

Elementare Theorie der Zentralbewegung, der allgemeinen Schwere und der Erdgestalt.

Von H. Lorenz in Danzig.

§ 1. Die Scheitelkrümmung der Ellipse. Betrachten wir die Ellipse (Fig. 1) mit den Halbachsen a und b als schiefe Parallelprojektion eines Kreises vom Halbmesser a , so kann ein solcher der Ellipse umschrieben werden, und die Tangenten an zwei entsprechenden, d. h. übereinanderliegenden Punkten P_1 und P_2 beider Kurven schneiden sich in einem Punkte C_1 der verlängerten großen Achse. Sind ϑ_1 und ϑ_2 die Tangentenneigungen, so sind dieses auch die Neigungen der Normalen gegen die kleine oder Ordinatenachse, und wir haben für kleine Neigungen, d. h. zwei Berührungspunkte nahe der Ordinatenachse

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{tg } \vartheta_2}{\text{tg } \vartheta_1} \approx \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}, \dots (1)$$

während die Bogen $s_1 = B_1 P_1$ und $s_2 = B_2 P_2$ auf dem Kreise und der Ellipse nahezu übereinstimmen, also

$$s_2 = s_1 = s = a \vartheta_1. \dots (2)$$

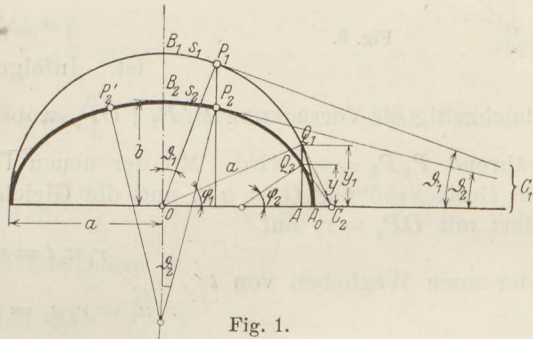


Fig. 1.

Legen wir nun einen Kreisbogen durch die Ellipsenpunkte $P_2 B_2 P_2'$, der sich dem Ellipsenbogen um so genauer anschließt, je kleiner $P_2 B_2 = B_2 P_2' = s_2$ ist und darum Krümmungskreis heißt, so gilt für dessen Halbmesser, den sog. Krümmungsarm am Ende der kleinen Achse mit (1)

$$\varrho_1 = \frac{s_2}{\vartheta_2} = \frac{a \vartheta_1}{\vartheta_2} = \frac{a^2}{b} \dots (3)$$

Nehmen wir dagegen die entsprechenden Punkte Q_1 und Q_2 auf beiden Kurven in der Nähe des Scheitels A_0 , so stimmen die Bogen $Q_1 A_0$ und $Q_2 A_0$ sehr nahe mit den Ordinaten $Q_1 A = y_1$ und $Q_2 A = y_2$ der beiden Kurven überein, die ihrerseits im Verhältnis

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cotg } \varphi_2}{\text{cotg } \varphi_1} = \frac{\text{tg } \varphi_1}{\text{tg } \varphi_2} \approx \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \dots (4)$$

stehen, wenn φ_1 und φ_2 die Neigungswinkel der Normalen in Q_1 und Q_2 mit der großen Achse bedeuten. Alsdann ist mit

$$y_1 = a \varphi_1 \dots (5)$$

der Krümmungsarm der Ellipse im Scheitel A_0

$$\varrho_2 = \frac{y_2}{\varphi_2} = y_1 \frac{b}{a} \frac{1}{\varphi_2} = b \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{b^2}{a} \dots (6)$$

eine Formel, die man auch aus (3) durch Vertauschen von a und b erhalten hätte.

Weiter folgt aus der Projektion, daß alle Ordinaten der Ellipse und demnach alle Flächenstreifen zwischen zwei solchen im Verhältnis $b : a$ gegen die entsprechenden

Größen des Kreises verkürzt werden, was dann auch für die Gesamtfläche der Ellipse zutrifft. Diese berechnet sich alsdann aus der des Kreises zu

$$F = a^2 \cdot \pi \cdot \frac{b}{a} = \pi a b. \quad (7)$$

§ 2. Zentralbewegung. Unterliegt ein bewegter Massenpunkt P einer Beschleunigung, die stets nach einem festen Punkte O im Raume gerichtet ist, so wird deren Größe nur von dem Abstand $OP = r$ abhängen. Der Übergang aus der Lage P_1 in die benachbarte P_2 (Fig. 2) kann somit zerlegt werden in die Bewegung $P_1P_1' = v \cdot t$ mit der Bahngeschwindigkeit v in dem kleinen Zeitabschnitt t und die Verschiebung $P_1'P_2 \parallel P_1O$, so zwar, daß die resultierende Verschiebung $P_1P_2 = v_1 t$ mit einer Geschwindigkeit $v_1 \neq v$ gesetzt werden kann. Setzen wir den Fahrstrahl $OP_1 = r_1$ und mit der Umfangsgeschwindigkeit $u_1 \perp r_1$ die Höhe $P_1Q_1 = u_1 t$, so ist wegen $Q_1P_2 \parallel OP_1$ die Dreiecksfläche

$$OP_1P_2 = OP_1Q_1 = \frac{1}{2} r_1 \cdot u_1 \cdot t.$$

Von P_2 bewegt sich der Punkt dann zunächst mit der Geschwindigkeit v_1 weiter bis P_2' , so daß $P_2P_2' = P_1P_2 = v_1 t$ und damit

$$\triangle OP_2P_2' = \triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2} r_1 u_1 t$$

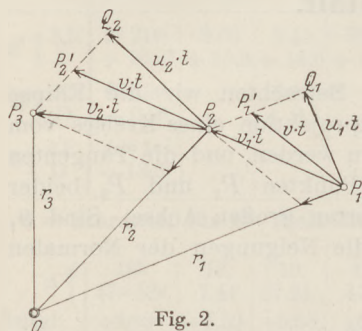


Fig. 2.

ist. Infolge der Zentralbeschleunigung erfährt er gleichzeitig die Verrückung $P_2'P_3 \parallel OP_2$, wobei $\triangle OP_2P_3 = \triangle OP_2P_2' = \frac{1}{2} r_1 u_1 t$ bleibt, während $P_2P_3 = v_2 t$ wird. Mit der neuen Umfangsgeschwindigkeit u_2 ist aber dann die Dreieckshöhe $P_2Q_2 = u_2 t$, und die Gleichheit der Dreiecke $\triangle OP_1P_2 = \triangle OP_2P_3$ führt mit $OP_2 = r_2$ auf

$$r_1 u_1 t = r_2 u_2 t$$

oder nach Wegheben von t

$$r_1 u_1 = r_2 u_2 = r u = \text{const.} \quad (8)$$

Da diese Ausdrücke die doppelten vom Fahrstrahl überstrichenen Dreiecksflächen dividiert durch die dazu gebrauchten Zeiten darstellen, so besagt die Formel (8), daß der Fahrstrahl bei der Zentralbewegung in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Es ist dies die Verallgemeinerung des zweiten Keplerschen Gesetzes, das zunächst nur für die Ellipsenbewegung um einen Brennpunkt aufgestellt wurde.

Außerdem aber lehrt die vorstehende Ableitung, daß die einander flächengleichen Dreiecke in einer und derselben Ebene, der Bildebene, bleiben, daß also der Umlauf eines Punktes um ein Beschleunigungszentrum sich in einer Ebene vollzieht. Haben wir es insbesondere mit einer Ellipsenbewegung zu tun, so ist mit der Ellipsenfläche $F = \pi a b$ und der Umlaufszeit t_0 für alle Fahrstrahlen

$$r \cdot u = \frac{2F}{t_0} = \frac{2\pi \cdot a \cdot b}{t_0} \quad (9)$$

§ 3. Die Ellipsenbewegung um den Mittelpunkt. Durch schiefe Parallelprojektion geht die gleichförmige Bewegung eines Punktes auf einem Kreis vom Halbmesser a und der Umfangsgeschwindigkeit u über in die Ellipsenbewegung um den Mittelpunkt, wobei, da alle Flächenstücke hierbei im gleichen Verhältnis $b:a$ verkleinert werden, auch der Keplersche Flächensatz erhalten bleibt. Der Beschleunigung q auf der Kreisbewegung entspricht in der Fig. 3 die kleine Strecke $PQ = q \frac{t^2}{2} = (a - x_2)$, während $QA = h = ut$ und $h^2 = (a + x_2)(a - x_2)$ sowie

$(a + x_2) = 2a - \frac{qt^2}{2} \approx 2a$ ist. Alsdann gilt

$$u^2 t^2 = 2a \cdot q \cdot \frac{t^2}{2}; \text{ oder } u^2 = a \cdot q. \quad (10)$$

Für die Ellipsenbewegung folgt daraus durch Verkürzung mit der Scheitelgeschwindigkeit $u_2 = \frac{b}{a}u$ die Beschleunigung am schmalen Scheitel mit $q = q_2$:

$$q_2 = \frac{u_2^2 \cdot a}{b^2}, \quad (11)$$

entsprechend einer Kreisbewegung mit der Umlaufgeschwindigkeit u_2 und dem Halbmesser $\frac{b^2}{a} = \varrho_2$, der mit dem Krümmungsarm des schmalen Scheitels nach (6) übereinstimmt.

In derselben Weise erhält man auch die Beschleunigung im Scheitel B aus der Kreisbewegung im eingeschriebenen Kreise vom Halbmesser b mit $u^2 = bq$ und Vergrößerung der Umfangsgeschwindigkeit durch $u_1 = \frac{a}{b} \cdot u$, also

$$q_1 = \frac{u_1^2 \cdot b}{a^2} \quad (12)$$

entsprechend dem Krümmungsarm Gl. (3) $\varrho_1 = \frac{a^2}{b}$. Weiter ist nach dem Flächensatze (9)

$$u_1 b = u_2 \cdot a = \frac{2\pi a \cdot b}{t_0}, \quad (9a)$$

womit die Beschleunigungen (11) und (12) übergehen in

$$q_1 = \frac{4\pi^2}{t_0^2} \cdot b \text{ und } q_2 = \frac{4\pi^2}{t_0^2} \cdot a \quad (13)$$

Bezeichnen wir noch die Größe

$$\frac{2\pi}{t_0} = \omega \quad (14)$$

als die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung, so erhalten wir an Stelle von (13)

$$q_1 = \omega^2 b; \quad q_2 = \omega^2 \cdot a \quad (13a)$$

oder allgemein, da die Zentralbeschleunigung nur vom Abstand, nicht aber von der Richtung abhängen kann, mit Rücksicht auf die Richtung nach dem Zentrum

$$q = -\omega^2 r \quad (15)$$

Die Ellipsenbewegung um den Mittelpunkt vollzieht sich also mit einer dem Abstände verhältnismäßigen Zentralbeschleunigung.

Daher sind (Fig. 3) deren Achsenanteile (Komponenten)

$$q_x = q \cdot \frac{x}{r} = -\omega^2 x; \quad q_y = q \cdot \frac{y}{r} = -\omega^2 y, \quad (15a)$$

während die Bahn selbst als Kreisprojektion mit (14) durch

$$x = a \cdot \cos \omega t, \quad y = b \cdot \sin \omega t \quad (16)$$

dargestellt wird (Fig. 4). Aus der Umfangsgeschwindigkeit im Umkreis $u = a\omega$ mit den Anteilen

$$u_x = -u \cdot \sin \omega t; \quad u_y = u \cdot \cos \omega t$$

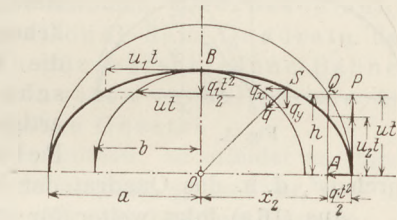


Fig. 3.

folgt dann für die entsprechenden Anteile der Bahngeschwindigkeit v auf der Ellipse

$$v_x = u_x; \quad v_y = u_y \cdot \frac{b}{a}$$

oder mit $u = a\omega$

$$v_x = -a\omega \sin \omega t = -\frac{a\omega}{b} \cdot y; \quad v_y = b \cdot \omega \cdot \cos \omega t = \frac{b \cdot \omega}{a} \cdot x \quad \dots \quad (16a)$$

Man erkennt aus (16), daß die zentrale Ellipsenbewegung auch als die Überlagerung zweier gleichzeitiger gerader Schwingungen in der x - und y -Richtung um den Mittelpunkt mit den größten Ausschlägen (Amplituden) a und b angesehen werden kann, und daß diese Schwingungen unabhängig voneinander Beschleunigungen unterliegen, welche den augenblicklichen Ausschlägen verhältnisgleich sind. Das ist aber die Eigenschaft elastischer oder Federungsschwingungen, so daß wir die Umgebung eines derartigen Beschleunigungszentrums als ein elastisches Feld bezeichnen dürfen, dessen Stärke geradezu

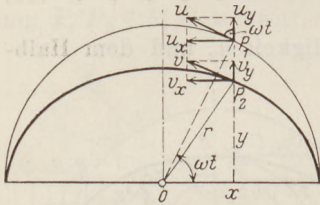


Fig. 4.

durch ω^2 , d. h. das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit gegeben ist.

Aus (16a) folgt weiter für die Bahngeschwindigkeit

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \omega^2 \left(\frac{a^2 \cdot y^2}{b^2} + \frac{b^2 \cdot x^2}{a^2} \right) \quad \dots \quad (16b)$$

oder mit Rücksicht auf die aus (16) durch Ausschaltung von ωt hervorgehende Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad (16c)$$

$$v^2 = \omega^2 (a^2 + b^2 - x^2 - y^2) = \omega^2 (a^2 + b^2 - r^2) \quad \dots \quad (17)$$

also für zwei verschiedene Punkte mit den Strahlen r_1 und r_2

$$v_1^2 - v_2^2 = \omega^2 (r_2^2 - r_1^2) \quad \dots \quad (17a)$$

ein Ergebnis, das natürlich auch für jede gerade Schwingung zutrifft. Erweitern wir beide Seiten von (17a) mit der Hälfte der im elastischen Felde bewegten Masse, also $m/2$, so stellt

$$\frac{m}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2) = \frac{m \cdot \omega^2}{2} \cdot (r_2^2 - r_1^2)$$

die Energiegleichung dar, welche die Änderung der Wucht (kinetischen Energie) durch die Änderung der Lage der Masse (potentielle Energie) bestimmt. Schreiben wir dafür

$$\frac{m}{2} \cdot (v_1^2 + \omega^2 \cdot r_1^2) = \frac{m}{2} \cdot (v_2^2 + \omega^2 \cdot r_2^2) \quad \dots \quad (17b)$$

so erkennen wir, daß die aus Wucht und Lagenenergie bestehende Gesamtenergie der im elastischen Felde bewegten Masse keine Änderung erfährt.

§ 4. Die allgemeine Schwere. Liegt, wie bei der Planetenbewegung, das Beschleunigungszentrum O in einem Brennpunkt der Bahnellipse, so genügt die Ermittlung der Beschleunigung für zwei bequem gelegene Punkte in verschiedenen Abständen von O . Als solche bieten sich zwanglos die beiden Scheitel auf der großen Achse, das sog. Perihel und das Aphel dar mit den Abständen r_1 und r_2 und den entsprechenden zur großen Achse gerade senkrechten Bahngeschwindigkeiten u_1 und u_2 , für welche nach Gleichung (9)

$$u_1 \cdot r_1 = u_2 \cdot r_2 = \frac{2\pi \cdot a \cdot b}{t_0} \quad \dots \quad (9a)$$

gibt. Da die Krümmungsarme beider Scheitel denselben Wert, nämlich:

$$\varrho = \frac{b^2}{a}$$

besitzen, so sind die Beschleunigungen mit Rücksicht auf ihre Richtung nach O:

$$q_1 = -\frac{u_1^2}{\varrho} = -\frac{4\pi^2 a^3}{t_0^2 \cdot r_1^2}; \quad q_2 = -\frac{u_2^2}{\varrho} = -\frac{4\pi^2 a^3}{t_0^2 \cdot r_2^2} \quad \dots \quad (18)$$

oder allgemein:

$$q_1 r_1^2 = q_2 r_2^2 = q \cdot r^2 = -\frac{4\pi^2 \cdot a^3}{t_0^2} \quad \dots \quad (18a)$$

wobei die rechte Seite wegen der Beständigkeit der Bahn einen Festwert darstellt, der die Stärke des Beschleunigungszentrums bestimmt. Die Beschleunigung selbst ist hiernach umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes (Gesetz von NEWTON), während sich für verschiedene Bahnen um dasselbe Zentrum die Kuben der großen Achsen verhalten wie die Quadrate der Umlaufzeiten (drittes Keplersches Gesetz).

Sind zwei Massen m_1 und m_2 im Abstände r vorhanden, so erleidet m_2 durch m_1 die Beschleunigung q_1 und m_1 durch m_2 die Beschleunigung q_2 , so zwar, daß die nach dem Wechselwirkungsgesetz gleiche Anziehungskraft beider Massen:

$$Q = m_1 \cdot q_2 = m_2 \cdot q_1 \quad \dots \quad (19)$$

ist. Daraus folgt aber mit einem allgemein gültigen Festwert k sowie wegen (18a):

$$\frac{m_1}{q_1} = \frac{m_2}{q_2} = \frac{m}{q} = -\frac{r^2}{k} \quad \dots \quad (19a)$$

oder eingesetzt in (19):

$$Q = -k \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \dots \quad (20)$$

als Ausdruck für die Allgemeinschwere. Mit (19a) geht aber auch (18a) über in:

$$k \cdot m = \frac{4\pi^2 a^3}{t_0^2} \quad \dots \quad (20a)$$

so daß man erkennt, daß die anziehende Masse die Stärke des Beschleunigungsfeldes bestimmt und selbst durch diese, d. h. durch den Festwert und das dritte Keplersche Gesetz, gegeben ist.

Aus (9a) folgt ferner:

$$u_1^2 - u_2^2 = \frac{4\pi^2 \cdot a^2 \cdot b^2}{t_0^2} \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{4\pi^2 \cdot a^2 \cdot b^2}{t_0^2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2}$$

oder, da mit dem Brennpunktsabstand $2c$ der Ellipse für die Scheitel:

$$r_1 = a - c, \quad r_2 = a + c, \quad r_1 + r_2 = 2a \\ r_1 \cdot r_2 = a^2 - c^2 = b^2$$

ist, auch:

$$\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = \frac{4\pi^2 a^3}{t_0^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = k \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \dots \quad (21)$$

Hierin stellt die rechte Seite die beim Übergang der Masseneinheit von der Entfernung r_2 nach r_1 geleistete Fallarbeit dar, welche zur Vermehrung der Wucht dient. Auch diese Gleichung gilt, da die Arbeit mit der Beschleunigung nur von den beiden Lagen abhängt, ganz allgemein auch für die tangentialen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 zweier beliebiger Bahnpunkte.

§ 5. Die Anziehung von Kugelschalen und Vollkugeln. Eine mit der Gesamtmasse m gleichförmig belegte Kugelschale um O vom Halbmesser a (Fig. 5) enthält auf dem kleinen Flächenstück F_1 die Masse $m \frac{F_1}{4\pi a^2}$, die auf einen im Innern

gelegenen Punkt P_i mit $P_i F_1 = r_1$ die Beschleunigung — ohne Rücksicht auf das Vorzeichen —

$$q = k \frac{m}{r_1^2} \cdot \frac{F_1}{4\pi a^2} \dots \dots \dots (22)$$

ausübt. Bezeichnen wir nun den räumlichen Öffnungswinkel des das Flächenstück F_1 umfassenden Kegels von P_i aus in Bruchteilen der Oberfläche 4π der Einheitskugel mit Ω , so ist mit dem Winkel $\angle OF_1 P_i = \varphi$:

$$F_1 \cdot \cos \varphi = \Omega \cdot r_1^2, \dots \dots \dots (22a)$$

ebenso erhalten wir für das in der Fortsetzung von $F_1 P_i$ auf der Kugelschale befindliche Flächenstück F_2 im Abstände r_2 vom gleichen Öffnungswinkel wegen $\angle OF_2 P_i = \angle OF_1 P_i = \varphi$

$$q_2 = k \frac{m}{r_2^2} \cdot \frac{F_2}{4\pi a^2} \cdot F_2 \cdot \cos \varphi = \Omega \cdot r_2^2 \quad (22b)$$

oder, da

$$\frac{F_1}{r_1^2} = \frac{\Omega}{\cos \varphi} = \frac{F_2}{r_2^2} \dots \dots (22c)$$

$$q_1 = q_2 \dots \dots \dots (23)$$

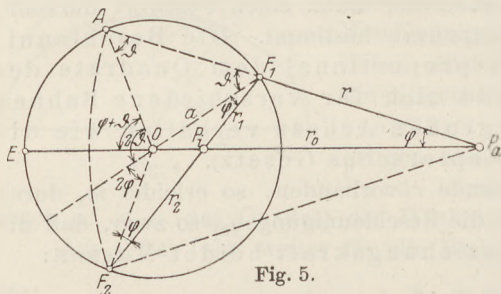


Fig. 5.

d. h. die beiden Wirkungen heben sich auf. Da dieses für alle von P_i ausgehenden Kegel gilt, die auf der Kugelschale je zwei Flächenstücke von gleicher Öffnung ausschneiden, und sich daher aufheben, so übt die mit Masse gleichförmig belegte Kugelschale auf einen Innenpunkt keine Wirkung aus.

Betrachten wir ferner einen Außenpunkt P_a auf der Fortsetzung der Geraden OP_i mit $OP_a = r_0$, $P_a F_1 = r$, so zwar, daß $AP_a = F_2 P_a$ ist, so ist zunächst mit dem Winkel $\angle OF_1 A = \angle OF_1 P_i = \varphi$, $\angle AOF_2 = 2(\varphi + \vartheta)$ also $\angle EOA = \varphi + \vartheta$ und daher $\angle OP_a F_1 = \varphi = \angle OF_1 P_i$ folglich $\triangle OP_a F_1 \sim \triangle OF_1 P_i$, also:

$$r_1 : a = r : r_0 \dots \dots \dots (24)$$

außerdem gilt (22a) oder: $F_1 = \frac{r_1^2 \cdot \Omega}{\cos \varphi} = \frac{a^2 r^2}{r_0^2} \cdot \frac{\Omega}{\cos \varphi}$

$$\frac{F_1 \cdot \cos \varphi}{r^2} = \frac{a^2 \cdot \Omega}{r_0^2} \dots \dots \dots (25)$$

Damit ist aber die im Punkte P_a wirkende Beschleunigung, die aus Symmetriegründen in die Richtung OP_a fällt, wegen $\Sigma \Omega = 4\pi$

$$q = \Sigma k \frac{m \cdot F_1}{4\pi a^2} \cdot \frac{\cos \varphi}{r^2} = \frac{k \cdot m}{4\pi a^2} \cdot \Sigma \frac{F_1 \cdot \cos \varphi}{r^2} = \frac{k \cdot m}{r_0^2} \dots \dots \dots (26)$$

so daß die massenbelegte Kugelschale auf den Außenpunkt genau so wirkt, als wäre ihre Gesamtmasse im Mittelpunkt O vereinigt. Denkt man sich eine Vollkugel, deren Dichte radial beliebig veränderlich sein kann, aus lauter gleichmäßig mit Masse belegten Kugelschalen nach Art einer Zwiebel zusammengesetzt, so erfährt ein im Innern befindlicher Punkt nur von der inneren Vollkugel, auf deren Oberfläche er liegt, eine solche Beschleunigung nach der Kugelmitte, als wenn dort die Masse der wirksamen Kugel vereinigt wäre. Die außerhalb des Punktes liegenden Kugelschalen sind wirkungslos.

Besitzt die Kugel vom Halbmesser a eine gleichförmige Dichte δ , so ist die Masse der inneren Kugel vom Halbmesser r

$$m = \frac{4}{3} \pi \cdot \delta \cdot r^3,$$

also die Beschleunigung an einem Punkte im Abstände r von der Mitte O

$$q_i = \frac{k \cdot m}{r^2} = \frac{4}{3} k \cdot \pi \cdot \delta \cdot r \quad \dots \quad (27)$$

mit einem linearen Zuwachs bis zur Oberfläche. Handelt es sich um den Erdball vom Halbmesser a , so ist dessen Oberflächenbeschleunigung:

$$g = \frac{4}{3} k \cdot \pi \cdot \delta a \quad \dots \quad (27 a)$$

oder

$$q_i \cdot a = g \cdot r \quad \dots \quad (27 b)$$

Außerhalb der Gesamtkugel gilt dann wieder (26) oder mit $g \cdot a^2 = k \cdot m$

$$q_a \cdot r^2 = g \cdot a^2, \quad \dots \quad (26 a)$$

also eine Abnahme mit wachsendem Abstände, so daß die Erdbeschleunigung an der Oberfläche einen Höchstwert darstellt.

Besteht die Kugel (Fig. 6) aus einer Flüssigkeit von der Dichte δ , so nimmt deren Druck auf die Stirnflächen F eines

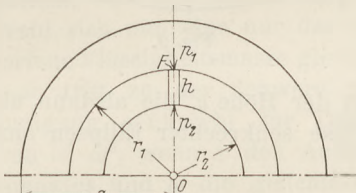


Fig. 6.

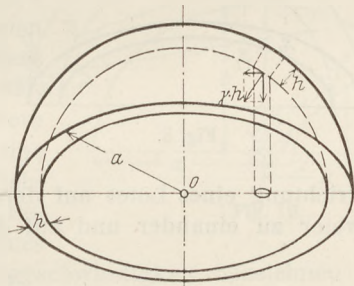


Fig. 7.

