} = \overline{OC}' \qquad (11)$$
$$\bar{a} \times \overline{OD} = \overline{OD}'$$



Rys. 69

przy czym długości wektorów $\overline{OB}'$, $\overline{OC}'$, $\overline{OD}'$ w myśl określenia iloczynu wektorowego są odpowiednio równe:

$$|\bar{a}| \cdot |\overline{OB}|,$$
$$|\bar{a}| \cdot |\overline{OC}|,$$
$$|\bar{a}| \cdot |\overline{OD}|.$$

Wektory więc $\overline{OB}'$, $\overline{OC}'$, $\overline{OD}'$ otrzymujemy z wektorów $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ przez obrót tych wektorów w płaszczyźnie podstawy równoległościanu o kąt prosty i wydłużenie lub skrócenie w tym samym stosunku równym $|\bar{a}|$. Czworokąt OB'D'C' jako podobny do OBDC jest równoległobokiem, wobec tego

$$\overline{OD}' = \overline{OB}' + \overline{OC}'.$$

Po uwzględnieniu równości (11) i (10) otrzymujemy

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$$

7. Składowe iloczynu wektorowego.

Niech w prostokątnym układzie Oxyz o wektorach jednostkowych $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ będą dane wektory

$$\bar{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\} \quad i \quad \bar{b}\left\{b_x, b_y, b_z\right\}$$

Wtedy

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k},$$

$$\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k},$$

a dalej

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}) \times (b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k})$$

Korzystając z poznanych praw dla iloczynu wektorowego otrzymujemy

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k} \qquad (12)$$

Wektor więc $\bar{a} \times \bar{b}$ ma współrzędne:

$$a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x$$

Związek (12) możemy symbolicznie zapisać w łatwej do zapamiętania formie wyznacznikowej :

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i}, & \bar{j}, & \bar{k} \\ a_x, & a_y, & a_z \\ b_x, & b_y, & b_z \end{vmatrix} \qquad (13)$$

8. Iloczyn mieszany wektorów, objętość równoległościanu.

I l o c z y n e m   m i e s z a n y m   w e k t o r ó w nazywamy iloczyn skalarny, w którym jeden z czynników występuje w postaci iloczynu wektorowego.

Jeżeli dane są trzy wektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, to iloczynem mieszanym jest np. iloczyn skalarny $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$

Wyrazimy iloczyn mieszany $\bar{a}\,(\bar{b} \times \bar{c})$ przez składowe wektorów $\bar{a}\left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, $\bar{b}\left\{b_x, b_y, b_z\right\}$, $\bar{c}\left\{c_x, c_y, c_z\right\}$

Iloczyn mieszany jest iloczynem skalarnym i wobec tego możemy posłużyć się znanym wzorem, wyrażającym iloczyn skalarny przez składowe dwóch wektorów:

$$\overline{m} \cdot \overline{n} = m_x n_x + m_y n_y + m_z n_z$$

Składowe wektora $\overline{a}$ wynoszą a_x, a_y, a_z, wektora zaś $\overline{b} \times \overline{c}$ na podstawie wzoru (13):

$$b_y c_z - b_z c_y, \quad b_z c_x - b_x c_z, \quad b_x c_y - b_y c_x$$

Otrzymujemy więc

$$\overline{a}\,(\overline{b} \times \overline{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x),$$

co dalej możemy zapisać w postaci

$$\overline{a}\,(\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x, & a_y, & a_z \\ b_x, & b_y, & b_z \\ c_x, & c_y, & c_z \end{vmatrix} \tag{14}$$

Z wyznacznikiem stojącym po prawej stronie tej równości spotkaliśmy się przy omawianiu orientacji układu trzech wektorów i oznaczyliśmy go symbolem $W(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$.

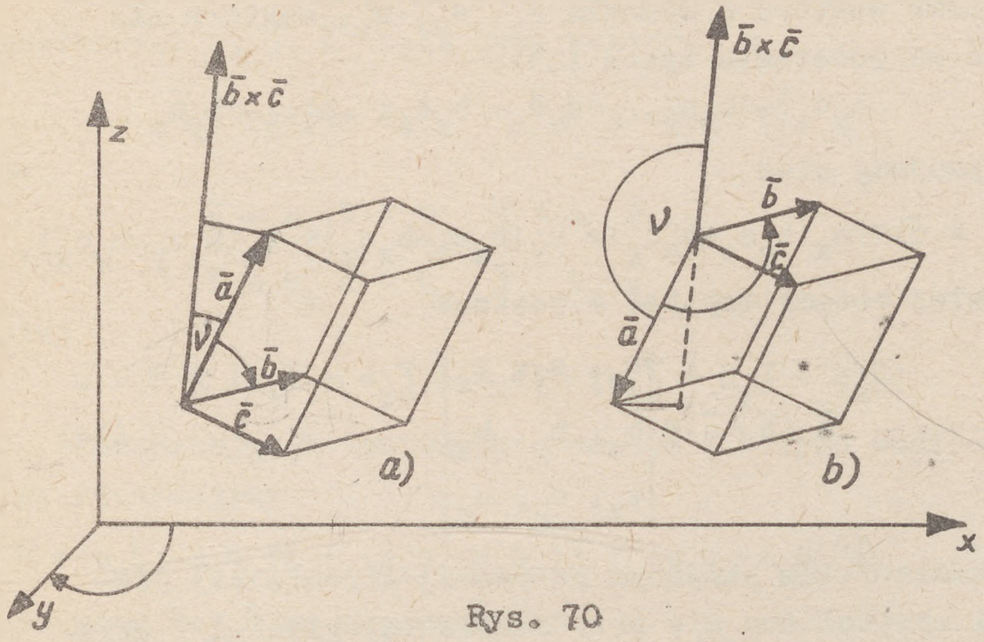
Iloczynowi mieszanemu możemy nadać ważną interpretację geometryczną. Wykażemy, że jeżeli uporządkowana trójka wektorów tworzy układ zgodnie zorientowany z układem prostokątnym Oxyz, to wyznacznik $W(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ wyraża objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ jako na krawędziach.
Jeżeli trójka wektorów $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ tworzy układ niezgodnie zorientowany z układem Oxyz, to wyznacznik $W(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ jest ujemny i wtedy jego bezwzględna wartość wyraża objętość równoległościanu.

Ujmując oba przypadki razem możemy powiedzieć, że niezależnie od orientacji układu wektorów $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ bezwzględna wartość wyznacznika $W(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ wyraża objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ jako na krawędziach.

Istotnie, na podstawie definicji iloczynu skalarnego mamy

$$\bar{a}\,(\bar{b}\times\bar{c}) = |\bar{a}|\,|\bar{b}\times\bar{c}|\cos V,$$

gdzie V jest kątem między wektorem $\bar{a}$ i $\bar{b}\times\bar{c}$.

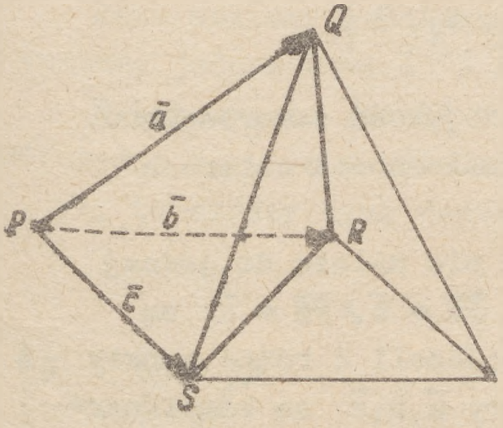


Rys. 70

Długość $|\bar{b}\times\bar{c}|$ równa się polu równoległoboku, który jest podstawą równoległościanu.
Iloczyn $|\bar{a}|\cos V$ wyraża miarę rzutu wektora $\bar{a}$ na oś określoną wektorem $\bar{b}\times\bar{c}$, który jest prostopadły do podstawy równoległościanu. Iloczyn więc $|\bar{a}|\cos V$ w przypadku gdy $0 \leqslant V < \frac{\pi}{2}$, czyli gdy układ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ jest zgodnie zorientowany z układem Oxyz (rys. 70a) wyraża miarę wysokości równoległościanu.
W przypadku, gdy $V > \frac{\pi}{2}$, tj. gdy układ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ jest niezgodnie zorientowany z układem Oxyz (rys. 70 b), to $\cos V < 0$ i miara wysokości równoległościanu równa się bezwzględnej wartości iloczynu $|\bar{a}|\cos V$. W obu więc przypadkach bezwzględna wartość iloczynu mieszanego równa się iloczynowi miary pola podstawy równoległościanu i miary jego wysokości, czyli wyraża objętość równoległościanu.

9. Objętość czworościanu.

Czworościanem nazywamy ostrosłup o podstawie trójkątnej. Z geometrii elementarnej wiemy, że objętość ostrosłupa równa się $\frac{1}{3}$ objętości graniastosłupa o tej samej podstawie i wysokości. Jeżeli podstawą ostrosłupa jest równoległobok, to objętość ostrosłupa równa się $\frac{1}{3}$ objętości równoległościanu, zbudowanego na tej samej podstawie i na tej samej wysokości. Każdy czworościan możemy pod względem objętości uważać za połowę ostrosłupa o podstawie równoległoboku (rys. 71). Jeżeli więc czworościan zbudowano na wektorach $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ i jego objętość oznaczymy przez V, to mamy



Rys. 71

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} a_x, a_y, a_z \\ b_x, b_y, b_z \\ c_x, c_y, c_z \end{vmatrix}\right|$$

Jeżeli dane są wierzchołki czworościanu $P(x_1,y_1,z_1)$, $Q(x_2,y_2,z_2)$, $R(x_3,y_3,z_3)$, $S(x_4,y_4,z_4)$, to

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1, & z_3-z_1 \\ x_4-x_1, & y_4-y_1, & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|$$

lub

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 0, & x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ 0, & x_3-x_1, & y_3-y_1, & z_3-z_1 \\ 0, & x_4-x_1, & y_4-y_1, & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|$$

Dodając pierwszy wiersz wyznacznika do wierszy następnych, mamy

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & x_4, & y_4, & z_5 \end{vmatrix}\right|,$$

Przestawiając kolumny, co nie zmieni bezwzględnej wartości wyznacznika, otrzymamy

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix}\right|, \qquad (15)$$

Korzystając ze wzoru na objętość czworościanu, możemy łatwo podać warunek przynależności czterech punktów do jednej płaszczyzny.

Jeżeli 4 punkty P, Q, R, S nie należą do jednej płaszczyzny, to wektory $\overline{PQ} = \overline{a}$, $\overline{PR} = \overline{b}$, $\overline{PS} = \overline{c}$ są niekomplanarne i $W(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \neq 0$. Jeżeli 4 różne punkty należą do płaszczyzny, to wektory $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ są komplanarne i $W(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$.

Warunkiem więc koniecznym i dostatecznym przynależności punktów $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $R(x_3, y_3, z_3)$, $S(x_4, y_4, z_4)$ do jednej płaszczyzny jest

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (16)$$

§ 8. ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

1. Przesunięcie równoległe układu na płaszczyźnie i w przestrzeni.

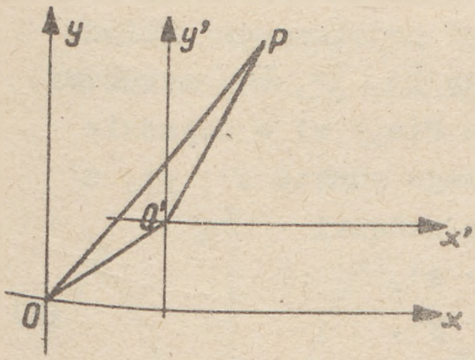
P r z e s u n i ę c i e   r ó w n o l e g ł e   u k ł a d u   n a   p ł a s z c z y ź n i e :

Mając na płaszczyźnie układu prostokątnego Oxy dany punkt O' (a,b), prowadzimy przez punkt O' dwie osi x' i y' zgodnie równoległe odpowiednio do osi x i y. Otrzymujemy nowy układ współrzędnych $O'x'y'$ (rys.72), zgodnie zorientowany z układem Oxy, o którym mówimy, że powstał przez p r z e s u n i ę c i e   r ó w n o l e g ł e układu Oxy do punktu O'.

Jako wektory podstawowe nowego układu przyjmujemy wektory jednostkowe $\overline{i}'$ i $\overline{j}'$.

Wykażemy, że jeżeli punkt P ma w układzie Oxy współrzędne x,y, a w układzie $O'x'y'$ współrzędne x', y', to między tymi współrzędnymi zachodzą związki

$$x = a + x' , \quad y = b + y' \qquad (1)$$



Rys. 72

Dowód: (I sposób)

Mamy (rys. 72), że

$$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P}$$

Występujące w tym związku wektory mają w układzie Oxy następujące współrzędne

$$\overline{OP}\ \{x,y\} , \quad \overline{OO'}\ \{a,b\} , \quad \overline{O'P}\ \{x', y'\}$$

Korzystając z twierdzenia, że współrzędne równają się sumie współrzędnych, otrzymujemy

$$x = a + x' \quad i \quad y = b + y'$$

II sposób.
Wychodząc ze związku

$$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P},$$

zapisujemy w postaci

$$x\,\overline{i} + y\,\overline{j} = a\,\overline{i} + b\,\overline{j} + x'\overline{i}' + y'\overline{j}'$$

Mnożąc obie strony równości skalarnie przez $\overline{i}$ i mając na uwadze, że $\overline{i}^2 = 1$, $\overline{j}\overline{i} = 0$, $\overline{i}'\overline{i} = 1$, $\overline{j}'\overline{i} = 0$ otrzymujemy

$$x = a + x'.$$

Z kolei mnożąc przez $\overline{j}$, otrzymamy

$$y = b + y'.$$

P r z e s u n i ę c i e r ó w n o l e g ł e układu w p r z e s t r z e n i.

Mając dany układ prostokątny Oxyz oraz punkt $O'(a,b,c)$, prowadzimy przez punkt O' trzy osi x', y', z', zgodnie równoległe odpowiednio do osi x,y,z. Otrzymujemy nowy układ $O'\,x'\,y'\,z'$ (rys.73) o którym mówimy, że powstał przez przesunięcie równoległe układu Oxyz do punktu O'.

Zakładając, że wektorami podstawowymi układu $O'x'y'z'$ są wektory jednostkowe $\overline{i}'$, $\overline{j}'$, $\overline{k}'$, wykażemy, że między współrzędnymi punktu $P(x,y,z)$ w układzie Oxyz, a współrzędnymi tego samego punktu x', y', z' w układzie $O'\,x'\,y'z'$ zachodzą związki

$$\begin{aligned} x &= a + x', \\ y &= b + y', \\ z &= c + z'. \end{aligned} \qquad (2)$$

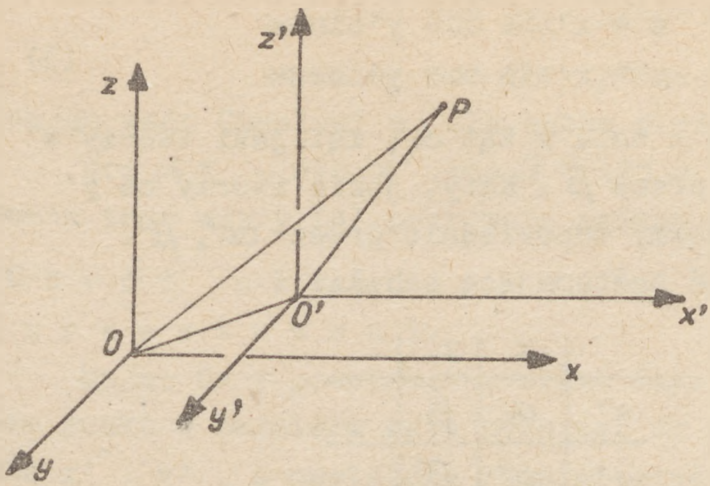
Dowód: Mamy (rys. 73), że

$$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P}\ ,$$

co możemy również zapisać w postaci.

$$x\,\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k} + x'\overline{i}' + y'\overline{j}' + z'\overline{k}'.$$

Mnożąc skalarnie strony tej równości kolejno przez $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ i uwzględniając wartości iloczynów



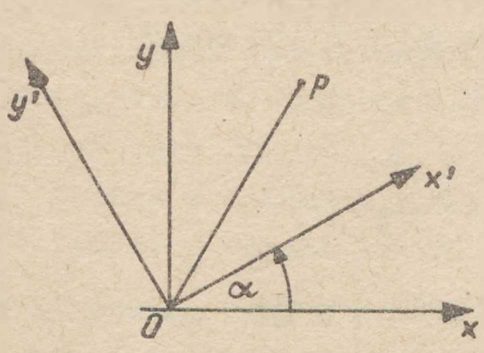
skalarnych, których czynniki są wektorami jednostkowymi, otrzymamy związki (2)

Rys. 73

2. Obrót układu współrzednych na płaszczyźnie i w przestrzeni.

1) O b r ó t   u k ł a d u   w s p ó ł r z ę d n y c h   n a   p ł a s z c z y ź n i e.

Mając na płaszczyźnie dany prostokątny układ Oxy, prowadzimy przez punkt O dwie nowe osi - oś x', tworząca z osią x kąt α oraz oś y', prostopadłą do osi x', nadając jej taki zwrot, by układ Ox' y' posiadał orientację zgodną z orientacją układu Oxy (rys.74).



Rys. 74

O układzie Ox' y' mówimy, że powstał z układu Oxy przez o b r ó t dookoła punktu O o kąt α.

Kąt α nazywamy kątem obrotu.

Wektory jednostkowe $\bar{i}, \bar{j}$ układu Oxy przejdą po obrocie o kąt α w wektory jednostkowe, które oznaczymy przez $\bar{i}'$, $\bar{j}'$.

Wykażemy, że jeżeli punkt P ma w układzie Oxy współrzędne x,y, a w układzie Ox' y' współrzędne x'y', to między tymi współrzędnymi zachodzą związki :

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \qquad (3)$$

Dowód: Oś x'tworzy z osią x kąt α; kąt jaki tworzy x' z osią y oznaczmy przez β. Kąty, jakie tworzy oś y' z osiami x,y, oznaczmy odpowiednio przez α', β'. Dane te możemy ująć następującą tabelą

	x	y
x'	α	β
y'	α'	β'

która ułatwi nam odczytywanie kątów między osiami. Tak np. jeżeli chcemy z tabeli odczytać kąt między osią y' a osią y, to znajdziemy go na skrzyżowaniu wiersza y' z kolumną y - jest to kąt β'.

Ponieważ wektory jednostkowe $\bar{i}, \bar{j}, \bar{i}', \bar{j}'$, leżą na osiach i mają ich zwroty więc tabela ta podaje nam również kąty między wektorami jednostkowymi. Kąt między wektorem $\bar{i}$ a $\bar{j}'$ odczytujemy na skrzyżowaniu kolumny x z wierszem y', otrzymując α'

Z łatwością więc możemy wyznaczyć wartości następujących iloczynów skalarnych:

$$\bar{i}\bar{i}' = \cos\alpha \ , \ \bar{j}\,\bar{i}' = \cos\beta$$
$$\bar{i}\bar{j}' = \cos\alpha' \ , \ \bar{j}\,\bar{j}' = \cos\beta'$$

Z określenia współrzędnych punktu wynika

$$\overline{OP} = x\bar{i} + y\bar{j},$$
$$\overline{OP} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}',$$

skąd otrzymujemy równość

$$x\bar{i} + y\bar{j} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}'$$

Jeżeli strony tej równości pomnożymy skalarnie kolejno przez $\bar{i}$ i $\bar{j}$ i uwzględnimy podane wyżej wartości iloczynów skalarnych oraz wartości iloczynów

$$\bar{i}^2 = 1, \ \bar{j}\bar{i} = 0, \ \bar{j}^2 = 1$$

otrzymamy

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' \qquad (4)$$

$$y = x' \cos\beta + y' \cos\beta'$$

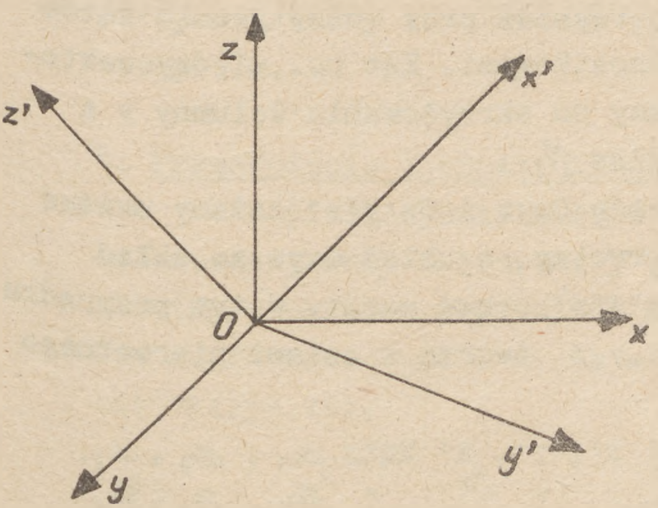
Stosując wzór Chasles' a dla kątów otrzymamy

$$\cos\alpha = -\sin\alpha', \cos\beta = \sin\alpha, \cos\beta' = \cos\alpha$$

i wobec tego wzory (4) przyjmują postać (3)

2) O b r ó t u k ł a d u w s p ó ł r z ę d n y c h w p r z e s t r z e n i.

Mając dany prostokątny układ Oxyz prowadzimy przez punkt O najpierw dwie nowe osi do siebie prostopadłe x', y', a następnie również przez punkt O trzecią oś z', prostopadłą do płaszczyzny Ox'y', nadając jej taki zwrot dodatni, by układ Ox'y'z' był zgodnej orientacji z układem Oxyz (rys.75).



Rys. 75

O układzie Ox'y'z' mówimy, że powstał z układu Oxyz przez obrót dokoła punktu O.

Niech wektorami podstawowymi układu Ox'y'z' będą wektory jednostkowe $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$, i niech oś x' tworzy z osiami x,y,z kąty α_1, β_1, γ_1,
oś y' tworzy z osiami x,y,z kąty α_2, β_2, γ_2,
oś z' tworzy z osiami x,y,z kąty α_3, β_3, γ_3.

Dane te możemy ująć w postaci tabeli :

	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

(5)

co podobnie jak na płaszczyźnie pozwoli nam na łatwe odczytanie kątów między osiami.
Kąt np. między osiami y' i z odczytujemy na skrzyżowaniu wiersza y' z kolumną z, otrzymując γ_2 , Z uwagi na to, że wektory jednostkowe $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ i $\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'$ leżą na osiach układów i mają zwroty osi, możemy tabelą tą posłużyć się również przy odczytywaniu kątów między wektorami jednostkowymi. Kąt np. między wektorem $\bar{j}$ i $\bar{k}'$ odczytujemy na skrzyżowaniu kolumny y z wierszem z', otrzymując β_3 .

Mając dwa układy Oxyz i Ox'y'z' możemy uważać układ Ox'y'z' za pierwotny, a układ Oxyz za układ uzyskany z układu Ox'y'z' przez obrót. W tym przypadku osie nowego układu x,y,z tworzą z osiami pierwotnego układu kąty:

oś x z osiami x', y', z' kąty α_1 , α_2 , α_3,
" y " " " β_1 , β_2 , β_3,
" z " " " γ_1 , γ_2 , γ_3

Kąty te możemy odczytać z podanej tabeli.

Wykażemy, że jeżeli punkt P ma w układzie Oxyz współrzędne x,y,z, a w układzie Ox'y'z' współrzędne x' , y' , z', to między współrzędnymi punktu zachodzą związki:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned} \qquad (6)$$

i odwrotnie:

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 \\
y' &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 \qquad (7)\\
z' &= x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3 .
\end{aligned}
$$

Dowód: Jeżeli x, y, z są współrzędnymi punktu P w układzie Oxyz, a x', y', z' w układzie Ox'y'z', to zgodnie z określeniem współrzędnych punktu mamy

$$\overline{OP} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k},$$
$$OP = x'\overline{i}' + y'\overline{j}' + z'\overline{k}'$$

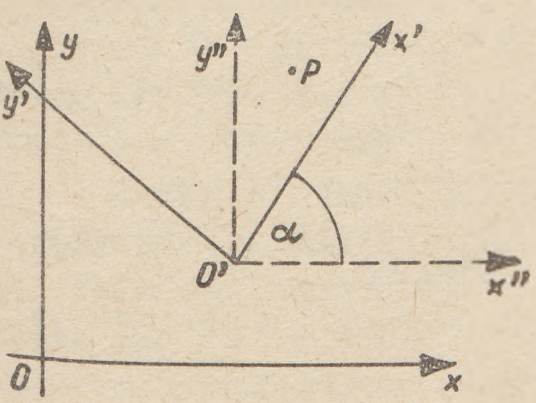
Porównując prawe strony tych równości, otrzymamy

$$x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} = x'i' + y'\overline{j}' + z'\overline{k}'$$

Mnożąc równanie skalarnie kolejno przez $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ otrzymamy wzory (6), mnożąc zaś przez $\overline{i}'$, $\overline{j}'$, $\overline{k}'$,- wzory (7).

3. <u>Przesunięcie i obrót układu współrzędnych.</u>

Na płaszczyźnie układu prostokątnego Oxy niech będzie dany inny układ O'x'y', prostokątny i równoskrętny z układem Oxy. Niech punkt O' ma w układzie Oxy współrzędne a,b i niech oś x' tworzy z osią x kąt α (rys.76).



Rys. 76

Wykażemy, że jeżeli punkt P ma w układzie Oxy współrzędne x, y, a w układzie O' x' y' - współrzędne x', y', to zachodzą związki

$$
\begin{aligned}
x &= a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\
y &= b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Dowód: Dla dowodu wprowadzimy trzeci układ współrzędnych O'x" y" o osiach zgodnie równoległych z osiami układu Oxy.

Jeżeli punkt P w układzie Ox" y" ma współrzędne x'', y'', to na podstawie wzorów (1) między współrzędnymi punktu P w układzie Oxy i w układzie O'x" y" zachodzą związki

$$x = a + x'', \quad y = b + y'' \tag{9}$$

Układ $O'x'y'$ możemy uważać za układ powstały z układu $O'x''\,y''$ przez obrót dokoła punktu O' o kąt α. Między współrzędnymi $x''\,y''$ punktu P w układzie $O'\,x''y''$ a współrzędnymi $x'y'$ w układzie $O'x'y'$ zachodzą w myśl wzorów (3) związki

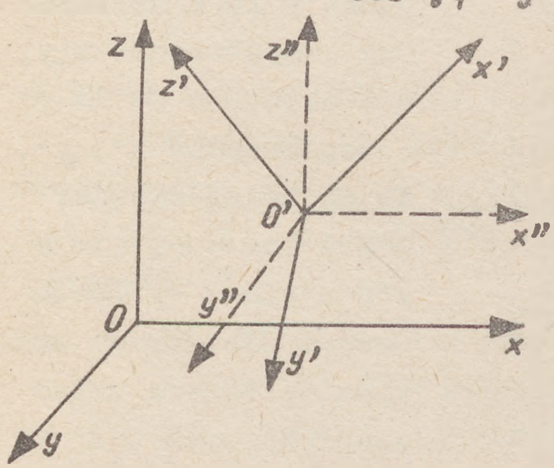
$$x'' = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y'' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

Podstawiając te wyrażenia na x'' i y'' do związków (9), otrzymamy wzory (8).

W rozumowaniu uważaliśmy układ $O'x'y'$ za układ powstały z układu Oxy przez przesunięcie równoległe do punktu O', a następnie przez obrót o kąt α dokoła punktu O'. Do tych samych wyników doszlibyśmy, gdybyśmy układ Oxy najpierw obrócili o kąt α dokoła punktu O, a następnie przesunęli go równolegle do punktu O'.

Postępując podobnie dla przestrzeni trójwymiarowej (rys. 77) otrzymamy wzory:

$$\begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y &= b + x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z &= c + x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{aligned} \tag{10}$$



Rys. 77

W tym przypadku przesuwamy układ Oxyz równolegle do punktu $O'(a,b,c)$, uzyskując przejściowo układ $O'x''\,y''\,z''$, ten zaś drogą obrotu przekształcamy w układ $O'x'y'z'$.

4. Związki między cosinusami kierunkowymi dwóch układów prostokątnych przestrzennych.

Jeżeli mamy dwa układy prostokątne przestrzenne Oxyz i Ox'y'z' i kąty między osiami tych układów ujęte są tabelą

	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

to między dziewięcioma cosinusami kierunkowymi tych osi istnieją aż 22 związki, które znajdują zastosowania w geometrii i mechanice teoretycznej. Związki te ze względu na ich kształt i sens możemy podzielić na 6 grup:

I. Ponieważ kąty występujące w poszczególnych wierszach tabeli są kątami osi nowego układu z osiami układu Oxyz, wobec tego cosinusy tych kątów spełniają związki

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1,$$
$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1, \qquad (11)$$
$$\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1$$

II. Ponieważ osi x' i y', y' i z' oraz z' i x' są do siebie prostopadłe, więc

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0,$$
$$\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 = 0, \qquad (12)$$
$$\cos\alpha_3\cos\alpha_1 + \cos\beta_3\cos\beta_1 + \cos\gamma_3\cos\gamma_1 = 0.$$

III. Ponieważ z jednej strony współrzędne wektorów jednostkowych $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ względem układu Oxyz równają się: $\bar{i}'\{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\}$,

$\bar{j}'\{\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2\}$,

$\bar{k}'\{\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3\}$,

a z drugiej strony równoległościan rozpięty na tych wektorach jest sześcianem o objętości równej 1,

więc

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, & \cos\gamma_3 \end{vmatrix} = 1. \qquad (13)$$

Jeżeliby układ Ox' y' z' posiadał orientację niezgodną z układem Oxyz, to ten wyznacznik równałby się -1.

IV. Ponieważ

$$\bar{k}' = \bar{i}' \times \bar{j}' = \begin{vmatrix} \bar{i}, & \bar{j}, & \bar{k} \\ \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \end{vmatrix},$$

$$\bar{i}' = \bar{j}' \times \bar{k}' = \begin{vmatrix} \bar{i}, & \bar{j}, & \bar{k} \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, & \cos\gamma_3 \end{vmatrix},$$

$$\bar{j}' = \bar{k}' \times \bar{i}' = \begin{vmatrix} \bar{i}, & \bar{j}, & \bar{k} \\ \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, & \cos\gamma_3 \\ \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \end{vmatrix},$$

więc współrzędne wektorów $\bar{k}'$, $\bar{i}'$, $\bar{j}'$ wyrażają się też następująco:

Współrzędne wektora $\bar{k}'$:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_3 &= \cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\beta_2\cos\gamma_1, \\ \cos\beta_3 &= \cos\gamma_1\cos\alpha_2 - \cos\gamma_2\cos\alpha_1, \\ \cos\gamma_3 &= \cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1, \end{aligned} \qquad (14)$$

współrzędne wektora $\bar{i}'$:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \cos\beta_2\cos\gamma_3 - \cos\beta_3\cos\gamma_2, \\ \cos\beta_1 &= \cos\gamma_2\cos\alpha_3 - \cos\gamma_3\cos\alpha_2, \\ \cos\gamma_1 &= \cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2, \end{aligned} \qquad (15)$$

współrzędne wektora $\vec{J}'$:

$$\cos\alpha_2 = \cos\beta_3 \cos\gamma_1 - \cos\beta_1 \cos\gamma_3 ,$$
$$\cos\beta_2 = \cos\gamma_3 \cos\alpha_1 - \cos\gamma_1 \cos\alpha_3 , \quad (16)$$
$$\cos\gamma_2 = \cos\alpha_3 \cos\beta_1 - \cos\alpha_1 \cos\beta_3 .$$

Jak łatwo zauważyć, związki te wykazują, że każdy element wyznacznika

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}$$

równa się wyznacznikowi dołączonemu do tego elementu

V. Ponieważ kąty stojące w kolumnach tabeli (5) są kątami osi x, y, i z z osiami układu Ox'y'z', więc cosinusy tych kątów spełniają związki :

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1,$$
$$\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1, \quad (17)$$
$$\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1.$$

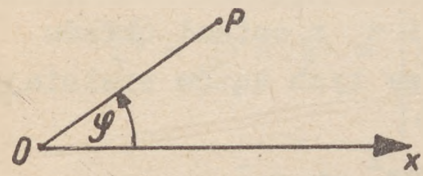
VI. Ponieważ osi x i y, y i z oraz z i x są do siebie prostopadłe, więc odpowiednie cosinusy kierunkowe tych osi względem układu Ox'y'z' spełniają związki :

$$\cos\alpha_1 \cos\beta_1 + \cos\alpha_2 \cos\beta_2 + \cos\alpha_3 \cos\beta_3 = 0,$$
$$\cos\beta_1 \cos\gamma_1 + \cos\beta_2 \cos\gamma_2 + \cos\beta_3 \cos\gamma_3 = 0, \quad (18)$$
$$\cos\gamma_1 \cos\alpha_1 + \cos\gamma_2 \cos\alpha_2 + \cos\gamma_3 \cos\alpha_3 = 0.$$

§ 9. WSPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE

1. Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie.

Niech na płaszczyźnie zorientowanej dany będzie punkt O oraz półoś Ox. Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę dowolny punkt P, należący do płaszczyzny i różny od O, to położenie punktu P na płaszczyźnie jest określone, gdy znana jest odległość punktu P od początku półosi czyli $r = |OP|$ oraz miara kąta φ, jaki odcinek OP tworzy z półosią Ox (rys. 78).



Rys. 78

Półoś Ox nazywamy o s i ą b i e g u n o w ą a jej początek O - b i e g u n e m.

a) W s p ó ł r z ę d n y m i b i e g u n o w y m i punktu P, różnego od bieguna, nazywamy parę liczb r i φ, z których pierwsza jest dodatnia i podaje odległość punktu P od bieguna, druga jest miarą kąta między odcinkiem łączącym punkt P z biegunem O a biegunową i spełnia warunek $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

b) Współrzędnymi biegunowymi punktu O t.zn. bieguna nazywamy parę liczb 0 i φ, gdzie φ jest dowolną liczbą zawartą między 0 i 2π.

Odcinek OP nazywamy p r o m i e n i e m w o d z ą c y m punktu P, kąt φ - a m p l i t u d ą lub a r g u m e n t e m punktu P.

Oś Ox wraz z umową a) i b), określającą współrzędnie biegunowe punktu, nazywamy u k ł a d e m w s p ó ł r z ę d n y c h biegunowych na płaszczyźnie.

Dla zaznaczenia, że liczby r i φ są współrzędnymi biegunowymi punktu P używamy symbolu P (r, φ)

Z określenia współrzędnych biegunowych punktu na płaszczyźnie wynika, że w obranym układzie współrzędnych biegunowych każdej parze liczb r i φ, spełniającej warunki

$$r \geqslant 0, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \qquad (1)$$

odpowiada tylko jeden punkt na płaszczyźnie i odwrotnie każdemu punktowi, z wyjątkiem bieguna, tylko jedna para liczb postaci (1). Biegunowi odpowiada nieskończenie wiele par postaci $0, \varphi$, gdzie φ jest dowolną liczbą spełniającą warunek

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

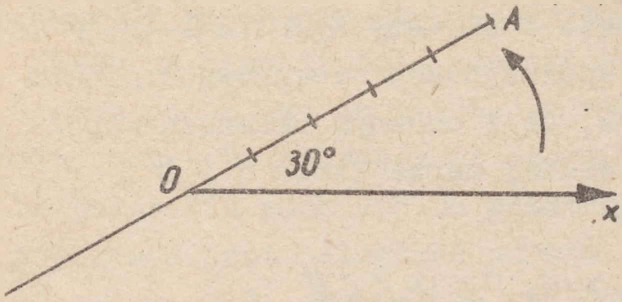
Różnym punktom odpowiadają różne pary współrzędnych biegunowych i różnym parom $r > 0$ i $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, traktowanym jako współrzędne biegunowe punktu - różne punkty.

W niektórych podręcznikach geometrii analitycznej rozszerza się pojęcie współrzędnych biegunowych punktu, dopuszczając jako współrzędne biegunowe liczby $r < 0$ i φ dowolne, t.zn. dodatnie i ujemne nie ograniczone warunkiem

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Tak np. punktowi A (rys.79) przyporządkowuje się nie tylko parę $(5, \frac{\pi}{6})$, lecz także $(5, -\frac{11}{6}\pi)$, $(-5\ \frac{7}{6}\pi)$ i $(-5, -\frac{5}{6}\pi)$, a ponadto wszystkie pary, otrzymane z tych czterech par przez powiększenie miary kąta o dowolną całkowitą wielokrotność liczby 2π. Przy tym ujęciu współrzędnych biegunowych punktu, każdemu puntowi odpowiada nieskończenie wiele par, każdej zaś parze tylko jeden punkt.

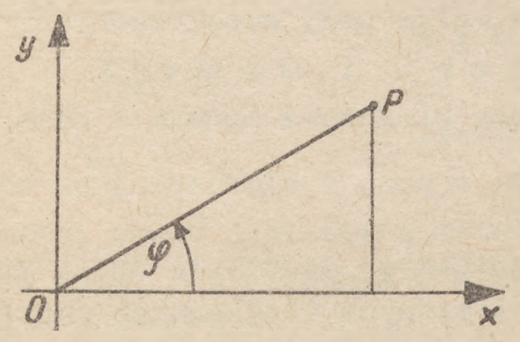
2. Związki między współrzędnymi prostokątnymi a biegunowymi na płaszczyźnie.



Rys. 79

W płaszczyźnie prostokątnego układu Oxy dany jest układ współrzędnych biegunowych, którego biegun znajduje się w punkcie O, a oś biegunowa pokrywa się z dodatnią częścią osi odciętych i którego dodatni obieg jest zgodny z dodatnim obiegiem płaszczyzny Oxy (rys. 80).

1) Wykażemy, że jeżeli punkt P ma współrzędne biegunowe r, φ, to współrzędne kartezjańskie wyrażają się wzorami:



Rys. 80

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \qquad (2)$$

Istotnie, jeżeli $r > 0$, to z określenia funkcji trygonometrycznych wynika

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r},$$

skąd

$$x = r \cos \varphi \quad \text{i} \quad y = r \sin \varphi ,$$

Jeżeli $r = 0$, to jakąkolwiek wartość nadamy amplitudzie φ, wówczas $x = y = 0$, więc wzory (2) są również słuszne.

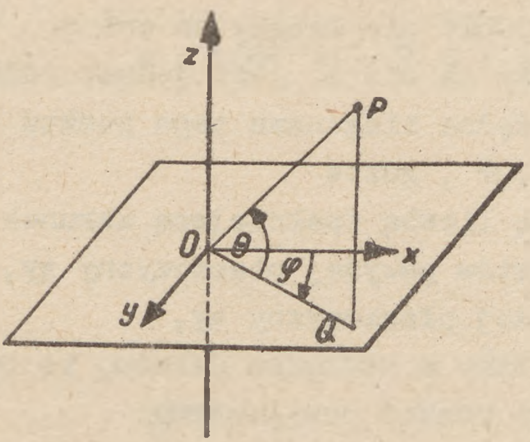
2) Odwrotnie, jeżeli dane są współrzędne kartezjańskie punktu $P(x,y) \neq 0$, to współrzędne biegunowe punktu otrzymamy ze związków :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (3)$$

3. <u>Współrzędne biegunowe w przestrzeni</u>.

Niech w układzie prostokątnym Oxyz będzie dany dowolny punkt P, nie leżący na osi z i niech Q będzie rzutem punktu P na płaszczyznę xy (rys. 81)



Rys. 81

1) Jeżeli

$r = |OP|$, $\varphi = \sphericalangle(x, OQ)$,

θ x) $= \sphericalangle(OQ, OP)$,

to układ trzech liczb r, φ, θ, gdzie

$$r > 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad (4)$$

nazywamy w s p ó ł r z ę d n y m b i e g u n o w y m i a także współrzędnymi sferycznymi punktu P.

r - nazywamy p r o m i e n i e m w o d z ą c y m punktu P,

φ - d ł u g o ś c i ą g e o g r a f i c z n ą,

θ - s z e r o k o ś c i ą g e o g r a f i c z n ą punktu P. Płaszczyznę xy nazywamy p ł a s z c z y z n ą r ó w n i k o w ą, a półpłaszczyznę określoną osią z i dodatnią półosią x nazywamy p ł a s z c z y z n ę p o ł u d n i k a z e r o w e g o.

Założyliśmy, że $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$; dla $\theta > 0$ punkt P leży powyżej płaszczyzny xy (na półkuli północnej); dla $\theta < 0$ - poniżej płaszczyzny xy, dla $\theta = 0$ na płaszczyźnie równikowej.

---

x) θ -litera alfabetu greckiego; czyt. theta

O punktach, które mają ten sam promień wodzący r, i tę samą długość geograficzną φ mówimy, że leżą na tym samym południku. Punkty o równych r i θ leżą na równoleżniku, gdy $\theta = 0$ punkty leżą na równiku.

Z określenia współrzędnych biegunowych punktu nie leżącego na osi z wynika, że każdemu punktowi odpowiada jedna trójka liczb spełniająca warunki (4) i odwrotnie do każdej trójki liczb spełniającej warunki (4) należy jeden punkt nie leżący na osi z.

2) Jeżeli punkt leży na osi z, jest jednak różny od punktu O, to za współrzędne biegunowe tego punktu uważamy układ liczb r, φ, θ, gdzie
$r = |OP|$, φ jest dowolną liczbą spełniającą warunek $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ dla punktów powyżej płaszczyzny xy, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ dla punktów poniżej płaszczyzny xy.

3) Jeżeli punkt P leży w początku układu, to za współrzędne biegunowe tego punktu przyjmujemy

$$r = 0,$$

φ - dowolne, spełniające warunek $0 \leqslant \varphi < 2\pi$

θ - " , " " $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

Układ założeń i umów 1), 2), 3), jakie poczyniliśmy w związku ze współrzędnymi biegunowymi punktu, nazywamy układem współrzędnych biegunowych przestrzennych

4. Związki między współrzędnymi prostokątnymi a biegunowymi w przestrzeni.

Jeżeli układ współrzędnych prostokątnych i układ współrzędnych biegunowych przyjmiemy tak jak na rys. 81, to

$$x = r \cos\theta \cos\varphi,$$

$$y = r \cos\theta \sin\varphi,$$

$$z = r \sin\theta,$$

Istotnie

$$x = |OQ| \cos \varphi \text{ i } y = |OQ| \sin \varphi ,$$

a ponieważ

$$|OQ| = r \cos \theta ,$$

więc

$$x = r \cos \theta \cos \varphi \text{ i } y = r \cos \theta \sin \varphi$$

Podobnie

$$z = |OP| \sin \theta = r \sin \theta .$$

R O Z D Z I A Ł II

PROSTA I OKRĄG NA PŁASZCZYŹNIE

§ 10. OGÓLNE WIADOMOŚCI O RÓWNANIACH LINII NA PŁASZCZYŹNIE

1. Pojęcie równania linii na płaszczyźnie.

Wprowadzając na płaszczyźnie układ Oxy przyporządkowaliśmy każdemu punktowi płaszczyzny jedną parę liczb (współrzędnych) i odwrotnie, każdej parze liczb - jeden punkt.

Każdą linię na płaszczyźnie możemy uważać, jako zbiór punktów, któremu odpowiada pewien zbiór par liczb. Wyznaczenie wszystkich tych par, których jest nieskończenie wiele, wydaje się w pierwszej chwili trudne. Wiemy jednak ze szkoły średniej, z graficznego przedstawienia funkcji, że mając odpowiednie równanie linii, możemy punkty tej linii otrzymać jako pary liczb, dobierając liczby w parze tak, by spełniały dane równanie.

Tak np. wiemy, że równanie:

$$y = 2x + 3$$

przedstawia analitycznie prostą. Równanie to pozwala nam dla każdego x wyznaczyć, odpowiednią wartość y, t.zn. pozwala nam wyznaczyć każdy punkt prostej. Znamy obrazy graficzne różnych równań.

I tak wykresem równania

$$y = x^2 + 3x + 2,$$

jest parabola, wykresem równania

$$y = \log_a x$$

krzywa zwana krzywą logarytmiczną.

Współrzędne więc wszystkich punktów linii możemy otrzymać z odpowiedniego równania o dwóch zmiennych.

Równanie dwóch zmiennych x i y będziemy oznaczać symbolem

$$y = f(x),$$

dla zaznaczenia, że zmienna y (w postaci jednego wyrazu y) znajduje się po lewej stronie, zaś wyrazy zawierające zmienną x i wyraz wolny po prawej lub symbolem

$$F(x,y) = 0$$

dla zaznaczenia, że wszystkie wyrazy równania występują po lewej stronie równania.

Tak np. równania:

$$y = 3x + 5, \quad y = \frac{x-2}{x+3}, \quad y = \sin(x+2)$$

są postaci $y = f(x)$, zaś równania

$$y - 3x - 5 = 0, \quad y - \frac{x-2}{x+3} = 0, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$$

są postaci $F(x,y) = 0$

Określenie:

Jeżeli jest dana linia l w płaszczyźnie układu Oxy oraz równanie dwóch zmiennych postaci

$$y = f(x) \quad \text{lub} \quad F(x,y) = 0,$$

to równanie to nazywamy **równaniem linii** l, jeżeli

1) współrzędne każdego punktu linii l spełniają to równanie i

2) współrzędne punktów nie należących do linii l nie spełniają równania.

Równanie np.

$$x^2 + y^2 = 16$$

jest równaniem okręgu, którego środek znajduje się w początku układu i którego promień równa się 4. By uzasadnić powyższe zdanie, należy udowodnić dwa twierdzenia :

1) że współrzędne punktu należącego do okręgu spełniają równanie i
2) że współrzędne punktów nie należących do okręgu nie spełniają równania.

Dowód:

1) Jeżeli $P(x,y)$ jest dowolnym punktem okręgu, o środku w O i $r = 4$, to jego odległość od środka równa się 4, czyli

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4,$$

skąd otrzymujemy

$$x^2 + y^2 = 16,$$

a to znaczy, że współrzędne punktu P spełniają równanie.

2) Jeżeli $P(x,y)$ nie należy do okręgu, to albo leży poza okręgiem i wtedy jego odległość od środka okręgu jest większa od 4, czyli

$$x^2 + y^2 > 16,$$

albo leży wewnątrz okręgu i wtedy jego odległość od środka okręgu jest mniejsza od 4, czyli

$$x^2 + y^2 < 16,$$

W obu więc przypadkach współrzędne punktu nie spełniają równania.

Równanie więc

$$x^2 + y^2 = 16$$

zgodnie z określeniem równania linii jest równaniem okręgu.

Metoda badania linii w geometrii analitycznej polega na tym, że staramy się znaleźć równanie danej linii i z własności równania wysnuć własności linii. Tym sposobem geometryczne badanie linii zastępujemy algebraicznym badaniem jej równania.

Nie należy jednak sądzić, że każdemu równaniu o dwóch zmiennych odpowiada jakaś linia; równaniu np.

$$x^2 + y^2 = -4$$

nie odpowiada żaden utwór geometryczny, żadna bowiem para liczb xy w zakresie liczb rzeczywistych nie spełnie tego równania.

Dwa różne równania mogą przedstawiać tę samą linię, jeżeli są równoważne. Tak np. równania

$$-3x + 2y = 6, \quad y = \frac{3}{2}x + 3$$

przedstawiają tę samą linię (prostą), oba są bowiem spełniane przez te same pary współrzędnych.

2. Linie algebraiczne i przestępne.

L i n i ę nazywamy a l g e b r a i c z n ą, jeżeli na zmiennych x i y, występujących w jej równaniu, wykonano skończoną ilość działań algebraicznych t.zn. działania dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia oraz potęgowania wykładnikiem stałym i wymiernym. Przykładem takich równań są równania:

$$y = a + bx^2,$$
$$a x^2 y^{-1} - b\sqrt{x^3} = 0$$

Równania linii algebraicznych możemy przez sprowadzenie do wspólnego mianownika i przez podniesienie stron równania do odpowiedniej potęgi sprowadzić do postaci

$$F(x, y) = 0$$

gdzie F(x,y) jest wielomianem względem x i y.

Jeżeli wielomian $F(x,y)$ jest stopnia n i nie rozkłada się na czynniki stopni niższych, to liczbę n nazywamy s t o p n i e m   l i n i i   algebraicznej. Linia np. odpowiadająca równaniu:

$$y = \frac{1}{3x^2}$$

jest stopnia 3-go, przekształcając bowiem jej równanie otrzymamy

$$3x^2y - 1 = 0,$$

zaś linia odpowiadająca równaniu

$$y^2 = \frac{3x - 1}{x^2+2x - 1}$$

jest stopnia 4-go, jej bowiem równanie sprowadza się do postaci

$$x^2y^2 + 2xy^2 - y^2 - 3x + 1 = 0$$

Linie, których równania nie spełniają warunków równań linii algebraicznych nazywamy liniami przestępnymi.

Przykładem najprostszych krzywych przestępnych są krzywe:

$$y=a^x, \quad y = \log x, \quad y = \sin x, \quad y = \arc\sin x$$

3. Równanie linii we współrzędnych biegunowych.

Jeżeli na płaszczyźnie dany jest układ współrzędnych biegunowych i linia l, to równanie dwóch zmiennych r i φ postaci

$$r = f(\varphi) \quad \text{lub } F(r,\varphi) = 0$$

nazywamy r ó w n a n i e m   l i n i i l w e   w s p ó ł r z ę d n y c h   b i e g u n o w y c h, jeżeli spełnione są dwa warunki :

1) współrzędne biegunowe każdego punktu linii l spełniają dane równanie i

2) współrzędne biegunowe punktów nie należących do linii l równania nie spełniają.

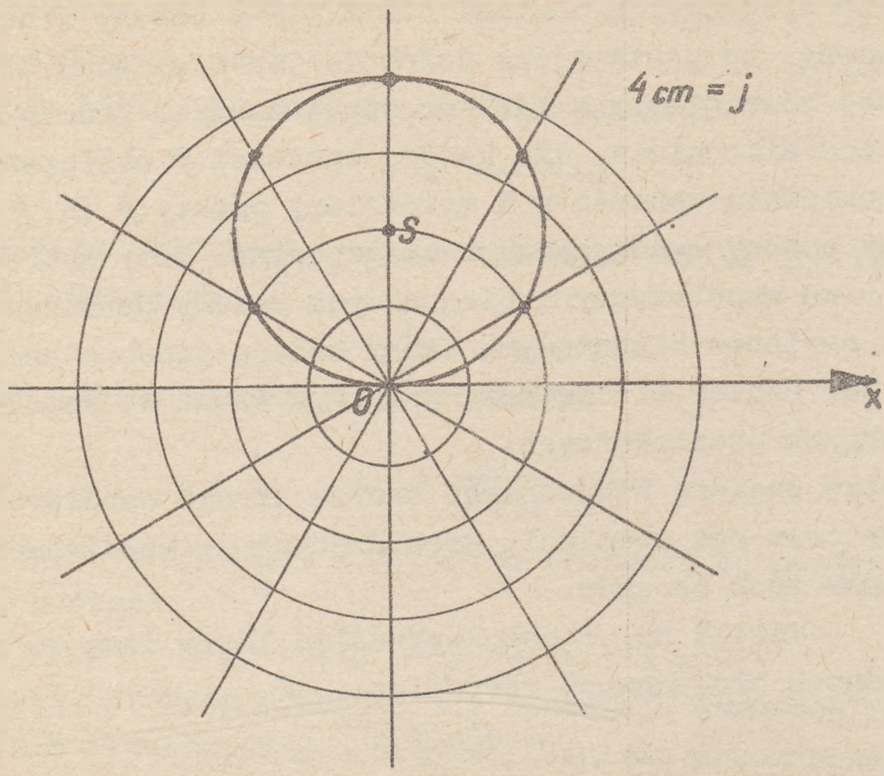
Jeżeli na podstawie równania linii we współrzędnych biegunowych postaci $r = f(\varphi)$ chcemy linię narysować, to postępujemy podobnie jak w wypadku linii danej równaniem $y = f(x)$ we współrzędnych prostokątnych. Mianowicie, dla każdej wartości φ obliczamy odpowiednią wartość r i wykreślamy punkty $P(r, \varphi)$ przy pomocy współrzędnych biegunowych. Przy wykresach we współrzędnych biegunowych możemy posłużyć się papierem biegunowym, który oddaje podobne usługi jak papier milimetrowy przy wykresach we współrzędnych prostokątnych.
Siatkę papieru biegunowego tworzą okręgi współśrodkowe oraz pęk promieni, wychodzących ze wspólnego środka tych okręgów.

Jeżeli np. chcemy wykreślić linię daną we współrzędnych biegunowych równaniem

$$r = \sin\varphi,$$

to kładąc $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$, czyli $\varphi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi$ otrzymamy $r = 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0$. Na promieniach tworzących z osią biegunową obrane kąty φ odcinamy odpowiedniej długości promienie r i otrzymujemy zbiór punktów należących do danej linii. Oczywiście, im zbiór punktów jest gęstszy, tym dokładniejszy jest obraz linii.
W rozważanym przykładzie linia jest okręgiem (rys.82) o środku $S\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i promieniu równym $\frac{1}{2}$.

Przy wykreślaniu przybliżonego obrazu linii określonej równaniem we współrzędnych biegunowych możemy postąpić też inaczej. Mianowicie możemy korzystając ze wzorów § 9,2 przedstawić linię równaniem we współrzędnych prostokątnych i sporządzić obraz linii na podstawie tego równania.



Rys. 82

Jeżeli w ten sposób postąpimy dla linii określonej równaniem

$$r = \sin \varphi ,$$

otrzymamy

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ,$$

a dalej

$$x^2 + y^2 = y$$

Równanie to, jak później poznamy, można przedstawić w postaci

$$x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{1}{2})^2$$

Jest to równanie okręgu o promieniu $\frac{1}{2}$ i środku $S(0, \frac{1}{2})$.

4. Równania parametryczne linii.

Niech w układzie Oxy będzie dana linia l oraz dwa równania postaci

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{1}$$

gdzie funkcje x (t) i y(t) zmiennej t są określone i ciągłe w pewnym przedziale (a,b)[x].

Równania (1) nazywamy **r ó w n a n i a m i p a r a m e t r y c z n y m i l i n i i** l, jeżeli

1) dla każdej wartości t_o z przedziału (a,b) punkt o współrzędnych $[x(t_o), y(t_o)]$ należy do linii l i

2) dla każdego punktu $P_o(x_o, y_o)$, należącego do linii l, możemy wyznaczyć taką wartość t_o, że

$$x_o = x(t_o) \text{ i } y_o = y(t_o)$$

Zmienną t nazywamy **p a r a m e t r e m**.

Równanie zwyczajne linii postaci

$$y = f(x)$$

jest szczególnym przypadkiem przedstawienia parametrycznego linii, jest bowiem równoważne dwom równaniom

$$x = t, \quad y = f(t)$$

Ta sama linia może być określona różnymi równaniami parametrycznymi. Jeżeli bowiem funkcja $\varphi(u)$ przyjmuje w przedziale (α, β) wszystkie wartości przedziału (a,b), to można podstawić $t = \varphi(u)$ i wtedy linia określona początkowo równaniami (1), będzie przedstawiona nowym układem równań

$$x = x[\varphi(u)], \quad y = y[\varphi(u)],$$

gdzie parametrem jest zmienna u.

Tak np. linię prostą o równaniu zwyczajnym

$$y = 2x + 3$$

można przedstawić przy pomocy dwóch równań

---

x) przedział (a,b) może być przedziałem zamkniętym, otwartym, skończonym lub nieskończonym.

$$x = t, \quad y = 2t + 3.$$

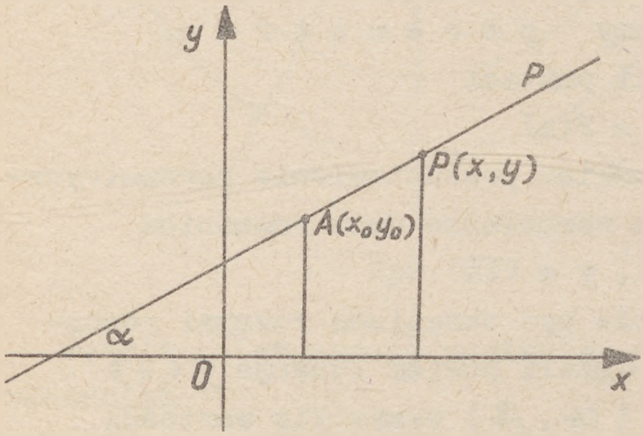
Można jednak w tym przypadku brać za x dowolną funkcję, przyjmującą wszystkie wartości rzeczywiste, a więc np.

$$x = 2u^3,$$

a wtedy

$$y = 4u^3 + 3.$$

Najczęściej parametrowi nadajemy pewien prosty sens - geometryczny, jeżeli rozważamy zagadnienie geometryczne - fizyczny, jeżeli rozpatrujemy problem fizyczny.



Rys. 83

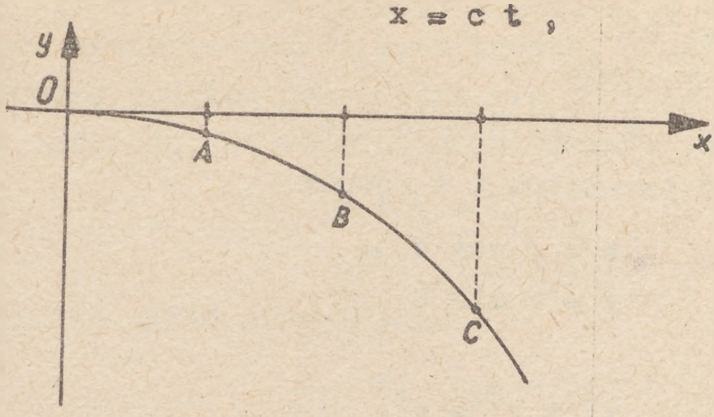
Tak np. jeżeli prosta p przechodzi przez punkt $A(x_0, y_0)$ i tworzy z osią x kąt α (rys.83), to prostą tę określają równania parametryczne

$$x = x_0 + t\cos\alpha,$$
$$y = y_0 + t\sin\alpha,$$

gdzie parametr t oznacza miarę wektora AP.

Przykładem z zakresu mechaniki jest określenie toru punktu przy rzucie poziomym. Mianowicie, jeżeli punkt materialny O jest pobudzony do ruchu jednostajnego z prędkością c w kierunku poziomym, to wykonując ruch jednostajny w kierunku poziomym, równocześnie pod wpływem siły przyciągania ziemskiego wykonuje ruch jednostajnie przyśpieszony w kierunku pionowym. Przyjmując punkt O za początek układu, oś x - poziomo, a oś y-pionowo(rys.83a), możemy drogę składową punktu w ruchu jednostajnym w kierunku poziomym wyrazić wzorem

$$x = c\,t,$$



Rys. 83 a

a drogę składową w ruchu jednostajnie przyspieszonym w kierunku pionowym wzorem $y = -\frac{1}{2} g t^2$, gdzie t oznacza czas w sekundach, który upłynął od początku ruchu tj. od chwili $t = 0$.

Drogę więc wypadkową punktu w rzucie poziomym określają równania parametryczne

$$x = c\,t$$

$$y = -\frac{1}{2} g\,t^2,$$

Równania te, jak zobaczymy później, określają parabolę, której oś pokrywa się z ujemną półosią y.

Mając linię l określoną parametrycznie równaniami

$$x = x(t)\ ; \quad y = y(t)\ ,$$

możemy zmienną t przy pomocy jednego z tych równań wyrazić przez x lub y i otrzymane wyrażenie na t podstawić do drugiego równania. Otrzymamy wtedy jedno równanie ze zmiennymi x i y postaci

$$F(x,y) = 0,$$

które jest równaniem zwyczajnym linii l. Opisany sposób przechodzenia od równań parametrycznych linii do równania zwyczajnego nazywamy r u g o w a n i e m parametru.

Tak np. rugując t z równań

$$x = x_0 + t\cos\alpha,$$

$$y = y_0 + t\sin\alpha$$

otrzymamy

$$y - y_0 = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot (x - x_0)\ .$$

Oznaczając $\mathrm{tg}\,\alpha = m$, mamy

$$y - y_0 = m\,(x - x_0).$$

Wynikiem rugowania parametru t z równań

$$x = r \cos t\ ,$$
$$y = r \sin t$$

jest równanie

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

t.zn. równanie zwyczajne okręgu.
Jeżeli wyrugujemy parametr t z równań

$$x = c\,t$$
$$y = -\frac{1}{2} g\, t^2\ ,$$

to otrzymamy równanie

$$y = -\frac{g}{2\,c^2} \cdot x^2\ ,$$

czyli równanie zwyczajne paraboli.

5. O przecięciu się dwóch linii.

Niech będą dane dwie linie o równaniach

$$F\,(x,y) = 0,\qquad G(x,y) = 0 \qquad (2)$$

Jeżeli linie te mają punkt wspólny, to współrzędne tego punktu spełniają jednocześnie oba równania (2) i odwrotnie, jeżeli para liczb (x_0,y_0) spełnia oba równania (2), to punkt (x_0,y_0) jest punktem wspólnym obu linii.

Zatem analityczne wyznaczanie punktów przecięcia się dwóch linii (2) sprowadza się do rozwiązania układu równań przedstawiających te linie, tzn. do rozwiązania układu równań

$$\left.\begin{matrix} F\,(x,y) = 0, \\ G\,(x,y) = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Przykład 1. Wyznaczyć punkty przecięcia się dwóch linii, określonych równaniami

$$x + y = 1, \quad x^2 + y^2 = 25.$$

Pierwsze równanie przedstawia prostą, drugie okrąg. Współrzędne punktów przecięcia się prostej i okręgu, jeżeli istnieją, są rozwiązaniami układu równań

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}\right\}$$

Rozwiązując układ otrzymujemy:

$$x_1 = 4, \quad y_1 = -3$$

$$x_2 = -3, \quad y_2 = 4$$

Zatem punktami przecięcia się linii prostej i okręgu są punkty: $A(4, -3)$ i $B(-3, 4)$.

Przykład 2. Zbadać liczbę przecięcia się punktów linii

$$y - x = 3 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 - 2m\,x = 0$$

w zależności od m.

Badaniu liczby punktów przecięcia się dwóch linii odpowiada badanie liczby rozwiązań układu równań:

$$\left.\begin{aligned} y - x &= 3, \\ x^2 + y^2 - 2m\,x &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Wyrażając y przez x z pierwszego równania i podstawiając otrzymane wyrażenie na y do drugiego, otrzymujemy równanie kwadratowe:

$$2x^2 + 2(3-m)\,x + 9 = 0 \qquad (4)$$

Równanie to, a równocześnie układ równań (3) posiada 2,1, lub 0 rozwiązań w zależności od wyróżnika Δ.

Jeżeli

$$\Delta = 4(3-m)^2 - 72 = 4(m^2-6m-9) > 0,$$

to równanie (4), a jednocześnie układ (3) posiadają dwa rozwiązania.

Jeżeli $\Delta = 0$, równanie (4) i układ (3) posiada jedno rozwiązanie; jeżeli $\Delta < 0$, równanie i układ nie posiadają rozwiązań.

By więc ustalić warunki istnienie 2 punktów przecięcia się linii (3), należy rozwiązać nierówność

$$m^2 - 6m - 9 > 0$$

Warunki istnienia tylko jednego punktu wspólnego dwóch linii otrzymamy, rozwiązując równanie

$$m^2 - 6m - 9 = 0$$

Linie punktów wspólnych nie mają, gdy

$$m^2 - 6m - 9 < 0.$$

Rozwiązując nierówność

$$m^2 - 6m - 9 > 0,$$

otrzymujemy

$$m < 3\,(1-\sqrt{2}) \text{ lub } m > 3(1+\sqrt{2})$$

Dla m spełniających ten warunek linie (3) posiadają 2 punkty przecięcia się o współrzędnych:

$$A\left[\tfrac{1}{2}\left(m-3-\sqrt{m^2-6m-9}\right),\ \tfrac{1}{2}\left(m+3-\sqrt{m^2-6m-9}\right)\right],$$

$$B\left[\tfrac{1}{2}\left(m-3+\sqrt{m^2-6m-9}\right),\ \tfrac{1}{2}\left(m+3+\sqrt{m^2-6m-9}\right)\right].$$

Rozwiązując równanie

$$m^2 - 6m - 9 = 0,$$

otrzymujemy

$$m_1 = 3(1-\sqrt{2}),\quad m_2 = 3(1+\sqrt{2})$$

Dla tych więc wartości m linie (3) posiadają tylko jeden punkt wspólny o współrzędnych:

$$x = \tfrac{1}{2}(m-3),\quad y = \tfrac{1}{2}(m+3),$$

tzn. dla $m = 3(1-\sqrt{2})$:

$$x = -\frac{3\sqrt{2}}{2},\quad y = 3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

dla

$$m = 3\,(1+\sqrt{2}):$$

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{2},\quad y = 3\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

W przypadku, gdy

$$m^2 - 6m - 9 < 0$$

t.zn., gdy

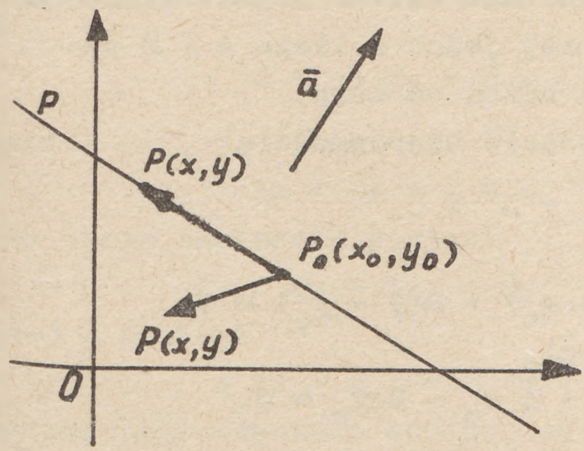
$$3\,(1-\sqrt{2}) < m < 3(1+\sqrt{2})$$

linie (3) nie mają punktów wspólnych.

§ 11. PROSTA NA PŁASZCZYŹNIE

1. Równanie ogólne prostej.

W płaszczyźnie układu Oxy dany jest wektor niezerowy $\bar{a}$ o składowych skalarnych A,B oraz prosta p przechodząca przez punkt $P_o(x_o,y_o)$, prostopadle do wektora $\bar{a}$ (rys. 84).



Rys. 84

Wykażemy, że równaniem prostej p jest równanie

$A(x-x_o)+B(y-y_o)=0$ (1)

Dowód: Zgodnie z określeniem równania linii wykażemy, że jeżeli punkt do prostej należy, to jego współrzędne spełniają równanie (1), jeżeli nie należy, to jego współrzędne równania nie spełniają.

Niech punkt P(x,y) będzie dowolnym punktem płaszczyzny różnym od punktu P_o. Wtedy wektory $\bar{a}$ i $\overline{P_oP}$, gdy punkt P należy do prostej p , są prostopadłe, gdy nie należy do prostej p, nie są prostopadłe. Iloczyn więc skalarny wektorów $\bar{a}$ i $\overline{P_oP}$, gdy punkt P jest punktem prostej, równa się zeru t.zn.

$$\bar{a} \circ \overline{P_oP} = 0,$$

gdy punkt P leży poza prostą, to

$$\bar{a} \circ \overline{P_oP} \neq 0$$

Współrzędnymi wektora $\bar{a}$ są liczby A i B, współrzędnymi wektora $\overline{P_oP}$ są liczby $x - x_o$, $y-y_o$. Korzystając ze wzoru

$$\bar{a}\circ\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y,$$

wyrażającego iloczyn skalarny przez składowe czynników, mamy w przypadku, gdy punkt P należy do prostej p zależność

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0,$$

W przypadku, gdy nie należy do prostej p zależność

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) \neq 0.$$

Jeżeli punkt $P(x,y)$ pokrywa się z punktem P_o, to jego współrzędne są równe x_o i y_o i punkt ten spełnia równanie (1), gdyż czynniki $x - x_o$, $y - y_o$ są zerami. Wykazaliśmy, że równanie (1) jest równaniem prostej p. Zauważamy przy tym, że ponieważ wektor $\bar{a}$ jest wektorem niezerowym więc przynajmniej jedna z liczb A i B występująca w równaniu jest różna od zera.
Warunek ten możemy też wyrazić nierównością

$$A^2 + B^2 > 0.$$

Mając równanie prostej

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) = 0,$$

możemy je napisać w postaci

$$Ax + By - Ax_o - By_o = 0.$$

Kładąc następnie $-Ax_o - By_o = C$, otrzymamy postać

$$Ax + By + C = 0, \qquad (2)$$

którą nazywamy **o g ó l n y m r ó w n a n i e m** prostej.

Wykazaliśmy, że prostą na płaszczyźnie Oxy można przedstawić równaniem

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 > 0$.

Wykażemy teraz odwrotnie, że każde równanie postaci (2), w którym A i B nie są jednocześnie zerami, jest równaniem pewnej prostej.

Przede wszystkim stwierdzamy, że istnieją punkty płaszczyzny, które to równanie sprawdzają.
Punktami takimi, gdy A i B są różne od zera są np. punkty $(0, -\frac{C}{B})$, $(-\frac{C}{A}, 0)$.
Jeżeli $A = 0$, a $B \neq 0$, to punktem spełniającym równanie jest punkt o współrzędnych

$$x = \text{dowolnej liczbie}, \; y = -\frac{C}{B}.$$

Jeżeli $A \neq 0$, a $B = 0$, to równanie jest spełnione przez punkty o współrzędnych

$$x = -\frac{C}{A}, \; y = \text{dowolnej liczbie}.$$

Że tak jest można się przekonać, podstawiając wymienione współrzędne punktu do równania (2).

Niech punkt $P_o(x_o, y_o)$ będzie którymkolwiek z tych punktów, wtedy

$$A x_o + B y_o + C = 0,$$

skąd

$$C = -A x_o - B y_o.$$

Równanie

$$Ax + By + C = 0$$

możemy teraz napisać w postaci

$$Ax + By - Ax_o - By_o = 0$$

a dalej w postaci

$$A (x - x_o) + B (y - y_o) = 0.$$

Z postaci tego równania wynika, że równanie to spełniają końce wektorów zaczepionych w punkcie $P_o(x_o, y_o)$ i prostopadłych do wektora $\bar{a}\,\{A, B\}$. Miejscem geometrycznym końców wektorów zaczepionych w punkcie $P_o(x_o, y_o)$ i prostopadłych do wektora $\bar{a}\,\{A, B\}$ jest prosta przechodząca przez $P_o(x_o, y_o)$ i prostopadła do $\bar{a}$. Współrzędne więc tej prostej spełniają równanie (2) i odwrotnie, jeżeli punkt spełnia równanie (2), to jest punktem wspomnianej prostej.

Przykład:

Prosta $3x+4y-2 = 0$ jest prostopadła do wektora o składowych 3 i 4. Chcąc wyznaczyć punkty należące do tej prostej, należy wyznaczyć pary liczb, spełniające równanie prostej. W tym celu jednej ze zmiennych nadajemy dowolną wartość, drugą zaś obliczamy na podstawie równania. Jeżeli chcemy wyznaczyć większą liczbę punktów prostej dogodnie jest jedną ze zmiennych wyrazić przez drugą np. y przez x i na podstawie otrzymanego wzoru przyporządkowywać wartościom x odpowiednie wartości y.

W naszym więc przykładzie mamy

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2},$$

i punktami prostej są np. punkty

$$(-4,\ 3\tfrac{1}{2}),\ (-1,\ 1\tfrac{1}{4}),\ (0,\tfrac{1}{2}),\ (4,\ -2\tfrac{1}{2})$$

2. <u>Przypadki szczególne równania ogólnego.</u>

Jeżeli w równaniu

$$Ax + By + C = 0$$

niektóre z liczb A,B,C są równe zeru, to prosta określona tym równaniem zajmuje względem układu Oxy szczególne położenie.

1) Jeżeli C = 0, czyli gdy równanie ma postać

$$Ax + By = 0,$$

to prosta przechodzi przez początek układu, bowiem punkt (0,0) spełnia to równanie.

2) Jeżeli A = 0, czyli gdy równanie ma postać

$$By + C = 0,$$

to prosta jest równoległa do osi x, jest bowiem prostopadła do wektora o składowych $\{0,B\}$.

Jej równanie możemy napisać też w postaci

$$y = -\frac{C}{B}.$$

Prosta przecina oś y w punkcie $(0, -\frac{C}{B})$. Jeżeli nadto C = 0, to prosta jako równoległa do osi x i przechodząca przez początek układu pokrywa się z osią x. Zatem równaniem osi x jest

$$y = 0$$

3) Jeżeli B = 0, czyli gdy równanie ma postać

$$Ax + C = 0,$$

to prosta jest równoległa do osi y, jest bowiem prostopadła do wektora $\{A,0\}$.

Prosta przecina oś x w punkcie $(-\frac{C}{A}, 0)$. Jej równanie

piszemy też w postaci $x = -\frac{C}{A}$. Jeżeli również $C=0$, to równanie $Ax = 0$ lub $x = 0$ przedstawia oś y.
Mając na uwadze trzy przypadki szczególne oraz przypadek, gdy wszystkie liczby A,B,C są różne od zera możemy stwierdzić, że każdą prostą w płaszczyźnie Oxy możemy określić równaniem w postaci ogólnej.
Uwaga:

Jeżeli $A = B = 0$ i $C \neq 0$, czyli gdy mamy równanie

$$0x + 0y + C = 0,$$

to równania tego nie spełnia żaden punkt płaszczyzny, nie ma bowiem takiej pary (x,y), któraby równanie sprawdzała.

Jeżeli $A = B = C = 0$, czyli gdy mamy równanie

$$0x + 0y + 0 = 0,$$

to równanie to jest spełnione przez każdy punkt płaszczyzny.

3. <u>Równanie odcinkowe prostej.</u>

Jeżeli w równaniu prostej

$$Ax + By + C = 0$$

wszystkie liczby A,B,C są różne od zera, to równaniu temu możemy nadać kolejno następujące postaci:

$$Ax + By = -C,$$

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1,$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

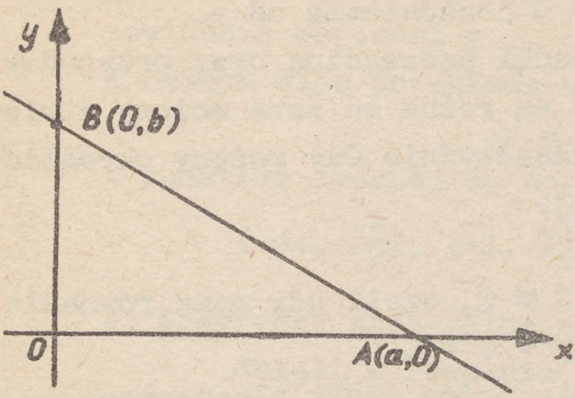
Oznaczając $-\frac{C}{A}$ przez a i $-\frac{C}{B}$ przez b, otrzymamy postać

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (3)$$

którą nazywamy r ó w n a n i e m   o d c i n k o w y m prostej.
Kładąc $x = 0$, otrzymujemy $y = b$, a dla $y = 0$, $x = a$.
Prosta więc

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

przechodzi przez punkty (a,0) i (0,b) (rys.85) odkreśla więc na osiach układu odcinki, których długości są równe bezwzględnym wartościom liczb a i b.



Rys. 85

Równaniem odcinkowym możemy określić tylko te proste dla których A,B,C są różne od zera t.zn. proste, które nie są równoległe do osi układu i nie przechodzą przez początek układu.

Przykład. Równanie ogólne prostej

$$5x - 3y + 6 = 0$$

sprowadzamy do postaci odcinkowej, otrzymując najpierw

$$5x - 3y = -6,$$

a dalej

$$\frac{x}{-\frac{6}{5}} + \frac{y}{\frac{2}{1}} = 1.$$

Prosta ta przechodzi przez punkty $(-\frac{6}{5}, 0)$ i $(0, 2)$, odkreślając na ujemnej półosi x odcinek długości $\frac{6}{5}$, a na dodatniej połosi y odcinek długości 2.

4. <u>Równanie kierunkowe prostej.</u>

Niech prosta l będzie określona równaniem ogólnym

$$Ax + By + C = 0$$

i niech będzie $B \neq 0$.

Przy założeniu $B \neq 0$ możemy równanie prostej l przekształcić, pisząc najpierw

$$By = -Ax - C,$$

a następnie

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Oznaczając $-\frac{A}{C} = m$ i $-\frac{C}{B} = n$,

otrzymamy równanie prostej l w postaci

$$y = mx + n, \tag{4}$$

które nazywamy **równaniem kierunkowym** prostej.

Jeżeli $x = 0$, to $y = n$, więc prosta określona równaniem (4) przechodzi przez punkt $(0,n)$.

Celem znalezienia sensu geometrycznego dla współczynnika m, występującego w równaniu kierunkowym, rozważymy dowolny wektor kolinearny z prostą l. Wektor ten jest prostopadły do wektora $\{A, B\}$ i jeżeli oznaczymy go przez $\bar{b}$, a jego współrzędne przez b_x, b_y, to na podstawie warunku prostopadłości dwóch wektorów mamy związek

$$A\,b_x + B\,b_y = 0,$$

skąd

$$\frac{b_y}{b_x} = -\frac{A}{B} = m.$$

Stosunek $\frac{b_y}{b_x}$ równa się tangensowi kąta, jaki wektor $\bar{b}$ tworzy z osią x. Tangens kąta wektora $\bar{b}$ równa się tangensowi kąta jaki prosta, do której wektor $\bar{b}$ jest równoległy, tworzy z osią x. Oznaczając kąt prostej z osią x[x)] przez α mamy

$$m = \operatorname{tg}\alpha.$$

Współczynnik więc m równa się tangensowi kąta, jaki prosta tworzy z osią x; z tego względu współczynnik m nazywamy **współczynnikiem kierunkowym prostej** l.

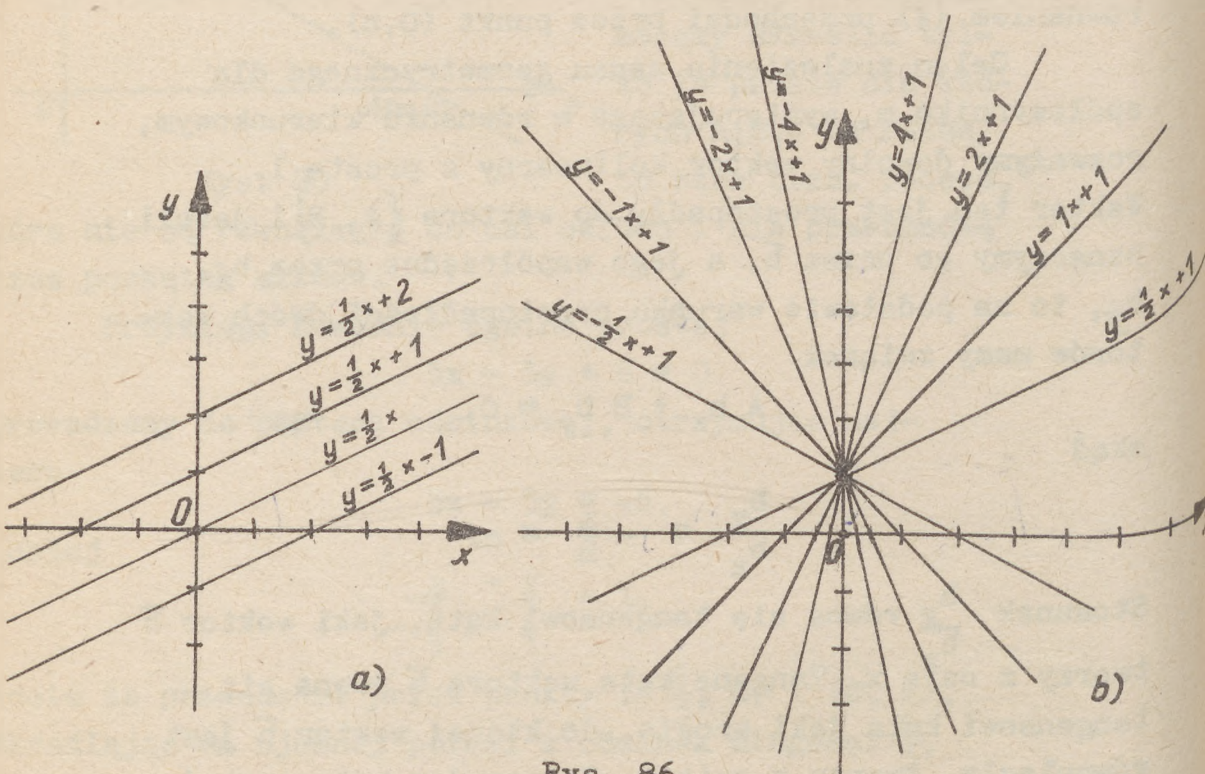
---

x) Jeżeli prosta przecina oś x, to kątem prostej z osią x nazywamy najmniejszy kąt, o jaki należy obrócić oś x w kierunku dodatnim dookoła punktu przecięcia się z prostą, by pokryła się z prostą. Jeżeli prosta jest równoległa do osi x, to kątem tej prostej z osią x nazywamy kąt zerowy.

Jeżeli m $\geqslant$ 0, to $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$;

jeżeli m < 0, to $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Proste prostopadłe do osi x nie mają współczynnika kierunkowego, dlatego równaniem kierunkowym możemy określić wszystkie proste płaszczyzny Oxy z wyjątkiem prostych prostopadłych do osi x.



Rys. 86

Jeżeli w równaniu kierunkowym prostej liczba n równa się zeru, czyli gdy równanie ma postać

$$y = mx ,$$

to prosta określona tym równaniem przechodzi przez początek układu.

Jeżeli w równaniu

$$y = mx + n$$

będziemy zmieniać n, zachowując stałe m, to otrzymamy pęk prostych równoległych (rys.86a); jeżeli natomiast będziemy zmieniać m, zachowując stałe n, to otrzymamy pęk prostych przechodzących przez punkt (0, n) (rys. 86 b).

5. Równanie prostej przechodzącej przez punkt.
Zadanie. Napisać równanie prostej, która przechodzi przez punkt $A(x_1,y_1)$ i której współczynnik kierunkowy równa się m.