Prismas mit der Höhe h in der Beschleunigungsrichtung von p_1 auf p_2 derart zu, daß mit der Masse $m = \delta \cdot F' \cdot h$

$$(p_2 - p_1) \cdot F = q_i \cdot m = q_i \cdot \delta \cdot F' \cdot h \quad \dots \quad (28)$$

wird. Haben die beiden Stirnflächen die Normalabstände r_1 und r_2 von der Kugelmittle, so ist $h = r_1 - r_2$ und nach (27 b):

$$q_i = \frac{g}{a} \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}$$

zu setzen, wenn g die Beschleunigung an der Kugeloberfläche bedeutet. Damit aber wird aus (28) unter Wegfall von F sowie mit dem Raumgewicht $g\delta = \gamma$

$$p_2 - p_1 = \frac{\gamma}{2a} (r_1^2 - r_2^2) \quad \dots \quad (28 a)$$

und daraus der Druckzuwachs von der Oberfläche bis zur Kugelmittle für $r_2 = 0$ und $r_1 = a$

$$p_2 - p_1 = \gamma \cdot \frac{a}{2} \quad \dots \quad (28 b)$$

Für die Erdkugel folgt mit $a = 6,37 \cdot 10^6$ m und $\gamma = 5,6 \cdot 10^3$ kg/m³ der ungeheure Überdruck im Zentrum:

$$p_2 - p_1 = 17,8 \cdot 10^9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} = 17,8 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-2}.$$

Bildet ferner die Erdkruste eine feste Kugelschale (Fig. 7) von der Dicke h und dem Raumgewicht γ , so ist das nach dem Zentrum gerichtete Gewicht der Flächeneinheit $\gamma \cdot h$. Mithin kommt auf einen Großkreis der Kugel in der Normalrichtung hierzu die Gesamtkraft $\gamma \cdot h \cdot \pi \cdot a^2$. Diese Kraft muß von der Druckspannung p in dem Ringquerschnitt $2\pi a \cdot h$ derart aufgenommen werden, daß

$$2\pi a h \cdot p = \gamma \cdot h \cdot \pi \cdot a^2$$

oder wie (28 b)

$$p = \gamma \cdot \frac{a}{2}$$

wird. Das gibt aber mit dem Raumgewicht $\gamma = 2,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ der Erdkruste eine Druckspannung in der Erdkruste von $p = 8,9 \cdot 10^5 \text{ kg cm}^{-2}$, der kein bekannter Stoff widerstehen kann. Daraus folgt also, daß die Erdkruste kein zusammenhängendes Gewölbe bildet, sondern nur aus einzelnen Schollen bestehen kann, die auf dem an sich flüssigen Erdkern schwimmen.

§ 6. Die Innenanziehung von Ellipsoiden. Eine geschlossene Fläche, deren sämtliche ebenen Schnitte Ellipsen sind, heißt ein Ellipsoid. Seine Mittelpunkts-gleichung ergibt sich aus derjenigen einer Grundellipse mit den Halbachsen a und b

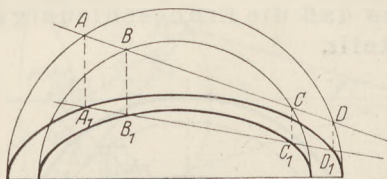


Fig. 8.

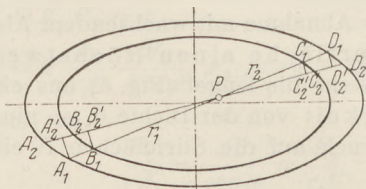


Fig. 9.

durch Errichtung eines Lotes auf deren Ebene mit der Höhe c , die alsdann als Halbachse zweier zu einander und auf der Grundellipse senkrechter Ellipsen anzusehen ist, zu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \dots \dots \dots (29)$$

Teilen wir alle Fahrstrahlen vom Mittelpunkt O aus, bis zur Oberfläche, in gleiche Verhältnisse, so erhalten wir ein ähnliches und ähnlich gelegenes Ellipsoid, dessen Gleichung sich aus (29) ergibt, wenn wir die Zahl 1 der rechten Seite durch das Quadrat des Teilverhältnisses, also $a^2 < 1$, ersetzen. Eine durch den Mittelpunkt O gehende Ebene schneidet daher aus den beiden ähnlichen Ellipsoiden ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen heraus, die beide als schiefe Parallelprojektion zweier konzentrischer Kreise aufgefaßt werden können. Die Kreise schneiden nach Fig. 8 aus einer beide durchsetzenden Geraden zwischen sich gleiche Stücke $AB = CD$ heraus, denen vermöge der Erhaltung des Teilungsverhältnisses bei der Projektion auch gleiche Abschnitte $A_1 B_1 = C_1 D_1 = h_1$ der zugehörigen Geraden zwischen den Ellipsen entsprechen.

Legen wir nun (Fig. 9) durch einen Punkt P im Innern der beiden Ellipsoide einen schmalen Doppelkegel von der Öffnung Ω mit $PB_1 = r_1$, $PC_1 = r_2$, so schneidet dieser aus dem Zwischenraum die Prismen $A_1 B_1 A_2 B_2$ und $C_1 D_1 C_2 D_2$ heraus, welche wegen $A_1 B_1 = C_1 D_1 = h_1$ und $A_2 B_2 = C_2 D_2$ dieselben Seitenlängen haben. Mit Kugelflächen um P durch die Punkte $A_1 B_1$ bzw. $C_1 D_1$ erhalten wir die Raumteile $A_1 B_1 A_2' B_2' = A_1 B_1 A_2 B_2$ und $C_1 D_1 C_2' D_2' = C_1 D_1 C_2 D_2$ mit den gleichen Höhen h und den Basisflächen $r_1^2 \Omega$ und $r_2^2 \Omega$, also den Rauminhalten $r_1^2 h \Omega$ und $r_2^2 h \Omega$. Ist der Zwischenraum der Ellipsoide mit Masse von der überall gleichen Dichte δ erfüllt, so sind die Beschleunigungen jedes der Raumteile:

$$k \cdot \frac{r_1^2 \cdot h \cdot \Omega \cdot \delta}{r_1^2} = k \cdot \frac{r_2^2 \cdot h \cdot \Omega \cdot \delta}{r_2^2} = k \cdot h \cdot \Omega \cdot \delta$$

also gleich, so daß sich ihre Wirkung aufhebt. Eine gleichförmig belegte Schale zwischen zwei konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoiden übt demnach auf einen innerhalb gelegenen Punkt keine Wirkung aus. Wie bei der Kugel ist alsdann bei einem Vollenipsoid die Beschleunigung in einem Innenpunkte nur noch von dem Innenellipsoid bestimmt, auf dessen Oberfläche

der Punkt liegt. Da ferner zwei ähnliche ähnlich gelegene Ellipsoide auf entsprechende Oberflächenpunkte Beschleunigungen ausüben, die ihren Massen unmittelbar und dem Quadrat entsprechender Längen verkehrt proportional sind, so müssen diese Beschleunigungen bei gleicher Dichte den Abständen vom Mittelpunkt verhältnisgleich und gleich gerichtet sein. Dies gilt dann auch wegen des Wegfalls der Wirkung äußerer Ellipsoidschalen für das Innere jedes homogenen Ellipsoides.

§ 7. Die Gestalt des rotierenden Erdkörpers. Da in einer ruhenden Flüssigkeit die Druckzunahme, wie wir in § 5 gesehen haben, nur in der Richtung der Beschleunigung erfolgt, so wird diese auf einer Fläche gleichen Druckes senkrecht stehen. Die Verschiebung der Masseneinheit in einer solchen Fläche erfordert daher auch keine Arbeit, so daß eine solche nur beim Übergang von einer solchen Fläche zu einer anderen unabhängig vom Wege aufzuwenden ist, bzw. gewonnen werden kann. Solche Flächen gleichen Druckes und insbesondere die Oberflächen von Flüssigkeiten sind darum bei parallel gerichteter Beschleunigung Ebenen und im Falle zentraler Beschleunigungsrichtung Kugelflächen, was sich schon im § 5 ergeben hat.

Dreht sich nun eine nur der eigenen Schwere unterworfenen Flüssigkeitsmasse gleichförmig um eine Achse, so tritt zu der Schwere noch die Fliehbeschleunigung senkrecht zur Drehachse im Betrage von $x' \cdot \omega^2$, wenn x' den Achsenabstand eines Massenpunktes und ω die gleichförmige Winkelgeschwindigkeit bezeichnen (Fig. 10). Unter Zusammenfassung beider Beschleunigungen zu einem Gesamtwert, der alsdann nicht mehr allgemein nach der Körpermitte (Schwerpunkt) gerichtet ist, dürfen wir den Körper auch als relativ ruhend ansehen, aber nicht mehr die Kugelform als Gleichgewichtsfigur erwarten. Die Wirkung der Fliehbeschleunigung wird vielmehr eine Abplattung an den Polen und eine Ausbauchung am Äquator bedingen, wodurch die ursprüngliche Kugelform sich derjenigen eines abgeplatteten Rotationsellipsoids nähert. In einem solchen nimmt aber die Beschleunigung der Schwere, wie wir in § 6 gesehen haben, verhältnisgleich dem Abstände r' vom Mittelpunkt zu. Dasselbe gilt aber auch von der in diese Richtung fallenden Fliehbeschleunigung $x' \omega^2 \cos \varphi = r' \omega^2 \cos^2 \varphi$, wenn φ die Neigung von r' gegen die Äquatorebene bedeutet. Ist dann g_0 die angenähert nach O gerichtete und längs der Oberfläche zunächst als konstant betrachtete Schwerebeschleunigung, so ist der Mittelwert der Gesamtbeschleunigung auf einem Fahrstrahl r

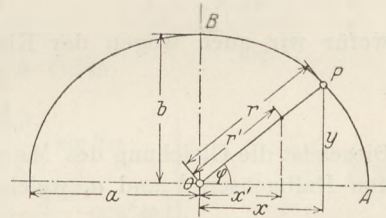


Fig. 10.

$$\frac{g_0}{2} - \frac{\omega^2 \cdot r \cdot \cos^2 \varphi}{2}$$

und die Arbeit zur Hebung der Masseneinheit von O bis zur Oberfläche

$$\frac{g_0 \cdot r}{2} - \frac{\omega^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2 \varphi}{2}$$

Diese Arbeit muß aber übereinstimmen mit der Hubarbeit von O bis zum Pol auf der Polarachse, d. h. auf dem Wege b , die sich mit der Schwere-Beschleunigung g_0 am Pol zu $\frac{g_0}{2} \cdot b$ berechnet. Man hat also

$$g_0 \cdot b = g_0 \cdot r - \omega^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2 \varphi \quad \dots \quad (30)$$

und daraus mit $r = a$ für $\varphi = 0$ die Abplattung:

$$\frac{a - b}{a} = \frac{\omega^2 \cdot a}{g_0} \quad \dots \quad (30 a)$$

Setzen wir darin $g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$, $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$, $\omega^2 = 53,3 \cdot 10^{-10} \text{ sec}^{-2}$, $a = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, so folgt:

$$\frac{a-b}{a} = 0,00346 = \frac{1}{289}$$

in guter Übereinstimmung mit dem durch Gradmessungen bestimmten Werte 1:298.

Die Gleichung der Oberfläche finden wir aus (30) mit $r \cdot \cos \varphi = x$, $r^2 = x^2 + y^2$ zu:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = b + \frac{\omega^2 \cdot x^2}{g_0} = b \left(1 + \frac{\omega^2 \cdot x^2}{g_0 \cdot b} \right)$$

Durch Quadrieren, wobei das Quadrat des sehr kleinen zweiten Gliedes vernachlässigt werden kann, folgt daraus,

$$x^2 + y^2 = b^2 + 2 \frac{\omega^2 \cdot x^2 \cdot b}{g_0}$$

oder

$$x^2 \left(1 - \frac{2 \omega^2 b}{g_0} \right) + y^2 = b^2,$$

wofür wir auch wegen der Kleinheit des zweiten Klammerngliedes schreiben dürfen

$$\frac{x^2}{b^2} \left(1 - \frac{\omega^2 \cdot b}{g_0} \right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \dots \quad (31)$$

Dieses ist die Gleichung des Meridianschnittes eines Rotationsellipsoides mit den Halbachsen b und a , welche durch

$$a \left(1 - \frac{\omega^2 b}{g_0} \right) = b$$

zusammenhängen. Ersetzen wir im kleinen zweiten Klammerngliede b durch a , so erhalten wir wieder (30a).

§ 8. Die Breitenänderung der Erdbeschleunigung. In den Darlegungen des letzten Abschnittes haben wir in erster Annäherung die Schwerebeschleunigung als unveränderlich und nach dem Erdmittelpunkt gerichtet angenommen. Halten wir die letztere Annahme noch fest und bezeichnen jetzt die veränderliche Schwerebeschleunigung mit g' , den Wert am Pol mit g_0 , so erkennen wir, daß g' für jeden Oberflächenpunkt zwischen Werten liegen wird, die der Außenanziehung der eingeschriebenen Kugel mit dem Halbmesser b und der Innenanziehung der umschriebenen Kugel mit a zugehören (Fig. 11). Hierbei ist zu beachten, daß die Dichte der beiden Kugeln größer sein muß als diejenige des Ellipsoids, und zwar muß sie der Bedingung genügen, daß am Pol, also an der Berührungsstelle zwischen Ellipsoid und innerer Kugel, die Schwerebeschleunigung auf beiden den gleichen Wert g_0 hat.

Angesichts der geringen Abweichung der Oberfläche von der Kugelgestalt dürfen wir daher setzen

$$2g' = g_0 \left(\frac{b^2}{r^2} + \frac{r}{b} \right) \quad \dots \quad (32)$$

wobei mit dem Zentriwinkel ψ der im Meridianschnitt dem Ellipsenpunkte P entsprechenden Kreispunkte P_1 und P_2

$$r^2 = a^2 \cdot \cos^2 \psi + b^2 \cdot \sin^2 \psi = b^2 + (a^2 - b^2) \cdot \cos^2 \psi$$

oder wegen der Kleinheit von $\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a-b}{b} \cdot \frac{a+b}{b} \sim 2 \frac{a-b}{a}$ gegen 1

$$\left. \begin{aligned} \frac{b^2}{r^2} &= 1 - 2 \frac{a-b}{a} \cdot \cos^2 \psi \\ \frac{r}{b} &= 1 + \frac{a-b}{a} \cdot \cos^2 \psi \end{aligned} \right\}$$

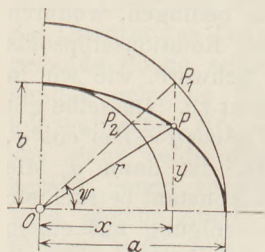


Fig. 11.

geschrieben werden kann. Damit aber wird aus (32)

$$g' = g_0 \left(1 - \frac{a-b}{2a} \cdot \cos^2 \psi \right) \dots \dots \dots (32 a)$$

Zu diesem Betrage tritt nun nach Fig. 12 die Fliehbeschleunigung $x \cdot \omega^2$, woraus die auf der Oberfläche bzw. eine zur Meridianellipse senkrechte Gesamtbeschleunigung g derart hervorgeht, daß mit den Winkeln φ' und φ gegen den Äquator:

$$\left. \begin{aligned} g' \cdot \sin \varphi' &= g \cdot \sin \varphi \\ g' \cdot \cos \varphi' &= g \cdot \cos \varphi + x \cdot \omega^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

ist. Erweitern wir die Gleichungen mit $\cos \varphi'$ bzw. $\sin \varphi'$ und addieren bzw. ziehen sie voneinander ab, so folgt mit $\varphi' - \varphi = \vartheta$:

$$-\sin \vartheta = \frac{x \cdot \omega^2}{g} \cdot \sin \varphi'$$

$$g' = g \cdot \cos \vartheta + x \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi'$$

oder wegen der Kleinheit von ϑ so wie mit $x = a \cdot \cos \psi$ und $\psi \approx \varphi' \approx \varphi$:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= -\frac{a \omega^2}{g} \cdot \sin \varphi' \cdot \cos \psi \approx -\frac{a \omega^2}{2g} \cdot \sin 2\varphi \\ g &= g' - a \omega^2 \cdot \cos \varphi' \cdot \cos \psi \approx g' \left(1 - \frac{a \omega^2}{g'} \cos^2 \varphi \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33 a)$$

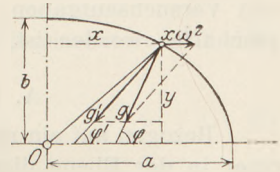


Fig. 12.

Hiervon gibt die erste Gleichung die Lotabweichung der reinen Schwerkbeschleunigung g' an, während die zweite nach Einführung der Abplattung durch Gleichung (30 a) sowie der Schwerkbeschleunigung g' durch Gleichung (32 a):

$$g = g_0 \left(1 - \frac{a-b}{a} \cos^2 \varphi \right) \left(1 - \frac{a-b}{2a} \cos^2 \varphi \right)$$

oder unter Vernachlässigung des Quadrates der Abplattung

$$g = g_0 \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{a-b}{a} \cos^2 \varphi \right) \dots \dots \dots (34)$$

ergibt¹⁾. Mit $\frac{a-b}{a} = 0,00346$ wird $\frac{3}{2} \cdot \frac{a-b}{a} = 0,00520$ in guter Übereinstimmung mit dem Erfahrungswerte 0,0053. Daraus folgt aber im Verein mit der in § 7 abgeleiteten Abplattung, daß sich der Erdball im wesentlichen wie eine homogene Flüssigkeitsmasse im Rotationsgleichgewichte verhält, was sich somit durchaus mit elementaren Hilfsmitteln bewältigen läßt. Die Ergebnisse lassen sich offenbar auch auf andere Himmelskörper übertragen und treffen um so genauer zu, je kleiner die Winkelgeschwindigkeiten und damit auch die Abweichungen von der Kugelform ausfallen.

Der Kreissektor als physisches Pendel.

Von E. Hensel in Villingen.

Mit Recht sagt Fr. C. G. Müller in seiner „Technik des physikalischen Unterrichts“, daß das physische Pendel „der Gipfel der Schulmechanik“ sei. Er selbst hat durch seine Veröffentlichungen in dieser Zeitschrift wertvolle, grundlegende Beiträge

¹⁾ Setzt man in Gleichung (34) $g = g_1$ für $\varphi = 0$, so wird:

$$\frac{g_1}{g_0} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{a-b}{a} \quad \text{oder} \quad \frac{g_0}{g_1} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{a-b}{a},$$

$$\frac{g_0}{g_1} - \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{a-b}{a} = \frac{5}{2} \cdot \frac{a \omega^2}{g_0}.$$

Das ist also der Ausdruck des bekannten Theorems von CLAIRAUT (1749).

hierzu geliefert, zu einer Zeit bereits, als die Integralrechnung noch weit davon entfernt war, in unseren Schulen Bürgerrecht zu genießen. Inzwischen ist ja hierin gründlicher Wandel eingetreten, und so steht nichts mehr im Wege, diesen wichtigen und unterrichtlich so überaus anregenden Gegenstand sowohl theoretisch wie experimentell soweit als möglich auszubauen und populär zu machen. Es war daher sehr zu begrüßen, daß die Schriftleitung mit der Arbeit von F. Zimmermann, „das physische Pendel in den Schülerübungen“ (Jahrg. 39, 2, S. 49 ff.), neuerdings einen Anstoß gegeben hat, diesem Gebiet die ihm gebührende Aufmerksamkeit zuzuwenden. Ich möchte auch meinerseits einen kleinen Beitrag liefern in der Absicht, die Sammlung von Lehr- und Versuchsaufgaben, wie sie durch die Arbeiten der Vorgenannten und anderer geschaffen worden ist, um ein, wie ich glaube, brauchbares Stück zu vermehren.

A. Der Schwerpunkt des Kreissektors.

Bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem ist die Lage des Schwerpunktes einer in der Ebene dieses Systems gelegenen, gleichmäßig mit Masse belegten Fläche bestimmt durch seine Koordinaten

$$\xi = \frac{T_y}{M}, \quad \eta = \frac{T_x}{M},$$

worin T_x und T_y die statischen Momente bezüglich der beiden Achsen, M die Masse dieser Fläche bedeuten. Es mögen zunächst die statischen Momente für einen Kreis-

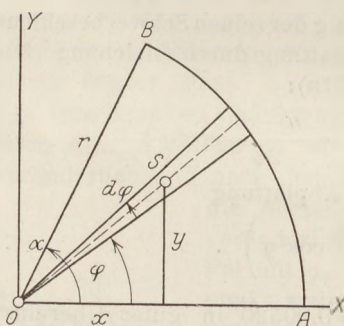


Fig. 1.

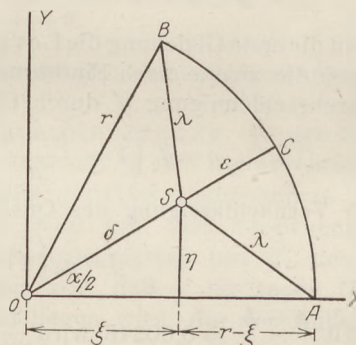


Fig. 2.

sektor mit beliebigem Öffnungswinkel α berechnet werden. In Fig. 1 hat der Schwerpunkt des Sektorelements mit dem Öffnungswinkel $d\varphi$ von O die Entfernung $OS = \frac{2}{3}r$. Bezeichnet man mit m die Masse auf der Flächeneinheit, dann ist die Masse dieses Sektorelements $m \frac{r^2}{2} d\varphi$ und das statische Moment desselben in bezug auf die X-Achse, falls man seine Masse in S vereinigt denkt, $t_x = m \frac{r^2}{2} d\varphi \cdot y$ oder, da $y = \frac{2}{3}r \sin \varphi$, $t_x = m \frac{r^3}{3} \sin \varphi d\varphi$. Hieraus ergibt sich das statische Moment des ganzen Sektors

$$T_x = m \frac{r^3}{3} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} \sin \varphi d\varphi.$$

Die Integration ergibt

$$T_x = m \frac{2}{3} r^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Da die Fläche des Sektors $F = \frac{r^2}{2} \alpha$ ist, so kommt auch

$$T_x = m \frac{r^2}{2} \alpha \cdot \frac{4r}{3} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha} \text{ oder auch } T_x = M \frac{2r}{3} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha},$$

da $M = m \frac{r^2}{2} \alpha$ die Masse des Sektors ist.

Entsprechend findet man das statische Moment in bezug auf die Y-Achse aus

$$t_y = m \frac{r^3}{3} \cos \varphi d\varphi: \quad T_y = M \frac{2r}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Somit sind die Koordinaten des Schwerpunkts S eines Kreissektors mit dem Öffnungswinkel α :

$$\xi = \frac{2r}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \dots \dots \dots (1)$$

$$\eta = \frac{2r}{3} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha} \dots \dots \dots (2)$$

Von Bedeutung für die weiteren Untersuchungen sind noch die Entfernungen des Schwerpunkts von besonderen Punkten am Umfang des Sektors. Es kommen hierfür (Fig. 2) in Betracht der Scheitel O , die Endpunkte A und B des Bogens und die Mitte C desselben, also $SO = \delta$, $SA = SB = \lambda$, $SC = \varepsilon$. Es ist

$$\delta = \eta : \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda = \sqrt{(r - \xi)^2 + \eta^2}, \quad \varepsilon = r - \delta.$$

Durch Einsetzen der für ξ und η gewonnenen Werte erhält man nach einigen leichten Umformungen

$$\delta = \frac{2r}{3} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha} \dots \dots \dots (3)$$

$$\lambda = \frac{r}{3} \sqrt{9 - 12 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + 4 \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)^2} \dots \dots \dots (4)$$

$$\varepsilon = \frac{r}{3} \left(3 - 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right) \dots \dots \dots (5)$$

Läßt man den Öffnungswinkel α wachsen von 0 bis 2π , den Sektor also vom Inhalt 0 bis zum Inhalt des Vollkreises, so ändert auch der Schwerpunkt seine Lage, und seine Bestimmungstücke ξ , η und δ , λ , ε variieren. Die Anfangswerte dieser Größen ergeben sich aus den Ausdrücken (1) bis (5), wenn man beachtet, daß sowohl

$\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ als auch $\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$ für $\alpha \rightarrow 0$ den Grenzwert 1 hat. In der folgenden Tabelle

sind die Werte dieser fünf Größen für einige charakteristische Einzelwerte von α zusammengestellt:

Tabelle I.

α	ξ	η	δ	λ	ε	Sektor
0	$\frac{2r}{3}$	0	$\frac{2r}{3}$	$\frac{r}{3}$	$\frac{r}{3}$	—
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}\sqrt{2}$	$\frac{r}{3\pi}\sqrt{9\pi^2 - 24\pi + 32}$	$\frac{r}{3\pi}(3\pi - 4\sqrt{2})$	Viertelkreis
π	0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4r}{3\pi}\sqrt{2}$	$\frac{r}{3\pi}\sqrt{9\pi^2 + 16}$	$\frac{r}{3\pi}(3\pi - 4)$	Halbkreis
$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{1}{3} \frac{4r}{3\pi}$	$+\frac{1}{3} \frac{4r}{3\pi}$	$\frac{1}{3} \frac{4r}{3\pi}\sqrt{2}$	$\frac{r}{9\pi}\sqrt{81\pi^2 + 72\pi + 32}$	$\frac{r}{9\pi}(9\pi - 4\sqrt{2})$	Dreiviertelkreis
2π	0	0	0	r	r	Vollkreis

Der Ort für die Schwerpunkte aller Sektoren, die zu den Winkeln von 0 bis 2π gehören, ist bestimmt durch Gleichung (3)

$$\delta = \frac{2r}{3} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$$

Sie ist von der Form $\rho = c\omega$, stellt also eine archimedische Spirale dar, mit der

Besonderheit jedoch, daß $\omega = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$ für wachsendes $\frac{\alpha}{2}$ abnimmt und mit $\frac{\alpha}{2} \rightarrow \pi$ der

Null zustrebt. Entsprechend nimmt der Radiusvektor, wie oben schon gezeigt, ab von $\frac{2r}{3}$ bis Null.

Die Spirale beginnt also (Fig. 3) in P im Abstand $\frac{2}{3}r$ von O und nähert sich mehr und mehr dem Mittelpunkt, in dem sie nach einer halben Umdrehung endigt.

Da der zu einem Schwerpunkt gehörige Radiusvektor die Winkelsymmetrale des zugehörigen Sektors ist, so ist in der Figur jeweils nur der halbe Sektor gegeben.

Man kann noch fragen, wie groß der Öffnungswinkel eines Sektors sein müsse, damit der Schwerpunkt gerade in der Mitte der Winkelhalbierenden liegt. An der Figur liest man $72,4^\circ$ ab für $\frac{\alpha}{2}$. Dieser Wert kann aber

beliebig verbessert werden mit Hilfe der Gleichung (3), in welcher man $\delta = \frac{r}{2}$ zu setzen hat. Man erhält dann die Beziehung $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\alpha}{2}$. In ihr wäre $\frac{\alpha}{2} = 72,4^\circ$ ein erster Annäherungswert, wovon man sich durch Auswerten überzeugen kann.

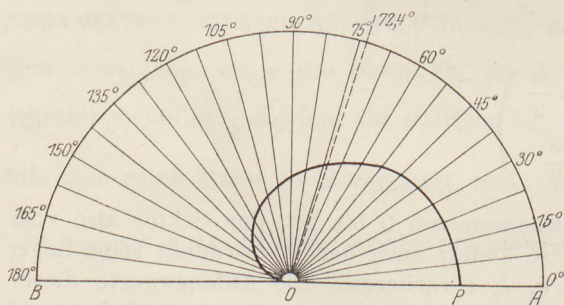


Fig. 3.

B. Das Trägheitsmoment des Kreissektors.

1. Achse sei ein den Sektor begrenzender Radius.

In Fig. 4 ist OA die Achse. Das Flächenelement $df = \rho d\rho d\varphi$ mit der Masse $m\rho d\rho d\varphi$ hat in bezug auf diese Achse das Trägheitsmoment $t = m\rho d\rho d\varphi \cdot y^2 = m\rho^3 d\rho \sin^2\varphi d\varphi$. Somit ist das Trägheitsmoment des Sektors α in bezug auf die gewählte Achse

$$\mathfrak{I}_{OA} = m \int_{\rho=0}^{\rho=r} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} \rho^3 d\rho \sin^2\varphi d\varphi,$$

wofür man den Wert $\frac{m}{8} r^4 (\alpha - \sin\alpha \cos\alpha)$ erhält. Mit Berücksichtigung der Fläche

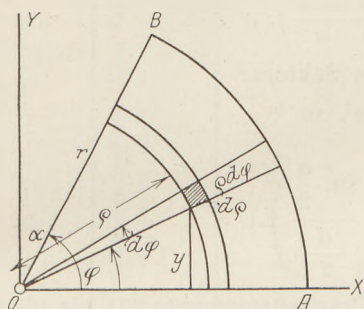


Fig. 4.

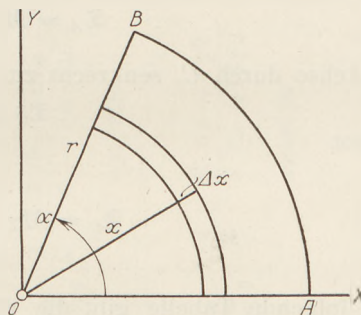


Fig. 5.

und der Masse des Sektors lautet das Resultat, auf bequemere Form gebracht,

$$\mathfrak{I}_{OA} = M \frac{r^2}{4} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right). \quad \dots \quad (1)$$

2. Achse sei die Winkelhalbierende OC des Sektors (Schwerpunktsachse). Für jede Hälfte gilt nach vorigem $\mathfrak{I} = \frac{1}{2} M \frac{r^2}{4} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$, also kommt

$$\mathfrak{I}_{OC} = M \frac{r^2}{4} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right). \quad \dots \quad (2)$$

3. Die Achse gehe durch den Scheitel O , senkrecht zur Ebene des Sektors. In Fig. 5 hat der Sektor mit dem Radius x und dem Winkel α die Fläche $\frac{x^2}{2}\alpha$, derjenige mit dem Radius $x + \Delta x$ und dem gleichen Winkel die Fläche $\frac{(x + \Delta x)^2}{2}\alpha$, somit das Ringstück von der Breite Δx die Fläche $\Delta f = \frac{\alpha}{2} (2x + \Delta x) \Delta x$, woraus $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\alpha}{2} (2x + \Delta x)$ und schließlich $df = \alpha \cdot x dx$, als Fläche des Ringstücks von der Breite dx . Die Masse desselben ist $m\alpha \cdot x dx$ und sein Trägheitsmoment in bezug auf die bezeichnete Achse durch O , $t = m\alpha x^3 dx$. Demnach ist

$$\mathfrak{I}_O = m\alpha \int_0^r x^3 dx = \frac{m\alpha}{4} r^4$$

und mit Rücksicht auf $M = m \frac{r^2}{2} \alpha$

$$\mathfrak{I}_O = M \frac{r^2}{2}. \quad \dots \quad (3)$$

4. Die Achse gehe durch den Schwerpunkt S , senkrecht zur Ebene des Sektors. Nach dem STEINERSCHEN Satz ist $\mathfrak{I}_S = \mathfrak{I}_O - M \delta^2$. Setzt man hierin \mathfrak{I}_O von oben, sowie den Wert von δ ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{I}_S = M \frac{r^2}{2} \left[1 - \frac{8}{9} \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (4)$$

5. Achse durch A , senkrecht zur Ebene des Sektors:

$$\mathfrak{I}_A = \mathfrak{I}_S + M \lambda^2.$$

Die Werte von \mathfrak{I}_S und von λ eingesetzt, gibt

$$\mathfrak{I}_A = M r^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4 \sin \alpha}{3 \alpha} \right) \dots \dots \dots (5)$$

6. Achse durch C , senkrecht zur Ebene des Sektors:

$$\mathfrak{I}_C = \mathfrak{I}_S + M \varepsilon^2.$$

Dies ergibt

$$\mathfrak{I}_C = M r^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right) \dots \dots \dots (6)$$

Die folgende Tabelle gibt die Werte der Trägheitsmomente (1) bis (6) für die angegebenen Sektoren.

Tabelle II.

Trägheitsmoment des Sektors mit dem Öffnungswinkel $\alpha =$				
α	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\mathfrak{I}_{OA} = \frac{1}{4} M r^2 \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$	$\frac{1}{4} M r^2$	$\frac{1}{4} M r^2$	$\frac{1}{4} M r^2$	$\frac{1}{4} M r^2$
$\mathfrak{I}_{OC} = \frac{1}{4} M r^2 \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$	$\frac{1}{4} M r^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)$	$\frac{1}{4} M r^2$	$\frac{1}{4} M r^2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{2}{\pi} \right)$	$\frac{1}{4} M r^2$
$\mathfrak{I}_O = \frac{1}{2} M r^2$	$\frac{1}{2} M r^2$	$\frac{1}{2} M r^2$	$\frac{1}{2} M r^2$	$\frac{1}{2} M r^2$
$\mathfrak{I}_S = \frac{1}{2} M r^2 \left[1 - \frac{8}{9} \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)^2 \right]$	$\frac{1}{2} M r^2 \left(1 - 2 \frac{32}{9\pi^2} \right)$	$\frac{1}{2} M r^2 \left(1 - \frac{32}{9\pi^2} \right)$	$\frac{1}{2} M r^2 \left(1 - \frac{2}{9} \frac{32}{9\pi^2} \right)$	$\frac{1}{2} M r^2$
$\mathfrak{I}_A = M r^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4 \sin \alpha}{3 \alpha} \right)$	$M r^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \right)$	$\frac{3}{2} M r^2$	$\frac{3}{2} M r^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3} \frac{8}{3\pi} \right)$	$\frac{3}{2} M r^2$
$\mathfrak{I}_C = M r^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)$	$M r^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \sqrt{2} \right)$	$M r^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \right)$	$M r^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi} \frac{1}{3} \sqrt{2} \right)$	$\frac{3}{2} M r^2$

C. Die Schwingungsfrequenz des Kreissektors.

Schwingt eine Masse um eine außerhalb des Schwerpunkts beliebig gewählte

Achse, so ist die Anzahl der vollständigen Schwingungen pro Minute $n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{P d}{\mathfrak{I}}}$.

Tabelle III.

		Schwingungsfrequenzen für $r = 16$ cm und $\alpha =$				
Achse	Schwerpunktsabstand	$K = \frac{\mathfrak{I}}{M}$	α	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
OA in der Ebene des Sektors	$\eta = \frac{2r}{3} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{\mathfrak{I}_{OA}}{M} = \frac{r^2}{4} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right)$ $K_{OA} = r^2$	$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{\eta}{K_{OA}} g}$	$\frac{\eta}{K_{OA}} = \frac{16}{3r\pi}$ $n = 97,43$	$\frac{\eta}{K_{OA}} = \frac{16}{3r\pi}$ $n = 97,43$	$n = 0$
	$\delta = \frac{2r}{3} \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{\mathfrak{I}_O}{M} = r^2$ $K_O = \frac{r^2}{2}$	$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{\delta}{K_O} g}$	$\frac{\delta}{K_O} = \frac{8\sqrt{2}}{3r\pi}$ $n = 81,93$	$\frac{\delta}{K_O} = \frac{8}{3r\pi}$ $n = 68,89$	$n = 0$
A	$\lambda = \frac{r}{3} \sqrt{9 - 12 \frac{\sin \alpha}{\alpha} + 4 \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)^2}$	$\frac{\mathfrak{I}_A}{M} = \frac{r^2}{3} \left(\frac{4 \sin \alpha}{3\alpha} \right)$ $K_A = r^2$	$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{K_A} g}$	$\frac{\lambda}{K_A} = \frac{2\sqrt{9\pi^2 - 24\pi + 32}}{9\pi - 16}$ $n = 78,36$	$\frac{\lambda}{K_A} = \frac{2\sqrt{9\pi^2 + 16}}{9\pi}$ $n = 63,63$	$\frac{\lambda}{K_A} = \frac{2}{3r}$ $n = 61,05$
	$\epsilon = \frac{r}{3} \left(3 - 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \right)$	$\frac{\mathfrak{I}_C}{M} = r^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2}}{3\alpha} \right)$ $K_C = r^2$	$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{\epsilon}{K_C} g}$	$\frac{\epsilon}{K_C} = \frac{2}{r} \frac{3\pi - 4\sqrt{2}}{9\pi - 16\sqrt{2}}$ $n = 86,38$	$\frac{\epsilon}{K_C} = \frac{2}{r} \frac{3\pi - 4}{9\pi - 16}$ $n = 70,30$	$\frac{\epsilon}{K_C} = \frac{2}{3r}$ $n = 61,05$

senkrecht zur Ebene des Sektors

Das an einem solchen Pendel wirksame Drehungsmoment ist für den Ausschlag τ , $Pd \sin \tau$, das maximale Drehungsmoment also Pd , welches wirksam wäre, wenn der Schwerpunkt gegenüber der Achse wagrecht läge. Praktisch tritt dieser Fall nicht ein, da ja die Schwingungsformel nur für kleine Elongationen, für welche die Pendelschwingung als eine Sinusschwingung angesehen werden kann, abgeleitet ist. Das „maximale Drehungsmoment“ hat also nur rechnerische Bedeutung, ebenso wenn man sagt, der Quotient $\frac{Pd}{\mathfrak{L}}$ sei die „maximale Winkelbeschleunigung“ β_{max} , und die Schwingungsfrequenz $n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\beta_{max}}$ sei der Quadratwurzel aus dieser Beschleunigung direkt proportional. In $\beta_{max} = \frac{Pd}{\mathfrak{L}}$ enthält ferner sowohl P , als auch \mathfrak{L} die Masse M als Faktor. Man setze daher $P/M = g$, $\mathfrak{L}/M = K$, so daß endlich

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{d}{K} \cdot g}.$$

Für praktische Versuche kann man sich mit drei Sektoren begnügen, mit dem Viertel-, dem Halb- und dem Vollkreis, Für den Radius wähle man beispielsweise

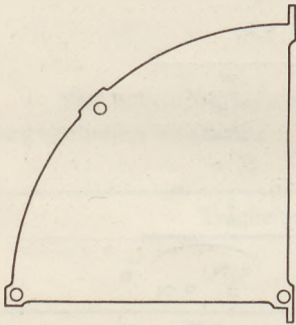


Fig. 6.

16 cm. Die Anbringung der Schwingungsachsen bietet bei Beobachtung einiger Sorgfalt keine Schwierigkeit. Verwendet man ein 3 bis 4 Millimeter starkes Messingblech, so wird, wie Fig. 6 andeutet, die richtige Lage der Achsen dadurch gewährleistet, daß man über die bezeichnete Stelle, bevor man das Loch bohrt, einen kleinen Wulst anlötet oder anschraubt. Die Achse OA erhält man durch Ansetzen zweier kurzer, zylindrischer Verlängerungen. Vorteilhaft ist es, für jede Achse einen besonderen Sektor anzufertigen. Tabelle III zeigt unter Benutzung der vorhergehenden Tabellen eine Zusammenstellung der Formeln für die Schwingungsfrequenzen der einzelnen Sektoren in bezug auf die gewählten Achsen. Die beigegefügtten numerischen Werte sind durch die ausgeführten Versuche mit hinreichender Genauigkeit bestätigt worden.

Elektrische Meßinstrumente für Schulzwecke.

Von P. Nickel in Berlin.

I. Direkt zeigende Instrumente.

In unseren physikalischen Sammlungen sind vielfach so stark veraltete und unzulängliche elektrische Meßinstrumente vorhanden, daß ein Hinweis auf die neueren Typen, die sehr genaue Messungen in kürzester Zeit und bequemster Form ermöglichen, angebracht erscheint. Besonders hinsichtlich des Wechselstromes sind wir im allgemeinen noch schlecht versorgt, und doch ist in den meisten Fällen wohl Wechselstromanschluß an den Schalttafeln vorhanden, während Gleichstrom für besondere Zwecke durch laufende Umformer erst hergestellt werden muß; führt das Starkstromkabel Gleichstrom zu, so besteht noch mehr die Gefahr, daß Wechselstrommessungen allzu stiefmütterlich behandelt werden. Zunächst soll eine Übersicht der käuflichen Zeigerinstrumente, wie sie vor allem für den Anschauungsunterricht in Frage kommen, gegeben werden; ein späterer Aufsatz wird sich mit den Instrumenten für Spiegelablesung und sonstigen leicht herstellbaren Meßeinrichtungen beschäftigen.

Die Meßinstrumente werden jetzt in 4 Klassen eingeteilt; es werden mit dem Klassenzeichen E, F, G, H der Reihe nach Feinmeßgeräte 1. und 2. Klasse und Betriebs-

geräte 1. und 2. Klasse belegt. Unsere ersten Firmen haben es sich angelegen sein lassen, nach präzisionsmechanischen Grundsätzen gebaute Zeigerinstrumente für den Gebrauch an höheren Lehranstalten und im Hörsaal herzustellen, die nicht zu teuer und recht übersichtlich sind. Siemens & Halske und Hartmann & Braun z. B. haben besondere Listen für solche Instrumente zusammengestellt, deren Studium sehr zu empfehlen ist.

Für Gleichstrommessungen sind wohl vielfach 2 Meßinstrumente in Gebrauch, die von H. HAHN empfohlen worden sind; ein Drehspulamperemeter mit 100 teiliger Skala und 2 Meßbereichen, 0—1 bzw. 0—10 Ampere, und ein entsprechendes Voltmeter für 0—1 bzw. 0—10 Volt. Die Instrumente haben die Form von Schränken von etwa 210 mm Höhe, sie werden hergestellt von der Firma Gans und Goldschmidt, Berlin N. Das Amperemeter hat 0,2 bzw. 0,02 Ω Widerstand, also 0,2 Watt Eigenverbrauch; beim Voltmeter ist für den kleineren Meßbereich der Widerstand auf 200 Ω , für den größeren auf 2000 Ω abgeglichen, der höchste Eigenverbrauch beträgt also 0,005 Watt. Es sind Präzisionsinstrumente, etwa der Klasse *F* mit spiegelunterlegter Skala und Messerschneidenzeiger; eine zur Meßteilung parallele Skala mit dicken Strichen erlaubt, den Ausschlag aus einiger Entfernung zu schätzen. Beide Instrumente haben sich durchaus im Unterricht bewährt; unser Voltmeter zeigt nach 15jährigem Gebrauch noch richtig, das Amperemeter etwas zu wenig, weil der Feldmagnet nachgelassen hat oder die Spiralfedern, die der Drehspule den Strom zuführen und die Gegenkraft zur Bewegung der Spule liefern, sich verändert haben. Vielleicht wird das Instrument gelegentlich größer gewünscht; man erhält bei Hartmann & Braun Demonstrations-Drehspulinstrumente mit gut einsehbarer Inneneinrichtung, ohne Spiegelskala, nur mit Lanzettzeiger, Nullpunkt in der Mitte der Teilung, die noch auf 8, 16 oder 25 m ablesbar ist; der Vortragende kann an einer Feinteilung, die ihm zugewendet ist, den genauen Strom- oder Spannungswert entnehmen. Für Schulen dürfte die kleinste Type (Grundfläche 180×290, Höhe 350 mm) immer ausreichen. Ähnliche Demonstrationsgeräte liefern Siemens & Halske (380×240×370 mm), empfehlen gleichzeitig aber die Verwendung von Schalttafelinstrumenten in runder Form mit Sockeldurchmessern von 135 und 185 mm, die auf Einsatzbretter geschraubt und beim Gebrauch in einen Instrumentenbock geschoben werden. In der Tat leisten nach unserer Erfahrung die billigen Instrumente mit Weicheisensystem oder die besseren mit Drehspulsystem, die man sich selbst leicht auf ein Winkelbrett (wagrecht 25×14 cm, senkrecht 21×30 cm, aus 2 cm starkem Holz) schrauben kann, recht gute Dienste. Die größere Type mit 185 mm Durchmesser und 110—120 mm Skalenlänge ist zu bevorzugen.

Im Laufe der Zeit sind nun die Anforderungen besonders hinsichtlich der bequemen Messung kleiner Stromstärken gewachsen. Nach dem Kriege erwarben wir von Leppin & Masche, Berlin, ein Milliampereometer, Nullpunkt in der Mitte der Skala, Lanzettzeiger, beiderseitig 50 Teilstriche = 5 Milliampere, so daß direkt bis auf 0,1 Milliampere abgelesen werden kann. Für den äußeren Aufbau hat offenbar das HAHNSche Instrument als Muster gedient, es hat dieselben Abmessungen wie dieses. Bei der Bestimmung von großen Widerständen nach der OHMSchen Methode, zur Messung von Anoden- und Detektorströmen usw. leistet es sehr gute Dienste. Der Widerstand der Drehspule ist auf 15 Ω abgeglichen, der Meßbereich kann durch mitgelieferte Nebewiderstände auf 0,05, 0,5 und 5 Amp. erweitert werden; für kleinere Stromstärken ist in diesem Sinne auch ein Stöpselrheostat zu verwenden. Die Teilung könnte schärfere Striche haben, und die Hervorhebung jedes 10. Striches hätte besser als beim HAHNSchen Instrument auf einer besonderen Skala geschehen sollen. Drehspulstromzeiger dieser Art sind sicher ein Bedürfnis, wenn man einiges aus der Radiotechnik im Unterricht bringen will. Neuerdings werden auch noch empfindlichere Instrumente (1 Teilstrich = 0,01 Milliampere) in der Form des beschriebenen angeboten. Zur Not kann man sich das Voltmeter nach HAHN als Milliampereometer herrichten, indem man Nebenschlüsse verwendet. Da beim 1 Voltbereich der Widerstand 200 Ω

beträgt, so entspricht dem vollen Ausschlag ein Strom von 5 Milliampere; ein Nebenschluß von 200Ω würde also den Meßbereich auf 10, ein solcher von 50Ω ihn auf 25 Milliampere erweitern; aber immerhin würde das Gerät dann mit dem etwas hohen Widerstand von 100 bzw. 40Ω wirken.

Bei höheren Ansprüchen an die Meßgenauigkeit wird man zu Laboratoriumsinstrumenten greifen, wie es etwa das weitverbreitete 10 Ohm-Instrument von Siemens & Halske ist (150 Mk.). Der Ausschlag über die ganze 150teilige Skala erfolgt bei einer angelegten Spannung von 45 Millivolt. Der durch das Instrument fließende Strom beträgt dann $45 : 10 = 4,5$ Milliampere, für 1 Teilstrich also 0,03 Milliampere. Der Verbrauch für den ganzen Ausschlag stellt sich demnach auf $2 \cdot 10^{-4}$ Watt. Zur Messung von Elementspannungen ist eine besondere 3 Voltklemme vorhanden, der zugehörige Widerstand beträgt genau 1000Ω . Zu diesem Präzisionsinstrument (Klasse E) kann man Vor- und Nebewiderstände mitbeziehen, durch die sich der Meßbereich auf 0,15; 0,3; 0,75; 1,5; 3; 7,5; 15; 30 Ampere und auf 15; 30; 150; 300; 600 Volt erweitern läßt. Für den Demonstrationsunterricht ist es wenig geeignet, weil es liegend geeicht ist; aber als Normalinstrument zur Kontrolle anderer Gleichstrominstrumente, zur genauen Messung von hohen Widerständen, von Thermo- und Detektorströmen, beim Studium an Elektronenröhren, ist es kaum zu entbehren. Mit einem unter 45° hinter das Gerät gestellten Spiegel läßt sich nötigen Falles auch vor der Klasse der Ausschlag sichtbar machen.

Meßbeispiele: Die Spannung der 3 Zellen einer Akkumulatorenbatterie ergab sich zu 2,038; 2,040 und 2,035 Volt. — Der Widerstand eines Wechselstromvoltmeters folgte bei Anwendung einer Akkumulatorenzelle zu 1630Ω . — Eine Spule mit Kupferdraht von 0,07 mm Stärke zeigte bei 25° 455Ω , mit Hilfe eines Reagenzröhrchens in siedendes Wasser eingetaucht 526Ω Widerstand. — Ein Thermoelement, welches durch Zusammenschmelzen eines Konstantan- und eines Kupferdrahtes im Lichtbogen erhalten war, ergab schon bei Erwärmung mit der Hand einen Ausschlag. — An Stelle des Telephons an einen einfachen, selbstgefertigten Detektorapparat geschaltet, zeigte das 10 Ohm-Instrument einen Ausschlag von 3 Teilstrichen = 0,09 Milliampere; mit Hilfe des Stromzeigers ließ sich die Einstellung von Variometer und Detektor besorgen. Bei Vorschaltung des Telefunken-Doppelkopfhörers ging der Ausschlag auf 0,06 Milliampere und zeigte ganz feine Schwankungen. Die Antenne wird gebildet von einem in Höhe des 2. Stockwerks über den Hof gespannten Litzendraht von 40 m Länge; die Entfernung bis zum Sender (Witzleben) beträgt etwa 10 km.

Noch weit empfindlichere direkt zeigende Feinmeßgeräte mit Drehspulsystem sind konstruiert worden, teils noch mit zwischen Spitzen gelagerter Spule, teils mit an Metallbändchen gehängter Drehspule. Ihnen macht in der Schule das Spiegelinstrument schon wirksame Konkurrenz, weil bei diesem der Ausschlag weiterhin sichtbar gemacht werden kann. Nur wo reichliche Mittel zur Verfügung stehen, kann an die Beschaffung eines Drehspulengalvanometers von Siemens & Halske mit 150 Ohm Spulenwiderstand, Spitzenlagerung und Zeigerablesung mit 150 Teilstrichen, 1 Teilstrich = $1 \cdot 10^{-4}$ Volt oder eines Turminstruments (Bändchenaufhängung der Spule) mit 100Ω Spule, 1 Teilstrich = $3 \cdot 10^{-7}$ Ampere, gedacht werden. Sehr in Betracht zu ziehen für Messungen in der Brücke und sonstige Nullmethoden sind dagegen kleinere Drehspulinstrumente wie sie z. B. von der „Nadir“ Meßinstrumentenfabrik Berlin-Wilmersdorf hergestellt werden; Zeiger-Galvanometer Modell 0 und 1 (stehend bzw. liegend geeicht) geben 1 Teilstrich Ausschlag für $3 \cdot 10^{-7}$ und $7 \cdot 10^{-7}$ Ampere bei 350Ω Spulenwiderstand und $1 \cdot 10^{-6}$ bei 280Ω . Auch Hartmann und Braun liefern ein entsprechendes Instrument, $150 \times 100 \times 55$ mm, Empfindlichkeit: 1 Grad = 0,000006 Ampere, für 80 Mk. Diese Stromzeiger sind von äußeren, störenden Magnetfeldern unabhängig.

Für die genaue Messung von Wechselströmen und -spannungen stehen heutzutage auch eine ganze Reihe von Instrumenten hoher Güte zur Verfügung; der außerordentlich

kleine Eigenverbrauch der Geräte, wie er durch Verwendung des Drehspulprinzips bei Gleichstrommessungen möglich ist, kann jedoch hierbei nicht erreicht werden. Für die Zwecke der Praxis finden zu Wechselstrommessungen in weitestem Maße wegen ihrer Billigkeit und Überlastbarkeit die Weicheisen- oder Dreheiseninstrumente Verwendung, die auch als Gleichstromanzeiger geeignet sind. In der Tat sind sie besser als ihr Ruf. Bei ihnen dreht sich ein Eisenkörper in einem von einer vom Strom durchflossenen Spule hervorgebrachten Magnetfeld gegen die Schwere des Meßsystems oder gegen die Kraft einer Feder; sie können sowohl für Wechselstrom wie für Gleichstrom geeicht werden; die Teilung beginnt gewöhnlich bei $\frac{1}{5}$ des Endwertes. Bei den neueren Weicheiseninstrumenten ist es durch passende Wahl der Eisensorte und durch zweckentsprechende Formgebung gelungen, den Unterschied in den Angaben für Gleichstrom und für Wechselstrom von nicht zu hoher Periodenzahl (50) sehr klein zu machen; man kann daher in vielen Fällen, wenn es sich nicht um genaue Messungen handelt, dasselbe Gerät für beide Stromarten verwenden. Wir haben an unserer Anstalt mehrere Schalttafelinstrumente, die in der schon erwähnten Art an Winkelbretter geschraubt sind, und einige tragbare Montageinstrumente (Dr. P. Meyer, Berlin, A.E.G., Berlin) in Kastenform in Gebrauch. Von Siemens & Halske stammt ein Voltmeter (Flachspultype) 185 mm Durchmesser, 1 bis 5 Volt (25 Mk.), mit nur 14Ω Widerstand, von denen $2,6 \Omega$ auf die Spule und $11,5 \Omega$ auf einen im Apparat enthaltenen Vorwiderstand kommen. Das Instrument hat also bei vollem Ausschlag einen Eigenverbrauch von etwa 1,8 Watt und ändert unter Umständen die zu messende Spannung nicht unbeträchtlich. Mit einem selbstgebauten Vorwiderstand aus Konstantandraht von 0,4 mm Stärke kann der Meßbereich bis 10, 15, 20, 25 und 30 Volt erweitert werden. Das Instrumentchen leistet zur Messung von niedrigen Spannungen am Transformator, als Strommesser für schwache Ströme (0,07—0,35 Amp.), ja sogar als Resonanzanzeiger bei langen Wellen (4000 m) gute Dienste. Zur Messung von Spannungen über 30 bis 130 Volt dient ein Schalttafelvoltmeter der A.E.G. (Rundspultype) mit 1630Ω Ohmschen Widerstand, ein zweites Instrument von Siemens & Halske mit demselben direkten Meßbereich gestattet mit einem Meßtransformator bis 1300 Volt zu messen. Endlich ist noch ein Voltmeter (Siemens & Halske) vorhanden, welches bis 260 Volt reicht; die Spule hat 715Ω , der Vorschaltwiderstand, durch den der Einfluß der Temperatur und der Selbstinduktion herabgedrückt wird, besitzt 8750Ω . Die Benutzung der Spule allein ergibt einen empfindlichen Stromzeiger, mit dem z. B. der Sekundärstrom eines Schlittenapparates bequem nachgewiesen werden kann. Als Strommesser verwenden wir ferner 2 Schalttafelinstrumente 1—5 und 10—50 Ampere und ein Montageinstrument in Kastenform 1—5 Ampere. Es soll nicht behauptet werden, daß diese Zusammenstellung mustergültig ist. Sehr gern besäßen wir noch einen kleinen tragbaren Strommesser $140 \times 145 \times 75$ mm, 0—0,015 oder 0—0,5 Ampere von Hartmann & Braun, um auch schwächere Wechselströme erfassen zu können. Beim Arbeiten mit Wechselströmen wird man schon aus Sparsamkeitsgründen die Netzspannung gewöhnlich durch einen Transformator auf einen passenden Betrag herabsetzen, und je nach dem vorhandenen Wandler wird sich auch die Wahl der Instrumente zu richten haben. Wir verwenden einen Kerntransformator mit abnehmbarem Joch von Siemens-Schuckert; auf den einen Schenkel kommt die Primärspule; auf den anderen Schenkel lassen sich verschiedene selbstgefertigte Spulen stecken. Vom Standpunkt günstigster Energieübertragung ist diese Anordnung natürlich nicht praktisch, für die Zwecke des Unterrichts dagegen recht empfehlenswert.