Rozwiązanie. Jeżeli prostą daną w zadaniu chcemy określić równaniem kierunkowym, t.zn. równaniem

$$y = mx + n,$$

to do napisania równania winniśmy znać m i n.
Dane jest m. Dla obliczenia n wykorzystamy punkt $A(x_1,y_1)$, który należy do prostej i wobec tego jego współrzędne spełniają równanie prostej.
Otrzymujemy

$$y_1 = m\,x_1 + n,$$

skąd

$$n = y_1 - m\,x_1$$

Zatem szukane równanie ma postać

$$y = mx + y_1 - m\,x_1$$

Równaniu temu nadajemy postać łatwą do zapamiętania:

$$y - y_1 = m\,(x-x_1) \qquad (5)$$

Jest to równanie prostej przechodzącej przez dany punkt i o znanym współczynniku kierunkowym.

Przykład. Przez punkt $A(-3, -2)$ poprowadzić prostą o współczynniku kierunkowym $m = 3$.
Równanie szukanej prostej zgodnie z wzorem (5) ma postać:

$$y + 2 = 3(x + 3),$$

przekształcając je, otrzymamy

$$y = 3x + 7.$$

6. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty.
Zadanie. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$

Rozwiązanie. 1) Jeżeli prosta A B nie jest prostopadła do osi x t.zn. jeżeli $x_1 \neq x_2$, to prostą AB możemy określić równaniem

$$y = mx + n$$

W tym celu winniśmy wyznaczyć m i n. Korzystając z danych punktów, których współrzędne spełniają równanie prostej, otrzymujemy układ równań:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= m\,x_1 + n \\ y_2 &= m\,x_2 + n \end{aligned}\right\}$$

Odejmując stronami, mamy

$$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2),$$

skąd

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Mając wyznaczony współczynnik kierunkowy prostej możemy już n nie obliczać, a raczej możemy posłużyć się równaniem wyprowadzonym w poprzednim ustępie t.zn. równaniem prostej przechodzącej przez dany punkt i o znanym współczynniku kierunkowym. Jako punkt dany możemy przyjąć A lub B. Przyjmując punkt $A(x_1,y_1)$, otrzymamy równanie

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \qquad (6)$$

Równaniu (6) możemy też nadać postać wyznacznikową. Pisząc je mianowicie w postaci

$$(x - x_1)(y_2-y_1) - (x_2-x_1)(y-y_1) = 0,$$

mamy najpierw postać wyznacznikową

$$\begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1 \\ x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0,$$

a dalej

$$\begin{vmatrix} x - x_1, & y - y_1, & 0 \\ x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & 0 \\ x_1 & y_1, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Jeżeli w wyznaczniku dodamy elementy wiersza 3-ciego do elementów wiersza 1-go i 2-go, to otrzymamy

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Po przestawieniu dwóch ostatnich wierszy mamy ostateczną postać

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

2) Jeżeli prosta AB jest prostopadła do osi x, t.zn. gdy $x_1 = x_2$, ale $y_1 \neq y_2$, to prosta przecina oś x w punkcie $(x_1, 0)$ i jej równanie ma postać

$$x = x_1 \qquad (8)$$

Przykłady:

1. Równanie prostej przechodzącej przez punkty (-2,3) i (1,5) ma w myśl wzoru (6) postać

$$y - 3 = \frac{5-3}{1+2}(x+2), \text{ czyli } y = \frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}$$

Równanie tej prostej możemy zgodnie z wzprem (7) napisać w postaci wyznącznikowej, otrzymując

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ -2, & 3, & 1 \\ 1, & 5, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2. Jeżeli prosta przechodzi przez punkty (-3,2) i (-3,5), to z danych współrzędnych punktów wynika, że prosta ta jest prostopadła do osi x, jej równanie więc ma zgodnie z wzorem (8) postać

$$x = -3.$$

7. Punkty wspólne dwóch prostych.

Niech będą dane dwie proste

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (9)$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Zbadamy istnienie punktów wspólnych tych prostych. Zgodnie z rozważaniami na str.104, badanie istnienia punktów przecięcia się dwóch linii sprowadza się w geometrii analitycznej do badania istnienia rozwiązań układu równań przedstawiających te linie.

Rozwiązując układ (9) otrzymamy równania

$$(A_1 B_2 - A_2B_1)\, x = B_1C_2 - B_2C_1 ,$$
$$(A_1 B_2 - A_2B_1)\, y = C_1A_2 - C_2A_1 , \qquad (10)$$

określające x i y jako współrzędne punktu przecięcia się prostych (9).

Zależnie od współczynników przy x i y oraz wyrazów stojących po prawej stronie równań (10) mogą zajść różne przypadki. Szczegółową dyskusję rozwiązań układu równań podaje się w wykładzie algebry. Tutaj przeprowadzimy tylko dyskusję przy założeniu, że równania (9) nie przedstawiają prostych w szczególnych położeniach, a więc prostych równoległych do osi układu i prostych przechodzących przez początek układu, czyli zakładamy, że liczby $A_1, B_1, \ldots C_2$ są różne od zera.

1°. Jeżeli $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, to

$$x = \frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1} \qquad (11)$$
$$y = \frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}$$

i wobec tego układ (9) ma jedno rozwiązanie, a proste określone tymi równaniami przecinają się w punkcie o współrzędnych danych wzorami (11).

Warunkowi $A_1C_2 - A_2B_1 \neq 0$ możemy nadać postać

$$A_1B_2 \neq A_2B_1$$

lub

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

Układ równań (9) nazywamy w tym wypadku *układem oznaczonym*

2^o. Jeżeli

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0,$$

$$B_1C_2 - B_2C_1 = 0,$$

$$C_1A_2 - C_2A_1 = 0,$$

co możemy też zapisać w postaci

$$A_1B_2 = A_2B_1, \quad B_1C_2 = B_2C_1, \quad C_1A_2 = C_2A_1,$$

lub

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Wtedy kładąc

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = k,$$

możemy równania prostych (9) napisać w postaci

$$k(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Z postaci zaś tych równań wynika, że pary (x,y), które spełniają drugie równanie spełniają jednocześnie pierwsze równanie. W tym przypadku proste mają nieskończenie wiele punktów wspólnych, tzn. pokrywają się.
Układ równań (9) nazywamy w tym przypadku *nieoznaczonym*.

3^o. Jeżeli

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$$

$$B_1C_2 - B_2C_1 \neq 0$$

$$C_1A_2 - C_2A_1 \neq 0$$

czyli gdy

$$A_1B_2 = A_2B_1, \quad B_1C_2 \neq B_2C_1, \quad C_1A_2 \neq C_2A_1,$$

lub gdy

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$$

to kładąc

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = k,$$

możemy równania (9) napisać w postaci

$$k\,(A_2x + B_2y) + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Z postaci tych równań wynika, że jeżeli para (x_o, y_o) spełnia drugie równanie, czyli gdy

$$A_2x_o + B_2y_o = -C_2,$$

to para ta nie sprawdza pierwszego równania, bowiem $k\,(A_2x_o + B_2y_o)$ równa się $-k\,C_2 \neq -C_1$.

W tym przypadku nie ma pary (x,y) sprawdzającej jednocześnie oba równania; proste (9) nie mają punktu wspólnego, czyli są równoległe. Układ równań (9) nazywamy w tym przypadku s p r z e c z n y m.

4^o. Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy

$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ i jedno z wyrażeń $B_1C_2 - B_2C_1$, $C_1A_2 - C_2A_1$ jest równe zeru, a drugie jest różne od zera.

Wykażemy, że przy $A_1, B_1, \ldots, C_2$ różnych od zera wypadek ten nie zachodzi.

Istotnie, gdyby np.

$A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, $B_1C_2 - B_2C_1 = 0$, $C_1A_2 - C_2A_1 \neq 0$,

to z tego wynikałoby

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2},$$

co jest sprzeczne.

Przypadek ten zachodzi, jak łatwo stwierdzić, gdy proste (9) zajmują szczególne położenie (są równoległe do osi układu).

Jeżeli więc równania

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

przedstawiają proste nie zajmujące szczególnego położenia względem układu współrzędnych, to proste te przecinają się, gdy

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2},$$

są równoległe, gdy

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

pokrywają się, gdy

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Przykłady:

1. Zbadać wzajemne położenie prostych:

$$2x - 3y + 6 = 0,$$
$$4x + 5y - 32 = 0 \qquad (12)$$

Ponieważ

$\frac{2}{4} \neq \frac{3}{5}$, więc proste te przecinają się. Współrzędne punktu przecięcia się otrzymamy rozwiązując układ (12). Otrzymamy

$$x = 3, \; y = 4$$

2. Zbadać wzajemne położenie prostych.

$$5x - 2y + 10 = 0, \qquad (13)$$
$$15x - 6y + 2 = 0$$

Ponieważ

$$\frac{5}{15} = \frac{-2}{-6} \neq \frac{10}{2},$$

więc proste są równoległe.

3. Zbadać wzajemnie położenie prostych:

$$\begin{aligned} x + y - 2 &= 0, \\ 2x + 2y - 4 &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Ponieważ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4}$,

więc proste (14) pokrywają się.

Układ równań (14) jest układem nieoznaczonym. Chcąc podać rozwiązania tego układu, a zarazem punkty wspólne obu prostych pokrywających się, wyznaczamy pary (x,y) spełniające pierwsze lub drugie równanie. Korzystając np. z pierwszego równania mamy

$$y = -x + 2,$$

i przyporządkowując dowolnie wybranym wartościom x wartości na y, otrzymamy rozwiązania układu (14). Otrzymujemy np. $(-3,5)$, $(-1,3)$, $(0,2)$, $(3,-1)$.

8. Pęk prostych.

Zbiór prostych przechodzących przez stały punkt lub równoległych do stałej prostej nazywamy p ę k i e m p r o s t y c h.

1) P ę k p r o s t y c h p r z e c i n a j ą c y c h się.

Niech będą dane dwie różne proste l_1 i l_2 o równaniach

$$\begin{aligned} L_1(x,y) &\equiv A_1x+B_1y + C_1 = 0, \\ L_2(x,y) &\equiv A_2x+B_2y + C_2 = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

oraz dwie dowolne liczby λ_1 i λ_2 spełniające warunek $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$.

Lewe strony równań prostych oznaczyliśmy krótko symbolami $L_1(x,y)$ i $L_2(x,y)$.

Tworzymy nowe równanie

$$\lambda_1 \cdot L_1(x,y) + \lambda_2 \cdot L_2(x,y) = 0, \tag{16}$$

czyli równanie

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1) + \lambda_2(A_2x+B_2y+C_2) = 0$$

lub po uporządkowaniu

$$(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)x + (\lambda_1B_1+\lambda_2B_2)y + (\lambda_1C_1+\lambda_2C_2) = 0 \quad (17)$$

Twierdzenie:

Jeżeli proste l_1 i l_2 przecinają się w jednym punkcie, to równanie (17), gdzie λ_1 i λ_2 nie są jednocześnie równe zeru, przedstawia prostą przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych l_1 i l_2.

Dowód: Wykażemy 1^o, że równanie (17) przedstawia prostą i 2^o, że prosta ta przechodzi przez punkt przecięcia się prostych l_1 i l_2.

1^o. Dla wykazania, że równanie (17) jest równaniem prostej należy wykazać, że współczynniki przy x i y, czyli

$$\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 \quad \text{i} \quad \lambda_1B_1 + \lambda_2B_2$$

nie są jednocześnie równe zeru.

Istotnie, ponieważ proste l_1 i l_2 z założenia przecinają się, więc wyznacznik

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

i wobec tego układ równań

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 &= 0 \\ \lambda_1B_1 + \lambda_2B_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

posiada ze względu na λ_1 i λ_2 tylko rozwiązanie

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0.$$

Występujące w równaniu (17) λ_1 i λ_2 z założenia nie są jednocześnie równe zeru, nie są więc rozwiązaniem układu (18), czyli że współczynniki przy x i y w równaniu (17) dla λ_1 i λ_2, spełniających warunek $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, nie są jednocześnie równe zeru.

2°. Wykażemy, że współrzędne punktu przecięcia się prostych l_1 i l_2 sprawdzają równanie (17).

Niech punkt $P(x_o,y_o)$ będzie punktem przecięcia się prostych l_1 i l_2. Wtedy trójmiany

$$A_1x_o + B_1y_o + C_1,$$

$$A_2x_o + B_2y_o + C_2.$$

mają wartość zero i wobec tego również wyrażenie

$$\lambda_1(A_1x_o+B_1y_o+C_1) + \lambda_2(A_2x_o+B_2y_o+C_2)$$

ma wartość zero. Z tego wynika, że punkt $P(x_o,y_o)$ sprawdza równanie (17), a to znaczy, że punkt $P(x_o,y_o)$ leży na prostej (17) lub, że prosta ta przez niego przechodzi.

Twierdzenie odwrotne.

Każdą prostą przechodzącą przez punkt przecięcia się prostych (15) można przedstawić równaniem postaci (17), dobierając odpowiednio liczby λ_1 i λ_2.

Dowód. Niech punkt $P_1(x_1,y_1)$ będzie punktem różnym od punktu $P(x_o,y_o)$ (rys.87) i l_3 prostą przechodzącą przez punkty P_o i P_1. Wykażemy, że można tak dobrać liczby λ_1 i λ_2, że równanie

$$\lambda_1 L_1(x,y) + \lambda_2 L_2(x,y) = 0$$

jest równaniem prostej l_3.

Przyjmijmy

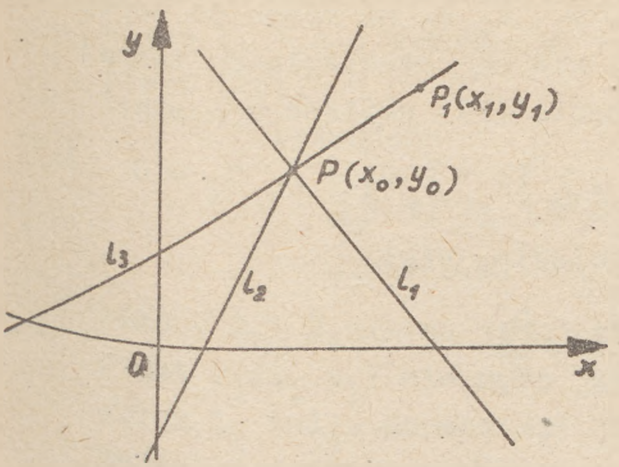
$$\lambda_1 = A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 \equiv L_2(x_1,y_1),$$

$$\lambda_2 = -(A_1x_1+B_1y_1+C_1) = - L_1(x_1,y_1)$$

Tak obrane liczby λ_1 i λ_2 nie są jednocześnie równe zeru, punkt bowiem $P_1(x_1,y_1) \neq P(x_o,y_o)$ nie leży jednocześnie na prostych l_1 i l_2 i wobec tego nie spełnia jednocześnie równań tych prostych.

Mamy teraz równanie

$$L_2(x_1\ y_1).L_1(x,y) - L_1(x_1\ y_1).L_2\ (x,y) = 0 \qquad (19)$$



które jest równaniem prostej. Prosta ta przechodzi na podstawie poprzedniego twierdzenia przez punkt $P(x_0,y_0)$; przechodzi również przez punkt $P_1(x_1,y_1)$, bowiem wyrażenie:

Rys. 87

$$L_2(x_1\ y_1)\ L_1(x_1,y_1) - L_1(x_1\ y_1)\ L_2(x_1,y_1)$$

równa się zeru, a to znaczy, że punkt $P_1(x_1,y_1)$ spełnia równanie (19).

2) P ę k   p r o s t y c h   r ó w n o l e g ł y c h.

Twierdzenie. Jeżeli proste l_1 i l_2 o równaniach

$$L_1(x,y) = 0, \quad L_2(x,y) = 0 \qquad (20)$$

są różne i równoległe, to równanie

$$\lambda_1 L_1(x,y) + \lambda_2 L_2(x,y) = 0 \qquad (21)$$

przy wszelkich wartościach λ_1 i λ_2, spełniających przynajmniej jeden z warunków

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \neq 0,$$
$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \neq 0$$

jest równaniem prostej równoległej do prostych l_1 i l_2.

Dowód. Pisząc równanie (21) w postaci

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)\ x + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) y + (\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) = 0 \quad (22)$$

zauważemy bezpośrednio, że przy spełnieniu założenia, odnoszącego się do współczynników $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$, $\lambda_1 B_1 + \lambda_2 A_2$, równanie (22) przedstawia zawsze prostą.

Jeżeli liczby A_1, B_1, A_2,B_2 są różne od zera, czyli gdy proste l_1 i l_2 nie są równoległe do żadnej z osi układu możemy równanie (22) napisać w postaci

$$A_2\left(\lambda_1\frac{A_1}{A_2}+\lambda_2\right)x+B_2\left(\lambda_1\frac{B_1}{B_2}+\lambda_2\right)y+\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2=0 \qquad (23)$$

Ponieważ l_1 i l_2 są równoległe, więc

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

i wobec tego

$$\lambda_1\frac{A_1}{A_2}+\lambda_2=\lambda_1\frac{B_1}{B_2}+\lambda_2\,,$$

a dalej

$$\frac{A_2}{A_2(\lambda_1\frac{A_1}{A_2}+\lambda_2)}=\frac{B_2}{B_2(\lambda_1\frac{B_1}{B_2}+\lambda_2)}\,,$$

skąd wynika, że proste l_2 i (23) są równoległe.

Jeżeli $A_1 = A_2 = 0$, czyli gdy proste l_1 i l_2 są równoległe do osi x, to równanie (22) przyjmuje postać

$$(\lambda_1 B_1+\lambda_2 B_2)\,y+\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2=0,$$

przedstawia więc również prostą równoległą do osi x, a przez to równoległą do l_1 i l_2.

W przypadku $B_1 = B_2 = 0$ równanie (22) przedstawia prostą równoległą do osi y, a więc równoległą również do l_1 i l_2.

Twierdzenie odwrotne.

Równanie każdej prostej równoległej do prostych l_1 i l_2 o równaniach

$$L_1(x,y)=0,\quad L_2(x,y)=0$$

można, dobierając odpowiednie λ_1 i λ_2, przedstawić w postaci

$$\lambda_1 L_1(x,y)+\lambda_2 L_2(x,y)=0. \qquad (24)$$

Dowód. Niech będzie dana prosta l_3, która przechodzi przez dowolny punkt $P_1(x_1, y_1)$, równolegle do prostych l_1 i l_2. Wyznaczymy równanie prostej l_3 w postaci (24).

Przyjmujemy

$$\lambda_1 = A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2 = L_2(x_1, y_1)$$
$$\lambda_2 = -(A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1) = -L_1(x_1, y_1)$$

Liczby λ_1 i λ_2 nie są jednocześnie równe zeru, bo punkt $P_1(x_1, y_1)$ nie może jednocześnie leżeć na prostych l_1 i l_2. Obrane λ_1 i λ_2 spełniają też przynajmniej jeden z warunków

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \neq 0$$
$$\lambda_2 B_1 + \lambda_2 B_2 \neq 0,$$

wykonując bowiem rachunki, otrzymamy:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = A_1 C_2 - A_2 C_1$$
$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = B_1 C_2 - B_2 C_1$$

i jeżeli proste l_1 i l_2 nie są równoległe do żadnej z osi układu, to

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, a stąd $A_1 C_2 \neq A_2 C_1$ i $B_1 C_2 \neq B_2 C_1$;

Jeżeli proste l_1 i l_2 są równoległe do osi y, to $B_1 = B_2 = 0$ i $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, a stąd $A_1 C_2 \neq A_2 C_1$ i $B_1 C_2 = B_2 C_1 = 0$;

Jeżeli proste l_2 i l_2 są równoległe do osi x, to $A_1 = A_2 = 0$ i $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, a stąd $A_1 C_2 = A_2 C_1 = 0$ i $B_1 C_2 \neq B_2 C_1$.

Wobec tego przy obranych

$$\lambda_1 = L_2(x_1, y_1), \quad \lambda_2 = -L_1(x_1, y_1)$$

równanie

$$L_2(x_1, y_1) L_1(x, y) - L_1(x_1, y_1) L_2(x, y) = 0 \qquad (24a)$$

przedstawia prostą równoległą do l_1 i l_2.
Prosta ta przechodzi przez punkt $P_1(x_1, y_1)$, bowiem punkt ten spełnia jej równanie.
Zatem równanie (24a) przedstawia prostą l_3.

Przykłady.

1. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt przecięcia prostych l_1 i l_2 o równaniach

$L_1 \equiv 7x-y+3=0$, $L_2 \equiv 3x+5y-4=0$ oraz przez punkt $M(2, -1)$

Rozwiązanie. Równanie prostej l_3 przechodzącej przez punkt przecięcia prostych l_1 i l_2 możemy napisać w postaci

$$(7\lambda_1 + 3\lambda_2)x + (-\lambda_1 + 5\lambda_2)y + 3\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0$$

Jeżeli prosta l_3 ma przechodzić przez punkt M, to współrzędne tego punktu spełniają jej równanie. Mamy więc

$$2(7\lambda_1 + 3\lambda_2) - 1(-\lambda_1 + 5\lambda_2) + 3\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0,$$

a po wykonaniu działań

$$6\lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

Przyjmując $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, możemy równanie prostej l_3 napisać w postaci

$$1.\ (7x-y+3) + 6(3x+5y-4) = 0$$

lub

$$25x + 29y - 21 = 0$$

2. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt przecięcia się prostych l_1 i l_2

$$4x+7y-15 = 0, \qquad 9x-14y-4 = 0$$

i równoległej do prostej l_3

$$2x-3y-9 = 0.$$

Rozwiązanie. Równanie prostej l przechodzącej przez punkt przecięcia prostych l_1 i l_2 ma postać

$$(4\lambda_1 + 9\lambda_2)x + (7\lambda_1 - 14\lambda_2)y - 15\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0$$

Prosta l jest równoległa do prostej l_3, więc

$$\frac{4\lambda_1 + 9\lambda_2}{2} = \frac{7\lambda_1 - 14\lambda_2}{-3},$$

skąd

$$26\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

Przyjmując $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 26$, otrzymamy jako równanie żądanej prostej

$$1(4x+7y-15)+26(9x-14y-4) = 0$$

lub

$$2x - 3y - 1 = 0$$

9. <u>Trzy proste należące do pęku.</u>

Twierdzenie.

Jeżeli dane są trzy różne proste o równaniach

$$\begin{aligned} L_1(x,y) &\equiv A_1x+B_1y+C_1=0 \\ L_2(x,y) &\equiv A_2x+B_2y+C_2=0 \qquad (25) \\ L_3(x,y) &\equiv A_3x+B_3y+C_3=0, \end{aligned}$$

to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by te trzy proste należały do jednego pęku prostych przecinających się lub równoległych jest istnienie takich trzech liczb t_1, t_2, t_3, spełniających warunek $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 > 0$, by równanie

$$t_1L_1 + t_2L_2 + t_3L_3 = 0 \qquad (26)$$

było spełnione przy wszelkich wartościach x i y [x].

Dowód:

1) Istotnie, niech proste (25) należą do jednego pęku tzn. przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe. Wtedy na podstawie rozważań poprzedniego ustępu istnieją takie liczby λ_1 i λ_2, że równanie

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 = 0$$

przedstawia prostą $L_3 = 0$. Liczby λ_1 i λ_2 są obie różne od zera, bo w przeciwnym razie prosta $L_3 = 0$ byłaby identyczna z prostą $L_1 = 0$ lub $L_2 = 0$ wbrew założeniu. Dalej, jeżeli równania

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 L_2 = 0 \quad \text{i} \quad L_3 = 0$$

x) tzn. by równanie (26) było tożsamością.

przedstawiają tę samą prostą, to współczynniki obu równań są proporcjonalne, czyli

$$\frac{A_3}{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2} = \frac{B_3}{\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2} = \frac{C_3}{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2} = k.$$

Mamy więc tożsamość

$$L_3(x,y) \equiv k\,\lambda_1 L_1(x,y) + k\,\lambda_2 L_2(x,y)$$

lub

$$k\,\lambda_1 L_1(x,y) + k\,\lambda_2 L_2(x,y) - L_3(x,y) \equiv 0,$$

w której rolę liczb t_1, t_2, t_3 odgrywają liczby $k\,\lambda_1$, $k\,\lambda_2$, -1

Odwrotnie: jeżeli równanie (26) jest tożsamościowo spełnione i $t_3 \neq 0$, to

$$L_3 = -\frac{t_1}{t_3} L_1 - \frac{t_2}{t_3} L_2,$$

i wobec tego równania

$$L_3 = 0$$

i

$$\frac{t_1}{t_3} L_1 + \frac{t_2}{t_3} L_2 = 0$$

przedstawiają tę samą prostą, przy czym prosta ta, jak to wynika z drugiej postaci jej równania, należy do pęku prostych $L_1 = 0$ i $L_2 = 0$. Prosta więc L_3 przechodzi przez punkt przecięcia prostych $L_1 = 0$ i $L_2 = 0$, jeżeli te proste przecinają się, a jest do nich równoległa, jeżeli są równoległe.

Warunek (26) możemy też zastąpić innym warunkiem równoważnym.

Równanie (26) napisane szczegółowo ma postać

$$(A_1t_1+A_2t_2+A_3t_3)x+(B_1t_1+B_2t_2+B_3t_3)y+C_1t_1+C_2t_2+C_3t_3 = 0$$

Z postaci tego równania wynika, że jest spełnione przy wszelkich x i y, jeżeli jednocześnie

$$A_1t_1 + A_2t_2 + A_3t_3 = 0,$$
$$B_1t_1 + B_2t_2 + B_3t_3 = 0,$$
$$C_1t_1 + C_2t_2 + C_3t_3 = 0.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia rozwiązań t_1, t_2, t_3, nie wszystkich równych zeru, jest warunek

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Twierdzenie więc o trzech prostych należących do pęku możemy wypowiedzieć w postaci:

Jeżeli dane są trzy różne proste:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0,$$

to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by te trzy proste należały do jednego pęku jest

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \\ A_3, & B_3, & C_1 \end{vmatrix} = 0$$

Przykład. Z twierdzenia o trzech prostych należących do pęku możemy skorzystać w dowodach metodą geometrii analitycznej twierdzeń, znanych z geometrii elementarnej, o przecinaniu się w jednym punkcie trzech środkowych trójkąta, trzech wysokości, trzech symetralnych boków lub trzech dwusiecznych kątów trójkąta. Dla przykładu wykażemy, że linie środkowe trójkąta o wierzchołkach A(-1,-3), B(2,-2), C(1,4) przecinają się w jednym punkcie.

Wyznaczamy współrzędne środków boków BC, AC, AB, otrzymując

$$A'\left(\frac{3}{2}, 1\right),\quad B'\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ i } C'\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right).$$

Następnie wyznaczamy równania linii środkowych AA', BB' i CC' jako prostych przechodzących przez dwa punkty.

Otrzymujemy równania:

$$8x - 5y - 7 = 0,$$
$$5x + 4y - 2 = 0, \qquad (27)$$
$$13x - y - 9 = 0.$$

Badamy, czy spełniony jest warunek przynależności prostych AA', BB', CC' do pęku prostych tzn. czy istnieje układ trzech liczb t_1, t_2, t_3, nie wszystkich jednocześnie równych zeru, że równanie

$$t_1(8x-5y-7) + t_2(5x+4y-2) + t_3(13x-y-9) = 0 \qquad (28)$$

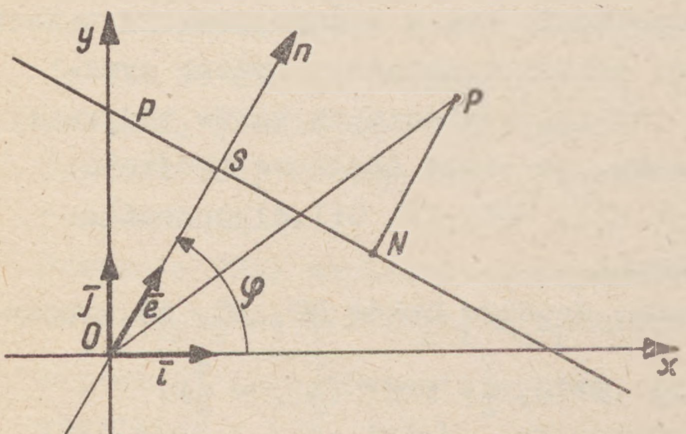
jest spełnione tożsamościowo.

Bezpośrednio stwierdzamy, że układ takich liczb istnieje, bo np. dla $t_1=1$, $t_2=1$ i $t_3 = -1$ równanie (28) jest tożsamością.

Proste więc (27) należą do jednego pęku i to do pęku prostych przecinających się, jak to wynika z postaci ich równań.

10. Równanie normalne prostej.

W płaszczyźnie prostokątnego układu Oxy dana jest prosta p. Z początku układu O kreślimy prostą n prostopadłą do prostej p i punkt przecięcia prostych p i n oznaczamy przez S(rys.88). Prostej n nadajemy zwrot dodatni. Do wyboru mamy dwa zwroty jako zwroty dodatnie - zwrot od początku O ku prostej p, czyli zwrot wektora $\overline{OS}$ lub zwrot od prostej p do początku O, czyli zwrot wektora $\overline{SO}$. Prostą n przechodzącą przez początek układu, prostopadle do prostej p z przyjętym zwrotem dodatnim nazywamy o s i ą n o r m a l n ą p r o s t e j p.



Rys.88

Jako zwrot dodatni osi n przyjmujemy narazie zwrot od początku O ku prostej p. Jeżeliby prosta p przechodziła przez O, wtedy jako zwrot dodatni należy przyjąć dowolnie jeden z dwóch możliwych zwrotów prostej n. Niech wektor $\overline{e}$ będzie wektorem jednostkowym osi n.

Położenie prostej p w płaszczyźnie układu Oxy jest określone, gdy znany jest kąt φ, jaki tworzy oś normalna n z osią x oraz znana jest miara wektora $\overline{OS}$ względem osi n czyli $OS = \delta$. Wobec przyjętego zwrotu dodatniego osi n (od O ku prostej p) δ jest dodatnie i wyraża odległość prostej p od początku układu. Jeżeli prosta p przechodzi przez O, to $\delta = 0$.

Wykażemy, że równaniem prostej p jest równanie

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta = 0 \qquad (28a)$$

W dowodzie wykażemy, że jeżeli punkt należy do prostej p, to jego współrzędne spełniają równanie (28a), jeżeli nie należy do prostej, to jego współrzędne równania tego nie spełniają.

Niech punkt P(x,y) będzie dowolnym punktem płaszczyzny i punkt N jego rzutem prostokątnym na prostą p.

Badamy iloczyn skalarny wektora jednostkowego $\overline{e}$ i wektora $\overline{OP}$, czyli $\overline{e} \cdot \overline{OP}$.
Jak wiemy (str.42) iloczyn ten wyraża miarę rzutu wektora $\overline{OP}$ na oś n(składową wektora $\overline{OP}$ względem osi n).
Jeżeli punkt P należy do prostej p, to

$$\overline{e} \cdot \overline{OP} = \delta$$

Jeżeli punkt P nie należy do prostej p, to

$$\overline{e} \cdot \overline{OP} = \delta + d,$$

gdzie d = NP i jest dodatnie, gdy punkt P leży na płaszczyźnie z przeciwnej strony prostej p, aniżeli początek układu (jak na rys. 88); d jest ujemne, jeżeli

P leży z tej samej strony prostej p, co początek układu.

Ponieważ składowymi wektora $\bar{e}$ są liczby $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$, a wektora $\overline{OP}$ liczby x i y, więc możemy napisać :

1) w przypadku, gdy P(x,y) należy do prostej p

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \delta$$

lub

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta = 0,$$

a to zn.,że współrzędne punktu P spełniają równanie (28a),

2) w przypadku, gdy P(x,y) nie należy do prostej p, to

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \delta + d$$

lub

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta = d,$$

a to znaczy, że współrzędne punktu P nie spełniają równania (28a).

Równanie prostej p w postaci

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta = 0$$

nazywamy r ó w n a n i e m n o r m a l n y m prostej lub równaniem Hessego. W równaniu tym $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$ są cosinusami kierunkowymi osi normalnej, na której jako zwrot dodatni ustalono zwrot od początku układu ku prostej (w wypadku prostej nie przechodzącej przez 0), a δ jest odległością prostej od początku układu.

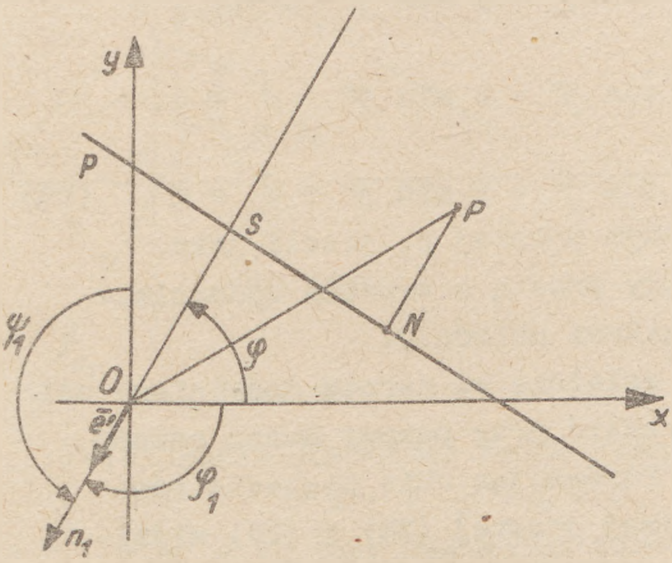
Przykłady. 1, Jeżeli oś normalna prostej p tworzy z osią x kąt $\varphi = 30^\circ$ i prosta p odcina na osi n odcinek długości 5 jedn., to równanie prostej p ma postać :

$$x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + y \cdot \frac{1}{2} - 5 = 0$$

2. Jeżeli oś n tworzy z osią x kąt $\varphi = 135^\circ$ i odległość prostej p od początku układu równa się 4 jedn., to równanie prostej p ma postać:

$$-x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 = 0$$

Z kolei rozpatrzymy równanie prostej p w postaci normalnej przy założeniu, że jako oś normalną przyjęto prostą o zwrocie dodatnim przeciwnym do zwrotu poprzednio przyjętego, tzn. o zwrocie dodatnim od prostej p ku punktowi O(rys. 89). Oś o tak ustalonym zwrocie dodatnim oznaczmy przez n_1, jej kąt z osią x przez φ_1, odległość prostej p od początku układu czyli $|OS|$ przez δ. Badamy iloczyn skalarny $\bar{e}' \cdot \overline{OP}$, czyli miarę rzutu wektora $\overline{OP}$ na oś n_1. Jeżeli P należy do prostej p, to



Rys. 89

$$\bar{e}' \cdot \overline{OP} = -\delta$$

Jeżeli P nie należy do prostej p, to

$$\bar{e}' \cdot \overline{OP} = -\delta + d,$$

gdzie d = NP i jest ujemne, gdy punkt P leży na płaszczyźnie z przeciwnej strony prostej p niż początek układu, dodatnie - gdy z tej samej strony co O. Składowymi wektora $\overline{OP}$ są liczby x i y, wektora $\bar{e}'$ liczby $\cos\varphi_1$ i $\cos\psi_1$, gdzie ψ_1 jest kątem osi n_1 z osią y. Ponieważ $\varphi_1 = \pi - \varphi$ i $\psi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi$ więc

$$\cos\varphi_1 = -\cos\varphi \quad \text{i} \quad \cos\psi_1 = -\sin\varphi$$

Wyrażając iloczyn skalarny $\bar{e}' \cdot \overline{OP}$ przez składowe czynników, otrzymamy dla punktów P(x,y) należących do prostej p

$$-x\cos\varphi - y\sin\varphi = -\delta$$

lub

$$-x\cos\varphi - y\sin\varphi + \delta = 0,$$

dla punktów P (x,y) nie należących do prostej p

$$-x\cos\varphi - y\sin\varphi = -\delta + d$$

lub

$$-x\cos\varphi - y\sin\varphi + \delta = d.$$

Równanie więc

$$-x\cos\varphi - y\sin\varphi + \delta = 0 \qquad (29)$$

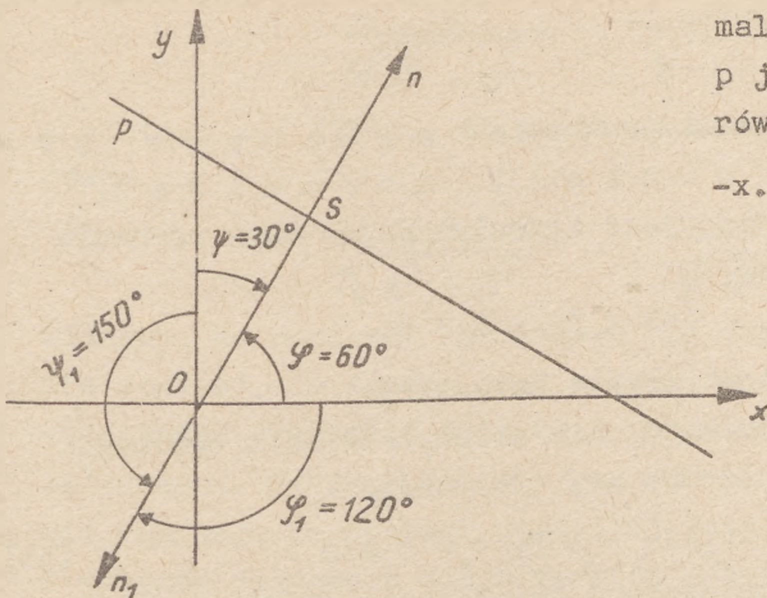
jest równaniem normalnym prostej p, jeżeli jako oś normalną przyjmujemy prostą o zwrocie dodatnim od prostej p ku początkowi układu O.

Każdą prostą, zależnie od zwrotu dodatniego osi normalnej, możemy określić przy pomocy dwóch równań w postaci normalnej. Porównując obie postacie równań normalnych tej samej prostej (28) i (29) widzimy, że od jednej postaci możemy przejść do drugiej, zmieniając znaki wyrazów równania na przeciwne. Równanie prostej, dla której jako oś normalną przyjęto prostą o zwrocie dodatnim wektora $\overline{OS}$ tym się charakteryzuje, że wyraz wolny $/-\delta/$ jest ujemny; przy zwrocie $\overline{SO}$ jako zwrocie dodatnim osi normalnej wyraz wolny $+\delta$ jest dodatni.

Przykład. Jeżeli prosta p jest oddalona od początku układu o 3 jedn. i jedna z jej osi normalnych n tworzy z osiami układu kąty $\varphi = 60^\circ$ i $\psi = 30^\circ$, to równaniem normalnym tej prostej jest

$$x \cdot \frac{1}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 = 0.$$

Jeżeli mając tę samą prostą, jako oś normalną przyjmiemy prostą n_1 o zwrocie dodatnim przeciwnym do zwrotu osi n (rys.90), to oś n_1 tworzy z osiami układu kąty $\varphi_1 = 120^\circ$, $\psi_1 = 150^\circ$, a miara wektora $\overline{OS}$ względem osi n_1 równa się -3.



Rys. 90

Równaniem normalnym prostej p jest również równanie:

$$-x.\frac{1}{2}-y.\frac{\sqrt{3}}{2}+3=0$$

Twierdzenie odwrotne: Każde równanie postaci

$$r\,x + s\,.y + t = 0, \qquad (30)$$

gdzie $r^2 + s^2 = 1$, jest równaniem normalnym prostej, której oś normalna ma jako cosinusy kierunkowe liczby r i s i której odległość od początku układu równa się $|t|$.

Dowód : Wykażemy, że potrafimy skonstruować prostą p, dla której równanie (30) jest równaniem normalnym.

W układzie Oxy obieramy punkt J(r,s). Wektor $\overline{OJ}$ jest wektorem jednostkowym, z założenia bowiem $\overline{OJ} = \sqrt{r^2 + s^2} = 1$. Oś, którą wektor $\overline{OJ}$ określa, przyjmujemy jako oś n. Cosinusy kierunkowe tej osi równe są składowym wektora $\overline{OJ}$, są więc równe r i s. Na osi n tak obranej, odkreślamy odcinek $\overline{OS}$ i to na półosi dodatniej, jeżeli $t < 0$, na półosi ujemnej, jeżeli $t > 0$. Przez punkt S prowadzimy prostą p prostopadłą do osi n.

W myśl rozważań poprzedniego ustępu równanie normalne tej prostej ma postać (30), więc równanie(30) przedstawia prostą p.

Sprowadzenie równania o g ó l n e g o p r o s t e j d o p o s t a c i n o r m a l n e j.

Rozwiążemy następujące zadanie: Mając dane równanie ogólnej prostej

$$Ax + By + C = 0,$$

sprowadzić je do postaci normalnej.

Rozwiązanie: mnożymy obie strony równania ogólnego prostej przez liczbę μ, otrzymując

$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0 \qquad (31)$$

Na podstawie ostatniego twierdzenia, równanie to będzie równaniem prostej w postaci normalnej, jeżeli czynnik μ tak dobierzemy, by

$$(\mu A)^2 + (\mu B)^2 = 1$$

Obliczając μ z tego związku, otrzymamy dwie wartości na μ różniące się znakiem:

$$\mu_1 = \frac{1}{+\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2}}$$

Zatem równanie ogólne prostej

$$Ax + By + C = 0$$

Sprowadzamy do postaci normalnej, mnożąc strony równania ogólnego przez μ_1 lub μ_2, otrzymując

$$\frac{Ax+By+C}{+\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \qquad (32_a)$$

lub

$$\frac{Ax+By+C}{-\sqrt{A^2+B^2}} = 0. \qquad (32_b)$$

Z postaci równania (32_a)wynika, że oś normalna prostej ma cosinusy kierunkowe równe

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

z postaci zaś (32^b), że cosinusy kierunkowe osi są równe

$$\frac{A}{-\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \frac{B}{-\sqrt{A^2 + B^2}},$$

Widzimy, że cosinusy kierunkowe osi normalnych różnią się znakami, co zgodne jest z tym, że do każdej prostej można wykreślić dwie osie normalne, przeciwnie skierowane. Wybór μ_1 lub μ_2 przy sprowadzeniu równania ogólnego do postaci normalnej jest równoznaczny z wyborem jednego z dwóch zwrotów prostej n jako zwrotu dodatniego.

Umówimy się, że w dalszych rozważaniach, przy sprowadzaniu równania ogólnego prostej do postaci normalnej, będziemy wybierać tę spośród dwóch wartości czynnika μ, której wybór będzie równoznaczny z wyborem jako zwrotu dodatniego osi n zwrotu od początku układu ku prostej p. W tym celu winniśmy tak dobrać μ, by wyraz wolny w uzyskanym równaniu normalnym był ujemny. Otrzymamy to, jeżeli przyjmiemy tę wartość μ której znak jest przeciwny do znaku liczby C, występującej w równaniu ogólnym. Jeżeli więc dane jest równanie ogólne prostej p.

$$Ax + By + C = 0,$$

to równaniem normalnym tej prostej, posiadającej jako oś normalną prostą o zwrocie dodatnim od początku układu do prostej p, jest równanie

$$\frac{Ax + By + C}{(-\mathrm{sign.}C)\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Uwaga: (-sign.C) czytamy: minus signum C.

Przykłady:

1. Sprowadzając równanie ogólne prostej $2x-3y+4=0$ do postaci normalnej, otrzymamy

$$\frac{2x-3y+4}{\sqrt{13}} = 0 \qquad \text{lub} \qquad \frac{2x-3y+4}{-\sqrt{13}} = 0.$$

Zgodnie z ostatnią umową będziemy posługiwali się drugą postacią równania. Prosta określona tym równaniem posiada oś normalną, której cosinusy kierunkowe są równe :

$$\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos\psi = \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Prosta jest oddalona od początku układu o $\frac{4}{\sqrt{13}}$ j.

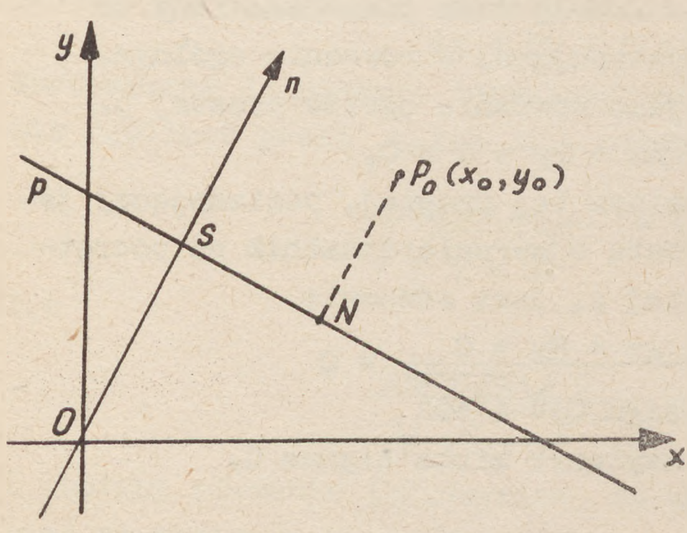
2. Celem sprowadzenia równania kierunkowego prostej $y = \frac{3}{4}x + 2$ do postaci normalnej, piszemy je najpierw w postaci ogólnej $y - \frac{3}{4}x-2 = 0$, a stąd uzyskujemy zgodnie z umową postać normalną:

$$\frac{y-\frac{3}{4}x-2}{(-\text{sign.}C)\cdot\sqrt{\frac{9}{16}+1}} = 0, \quad \text{czyli} \quad \frac{y-\frac{3}{4}x-2}{\frac{5}{4}} = 0$$

11. Odległość punktu od prostej.

W płaszczyźnie układu Oxy dana jest prosta p równaniem normalnym

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0$$



Rys. 91

oraz punkt $P_0(x_0,y_0)$. Mamy wyznaczyć odległość punktu P_0 od prostej p. Odległością względną punktu P_0 od prostej p nazywamy składową skalarną wekto-

ra $\overline{NP}$ względem osi n. Odległość ta jest dodatnia, gdy P_0 znajduje się z przeciwnej strony prostej niż początek układu, ujemna gdy P_0 znajduje się z tej samej strony prostej p, co punkt O.
Na stronie 134, przy wyprowadzaniu równania normalnego prostej, otrzymaliśmy, że

$$NP_0 = x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - \delta$$

Odległość więc względna punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0$$

równa się wartości lewej strony równania normalnego prostej, w którą za x i y wstawiono współrzędne punktu $P_0(x_0, y_0)$.

Jeżeliby prosta p była dana w postaci ogólnej, to chcąc wyznaczyć odległość punktu $P_0(x_0, y_0)$ od prostej p, napiszemy najpierw jej równanie w postaci normalnej, otrzymując

$$\frac{Ax + By + C}{(-\mathrm{sign.}C)\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Wtedy odległość względna punktu P_0 od prostej p wyrazi się wzorem

$$NP_0 = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{(-\mathrm{sign.}C)\sqrt{A^2+B^2}}$$

O d l e g ł o ś c i ą z w y k ł ą, krótko odległością punktu P_0 od prostej p nazywamy długość odcinka $|NP|$. Odległość zwykła równa się oczywiście bezwzględnej wartości odległości względnej, wyraża się więc wzorem

$$|NP_0| = |x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - \delta|$$

lub

$$|NP_0| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Przykład. Mając prostą $9x-12y+2=0$ oraz punkt P_0 $(-3,5)$, znaleźć odległość punktu od prostej.

Rozwiązanie:

$$NP_o = \frac{Ax_o+By_o+C}{(-\text{sign.}C)\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{-27-60+2}{-\sqrt{81+144}} = \frac{85}{15} = \frac{17}{3}$$

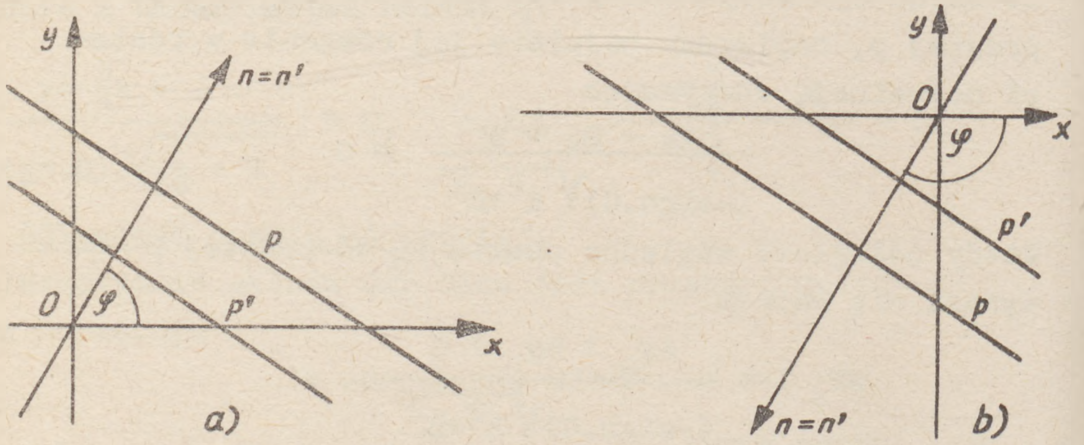
Punkt P_o leży z przeciwnej strony prostej, aniżeli początek układu.

12. Odległość dwóch prostych równoległych.

Odległością dwóch prostych równoległych p i p' nazywamy długość odcinka prostej prostopadłej do obu równoległych, zawartego między tymi równoległymi.

W płaszczyźnie układu Oxy proste równoległe mogą zajmować jedno z następujących położeń:

1) Początek układu znajduje się z jednej strony obu prostych równoległych (rys. 92 a i b).



Rys. 92

W tym przypadku osi normalne n i n' prostych p i p' są te same, równe są więc również ich cosinusy kierunkowe, czyli

$$\cos\varphi = \cos\varphi'$$
$$\sin\varphi = \sin\varphi'$$

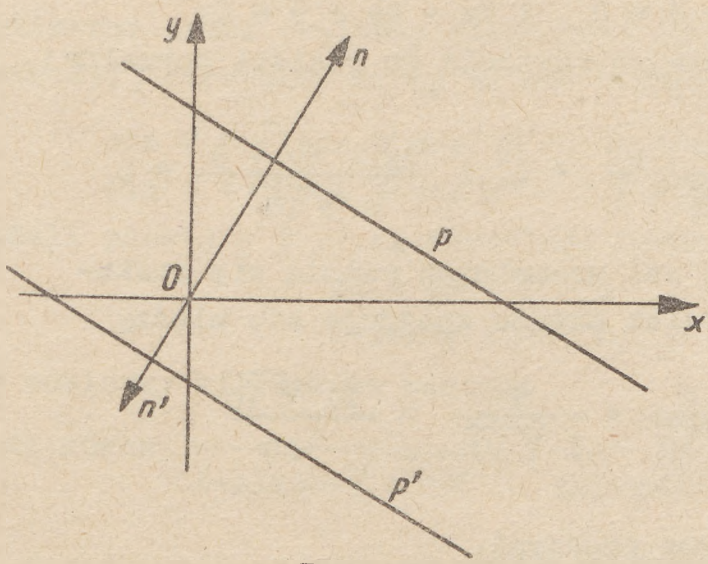
Równania normalne prostych p i p' mają postać

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0$$
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta' = 0.$$

Odległość d prostych równoległych równa się różnicy ich odległości od początku układu, co nie uwzględniając kolejności prostych p i p' możemy zapisać

$$d = |\delta' - \delta|$$

2) Początek układu znajduje się między prostymi równoległymi (rys. 93).



Rys. 93

Osi normalne n i n' w tym przypadku mają zwroty przeciwne, wobec tego ich cosinusy kierunkowe różnią się znakami, czyli $\cos\varphi' = -\cos\varphi$, $\sin\varphi' = -\sin\varphi$. Równania normalne prostych p i p' mają postać

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \delta = 0$$
$$-x\cos\varphi - y\sin\varphi - \delta' = 0$$

Odległość d prostych równoległych równa się sumie ich odległości od początku układu, czyli

$$d = \delta' + \delta$$

3) Jedna z prostych przechodzi przez początek układu. W tym przypadku odległość prostych równoległych równa się odległości drugiej prostej od początku układu.

Przykłady:

1. Wyznaczyć odległość prostych równoległych

$$3x + 4y - 4 = 0 \quad i \quad 6x + 8y - 1 = 0.$$

Rozwiązanie: Sprowadzamy równania danych prostych do postaci normalnej, otrzymując :

$$\frac{3x+4y-4}{5} = 0 \quad i \quad \frac{6x+8y-1}{10} = 0.$$

Z postaci tych równań wnioskujemy, że początek układu znajduje się po jednej stronie obu prostych, wobec tego

$$d = \left| \frac{4}{5} - \frac{1}{10} \right| = \frac{7}{10}$$

2. Wyznaczyć odległość prostych równoległych

$$x - 3y - 6 = 0 \quad \text{i} \; 2x - 6y + 9 = 0.$$

Rozwiązanie: Sprawdzając równania do postaci normalnej, otrzymamy :

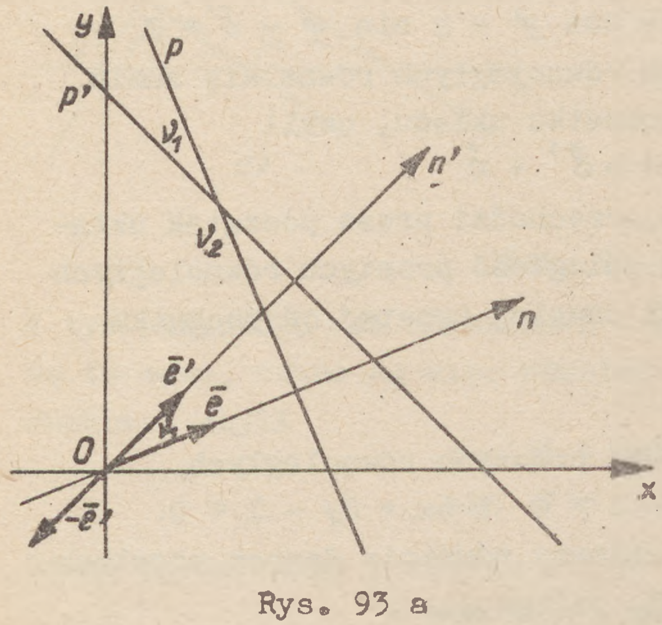
$$\frac{x - 3y - 6}{\sqrt{10}} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{2x - 6y + 9}{-\sqrt{40}} = 0$$

Cosinusy kierunkowe osi normalnych różnią się znakami, wobec tego początek układu znajduje się między prostymi i

$$d = \frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{9}{2\sqrt{10}} = \frac{21\sqrt{10}}{20}$$

13. Kąt między dwiema prostymi.

Dwie proste przecinające się p i p' tworzą dwie pary kątów wierzchołkowych. Jeżeli n i n' są osiami normalnymi tych prostych (rys. 93a), to kąt jednej pary kątów wierzchołkowych V_1 równy jest kątowi między osiami n i n', a tym samym kątowi między wektorami jednostkowymi $\bar{e}$ i $\bar{e}'$. Kąt drugiej pary kątów wierzchołkowych V_2 jest równy kątowi między wektorami $\bar{e}$ i $-\bar{e}'$.



Rys. 93 a

Jeżeli proste p i p' są określone równaniami

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - \delta = 0,$$
$$x \cos\varphi' + y \sin\varphi' - \delta' = 0,$$

to cosinusy kierunkowe wektora

$\bar{e}$ są równe $\cos\varphi$, $\sin\varphi$,

$\bar{e}'$ " " $\cos\varphi'$, $\sin\varphi'$,

$-\bar{e}'$ " " $-\cos\varphi'$, $-\sin\varphi'$,

Stosując wzory wyrażające cosinus i sinus kąta między wektorami przez cosinusy kierunkowe tych wektorów (str.49), otrzymamy wzory na kąt ν między prostymi:

$$\cos\nu = \pm(\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi') \qquad (33)$$

$$\sin\nu = |\cos\varphi\sin\varphi' - \cos\varphi'\sin\varphi| \qquad (34)$$

Jeżeli proste p i p' są określone równaniami

$$Ax + By + C = 0$$

$$A'x+B'y + C' = 0,$$

to cosinusy kierunkowe wektora

$\bar{e}$ są równe $\dfrac{A}{(-\mathrm{sign}C)\sqrt{A^2+B^2}}$, $\dfrac{B}{(-\mathrm{sign}C)\sqrt{A^2+B^2}}$

$\bar{e}'$ " " $\dfrac{A'}{(-\mathrm{sign}C')\sqrt{A'^2+B'^2}}$, $\dfrac{B'}{(-\mathrm{sign}C')\sqrt{A'^2+B'^2}}$

$-\bar{e}'$ " " $\dfrac{A'}{(+\mathrm{sign}C')\sqrt{A'^2+B'^2}}$, $\dfrac{B'}{(+\mathrm{sign}C')\sqrt{A'^2+B'^2}}$

Wzory więc wyrażające kąt ν między prostymi w tym wypadku przyjmują postać:

$$\cos\nu = \pm\frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}} \qquad (35)$$

$$\sin\nu = \frac{|AB' - A'B|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}} \qquad (36)$$

Jeżeli proste p i p' są skreślone równaniami kierunkowymi

$$y = ax + b,$$

$$y = a'x + b',$$

to wyznaczając cosinusy kierunkowe wektorów $\overline{e}$, $\overline{e'}$, $-\overline{e'}$, podobnie jak w przypadku równań ogólnych, mamy

$$\cos \vartheta = \pm \frac{1 + aa'}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}}, \tag{37}$$

$$\sin \vartheta = \frac{|a' - a|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a'^2}}, \tag{38}$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \pm \frac{a'-a}{1+aa'}. \tag{39}$$

14. Warunki równoległości i prostopadłości dwóch prostych.

1. Jeżeli proste p i p' są określone równaniami

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

to warunkiem koniecznym i dostatecznym równoległości tych prostych jest

$$\sin \vartheta = \frac{|AB' - A'B|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}} = 0,$$

czyli $AB' - A'B = 0$,

co jest równoważne warunkowi

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}, \tag{40}$$

Warunek ten otrzymaliśmy już na str. 121, dyskutując liczbę rozwiązań układu dwóch równań liniowych.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym prostopadłości prostych p i p' jest

$$\cos \vartheta = \pm \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A'^2+B'^2}} = 0,$$

czyli
$$AA' + BB' = 0 \tag{41}$$

2. Jeżeli proste p o p' są określone równaniami

$$y = ax + b$$
$$y = a'x + b',$$

to warunek ich równoległości przyjmuje postać

$$a = a', \tag{42}$$

a warunek prostopadłości

$$1 + aa' = 0$$

lub

$$a' = -\frac{1}{a} \tag{43}$$

Z warunku prostopadłości prostych, gdy proste są określone równaniami kierunkowymi, będziemy często korzystać. Warunek ten możemy wysłowić następująco: Warunkiem koniecznym i dostatecznym prostopadłości dwóch prostych jest, by współczynnik kierunkowy jednej prostej równał się odwrotności współczynnika kierunkowego drugiej prostej ze znakiem przeciwnym.

Przykłady:

1. Przy jakiej wartości m proste

$$mx - (2m - 3)y + 3 = 0$$
$$(2m+5)x + (m+6)y - 2 = 0$$

są a) równoległe, b) prostopadłe?

a) Proste są równoległe, gdy spełniony jest warunek

$$\frac{m}{2m + 5} = \frac{3 - 2m}{m + 6},$$

czyli gdy $m = 1$ lub $m = -3$.

b) Proste są prostopadłe, gdy spełniony jest warunek

$$m(2m+5) - (2m-3)(m+6) = 0$$

czyli, gdy $m = \frac{9}{2}$.

2. Znaleźć równania trzech wysokości trójkąta o wierzchołkach A(-1,-3), B(2,-2), C(1,4) i wykazać, że te wysokości przecinają się w jednym punkcie.
Wyznaczamy równania prostych, pokrywających się z bokami trójkąta, jako prostych przechodzącycxh przez dwa dane punkty. Otrzymujemy:

dla prostej BC równanie $y = -6x + 10$

" CA " $y = \frac{7}{2}x + \frac{1}{2}$

" AB " $y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$

Wyznaczamy równania prostych pokrywających się z wysokościami trójkąta. Prostą przechodzącą przez wierzchołek A prostopadle do boku BC oznaczamy przez h_a. Prosta h_a przechodzi przez punkt A, więc jej równanie możemy napisać w postaci

$$y + 3 = m(x + 1).$$

Współczynnik kierunkowy m znajdujemy, korzystając z warunku prostopadłości h_a do prostej BC. Współczynnik m równa się odwrotności liczby -6 ze znakiem przeciwnym, czyli $m = \frac{1}{6}$.

Równaniem prostej h_a jest

$$y + 3 = \frac{1}{6}(x + 1)$$

lub w postaci kierunkowej

$$y = \frac{1}{6}x - \frac{17}{6}$$

Postępując podobnie dla prostych przechodzących przez wierzchołki B i C otrzymujemy:

dla prostej h_b równanie $y = -\frac{2}{7}x - \frac{10}{7}$,

" " h_c " $y = -3x + 7$

Dla udowodnienia, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie należy wykazać, że dla prostych h_a, h_b, h_c spełniony jest warunek przynależności do jednego pęku.

Istotnie pisząc równanie

$$t_1(x-6y-17) + t_2(2x+7y+10) + t_3(3x+y-7) = 0,$$

stwierdzamy bezpośrednio, że istnieje układ liczb t_1, t_2, t_3, spełniających warunek $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 > 0$, że równanie to jest spełnione dla wszystkich wartości x i y. Układem takich liczb są np. liczby $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = -1$.

15. Dwusieczne kątów między dwiema prostymi.

Mając dwie przecinające się proste p i p' określone równaniami normalnymi

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta = 0,$$
$$x \cos \varphi' + y \sin \varphi' - \delta = 0$$

wyznaczymy równania dwusiecznych kątów, utworzonych przez proste p i p'.

Jeżeli λ_1 i λ_2 spełniają warunek $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, to równanie

$$\lambda_1(x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta) + \lambda_2(x \cos \varphi' + y \sin \varphi' - \delta') = 0 \quad (44)$$

przedstawia pęk prostych przechodzących przez punkt przecięcia się prostych p i p'. Wśród pęku tych prostych znajdują się również dwusieczne kątów, których równania chcemy wyznaczyć. Równania dwusiecznych otrzymamy z równania(44) obierając odpowiednio wartości na λ_1 i λ_2.

Celem dokonania należytego wyboru wartości liczb λ_1 i λ_2, postaramy się najpierw poznać ich sens geometryczny.

Niech prosta l będzie prostą pęku (44) i niech punkt $P(x_0, y_0)$ będzie punktem tej prostej, różnym od punktu przecięcia się prostych p i p' (rys. 94). Punkt $P(x_0, y_0)$ spełnia równanie (44) mamy więc, że

$$\lambda_1(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - \delta) + \lambda_2(x_0 \cos \varphi' + y_0 \sin \varphi' - \delta') = 0,$$

ale

$$x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - \delta = NP$$

i

$$x_0 \cos \varphi' + y_0 \sin \varphi' - \delta = N'P,$$

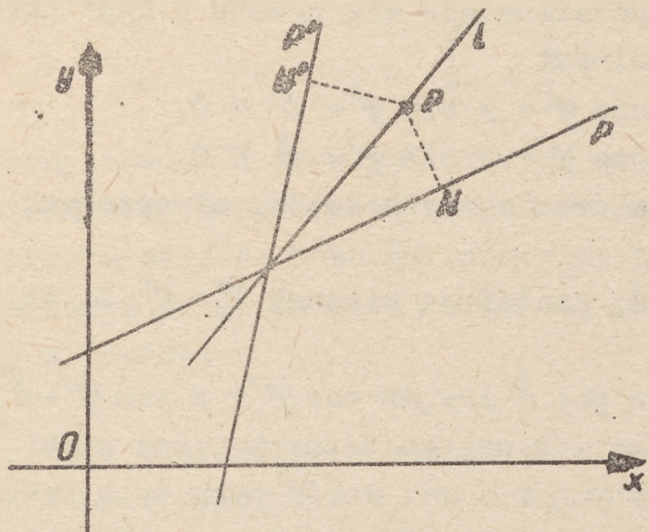
wobec tego

$$\lambda_1 NP + \lambda_2 N'P = 0,$$

skąd

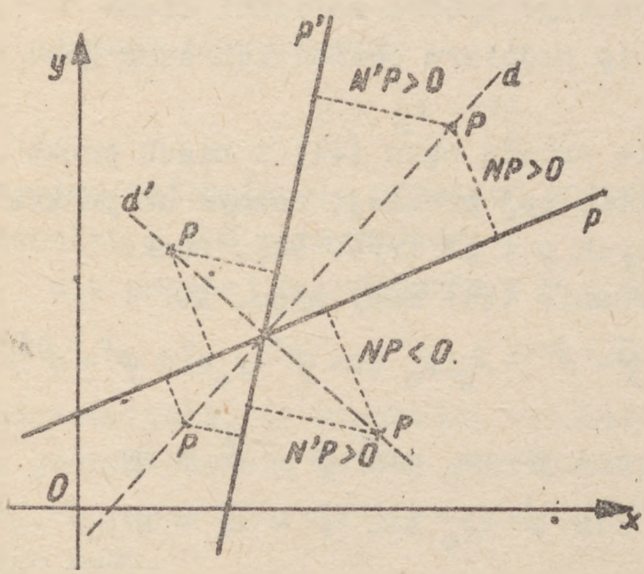
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = - \frac{N'P}{NP}$$

Jeżeli punkt P należy do jednej z dwusiecznych kątów



Rys. 94

utworzonych przez p i p', to $|NP| = |N'P|$, przy czym gdy punkt P leży na dwusiecznej kątów, na których obszarze znajduje się początek układu O, to NP i N'P są jednakowych znaków, gdy natomiast należy do dwusiecznej drugiej pary kątów, nie zawierających początku układu, to NP i N'P są znaków przeciwnych (rys. 95).



Rys. 95

W pierwszym przypadku stosunek $N'P : NP = 1$, a $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$; w drugim przypadku $N'P : NP = -1$, a $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = +1$. Obierając więc λ_1 i λ_2 w równaniu (44) tak, by $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$, otrzymamy równanie dwusiecznej d, zaś dla $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = +1$ otrzymamy równanie dwusiecznej d'.

Przyjmując $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ oraz $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ mamy równania dwusiecznych:

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - \delta \pm (x \cos\varphi' + y \sin\varphi' - \delta') = 0 \qquad (45)$$

Jeżeli proste p i p' dane są równaniami ogólnymi

$$Ax + By + C = 0,$$
$$A'x + B'y + C' = 0,$$

to przekształcając je na równania normalne otrzymamy

$$\frac{Ax + By + C}{(-\mathrm{sign}C)\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \quad \frac{A'x + B'y + C'}{(-\mathrm{sign}C)\sqrt{A'^2 + B'^2}} = 0,$$

zaś równania dwusiecznych możemy napisać w postaci

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} = 0$$

lub

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}. \qquad (46)$$

Przykład:

Mając równanie prostych $x-2y-2=0$ i $4x+3y-12=0$, napisać równania dwusiecznych kątów między tymi prostymi. Dane równania prostych piszemy w postaci normalnej:

$$\frac{x - 2y - 2}{\sqrt{5}} = 0, \quad \frac{4x + 3y - 12}{5} = 0$$

i jako równania dwusiecznych kątów otrzymujemy

$$\frac{x-2y-2}{\sqrt{5}} = \frac{4x+3y-12}{5} \quad \text{i} \quad \frac{x-2y-2}{\sqrt{5}} = -\frac{4x+3y-12}{5}$$

16. Równanie prostej we współrzędnych biegunowych.

Mając w układzie Oxy określoną prostą l równaniem

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \delta = 0,$$

przyjmujemy jako oś biegunową półoś Ox.
Korzystając ze związków między współrzędnymi kartezjańskimi i biegunowymi (str.90)

$$x = r \cos \alpha, \; y = r \sin \alpha,$$

otrzymamy

$$r \cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi - \delta = 0,$$

czyli

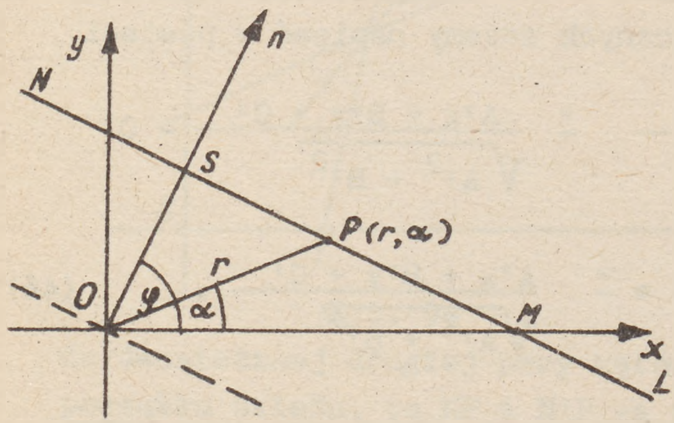
$$r \cos (\alpha - \varphi) = \delta$$

lub

$$r = \frac{\delta}{\cos(\alpha - \varphi)}, \qquad (47)$$

jako równanie prostej we współrzędnych biegunowych.

W równaniu tym δ i φ są liczbami stałymi dla danej prostej, r i α zmiennymi. Gdy kąt α zmienia się od 0 do $\varphi + \frac{\pi}{2}$ (rys.95a), to punkt $P(r, \alpha)$ przebiega półprostą MN. Gdy kąt α zmienia się od $\frac{3}{2}\pi + \varphi$ do 2π, to $P(r,\alpha)$ przebiega półprostą LM. Gdy



Rys. 95 a

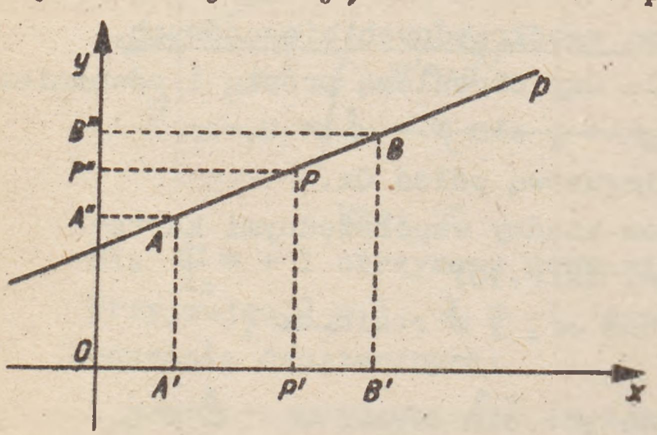
kąt α dąży (jednostronnie) do $\varphi + \frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3}{2}\pi + \varphi$, to $\cos(\alpha - \varphi)$ dąży do zera, a promień r dąży do nieskończoności; drugie ramię kąta α dąży wtedy do położenia równoległego do prostej l.

17. Równania parametryczne prostej.

1) Na płaszczyźnie układu Oxy niech będzie dana prosta p przechodząca przez punkty $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$ (rys.96). Wykażemy, że równaniami parametrycznymi prostej p są równania

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\,t \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\,t \end{aligned} \qquad (48)$$

W tym celu wykażemy a), że dla każdej wartości parametru t punkt P(x,y) określony wzorami (48)



Rys. 96

leży na prostej p, b) że dla każdego punktu

$P_0(x_0,y_0)$, należącego do prostej p, można wyznaczyć taką wartość t_0, że

$$x_0 = x_1 + (x_2 - x_1)\, t_0,$$
$$y_0 = y_1 + (y_2 - y_1)\, t_0$$

a) Niech t będzie dowolną liczbą, wtedy wektor $\overline{AP}$ określony równością

$$\overline{AP} = t \cdot \overline{AB},$$

jest kolinearny z wektorem $\overline{AB}$. Jeżeli zaś wektor $\overline{AP}$ jest kolinearny z $\overline{AB}$, to punkt P dla każdej wartości t należy do prostej p. Ponieważ współrzędnymi wektora $\overline{AP}$ są liczby $x - x_1$, $y - y_1$, wektora zaś $\overline{AB}$ liczby x_2-x_1, y_2-y_1, więc z równania $\overline{AP} = t\,\overline{AB}$ wynikają równania

$$x - x_1 = t\,(x_2 - x_1),$$
$$y - y_1 = t\,(y_2 - y_1)$$

lub

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\, t,$$
$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\, t$$

b) Niech punkt $P_0(x_0,y_0)$ będzie punktem prostej, wtedy wektory $\overline{AP}_0$ i $\overline{AB}$ są kolinearne, istnieje więc takie $t = t_0$, że $\overline{AP}_0 = t_0\,\overline{AB}$,
czyli że

$$x_0 = x_1 + (x_2 - x_1)\, t_0,$$
$$y_0 = y_1 + (y_2 - y_1)\, t_0$$

Zatem równania (48) są równaniami parametrycznymi prostej p.
Liczbę t, która równa się stosunkowi miar AP : AB, nazywamy p a r a m e t r e m l i n i o w y m punktum P względem wektora $\overline{AB}$.

Przedstawiając prostą AB równaniami parametrycznymi (48) określiliśmy ją jednocześnie jako oś o zwrocie wektora $\overline{AB}$, jako zwrocie dodatnim. Istotnie, gdy $t > 0$, to wektor $\overline{AP}$ ma ten sam zwrot co wektor $\overline{AB}$;

gdy $t < 0$, zwrot wektora $\overline{AP}$ jest przeciwny.

Łatwo zauważyć, że gdy w równaniach (48) zastąpimy t przez -t, to otrzymamy równania

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_1 - x_2)\, t \\ y &= y_1 + (y_1 - y_2)\, t, \end{aligned} \qquad (49)$$

które również określają prostą p, jednak jako oś o zwrocie wektora $\overline{BA}$ jako zwrocie dodatnim.

Równaniom (48) możemy nadać następującą interpretację fizyczną: Niech punkt $P(x,y)$ porusza się po prostej p ruchem jednostajnym. W chwili $t = 0$ niech punkt P zajmuje położenie $A(x_1, y_1)$, a w chwili $t = 1$ położenie $B(x_2,y_2)$. Wtedy wektor $\overline{AB}\left\{x_2-x_1,\ y_2-y_1\right\}$ możemy interpretować jako wektor prędkości ruchu jednostajnego punktu po prostej p, t - jako czas liczony od chwili, w której punkt znajdował się w $A\ (x_1,y_1)$, zaś

$$x - x_1 = (x_2 - x_1)\, t,$$
$$y - y_1 = (y_2 - y_1)\, t,$$

jako składowe drogi względem osi układu.

Jeżeli dane są równania

$$x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt \qquad (50)$$

gdzie $a^2 + b^2 > 0$, to ze wzorów (48) wynika, że równania te możemy uważać za równania parametryczne prostej, przechodzącej przez punkty

$$A\ (x_0,y_0),\quad B(x_0 + a,\ y_0 + b)$$

Na prostej (50) obierzemy dwa punkty M i N, przyjmując $t = t_1$ i $t = t_2$. Otrzymujemy

$$M\ (x_0+at_1,\ y_0+bt_1),\ N(x_0+at_2,y_0+bt_2)$$

Współrzędnymi wektora $\overline{MN}$ są liczby :

$$a\ (t_2 - t_1),\ b(t_2 - t_1),$$

jego długość równa się

$$|\overline{MN}| = |t_2 - t_1|\sqrt{a^2 + b^2},$$

a jego cosinusy kierunkowe wyrażają się :

dla $t_2 > t_1$ wzorami $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

dla $t_2 < t_1$ " $\cos\alpha = \frac{a}{-\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta = \frac{b}{-\sqrt{a^2+b^2}}$

Współczynniki więc a i b, występujące w równaniach parametrycznych prostej (50), są proporcjonalne do cosinusów kierunkowych dowolnego wektora kolinearnego z tą prostą.

Liczby a i b nazywamy **współczynnikami kierunkowymi prostej w jej przedstawieniu parametrycznym.**

Zwrócimy uwagę jeszcze na inne często używane przedstawienia parametryczne prostej.
Na str. 31 wykazaliśmy, że jeżeli w układzie Oxy dana jest prosta p, przechodząca przez dwa punkty $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ i λ jest dowolną liczbą różną od -1, to punkt $P(x,y)$ o współrzędnych

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \tag{51}$$

należy do prostej, przy czym λ równa się stosunkowi podziału wektora $\overline{AB}$ przez punkt P tj. $\lambda = AP : PB$.
Odwrotnie, jeżeli punkt $P_0(x_0,y_0)$ jest dowolnym punktem prostej p, różnym od punktu B, to dobierając $\lambda_0 = AP_0 : P_0B$, możemy współrzędne x_0, y_0 wyrazić wzorami

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda_0 x_2}{1+\lambda_0}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda_0 y_2}{1+\lambda_0}$$

Równania więc (51) przedstawiają parametrycznie prostą p.

Równania te nie określają punktu B (x_2, y_2).

Przykłady:

1. Mając prostą $y = 3x + 5$ przedstawić ją w różny sposób parametrycznie.
   Kładąc $x = t$, otrzymujemy jako równanie parametryczne $x = t$, $y = 5 + 3t$. Z postaci równań wynika, że prosta ta przechodzi przez punkty $A_1(0,5)$, $B_1(1,8)$.
   Kładąc $x = 4 + t$, otrzymujemy jako równania parametryczne $x = 4 + t$, $y = 17 + 3t$. Wartościom 0 i 1 parametru t odpowiadają odpowiednio punkty $A_2(4,17)$ i B_2 $(5,20)$.
   Kładąc $x = 1-3t$, otrzymujemy $x=1-3t$, $y=8-9t$. Wartościom 0 i 1 parametru t odpowiadają punkty $A_3(1,8)$, $B_3(-2,-1)$,
   We wszystkich tych przedstawieniach parametrycznych $t = A_KP : A_KB_K$, $(K = 1,2,3)$.
2. Znaleźć współrzędne punktu przecięcia prostej p o równaniach parametrycznych
$$x = 1 + 3t,$$
$$y = -3 + 2t$$
z prostą p' o równaniach
$$x = -2 - 3t',$$
$$y = 3 + 2t'$$

1\. sposób. Rugując parametr t z równań prostej p, otrzymujemy jej równanie zwyczajne $2x-3y=11$. Postępując podobnie z równaniami prostej p', otrzymamy $2x + 3y = 5$. Punkt przecięcia prostych otrzymamy, rozwiązując układ
$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 11, \\ 2x + 3y &= 5 \end{aligned}\right\}$$
2\. sposób: Proste p o p' posiadają punkt wspólny, jeżeli istnieje takie t i t', że jednocześnie
$$\left.\begin{aligned} 1 + 3t &= -2 - 3t', \\ -3 + 2t &= 3 + 2t' \end{aligned}\right\}$$
Przekształcając ten układ otrzymamy
$$\left.\begin{aligned} t + t' &= -1, \\ t - t' &= 3 \end{aligned}\right\}$$

skąd $t = 1$ i $t' = -2$.
Współrzędne punktu przecięcia prostych otrzymamy, podstawiając $t = 1$ do równań prostej p lub $t' = -2$ do równań prłostej p'.

Otrzymamy $x = 4$, $y = -1$

3. Mając prostą p określoną równaniem zwyczajnym

$$7y + 4x - 19 = 0$$

oraz prostą p' określoną równaniami parametrycznymi

$$x = \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{2 + 3\lambda}{1 + \lambda}$$

wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia prostych.

1. Sposób: Znajdujemy równanie zwyczajne prostej p, rugując z jej równań parametrycznych λ. Otrzymujemy równanie $y - x - 1 = 0$

Współrzędne punktu przecięcia są rozwiązaniem układu

$$\left.\begin{aligned} 7y + 4x - 19 &= 0, \\ y - x - 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

2. Sposób: Dobieramy tak λ, by punkt o współrzędnych $x = \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda}$, $y = \frac{2 + 3\lambda}{1 + \lambda}$ spełniał równanie prostej p.

Otrzymujemy równanie

$$7 \cdot \frac{2 + 3\lambda}{1 + \lambda} + 4 \cdot \frac{1 + 2\lambda}{1 + \lambda} - 19 = 0,$$

skąd $\lambda = \frac{1}{10}$.

Podstawiając otrzymaną wartość λ do równań prostej p' uzyskujemy współrzędne punktu przecięcia $x = \frac{12}{11}$, $y = \frac{23}{11}$.

§ 12. OKRĄG NA PŁASZCZYŹNIE

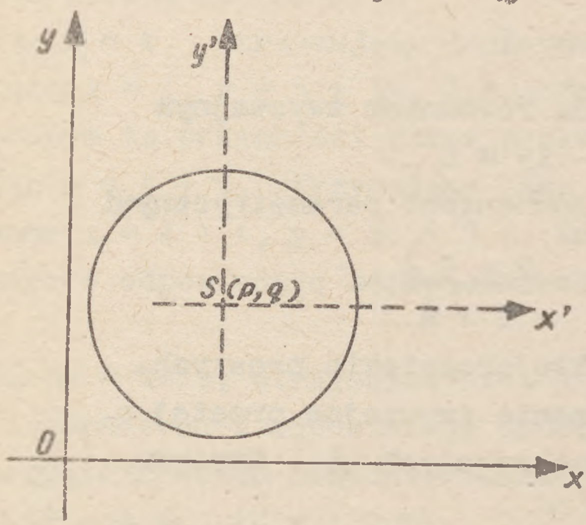
1. Równanie okręgu.

Wiemy już (str.96), że równaniem okręgu o środku $S(0,0)$ i promieniu r jest równanie

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

Wykażemy, że okrąg K o środku S(p,q) i promieniu r ma równanie

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \tag{2}$$



Rys. 97

W tym celu przesuwamy równolegle układ Oxy do punktu S, otrzymując układ Sx'y' (rys. 97).

Równaniem okręgu K w układzie Sx'y' jest

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \tag{3}$$

Między współrzędnymi punktu x,y w układzie Oxy i współrzędnymi tego samego punktu w układzie Sx'y' zachodzą związki

$$x = p + x'$$
$$y = q + y'$$

lub inaczej

$$x' = x - p$$
$$y' = y - q$$

Korzystając z tych związków w równaniu (3), otrzymamy równanie (2) jako równanie okręgu K w układzie Oxy.

Równanie (1) jest szczególnym przypadkiem równania (2), otrzymujemy je z równ. (2), gdy p = 0 i q = 0.

Rozwiązując równanie (2) względem y, otrzymujemy

$$y = q + \sqrt{r^2 - (x-p)^2}$$

lub

$$y = q - \sqrt{r^2 - (x-p)^2}$$

Pierwsze równanie jest równaniem półokręgu "górnego", drugie - półokręgu "dolnego".

Rozwijając występujące w równaniu (2) kwadraty i wykonując redukcje wyrazów podobnych, otrzymamy równoważne równanie okręgu w postaci

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \qquad (4)$$

gdzie

$$a = -p, \quad b = -q, \quad c = p^2 + q^2 - r^2$$

Każdy okrąg daje się więc przedstawić równaniem w postaci (2) lub (4). Nie każde jednak równanie postaci (4) przedstawia okrąg.