Ein sehr beachtenswertes Instrument nach dem Weicheisenprinzip ist von der A.E.G. (Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft) herausgebracht worden. Durch weitere Verbesserung des Meßsystems ist es gelungen, die Meßgenauigkeit so weit zu steigern, daß sich Präzisionsinstrumente der Klasse *F'* ergaben, die den später zu besprechenden Hitzdraht- und dynamometrischen Geräten derselben Klasse nicht nachstehen und diesen gegenüber den Vorteil haben, daß sie eine unvorsichtige Behandlung leichter

ertragen und sich billiger stellen. Das Gerät hat die Form eines mit Klappdeckel versehenen Kästchens in den Maßen $175 \times 185 \times 100$ mm. Der Messerschneidenzeiger überstreicht eine Wechselstrom- und eine Gleichstromteilung, die sich zu beiden Seiten eines Spiegelstreifens befinden. Die Feinteilung der Skala beginnt schon bei $\frac{1}{10}$ des Gesamtmeßbereichs und verläuft von da an nahezu proportional. Der Eigenverbrauch des Instruments ist verhältnismäßig gering; es besitzt Luftdämpfung und Nullpunktskorrektur. Die Wechselstromangaben sind für 15 bis 75 Perioden unabhängig von der Kurvenform und Frequenz. Strommesser werden mit einem Meßbereich bis zu 1; 5; 10 . . . Ampere (etwa 100 Mk.) oder mit 2 Meßbereichen 0,5 und 1; 1 und 2; 2,5 und 5; 5 und 10 . . . Ampere; Spannungsmesser mit einem Bereich: 30; 75; 150; 300; 750 Volt, oder mit 2 und 3 Meßbereichen (120—180 Mk.) hergestellt. Auch Milliamperemeter bis 50; 100; 150; 200 und 500 Milliampere sind erhältlich. Die Instrumente werden nach Wunsch stehend oder liegend geeicht. Bei den Voltmetern kann man den Meßbereich durch Vorwiderstände erweitern; bei den Strommessern sind, wenn es sich um Wechselstrommessungen handelt, dazu im allgemeinen Stromwandler (z. B. zum Strommesser 0—1 Ampere, Stromwandler *CLn* Nr. 70501, Übersetzungsverhältnis 5 : 1 Ampere, 40 Mk.) erforderlich; die Skala des Instrumentes erhält in diesem Falle 2 Bezifferungen. Man kommt aber auch recht gut mit Nebenschlüssen zurecht, besonders wenn man mit einer bestimmten Frequenz, etwa 50 Perioden, arbeitet. Auch bei Hartmann & Braun sind diese neuen Weicheisen-Präzisionsinstrumente in den Abmessungen $185 \times 90 \times 195$ mm mit 1 bis 3 Meßbereichen zu haben, z. B. 0,2 und 1 Ampere, 15, 30 und 75 Volt.

Die A.E.G. hat dem Verfasser einen „tragbaren Weicheisen-Präzisions-Strommesser Nr. 77620 für 0—1 Ampere“ leihweise zur Verfügung gestellt. Die Feinteilung der Skala auf 0,01 Ampere beginnt bei 0,1 Ampere. Der Widerstand des Gerätes beträgt $0,75 \Omega$. Um stärkere Ströme messen zu können, wurde ein vorhandener S. & H. Stromwandler $60/5 = 12/1$ Ampere benutzt oder auch ein Nebenschluß, der aus 3 parallelen Konstantendrähten (besser ist Manganin) von 0,8 mm Dicke und 72,5 cm Länge hergestellt war; er erweiterte den Meßbereich auf 5 Ampere.

Anwendungsbeispiele: An 220 Volt 50 periodische Wechselspannung wurden 2 Metalldrahtlampen je 60 Watt geschaltet. Lampe I ließ 0,259 Ampere, Lampe II 0,271 Ampere hindurch, bei Hintereinander-Schaltung ergab sich 0,191, bei Parallelschaltung 0,530 Ampere. — 10 parallel geschaltete Papierkondensatoren je 0,4 Mf am Einankerumformer von 102 Volt, 45 Perioden, ergaben 0,130 Ampere Stromdurchgang. — Mit Stromumformer $60/5$ Ampere ergab sich an der Sekundärwicklung 0,206 Ampere, der Hauptstrom war also $12 \cdot 0,206 = 2,47$ Ampere; ein direkt eingeschaltetes einfaches Weicheiseninstrument zeigte 2,5 Ampere.

Bei den Hitzdrahtinstrumenten wird die Erwärmung eines Edelmetalldrahtes (Platinsilber oder Platiniridium) und die dadurch hervorgerufene Verlängerung des Drahtes mittels geeigneter Vorrichtung auf die in Edelsteinen drehbar gelagerte Zeigerachse übertragen. Die Dämpfung bewirkt, wenn sie nicht fehlt, gewöhnlich eine mit der Achse verbundene Aluminiumscheibe, welche zwischen den Polen eines Stahlmagneten spielt. Die Instrumente sind für Gleichstrom, mit dem sie geeicht werden können, und für Wechselstrom verwendbar; für höhere Frequenzen sind sie nicht zu entbehren. Sie haben den Nachteil, daß sie nur geringe Überlastung vertragen und ihre Anwendung daher immer Aufmerksamkeit erfordert. Es empfiehlt sich, nur Instrumente mit Abschmelzsicherungen zu beziehen. Vor- und Nebenviderstände zur Erweiterung des Meßbereichs sind anwendbar. Der Verfasser besitzt 2 Hitzdrahtstrommesser und 1 Selbstverbrauch-Anzeiger von Hartmann & Braun. Die Geräte haben runde Form; sie sind auf Winkelbretter montiert worden. Der erste Strommesser (20 cm Durchmesser) hat einen Meßbereich bis 1,2 Amp., die Feinteilung beginnt bei 0,2 Ampere, es ist ein Präzisionsinstrument mit spiegelunterlegter Skala, der zweite Strommesser hat einen Zeiger mit scharfer Spitze und reicht bis

100 Milliampere, bei 10 Milliampere erhält man einen kleinen Ausschlag. Dieses zweite Instrument enthält keinen Nebenschluß zum Hitzdraht und ist daher geeignet, als Voltmeter zu dienen, es besitzt 25Ω Widerstand; mit 975Ω Vorwiderstand reicht es also bis 100 Volt.

Beispiel: Die Spannung einer Mittelfrequenzmaschine (etwa. 450 Perioden pro Sek.) ergab sich mit dem 2. Strommesser und induktionsfreiem Vorwiderstand zu 82 Volt, während ein Weicheiseninstrument (Rundspultype) für 50 Perioden fälschlich 52 Volt zeigte. — Bei Einschaltung eines Glimmerkondensators von 80000 cm ergaben sich bei 82 Volt Spannung 0,027 Ampere, bei einer Spule von nur 350 Windungen, die einen geschlossenen Eisenkern enthielt, 0,076 Ampere Stromdurchgang. — Im Nebenschluß zu einer Bogenlampe, die mit 2 Ampere gespeist wurde, lagen 10 Papierkondensatoren je 0,4 Mf, also 4 Mf und eine Spule mit 60 Windungen Kupferdraht 0,8 mm von 6,5 cm Durchmesser; der Strom in diesem Kreis betrug 4 Amp., gemessen mit einem kleinen Hitzdrahtinstrument, wie es bei Flugzeugsendern gebraucht wurde. Eine über die erste geschobene zweite Spule mit ebenfalls 60 Windungen ergab an den Enden 22 Volt Spannung, gemessen mit dem Hitzdrahtmilliampereometer und Vorwiderstand 475Ω .

Ebenso wie die Hitzdrahtinstrumente haben die nach dem dynamometrischen Prinzip gebauten Strom-, Spannungs- und Leistungsmesser die Annehmlichkeit, daß sie für Gleichstrom und Wechselstrom gleiche Angaben machen. Ein Modell, um die Wirkungsweise der Elektrodynamometer zu zeigen, läßt sich leicht mit zwei Spulen von rechteckigem Längsschnitt herstellen, von denen die eine an einem Lamettafaden hängt, und deren Stromableitung ebenfalls durch ein Metallbändchen geschieht, während die andere fest montiert ist. Die Dynamometer können als Feinmeßgeräte 1. Klasse (Klasse E) gebaut werden. Sie sind nicht billig. Bei den Spannungsmessern liegen Feldspule und Drehspule mit einem temperaturunabhängigen Widerstand hintereinander, bei den Strommessern fließt der zu messende Strom durch die feste Spule und einen Vorwiderstand, zu dem die Drehspule im Nebenschluß liegt. Bei beiden Instrumenten ist das Drehmoment proportional dem Quadrat der Meßgröße. Bei den Leistungsmessern wird die feste Spule in den Hauptstromkreis geschaltet, während die bewegliche Spule unter Vorschaltung eines induktionsfreien Widerstandes die zu messende Spannung aufnimmt. Der Ausschlag ist hier proportional dem Produkt $E \cdot I \cos \varphi$, also der wirklichen Leistung. Um ein stärkeres Drehmoment für die Spule zu erhalten, ist, hauptsächlich für Leistungsmesser, die für den Betrieb bestimmt sind, zur Felderregung auch lamelliertes Eisen herangezogen worden. Die so erhaltenen ferrodynamischen Leistungsmesser sind unabhängig von Fremdfeldern und zeigen für Gleichstrom und Wechselstrom bis etwa 100 Perioden richtig. Siemens & Halske unterscheiden drei Typen von Elektrodynamometern:

1. Ferrodynamische Betriebsinstrumente der Klasse G, ausgeführt vor allem als Leistungsmesser (Schalttafelinstrument mit 185 mm Durchmesser).

2. Prüffeldtype (Klasse F), ausgeführt als Präzisions-Strommesser mit 100teiliger Skala bis 5 Ampere direkt, für höhere Stromstärken unter Benutzung von Meßstromwandlern, als Präzisions-Voltmeter bis 130 Volt, mit Vorwiderständen bis 650 Volt, und als Präzisions-Leistungsmesser mit 150teiliger Skala für direkten Anschluß bis 5 Ampere und 90 Volt.

3. Laboratoriumstypen (Klasse E), bestimmt in erster Linie für wissenschaftliche Messungen im Laboratorium und unter schwierigen Betriebsverhältnissen. Die Strommesser haben 2 Meßbereiche, z. B. 0,5 und 1; 1 und 2; 2,5 und 5... usw. Ampere; die Spannungsmesser 3 Meßbereiche, z. B. 15; 30; 60 — 75; 150; 300 — 150; 300; 600, mit Vorwiderständen bis 6000 Volt, die Leistungsmesser werden für Nennströme von 0,5—200 Ampere und Spannungen bis 6000 Volt gebaut. Der Einfluß der Selbstinduktion der Spulen auf die Messung ist durch Verwendung einer Kunstschaltung passender Vor- und Nebenwiderstände praktisch vollständig umgangen.

Die wunderbar vollkommenen Instrumente sind liegend geeicht, mit Ausnahme des ferrodynamischen Leistungsmessers, der die Form eines Schalttafelgeräts hat. Entsprechende Instrumente liefert die A.E.G., tragbar, mit senkrechter Skala, in Kästen $220 \times 190 \times 120$ mm, und zwar Spannungsmesser mit 1, 2 und 3 Meßbereichen, Strommesser mit gewöhnlich 2 Meßbereichen (z. B. 2,5 und 5; 5 und 10 ... Ampere) und Leistungsmesser mit 2 Strom- und 4 Spannungsmeßbereichen, und Hartmann & Braun in der Form von Demonstrationsinstrumenten $290 \times 180 \times 350$ mm als Strommesser mit 0,5; 1; 2; 5 Ampere, als Spannungsmesser mit 15; 30; 60; 100; 150; 200; 250 Volt und als Wattmeter mit 1 oder 2 Strom- und einer Spannungsempfindlichkeit.

Wir besitzen ein älteres Voltmeter (75; 150 Volt) der Weston Instrument Comp. vom Jahre 1896, welches liegend geeicht ist; es zeigt noch die Nachteile der älteren Instrumente; geringe Dämpfung, nötige Korrektur des Temperatureinflusses, keinen runden Wert des Widerstandes. Schulen mit reichlichen Mitteln können sehr wohl an die Beschaffung von Strom- und Spannungsmessern nach der elektrodynamischen Bauart denken; empfehlenswert dürfte im allgemeinen ein Instrument mit senkrechter Skala sein. Die Beschaffung eines Leistungsmessers ist unbedingt anzuraten. Wir erwarben im vorigen Jahre von Hartmann & Braun einen eisenlosen Leistungsmesser 0–500 Watt in der Form eines Schalttafelinstruments mit 21 cm Durchmesser, der uns sehr gute Dienste leistet. Das Instrument ist gut einzusehen, es hat Lanzettzeiger, Nullpunktkorrektur; die Stromspule verträgt 5 Ampere, die Spannungsspule darf mit 110 Volt belastet werden. Um den Spannungsmeßbereich bis 220 Volt zu erweitern, haben wir uns einen aus Konstantandraht von 0,13 mm Stärke (100 g bei Vogel, Adlershof, 4,50 Mk.) auf Pertinaxrohr von 5 cm Durchmesser einlagig, bifilar gewickelten Widerstand von 2000Ω hergestellt, der vor die Spannungsspule geschaltet wird. Da das Gerät eine Vereinigung von Volt- und Amperemeter darstellt, so kann man bei Gleichstrom und bei induktions- und kapazitätsfreier Belastung von Wechselstrom bei gemessener Leistung und bekannter Spannung auf den Strom und umgekehrt schließen. Bei induktiver und kapazitiver Belastung des Wechselstroms läßt sich mit Hilfe der Leistungsmessung der Leistungsfaktor angeben, wenn Spannung und Strom ebenfalls bekannt sind: $\cos \varphi = \frac{E \cdot I}{L}$.

Die Spannungsspule kann gelegentlich als Stromzeiger für schwache Ströme dienen, wenn durch die Stromspule ein kräftiges Feld erzeugt wird.

Beispiel: Bei 100 Volt Wechselspannung, 45 Perioden, gingen durch eine Spule von 350 Windungen mit geschlossenem Eisenkern 3,1 Ampere; der Leistungsmesser zeigte 40 Watt. Demnach ist $\cos \varphi = \frac{40}{100 \cdot 3,1} = 0,13$. — Während bei einem bestimmten Vorschaltwiderstand 2,5 Ampere durch die Stromspule flossen, zeigte die Drehspule 220 Watt; nach Vorschaltung eines induktionsfreien Widerstandes vor die Drehspule ging der Ausschlag auf 40 Watt zurück. Der eingeschaltete Widerstand betrug also $2000 \frac{220}{40} - 2000 = 9000 \Omega$. — Die Vorschaltung von 0,4 Mf vor die Spannungsspule ergab bei 2,5 Ampere in der Stromspule einen Rückgang von 220 auf 42 Watt.

Bei einer Übersicht über die Zeigerinstrumente muß auch der elektrostatischen Voltmeter gedacht werden, die von Siemens & Halske und von Hartmann & Braun herausgebracht worden sind. Letztere Firma liefert elektrostatische Demonstrations-Spannungsmesser 0–500 und 0–1000 Volt, von 100 oder 200 Volt beginnend, Wert eines Intervalls 20 bzw. 50 Volt. Hartmann & Braun liefern auch Multizellular-Voltmeter in der Form von Schalttafelinstrumenten, die schon Spannungen unter 100 Volt anzeigen. Diese Geräte haben nur sehr geringen Selbstverbrauch; man wird sie aber

im allgemeinen entbehren können, weil Spannungen bis 1000 Volt bequem genug mit einem Spannungswandler oder mit Hilfe von Vorwiderständen gemessen werden können. Dagegen ist die Beschaffung eines BRAUNschen Elektrometers sehr anzuraten, mit dem sich Wechselspannungen bis 3500 Volt messen lassen (Leybold, Köln, 75 Mk.). Ähnlich liegt die Sache hinsichtlich der Drehfeld- oder FERRARIS-Instrumente, bei denen sich eine Trommel oder eine Scheibe aus Aluminium in einem Feld bewegt, welches durch teilweise Abdeckung oder durch zwei Zweige des Wechselstroms, denen durch verschiedene Induktivität eine Phasenverschiebung gegeben wurde, zu einem zweiphasigen Drehfeld gemacht wurde. Diese Induktionsinstrumente werden von allen großen Firmen als Strom-, Spannungs- und Leistungsmesser gebaut. Siemens & Halske liefern ein gut einzusehendes Demonstrationsamperemeter in den Abmessungen $380 \times 240 \times 370$ mm. Die Geräte haben den großen Nachteil, daß sie nur für Wechselstrom geeignet sind und auch hier stark von der Periodenzahl und Temperatur abhängen. Man wird sie also mehr wegen ihres interessanten Prinzips als aus meß-technischen Gründen anschaffen.

Für die Behandlung des Wechselstromes im Unterricht ist dagegen noch ein Gerät von großer Bedeutung, nämlich der Frequenzmesser. Entnimmt man die Wechselspannung einer Maschine, die zugänglich ist, so läßt sich ja aus der Polzahl und der Umlaufzahl des Rotors die Periodenzahl leicht feststellen. Es gibt im Handel billige Umdrehungszähler (Schuchard & Schütte, Berlin, Spandauerstr.; 5–10 Mk.), deren Achse mit einer dreikantigen scharfen Spitze versehen ist, mit der sie in die Körnung des Ankers gedrückt werden und eine bestimmte Zeit mitlaufen. Bequemer in der Anwendung und zur ständigen Überwachung der Periodenzahl geeignet sind die Frequenzmesser, bei denen durch den erzeugten Strom ein Elektromagnet betätigt wird, vor dessen Polen eine Reihe von Stahlzungen angeordnet sind. Es gerät diejenige Frequenz ist. Man erhält bei Siemens & Halske und bei Hartmann & Braun Zungenfrequenzmesser für 45 bis 55 Perioden (auch für 450 bis 550) von der Form der Schalttafelinstrumente. Wir benutzen am Einankerumformer ein altes Gerät, welches nach dem angegebenen Prinzip gebaut ist, aber als Umdrehungszähler, 4200–6000 pro Minute, bei Anwendung eines Kontaktmachers gedient hat. Es wird unter Vorschaltung einer Glühlampe angeschlossen, die Teilung entspricht 35 bis 50 Perioden pro Sekunde.

Kleine Mitteilungen.

Die Möglichkeit der Weltraumfahrt¹⁾.

Von H. LORENZ in Danzig.

Man kann nach OBERTH²⁾ den Triebstoffverbrauch und damit das Verhältnis $m_0 : m$ durch Abstellung der Verbrennung herabsetzen, wenn man sich mit einer geringeren Fahrtgeschwindigkeit begnügen will. Da von der Unterbrechungsstelle ab das Fahrzeug wie ein Geschoß sich selbst überlassen bleibt, so läuft dies auf eine Verbindung der beiden oben berechneten Fälle hinaus (Fig. 2). Die Abstellung darf jedenfalls nicht eher vorgenommen werden, als bis die der Entfernung r_2 entsprechende Geschoßgeschwindigkeit erreicht ist, da es sonst dem Banne der Erdschwere nicht enttrinnen könnte. Für die radiale Geschoßgeschwindigkeit $v = dr : dt$ gilt nun:

$$\frac{dv}{dt} = -g \frac{a^2}{r^2}, \quad v dv = ga^2 d\left(\frac{1}{r}\right)$$

oder mit dem Anfangswert $v_0 = \sqrt{2ga}$ an der Erdoberfläche

¹⁾ Nachtrag zu dem gleichnamigen Aufsatz in dieser Zeitschrift 40, 97; 1927.

²⁾ H. OBERTH, Die Rakete zu den Planetenräumen; 2. Aufl., München und Berlin 1925. R. Oldenbourg; Seite 29.

$$v^2 - v_0^2 = 2ga^2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{a} \right), \quad v^2 = 2g \frac{a^2}{r_2} \quad (16)$$

Setzen wir diesen Betrag in die zweite Gleichung (14) ein, so folgt der Abstand der Unterbrechungsstelle vom Erdmittelpunkt

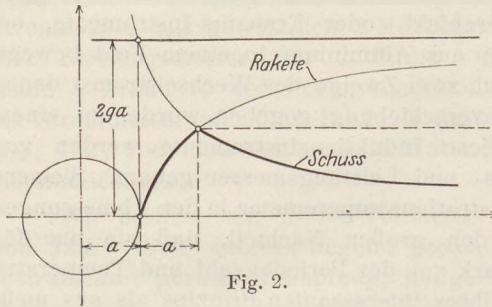


Fig. 2.

$$r_2 = 2a, \quad (16a)$$

d. h. der doppelte Erdhalbmesser. Damit aber wird

$$v^2 = ga; \quad v = 7900 \text{ m sec}^{-1} \quad (16b)$$

und nach Einführung in die erste Gleichung (14) mit $w = \sqrt{2gh}$

$$\frac{m_0}{m} = e^{\sqrt{\frac{a}{h}}}. \quad (17)$$

Durch Vergleich mit (18a) erkennt man, daß durch die Unterbrechung die Exponenten der Massenverhältnisse sich auf das $1 : \sqrt{2} = 0,7$ fache vermindern. Wir erhalten demgemäß für die

Zahlentafel I.

Treibmittel	$m_0 : m$
H ₂ + O	34
C + O ₂	48
Nitroglyzerin	199
Schießwolle	582

Auch diese Beträge schließen die Verwirklichung der Raketenfahrt völlig aus, ganz abgesehen von der für die Weltraumfahrt viel zu kleinen Geschwindigkeit, die dauernd unter 8000 m/sec liegt und im Unendlichen verschwindet.

Der Gesamtwirkungsgrad für den Aufstieg berechnet sich als das Verhältnis der schließlich geleisteten Arbeit $m_1 \cdot g \left(a + \frac{v_1^2}{2g} \right)$ zum Arbeitsaufwand des vergasteten Treibmittels $(m_0 - m) g \cdot h$, also:

$$\eta = \frac{m_1}{m_0 - m_1} \cdot \frac{a}{h} \left(1 + \frac{v_1^2}{2ga} \right) \quad (18)$$

Dies ergibt für die Rakete mit dauernder Verbrennung, d. h. $v_1^2 = 2ga$, und mit Abstellung, d. h. $v_1^2 = 0$

$$\eta' = \frac{2a}{\left(\frac{m_0}{m_1} - 1 \right) \cdot h}, \quad \eta'' = \frac{a}{\left(\frac{m_0}{m_1} - 1 \right) \cdot h} \quad (18a)$$

mit den Werten für:

Zahlentafel II.

	η'	η''	$\frac{a}{h} + 1$
H ₂ + O	0,082	0,193	7,37
C + O ₂	0,061	0,162	8,63
Nitroglyzerin	0,015	0,072	15,28
Schießwolle	0,0047	0,036	26,82

In die letzte Spalte sind noch die Massenverhältnisse $\frac{m_0}{m_1} = \frac{a}{h} + 1$ eingetragen, die dem Wirkungsgrade $\eta'' = 1$ der Rakete mit Abstellung und Verwandlung der ganzen verfügbaren Treibmittelarbeit in reine Hubarbeit entsprechen würde,

Dabei ist noch nicht berücksichtigt, daß der für die Rückkehr der Rakete zum Bremsen benötigte Treibmittelaufwand nochmals ungefähr dasselbe Massenverhältnis bedingt, wie das berechnete, wonach das Gesamtverhältnis der Masse der abgehenden zur zurückkehrenden Rakete sich wie das Produkt beider Werte ergibt und auf ganz unmögliche Zahlen führt.

Musikinstrumente in der Akustik.

Von K. Gentil in Elberfeld.

Unter dieser Überschrift habe ich im 3. Heft des 38. Jahrg. dieser Zeitschrift eine Reihe Musikinstrumente behandelt, die durch das „Flex a tone“ und die „singende Säge“ ergänzt werden mögen. Das „Flex a tone“ (von to flex a tone = einen Ton biegen) ist ein seit kurzem aus Amerika zu uns gekommenes Musikinstrument, das in der Jazzmusik ausgiebige Verwendung findet. Es beruht auf der physikalisch interessanten Tatsache, daß die Tonhöhe einer Metallplatte nicht nur von den Dimensionen und dem Material, sondern auch von der Biegung der Platte abhängt. Diese Erscheinung ist von der sog. musikalischen Säge her schon längst bekannt. Man benutzt hierzu ein möglichst breites Sägeblatt und bringt es während des Biegens zum Klingen.

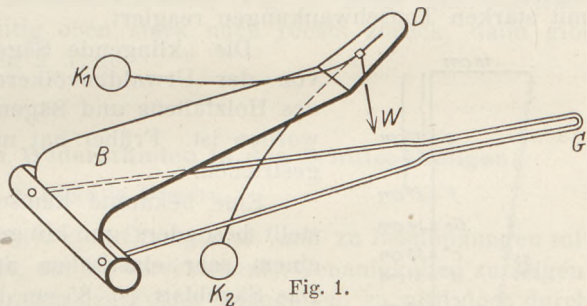


Fig. 1.

Das Flex a tone (Fig. 1) besteht aus einem gut klingenden und leicht biegbaren Stahlblatt B, das durch

Bewegung der Klöppel K_1 und K_2 zum Klingen gebracht wird. Hierbei wird das Instrument am Griff G in die Hand genommen und mit dem Daumen das Stahlblatt an der Stelle D gebogen. Das Flex a tone eignet sich gut zum Nachweis der Abhängigkeit der Tonhöhe von der Biegung, da es zwischen c'' und g'' ziemlich reine klangvolle Töne gibt. An der mit einem Pfeil bezeichneten Stelle W wird eine Wagschale aufgehängt und mit Gewichten belastet, so daß das Instrument der Reihe nach die Töne der chromatischen Tonleiter gibt. Unbelastet gibt das Flex a tone den Ton c'' und erreicht bei Belastung mit etwa 2000 g den Ton f''' . Die Fig. 2 zeigt die Beziehung zwischen Schwingungszahl und biegendem Gewicht; die Schwingungszahlen der chromatischen

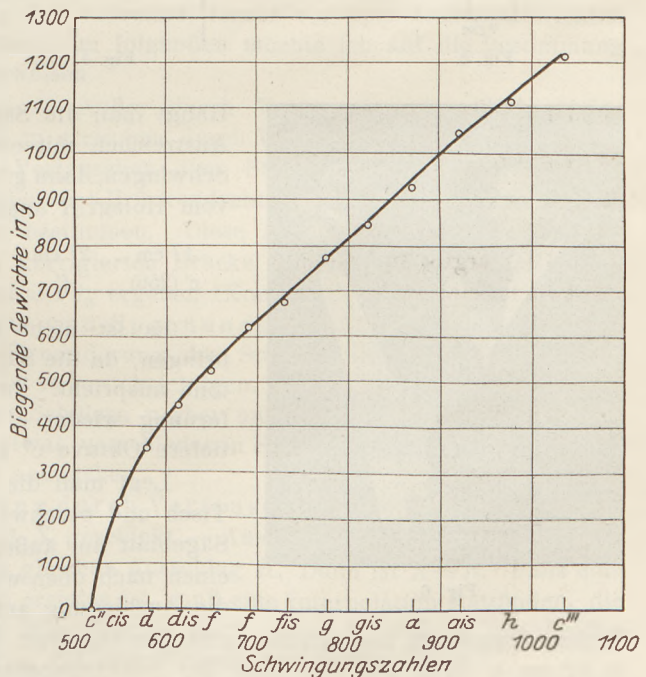


Fig. 2.

Tonleiter ($a' = 435$) sind als Abszissen, die biegenden Gewichte in Gramm als Ordinaten abgetragen. Hierbei wurde zur Abstimmung das schon an anderer Stelle

beschriebene¹⁾, auf den Kammerton $a' = 435$ gestimmte, Xylophon benutzt. Die Kurve gibt die Mittelwerte folgender drei Versuchsreihen:

Schwingungszahlen	Biegende Gewichte in g			Schwingungszahlen	Biegende Gewichte in g		
517 c''	0	0	0	775 g''	775	785	765
548 cis''	—	—	225	821 gis''	—	—	845
581 d''	345	355	345	870 a''	925	925	925
615 dis''	—	—	445	922 ais''	—	—	1045
652 e''	525	525	525	977 h''	1095	1125	1115
691 f''	625	625	625	1035 c'''	1195	1225	1205
732 fis''	—	—	675				

Bei den hohen Tönen von etwa $a'' = 870$ ab ist das Abstimmen auf die Xylophontöne nicht leicht, da das Flex a tone auf nur geringe Biegungsänderungen mit starken Tonschwankungen reagiert.

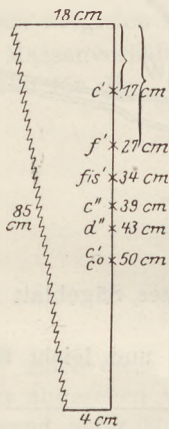


Fig. 3.

Die „klingende Säge“ ist eigentlich ein Werkzeug, das von der Urwaldbevölkerung Amerikas nach getaner Arbeit des Holzfällens und Sägens zuerst als Musikinstrument benutzt worden ist. Früher hat man die Säge geklopft, jetzt wird sie gestrichen.

Eine bekannte Remscheider Firma²⁾ stellt besonders gut klingende Sägen aus einem sehr elastischen Spezialstahl her. Das Sägeblatt ist 85 cm lang, am Holzgriff 18 cm, am Ende etwa 4 cm breit.

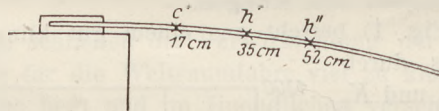


Fig. 4.

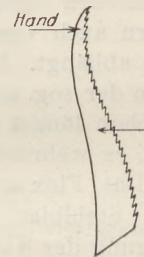


Fig. 5.



Fig. 6.

Hängt man die Säge auf und bringt das Blatt durch Anstreichen mit einem kurzen, kräftigen Bogen zum Schwingen, dann gibt es, in verschiedenen Entfernungen vom Holzgriff angestrichen, folgende Grundtöne:

17 cm	27 cm	34 cm	39 cm	43 cm	50 cm
c' (256)	f'	gis'	e''	d''	c' und c ⁰

Es ist nicht leicht, diese Töne rein hervorzu- bringen, da die Säge sehr leicht auf zahlreiche Ober- töne anspricht. Interessant ist, daß bei 50 cm Ent- fernung wieder c' wie bei 17 cm und außerdem die tiefere Oktave c⁰ zu hören ist (Fig. 3).

Legt man die Säge mit dem Holzgriff auf den Tisch und beschwert den Griff, dann biegt sich das Sägeblatt am äußersten Ende um 15 cm aus. Durch einen nach oben wirkenden Zug von etwa 240 g kann die Ausbiegung aufgehoben werden. In 17 cm Ent- fernung vom Griff angestrichen gibt das Sägeblatt den Ton c' (256), in 35 cm h' und in 52 cm h'' (Fig. 4). Die Lage der Schwingungsbäuche für die Töne der Tonleiter

¹⁾ Das Xylophon und die phys. Gesetze transversal schwingender Stäbe. Zeitschr. f. d. math. u. naturw. Unterricht. 50. Jahrg.. S. 271; 1919.

²⁾ Die Sägen-, Messer- und Werkzeugfabrik Carl Feldmann, Remscheid-Wieringhausen, hat dem Verfasser zu Versuchszwecken eine „Singende Säge“ freundlichst zur Verfügung gestellt.

ist nun eine etwas andere, wie bei der Säge ohne Spannung, die Töne klingen voller. Daher gibt man auch der Säge beim Spielen stets eine geringe Spannung, indem man das Sägeblatt schwach nach links und am Ende mit Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger nach rechts zurückbiegt (Fig. 5). Die Säge wird dabei mit dem Holzgriff zwischen die Knie geklemmt und mit einem Bogen angestrichen (Fig. 6). Die Töne der Tonleiter ruft man durch stärkeres Biegen hervor, wobei man darauf achten muß, daß man das Blatt immer an dem nach dem schmalen Ende zu wandernden Schwingungsbauch anstreichen muß. Man hört, wie die Töne die Säge entlang gleiten, wenn man das Blatt biegt. Die Säge umfaßt etwa 2 Oktaven von f'/g' bis f'''/g''' . Will man noch höhere Töne spielen, dann biegt man die Säge nicht am Ende, sondern mehr nach der Mitte zu durch. Der Tonumfang reicht dann bis etwa a'''' (höchster Ton eines Klaviers) (Fig. 7). Biegt man das Blatt sehr kräftig nach links und gleichzeitig oben stark nach rechts zurück, dann gibt die Säge unter Umständen gleichzeitig 2 Töne.

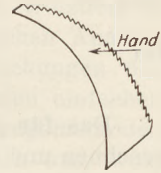


Fig. 7.

Bestimmung von elektrischen Widerständen in den Schülerübungen.

Von Dr. A. Döge in Dresden.

Es ist wertvoll, von den Schülern in den Übungen ab und zu Bestimmungen mit mehreren Methoden machen zu lassen, um die verschiedenen Genauigkeiten zu zeigen. So gut es ist, möglichst bei jedem Versuch den Fehler anzugeben, so wird doch durch die selbst erarbeiteten — meist ziemlich erheblichen — Abweichungen bei Anwendung von verschiedenen Methoden der Unfug der allzu genauen Resultate wesentlich deutlicher gemacht. Wertvoll ist dann weiter die Kritik der verschiedenen Methoden und das Erteilen von verschiedenen Gewichten beim Mittelnehmen. — Eine solche Gruppe von Übungen ist z. B. die Bestimmung der Volumina, ferner von spezifischen Gewichten von festen Körpern und Flüssigkeiten. Im folgenden möchte ich auf die Bestimmung von elektrischen Widerständen hinweisen.

1. WHEATSTONESCHE BRÜCKE. — Außer durch Vertauschen der Widerstände ist eine Erhöhung der Genauigkeit zu erreichen durch Vergleichen mit verschiedenen Normalwiderständen und durch Vertauschen von Stromzeiger und Stromquelle. Empfehlenswert ist es, die Korrektion des Brückendrahtes nach einer der bei „Kohlrausch“ angegebenen Methoden zu bestimmen. Diese Arbeit muß wohl dem Lehrer überlassen bleiben. Bei einer so korrigierten Brücke möchte die Summe der zwei Einstellungen die Brückenlänge auf 0,1% ergeben (Kontrolle!).

2. Bestimmung mit Strom- und Spannungsmesser (OHMSCHES GESETZ). Die Korrektion, welche aus der Verminderung des Stromes — wegen des parallel geschalteten Strommessers — fließt, ist zu berücksichtigen. Ein eventuell vorzuschaltender Belastungswiderstand muß von den Schülern vorher ungefähr berechnet werden. Es sind mehrere Beobachtungen mit etwas verschiedenen Stromstärken zu machen. Der einfach zu berechnende Fehler ist anzugeben.

3. Widerstandsbestimmung durch Vertauschen. Der Strom wird einmal durch den unbekanntem Widerstand X geschickt — Ausschlag α — dann durch einen Rheostaten — Widerstand für den gleichen Ausschlag R . Dann ist $X=R$. Falls eine Gleichheit des Ausschlages nicht zu erzielen ist, muß eine Interpolation stattfinden, die auf die von früher her bekannte Wägeformel führt. Sind R_1 und R_2 die beiden verglichenen Widerstände, α_1 und α_2 die zugehörigen Ausschläge, so ist

$$(X - R_1) : (R_2 - R_1) = (\alpha - \alpha_1) : (\alpha_2 - \alpha_1)$$

also

$$X = R_1 + (R_2 - R_1) \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

4. Widerstandsbestimmung mit Abzweigung (Fig. 1). Es sei R_p der zu bestimmende Widerstand, R_b der Vorschaltwiderstand, R_γ der Galvanometerwiderstand, J_γ die Stromstärke im Galvanometer, J die Stromstärke im Amperemeter. Dann ist

$$J_\gamma \cdot R_\gamma = (J - J_\gamma) R_p,$$

also

$$R_p = R_\gamma \cdot J_\gamma : (J - J_\gamma) \sim R_\gamma \cdot J_\gamma : J$$

Das für den vollen Ausschlag J_γ zu erwartende J ist vorher näherungsweise zu berechnen und R_b danach zu wählen. Der einfach zu berechnende Fehler ist anzugeben. Diese Methode ist identisch mit 2. Nur ist an Stelle des Spannungsmessers irgend

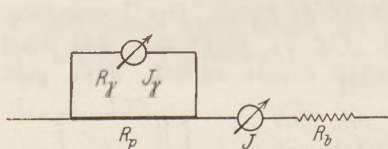


Fig. 1.

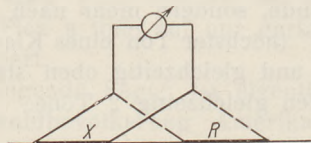


Fig. 2.

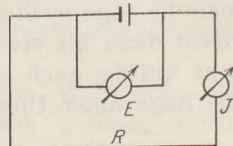


Fig. 3.

ein Galvanometer zu verwenden. Sie eignet sich besonders für die Bestimmung von kleinen Widerständen. — Diese Übung kann auch Verwendung finden, um R_γ oder J_γ zu bestimmen.

5. Widerstandsbestimmung mit 2 Abzweigungen (Fig. 2). Es sei X der unbekannte, R der bekannte Widerstand, E_X die Spannung an X , E_R die an R . Dann ist

$$E_X : X = E_R : R,$$

also

$$X = R \cdot E_X : E_R.$$

Da nur das Verhältnis $E_X : E_R$ in Betracht kommt, kann also irgend ein Galvanometer Verwendung finden (nur muß der Widerstand desselben gegen den zu bestimmenden Widerstand groß sein). Diese Methode eignet sich besonders für die Bestimmung kleiner Widerstände. Der Belastungswiderstand ist näherungsweise vorher zu berechnen. Der Fehler ist anzugeben.

6. Bestimmung von kleinen Widerständen mit der WHEATSTONESchen Brücke (Methode von MATTHIessen und HOCKIN). — Mehrfache Beobachtungen und Korrekturen wie bei 1.

7. Bestimmung von großen Widerständen (Fig. 3). $R = E : I$. Vom gesuchten Widerstand ist der Widerstand des Galvanometers abzuziehen. Fehlerberechnung einfach.

Allgemeine Bemerkungen. — Um befriedigende Resultate zu erreichen, müssen die benutzten Instrumente und Vergleichswiderstände einigermaßen genau sein. Widerstände von 0,1 Ohm bis 100000 Ohm, die auf 0,3% genau sind, liefert zu wohlfeilem Preise die Firma Hartmann & Braun, Frankfurt a. M. Als sehr verwendungsfähig hat sich das Drehspul-Zeigergalvanometer derselben Firma erwiesen. Dieses Instrument ist zunächst gedacht als Nullinstrument für die WHEATSTONESche Brücke. Jedoch leistet es auch ausgezeichnete Dienste für die Messung von kleinen Strömen, z. B. bei den Methoden 4, 5 und 7. Ein Skalenteil entspricht nach Angabe $3,3 \cdot 10^{-6}$ Amp., der volle Ausschlag $99 \cdot 10^{-6}$ Amp. Nach Bestimmungen mit unserem Instrument ist diese Angabe etwa so genau wie die Ablesegenauigkeit, ungefähr 0,3%. Widerstände von 10^3 Ohm lassen sich also bei Anwendung von 100 Volt mit dieser Genauigkeit bestimmen. Durch Anbringen eines geeigneten Parallelwiderstandes haben wir das Instrument außerdem auf den Meßbereich bis 1 Milliampere gebracht.

Metallographische Ätzversuche.

Von Max Schneider in Plauen (Vogtl.).

Aus der Veröffentlichung des Herrn F. HOFMANN in dieser Zeitschr. 1926, S. 165 geht hervor, daß die Metallkunde in die Schulen einzudringen beginnt, trotzdem in ihnen die Temperatur nur bis 360° beherrscht wird. Bei der thermischen Analyse ist man also im wesentlichen auf Zinn und Blei beschränkt, deren Mischungen das entektische Zustandsdiagramm mit der von Herrn HOFMANN beschriebenen einfachen Methode leicht aufzustellen erlauben. Von den beiden anderen Untersuchungsmethoden der Metallographie scheidet die Röntgenspektroskopie für uns natürlich aus, wohl aber lassen sich einige Ätzungen recht leicht ausführen.

Die aus Reproduktionen wohl jedem bekannten Gefügebilder von Gußmetallen werden durch Anätzen einer polierten Metallfläche hergestellt. Nun ist aber Metallpolieren eine zeitraubende und viel Erfahrung erfordernde Sache, und man stellt sich die Ätzfläche leichter durch Guß oder Schmelzen auf glatter Unterlage her. Ideale Glätte freilich haben derart hergestellte Flächen nie, uns muß es genügen, wenn die Unebenheiten klein sind im Verhältnis zur Korngröße, die also nicht unter einen gewissen Wert fallen möchte. Damit scheiden die hochschmelzenden Metalle aus, deren im Schullaboratorium immer große Kristallisationsgeschwindigkeit stets zu kleinen Körnern führen muß. Zinn und Aluminium versagen wegen dendritischer Ausbildung der Kristalloberflächen, bei Blei stießen wir auf Schwierigkeiten bei der Ätzung, wohl aber eignet sich Zink vorzüglich.

Man lege ein ausgesägtes Stück Zinkblech von 15 bis 20 qcm zwischen zwei größere Glimmerblättchen (zur Erzielung möglichst ebener Flächen) und dann zwischen dicke Asbestpappe auf einen Dreifuß und erhitze mit dem Pilzbrenner zum Schmelzen. Ein oben aufgelegter schwerer Gegenstand presst das flüssige Zink zwischen den Glimmerblättchen zu dünner Schicht aus, und man erhält nach dem Erstarren eine Zinklamelle von $\frac{1}{2}$ mm und weniger Dicke. Diese ätze man mit Chromsäure¹⁾ und erhält nach kurzer Zeit ein prächtiges Bild des richtungslos körnig kristallinen Gußgefüges. Infolge kristallographisch gesetzmäßigen Angriffs des Ätzmittels bekommt jedes Korn eine einheitliche Lichtreflexion und hebt sich vom anders orientierten Nachbar scharf ab, besonders wenn die Einfallsrichtung des Lichts geändert wird. Die Körner erreichen Größen von 1 qcm und darüber, wogegen die Unebenheiten ganz zurücktreten. Bei genügender Dünne der Zinklamelle erkennt man an den spiegelbildlich gleichen Umrissen der Felder auf beiden Seiten, daß die Kristalle durchgehen.

An solchen Zinkeinkristallen lassen sich dann Eingriffe vornehmen. Bei einfachem Verbiegen der Lamelle wird aus der gleichzeitigen Reflexion der ganzen Kristallfläche eine „undulierende“ analog der undulierenden Auslöschung an Dünnschliffen gepreßter Gesteine im polarisierten Licht. Dabei aber bleibt der Kristall als solcher durchaus erhalten, und nirgends zeigt sich eine Diskontinuität: das Gitter ist nur verbogen. Bei stärkerem oder öfterem Hin- und Herbiegen treten außer gesetzmäßig orientierten Sprüngen an einzelnen Kristallen an anderen, deren Orientierung offenbar besonders günstig zum Kraftangriff lag, als scharfe Diskontinuität Scharen feiner paralleler Streifen auf, die sich bei schwacher Vergrößerung als unter sich parallel orientierte Zwillingstreifen erweisen. Hier hat das Gitter eine teilweise Umlagerung erfahren.

Die eben geschilderten Deformationen sind zu gering, um bei größerem Abstand vom Schmelzpunkt²⁾, zur Rekristallisation Anlaß zu geben, wenn man wenigstens nicht mit sehr langen Erwärmungszeiten arbeitet. Bekanntlich finden in deformierten Kristallen Kristallneubildungen statt, die die erzeugten Spannungen beseitigen, und zwar umso rascher je mehr die Erhitzungstemperatur sich dem Schmelzpunkt nähert. Auch zum

¹⁾ Wir benutzten unsere zum Entfetten stets bereite Mischung von konz. Schwefelsäure u. Kal. bichromat.

²⁾ Für Zink 433° , also fast 100° über dem von uns ohne Gefahr für das Thermometer beherrschten Bereich.

Studium dieser Rekristallisationsvorgänge eignen sich größere Zinkeinkristalle vorzüglich. Man mache mit einer abgerundeten Spitze bei einer auf weicher Unterlage liegenden Zinklamelle einen kräftigen Eindruck in die Mitte eines Kristallkorns und betrachte ihn zunächst bei schwacher Vergrößerung (am besten binokular). Hat man Glück, d. h. lag die Krafrichtung günstig zu den Kristallachsen, so sieht man in der Nähe des Eindrucks Scharen paralleler Gleitlinien, die im günstigsten Fall den Eindruck in Gestalt eines sechseckigen Rahmens umgeben. Aber auch ohne das führt Erwärmung auf 300° (etwa 1 Std.) zu Kristallneubildungen, die nach erneuter Ätzung meist schon mit bloßem Auge zu erkennen sind.

Noch eindrucksvoller wird die Rekristallisation demonstriert durch Wärmebehandlung extrem verformter Metalle, wie sie am bequemsten in Walzblechen vorliegen¹⁾. Man erhitze ein Stück Zinkblech 3 Stunden auf 200° oder 1 Stunde auf 300° und ätze es gleich lang wie ein nicht erhitztes Stück. Der Unterschied ist groß: hier höchstens verschwommene Streifen, dort das richtungslos-körnig kristalline Gefüge vollständiger Rekristallisation (Korngröße 1 bis 2 mm). — Aluminiumblech liefert insofern noch instruktivere Bilder, als hier am nicht oder ungenügend hoch (200°) erhitzten Blech nach der Ätzung²⁾ die scharfe Streifung in der Walzrichtung die alten übermäßig gestreckten Kristalle des Gußblocks deutlich erkennen läßt. Die erst bei höheren Temperaturen (über Zinkschmelzpunkt) stattfindende Rekristallisation ist viel feinkörniger und immer noch streifig, da die aus einem gestreckten Kristall hervorgehenden neuen offenbar annähernd gleiche Orientierung zeigen. — Im Gegensatz fanden wir an einem Kupferschablonenblech (KAHLBAUM) bereits ohne Wärmebehandlung dasselbe körnige Gefüge wie am geglühten Stück³⁾. Wahrscheinlich handelt es sich um ein elektrolytisch hergestelltes Blech. Dasselbe Ergebnis zeigte ein Nickelblech.

Will man die geätzten Oberflächen vor dem Anlaufen schützen, so empfiehlt sich Überzug mit Zaponlack (eintauchen und abtropfen lassen). Für die Rekristallisationen hatten wir uns aus 1 bis 3 ineinander gesteckten gleichlangen Asbestrohren einen primitiven Ofen gebaut, der nach einer halben Stunde auf annähernd konstante Temperatur kam. Am Schluß möchte ich nicht versäumen, Interessenten auf das Buch hinzuweisen, dem ich die Anregung zu diesen Versuchen und vor allem die Angabe der Ätzmittel verdanke, zumal es in dieser Zeitschrift nicht besprochen wurde. Es ist J. CZOCHRALSKI'S „Moderne Metallkunde“ (Springer 1924, 12.— Mk.), das ich geradezu als metallographisches Bilderbuch bezeichnen möchte, so prächtig und instruktiv sind seine Abbildungen.

¹⁾ Zumal gleichzeitig ebene Ätzflächen vorhanden sind.

²⁾ Ätzung mit starker Flußsäure und anschließend kurz in konz. Salzsäure.

³⁾ Geätzt mit 20% Eisenchlorid + konz. Salzsäure.

Berichte.

1. Apparate und Versuche.

Der kleine Erschütterungsmesser der „Prospektion“ G. m. b. H. Von Dr. R. AMBRONN, Göttingen.

Der Erschütterungsmesser¹⁾ ist nach dem Beschleunigungs-Prinzip gebaut, welches besagt, dass eine Masse M , welcher man die Beschleunigung B erteilt, eine dynamische Zusatzbeanspruchung erfährt, welche gleich der Masse multipliziert mit der Beschleunigung ist.

¹⁾ Der Apparat ist durch DRGM 975482 gesetzlich geschützt und wird von der „Prospektion“ G. m. b. H., Göttingen, zum Preise von Mk. 110.— vertrieben.

Der Apparat ist in der Figur abgebildet, indem die Schutzkappe H zur besseren Veranschaulichung des inneren Baues des Apparates abgenommen ist.

Ein parallel zu seiner Axe an Blattf dern beweglicher Zylinder M von 100 g Masse wird durch eine Feder F mit dem Drucke von p Gramm gegen einen Anschlag A angedrückt, welcher in der Bewegungsrichtung des Zylinders M mittels der Schraube S meßbar verstellbar werden kann. Durch Drehung der Schraube S kann der durch die Feder F und die Wirkung der Schwerkraft auf M hervorbrachte Auflagedruck von M gegen A geregelt und nach vorangegangener Eichung

bestimmt werden. Größere Druckänderungen können ferner durch Auswechslung der Feder F bewirkt werden.

Um den Apparat in jeder beliebigen Lage sicher befestigen zu können, sind drei zueinander senkrecht stehende Seitenflächen entsprechend vorgerichtet. Zum Anschrauben sind Bohrungen vorgesehen.

Erteilt man dem Apparat eine Beschleunigung in der Achsenrichtung der Masse M , so bedeutet diese Beschleunigung B an der Auflagestelle auf A eine (dynamische) Zusatzkraft von der Größe $B \cdot M$, welche in der entgegengesetzten Richtung der Beschleunigung wirkt.

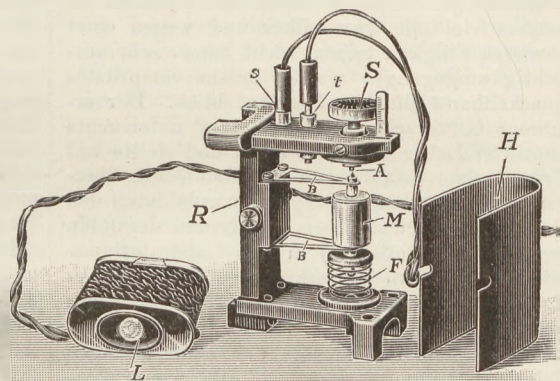
Der Apparat wird stets so angebracht, daß die Zusatzkraft, welche die zu messende Beschleunigung (bzw. Beschleunigungskomponente) erzeugt, dem Auflagedruck von M auf A entgegengesetzt gerichtet ist. Solange dann die dynamische Zusatzkraft $B \cdot M$ kleiner als der (statische) Auflagedruck p bleibt, liegt M auf A an. Sobald aber $B \cdot M$ den eingestellten Wert des Auflagedruckes p übersteigt, hebt sich M von A ab.

Bildet man, wie das bei dem Beschleunigungsmesser der Fall ist, den Anschlag zwischen M und A als Kontakt zwischen zwei gegeneinander isolierten Teilen eines elektrischen Stromkreises aus, so kann man das Abheben durch die Unterbrechung dieses elektrischen Kontaktes an einer bei s und t durch Stecker anzuschließenden Anzeigevorrichtung leicht sichtbar machen. Diese Anzeigevorrichtung ist bei diesem Erschütterungsmesser als Lämpchen in der üblichen, bequemen Taschenlampenform ausgebildet. Das Lämpchen glüht dunkelrot, solange der Kontakt besteht und blitzt auf, sobald die Masse M sich vom Amboß A abhebt. Die zum Abheben erforderliche Beschleunigung B_m ergibt sich nach obigem zu $B_m = p/M$ Teilen der Schwerebeschleunigung.

Die Maximal-Beschleunigung innerhalb eines Bewegungs- bzw. Schwingungsvorganges stellt aber eben gerade diejenige Größe dar, welche für die mechanische Beanspruchung von Gebäuden, Brücken, Fahrzeugen usw. bzw. einzelner Teile derselben, Maschinenteilen usw. allein maßgebend ist.