Istotnie, mając równanie

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

przekształcamy je na równanie równoważne

$$x^2+2ax + a^2+y^2+2by+b^2 = a^2 + b^2 - c,$$

a dalej

$$(x + a)^2 +(y + b)^2 = a^2 + b^2 - c.$$

Z postaci tego równania wynika, że

1) jeżeli $a^2 + b^2 - c > 0$, to równanie (4) przedstawia okrąg o środku $S(-a, -b)$ i promieniu $r = \sqrt{a^2+b^2 -c}$.

2) jeżeli $a^2+b^2-c=0$, to równanie (4) przedstawia punkt $S(-a,-b)$, bo tylko współrzędne tego punktu spełniają równanie

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = 0.$$

3) jeżeli $a^2+ b^2-c < 0$, to żaden z punktów płaszczyzny nie spełnia równania (4) i równanie nie przedstawia żadnego utworu rzeczywistego.

Oznaczając w tym wypadku $a^2+b^2 -c= -r^2 = (ri)^2$, gdzie i jest jednostką urojoną, możemy dane równanie napisać w postaci

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = (ri)^2$$

Ze względu na postać tego równania mówimy, że równanie to przedstawia o k r ą g u r o j o n y.

Ogólne równanie stopnia drugiego z dwiema zmiennymi

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

przedstawia wówczas okrąg, gdy da się sprowadzić do postaci (4), gdzie $a^2+b^2-c > 0$, a więc wówczas gdy

$$A = C \neq 0,\ B = 0,\ \left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} > 0$$

Przykłady.

1. Mając równanie okręgu

$$x^2 + y^2 - 24x - 30y + 269 = 0$$

wyznaczyć współrzędne środka i promień okręgu.

Dane równanie przekształcamy, sprowadzając do postaci (2). Otrzymujemy

$$x^2-24x+12^2+y^2-30y+15^2=12^2+15^2-269$$

lub

$$(x - 12)^2 + (y - 15)^2 = 100,$$

Współrzędnymi środka S są $p = 12$ i $q = 15$, a promień $r = 10$.

2. Znaleźć równanie okręgu przechodzącego przez punkty A(5,8), B(14,5), C(13,12).

1. Sposób: Okrąg jest określony równaniem postaci

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

gdy znane są a,b,c. Dla znalezienia a,b,c układamy równania. Punkty A,B,C należą do okręgu, więc ich współrzędne spełniają równanie okręgu.

Otrzymujemy układ równań

$$\left.\begin{aligned} 25+64+10a+16b+c &= 0,\\ 196+25+28a+10b+c &= 0,\\ 169+144+26a+24b+c &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Znajdując a,b,c, możemy następnie napisać równanie okręgu w postaci (4).

2. sposób: Okrąg jest określony równaniem postaci

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2,$$

gdy znane są p, q, r. Punkty A,B,C spełniają równanie okręgu, czyli

$$\left.\begin{array}{l}(5-p)^2+(8-q)^2=r^2,\\(14-p)^2+(5-q)^2=r^2,\\(13-p)^2+(12-q)^2=r^2\end{array}\right\}$$

Rozwiązując ten układ, otrzymamy p, q,r i możemy następnie napisać równanie okręgu w postaci (2).

3. sposób: Srodek S okręgu przechodzącego przez punkty A,B,C jest punktem przecięcia symetralnych boków Δ A B C.

Wyznaczamy więc równania np. symetralnych boków AB i BC, jako prostych przechodzących przez środki boków i prostopadłych do tych boków, a następnie znajdujemy ich punkt przecięcia S(p,q). Promień r znajdujemy obliczając odległość punktu S od któregokolwiek z punktów A,B lub C. Mając p,q,r, możemy równanie okręgu napisać w postaci (2).

Rozwiązując jednym z tych trzech sposobów, otrzymamy równanie okręgu w postaci

$$x^2+y^2-20x-16y+139=0$$

lub

$$(x-10)^2+(y-8)^2=25$$

<u>Okrąg a prosta.</u>

Niech w układzie prostokątnym Oxy będzie dany okrąg K

$$x^2+y^2=r^2$$

oraz prosta p

$$x\cos\varphi+y\sin\varphi-\delta=0.$$

Zbadamy liczbę punktów wspólnych okręgu i prostej.

Liczba punktów wspólnych okręgu K i prostej p równa się liczbie rozwiązań układu równań

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2=r^2\\x\cos\varphi+y\sin\varphi-\delta=0\end{array}\right\}\qquad(5)$$

Przy rozwiązywaniu tego układu równań rozróżnimy dwa przypadki: 1) $\sin\varphi=0$ 2) $\sin\varphi\neq0$

1) Jeżeli $\sin\varphi = 0$, to $\cos\varphi = \pm 1$ i równanie prostej p ma postać

$$x = \mp\delta ;$$

podstawiając za x tę wartość do równania okręgu otrzymamy równanie

$$y^2 = r^2 - \delta^2.$$

Równanie to, a wraz z nim i układ równań (5), ma

a) dwa rozwiązania, jeżeli $r^2 - \delta^2 > 0$, czyli gdy $r < -\delta$ lub $r > \delta$, a t.zn. gdy $r > |\delta|$,

b) jedno rozwiązanie, jeżeli $r^2 - \delta^2 = 0$, czyli gdy $r = \pm\delta$, a t.zn. gdy $r = |\delta|$,

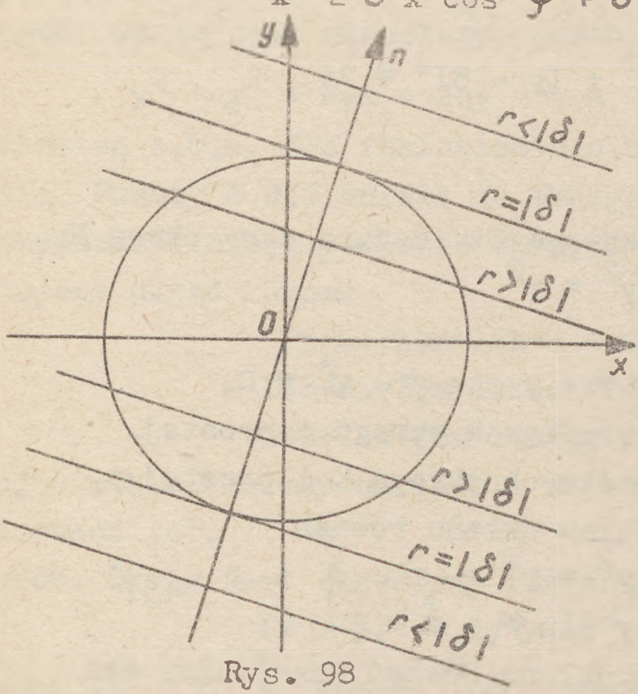
c) nie ma rozwiązań, jeżeli $r^2 - \delta^2 < 0$, czyli gdy $-\delta < r < +\delta$, a t.zn. gdy $r < |\delta|$.

2) Jeżeli $\sin\varphi \neq 0$, z równania prostej mamy

$$y = \frac{\delta - x\cos\varphi}{\sin\varphi} ;$$

podstawiając to do równania okręgu, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$x^2 - 2\delta x\cos\varphi + \delta^2 - r^2\sin^2\varphi = 0$$



Rys. 98

Wyróżnik tego równania ma postać

$$\Delta = 4(r^2 - \delta^2)\sin^2\varphi$$

Ponieważ $\sin^2\varphi > 0$, więc liczba rozwiązań układu równań zależy tak jak w wypadku 1) od $r^2 - \delta^2$.

Zatem prosta p ma z okręgiem K dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie ma żadnych punktów wspólnych zależnie od tego, czy odległość prostej od środka okręgu jest mniejsza, równa, czy większa od promienia okręgu (rys.98).

Wyniki te znane są nam zresztą z nauki geometrii w szkole średniej.

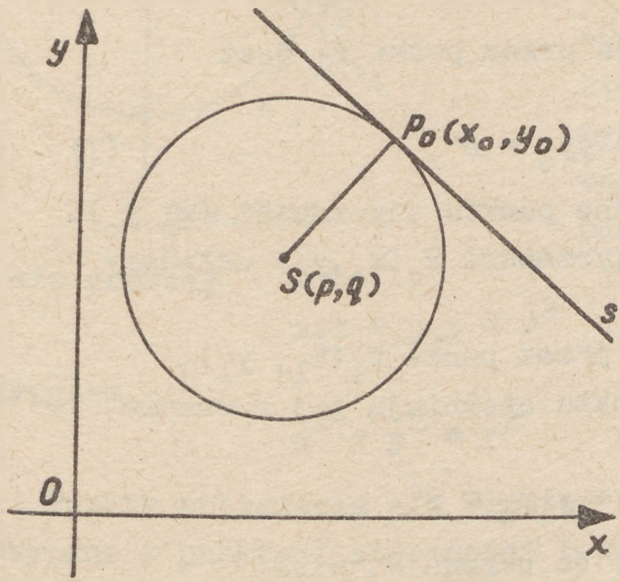
3. Styczna do okręgu.

a) Równanie stycznej, gdy znany jest punkt styczności.

Niech będzie dany okrąg o równaniu

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

oraz punkt $P_o(x_o,y_o)$ należący do okręgu (rys.99).



Rys. 99

Wyznaczymy równanie stycznej s do okręgu w punkcie $P_o(x_o,y_o)$.

Wiemy, że równanie prostej, przechodzącej przez punkt $P_o(x_o,y_o)$ i prostopadłej do wektora $\bar{a}\{A,B\}$ ma postać (str.107)

$$A(x-x_o)+ B(y-y_o)= 0$$

Styczna s przechodzi przez punkt $P_o(x_o,y_o)$ i jest prostopadła do wektora $\overline{SP}_o\{x_o-p, y_o-q\}$, więc jej równaniem jest

$$(x_o-p)(x-x_o) + (y_o-q)(y-y_o) = 0$$

Równanie to przekształcemy, dodając do obu stron r^2, do lewej strony w postaci $(x_o-p)^2 + (y_o-q)^2$. Otrzymujemy

$$(x_o-p)(x-x_o)+(x_o-p)^2 +(y_o-q)(y-y_o)+(y_o-q)^2 = r^2,$$

czyli

$$(x-p)(x_o-p)+(y-q)(y_o-q) = r^2 \qquad (6)$$

W szczególności, gdy równaniem okręgu jest

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

to równanie stycznej w punkcie (x_o, y_o) przyjmuje postać

$$xx_o + yy_o = r^2. \qquad (7)$$

b) Para stycznych z punktu poza okręgiem.

Dany jest okrąg K

$$x^2 + y^2 = r^2$$

oraz punkt $P_1(x_1,y_1)$, leżący poza okręgiem (rys.100). Znajdziemy równania stycznych, poprowadzonych z punktu P_1 do okręgu K.

Styczna przechodząca przez punkt P_1 jest określona równaniem

$$xx_o + yy_o = r^2, \qquad (7)$$

jeżeli znane są współrzędne punktu styczności (x_o,y_o). Dla znalezienia punktu styczności $P_o(x_o,y_o)$ układamy równania :

1)Styczna (7) przechodzi przez punkt $P_1(x_1, y_1)$, więc współrzędne tego punktu spełniają jej równanie, czyli

$$x_1x_o + y_1y_o = r^2$$

2) Punkt $P_o(x_o,y_o)$ należy do okręgu K, więc

$$x_o^2 + y_o^2 = r^2$$

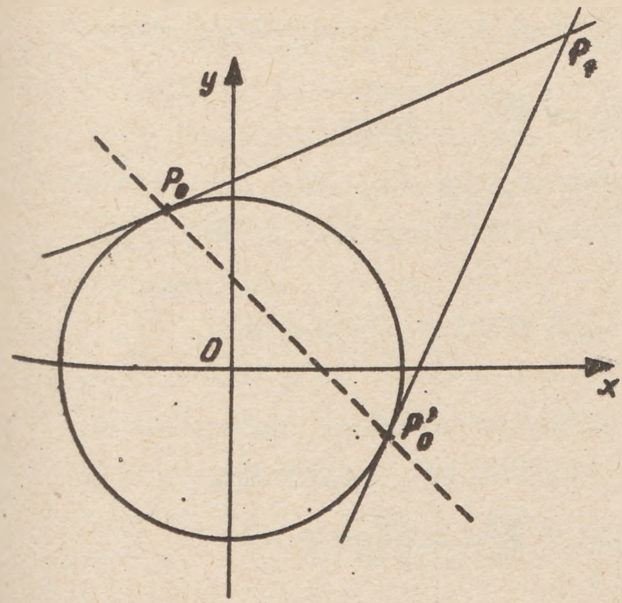
Zatem na wyznaczenie punktu styczności (x_o, y_o) mamy układ równań

$$\left.\begin{aligned} x_1x_o + y_1y_o &= r^2 \\ x_o^2 + y_o^2 &= r^2 \end{aligned}\right\}$$

Rozwiązania (x_o,y_o) tego układu są identyczne z rozwiązaniami (x,y) układu

$$\left.\begin{aligned} x_1x + y_1y &= r^2 \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}\right\}$$

Pierwsze równanie tego układu jest równaniem prostej, a drugie równaniem okręgu. Prosta ta przecina okrąg



Rys. 100

w 2 punktach, jej bowiem odległość od środka okręgu wynosi

$$\frac{r^2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

i jest mniejsza od r, gdyż

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} > r$$

wyznaczenie więc punktów styczności stycznych z punktu P_1 sprowadza się do wyznaczenia punktów przecięcia się prostej

$$x_1 x + y_1 y = r^2 \qquad (8)$$

z okręgiem

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Punkty przecięcia się prostej (8) z okręgiem są identyczne z punktami styczności (punkty P_o i P_o' na rys. 100).

Prostą (8) nazywamy b i e g u n o w ą punktu $P_1(x_1, y_1)$ względem okręgu, a punkt P_1 - b i e g u n e m.

Z postaci równania stycznej do okręgu

$$x_o x + y_o y = r^2$$

wynika, że styczna jest biegunową punktu (x_o, y_o) t.zn. punktu styczności.

4. Biegunowa względem okręgu.

a) P o j ę c i e d w u s t o s u n k u c z w ó r k i p u n k t ó w.

Jeżeli na prostej dane są 2 pary różnych punktów A i A' oraz B i B', to iloraz stosunków $\frac{AB}{BA'}$, i $\frac{AB'}{B'A'}$, nazywamy

dwustosunkiem czwórki punktów A,A', B,B'.
Dwustosunek czwórki punktów A,A', B,B' oznaczamy symbolem (AA'BB'), zatem

$$(AA'BB') = \frac{AB}{BA'} : \frac{AB'}{B'A'}.$$

Łatwo się przekonać, że dwustosunek (AA'BB') nie zmienia swej wartości, jeżeli przestawimy pary AA' i BB' lub punkty w obu parach, czyli

$$(AA'BB') = (BB'AA') = (A'A\,B'B) = (B'B\,A'A),$$

C z w ó r k a h a r m o n i c z n a p u n k t ó w. Czwórkę punktów (AA'BB') nazywamy czwórką harmoniczną, jeżeli jej dwustosunek ma wartość -1, czyli gdy

$$(AA'BB') = \frac{AB}{BA'} : \frac{AB'}{B'A'} = -1$$

Czwórki harmoniczne mają następujące własności:

1. Punkty jednej pary AA' rozdzielone są zawsze jednym punktem drugiej pary BB', a więc występują np. w kolejności A,B,A'B' lub B,A,B',A'.
   Własność ta wynika z ujemnej wartości dwustosunku. Jeżeli bowiem
   $$(AA'BB') < 0,$$
   to
   $$\frac{AB}{BA'} > 0 \text{ i } \frac{AB'}{B'A'} < 0 \text{ lub } \frac{AB}{BA'} < 0 \text{ i } \frac{AB'}{B'A'} > 0$$
   W pierwszym przypadku punkt B dzieli odcinek AA' wewnętrznie, punkt B' - zewnętrznie, w drugim przypadku jest odwrotnie.
2. Czwórka harmoniczna punktów A,A', B,B' pozostaje harmoniczną, jeżeli przestawimy punkty w parze AA' lub BB', czyli jeżeli (AA'BB') = -1, to również (A'A BB') = (AA'B'B) = - 1.
   Własność tę łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem.
3. Jeżeli trzy punkty A,A',B leżą na prostej i B nie jest środkiem odcinka AA', to zawsze można wyznaczyć czwarty punkt B' taki, że czwórka punktów

A, A', B, B' jest harmoniczna.
Istotnie, jeżeli dane są punkty A (x_1), A' (x_2), B(x_3) i szukamy punktu B'(x), któryby z danymi punktami tworzył czwórkę harmoniczną, to z warunku

$$\frac{AB}{BA'} : \frac{AB'}{B'A'} = -1$$

otrzymujemy ze względu na x równanie

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_3} : \frac{x-x_1}{x_2-x} = -1$$

lub po wykonaniu działań

$$(x_1+x_2-2x_3)\,x = 2x_1x_2-x_3(x_1+x_2)$$

Równanie to, jako równanie pierwszego stopnia, ma zawsze jedno rozwiązanie z wyjątkiem przypadku, gdy

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0,$$

czyli

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

t.zn. gdy punkt B(x_3) jest środkiem odcinka AA'.

4. Jeżeli prosta p przechodzi przez punkty A(x_1, y_1) i A'(x_2, y_2) i jest określona równaniami parametrycznymi

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{x_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},$$

to możemy podać dowolną liczbę par punktów BB' na prostej p, które z parą AA' tworzą czwórki harmoniczne. W tym celu, dla wyznaczenia współrzędnych jednego z punktów drugiej pary, wystarczy przyjąć pewną wartość na λ różną od 0 i -1, dla znalezienia zaś współrzędnych drugiego z punktów, przyjąć za λ liczbę przeciwną do poprzednio obranej.

Punkty

$$A\,(x_1,y_1),\ A'(x_2,y_2),\ B\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right),$$
$$B'\left(\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda},\ \frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}\right) \tag{9a}$$

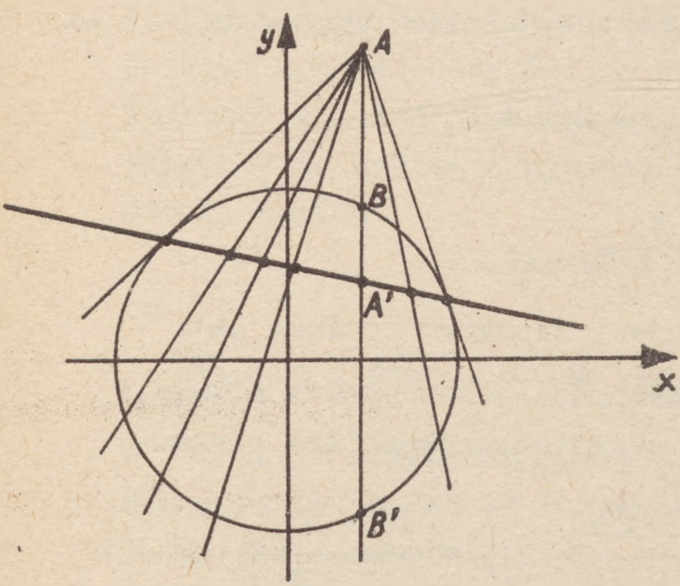
tworzą czwórkę harmoniczną, bowiem

$\frac{AB}{BA'} = \lambda$, $\frac{AB'}{B'A'} = -\lambda$ i wobec tego $(AA'BB') = -1$.

b) B i e g u n o w a w z g l ę d e m o k r ę g u.

Niech prosta przechodząca przez punkty $A(x_1,y_1)$ i $A'(x_2,y_2)$ przecina okrąg

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Rys. 101

w dwóch punktach B, B' (rys. 101). Znajdziemy warunek, jaki winien spełniać punkt $A'\ (x_2,\ y_2)$, by para B, B' rozdzielała harmonicznie punkty A, A'. Wyznaczamy punkty przecięcia prostej AA' , określonej parametrycznie

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

z okręgiem

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

W tym celu rozwiązujemy układ równań prostej i okręgu.

Otrzymujemy

$$\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right)^2 = r^2,$$

a po wykonaniu działań i uporządkowaniu mamy równanie

$$(x_2^2+y_2^2-r^2)\lambda^2+2(x_1x_2+y_1y_2-r^2)\lambda + x_1^2+y_1^2 - r^2 = 0. \quad (9)$$

Jeżeli punkt $A'(x_2,y_2)$ nie leży na okręgu, to $x_2^2+y_2^2-r^2 \neq 0$ i równanie (9) jest równaniem kwadratowym. Założyliśmy, że prosta AA' przecina okrąg w dwóch punktach, przyjęliśmy więc, że wyróżnik równania (9) jest dodatni.

Z równania (9) otrzymamy zatem dwie różne wartości na λ, które podstawione do równań prostej dadzą nam współrzędne punktów przecięcia prostej z okręgiem. By jednak para BB' rozdzielała harmonicznie parę AA' winny wartości λ uzyskane z równania (9) być bezwzględnie równe (różnić się tylko znakami). Równanie (9) ma pierwiastki różniące się znakiem tylko wtedy, gdy brak w nim wyrazu z niewiadomą w pierwszej potędze t.zn. gdy

$$x_1x_2 + y_1y_2 - r^2 = 0,$$

czyli gdy punkt $A'(x_2,y_2)$ należy do prostej

$$x_1x + y_1y - r^2 = 0$$

t.j. biegunowej punktu $A(x_1,y_1)$.

Wykazaliśmy, że jeżeli punkt $A'(x_2,y_2)$ należy do biegunowej punktu $A(x_1,y_1)$, to para BB' rozdziela harmonicznie parę AA'.

Odwrotnie, gdy punkt $A'(x_2,y_2)$ jest tak dobrany że czwórka punktów A,A', B,B' jest harmoniczna, to punkt ten leży na biegunowej punktu A, bo wtedy suma pierwiastków równania (9) równa się zeru.

Stąd wniosek :

Jeżeli prosta obraca się dokoła stałego punktu A i przecina okrąg w dwóch punktach B i B', to czwarty punkt A' tak dobrany, by czwórka A,A', B,B' była harmoniczna porusza się po biegunowej punktu A.

5. Potęga punktu względem okręgu.

Jeżeli na płaszczyźnie dany jest okrąg K o promieniu r i dowolny punkt P, oddalony od środka okręgu od d, to różnicę d^2-r^2 nazywamy **potęgą punktu** P względem okręgu K.

Jeżeli okrąg K dany jest równaniem

$$K(x,y) \equiv (x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2 = 0, \qquad (10)$$

i punkt P współrzędnymi (x_0,y_0), to potęgę punktu możemy wyrazić w postaci

$$d^2 - r^2 = (x_0-p)^2 + (y_0-q)^2 - r^2 \qquad (11)$$

lub krótko

$$d^2 - r^2 = K(x_0,y_0),$$

jeżeli użyjemy symbolu K(x,y) na oznaczenie lewej strony równania (10) jako funkcji dwóch zmiennych.

Potęga $K(x_0,y_0)$ jest dodatnia dla punktów P, leżących zewnątrz okręgu, ujemna - dla punktów wewnętrznych okręgu, zaś równa zeru - na okręgu. Z nauki geometrii w szkole średniej wiemy, że gdy przez punkt P, leżący zewnątrz okręgu (rys.102a), poprowadzimy proste przecinające okrąg w dwóch punktach, to iloczyny skalarne

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB}, \quad \overline{PC} \cdot \overline{PD}, \ldots$$

są równe kwadratowi długości odcinka stycznej, wychodzącej z P, czyli

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \ldots = |\overline{PQ}|^2 = d^2 - r^2.$$

Jeżeli punkt P leży wewnątrz okręgu (rys.102 b), to prowadząc przez punkt P cięciwy, mamy

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \ldots = \overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = -|\overline{PQ}|^2 = d^2-r^2,$$

gdzie PQ jest połową cięciwy prostopadłej do średnicy, przechodzącej przez punkt P.

W obu więc przypadkach wymienione iloczyny skalarne wyrażają potęgę punktu P względem okręgu.

6. Oś potęgowa

Niech będą dane dwa różne okręgi

$$K_1(x,y)\equiv(x-p_1)^2+(y-q_1)^2-r_1^2=0,$$
$$K_2(x,y)\equiv(x-p_2)^2+(y-q_2)^2-r_2^2=0. \qquad (12)$$

Zbadamy wzajemne przecinanie się okręgów, badając rozwiązania układu (12). Odejmując równania stronami otrzymujemy

$$2(p_2-p_1)x+2(q_2-q_1)y+ +(p_1^2+q_1^2-r_1^2-p_2^2+ -q_2^2+r_2^2)=0,$$

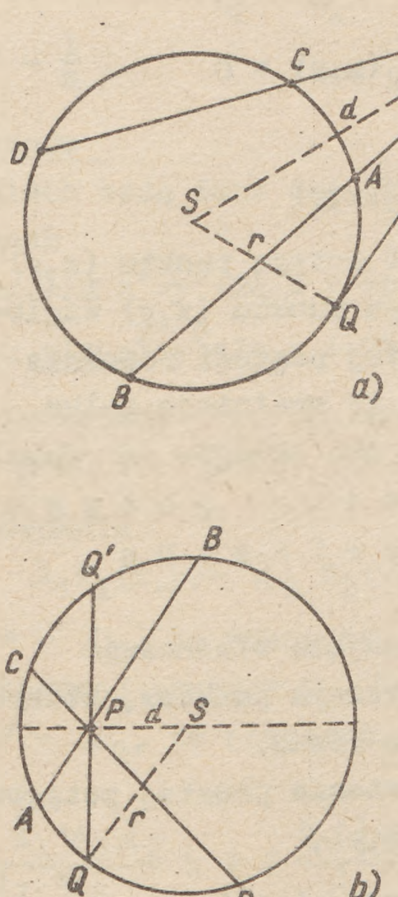
co krótko możemy zapisać w postaci

$$K_1(x,y)-K_2(x,y)=0 \qquad (13)$$

Układ równań (12) jest więc równoważny układowi

$$\left.\begin{aligned} K_1(x,y)&=0\\ K_1(x,y)-K_2(x,y)&=0\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

lub



Rys. 102

$$\left.\begin{aligned} K_2(x,y)&=0\\ K_1(x,y)-K_2(x,y)&=0\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Jeżeli okręgi K_1 i K_2 nie są współśrodkowe, czyli gdy $p_1 \neq p_2$ lub $q_1 \neq q_2$, to równanie (13) jest równaniem stopnia pierwszego, przedstawia więc prostą.

W tym przypadku wyznaczenie punktów wspólnych dwóch okręgów sprowadza się do wyznaczenia punktów przecięcia jednego z tych okręgów z prostą (13).
Jeżeli okręgi K_1 i K_2 są współśrodkowe, czyli gdy $p_1 = p_2$ i $q_1 = q_2$, to równania (13) nie spełnia żaden punkt płaszczyzny i wobec tego układy (14), i (15) są sprzeczne.
Zajmiemy się dokładniej prostą, którą otrzymaliśmy gdy okręgi K_1 i K_2 nie były współśrodkowe.
Jej równanie

$$K_1(x,y) - K_2(x,y) = 0$$

możemy zapisać też w postaci

$$K_1(x,y) = K_2(x,y)$$

Mając na uwadze, że $K_1(x,y)$ jest potęgą punktu (x,y) względem okręgu K_1, $K_2(x,y)$ potęgą punktu (x,y) względem okręgu K_2, widzimy z ostatniej postaci równania rozważanej prostej, że równanie to spełniają tylko punkty, których potęgi względem obu okręgów są równe.

Prostą tę nazywamy p r o s t ą p o t ę g o w ą lub p r o s t ą p i e r w i a s t n ą okręgów K_1 i K_2.

Prosta potęgowa ma następujące własności:

1. Jest miejscem geometrycznym punktów, których potęgi względem dwóch okręgów są równe.

Własność ta wynika z równania prostej potęgowej

$$K_1(x,y) = K_2(x,y),$$

2. Jeżeli okręgi przecinają się, to prosta potęgowa przechodzi przez ich punkty przecięcia.

Równania prostej potęgowej ma postać

$$K_1(x,y)-K_2(x,y) = 0$$

Jeżeli punkt (x_o,y_o) jest punktem przecięcia okręgów, to leży na obu okręgach, wówczas $K_1(x_o,y_o) = 0$ i $K_2(x_o,y_o) = 0$.

3. Prosta potęgowa jest prostopadła do prostej łączącej środki obu okręgów.
Istotnie, współczynnik kierunkowy prostej łączącej środki równa się

$$m = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1},$$

współczynnik kierunkowy prostej potęgowej

$$m' = -\frac{p_2 - p_1}{q_2 - q_1},$$

czyli $m' = -\frac{1}{m}$.

7. Pęk okręgów

1) Niech będą dane dwa okręgi K_1 i K_2 o różnych środkach

$$K_1(x,y) \equiv x^2+y^2+2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0,$$

$$K_2(x,y) \equiv x^2+y^2+2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$$

oraz dowolne liczby λ_1, λ_2 spełniające warunek $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$.

Tworzymy równanie

$$\lambda_1 K_1(x,y) + \lambda_2 K_2(x,y) = 0. \qquad (15)$$

Jeżeli $\lambda_1 = -\lambda_2$, to równanie (15) jest równaniem prostej potęgowej okręgów K_1, K_2.
Jeżeli $\lambda_1 \neq -\lambda_2$, to równanie (15) możemy sprowadzić do postaci

$$x^2+y^2+2\frac{a_1\lambda_1+a_2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}x + 2\frac{b_1\lambda_1+b_2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}y + \frac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2}{\lambda_1+\lambda_2} = 0. \qquad (16)$$

Równanie to określa okrąg rzeczywisty lub urojony.
Zbiór okręgów określonych równaniem (15) lub (16) dla wszelkich λ_1 i λ_2, spełniających warunek $\lambda_1^2+\lambda_2^2>0$ i $\lambda_1 \neq -\lambda_2$, nazywamy pękiem okręgów, danym okręgami K_1 i K_2.

Równanie (15) nazywamy równaniem pęku okręgów.
Jeżeli $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 \neq 0$, to równanie (15) przedstawia okąg K_2, a gdy $\lambda_1 \neq 0$ i $\lambda_2 = 0$, - okrąg K_1.

Okręgi więc dane K_1 i K_2 należą też do pęku.
Wszystkie okręgi pęku mają tę samą prostą potęgową!
Istotnie, równaniem prostej potęgowej okręgów K_1 i K_2 jest

$$2(a_1-a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

Równania

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0$$

$$\lambda'_1 K_1 + \lambda'_2 K_2 = 0,$$

określają dwa dowolne okręgi pęku - różne, gdy $\lambda_1 : \lambda_2 \neq \lambda'_1 : \lambda'_2$.

Równania te napisane szczegółowo mają postać:

$$(\lambda_1+\lambda_2)(x^2+y^2)+2(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)x+2(b_1\lambda_1+b_2\lambda_2)y+\lambda_1c_1+\lambda_2c_2=0$$

$$(\lambda'_1+\lambda'_2)(x^2+y^2)+2(a_1\lambda'_1+a_2\lambda'_2)x+2(b_1\lambda'_1+b_2\lambda'_2)y+\lambda'_1c_1+\lambda'_2c_2=0$$

Mnożąc pierwsze równanie przez $\lambda'_1+\lambda'_2$, drugie przez $-(\lambda_1+\lambda_2)$ i dodając stronami otrzymamy równanie prostej potęgowej. Równanie to po wykonaniu działań i redukcji przyjmie postać równania prostej potęgowej okręgów K_1 i K_2.
Jeżeli i okręgi K_1 i K_2 przecinają się w punktach $A(x_1,y_1)$ i $B(x_2,y_2)$, to dowolny okrąg pęku też przechodzi przez te 2 punkty.

Dla dowodu weźmiemy pod uwagę dowolny okrąg pęku określony równaniem

$$\lambda_1 K_1(x,y)+\lambda_2 K_2(x,y) = 0$$

Punkt $A(x_1,y_1)$ należy do okręgów K_1 i K_2 więc

$$K_1(x_1,y_1) = 0 \text{ i } K_2(x_1,y_1) = 0,$$

wobec tego punkt A spełnia także równanie dowolnego okręgu pęku (15).

Podobnie wykazujemy, że punkt $B(x_2,y_2)$ spełnia równanie (15).

Zbadamy, jaki sens geometryczny mają parametry λ_1 i λ_2, występujące w równaniu pęku.

Z równań okręgów K_1 i K_2 wynika, że współrzędnymi ich środków są

$$S_1(-a_1, -b_1), \quad S_2(-a_2, -b_2),$$

z równania zaś pęku okręgów w postaci (2) mamy, że

$$S'\left(-\frac{a_1\lambda_1+a_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}, -\frac{b_1\lambda_1+b_2\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$$

Zakładając, że $\lambda_1 \neq 0$, oznaczmy $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mu$.

Wtedy

$$S'\left(-\frac{a_1+\mu a_2}{1+\mu}, -\frac{b_1+\mu b_2}{1+\mu}\right)$$

czyli, że środki S' okręgów pęku dzielą odcinek S_1S_2, łączący środki okręgów K_1 i K_2 w stosunku $\mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

2. Niech będą dane dwa okręgi współśrodkowe K_1 i K_2

$$K_1(x,y) \equiv x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c_1 = 0,$$

$$K_2(x,y) \equiv x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c_2 = 0$$

oraz dowolne liczby λ_1 i λ_2, spełniające warunek $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$ i $\lambda_1 \neq -\lambda_2$.

Pęk okręgów określamy tak jak w poprzednim przypadku t.zn. jako zbiór okręgów określonych równaniem

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 = 0.$$

Zapisując to równanie szczegółowo, otrzymamy

$$(\lambda_1+\lambda_2)(x^2+y^2)+2a(\lambda_1+\lambda_2)x+2b(\lambda_1+\lambda_2)y+\lambda_1c_1+\lambda_2c_2 = 0,$$

a dalej

$$x^2+y^2+2a+2b+\frac{\lambda_1c_1+\lambda_2c_2}{\lambda_1+\lambda_2} = 0$$

Z postaci tego równania wynika, że pęk okręgów, określony okręgami współśrodkowymi, tworzy zbiór okręgów współśrodkowych.

8. Równanie okręgu w układzie współrzędnych biegunowych.

Mając w układzie Oxy dany okrąg K, określony równaniem

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2 \qquad (17)$$

obieramy jako biegun początek układu współrzędnych O, jako oś biegunową - dodatnią półoś x. Współrzędne biegunowe punktu P oznaczymy przez ρ i φ i niech współrzędne biegunowe środka okręgu S będą równe a i α.
Między współrzędnymi prostokątnymi punktu (x,y), a jego współrzędnymi biegunowymi ρ i φ zachodzą związki

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

Jeżeli punkt P(x,y) należy do okręgu, wtedy para liczb ($\rho \cos \varphi$, $\rho \sin \varphi$) spełnia równanie (17).
Otrzymujemy równanie

$$(\rho \cos \varphi - a \cos \alpha)^2 + (\rho \sin \varphi - a \sin \alpha)^2 = r^2,$$

które po wykonaniu działań i uporządkowaniu wyrazów przyjmie postać

$$\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \alpha) = r^2 \qquad (18)$$

Jeżeli środek okręgu znajduje się w początku układu, to a = 0, równanie (18) więc przyjmie postać

$$\rho^2 = r^2,$$

czyli, wobec $\rho > 0$, postać

$$\rho = r$$

Przykład: Napisać równanie okręgu we współrzędnych biegunowych, jeżeli $S(2, \frac{2}{3}\pi)$, zaś promień okręgu r = 1. (rys. 103).

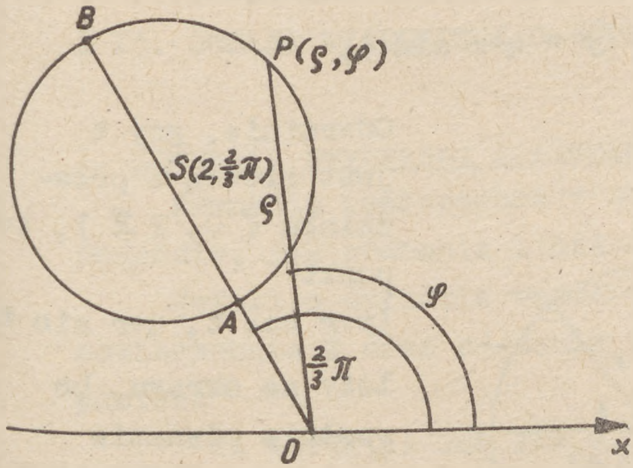
Zgodnie ze wzorem (18) równanie okręgu ma postać:

$$\varrho^2 + 4 - 4\varrho\cos(\varphi - \tfrac{2}{3}\pi) = 1$$

lub

$$\varrho^2 - 4\varrho\cos(\varphi - \tfrac{2}{3}\pi) + 3 = 0$$

Jeżeli na podstawie tego równania chcemy uzyskać punkty okręgu, przyjmujemy wartości na φ z przedziału $\langle 0, 2\pi)$ i obliczamy ϱ. Jeżeli np. $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, to z równania $\varrho^2 - 4\varrho + 3 = 0$ otrzymujemy $\varrho_1 = 1, \varrho_2 = 3$. Wyznaczyliśmy więc dwa punkty okręgu $A(1, \frac{2}{3}\pi), B(3, \frac{2}{3}\pi)$. Nie dla każdej wartości φ będą istniały punkty na okręgu. Biorąc np. $\varphi = \frac{5}{3}\pi$, otrzymamy na ϱ wartości ujemne -1 i -3, których zgodnie z określeniem współrzędnych biegunowych punktu nie możemy uważać za promienie wodzące punktu. Na okręgu danym nie ma punktów o współrzędnej $\varphi = \frac{5}{3}\pi$.



Rys. 103

9. Równania parametryczne okręgu.

Niech będzie dany okrąg o środku $S(p,q)$ i o promieniu r (rys.104). Niech $P(x,y)$ będzie dowolnym punktem okręgu, t zaś miarą kąta $(0 \leqslant t < 2\pi)$, jaki wektor $\overline{SP}$ tworzy z osią x.

Równaniami parametrycznymi okręgu są

$$x = p + r\cos t \qquad y = q + r\sin t \tag{19}$$

Dowód: Jeżeli P jest punktem okręgu, to współrzędne wektora $\overline{SP}$ względem osi układu wyrażają się w postaci

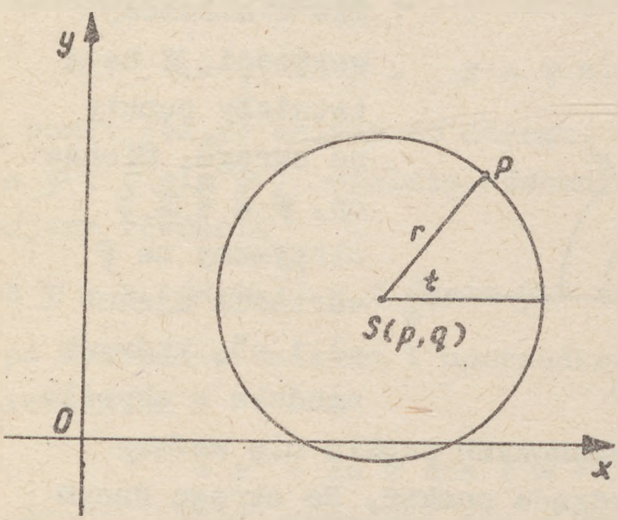
$$SP_x = r\cos t, \; SP_y = r\sin t$$

oraz w postaci

$$SP_x = x - p, \quad SP_y = y - q$$

Z porównania odpowiednich związków otrzymujemy

$$x=p+r\cos t, \quad y = q+r\sin t.$$



Rys. 104

Odwrotnie, gdy t jest liczbą z przedziału $\langle 0, 2\pi)$, to punkt $(p+r\cos t, q+r\sin t)$ leży na okręgu, bo spełnia równanie $(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2$

Zatem równania (19) są równaniami parametrycznymi okręgu.

R O Z D Z I A Ł III

PŁASZCZYZNA I PROSTA W PRZESTRZENI

§ 13. OGÓLNE WIADOMOŚCI O RÓWNANIACH POWIERZCHNI

1. Równanie zwyczajne powierzchni.

Równanie powierzchni w układzie Oxyz określamy podobnie, jak równanie linii na płaszczyźnie Oxy.

Jeżeli w układzie współrzędnych Oxyz dana jest powierzchnia W oraz równanie trzech zmiennych postaci

$$z = f(x,y) \text{ lub } F(x,y,z) = 0, \qquad (1)$$

to równanie (1) nazywamy r ó w n a n i e m p o - w i e r z c h n i W, jeżeli

1) współrzędne każdego punktu powierzchni W spełniają to równanie

i 2) współrzędne punktów nie należących do powierzchni W nie spełniają równania.

Równanie powierzchni w postaci (1) nazywamy r ó w n a n i e m z w y c z a j n y m p o - w i e r z c h n i.

Symbolem $z = f(x,y)$ oznaczamy równanie trzech zmiennych, w którym zmienna z w pierwszej potędze znajduje się po jednej stronie równania, wyrazy zaś zawierające zmienne x i y oraz wyraz wolny po drugiej stronie.

Symbolem $F(x,y,z)=0$ oznaczamy równanie o trzech zmiennych, w którym wszystkie wyrazy przeniesiono na jedną stronę równania.

Dwa różne równania przedstawiają tę samą powierzchnię, gdy równania te są równoważne, t.zn. gdy te same trójki liczb x,y,z spełniają oba równania. Tak np. wykażemy później, że równanie

$$3x - 2y + 5z - 10 = 0,$$

które jest równaniem postaci $F(x,y,z)=0$, przedstawia płaszczyznę, Tę samą płaszczyznę przedstawia równanie

$$z = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y + 2,$$

które jest postaci $z = f(x,y)$.

Punkty należące do powierzchni wyznaczamy, przyjmując dla dwóch zmiennych pewne dowolne wartości liczbowe, trzecią zaś zmienną obliczamy przy użyciu obranych wartości z równania powierzchni. Przy wyborze wartości pierwszych dwóch zmiennych na ogół nie mamy pełnej swobody. Tak np. jeżeli dane jest równanie powierzchni kulistej albo sfery

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

to przyjmując $x = 1$, $y = -1$, otrzymamy $z = \pm\sqrt{2}$, czyli dwa punkty powierzchni kulistej $(1,-1, +\sqrt{2})$ i $(1, -1, -\sqrt{2})$. Przyjmując natomiast $x = 1$, $y = 2$, nie otrzymujemy na z wartości rzeczywistej - znaczy to, że na powierzchni kulistej określonej danym równaniem nie ma punktów, których pierwsze współrzędne równałyby się 1 i 2.

Przy wyborze więc wartości dwóch zmiennych winniśmy uwzględnić warunki, gwarantujące istnienie trzeciej zmiennej.

P o w i e r z c h n i ę nazywamy a l g e b r a i c z n ą, jeżeli w jej równaniu występują tylko działania algebraiczne na zmiennych x,y,z.

Jeżeli równanie powierzchni algebraicznej sprowadzimy do postaci $F(x,y,z) = 0$, gdzie $F(x,y,z)$ jest wielomianem n-tego stopnia względem x,y,z, nierozkładalnym na czynniki niższych stopni, to liczbę n nazywamy s t o p n i e m p o w i e r z c h n i a l g e b r a i c z n e j.

2. Równania parametryczne powierzchni.

Niech będą dane trzy równania postaci

$$x=f(u,v),\quad y=g(u,v),\quad z=h(u,v), \tag{2}$$

gdzie funkcie $f(u,v)$, $g(u,v)$, $h(u,v)$ są funkcjami określonymi i ciągłymi w pewnym obszarze płaskim D[x],

Równania (2) nazywamy parametrycznymi równaniami powierzchni W, jeżeli

1) dla każdego punktu (u,v) należącego do obszaru D, punkt o współrzędnych $f(u,v)$, $g(u,v)$, $h(u,v)$ należy do powierzchni W i

2) dla każdego punktu $P(x_0,y_0,z_0)$ powierzchni W można wyznaczyć taką parę u_0, v_0, że

$$x_0 = f(u_0,v_0),\quad y_0=g(u_0,v_0),\quad z_0= h(u_0,v_0).$$

Przykładem równań parametrycznych powierzchni są równania parametryczne powierzchni kulistej

x) Obszar płaski dla funkcji dwóch zmiennych jest tym, czym dla funkcji jednej zmiennej jest przedział. Celem uzyskania chociaż poglądowego pojęcia o obszarze płaskim, wyobraźmy sobie płaszczyznę układu Ouv i w tej płaszczyźnie prostokąt, koło, wielokąt itp. Każda z tych figur uważana jako zbiór punktów (wewnętrznych wraz z brzegiem lub bez) jest obszarem płaskim. Mówiąc, że funkcja f(u,v) jest ciągła w pewnym płaskim obszarze, rozumiemy przez to, że dla każdego punktu (u,v) tego obszaru funkcja f(u,v) jest ciągła.

$$x = r \cos u \cos v$$
$$y = r \cos u \sin v$$
$$z = r \sin u.$$

gdzie r jest stałą, równą promieniowi kuli. Zmieniając w sposób ciągły i niezależnie od siebie parametry u i v ($0 \leqslant v < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$), otrzymamy zbiór wszystkich punktów powierzchni kulistej o promieniu r i środku w początku układu współrzędnych. W interpretacji geometrycznej parametru u wyraża szerokość geograficzną, a v - długość geograficzną punktu na powierzchni kulistej.

Jeżeli, mając równania parametryczne powierzchni, chcemy wyznaczyć jej równanie zwyczajne, to z dwóch równań (2) traktowanych jako układ, obliczamy u i v i wstawiamy otrzymane wartości do równania trzeciego. Postępowanie to nazywamy rugowaniem parametrów u i v.
W przykładzie równań parametrycznych powierzchni kulistej szybko dojdziemy do równania zwyczajnego, jeżeli obie strony równań parametrycznych podniesiemy do kwadratu i dodamy.
Otrzymamy

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \left[\cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 u\right]$$

lub

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (\cos^2 u + \sin^2 u)$$

i ostatecznie

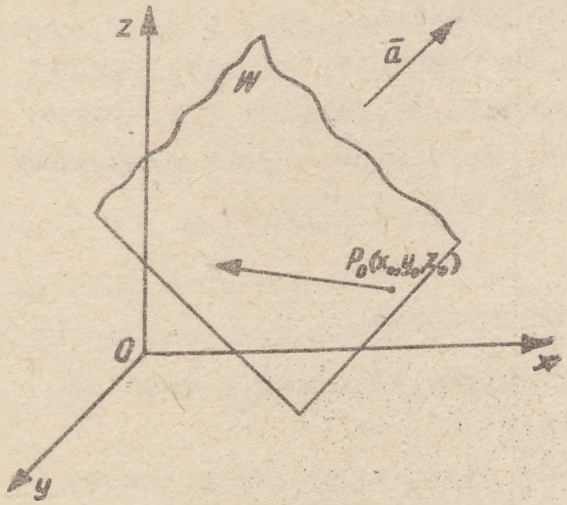
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

§ 14. RÓWNANIE PŁASZCZYZNY

1. Równanie ogólne płaszczyzny.

W układzie Oxyz dany jest wektor niezerowy $\bar{a}$ o współrzędnych A,B,C oraz płaszczyzna W przechodząca przez punkt $P_0(x_0,y_0,z_0)$ i prostopadła do wektora $\bar{a}$ rys.105). Wykażemy, że równaniem płaszczyzny W jest równanie

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \qquad (1)$$



Rys. 105

W tym celu, zgodnie z określeniem równania powierzchni wykażemy, że jeżeli punkt należy do płaszczyzny, to jego współrzędne spełniają równanie (1), jeżeli nie należy, to jego współrzędne równania tego nie spełniają.

Niech punkt P(x,y,z) będzie dowolnym punktem przestrzeni, różnym od punktu P_0. Wtedy wektory $\bar{a}$ i $\overline{P_0P}$, gdy punkt P należy do płaszczyzny W są prostopadłe, gdy P nie należy do W, nie są prostopadłe. Iloczyn więc skalarny wektorów $\bar{a}$ i $\overline{P_0P}$ ma wartość równą zeru, lub różną od zera w zależności od tego czy P należy do W, czy też nie należy.

Mamy więc, że

$$\bar{a} \cdot \overline{P_0P} = 0, \text{ gdy P należy do W i}$$

$$\bar{a} \cdot \overline{P_0P} \neq 0, \text{ gdy P nie należy do W}$$

Współrzędnymi wektora $\bar{a}$ są liczby A,B,C, współrzędnymi wektora $\overline{P_0P}$ - liczby $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$. Korzystając ze wzoru, wyrażającego iloczyn skalarny przez współrzędne czynników, mamy:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0,$$

gdy P(x,y,z) należy do płaszczyzny W i

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) \neq 0$$

gdy $P(x,y,z)$ nie należy do płaszczyzny W.

Jeżeli punkt $P(x,y,z)$ pokrywa się z punktem P_0, to $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, czynniki $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ są równe zeru i wobec tego dla tego punktu spełniony jest również związek (1).

Wykazaliśmy zatem, że równanie (1) jest równaniem płaszczyzny W. Zauważamy, że związek (1) wyprowadziliśmy przy założeniu, że wektor $\bar{a}$ jest niezerowy t.zn. przy założeniu, że $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Mając równanie płaszczyzny W

$$A(x-x_0)+ B(y-y_0)+ C(z-z_0) = 0$$

możemy je napisać w postaci

$$Ax + By + Cz -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

Kładąc następnie $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = D$, otrzymamy postać

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2)$$

którą nazywamy o g ó l n y m r ó w n a n i e m p ł a s z c z y z n y.

Wykazaliśmy, że płaszczyznę w układzie Oxyz można przedstawić równaniem

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Wykażemy teraz odwrotnie, że każde równanie postaci (2), w którym A,B,C nie są jednocześnie równe zeru, jest równaniem pewnej płaszczyzny.

Przede wszystkim stwierdzamy, że istnieją punkty, które to równanie sprawdzają. Gdy A,B,C są różne od zera, to punktami takimi są np.

$$\left(-\frac{D}{A}, 0,0\right), \left(0, -\frac{D}{B}, 0\right), \left(0,0; -\frac{D}{C}\right),$$

Gdy $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, to punktem spełniającym równanie (2) jest np. punkt o współrzędnych

$$x = \text{dowolnej liczbie}, \; y = 0, \; z = -\frac{D}{C}.$$

Przy założeniu $A^2+B^2+C^2 > 0$ zawsze potrafimy podać punkty spełniające równanie (2).

Którykolwiek z tych punktów oznaczmy przez P_0, a jego współrzędne przez x_0, y_0, z_0, wtedy

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

skąd

$$D = - Ax_0 + By_0 + Cz_c$$

Równanie $Ax + By + Cz + D = 0$ możemy teraz napisać w postaci

$$Ax + By + Cz - (Ax_0+By_0+Cz_0) = 0$$

a dalej

$$A(x-x_0)+ B(y-y_0)+ C(z-z_0) = 0$$

Z postaci tego równania wynika, że równanie to spełniają końce wektorów zaczepionych w punkcie $P_0(x_0,y_0,z_0)$ i prostopadłych do wektora $\bar{a}\{A,B,C\}$. Miejscem geometrycznym tych wektorów jest płaszczyzna przechodząca przez $P_0(x_0,y_0,z_0)$ i prostopadła do wektora $\bar{a}$. Współrzędne więc punktów tej płaszczyzny spełniają równanie (2) i odwrotnie, jeżeli punkt spełnia równanie (2), to jest punktem wspomnianej płaszczyzny.

Dwa równania

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

$$A'x+ B'y+ C'z+ D'= 0 \tag{4}$$

określają tę samą płaszczyznę, jeżeli

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

Istotnie, kładąc

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} = \mu$$

mamy $\quad A = \mu A', \; B = \mu B', \; C = \mu C', \; D = \mu D'$

i możemy równanie $Ax + By + Cz + D = 0$ napisać w postaci

$$\mu(A'x + B'y + C'z + D') = 0,$$

skąd wynika, że trójki x,y,z, które spełniają równanie (4), spełniają również równanie (3). Słuszne jest również twierdzenie odwrotne.

2. Przypadki szczególne równania ogólnego.

Jeżeli w równaniu

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

niektóre z liczb A,B,C,D są równe zeru, to płaszczyzna określona tym równaniem zajmuje względem układu Oxyz szczególne położenie.

1) Jeżeli $D = 0$, czyli gdy równanie ma postać

$$Ax + By + Cz = 0,$$

to płaszczyzna przechodzi przez początek układu, bowiem punkt (0,0,0) spełnia to równanie.

2) Jeżeli $A = 0$ lub $B = 0$ lub $C = 0$, czyli gdy równanie płaszczyzny ma postać

$$By + Cz + D = 0$$

lub (3)

$$Ax + Cz + D = 0$$

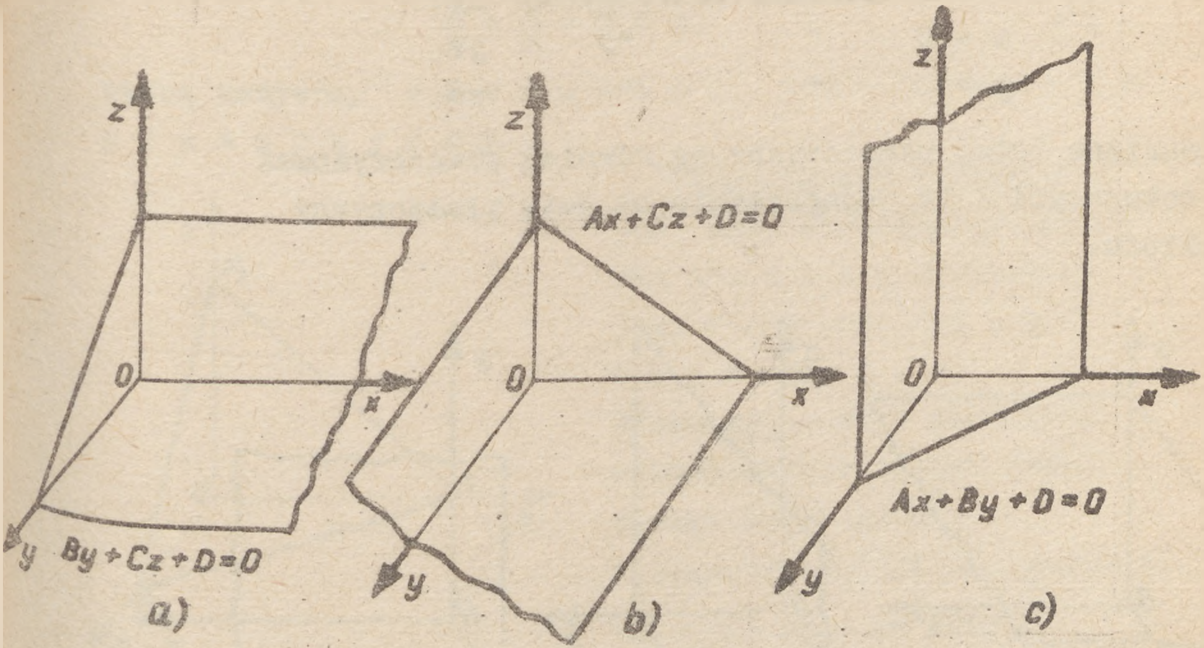
lub

$$Ax + By + D = 0,$$

to wektor $\bar{a}\{A,B,C\}$, do którego płaszczyzna jest prostopadła, jest odpowiednio prostopadły do osi x lub y lub z. Płaszczyzna więc określona takim równaniem jest równoległa do osi x (rys.106a), lub y (rys.106 b) lub z (rys.106 c). Jeżeli nadto $D = 0$, to płaszczyzna przechodzi odpowiednio przez oś x lub y lub z.

Płaszczyznę równoległą do osi układu nazywamy płaszczyzną rzutującą. Równania więc płaszczyzn, w których brak jest wyrazu z jedną zmienną, określają płaszczyzny rzutujące. Jeżeli $A = 0$, równanie określa płaszczyznę rzutującą na płaszczyznę yz, gdy $B = 0$

- na płaszczyznę zx, gdy C = 0 - na płaszczyznę xy.



Rys. 106

3) Jeżeli w równaniu ogólnym płaszczyzny dwa współczynniki są równe zeru czyli, gdy równanie płaszczyzny ma postać

$$Cz + D = 0 \tag{4a}$$

lub

$$Ax + D = 0 \tag{4b}$$

lub

$$By + D = 0, \tag{4c}$$

wówczas równanie (4a) przedstawia płaszczyznę równoległą do osi x i osi y, czyli do płaszczyzny xy (rys.107); analogicznie równanie (4b) płaszczyznę równoległą do yz i wreszcie równanie (4c) płaszczyznę równoległą do xz.

Na ogół równania płaszczyzn równoległych do płaszczyzn układu piszemy w postaci

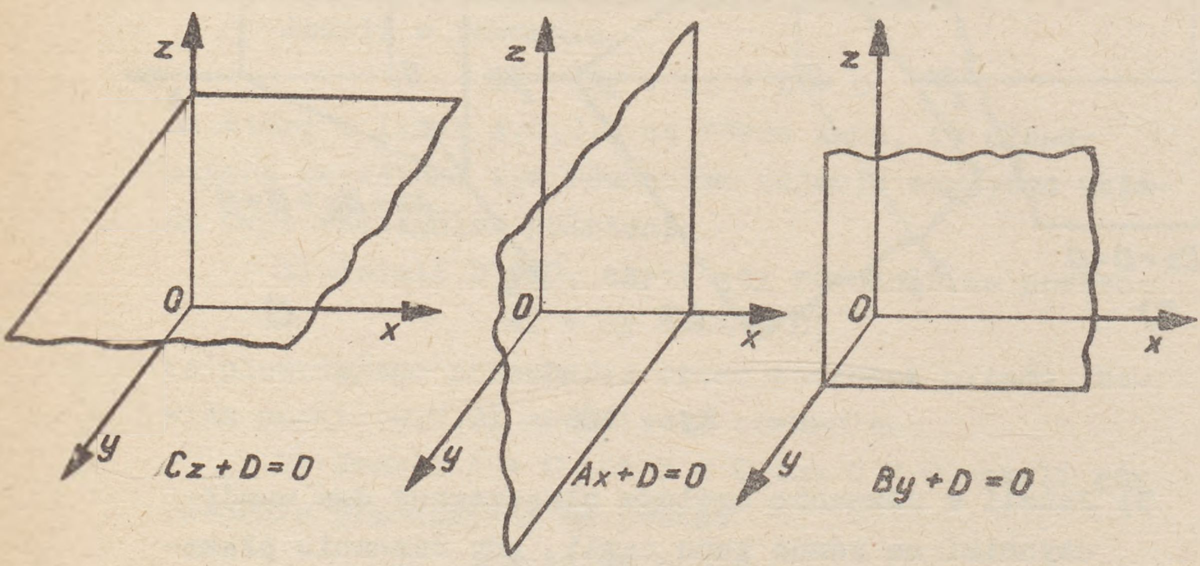
$$z = -\frac{D}{C}, \quad x = -\frac{D}{A}, \quad y = -\frac{D}{B},$$

wtedy $\left|-\frac{D}{C}\right|$, $\left|-\frac{D}{A}\right|$, $\left|-\frac{D}{B}\right|$ wyrażają odległość płaszczyzny od odpowiedniej płaszczyzny układu.

Jeżeli nadto D = 0, to równania (4) określają płaszczyzny układu, a więc równanie

z = 0 określa płaszczyznę xy,
x = 0 " " yz,
y = 0 " " xz.

Omawiane tutaj płaszczyzny są również płaszczyznami rzutującymi i to jednocześnie na dwie płaszczyzny układu.



Rys. 107

3. <u>Równanie odcinkowe płaszczyzny.</u>

Jeżeli płaszczyzna jest określona równaniem

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

w którym wszystkie liczby A,B,C,D są różne od zera, to równaniu temu możemy kolejno nadać następujące postaci

$$Ax + By + Cz = -D,$$

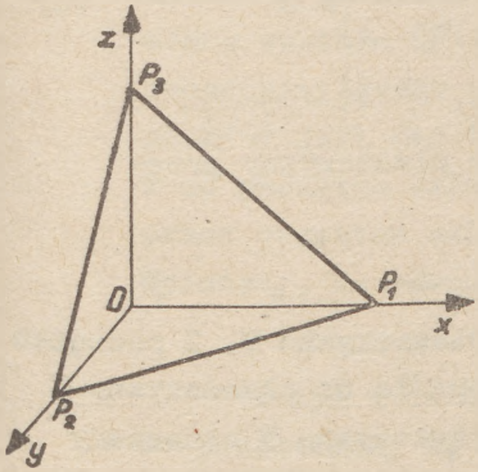
$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1,$$

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$$

Oznaczając $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$, $-\frac{D}{C} = c$, otrzymamy postać

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (5)$$

którą nazywamy r ó w n a n i e m o d c i n k o w y m p ł a s z c z y z n y.



Rys.108

Kładąc w tym równaniu $y=0$, $z=0$, otrzymujemy $x=a$. Dla $x = 0$ i $z = 0$ otrzymujemy $y = b$ oraz dla $x = 0$ i $y = 0$ mamy $z = c$. Płaszczyzna więc określona równaniem odcinkowym przechodzi przez punkty $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$, $P_3(0,0,c)$, odkreśla więc na osiach układu odcinki, których długości są równe bezwzględnym wartościom liczb a, b i c.

Równaniem odcinkowym możemy określić tylko te płaszczyzny dla których A, B, C, D są różne od zera t.zn. płaszczyzny, które nie są równoległe do osi układu i nie przechodzą przez początek układu.

Przykład. Mając płaszczyznę $3x+2y-6z-3=0$, sprowadzamy jej równanie do postaci odcinkowej, otrzymując

$$x + \frac{y}{1\frac{1}{2}} + \frac{z}{-2} = 1.$$

Płaszczyzna ta przechodzi przez punkty:

$$A(1,0,0), \quad B(0, 1\tfrac{1}{2}, 0), \quad C(0,0,-2).$$

4. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty

Dane są trzy punkty $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ nie leżące na jednej prostej. Wyznaczymy równanie płaszczyzny przechodzącej przez te punkty.

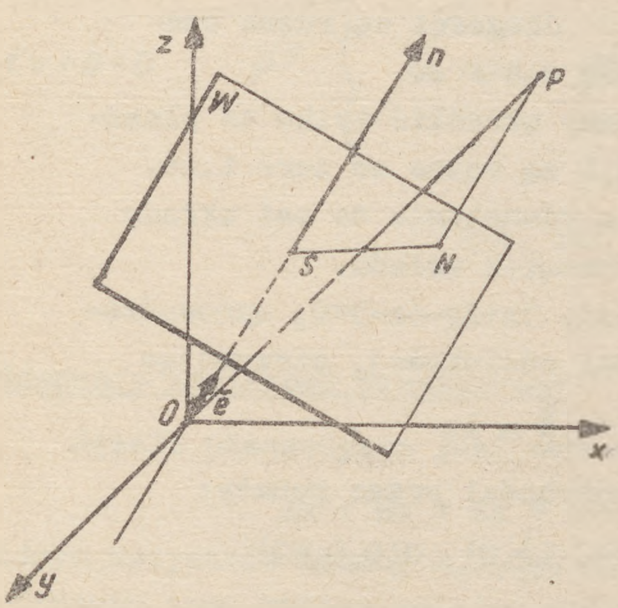
Niech punkt P (x,y,z) będzie dowolnym punktem przestrzeni. Warunkiem koniecznym i dostatecznym (str.75) przynależności P(x,y,z) wraz z punktami A,B,C do jednej płaszczyzny jest, by

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Równanie (6) jest zatem równaniem płaszczyzny przechodzącej przez punkty A,B,C.

5. Równanie normalne płaszczyzny.

W układzie Oxyz dana jest płaszczyzna W. Z początku układu O kreślimy prostą n prostopadłą do płaszczyzny W i punkt przecięcia prostej n z płaszczyzną W oznaczamy przez S (rys.109). Prostej n nadajemy zwrot dodatni. Do wyboru mamy dwa zwroty jako zwroty dodatnie zwrot od początku O ku płaszczyźnie W, czyli zwrot wektora $\overline{OS}$ lub zwrot od płaszczyzny W do początku O, czyli zwrot wektora $\overline{SO}$.



Rys. 109

Prostą n, przechodzącą przez początek układu, prostopadle do płaszczyzny W z przyjętym zwrotem dodatnim, nazywamy osią n o r m a l n ą p ł a s z c z y z n y W.

Jako zwrot dodatni przyjmiemy na razie zwrot od początku O ku płaszczyźnie W. Jeżeliby płaszczyzna W przechodziła przez początek układu, wtedy jako zwrot dodatni należy przyjąć dowolnie jeden z dwóch możliwych zwrotów prostej normalnej.

Niech wektor $\bar{e}$ będzie wektorem jednostkowym osi n

Położenie płaszczyzny W w układzie Oxyz jest określone, gdy znane są kąty α, β, γ, jakie oś normalna n tworzy z osiami układu, oraz gdy znana jest miara wektora $\overline{OS}$ względem osi n, czyli OS $= \delta$. Wobec przyjętego zwrotu dodatniego osi n /od O ku pł.W/ δ jest dodatnie i wyraża odległość płaszczyzny W od początku układu. Jeżeli płaszczyzna W przechodzi przez początek układu O, to $\delta = 0$.
Wykażemy, że równaniem płaszczyzny W jest równanie

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta = 0. \qquad (7)$$

W tym celu udowodnimy, że jeżeli punkt należy do płaszczyzny W, to jego współrzędne spełniają równanie (7), jeżeli nie należy do płaszczyzny, to jego współrzędne równania tego nie spełniają.

Niech punkt P(x,y,z) będzie dowolnym punktem przestrzeni i punkt N jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę W.

Badamy iloczyn skalarny wektora jednostkowego $\bar{e}$ i wektora $\overline{OP}$, czyli $\bar{e} \circ \overline{OP}$. Iloczyn ten wyraża miarę rzutu wektora $\overline{OP}$ na oś n (str.42).

Jeżeli punkt P(x,y,z) należy do płaszczyzny W, to

$$\bar{e} \circ \overline{OP} = \delta ,$$

jeżeli nie należy do płaszczyzny W, to

$$\bar{e} \circ \overline{OP} = \delta + d,$$

gdzie d = NP jest dodatnie, gdy P leży z przeciwnej strony płaszczyzny W niż początek układu (jak na rys. 109); d jest ujemne, gdy P leży z tej samej strony płaszczyzny W, co początek układu.

Współrzędnymi wektora $\bar{e}$ są: $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$;
" " $\overline{OP}$ " : x , y , z

Wyrażając iloczyn skalarny przez współrzędne wektorów mamy w przypadku, gdy P(x,y,z) należy do płaszczyzny W

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \delta$$

lub

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta = 0,$$

a w przypadku, gdy P(x,y,z) nie należy do płaszczyzny W

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \delta + d$$

lub

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta = d.$$

Zatem równanie

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta = 0$$

jest równaniem płaszczyzny. Równanie płaszczyzny w tej postaci nazywamy r ó w n a n i e m n o r m a l n y m.

W równaniu tym $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ są cosinusami kierunkowymi osi normalnej, na której jako zwrot dodatni przyjęto zwrot od początku układu ku płaszczyźnie, a δ jest odległością płaszczyzny od początku układu.

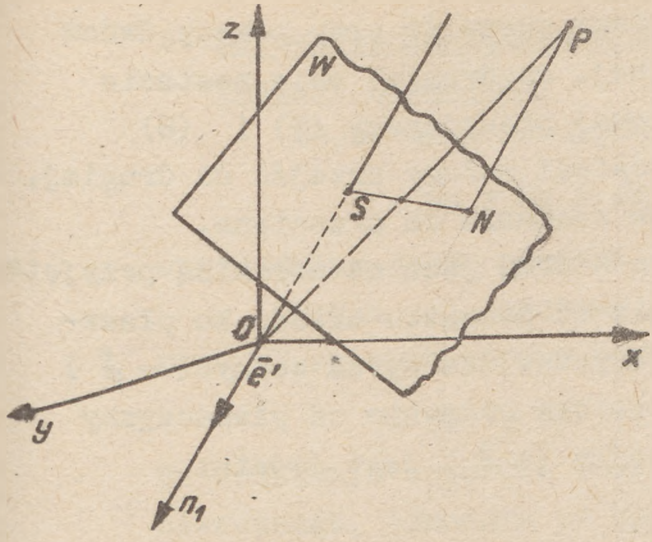
Z kolei znajdziemy równanie płaszczyzny W w postaci normalnej przy założeniu, że jako oś normalną przyjęto prostą o zwrocie dodatnim przeciwnym do zwrotu poprzednio przyjętego (rys. 110).

Oś o tak przyjętym zwrocie dodatnim oznaczmy przez n_1, a jej kąty z osiami układu przez α_1, β_1, γ_1, . Odległość płaszczyzny od początku układu, czyli $|OS|$ przez δ.

Iloczyn skalarny

$$\bar{e}' \cdot \overline{OP}$$

wyraża miarę rzutu wektora $\overline{OP}$ na oś n_1.



Rys. 110

Jeżeli P należy do płaszczyzny W, to

$$\bar{e}' . \overline{OP} = -\delta,$$

jeżeli P nie należy do W, to

$$\bar{e}' . \overline{OP} = -\delta + d,$$

gdzie d = NP jest ujemne, gdy punkt P leży z przeciwnej strony płaszczyzny W niż początek układu i d jest dodatnie, gdy P leży z tej samej strony co punkt O.

Współrzędnymi wektora $\bar{e}'$ są $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, przy czym $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha$, $\cos\beta_1 = -\cos\beta$, $\cos\gamma_1 = -\cos\gamma$, jeżeli α, β, γ, są kątami osi n z osiami układu.

Współrzędnymi wektora $\overline{OP}$ są x,y,z.

Wyrażając iloczyn skalarny $\bar{e}' . \overline{OP}$ przez współrzędne wektorów otrzymamy w przypadku, gdy punkt P(x,y,z) należy do W

$$-x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma = -\delta$$

lub

$$-x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma + \delta = 0,$$

zaś dla punktów P(x,y,z) nie należących do płaszczyzny W

$$-x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma = -\delta + d$$

lub

$$-x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma + \delta = d.$$

Równanie więc

$$-x\cos\alpha - y\cos\beta - z\cos\gamma + \delta = 0 \qquad (8)$$

jest równaniem normalnym płaszczyzny, jeżeli jako oś normalną przyjmujemy prostą o zwrocie dodatnim od płaszczyzny ku początkowi układu O.

Każdą płaszczyznę, zależnie od przyjętego zwrotu dodatniego osi normalnej, możemy określić przy pomocy dwóch równań w postaci normalnej. Porównując obie postacie równań normalnych tej samej płaszczyzny (7) i (8) widzimy, że od jednej postaci możemy przejść do drugiej, zmieniając znaki wyrazów równania na przeciwne. Równanie płaszczyzny dla której jako oś normalną przyjęto prostą o zwrocie dodatnim od początku układu ku płaszczyźnie tym się charakteryzuje, że wyraz wolny ($-\delta$) jest ujemny, przy zwrocie zaś dodatnim od płaszczyzny ku początkowi O wyraz wolny ($+\delta$) jest dodatni.

Twierdzenie odwrotne: Każde równanie postaci

$$rx + sy + tz + p = 0, \qquad (9)$$

gdzie $r^2 + s^2 + t^2 = 1$, jest równaniem normalnym płaszczyzny, której oś normalna ma cosinusy kierunkowe r, s, t i której odległość od początku układu równa się $|p|$.
Wykażemy, że możemy skonstruować płaszczyznę W, dla której równanie (9) jest równaniem normalnym. W układzie Oxyz obieramy punkt $J(r, s, t)$. Wektor $\overline{OJ}$ jest wektorem jednostkowym, z założenia bowiem $|\overline{OJ}| = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2} = 1$. Oś, którą określa wektor $\overline{OJ}$, przyjmujemy jako oś n. Cosinusy kierunkowe tej osi równe są współrzędnym wektora $\overline{OJ}$, są więc równe r, s, i t. Na osi n tak obranej odkreślamy odcinek OS i to na półosi dodatniej, jeżeli $p < 0$, na półosi ujemnej, jeżeli $p > 0$. Przez punkt S prowadzimy płaszczyznę W prostopadłą do osi n. W myśl rozważań poprzednich, równanie normalne tej płaszczyzny ma postać (9).

6. Sprowadzanie równania ogólnego płaszczyzny do postaci normalnej.

Mając dane równanie ogólne płaszczyzny

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

sprowadzimy je do postaci normalnej.

W tym celu mnożymy obie strony równania ogólnego płaszczyzny przez czynnik μ, otrzymując

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0$$

Na podstawie ostatnio dowiedzionego twierdzenia odwrotnego, równanie to będzie równaniem normalnym płaszczyzny, jeżeli czynnik μ tak dobierzemy, by

$$(\mu A)^2 + (\mu B)^2 + (\mu C)^2 = 1$$

Obliczając μ z tego związku, otrzymamy dwie wartości μ różniące się znakiem :

$$\mu_1 = \frac{1}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Zatem równanie ogólne płaszczyzny

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sprowadzamy do postaci normalnej, mnożąc strony równania ogólnego przez μ_1 lub μ_2, otrzymując

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \qquad (10a)$$

lub

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \qquad (10b)$$

Z postaci równania (10a) wynika, że cosinusy kierunkowe osi normalnej płaszczyzny równają się

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

z postaci zaś (10b), że cosinusy kierunkowe osi są równe

$$\frac{A}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{B}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{C}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Wybór μ_1 lub μ_2 przy sprowadzaniu równania ogólnego do postaci normalnej jest więc równoznaczny z wyborem jednego z dwóch zwrotów prostej n jako zwrotu dodatniego.

W dalszych rozważaniach, przy sprowadzaniu równania ogólnego płaszczyzny do postaci normalnej, będziemy wybierać tę spośród dwóch wartości μ, której wybór będzie równoznaczny z wyborem jako zwrotu dodatniego osi n zwrotu od początku układu ku płaszczyźnie W. W tym celu będziemy dobierać tę wartość μ, której znak jest przeciwny do znaku liczby D,

Jeżeli więc dane jest równanie ogólne płaszczyzny

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

to równaniem normalnym tej płaszczyzny, posiadającej jako oś normalną prostą o zwrocie dodatnim od początku układu ku płaszczyźnie, jest równanie

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{(-\mathrm{sign.}D)\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

Przykład: Sprowadzając równanie ogólne płaszczyzny

$$6x - 3y - 2z + 4 = 0$$

do postaci normalnej otrzymamy

$$\frac{6x-3y-2z+4}{7} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{6x-3y-2z+4}{-7} = 0$$

Zgodnie z ostatnią umową będziemy posługiwali się drugą postacią równania. Płaszczyzna określona tym równaniem jest oddalona od początku układu o $\frac{4}{7}$ i posiada oś normalną, której cosinusy kierunkowe są równe :

$$\cos\alpha = -\frac{6}{7}, \ \cos\beta = \frac{3}{7}, \ \cos\gamma = \frac{2}{7}.$$

7. Odległość punktu od płaszczyzny.

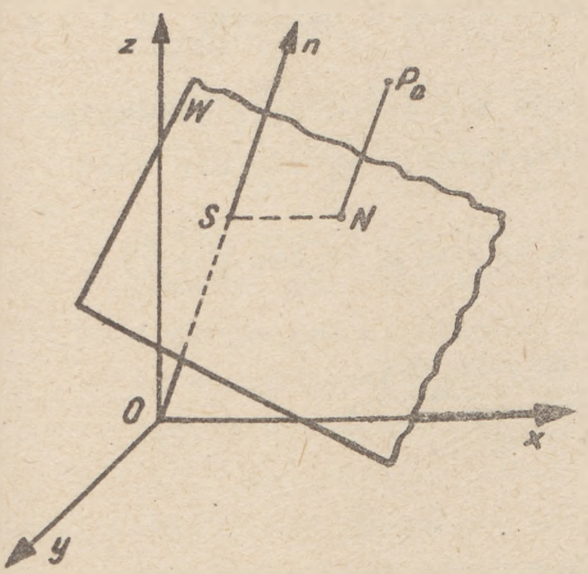
W układzie Oxyz dana jest płaszczyzna W równaniem normalnym

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta = 0$$

oraz punkt $P_0(x_0,y_0,z_0)$. Wyznaczymy odległość punktu P_0 od płaszczyzny W.

O d l e g ł o ś c i ą   w z g l ę d n ą   punktu P_0 od płaszczyzny W nazywamy miarą wektora $\overline{NP}_0$ względem osi n. Odległość ta jest dodatnia, gdy P_0 znajduje się z przeciwnej strony płaszczyzny W niż początek układu, ujemna gdy P_0 znajduje się z tej samej strony płaszczyzny W co punkt O.

Przy wyprowadzaniu równania normalnego płaszczyzny otrzymaliśmy



Rys. 111

$$NP_0 = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - \delta$$

Odległość więc względna punktu $P_0(x_0,y_0,z_0)$ od płaszczyzny

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - \delta = 0$$

równa się wartości lewej strony równania normalnego, w którą za x,y,z wstawiono współrzędne punktu P_0.

Jeżeliby płaszczyzna W była dana w postaci ogólnej, to chcąc wyznaczyć odległość punktu $P_0(x_0,y_0,z_0)$ od płaszczyzny W, piszemy najpierw jej równanie w postaci normalnej, otrzymując

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{(-\mathrm{sign}.D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Wtedy odległość względna punktu P_0 (x_0, y_0, z_0) od płaszczyzny W wyrazi się wzorem

$$NP_0 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{(-\mathrm{sign}.D)\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

O d l e g ł o ś c i ą   z w y k ł ą, krótko odległością punktu P_0 od płaszczyzny W nazywamy d ł u g o ś ć o d c i n k a $|NP_0|$.

Odległość zwykła równa się oczywiście bezwzględnej wartości odległości względnej, wyraża się więc wzorem

$$|NP_0| = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - \delta|$$

lub

$$|NP_0| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

8. Pęk płaszczyzn.

Zbiór wszystkich płaszczyzn mających wspólną krawędź k lub zbiór wszystkich płaszczyzn równoległych do jednej płaszczyzny nazywamy p ę k i e m p ł a s z c z y z n (przecinających się lub równoległych).

Jeżeli dane są dwie różne płaszczyzny

$$W_1(x,y,z) \equiv A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0,$$
$$W_2(x,y,z) \equiv A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0, \tag{11}$$

to słuszne są następujące twierdzenia:

1) Jeżeli płaszczyzny W_1 i W_2 są różne i nierównoległe to równanie

$$\lambda_1 W_1(x,y,z) + \lambda_2 W_2(x,y,z) = 0, \tag{12}$$

gdzie λ_1 i λ_2 spełniają warunek $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, przedstawia zawsze płaszczyznę przechodzącą przez krawędź płaszczyzn W_1 i W_2 i na odwrót każdą płaszczyznę przechodzącą przez tę krawędź można, dobierając odpowiednio λ_1 i λ_2, przedstawić równaniem (12)

2) Jeżeli płaszczyzny W_1 i W_2 są różne i równoległe, to równanie (12) przy wszelkich λ_1 i λ_2 spełniających warunek $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, z wyjątkiem tych dla których

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0, \quad \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2, \quad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$$

przedstawia płaszczyznę równoległą do płaszczyzn W_1 i W_2 i odwrotnie każdą płaszczyznę równoległą do płaszczyzn W_1 i W_2 można, dobierając odpowiednio liczby λ_1 i λ_2, przedstawić równaniem (12).

Dowody tych twierdzeń są podobne do dowodów przeprowadzonych dla pęków prostych na płaszczyźnie. Również sens geometryczny parametrów λ_1 i λ_2, występujących w równaniu pęku płaszczyzn, jest podobny do sensu geometrycznego parametrów λ_1 i λ_2, występujących w równaniu pęku prostych.

Mianowicie, jeżeli płaszczyzny W_1 i W_2 są określone równaniami normalnymi i $P(x,y,z)$ jest dowolnym punktem płaszczyzny

$$\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 = 0,$$

nie należącym do krawędzi płaszczyzn W_1 i W_2 i N_1P oraz N_2P oznaczają odległości względne tego punktu od płaszczyzn W_1 i W_2, to

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{N_2P}{N_1P}$$

Jeżeli punkt P należy do płaszczyzny dwusiecznej kąta dwusiecznego utworzonego przez płaszczyzny W_1 i W_2, to $|N_1P| = |N_2P|$. Równania więc płaszczyzn dwusiecznych kątów dwuściennych, utworzonych przez płaszczyzny W_1 i W_2, otrzymamy podobnie jak w przypadku dwusiecznych kąta liniowego, przyjmując

$$\lambda_1=1 \text{ i } \lambda_2=1 \quad \text{lub} \quad \lambda_1=1 \text{ i } \lambda_2=-1.$$

Jako równania płaszczyzn dwusiecznych otrzymamy:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} = \pm \frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \tag{13}$$

Słuszne jest następujące twierdzenie:

Jeżeli dane są trzy różne płaszczyzny o równaniach

$$W_1(x,y,z)=0, \quad W_2(x,y,z)=0, \quad W_3(x,y,z)=0,$$

to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by te trzy płaszczyzny należały do jednego pęku płaszczyzn przecinających się lub równoległych jest istnienie takich trzech liczb t_1, t_2, t_3, spełniających warunek $t_1^2+t_2^2+t_3^2 > 0$, że równanie

$$t_1W_1(x,y,z)+t_2W_2(x,y,z)+t_3W_3(x,y,z) = 0$$

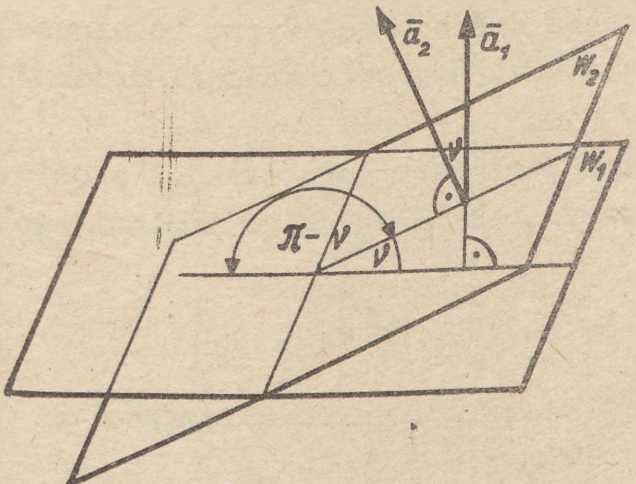
jest tożsamościowo spełnione (jest spełnione dla wszelkich x, y i z).

Dowód twierdzenia jest podobny do dowodu w przypadku trzech prostych należących do jednego pęku (str.129).

9. Kąty dwóch płaszczyzn.

Jeżeli dwie płaszczyzny W_1 i W_2 przecinają się, to tworzą dwie pary kątów wierzchołkowych dwuściennych równych (rys.112).

Jeżeli wektory $\bar{a}_1$ i $\bar{a}_2$ są wektorami odpowiednio prostopadłymi do płaszczyzn, to miara ν kąta dwuściennego jednej pary kątów wierzchołkowych równa się kątowi między tymi wektorami, miara zaś kąta drugiej pary równa się kątowi między wektorami $\bar{a}_1$ i $-\bar{a}_2$, czyli $\pi - \nu$.



Rys. 112

Jeżeli płaszczyzny W_1 i W_2 są określone równaniami

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,

to znane są współrzędne wektorów prostopadłych do tych płaszczyzn, mianowicie

$$\bar{a}_1\ \{A_1, B_1, C_1\}\ ,\qquad \bar{a}_2\ \{A_2, B_2, C_2\}$$

oraz ich cosinusy kierunkowe

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}\ ,\quad \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}\ ,\quad \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}\ ;$$

$$\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\ ,\quad \frac{B_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\ ,\quad \frac{C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\ ,$$

Cosinusy kierunkowe wektora $-\bar{a}_2$ różnią się od cosinusów wektora $\bar{a}_2$ znakami. Stosując wzory na cosinus i sinus kąta między wektorami (str.49), otrzymamy

$$\cos\nu = \pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1}\ \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (14)$$

$$\sin^2\nu = \frac{\begin{vmatrix} B_1, & C_1 \\ B_2, & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C_1, & A_1 \\ C_2, & A_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix}^2}{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)\cdot(A_2^2+B_2^2+C_2^{\ 2})} \qquad (15)$$

10. Warunki równoległości i prostopadłości płaszczyzn.

Jeżeli γ jest kątem dwóch płaszczyzn, to warunkiem koniecznym i dostatecznym prostopadłości dwóch płaszczyzn jest $\cos \gamma = 0$.
Uwzględniając wzór (14) otrzymamy jako warunek prostopadłości dwóch płaszczyzn, określonych równaniami ogólnymi, warunek

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równoległości dwóch płaszczyzn jest $\sin \gamma = 0$.
Uwzględniając wzór (15) otrzymamy jako warunek równoległości

$$B_1C_2 - B_2C_1 = 0, \quad C_1A_2 - C_2A_1 = 0, \quad A_1B_2 - A_2B_1 = 0,$$

warunek ten w przypadku, gdy wszystkie liczby A, B, C są różne od zera możemy podać również w postaci

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

11. Równania parametryczne płaszczyzny.

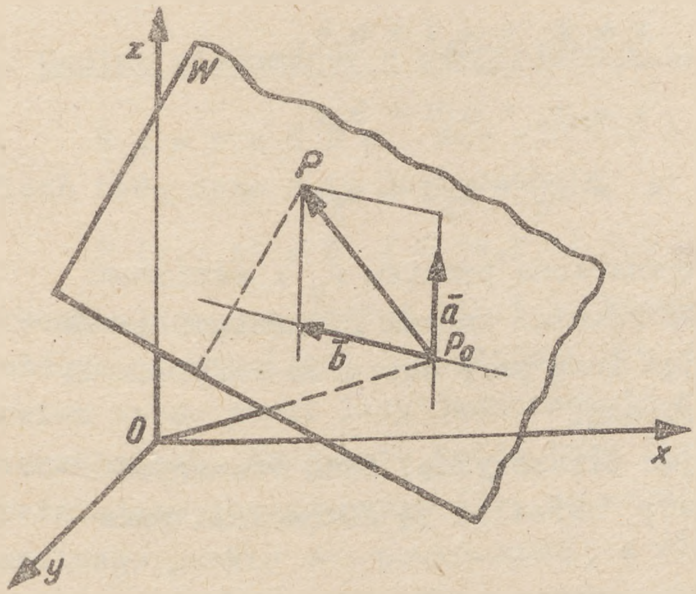
Niech w przestrzeni układu Oxyz będzie dany punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ oraz dwa wektory niekolinearne $\overline{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\overline{b}\{b_1, b_2, b_3\}$ zaczepione w punkcie P_0. Wektory $\overline{a}$ i $\overline{b}$ wyznaczają płaszczyznę, którą oznaczamy przez W.

Wykażemy, że równaniami parametrycznymi płaszczyzny W są równania

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1u + b_1v, \\ y &= y_0 + a_2u + b_2v, \qquad (16) \\ z &= z_0 + a_3u + b_3v. \end{aligned}$$

Niech punkt $P(x, y, z)$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny W, wtedy wektor $\overline{P_0P}$ jest wektorem komplanarnym z wektorami $\overline{a}$ i $\overline{b}$ i może być w bazie przestrzeni dwuwymiarowej $\overline{a},\overline{b}$ (str.11) przedstawiony w postaci

$$\overline{P_oP} = u\,\overline{a} + v\,\overline{b}, \tag{17}$$



Rys. 112 a.

gdzie liczby u i v są współrzędnymi wektora $\overline{P_oP}$ w bazie $\overline{a},\overline{b}$.
Wektor $\overline{OP}$ jest sumą wektorów $\overline{OP_o}$ i $\overline{P_oP}$, czyli

$$\overline{OP} = \overline{OP_o} + \overline{P_oP},$$

a dalej po uwzględnieniu (17) mamy

$$\overline{OP} = \overline{OP_o} + u\,\overline{a} + v\,\overline{b} \tag{18}$$

Związek ten nazywamy r ó w n a n i e m w e k t o r o w y m p ł a s z c z y z n y W.

Gdy zmiennym u i v będziemy nadawać wszelkie możliwe wartości, wówczas koniec wektora $\overline{OP}$ opisze płaszczyznę W w szczególności, jeżeli w parze (u,v) przyjmiemy u stałe, zmieniając w sposób ciągły v, to punkt P zakreśli prostą na płaszczyźnie W, równoległą do wektora $\overline{b}$; jeżeli zaś przyjmiemy v stałe i będziemy zmieniać u, to punkt P będzie się poruszać po prostej równoległej do wektora $\overline{a}$.

Odwrotnie każdemu punktowi płaszczyzny W, zgodnie z wynikami rozważań na str. 11, przyporządkowana jest para liczb u i v spełniająca równanie (18).

Korzystając z twierdzenia, że składowa sumy równa się sumie składowych, możemy związek (18) zastąpić równaniami

$$x = x_0 + a_1 u + b_1 v,$$

$$y = y_0 + a_2 u + b_2 v,$$

$$z = z_0 + a_3 u + b_3 v.$$

Płaszczyznę wyznaczoną punktem P_0 i wektorami $\bar{a}, \bar{b}$ możemy określić również innymi równaniami parametrycznymi, przyjmując inną parę wektorów komplanarną z parą poprzednio obraną.

Przykład. Mając płaszczyznę, daną równaniem ogólnym $2x+3y-4z+1=0$, określić ją równaniami parametrycznymi.

Na danej płaszczyźnie obieramy dowolny punkt P_0 np. $P_0(2,1,2)$, a następnie dwa dalsze dowolne punkty A i B jako końce wektorów $\bar{a}$ i $\bar{b}$ bacząc, by wektory $\bar{a} = \overline{P_0A}$ i $\bar{b} = \overline{P_0B}$ nie były kolinearne.

Jeżeli wybierzemy np. punkty $A(1,-1,0)$ i $B(0,5,4)$, to wektory

$$\bar{a}\left\{-1, -2, -2\right\}, \quad \bar{b}\left\{-2, 4, 2\right\}$$

nie są kolinearne, nie jest bowiem spełniony warunek

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Płaszczyznę daną możemy więc określić równaniami

$$x = 2 - u - 2v,$$

$$y = 1 - 2u + 4v,$$

$$z = 2 - 2u + 2v.$$

§ 15. RÓWNANIA PROSTEJ W PRZESTRZENI

1. Ogólne wiadomości o równaniach linii w przestrzeni.

R ó w n a n i a z w y c z a j n e l i n i i. Niech będą dane dwie powierzchnie

$$F(x,y,z) = 0 \quad i \quad G(x,y,z) = 0, \tag{1}$$

przecinające się wzdłuż linii l. Wtedy współrzędne każdego punktu linii l spełniają oba równania (1), bowiem każdy punkt leży jednocześnie na obu powierzchniach. Odwrotnie każde trzy liczby x,y,z, spełniające oba równania (1), są współrzędnymi wspólnego punktu obu powierzchni, a więc należą do linii l. Równania więc dwóch powierzchni (1), przenikających się wzdłuż linii l, określają analitycznie linie l.

Równania (1) nazywamy r ó w n a n i a m i z w y c z a j n y m i l i n i i l.

Np. dwa równania płaszczyzn nierównoległych

$$2x + y + 3z - 9 = 0,$$

$$x + 8y - 6z - 12 = 0$$

określają prostą, mianowicie krawędź przecięcia się tych płaszczyzn.

Równania

$$3x + 4y + 5z - 10 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

określają okrąg, wzdłuż którego płaszczyzna przecina powierzchnię kulistą.

Linię l określoną układem równań (1) można określić również innymi układem równań, jeżeli nowe powierzchnie określające linię l tak dobierzemy, że przecinają się wzdłuż linii l. Okrąg w przestrzeni możemy określić jako przecięcie płaszczyzny i powierzchni kulilistej ale również jako przecięcie dwóch powierzchni kulistych odpowiednio dobranych lub płaszczyzny i walca kołowego. Z tej możliwości będziemy często korzystać. Mając linię l, określoną równaniami

$$F(x,y,z)=0, \quad G(x,y,z)=0,$$

możemy np. przez wyrugowanie jednej ze zmiennych uzyskać równanie dwóch zmiennych $f(x,y)=0$ i dany układ zastąpić układem $F(x,y,z)=0$, $f(x,y)=0$, co jak później zobaczymy jest równoznaczne z zastąpieniem powierzchni $G(x,y,z)=0$ przez powierzchnię $f(x,y)=0$, przenikającą się z powierzchnią $F(x,y,z) = 0$ wzdłuż tej samej linii.

R ó w n a n i a p a r a m e t r y c z n e linii.

Niech współrzędne prostokątne x,y,z będą dane jako funkcje jednej zmiennej t, zwanej parametrem:

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \tag{2}$$

i niech funkcje $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ będą funkcjami ciągłymi zmiennej t w pewnym przedziale.

Równania (2) nazywamy r ó w n a n i a m i p a r a m e t r y c z n y m i linii l, jeżeli

1) dla każdej wartości parametru t_0 z przedziału (α, β) punkt P_0 o współrzędnych $f(t_0)$, $g(t_0)$, $h(t_0)$ należy do linii l i

2) dla każdego punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ należącego do linii l, można wyznaczyć taką wartość t_0, że

$$x_0 = f(t_0), \quad y_0 = g(t_0), \quad z_0 = h(t_0)$$

Równaniami parametrycznymi prostej, przechodzącej przez punkty $A(x_1,y_1,z_1)$ i $B(x_2,y_2,z_2)$ są np. równania

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t,$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t,$$

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)\,t.$$

Od równań parametrycznych linii przechodzimy do równań zwyczajnych linii, rugując z równań parametrycznych parametr t t.zn.,wyrażając przy pomocy jednego spośród trzech równań zmienną t przez x lub y lub z i podstawiając otrzymane wyrażenie na t do dwóch pozostałych równań. Otrzymamy wtedy dwa równania zmiennych x,y,z jako równania zwyczajne linii.

Jeżeli chcemy przejść od równań zwyczajnych linii

$$F(x,y,z) = 0,$$
$$G(x,y,z) = 0$$

do równań parametrycznych, to najczęściej postępujemy następująco: wyrażamy przy pomocy danego układu równań dwie zmienne np. y i z przez x, otrzymując nowy układ:

$$y = f(x), \quad z = g(x)$$

Geometrycznie oznacza to, że powierzchnie

$$F(x,y,z) = 0$$
i
$$G(x,y,z) = 0$$

przenikające się wzdłuż linii l, zastępujemy nową parą powierzchni,

$$y = f(x), \quad z = g(x),$$

przenikających się wzdłuż tej samej linii l.
Kładąc następnie

$$x = t, \quad y = f(t), \quad z = g(t),$$

otrzymamy równania parametryczne linii l.

2. Równania zwyczajne prostej.

Omawiając ogólnie analityczne sposoby przedstawienia linii zaznaczyliśmy, że linię w przestrzeni możemy określić jako linię przenikania się dwóch powierzchni. Prostą zatem możemy określić jako linię przenikania się (krawędź) dwóch płaszczyzn nierównoległych.

Jeżeli dane są dwa równania

$$W_1(xyz) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$W_2(xyz) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (2)$$

i nie wszystkie stosunki $A_1 : A_2$, $B_1 : B_2$, $C_1 : C_2$ są równe, to równania (2) określają pewną prostą p, mianowicie krawędź dwóch danych płaszczyzn. Wtedy bowiem punkt, który należy do prostej p spełnia równania (2) i odwrotnie, jeżeli punkt spełnia oba równania, to należy do prostej p.

Chcąc na prostej określonej równaniami

$$5x + 8y - 3z + 9 = 0,$$
$$2x - 4y + z - 1 = 0 \qquad (3)$$

wyznaczyć dowolny punkt, obieramy wartość jednej ze zmiennych np. z dowolnie, pozostałe zaś zmienne x i y obliczamy przy pomocy danego układu równań, w którym zmienną z zastąpiono obraną wartością.

Jeżeli obierzemy z = 1, to x i y obliczamy z układu

$$\left.\begin{aligned} 5x + 8y &= -6 \\ 2x - 4y &= 9, \end{aligned}\right\}$$

otrzymując $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$

Punkt $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ należy do prostej, gdyż jego współrzędne spełniają oba równania.

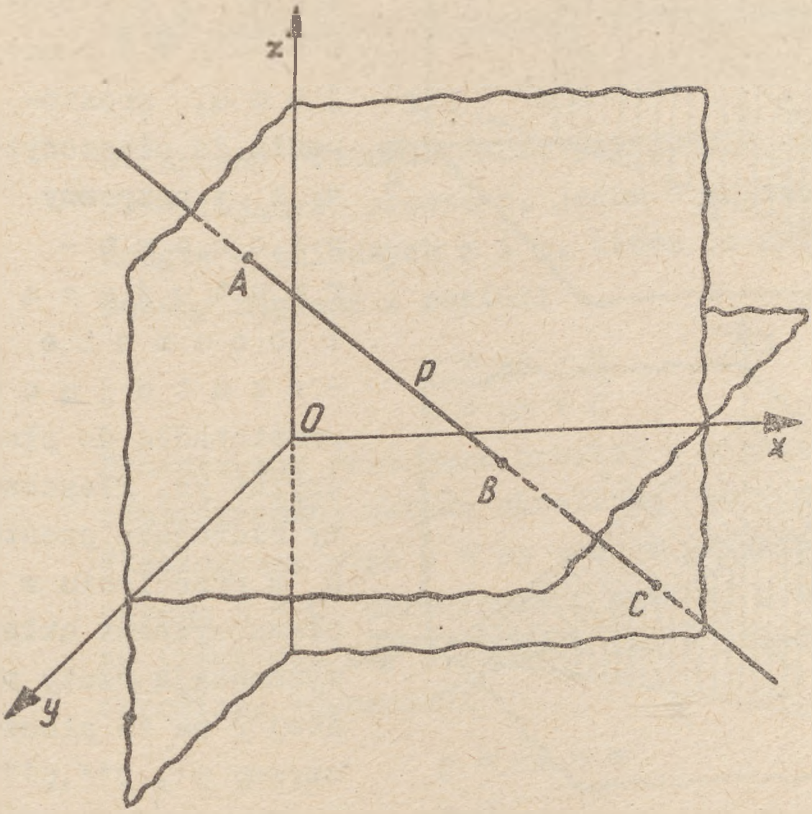
Wśród punktów prostej wyróżniamy punkty zwane śladami prostej. *Śladami prostej* nazywamy punkty przecięcia prostej z płaszczyznami układu współrzędnych. (rys.113).

Ponieważ ślady należą do płaszczyzn układu, więc jedna ze współrzędnych śladu jest znana, bo równa się zeru. Jeżeli ślad należy do płaszczyzny xy (ślad poziomy prostej), to współrzędna z = 0, jeżeli ślad należy do płaszczyzny yz (ślad boczny), to x = 0 i jeżeli ślad znajduje się na płaszczyźnie xz (ślad pionowy), to y = 0.

Chcąc więc wyznaczyć współrzędne jednego ze śladów prostej danej równaniami, za jedną ze zmiennych podstawiamy zero, a pozostałe współrzędne obliczamy na podstawie układu równań prostej.

Tak np. śladami prostej (3) są punkty

$$\left(-\frac{7}{9}, -\frac{23}{36}, 0\right), \left(0, \frac{3}{2}, 7\right), \left(-\frac{6}{11}, 0, \frac{23}{11}\right).$$



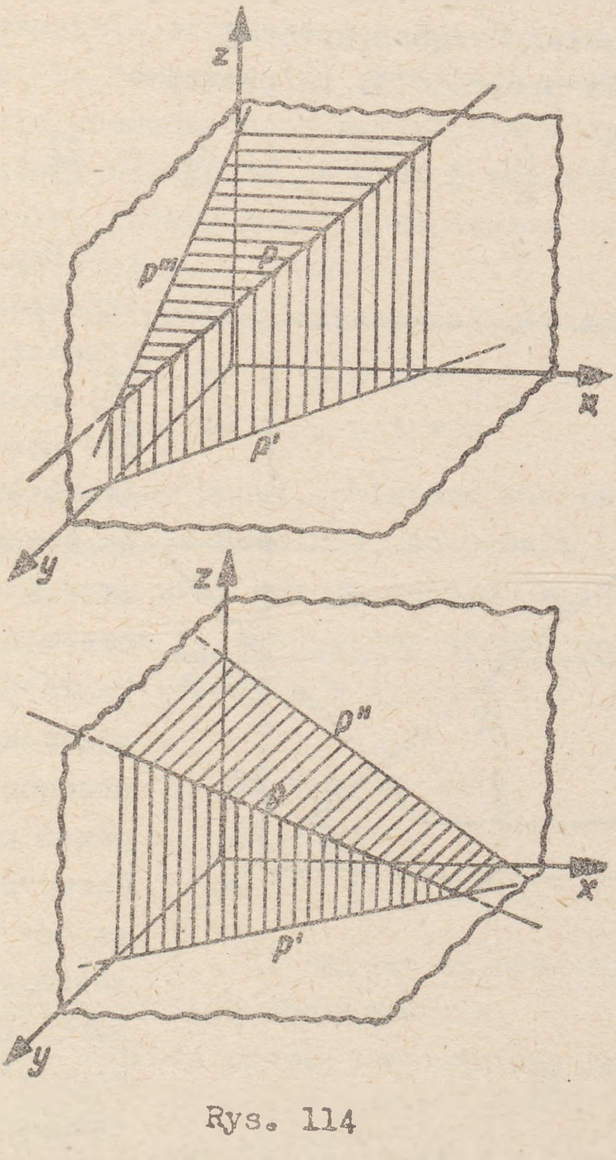
Rys. 113

Prostą p określoną płaszczyznami (2) można określić nieskończenie wieloma sposobami, ponieważ istnieje nieskończenie wiele par płaszczyzn przechodzących przez prostą p. Chcąc płaszczyzny (2) zastąpić inną parą płaszczyzn, korzystamy z równania pęku płaszczyzn

$$\lambda_1 W_1(x,y,z) + \lambda_2 W_2(x,y,z) = 0,$$

gdzie dobierając dowolne λ_1 i λ_2 tak, by $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, za każdym razem otrzymamy płaszczyznę przechodzącą przez prostą p.

Wśród płaszczyzn pęku, z których dwie zawsze określają prostą p, wyróżnimy p ł a s z c z y z n y r z u t u j ą c e. Płaszczyzną rzutującą prostej p nazywamy płaszczyznę przechodzącą przez prostą p i prostopadłą do jednej z trzech płaszczyzn układu (a więc równoległą do jednej z trzech osi układu (rys.11)).



Rys. 114

Prosta ma na ogół trzy różne płaszczyzny rzutujące - prostopadłą do płaszczyzny xy nazywamy p o z i o m o - r z u t u j ą c ą, prostopadłą do płaszczyzny z x nazywamy p i o n o w o - r z u t u j ą c ą i b o c z n i e - r z u t u j ą c ą, prostopadłą do płaszczyzny yz. Płaszczyzny rzutujące prostej p w przecięciu z płaszczyznami układu, wyznaczają rzuty prostej p na te płaszczyzny p', p'',p'''.

Płaszczyznę rzutującą wybieramy z pęku płaszczyzn, dobierając w równaniu pęku płaszczyzn λ_1 i λ_2 tak, by współczynnik przy jednej ze zmiennych był równy zeru.

Jeżeli chcemy prostą p, określoną płaszczyznami

$$W_1(x,y,z) \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$W_2(x,y,z) \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

wyrazić przy pomocy płaszczyzn rzutujących np. płaszczyzny poziomo - rzutującej (równoległej do osi z)

i pionowo - rzutującej (równoległej do osi y),
to przyjmujemy w równaniu pęku

$$\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 = 0$$

raz λ_1 i λ_2 tak, by współczynnik przy zmiennej z, czyli

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0,$$

drugi raz, by współczynnik przy y, czyli

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 = 0.$$

Otrzymamy równania dwóch płaszczyzn rzutujących określających prostą p, jedno o zmiennych x i y, drugie o zmiennych x i z, które po przekształceniu możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned} y &= ax + b, \\ z &= cx + d \end{aligned} \qquad (4)$$

Płaszczyzny rzutujące prostej p w przecięciu z płaszczyznami układu określają rzuty prostej p. Płaszczyzna więc $y = ax + b$ w przecięciu z płaszczyzną $z = 0$ określa rzut prostej p na płaszczyznę xy (rzut poziomy p'). Rzut ten w układzie Oxyz jest określony równaniami

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ z &= 0, \end{aligned}$$

w układzie Oxy - równaniem

$$y = ax + b.$$

Płaszczyzna $z = cx + d$ w przecięciu z płaszczyzną $y = 0$ określa rzut prostej p na płaszczyznę zx (rzut pionowy p''). Rzut ten w układzie Oxyz jest określony równaniami

$$\begin{aligned} z &= cx + d, \\ y &= 0, \end{aligned}$$

w układzie Oxz - równaniem

$$z = cx + d.$$

Przykład : Prosta p dana jest równaniami

$$5x + 8y - 3z + 9 = 0,$$

$$2x + 4y + z - 1 = 0 ;$$

określić prostą p płaszczyznami rzutującymi na płaszczyzny xy i xz układu współrzędnych oraz podać równania rzutów prostej p na te płaszczyzny układu.

Rozwiązanie: Równanie pęku płaszczyzn, przechodzących przez prostą p, ma postać

$$(5\lambda_1 + 2\lambda_2)x + (8\lambda_1 + 4\lambda_2)y + (-3\lambda_1 + \lambda_2)z + 9\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

Płaszczyzna rzutująca na płaszczyznę xy jest równoległa do osi z, wobec tego λ_1 i λ_2 przyjmujemy tak, by

$$-3\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

Przyjmując $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, otrzymujemy równanie płaszczyzny poziomo-rzutującej

$$11x + 20y + 6 = 0$$

Płaszczyzna pionowo - rzutująca jest równoległa do osi y, wobec tego λ_1 i λ_2 nadajemy wartości, spełniające związek

$$8\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$$

Przyjmując $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -2$, otrzymujemy równanie płaszczyzny pionowo - rzutującej:

$$x - 5z + 11 = 0.$$

Prostą więc p określają równania

$$11x + 20y + 6 = 0,$$
$$x - 5z + 11 = 0,$$

które możemy również napisać w postaci

$$y = -\frac{11}{20}x - \frac{3}{10},$$
$$z = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5},$$

Praktycznie rachunki, wyznaczające płaszczyzny rzutujące prostej p

$$\begin{array}{l|l|l|l} 5x + 8y - 3z + 9 = 0, & \cdot 1 & \cdot 1 & \cdot 2 \\ 2x + 4y + z - 1 = 0, & \cdot 3 & -2 & -5 \end{array}$$

przeprowadzamy następująco:

Chcąc uzyskać równanie płaszczyzny poziomo-rzutującej, rugujemy z danych równań zmienną z, mnożąc pierwsze równanie przez 1, drugie przez 3 i dodając równania stronami. Czynnik 1 spełnia rolę liczby λ_1, czynnik 3 - rolę liczby λ_2 z poprzednich rozważań.

Celem uzyskania płaszczyzny pionowo-rzutującej winniśmy wyrugować z danych równań zmienną y, mnożąc pierwsze równanie przez 1, drugie przez -2. Płaszczyznę bocznie - rzutującą otrzymamy z danych równań, rugując zmienną x, t.zn. mnożąc pierwsze równanie przez 2, a drugie przez -5.

Rzut poziomy prostej p w układzie Oxyz określają równania

$$y = -\frac{11}{20}x - \frac{3}{10}$$

$$z = 0,$$

w układzie płaskim Oxy równanie

$$y = -\frac{11}{20}x - \frac{3}{10}$$

Rzut pionowy prostej p w układzie Oxyz określają równania

$$z = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5},$$

$$y = 0,$$

w układzie płaskim Oxz równanie

$$z = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5},$$

3. Szczególne położenia prostej w przestrzeni.

1/ Jeżeli prosta p przechodzi przez początek układu (rys.115), to wyznaczają ją równania postaci

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0,$$

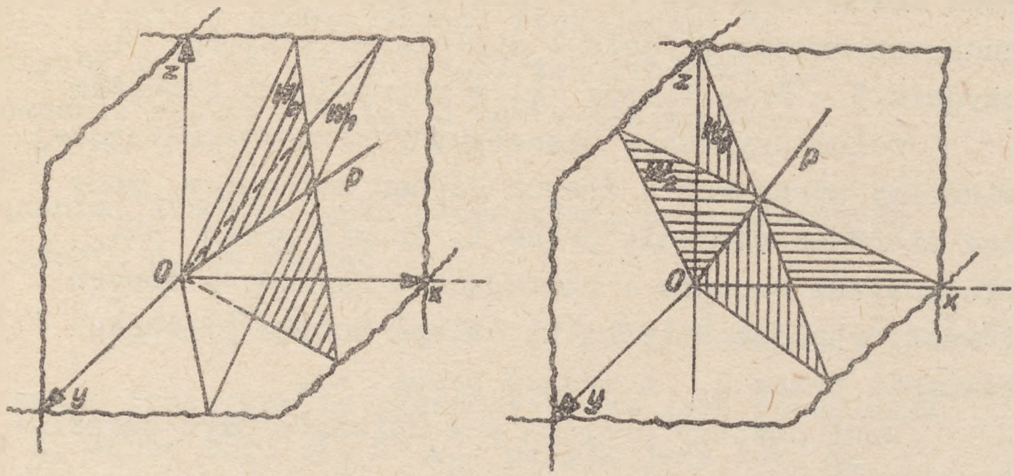
$$A_2x + B_2y + C_2z = 0$$

lub, jeżeli określimy ją przy pomocy płaszczyzn rzutujących, równania

$$z = m_1 y$$

$$x = m_2 y$$

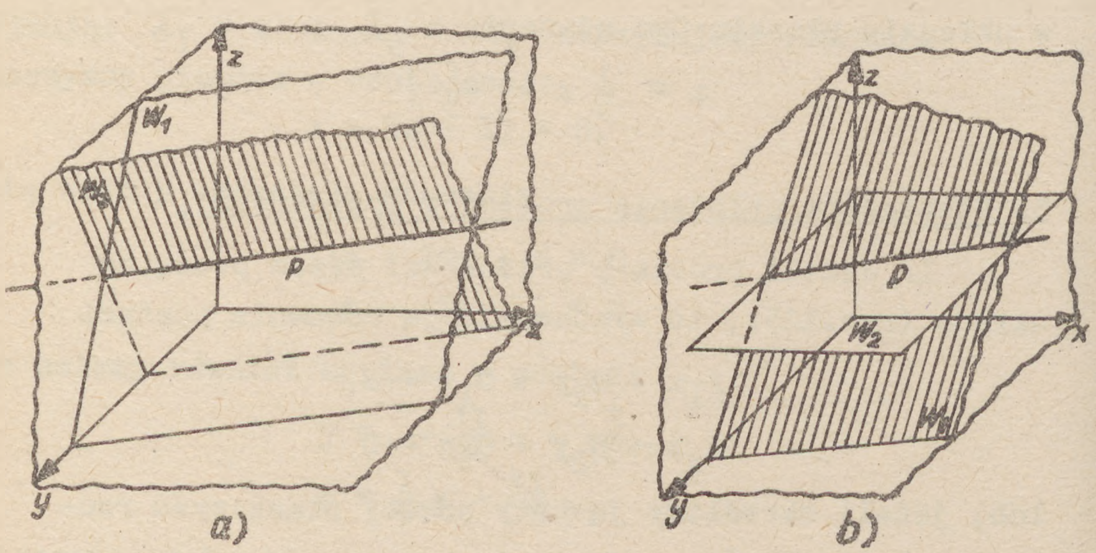
Współrzędne punktu O spełniają oba układy



Rys. 115

2) Jeżeli prosta p jest równoległa do jednej z płaszczyzn układu np. do płaszczyzny xy (116a), czyli gdy jest prostą poziomą, to wyznaczają ją równania postaci

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



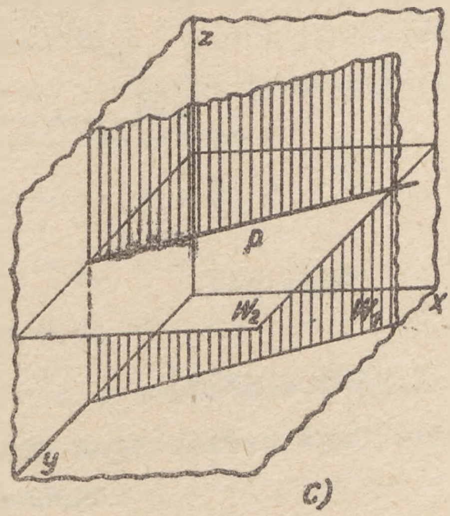
Rys. 116

lub, jeżeli drugą płaszczyznę zastąpimy płaszczyzną poziomą (rys. 116 b).

$$Ax + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$z = n$$

lub, jeżeli pierwszą płaszczyznę zastąpimy odpowiednio płaszczyzną rzutującą (rys. 116 c)

$$y = ax + b$$
$$z = n$$



Rys. 116 c

3) Jeżeli prosta p jest równoległa do jednej osi układu np. do osi x (rys. 117 a), to określają ją równania

$$B_1y + C_2z + D = 0$$
$$B_2y + C_2z + D = 0,$$

lub, jeżeli określimy ją przy pomocy płaszczyzn rzutujących (rys. 117 b)

$$z = a, \quad y = b;$$

W szczególności, jeżeli prosta p pokrywa się z osią x

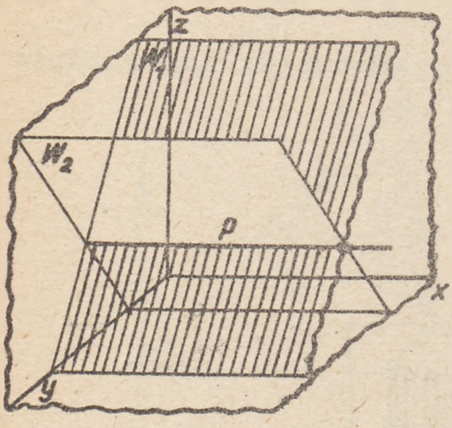
$$z = 0, \quad y = 0$$

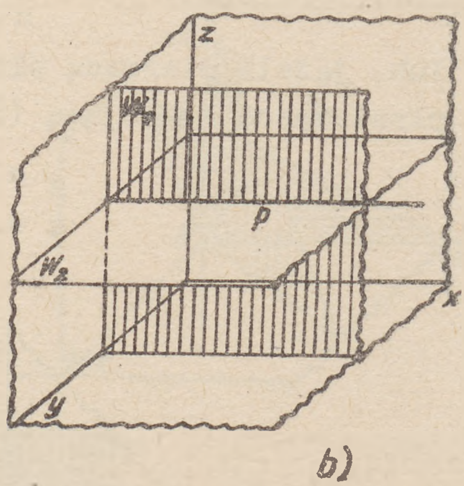
Analogicznie równaniami osi y są

$$x = 0, \quad z = 0,$$

zaś osi z

$$x = 0, \quad y = 0$$

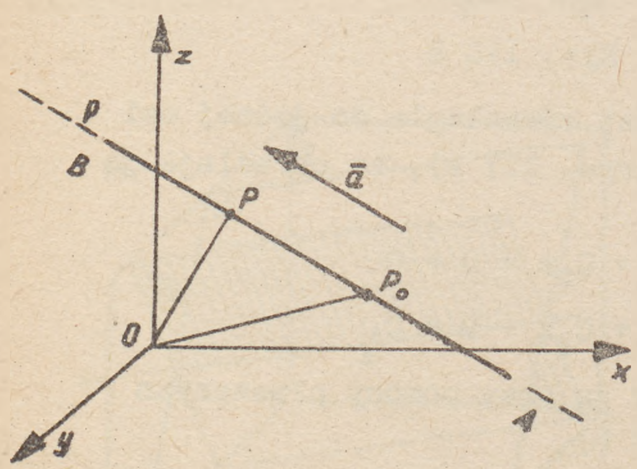




Rys. 117

4. Równania parametryczne prostej.

Niech w układzie Oxyz będzie dana prosta p, przechodząca przez punkt $P_0(x_0,y_0,z_0)$ i posiadająca kierunek wektora $\bar{a}$ $\{l,m,n\}$ (rys.118). Wykażemy, że prostą p określają równania parametryczne



Rys. 118

$$x = x_0 + l\,t,$$
$$y = y_0 + m\,t,$$
$$z = z_0 + n\,t$$

Niech punkt P(x,y,z) będzie dowolnym punktem prostej p, wtedy wektor $\overline{P_0P}$ jest kolinearny z wektorem $\bar{a}$. Przyjmując wektor $\bar{a}$ jako wektor podstawowy, znajdziemy zawsze liczbę t taką, że

$$\overline{P_0P} = t \cdot \bar{a}$$

i odwrotnie dla każdej liczby $t = t_1$ istnieje punkt P_1 na prostej p, że $t_1 \bar{a} = \overline{P_0P_1}$.
Wektor $\overline{OP}$ jest sumą wektorów $\overline{OP_0}$ i $\overline{P_0P}$, czyli

$$\overline{OP} = \overline{OP_0} + \overline{P_0P},$$

a dalej

$$\overline{OP} = \overline{OP_0} + \bar{a}\, t \tag{5}$$

Równanie to nazywamy równaniem wektorowym prostej p. Na podstawie twierdzenia o składowej sumy wektorów równanie (5) możemy zastąpić równoważnym przedstawieniem

$$x = x_0 + l\,t,$$

$$y = y_0 + m\,t,$$

$$z = z_0 + n\,t,$$

które nazywamy przedstawieniem parametrycznym prostej. Liczby l,m,n oraz liczby do nich proporcjonalne nazywamy współczynnikami kierunkowymi prostej w jej przedstawieniu parametrycznym.
Gdy parametr t przyjmuje wartości od $-\infty$ do $+\infty$, to punkt P przebiega prostą p w kierunku wskazanym przez wektor $\bar{a}$. Równania parametryczne określają prostą jako oś o zwrocie wektora $\bar{a}$. Dla $t < 0$ punkt P znajduje się na półprostej P_0A, dla $t = 0$ – w punkcie P_0, dla $t > 0$ – na półprostej P_0B (rys.118).

Jeżeli wektor $\bar{a}$ zastąpimy wektorem przeciwnym $-\bar{a}\,\{-l, -m, -n\}$, to równania

$$x = x_0 - l\,t$$

$$y = y_0 - m\,t$$

$$z = z_0 - n\,t$$

określają tę samą prostą jako oś, jednak o zwrocie przeciwnym niż poprzednio.

Podobnie jak na płaszczyźnie, można również w przestrzeni uważać przedstawienie parametryczne prostej za przedstawienie ruchu jednostajnego po tej prostej.

Jeżeli prosta p jest równoległa do jednej z płaszczyzn układu, ale nierównoległa do osi układu, to jej równania parametryczne mają postać:

$x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0$, gdy p jest równoległa do pł. xy,

$x=x_0+lt$, $y=y_0$, $z=z_0+nt$, " " " " " xz,

$x=x_0$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$, gdy " " " " yz,

Jeżeli prosta p jest równoległa do jednej z osi układu, to równania parametryczne przyjmują postać:

$x=x_0+lt$, $y=y_0$, $z=z_0$, gdy p jest równoległa do osi x,

$x=x_0$, $y=y_0+mt$, $z=z_0$, " " " " " " y,

$x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0+nt$, " " " " " " z,

5. Równania prostej w postaci kanonicznej.

Niech prosta p będzie dana równaniami parametrycznymi:

$$x = x_0 + l\,t,$$
$$y = y_0 + m\,t, \qquad (6)$$
$$z = z_0 + n\,t.$$

Jeżeli prosta p nie jest równoległa do żadnej z płaszczyzn układu współrzędnych, to $l \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$.

Rugując w tym przypadku t z równań (6), otrzymujemy proporcję

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \qquad (7)$$

którą nazywamy postacią k a n o n i c z n ą r ó w n a ń p r o s t e j.

Równania prostej w postaci kanonicznej są równaniami zwyczajnymi prostej, w których prostą określa się przy pomocy płaszczyzn rzutujących. Istotnie, związek (7) jest równoważny układowi równań

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m},$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n},$$

w którym równanie pierwsze przedstawia płaszczyznę równoległą do osi z (nie zawiera zmiennej z), równanie drugie - płaszczyznę równoległą do osi y.
W dotychczasowych rozważaniach założyliśmy, że wszystkie liczby l,m,n są różne od zera.
Gdyby np. $m = 0$, to równania parametryczne prostej miałyby postać

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0, \quad z = z_0 + nt$$

Rugując t z tych równań, otrzymamy równanie prostej w postaci kanonicznej

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$y = y_0$$

Gdyby $m = 0$ i $n = 0$, to równania kanoniczne prostej przyjęłyby postać:

$$y = y_0, \quad z = z_0$$

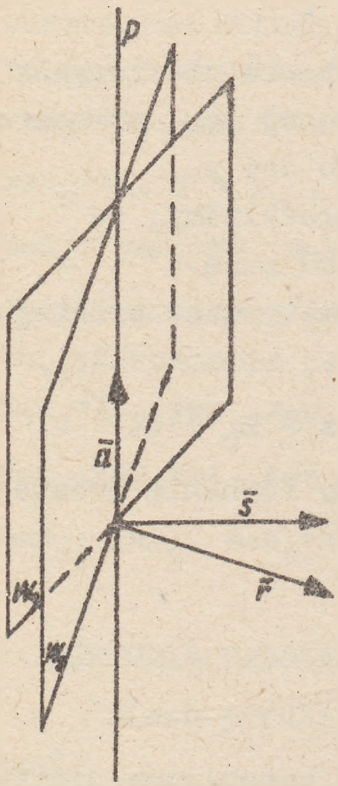
Znajdziemy związki między współczynnikami kierunkowymi l,m,n prostej p, występującymi w jej przedstawieniu parametrycznym i kanonicznym, a liczbami A,B,C w jej równaniach postaci

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Prosta p oraz wektor $\bar{a}\{l,m,n\}$ jako z nią kolinarny są prostopadłe do wektorów $\bar{r}\{A_1,B_1,C_1\}$, $\bar{s}\{A_2,B_2,C_2\}$ (rys.119), wobec tego wektor, który jest iloczynem wektorowym wektorów $\bar{r}$ i $\bar{s}$, czyli

$$\bar{r} \times \bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i}, & \bar{j}, & \bar{k} \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{vmatrix}$$

jest kolinearny z wektorem $\bar{a}$.



Rys. 119

Współrzędne więc wektora $\bar{r} \times \bar{s}$

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1, & A_1 \\ C_2, & A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

są proporcjonalne do współrzędnych wektora $\bar{a}$, czyli

$$l:m:n = \begin{vmatrix} B_1, C_1 \\ B_2, C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_1, A_1 \\ C_2, A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1, B_1 \\ A_2, B_2 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Przykład :
Mając prostą p określoną równaniami

$$5x + 8y - 3z + 9 = 0,$$
$$2x - 4y + z - 1 = 0$$

napisać jej równania w postaci parametrycznej i kanonicznej.
1 sposób: Obieramy dowolny punkt na prostej np.

$$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

Jako współczynniki kierunkowe prostej możemy przyjąć liczby równe wyznacznikom (7) lub liczby do nich proporcjonalne. Przyjmujemy

$$l = \begin{vmatrix} 8, -3 \\ -4, 1 \end{vmatrix} = -4, \quad m = \begin{vmatrix} -3, 5 \\ 1, 2 \end{vmatrix} = -11, \quad n = \begin{vmatrix} 5, & 8 \\ 2, & -4 \end{vmatrix} = -36,$$

Równaniami prostej w postaci parametrycznej są

$$x = -\frac{2}{3} - 4t,$$
$$y = -\frac{1}{3} - 11t,$$
$$z = 1 - 36t,$$

a w postaci kanonicznej

$$\frac{x + \frac{2}{3}}{4} = \frac{y + \frac{1}{3}}{11} = \frac{z - 1}{36}$$

2 sposób: Wyznaczamy dwie płaszczyzny rzutujące prostej p (str.209), otrzymując

$$y = -\frac{11}{20}x - \frac{3}{10},$$

$$z = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$$

Z równań tych wyznaczając x, otrzymujemy postać kanoniczną

$$\frac{x}{1} = \frac{y + \frac{3}{10}}{-\frac{11}{20}} = \frac{z - \frac{11}{5}}{\frac{1}{5}},$$

z której odczytujemy, że prosta p przechodzi przez punkt $P_0\ (0, -\frac{3}{10}, \frac{11}{5})$ i jest równoległa do wektora $\bar{a}\ \{1, -\frac{11}{20}, \frac{1}{5}\}$

Przyrównując stosunki występujące w postaci kanonicznej do t, otrzymamy równania parametryczne prostej:

$$x = t,$$

$$y = -\frac{3}{10} - \frac{11}{20}t,$$

$$z = \frac{11}{5} + \frac{1}{5}t,$$

6. <u>Równania prostej przechodzącej przez dwa punkty.</u>

Napisać równania prostej, przechodzącej przez punkty $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$.

Prostą możemy określić równaniami parametrycznymi, jest bowiem kolinearna z wektorem $\overline{AB}\ \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ i przechodzi przez dany punkt, za który możemy przyjąć A lub B.

Otrzymujemy

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t,$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t, \qquad (9)$$

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)\,t,$$

Rugując t z równań parametrycznych, otrzymamy w przypadku $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$, postać kanoniczną równań prostej

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{10}$$

W przypadkach szczególnych, gdy wektor $\overline{AB}$ jest równoległy do jednej z płaszczyzn układu lub równoległy do jednej z osi układu współrzędnych, równania (10) przyjmą postać wymienioną w poprzednim ustępie.

7. <u>Kąt dwóch prostych</u>.

Niech proste p i p' będą określone równaniami

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt;$$
$$x = x_0' + l's, \quad y = y_0' + n's, \quad z = z_0' + n's.$$

Kąty jakie tworzą ze sobą wektory

$$\bar{a}\,\{l, m, n\} \quad i \quad \bar{a}'\,\{l', m', n'\}$$

są jednocześnie kątami prostych p i p'.
Wobec tego, oznaczając kąt dwóch prostych przez φ, mamy wzory:

$$\cos\varphi = \pm\frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}} \tag{11}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{\begin{vmatrix} m, & n \\ m', & n' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n, & l \\ n', & l' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l, & n \\ l', & m' \end{vmatrix}^2}{(l^2+m^2+n^2)\cdot(l'^2+m'^2+n'^2)} \tag{12}$$

Proste p i p' są prostopadłe, gdy $\cos\varphi = 0$, a równoległe, gdy $\sin\varphi = 0$,. Ze wzoru więc (11) wynika jako warunek prostopadłości prostych związek

$$ll' + mm' + nn' = 0, \tag{13}$$

a ze wzoru (12) jako warunek równoległości mamy

$$l = kl', \quad m = km', \quad n = kn', \quad \text{gdzie } k \neq 0$$

W przypadku, gdy $\bar{a}$ i $\bar{a}'$ nie są równoległe do żadnej z płaszczyzn układu warunek równoległości prostych możemy wyrazić proporcją

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} \tag{14}$$

8. <u>Wzajemne położenie prostych w przestrzeni.</u>

Niech będą dane proste p i p'

$$x = x_o + lt, \quad y = y_o + mt, \quad z = z_o + nt;$$

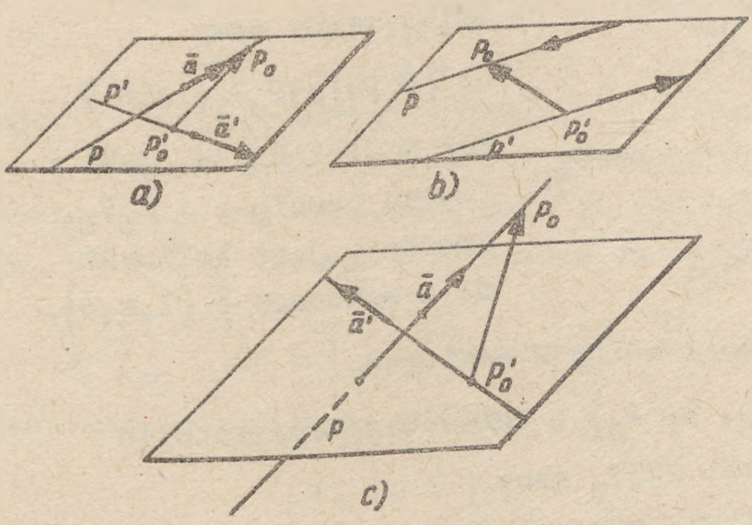
$$x = x_o' + l's, \quad y = y_o' + m's, \quad z = z_o' + n's.$$

1) Proste p i p' należą do jednej płaszczyzny, czyli przecinają się lub są do siebie równoległe, jeżeli wektory

$\bar{a}\{l,m,n\}$, $\bar{a}'\{l',m',n'\}$, $\overline{P_o'P_o}\{x_o-x_o', y_o-y_o', z_o-z_o'\}$

są komplanarne (rys.120 a i b), Na to zaś potrzeba i wystarcza (str. 66), by

$$\begin{vmatrix} l, & l', & x_o-x_o' \\ m, & m', & y_o-y_o' \\ n, & n', & z_o-z_o' \end{vmatrix} = 0$$



Rys. 120

Jeżeli proste p i p' przecinają się to istnieją takie dwie liczby t i s, że współrzędne punktu prostej p równe są współrzędnym punktu prostej p', czyli

$$x_o + lt = x_o' + l's,$$
$$y_o + mt = y_o' + m's,$$
$$z_o + nt = y_o' + n's.$$

Rozwiązując układ dwóch spośród tych trzech równań, otrzymamy parę s,t, która sprawdza również trzecie równanie.

2) Proste p i p' nie należą do jednej płaszczyzny, czyli są prostymi skośnymi, jeżeli wektory $\bar{a}$, $\bar{a}'$ $P_0'P_0$ nie są komplanarne (rys. 120 c) i odwrotnie. Warunkiem więc koniecznym i dostatecznym, by proste były skośne jest

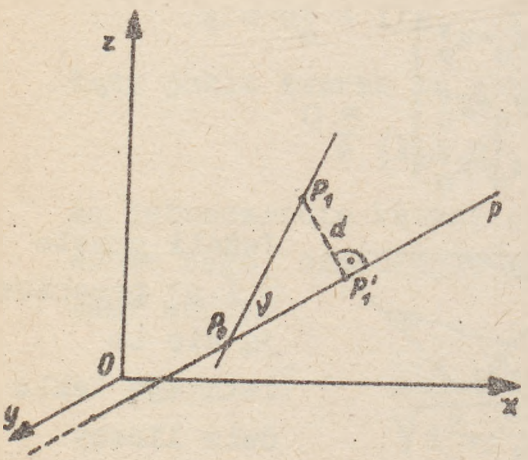
$$\begin{vmatrix} l, & l', & x_0-x_0' \\ m, & m', & y_0-y_0' \\ n, & n', & z_0-z_0' \end{vmatrix} \neq 0$$

9. Odległość punktu od prostej.

Mając prostą p, określoną równaniami

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt$$

oraz punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$, wyznaczymy odległość punktu P_1 od prostej p.



Rys. 121

Oznaczmy punkt (x_0, y_0, z_0) należący do prostej p przez P_0, a rzut prostokątny punktu P_1 na prostą p przez P_1' (rys. 121), wtedy mamy

$$d=|P_1P_1'|=|P_0P_1|\sin\gamma$$

Kąt γ jest kątem, jaki tworzą proste p i P_0P_1. Prosta p jest kolinearna z wektorem $\bar{a}\{l, m, n\}$, prosta P_0P_1 jest kolinearna z wektorem $\overline{P_0P_1}\{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}$, wobec tego korzystając ze wzoru (12) (str. 222), mamy

$$|\sin\gamma| = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0, & m \\ z_1-z_0, & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1-z_0, & n \\ x_1-x_0, & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0, & l \\ y_1-y_0, & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

a dalej, ponieważ

$$|P_0P_1|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2},$$

więc wzór wyrażający odległość punktu P_1 od prostej p przyjmuje postać:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0, & m \\ z_1-z_0, & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1-z_0, & n \\ x_1-x_0, & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0, & l \\ y_1-y_0, & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

10. Odległość dwóch prostych skośnych.

Niech będą dane dwie proste skośne p i p' :

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$\frac{x-x_0'}{l'} = \frac{y-y_0'}{m'} = \frac{z-z_0'}{n'}$$

Prowadzimy przez początek układu współrzędnych płaszczyznę ε równoległą do prostych p i p'. Płaszczyznę tę wyznaczają punkt O(0,0,0) i wektory $\bar{a}\{l,m,n\}$, $\bar{a}'\{l',m',n'\}$, wobec tego możemy ją określić równaniami parametrycznymi (str.202)

$$x = l\,u + l'\,v$$
$$y = m\,u + m'\,v$$
$$z = n\,u + n'\,v$$

Rugując z tych równań parametry u i v t.zn. wyrażając u i v np. z dwóch pierwszych równań przez x i y i podstawiając uzyskane wyrażenia do równania trzeciego, otrzymamy równanie zwyczajne płaszczyzny

$$z\begin{vmatrix} l, & l' \\ m, & m' \end{vmatrix} = n\begin{vmatrix} x & l' \\ y & m' \end{vmatrix} + n'\begin{vmatrix} l, & x \\ m, & y \end{vmatrix},$$

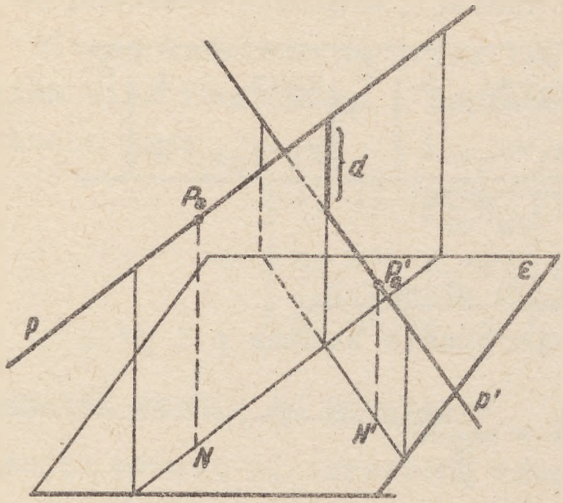
któremu możemy też nadać postać

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ l, & m, & n \\ l', & m', & n' \end{vmatrix} = 0$$

lub postać normalną

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ l, & m, & n \\ l', & m', & n' \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie $A = mn' - m'n$, $B = nl' - n'l$, $C = lm' - l'm$.



Rys. 122

1/ Jeżeli punkty $P_0(x_0, y_0, z_0)$, należący do prostej p i $P'_0(x'_0, y'_0, z'_0)$, należący do prostej p', leżą po jednej stronie płaszczyzny ε (rys. 122), to odległości względne tych punktów od płaszczyzny ε, mają ten sam znak i odległość d prostych skośnych wyraża się

$$d = |NP_0 - N'P'_0|$$

2) Jeżeli punkty P_0 i P'_0 leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny, to ich odległości względne od płaszczyzny ε różnią się znakami i wtedy

$$d = |NP_0| + |N'P'_0| = |NP_0 - N'P'_0|$$

W obu więc przypadkach odległość prostych skośnych równa się bezwzględnej wartości różnicy odległości względnych punktów, należących do tych prostych od płaszczyzny ε.

Ponieważ

$$NP_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \begin{vmatrix} x_0, y_0, z_0 \\ l, m, n \\ l', m', n' \end{vmatrix}, \text{ a } N'P'_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \begin{vmatrix} x'_0, y'_0, z'_0 \\ l, m, n \\ l', m', n' \end{vmatrix}$$

więc

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \left| \begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0 \\ l, & m, & n \\ l', & m', & n' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x'_0, & y'_0, & z'_0 \\ l, & m, & n \\ l', & m', & n' \end{vmatrix} \right| ,$$

czyli

$$d = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot \left\| \begin{matrix} x_0 - x_0', & y_0 - y_0', & z_0 - z_0' \\ l, & m, & n, \\ l', & m', & n' \end{matrix} \right\|$$

11. Położenie prostej względem płaszczyzny.

Niech będzie dana prosta p o równaniach

$$x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+nt \tag{15}$$

oraz płaszczyzna W

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Wyznaczymy punkty wspólne prostej p z płaszczyzną W. Prosta p posiada punkt wspólny z płaszczyzną W, jeżeli istnieje taka wartość t, że punkt prostej p o współrzędnych $x_0 + lt$, $y_0 + mt$, $z_0 + nt$ spełnia równanie płaszczyzny, czyli jeżeli

$$A(x_0+lt)+B(y_0+mt) + C(z_0+nt) + D = 0$$

lub

$$(Al + Bm + Cn)\, t = - (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) \tag{16}$$

Przy rozwiązywaniu tego równania mogą zajść trzy przypadki:

1) Jeżeli $Al+Bm+Cn \neq 0$, to istnieje tylko jedno rozwiązanie równania (16), mianowicie

$$t = - \frac{Ax_0+By_0+Cz+D}{Al + Bm + Cn},$$

a to znaczy, że istnieje tylko jeden punkt prostej p o współrzędnych $x_0 + lt$, $y_0 + mt$, $z_0 + nt$, który jest jednocześnie punktem płaszczyzny W. W tym więc przypadku prosta p przecina płaszczyznę W w jednym punkcie.

2) Jeżeli $Al+Bm+Cn=0$ a $Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$, to równanie (16) nie posiada żadnego rozwiązania - jest sprzeczne. Prosta p nie ma z płaszczyzną W punktów wspólnych, czyli że prosta p jest równoległa do płaszczyzny W. Słuszne jest też tw. odwrotne.

Warunkiem więc koniecznym i dostatecznym równoległości prostej $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$

do płaszczyzny

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

jest, by

$$Al + Bm + Cn = 0$$

i

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \text{ x/}$$

3) Jeżeli $Al+Bm+Cn=0$ i $Ax_0+By_0+Cz_0+D = 0$, to równanie (16) jest nieoznaczone. Każda wartość t jest rozwiązaniem równania, czyli że każdy punkt prostej p spełnia równanie płaszczyzny W. Prosta p w tym przypadku leży w płaszczyźnie W. Słuszne jest również twierdzenie odwrotne. Zatem warunkiem koniecznym i dostatecznym przynależności prostej p do płaszczyzny W jest, by

$$Al + Bm + Cn = 0$$

i

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

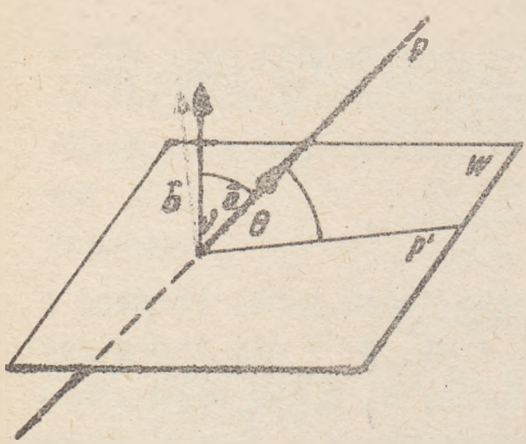
12. Kąt prostej z płaszczyzną.

Niech będzie dana płaszczyzna W o równaniu

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

i prosta p określona równaniami

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$



Rys. 123

Kątem prostej p /nie prostopadłej/ z płaszczyzną W nazywamy kąt tej prostej z jej rzutem prostokątnym p na płaszczyznę W (rys.123). Jeżeli kąt ten oznaczymy przez θ, zaś kąt wektora prostopadłego do płaszczyzny W przez v, to

x/ $Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0$, jeżeli punkt prostej p o współrzędnych (x_0,y_0,z_0) nie należy do płaszczyzny W.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi ,$$

a wtedy

$$\sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) = \cos \psi$$

i

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) = \sin \psi$$

Kąt ψ jest kątem między wektorami $\bar{a}\ \{l, m, n\}$ i $\bar{b}\ \{A, B, C\}$, wobec tego

$$\sin \theta = \cos \psi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$\cos \theta$ otrzymamy stosując wzór na $\sin \psi$ (str. 222).

Korzystając z tych wzorów możemy podać warunki równoległości i prostopadłości prostej p do płaszczyzny:

1/ Prosta p jest równoległa do płaszczyzny lub należy do niej, jeżeli

$$Al + Bm + Cn = 0,$$

przy czym, jeżeli $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, to prosta jest równoległa do płaszczyzny, a jeżeli

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

to prosta należy do płaszczyzny.

2/ Prosta p jest prostopadła do płaszczyzny W, gdy spełniona jest proporcja

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} .$$

ROZDZIAŁ IV

KRZYWE STOŻKOWE

§ 16. ELEMENTARNE WŁASNOSCI KRZYWYCH STOŻKOWYCH

1. Wyznaczanie miejsc geometrycznych.

Miejscem geometrycznym punktów, mających wspólną własność W, nazywamy zbiór punktów, który spełnia dwa warunki:

1° każdy punkt zbioru posiada własność W,

2° żaden punkt, nie należący do zbioru, nie posiada własności W.

Z nauki w szkole średniej znamy przykłady miejsc geometrycznych: okrąg jest miejscem geometrycznym punktów płaszczyzny jednakowo oddalonych od punktu stałego, symetralna odcinka jest miejscem geometrycznym punktów płaszczyzny jednakowo oddalonych od końców odcinka itd.

Metoda geometrii analitycznej nadaje się szczególnie do wyznaczania i badania miejsc geometrycznych.

W metodzie tej obieramy pewien dogodny układ współrzędnych i mając na uwadze daną własność geometryczną punktów należących do szukanego miejsca geometrycznego, staramy się przy zastosowaniu wzorów geometrii analitycznej i znanych twierdzeń, wyznaczyć związek między współrzędnymi x, y dowolnego punktu x/

x/ Taki punkt zmienny, należący do miejsca geometrycznego, nazywamy punktem bieżącym.

należącego do poszukiwanego miejsca geometrycznego w postaci równania $f(x,y)=0$. Mając związek $f(x,y)=0$, któremu czynią zadość współrzędne punktów należących do miejsca geometrycznego, staramy się z własności równania poznać własności geometryczne zbioru punktów stanowiących miejsce geometryczne.

Niekiedy przy wyznaczaniu związku między współrzędnymi punktu należącego do miejsca geometrycznego dogodnie jest posłużyć się zmienną pomocniczą, która odgrywa rolę parametru. Otrzymamy wtedy równania parametryczne miejsca geometrycznego, z których możemy przejść do równania zwyczajnego przez wyrugowanie parametru.

Sposoby postępowania przy wyznaczaniu miejsc geometrycznych metodą geometrii analitycznej zilustrujemy na przykładach.

Przykład 1. Znaleźć miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od dwóch danych punktów:

$$A\ (x_1, y_1)\ ,\quad B\ (x_2, y_2).$$

Rozwiązanie: Oznaczając przez $P(x,y)$ punkt należący do szukanego miejsca geometrycznego, mamy

$$|AP| = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}\ ,$$

$$|BP| = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$$

Punkt P jest równo oddalony od punktów A i B, więc

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \qquad (1)$$

Odwrotnie, każdy punkt, który spełnia otrzymany związek, należy do miejsca geometrycznego, jego bowiem odległości od punktów A i B są jednakowe. Związek (1) jest zatem równaniem szukanego miejsca geometrycznego. Pisząc równanie (1) w postaci

$$2(x_2-x_1)\,x+2(y_2-y_1)y = x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2$$

lub

$$y-\frac{y_2+y_1}{2} = -\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\left(x-\frac{x_2+x_1}{2}\right),$$

widzimy bezpośrednio, że miejscem geometrycznym jest symetralna odcinka AB.

Przykład 2. Znaleźć miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od dwóch prostych przecinających się p i p':

$$Ax + By + C = 0,$$

$$A'x+ B'y+ C'= 0$$

Rozwiązanie: Oznaczając przez $P(x,y)$ punkt należący do szukanego miejsca geometrycznego, mamy (rys.95):

$$NP = \frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{i} \quad N'P = \frac{A'x + B'y + C'}{\pm\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Punkt P jest jednakowo oddalony od prostych p i p, więc

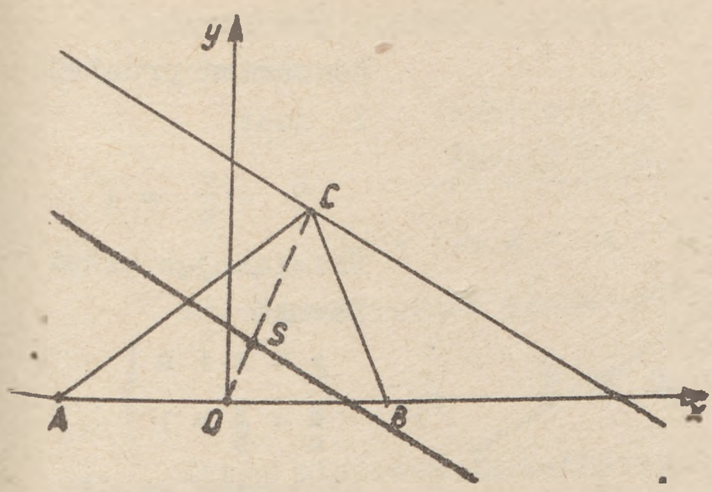
$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}},$$

co zgodne jest z wynikiem, uzyskanym na str. 149

Przykład 3. Wyznaczyć miejsce geometryczne środków ciężkości trójkątów o podstawie $|AB| = C$, których wierzchołki C leżą na prostej $y = mx + n$.

Rozwiązanie. Przyjmujemy prostokątny układ współrzędnych Oxy tak, że podstawa AB trójkąta leży na osi x, a oś y jest symetralną tej podstawy (rys.124).

Niech $S(x,y)$ będzie środkiem ciężkości dowolnego trójkąta o podstawie AB i wierzchołku C leżącym na danej



Rys. 124

prostej. Wtedy

$$\overline{OS} = \frac{1}{2}\,\overline{SC} \qquad (2)$$

i jeżeli współrzędne wierzchołka C oznaczymy przez ξ i η, to

$$x = \frac{1}{3}\xi, \quad y = \frac{1}{3}\eta.$$

Punkt C o współrzędnych

$$\xi = 3x \text{ i } \eta = 3y$$

leży na danej prostej i wobec tego jego współrzędne spełniają równanie tej prostej. Otrzymujemy równanie

$$3y = 3mx + n$$

lub

$$y = mx + \frac{n}{3},$$

które jest spełnione przez współrzędne środków ciężkości rozważanych trójkątów. Równanie to przedstawia prostą równoległą do prostej danej.

Odwrotnie, każdy punkt spełniający równanie znalezionej prostej, spełnia również warunek (2) i wobec tego prosta ta jest miejscem geometrycznym punktów S.

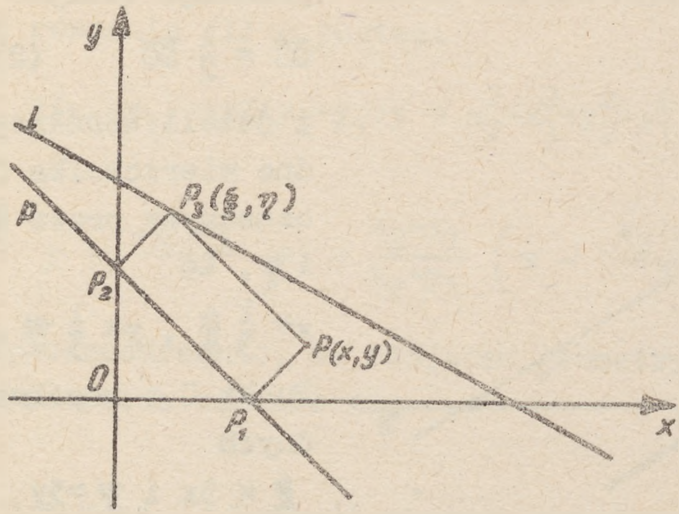
Przykład 4. Prosta p przemieszcza się równolegle w płaszczyźnie układu Oxy w ten sposób, że odkreśla na osiach układu równe odcinki OP_1 i OP_2. Przyjmując odcinek P_1P_2 jako bok prostokąta $P_1P_2P_3P$, którego wierzchołek P_3, w czasie ruchu prostej p, porusza się po prostej l określonej równaniem

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

wyznaczyć miejsce geometryczne czwartego wierzchołka P (rys.125).

Rozwiązanie: Jeżeli zmienną miarę odcinków OP_1 i OP_2

oznaczymy przez n, to równaniem prostej P_2P_3 jest



Rys. 125

$$y = x + n$$

Równaniem prostej l jest

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Rozwiązując układ równań

$$\left.\begin{array}{l} y = x + n \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{array}\right\},$$

otrzymamy współrzędne punktu $P_3(\xi, \eta)$. Otrzymujemy:

$$\xi = \frac{a(b-n)}{a+b}, \qquad \eta = \frac{b(a+n)}{a+b}$$

Punkt P jest punktem przecięcia się prostych P_3P i P_1P. Równaniem prostej P_3P, jako prostej przechodzącej przez punkt $P_3(\xi, \eta)$ i tworzącej z osią x kąt 135° jest

$$y - \frac{b(a+n)}{a+b} = -\left[x - \frac{a(b-n)}{a+b}\right]$$

Równaniem prostej P_1P jest

$$y = x - n$$

Rozwiązując układ równań, złożony z równań prostych P_3P i P_1P, otrzymamy współrzędne punktu $P(x,y)$. Otrzymujemy

$$x = \frac{b(a+n)}{a+b}, \qquad y = \frac{a(b-n)}{a+b}, \qquad (3)$$

gdzie n jest zmienne i zależy od położenia prostej p.

Odwrotnie, można wykazać, że dla każdego n punkt o współrzędnych (3) jest wierzchołkiem prostokąta określonego w temacie zadania.

Związki (3) są zatem parametrycznymi równaniami szukanego miejsca geometrycznego. Chcąc od równań parametrycznych miejsca geometrycznego, przejść do jego równania zwyczajnego, należy wyrugować parametr n. Przebieg rugowania parametru pokazuje poniższy rachunek:

$$\begin{array}{rl} (a+b)x = ab + nb & \Big| \cdot a \\ (a+b)y = ab - na & \Big| \cdot b \\ \hline \end{array}$$

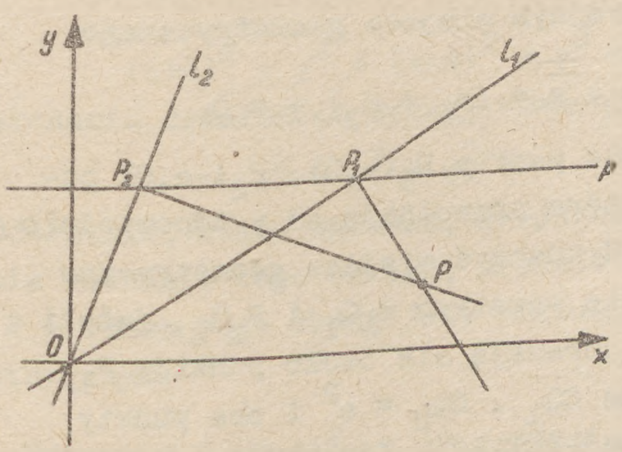
$$(a+b)a\,x + (a+b)by = a^2b + ab^2$$

Dzieląc stronami przez ab(a+b), otrzymujemy

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$$

Zatem miejscem geometrycznym wierzchołków P jest prosta odkreślająca na osiach układu odpowiednio odcinki o miarach b i a.

Przykład 5. Dane są dwie proste l_1 i l_2 o równaniach $y = m_1x$, $y = m_2x$ oraz ruchoma prosta p, równoległa do osi x, która przecina proste l_1 i l_2 odpowiednio w punktach P_1 i P_2. W punkcie P_1 poprowadzono prostopadłą do l_1, a w punkcie P_2 - prostopadłą do l_2(rys.126). Proste prostopadłe przecinają się w punkcie P. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktu P.



Rys. 126

Rozwiązanie. Niech równaniem prostej p będzie y=n, wtedy punkty P_1 i P_2 mają współrzędne:

$$P_1\left(\frac{n}{m_1}, n\right), \quad P_2\left(\frac{n}{m_2}, n\right)$$

Równaniami prostych P_1P i P_2P są:

$$y - n = -\frac{1}{m_1}(x - \frac{n}{m_1})$$

$$y - n = -\frac{1}{m_2}(x - \frac{n}{m_2})$$

Rozwiązując układ tych równań, otrzymamy współrzędne punktu $P(x,y)$.

Otrzymamy:

$$x = \frac{n(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}, \quad y = \frac{n(m_1 m_2 - 1)}{m_1 m_2} \qquad (4)$$

Odwrotnie, dla każdego n punkt o współrzędnych (4) jest punktem przecięcia się prostych P_1P i P_2P. Równania więc (4) przedstawiają parametrycznie miejsce geometryczne punktów P w zależności od n. Chcąc uzyskać równanie zwyczajne miejsca geometrycznego, wyrugujemy n z równań parametrycznych.

Przebieg rugowania jest następujący:

$$\begin{array}{l|l} m_1m_2\, x = n(m_1 + m_2) & \cdot\ -(m_1m_2 - 1) \\ m_1m_2\, y = n(m_1m_2-1) & \cdot\ (m_1 + m_2) \\ \hline \end{array}$$

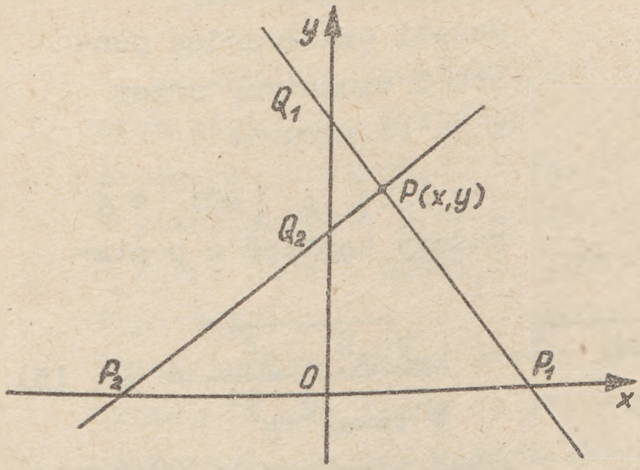
$$-m_1m_2(m_1m_2-1)x + m_1m_2(m_1+m_2)\,y = 0$$

Zatem równaniem zwyczajnym miejsca geometrycznego jest:

$$(1 - m_1m_2)\,x + (m_1 + m_2)\,y = 0.$$

Przykład 6. Przez punkty $P_1(a,0)$, $P_2(-a,0)$ poprowadzono proste, które przecinają oś y odpowiednio w punktach Q_1 i Q_2. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów przecięcia się prostych P_1Q_1 i P_2Q_2, jeżeli proste P_1Q_1 i P_2Q_2 obracają się około punktów P_1 i P_2 w ten sposób, że $OQ_1 \cdot OQ_2 = a^2$ i oba punkty Q_1 i Q_2 leżą na jednej półosi y (rys.127).

Rozwiązanie. Jeżeli miary odcinków, jakie proste P_1Q_1 i P_2Q_2 odkreślają na półosi y, oznaczymy odpowiednio przez n_1 i n_2, to równania prostych P_1Q_1, P_2Q_2, jako



Rys. 127

prostych przechodzących przez dwa punkty, możemy napisać w postaci:

$$y = -\frac{n_1}{a}(x - a),$$

$$y = \frac{n_2}{a}(x + a)$$

Ponieważ

$$OQ_1 \cdot OQ_2 = a^2,$$

czyli

$$n_1 \cdot n_2 = a^2,$$

więc

$$n_2 = \frac{a^2}{n_1}$$

Równaniu prostej P_2Q_2 możemy też nadać postać:

$$y = \frac{a}{n_1}(x + a)$$

Z porównania postaci równań prostych P_1Q_1 i P_2Q_2 wynika, że proste te są prostopadłe i wobec tego

$$|P_2P|^2 + |P_1P|^2 = |P_1P_2|^2$$

lub

$$(x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2 = 4a^2$$

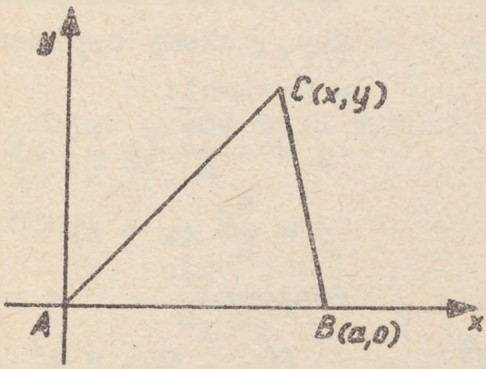
Po wykonaniu działań otrzymamy równanie okręgu

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Odwrotnie, można wykazać, że punkt, który spełnia równanie tego okręgu, posiada własność punktów P i wobec tego okrąg jest poszukiwanym miejscem geometrycznym.

Przykład 7. Podstawa AB trójkąta ABC ma długość a. Wierzchołek C trójkąta porusza się na płaszczyźnie w ten sposób, że $|AC| : |BC| = \lambda$,Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów C.

Rozwiązanie. Podstawę AB trójkąta umieszczamy na osi x tak, by wierzchołek A pokrył się z początkiem



Rys. 128

układu (rys. 128). Jeżeli współrzędne punktu C oznaczymy przez x,y, to warunek

$$|AC| : |BC| = \lambda$$

możemy zapisać w postaci

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = \lambda, \quad (5)$$

skąd otrzymujemy równanie

$$x^2+y^2 = \lambda^2\left[(x-a)^2+y^2\right]$$

lub

$$(1-\lambda^2)(x^2+y^2)+2a\lambda^2 x-a^2\lambda^2 = 0 \qquad (6)$$

Odwrotnie punkt, który spełnia równanie (6), spełnia również warunek (5).

1/ Niech $\lambda \neq 1$, wtedy przekształcając równanie (6), możemy je napisać kolejno w następujących postaciach:

$$x^2+y^2+2a\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}x - a^2\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} = 0,$$

$$x^2+2a\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}x+a^2\frac{\lambda^4}{(1-\lambda^2)^2}+y^2 = a^2\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}+a^2\frac{\lambda^4}{(1-\lambda^2)^2},$$

$$\left(x+a\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2+y^2 = a^2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}$$

W przypadku więc gdy $\lambda \neq 1$, to miejscem geometrycznym punktów C jest okrąg o środku

$$S\left(-a\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}, 0\right) \text{ i promieniu } r = a\frac{\lambda}{|1-\lambda^2|}.$$

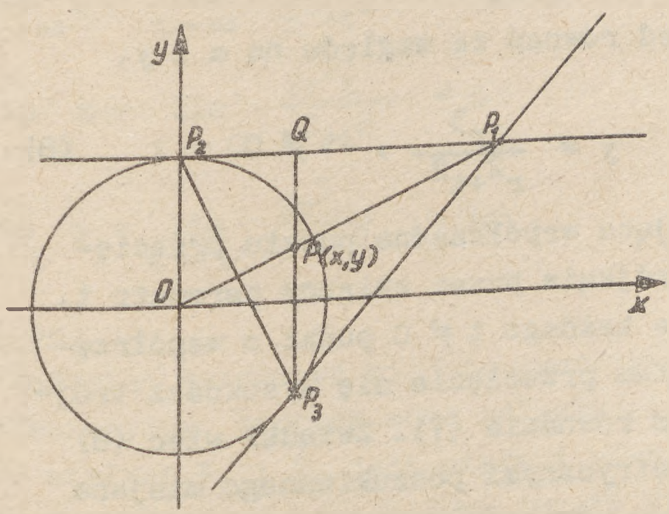
2/ Jeżeli $\lambda = 1$, czyli gdy trójkąt ABC jest równoramienny, to równanie (6) przyjmuje postać

$$x = \frac{a}{2}$$

i przedstawia prostą równoległą do osi y.

Przykład 8. Dany jest okrąg K o promieniu r oraz punkt P_1, z którego poprowadzono styczne do okręgu w punktach P_2 i P_3. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów przecięcia się wysokości trójkąta $P_1P_2P_3$, jeżeli punkt P_1 porusza się po jednej ze stycznych.

Rozwiązanie. Środek okręgu K umieszczamy w początku układu i jako jedną ze stycznych przyjmujemy prostą równoległą do osi x (rys.129). Niech punkt P_1 porusza się po tej stycznej. Jeżeli zmieniającą się odciętą punktu P_1 oznaczymy przez t, to punkt P_1 posiada współrzędne (t,r). Zmienna t jest różna od zera, bowiem dla t = 0 punkty P_1,P_2,P_3, pokrywają się i



Rys. 129

rozważany trójkąt nie istnieje. Punkt P(x,y) jest punktem przecięcia się prostej OP_1 i prostej P_3Q. Równaniem prostej OP_1 jest

$$y = \frac{r}{t} x$$

Prosta P_3Q jest równoległa do osi y, jej równanie otrzymamy, jeżeli wyznaczymy odciętą punktu P_3, tj. punktu przecięcia się biegunowej punktu P_1 względem okręgu K z okręgiem K. Równaniem biegunowej punktu P_1 jest

$$xt + yr = r^2$$

Wyznaczając x z układu

$$\left.\begin{aligned} xt + yr &= r^2 \\ x^2 + y^2 &= r^2 \end{aligned}\right],$$

otrzymujemy

$$x = \frac{2r^2 t}{r^2+t^2}$$

Punktem P jest więc punktem przecięcia prostych

$$\begin{aligned} y &= \frac{r}{t}\, x \\ x &= \frac{2r^2 t}{r^2+t^2} \end{aligned} \qquad (7)$$

Rozwiązując ten układ równań ze względu na x i y, otrzymujemy

$$x = \frac{2r^2\, t}{r^2+t^2}\,, \qquad y = \frac{2r^3}{r^2+t^2}\,, \quad t \neq 0 \qquad (8)$$

jako związki wyrażające współrzędne punktu przecięcia się wysokości trójkąta przez zmienny parametr t.

Odwrotnie, dla każdego $t \neq 0$ punkt o współrzędnych (8) jest punktem przecięcia się wysokości trójkąta, spełnia bowiem równania (7). Związki więc (8) są równaniami parametrycznymi poszukiwanego miejsca geometrycznego. Chcąc uzyskać równanie zwyczajne miejsca geometrycznego, rugujemy z równań (8) parametr t. Przebieg rugowania jest następujący:

Dzieląc stronami równania

$$\begin{aligned} y\,(r^2 + t^2) &= 2r^3 \\ x\,(r^2 + t^2) &= 2r^2 t, \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\frac{y}{x} = \frac{r}{t}\,,$$

skąd

$$t = \frac{rx}{y}$$

Podstawiając uzyskane wyrażenie na t do równania pierwszego, mamy

$$x^2 + y^2 - 2ry = 0$$

lub $$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

Szukanym więc miejscem geometrycznym jest okrąg. Z okręgu tego należy jednak wyłączyć punkty (0,0) i (0,2r); są to punkty do których zdąża punkt P (x,y), gdy t dąży do nieskończoności lub do zera.

Mamy mianowicie:

$$\lim_{t\to\infty} x = \lim_{t\to\infty} \frac{2r^2t}{r^2+t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{2r^2}{t}}{\frac{r^2}{t^2}+1} = 0,$$

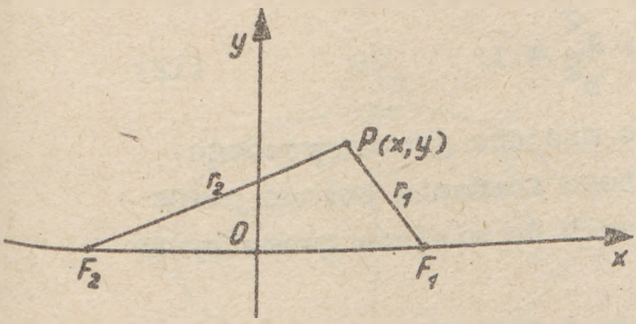
$$\lim_{t\to\infty} y = \lim_{t\to\infty} \frac{2r^3}{r^2+t^2} = 0,$$

$$\lim_{t\to 0} x = \lim_{t\to 0} \frac{2r^2t}{r^2+t^2} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} y = \lim_{t\to 0} \frac{2r^3}{r^2+t^2} = 2r$$

2. Elipsa.

Zadanie: Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, których suma odległości od dwóch punktów stałych F_1 i F_2 jest stała i równa się 2a. Jako oś x układu Oxy przyjmujemy prostą F_2F_1, nadając jej zwrot wektora $\overline{F_2F_1}$; jako oś y obieramy symetralną odcinka F_2F_1, przyjmując jeden z jej dwóch zwrotów jako zwrot dodatni (rys.130).