Der Erschütterungsmesser wird statisch ge-

eicht, indem man den Druck, welcher auf den Anschlag A ausgeübt wird, in Abhängigkeit von der Schraubenstellung und der Neigung des Apparates durch ein auf den Hals der Masse aufgelegtes, beigegebenes Schlitzgewicht von 50 g oder durch Anhängen von Gewichten an einem Faden, welcher in das am unteren Ende der Masse M angebrachte Häkchen eingehängt ist und über das Röllchen im Fuß des Apparates geführt wird, bestimmt. Den Zusammenhang zwischen Schraubenstellung und Neigung des Apparates gegen die Vertikale mit der Grenzbeschleunigung, bei



welcher der Kontakt aufgehoben wird, stellt man am besten in einem Diagramm dar, welches auch jedem Apparat beigegeben wird.

Der Apparat ist infolge der einfachen und übersichtlichen Anordnung seiner einzelnen Teile, sowie infolge seines billigen Preises besonders gut dazu geeignet, um im Unterricht an Schulen und technischen Lehranstalten das Gesetz der ihm zugrunde liegenden Äquivalenz von Masse und Trägheit, sowie der statischen und dynamischen Kraftwirkungen zu demonstrieren.

Ferner kann er zur Untersuchung der Erschütterungen an Gebäuden, Brücken-Konstruktionen, die durch Verkehr, benachbarte Maschinen-Anlagen oder andere Ursachen hervorgerufen werden, benutzt werden. Man kann ihn auch zur Prüfung der dynamischen Beanspruchung durch Erschütterungen an Maschinen, Fahrzeugen, Flugzeugen, Schiffen usw. oder einzelner Teile derselben mit Vorteil heranziehen.

2. Forschungen und Ergebnisse.

Die Gefahren des Quecksilberdampfes¹⁾ und die Bestimmung kleiner Quecksilbermengen²⁾.

Fast 25 Jahre litt der Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie in Berlin-Dahlem,

¹⁾ ALFRED STOCK, Die Gefahren des Quecksilberdampfes. Zeitschr. f. ang. Chem. **39**, 461; 1926 und ebenda S. 790. — ALFRED STOCK, Die Gefährlichkeit des Quecksilberdampfes und der Amalgame. Zeitschr. f. ang. Chem. **39**, 984; 1926.

²⁾ ALFRED STOCK und RICHARD HELLER, Die Bestimmung kleiner Quecksilbermengen. Zeitschr.

Prof. Stock, an jahrelang unaufgeklärten krankhaften Störungen, und zwar an dauernden Kopfschmerzen, Schwindelgefühl, Katarrhen des Nasenrachenraumes, Speichelfluß, Bläschen im Munde, wunden Stellen an der Zunge, Lockerung der Zähne, Verdauungsstörungen; dazu kamen nervöse Beschwerden, geistige Mattigkeit und eine auffallende Minderung des Gedächtnisses. Nach

f. angew. Chem. **39**, 464; 1926. — ALFRED STOCK und ERICH POHLAND, Kolorimetrische Bestimmung sehr kleiner Quecksilbermengen. Zeitschr. f. angew. Chem. **39**, 793; 1926.

langen vergeblichen Bemühungen der Nasenärzte, bei denen Prof. Stock Hilfe suchte, fand man erst vor 2 Jahren die Ursache aller dieser Krankheitserscheinungen in der Verpestung der Laboratoriumsluft durch Quecksilberdampf. Zu dieser Zeit trat nämlich bei 2 Mitarbeitern Stocks eine stärkere akute Quecksilbervergiftung auf, welche dadurch möglich wurde, daß seit 1921 aus Sparsamkeit die elektrische Entlüftungsanlage außer Betrieb gesetzt war und daß bei den Untersuchungen der beiden Herren 1923/4 in kleinerem Raume bei möglichst geschlossenen Türen und Fenstern besonders viel mit Quecksilber und wegen einer gewissen Eiligkeit zuletzt nicht immer sehr vorsichtig umgegangen wurde, indem verspritztes Quecksilber vielfach unbeachtet blieb. Der erfahrene Giftforscher Prof. L. LEWIN untersuchte sämtliche Laboratoriumsinsassen und stellte auf Grund seiner Erfahrungen bei allen Quecksilbervergiftungen fest; seine Diagnose wurde durch den Nachweis des Quecksilbers (auf Grund der unten angegebenen Methoden) in der Laboratoriumsluft und im Harn der erkrankten Personen bestätigt. Dabei betrug der Quecksilbergehalt der Luft im allgemeinen nur Tausendstel und Hundertstel mg im Kubikmeter, d. h. einen winzigen Teil der Sättigungsmenge; und doch waren diese Mengen ausreichend, um bei ständiger Einatmung im Laufe der Jahre die leider viel zu wenig bekannte schleichende chronische Quecksilbervergiftung zu erzeugen. Die ganze heimtückische Furchtbarkeit des Quecksilbers liegt gerade darin, daß hierbei die für den akuten Merkurialismus charakteristischen Entzündungen in der Mundhöhle sich erst sehr spät einstellen, wobei dann gewöhnlich die bis dahin aufgetretenen allmählichen Minderungen der geistigen Kräfte, besonders des Gedächtnisses, falsche Deutung finden. — Daß die langsame Quecksilbervergiftung viel weiter verbreitet ist, als man bisher annahm, ist deshalb erklärlich und beweisen auch die zahlreichen bestätigenden Zuschriften, die Prof. Stock aus den Kreisen der Fach-Kollegen erhielt¹⁾. Einzelne entgegengesetzte Berichte²⁾ erklären sich zum Teil durch besondere Verhältnisse — so ist z. B. möglich, daß Quecksilberdämpfe in mit Chlor geschwängelter Luft in das viel weniger giftige Chlorid übergeführt werden; auch spielen die Lüftungsanlagen eine große Rolle — zum Teil aber auch dadurch, daß die schleichende Quecksilbervergiftung, wie erwähnt, viel zu wenig bekannt ist und ihre Symptome in den Anfangsstadien, weil sie zu wenig spezifisch sind, leicht andern Ursachen zugeschrieben werden; schließ-

¹⁾ Prof. Dr. H. REIHLEN, Karlsruhe. Zeitschr. f. ang. Chem., 39, 788; 1926. — Dr. HOFER, Zeitschr. f. ang. Chem. 39, 1123; 1926. — Dipl.-Ing. A. SCHMIDT, Charlottenburg. Ebenda S. 786. — LUDWIG WOLF, Berlin. Ebenda 789.

²⁾ SCHARDT, Höchst a. M. Ebenda S. 668. — Dr. PINKUS, Berlin-Friedenau. Ebenda S. 787. — LOESCH in der Deutsch. Dentist. Wochenschr., München 1926, 443.

lich mag auch die individuelle Empfindlichkeit für Quecksilber sehr verschieden sein. Dr. PINKUS, Berlin-Friedenau¹⁾, hält außerdem für das Eintreten der beruflichen Quecksilbervergiftung noch das Vorhandensein einer zweiten Komponente physischer oder psychischer Art für notwendig.

Prof. Stock macht nun noch auf eine andere Quelle schleichender Quecksilbervergiftung aufmerksam; dies sind nach seiner Ansicht die Amalgamzahnfüllungen, wie ihm durch den genannten Toxikologen Prof. LEWIN bestätigt wurde. Letzterer empfahl ihm nach Feststellung seiner Vergiftung, sich sämtliche Amalgam-Plomben entfernen und durch unschädliche Füllungen ersetzen zu lassen. LEWIN erinnerte sich dabei eines Falles, wo ein Hochschul-Professor, der am Rande geistiger und körperlicher Zerrüttung war, erst nach Entfernung der aus der Jugendzeit stammenden Amalgam-Zahnfüllungen langsame Genesung erfuhr. — Stock verlangt, die Zahnheilkunde möge auf die Anwendung von Amalgamen als Füllmittel ganz oder doch überall dort verzichten, wo es nur irgend möglich ist. Viele Beschwerden wie Mattigkeit, Mißmut, Gereiztheit, Kopfschmerzen, Schwindel, Gedächtnisschwäche, Mundentzündungen usw. führt Stock auf Quecksilber zurück, das dem Körper aus den Amalgamplomben zwar in kleiner Menge, aber dauernd zugeführt wird. Die Amalgame, welche in der Zahnheilkunde meistens benutzt werden, sind das fertig in den Handel kommende, billige und leicht verarbeitbare Kupfer-Amalgam und das vom Zahnarzt erst im Augenblick des Bedarfs aus einer Silber-Zinnlegierung und Quecksilber herzustellende sogenannte Silberamalgam. Bei der Bereitung des letzteren muß etwa vorhandenes überschüssiges Quecksilber durch Abpressen beseitigt werden.

Kupferamalgam erfährt im Munde starke Zersetzung, wobei sogar metallisches Quecksilber in feinen Tröpfchen auftritt, und wird daher, wie sich in der Sitzung des Prov.-Vereins Brandenburgischer Zahnärzte am 5. VII. 1926 herausstellte, von ersten wissenschaftlichen Vertretern der Zahnheilkunde abgelehnt, so daß man mit Stock, da Kupferamalgam in Deutschland noch in größtem Umfange zu Zahnfüllungen verarbeitet wird, vom Reichsgesundheitsamt schleunigste Bearbeitung der Angelegenheit verlangen und befremdet fragen muß: wie ist so etwas möglich? (Zeitschr. f. ang. Chem. 39, S. 984 ff.)

Aber auch die mechanisch wie chemisch haltbareren Silberamalgame zersetzen sich, wenn auch langsamer, im Munde. Auch sie lassen Quecksilber abdunsten. Dies folgt aus Analysen von mehreren Amalgamstücken, die von Stock bei Mundtemperatur im Vakuum erhitzt wurden und beträchtliche Mengen abdestilliertes Quecksilber lieferten. Man hat dagegen angewendet¹⁾, daß bei den Stockschen Analysen andere Verhältnisse herrschen als im Munde, wo eine kleinere Oberfläche der Füllung frei liegt, eine schützende Speichelschicht vorhanden ist und vor allem das

¹⁾ Dr. PINKUS, Berlin-Friedenau. Ebenda.

Vakuum fehlt. Gewiß werden diese Umstände die Verdampfung des Quecksilbers bedeutend verlangsamen. „Glücklicherweise!“, sagt Stock. „Andererseits“, fährt er fort, „bestehen im Munde auch Einflüsse, welche die Zersetzung des Amalgams zu beschleunigen geeignet sind: mechanische Beanspruchung der Füllungen beim Kauen, chemische Einwirkung des Speichels u. dergl.“ Jedenfalls aber scheint durch die Laboratoriumsversuche sicher erwiesen zu sein, daß das Quecksilber auch in den besten Silberamalgamen flüchtig ist und eine merkliche Dampfspannung besitzt. Amalgamfüllungen müssen daher auch im Munde Quecksilber abgeben und bleiben, wie Stock nachdrücklich versichert, immer eine Gefahrenquelle. Beachtung verdient sicher auch die Warnung von Dr. GRADENWITZ, Berlin¹⁾, in die Nähe von Metallen (echte oder unechte Goldfüllungen und -brücken) keine Amalgamplomben zu legen, da sonst durch elektrolytische Ströme tiefergehende Zersetzung der Amalgamplomben eintreten kann. Aber die Ansicht von GRADENWITZ, daß die Oberfläche einer Amalgamfüllung, nachdem sie zunächst Quecksilber verloren hat, quecksilberarm wird und dann kein Quecksilber mehr abgibt, widerlegt Stock durch den Hinweis auf die mikroskopische Betrachtung alter Füllungen, welche zeigt, daß die Oberfläche „rauh, rissig, porös und bröckelig, mechanisch angreifbarer (Kauschrammen) wird, so daß sie sich leichter abreibt und neue quecksilberreiche Schichten frei gibt.“ — Zu erwähnen bleibt schließlich noch ein Versuch, den Stock mit einem jüngeren Mitarbeiter, Dr. D., angestellt hat. (Zeitschr. f. ang. Chem. 39, 984.) Man ließ D., welcher etwa ein Dutzend gut aussehender Füllungen besaß, und zwar fast nur (bis auf 1 oder 2) aus Silberamalgam, ein Glasrohr zwischen die festgeschlossenen Lippen nehmen und saugte durch dieses im Laufe von 6 Stunden etwa 400 l Luft ab, die durch die Nase zuströmten. Diese Luft wurde durch flüssige Luft abgekühlt. Das Kondensat ergab schwache, aber sichere Quecksilber-Reaktion. Durch einen Gegenversuch war festgestellt, daß die Zimmerluft quicksilberfrei war. Bei einer Wiederholung des Versuches, nachdem D. sich eine neue Silberamalgamplombe hatte einsetzen lassen, trat wesentlich stärkere Quecksilber-Reaktion auf. Haben diese Versuche auch quantitativ wenig Bedeutung, weil nur ein kleiner Teil der abgesaugten Luft mit den Füllungen in Berührung kommt, so wirken sie doch, wie zugegeben werden muß, qualitativ sehr überzeugend.

Nach allem dürften sich daher Prof. STOCKS Bedenken gegen die Amalgamfüllungen auch durch den Sturm der Entrüstung und den Widerspruch, den sein Angriff bisher bei den Zahnärzten auslöste²⁾, nicht so leicht beiseite schieben

¹⁾ Dr. GRADENWITZ, Berlin, Zeitschr. f. ang. Chem. 39, 788; 1926. — Zahnarzt Dr. G. HABER, Berlin. Ebenda, S. 905. — Ing. L. STERNER-RAINER, Wien. Ebenda, S. 907.

²⁾ Vgl. z. B. P. Ritter, Zahnärztl. Rundschau 35, 415; 1926.

lassen. Besondere Beachtung verdient noch Stock's Bemerkung (A. a. O. S. 986): „Die Zahnärzte sind selten in der Lage, allgemeine Wirkungen der Amalgamfüllungen zu erkennen oder auch nur zu erfahren. Wenn die Patienten an Nervosität, geistiger Mattigkeit, Katarrhen u. dgl. leiden, wenden sie sich nicht an den Zahnarzt, zu dem sie übrigens gewöhnlich über ihre Beschwerden schon deshalb nicht reden, weil sie bei der Behandlung am Sprechen verhindert sind.“ Dies dürfte jedenfalls bei der Aufstellung und Beurteilung von Statistiken, die nun gefordert werden¹⁾, nicht übersehen werden. Aber auch in den Reihen der Ärzte und Zahnärzte haben die Amalgame von Anfang an starke Gegner gefunden, wie von Stock näher ausgeführt wird²⁾, — und zwar trotz der WITZEL'schen³⁾ Untersuchungen.

Zum qualitativen Nachweis sehr kleiner Quecksilbermengen machten Stock und HELLER sich die Stellung des Quecksilbers und Kupfers in der Spannungsreihe zunutze. Sie führen das Quecksilber in Quecksilber (II)-chlorid über und fällen es aus dessen oxalsaurer Lösung auf einem Kupferdraht aus. Dieser wird getrocknet und bis zum Abdestillieren des Quecksilbers erhitzt. Das Kondensat wird mit Joddampf in das leicht erkennbare, rote Quecksilber (II)-jodid übergeführt.

Daß diese bequeme Ausfällung des Quecksilbers auf Grund seiner Stellung in der Spannungsreihe bisher oft versagte, ist darauf zurückzuführen, daß das Kupfer von Mineralsäuren unter Einwirkung des Luftsauerstoffs leicht angegriffen wird, wobei sich auf dem Draht leicht unlösliche Kupfersalze (Kupfer (I)-chlorid, basische Salze) bilden, die, beim Erhitzen zersetzt, das abdestillierende Quecksilber in das Chlorid verwandeln oder sonstwie verunreinigen, wodurch der Nachweis unter Umständen unmöglich wird. Daher muß man die in der wässrigen Lösung des Quecksilber (II)-chlorids vorhandenen H-Ionen durch Versetzen mit Ammoniumoxalat im Überschuß unwirksam machen.

Das Verfahren gestattet, noch Mengen von $\frac{1}{10000}$ bis $\frac{2}{10000}$ mg Quecksilber zu erkennen. Andere Metalle wie Zink, Aluminium, Messing eignen sich nicht so gut wie Kupfer für die Ausfällung.

Zum quantitativen Nachweis ist die vorstehende Methode deshalb nicht besonders geeignet, weil sich das auf dem Kupferdraht abgeschiedene Quecksilber an der Luft teilweise langsam verflüchtigt. Bei der quantitativen Quecksilberbestimmung durch Elektrolyse benutzt man als Kathode einen Golddraht, da hierauf das abgeschiedene Quecksilber nur kaum merklich flüchtig an der Luft ist. Als

¹⁾ Dr. PINKUS, a. a. O.

²⁾ Dr. P. WINDMÜLLER, Die Umschau 30, 479; 1926. — Dr. LICHTWARCK, Zahnärztl. Rundschau 35, 363; 1926.

³⁾ A. WITZEL, Das Füllen der Zähne mit Amalgam.

Anode dient ein Platindraht, als Elektrolyt die oxalsaurer Lösung des Quecksilber (II)-chlorids. Die Gewichtszunahme der quecksilberüberzogenen Kathode ist gleich der Quecksilbermenge. Durch Erhitzen in einem offenen Glasröhrchen oder mehrmaliges Hindurchziehen durch eine Bunsenflamme (Vorsicht! Schmelzpunkt des Goldes: 1060°; Quecksilberdampf nicht einatmen!), wobei man ihn oben rotglühend werden läßt, entfernt man das Quecksilber vom Drahte. Nochmaliges Wägen desselben zeigt, ob reines Quecksilber ausgeschieden wurde oder noch andere Schwermetalle in der untersuchten Lösung anwesend waren.

Mengen von $\frac{1}{100}$ mg Quecksilber sind nach dem angegebenen Verfahren noch einwandfrei quantitativ nachweisbar.

Auf organische Substanzen wie Harn und Speichel lassen sich die beiden obigen Bestimmungsmethoden für Quecksilber auch anwenden, aber erst nachdem man durch Behandeln der Flüssigkeit mit Chlor den organischen Bestandteil zerstört hat. Die Einzelheiten über-

gehen wir. Jedoch sei bemerkt, daß die auf dem Kupferdraht abzuscheidenden Quecksilbermengen 0,3 mg nicht übersteigen sollen.

Um in der Luft vorhandenen Quecksilberdampf nachzuweisen, kühlt man die Luft durch flüssige Luft stark ab; dann kondensiert sich das Quecksilber, und man kann es in Chlorwasser lösen und, wie oben angegeben, weiter behandeln.

Ein noch weit empfindlicheres quantitatives Verfahren ist die kolorimetrische Bestimmung sehr kleiner Quecksilbermengen, die STOCK und POHLAND ausgearbeitet haben. Die Verfasser benutzen die seit einiger Zeit bekannte Erscheinung, daß durch Diphenylcarbazid $OC(NH \cdot NH \cdot C_6H_5)_2$, neutrale Quecksilbersalzlösungen blauviolett gefärbt werden. Durch Herstellung von Vergleichslösungen von bekanntem Quecksilbergehalt lassen sich hier noch $\frac{5}{10000}$ mg Quecksilber (als $HgCl_2$) in 2 ccm Lösung, d. h. ein Teil Quecksilber in 4000000 Teilen Wasser, erkennen.

W. Hummel, Hamburg.

3. Geschichte und Erkenntnistheorie.

Zum 150. Geburtstag von Gauß¹⁾.

„Es sind von Zeit zu Zeit in der Weltgeschichte hochbegabte, selten bevorzugte Naturen²⁾ aus dem Dunkel ihrer Umgebung hervorgetreten, welche durch die schöpferische Kraft ihrer Gedankenwelt und durch die Energie ihres Wirkens einen so hervorragenden Einfluß auf die geistige Entwicklung der Völker ausgeübt haben, daß sie gleichsam als Marksteine zwischen den verschiedenen Jahrhunderten dastehen, von denen ein neuer Kulturzustand unseres Geschlechtes seinen Anfang genommen hat.

Als solche bahnbrechenden Geister haben wir in der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften für das Altertum ARCHIMEDES von Syrakus, nach dem Schlusse des Mittelalters NEWTON und für die Wende zum 19. Jahrhundert CARL FRIEDRICH GAUSS anzusehen.“

CARL FRIEDRICH GAUSS, dessen Geburtstag sich heute, am 30. April, zum 150. Male jährt, steht nicht nur zeitlich an der Spitze des 19. Jahrhunderts³⁾, sondern er bildet auch den Ausgangspunkt für die mannigfachen neuen Entwicklungen der Wissenschaft, die es umfaßt.

Ein lebensvolles, in seinen einzelnen Zügen erkennbares und allgemein verständliches Bild der großen Persönlichkeit mit wenigen Strichen vor einer nicht nur aus Kennern und Anhängern der Mathematik und der Naturwissenschaften bestehenden Zuhörerschaft zu zeichnen oder auch nur die Gebiete einigermaßen faßlich zu umreißen, für die GAUSS die Grundlagen geschaffen oder auf denen er mit heute noch greifbarem Erfolge gearbeitet hat, stößt auf sachlich kaum zu bewältigende Schwierigkeiten. Denn obwohl die Mathematik wie die exakten Naturwissenschaften zu den ältesten und edelsten Betätigungen des menschlichen Geistes gehören und als richtunggebende Kräfte für die Kulturentwicklung aller Völker zugestandenermaßen angesehen werden, sind sie doch schwer zugängliche Wissenschaften, auf wenigen Grundprinzipien nach zwingenden Gesetzen aufgerichtete Gebilde. Wer in sie eindringen will, muß in sich durch eigene Arbeit⁴⁾ die ganze Entwicklung Schritt für Schritt wiederholen; denn es ist unmöglich, auch nur z. B. einen mathematischen Begriff zu erfassen, ohne all die davorliegenden Begriffe und ihre Verbindungen in sich aufgenommen zu haben, die zu seiner Erschaffung führten.

Bei CARL FRIEDRICH GAUSS kommt noch als besonders ins Auge fallend hinzu, daß seine Art der Einwirkung auf seine Zeitgenossen — ich folge hier wie noch vielfach den Ausführungen FELIX KLEINS, dessen formvollendete, klar umrissene Darstellung wohl am meisten der einzigartigen Persönlichkeit von GAUSS gerecht wird — noch ganz den Typ des 18. Jahrhunderts zeigt: den wissenschaftlichen Verkehr in Form einer ausgiebigen Korrespondenz mit wenigen auserlesenen Männern und die klassische Form seiner Werke, die unter dem meisterlichen Stil nicht mehr oder doch nur ganz selten den Werdegang der Gedankenabfolge erkennen lassen.

¹⁾ Festrede aus Anlaß der GAUSS-Feier der Berliner Vereine zur Förderung des mathematischen und des physikalischen Unterrichts am 30. April 1927 in der Aula der Universität Berlin. Die Feier wurde eröffnet mit der Egmont Ouverture und geschlossen mit dem 1. Satz der Sinfonie Nr. 3 (Eroica) von Beethoven (Orchester-Vereinigung Berliner Musikfreunde E. V., Dirigent HANS GAHLENBECK). Die einleitende Begrüßungsansprache hielt Studienrat W. DRETTZ.

²⁾ SARTORIUS S. 1. ³⁾ KLEIN S. 6. ⁴⁾ KLEIN S. 1.

Diese Arbeitsweise macht es auch verständlich, daß die Herausgabe der gesamten Werke von GAUSS durch die Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, die 1870 begonnen wurde, erst jetzt, nach fast 70 Jahren, ihrer Vollendung entgegensteht. Nur etwa die Hälfte der gesammelten Werke ist von GAUSS selbst bearbeitet und veröffentlicht worden. Der weitaus größere Teil stammt aus dem mehrere große Schränke füllenden handschriftlichen Nachlaß. Ein ganzer Stab von Mitarbeitern war für Ordnung, Sichtung und Bearbeitung erforderlich.

Leider wird auch die Gesamtausgabe nicht alles umfassen, was GAUSS geleistet, nicht alles das enthalten, was ihn beschäftigt hat. Was mit seinem Ableben verloren gegangen ist, ist sicher ein gewaltiger, unwiederbringlicher Verlust. Die kurz nach seinem Tode von SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN GAUSS zum Gedächtnis geschriebene Biographie gibt viel mehr, als sein aufgefundener und in der Gesamtausgabe aufgearbeiteter Nachlaß erkennen läßt; namentlich, was die rein persönlichen Züge anlangt.

Unerfreulich und für die Wertung der Gesamtpersönlichkeit ganz besonders betrüblich ist die Tatsache, daß nach GAUSS' Tode 1855 nur ein Teil des Nachlasses, der „von wissenschaftlicher Bedeutung“ schien, von der Regierung angekauft wurde; der private¹⁾, insbesondere der belletristische Teil der Bibliothek kam an die Familie und ist fast völlig verloren gegangen.

Das Fundament der Leistungen von GAUSS liegt unzweifelhaft auf dem Gebiete der reinen Mathematik.

Schon in seiner frühesten Jugend ziehen ihn Zahlen und Zahlenverhältnisse mächtig an, und eine Reihe von Anekdoten, die GAUSS selbst gern bis ins hohe Alter hinein aus seiner Jugendzeit erzählte, lassen erkennen, mit welcher zäher Energie der Knabe allen Widerständen zum Trotz die seiner Muße abgerungenen Stunden zur Erweiterung seiner geistigen Entwicklung benutzte, wie er durch die Schnelligkeit und Klarheit seiner Auffassung nicht nur die Zahlenverhältnisse meisterte, sondern auch unter wiederholtem Überflügeln seiner Altersgenossen alle Anforderungen, die der Besuch des Gymnasiums an ihn stellte, erfüllte, so daß er, das Kind aus bescheidensten Verhältnissen, die Aufmerksamkeit seines Landesherrn, des Herzogs Ferdinand von Braunschweig auf sich zog, der sein Maecenas wurde und GAUSS freimachte von erheblicheren Sorgen um seine Zukunft.

Der junge Göttinger Student war zunächst nicht zu einem bestimmten Studium entschlossen; er schwankte in seiner Wahl zwischen dem Studium der klassischen Philologie und dem der Mathematik. Seine Neigung gehörte zwar der exakten Wissenschaft, sein Interesse fesselte aber die Persönlichkeit des Philologen HEYNE. Das Rüstzeug zum klassischen Philologen brachte er mit. Es war ihm z. B. im Jahre 1809 leicht, seine Abhandlung, die der Verleger deutsch nicht drucken wollte, die GAUSS aber sich weigerte französisch abzufassen, in ein formvollendetes Latein zu übersetzen, seine: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Bd. VII).