Rys. 130

Oznaczamy:

$|F_1P| = r_1$, $|F_2P| = r_2$,

$|F_2F_1| = 2c$

Jeżeli punkt P(x,y) należy do szukanego miejsca geometrycznego, to

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{10}$$

przy czym

$$2a > 2c,$$

ponieważ suma dwóch boków F_1P i PF_2 trójkąta $F_1P\,F_2$ jest większa od boku trzeciego F_2F_1.
Jeżeli punkt P nie należy do szukanego miejsca geometrycznego, to

$$r_1 + r_2 \neq 2a \tag{11}$$

Uwzględniając współrzędne punktów $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, $P(x,y)$, zapiszemy zależność (10) w postaci

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

otrzymując równanie, które spełniają punkty (x,y) należące do szukanego miejsca geometrycznego.
Równaniu temu nadajemy inną postać, przekształcając je następująco:

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx,$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Ponieważ $a > c$, więc $a^2 - c^2 > 0$ i wobec tego, by temu dać wyraz, oznaczamy $a^2 - c^2 = b^2$
Otrzymujemy

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

dzieląc stronami przez a^2b^2, mamy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{12}$$

jako równanie rozważanego miejsca geometrycznego.
Postaramy się z postaci tego równania poznać pewne własności punktów należących do miejsca geometrycznego

1/ Współrzędne punktów należących do miejsca geometrycznego. określonego równaniem (12), spełniają nierówności

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

lub

$$x^2-a^2 \leqslant 0 \quad i \quad y^2-b^2 \leqslant 0,$$

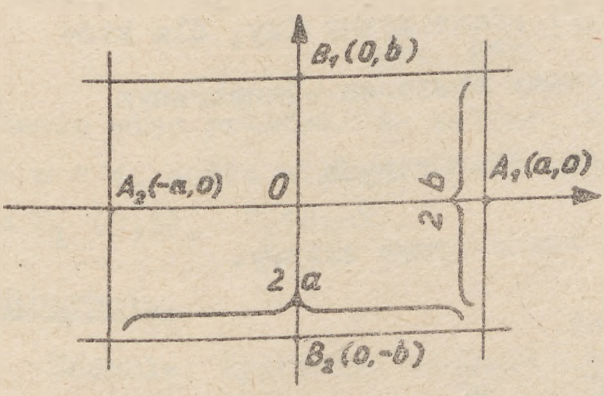
skąd $\quad -a \leqslant x \leqslant a \quad i \quad -b \leqslant y \leqslant b,$

a to znaczy, że punkty należące do badanego miejsca geometrycznego leżą w obszarze prostokąta o długości 2a i szerokości 2b (rys.131).

2) Jeżeli punkt (x_0, y_0) należy do miejsca geometrycznego, czyli jeżeli

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

to również punkty $(x_0, -y_0)$ oraz $(-x_0, y_0)$ należą do m.g, ich bowiem współrzędne spełniają równanie (12). Dla badanego więc miejsca geometr. oś x i oś y są osiami symetrii.

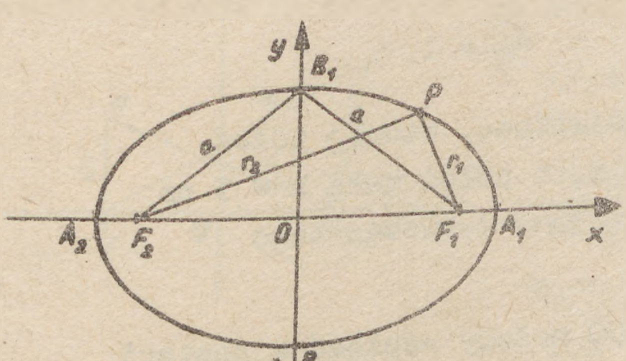


Rys. 131

3) Jeżeli punkt (x_0, y_0) należy do m.g, to również punkt $(-x_0, -y_0)$ należy do m.g, czyli że początek układu jest środkiem symetrii m.g.

Badane miejsce geometryczne nazywamy e l i p s ą.

Elipsa więc jest miejscem geom. punktów, których suma odległości od dwóch punktów stałych F_1 i F_2 zwanych o g n i s k a m i jest stała i równa się 2a.



Rys. 132

Odległość ognisk $F_1F_2 = 2c$ nazywamy ogniskową elipsy, odcinki r_1 i r_2 - promieniami wodzącymi punktu elipsy.

Punkt O, który jest środkiem symetrii, nazywamy środkiem elipsy, a każdą cięciwę pochodzącą przez środek elipsy - średnicą. Najdłuższą spośród średnic A_1A_2, której długość równa się 2 a, nazywamy osią wielką elipsy, najkrótszą średnicę B_1B_2 o długości 2b - osią małą. Punkty, w których osi elipsy przecinają elipsę, czyli punkty A_1, A_2, B_1, B_2, nazywamy wierzchołkami elipsy.

Zbiór punktów (x,y) płaszczyzny Oxy, dla których $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$, nazywamy obszarem wewnętrznym elipsy, zaś zbiór punktów, dla których $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$ - obszarem zewnętrznym elipsy.

Równanie elipsy w postaci

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nazywamy równaniem osiowym elipsy. Ogniska elipsy leżą na osi wielkiej. Jeżeli więc w równaniu (12) $a > b$, to ogniska leżą na osi x, jeżeli $b > a$, to na osi y (rys.133).

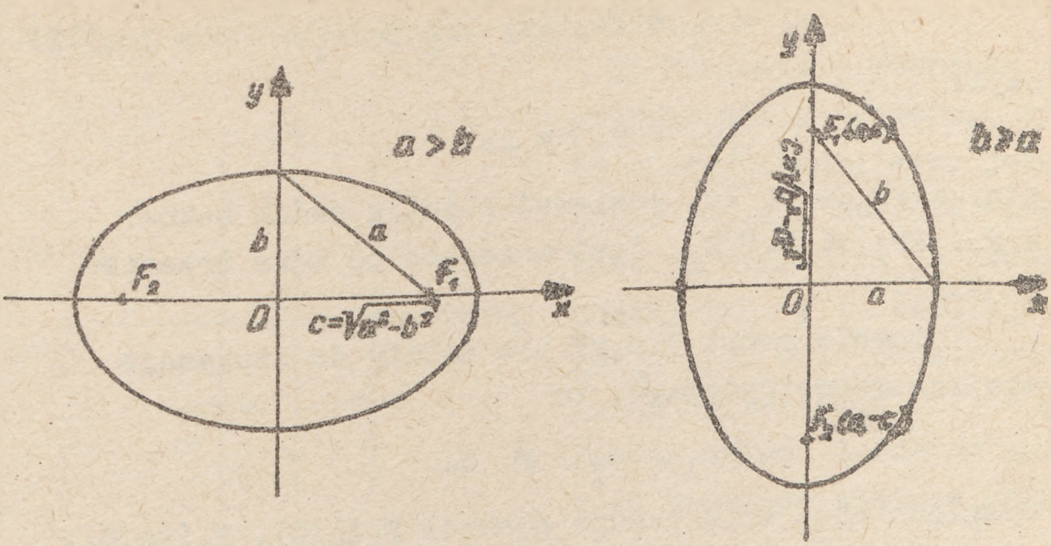
Tak np. równanie $9x^2 + 25y^2 = 225$ możemy napisać w postaci

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Równanie więc przedstawia elipsę, której półoś wielka a = 5 leży na osi x, a półoś mała b = 3 na osi y. Półogniskowa $c = \sqrt{25-9} = 4$, wobec tego $F_1(4,0)$, $F_2(-4,0)$.

Równanie $25x^2 + 16y^2 = 400$ możemy napisać w postaci

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1,$$



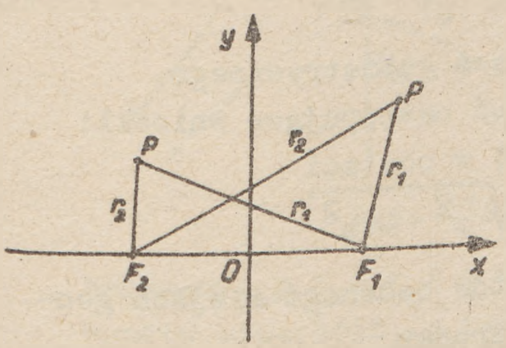
Rys. 133

Równanie więc przedstawia elipsę, której półoś mała a = 4, półoś wielka b = 5. Ogniska są w punktach F_1 (0,3), F_2(0,-3).

3. <u>Hiperbola.</u>

Zadanie: Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów płaszczyzny, których różnica odległości od dwóch punktów stałych F_1 i F_2 jest stała i równa 2 a.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie jako oś x układu Oxy przyjmujemy oś F_2F_1, jako oś y- symetralną odcinka F_1F_2 (rys. 134).



Rys. 134

Oznaczamy:

$F_1P=r_1$, $F_2P=r_2$, $F_2F_1=2c$

Jeżeli punkt P (x,y) należy do szukanego miejsca geometrycznego, to

$r_1-r_2=2a$, gdy $r_1>r_2$ (13)

lub

$$r_2 - r_1 = 2a, \text{ gdy } r_2 > r_1, \tag{13}$$

czyli

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

przy czym $2a < 2c$, ponieważ różnica dwóch boków F_1P i PF_2 $\triangle F_1PF_2$ jest mniejsza od boku trzeciego F_2F_1.

Jeżeli punkt $P(x,y)$ nie należy do szukanego miejsca geometrycznego, to

$$|r_1 - r_2| \neq 2a$$

Uwzględniając współrzędne punktów $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, $P(x,y)$ zapiszemy zależności (13) w postaci

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a, \text{ gdy } r_1 > r_2$$

lub

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a, \text{ gdy } r_2 > r_1$$

Przekształcając te dwa równania, podobnie jak w przykładzie poprzednim, otrzymujemy jedno równanie równoważne obu w postaci

$$(c^2 - a^2)\, x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Ponieważ $c^2 - a^2 > 0$, oznaczamy $c^2 - a^2 = b^2$ i otrzymujemy

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dzieląc stronami przez a^2b^2, mamy

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{14}$$

jako równanie szukanego miejsca geometrycznego.

Z równania tego możemy wysunąć następujące wnioski:

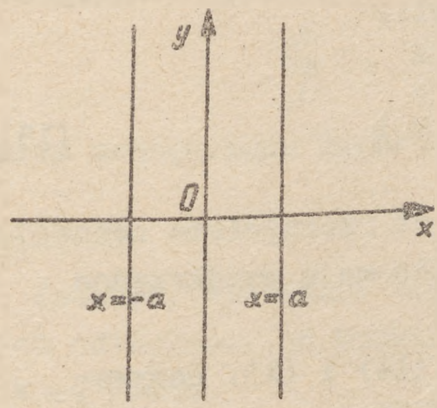
1) Pisząc równanie (14) w postaci

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

stwierdzamy, że odcięte punktów badanego miejsca geometrycznego winny spełniać warunek

$$x^2 - a^2 \geqslant 0,$$

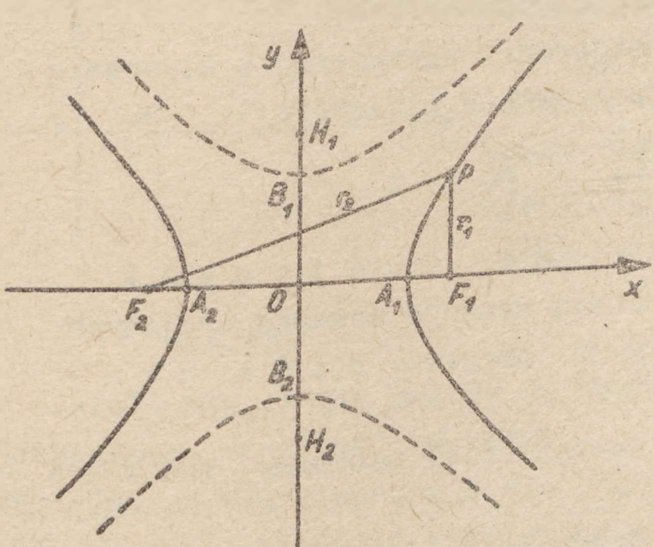
czyli $x \leqslant -a$ lub $x \geqslant a$. Z tego wynika, że punkty należące do m.g. leżą poza pasem ograniczonym prostymi $x = -a$ i $x = a$ (rys. 135).



Rys. 135

2) Ponieważ w równaniu (14) zmienne x i y występują tylko w kwadratach, więc jeżeli punkt (x_0, y_0) spełnia równanie, to spełniają je również punkty $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, y_0)$, $(-x_0, -y_0)$. Osie układu są zatem osiami symetrii, a początek układu środkiem symetrii badanego miejsca geometrycznego.

Miejsce geometryczne określone równaniem (14) nazywamy h i p e r b o l ą.
Hiperbola więc jest miejscem geometrycznym punktów płaszczyzny, których różnica odległości od dwóch punktów stałych F_1 i F_2, zwanych o g n i s k a m i, jest stała i równa się 2a (rys. 136).



Rys. 136

Odległość ognisk $F_1F_2 = 2c$ nazywamy o g n i s k o w ą h i p e r b o l i, przy czym z podstawienia dokonanego w trakcie przekształcenia równania hiperboli wynika, że $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ Odcinki r_1 i r_2 nazywamy p r o m i e n i a m i w o d z ą c y m i punktu hiperboli, a początek układu, który jest środkiem symetrii hiperboli - ś r o d k i e m h i p e r b o l i. Oś symetrii, która przechodzi przez ogniska, przecina hiperbolę w punktach $A_1(a,0)$ i $A_2(-a,0)$, zwanych

w i e r z c h o ł k a m i h i p e r b o l i.
Odcinek osi symetrii $A_1A_2=2a$ nazywamy osią r z e c z y w i s t ą hiperboli.
Równanie

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (15)$$

określa również hiperbolę, jej oś rzeczywista równa się 2b i leży na osi y, a ogniska mają współrzędne $H_1(0,c)$, $H_2(0,-c)$ (rys.136).
Hiperbole określone równaniami (14) i (15) nazywamy parą hiperbol sprzężonych. Mają one wspólny środek oraz równe co do długości i wzajemnie prostopadłe ogniskowe .
Cięciwy przechodzące przez środek hiperboli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nazywamy jej ś r e d n i c a m i r z e c z y w i s t y m i. Oś rzeczywista hiperboli A_1A_2 jest więc najkrótszą spośród średnic rzeczywistych.
Średnice rzeczywiste hiperboli sprzężonej z hiperbolą (14) czyli średnice rzeczywiste hiperboli

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

nazywamy ś r e d n i c a m i u r o j o n y m i hiperboli (14). Najkrótszą spośród średnic urojonych hiperboli, czyli $B_1B_2= 2b$ nazywamy o s i ą u r o j o n ą hiperboli.
Równanie hiperboli w postaci (14) nazywamy r ó w n a n i e m o s i o w y m.
Gdy a = b, hiperbolę nazywamy r ó w n o o s i o w ą.
Jej równanie osiowe ma postać

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Zbiór punktów (x,y) spełniających nierówność

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$$

nazywamy obszarem zewnętrznym, zbiór zaś punktów, spełniających warunek

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1,$$

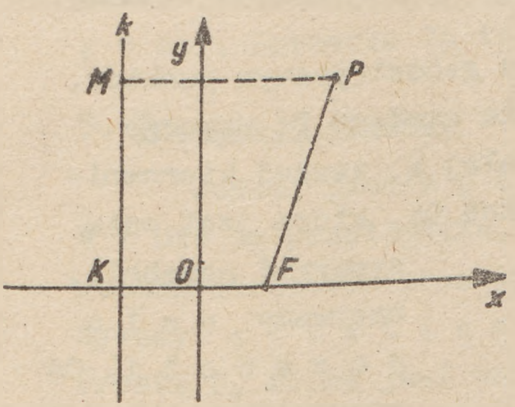
obszarem wewnętrznym hiperboli.

4. Parabola.

Zadanie. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów, których odległości od punktu stałego F i prostej stałej k są równe.

Mając prostą k oraz punkt F, oznaczemy odległość punktu F od prostej k przez p (rys. 137), czyli $|KF| = p$. Jako oś x przyjmujemy prostą określoną wektorem $\overrightarrow{KF}$, jako oś y - symetralną odcinka KF. W przyjętym układzie Oxy punkt F ma współrzędne $(\frac{p}{2}, 0)$, $K(-\frac{p}{2}, 0)$ i jeżeli punkt M jest rzutem punktu P(x,y) na prostą K, to $M(-\frac{p}{2}, y)$. Jeżeli punkt P(x,y) należy do szukanego miejsca geometrycznego, to

$$|MP| = |FP| \qquad (16)$$



Rys.137

Jeżeli P(x,y) nie należy do szukanego miejsca geometrycznego, to $|MP| \neq |FP|$.
Korzystając ze wzoru wyrażającego odległość dwóch punktów, możemy zależność (16) napisać w postaci

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$

otrzymując równanie rozważanego miejsca geometrycznego. Równanie to przekształcamy, uzyskując

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

a po redukcji

$$y^2 = 2px \qquad (17)$$

Z postaci tego równania wnioskujemy:

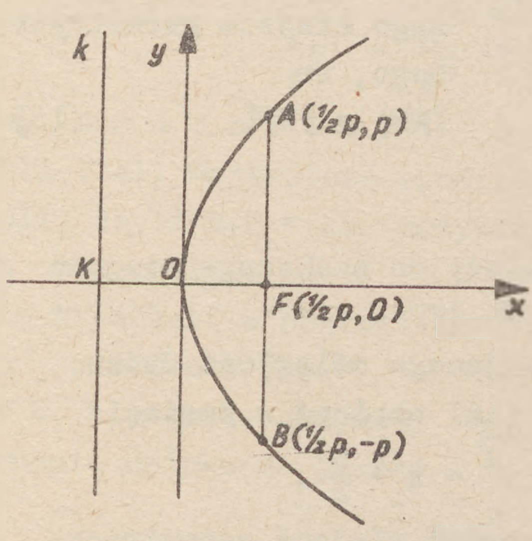
1) oś x jest osią symetrii miejsca geometrycznego, bowiem gdy punkt (x_0, y_0) spełnia równanie (17), to również punkt $(x_0, -y_0)$ spełnia to równanie,

2) Początek układu należy do miejsca geometrycznego bo punkt (0,0) spełnia równanie (17)

3) Jeżeli $p > 0$, to równanie spełniają punkty, których odcięte są nieujemne, czyli że punkty badanego m.g. znajdują się po stronie dodatniej półosi x; jeżeli $p < 0$, to równanie spełniają punkty, których $x \leqslant 0$, czyli że punkty m.g. leżą po stronie ujemnej półosi x.

Miejsce geometryczne określone równaniem (17) nazywamy p a r a b o l ą.

Parabola więc jest miejscem geometrycznym punktów, których odległości od punktu stałego F, zwanego ogniskiem, i od prostej stałej k, zwanej kierownicą, są równe (rys.138). Półoś Ox, która jest osią symetrii paraboli, nazywamy o s i ą p a r a b o l i. Oś paraboli ma zwrot dodatni osi x, jeżeli $p > 0$, zwrot przeciwny, gdy $p < 0$, Punkt O, w którym oś paraboli przecina parabolę, nazywamy w i e r z c h o ł k iem p a r a b o l i. Liczbę 2p nazywamy p a r a m e t r e m, a p p ó ł p a r a m e t r e m



Rys. 138

paraboli. Parametrowi $2p$ możemy nadać następującą interpretację geometryczną. Jeżeli obliczymy współrzędne punktów paraboli dla $x = \frac{p}{2}$, to otrzymamy $A(1/2\,p, p)$ i $B(1/2p, -p)$. Długość więc cięciwy paraboli, prostopadłej do osi i przechodzącej przez jej ognisko, równa się $2p$.

Równanie paraboli w postaci

$$y^2 = 2px$$

nazywamy równaniem wierzchołkowym paraboli.

Równanie

$$x^2 = 2py$$

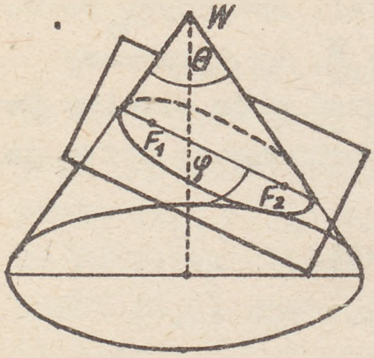
określa również parabolę, której oś pokrywa się z osią y. Z parabolą tą spotkaliśmy się już w szkole średniej przy wykreślaniu wykresu funkcji $y = ax^2$. Parametr $2p$ tej paraboli równa się $\frac{1}{a}$.

5. Przekroje stożka.

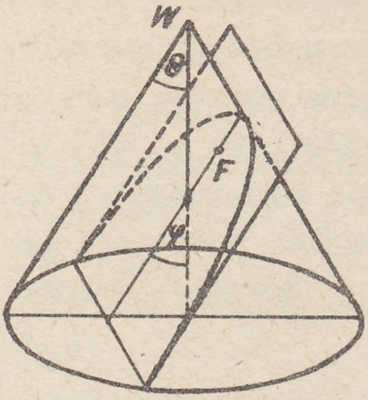
Jeżeli proste p i l przecinają się w punkcie W i nie są prostopadłe, to powierzchnię utworzoną ruchem obrotowem prostej l dookoła prostej p nazywamy stożkiem obrotowym. Prostą p, która jest osią obrotu, nazywamy osią stożka, a prostą l, która ruchem obrotowym zatoczyła powierzchnię stożka - tworzącą stożka. Punkt W(wierzchołek) dzieli powierzchnię na dwie części zwane powłokami stożka.

Jeżeli stożek przetniemy płaszczyzną σ, to linię przecięcia stożka i płaszczyzny nazywamy stożkową. Kształt stożkowej zależy od kąta φ, pod jakim płaszczyzna σ jest nachylona do osi p oraz od tego, czy płaszczyzna przechodzi, czy też nie przechodzi przez wierzchołek W.

Niech θ oznacza kąt tworzącej l z osią stożka.



Rys. 139



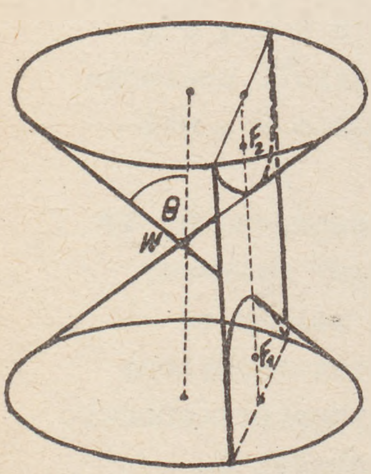
Rys. 140

Jeżeli płaszczyzna σ przechodzi przez W, to otrzymujemy w przecięciu:

1/ punkt W , gdy $\varphi > \theta$
2/ prostą, gdy $\varphi = \theta$
3/ dwie proste, gdy $\varphi < \theta$

Dowodzi się, że jeżeli płaszczyzna σ nie przechodzi przez W, to otrzymujemy jako przekroje:

1/ elipsę, gdy $\varphi > \theta$ (rys.139)
2/ parabolę, gdy $\varphi = \theta$ (rys.140)
3/ hiperbolę, gdy $\varphi < \theta$ (rys.141)



Rys.141

Przekroje stożka, uzyskane przy przecięciu płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek (punkt, prosta, dwie proste)nazywamy s t o ż k o w y m i n i e w ł a ś c i w y m i. Przekroje stożka uzyskane płaszczyzną nie przechodzącą przez wierzchołek stożka (elipsę,parabolę, hiperbolę) nazywamy s t o ż k o w y m i w ł a ś c i w y m i lub k r z y w y m i s t o ż k o w y m i.

§ 17. RÓWNANIA KRZYWYCH STOŻKOWYCH W PROSTYCH POŁOŻENIACH WZGLĘDEM UKŁADU

1. Równanie osiowe elipsy.

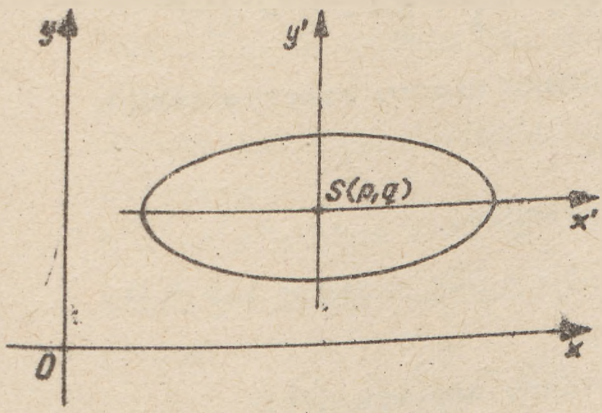
Wyprowadzając na stronie 244 równanie miejsca geometrycznego punktów, których suma odległości od dwóch punktów stałych F_1 i F_2 jest stała i równa się 2a, otrzymaliśmy równanie elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Środek elipsy określonej tym równaniem znajduje się w początku układu współrzędnych, a osie elipsy 2a i 2b leżą na osiach układu współrzędnych. Równanie elipsy w postaci (1) nazwaliśmy równaniem osiowym elipsy.

Wykażemy, że jeżeli współrzędne środka S elipsy równe są p i q, a osie elipsy 2a i 2b są równoległe do osi układu współrzędnych, to równaniem elipsy jest

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$



Rys. 142

Istotnie przesuwając równolegle układ Oxy do punktu S (rys.142) otrzymamy układ S x'y'. Równaniem elipsy w układzie S x'y' jest

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Korzystając ze związków

$$x = x' + p,$$
$$y = y' + q,$$

otrzymamy równanie (2).
Równanie (2) możemy przekształcić, otrzymując kolejno

$$b^2(x-p)^2 + a^2(y-q)^2 - a^2b^2 = 0,$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2px - 2a^2qy + b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2 = 0$$

lub, jeżeli współczynniki przy zmiennych x i y oraz wyraz wolny oznaczymy literami dużego alfabetu, to równanie elipsy możemy napisać w postaci

$$Ax^2 + By^2 + 2\,Cx + 2\,Dy + E = 0, \qquad (3)$$

gdzie $A \neq B$ oraz $A > 0$ i $B > 0$

Nie każde jednak równanie postaci (3), w którym $A \neq B$ i $A > 0$, $B > 0$, jest równaniem elipsy.
Sprowadzając bowiem równanie to do postaci (2), otrzymujemy

$$A\left(x^2+2\frac{C}{A}x + \frac{C^2}{A^2}\right) + B\left(y^2+2\,\frac{D}{B}\,y + \frac{D^2}{B^2}\right) + E - \frac{C^2}{A} - \frac{D^2}{B} = 0,$$

lub $$A\left(x+\frac{C}{A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{B}\right)^2 = \frac{C^2}{A} + \frac{D^2}{B} - E, \qquad (4)$$

skąd wynika, że równanie (4) i równoważne mu równanie (3) przedstawiają

1° elipsę, gdy $\frac{C^2}{A} + \frac{D^2}{B} - E > 0$

2° punkt $\left(-\frac{C}{A}, -\frac{D}{A}\right)$, gdy $\frac{C^2}{A} + \frac{D^2}{B} - E = 0$,x/

3° nie przedstawiają żadnego utworu rzeczywistego, gdy $\frac{C^2}{A} + \frac{D^2}{B} - E < 0$.

Przykład. Zbadać, czy równanie

$$25x^2 + 9y^2 - 50x - 54y - 119 = 0$$

przedstawia elipsę.
Dane równanie przekształcamy następująco:

$$25(x^2 - 2x+1) + 9(y^2-6y+9) - 119 - 25 - 81 = 0,$$

---

x/ tylko punkt $\left(-\frac{C}{A}, -\frac{D}{A}\right)$ spełnia równanie (4)

$$25(x-1)^2 + 9(y-3)^2 = 225,$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1.$$

Z ostatniej postaci równania wynika, że dane równanie przedstawia elipsę o środku $S(1,3)$, której osi $2a = 6$ i $2b = 10$ są równoległe do osi układu. Ogniska elipsy znajdują się na wielkiej osi elipsy, równoległej do osi y.

2. Równanie osiowe hiperboli.

Równaniem osiowym hiperboli (str.247), której środek S znajduje się w początku układu, oś rzeczywista $2a$ leży na osi x, a oś urojona $2b$ na osi y, jest równanie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Jeżeli środek S hiperboli ma współrzędne (p,q) i osi hiperboli są równoległe do osi układu Oxy, to równanie hiperboli ma postać

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

Równanie (5) wyprowadza się przesuwając równolegle układ Oxy do punktu $S(p,q)$, podobnie jak w przypadku elipsy.

Przekształcając równanie hiperboli w postaci (5), otrzymamy

$$b^2x^2-a^2y^2-2b^2px + 2a^2qy + b^2p^2 - a^2q^2 - a^2b^2 = 0,$$

które po nowym oznaczeniu współczynników przyjmie postać

$$Ax^2 - By^2 + 2Cx + 2Dy + F = 0, \tag{6}$$

gdzie $A > 0$, $B > 0$

Odwrotnie, jeżeli mamy dane równanie postaci (6), to możemy je przekształcić następująco:

$$A(x^2+2\frac{C}{A}x + \frac{C^2}{A^2}) - B(y^2-2\frac{D}{B}y + \frac{D^2}{B^2})+ \frac{C^2}{A} - \frac{D^2}{B} + F = 0$$

$$A(x + \frac{C}{A})^2 - B(y-\frac{D}{B})^2 = \frac{D^2}{B} - \frac{C^2}{A} - F$$

Z tej zaś postaci wynika, że jeżeli $\frac{D^2}{B} - \frac{C^2}{A} - F > 0$, to równanie przedstawia hiperbolę, której oś rzeczywista jest równoległa do osi x, gdy

$\frac{D^2}{B} - \frac{C^2}{A} - F < 0$ hiperbolę, której oś rzeczywista jest równoległa do osi y.

Jeżeli $\frac{D^2}{B} - \frac{C^2}{A} - F = 0$, czyli gdy rozważane równanie ma postać

$$A(x+ \frac{C}{A})^2 - B(y-\frac{D}{B})^2 = 0,$$

to możemy je dalej przedstawić w postaci

$$\left[\sqrt{A}(x + \frac{C}{A}) - \sqrt{B}(y-\frac{D}{B})\right]\left[\sqrt{A}(x+\frac{C}{A}) + \sqrt{B}(y- \frac{D}{B})\right] = 0,$$

skąd wynika, że równaniu czynią zadość punkty spełniające równanie

$$\sqrt{A}\,(x + \frac{C}{A}) - \sqrt{B}\,(y - \frac{D}{B}) = 0 \qquad (7)$$

lub

$$\sqrt{A}\,(x + \frac{C}{A}) + \sqrt{B}\,(y - \frac{D}{B}) = 0 \qquad (8)$$

czyli równanie przedstawia dwie proste (7) i (8).

Przykłady:

1. Mając równanie

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$$

przekształcamy je następująco:

$$9(x^2 -4x+4)- 16(y^2+2y+1) - 36 + 16 - 124 = 0,$$

$$9(x- 2)^2 - 16 (y + 1)^2 = 144,$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Z otrzymanej postaci równania wynika, że przedstawia hiperbolę o środku S(2, -1), której osi są równoległe do osi układu, przy czym oś rzeczywista $2a = 8$ jest równoległa do osi x.

2. Mając równanie

$$25x^2 - 4y^2 - 50x + 24y - 11 = 0,$$

możemy je kolejno napisać w następujących postaciach:

$$25(x^2-2x+1)-4(y^2-6y+9)-25+36-11=0,$$

$$25(x-1)^2-4(y-3)^2=0,$$

$$\left[5(x-1)-2(y-3)\right]\left[5(x-1)+2(y-3)\right]=0$$

Równanie dane spełniają więc punkty, które należą do prostej

$$5(x-1)-2(y-3)=0$$

oraz punkty prostej

$$5(x-1)+2(y-3)=0$$

Równanie dane przedstawia więc dwie proste.
Z postaci równań tych prostych wynika, że proste przechodzą przez punkt (1,3).

3. Równanie wierzchołkowe paraboli.

Równaniem wierzchołkowym paraboli (str.251), której wierzchołek znajduje się w początku układu, a oś paraboli pokrywa się z osią x, jest równanie

$$y^2=2px \tag{9}$$

Jeżeli wierzchołek paraboli znajduje się w początku układu, a oś pokrywa się z osią y, to parabolę określa równanie

$$x^2=2py \tag{10}$$

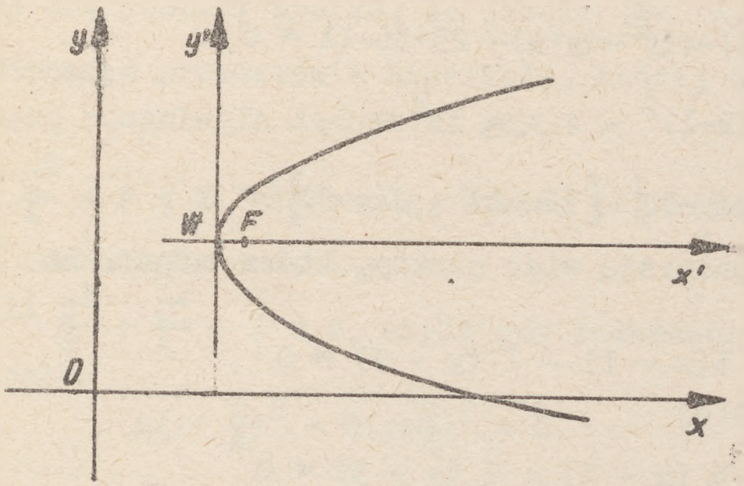
Wykażemy, że równaniem paraboli, której wierzchołek W ma współrzędne m i n, jest równanie

$$(y-n)^2=2p(x-m), \tag{11}$$

gdy oś paraboli jest równoległa do osi x, i równanie

$$(x-m)^2=2p(y-n), \tag{12}$$

gdy oś paraboli jest równoległa do osi y.
Niech będzie dana parabola o wierzchołku W(m,n), parametrze równym 2p i osi równoległej od osi x (rys.143). Przesuwając równolegle układ Oxy do punktu W(m,n), otrzymujemy układ W x' y'.
Równaniem paraboli w układzie W x'y' jest



Rys. 143

$y'^2 = 2px'$
Korzystając ze związków
$x = x' + m,$
$y = y' + n,$
otrzymamy równanie (11). Postępując analogicznie w przypadku, gdy oś paraboli jest równoległa do osi y, otrzymamy równanie (12).

Równanie paraboli w postaci

$$(y - n)^2 = 2p\,(x - m)$$

możemy przekształcić, uzyskując

$$y^2 - 2ny + n^2 = 2px - 2pm,$$

a dalej

$$y^2 - 2px - 2ny + n^2 + 2pm = 0$$

lub wprowadzając nowe oznaczenia współczynników występujących w równaniu, otrzymamy równanie paraboli w postaci

$$y^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0, \qquad (13)$$

gdzie $2C = -2p$ jest różne od zera.
Odwrotnie, mając równanie

$$y^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$$

w którym $C \neq 0$ możemy je kolejno przekształcić następująco:

$$y^2 + 2Dy + D^2 + 2Cx + E - D^2 = 0,$$

$$(y + D)^2 + 2C\left(x + \frac{E}{2C} - \frac{D^2}{2C}\right) = 0,$$

$$(y + D)^2 = -2C\left(x + \frac{E-D^2}{2C}\right)$$

z tej zaś postaci wynika, że równanie przedstawia parabolę, której oś jest równoległa do osi x. Rozpatrując podobnie równanie

$$x^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0,$$

w którym $D \neq 0$ stwierdzimy, że określa ono parabolę o osi równoległej do osi y.

Z równaniem paraboli w tej postaci spotkaliśmy się w szkole średniej przy omawianiu funkcji kwadratowej (trójmianu kwadratowego)

$$y = ax^2 + bx + C \qquad (14)$$

Jeżeli trójmian kwadratowy przedstawimy w postaci kanonicznej, to otrzymamy

$$y = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

a następnie

$$y = a\,(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

lub

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}\,(y + \frac{\Delta}{4a}),$$

skąd wynika, że równanie

$$y = ax^2 + bx + c$$

przedstawia parabolę o wierzchołku $W\,(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, parametrze $2p = \frac{1}{a}$ i osi równoległej do osi y.

Przykłady:

1. Mając równanie

$$y^2 - 8y + 6x + 28 = 0,$$

przekształcamy je następująco:

$$y^2 - 8y + 16 + 6x + 28 - 16 = 0,$$

$$(y - 4)^2 + 6x + 12 = 0,$$

$$(y - 4)^2 = -6\,(x + 2)$$

Dane równanie więc przedstawia parabolę o wierzchołku W(-2,4), parametrze $2p = -6$ i osi równoległej do osi x, o zwrocie przeciwnym do zwrotu dodatniego osi x.

2. Równanie

$$x^2 - 3x - 5y + 1 = 0$$

możemy napisać w postaci

$$(x - \frac{3}{2})^2 = 5\,(y + \frac{1}{4}),$$

skąd wynika, że równanie przedstawia parabolę o wierzchołku $W\,(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$, o osi równoległej do osi y i skierowanej zgodnie z jej zwrotem dodatnim.

§ 18. POŁOŻENIE PROSTEJ WZGLĘDEM KRZYWYCH STOŻKOWYCH

1. Elipsa a prosta.

Mając daną elipsę

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

oraz prostą l, znajdziemy punkty przecięcia elipsy z prostą l.

1°. Niech prosta l będzie określona równaniem

$$y = mx + n, \tag{2}$$

co znaczy, że prosta l nie jest równoległa do osi y.

Punkty wspólne elipsy i prostej spełniają jednocześnie równania obu linii, ich współrzędne otrzymamy rozwiązując układ równań

$$\left.\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 \\ y &= mx + n \end{aligned}\right\}$$

Rozwiązując układ, otrzymamy równanie

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0,$$

które ze względu na $a^2m^2 + b^2 \neq 0$ jest równaniem kwadratowym. Pierwiastki tego równania są odciętymi punktów przecięcia prostej z elipsą. Liczba pierwiastków równania, a przez to liczba punktów przecięcia prostej z elipsą zależy od wyróżnika

$$\Delta = 4a^4m^2n^2 - 4a^2(a^2m^2 + b^2)(n^2 - b^2) = 4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - n^2)$$

Zatem prosta (2) przecina elipsę (1) w dwóch punktach, w jednym lub w żadnym punkcie zależnie od tego, czy wyrażenie

$$a^2m^2 + b^2 - n^2$$

jest dodatnie, równe zeru, czy ujemne.

Prostą l w przypadku, gdy $a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$, nazywamy s t y c z n ą do e l i p s y.

2^o. Niech prosta l będzie określona równaniem

$$x = k,$$

co znaczy, że dana prosta jest równoległa do osi y.

Rozwiązując układ

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$x = k$$

otrzymamy równanie kwadratowe

$$a^2y^2 - b^2(a^2 - k^2) = 0,$$

którego liczba rozwiązań zależy od wyróżnika

$$\Delta = 4\, a^2b^2\, (a^2 - k^2)$$

Prosta więc l ma z elipsą:

1) 2 punkty wspólne, gdy $a^2 - k^2 > 0$, czyli gdy $-a < k < +a$

2) 1 punkt wspólny, gdy $a^2 - k^2 = 0$, czyli gdy $k = \pm a$.

Prosta l nie ma żadnego punktu wspólnego z elipsą, gdy $a^2 - k^2 < 0$, czyli gdy $k < -a$ lub $k > +a$.

W przypadku więc 2^o prosta l może względem elipsy zajmować podobne położenia jak w wypadku 1^o.

Proste $x = \pm a$ nazywamy stycznymi do elipsy.

2. <u>Hiperbola a prosta.</u>

Znajdziemy punkty przecięcia hiperboli

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

z prostą l.

1°. Niech prosta l będzie określona równaniem

$$y = mx$$

t.z. niech będzie prostą przechodzącą przez środek danej hiperboli.

Rozwiązując układ

$$\left.\begin{aligned} b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \\ y &= mx \end{aligned}\right\},$$

otrzymamy równanie

$$(b^2 - a^2m^2)\, x^2 = a^2b^2$$

Z postaci równania wynika, że

1/ gdy $b^2-a^2m^2 > 0$, czyli gdy $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$, to równanie posiada 2 różne pierwiastki; prosta więc przechodząca przez środek hiperboli przecina ją w dwóch różnych punktach

2/ gdy $b^2 - a^2m^2 < 0$, czyli gdy $m < -\frac{b}{a}$ lub $m > \frac{b}{a}$, to równanie nie posiada pierwiastków w zakresie liczb rzeczywistych, prosta więc l nie ma z hiperbolą żadnych punktów wspólnych.

3/ gdy $b^2-a^2m^2 = 0$, czyli gdy $m = +\frac{b}{a}$ lub $m = -\frac{b}{a}$, to równanie $0 \cdot x^2 = a^2b^2$ jest sprzeczne w zakresie wszystkich liczb i wobec tego proste $y = +\frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ nie mają z hiperbolą żadnych punktów wspólnych.

Równanie $y = mx$ nie obejmuje prostej przechodzącej przez środek hiperboli i pokrywającej się z osią y, czyli prostej $x = 0$. Łatwo sprawdzić, że ta prosta nie ma z hiperbolą punktów wspólnych.

Z rozważań więc wynika, że wśród prostych przechodzących przez środek hiperboli istnieją tylko proste, które mają z hiperbolą 2 różne punkty wspólne lub nie mają żadnego punktu wspólnego. Prostych przechodzących przez środek hiperboli i mających z hiperbolą tylko jeden punkt wspólny nie ma.

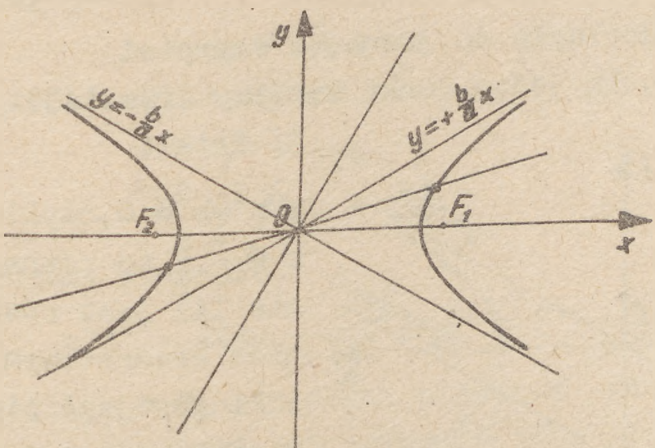
Prosta $y = mx$ ma z hiperbolą 2 punkty wspólne, jeżeli jej współczynnik kierunkowy m spełnia warunek $-\frac{b}{a} < m < +\frac{b}{a}$.

Prosta $y = mx$ nie ma z hiperbolą żadnych punktów wspólnych, jeżeli jej współczynnik kierunkowy spełnia warunek $m \leqslant -\frac{b}{a}$ lub $m \geqslant +\frac{b}{a}$.

Proste

$$y = +\frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x \tag{3}$$

rozdzielają wszystkie proste przechodzące przez środek hiperboli na dwie klasy. Do jednej klasy należą proste, które mają z hiperbolą 2 punkty wspólne (rys.144), do drugiej proste, które nie mają z hiperbolą żadnych punktów wspólnych. Same proste (3) należą do drugiej klasy.



Rys. 144

Proste

$$y = +\frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$$

nazywamy a s y m p t o t a m i h i p e r b o l i

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2^o. Niech prosta l będzie określona równaniem

$$y = mx + n$$

gdzie $n \neq 0$, t.zn. niech prosta l nie przechodzi przez środek hiperboli.

Rozwiązując układ

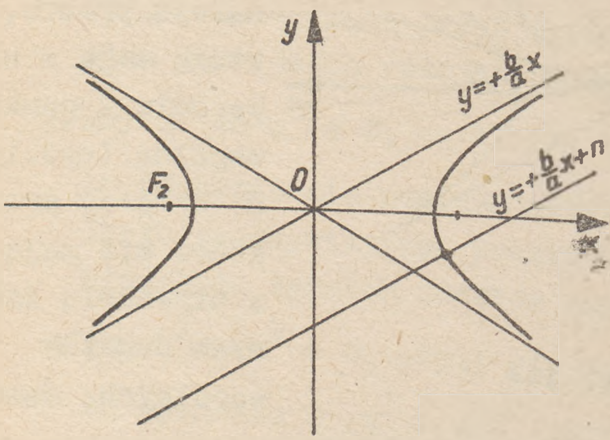
$$\left.\begin{aligned} b^2x^2-a^2y^2 &= a^2b^2 \\ y &= mx+n \end{aligned}\right\},$$

otrzymamy równanie

$$(a^2m^2-b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2+b^2) = 0 \qquad (4)$$

1/ Jeżeli $a^2m^2 - b^2 = 0$, czyli gdy $m = +\frac{b}{a}$ lub $m = -\frac{b}{a}$, to równanie (4) jest równaniem stopnia pierwszego i posiada zawsze jedno rozwiązanie. Prosta więc l posiada z hiperbolą tylko jeden punkt wspólny.

Zatem prosta równoległa do jednej z asymptot posiada z hiperbolą jeden punkt wspólny (rys.145).



Rys. 145

2/ Jeżeli $a^2m^2-b^2 \neq 0$, czyli gdy $m \neq \pm\frac{b}{a}$, to równanie (4) jest równaniem kwadratowym i liczba jego pierwiastków jest zależna od wyróżnika:

$$\Delta = 4a^4m^2n^2-4a^2(a^2m^2-b^2)(n^2+b^2)=4a^2b^2(n^2+b^2-a^2m^2)$$

Zatem prosta $y = mx + n$ nierównoległa do żadnej z asymptot przecina hiperbolę w dwóch punktach, w jednym lub w żadnym zależnie od tego, czy

$$a^2 + b^2 - a^2m^2$$

jest dodatnie, równe zeru, czy ujemne.

Prostą $y = mx + n$, nierównoległą do żadnej z asymptot i spełniającą warunek $n^2+b^2-a^2m^2 = 0$, nazywamy s t y c z n ą do h i p e r b o l i.

Należałoby jeszcze ropatrzyć przypadek, gdy prosta l jest równoległa do osi y t.zn.,gdy prosta l jest określona równaniem $x=k$. Łatwo stwierdzić, że w tym przypadku prosta l zależnie od k zajmuje względem hiperboli podobne położenia jak w przypadku 2)

W szczególności, gdy $x = -a$ lub $x = +a$ to prosta ma jeden punkt wspólny z hiperbolą.

3. Parabola a prosta.

Znajdziemy punkty przecięcia paraboli

$$y^2 = 2px$$

z prostą l

$$y = mx + n$$

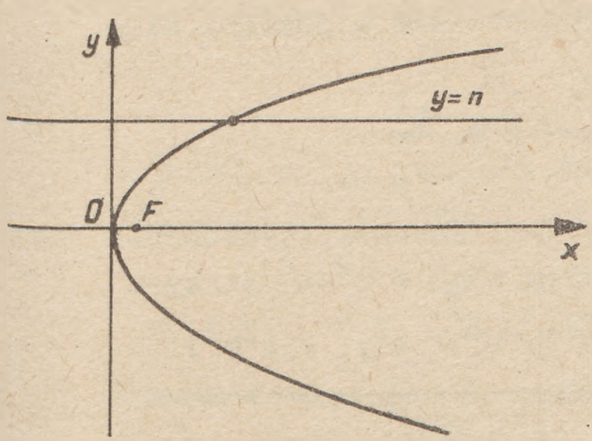
Rozwiązując układ równań

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ y &= mx + n \end{aligned}\right\},$$

otrzymujemy równanie

$$m^2x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0 \qquad (5)$$

1°. Jeżeli $m = 0$, czyli gdy prosta l jest równoległa do osi paraboli, to równanie (5), jako równanie pierwszego stopnia, posiada jedno rozwiązanie. Zatem prosta równoległa do osi paraboli ma z parabolą tylko jeden punkt wspólny (rys.146).



Rys. 146

2°. Jeżeli $m \neq 0$, to równanie (5) jest równaniem stopnia drugiego i liczba jego pierwiastków zależy od wyróżnika

$$\Delta = 4p(p-2mn)$$

Prosta nierównoległa do osi paraboli przecina parabolę w dwóch punktach, w jednym lub w żadnym zależnie od tego, czy

$$p\,(p - 2mn)$$

jest dodatnie, równe zeru lub ujemne. Prostą nierównoległą do osi paraboli, która ma z parabolą jeden punkt wspólny, nazywamy s t y c z n ą do p a r a b o l i.

Jeżeli prosta l jest równoległa do osi y, czyli gdy jest określona równaniem $x = k$, to łatwo się przekonać, że zajmuje wtedy podobne położenia względem paraboli jak w przypadku 2°. Prosta $x = k$ jest styczną do paraboli, gdy $k = 0$.

4. <u>Równanie stycznej do elipsy.</u>

Styczną do elipsy nazywamy prostą mającą z elipsą tylko jeden punkt wspólny.

Twierdzenie.

Jeżeli elipsa jest określona równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

i punkt (x_o, y_o) należy do elipsy, to równaniem stycznej do elipsy w tym punkcie jest

$$\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

Dowód: 1/ Zakładając, że $y_o \neq 0$, czyli że (x_o, y_o) nie jest żadnym z wierzchołków elipsy $(-a,0)$. $(a,0)$, możemy równanie prostej (6) napisać w postaci kierunkowej

$$y = -\frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}\,x + \frac{b^2}{y_o}$$

Dla prostej tej spełniony jest warunek styczności do elipsy, obliczając bowiem $a^2m^2 + b^2 - n^2$ otrzymamy

$$a^2 \cdot \frac{b^4}{a^4}\,\frac{x_o^2}{y_o^2} + b^2 - \frac{b^4}{y_o^2} = \frac{b^2(b^2x_o^2 + a^2y_o^2 - a^2b^2)}{a^2y_o^2}$$

Ponieważ punkt (x_o, y_o) należy do elipsy, więc $b^2x_o^2 + a^2y_o^2 = a^2b^2$, czyli $b^2x_o^2 + a^2y_o^2 - a^2b^2 = 0$

2) Prosta (6) na podstawie 1) posiada z elipsą tylko jeden punkt wspólny. Tym punktem jest właśnie (x_o,y_o), bo punkt ten sprawdza jej równanie. Punkt (x_o,y_o) jest więc punktem styczności.
Jeżeli punkt (x_o,y_o) jest jednym z wierzchołków elipsy $(-a,0)$, $(a,0)$, to równaniem stycznej do elipsy w tym punkcie jest $x = -a$ lub $x = +a$. Równania te objęte są również wzorem (6) dla $x_o = \pm a$, $y_o = 0$.

Łatwo wykazać przez przesunięcie równoległe układu współrzędnych, że jeżeli elipsa jest określona równaniem

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1,$$

to równaniem stycznej w punkcie $(x_o y_o)$ jest

$$\frac{(x_o-p)\,(x-p)}{a^2} + \frac{(y_o-q)\,(y-q)}{b^2} = 1.$$

5. Równanie stycznej do hiperboli.

Prostą nierównoległą do żadnej z asymptot i mającą z hiperbolą tylko jeden punkt wspólny nazywamy styczną do hiperboli.
Twierdzenie.

Jeżeli hiperbola jest określona równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i punkt (x_o,y_o) należy do hiperboli, to równaniem stycznej do hiperboli w tym punkcie jest

$$\frac{x_o x}{a^2} - \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

Dowód: Zakładając że punkt (x_o,y_o) nie jest żadnym z wierzchołków hiperboli $(-a,0)$, $(a,0)$, wykażemy, że
1/ prosta (7) nie jest równoległa do żadnej z asymptot hiperboli.

Ponieważ $y_0 \neq 0$, więc możemy równanie prostej (7) napisać w postaci kierunkowej, otrzymując

$$y = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x - \frac{b^2}{y_0}$$

Współczynnik kierunkowy prostej (7), czyli $\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}$ jest różny od $\pm \frac{b}{a}$. Istotnie, gdyby

$$\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = \pm \frac{b}{a},$$

to

$$\frac{b}{a}\left(\frac{b x_0}{a y_0} \mp 1\right) = 0,$$

a dalej

$$\frac{b x_0}{a y_0} \mp 1 = 0,$$

skąd

$$y_0 = \pm \frac{b}{a} x_0,$$

co znaczyłoby, że punkt (x_0, y_0) leży na asymptocie. Byłoby to jednak sprzeczne z założeniem, punkt bowiem (x_0, y_0) należąc do hiperboli, nie może jednocześnie należeć do jej asymptoty, gdyż ta nie ma żadnych punktów wspólnych z hiperbolą.

2/ prosta (7) spełnia warunek styczności do hiperboli t.zn. $n^2 + b^2 - a^2 m^2 = 0$.
Istotnie

$$\frac{b^4}{y_0^2} + b^2 - a^2 \frac{b^4 x_0^2}{a^4 y_0^2} = \frac{b^2(a^2 b^2 + a^2 y_0^2 - b^2 x_0^2)}{a^2 \ y_0^2} = 0,$$

gdyż z założenia

$$b^2 x_0^2 = a^2 b^2 + a^2 y_0^2$$

3/ punkt (x_0, y_0) jest punktem styczności. Punkt -

(x_0,y_0) jest punktem styczności, bo spełnia równanie prostej (7).
Jeżeli teraz z kolei założymy, że punkt (x_0,y_0) jest jednym z wierzchołków hiperboli $(-a,0)$, $(a,0)$, to równanie (7) przyjmuje postać $x = -a$ lub $x = +a$. Zgodnie z wynikami na str. 265 równania te przedstawiają styczne do hiperboli w jej wierzchołkach.

Jeżeli hiperbola jest określona równaniem

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1,$$

to równaniem stycznej w punkcie (x_0,y_0) jest

$$\frac{(x_0-p)(x-p)}{a^2} - \frac{(y_0-q)(y-q)}{b^2} = 1,$$

6. Równanie stycznej do paraboli.

Prostą nierównoległą do osi paraboli i mającą z parabolą tylko jeden punkt wspólny nazywamy styczną do paraboli.
Twierdzenie: Jeżeli parabola jest określona równaniem

$$y^2 = 2px$$

i punkt (x_0,y_0) należy do paraboli, to równaniem stycznej do paraboli w tym punkcie jest

$$y_0 y = p\,(x + x_0) \qquad (8)$$

Dowód: Jeżeli $y_0 \neq 0$, czyli gdy punkt (x_0,y_0) nie jest wierzchołkiem paraboli, to równanie prostej (8) możemy przedstawić w postaci kierunkowej, otrzymując

$$y = \frac{p}{y_0}\,x + \frac{px_0}{y_0}$$

Prosta (8) nie jest równoległa do osi paraboli, jej bowiem współczynnik kierunkowy $\frac{p}{y_0}$ jest różny od zera.

Prosta (8) spełnia warunek styczności do paraboli $p - 2mn = 0$. Obliczając bowiem wartość $p - 2mn$, mamy:

$$p - 2\frac{p}{y_0}\cdot\frac{px_0}{y_0} = \frac{p(y_0^2 - 2px_0)}{y_0^2} = 0$$

gdyż

$$y_0^2 = 2p\,x_0$$

Prosta (8) przechodzi przez punkt (x_0,y_0), punkt ten bowiem spełnia jej równanie.
Jeżeli z kolei założymy, że $y_0 = 0$, czyli że punkt (x_0,y_0) jest wierzchołkiem paraboli (0,0), to równanie (8) przyjmie postać

$$x = 0.$$

Równanie to zgodnie z wynikami na str.266 przedstawia styczną do paraboli w wierzchołku paraboli.

Jeżeli parabola jest określona równaniem

$$(y-n)^2 = 2p\,(x - m),$$

to równaniem stycznej w punkcie (x_0,y_0) jest

$$(y_0 - n)\,(y-n) = p\left[(x - m) + (x_0 - m)\right]. \quad (9)$$

§ 19. WŁASNOŚCI STYCZNYCH DO KRZYWYCH STOŻKOWYCH

1. Własności stycznej do elipsy.

a/ P r o m i e n i e w o d z ą c e punktu elipsy.

Niech będzie dana elipsa

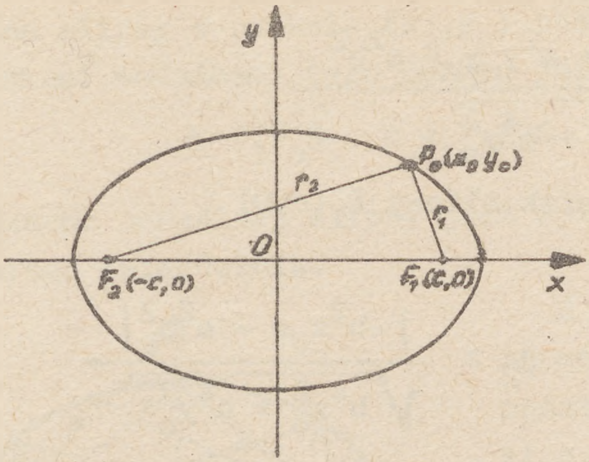
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

i niech punkt P_0 (x_0,y_0) będzie jednym z jej punktów.

Wykażemy, że długości promieni wodzących punktu $P_0(x_0,y_0)$ wyrażają się wzorami

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x_0$$

$$r_2 = a + \frac{c}{a}x_0$$



Rys.147

Mamy (rys.147), że

$r_2^2 = y_0^2 + (x_0+c)^2,$

$r_1^2 = y_0^2 + (x_0-c)^2.$

Odejmując te związki stronami

$r_2^2 - r_1^2 = (r_2-r_1)(r_2+r_1) = 4cx_0$

i uwzględniając

$r_2 + r_1 = 2a,$

mamy

$r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x_0.$

Dodając i odejmując ostatnie dwie równości, uzyskujemy

$$r_2 = a + \frac{c}{a}x_0,$$
$$r_1 = a - \frac{c}{a}x_0$$

Stosunek $\frac{c}{a} < 1$ nazywamy m i m o ś r o d e m e l i p s y i oznaczamy przez e. Od wartości mimośrodku zależy kształt elipsy.

Promienie wodzące punktu elipsy możemy też wyrazić wzorami

$$r_2 = a + e\,x_0, \quad r_1 = a - e\,x_0.$$

b/ W ł a s n o ś ć s t y c z n e j do elipsy.

Wykażemy, że styczna do elipsy w punkcie $P_0(x_0,y_0)$ jest dwusieczną kąta między jednym z promieni wodzących tego punktu i przedłużeniem drugiego promienia.

Dowód: Wystarczy wykazać, że (rys.148)

$$\sphericalangle Q_1P_0F_1 = \sphericalangle Q_2P_0F_2$$

Równaniem ogólnym stycznej do elipsy w punkcie $P_0(x_0,y_0)$ jest

$$b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0,$$

a jej równaniem normalnym

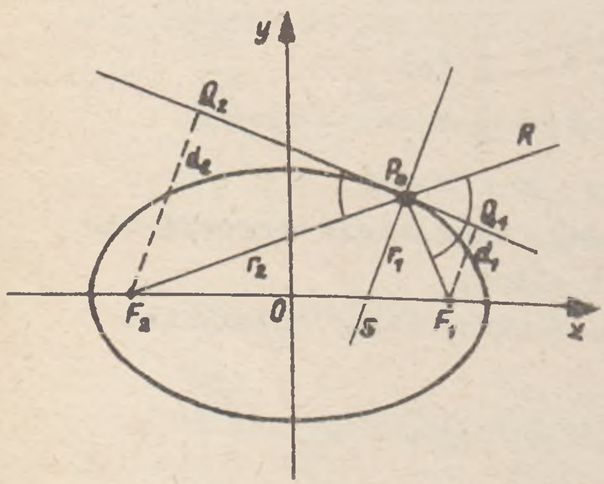
$$\frac{b^2x_o\,x + a^2y_oy - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_o^2 + a^4y_o^2}} = 0.$$

Obliczamy odległości ognisk elipsy $F_1(c,0)$ i $F_2(-c,0)$ od stycznej:

$$d_1 = \frac{|b^2x_oc - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_o^2 - a^4y_o^2}}, \quad d_2 = \frac{|-b^2x_oc - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_o^2 + a^4y_o^2}}$$

Stosunek tych odległości wyraża się następująco:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{|b^2x_oc-a^2b^2|}{|-b^2x_oc-a^2b^2|} = \frac{b^2a\left|\frac{c}{a}x_o-a\right|}{b^2a\left|-\frac{c}{a}x_o-a\right|} = \frac{a - ex_o}{a + ex_o} = \frac{r_1}{r_2}$$



Rys. 148

W trójkątach więc $F_1Q_1P_o$ i $F_2Q_2P_o$ boki F_1Q_1 i F_1P_o są proporcjonalne do boków F_2Q_2 i F_2P_o, a ponieważ nadto kąty leżące na przeciwko większych z tych boków t.j. $\sphericalangle F_1Q_1P_o$ i $\sphericalangle F_2Q_2P_o$ jako kąty proste są równe, wobec tego trójkąty $F_1Q_1P_o$ i $F_2Q_2P_o$ są podobne, skąd

$$\sphericalangle Q_1P_oF_1 = \sphericalangle Q_2P_oF_2,$$

a ponieważ $\quad \sphericalangle Q_2P_oF_2 = \sphericalangle Q_1P_oR$ jako wierzchołkowe,

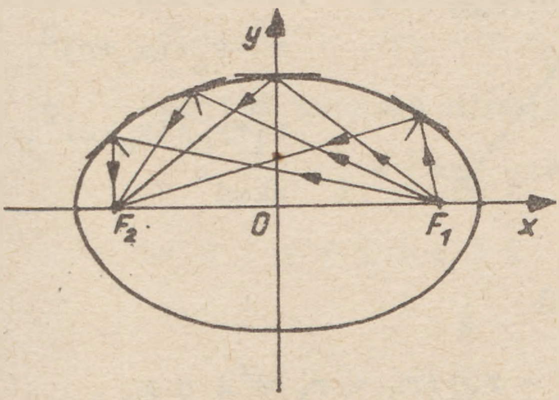
zatem $\quad \sphericalangle Q_1P_oF_1 = \sphericalangle Q_1P_oR.$

N o r m a l n ą   l i n i i w punkcie (x_o, y_o) nazywamy prostą prostopadłą do stycznej w tym punkcie.

Normalna elipsy w punkcie (x_o, y_o) połowi kąt między promieniami wodzącymi tego punktu jest więc (rys.148)

$$\measuredangle F_1P_oS = \measuredangle F_2P_oS$$

Ta własność normalnej elipsy jest wnioskiem z poprzedniego twierdzenia.



Rys. 149

Z tej własności normalnej elipsy na podstawie prawa optyki o równości kątów padania i odbicia wynika, że promienie świetlne wychodzące z jednego ogniska np. F_1 (rys.149), po odbiciu od elipsy jako zwierciadła, przechodzą przez drugie ognisko F_2.

2. Własności stycznej do hiperboli.

a) Promienie wodzące punktu hiperboli.

Niech będzie dana hiperbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 .$$

i niech punkt $P_o(x_o,y_o)$ będzie dowolnym punktem hiperboli.

Wykażemy, że długości promieni wodzących punktu $P_o(x_o,y_o)$ wyrażają się wzorami

$$r_1 = \frac{c}{a}x_o - a$$

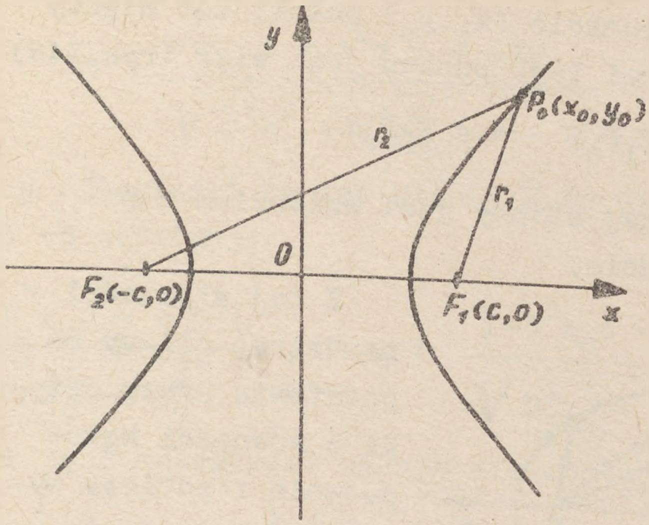
$$r_2 = \frac{c}{a}x_o + a$$

jeżeli $x_o \geqslant a$, czyli gdy $P_o(x_o y_o)$ należy do prawej gałęzi hiperboli i

$$r_1 = -\frac{c}{a}x_o + a$$

$$r_2 = -\frac{c}{a}x_o - a,$$

jeżeli $x_o \leqslant -a$, czyli gdy $P_o(x_o,y_o)$ należy do lewej



Rys. 150

gałęzi hiperboli. Niezależnie od tego na której gałęzi leży punkt P_0 mamy

$r_2^2=y_0^2+(x_0+c)^2$,

$r_1^2=y_0^2+(x_0-c)^2$,

skąd

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4\,c\,x_0$$

Jeżeli $x_0 \geqslant a$, to

$$r_2 - r_1 = 2a,$$

wobec czego

$$r_2 + r_1 = 2\,\frac{c}{a}x_0.$$

Rozwiązując ostatnie dwa równania jako układ równań ze względu na r_1 i r_2 otrzymujemy

$$r_2 = \frac{c}{a}\,x_0 + a,$$

$$r_1 = \frac{c}{a}\,x_0 - a.$$

Jeżeli $x_0 \leqslant -a$, to

$$r_2 - r_1 = -2a,$$

wobec czego

$$r_2 + r_1 = -2\,\frac{c}{a}\,x_0,$$

skąd

$$r_2 = -\frac{c}{a}\,x_0 - a,$$

$$r_1 = -\frac{c}{a}\,x_0 + a.$$

Stosunek $\frac{c}{a} > 1$ oznaczamy przez e i nazywamy m i m o ś r o d e m   h i p e r b o l i.

Promienie wodzące punktu hiperboli możemy też wyrazić wzorami:

gdy $x_o \geqslant a$, to

$$r_1 = e\,x_o - a, \quad r_2 = e\,x_o + a\,;$$

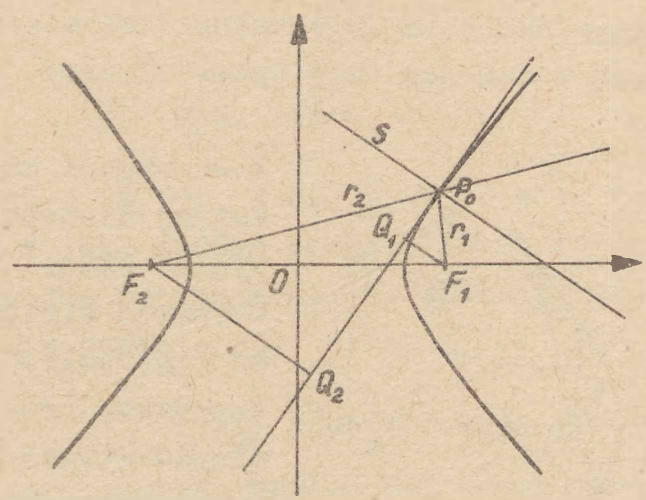
gdy $x \leqslant -a$, to

$$r_1 = e\,x_o + a, \quad r_2 = -\,ex_o - a$$

lub też wzorami ujmującymi oba przypadki

$$r_1 = |ex_o - a|, \quad r_2 = |ex_o + a|,$$

b/ W ł a s n o ś c i   s t y c z n e j do hiperboli.



Rys. 151

Wykażemy, że styczna do hiperboli połowi kąt między promianiami wodzącymi punktu styczności. Dowód podobnie jak w przypadku stycznej do elipsy. Równaniem normalnym stycznej do hiperboli w punkcie $P_o\,(x_o, y_o)$ jest

$$\frac{b^2x_ox - a^2y_oy - a^2b^2}{\sqrt{b^4x_o^2 + a^4y_o^2}} = 0.$$

Odległości ognisk hiperboli od stycznej wyrażają się następująco:

$$|F_1Q_1| = d_1 = \frac{|b^2x_oc - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_o^2 + a^4y_o^2}},$$

$$|F_2Q_2| = d_2 = \frac{|-b^2x_oc - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_o^2 + a^4y_o^2}},$$

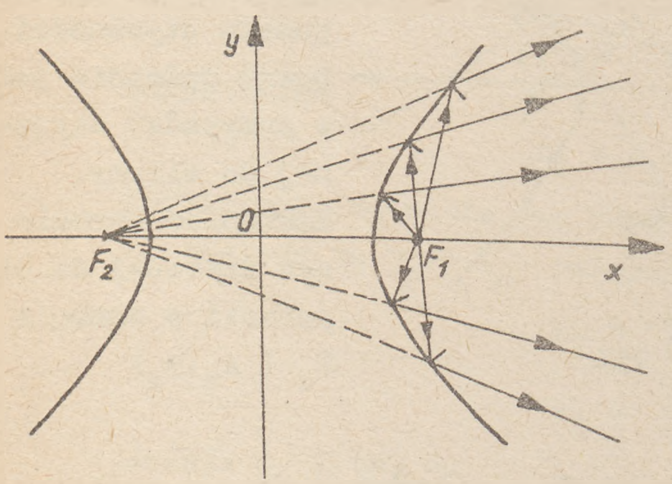
a stosunek

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{b^2a\left|\frac{c}{a}x_o - a\right|}{b^2a\left|-\frac{c}{a}x_o - a\right|} = \frac{|ex_o - a|}{|ex_o + a|} = \frac{r_1}{r_2}$$

Wobec tego trójkąty prostokątne $F_1P_oQ_1$ i $F_2P_oQ_2$ są podobne, a stąd

$$\sphericalangle F_1P_oQ_1 = \sphericalangle F_2P_oQ_2$$

Wnioskiem z tego twierdzenia jest własność normalnej: normalna hiperboli w punkcie (x_o, y_o) połowi kąt między jednym promieniem wodzącym tego punktu i przedłużeniem drugiego.



Rys. 152

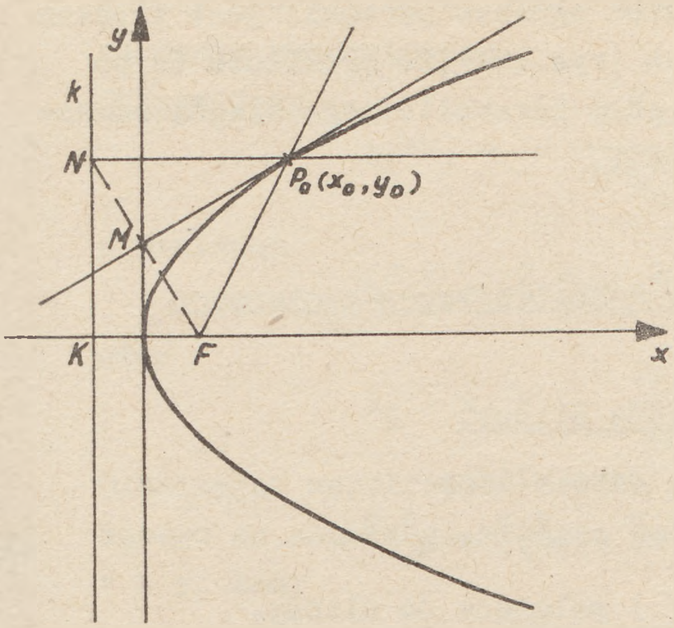
Z własności normalnej hiperboli wynika ważna własność dla optyki hiperboli. Wszystkie promienie świetlne wychodzące np. z ogniska F_1(rys.152) po odbiciu od zwierciadła hiperbolicznego rozpraszają się tak, że przedłużenia promieni odbitych przechodzą przez ognisko F_2.

3. Własność stycznej do paraboli.

Styczna do paraboli połowi kąt między promieniem wodzącym punktu stczności i prostopadłą spuszczoną z tego punktu na kierownicę (rys.153).

Dowód: Niech parabolę określa równanie

$$y^2 = 2px,$$



Rys. 153

wtedy równaniem kierownicy k jest

$$x = -\frac{p}{2},$$

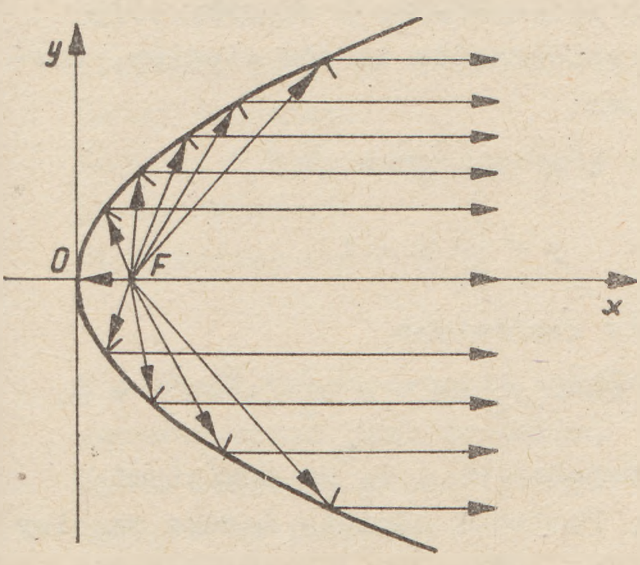
a ogniskiem $F(\frac{p}{2},0)$ Trójkąt $F\,P_0N$ jest trójkątem równoramiennym. Wykażemy, że styczna w punkcie P_0 przechodzi przez punkt M, który jest środkiem podstawy trójkąta $F\,P_0\,N$.

Ponieważ $F(\frac{p}{2}, 0)$, a $N(-\frac{p}{2}, y_0)$, więc współrzędne punktu M jako środka odcinka FN są równe 0 i $\frac{y_0}{2}$, Współrzędne punktu $M(0, \frac{y_0}{2})$ spełniają równanie stycznej w punkcie y_0

$$y_0y = p(x + x_0),$$

wobec tego styczna przechodzi przez punkt M i

$$\sphericalangle MP_0F = \sphericalangle MP_0N.$$



Rys. 154

Z własnością stycznej do paraboli w punkcie (x_0,y_0) wiąże się następująca własność normalnej w tym punkcie: normalna paraboli w punkcie (x_0,y_0) połowi kąt między promieniem wodzącym tego punktu a prostą przechodzącą przez ten punkt równolegle do osi paraboli. Jeżeli więc ognisko paraboli jest źródłem promieni świetlnych (rys.154), to promienie te po odbiciu od zwierciadła parabolicznego biegną równolegle do osi paraboli.

§ 20. ŚREDNICE SPRZĘŻONE KRZYWYCH STOŻKOWYCH

1. Średnice sprzężone elipsy.

Niech będzie dana elipsa

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

oraz punkt $P_o(x_o, y_o)$ należący do elipsy.
Równaniem średnicy elipsy przechodzącej przez punkt $P_o(x_o, y_o)$ jest

$$y = \frac{y_o}{x_o}x \tag{2}$$

Wyznaczymy miejsce geometryczne środków cięciw równoległych do średnicy (2).
Równaniem cięciwy równoległej do średnicy (2) jest

$$y = \frac{y_o}{x_o}x + t, \tag{3}$$

gdzie t jest parametrem zmiennym.
Chcąc uzyskać współrzędne środka S cięciwy (3), winniśmy wyznaczyć współrzędne końców cięciwy, rozwiązując układ równań:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

$$y = \frac{y_o}{x_o}x + t ,$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe

$$(b^2x_o^2 + a^2y_o^2)\,x^2 + 2a^2x_oy_o\,tx + a^2x_o^2\,(t^2-b^2) = 0.$$

Pierwiastki tego równania x_1 i x_2 są odciętymi końców cięciwy (3). Ponieważ odcięta środka cięciwy równa się $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, więc dla jej znalezienia możemy skorzystać ze wzoru dla sumy pierwiastków równania kwadratowego.

Otrzymujemy

$$x_1+x_2 = -\frac{2a^2x_0y_0t}{b^2x_0^2+a^2y_0^2},$$

a ponieważ

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2,$$

więc

$$x_1 + x_2 = -\frac{2x_0y_0t}{b^2}$$

Oznaczając współrzędne środka S jako punktu należącego do szukanego miejsca geometrycznego przez x i y, mamy

$$x = -\frac{x_0y_0\ t}{b^2} \qquad (4)$$

Rzędną $y = \frac{y_1+y_2}{2}$ otrzymamy podstawiając uzyskane x do równania cięciwy (3). Wtedy

$$y = \frac{y_0}{x_0}\left(-\frac{x_0y_0t}{b^2}\right) + t = \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right)t = \frac{x_0^2}{a^2}\,t$$

czyli

$$y = \frac{x_0^2}{a^2}\ t \qquad (5)$$

Równania (4) i (5) są równaniami parametrycznymi szukanego miejsca geometrycznego.

Gdy parametr t zmienia się, to punkt (x,y) porusza się tak, że jest środkiem cięciw równoległych do danej średnicy.

Rugując t otrzymamy równanie zwyczajne miejsca geometrycznego.

Otrzymujemy

$$y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\ x$$

Z postaci tego równania wynika, że szukanym miejscem geometrycznym jest średnica.

Zatem miejscem geometrycznym środków cięciw równoległych do średnicy

$$y = \frac{y_0}{x_0} x \tag{6}$$

jest średnica

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x \tag{7}$$

Porównując współczynniki kierunkowe obu średnic zauważamy, że współczynnik kierunkowy średnicy znaleziony (7) równa się iloczynowi czynnika $-\frac{b^2}{a^2}$ przez $\frac{x_0}{y_0}$, czyli przez odwrotność współczynnika kierunkowego średnicy danej (6).

Wykażemy teraz, że odwrotnie miejscem geometrycznym środków cięciw równoległych do średnicy $y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x$ jest $y = \frac{y_0}{x_0} x$.

Tworzymy współczynnik kierunkowy średnicy, która jest m.g. środków cięciw równoległych do średnicy

$$y = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} x.$$

W tym celu mnożymy $-\frac{b^2}{a^2}$ przez odwrotność współczynnika kierunkowego średnicy danej, czyli przez

$$-\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}.$$

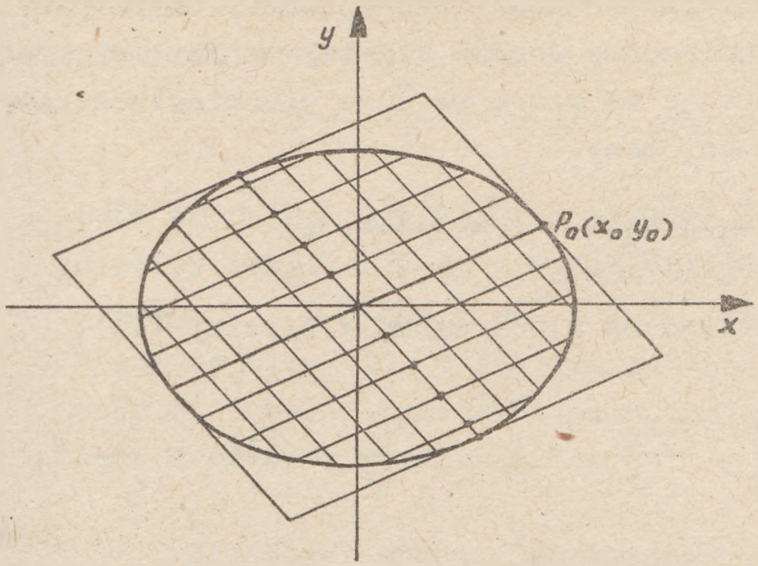
Otrzymujemy $\frac{y_0}{x_0}$ i wobec tego m.g. środków cięciw jest średnica

$$y = \frac{y_0}{x_0} x \quad \text{c.n.okazać.}$$

Dwie średnice elipsy, z których każda połowi cięciwy elipsy równoległe do drugiej, nazywamy średnicami **s p r z ę ż o n y m i e l i p s y**. (rys. 155). Proste więc (6) i (7) tworzą parę średnic sprzężonych. Ich równania możemy też zapisać w postaci:

$$x_0 y - y_0 x = 0, \tag{8}$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 0. \tag{9}$$



Rys. 155

Osie elipsy są też średnicami sprzężonymi.

Łatwo wykazać, że styczne w końcach średnicy elipsy są równoległe do średnicy z nią sprzężonej.

2. Średnice sprzężone hiperboli.

Niech będzie dana hiperbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

oraz punkt $P_o(x_o,y_o)$ należący do hiperboli. Postępujemy podobnie jak w przypadku elipsy. Równaniem średnicy przechodzącej przez punkt $P_o(x_o,y_o)$ jest

$$y = \frac{y_o}{x_o}\, x, \tag{10}$$

Równaniem cięciwy równoległej do tej średnicy jest

$$y = \frac{y_o}{x_o}\, x + t \tag{11}$$

Dla znalezienia współrzędnych końców cięciwy należy rozwiązać układ równań

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

$$y = \frac{y_o}{x_o}\, x + t.$$

Rozwiązując, otrzymamy równanie kwadratowe

$$(b^2x_o^2 - a^2y_o^2)\, x^2 - 2a^2x_o\, y_o tx - a^2x_o^2(t^2 + b^2) = 0$$

którego pierwiastki x_1 i x_2 są odciętymi końców cięciwy.(Szczegółowe rachunki przeprowadzi Czytelnik).

Jeżeli współrzędne środka cięciwy oznaczymy przez (x,y), to korzystając ze wzoru na sumę pierwiastków równania kwadratowego, mamy

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{a^2x_0y_0}{b^2x_0^2-a^2y_0^2}\,t = \frac{x_0y_0}{b^2}\,t, \tag{12}$$

Podstawiając wartość na x do równania cięciwy (11), otrzymamy

$$y = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{y_0}{x_0}\cdot\frac{x_0y_0t}{b^2} + t = \left(\frac{y_0^2}{b^2}+1\right)t = \frac{x_0^2}{a^2}\,t,$$

czyli

$$y = \frac{x_0^2}{a^2}\,t \tag{13}$$

Równania (12) i (13) przedstawiają parametrycznie miejsce geometryczne środków cięciw równoległych do średnicy $y = \frac{y_0}{x_0}x$.

Rugując z tych równań parametr t, mamy

$$y = \frac{b^2\,x_0}{a^2\,y_0}\,x \tag{14}$$

jako równanie zwyczajne szukanego miejsca geometrycznego. Z postaci tego równania widzimy, że miejscem geometrycznym środków cięciw równoległych do średnicy jest druga średnica.

Porównując współczynniki kierunkowe obu średnic widzimy, że współczynnik kierunkowy średnicy znalezionej (14) równa się iloczynowi czynnika $\frac{b^2}{a^2}$ przez $\frac{x_0}{y_0}$, czyli przez odwrotność współczynnika kierunkowego średnicy danej.

Jeżeli teraz jako daną przyjmiemy średnicę

$$y = \frac{b^2\,x_0}{a^2\,y_0}\,x,$$

to ponieważ

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^2y_0}{b^2x_0} = \frac{y_0}{x_0},$$

więc miejscem geometrycznym środków cięciw równoległych do średnicy

$$y = \frac{b^2x_o}{a^2y_o}\, x \text{ jest średnica } y = \frac{y_o}{x_o}\, x.$$

Dwie średnice hiperboli, z których każda połowi cięciwy równoległe do drugiej, nazywamy średnicami sprzężonymi (rys. 156).
Średnice więc (10) i (14) są ze sobą sprzężone.
Osie hiperboli - rzeczywista i urojona tworzą też parę średnic sprzężonych.

Własności średnic sprzężonych hiperboli.

1/ Jeżeli jedna średnica jest rzeczywista, to średnica z nią sprzężona jest urojona i odwrotnie.
Wiemy już (str.262), że jeżeli prosta $y = mx$ przecina hiperbolę, to $-\frac{b}{a} < m < +\frac{b}{a}$ i jeżeli prosta hiperboli nie przecina, to $m \leqslant -\frac{b}{a}$ lub $m \geqslant \frac{b}{a}$.
Przy założeniu, że punkt $P_o(x_o,y_o)$ jest punktem hiperboli, średnica $y = \frac{y_o}{x_o}\, x$ jest rzeczywista (przecina hiperbolę) i wobec tego

$$-\frac{b}{a} < \frac{y_o}{x_o} < \frac{b}{a};$$

jeżeli nadto założymy, że punkt $P_o(x_o,y_o)$ leży w I ćwiartce układu współrzędnych, to

$$0 < \frac{y_o}{x_o} < \frac{b}{a},$$

stąd wynika

$$\frac{x_o}{y_o} > \frac{a}{b}$$

Mnożąc strony tej nierówności przez $\frac{b^2}{a^2}$ mamy

$$\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x_o}{y_o} > \frac{b}{a}$$

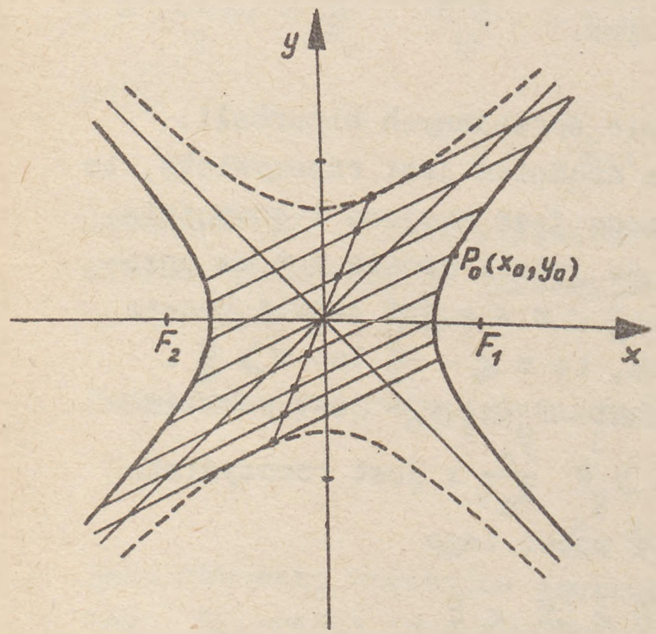
i wobec tego średnica o współczynniku kierunkowym $\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x_o}{y_o}$ nie przecina hiperboli. Taki właśnie współczynnik kierunkowy posiada średnica sprzężona z prostą $y = \frac{y_0}{x_0} x$, jest zatem średnicą urojoną.

Do tych samych wyników dojdziemy, jeżeli punkt $P_0(x_0, y_0)$ umieścimy w innej ćwiartce układu współrzędnych lub na osiach układu. Podobnie też przebiega dowód twierdzenia, że średnicą sprzężoną ze średnicą urojoną jest średnica rzeczywista hiperboli.

2/ Styczne hiperboli poprowadzone w punktach końcowych średnicy rzeczywistej są równoległe do średnicy z nią sprzecznej. Istotnie, jeżeli średnica

$$y = \frac{y_0}{x_0} x$$

przechodzi przez punkt $P_0(x_0, y_0)$ należący do hiperboli, to równaniem średnicy z nią sprzężonej jest



Rys. 156

$$y = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} x.$$

Równanie to możemy napisać w postaci

$$b^2 x_0 x - a^2 y_0 y = 0$$

lub

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 0 \qquad (15)$$

Równaniem stycznej do hiperboli w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ jest

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1, \qquad (16)$$

Z postaci równań (15) i (16) wynika, że proste, które one przedstawiają, są do siebie równoległe.

3. Średnice paraboli.

Niech będzie dana parabola

$$y^2 = 2px$$

oraz prosta przecinająca parabolę w dwóch punktach x/

$$y = mx$$

Wyznaczymy miejsce geometryczne środków cięciw równoległych do danej cięciwy $y = mx$.

Równaniem cięciwy równoległej do danej cięciwy jest

$$y = mx + t.$$

Rozwiązując układ równań:

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2px, \\ y &= mx + t \end{aligned}\right\},$$

otrzymujemy równanie kwadratowe

$$m^2x^2 + 2(mt - p)x + t^2 = 0,$$

którego pierwiastki x_1 i x_2 są odciętymi końców cięciwy.

Oznaczając współrzędne środka cięciwy przez (x,y), otrzymujemy z równania kwadratowego

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p-mt}{m^2},$$

wartość zaś y otrzymamy z równania cięciwy, jeżeli za x podstawimy uzyskaną wartość odciętej środka cięciwy.

Otrzymujemy

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{m}$$

Równania $x = \frac{p-mt}{2}$ i $y = \frac{p}{m}$ określają parametrycznie szukane miejsce geometryczne.

---

x/ jeżeli prosta przecina parabolę w dwóch punktach, to $m \neq 0$

Z postaci tych równań, w szczególności z postaci y wynika, że rzędne punktów należących do miejsca geometrycznego nie zależą od parametru t, czyli że wszystkie środki cięciw do siebie równoległych mają te same rzędne. Wobec tego miejscem geometrycznym środków cięciw równoległych do cięciwy $y = mx$ jest prosta równoległa do osi paraboli.
Jej równaniem zwyczajnym jest równanie

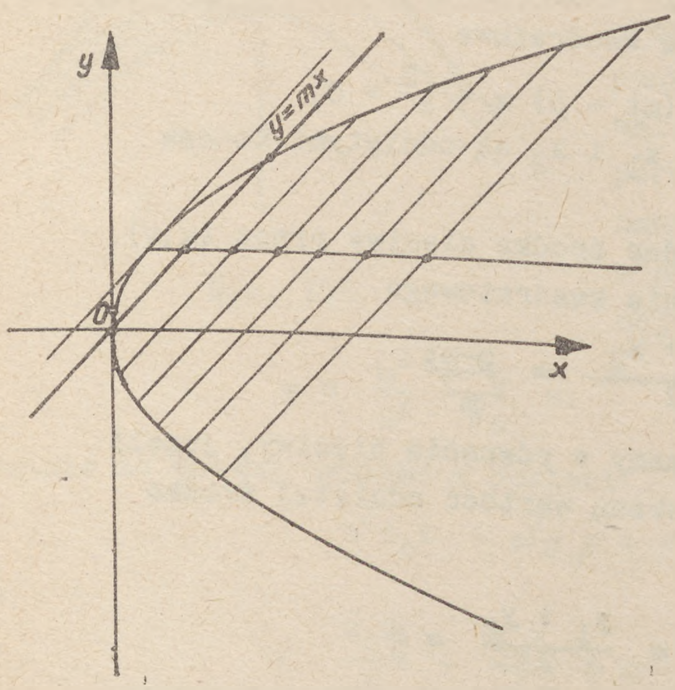
$$y = \frac{p}{m}.$$

Prostą tę nazywamy średnicą paraboli sprzężoną z kierunkiem m.

Cięciwa $y = mx$ nie obejmowała cięciwy równoległej do osi, t.j. cięciwy określonej równaniem

$$x = 1$$

Gdybyśmy i ten przypadek rozpatrzyli, to okazałoby się, że średnicą sprzężoną z kierunkiem określonym prostą $x = 1$ jest oś paraboli.



Rys. 157

Tak więc cięciwom równoległym paraboli odpowiada jedna średnica sprzężona z ich kierunkiem i odwrotnie każdej prostej równoległej do osi paraboli odpowiada jeden kierunek z nią sprzężony - jest on kierunkiem cięciw równoległych, których środki leżą na tej prostej (rys. 157).

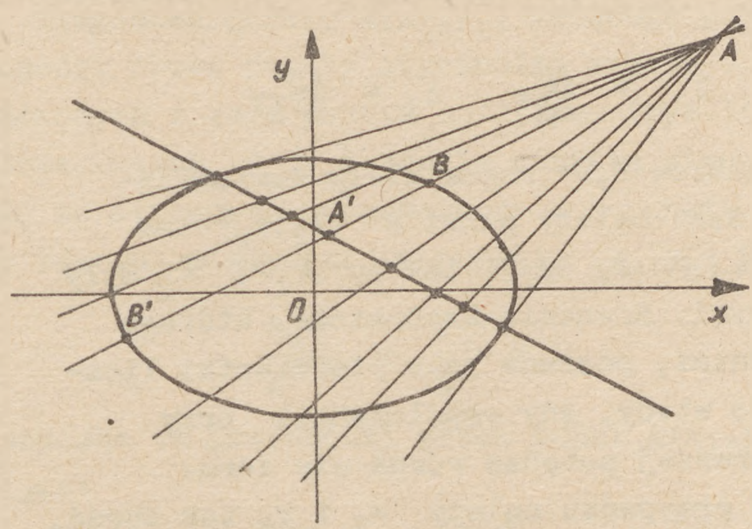
§ 21. BIEGUNOWE I KIEROWNICE STOŻKOWYCH

1. Biegunowa względem elipsy.

Niech będzie dana elipsa

$$K(x,y) \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \quad ^{x/} \tag{1}$$

oraz prosta przechodząca przez punkty A (x_1,y_1) i A'(x_2,y_2) i przecinająca elipsę w dwóch punktach B i B' (rys. 158). Znajdziemy warunek, jaki winien spełniać punkt A'(x_2,y_2), by para punktów B,B' rozdzielała harmonicznie parę A,A'. Prostą przechodzącą przez punkty A i A' określamy równaniami parametrycznymi



Rys. 158

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

i wyznaczamy punkty przecięcia prostej z daną elipsą. W tym celu rozwiązujemy układ równań prostej i elipsy, otrzymując

$$b^2\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\right)^2 + a^2\left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)^2 - a^2b^2 = 0,$$

lub po wykonaniu działań i uporządkowaniu

---

x/ Symbolem $K(x,y)$ oznaczamy trójmian $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2$ jako funkcję zmiennych x i y; wartość więc tego trójmianu dla $x = x_0$ i $y = y_0$, czyli $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$ oznaczymy symbolem $K(x_0,y_0)$.

$$(b^2x_2^2+a^2y_2^2-a^2b^2)\lambda^2+2(b^2x_1x_2+a^2y_1y_2-a^2b^2)\lambda+b^2x_1^2+$$
$$+a^2y_1^2-a^2b^2=0,$$

lub krótko, jeżeli użyjemy symbolu $K(x,y)$

$$K(x_2,y_2)\lambda^2+2(b^2x_1x_2+a^2y_1y_2-a^2b^2)\lambda+K(x_1,y_1)=0.$$

O punktach A i A' załóżmy, że żaden z nich nie leży w środku elipsy.(Dlaczego ?). Prosta A A' przecina z założenia elipsę w dwóch punktach B i B', uzyskane więc równanie kwadratowe ze względu na λ posiada dwa różne pierwiastki

$$\lambda_1=\frac{AB}{BA'},\quad \lambda_2=\frac{AB'}{B'A'}$$

By jednak para punktów B,B' rozdzielała harmonicznie parę punktów A,A' należy punkt A' (x_2,y_2) tak obrać, by $\lambda_1:\lambda_2=-1$, czyli tak by λ_1 i λ_2 były liczbami przeciwnymi. Równanie kwadratowe, którego wyróżnik jest dodatni, posiada jako pierwiastki liczby przeciwne tylko wtedy, gdy współczynnik przy niewiadomej w pierwszej potędze równa się zeru.
W rozważanym więc przypadku należy x_2 i y_2 tak obrać, by

$$b^2x_1x_2+a^2y_1y_2-a^2b^2=0,$$

a to uzyskamy, jeżeli punkt A' (x_2,y_2) obierzemy na prostej

$$b^2x_1x+a^2y_1y-a^2b^2=0 \tag{2}$$

Prostą (2), której równanie możemy też napisać w postaci

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \tag{3}$$

nazywamy b i e g u n o w ą p u n k t u A względem e l i p s y (1), a punkt A biegunem

Gdy prosta, przechodząca przez punkt A, obraca się dookoła tego punktu i przecina elipsę w dwóch punktach B i B', to czwarty punkt A', tak dobrany, by para AA' rozdzielała harmonicznie parę B B', porusza się po biegunowej punktu A.
Z postaci (3) równania biegunowej punktu $A(x_1,y_1)$ względem elipsy wynika, że jeżeli punkt A należy do elipsy, to biegunową tego punktu jest styczna, a biegunem punkt styczności.

Biegunowa punktu $A(x_1,y_1)$ leżącego poza elipsą przechodzi przez punkty styczności stycznych, poprowadzonych z tego punktu do elipsy (rys.158). Istotnie, niech (x_0,y_0) będzie punktem styczności jednej ze stycznych poprowadzonych z punktu $A(x_1,y_1)$, wtedy równaniem stycznej w punkcie (x_0,y_0) jest

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1,$$

ale styczna ta przechodzi przez punkt $A(x_1,y_1)$, więc jest

$$\frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1,$$

a to znaczy, że punkt (x_0,y_0) sprawdza równanie

$$\frac{x\ x_1}{a^2} + \frac{y\ y_1}{b^2} = 1,$$

czyli leży na biegunowej.

2. <u>Biegunowa względem hiperboli.</u>

Jeżeli dana jest hiperbola

$$K(x,y) \equiv b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \qquad (4)$$

oraz prosta przechodząca przez punkty $A(x_1,y_1)$ i $A'(x_2,y_2)$ i przecinająca hiperbolę w dwóch punktach B i B', to miejscem geometrycznym punktów A', rozdzielających z punktem $A(x_1,y_1)$ harmonicznie parę

B, B', jest prosta

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

Prostą (5) nazywamy biegunową punktu $A(x_1,y_1)$ względem hiperboli i jej równanie otrzymujemy, postępując w podobny sposób jak w przypadku elipsy.
Biegunowa punktu względem hiperboli posiada te same własności, co biegunowa punktu względem elipsy.

3. Biegunowa względem paraboli.

Niech będzie dana parabola

$$K(x,y) \equiv y^2 - 2px = 0 \qquad (6)$$

oraz prosta przechodząca przez punkty $A(x_1,y_1)$, $A'(x_2,y_2)$ i przecinająca parabolę w dwóch punktach B i B'. Postępujemy podobnie jak w przypadku elipsy.
Prostą AA' możemy określić równaniami

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad \lambda \neq -1$$

Rozwiązując układ równań prostej i paraboli, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$K(x_2,y_2)\,\lambda^2 + 2\left[y_1y_2 - p(x_1+x_2)\right]\lambda + K(x_1,y_1) = 0,$$

które posiada pierwiastki λ_1 i λ_2, spełniające warunek $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$ tylko wtedy, gdy

$$y_1y_2 - p(x_1 + x_2) = 0,$$

czyli gdy punkt $A'(x_2,y_2)$ leży na prostej

$$y_1y = p(x_1 + x). \qquad (7)$$

Prostą (7) nazywamy biegunową punktu $A(x_1,y_1)$ względem paraboli.

Własności biegunowej punktu względem paraboli są te same, co własności biegunowych punktu względem elipsy i hiperboli.

4. Kierownice krzywych stożkowych.

K i e r o w n i c ą s t o ż k o w e j nazywamy biegunową ogniska stożkowej.

Równanie kierownicy paraboli.
Jeżeli dana jest parabola

$$y^2 = 2px ,$$

to współrzędne ogniska F są równe $\frac{p}{2}$,0, wobec tego równaniem biegunowej punktu F, czyli kierownicy paraboli jest

$$x = -\frac{p}{2} .$$

Z prostą tą, jako kierownicą, spotkaliśmy się już przy wyprowadzaniu równania paraboli (str.250).

Równania kierownic elipsy i hiperboli.
Jeżeli dana jest
elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ lub hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
to ogniska znajdują się w punktach $F_1(c,0)$ i F_2 $(-c,0)$
Podstawiając do równania

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \text{lub} \quad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b} = 1$$

w miejsce (x_1, y_1) współrzędne F_1 oraz F_2, otrzymamy

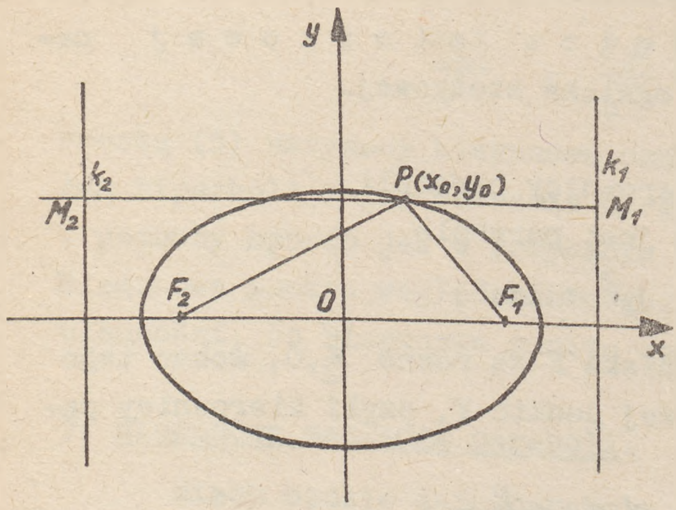
$$x = \frac{a^2}{c} \quad \text{i} \quad x = -\frac{a^2}{c}$$

W przypadku elipsy $a > c$, więc $\frac{a}{c} > 1$, a dalej $\frac{a^2}{c} > a$, wobec tego kierownice elipsy k_1 i k_2 (rys.159) leżą zewnątrz elipsy.

W przypadku hiperboli jest

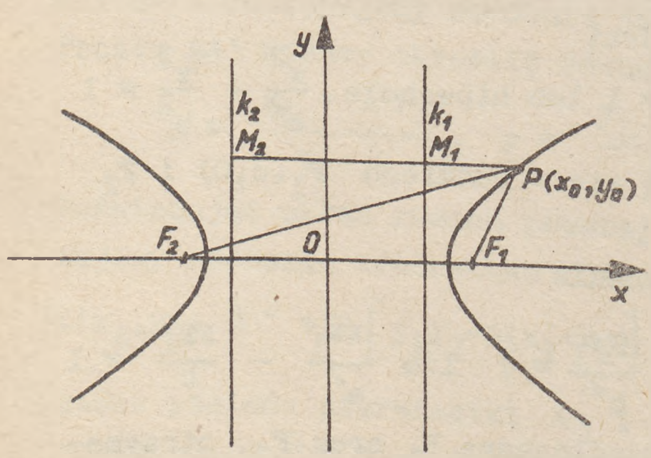
$$a < 0, \text{ więc } \frac{a}{c} < 1 \quad \text{i} \quad \frac{a^2}{c} < a,$$

wobec tego kierownice hiperboli k_1 i k_2 (rys. 160) przecinają oś x między wierzchołkami hiperboli.



Rys. 159

Wykażemy, że miejscem geometrycznym punktów, których stosunek odległości od stałego punktu (zwanego ogniskiem) do odległości od stałej prostej (zwanej kierownicą) jest stały i równy e, jest krzywa stożkowa przy czym, gdy $e < 1$, krzywą jest elipsa, gdy $e > 1$ - hiperbola, $e = 1$ - parabola.



Rys. 160

1/ Niech punkt $P_0(x_0,y_0)$ będzie punktem elipsy (rys. 159), M_1 - jego rzutem na kierownicę k_1, M_2 na kierownicę k_2. Wtedy

$$|PM_1| = \frac{a^2}{c} - x_0 = \frac{a}{e} - x_0 = \frac{a - ex_0}{e},$$

$$|PM_2| = x_0 + \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e} + x_0 = \frac{a + ex_0}{e},$$

a ponieważ (str.271)

$$r_1 = a - e x_0, \quad r_2 = a + e x_0$$

więc

$$\frac{r_1}{|PM_1|} = e \quad i \quad \frac{r_2}{|PM_2|} = e, \text{ gdzie } e = \frac{c}{a} < 1.$$

2/ Jeżeli $P(x_o,y_o)$ jest punktem hiperboli, M_1 i M_2 jego rzutami na kierownice k_1 i k_2 hiperboli, to

$$PM_1 = \begin{cases} x_o - \frac{a^2}{c}, & \text{gdy } x_o \geqslant a, \\ \frac{a^2}{c} - x_o, & \text{gdy } x_o \leqslant -a, \end{cases}$$

czyli $|PM_1| = \left|x_o - \frac{a^2}{c}\right| = \frac{|e\,x_o - a|}{e}$;

$$|PM_2| = \begin{cases} x_o + \frac{a^2}{c}, & \text{gdy } x_o \geqslant a, \\ -\frac{a^2}{c} - x_o, & \text{gdy } x_o \leqslant -a, \end{cases}$$

czyli

$$|PM_2| = \left|x_o + \frac{a^2}{c}\right| = \frac{|e\,x_o + a|}{e},$$

a ponieważ (str. 275)

$$r_1 = |e\,x_o - a| \quad i \quad r_2 = |e\,x_o + a|$$

więc

$$\frac{r_1}{|PM_1|} = e \quad i \quad \frac{r_2}{|PM_2|} = e, \text{ gdzie } e = \frac{c}{a} > 1$$

3/ Jeżeli punkt $P(x_o,y_o)$ należy do paraboli i M jest jego rzutem na kierownicę k, to

$$|PM| = r \quad \text{i wobec tego} \quad \frac{r}{|PM|} = 1$$

Odwrotnie, jeżeli punkt $P(x,y)$ spełnia warunek

$$\frac{|F_1P|}{|PM_1|} = e \neq 1,$$

to ponieważ

$$|F_1P| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad |PM_1| = \left|\frac{a^2}{c} - x\right|,$$

więc

$$x^2-2cx+c^2+y^2 = \frac{a^4-2a^2cx+c^2x^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{a^2},$$

a dalej

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Otrzymane zaś równanie przedstawia elipsę, gdy $a > c$, czyli $e < 1$ i hiperbolę, gdy $a < c$, czyli $e > 1$.

Do tego samego wyniku dojdziemy, gdy rozpatrzymy warunek

$$\frac{|F_2P|}{|PM_2|} = e \neq 1.$$

Jeżeli punkt $P(x,y)$ spełnia warunek

$$\frac{|FP|}{|PM|} = e = 1,$$

to wtedy $|FP| = |PM|$, a to oznacza, że punkt P jest punktem paraboli, zgodnie z określeniem na str.250.

§ 22. RÓWNANIA WIERZCHOŁKOWE STOŻKOWYCH

1. Równanie wierzchołkowe krzywej stożkowej.

Jeżeli dany jest układ Oxy oraz krzywa stożkowa, której wierzchołek znajduje się w początku układu i oś, na której leżą ogniska,(ognisko w przypadku paraboli) pokrywa się z jedną z osi układu Oxy, to równanie określające krzywą stożkową w tym położeniu względem układu Oxy nazywamy r ó w n a n i e m w i e r z c h o ł k o w y m stożkowej.

2. Równanie wierzchołkowe paraboli.

Równanie wierzchołkowe paraboli otrzymaliśmy, wyprowadzając równanie paraboli na str. 249.

Równaniem wierzchołkowym paraboli, w zależności od tego, czy jej oś pokrywa się z osią x, czy z osią y, jest równanie

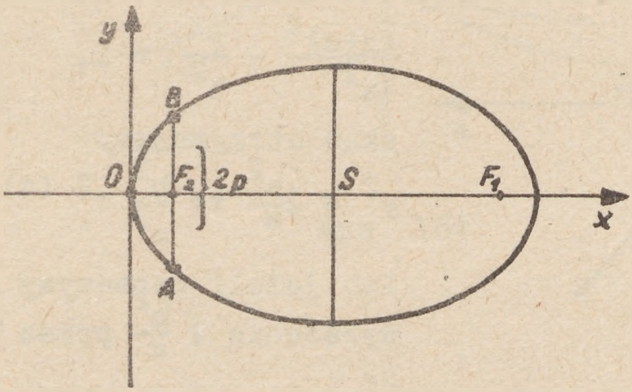
$$y^2 = 2px.$$

lub

$$x^2 = 2py$$

3. Równanie wierzchołkowe elipsy.

Jeżeli w układzie Oxy dana jest elipsa o osiach 2a i 2b, której wierzchołek znajduje się w początku układu, a ogniska leżą na dodatniej półosi x(rys.162) to środek elipsy S ma współrzędne (a,0). Równanie tej elipsy możemy napisać w postaci



Rys. 162

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

skąd otrzymujemy

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad (2)$$

Wyrażenie $2\frac{b^2}{a}$ nazywamy parametrem elipsy i oznaczamy symbolem 2p.

Podobnie jak w przypadku paraboli, parametr elipsy wyraża długość cięciwy przechodzącej przez ognisko prostopadle do osi elipsy.

Istotnie, podstawiając do równania (2) odciętą ogniska F_2, czyli $x = a - c$, otrzymamy $y = \pm \frac{b^2}{a}$, Końce więc cięciwy AB mają współrzędne

$$A\left(a-c, -\frac{b^2}{a}\right), \quad B\left(a-c, \frac{b^2}{a}\right)$$

i wobec tego

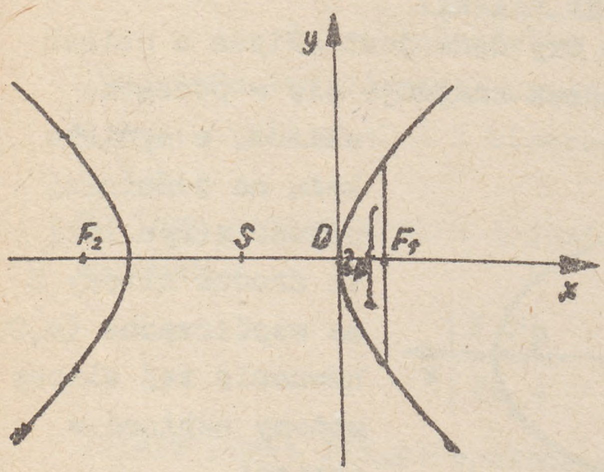
$$|AB| = 2\frac{b^2}{a} = 2p.$$

Używając symbolu 2p, możemy równanie wierzchołkowe elipsy (2) napisać w postaci

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2. \quad (3)$$

4. Równanie wierzchołkowe hiperboli.

Jeżeli w układzie Oxy dana jest hiperbola jak na rys.163 o osiach 2a i 2b, to środek S hiperboli ma współrzędne (-a,0). Równanie hiperboli możemy napisać w postaci



Rys. 163

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

skąd otrzymujemy

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad (4)$$

lub jeżeli oznaczymy wyrażenie $2\frac{b^2}{a}$ przez 2p

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \quad . \quad (5)$$

Wyrażenie $2\frac{b^2}{a}$, oznaczone symbolem 2p, nazywamy p a r a m e t r e m h i p e r b o l i. Parametr hiperboli ma geometrycznie to samo znaczenie, co paramaetr paraboli i elipsy, t.zn. wyraża długość cięciwy prostopadłej do osi hiperboli i przechodzącej przez jedno z jej ognisk.

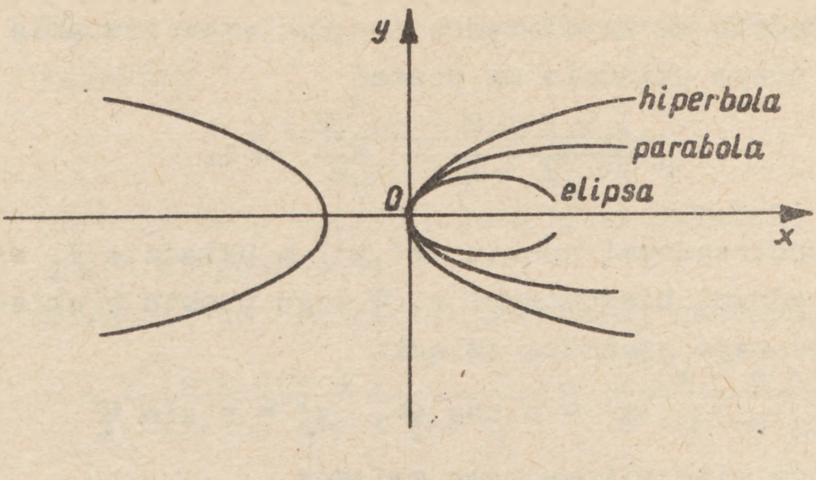
Otrzymaliśmy następujące równania wierzchołkowe krzywych stożkowych:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \qquad \text{(elipsa)}$$

$$y^2 = 2px \qquad \text{(parabola)}$$

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \qquad \text{(hiperbola)}$$

Z postaci równań elipsy i hiperboli wynika, że gdy półoś a rośnie nieograniczenie przy stałym p, to krzywe te zbliżają się do paraboli, bowiem wtedy $\frac{p}{a}$ dąży do zera a przez to w równaniach tych krzywych wyraz $\frac{p}{a}x^2$ dąży do zera.



Rys. 164

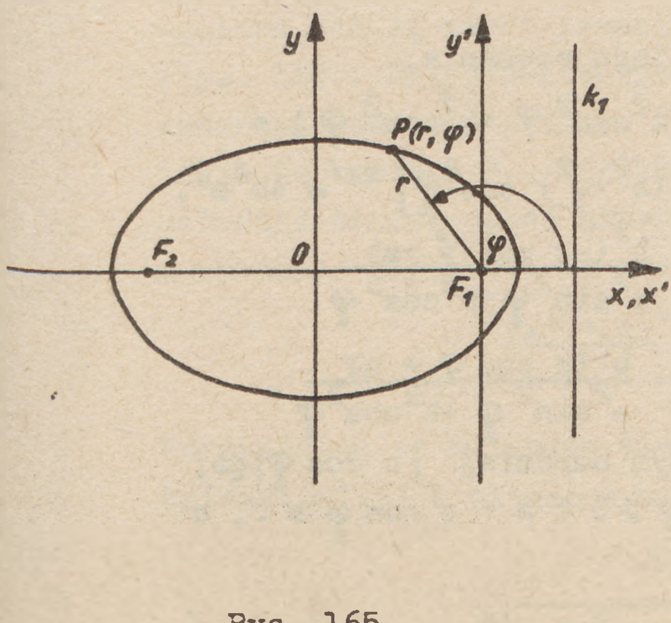
§ 23. RÓWNANIA STOŻKOWYCH WE WSPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH.

1. Równanie elipsy.

Niech będzie dana elipsa

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Jako biegun układu biegunowego przyjmujemy jedno z ognisk, jako oś biegunową - oś x, nadając jej zwrot od ogniska ku kierownicy tego ogniska. Jako biegun obieramy np. $F_1(c,0)$, wtedy oś biegunowa pokrywa się z osią x i jest z nią zgod~~nie~~ nie skierowana. (rys. 165). Przesuwamy układ Oxy równolegle do punk-



Rys. 165

tu F_1. Otrzymujemy układ $F_1x'y'$. Ponieważ punkt O w tym układzie ma współrzędne $(-c,0)$, więc równanie elipsy w nowym układzie ma postać

$$\frac{(x'+c)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Między współrzędnymi punktu (x',y') w układzie $F_1\ x'y'$ a współrzędnymi biegunowymi r, φ tego punktu w układzie biegunowym zachodzą związki

$$x' = r\cos\varphi, \quad y' = r\sin\varphi$$

Dla punktów więc elipsy mamy związek

$$\frac{(r\cos\varphi + c)^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1,$$

skąd otrzymujemy równanie elipsy

$$r^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) + 2b^2 cr\cos\varphi - b^4\ x/ = 0 \quad (1)$$

Równanie to jest postaci $F(r,\varphi) = 0$. Sprowadzimy je do postaci $r = f(\varphi)$.

Ponieważ

$$a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi \neq 0,$$

gdzie $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ nie mogą jednocześnie równać się zeru, więc równanie (1) jest ze względu na r równaniem stopnia drugiego.

Obliczamy pierwiastki tego równania:

$$\Delta = 4b^4c^2\cos^2\varphi + 4b^4(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) =$$
$$= 4b^4\left[a^2\sin^2\varphi + (b^2+c^2)\cos^2\varphi\right]^{xx/} = 4b^4a^2,$$

$$r' = \frac{b^2(-c\cos\varphi + a)}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},$$

$$r'' = -\frac{b^2(c\cos\varphi + a)}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},$$

Ponieważ $c < a$, więc tym bardziej $|c\cos\varphi| < a$, wobec tego $a - c\cos\varphi > 0$ i $a + c\cos\varphi > 0$, a stąd $r' > 0$, a $r'' < 0$.

$x/\ b^2c^2 - a^2b^2 = b^2(c^2 - a^2) = -b^4$; $xx/\ b^2+c^2=a^2$

Zgodnie z określeniem współrzędnych biegunowych punktu, promień wodzący r punktu jest nieujemny, zatem równanie

$$r = \frac{b^2(a - c\cos\varphi)}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$$

określa daną elipsę w przyjętym układzie współrzędnych biegunowych.

Równanie to przekształcamy dalej następująco:

$$r = \frac{b^2(a-c\cos\varphi)}{a^2(1-\cos^2\varphi)+b^2\cos^2\varphi} = \frac{b^2(a - c\cos\varphi)}{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{b^2(a - c\cos\varphi)}{a^2 - c^2\cos^2\varphi} = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1+\frac{c}{a}\cos\varphi}$$

Otrzymujemy więc jako równanie elipsy

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}, \text{ gdzie } e < 1 \qquad (2)$$

2. Równanie hiperboli.

Mając daną hiperbolę

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

obieramy ognisko $F_1(c,0)$ jako biegun, a jako oś biegunową prostą pokrywającą się z osią x, nadając jej zwrot od ogniska do kierownicy należącej do tego ogniska, czyli zwrot przeciwny do zwrotu osi x (rys. 166). Dalej postępujemy podobnie jak przy wyprowadzeniu równanie elipsy. Przesuwając układ Oxy równolegle do ogniska F_1, otrzymujemy układ F_1 x'y'. W tym układzie środek danej hiperboli ma współrzędne(-c,0), a równanie hiperboli ma postać

$$\frac{(x' + c)^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

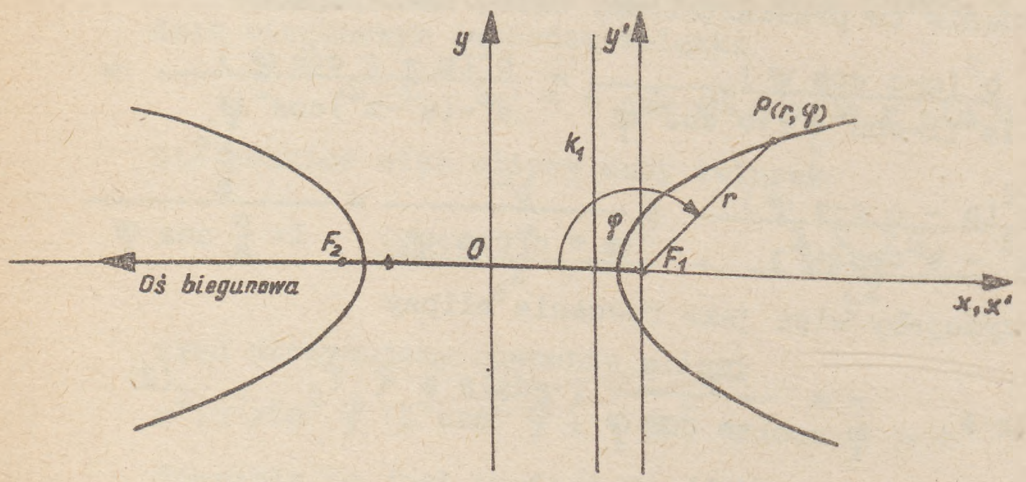
Korzystając ze związków między współrzędnymi prostokątnymi x',y' i biegunowymi r, φ tego samego punktu

$$x' = -r\cos\varphi^{\text{x/}},\quad y' = r\sin\varphi$$

otrzymamy równanie

$$\frac{(-r\cos + c)^2}{a^2} - \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1,$$

które jest spełnione tylko przez współrzędne biegunowe punktów hiperboli.



Rys. 166

Równanie to możemy sprowadzić do postaci

$$r^2 (b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi) - 2b^2c\, r\cos\varphi + b^4 \text{ xx/} = 0 \quad (3)$$

1/ Jeżeli

$$b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi \neq 0,$$

czyli gdy

$$\mathrm{tg}\,\varphi \neq \pm\frac{b}{a},$$

równanie (3) jest równaniem stopnia drugiego ze względu na r.

---

x/ Związek $x' = r\cos\varphi$ zachodzi w przypadku, gdy oś x i oś biegunowa są zgodnie skierowane; jeżeli oś x i oś biegunowa mają zwroty przeciwne, to $x' = -r\cos\varphi$.

xx/ $b^2(c^2 - a^2) = b^4$.

Celem obliczenia jego pierwiastków wyznaczymy najpierw wyróżnik równania:

$$\Delta = 4b^4c^2\cos^2\varphi - 4b^4(b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi) =$$

$$= 4b^4\left[(c^2 - b^2)\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi\right] = 4a^2b^4$$

Wobec tego

$$r' = \frac{b^2c\cos\varphi - ab^2}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi} = \frac{b^2(c\cos\varphi - a)}{(b^2+a^2)\cos^2\varphi - a^2} =$$

$$= \frac{b^2(c\cos\varphi - a)}{c^2\cos^2\varphi - a^2} = \frac{b^2}{c\cos\varphi + a} = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{c}{a}\cos\varphi + 1},$$

czyli

$$r' = \frac{p}{e\cos\varphi + 1}, \text{ gdzie } e > 1, \tag{4}$$

podobnie otrzymamy

$$r'' = \frac{p}{e\cos\varphi - 1} \tag{5}$$

Równanie (4) określa gałąź hiperboli, leżącą po stronie dodatniej półosi x, równanie (5) - gałąź hiperboli po stronie ujemnej półosi x.

2/ Jeżeli

$$b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi = 0,$$

czyli gdy

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \pm\frac{b}{a},$$

to promień wodzący r jest równoległy do jednej z asymptot. Równanie (3) jest wtedy stopnia pierwszego i dla φ spełniającego warunek $\mathrm{tg}\,\varphi = \pm\frac{b}{a}$ x/, co równoznaczne jest z warunkiem $\cos\varphi = \pm\frac{a}{c} = \pm\frac{1}{e}$, otrzymujemy

$$r = \frac{b^2}{2c\cos\varphi} = \pm\frac{b^2}{2a} = \pm\frac{p}{2}$$

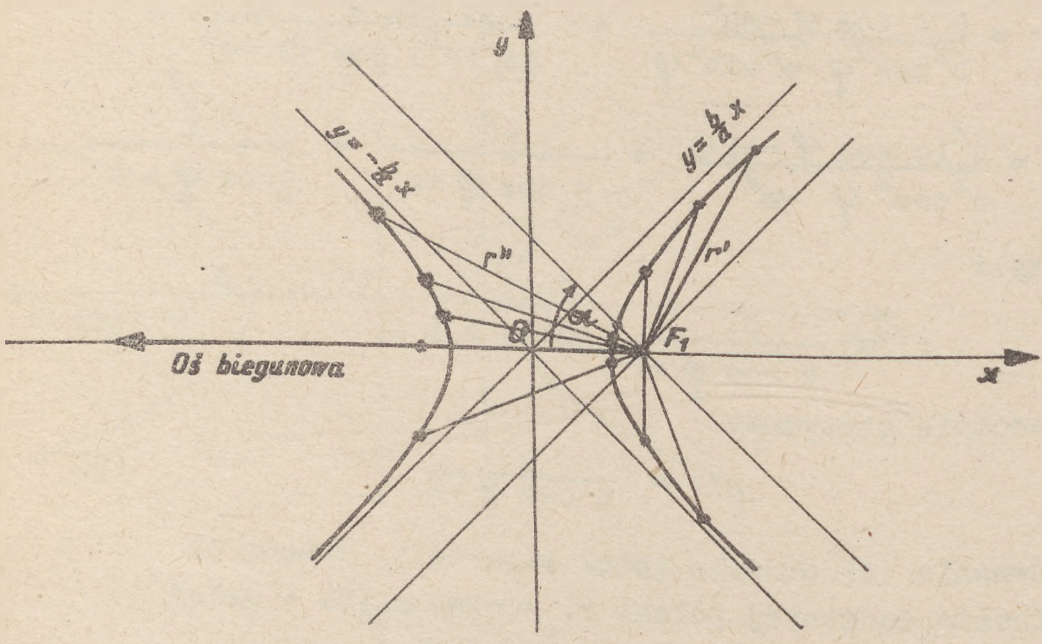
---

x/ Jeżeli $\mathrm{tg}\,\varphi = \pm\frac{b}{a}$, to $\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{a^2}{a^2+b^2} =$

$$= \frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{1}{e}\right)^2$$

Zgodnie z określeniem promienia wodzącego sens ma tylko $r > 0$, czyli $r = \frac{p}{2}$. Punkt o współrzędnych $r = \frac{p}{2}$ i $\varphi = \arc\cos\frac{1}{e}$ określony jest również równaniem (4).

Zależność promieni wodzących r punktów hiperboli od kąta φ pokazuje rys. 167.



Rys. 167

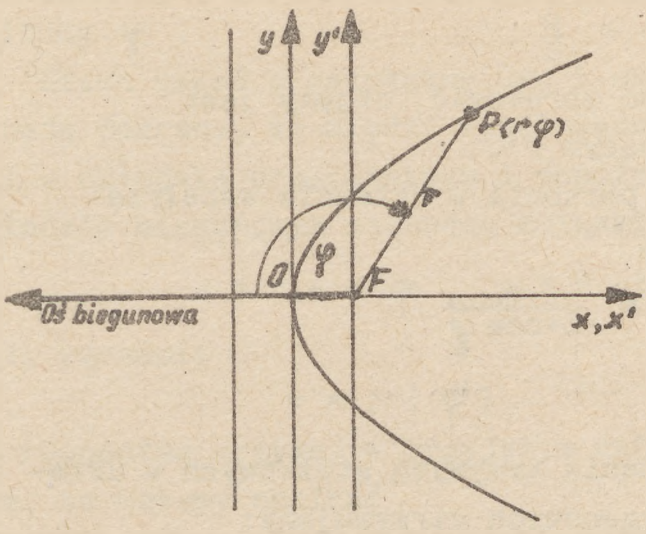
Kątom φ z przedziału $\langle 0,\alpha)$ odpowiadają dwa promienie r' i r''.
" " $(\alpha,\pi-\alpha)$ odpowiada jeden promień r'.
" " $\langle\pi-\alpha,\pi+\alpha)$ nie odpowiada żaden promień wodzący.
" " $(\pi+\alpha,2\pi-\alpha\rangle$ odpowiada jeden promień r.
" " $(2\pi-\alpha,2\pi)$ odpowiadają dwa promienie r' i r''.

3. Równanie paraboli.

Niech będzie dana parabola

$$y^2 = 2px$$

Jako biegun układu biegunowego przyjmujemy ognisko $F(\frac{p}{2},0)$, jako oś biegunowa prostą pokrywającą się z osią x, nadając jej zwrot od ogniska do kierownicy



Rys. 168

paraboli (rys.168). Po przesunięciu równoległym układu Oxy do ogniska $F(\frac{p}{2},0)$ otrzymamy układ F x'y'. Wierzchołek paraboli w nowym układzie ma współrzędne $(-\frac{p}{2},0)$, wobec tego równaniem danej paraboli w tym układzie jest

$$y'^2 = 2p\,(x' + \frac{p}{2})$$

Jeżeli skorzystamy ze związków

$$x' = -r\cos\varphi\,,\quad y' = r\sin\varphi\,,$$

to otrzymamy równanie

$$r^2\sin^2\varphi = 2p(-r\cos\varphi + \frac{p}{2}),$$

które jest spełnione przez współrzędne biegunowe punktów danej paraboli.

Po przekształceniu równania otrzymamy

$$r^2\sin^2\varphi + 2pr\cos\varphi - p^2 = 0 \qquad (6)$$

1/ Jeżeli $\varphi \neq 0$, to równanie (6) jest równaniem kwadratowym.
Z równania otrzymujemy

$$r' = \frac{-2p\cos\varphi + 2p}{2\sin^2\varphi} = \frac{p(1-\cos\varphi)}{1-\cos^2\varphi} = \frac{p}{1+\cos\varphi} > 0$$

$$r'' = \frac{-2p\cos\varphi - 2p}{2\sin^2\varphi} = -\frac{p}{1-\cos\varphi} < 0$$

2/ Jeżeli $\varphi = 0$, to równanie (6) jest stopnia pierwszego i

$$r = \frac{p}{2},$$

Punkt $(\frac{p}{2}, 0)$, jak łatwo sprawdzić, objęty jest również wzorem wyrażającym r'.

Zatem równaniem paraboli w układzie współrzędnych biegunowych jest

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi} \tag{7}$$

Zestawiając równania krzywych stożkowych w układzie współrzędnych biegunowych otrzymujemy:

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}, \quad e < 1 \quad \text{- elipsa}$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}; \quad e > 1 \quad \text{- hiperbola (gałąź hiperboli)}$$

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi} \quad \text{- parabola,}$$

Równania więc krzywych stożkowych w układzie biegunowym mają tę samą postać

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

która w zależności od e przedstawia

1/ elipsę, gdy $0 < e < 1$,

2/ parabolę, gdy $e = 1$,

3/ hiperbolę, gdy $e > 1$,.

§ 24. RÓWNANIA PARAMETRYCZNE STOŻKOWYCH

1. <u>Równanie stożkowej w układzie biegunowym, a jej równania parametryczne</u>.

Wyprowadzając równania krzywych stożkowych w układzie współrzędnych biegunowych otrzymaliśmy równania w postaci

$$r = f(\varphi),$$

t.zn. wyraziliśmy promień wodzący r jako funkcję amplitudy φ.

Niech układ prostpkątny Oxy i układ biegunowy tak będą dobrane, że między współrzędnymi punktu (x,y) w układzie prostokątnym i współrzędnymi (r,φ) w układzie biegunowym zachodzą związki

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

Jeżeli równanie

$$r = f(\varphi)$$

jest równaniem krzywej w przyjętym układzie biegunowym, to możemy napisać

$$x = f(\varphi)\cos\varphi, \quad y = f(\varphi)\sin\varphi$$

lub krótko

$$x = F(\varphi), \quad y = G(\varphi)$$

gdzie $F(\varphi)$ i $G(\varphi)$ oznaczają funkcję amplitudy φ. Przyjmując amplitudę φ jako parametr i kładąc $\varphi = t$, otrzymujemy równania parametryczne krzywej

$$x = F(t), \quad y = G(t)$$

W równaniach tych parametr t jest amplitudą, możemy jednak wyprowadzić inne równania parametryczne krzywych, nadając parametrowi inny sens geometryczny.

2. <u>Równania parametryczne elipsy</u>.

Jeżeli dana jest elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

to dla każdego punktu (x,y) należącego do elipsy jest

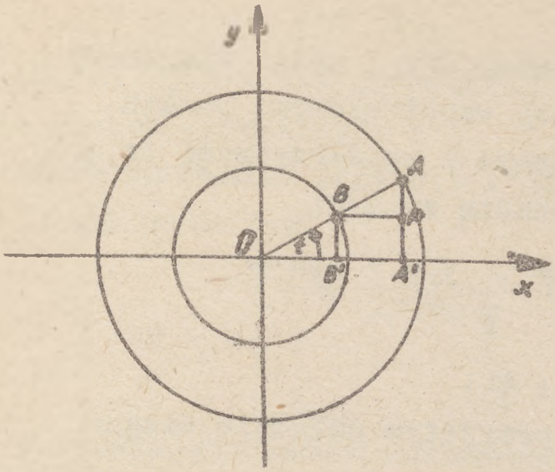
$$\left|\frac{x}{a}\right| \leqslant 1 \quad \text{i} \quad \left|\frac{y}{b}\right| \leqslant 1$$

i wobec tego ułamki $\frac{x}{a}$ i $\frac{y}{b}$ możemy uważać za cosinus i sinus pewnego kąta o mierze t z przedziału $\langle 0, 2\pi)$, czyli

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Dla każdego więc punktu $P_0(x_0,y_0)$, należącego do elipsy możemy wyznaczyć taką wartość t_0, że

$$x_0 = a\cos t_0, \quad y_0 = b\sin t_0$$



Rys. 169

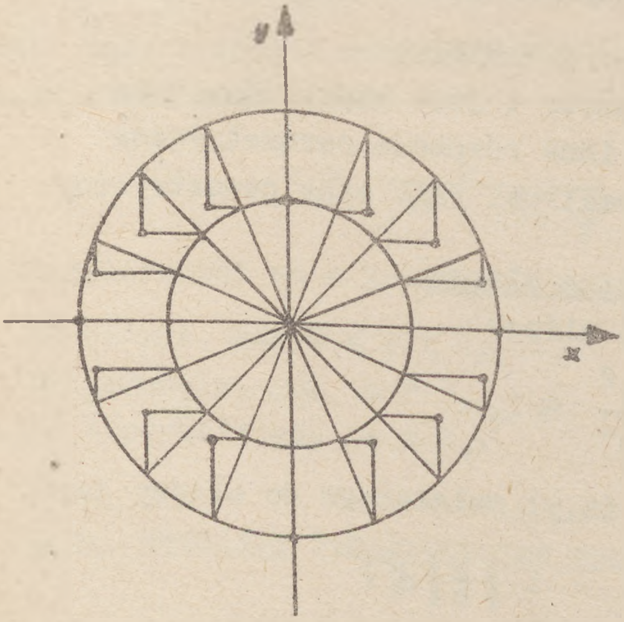
Odwrotnie, dla każdego t_0 z przedziału $\langle 0, 2\pi)$ punkt o współrzędnych $(a \cos t_0, b \sin t_0)$ należy do elipsy, bo spełnia jej równanie. Zatem równania

$$\begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \qquad (2)$$

są parametrycznymi równaniami elipsy.

Znajdziemy sens geometryczny parametru t.

Mając elipsę (1), zakreślmy dookoła środka elipsy dwa okręgi współśrodkowe o promieniach równych półosiom elipsy a i b (rys.169). Okręgi te nazywamy odpowiednio okręgiem wpisanym i opisanym na elipsie.



Rys. 170

Niech promień OA=a okręgu opisanego tworzy z osią x kąt t i niech promień ten przecina okrąg wpisany w punkcie B. Przez punkt A prowadzimy równoległą do osi y, przez punkt B prostą równoległą do osi x. Punkt przecięcia się tych prostych oznaczamy przez P.

Ze sposobu konstrukcji punktu P wynika, że jego odcięta równa się odciętej punktu A, czyli

$$x = OA' = a \cos t,$$

zaś rzędna równa się rzędnej punktu B, czyli

$$y = B'B = b \sin t$$

Współrzędnymi więc punktu P są a cost, b sin t, punkt zaś o takich współrzędnych należy do elipsy. Kąt t odpowiadający punktowi elipsy o współrzędnych a cost, b sin t nazywamy **a n o m a l i ą** tego punktu elipsy. Parametr t występujący w równaniach parametrycznych elipsy (2) jest anomalią punktu elipsy.

Ostatnie rozważania naprowadzają nas na sposób konstrukcji punktów elipsy przy pomocy okręgów wpisanego i opisanego.

Sposób konstrukcji pokazuje (rys.170).

3. Równania parametryczne hiperboli.

Mając daną hiperbolę

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3)$$

możemy jej równanie napisać w postaci

$$1 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2}$$

Mając następnie na uwadze relację

$$1 + tg^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$$

możemy ułamki $\frac{y}{b}$ i $\frac{x}{a}$ uważać za tangens i odwrotność cosinusa pewnego kąta o mierze t, czyli

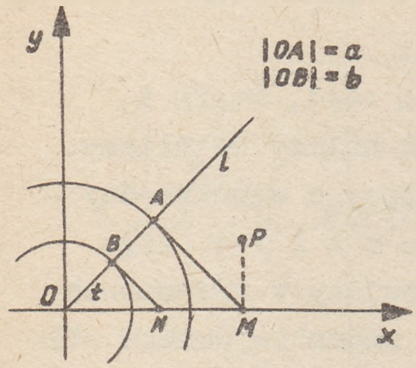
$$\frac{y}{b} = tg\, t \quad i \quad \frac{x}{a} = \frac{1}{\cos t}$$

lub

$$x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = b\, tg\, t$$

Każdemu więc punktowi P(x,y) hiperboli możemy przyporządkować miarę kąta t w ten sposób, że

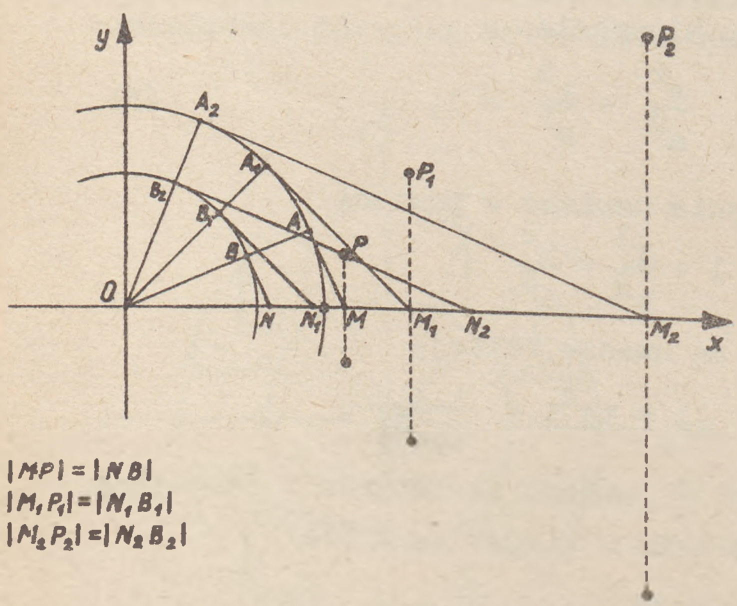
$$x = \frac{a}{\cos t}, \ y = b\, tg\, t. \qquad (4)$$



Rys. 171

Odwrotnie, każdej liczbie t_0 z przedziału $\langle 0, 2\pi)$, różnej od $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2}$, możemy przypisać punkt $\left(\frac{a}{\cos t_0}, b\operatorname{tg} t_0\right)$ Punkt ten jest punktem hiperboli (3), sprawdza bowiem jej równanie. Zatem równania (4) są parametrycznymi równaniami hiperboli.

Sens geometryczny parametru t, występującego w równaniach (4), znajdziemy wykonując następującą konstrukcję:



Rys. 172

Kreślimy dookoła środka hiperboli O dwa okręgi współśrodkowe o promieniach równych półosiom hiperboli a i b (rys.171). Ze wspólnego środka obu okręgów prowadzimy półprostą l, jej kąt z osią x oznaczamy przez t, a punkty przecięcia się z okręgami przez A i B. W punktach A i B wystawiamy styczne do okręgów i ich punkty przecięcia się osią x oznaczamy odpowiednio przez M i N.

Z Δ O M A memy

$$|OM| = \frac{a}{\cos t},$$

a z Δ O N B

$$|NB| = b \operatorname{tg} t$$

Jeżeli więc w układzie Oxy wyznaczymy punkt P, którego współrzędne są równe $x = |OM|$, $y = |NB|$, to punkt P jest punktem hiperboli. Opisanej konstrukcji możemy użyć do wyznaczenia dowolnej liczby punktów hiperboli (rys. 172).

4. Równania parametryczne paraboli.

Jeżeli dana jest parabola

$$y^2 = 2px,$$

to kładąc

$$y = t$$

otrzymamy

$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t \qquad (5)$$

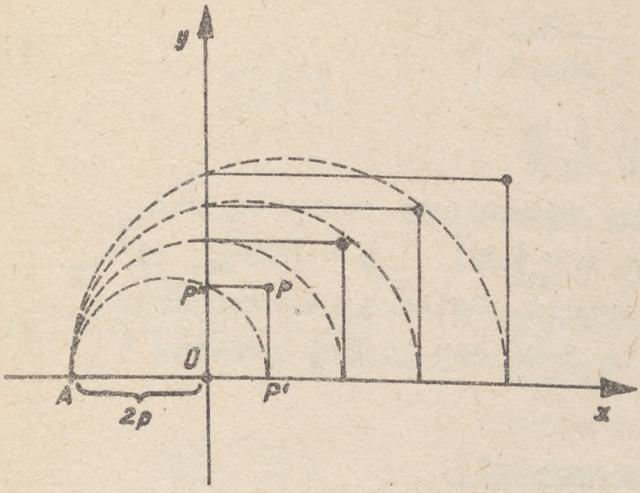
Z postaci tych równań wynika, że każdemu punktowi P(x,y) paraboli możemy przyporządkować w sposób jednoznaczny taką wartość parametru t, że

$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t$$

Odwrotnie, jeżeli t_o jest dowolną liczbą z przedziału nieogranicznego $(-\infty, +\infty)$, to punkt $\frac{t_o^2}{2p}$, t_o jest punktem paraboli, jego bowiem współrzędne spełniają równanie paraboli.

Zatem równania (5) przedstawiają parametrycznie parabolę. Interpretacja geometryczna parametru t jest oczywista, parametr t jest rzędną punktu paraboli.

Ze związku $t^2 = 2px$ wynika, że rzędna punktu paraboli jest średnią geometryczną między parametrem 2p a odciętą tego punktu. Z własności tej możemy korzystać przy konstrukcji dowolnej liczby punktów paraboli. Na ujemnej półosi x odkreślamy odcinek AO,



Rys. 173

długości równej parametrowi paraboli 2p, a na dodatniej półosi x odcinek OP' dowolnej długości (rys.173).
Na odcinku A P', jako na średnicy, zataczamy półokrąg i punkt przecięcia się półokręgu z osią y oznaczamy przez P''. Mamy

$$|OP''|^2 = 2p\,|OP'|$$

Punkty P' i P'' są więc rzutami punktu P paraboli na osi układu. Prowadząc przez punkty P' i P'' równoległe do osi układu, otrzymamy w przecięciu się prostych punkt P.

ROZDZIAŁ V

LINIE STOPNIA DRUGIEGO

§ 25. LINIE STOPNIA DRUGIEGO

1. Równanie linii stopnia drugiego.

Linią stopnia drugiego nazywamy linię określoną równaniem stopnia drugiego o dwóch zmiennych x i y postaci

$$Ax^2+Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

gdzie nie wszystkie współczynniki w wyrazach stopnia drugiego są jednocześnie równe zeru.
W różnych podręcznikach różnie oznacza się współczynniki występujące w równaniu (1). Tak np. równaniu drugiego stopnia dwóch zmiennych nadaje się często postać

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \qquad (2)$$

lub

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \qquad (3)$$

Ostatnia postać szczególnie jest dogodna, jeżeli przy badaniu tego równania posługujemy się wyznacznikami.
W naszych dalszych rozważaniach posłużymy się właśnie tą postacią.

Na podstawie znanych już równań okręgu, elipsy hiperboli i paraboli możemy powiedzieć, że linie te są liniami stopnia drugiego, ich bowiem równania są niezupełnymi równaniami postaci (1). Powstaje jednak pytanie, czy istnieją jeszcze inne linie stopnia drugiego. Nie trudno jest na to pytanie odpowiedzieć. Jeżeli np. weźmiemy równanie stopnia drugiego.

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (4)$$

to równaniu temu czynią zadość tylko współrzędne punktów, które należą do prostych

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Równanie zatem (4) przedstawia te proste. Równanie więc postaci (4) określa dwie proste przecinające się lub równoległe jako linię stopnia drugiego.

Równanie stopnia drugiego może określać też jedną prostą jak np.

$$(Ax + By + C)^2 = 0 \qquad (5)$$

W takim przypadku będziemy mówili dokładniej, że równanie przedstawia dwie proste pokrywające się lub prostą podwójną.

Równanie stopnia drugiego może przedstawiać punkt jak np. równanie

$$x^2 + y^2 = 0,$$

któremu czyni zadość tylko punkt (0,0).

Pewnym równaniom stopnia drugiego nie odpowiada żadna figura rzeczywista, jak np. równaniom

$$x^2 + y^2 = -r^2$$

$$\frac{x^2}{-a^2} + \frac{y^2}{-b^2} = 1.$$

W tych przypadkach będziemy mówili, że równanie przedstawia utwór urojony i to zależnie od postaci równania okrąg urojony lub elipsę urojoną.

Wykażemy, że równanie (3) przedstawia zawsze jeden z następujących utworów:

1. utwór urojony, 2. punkt, 3. dwie proste, 4. elipsę, (w szczególnym przypadku okrąg), 5. hiperbolę, 6. parabolę.

Okaże się, że rodzaj utworu określonego równaniem (3) jest zależny od znaku dwóch wyznaczników symetrycznych

$$w = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} \quad i \quad W = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix}$$

gdzie $a_{ik} = a_{ki}$.

Wyznaczniki te nazywamy odpowiednio małym i wielkim wyróżnikiem równania (3).

2. Dyskusja równania jednorodnego stopnia drugiego.

Równaniem jednorodnym stopnia drugiego nazywamy równanie

$$a_{11} x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0, \qquad (6)$$

w którym nie wszystkie współczynniki a_{11}, a_{12}, a_{22} są równe zeru. Równanie to jest szczególnym przypadkiem równania ogólnego (3), w którym $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$.
Wykażemy, że równanie (6) przedstawia

1^0 dwie proste przecinające się, gdy $w < 0$,

2^0 jedną prostą (dwie proste pokrywające się), gdy $w = 0$,

3^0 punkt, gdy $w > 0$.

Dowód:

1/ Niech będzie $a_{11} \neq 0$, wtedy uważając lewą stronę równania (6) za trójmian kwadratowy o zmiennej x, możemy ją przedstawić w postaci kanonicznej x/,

x/ $ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

t.zn. w postaci

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=a_{11}\left[\left(x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2-\frac{4(a_{12}^2-a_{11}a_{22})y^2}{4\,a_{11}^2}\right].$$

Równanie więc (6) możemy napisać w postaci

$$\left(x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2-\frac{-wy^2}{a_{11}{}^2}=0 \qquad (7)$$

1° Gdy $w < 0$, to lewa strona jest różnicą kwadratów i daje się rozłożyć na dwa czynniki rzeczywiste:

$$\left(x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y+\frac{\sqrt{-w}}{a_{11}}y\right)\left(x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y-\frac{\sqrt{-w}}{a_{11}}y\right)=0$$

Równanie to jest spełnione przez współrzędne punktów należących do prostych

$$x+\frac{a_{12}+\sqrt{-w}}{a_{11}}y=0,$$

$$x+\frac{a_{12}-\sqrt{-w}}{a_{11}}y=0$$

Równanie zatem (6) określa w tym przypadku dwie proste przecinające się.

2° Gdy $w = 0$, to lewa strona równania (7) jest kwadratem dwumianu. Mamy wówczas

$$\left(x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y\right)^2=0.$$

Równanie to spełniają punkty prostej

$$x+\frac{a_{12}}{a_{11}}y=0$$

Mówimy, że równanie (6) określa dwie proste pokrywające się lub też prostą podwójną.

3° Gdy $w > 0$, równanie (7) jest spełnione tylko przez punkt (0,0). Lewą stronę równania możemy rozłożyć na czynniki zespolone i wobec tego mówimy, że równanie (6) w tym przypadku określa punkt lub dwie proste urojone przecinające się w punkcie rzeczywistym (0,0).

2/ Jeżeli $a_{22} \neq 0$, to uważając lewą stronę równania (6) za trójmian kwadratowy względem y, otrzymamy

$$\left(y + \frac{a_{12}}{a_{22}} x\right)^2 - \frac{-w}{a_{22}^2} x^2 = 0$$

Postępując dalej jak w przypadku 1/ otrzymamy wyniki zgodne z twierdzeniem.

3/ Jeżeli $a_{11}=a_{22}=0$, ale $a_{12} \neq 0$, to $w = -a_{12}^2 < 0$.

W tym przypadku równanie (6) ma postać

$$2\, a_{12}\, xy = 0,$$

Równanie to spełnione jest przez punkty, które należą do prostych

$$x = 0,$$
$$y = 0$$

Równanie więc (6) w tym przypadku przedstawia dwie proste przecinające się, co zgodne jest z wygłoszonym twierdzeniem.

Przykłady:

1. Dla równania

$$21x^2+xy-10y^2 = 0$$

mały wyróżnik

$$w=a_{11}a_{22}-a_{12}^2= -210- \frac{1}{4} = - \frac{841}{4} < 0,$$

równanie więc określa dwie proste przecinające się. Rozwiązując równanie względem x, otrzymamy

$$x_1= \frac{-y-29y}{42} = - \frac{5}{7}y, \quad x_2= \frac{-y+29y}{42} = \frac{2}{3}\, y$$

Równanie dane możemy teraz napisać w postaci

$$\left(x + \frac{5}{7}y\right)\left(x - \frac{2}{3}y\right) = 0,$$

skąd wynika, że prostymi określonymi tym równaniem są proste

$$x + \frac{5}{7}y = 0,$$

$$x - \frac{2}{3}y = 0.$$

2. Obliczając wyróżnik w dla równania

$$x^2 - 2xy+5y^2 = 0,$$

Otrzymujemy

$$w = 5 - 4 = 1 > 0$$

Zatem równanie przedstawia punkt (0,0) lub wyrażając się inaczej, dwie proste urojone, przecinające się w tym punkcie.
Przedstawiając lewą stronę równania w postaci kanonicznej, otrzymamy

$$(x - y)^2 + 4y^2 = 0,$$

a dalej

$$(x-y-2iy)(x-y+2iy) = 0$$

lub

$$[x - (1+2i)\ y]\ [x - (1-2i)\ y] = 0.$$

Prostymi urojonymi są więc proste

$$x - (1+2i)y = 0,$$

$$x - (1-2i)y = 0.$$

3. <u>Dyskusja równania linii stopnia drugiego.</u>
Wykażemy, że równanie

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33} = 0 \qquad (3)$$

przedstawia w przypadku, gdy

1/ $W \neq 0$ linię stożkową właściwą i to

przy $w > 0$ - elipsę,

" $w = 0$ - parabolę,

" $w < 0$ - hiperbolę,

2/ $W = 0$ linię stożkową niewłaściwą i to

przy $w > 0$ - dwie proste urojone,

" $w = 0$ - dwie proste równoległe lub prostą podwójną,

" $w < 0$ - dwie proste rzeczywiste przecinające się.

Dowód twierdzenia przeprowadzimy najpierw w prostszym przypadku, gdy $a_{12} = 0$, a następnie przy założeniu $a_{12} \neq 0$.

I/ Niech $a_{12} = 0$, wtedy równanie linii stopnia drugiego ma postać

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33} = 0, \tag{8}$$

a wyróżniki równania są równe:

$$w = \begin{vmatrix} a_{11}, & 0 \\ 0, & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22},$$

$$W = \begin{vmatrix} a_{11}, & 0, & a_{13} \\ 0, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,(a_{22}a_{33}-a_{23}^2) - a_{22}a_{13}^2 =$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2.$$

a/ Jeżeli $w \neq 0$, czyli gdy $a_{11} \neq 0$ i $a_{22} \neq 0$, to równanie (8) możemy przedstawić w postaci

$$a_{11}\left(x^2+2\,\frac{a_{13}}{a_{11}}x + \frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}\right) + a_{22}\left(y^2+2\,\frac{a_{23}}{a_{22}}\,y + \frac{a_{23}^2}{a_{22}^2}\right) =$$

$$= \frac{a_{13}^2}{a_{11}} + \frac{a_{23}^2}{a_{22}} - a_{33}$$

a dalej

$$a_{11}\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+a_{22}\left(y+\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2=\frac{a_{22}a_{13}^2+a_{11}a_{23}^2-a_{11}a_{22}a_{33}}{a_{11}\,a_{12}}$$

lub

$$a_{11}\left(x+\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2+a_{22}\left(y+\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2=-\frac{W}{w}$$

Jeżeli układ Oxy przesuniemy równolegle do punktu $O'\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}},\ -\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)$, to równanie (8) w układzie $O'x'y'$ przyjmie postać

$$a_{11}x'^2+a_{22}\,y'^2=-\frac{W}{w} \tag{9}$$

α/ Gdy $W \neq 0$ równanie (9) przedstawia:
elipsę [1], jeżeli a_{11} i a_{22} są jednakowych znaków, czyli gdy $w > 0$;
hiperbolę, jeżeli a_{11} i a_{22} są przeciwnych znaków, czyli gdy $w < 0$.

β/ Gdy $W = 0$, równanie (9) staje się równaniem jednorodnym i przedstawia
dwie proste rzeczywiste przecinające się, gdy $w < 0$;
dwie proste urojone, gdy $w > 0$.

b/ Jeżeli $w = 0$, to $a_{11}=0$ lub $a_{22}=0$. Załóżmy, że $a_{11}=0$, a $a_{22}\neq 0$. W tym przypadku równanie (8) możemy napisać w postaci

$$a_{22}\left(y^2+2\frac{a_{23}}{a_{22}}y+\frac{a_{23}^2}{a_{22}^2}\right)=-2a_{13}x-a_{33}+\frac{a_{23}^2}{a_{22}}, \tag{10}$$

przy czym $W=-a_{22}a_{13}^2$

α/ Gdy $W \neq 0$, to $a_{13}\neq 0$ i równanie (10) możemy na-

---

1/ elipsa jest rzeczywista, gdy $a_{11}\,W < 0$, urojona, gdy $a_{11}\,W > 0$.

pisać w postaci

$$a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 = -2a_{13}\left(x + \frac{a_{33}}{2a_{13}} - \frac{a_{23}^2}{2a_{22}a_{13}}\right)$$

lub

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 = -\frac{2a_{13}}{a_{22}}\left(x + \frac{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}{2a_{22}\,a_{13}}\right).^{x/}$$

Jeżeli układ współrzędnych przesuniemy równolegle do punktu

$$O'\left(-\frac{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}{2a_{22}\,a_{13}}, -\frac{a_{23}}{a_{22}}\right),$$

to równanie (8) w układzie O'x'y' przyjmie postać

$$y'^2 = -\frac{2a_{13}}{a_{22}}x'$$

i przedstawia parabolę.

β/Gdy $W = 0$, to $a_{13} = 0$ i równanie (10) możemy napisać w postaci

$$\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 = -\frac{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}{a_{22}^2}.$$

Równanie to przedstawia:

gdy $a_{22}a_{33}-a_{23}^2 < 0$ - dwie proste równoległe,

" $a_{22}a_{33}-a_{23}^2 = 0$ - jedną prostą podwójną,

" $a_{22}a_{33}-a_{23}^2 > 0$ - dwie proste urojone,

Do analogicznych wyników dojdziemy również w przypadku, gdy $a_{11} \neq 0$, a $a_{22} = 0$.

II/ Rozpatrzymy z kolei przypadek, gdy $a_{12} \neq 0$. Przez obrót układu Oxy o odpowiednio dobrany kąt

---

x/ $a_{22}a_{33}-a_{23}^2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

przypadek ten możemy sprowadzić do przypadku I/

Między współrzędnymi punktu (x,y) w układzie Oxy a współrzędnymi $(x'y')$tego samego punktu w układzie O $x'y'$ zachodzą związki

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned} \qquad (11)$$

Podstawiając do równania (3) za x i y wyrażenia określone wzorami (11), otrzymamy równanie, które określa linię stopnia drugiego w układzie O $x'y'$. Otrzymamy

$$a_{11}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 + a_{22}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 +$$

$$+ 2a_{12}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) +$$

$$+ 2a_{13}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2a_{23}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + a_{33} = 0$$

lub po wykonaniu działań i uporządkowaniu

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \qquad (12)$$

gdzie

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha,$$

$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha,$$

$$a'_{12} = \tfrac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha,$$

$$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha,$$

$$a'_{23} = a_{23}\cos\alpha - a_{13}\sin\alpha,$$

$$a'_{33} = a_{33}.$$

Wykażemy, że wyróżniki w' i W' równania (12) równe są wyróżnikom w i W równania (3), czyli wyrażając się inaczej: wyróżniki równania linii stopnia drugiego są niezmiennikami obrotu układu współrzędnych. Istotnie, ponieważ

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1,$$

więc możemy napisać

$$w = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

Mnożąc wiersze pierwszego wyznacznika przez kolumny drugiego wyznacznika otrzymamy

$$w = \begin{vmatrix} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha, & -a_{11}\sin\alpha + a_{12}\cos\alpha \\ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha, & -a_{12}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha \end{vmatrix},$$

a dalej pisząc znowu

$$w = \begin{vmatrix} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha, & -a_{11}\sin\alpha + a_{12}\cos\alpha \\ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha, & -a_{12}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

i mnożąc teraz kolumny pierwszego wyznacznika x/ przez kolumny drugiego, otrzymamy

---

x/ Iloczyn dwóch wyznaczników tego samego stopnia otrzymamy, mnożąc wiersze jednego przez wiersze drugiego, albo kolumny jednego przez kolumny drugiego, albo kolumny jednego przez wiersze drugiego. Iloczyn wyznaczników trzeciego stopnia uzyskany przez mnożenie wierszy jednego przez wiersze drugiego ilustruje wzór:

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, b_{13} \\ b_{21}, b_{22}, b_{23} \\ b_{31}, b_{32}, b_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}, a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23}, a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13}, a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}, a_{21}b_{31}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{12}, a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23}, a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

$$w=\begin{vmatrix} a_{11}\cos^2\alpha+a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\sin^2\alpha, & -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha+a_{12}\cos^2\alpha-a_{12}\sin^2\alpha+a_{22}\sin\alpha\cos\alpha, \\ -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha-a_{12}\sin^2\alpha+a_{12}\cos^2\alpha+{}_{22}\sin\alpha\cos\alpha, & a_{11}\sin^2\alpha-a_{12}\sin\alpha\cos\alpha-a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\cos^2\alpha \end{vmatrix}$$

Elementy tego wyznacznika są równe odpowiednio elementom a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} wyznacznika w', czyli $w = w'$.
Podobnie, ponieważ

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha, & 0 \\ \sin\alpha, & \cos\alpha, & 0 \\ 0 & , \ 0 & , \ 1 \end{vmatrix} = 1$$

możemy napisać

$$W = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha, & 0 \\ \sin\alpha, & \cos\alpha, & 0 \\ 0 & , \ 0 & , \ 1 \end{vmatrix}^2$$

i wykonując kolejno mnożenia wyznaczników jak poprzednio otrzymamy, że $W = W'$.
Stwierdziwszy niezmienniczość wyróżników równania danego i równania przekształconego dobieramy kąt obrotu α tak, by $a_{12} = 0$. W tym celu wystarczy przyjąć jako kąt obrotu kąt, który jest rozwiązaniem równania

$$(a_{22}-a_{11})\sin 2\alpha + 2a_{12}\cos 2\alpha = 0$$

lub

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} . \qquad (13)$$

Równanie

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (14)$$

po obrocie układu współrzędnych o kąt α, który jest pierwiastkiem równania (13) przyjmie postać

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{13}x' + a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \qquad (15)$$

czyli przyjmie postać równania rozpatrzoną już w przypadku I/.

Ponieważ wartości wyróżników w i W wskutek obrotu układu nie ulegają zmianie, więc wyniki dyskusji uzyskane w wypadku I/ są aktualne również dla wypadku II/.
Sprowadzenie równania (14) do postaci (15) nazywamy sprowadzeniem równania (14) do kierunków głównych. Osie symetrii linii stopnia drugiego po obrocie o kąt α są równoległe do osi układu $O\,x'y'$.

Wyniki dyskusji równania linii stopnia drugiego możemy ująć w następującej tabeli:

	$W \neq 0$ Stożkowa właściwa	$W = 0$ Stożkowa niewłaściwa
$w > 0$	Elipsa (rzeczywista lub urojona)	Proste urojone, przecinające się w punkcie rzeczywistym
$w = 0$	Parabola	Proste równoległe lub pokrywające się (rzeczywiste lub urojone).
$w < 0$	Hiperbola	Proste rzeczywiste przecinające się.

4. Przykłady badania równania linii stopnia II-go.

1. Zbadamy linię

$$8x^2 + 17y^2 - 12xy + 72x - 104y + 202 = 0$$

W równaniu tym

$a_{11}=8$, $a_{22}=17$, $a_{12}=-6$, $a_{13}=36$, $a_{23}=-52$, $a_{33}=202$.

Obliczamy wyróżniki:

$$w = \begin{vmatrix} 8, & -6 \\ -6, & 17 \end{vmatrix} = 100, \quad W = \begin{vmatrix} 8, & -6, & 36 \\ -6, & 17, & -52 \\ 36, & -52, & 202 \end{vmatrix} = -1000.$$

Wobec tego, że $W \neq 0$ i $w > 0$, równanie dane określa elipsę.
Sprowadzamy równanie elipsy do kierunków głównych.
Kąt obrotu α otrzymamy z równania

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{8 - 17}{-12} = \frac{3}{4}$$

mianowicie

$$2\alpha \approx 53^\circ 8'$$

$$\text{a} \qquad \alpha \approx 26^\circ 34'$$

Równanie elipsy po obrocie układu o kąt α przyjmie postać

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}\,x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0$$

Obliczymy wartości współczynników a'_{11}, a'_{22} itd. Współczynniki te wyrażają się przez współczynniki równania danego $a_{11}, a_{12} \dots$ oraz przez wartości $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ i wobec tego najpierw obliczymy wartości tych funkcji trygonometrycznych.

Jeżeli

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{3}{4}, \text{ to } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3},$$

a ponieważ

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3},$$

więc z równania

$$2\operatorname{tg}^2\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2},$$

a dalej

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

Z układu zaś równań

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{1}{2} \\ 2\sin\alpha\cos\alpha &= \frac{4}{5} \end{aligned}\right\}$$

Otrzymamy

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Współczynniki więc a'_{11}, a'_{22} itd. mają wartości:

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha = 5,$$

$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha = 20,$$

$$a'_{12} = 0,$$

$$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha = \frac{20}{\sqrt{5}},$$

$$a'_{23} = a_{23}\cos\alpha - a_{13}\sin\alpha = -\frac{140}{\sqrt{5}},$$

$$a'_{33} = a_{33} = 202.$$

Zatem równanie linii stopnia drugiego w nowym układzie współrzędnych ma postać

$$5x'^2 + 20y'^2 + \frac{40}{\sqrt{5}}x' - \frac{280}{\sqrt{5}}y' + 202 = 0$$

Równanie to przekształcamy dalej następująco:

$$5\left(x'^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{16}{5}\right) + 20\left(y'^2 - \frac{14}{\sqrt{5}}y' + \frac{49}{5}\right) = 16 + 196 - 202,$$

$$5\left(x' + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + 20\left(y' - \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 = 10,$$

$$\frac{\left(x' + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2}{2} + \frac{\left(y' - \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

Z postaci tego równania wynika, że w układzie $0\,x'y'$ przedstawia ono elipsę o środku

$$S\left(-\frac{4}{\sqrt{5}},\ \frac{7}{\sqrt{5}}\right)$$

i osiach równych

$$2a = 2\sqrt{2}, \quad 2b = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

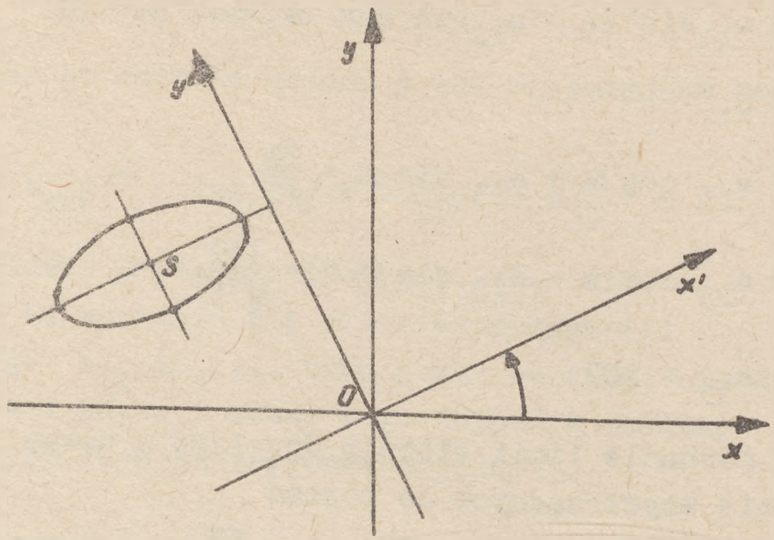
równoległych do osi x' i y' (rys. 174).