Viel weniger fesselten ihn die mathematischen Vorlesungen von KAESTNER, die in der Tat sich auf einem Niveau bewegten, das der junge GAUSS längst überschritten hatte. GAUSS kam 1795 nach Göttingen. Wir wissen jetzt aus dem Nachlaß, aus den verstreuten Aufzeichnungen auf losen Blättern, aus Aufzeichnungen in den Lehrbüchern seiner Jugend, namentlich aus Aufzeichnungen in dem Rechenbuch von LEISTE, das er sich ganz mit weißen Blättern für Bemerkungen hatte durchschießen lassen, daß sich GAUSS schon im Alter von 14 bis 17 Jahren mit dem sog. arithmetisch-geometrischen Mittel, mit der Zerlegung großer Zahlen in Primfaktoren, mit der Frequenz der Primzahlen, mit Untersuchungen über Potenzreste, mit der Auflösbarkeit quadratischer Kongruenzen bis zur Erkenntnis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, des *theorema aureum*, und namentlich, daß GAUSS sich mit unendlichen Reihen, der Exponentialreihe usf. beschäftigt hat, ja daß in jene Zeit bereits die ersten Gedanken über die Grundlagen der Geometrie einerseits, über die Methode der kleinsten Quadrate andererseits fallen.

Wesentlich waren es die „drei großen A“, die ihn beschäftigt hatten und noch beschäftigten bis in die Göttinger Zeit hinein und weit über sie hinaus: Arithmetik, Algebra, Analysis.

Er blieb zunächst in Göttingen, was er bisher war, Autodidakt und beschäftigte sich eifrig mit eigenen Untersuchungen, denen er sich um so intensiver hingeben konnte, als ihm nun die umfangreiche Universitätsbibliothek zur Verfügung stand. Das Studium der ihm jetzt bekannt werdenden Schriften und Forschungsergebnisse führender Geister, wie EULER, LANGRANGE u. a. fesselten ihn sofort stark, lösten in ihm aber Gefühle tiefster Enttäuschung wach über das Vorhandensein schon mancher mathematischen Tatsachen und Erkenntnisse, die, wie er glaubte, von ihm zuerst entdeckt worden seien. Deutlich zeigt das ein Brief an ZIMMERMANN, den er bald nach seiner Ankunft in Göttingen am 15. Oktober 1795 geschrieben hat: „Ich habe die Bibliothek gesehen, und ich verspreche mir davon einen nicht geringen Beitrag zu meiner glücklichen Existenz in Göttingen. Ich habe schon mehrere Bände von den *Commentariis Academiae Scientiarum Petropolitanae* im Hause, und eine noch größere Anzahl habe ich durchblättert. Ich kann nicht leugnen, daß es mir sehr unangenehm ist zu finden, daß ich den größten Teil meiner schönen Entdeckungen in der unbestimmten Analytik nur zum zweiten Male gemacht habe. Was mich tröstet, ist dieses. Alle Entdeckungen EULERS, die ich bis jetzt gefunden habe, habe ich auch gemacht und noch einige

¹⁾ KLEIN S. 30.

mehr. Ich habe einen allgemeineren und, wie ich glaube, natürlicheren Gesichtspunkt getroffen; ich sehe noch ein unermeßliches Feld vor mir, und EULER hat seine Entdeckungen in einem Zeitraume von vielen Jahren nach manchen vorhergegangenen Tentaminibus gemacht⁴. —

Am 30. März 1796 macht GAUSS die erste Eintragung in sein Tagebuch (s. Bd. 10, S. 483 ff.). *Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.*: Die geometrische Teilbarkeit des Kreises in 17 Teile.

Mit dieser Entdeckung und an diesem Tage fällt die Entscheidung für GAUSS' künftige Lebensrichtung. Nunmehr steht bei ihm, dem 19jährigen, der Entschluß fest, der Wissenschaft sein Leben und seine Arbeit zu weihen, die¹⁾ die Beschränkung auf Nutzenwendungen für die Bedürfnisse des Lebens von sich zurückweist, welche frei, um ihrer selbst willen in den Sternenhimmel gesetzt ist, um das Unverwelkliche der menschlichen Seele zu verkünden. — In dem Intelligenzblatt der allgemeinen Literaturzeitung (Bd. X, 1. S. 3) veröffentlicht GAUSS diese seine neue Entdeckung folgendermaßen: „Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, daß verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich das Dreieck, Fünfeck, Fünfzehneck, und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch konstruieren lassen. So weit war man schon zu EUKLID'S Zeit, und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, daß das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: Wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern. Desto mehr dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, daß außer jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Konstruktion fähig ist. Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publicum vorgelegt werden. C. F. GAUSS a. Braunschweig, Stud. der Mathematik zu Göttingen“.

Mit dieser Entdeckung, die — wie FELIX KLEIN anführt²⁾ — mit einem Schläge das seit zwei Jahrtausenden in der Entwicklung stehengebliebene Problem der Konstruierbarkeit regulärer Vielecke mit Lineal und Zirkel, eine Bedingung, die auf Plato zurückgeht, um ein gewaltiges Stück förderte, mit dieser Entdeckung tritt GAUSS in seine „Periode der drängenden Produktivität, der großen, fundamentalen Entdeckungen“.

Sehr bald erkennt GAUSS das Kriterium für die Konstruierbarkeit eines beliebigen regulären n -Ecks. — Es folgte 1799 seine Dissertation: *Demonstratio nova theorematis omnium functionum algebraicarum rationalium integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (Bd. 3): der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Sehr vorsichtig in der Formulierung des Problems: Der Begriff der komplexen Zahl wird verhüllt!

Immer und immer wieder hat sich GAUSS mit dem Fundamentalsatz der Algebra beschäftigt. 1815, 1816 und zur Feier seines 50jährigen Doktorjubiläums 1849; jedesmal hat er den Beweis nach anderer Methode geführt, 1849 zurückkehrend zu den Grundgedanken des besten Beweises von 1799.

1801 schuf GAUSS in den *Disquisitiones arithmeticae* die moderne Zahlentheorie. Das großartige, monumentale, wie der Titel sagt lateinisch geschriebene, schwer zugängliche, erst durch die Interpretationskunst DIRCHLETS, des Nachfolgers von GAUSS, der mathematischen Welt wirkungsvoll erschlossene Werk füllt den ganzen ersten Band der Gesamtausgabe (478 S.), ein Meisterwerk, epochemachend in der Geschichte der Wissenschaft.

GAUSS war sich der überragenden Bedeutung seiner *Disquisitiones* jederzeit voll bewußt. Am Spätabend seines Lebens urteilte er von ihm³⁾: „Die *Disquisitiones arithmeticae* gehören der Geschichte an, und ich würde in einer neuen Ausgabe, die ich zu besorgen nicht abgeneigt bin . . . mit Ausnahme der Druckfehler nichts ändern“.

In derselben Periode hat GAUSS die Theorie der allgemeinen elliptischen und der Modul-funktionen geschaffen, wie das „Tagebuch“ (vom 6. Mai bis 3. Juni 1801) angibt.

Im Jahre 1800 vollzieht sich bei GAUSS eine Wendung. Seine Betätigung auf dem Gebiete der reinen Mathematik wird mehr in den Hintergrund geschoben. Seine große Entdeckerperiode findet auf diesem Gebiete vorerst ihren Abschluß.

Nur auf einen engen Kreis von Gelehrten blieb die Kenntnis der Entdeckungen von GAUSS auf dem Gebiete der reinen Mathematik beschränkt. Andere Entdeckungen mußten hinzukommen, die GAUSS' Namen im großen Publikum zu einem der gefeiertsten in Europa machen sollten⁴⁾.

Am 1. Tage des neuen Jahrhunderts, am 1. Januar 1801, entdeckte der sizilianische Astronom PIAZZI in Palermo einen Stern 8. Größe, den er zuerst für einen Kometen hielt, dann aber durch die Beobachtungen an verschiedenen darauffolgenden Tagen desselben Monats als Planeten erkannte. Die Beobachtungen beschränkten sich nur auf ein kleines Intervall der Bahn; der Planet verschwand sehr bald in den Sonnenstrahlen und blieb unsichtbar. Es ergab sich aus dieser Tatsache die Aufgabe: aus den wenigen von PIAZZI gemachten Beobachtungen die mutmaßliche Bahn des neuen Planeten zu bestimmen, um auf Grund dieser Berechnungen den Planeten selbst wieder aufzufinden.

Die damalige theoretische Astronomie war nur imstande, unter der Voraussetzung einer kreisförmigen oder einer von der Kreisform sehr wenig sich entfernenden elliptischen Bahn der Aufgabe

¹⁾ SARTORIUS S. 8. ²⁾ KLEIN S. 25. ³⁾ SARTORIUS S. 20. ⁴⁾ SARTORIUS S. 23.

zu genügen¹⁾. Die Methoden waren erwachsen aus den zahlreichen Beobachtungen an den großen seit dem Altertum bekannten Planeten. Nach diesen Grundsätzen wurde auch die Bahn des neuen Planeten Ceres Ferdinanda berechnet. Aber es ergab sich, daß die meisten Beobachtungen PIAZZIS diesen vermuteten Bahnen sich nicht einfügen ließen. Man beschuldigte PIAZZI, schlecht beobachtet zu haben.

GAUSS allein schlug das entgegengesetzte Verfahren ein. Er stellte sich die Aufgabe, eine Planetenbahn aus drei vollständigen Beobachtungen zu berechnen. Er löste die Aufgabe und führte sie bis in alle rechnerischen Einzelheiten durch mit Hilfe umfangreicher Näherungsmethoden, eben durch die Methode der kleinsten Quadrate.

OLBERS in Bremen und andere fanden am Ende des Jahres 1801 — OLBERS am 1. Januar 1802 — den Planeten auf Grund der Gauss'schen Berechnungen wieder, die die Beobachtungskunst PIAZZIS voll rechtfertigten. Nur die Gauss'sche Methode ergab eine Bahn, die sämtliche Beobachtungen PIAZZIS als wirkliche Bahnpunkte in sich schloß.

Mit dieser astronomischen Großtat war GAUSS' Name in aller Munde. In schneller Folge entdeckten die Astronomen noch eine ganze Reihe solcher Planeten, die, wie wir wissen, in einer Anzahl von weit mehr als 1000 zwischen den Bahnen des Mars und Jupiter verteilt liegen²⁾.

Beschäftigt hat sich GAUSS außer mit der Berechnung der Bahn der Ceres, des ersten entdeckten kleinen Planeten, besonders noch mit dem bereits 1802 als zweiten entdeckten kleinen Planeten, der Pallas, die sich durch eine besonders große Exzentrizität und Neigung der Bahn auszeichnet. Langjährige Untersuchungen und umfangreiche Rechnungen von GAUSS sind den durch die Beobachtung erkannten Pallasstörungen gewidmet.

GAUSS' Genius ist natürlich nicht bei der Einzelbeobachtung und Einzelbetrachtung einzelner Planeten stehen geblieben. Sie waren ihm vielmehr Veranlassung, die so gefundenen Methoden weiter auszubauen und zu vervollkommen. So schuf GAUSS sein bedeutungsvolles Werk, die „Theoria motus“, die durch die darin niedergelegte, vorbildliche Art, Probleme der Himmelsmechanik zu behandeln und bis ins Zahlenmäßige durchzuführen, geradezu das Gesetzbuch der rechnenden Astronomie geworden ist³⁾.

Den Anspruch auf diese Geltung hatte sich die Theoria motus schon vor ihrem Erscheinen 1809 erworben; denn nicht nur die Bahn der Ceres (1801), auch die der Pallas (1802), der Juno (1804) und der Vesta (1807) wurden nach den Vorschriften dieses Werkes durch GAUSS selbst, dem sämtliche übrigen Astronomen diese Arbeit als Ehrenpflicht⁴⁾ überließen, berechnet. Diese Berechnungen hatten umgekehrt wieder den Erfolg, die Theorie zu klären und zu vervollkommen.

An diese seine astronomischen Entdeckungen anknüpfend stellten sich nunmehr auch andere Erfolge für GAUSS ein: Diplome aller gelehrten Gesellschaften⁵⁾ vom Polarkreis bis zu den Tropen, vom Tajo bis zum Ural fanden sich bei ihm ein, denen sich auch noch die transatlantischen zugesellten. Der junge GAUSS war im Alter von 25 Jahren zum Gelehrten von europäischem Ruf geworden.

Aber GAUSS blieb der fleißige, schlichte Mann, der unermüdliche Arbeiter und Forscher, der seine Erfahrungen auf dem Gebiete der praktischen Astronomie auch theoretisch voll auswertete. Selbst die mühsamen und komplizierten Arbeiten über die Pallas, die er anfangs so energisch und erfolgreich begonnen, aber nicht zu Ende führte, die also — man weiß nicht, ob aus geistiger Ermüdung oder ob der Sprödigkeit der Materie — ein unvollendetes, bis zur völligen Lösung nicht ausgereiftes Problem blieben, diese Arbeiten haben dennoch reiche, rein wissenschaftliche Früchte gezeitigt.

Es entstanden, angeregt durch das Pallasproblem, die Abhandlungen: Über die hypergeometrische Reihe (1812), Über mechanische Quadratur (Bd. 3, S. 163 ff.) 1814⁶⁾ und Über Saecularstörungen (Bd. 3; S. 335–355) 1818⁷⁾.

Daneben hat GAUSS in dem ganzen Jahrzehnt eine erstaunlich große Menge von Beobachtungen angestellt und eine ebenso zahllose Menge umfangreicher Berechnungen ausgeführt, wie sich aus dem veröffentlichten Nachlaß ergibt. SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN wird durchaus recht haben, wenn er von diesem Zeitabschnitt sagt⁸⁾: „GAUSS gönnte sich damals weder bei Tag noch bei Nacht Ruhe. Keine Anstrengung des Geistes und des Körpers schien ihm zu groß, um eine Reihe von

¹⁾ Siehe CANTOR: Allgem. Deutsche Biogr., Art. GAUSS.

²⁾ Herr Prof. Dr. BRENDL in Frankfurt a. M. war so liebenswürdig, diese Tatsachen dem Verfasser brieflich mitzuteilen. Die „Vesta“ ist am 29. März 1807 von OLBERS entdeckt; und von kleineren Planeten sind bis Ende des Jahres 1926 1055 so weit bekannt, daß man ihre Bahnen berechnet hat. Außerdem sind wohl mehrere 100 vorhanden, bei denen die Beobachtungen nicht ausreichen, um eine Bahn zu bestimmen. Diese letzteren können natürlich keine Nummern und auch keine Namen erhalten.

³⁾ KLEIN S. 9. ⁴⁾ CANTOR: Art. GAUSS. ⁵⁾ SARTORIUS S. 43.

⁶⁾ Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi.

⁷⁾ Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispersita.

⁸⁾ SARTORIUS S. 50.

Arbeiten durchzuführen, dazu bestimmt, die Wissenschaft des 19. Jahrhunderts zu reformieren und ihr Fundamente zu unterbreiten, deren Festigkeit erst von künftigen Geschlechtern anerkannt und gewürdigt werden wird¹⁾. — Eine Prophezeiung, die sich voll bewahrheitet hat.

Indessen erschöpfte sich die Energie und Schaffensfreude von GAUSS nicht in der Betätigung auf der weiten Flur der praktischen und theoretischen Astronomie; wir wissen, daß er schon während seiner Studienzeit in Göttingen sich mit geodätischen Arbeiten beschäftigte. Schon im Jahre 1799 veröffentlichte er im Druck¹⁾ eine kurze Bemerkung (Druckfehlerberichtigung) über die Ergebnisse der Gradmessung zwischen Dünkirchen und Barcelona, einer Gradmessung, die in die Jahre 1792 bis 1799 fällt und besonders deshalb für alle Zeiten berühmt geworden ist, weil mit ihr u. a. die Forderung nach einem unverlierbaren Naturmaß endgültig als lösbares Problem aus der Wissenschaft ausschied.

Diese Gradmessungen, die zum ersten Male auf Beschluß der Pariser Akademie im Jahre 1671 angeregt, mehrfach und an verschiedenen Stellen der Erde während des 17. und 18. Jahrhunderts ausgeführt wurden, hatten nicht nur einen wissenschaftlichen Zweck: die Größe und Gestalt der Erde bestmöglichst festzulegen, sondern auch eine eminent praktische Bedeutung als Landesvermessungen.

Dem Beispiele Frankreichs folgend wurde auf Landesherrliches Geheiß durch den Astronomen SCHUMACHER, GAUSS' einstigen Schüler, der mehrere Jahrzehnte mit GAUSS in lebhaftem wissenschaftlichen Briefwechsel stand²⁾, eine Gradmessung in Dänemark 1816—1820 ausgeführt. Daß GAUSS, der Leiter der Göttinger Sternwarte, die dänische Gradmessung aufs lebhafteste begrüßte, kann nicht überraschen, denn der astronomische Teil jeder Gradmessung, der in der Ermittlung von geographischen Breiten besteht, mußte GAUSS, dessen Streben in erster Linie dahinging, Fundamentalbestimmungen vorzunehmen³⁾, besonders interessieren, und so wurde denn die zunächst nur von SCHUMACHER ausgegangene Aufforderung⁴⁾ an GAUSS, das Land Hannover im Anschluß und unter Benutzung der an der Südgrenze von Dänemark gefundenen und festgelegten Ergebnisse gleichfalls trigonometrisch zu vermessen, von GAUSS in die Tat umgesetzt, nachdem der König von Hannover 1820 „die Fortsetzung der Gradmessung durch das Königreich Hannover“ genehmigt hatte.

Die schon vorher begonnenen Vorbereitungen ermöglichten einen fast sofortigen Anfang mit der Lösung der gestellten Aufgabe. Eigene Messungen hat GAUSS in der Zeit von 1821 bis 1825 ausgeführt, beendet wurden die Vermessungsarbeiten erst 1841.

Verwickelt und schwierig waren die geodätischen Operationen, für die GAUSS neue, ihm durchaus eigentümliche Methoden fand, die eine bisher nicht gekannte, wenn auch durch die heutigen noch präziseren Vorrichtungen und Apparate übertroffene Genauigkeit zeitigten.

Seit Gemma Frisius 1533 wußte man, daß die Zerlegung der zu vermessenden Gegenden in Dreiecke vorteilhafte und genaue Ergebnisse lieferte. Seitdem hatte die Vermessungskunde große Fortschritte gemacht. Man wußte, daß es zweckmäßig sei, ein Grunddreieck mit möglichst großen Seiten als Vermessungsbasis festzulegen. Dementsprechend wählte GAUSS ein sehr großes Dreieck, das größte, das bis dahin jemals als Grunddreieck geodätisch vermessen worden ist, gebildet durch die 3 Berggipfel: Inselsberg, Brocken, Hohenhagen. — Bei den Winkelmessungen war es erforderlich, das Fernrohr auf einen meilenweit entfernten Punkt, der wirklich als Punkt gelten konnte, einzustellen. Um dieses Erfordernis zu erfüllen, erfand GAUSS das Heliotrop, ein Instrument, das unter Benutzung der reflektierten Sonnenstrahlen gut sichtbare und für Messungen brauchbare, hell beleuchtete Visierpunkte erzeugt; übrigens nach GAUSS' eigenem Ausspruch seine Lieblings-erfindung auf dem Felde des Experiments.

GALLE hält diese einfache Erfindung von GAUSS für so bedeutend, daß er am Schluß seiner Abhandlung über die geodätischen Arbeiten von GAUSS sagt⁵⁾: „Die GAUSSsche Erfindung hat, obwohl sie gegenwärtig nicht mehr in ihrer ursprünglichen Form verwendet wird, der Geodäsie einen unvergänglichen Nutzen gebracht. Die in wissenschaftlicher, aber auch in mechanischer Hinsicht bis ins einzelne durchdachten Instrumente sind ein bleibendes Denkmal der schöpferischen Kraft und der Geistesschärfe ihres Urhebers. Wollte man die Erfindung des Heliotrops beiseite lassen, so wäre es nicht möglich, ein vollständiges Bild von der vielseitigen Begabung von GAUSS zu gewinnen.“

Gleichsam als Schlußstein dieser geodätischen Arbeiten existiert ein Koordinatenverzeichnis — so berichtete bereits SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN 1856⁶⁾, und in den gesammelten Werken finden wir die Bestätigung — ein Koordinatenverzeichnis von etwa 3000 Punkten des Hannoverschen Landes, in dem ein jedes Zahlenpaar das Resultat einer ausgedehnten, auf der Methode der kleinsten Quadrate beruhenden Rechnung ist, zu deren Ausführung ein weniger geübter Rechner eines, vielleicht mehrerer Tage bedürfen würde.

Daß GAUSS nicht nur dem praktischen Teil der Lösung der gestellten geodätischen Aufgabe sein Augenmerk zugewandt hat, ist bei ihm, dem schaffenden Mathematiker, selbstverständlich. Ich nenne nur seine 1821, 1823 und 1826 herausgegebenen Abhandlungen über die Methode der kleinsten Quadrate, ich nenne die von der Kopenhagener Akademie preisgekrönte Abhandlung über

¹⁾ Siehe H. GALLE: Über die geodätischen Arbeiten von GAUSS. Werke Bd. 11, 2. Abh. 1. 1924. S. 9.

²⁾ Briefwechsel zwischen C. F. GAUSS und H. C. SCHUMACHER, herausgegeben von C. A. F. PETERS, Gustav Erich. Altona. 6 Bände.

³⁾ GALLE a. a. O. S. 37. ⁴⁾ GALLE a. a. O. S. 59. ⁵⁾ GALLE a. a. O. S. 161. ⁶⁾ SARTORIUS S. 55.

konforme Abbildungen 1825, und ich nenne die grundlegenden, 1827 erschienenen *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, die tief sinnigen Spekulationen über Differentialgeometrie, wie sie KLEIN¹⁾ nennt, die beginnen mit dem fundamentalen Begriff des „Krümmungsmaßes“; fundamental, weil an diesen Begriff die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie²⁾ anknüpft.

Daß die Gerade nicht immer dieselbe Figur ist, sondern daß ihre Gestalt von der Eigenart des Raumes abhängt, in dem sie sich befindet, hat zwar zuerst der genialste Schüler von GAUSS, BERNHARD RIEMANN, ausgesprochen in seiner berühmt gewordenen Antrittsrede als Privatdozent: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“; eine Gedankenentwicklung, die fast allein³⁾ die Richtung der mathematischen Forschung während der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts bestimmt hat. Aber es steht fest — das wissen wir aus dem jetzt aufgearbeiteten Nachlaß und aus den Tagebüchern, die GAUSS sorgfältig geführt hat — GAUSS war mehr als 30 Jahre vor dieser Antrittsrede RIEMANNs bereits im Besitze dieser neuen, der nichteuklidischen Geometrie.

Wenn GAUSS trotzdem über die genannte Antrittsrede RIEMANNs in begeisterten Worten über die Tiefe der Gedanken sich ausgesprochen hat, so ist das sicher ein wohl einzig dastehendes Ereignis, daß ein Gelehrter — wie es hier GAUSS tut — eine wissenschaftliche Entdeckung ersten Ranges geheimhält und selbst dann noch nicht damit hervortritt und die Priorität für sich in Anspruch nimmt, wenn nach Jahr und Tag andere damit vor die Öffentlichkeit treten⁴⁾. — Nur soviel über diesen epochalen Gedankenflug von GAUSS über die letzten Fragen, über die Fragen nach dem Geltungsbereiche der Mathematik und ihrer Gesetze und Axiome.

Zu beklagen ist, daß GAUSS ein zusammenhängendes großes geodätisches Werk nicht veröffentlicht hat. GAUSS hatte diese Absicht. In dem Werke sollte die Hannoversche Gradmessung als praktisches Beispiel erscheinen. Leider blieb der Vorsatz unausgeführt. Um so mehr ist aber die Tatsache hervorzuheben, daß GAUSS durch seine Leistungen zum „ersten Geodäten der Welt“⁴⁾ wurde und daß die Geodäten GAUSS ganz zu den Ihrigen rechnen. So bestimmend und richtunggebend haben seine Methoden auf die Weiterentwicklung der Vermessungswissenschaft gewirkt.

Wiederum also neuartige, sichere, fundamentale Methoden und Ergebnisse des genialen exakten Forschers, des Direktors der Universitätssternwarte in Göttingen. Daß GAUSS in dieser, seiner ersten amtlichen Stellung, trotz seiner epochemachenden Entdeckungen und richtunggebenden Forschungen geblieben ist, ist ein besonders hervorstechendes Merkmal für den anspruchslos gebliebenen Gelehrten von Weltruf, ein besonders glückliches Ereignis für die Universität Göttingen.

An ehrenvollen Berufungen auf begehrte wissenschaftliche Posten hat es GAUSS nicht gefehlt. Die Petersburger Akademie hat sich wiederholt bemüht, GAUSS an sich zu ziehen, schon zu Lebzeiten seines großen Gönners, des Herzogs Ferdinand von Braunschweig. Vergeblich! So lange Herzog Ferdinand lebte, blieb der seinem Maecen in Dankbarkeit ergebene Gelehrte in Braunschweig; erst nach dessen Tode und nachdem das Projekt, in Braunschweig für GAUSS eine Sternwarte einzurichten, sich nicht verwirklichte, folgte er dem Rufe nach Göttingen.

1810 versuchte WILHELM v. HUMBOLDT unter günstigsten Bedingungen GAUSS an die neu gegründete Universität und an die Akademie der Wissenschaften in Berlin zu ziehen. Wiederum vergeblich. Im Jahre 1821 wollte ALEXANDER v. HUMBOLDT nochmals GAUSS für Berlin gewinnen⁵⁾. GAUSS sollte keine Vorlesungsverpflichtungen haben, sondern in der Hauptsache nur die Gesamtheit der Forschungsinstitute des Staates wissenschaftlich beaufsichtigen und einen bestimmenden Einfluß auf die Gesamtentwicklung des Unterrichtswesens (in mathematisch-naturwissenschaftlicher Beziehung) in Preußen erhalten, wie das deutlich aus einem Brief ALEXANDERS v. HUMBOLDT an GAUSS hervorgeht.