2. Zbadamy linię o równaniu

$$8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0.$$

W równaniu tym

$$a_{11}=0,\ a_{22}=8,\ a_{12}=3,\ a_{13}=-6,\ a_{23}=-13,\ a_{33}=11.$$



Rys. 174

Wyróżniki równania są równe:

$$w = \begin{vmatrix} 0, & 3 \\ 3, & 8 \end{vmatrix} = -9 < 0, \quad W = \begin{vmatrix} 0, & 3, & -6 \\ 3, & 8, & -13 \\ -6, & -13, & 11 \end{vmatrix} = 81 \neq 0$$

Ponieważ $W \neq 0$ i $w < 0$, więc równanie przedstawia hiperbolę. Sprowadzamy równanie do kierunków głównych, obracając układ współrzędnych o kąt α, który wyznaczamy z równania

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Mamy

$$2\alpha \approx 143^\circ 8',$$
$$\alpha \approx 71^\circ 34'$$

Ponieważ $\operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{4}{3}$, to $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{3}{4}$,

a dalej

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{3}{4},$$

skąd

$$3\,\mathrm{tg}^2\alpha - 8\,\mathrm{tg}\,\alpha - 3 = 0,$$

czyli

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 3$$

wobec tego

$$\sin 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{3}{5}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = -\frac{4}{5}$$

Z układu zaś równań

$$\left.\begin{aligned} 2\sin\alpha\cos\alpha &= \frac{3}{5} \\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= 3 \end{aligned}\right]$$

otrzymujemy

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Obliczamy a'_{11}, a'_{22} itd.:

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha = 9,$$

$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha = -1,$$

$$a'_{12} = 0,$$

$$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha = -\frac{45}{\sqrt{10}},$$

$$a'_{23} = a_{23}\cos\alpha - a_{13}\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{10}},$$

$$a'_{33} = a_{33} = 11.$$

Równanie więc hiperboli w układzie O x'y' ma postać:

$$9x'^2 - y'^2 - \frac{90}{\sqrt{10}}x' + \frac{10}{\sqrt{10}}y' + 11 = 0.$$

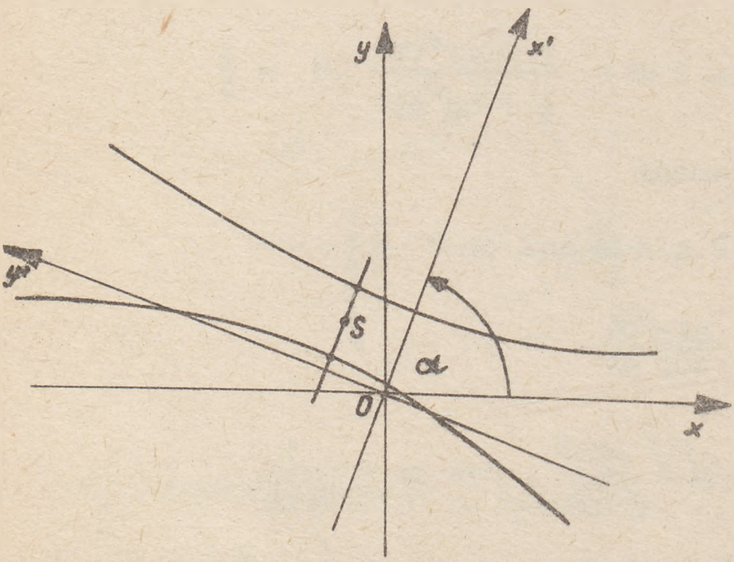
Równanie to przekształcamy dalej następująco:

$$9x'^2 - y'^2 - 9\sqrt{10}\,x' + \sqrt{10}\,y' + 11 = 0,$$

$$9\left(x'^2 - \sqrt{10}x' + \frac{10}{4}\right) - \left(y'^2 - \sqrt{10}y' + \frac{10}{4}\right) = \frac{45}{2} - \frac{5}{2} - 11,$$

$$9\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 - \left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 9,$$

$$\frac{\left(x' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{1} - \frac{\left(y' - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}{9} = 1,$$



Rys. 175

Ostatnia postać jest równaniem osiowym hiperboli, której środek ma w układzie 0 x'y' współrzędne $S\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ x/ i której osie $2a=2$, $2b=6$ są równoległe odpowiednio do osi x' i y' (rys. 175).

3. Zbadamy linię o równaniu

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$$

Mamy:

$a_{11} = 1$, $a_{22}=4$, $a_{12}=-2$, $a_{13}=2$, $a_{23}=-1\frac{1}{2}$, $a_{33}=-7$,

$$w = \begin{vmatrix} 1, & -2 \\ -2, & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad W = \begin{vmatrix} 1, & -2, & 2 \\ -2, & 4, & \frac{3}{2} \\ 2, & -\frac{3}{2}, & -7 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4}$$

x/ w układzie Oxy współrzędne punktu S równe są -1 i 2.

Wobec tego, że $w = 0$ i $W \neq 0$, równanie dane przedstawia parabolę.

Obracamy układ Oxy o kąt α uzyskany z równania

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} = \frac{3}{4}.$$

Kąt więc obrotu α równa się w przybliżeniu $26^{\circ}34'$. Korzystając z wyników poprzedniego przykładu, mamy

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos 2\alpha = \frac{3}{5},$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Obliczamy współczynniki równania linii w układzie O $x'y'$:

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha = 0,$$

$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha = 5,$$

$$a'_{12} = 0,$$

$$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha = \frac{2\frac{1}{2}}{\sqrt{5}},$$

$$a'_{23} = a_{23}\cos\alpha - a_{13}\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{5}},$$

$$a_{33} = -7.$$

Równanie paraboli w układzie O $x'y'$ ma postać

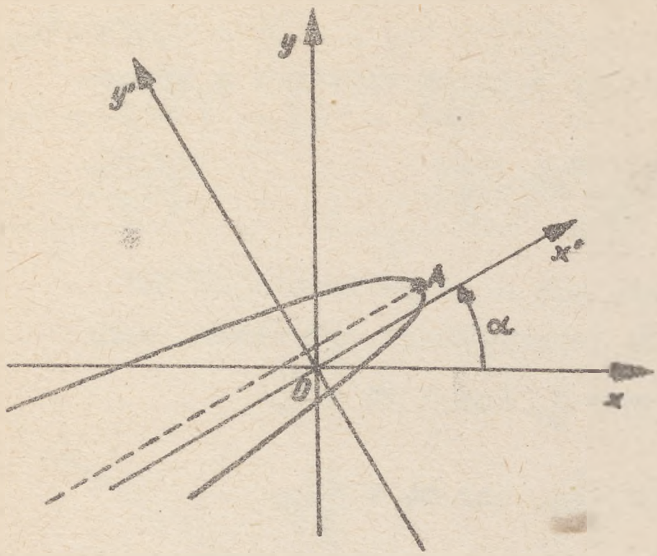
$$5y'^2 + \frac{5}{\sqrt{5}}x' - \frac{10}{\sqrt{5}}y' - 7 = 0.$$

Przekształcając je otrzymujemy

$$5\left(y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{5}\right) = -\frac{5}{\sqrt{5}}x' + 8,$$

$$\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{5},$$

$$\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x' - \frac{8\sqrt{5}}{5}\right).$$



Rys. 176

Z ostatniej postacix równania odczytujemy, że wierzchołek A paraboli w układzie O x'y' ma współrzędne

$$\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

parametr paraboli $2p = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, oś paraboli jest równoległa do osi x' i posiada zwrot przeciwny do zwrotu dodatniego osi x' (rys. 176). Wierzchołek A w układzie Oxy ma współrzędne $x = 3$, $y = 2$, co można sprawdzić posługując się związkami

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

4. Badamy linię o równaniu

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$$

Ponieważ

$$w = \begin{vmatrix} 5, & -1 \\ -1, & 5 \end{vmatrix} = 24 > 0 \text{ i } W = \begin{vmatrix} 5, & -1, & -2 \\ -2, & 5, & 10 \\ -2, & 10, & 20 \end{vmatrix} = 0,$$

więc dane równanie przedstawia dwie proste urojone przecinające się w punkcie rzeczywistym.

Sprowadzamy równanie do kierunków głównych.

Z równania

$$\text{ctg}\, 2\alpha = \frac{5-5}{-2} = 0 .$$

Otrzymujemy $2\alpha = 90^0$ a $\alpha = 45^0$, a dalej

$$\sin 2\alpha = 1, \quad \cos 2\alpha = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Wobec tego współczynniki równania linii w układzie O x'y', powstałym z układu Oxy przez obrót o kąt $\alpha = 45^\circ$, przyjmują wartości:

$$a'_{11} = a_{11}\cos^2\alpha + a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\sin^2\alpha = 5.\tfrac{1}{2} - 1 + 5.\tfrac{1}{2} = 0,$$

$$a'_{22} = a_{11}\sin^2\alpha - a_{12}\sin 2\alpha + a_{22}\cos^2\alpha = 5.\tfrac{1}{2} + 1 + 5.\tfrac{1}{2} = 6,$$

$$a'_{12} = 0,$$

$$a'_{13} = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha = -2 . \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 . \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2},$$

$$a'_{23} = a_{23}\cos\alpha - a_{13}\sin\alpha = 10. \frac{\sqrt{2}}{2} + 2. \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2},$$

$$a'_{33} = 20.$$

Równaniem linii w układzie O x'y' jest

$$4x'^2 + 6y'^2 + 8\sqrt{2}\,x' + 12\sqrt{2}\,y' + 20 = 0.$$

Przekształcając to równanie otrzymujemy

$$4\left(x'^2 + 2\sqrt{2}\,x' + 2\right) + 6\left(y'^2 + 2\sqrt{2}\,y' + 2\right) = 20 - 20$$

lub

$$2\left(x' + \sqrt{2}\right)^2 + 3\left(y' + \sqrt{2}\right)^2 = 0,$$

skąd wynika, że równanie to przedstawia punkt o współrzędnych $x' = -\sqrt{2}$, $y' = -\sqrt{2}$.
Punkt ten w układzie Oxy ma współrzędne:

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = -\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha = -\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = -2$$

Chcąc uzyskać równania prostych urojonych w układzie O x'y', należy lewą stronę równania linii w tym układzie rozłożyć na czynniki zespolone.

Do tych samych wyników dojdziemy drogą krótszą, odpowiednio przekształcając równanie linii.
Mianowicie, pisząc równanie

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$$

w postaci

$$5x^2 - 2x(y + 2) + 5y^2 + 20y - 20 = 0,$$

możemy lewą stronę równania uważać za trójmian kwadratowy o zmiennej x.
Przedstawiając lewą stronę równania w postaci kanoniczenej otrzymamy

$$\left(x - \frac{y+2}{5}\right)^2 + 24\left(\frac{y+2}{5}\right)^2 = 0,$$

skąd bezpośrednio wynika, że jest to równanie punktu 0, -2 .

5. Badamy linię

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$$

Ponieważ

$$w = \begin{vmatrix} 7, & 3 \\ 3, & -1 \end{vmatrix} = -16 < 0 \text{ i } W = \begin{vmatrix} 7, & 3, & 14 \\ 3, & -1, & 6 \\ 14, & 6, & 28 \end{vmatrix} = 0,$$

więc równanie przedstawia dwie proste przecinające się.
Celem uzyskania równań tych prostych możemy dane równanie drogą obrotu układu sprowadzić do kierunków głównych lub też postąpić tak jak w ostatnim przykładzie.
Pisząc równanie

$$y^2 - 6xy - 12y - 7x^2 - 28x - 28 = 0$$

w postaci

$$y^2 - 6y(x+2) - 7(x^2+4x+4) = 0,$$

możemy lewą stronę równania traktować jako trójmian kwadratowy o zmiennej y i przedstawić w postaci kanonicznej.

Otrzymujemy

$$\left[y - 3(x + 2)\right]^2 - 16(x + 2)^2 = 0,$$

skąd

$$\left[y - 3(x+2) - 4(x+2)\right]\left[y - 3(x+2) + 4(x+2)\right] = 0$$

lub

$$(y - 7x - 14)(y + x + 2) = 0.$$

Zatem badane równanie stopnia drugiego przedstawia proste

$$y - 7x - 14 = 0,$$

$$y + x + 2 = 0$$

6. Badamy linię

$$9x^2+12xy+4y^2-24x - 16y + 3 = 0$$

Ponieważ

$$w = \begin{vmatrix} 9, & 6 \\ 6, & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ i } \quad W = \begin{vmatrix} 9, & 6, & -12 \\ 6, & 4, & -8 \\ -12, & -8, & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

więc równanie przedstawia dwie proste równoległe. Postępując podobnie jak w przykładzie 5, możemy równanie linii sprowadzić do postaci

$$\left(y + \frac{3x-4}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0,$$

skąd otrzymamy jako równania prostych równoległych

$$2y + 3x - \left(4 + \sqrt{13}\right) = 0,$$

$$2y + 3x - \left(4 - \sqrt{13}\right) = 0.$$

R O Z D Z I A Ł VI

PRZYKŁADY POWIERZCHNI

§ 26. KULA

1. Równanie kuli (sfery)

Mówiąc o kuli mamy na myśli kulę jako powierzchnię. Kula jako powierzchnia jest miejscem geometrycznym punktów, których odległości od punktu stałego, zwanego środkiem kuli, są równe.

Wykażemy, że równaniem kuli o środku $S(a,b,c)$ i promieniu równym r jest

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \qquad (1)$$

Istotnie, jeżeli punkt $P(x,y,z)$ należy do kuli, to

$$|\overline{SP}| = r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

skąd

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

Jeżeli punkt $P(x,y,z)$ nie należy do kuli, to jego odległość od punktu S jest większa lub mniejsza od r, czyli wtedy

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 > 0$$

lub

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < 0$$

Równanie więc (1) jest równaniem kuli.

Jeżeli środek kuli znajduje się w początku układu, to równanie (1) przyjmuje postać:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad (2)$$

Rozwijając kwadraty w równaniu (1) i oznaczając nowymi symbolami współczynniki, występujące w uzyskanej postaci, otrzymamy

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0 \qquad (3)$$

Odwrotnie, każde równanie postaci (3) możemy przekształcić następująco:

$$(x^2+2mx+m^2)+(y^2+2ny+n^2)+(z^2+2pz+p^2)=m^2+n^2+p^2-q,$$

a dalej

$$(x+m)^2 +(y+n)^2+(z+p)^2 = m^2+n^2+p^2 - q$$

Z postaci tej wynika, że równanie (3) przedstawia

1° kulę o środku $S(-m,-n,-p)$ i promieniu

$$r = \sqrt{m^2+n^2+p^2-q}, \text{ jeżeli } m^2+n^2+p^2-q > 0,$$

2° punkt $(-m, -n, -p)$, jeżeli $m^2+n^2+p^2-q = 0$,

3° kulę urojoną, jeżeli $m^2 + n^2 + p^2 - q < 0$.

2. <u>Płaszczyzna styczna do kuli.</u>

Twierdzenie: Jeżeli dana jest kula

$$(x-a)^2 +(y-b)^2 +(z-c)^2 = r^2$$

i punkt $P_0(x_0,y_0,z_0)$ należy do kuli, to równaniem płaszczyzny stycznej do kuli w punkcie $P_0(x_0,y_0,z_0)$ jest

$$(x-a)(x_0-a) +(y-b)(y_0-b) + (z-c)(z_0-c) = r^2 \qquad (4)$$

Dowód:

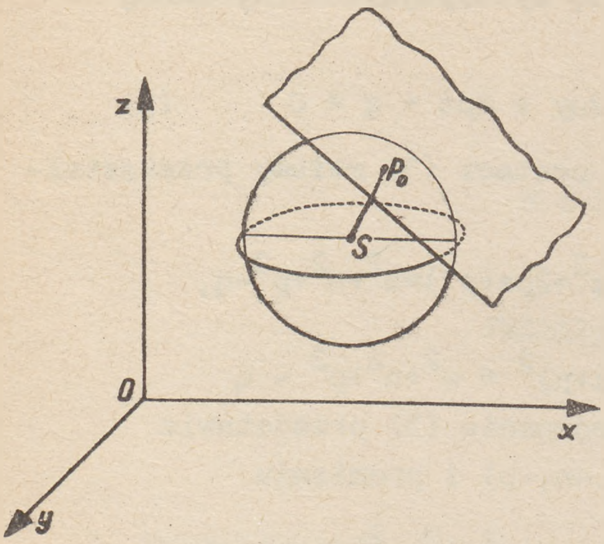
Płaszczyzna styczna do kuli w punkcie $P_0(x_0,y_0,z_0)$ przechodzi przez punkt P_0 i jest prostopadła do promienia kuli, łączącego środek S z punktem P_0(rys.117). Składowe wektora $\overline{SP}_0$ są równe:

$$x_0-a,\ y_0-b,\ z_0-c$$

Równanie więc płaszczyzny stycznej możemy napisać jako równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0(x_0,y_0,z_0)$ i prostopadłej do wektora $\overline{SP}_0\{x_0-a,y_0-b,z_0-c\}$

Otrzymujemy

$$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)+(z_0-c)(z-z_0) = 0 \qquad (5)$$



Rys. 177

Równanie to doprowadzamy do postaci (4) w następujący sposób: Do obu stron równania(5) dodajemy r^2 z tym jednak, że do lewej strony dodajemy r^2 w postaci:

$$(x_0 -a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2.$$

Otrzymujemy

$$(x_0-a)(x-x_0)+(x_0-a)^2 + (y_0-b)(y-y_0) + (y_0-)^2 +$$
$$+ (z_0-c)(z-z_0) + (z_0-c)^2 = r^2$$

lub

$$(x_0-a)(x-x_0+x_0-a)+(y_0-b)(y-y_0+y_0-b)+(z_0-c)(z-z_0+z_0-c)=r^2,$$

czyli postać (4).

Jeżeli środek kuli znajduje się w początku układu, czyli gdy

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

to równaniem płaszczyzny stycznej do kuli w punkcie (x_0,y_0,z_0) jest

$$x\, x_0 + y\, y_0 + z\, z_0 = r^2.$$

3. Równania okręgu w przestrzeni.

Jeżeli okrąg leży w płaszczyźnie równoległej do jednej z płaszczyzn układu, to okrąg możemy określić jako przekrój płaszczyzny na której leży z odpowiednio dobraną kulą lub, gdy poznamy równanie walca kołowego, jako przekrój płaszczyzny okręgu z walcem kołowym o osi prostopadłej do tej płaszczyzny.

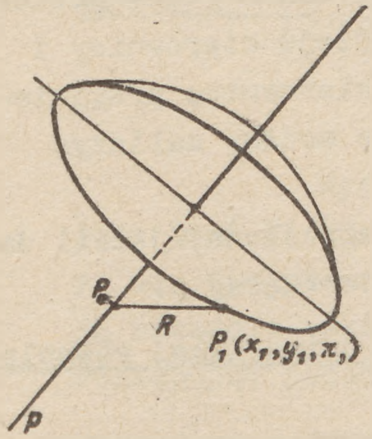
Jeżeli okrąg nie leży w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny układu i powstał z obrotu punktu $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dokoła prostej p (osi obrotu)

$$\frac{x-x_o}{l} = \frac{y-y_o}{m} = \frac{z-z_o}{n}, \qquad (6)$$

to okrąg możemy określić jako przekrój płaszczyzny przechodzącej przez punkt P_1 i prostopadłej do osi p (płaszczyzna obrotu punktu P_1) z odpowiednio dobraną kulą.

Równaniem płaszczyzny przechodzącej przez $P_1(x_1,y_1,z_1)$ i prostopadłej do osi p jest

$$l\,(x-x_1) + m(y-y_1) + n(z-z_1) = 0 \qquad (7)$$



Rys. 178

Kulę obieramy w ten sposób, by jej środek leżał na osi obrotu p, a promień R równał się odległości punktu P_1 od obranego środka S. Jeżeli jako środek kuli przyjmiemy punkt $P_o(x_o,y_o,z_o)$ (rys.178) leżący na prostej p, to

$$R = \sqrt{(x_1-x_o)^2 + (y_1-y_o)^2 + (z_1-z_o)^2}$$

i wtedy okrąg powstały z obrotu punktu $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dokoła prostej p jest określony układem równań

$$\left.\begin{array}{l}(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = (x_1-x_o)^2 + (y_1-y_o)^2 + (z_1-z_o)^2, \\ l(x-x_1) + m(y-y_1) + n(z-z_1) = 0.\end{array}\right\}$$

Środek okręgu znajdziemy, znajdując punkt przebicia prostej p z płaszczyzną obrotu (7)

§ 27. POWIERZCHNIE WALCOWE

1. Określenie powierzchni walcowej.

Jeżeli dana jest linia l i prosta p, która poruszając się z zachowaniem stałego kierunku przechodzi przez wszystkie punkty linii, to powierzchnię zakreśloną ruchem prostej p nazywamy powierzchnią walcową.

Linię l nazywamy kierownicą walca, a prostą p tworzącą walca.

W szkole średniej poznaliśmy tylko powierzchnię walcową, której kierownicą był okrąg (walec kołowy). Przyjęta definicja, pozwala konstruować różne powierzchnie walcowe w zależności od rodzaju kierownicy i kierunku tworzącej. Jeżeli jako kierownicę przyjmiemy prostą, to również płaszczyznę możemy zaliczyć do powierzchni walcowych.

Powierzchnia walcowa jest określona, jeżeli dana jest kierownica l i kierunek tworzącej p.

2. Równanie powierzchni walcowej o tworzącej równoległej do osi układu.

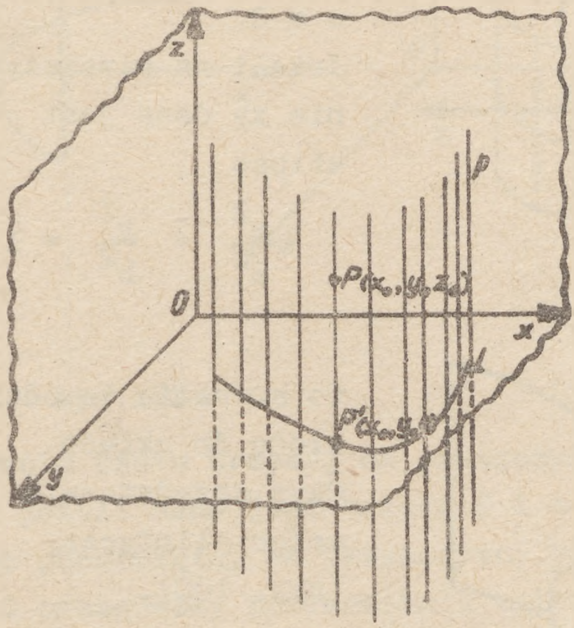
Niech w układzie Oxyz kierownicą powierzchni walcowej będzie linia l leżąca w płaszczyźnie xy, określona w układzie Oxy równaniem $f(x,y)=0$ i niech tworząca p będzie równoległa do osi z.

Wykażemy, że równaniem powierzchni walcowej, tak określonej, jest równanie kierownicy l, czyli

$$f(x,y) = 0 \qquad (1)$$

Dowód: Wykażemy, że 1/ dowolny punkt należący do powierzchni walcowej spełnia równanie (1) i 2/ punkty nie należące do powierzchni walcowej równania tego nie spełniają.

1/Niech punkt $P(x_0,y_0,z_0)$ będzie dowolnym punktem powierzchni walcowej (rys.179), wtedy jego rzut prostokątny P' na płaszczyznę xy leży na kierownicy i ma współrzędne $(x_0,y_0,0)$. Ale para (x_0,y_0) jako para współrzędnych punktu leżącego na linii l spełnia równanie (1), wobec tego równanie to spełniają również współrzędne punktu $P(x_0,y_0,z_0)$ niezależnie od wartości z_0, gdyż zmienna z w równaniu (1) nie występuje.



Rys. 179

2/ Jeżeli punkt $P(x_0,y_0,z_0)$ nie należy do powierzchni walcowej, to jego rzut $P'(x_0,y_0,0)$ nie leży na linii l, para x_0, y_0 nie spełnia równania (1) i wobec tego nie spełniają równania także współrzędne punktu P.

Postępując podobnie można wykazać, że równanie

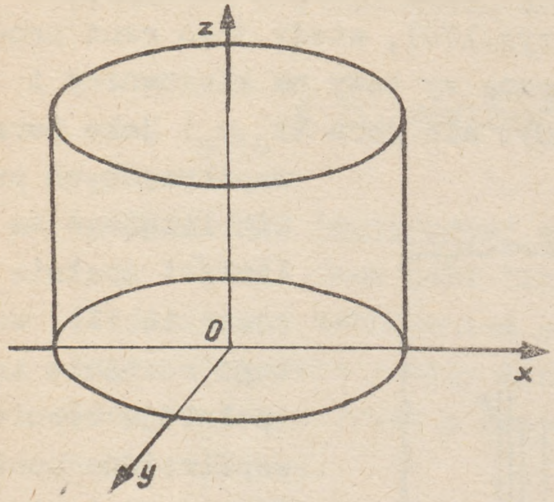
$$f(y,z) = 0$$

określa powierzchnię walcową, której tworzące są równoległe do osi x, zaś równanie

$$f(x,z) = 0$$

przedstawia powierzchnię walcową o tworzących równoległych do osi y.

Z rozważań więc wynika, że jeżeli równanie $f(u,v)=0$ w układzie Ouv przedstawia pewną linię l, to równanie to interpretowane w układzie przestrzennym Ouv w przedstawia powierzchnię walcową o tworzących równoległych do osi w. Linia l jest przekrojem /linią przenikania/ powierzchni walcowej z płaszczyzną układu uv czyli z płaszczyzną $w = 0$.

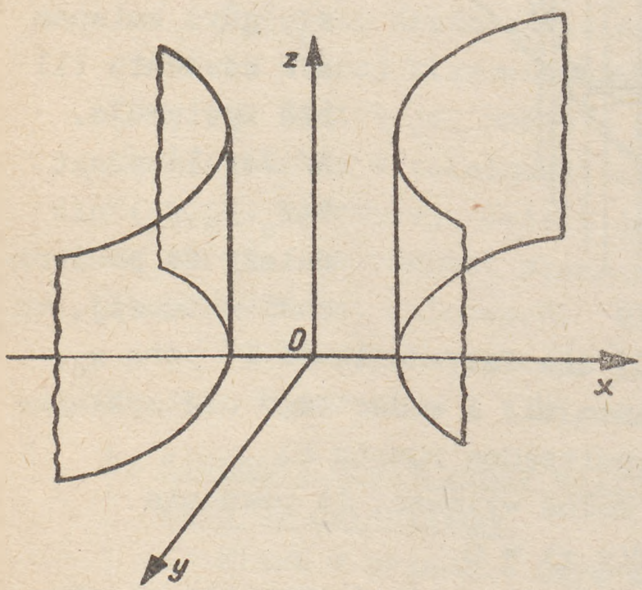


Rys. 180

Jeżeli na płaszczyźnie xy dana jest elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

to równanie to odniesione do układu Oxyz przedstawia walec eliptyczny (rys. 180).



Rys.181

Równania

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

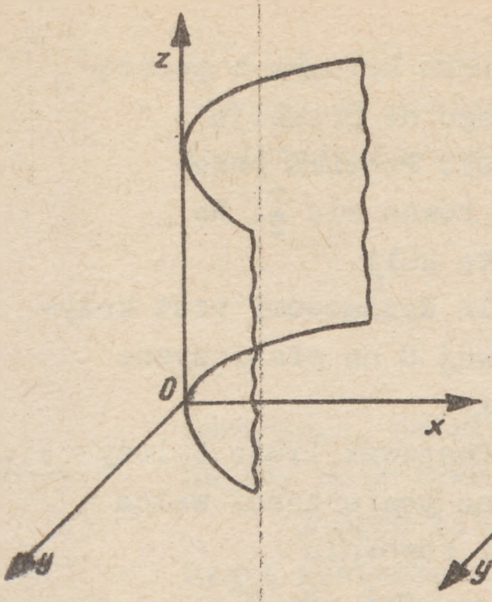
i

$$y^2 = 2px$$

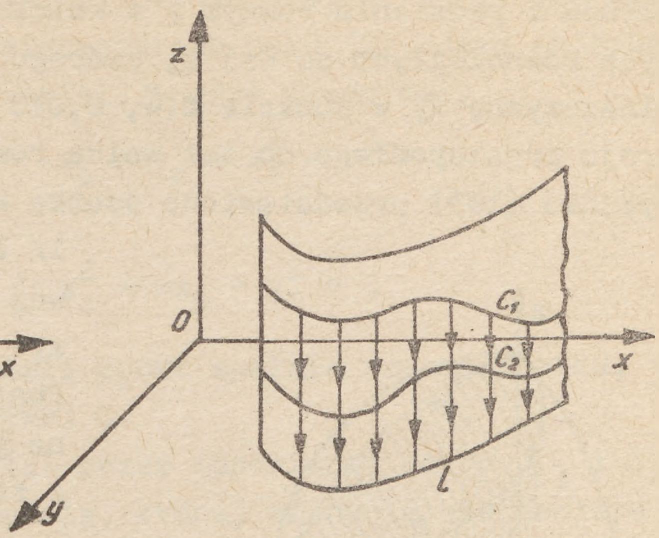
przedstawiają w układzie Oxyz walec hiperboliczny (rys.181) i walec paraboliczny(rys.182).

3. Rzut linii na płaszczyzne układu.

Rzuty linii C_1, C_2 itd,, należących do powierzchni walcowej, na płaszczyznę układu współrzędnych w kierunku tworzących tej powierzchni pokrywają się z przekrojem l powierzchni walcowej i płaszczyzny układu współrzędnych (rys.182a). Z uwagi tej korzystamy przy



Rys.182



Rys.182a

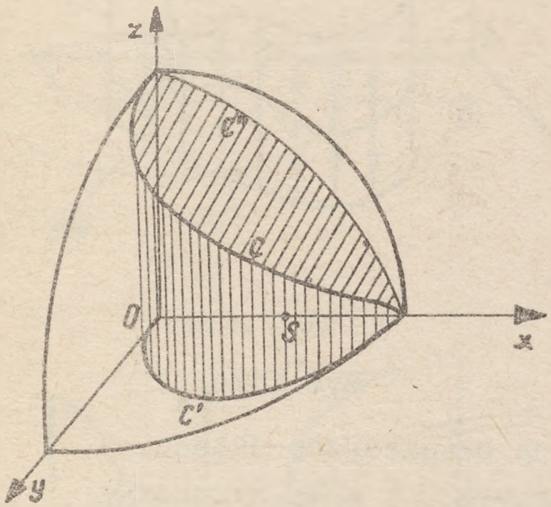
wyznaczeniu rzutu krzywej na płaszczyznę układu. Tak np. jeżeli dana jest krzywa C i mamy wyznaczyć jej rzut prostokątny na płaszczyznę yz, to przez krzywą C przesuwamy powierzchnię walcową o tworzących prostopadłych do płaszczyzny yz (równoległych do osi x). Linia przenikania (przekrój) powierzchni walcowej z płaszczyzną yz jest rzutem krzywej C na płaszczyznę yz. Powierzchnie walcowe o tworzących prostopadłych do jednej z płaszczyzn układu odgrywają przy wyznaczaniu rzutów krzywych na płaszczyzny układu taką samą rolę jak płaszczyzny rzutujące przy wyznaczaniu rzutów prostej na płaszczyzny układu.

Przykład. Krzywa C jest określona równaniami

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ (x - \tfrac{r}{2})^2 + y^2 &= \tfrac{r^2}{4} \end{aligned}\right\}$$

Wyznaczyć rzuty tej krzywej na płaszczyzny układu współrzędnych.

Rozwiązanie. Z postaci równań krzywej wynika, że linia C jest linią przenikania kuli o środku w początku układu i promieniu równym r z walcem kołowym o tworzących równoległych do osi z, którego oś przebija płaszczyznę xy w punkcie $S(\frac{r}{2}, 0,0)$. Promień przekroju prostopadłego do osi walca równa się $\frac{r}{2}$. Na rysunku (183) przedstawiono ósemkę kuli.



Rys. 183

1/ Wyznaczamy rzut krzywej C na płaszczyznę xy:

Ponieważ linia C leży na powierzchni walca o równaniu

$$(x-\frac{r}{2})^2+y^2=\frac{r^2}{4},$$

które możemy napisać też w postaci

$$x^2-rx+y^2=0,$$

więc jej rzutem C na płaszczyznę xy jest okąg określony w układzie Oxyz równaniami

$$(x-\frac{r}{2})^2+y^2=\frac{r^2}{4}$$

$$z=0$$

2/ Wyznaczamy rzut krzywej C na płaszczyznę xz

Celem wyznaczenia rzutu C na płaszczyznę xz należy najpierw znaleźć równanie powierzchni walcowej przesuniętej przez linię C, której tworzące są prostopadłe do płaszczyzny układu xz.

Bierzemy pod uwagę równanie

$$\lambda_1(x^2+y^2+z^2-r^2) + \lambda_2(x^2-rx+y^2)=0, \qquad (2)$$

gdzie

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$$

Równanie to przedstawia pęk powierzchni przechodzących przez linię C. Jeżeli bowiem dowolny punkt

$P_o(x_o, y_o, z_o)$ należy do linii C, to punkt ten leży również na powierzchniach pęku (2). Jego spółrzędne spełniają równanie(2), gdyż wtedy mamy

$$x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 - r^2 = 0$$

i

$$x_o^2 - rx_o + y_o^2 = 0$$

Odwrotnie, jeżeli punkt spełnia równanie pęku, to należy do krzywej C.

Z pęku (2) przez odpowiedni dobór λ_1 i λ_2 wybieramy tę powierzchnię, której równanie nie zawiera zmiennej y x/.

Biorąc $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$, otrzymujemy

$$z^2 + rx - r^2 = 0$$

jako równanie powierzchni walcowej, która zawiera krzywą C i której tworzące są równoległe do osi y. Jeżeli równanie uzyskanej powierzchni walcowej napiszemy w postaci

$$z^2 = -r(x-r),$$

to widzimy, że powierzchnią jest walec paraboliczny. Zatem rzutem C'' krzywej C na płaszczyznę xz jest łuk paraboli, określony w układzie Oxyz równaniami

$$\left.\begin{aligned} z^2 &= -r(x-r) \\ y &= 0 \end{aligned}\right].$$

3/ Wyznaczamy rzut krzywej C na płaszczyznę yz.

Znajdujemy równanie powierzchni walcowej przesuniętej przez krzywą C i o tworzących prostopadłych do płaszczyzny yz. Rachunkowo zagadnienie to sprowadza się do wyrugowania zmiennej x z równań określa-

---

x/ Operacja ta jest równoznaczna z rugowaniem zmiennej y z równań

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 - rx + y^2 = 0$$

jących krzywą C, czyli z równań

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 - rx + y^2 = 0$$

Odejmując równania stronami otrzymujemy

$$z^2 + rx - r^2 = 0,$$

skąd

$$x = \frac{r^2-z^2}{r}$$

Podstawiając uzyskane wyrażenie na x do równania pierwszego (równania kuli) i przekształcając je odpowiednio otrzymamy

$$y^2 = z^2 \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)$$

jako równanie powierzchni walcowej, której tworzące są prostopadłe do płaszczyzny yz.
Tok rozumowania uzasadniający otrzymane równanie, jest następujący.
Równanie

$$z^2 + rx - r^2 = 0,$$

które otrzymaliśmy odejmując stronami równania określające krzywą C, jest równaniem powierzchni walcowej przesuniętej przez krzywą C. Wykazaliśmy to znajdując rzut C''. Wobec tego krzywą C możemy również określić równaniami

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \\ z^2 + rx - r^2 = 0 \end{array}\right\},$$

które możemy też napisać w postaci

$$x \pm \sqrt{r^2 - y^2 - z^2} = 0$$

$$x - \frac{r^2 - z^2}{r} = 0$$

Wobec tego równaniem pęku powierzchni przechodzących przez krzywą C jest

$$\mu_1 \left(x \pm \sqrt{r^2 - y^2 - z^2}\right) + \mu_2\left(x - \frac{r^2 - z^2}{r}\right) = 0$$

gdzie $\mu_1^2 + \mu_2^2 > 0$

Biorąc $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, mamy

$$\pm \sqrt{r^2 - y^2 - z^2} + \frac{r^2 - z^2}{r} = 0$$

lub

$$\frac{r^2 - z^2}{r} = \mp \sqrt{r^2 - y^2 - z^2},$$

a dalej

$$y^2 = z^2 \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)$$

Zatem rzutem C''' krzywej C na płaszczyznę yz jest krzywa określona w układzie Oxyz równaniami

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= z^2 \left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Jest to linia stopnia czwartego, posiadająca punkt podwójny w punkcie O, której kształt przypomina cyfrę osiem.

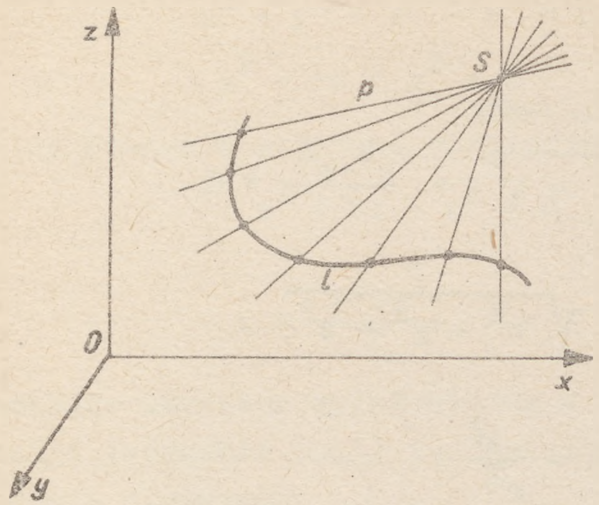
§ 28. POWIERZCHNIE STOŻKOWE

1. Określenie powierzchni stożkowej.

Jeżeli dany jest punkt S, linia l oraz prosta p, która ślizgając się po linii l przechodzi przez stały punkt S, to powierzchnię zakreśloną ruchem prostej p nazywamy p o w i e r z c h n i ą s t o ż k o w ą lub stożkiem (rys. 184).

Punkt S nazywamy w i e r z c h o ł k i e m s t o ż k a, linię l - kierownicą, a prostą ruchomą p - t w o r z ą c ą s t o ż k a.

Powierzchnia stożkowa jest określona, jeżeli dany jest jej wierzchołek S i kierownica l.



Rys. 184

2. Równanie stożka eliptycznego.

Niech wierzchołek S stożka będzie w początku układu i niech kierownicą stożka będzie elipsa określona równaniami x/

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ z &= c \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Równania parametryczne tej elipsy mają postać:

$$x = a \cos t, \; y = b \sin t, \; z = c$$

Napiszemy równania tworzącej jako prostej przechodzącej przez dwa punkty. Jednym punktem jest S(0,0,0), drugi punkt obieramy na elipsie. Przyjmując $t = t_o$, otrzymujemy $P_o(a \cos t_o, b \sin t_o, c)$

Równania tworzącej mają więc postać

$$\frac{x}{a \cos t_o} = \frac{y}{b \sin t_o} = \frac{z}{c},$$

czyli

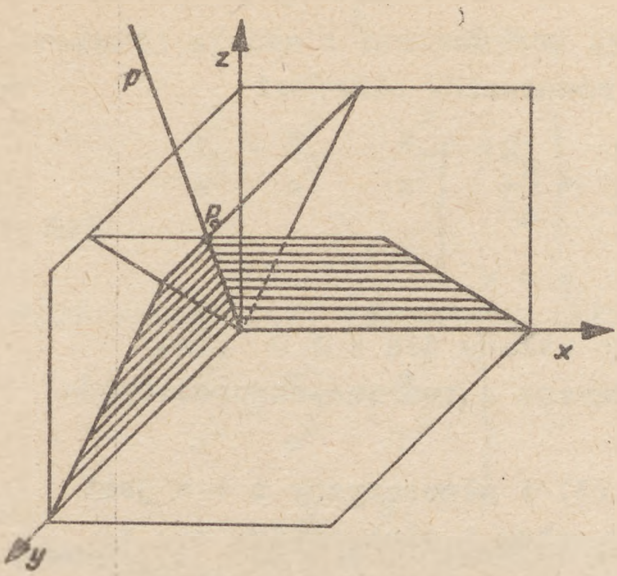
$$x = \frac{a}{c} z \cos t_o, \; y = \frac{b}{c} z \sin t_o \qquad (2)$$

Z postaci tych równań wynika, że prosta jest określona jako krawędź dwóch płaszczyzn, jednej przechodzącej przez oś y i drugiej przesuniętej przez oś x (rys. 185).

Jeżeli wartość parametru t_o będziemy zmieniać w sposób ciągły, to punkt P_o będzie przebiegał elipsę,

x/ Elipsa jest określona jako przekrój walca eliptycznego i płaszczyzny równoległej do płaszczyzny xy.

a płaszczyzny określające prostą p będą się odpowiednio obracały dookoła osi x i osi y. Otrzymamy zbiór



Rys. 185

nieskończenie wielu prostych p, zwany r o d z i n ą p r o s t y c h z jednym parametrem. Rugując z równań (2) parametr t_o, otrzymamy związek

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (3)$$

określający powierzchnię. Każdy punkt (x,y,z), który spełnia równania (2), spełnia równanie (3), niezależnie od parametru t, czyli każdy punkt dowolnej prostej rodziny (2) leży na powierzchni odpowiadającej wynikowi rugowania (3).

Odwrotnie, jeżeli punkt $P(x_o,y_o,z_o)$ spełnia równanie (3), to możemy wyznaczyć takie t_o, że

$$x_o = \frac{a}{c} z_o \cos t_o, \quad y_o = \frac{b}{c} z_o \sin t_o,$$

a to znaczy, że punkt $P(x_o,y_o,z_o)$ jest punktem jednej z prostych rodziny (2).

Równanie więc (3) jest spełnione dla punktów stożka i tylko dla tych punktów.

3. <u>Przekroje stożka płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn układu współrzędnych.</u>

1/ Jeżeli stożek (3) przetniemy płaszczyzną

$$z = k,$$

to przekrój C stożka i płaszczyzny określają równania

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,\\ z = k.\end{aligned}\right\}$$

Układ tych równań jest równoważny układowi

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}\\ z = k.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Pierwsze równanie nowego układu dla $k \neq 0$ jest równaniem walca eliptycznego o tworzących prostopadłych do płaszczyzny xy.
Przekrój więc C stożka (3) i płaszczyzny $z = k$ jest identyczny z przekrojem walca i płaszczyzny $z = k$.
Przekrój C leży na powierzchni walcowej, więc rzut C przekroju na pł. xy określają równania

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}, \qquad (5)$$

$$z = 0.$$

Ponieważ przekrój C jest równoległy do płaszczyzny rzutu więc rzut jest figurą przystającą do przekroju C x/ i z postaci rzutu C' możemy wnioskować o postaci przekroju C'. Równania (5) przedstawiają dla $k \neq 0$ elipsę o półosiach równych

$$\left|\frac{ak}{c}\right| \text{ i } \left|\frac{bk}{c}\right|$$

Dla $k = 0$ równania (4) przedstawiają punkt (0,0,0). przekrojami więc stożka (3) płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny xy są elipsy o coraz większych osiach w miarę oddalenia się od płaszczyzny xy. Przekrojem stożka płaszczyzną xy jest punkt (wierzchołek stożka).

---

x/ Jeżeli figura płaska F jest równoległa do płaszczyzny rzutu π, to rzut prostokątny F' figury F na π jest figurą do F przystającą, czyli $F' \cong F$

2/ Jeżeli stożek (3) przetniemy płaszczyzną

$$y = m,$$

to przekrój stożka i płaszczyzny określają równania

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = m. \end{aligned}\right\}$$

Układ tych równań jest równoważny układowi

$$\left.\begin{aligned} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{m^2}{b^2}, \\ y = m. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Układ równań (6) dla $m \neq 0$ określa przekrój stożka płaszczyzną $y = m$ jako linię przecięcia walca hiperbolicznego o tworzących prostopadłych do płaszczyzny xz z płaszczyzną $y = m$. Rzutem więc przekroju na płaszczyznę xz jest linia

$$\left.\begin{aligned} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{m^2}{b^2}, \\ y = 0 \end{aligned}\right\}$$

czyli hiperbola o półosi rzeczywistej $\left|\frac{cm}{b}\right|$ i półosi urojonej $\left|\frac{am}{b}\right|$.

Dla $m = 0$ pierwsze równanie układu (6) przyjmuje postać

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$$

a drugie

$$y = 0$$

pierwsze równanie możemy napisać w postaci

$$\left(\frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right) \cdot \left(\frac{z}{c} + \frac{x}{a}\right) = 0,$$

skąd wynika, że równanie to przedstawia dwie płaszczyzny przechodzące przez oś y

$$\frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 0, \quad \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0 \qquad (7)$$

Przekrój więc stożka (3) płaszczyzną $y=0$ jest identyczny z krawędziami płaszczyzn

$$\frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 0 \quad i \quad y = 0$$

oraz (8)

$$\frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0 \quad i \quad y = 0.$$

Zatem przekrojami stożka (3) płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny xz i różnymi od niej są hiperbole (6), przekrojem zaś stożka płaszczyzną xz są dwie proste (8).

Znajdźmy asymptoty hiperbol (6)

Pisząc równanie

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{m^2}{b^2}$$

w postaci

$$\frac{z^2}{\left(\frac{cm}{b}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{am}{b}\right)^2} = 1$$

otrzymujemy asymptoty hiperboli

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{a}{c} z \\ \\ y = m \end{array}\right] \; i \; \left.\begin{array}{l} x = -\frac{a}{c} z \\ \\ y = m \end{array}\right],$$

Asymptoty więc hiperbol (6) są równoległe do prostych (8), ich rzuty prostokątne na płaszczyznę xz pokrywają się z prostymi (8).

3/ Jeżeli stożek (3) przetniemy płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny yz, czyli płaszczyznami

$$x = n,$$

to przekroje są określone równaniami

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ \\ x = n \end{array}\right] \qquad (9)$$

Badając równania przekroju (9), w podobny sposób jak w wypadku 2/, otrzymamy jako przekroje stożka płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny yz linie podobne do przekrojów w przypadku 2/.

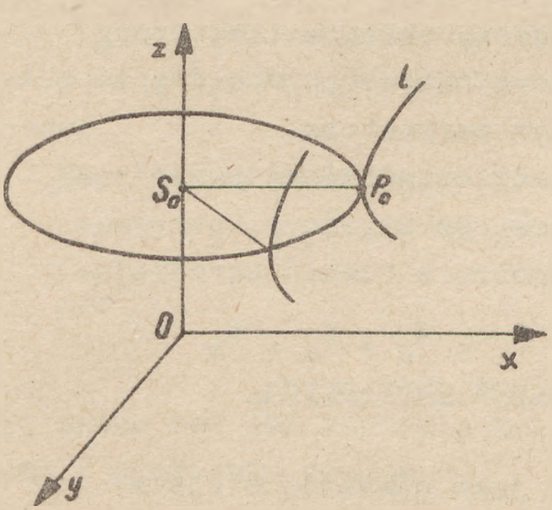
§ 29. POWIERZCHNIE OBROTOWE

1. Równanie powierzchni obrotowej.

Powierzchnię postałą przez obrót linii l dokoła prostej p nazywamy p o w i e r z c h n i ą o b r o t o w ą. Prostą p nazywamy o s i ą o b r o t u.

Przykładem powierzchni obrotowych jest kula, walec kołowy i stożek obrotowy. Kula powstaje przez obrót półokręgu dokoła średnicy, walec kołowy przez obrót prostej równoległej do osi, stożek kołowy przez obrót prostej przecinającej się z osią i nie tworzącej z nią kąta prostego.
W dalszych rozważaniach poznamy jeszcze inne powierzchnie obrotowe jak np. powierzchnię powstałą przez obrót prostej dokoła osi skośnej względem niej, powierzchnie postałe przez obrót krzywych stożkowych dokoła ich osi symetrii i inne.
Niech linia l będzie określona równaniami parametrycznymi

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$$



Rys. 186

i niech osią obrotu będzie oś z. Na linii l obieramy dowolny punkt P_o przyjmując $t=t_o$. Otrzymamy punkt $P_o\left[f(t_o), g(t_o), h(t_o)\right]$. Przy obrocie linii l dokoła osi z punkt P_o zatoczy okrąg położony na płaszczyźnie $z=h(t_o)$, o środku $S_o\left[0,0,h(t_o)\right]$ i promieniu

$$|S_oP_o| = \sqrt{f(t_o)^2 + g(t_o)^2}.$$

Okrąg ten określają równania

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= f(t_o)^2 + g(t_o)^2, \\ z &= h\,(t_o). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Jeżeli w równaniach tych będziemy traktowali t_o za zmienną, to równania (1) określają cały zbiór okręgów leżących w płaszczyznach równoległych i powstałych z obrotu punktów linii l dokoła osi z. Powierzchnię obrotową możemy uważać za powierzchnię powstałą z okręgów (1) przez zmianę parametru t_o w sposób ciągły. Jeżeli punkt należy do powierzchni obrotowej, to należy do jednego z okręgów (1) i jego współrzędne spełniają równania tych okręgów. Odwrotnie, jeżeli punkt spełnia równania (1), to należy do jednego z okręgów, a przez to do powierzchni obrotowej.
Rugując z równań (1) parametr t_o otrzymamy związek

$$\varphi\,(x,y,z) = 0 \qquad (2)$$

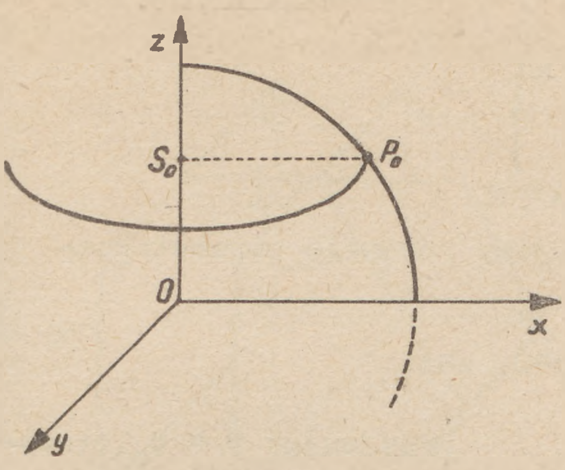
określający powierzchnię obrotową.
Każdy punkt (x,y,z), który spełnia układ równań (1) spełnia również związek (2) niezależnie od wartości parametru t_o. Zbiór nieskończony okręgów (1), który utworzył powierzchnię obrotową nazywamy *rodziną okręgów* z jednym parametrem.
Równanie powierzchni obrotowej, utworzonej przez rodzinę okręgów z jednym parametrem zmiennym, otrzymujemy przez wyrugowanie parametru z równań określających rodzinę okręgów.

2. <u>Przykłady równań powierzchni obrotowych.</u>

Przykład 1.

Równanie kuli wyznaczyliśmy jako równanie miejsca geometrycznego punktów równo oddalonych od punktu stałego. Obecnie wyprowadzimy równanie kuli jako równanie powierzchni obrotowej.

Niech będzie dany półokrąg l leżący w płaszczyźnie x z (rys. 187)



Rys. 187

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 - z^2} \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

i niech osią obrotu będzie oś z. Równania półokręgu możemy napisać w następującej postaci parametrycznej x/

$$x = \sqrt{r^2 - t^2}$$
$$y = 0$$
$$z = t$$

Przyjmując $t = t_o$, otrzymamy punkt P_o $(\sqrt{r^2-t_o^2}, 0, t_o)$ należący do półokręgu l. Jeżeli linia l obraca się dokoła osi z, to punkt P_o zatoczy okrąg o środku $S_o(0,0,t_o)$ i promieniu równym $|S_oP_o| = \sqrt{r^2 - t_o^2}$.
Okrąg ten określają równania

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 - t_o^2, \\ z &= t_o \end{aligned}\right\}, \qquad (3)$$

Jeżeli t_o uważamy za zmienną, to układ równań (3) określa rodzinę okręgów tworzących powierzchnię obrotową.

Rugując parametr t_o, otrzymamy

$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2$$

lub

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

czyli znane nam już równanie kuli o środku w początku układu i promieniu równym r.

---

x/ Parametr t oznacza geometrycznie wysokość punktu, równą bezwzględnie odległości płaszczyzny obrotu tego punktu od płaszczyzny xy.

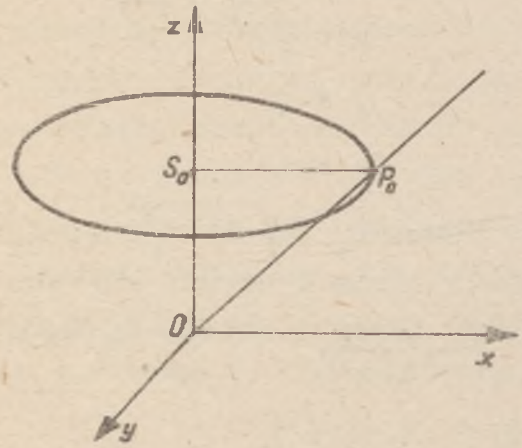
Przykład 2.
Wyznaczymy równanie powierzchni utworzonej przez obrót prostej

$$\left.\begin{array}{l} z = \frac{c}{a}x \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

dokoła osi z

Kładąc $\frac{z}{c} = \frac{x}{a} = t$, otrzymujemy równania parametryczne tej prostej:

$$x = at, \quad y=0, \quad z=ct$$



Rys. 188

Przyjmując $t = t_o$, otrzymamy na prostej punkt $P_o(a\,t_o,\,0,\,c\,t_o)$, który przy obrocie prostej dokoła osi z zakreśla okrąg o środku $S_o(0,0,c\,t_o)$ i promieniu

$$|SP_o| = a\,t_o$$

Okrąg ten określają równania

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = a^2\,t_o^2, \\ z = c\,t_o \end{array}\right\}.$$

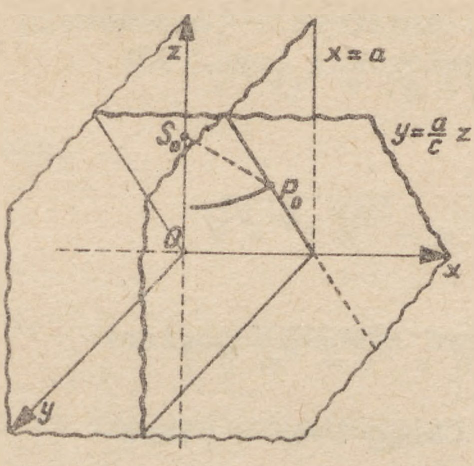
Przy zmiennym t_o równania te określają rodzinę okręgów tworzących powierzchnię obrotową.
Rugując t_o otrzymamy równanie powierzchni obrotowej

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 z^2}{c^2}$$

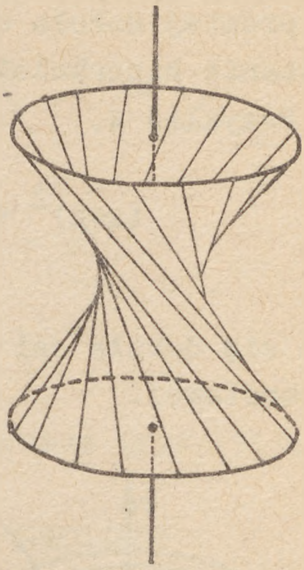
lub

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Jest to równanie stożka kołowego o wierzchołku w początku układu.



Rys. 189



Rys. 190

Przykład 3.

Prosta $x = a$, $y = \frac{a}{c}z$ obraca się dokoła osi z. Znaleźć równanie powierzchni obrotowej, utworzonej obrotem tej prostej. Z postaci równań prostej wynika, że prosta jest skośna względem osi z (rys.189). Jej równaniami parametrycznymi są:

$$x = a,\ y = at,\ z = ct.$$

Przyjmując $t = t_0$, otrzymujemy na prostej punkt $P_0(a, at_0, c\,t_0)$, który przy obrocie prostej zatacza okrąg o środku $S_0(0, 0, c\,t_0)$ i promieniu

$$|S_0P_0| = \sqrt{a^2\ (1 + t_0)^2}.$$

Okrąg ten określają równanie

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2(1+t_0)^2 \\ z &= c\,t_0 \end{aligned}\right\}$$

Przy zmiennym parametrze t_0 równania te określają rodzinę okręgów tworzących powierzchnię obrotową. Rugując z równań t_0, otrzymamy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

jako równanie powierzchni obrotowej powstałej przez obrót prostej dokoła osi skośnej względem niej. Jest to równanie hiperboloidy jednopowłokowej (rys.190)

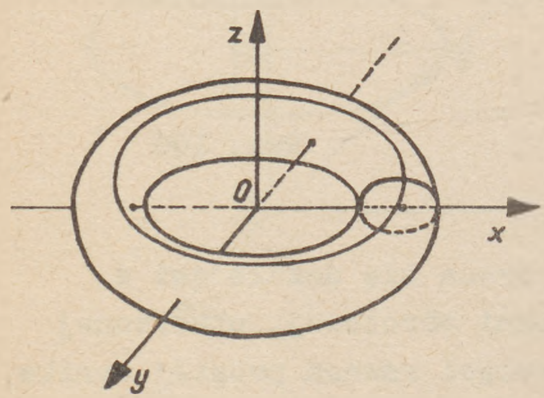
Przykład 4.

Okrąg

$$(x-p)^2 + z^2 = r^2, \qquad (r \leqslant p)$$

$$y = 0$$

obraca się dokoła osi z. Wyznaczyć równanie powierzchni obrotowej.



Rys. 191

Okrąg leży w płaszczyźnie xz, jego równaniami parametrycznymi są:

$x=p+r\cos t, y=0, z=r\sin t$

Przyjmując $t=t_o$, otrzymujemy punkt

$P_o(p+r\cos t_o, 0, r\sin t_o)$,

który przy obrocie dokoła osi z zatacza okrąg o środku $S_o(0,0,r\sin t_o)$

i promieniu

$$|S_oP_o| = \sqrt{(p+r\cos t_o)^2}.$$

Okrąg ten określają równania

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (p + r\cos t_o)^2, \\ z &= r\sin t_o \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Celem uzyskania równania powierzchni utworzonej przez rodzinę okręgów (4) rugujemy z tych równań parametr t_o. Z równania drugiego mamy

$$\sin t_o = \frac{z}{r},$$

wobec tego

$$\cos t_o = \pm\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\ .$$

Podstawiając uzyskane wyrażenie na $\cos t_o$ do równania pierwszego, otrzymujemy

$$x^2 + y^2 = (p \pm\sqrt{r^2 - z^2})^2,$$

a dalej

$$\sqrt{x^2 + y^2} - p = \pm\sqrt{r^2 - z^2}$$

lub

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - p\right)^2 + z^2 = r^2$$

Jest to równanie powierzchni zwanej torusem (rys.191).

§ 30. POWIERZCHNIE STOPNIA DRUGIEGO

1. Elipsoida.

Obracając elipsę dokoła jednej z jej osi, otrzymamy powierzchnię, zwaną elipsoidą obrotową.

Niech półelipsa.

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

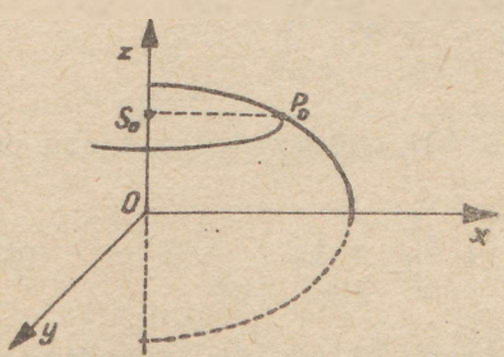
obraca się dokoła osi z (rys.192). Daną półelipsę możemy przedstawić następującymi równaniami parametrycznymi:

$$x = a\sqrt{1 - \frac{t^2}{c^2}}$$

$$y = 0$$

$$z = t$$

Przyjmując $t = t_o$ z przedziału $\langle -c, c\rangle$,



Rys. 192

otrzymamy punkt

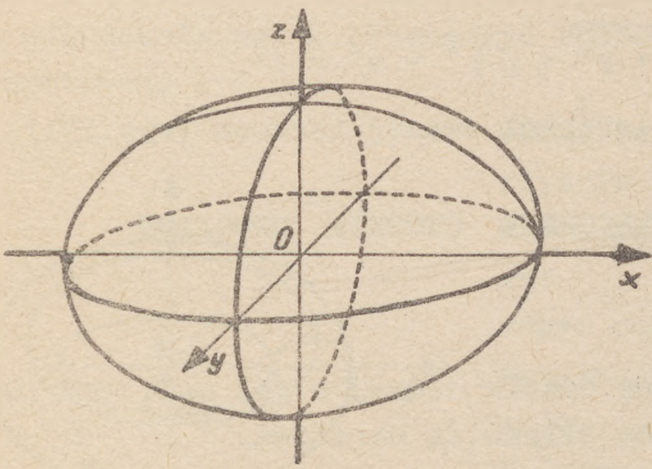
$$P_o\left(a\sqrt{1 - \frac{t_o^2}{c^2}},\ 0,\ t_o\right)$$

należący do półelipsy. Przy obrocie dokoła osi z punkt P_o zakreśli okrąg o środku $S_o(0,0,t_o)$ i promieniu równym

$$|S_oP_o| = a\sqrt{1 - \frac{t_o^2}{c^2}}$$

Okrąg więc określają równania

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2\left(1 - \frac{t_o^2}{c^2}\right) \\ z &= t_o \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



Rys. 193

Przy zmiennym parametrze t_o układ (1) przedstawia rodzinę okręgów należących do powierzchni obrotowej.
Rugując parametr t_o, otrzymamy równanie elipsoidy obrotowej

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (2)$$

Równanie to w przypadku, gdy $c = a$ przyjmuje postać

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

i przedstawia kulę
W przypadku zaś, gdy równaniu (2) nadamy ogólniejszą postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (3)$$

to przedstawia powierzchnię zwaną elipsoidą trójosiową (rys. 193).
Przekroje elipsoidy płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn układu są elipsami. Np. przekrój płaszczyzną $x = k$, gdzie $|k| < a$ określają równania

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = k \end{aligned}\right\}.$$

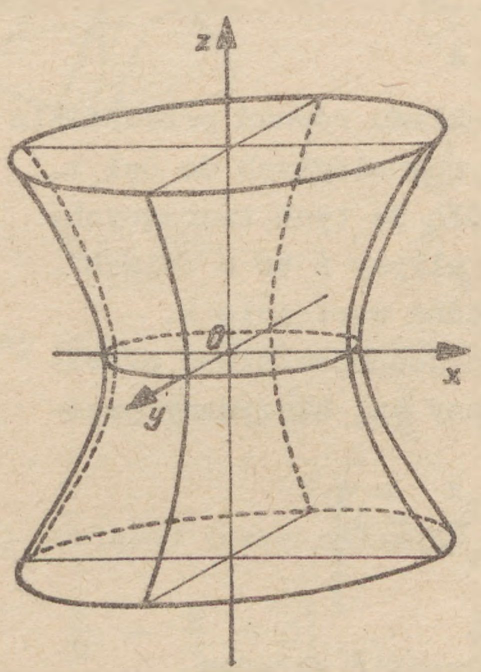
Układ tych równań jest równoważny układowi

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}, \\ x = k \end{aligned}\right\},$$

Z postaci tych równań wynika, że określają one przekrój walca eliptycznego o tworzących równoległych do osi x z płaszczyzną prostopadłą do tych tworzących, a więc elipsę.

2. Hiperboloida jednopowłokowa.

Wyprowadzając na str. 355 równanie powierzchni obrotowej, powstałej z obrotu prostej skośnej względem osi obrotu z, otrzymaliśmy równanie hiperboloidy jednopowłokowej obrotowej w postaci



Rys. 194

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (4)$$

To samo równanie otrzymamy, jeżeli obrócimy dokoła osi z gałąź hiperboli:

$$\left.\begin{aligned} x = a\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}} \\ y = 0 \end{aligned}\right\}$$

Jeżeli równaniu (4) nadamy ogólniejszą postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (5)$$

to powierzchnię określoną tym równaniem nazywamy hiperboloidą jednopowłokową (rys. 194).

Płaszczyzny równoległe do płaszczyzny xy przecinają hiperboloidę wzdłuż elips. Przekrój bowiem równoległy do płaszczyzny xy jest określony układem równań

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ z &= k \end{aligned}\right\},$$

który jest równoważny układowi

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 + \frac{k^2}{c^2} \\ z &= k \end{aligned}\right\},$$

lub

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2(1+\frac{k^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1+\frac{k^2}{c^2})} &= 1 \\ z &= k \end{aligned}\right\}.$$

Pierwsze równanie ostatniego układu równań przedstawia walec eliptyczny o tworzących równoległych do osi z, drugie - płaszczyznę prostopadłą do tych tworzących. Układ więc równań przedstawia elipsy i to o osiach wzrastających wraz z bezwzględną wartością k.

Przecinając hiperboloidę jednopowłokową płaszczyzną równoległą do płaszczyzny yz, otrzymamy przekrój

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ x &= m \end{aligned}\right\}.$$

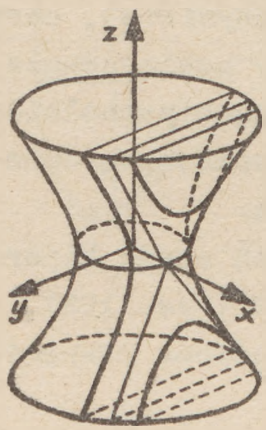
Przekrój ten możemy również określić układem

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1 - \frac{m^2}{a^2}, \\ x &= m \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

lub

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{m^2}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{m^2}{a^2}\right)} = 1 \\ x = m \end{aligned}\right\}.$$

Pierwsze równanie tego układu jest dla $|m| \neq a$ równaniem walca hiperbolicznego o tworzących równoległych do osi x. Wobec tego płaszczyzny $x = m$ przecinają walec wzdłuż hiperboli i to dla $-a < m < a$ o osiach rzeczywistych równoległych do osi y, dla $m < -a$ lub $m > a$ - o osiach rzeczywistych równoległych do osi z (rys.195).



Rys. 195

Dla $|m| = a$ przekroje (6) hiperboloidy określone są układami

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = a \end{aligned}\right\}, \qquad (7a)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = -a \end{aligned}\right\} \qquad (7b)$$

Pierwszy układ możemy napisać w postaci

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0 \\ x = a \end{aligned}\right\}$$

i dalej zastąpić dwoma układami równoważnymi

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \\ x = a \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \\ x = a \end{aligned}\right\}.$$

skąd wynika, że płaszczyzna $x = a$ przecina hiperboloidę jednopowłokową wzdłuż dwóch prostych

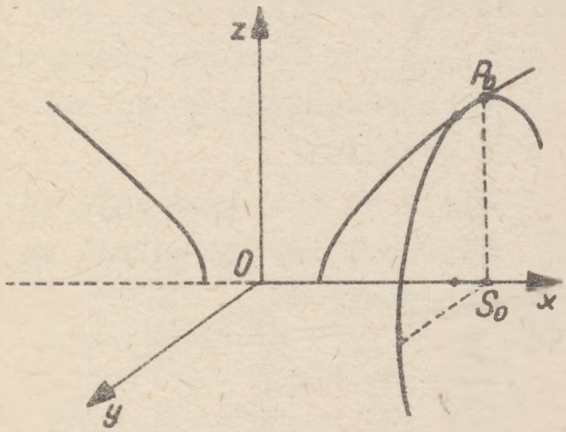
$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{b} \pm \frac{z}{c} = 0 \\ x = a \end{aligned}\right\}$$

Postępując podobnie z drugim spośród układów (7), otrzymamy w przekroju płaszczyzną $x=-a$ również dwie proste

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{b} \pm \frac{z}{c} &= 0, \\ x &= -a \end{aligned}\right\} .$$

3. <u>Hiperboloida dwupowłokowa.</u>

Obracając hiperbolę dokoła jej osi rzeczywistej, otrzymamy powierzchnię, zwaną hiperboloidą dwupowłokową obrotową.



Rys. 196

Niech część hiperboli (rys. 196), określona równaniami

$$\left.\begin{aligned} z &= c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

obraca się dokoła osi x.

Równania (8) możemy napisać w następującej postaci parametrycznej

$$x = t,\ y=0,\ z=c\sqrt{\frac{t^2}{a^2} - 1}$$

Przyjmując $t = t_0$, gdzie $|t_0| > a$, otrzymamy punkt

$$P_0 \left(t_0,\ 0,\ c\sqrt{\frac{t_0}{a^2} - 1}\right),$$

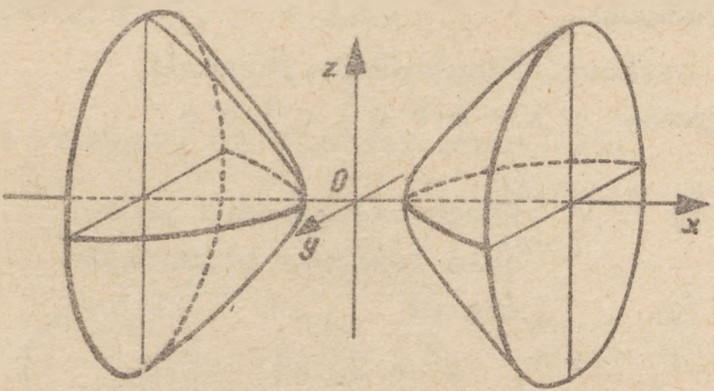
należący do hiperboli. Przy obrocie części hiperboli (8) dokoła osi x punkt P_0 zakreśla okrąg o środku $S_0(t_0,0,0)$ i promieniu równym.

$$|S_0P_0| = \sqrt{c^2 \left(\frac{t_0^2}{a^2} - 1\right)}$$

Okrąg ten określają równania

$$\left.\begin{aligned} y^2 + z^2 &= c^2\left(\frac{t_o^2}{a^2} - 1\right) \\ x &= t_o \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Przy zmiennym t_o równania (9) określają rodzinę okręgów, należących do rozważanej powierzchni obrotowej. Rugując z równań (9) t_o, otrzymamy



Rys. 197

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{10}$$

jako równanie hiperboloidy dwupowłokowej obrotowej.

Powierzchnię o równaniu ogólniejszym

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{11}$$

nazywamy hiperboloidą dwupowłokową (rys.197). Płaszczyzny $x = k$ dla $|k| > a$ przecinają hiperboloidę (11) wzdłuż elips

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2\left(\frac{k^2}{a^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(\frac{k^2}{a^2} - 1\right)} &= 1 \\ x &= k \end{aligned}\right\}.$$

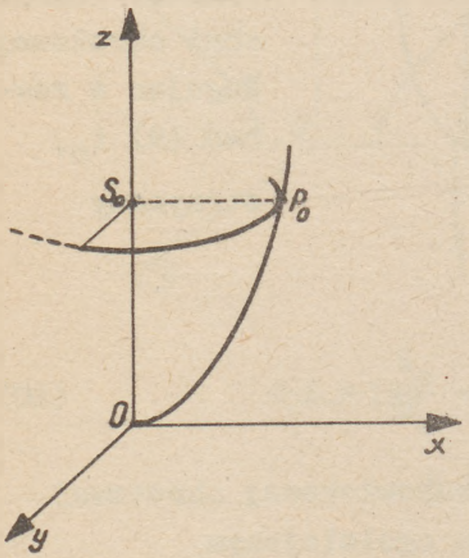
Płaszczyzny $y = m$, równoległe do płaszczyzny xz, przecinają hiperboloidę wzdłuż hiperbol

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1+\frac{m^2}{b^2}\right)} &= 1\\ y &= m\end{aligned}\right\}$$

Również płaszczyzny równoległe do płaszczyzny xy przecinają hiperboloidę dwupowłokową wzdłuż hiperbol.

4. Paraboloida eliptyczna.

Powierzchnię, uzyskaną przez obrót paraboli dokoła jej osi, nazywamy p a r a b o l o i d ą o b r o t o w ą.



Rys. 198

Niech będzie dana parabola leżąca w płaszczyźnie xz

$$\left.\begin{aligned}x^2 &= 2p\,z\\ y &= 0\end{aligned}\right\}$$

i niech osią obrotu będzie oś z.

Równaniami parametrycznymi części paraboli, leżącej w płaszczyźnie xz po stronie dodatniej półosi x (rys. 198), są równania

$$x = \sqrt{2pt}, \quad y = 0, \quad z = t \qquad (12)$$

Przyjmując, że $p > 0$, otrzymamy dla $t = t_o > 0$ punkt leżący na paraboli

$$P_o\,(\sqrt{2\,pt_o},\ 0,\ t_o)$$

Punkt ten przy obrocie linii (12) dokoła osi z zakreśla okrąg o środku S_o $(0,0,t_o)$ i promieniu równym

$$|S_oP_o| = \sqrt{2\,p\,t_o}$$

Równaniami więc okręgu są

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2\,p\,t_o \\ z &= t_o \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Przy zmiennym t_o, układ (13) określa rodzinę okręgów tworzących powierzchnię obrotową. Rugując t_o z równań (13), otrzymamy

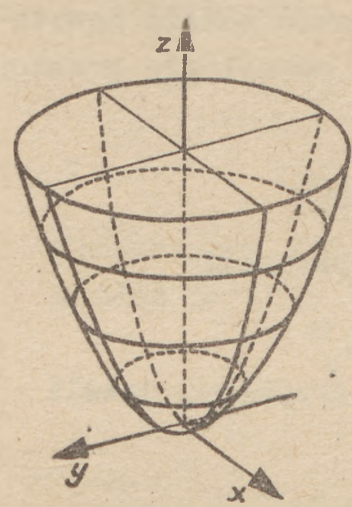
$$x^2 + y^2 = 2pz \qquad (14)$$

jako równanie paraboloidy obrotowej.

Równanie ogólniejsze postaci

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \qquad (15)$$

przedstawia powierzchnię zwaną paraboloidą eliptyczną (rys.199). Płaszczyzny $z = k$, gdy $k > 0$, przecinają paraboloidę eliptyczną wzdłuż elips



Rys. 199

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{2a^2k} + \frac{y^2}{2b^2k} &= 1 \\ z &= k \end{aligned}\right\}$$

Płaszczyzny $x = m$ przecinają paraboloidę eliptyczną wzdłuż parabol

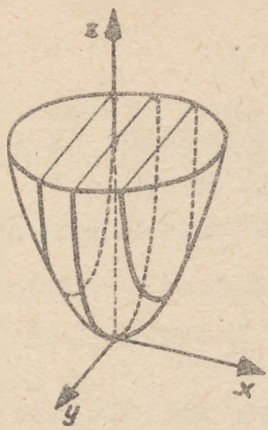
$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2b^2\left(z - \frac{m^2}{2a^2}\right) \\ x &= m \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Do podobnych wyników dojdziemy, przecinając paraboloidę płaszczyznami $y = n$.

Z równań parabol (16), ze względu na stały parametr $2b^2$ wynika, że parabole te są przystające. Ich wierzchołki $W(m,0,\frac{m^2}{2a^2})$ leżą na paraboli, która jest przekrojem paraboloidy z płaszczyzną xz. Łatwo się o tym przekonać, podstawiając współrzędne wierzchołków do równań paraboli

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2} = 2z\\ y = 0\end{array}\right\}.$$

Wobec tego możemy paraboloidę eliptyczną (15) uważać za powierzchnię powstałą przez równoległe przesunięcie paraboli (rys.200)



Rys. 200

$$y^2 = 2b^2z,\ x = 0,$$

której wierzchołek ślizga się po paraboli

$$x^2 = 2a^2\ z,\ y = 0$$

Oczywiście, tę samą paraboloidę otrzymamy, jeżeli przesuniemy równolegle parabolę

$$x^2 = 2a^2z,\ y = 0$$

tak, by w czasie ruchu jej wierzchołek ślizgał się po paraboli

$$y^2 = 2b^2z,\ x = 0$$

5. Paraboloida hiperboliczna.

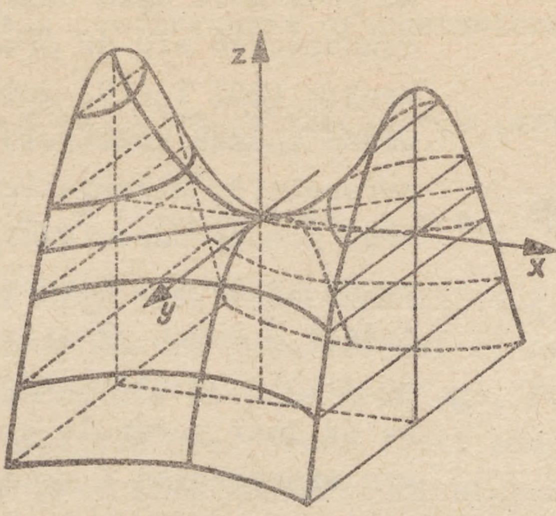
Powierzchnię określoną równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{17}$$

nazywamy paraboloidą hiperboliczną (rys.201).

Płaszczyzny $z = k \neq 0$ przecinają paraboloidę hiperboliczną wzdłuż hiperbol

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{2a^2k} - \frac{y^2}{2b^2k} = 1\\ z = k\end{array}\right\},$$



Rys. 201

których osie rzeczywiste są dla $k > 0$ równoległe do osi x, a dla $k < 0$ - równoległe do osi y.
W przypadku $z = 0$ otrzymujemy parę prostych

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Płaszczyzny $x = m$ przecinają paraboloidę (17) wzdłuż parabol

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= -2b^2\left(z - \frac{m^2}{2a^2}\right) \\ x &= m \end{aligned}\right\}, \tag{18}$$

a płaszczyzny $y = n$ wzdłuż parabol

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= 2a^2\left(z + \frac{n^2}{2b^2}\right) \\ y &= n \end{aligned}\right\}. \tag{19}$$

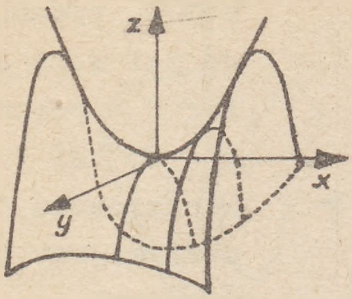
Z postaci równań (18) i (19) wynika, że osie tych parabol są równoległe do osi z z tym, że osie parabol (18) mają zwrot ujemny osi z, a osie parabol (19) zwrot dodatni osi z.
Parabole (18) mają stały parametr $(-2b^2)$, są więc przystające; również parabole (19) są przystające.

Łatwo stwierdzić, że wierzchołki parabol (18) leżą na paraboli

$$x^2 = 2a^2 z, \; y = 0,$$

a wierzchołki parabol (19) na paraboli

$$y^2 = -2b^2z, \quad x = 0$$



Rys. 202

Na podstawie tych danych, odnoszących się do przekrojów (18) i (19) możemy podać sposób konstrukcji paraboloidy hiperbolicznej przy pomocy odpowiedniego ruchu paraboli. Mianowicie jeżeli w dwóch płaszczyznach do siebie prostopadłych dane są dwie parabole o wspólnym wierzchołku i osiach przeciwnie skierowanych, to każda z tych parabol, przemieszczając się równolegle w ten sposób, by jej wierzchołek ślizgał się po drugiej paraboli, zakreśli swym ruchem paraboloidę hiperboliczną (rys. 202).

6. Stożek i walec drugiego stopnia.

Do powierzchni stopnia drugiego, ze względu na swe równanie, należy stożek eliptyczny. Równanie stożka eliptycznego, którego wierzchołek znajduje się w początku układu wyprowadziliśmy na str. 346 otrzymując

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Spośród walców do powierzchni stopnia drugiego należą walec eliptyczny, walec hiperboliczny i walec parabolicznych, których równania w postaci

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - dla walca eliptycznego,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - dla walca hiperbolicznego,

$y^2 = 2px$ - dla walca parabolicznego,

uzyskaliśmy na str. 340.

7. Klasyfikacja powierzchni stopnia drugiego.

Każdą powierzchnię przedstawioną równaniem postaci

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \tag{20}$$

gdzie nie wszystkie współczynniki a_{ik} w wyrazach stopnia drugiego są jednocześnie równe zeru, nazywamy powierzchnią stopnia drugiego. Podobnie, jak to miało miejsce dla równań linii stopnia drugiego, również w przypadku powierzchni stopnia drugiego można równania tych powierzchni sprowadzić przez przesunięcie równoległe i obrót układu Oxyz do prostej postaci.

Szczegółową dyskusję równań powierzchni stopnia drugiego podają obszerniejsze podręczniki geometrii analitycznej. Tutaj ograniczymy się tylko do wyliczenia wszystkich najprostszych postaci równań stopnia drugiego, do jakich dojdziemy, stosując do równania (20) odpowiednie przesunięcie równoległe i obrót układu współrzędnych. Celem uzyskania łatwego przeglądu, podzielimy wszystkie równania powierzchni w prostej postaci na trzy grupy.

Grupa I.

1/ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon$,

2/ $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,

3/ $\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y^2}{b^2} = 2z$,

gdzie ε równa się + 1 lub - 1.

Równanie 1/ przedstawia elipsoidę rzeczywistą dla $\varepsilon = +1$, urojoną dla $\varepsilon = -1$.

Równanie 2/ przedstawia hiperboloidę jednopowłokową dla $\varepsilon = +1$, dwupowłokową dla $\varepsilon = -1$.
Równanie 3/ przedstawia paraboloidę eliptyczną dla $\varepsilon = +1$, hiperboliczną dla $\varepsilon = -1$

Grupa II.

1/ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \varepsilon \frac{z^2}{c^2} = 0$, 2/ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \varepsilon$,

3/ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 4/ $x^2 - 2az$

Równanie 1/ przedstawia stożek dla $\varepsilon = + 1$; punkt $(0,0,0)$ dla $\varepsilon = -1$.
Równanie 2/ przedstawia walec eliptyczny dla $\varepsilon = +1$, walec eliptyczny urojony dla $\varepsilon = -1$
Równanie 3/ przedstawia walec hiperboliczny, a równanie 4/ walec paraboliczny.

Grupa III.

1/ $\frac{x^2}{a^2} - \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 0$ 2/ $x^2 - \varepsilon a^2 = 0$

Równanie 1/ przedstawia dla $\varepsilon = +1$ dwie płaszczyzny przecinające się

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

a dla $\varepsilon = -1$ równanie 1/ jest spełnione tylko przez punkty o współrzędnych $x = 0$, $y = 0$, $z =$ dowolnej liczbie, przedstawia więc oś z.
Równanie 2/ przedstawia dla $\varepsilon = +1$ dwie płaszczyzny równoległe

$$x = a, \quad x = -a,$$

dla $\varepsilon = -1$ - utwór urojony .

§ 31. POWIERZCHNIE PROSTOKREŚLNE STOPNIA DRUGIEGO

1. Powierzchnie prostokreślne.

Powierzchnia nazywa się prostokreślną, jeżeli przez każdy jej punkt przechodzi prosta całkowicie należąca do tej powierzchni.
Z poznanych powierzchni stopnia drugiego powierzchniami prostokreślnymi są stożek eliptyczny i wszystkie walce. Wykażemy, że również hiperboloida jednopowłokowa i paraboloida hiperboliczna są powierzchniami prostokreślnymi.

2. Prostokreślność hiperboloidy jednopowłokowej.

Niech będzie dana hiperboloida jednopowłokowa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

Równanie (1) możemy napisać w postaci

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

a dalej w postaci

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \tag{2}$$

Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę równania

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\lambda &= 1 - \frac{y}{b} \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= \left(1 + \frac{y}{b}\right)\lambda, \end{aligned} \tag{3}$$

to równania te dla każdej wartości λ przedstawiają płaszczyzny przecinające się x), określają więc pro-

---

x/ Łatwo sprawdzić, że dla $\lambda \neq 0$ jest $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$,

a dla $\lambda = 0$ równania (3) przyjmują postać $1 - \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$ i wobec tego przedstawiają też dwie płaszczyzny nierównoległe.

stą w przestrzeni.
Rugując λ z równań (3) przez pomnożenie tych równań stronami, otrzymamy równanie (2). Stąd wniosek, że każdy punkt prostej (3), niezależnie od wartości λ, spełnia równanie hiperboloidy jednopowłokowej.
Na hiperboloidzie (1) leży więc cała rodzina prostych określonych równaniami (3).
Proste te przecinają elipsę

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

która jest przekrojem hiperboloidy (1) z płaszczyzną xy; ich bowiem punkty przebicia z płaszczyzną xy mają współrzędne

$$x = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\, a, \qquad y = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\, b^2, \qquad z = 0$$

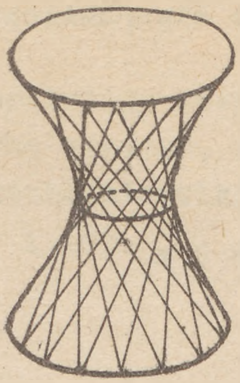
i jak łatwo sprawdzić rachunkiem, spełniają równanie elipsy (4).
Gdy zmieniamy λ w równaniach (3), to prosta ta porusza się po elipsie (4) i zakreśla hiperboloidę.
Prostą (3) nazywamy *tworzącą hiperboloidy* jedno powłokowej.

Jeżeli z kolei weźmiemy pod uwagę równania

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} &= \left(1 + \frac{y}{b}\right)\mu \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= 1 - \frac{y}{b}, \end{aligned} \tag{5}$$

to równania te, podobnie jak równania (3), określają rodzinę prostych należących do hiperboloidy (1).
Twierdzenie: Przez każdy punkt hiperboloidy (1) przechodzi jedna prosta należąca do rodziny (3) i jedna prosta do rodziny (5) (rys. 203).
Dowód: Niech punkt $P_o(x_o, y_o, z_o)$ należy do hiperboloidy, wtedy mamy

$$\left(\frac{x_o}{a} - \frac{z_o}{c}\right)\cdot\left(\frac{x_o}{a} + \frac{z_o}{c}\right) = \left(1 - \frac{y_o}{b}\right)\cdot\left(1 + \frac{y_o}{b_o}\right)$$



Rys. 203

Spośród czynników $1 - \frac{y_0}{b}$, $1 + \frac{y_0}{b}$ przynajmniej jeden jest różny od zera; jeżeli $1 + \frac{y_0}{b} \neq 0$, to biorąc

$$\lambda = \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) : \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)$$

w równaniach (3), otrzymamy prostą

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(1 + \frac{y_0}{b}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right),$$

przechodzącą przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$, gdyż punkt ten, jak to wynika z bezpośredniego podstawienia jego współrzędnych do równań badanej prostej, spełnia jej równania.

Przyjmując

$$\mu = \left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) : \left(1 + \frac{y_0}{b}\right)$$

w równaniach (5), otrzymamy prostą

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(1 + \frac{y_0}{b}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{b}\right),$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y_0}{b}\right)$$

przechodzącą również przez punkt P_0.

Z udowodnionego twierdzenia możemy wysunąć następujący wniosek: Ponieważ proste jednej rodziny należą w całości do hiperboloidy (1) i przez każdy punkt hiperboloidy przechodzi tylko jedna prosta rodziny, więc proste należące do jednej rodziny nie przecinają się, czyli są względem siebie skośne.

3. Prostokreślność paraboloidy hiperbolicznej.

Niech będzie dana paraboloida hiperboliczna

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \tag{6}$$

której równanie możemy też napisać w postaci

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z$$

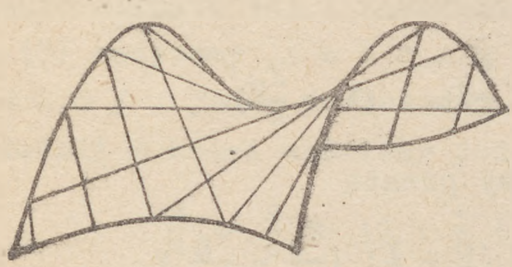
Biorąc pod uwagę równania

$$\left.\begin{aligned} \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) &= 2z \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \lambda \end{aligned}\right. \tag{7}$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \mu \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) &= 2z \end{aligned}\right. \tag{8}$$

stwierdzamy, podobnie jak w przypadku hiperboloidy, że każdy z tych układów przedstawia proste, których punkty, niezależnie od wartości parametrów λ lub μ spełniają równanie (6), a więc określa rodziny prostych należących do paraboloidy hiperbolicznej (rys.204).



Rys. 204

Proste te przecinają parabolę

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= 2a^2z \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

która jest przekrojem paraboloidy (6) z płaszczyzną xz, ich bowiem punkty przebicia z płaszczyzną xy mają współrzędne równe odpowiednio

$$x = a\lambda, \ y = 0, \ z = \frac{\lambda^2}{2} \quad \text{lub} \quad x = a\mu, \ y = 0, \ z = \frac{\mu^2}{2}$$

i spełniają równania (9).

Można wykazać, że przez każdy punkt paraboloidy (6) przechodzi tylko jedna prosta z każdej rodziny (7) i (8).

ROZDZIAŁ VIII

PRZEKSZTAŁCENIA GEOMETRYCZNE

§ 32. POJĘCIE PRZEKSZTAŁCENIA

1. Pojęcie przekształcenia geometrycznego.

Jeżeli każdemu punktowi P zbioru punktów Z (na prostej, na płaszczyźnie lub w przestrzeni) przyporządkowano na mocy pewnego prawa (przepisu) po jednym punkcie P' zbioru Z' , to mówimy, że jest określone p r z e k s z t a ł c e n i e lub o d w z o r o w a n i e geometryczne.

Przyporządkowanie takie będziemy oznaczali symbolem f, pisząc

$$P' = f\,(P)$$

Z określenia wynika, że przekształcenie jest uogólnieniem pojęcia funkcji, w którym zbiory liczbowe zastąpiono zbiorami punktów.

Punkty P zbioru Z nazywamy punktami p i e r w o t n y m i lub o r y g i n a l n y m i, a odpowiadające im punkty P' zbioru Z' ich o b r a z a m i.

Jeżeli mamy substancję, która pokrywa pewien obszar płaski lub wypełnia pewien obszar przestrzenny i substancję tę zdeformujemy, to deformacja ta jest przykładem przekształcenia, w którym każdy punkt substancji z pierwotnego położenia przeszedł w nowe na skutek odkształcenia.

Jeżeli przekształcenie jest tego rodzaju, że każdy punkt P zbioru Z jest zarazem swoim obrazem, to przekształcenie nazywa się przekształceniem t o ż s a m o ś c i o w y m.

Jeżeli dane przekształcenie posiada tę własność, że każdym dwom różnym punktom P_1 i P_2 zbioru Z odpowiadają odpowiednio dwa różne punkty P_1' i P_2' zbioru Z', czyli jeżeli przekształcenie jest przyporządkowaniem wzajemnie jednoznacznym, to istnieje p r z e k s z t a ł c e n i e o d w r o t n e do danego przekształcenia. Przekształceniem odwrotnym do danego nazywamy przekształcenie przyporządkowujące obrazom P' zbioru Z'ich punkty pierwotne P zbioru Z.

Przekształcenie odwrotne względem przekształcenia f oznaczamy symbolem f^{-1}, czyli jeżeli przekształcenie

$$P' = f\,(P)$$

jest odwracalne, to

$$P = f^{-1}\,(P')$$

2. Przykłady przekształceń geometrycznych.

Przykład 1:

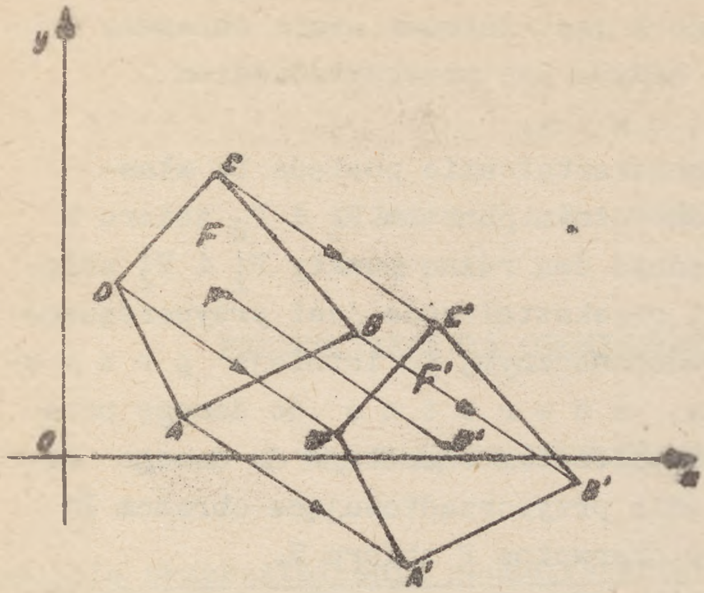
Niech w płaszczyźnie Oxy wzory

$$\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b + y \end{aligned} \qquad (1)$$

określają przekształcenie geometryczne.

Na podstawie tych wzorów punktowi P(x,y) przyporządkowany jest punkt P' (x + a, y + b) t.zn.punkt, który otrzymamy z punktu P przez przesunięcie równoległe wyznaczone wektorem $\overline{PP'}\ \{a,b\}$.

Jeżeli dana jest w płaszczyźnie Oxy figura F (zbiór punktów) i każdemu punktowi P figury F przypiszemy w sposób określony wzorami (1) punkty P' , to otrzymamy figurę F', która jest przesunięciem równoległym figury F (rys. 205).



Rys. 205

Przekształcenie określone wzorami (1) nazywamy p r z e s u n i ę c i e m r ó w n o l e g ł y m.
Jeżeli zbiór F jest całą płaszczyzną, to wzory (1) określają przekształcenie płaszczyzny w siebie przez przesunięcie równoległe.

Wzory więc (1) możemy geometrycznie interpretować dwojako:

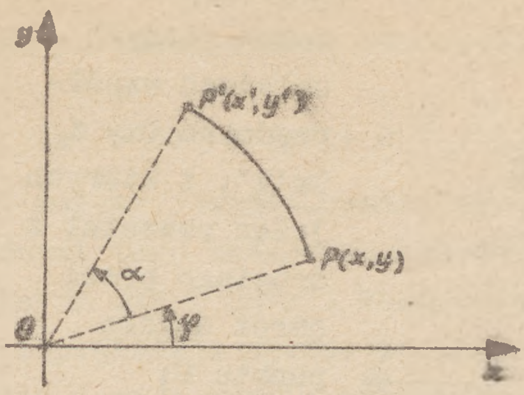
1° Jako wzory określające związki między współrzędnymi tego samego punktu w dwóch różnych układach współrzędnych Oxy i O'x'y', z których jeden jest równoległym przesunięciem drugiego.

2° Jako wzory określające przekształcenie geometryczne. W tej interpretacji przy niezmienionym układzie współrzędnych zmieniają się punkty - punktowi (xy) zostaje przyporządkowany obraz (x'y'), figura F drogą przesunięcia równoległego przechodzi w figurę F'.

Przykład 2. Niech w płaszczyźnie Oxy będzie określone przekształcenie:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned} \tag{2}$$

Wykażemy, że wzory (2) przyporządkowują punktowi P(x,y) punkt $P'(x'y')$, który otrzymujemy z punktu P przez obrót tego punktu dokoła początku układu o kąt α (rys.206).



Rys. 206

Istotnie, jeżeli punkt P' jest punktem uzyskanym z punktu P przez obrót dokoła początku układu o kąt α i r oraz φ są współrzędnymi biegunowymi punktu P, to współrzędnymibiegunowymi punktu P' są r i $\varphi + \alpha$. Wówczas na podstawie związków między współrzędnymi biegunowymi i prostokątnymi punktu mamy

$$x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi$$

oraz

$$x' = r \cos (\varphi + \alpha), \; y' = r \sin (\varphi + \alpha).$$

Stąd

$$x' = r \cos \varphi \cos \alpha - r \sin \varphi \sin \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

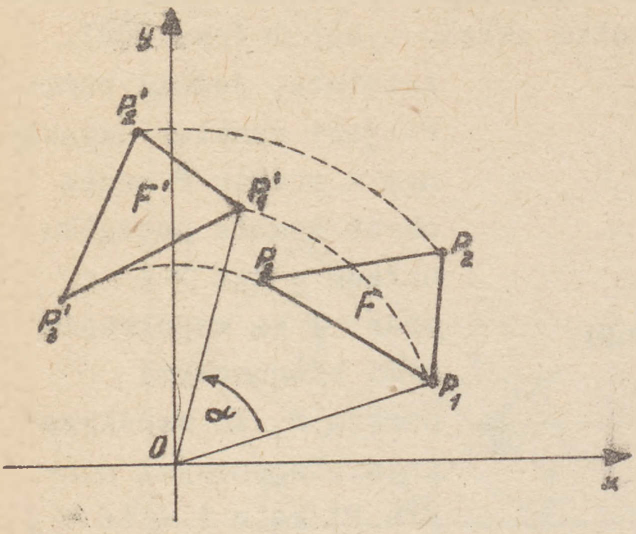
$$y' = r \cos \varphi \sin \alpha + r \sin \varphi \cos \alpha = x \sin \alpha + y \cos \alpha ,$$

czyli punkt $P'(x'y')$ określają wzory (2).

Jeżeli w płaszczyźnie Oxy dana jest figura F i każdemu punktowi P figury F przypiszemy jako obrazy punkty P' w sposób określony wzorami (2), to otrzymamy figurę F', która powstaje z figury F przez obrót dokoła początku układu o kąt α (rys. 207). Przekształcenie określone wzorami (2) nazywamy o b r o t e m. Jeżeli zbiór F stanowi całą płaszczyznę, to wzory (2) określają przekształcenie płaszczyzny w siebie przez obrót.

Podobnie jak w przykładzie 1. wzory (2) możemy interpretować dwojako:

1° jako wzory określające związki między współ-



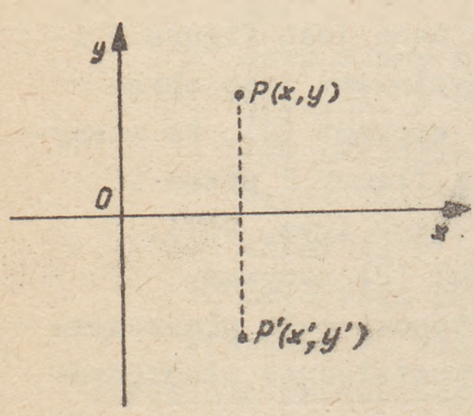
Rys. 207

rzędnymi tego samego punktu w dwóch różnych układach współrzędnych Oxy i Ox'y', z których jeden powstał z drugiego przez obrót dokoła punktu O;

2^0 jako wzory określające przekształcenie geometryczne. W tym ujęciu przy niezmienionym układzie współrzędnych zmieniają się punkty - punktowi (x,y) zostaje przyporządkowany obraz (x'y'), a figura F drogą obrotu przechodzi w figurę F'.

Przykład 3. Wzory

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned} \qquad (3)$$



Rys. 208

przyporządkują punktowi P(x,y) punkt P'(x',y'), który jest symetrycznym odbiciem punktu P w osi x (rys. 208). Przekształcenie określone wzorami (3) nazywamy s y m e t r i ą w z g l ę d e m o s i x.

Prostą p o równaniu

$$y = x - 3$$

przekształcają wzory (3) w prostą p' o równaniu

$$y' = -x' + 3$$

Okrąg K o równaniu

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2,5^2$$

przechodzi po zastosowaniu wzorów (3) w okrąg K' o równaniu

$$(x' - 3)^2 + (y' + 2)^2 = 2,5^2$$

Wzory (3) możemy również uważać za związki między współrzędnymi tego samego punktu dwóch układów współrzędnych Oxy i Ox'y', których osie x i x' pokrywają się i posiadają zgodne zwroty, a osie y i y' pokrywają się i mają zwroty przeciwne.

Przykład 4. Z kolei zajmiemy się przekształceniem zwanym jednokładnością. Niech w płaszczyźnie układu Oxy będzie dany punkt $S(x_0, y_0)$ i liczba $k \neq 0$. Przyporządkujemy każdemu punktowi $P(x,y)$ płaszczyzny punkt $P'(x', y')$, spełniający warunek

$$\overline{SP'} = k \cdot \overline{SP}$$

Stosując twierdzenie o współrzędnych wektora pomnożonego przez liczbę, otrzymujemy wzory

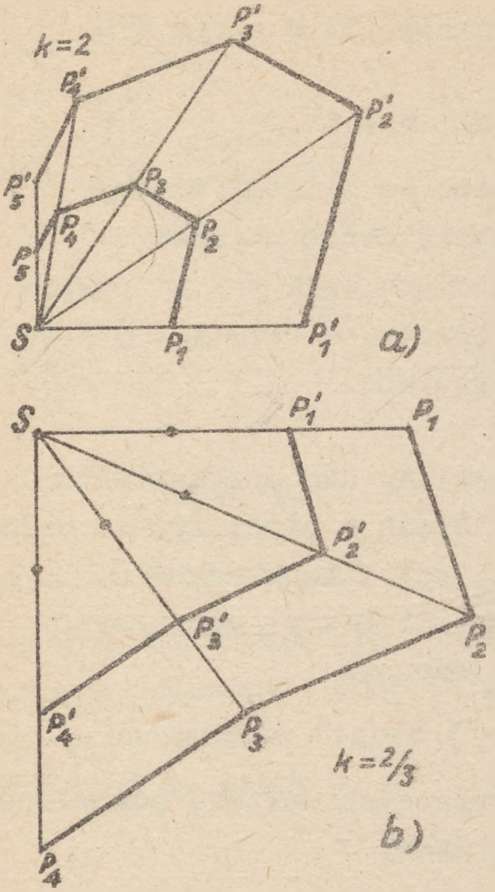
$$x' - x_0 = k(x - x_0)$$
$$y' - y_0 = k(y - y_0).$$

lub

$$\begin{aligned} x' &= x_0 + k(x - x_0) \\ y' &= y_0 + k(y - y_0) \end{aligned} \qquad (4)$$

które określają przekształcenie zwane j e d n o k ł a d n o ś c i ą. Punkt S nazywa się środkiem jednokładności, liczba k - s t o s u n k i e m j e d n o k ł a d n o ś c i.

Jeżeli $k > 0$, to punkt P' leży na prostej SP po tej stronie punktu S, co punkt P, przy czym, jeżeli $k < 1$, to P' leży między S i P, gdy $k > 1$ poza odcinkiem SP; gdy $k = 1$, to P' pokrywa się z punktem P, czyli przekształcenie jest tożsamościowe. Sposób przekształcania się punktów P w punkty P' przy k = 2 i k = $\frac{2}{3}$ pokazuje rysunek 209 a i b.



Rys. 209

Jeżeli k < 0, to punkt P' leży na prostej SP po przeciwnej stronie punktu S, co punkt P. Jeżeli k = -1, to przekształcenie (4) nazywamy również symetrią środkową, a punkt S środkiem symetrii.
Symetria środkowa jest zresztą też szczególnym wypadkiem obrotu, mianowicie obrotu o kąt π dokoła punktu S.
Jeżeli środek jednokładności umieścimy w początku układu, to wzory (4) przyjmą postać

$$x = k\,x \qquad y = k\,y \tag{5}$$

Wzory (4) możemy też interpretować jako związki między współrzędnymi tego samego punktu dwóch układów Oxy i O'x'y'. W tej interpretacji początkiem układu O'x'y' jest punkt S i przy k > 0 osie x i y są zgodnie równoległe a przy k < 0 niezgodnie równoległe z osiami x,y oraz wektory jednostkowe $\bar{I}'$ i $\bar{J}'$ układu O'x'y' są pod względem długości powiększeniem lub pomniejszeniem wektorów $\bar{I}$ i $\bar{J}$ w zależności od tego, czy $|k| > 1$, czy też $|k| < 1$.

W podanych przykładach przekształceń wymieniono tylko przekształcenia płaszczyzny, podobnie określają się przekształcenia przestrzeni układu Oxyz.
I tak wzory

$$x' = x+a, \quad y' = y+b, \quad z' = z+c$$

określają przesunięcie równoległe,
wzory

$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3$$
$$y' = x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3$$
$$z' = x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3$$

określają obrót,
wzory

$$x' = x,\quad y' = y,\quad z' = -z$$

określają symetrię względem płaszczyzny xy,
wzory

$$x' = -x,\quad y' = -y,\quad z' = -z$$

określają symetrię środkową o środku symetrii w początku układu, a wzory

$$x' = kx,\quad y' = ky,\quad z' = kz$$

jednakowość.

Wzory te przyporządkowują każdemu punktowi $P(x,y,z)$ punkt P' o współrzędnych x', y', z', a więc określają przekształcenie przestrzeni.

§ 33. PRZEKSZTAŁCENIA AFINICZNE

1. Określenie przekształcenia afinicznego.

Z kolei zajmiemy się pewną ogólniejszą grupą przekształceń, która obejmuje wszystkie wymienione w poprzednim ustępie przekształcenia jako przypadki szczególne, pod wspólną nazwą przekształceń afinicznych lub powinowactwa.

Przekształcenie afiniczne przestrzeni układu Oxyz określa się analitycznie wzorami

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

a przekształcenia afiniczne płaszczyzny układu Oxy wzorami

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + d_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + d_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

gdzie odpowiednio x,y, z lub x,y oznaczają współrzędne punktu pierwotnego a x'y'z' lub x'y' - współrzędne jego obrazu.

Przede wszystkim nasuwa się pytanie, jaki warunek musi być spełniony, by dane przekształcenie afiniczne posiadało przekształcenie odwrotne t.zn. by odwrotnie każdemu punktowi P', traktowanemu jako obraz punktu P, można przyporządkować w sposób jednoznaczny punkt P.

Będzie to miało miejsce tylko wtedy, gdy układ równań

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z &= x'-d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z &= y'-d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z &= z'-d_3 \end{aligned} \quad (3) \text{ lub } \quad \begin{aligned} a_1x+b_1y &= x' - d_1 \\ a_2x+b_2y &= y' - d_2 \end{aligned} \quad (4)$$

dla każdych wartości prawych stron będzie posiadał jednoznaczne rozwiązania.

Wobec tego warunkiem koniecznym i dostatecznym odwracalności danego przekształcenia afinicznego jest, by odpowiednio wyznacznik

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{lub} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

był różny od zera. Wtedy dla każdych x'y'z' lub x'y' układ (3) względnie (4) posiada jednoznaczne rozwiązanie postaci

$$\begin{aligned} x &= a_1'x'+b_1'y'+c_1'z'+d_1' \\ y &= a_2'x'+b_2'y'+c_2'z'+d_2' \\ z &= a_3'x'+b_3'y'+c_3'z'+d_3' \end{aligned} \quad (5) \text{ lub } \quad \begin{aligned} x &= a_1'x'+b_1'y'+d_1' \\ y &= a_2'x'+b_2'y'+d_2' \end{aligned} \quad (6)$$

Szczegółowy rachunek w przypadku układu (4) przedstawia się następująco:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} x' - d_1, & b_1 \\ y' - d_2, & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(x'-d_1)b_2-(y'-d_2)b_1}{\Delta} = \frac{b_2}{\Delta}x' - \frac{b_1}{\Delta}y' +$$

$$- \frac{d_1b_2 - d_2b_1}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1, x' - d_1 \\ a_2, y' - d_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_1(y'-d_2)-a_2(x'-d_1)}{\Delta} = - \frac{a_2}{\Delta}x' + \frac{a_1}{\Delta}y' +$$

$$- \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{\Delta}$$

Oznaczając w uzyskanych wyrażeniach na x i y współczynniki przy x' i y' oraz wyrazy wolne odpowiednio przez $a_1' \ldots d_2'$, otrzymamy wyrażenia postaci (6).

Jeżeli więc przekształcenie afiniczne jest odwracalne, to przekształcenie odwrotne jest również przekształceniem afinicznym. Wynika to z postaci wzorów (5) i (6), określających przekształcenie odwrotne.

2. Własności przekształcenia afinicznego.

Zajmiemy się własnościami przekształcenia afinicznego (powinowactwa) (1) i (2) w przypadku, gdy wyznacznik Δ, zwany *wyznacznikiem przekształcenia*, jest różny od zera.

Mając dane przekształcenie (1) możemy je przy pomocy punktów pośrednich P''(x'',y'',z''), złożyć z dwóch przekształceń:

$$\begin{aligned} x'' &= a_1x + b_1y + c_1z \\ y'' &= a_2x + b_2y + c_2z \\ z'' &= a_3x + b_3y + c_3z \end{aligned} \qquad \text{i} \qquad \begin{aligned} x' &= x'' + d_1 \\ y' &= y'' + d_2 \\ z' &= z'' + d_3 \end{aligned}$$

Podobnie przekształcenie (2) możemy złożyć z przekształceń

$$\begin{aligned} x'' &= a_1x + b_1y \\ y'' &= a_2x + b_2y \end{aligned} \qquad \text{i} \qquad \begin{aligned} x' &= x'' + d_1 \\ y' &= y'' + d_2 \end{aligned}$$

Postępując w ten sposób, przekształcemy najpierw punkt $P(x,y,z)$ w punkt $P''(x'', y'', z'')$, a ten dopiero w punkt $P'(x', y', z')$. Tak samo należy rozumieć złożenie przekształcenia na płaszczyźnie.
Drugie z tych dwóch przekształceń jest przesunięciem równoległym, określonym wektorem $\{d_1, d_2, d_3\}$ w układzie Oxyz i wektorem $\{d_1, d_2\}$ w układzie Oxy.

Wobec tego dla poznania własności przekształcenia afinicznego wystarczy rozważyć przekształcenie pierwsze, które jest szczególnym przypadkiem przekształcenia (1), gdy $d_1 = d_2 = d_3 = 0$
Badamy zatem przekształcenie

$$\begin{aligned} x' &= a_1x+b_1y+c_1z \\ y' &= a_2x+b_2y+c_2z \\ z' &= a_3x+b_2y+c_3z \end{aligned} \quad (7) \text{ lub } \qquad \begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y \\ y' &= a_2x + b_2y \end{aligned} \quad (8)$$

przy założeniu, że wyznacznik przekształcenia Δ jest różny od zera.

Przekształcenie to jest oczywiście odwracalne; wynika to z rozważań poprzednich. Przekształcenie odwrotne określają wzory

$$\begin{aligned} x &= a_1'x'+b_1'y'+c_1'z', \\ y &= a_2'x'+b_2'y'+c_2'z', \\ z &= a_3'x'+b_3'y'+c_3'z' \end{aligned} \quad (9) \text{ lub } \qquad \begin{aligned} x &= a_1'x'+b_1'y'+c_1'z', \\ y &= a_2'x'+b_2'y'+c_2'z', \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie a', ... c_3' są wyrażeniami utworzonymi ze współczynników a_1, ... c_3.
Następujące twierdzenia ujmują najważniejsze własności geometryczne przekształcenia afinicznego:

1. Obrazem płaszczyzny jest płaszczyzna.

Dowód: Jeżeli dana jest płaszczyzna równaniem

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gdzie A, B, C nie są jednocześnie równe zeru, to przekształcając płaszczyznę przy zastosowaniu wzorów (7) otrzymamy najpierw

$A(a_1x+b_1y+c_1z)+B(a_2x+b_2y+c_2z)+C(a_3x+b_3y+c_3z)+D=0,$

a dalej

$(a_1A+a_2B+a_3C)x+(b_1A+b_2B+b_3C)y+(c_1A+c_2B+c_3C)z+D=0$

Uzyskane równanie jest równaniem płaszczyzny gdyż współczynniki przy zmiennych x,y,z czyli

$$A' = a_1A + a_2B + a_3C$$
$$B' = b_1A + b_2B + b_3C$$
$$C' = c_1A + c_2B + c_3C$$

nie są jednocześnie równe zeru, bowiem układ równań

$$a_1A + a_2B + a_3C = 0$$
$$b_1A + b_2B + b_3C = 0$$
$$c_1A + c_2B + c_3C = 0$$

uważamy jako układ trzech równań ze względu na A, B,C ma tylko rozwiązanie A= B = C = 0. W naszym zaś przypadku A,B,C z założenia nie są jednocześnie równe zeru.

2. Obrazem prostej na płaszczyźnie Oxy jest prosta.
Dowód: tego twierdzenia przebiega podobnie jak w przypadku twierdzenia 1-go.

3. Płaszczyzny przecinające się przekształcają się w płaszczyzny przecinające się.
Dowód: Jeżeli punkt P(x,y,z) jest punktem wspólnym danych płaszczyzn, to punkt ten przekształca się w obraz P'(x,y,z) wspólny obrazom tych płaszczyzn. Obrazy płaszczyzn na podstawie tw. 1 są płaszczyznami i mając jeden punkt wspólny mają przynajmniej prostą wspólną. Obrazy płaszczyzn mają tylko prostą wspólną, gdyby bowiem miały jeszcze inne punkty wspólne t.zn. gdyby się pokrywały, to tym innym punktom wspólnym odpowiadałyby dwa różne punkty orygi-

nalne, należące każdy do innej płaszczyzny. Obrazy więc płaszczyzn przecinających się są płaszczyznami przecinającymi się

4. Prosta w przestrzeni układu Oxyz przekształca się w prostą.
Dowód: Prostą w przestrzeni możemy uważać jako prostą przecięcia się dwóch płaszczyzn.
Z tej uwagi i z twierdzenia 3 wynika słuszność tw.4.

5. Płaszczyzny równoległe przekształcają się w płaszczyzny równoległe.
Dowód: Gdyby obrazy płaszczyzn posiadały punkt wspólny $P'(x',y',z')$, to płaszczyzny oryginalne musiałyby przecinać się w punkcie $P(x,y,z)$, którego obrazem jest punkt P', co jest sprzeczne z założeniem.

6. Proste równoległe w płaszczyźnie układu Oxy przekształcają się w proste równoległe.
Dowód: przebiąga podobnie jak w tw.5.

7. Proste równoległe w przestrzeni przekształcają się w proste równoległe.
Dowód: Proste równoległe należą do jednej płaszczyzny wobec tego na podstawie tw.1. ich obrazy należą też do jednej pładzczyzny. Obrazami prostych są proste, proste te nie mogą mieć punktu wspólnego, bo proste oryginalne nie mają punktu wspólnego.

8. Wektor $\overline{w}\{w_1, w_2, w_3\}$ przekształca się we wektor $\overline{w}'$ o współrzędnych

$$\begin{aligned} w_1' &= a_1w_1+b_1w_2+c_1w_3, \\ w_1' &= a_2w_1+b_2w_2+c_3w_3, \\ w_3' &= a_3w_1+b_3w_2+c_3w_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Dowód: przyjmując odpowiednie współrzędne dla końca i początku wektora $\overline{w}$ możemy jego współrzędne wyrazić w postaci

$$w_1 = x_2 - x_1, \quad w_2 = y_2 - y_1, \quad w_3 = z_2 - z_1$$

Współrzędne te przy zastosowaniu przekształcenia (7) przechodzą w

$$x_2' - x_1' = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 - (a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1) =$$

$$= a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1) + c_1(z_2 - z_1) = a_1w_1 + b_1w_2 + c_1w_3 = w_1'$$

$$y_2' - y_1' = a_2(x_2 - x_1) + b_2(y_2 - y_1) + c_2(z_2 - z_1) = a_2w_1 + b_2w_2 + c_2w_3 = w_2'$$

$$z_2' - z_1' = a_3(x_2 - x_1) + b_3(y_2 - y_1) + c_3(z_2 - z_1) = a_3w_1 + b_3w_2 + c_3w_3 = w_3',$$

9. Przekształcenie afiniczne zmienia na ogół długości odcinków i kąty.
Jeżeli bowiem dany jest wektor $\overline{w}\{w_1, w_2, w_3\}$ i wektor $\overline{w}'\{w_1', w_2', w_3'\}$ jest jego obrazem przy zastosowaniu przekształcenia (7), to długość wektora $\overline{w}$ wyraża się wzorem

$$|\overline{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^3}$$

zaś długość wektora $\overline{w}'$ wzorem

$$|\overline{w}'| = \sqrt{w_1'^2 + w_2'^2 + w_3'^2}$$

gdzie w_1', w_2', w_3' wyrażają się związkami (11). Z porównania $|\overline{w}|$ i $|\overline{w}|$ bezpośrednio wynika, że długości te są na ogół różne i tylko w szczególnym wypadku przekształcenia (7) są równe jak np. w wypadku, gdy przekształcenie to jest obrotem, czyli przekształceniem określonym związkami

$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3$$

$$y' = x\cos\beta_1 + y\cos\beta_2 + z\cos\beta_3$$

$$z' = x\cos\gamma_1 + y\cos\gamma_2 + z\cos\gamma_3$$

Należy jednak zauważyć, że chociaż przekształcenie afiniczne zmienia na ogół długość wektora, to jednak wektorem kolinearnym i tej samej długości odpowiadają również wektory kolinearne i równej długości. Wynika to stąd, że proste równoległe przekształcają się w proste równoległe oraz, że współrzędne obrazu wektora, jak pokazują związki (11), wyrażają się przez współrzędne oryginału i nie zależą od współrzędnych jego początku i końca.

Podobnie, jeżeli dane są dwa wektory $\overline{u}\{u_1, u_2, u_3\}$ i $\overline{w}\{w_1, w_2, w_3\}$ tworzące ze sobą kąt φ i wektorom tym odpowiadają jako obrazy wektory $\overline{u}'$ i $\overline{w}'$ tworzące kąt φ', to na podstawie wzorów wyrażających kąt między wektorami łatwo zauważyć, że kąty φ i φ' są na ogół różne i znowu tylko w szczególnym przypadku przekształcenia (7) jak np. w przypadku jednokładności są równe.

10. Stosunek podziału jest niezmiennikiem x/ przekształcenia afinicznego.
Niech będą dane 3 punkty $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ $P_3(x_3, y_3, z_3)$, leżące na linii prostej i niech $P_1P_3 : P_3P_2 = \lambda$. Wykażemy, że jeżeli P_1', P_2', P_3' są obrazami danych punktów przy zastosowaniu przekształcenia (7), to również $P_1'P_3' : P_3'P_2' = \lambda$.

W tym celu należy wykazać, że

$$x_3' = \frac{x_1' + \lambda x_2'}{1 + \lambda}, \quad y_3' = \frac{y_1' + \lambda y_2'}{1 + \lambda}, \quad z_3' = \frac{z_1' + \lambda z_2'}{1 + \lambda}$$

Istotnie, mamy

$$x_1' = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1,$$
$$x_2' = a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2,$$
$$x_3' = a_1x_3 + b_1y_3 + c_1z_3,$$

---

x/ Każde wyrażenie, które po dokonaniu pewnej operacji nie zmienia się, nazywamy niezmiennikiem tej operacji.

ale $x_3 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_3 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z_3 = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$,

wobec tego

$$x_3' = a_1 \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} + b_1 \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} + c_1 \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

lub

$$x_3' = \frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + \lambda(a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2)}{1+\lambda} = \frac{x_1' + \lambda x_2'}{1+\lambda}.$$

Podobne wyrażenia otrzymujemy dla y_3' i z_3'.
Wniosek: środek odcinka przekształca się w środek obrazu tego odcinka.

3. Iloczyn przekształceń afinicznych.

Jeżeli przekształcenie $f_1(P)$ odwzorowuje punkt P na P', zaś przekształcenie $f_2(P')$ odwzorowuje punkt P' na P'', to przekształcenie

$$P'' = f_2\left[f_1(P)\right]$$

nazywamy i l o c z y n e m lub z ł o ż e n i e m p r z e k s z t a ł c e n i a f_1 z przekształceniem f_2 i oznaczamy symbolem $f_1 f_2$.
Twierdzenie: Złożeniem dwóch przekształceń afinicznych jest również przekształcenie afiniczne.
Istotnie, jeżeli obraz $P'(x',y',z')$ punktu $P(x,y,z)$ uzyskany z przekształcenia

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z,$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z$$

odwzorujemy przy pomocy drugiego przekształcenia

$$x'' = a_1'x' + b_1'y' + c_1'z'$$
$$y'' = a_2'x' + b_2'y' + c_2'z'$$
$$z'' = a_3'x' + b_3'y' + c_3'z'$$

na punkt $P''(x'',y'',z'')$, to powstaje wtedy nowe przekształcenie

$$x'' = a_1''x + b_1''y + c_1''z$$

$$y'' = a''x + b_2''y + c_2''z$$

$$z'' = a_3''x + b_3''y + c_3''z$$

które, jak to wynika z postaci jego wzorów jest przekształceniem afinicznym.

Współczynniki tego przekształcenia, które jest złożeniem przekształcenia

$$f_1(x'=a_1x+b_1y+c_1z,\ y'=a_2x+b_2y+c_2z,\ z'=a_3x+b_3y+c_3z)$$

z przekształceniem

$$f_2(x''=a_1'x'+b_1'y'+c_1'z',\ y''=a_2'x'+b_2'y'+c_2'z',\ z''=a_3'x'+b_3'y'+c_3'z'),$$

wyrażają się przez współczynniki przekształceń f_1 i f_2 następująco:

$$a_1''=a_1a_1'+a_2b_1'+a_3c_1',\ b_1''=b_1a_1'+b_2b_1'+b_3c_1',\ c_1''=c_1a_1'+c_2b_1'+c_3c_1'$$

$$a_2''=a_1a_2'+a_2b_2'+a_3c_2',\ b_2''=b_1a_2'+b_2b_2'+b_3c_2',\ c_2''=c_1a_2'+c_2b_2'+c_3c_2'$$

$$a_3''=a_1a_3'+a_2b_3'+a_3c_3',\ b_3''=b_1a_3'+b_2b_3'+b_3c_3',\ c_3''=c_1a_3'+c_2b_3'+c_3c_3'.$$

Jeżeli przekształcenia f_1 i f_2 są odwracalne, czyli jeżeli wyznaczniki tych przekształceń Δ i Δ' są różne od zera, to odwracalny jest również iloczyn tych przekształceń f_1f_2, jego bowiem wyznacznik przekształcenia Δ'', jak łatwo spostrzeć, wyraża się iloczynem wyznaczników przekształceń f_1 i f_2, czyli że

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_1'', & b_1'', & c_1'' \\ a_2'', & b_2'', & c_2'' \\ a_3'', & b_3'', & c_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix} \neq 0$$

Zupełnie podobnie przedstawia się złożenie przekształceń afinicznych na płaszczyźnie.

Jeżeli dane są przekształcenia

$$f_1(x' = a_1x + b_1y,\quad y' = a_2x + b_2y),$$

$$f_2(x''= a_1'x'+b_1'y',\quad y''=a_2'x' + b_2'y'),$$

to iloczyn tych przekształceń określają wzory

$$x'' = (a_1 a_1' + a_2 b_1')x + (b_1 a_1' + b_2 b_1')\, y,$$

$$y'' = (a_1 a_2' + a_2 b_2')x + (b_1 a_2' + b_2 b_2')\, y.$$

Wprowadzimy pojęcie przekształcenie *afinicznego elementarnego*.

Przekształcenie afiniczne w przestrzeni nazywamy elementarnym, jeżeli spośród trzech współrzędnych obrazu punktu dwie współrzędne są równe współrzędnym oryginału.

Przekształceniem elementarnym jest więc np. przekształcenie

$$x' = ax + by + cz$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Przekształcenie afiniczne na płaszczyźnie nazywamy elementarnym, jeżeli spośród dwóch współrzędnych obrazu punktu jedna współrzędna punktu równa jest współrzędnej oryginału.
Przykładem przekształcenia elementarnego na płaszczyźnie jest np.

$$x' = ax + by$$
$$y' = y$$

Przekształcenie elementarne możemy sobie wyobrazić jako przekształcenie, w którym przestrzeń lub płaszczyzna podlega rozszerzeniu lub skurczeniu tylko w jednym kierunku, przy którym więc wszystkie punkty przestrzeni lub płaszczyzny podlegają przemieszczeniu wzdłuż prostych równoległych.
Twierdzenie: Ogólne przekształcenie afiniczne f na płaszczyźnie

$$x' = a_1 x + b_1 y$$
$$y' = a_2 x + b_2 y,$$

którego wyznacznik jest różny od zera, można złożyć z przekształceń elementarnych.

Dowód: Niech $a_1 \neq 0$. Mając przekształcić punkt $P(x,y)$ danym przekształceniem w punkt $P'(x',y')$, możemy uczynić to przy pomocy punktu pośredniego $P''(x'',y'')$, odwzorowując punkt $P(x,y)$ w punkt P'' za pomocą przekształcenia f_1, określonego wzorami

$$x'' = a_1x + b_1y$$
$$y'' = y$$

Wyznacznik tego przekształcenia równa się a_1, jest więc różny od zera.
Następnie przekształcamy punkt P'' w punkt P' przekształceniem f_2:

$$x' = x'' ,$$
$$y' = a_2x + b_2y$$

pamiętając, że na skutek przekształcenia f_1 współrzędna x przeszła w $\dfrac{x''-b_1y''}{a_1}$, a współrzędna y w y'' i wobec tego y' przekształcenie f_2 określone jest związkiem

$$y' = a_2 \cdot \frac{x'' - b_1 y''}{a_1} + b_2 y''.$$

Przekształcenie f_2 określone więc jest związkami

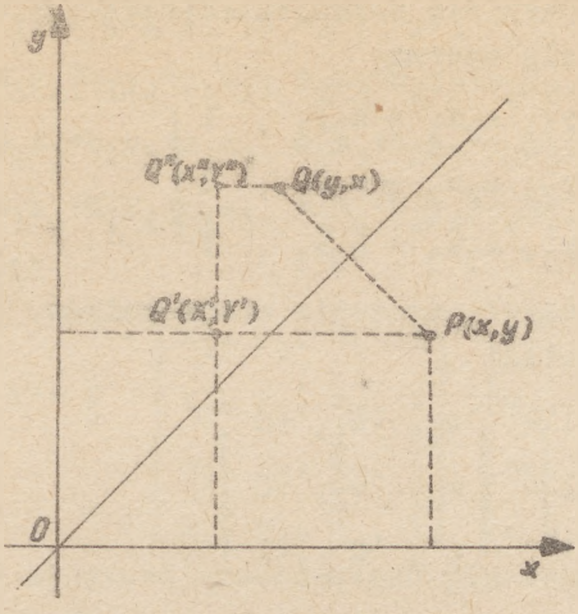
$$x' = x'',$$
$$y' = \frac{a_2}{a_1} x'' + \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1} y''.$$

Wyznacznik przekształcenia f_2 jest różny od zera, równa się bowiem

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1} = \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

Przekształcenie zatem f zostało zrealizowane przez złożenie z dwóch przekształceń elementarnych f_1 i f_2.

W przypadku, gdy $a_1 = 0$, to $b_1 \neq 0$, w przeciwnym bowiem razie wyznacznik przekształcenia równałby się zeru. Przypadek ten przez zmianę x na y i odwrotnie sprowadzamy do poprzedniego gdy $a_1 \neq 0$. Zmiana



Rys. 210

zmiennych x na y i odwrotnie jest równoznaczna przekształceniu $X = y$, $Y = x$ tj. przekształceniu, które odwzorowuje punkt P (x, y) na punkt Q (Y, X) w ten sposób, że punkt Q, jest symetrycznym odbiciem punktu P w prostej przechodzącej przez początek układu i tworzącej z osią x kąt $\frac{\pi}{4}$. Przekształcenie to można złożyć z następujących przekształceń elementarnych (rys. 210):

$$1/\ F_1(X' = x-y,\ Y' = y),$$

które przekształca P w Q'

$$2/\ F_2(X'' = X',\ Y'' = Y' + X'),$$

które przekształca Q' w Q''

$$3/\ F_3(X = Y'' - X'' = y,\ Y = Y'' = x),$$

które przekształca Q'' w Q.

4. Znaczenie geometryczne wyznacznika transformacji afinicznej.

Celem znalezienia geometrycznego sensu wyznacznika przekształcenia afinicznego zbadamy na płaszczyźnie pole trójkąta i jego obrazu, a w przestrzeni objętość czworościanu i jego obrazu.

1/ Niech w płaszczyźnie układu Oxy będzie dany trójkąt $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ oraz przekształcenie

$$x' = a_1x + b_1y,$$
$$y' = a_2x + b_2y,$$

którego wyznacznik Δ jest różny od zera.

Trójkąt $P_1P_2P_3$ przekształca się w trójkąt $P_1'P_2'P_3'$, którego pole S' wyraża się wzorem

$$S' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1y_1, & a_2x_1 + b_2y_1, & 1 \\ a_1x_2 + b_1y_2, & a_2x_2 + b_2y_2, & 1 \\ a_1x_3 + b_2y_3, & a_3x_3 + b_3y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

co, jeżeli uwzględnimy regułę mnożenia wyznaczników, możemy też zapisać w postaci

$$S' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & 0 \\ a_2, & b_2, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix},$$

czyli $S' = S.\Delta$, gdy S oznacza pole trójkąta pierwotnego.

Zatem przy przekształceniu afinicznym pola wszystkich trójkątów i w ogóle pola wszystkich obszarów płaskich (jako sumy pól trójkątów lub granice sum pól trójkątów) zostają pomnożone przez stały czynnik, równy wyznacznikowi przekształcenie afinicznego. W szczególności kwadrat jednostkowy, którego pole równa się 1, przekształca się w równoległobok o polu równym wyznacznikowi przekształcenia.
Łatwo też zauważyć, że przekształcenie o dodatniej wartości wyznacznika nie zmienia orientacji przekształconej płaszczyzny, natomiast przy ujemnej wartości - zmienia orientację na przeciwną.

2/ Jeżeli w układzie Oxyz dany jest czworościan

$P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$, $P_4(x_4,y_4,z_4)$ oraz przekształcenie

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z \quad \text{gdzie } \Delta \neq 0,$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z,$$

to objętość obrazu tego czworościanu wyraża się wzorem

$$V'=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1, & a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1, & a_3x_1+b_3y_1+c_3z_1, & 1 \\ a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2, & a_2x_2+b_2y_2+c_2z_2, & a_3x_2+b_3y_2+c_3z_2, & 1 \\ a_1x_3+b_1y_3+c_1z_3, & a_2x_3+b_2y_3+c_2z_3, & a_3x_3+b_3y_3+c_3z_3, & 1 \\ a_1x_4+b_1y_4+c_1z_3, & a_2x_4+b_2y_4+c_2z_4, & a_3x_4+b_3y_4+c_3z_4, & 1 \end{vmatrix},$$

czyli

$$V'=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \\ x_4, & y_4, & z_4, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1, & 0 \\ a_2, & b_2, & c_2, & 0 \\ a_3, & b_3, & c_3, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = V \cdot \Delta ,$$

gdy objętość czworościanu pierwotnego oznaczymy przez V.

Zatem przy przekształceniu afinicznym objętości wszystkich czworościanów i w ogóle objętości wszystkich obszarów przestrzennych (jako sumy objętości czworościanów lub granicę sum objętości czworościanów) zostają pomnożone przez stały czynnik, równy wyznacznikowi przekształcenia. W szczególności sześcian jednostkowy przekształca się w równoległościan o objętości równej wyznacznikowi przekształcenia.

5. Podobieństwo.

Przekształcenie afiniczne, które nie zmienia kątów nazywamy p o d o b i e ń s t w e m.

Twierdzenie: Przekształcenie afiniczne

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y \\ y' &= a_2x + b_2y \end{aligned} \tag{12}$$

jest wtedy i tylko wtedy podobieństwem, gdy spełnione są warunki

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= b_1^2 + b_2^2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Dowód:

1/Niech przekształcenie (12) będzie podobieństwem i niech wektory $\overline{u}\{u_1, u_2\}$ i $\overline{w}\{w_1, w_2\}$ będą prostopa-

dłe, czyli $u_1w_1 + u_2w_2 = 0$.
Wykażemy, że zachodzą związki (13).
Wektorom $\overline{u}$ i $\overline{w}$ jako obrazy odpowiadają wektory $\overline{u}'$ i $\overline{w}'$ o składowych

$$\overline{u}'\left\{a_1u_1 + b_1u_2,\ a_2u_1 + b_2u_2\right\},$$
$$\overline{w}'\left\{a_1w_1 + b_1w_2,\ a_2w_1 + b_2w_2\right\}.$$

Przekształcenie (12) jest z założenia podobieństwem, wobec tego wektory $\overline{u}'$ i $\overline{w}'$ są również prostopadłe i ich składowe spełniają związek

$$(a_1u_1+b_1u_2)(a_1w_1+b_1w_2)+(a_2u_1+b_2u_2)(a_2w_1+b_2w_2) = 0,$$

który możemy też napisać w postaci

$$u_1w_1(a_1^2+a_2^2)+ u_2w_2(b_1^2+b_2^2)+(u_1w_2+u_2w_1)(a_1b_1+a_2b_2)= 0.$$

Z postaci uzyskanej równości wynika, że zachodzi ona przy wszelkich wartościach u_1, u_2, w_1, w_2, spełniających warunek $u_1w_1 + u_2w_2 = 0$ tylko wtedy, gdy jednocześnie

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= b_1^2 + b_2^2 \\ a_1b_1 + a_2b_2 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Obliczając z tych dwóch równań b_1 i b_2, otrzymamy jako warunki równoważne:

$$\begin{aligned} &b_1 = a_2 \text{ i } b_2 = -a_1 \\ \text{lub}\quad &b_1 = -a_2 \text{ i } b_2 = a_1 \end{aligned} \qquad (14)$$

2/ Dowód twierdzenia odwrotnego:
Niech będą spełnione warunki (13), równoważne warunkom (14). Wykażemy, że przekształcenie afiniczne (12) jest przy tych założeniach podobieństwem.

Istotnie, tangens kąta φ wektorów $\overline{u}$ i $\overline{w}$ wyraża się wzorem

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{u_1w_2 - u_2w_1}{u_1w_1 + u_2w_2},$$

a tangens kąta φ' obrazów tych wektorów - wzorem

$$\operatorname{tg}\varphi' = \pm\frac{(a_1u_1+b_1u_2)(a_2w_1+b_2w_2)-(a_2u_1+b_2u_2)(a_1w_1+b_1w_2)}{(a_1u_1+b_1u_2)(a_1w_1+b_1w_2)+(a_2u_1+b_2u_2)(a_2w_1+b_2w_2)}$$

lub

$$\operatorname{tg}\varphi' = \pm\frac{(u_1w_2 - u_2w_1)(a_1b_2-a_2b_1)}{u_1w_1(a_1^2+a_2^2)+u_2w_2(b_1^2+b_2^2)+(u_1w_2+u_2w_1)(a_1b_1+a_2b_2)}$$

Po uwzględnieniu warunków (13) otrzymamy dalej

$$\operatorname{tg}\varphi' = \pm\frac{(u_1w_1-u_2w_1)(a_1b_2-a_2b_1)}{(u_1w_1+u_2w_2)(a_1^2 + a_2^2)}$$

Biorąc pod uwagę tożsamość Lagrange'a

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \equiv (a_1b_1+a_2b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

i zależności (13) mamy

$$(a_1^2 + a_2^2)^2 \equiv (a_1b_2 - a_2b_1)^2,$$

skąd

$$a_1^2 + a_2^2 \equiv \pm(a_1b_2 - a_2b_1)$$

i wobec tego ułamek, występujący jako czynnik w wyrażeniu na $\operatorname{tg}\varphi'$

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1^2 + a_2^2} = \pm 1$$

Otrzymujemy więc $\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi$, wektory więc $\overline{u}'$ i $\overline{w}'$ tworzą ze sobą ten sam kąt, co wektory $\overline{u}$ i $\overline{w}$.

Twierdzenie: Każde podobieństwo można złożyć z obrotu, jednokładności i przesunięcia lub z obrotu, jednokładności, symetrii względem osi i przesunięcia.

Dowód: Niech będzie dane przekształcenie afiniczne

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned} \tag{15}$$

które jest podobieństwem, czyli spełnione są warunki (13), równoważne warunkom (14).

Oznaczmy $a_1^2 + a_2^2$ przez k^2,

wtedy otrzymamy

$$\left(\frac{a_1}{k}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{k}\right)^2 = 1$$

i możemy przyjąć, że

$$\frac{a_1}{k} = \pm \cos\alpha, \quad \frac{a_2}{k} = \pm \sin\alpha, \tag{16}$$

Przyjmując

$$a_1 = k\cos\alpha \text{ i } a_2 = k\sin\alpha,$$

mamy na podstawie związków (14)

$$b_1 = -k\sin\alpha \text{ i } b_2 = k\cos\alpha$$

lub

$$b_1 = k\sin\alpha \text{ i } b_2 = -k\cos\alpha$$

W tym przypadku wzory (15) przyjmują postać

$$\begin{aligned} x' &= k(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + c_1, \\ y' &= k(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + c_2 \end{aligned} \tag{17}$$

lub

$$\begin{aligned} x' &= k(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + c_1 \\ y' &= k(x\sin\alpha - y\cos\ ) + c_2 \end{aligned} \tag{18}$$

Przekształcenie (16) możemy rozłożyć na przekształcenia

$$\begin{aligned} x' &= x'' + c_1 \\ y' &= y'' + c_2 \end{aligned} \quad \text{i} \quad \begin{aligned} x'' &= k(x\cos\alpha - y\sin\alpha) \\ y &= k(x\sin\alpha + y\cos\alpha). \end{aligned}$$

Pierwsze z tych przekształceń jest przesunięciem. Przekształcenie

$$\begin{aligned} x'' &= k\,(x\cos\alpha - y\sin\alpha) \\ y'' &= k\,(x\sin\alpha + y\cos\alpha) \end{aligned}$$

możemy rozłożyć na przekształcenia

$$\begin{aligned} x'' &= k\,x''' \\ y'' &= k\,y''' \end{aligned} \quad \text{i} \quad \begin{aligned} x''' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y''' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$

Pierwsze z tych przekształceń jest jednokładnością, a drugie obrotem.

Przekształcenie zatem określone wzorami (17) możemy złożyć kolejno z następujących przekształceń:

1/ z obrotu, gdzie punkt $P(x,y)$ przechodzi w punkt $P'''(x''', y''')$

2/ z jednokładności, gdzie punkt $P'''(x''', y''')$ przechodzi w $P''(x'', y'')$

3/ z przesunięcia, gdzie punkt $P''(x'', y'')$ przechodzi w $P'(x', y')$

Celem zinterpretowania przekształcenia określonego wzorami (18) podstawimy $\alpha = -\alpha'$; otrzymujemy wtedy

$$x' = k(x\cos\alpha' - y\sin\alpha') + c_1$$

$$y' = -k(x\sin\alpha' + y\cos\alpha') + c_2$$

Przekształcenie to możemy rozłożyć na

$$\begin{aligned} x' &= x'' + c_1 \\ y' &= y'' + c_2 \end{aligned} \quad \text{i} \quad \begin{aligned} x'' &= k(x\cos\alpha' - y\sin\alpha') \\ y'' &= -k(x\sin\alpha' + y\cos\alpha') \end{aligned}$$

Drugie z tych przekształceń możemy rozłożyć na

$$\begin{aligned} x'' &= x''' \\ y'' &= -y''' \end{aligned} \quad \text{i} \quad \begin{aligned} x''' &= k(x\cos\alpha' - y\sin\alpha') \\ y''' &= k(x\sin\alpha' + y\cos\alpha'), \end{aligned}$$

a drugie z ostatnio otrzymanych przekształceń na

$$\begin{aligned} x''' &= k\,x^{IV} \\ y''' &= k\,y^{IV} \end{aligned} \quad \text{i} \quad \begin{aligned} x^{IV} &= x\cos\alpha' - y\sin\alpha' \\ y^{IV} &= x\sin\alpha' + y\cos\alpha' \end{aligned}$$

Przekształcenie więc (18) można złożyć z następujących przekształceń:

1/ z obrotu, gdzie punkt $P(x,y)$ przechodzi w punkt $P^{IV}(x^{IV}, y^{IV})$

2/ z jednokładności, gdzie $P^{IV}(x^{IV}, y^{IV})$ przechodzi w $P'''(x''', y''')$

3/ z symetrii względem osi x, gdzie $P'''(x''', y''')$ przechodzi w punkt $P''(x'', y'')$

i 4/ z przesunięcia, gdzie $P''(x'', y'')$ przechodzi w $P'(x', y')$.

Związki (16) pozwalają nam jeszcze na inny dobór współczynników a_1, a_2, b_1, b_2, a mianowicie:

$$a_1 = -k\cos\alpha \text{ i } a_2 = -k\sin\alpha$$

oraz $b_1 = k \sin\alpha$ i $b_2 = -k \cos\alpha$ lub $b_1 = -k \sin\alpha$ i $b_2 = k \cos\alpha$, albo

$$a_1 = k \cos\alpha \quad \text{i} \quad a_2 = -k \sin\alpha$$

oraz $b_1 = -k \sin\alpha$ i $b_2 = -k \cos\alpha$ lub $b_1 = k \sin\alpha$ i $b_2 = k \cos\alpha$,

albo

$$a_1 = -k \cos\alpha \quad \text{i} \quad a_2 = k \sin\alpha$$

oraz $b_1 = k \sin\alpha$ i $b_2 = k \cos\alpha$ lub $b_1 = -k \sin\alpha$ i $b_2 = -k \cos\alpha$,

Badając wszystkie te przypadki zawsze dojdziemy do podobnych wyników, co w przypadkach już zbadanych.

Zatem każde podobieństwo na płaszczyźnie Oxy można określić wzorami postaci

$$\begin{aligned} x' &= k(x \cos\alpha - y \sin\alpha) + c_1, \\ y' &= k(x \sin\alpha + y \cos\alpha) + c_2 \end{aligned} \tag{19}$$

lub

$$\begin{aligned} x' &= k(x \cos\alpha - y \sin\alpha) + c_1, \\ y' &= -k(x \sin\alpha + y \cos\alpha) + c_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Spośród tych dwóch przekształceń pierwsze nie zmienia orientacji par wektorów, drugie, ze względu na występującą w nim symetrię osiową, zmienia orientację pary wektorów na przeciwną.
Jeżeli bowiem dane są dwa wektory $\overline{u}\{u_1, u_2\}$ i $\overline{w}\{w_1, w_2\}$ i dla skrócenia rachunków przyjmiemy w przekształceniach (19) i (20) $c_1 = c_2 = 0$, to obrazami tych wektorów przy zastosowaniu przekształcenia (19) są wektory

$$\overline{u}'\{k(u_1\cos\alpha - u_2\sin\alpha), k(u_1\sin\alpha + u_2\cos\alpha)\}$$

$$\overline{w}'\{k(w_1\cos\alpha - w_2\sin\alpha), k(w_1\sin\alpha + w_2\cos\alpha)\}$$

Tworząc wyznacznik $W(\overline{u}', \overline{w}')$ (str.59) otrzymamy

$$W(\overline{u}',\overline{w}') = \begin{vmatrix} k(u_1\cos\alpha - u_2\sin\alpha), & k(u_1\sin\alpha + u_2\cos\alpha \\ k(w_1\cos\alpha - w_2\sin\alpha), & k(w_1\sin\alpha + w_2\cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= k^2 \cdot \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ w_1, & w_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \cos\alpha, & \sin\alpha \end{vmatrix} = k^2 W(\overline{u}, \overline{w}),$$

czyli znak wyznacznika $W(\overline{u}',\overline{w}')$ jest zgodny ze znakiem wyznacznika $W(\overline{u}, \overline{w})$.

Postępując podobnie w przypadku przekształcenia (20) otrzymamy

$$W(\overline{u}', \overline{w}') = -k^2 W(\overline{u}, \overline{w}),$$

czyli znak wyznacznika $W(\overline{u}', \overline{w}')$ jest przeciwny do znaku wyznacznika $W(\overline{u}, \overline{w})$.

Te same własności, które posiada podobieństwo na płaszczyźnie, ma również podobieństwo w przestrzeni.

6. <u>Przekształcenie izometryczne</u>.

Przekształcenie afiniczne, które nie zmienia długości odcinków, nazywamy przekształceniem izometrycznym lub izometrią.

Twierdzenie. Przekształcenie afiniczne jest wtedy i tylko wtedy izometrią, jeżeli jest podobieństwem i spółczynnik k występujący we wzorach określających podobieństwo równa się ± 1.

Dowód: Niech będzie dane przekształcenie

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y \\ y' &= a_2x + b_2y \end{aligned} \tag{21}$$

i niech obrazem odcinka P_1P_2 będzie odcinek $P_1' P_2'$.

Oznaczając współrzędne końców odcinka i jego obrazu przez $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_1'(x_1',y_1')$, $P_2'(x_2', y_2')$, mamy

$$|P_1' P_2'|^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 =$$
$$= [a_1(x_2-x_1)+b_1(y_2-y_1)]^2 + [a_2(x_2-x_1)+$$
$$+b_2(y_2-y_1)]^2 = (a_1^2+a_2^2)(x_2-x_1)^2 + (b_1^2+b_2^2)(y_2-y_1)^2 +$$

$$+ 2 (a_1b_1 + a_2b_2) (x_2-x_1) (y_2-y_1) ,$$

oraz

$$|P_1P_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Porównując $|P_1' P_2'|$ z $|P_1 P_2|$ stwierdzamy, że długości te są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1^2 + a_2^2 = 1,$$

$$b_1^2 + a^2 = 1,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0.$$

Otrzymane warunki charakteryzują podobieństwo dla $k = \pm 1$.

Posługując się wzorami (19) i (20) możemy ustalić wzory określające izometrię.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę wzory (19) to dla $k = 1$ otrzymamy

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha - y \sin\alpha + c_1 \\ y' &= x \sin\alpha + y \cos\alpha + c_2 \end{aligned} \tag{22}$$

a dla $k = -1$

$$x' = -x \cos\alpha + y \sin\alpha + c_1$$

$$y' = -x \sin\alpha - y \cos\alpha + c_2$$

Jeżeli jednak do ostatnich wzorów za podstawimy $\pi + \alpha'$, to otrzymamy wzory postaci (22).

Podstawiając do wzorów (20) $k = 1$, otrzymamy

$$\begin{aligned} x &= x \cos\alpha - y \sin\alpha + c_1 \\ y &= -x \sin\alpha - y \cos\alpha + c_2, \end{aligned} \tag{23}$$

a dla $k = -1$

$$x' = -x \cos\alpha + y \sin\alpha + c_1$$

$$y' = x \sin\alpha + y \cos\alpha + c_2$$

Ostatnie jednak wzory przy podstawieniu $\alpha = \pi + \alpha'$ przyjmują postać (23).

Izometrię więc określają wzory (22) lub (23). Z postaci tych wzorów wynika, że izometrię można złożyć z obrotu i przesunięcia lub z obrotu, symetrii względem osi x i przesunięcia.

7. Przekształcenie afiniczne krzywych i powierzchni.

Przekształceniem afinicznym krzywej stożkowej jest krzywa stożkowa tego samego rodzaju, a więc obrazem elipsy jest elipsa lub okrąg, hiperboli - hiperbola, paraboli - parabola.
Istotnie, mając np. równanie

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - 1 = 0, \tag{24}$$

które dla odpowiednio dobranych współczynników α i β przedstawia elipsę lub hiperbolę oraz przekształcenie

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y \\ y' &= a_2x + b_2y, \end{aligned}\right. \quad (\Delta \neq 0)$$

otrzymujemy jako równanie obrazu krzywej (24)

$$(\alpha a_1^2+ \beta a_2^2)x^2+2(\alpha a_1b_1+ \beta a_2b_2)xy+(\alpha b_1^2+ \beta b_2^2)y^2-1=0 \tag{25}$$

Mały wyróżnik w' tego równania równa się:

$$w' = \begin{vmatrix} \alpha a_1^2+ \beta a_2^2, & \alpha a_1b_1+ \beta a_2b_2 \\ \alpha a_1b_1+ \beta a_2b_2, & \alpha b_1^2+ \beta b_2^2 \end{vmatrix} = \alpha\beta(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

lub, jeżeli mały wyróżnik równania (24) oznaczymy przez w

$$w' = w\,(a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

Jeżeli więc równania (24) przedstawią elipsę, to również równanie jej obrazu (25) przedstawia elipsę; w przypadku zaś gdy równanie (24) jest równaniem hiperboli, to i równanie (25) jest równaniem hiperboli.
Podobne wyniki otrzymujemy w przypadku paraboli.
Mając równanie

$$y^2 - 2px = 0,$$

otrzymujemy jako równanie obrazu przy zastosowaniu danego przekształcenia afinicznego:

$$a_2^2\,x^2 + 2a_2b_2xy+b_2^2y^2-2a_1px - 2b_1py = 0,$$

którego wyróżnik w' równa się

$$w' = \begin{vmatrix} a_2^2, & a_2b_2 \\ a_2b_2, & b_2^2 \end{vmatrix} = a_2^2\, b_2^2 - a_2^2b_2^2 = 0$$

Ponieważ proste równoległe w przekształceniu afinicznym odwzorowują się w proste równoległe, a środki odcinków w środki ich obrazów, więc średnice sprzężone krzywych stożkowych przekształcają się w średnice sprzężone ich obrazów. Osie krzywych stożkowych przekształcają się w osie ich obrazów tylko wtedy, gdy przekształcenie afiniczne nie zmienia kątów, a więc gdy jest podobieństwem.

Podobnie, jak w przekształceniu afinicznym na płaszczyźnie zachowują się krzywe, tak w przestrzeni zachowują się powierzchnie.

§ 34. INWERSJA

1. Inwersja na płaszczyźnie.

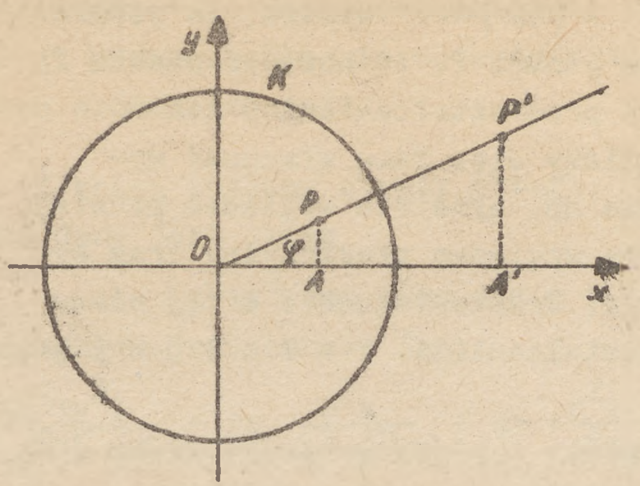
Jeżeli, mając okrąg K o promieniu r i środku O, każdemu punktowi P, różnemu od środka, przyporządkujemy jako obraz punkt P', leżący na półprostej O P (rys.211) i spełniający warunek

$$|OP|\, |OP'| = r^2 \qquad (1)$$

to przekształcenie tak określone nazywamy i n w e r s j ą względem okręgu K lub odbiciem w okręgu x/ lub przekształceniem przez promienie odwrotne.
Srodek okręgu K nazywamy ś r o d k i e m i n w e r s j i. Wyprowadzimy wzory określające inwersję w układzie Oxy.

---

x/ Ponieważ w przybliżeniu zależność między punktem pierwotnym i jego obrazem jest taka, jak między przedmiotem, a obrazem w zwierciadle kolistym.



Rys. 211

Ponieważ punkty $P(x,y)$ i $P'(x',y')$ leżą na jednej prostej przechodzącej przez początek układu, więc jest

$$x : y = x' : y'$$

Warunek (1) możemy napisać w postaci

$$\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2}=r^2$$

Obliczając z tych dwóch związków x' i y' otrzymamy

$$x' = r^2\,\frac{x}{x^2+yz}, \quad y' = r^2\,\frac{y}{x^2+y^2} \qquad (2)$$

Wzory te określają inwersję.

Z warunku (1) wynika, że jeżeli $OP = r$, to $|OP'| = r$, jeżeli $|OP| < r$, to $|OP'| > r$ i gdy $|OP| > r$, to $|OP'| < r$. Inwersja więc przekształca punkty na okręgu w siebie, punkty leżące wewnątrz okręgu (różne od środku) na punkty leżące zewnątrz okręgu i na odwrót.

Inwersja nie określa obrazu punktu O. Zauważamy jednak, że gdy punkt P zbliża się po półprostej do punktu O, to punkt P' oddala się na tej półprostej nieograniczenie. Wskazuje na to następujący wynik rachunku:

$$\lim_{x\to 0} x' = \lim_{x\to 0} r^2\,\frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} r^2\,\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \lim_{x\to 0} r^2\,\frac{\frac{1}{x}}{1+\operatorname{tg}\varphi} = \infty,$$

podobnie $\lim\limits_{x\to 0} y' = \infty$

Z tego względu mówimy niekiedy, że punktowi O jako obraz odpowiada punkt w nieskończoności (t.zw. punkt niewłaściwy).

Ze związku $|OP| \cdot |OP'| = r^2$ wynika, że jeżeli punkt P' jest obrazem punktu P, to obrazem punktu P' jest znowu punkt P. Z przekształceniami o takiej własności już spotkaliśmy się. Taką własność wykazuje na płaszczyźnie np. symetria względem prostej, w przestrzeni symetria względem płaszczyzny oraz symetria względem punktu. Przekształcenia o tej własności nazywamy przekształceniami i n w o l u c y j n y m i.

Jeżeli ze związków, z których otrzymaliśmy już x' i y', z kolei obliczymy x i y, to otrzymamy

$$x = r^2 \frac{x'}{x'^2+y'^2}, \quad y = r^2 \frac{y'}{x'^2+y'^2} \tag{3}$$

jako wzory określające przekształcenie odwrotne.

Własności przekształcenia inwersyjnego.
Weźmy pod uwagę prostą

$$Ax + By + C = 0$$

i przekształćmy ją, stosując wzory (2).
Otrzymujemy jako równanie obrazu prostej

$$A r^2 \frac{x}{x^2+y^2} + B r^2 \frac{y}{x^2+y^2} + C = 0$$

lub

$$Ar^2x + Br^2y + C(x^2 + y^2) = 0 \tag{4}$$

Dyskusja:

1°. Jeżeli C=0, czyli gdy prosta pierwotna przechodzi przez początek układu, to jej obraz określa równanie

$$Ar^2x + Br^2y = 0,$$

czyli $$A x + B y = 0$$

Zatem prosta przechodząca przez środek inwersji przekształca się sama w siebie.

2°. Jeżeli $C \neq 0$, to równanie (4) przedstawia okrąg przechodzący przez początek układu.

Prosta więc nie przechodząca przez środek inwersji przekształca się w okrąg przechodzący przez środek inwersji.

Z kolei zbadamy obrazy okręgu.
Jeżeli dany jest okrąg

$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0,$$

to równaniem jego obrazu jest

$$\frac{r^4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}+2a\frac{r^2x}{x^2+y^2}+2b\frac{r^2y}{x^2+y^2}+c=0$$

lub

$$c(x^2+y^2)+2ar^2x+2br^2y+r^4=0 \qquad (5)$$

Dyskusja:

1°. Jeżeli C = 0, czyli gdy okrąg pierwotny przechodzi przez środek inwersji, to obraz tego okręgu, uzyskany przez przekształcenie (2) jest określony równaniem (5), które w tym przypadku przyjmuje postać

$$r^2\,(2ax+2by+r^2)=0$$

lub

$$2ax+2by+r^2=0.$$

Jest to równanie prostej i to, ponieważ $r^2 \neq 0$, prostej nie przechodzącej przez początek układu. Zatem okrąg przechodzący przez środek inwersji przekształca się w prostą nie przechodzącą przez środek inwersji.

2°. Jeżeli $C \neq 0$, czyli gdy okrąg pierwotny nie przechodzi przez początek układu, to równanie (5) przedstawia okrąg i to, ze względu na $r^4 \neq 0$, okrąg nie przechodzący przez początek układu.

Wobec tego inwersja przekształca okrąg nie przechodzący przez środek inwersji w okrąg również nie przechodzący przez środek inwersji.

2. Inwersja w przestrzeni.

Inwersję w przestrzeni określamy podobnie jak inwersję na płaszczyźnie.

Dana jest kula K o promieniu r i środku O. Każdemu punktowi P, różnemu od środka, przyporządkujemy jako obraz punkt P', leżący na półprostej OP i spełniający warunek

$$|OP|\,|OP'| = r^2 \tag{6}$$

Ponieważ punkty P(x,y,z) i P'(x',y',z') leżą na jednej prostej przechodzącej przez początek układu O, więc jest

$$x : y : z = x' : y' : z'$$

Warunek (6) możemy też zapisać w postaci

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = r^2$$

Obliczając z tych równań x', y', z', otrzymamy

$$x' = r^2\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad y' = r^2\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad z' = r^2\frac{z}{x^2+y^2+z^2}; \tag{7}$$

obliczając zaś x,y,z, mamy

$$x = r^2\frac{x'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad y = r^2\frac{y'}{x'^2+y'^2+z'^2},\quad z = r^2\frac{z'}{x'^2+y'^2+z'^2} \tag{8}$$

Wzory (7) określają inwersję względem kuli K, wzory (8) przekształcenie odwrotne, które jak wynika z wzorów jest również przekształceniem inwersyjnym. Badając obrazy płaszczyzn, podobnie jak obrazy prostych w wypadku inwersji na płaszczyźnie, otrzymamy, że płaszczyzny przechodzące przez środek inwersji odwzorowują się same w siebie, natomiast płaszczyzny nie przechodzące przez środek inwersji przekształcają się w kule przechodzące przez środek inwersji.

Łatwo też wykazać, że kule przechodzące przez środek inwersji, przekształcają się w płaszczyzny nie przechodzące przez środek inwersji oraz, że kule nie przechodzące przez środek inwersji przekształcają się w kule nie przechodzące przez środek inwersji.

Spośród własności inwersji na szczególne podkreślenie zasługuje wiernokątność inwersji polegające na tym, że kąt dwóch powierzchni w każdym punkcie ich linii przenikania nie ulega w inwersji zmianie. Dowód tej własności dla inwersji na płaszczyźnie podany jest w podręczniku geometrii analitycznej M.Starka. Dużą rolę ze względu na liczne zastosowania w teorii funkcji oraz w kartografii odgrywa inwersja kuli równoważna t.zw. rzutowi s t e r e o g r a f i c z n e m u.

Niech w układzie Oxyz będzie dana kula K o środku w O i promieniu r=1 oraz druga kula K_1 styczna do płaszczyzny xy w punkcie O i promieniu $r = \frac{1}{2}$.
Równaniem kuli K_1 jest

$$x^2 + y^2 + (z - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}$$

lub

$$x^2 + y^2 + z^2 = z$$

Obrazem tej kuli przy inwersji

$$x' = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \quad z' = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

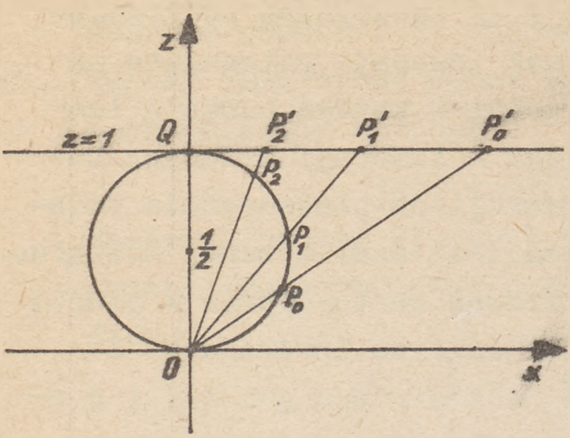
jest

$$\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$$

lub po uproszczeniach

$$z = 1$$

Obrazem więc kuli K_1 jest płaszczyzna z =1, czyli płaszczyzna styczna do kuli K_1 w jej biegunie północnym Q. Na rys. 212 uwidoczniony jest przekrój płaski kuli K_1 i płaszczyzny z=1, płaszczyzną xz. Łatwo jest teraz ustalić odpowiedniość między punktami kuli K_1 jako punktami pierwotnymi, a punktami



Rys. 212

płaszczyzny z=1 jako ich obrazami. Mianowicie, z bieguna południowego O kuli K_1 poprowadzimy półproste i przyporządkujemy punktom P kuli te punkty P' na płaszczyźnie z=1 jako obrazy, w których promień OP przebija płaszczyznę z = 1 (rys.212).

Ten sposób przyporządkowania sobie punktów P i P' jest równoważny z danym przekształceniem inwersyjnym. Istotnie, jeżeli punkt P_o jest punktem kuli K_1, to równania prostej OP_o, jako prostej przechodzącej przez dwa punkty O(0,0,0) i $P_o(x_o,y_o,z_o)$ mają postać

$$\frac{x}{x_o} = \frac{y}{y_o} = \frac{z}{z_o}$$

lub, jeżeli mamy na uwadze, że P_o jest punktem kuli i $x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 = z_o$,

$$\frac{x}{x_o} = \frac{y}{y_o} = \frac{z}{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}$$

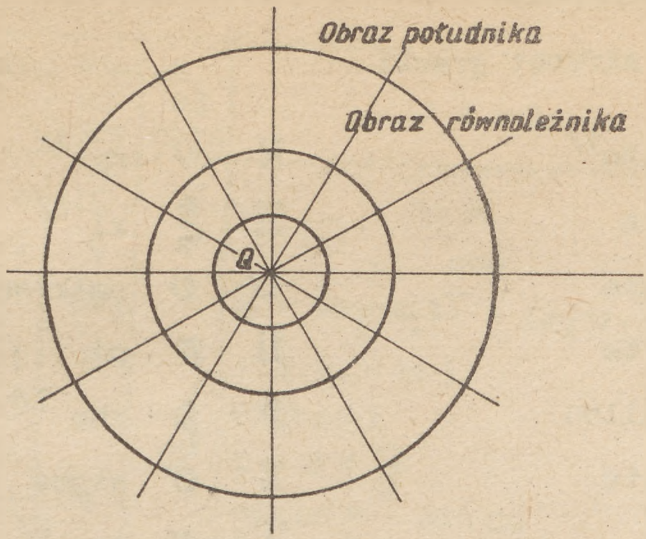
Rozwiązując układ równań

$$\frac{x}{x_o} = \frac{y}{y_o} = \frac{z}{x_o^2 + y_o^2 + z_o^2}$$

$$z = 1$$

otrzymamy punkty przecięcia się półprostej OP_o z płaszczyzną z = 1. Otrzymujemy

$$P_o'\left(\frac{x_o}{x_o^2+y_o^2+z_o^2},\ \frac{y_o}{x_o^2+y_o^2+z_o^2},\ 1 = \frac{z_o}{x_o^2+y_o^2+z_o^2}\right).$$



Rys. 213

Z postaci współrzędnych punktu P_0' wynika, że jest on obrazem inwersyjnym punktu P_0.
Zatem rzutowanie kuli K_1 na płaszczyznę z=1 przy pomocy promieni wychodzących z bieguna O jest równoważne przekształceniu inwersyjnemu kuli K_1 w płaszczyznę z = 1. Opisany rzut kuli na płaszczyznę nazywa się rzutem stereograficznym.

Odwzorowanie kuli K_1 na płaszczyznę z=1 ma następujące własności:

1/ Okręgi południkowe kuli K_1 (okręgi przechodzące przez bieguny) jako koła przechodzące przez środek inwersji przekształcają się na płaszczyźnie z=1 w proste przechodzące przez biegun północny Q.

2/ Okręgi równoleżnikowe kuli K_1 (okręgi równoległe do równika) przekształcają się w koła współśrodkowe na płaszczyźnie z=1 o wspólnym środku Q.

3/ Okręgi południkowe i równoleżnikowe przecinają się pod kątem prostym, pod tym samym kątem przecinają się ich obrazy (rys.213).

Metody rzutu stereograficznego używa się w kartografii np. dla odwzorowania obszarów podbiegunowych.

Alfabet grecki

Α	α	alpha[1/]	Ν	ν	ny [5/]
Β	β	beta	Ξ	ξ	xi [6/]
Γ	γ	gamma	Ο	ο	omikron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
Ε	ε	epsilon	Ρ	ρ	rho [7/]
Ζ	ζ	dzeta	Σ	σ	sigma
Η	η	eta	Τ	τ	tau [8/]
Θ	ϑ	theta [2/]	Υ	υ	ypsilon
Ι	ι	iota [3/]	Φ	φ	phi [9/]
Κ	κ	kappa	Χ	χ	chi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
Μ	μ	my [4/]	Ω	ω	omega

Czytaj: 1/ alfa 2/ teta 3/ jota 4/ mü 5/ nü

6/ ksi 7/ ro 8/ tał 9/ fi.

Dostrzeżone omyłki

Str	Wiersz od góry	Wiersz od dołu	Jest	Powinno być
6	10		m	$m \neq 0$
21	9		cos	$\cos\varphi$
37	11		$\bar{a} - (a_2-x_1)\bar{i} + (y_2-y_1)\bar{j}$	$\bar{a} = (x_2-x_1)\bar{i} + (y_2-y_1)\bar{j}$
51	8		$\sin(\alpha'-\alpha)\|$	$\|\sin(\alpha'-\alpha)\|$
53		6	Wartości	Wartość
74		11	$0 \leqslant \nu < \frac{\pi}{2}$	$0 < \nu \leqslant \frac{\pi}{2}$
81	5		$\cos\alpha = -\sin\alpha'$	$\cos\alpha' = -\sin\alpha$
121		10	$\frac{2}{4} \neq \frac{3}{5}$	$\frac{2}{4} \neq -\frac{3}{5}$
126	10		$\frac{A_2}{A_2(\lambda_1\frac{A_1}{A_2}+\lambda_2)} - \frac{B_2}{B_2(\lambda_1\frac{B_1}{B_2}+\lambda_2)}$	$\frac{A_2}{A_2(\lambda_1\frac{A_1}{A_2}+\lambda_2)} = \frac{B_2}{B_2(\lambda_1\frac{B_1}{B_2}+\lambda_2)}$
151	6		$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \pm \frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}} - 0$	$\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} \pm \frac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}} = 0$
175	6		postaci (2)	postaci (16)
194		14	p	$\|p\|$
228		3	płaszczyzny W przez v	płaszczyzny W z prostą p przez v
270	2		$p - 2mn - 0$	$p - 2\,mn = 0$
293	5		PM_1	$\|PM_1\|$
298	10		$\frac{(r\cos\varphi+c)^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} - 1$	$\frac{(r\cos\varphi+c)^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1$
298		12	gdzie	gdyż
351	4		postałą	powstałą
387	13		uważamy	uważany
394		4	$a_1 \neq 0$, to $b_1 \neq 0$	$a_1 = 0$, to $b_1 \neq 0$
404		12	za podstawimy	za α podstawimy

Now. Gdy zam. 203 68 1000 E-9