Man war ferner der Überzeugung, daß die Persönlichkeit und das Organisationstalent eines GAUSS hervorragend geeignet sei für die Stellung eines Direktors der in Berlin zu errichtenden polytechnischen Schule, einer nach dem Vorbilde der *École polytechnique* in Paris (gegr. 1794) beabsichtigten Gründung. Träger des Planes waren ALEXANDER v. HUMBOLDT und der Chef des Generalstabes. Wie in Frankreich sollte in Preußen dieses Institut dienen der Vorbildung der Militärs und der Staatsbeamten, die einer exaktwissenschaftlichen Vorbildung bedurften, auch der mathematischen und naturwissenschaftlichen Lehrer an den höheren Schulen. Der Plan ist nicht zur Ausführung gekommen. GAUSS selbst lehnte eine Berufung nach Berlin 1825 endgültig ab. Er hatte sich entschlossen, sein altes Verhältnis zur Georgia Augusta in Göttingen nicht aufzugeben.

Es würde zu weit führen, auf alle Stadien des angedeuteten Planes und der Geschichte der Berufung von GAUSS nach Berlin einzugehen. Ich kann nur andeuten.

Meiner Überzeugung nach ist das ganze Berufungsproblem deshalb durch die Interpretation in solche Dunkelheit geraten, weil man immer nur die Archive und Akten in Berlin um Aufschluß

¹⁾ KLEIN S. 15.

²⁾ DE VRIES: Die vierte Dimension. Deutsch von R. STRUNCK, Bd. XXIX, Wissenschaft und Hypothese. 1926, TEUBNER, S. 114 f.

³⁾ DE VRIES a. a. O. S. 116.

⁴⁾ CANTOR: Art. GAUSS, Allgemeine deutsche Biographie.

⁵⁾ W. LOREY: Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts. S. 40 f. (Abhandlungen über den math. Unt. in Deutschland, veranlaßt durch die JMUK, herausgegeben von FELIX KLEIN, Bd. III, Heft 9).

befragte und nicht die in Hannover. Ich glaube, daß GAUSS, dessen Sinn bei der Einfachheit seiner persönlichen Lebensgebarung mehr auf stetige, übersichtliche und einschlägige Arbeit wie auf direkte Beeinflussung eines großen Kreises von Zeitgenossen sah, durchaus die Dinge so schildert, wie sie sind, in einem Briefe (an PFAFF) nach der Ablehnung der Berufung: „Ich bin, Conjunctionen abgerechnet, die außer der Berechnung liegen, für's Leben an Göttingen gekettet, zwar ohne förmliche Versprechungen, aber durch das Band aufrichtiger Dankbarkeit für sehr liberales Benehmen unserer Regierung. Ohne mehrere sehr zufällige Umstände hätte meine Angelegenheit leicht einen anderen Ausweg nehmen können.“

Viel wichtiger als diese ganze Angelegenheit ist ein glücklicher Umstand, der aus dem Verkehr zwischen ALEXANDER VON HUMBOLDT und GAUSS sich ergab. Die beiden Männer waren durch einen umfangreichen Briefwechsel schon lange miteinander verbunden. Ihre persönliche Bekanntschaft erfolgte erst 1828 auf der Tagung der Naturforscher in Berlin, die GAUSS besuchte als Gast ALEXANDERS VON HUMBOLDT. Auf dieser Tagung wurde GAUSS mit einem jungen Privatdozenten, einem Physiker, bekannt. Dieser junge Gelehrte war WILHELM WEBER. Aus der Bekanntschaft erwuchs die Berufung Webers nach Göttingen auf GAUSS' Betreiben als ordentlicher Professor der Physik.

Und nun beginnt¹⁾ — ich zitiere KLEIN — das Jahrzehnt der gemeinsamen Arbeit mit WEBER, eine der bedeutendsten Perioden der Göttinger Universität, die die dauernde Zusammengehörigkeit von Mathematik und Physik in Göttingen begründet.

Die Lehre von der Elektrizität, die bereits durch GALVANIS und VOLTAS fundamentale Entdeckungen gebieterisch immer weiter in den Gesichtskreis aller Naturforscher getreten war, eroberte sich ständig umfangreichere Forschungsgebiete, die nun unter dem Namen „Elektrodynamik“ zusammenzufassen sind.

1820 entdeckt OERSTEDT die Einwirkung eines Stromkreises auf die Magnetnadel, 1821 stellen BIOT und SAVART das erste exakte Gesetz über die Wirkung eines Stromkreises auf einen Magnetpol auf. 1822 bis 1826 beobachtet dieselbe Wirkung zwischen zwei Stromkreisen Ampère, der aus diesen Beobachtungen eine Erklärung des Magnetismus durch molekulare Ströme ableitet, 1827 stellt OHM das nach ihm genannte Gesetz auf. 1828 folgen die ersten Anfänge der Potentialtheorie, die GREENsche Funktion. 1831 entdeckt FARADAY die induzierten Ströme. Eine sich überstürzende, schnelle Entwicklung in diesem Gebiete physikalischer Forschung²⁾.

GAUSS hatte inzwischen gleichfalls physikalischen Forschungen sich zugewandt. Zwei Abhandlungen aus den Jahren 1829 und 1830 bestätigen das (Bd. 5): die Abhandlung „Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik,“ das Prinzip des kleinsten Zwanges und die Principia generalia theoriae fluidorum in statu aequilibri, die Theorie der Kapillarität.

Nun beginnt die gemeinsame Arbeit mit WEBER — WEBER kam 1831 nach Göttingen — die Arbeit auf dem Gebiet des Elektromagnetismus.

Schon im nächsten Jahre erschien die grundlegende Abhandlung von GAUSS: *Intensitas vis magneticae terrestri ad mensuram absolutam revocata* (Bd. 5), über das absolute Maß bei magnetischen Messungen. Alle physikalischen Messungen werden fortan — das ist der Fortschritt — auf die drei Grundgrößen: Masse m , Länge l , Zeit t zurückgeführt, das fundamentale cm gr sec -Maß³⁾. Der Mathematiker GAUSS — Gesetzgeber der messenden Physik!

In derselben Arbeit⁴⁾ gibt GAUSS Methoden für magnetische Messungen, die durch eine bis zu astronomischer Genauigkeit getriebene Verfeinerung der magnetischen Meßinstrumente ermöglicht werden.

Im Verfolg dieser Arbeiten, namentlich bei der Prüfung des OHMSchen Gesetzes und der Stromverzweigungsgesetze⁵⁾, die später nach KIRCHHOFF benannt sind — gelingt nun eine Leistung, die die Namen GAUSS-WEBER unverlierbar für alle Zeiten aneinanderheften, eine Leistung — gleichsam nur nebenher — aber von eminent praktischer Bedeutung und über die engen Kreise der Wissenschaft hinaus ein Aufsehen erregender Fortschritt: die Konstruktion des elektromagnetischen Telegraphen.

Die Erfindung ist nicht der erste Versuch einer Nachrichtenübermittlung auf elektrischem Wege über weite Strecken, aber ein Versuch, an den die weitere Entwicklung mit Erfolg anknüpfen konnte. Daß GAUSS und WEBER die hervorragende technische, volkswirtschaftliche, kulturfördernde Bedeutung sofort erkannten, wird aus mehreren Briefen von GAUSS an SCHUMACHER⁶⁾ ebenso deutlich wie aus einer Äußerung WEBERS in einem Bericht auf Veranlassung des sächsischen Staatsministers an das Direktorium der Leipzig-Dresdener Eisenbahn, die eine Telegraphenlinie nach dem Projekte von GAUSS und WEBER 1835 einrichten wollte, aber zunächst aus finanziellen Gründen davon Abstand nehmen mußte. Der Bericht WEBERS schließt so⁶⁾: „Wenn einst die Erde mit einem Netz von Eisenbahnen, mit Telegraphenlinien überzogen sein wird, so wird dieses Netz ähnliche

1) KLEIN S. 20. 2) KLEIN S. 19.

3) GAUSS selbst benutzte die Einheiten Millimeter, Milligramm, Sekunden.

4) Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER a. a. O. II., KLEIN S. 23.

5) CL. SCHÄFER, GAUSS' magnetische Untersuchungen.

6) SARTORIUS S. 64.

Dienste leisten, wie das Nervensystem im menschlichen Körper, teils die Bewegung, teils die Fortpflanzung der Empfindungen und Ideen blitzschnell vermittelnd.“

Die Erfindung von GAUSS-WEBER wurde wegen ihrer praktischen Bedeutung natürlich sehr schnell — das Prinzip war ja unverlierbar gefunden — technisch vervollkommenet und — das wissen wir alle — damit tatsächlich ein unentbehrliches Nachrichtenübermittlungsmittel. Noch ist die Telegraphie durch Draht nicht entbehrlich. Die Prophezeiung von WEBER aus dem Jahre 1835 hat sich erfüllt.

Etwa 60 Jahre später — im Jahre 1896 — konnte die gelehrte Welt dem großen Meister der Naturforschung Lord KELVIN an seinem 50jährigen Professorenjubiläum, zu dem Vertreter aus allen Ländern gekommen waren, einen telegraphischen Glückwunsch übermitteln, der in THOMSONS eigenem Zimmer aufgegeben und telegraphisch um die ganze Erde geleitet wurde. Das Telegramm nahm $13\frac{1}{2}$ Minuten in Anspruch; THOMSONS Rückantwort nur $8\frac{1}{2}$ Minuten¹⁾.

Wichtiger für die wissenschaftliche Forschung als die Erfindung des elektromagnetischen Telegraphen sind die in demselben Jahre 1834 beginnenden systematischen Beobachtungen und Arbeiten auf dem Gebiete des Erdmagnetismus²⁾.

ALEXANDER VON HUMBOLDT hatte nach der Rückkehr von seiner erfolgreichen südamerikanischen Reise in den Jahren 1799 bis 1804 deren wissenschaftliche Ergebnisse in einem vielbändigen bedeutenden Werke, bedeutend, obwohl es ein Torso geblieben ist, niedergelegt. Durch seine Beobachtungen veranlaßt, gründete er einen Verein zum Zwecke erdmagnetischer Beobachtungen, dessen Mitglieder in aller Welt sich zu dem gleichen Programm verpflichten mußten. Göttingen — d. h. GAUSS mit WEBER — gehörten diesem Verein an; an sie mußten die Beobachtungen eingeliefert werden.

Das so gewonnene Material hat GAUSS mit WEBER dann einer eingehenden kritischen Behandlung unterzogen. Die Ergebnisse dieser Arbeiten sind niedergelegt in den von GAUSS und WEBER herausgegebenen 7 Heften: „Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins.“ Ein Supplement zu diesen Resultaten bildet der 1840 veröffentlichte Atlas des Erdmagnetismus, nach den Elementen der Theorie entworfen von C. F. GAUSS und W. Weber.

In den Resultaten erschienen 1838 bis 40 die beiden grundlegenden Arbeiten von GAUSS auf diesem Gebiet: „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus“ und „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte.“

Die erste Abhandlung enthält das Potential des Erdmagnetismus, dargestellt durch Kugelfunktionen. Auf Grund der hier niedergelegten Theorie hat GAUSS u. a. die Lage des magnetischen Südpols auf der Erde berechnet, ein Ergebnis, dessen Richtigkeit in der Folge durch die Beobachtungen der Südpolarforscher bestätigt wurde.

Die zweite Abhandlung gibt die Theorie des Potentials, grundlegend für den Fortschritt der Wissenschaft, von so ausschlaggebender Bedeutung für die Forschung des 19. Jahrhunderts, daß je länger je mehr der NEWTONSche Kraftbegriff durch das Potential abgelöst wurde.

Also auch wieder auf diesem Gebiet, auf dem Gebiete der Physik hat sich der große Mathematiker GAUSS als Gesetzgeber erwiesen, der wo auch immer den aus den Einzelbeobachtungen gewonnenen Resultaten die verallgemeinernde, für die Zukunft richtunggebende mathematische Theorie folgen ließ.

Zur Mathematik kehrt GAUSS stets zurück. Sie ist ihm „die Königin der Wissenschaften“.

Einige Gedanken von GAUSS habe ich zusammengestellt zur Würdigung dieses einzigartigen begnadeten Genius.

CARL FRIEDRICH GAUSS verdient den Ehrentitel, den sein König ihm gegeben hat auf der 1855 geprägten GAUSS-Medaille: Mathematicorum princeps. FELIX KLEIN fügt hinzu: „Hätten seine Zeitgenossen gar Einblick in GAUSS' unveröffentlichte Produktion gehabt, wie sie uns jetzt durch den Nachlaß zugänglich geworden ist, so hätten sie vielleicht zu noch höheren Ausdrücken gegriffen.“

Literatur.

Carl Friedrich Gauß' Werke, herausgegeben von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. B. G. Teubner. Bd. 1: Disquisitiones Arithmeticae. 1870. Bd. 2: Theorematis Arithmetici demonstratio nova. 1876. Bd. 3: Analysis. 1876. Bd. 4: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Geometrie. 1880. Bd. 5: Mathematische Physik. 1877. Bd. 6: Astronomische Abhandlungen. 1874. Bd. 7: Theoretische Astronomie. 1906. Bd. 8: Nachträge zu Bd. 1 bis 4. 1900. Bd. 9: Geodätische Abhandlungen. Konforme Abbildungen 1903. Bd. 10, 1.: Nachträge zur reinen Mathematik. Das Tagebuch. 1917. Bd. 10, 2: Zahlentheoretische Arbeiten. Variationsrechnung. 1922. Gauß als Geometer, 1923. Bd. 11, 1.: Nachträge zur Physik. Geodätische Arbeiten. 1924. Bd. 11, 2.: Essais über Gauß' wissenschaftlichen Nachlaß. Bd. 12: Nachträge zu Bd. V: Physik. Varia (im Erscheinen begriffen). Durch die Güte des Herausgebers (Prof. BRENDL-Frankfurt a. M.) habe ich die fertigen Bogen vom Bd. 12 einsehen dürfen. — Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß. Gesammelt von F. KLEIN und M. BRENDL. Heft 1—6. 1911—18. Teubner. Heft 7: M. BRENDL: Über die astronomischen Arbeiten von GAUSS. 1. Abschnitt: Theoretische Astronomie. 1919. Heft 8:

¹⁾ KLEIN S. 235. ²⁾ CL. SCHÄFER.

A. FRAENKEL: Zahlbegriff und Algebra bei Gauß; mit einem Anhang von A. OSTROWSKI: Zum 1. und 4. Gaußschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. 1920. — KLEIN-SCHIMMACK: Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen. Teubner 1907. — FELIX KLEIN, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I. Für den Druck bearbeitet von R. COURANT und O. NEUGEBAUER. Springer 1926. (KLEIN). — CANTOR: Geschichte der Mathematik. Teubner, 4 Bde. — GERHARDT: Geschichte der Mathematik in Deutschland. S. 208 bis 246. — TROPFKE: Geschichte der Elementar-Mathematik. 7 Bde. Berlin 1921—1924. — HELLER: Geschichte der Physik. 2 Bde. Enke 1884. — HOPPE: Geschichte der Mathematik und Astronomie im Altertum. — HOPPE: Geschichte der Physik. Vieweg 1926. — Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. — CL. SCHÄFER: Gauß' magnetische Untersuchungen Druckfertiges Manuskript. Herr Prof. SCHÄFER war so gütig, mich in diese bislang noch nicht veröffentlichte Arbeit Einsicht nehmen zu lassen. — H. K. DE VRIES: Die vierte Dimension. Deutsch von R. STRUCK. Sammlung: Wissenschaft und Hypothese, Bd. XXIX. Teubner 1926. — Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen; herausgegeben im Auftrage der Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. Leipzig, Teubner. 7 Bde. — IMUK-Abhandlungen. Lorey III, 2. Heft 9. — Allgemeine deutsche Biographie, Artikel Gauß, von CANTOR. — FRIEDRICH ALY: Geschichte des preuß. höh. Schulwesens. Elbert-Marburg 1911. — PAULSEN: Geschichte des gelehrten Unt., Leipzig 1896/97. — W. SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN: Gauß zum Gedächtnis. Leipzig Hirzel 1856 (SARTORIUS). — VOSS: Carl Friedrich Gauß. Darmstadt, Bergstraßeer 1877. — STERN: Denkrede auf Carl Friedrich Gauß. Göttingen. Kaestner 1877. — SCHERING: Carl Friedrich Gauß. Göttingen. Dietrich 1877. — MATHÉ: Carl Friedrich Gauß. Leipzig. Weicher 1906. — L. HÄNSELMANN: Carl Friedrich Gauß. 12 Kapitel aus seinem Leben. Leipzig 1878. — Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. PETERS. Bd. 1—6. Altona 1860—1865. — Sammlung von Briefen, gewechselt zwischen Johann Friedrich Pfaff und Herzog Carl von Württemberg, F. Bouterwerk, A. v. Humboldt, A. G. Kästner und anderen; herausgegeben von CARL PFAFF. Leipzig 1853. — Briefe zwischen A. v. Humboldt und Gauß, herausgegeben von K. BRUHNS. Engelmann 1877. — Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel; herausgegeben auf Veranlassung der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften. Leipzig 1880. — F. SCHMIDT und P. STÄCKEL: Briefwechsel zwischen Gauß und W. Bolyai. Leipzig 1899. — Briefwechsel zwischen Gauß und Olbers, erschienen als 2. Band von C. SCHILLING: W. OLBERS, sein Leben und seine Werke. Berlin 1900.

Karl Metzner.

Neu erschienene Bücher und Schriften.

M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*. 2. Auflage. Mit einem Anhang: Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung von M. DEHN (Bd. XXIII der „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen“). Berlin 1926, Julius Springer. X und 275 Seiten. Preis RM. 16.50; geb. RM. 18.—.

Die 1. Auflage der „Vorlesungen über neuere Geometrie“ von M. PASCH, die 1882 erschienen ist, war vor allem deswegen bedeutungsvoll, weil hier zum ersten Male eine genaue geometrische Formulierung der „Zwischenaxiome“ aufgestellt und damit die axiomatische Grundlage der projektiven Geometrie wesentlich gefördert wurde. Eine Vereinfachung der Betrachtungen zur rein geometrischen Begründung der Einführung uneigentlicher Punkte, Geraden und Ebenen, die in der ersten Auflage angestellt sind, hat PASCH in Zusätzen zur „zweiten Ausgabe“ seines Buches (1912) gegeben. In der jetzt vorliegenden 2. Auflage sind der ursprüngliche Text und die Zusätze zu einem einheitlichen Ganzen verschmolzen. Weitere sachliche Änderungen hat der Verfasser nur in geringem Umfange vorgenommen. So ist uns also in seinem wesentlichsten Aufbau das alte Buch erhalten geblieben, das für die Begründung der neueren Geometrie von besonderer Bedeutung ist. Wir

begrüßen dies deshalb besonders, weil auf diese Weise die Möglichkeit geboten wird, durch Vergleich moderner Arbeiten auf dem Gebiete der neueren Geometrie mit diesem Buch ein klares Bild über die Entwicklung dieser Disziplin wenigstens seit einem halben Jahrhundert zu gewinnen.

Über den Inhalt sei kurz das folgende angegeben: Das Buch beginnt mit einer Zusammenstellung der erforderlichen Grundbegriffe und Grundsätze. Die Perspektivität, Kollineation und Reziprozität werden behandelt. Zum Schluß werden die Koordinaten und die Koordinatenrechnung für Punkt und Ebene eingeführt. Nicht besprochen werden imaginäre Elemente und krumme Gebilde.

In einem Anhang zu diesen „Vorlesungen“ gibt M. DEHN eine „Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung“. Diese Ausführungen sind keineswegs nur als historische Darstellung zu werten; sie bieten vielmehr gleichzeitig eine wertvolle Zusammenstellung und Wertung der grundlegenden Probleme der Geometrie und der sie betreffenden Literatur.

W. Kramcr.

F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Teil I. Bearbeitet von R. COURANT und O. NEUGEBAUER. (Band XXIV der „Grundlehren

der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen“.) Berlin 1926, Julius Springer. XIII und 385 Seiten. Preis RM. 21.—; geb. RM. 22.50. —

Vorträge, die KLEIN seit den ersten Kriegsjahren bis zum Jahre 1919 vor einem kleinen Kreise in seiner Wohnung gehalten hat, sollten ursprünglich die Grundlage für eine Veröffentlichung größeren Umfanges über die Entwicklung der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert bilden. Hierzu ist es infolge des Ablebens KLEINS nicht mehr gekommen. Das bereits vorhandene Material ist in den vorliegenden „Vorlesungen“ zusammengestellt. Die „Vorlesungen“ stellen infolgedessen eine Reihe von Skizzen dar, die mehr oder weniger der letzten Überarbeitung entbehren. Aber gerade deswegen, weil der Darstellung die letzte Retusche fehlt, wirkt sie um so unmittelbarer und wird besonders dadurch außerordentlich lebendig, daß viele persönliche Notizen darin eingeflochten sind, die zeigen, wie vielfach Menschliches allzu Menschliches dem Fortgang der Wissenschaft entgegensteht.

Die „Vorlesungen“ bilden ein Beispiel für die glänzende Darstellungsgabe KLEINS und für seine Kunst, Gedankengänge anderer dem Leser nahezubringen und vereinzelte Untersuchungen in große Zusammenhänge einzuordnen. Dem durch das Ganze sich hindurchziehenden Leitgedanken, daß es eine Entwicklung der mathematischen Ideen an und für sich gibt, die durch eine Genie wie GAUSS vielleicht in besonderem Maße schnell gefördert wird, die aber auch ohne das Eingreifen eines solchen Genies sicher, wenn auch langsamer stattgefunden hätte, mag man zustimmen oder nicht: Jedenfalls gewinnt die Darstellung dadurch ungemein an Geschlossenheit. Das Buch stellt eigentlich mehr eine Geschichte der mathematischen Ideen als eine Geschichte der Mathematiker dar.

Das Buch beginnt mit einer Würdigung der Leistungen von GAUSS, der als Vollender der klassischen Periode und Begründer der modernen Mathematik des 19. Jahrhunderts dargestellt wird. Es folgt ein Kapitel über die Mathematiker der Ecole Polytechnique, das als ein besonders gelungenes Beispiel KLEINScher Darstellungskunst bezeichnet werden kann. Danach wendet sich KLEIN dem Mathematikerkreis des CRELLESchen Journals zu und bespricht weiter die Entwicklung der projektiven Geometrie, der Mechanik und der mathematischen Physik in Deutschland und England. Hierauf folgt eine vergleichende Besprechung der Leistungen von RIEMANN und WEIERSTRASS. Im Schlußkapitel verfolgt KLEIN die Entwicklung der Gruppentheorie und nimmt dabei Gelegenheit, seine eigenen Arbeiten einzuordnen und zu analysieren.

Niemand wird sich dem ungemeinen Zauber dieses Buches entziehen können, dessen Verfasser ein Menschenleben hindurch den mathematischen Betrieb in Deutschland organisiert hat und dessen Stellung und wissenschaftliche Tätigkeit es ihm ermöglichte, weitgehende persönliche wissenschaftliche Beziehungen anzuknüpfen und

zu pflegen. Das Buch bildet ein teures Vermächtnis des Dahingeschiedenen für den großen Kreis seiner Verehrer.

W. Kramer.

Die Vektoranalysis und ihre Anwendungen in der theoretischen Physik. Von W. v. IGNATOWSKY, Prof. a. d. Univ. Leningrad. (Band VI der Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, herausgeg. von E. TREFFTZ.) Teil I: Vektoranalysis. Teil II: Anwendungen. 3., umgeänderte Auflage. Leipzig-Berlin 1926, B. G. Teubner. X + 110 bzw. IV + 123 S. Jeder Teil kart. RM 5.60.

Im ersten Teil werden die Vektoren und das Rechnen mit ihnen, die Sätze von STOKES, GAUSS und GREEN, die geometrische und die analytische Darstellung (krummlinige Koordinaten), schließlich lineare Vektorfunktionen, Affinoren und Tensoren behandelt: für den geringen Umfang des Büchleins ein äußerst reichhaltiger Inhalt. Bei den Beweisen vektoranalytischer Transformationen wird der Gebrauch von Koordinatensystemen gänzlich vermieden. Durch Benutzung des Operators ∇ (Nabla) werden die Operationen grad, div, rot aus einheitlicher Wurzel erhalten, wie denn überhaupt alles aus einem Gusse ersteht. Eine Formeltafel ist angefügt. Das knapp und klar geschriebene Büchlein kann allen denen, die sich in die Vektorrechnung einführen lassen wollen, warm empfohlen werden; für die allermeisten physikalischen Zwecke dürfte auch das in dem Buch Gebotene ausreichen. (Eine Zusammenstellung weiter führender und anderer Literatur ist beigegeben.) Im zweiten Teil werden verschiedene Gebiete der Physik unter Zugrundelegung der Vektorrechnung behandelt und zwar aus der Mechanik diskrete Massenpunkte, starre, elastische und flüssige Körper; aus der Elektrizitätslehre Elektrostatik, Maxwell-Hertzsche Elektrodynamik für ruhende und für bewegte Körper, Lorentzsche Elektrodynamik und Kristalloptik. E. Lamla.

Die ebene Vektorrechnung und ihre Anwendungen in der Wechselstromtechnik. Teil I: Grundlagen. Von Dr. Ing. HEINRICH KAFKA. (Band 22 der Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, herausgeg. von E. TREFFTZ.) Leipzig-Berlin 1926, B. G. Teubner. VIII und 132 S., 62 Figuren. Kart. RM 7.60.

Das Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verf. an den Technischen Hochschulen in Brünn und in Charlottenburg gehalten hat. Es behandelt in den ersten Kapiteln die ebene Vektorrechnung und die Oszillatoren und Zeitvektoren, in den letzten Kapiteln als Anwendungen: Selbstinduktion und Kapazität im Wechselstromkreis, Parallelschaltung von Wechselstromzweigen, Strom- und Leistungskomponenten. Die Darstellung beschränkt sich stets auf stationäre Vorgänge mit sinusförmig veränderlichen Größen. Das Buch erhält seine Eigennote durch die besondere Behandlung der ebenen Vektoren. Daß die Kenntnis von diesen noch immer nicht die

genügend große Verbreitung in den Kreisen der Technik gefunden hat, wird im Vorwort z. T. dem Umstand zugeschrieben, daß diese Rechnungsart „gewisse Auffassungen aus der gewöhnlichen Rechnung mit komplexen Zahlen übernommen hat, durch die sie einen imaginären Anstrich erhielt“, und daß sie in den Büchern zu abstrakt und zu kurz behandelt wird. So haben wir hier die interessante Tatsache, daß Verf. sämtliche Beziehungen, die bei der geometrischen Darstellung der Rechnungen mit komplexen Größen auftreten, soweit sie in Betracht kommen, behandelt, und zwar ausführlich behandelt, ohne die komplexen Zahlen selbst heranzuziehen. Dabei müssen allerdings neue Symbole eingeführt werden, z. B. das „Rundpfeilsymbol“ \vec{a} , (das dem Wert $\cos a + i \sin a$ entspricht). Auch ergeben sich verschiedene Formeln m. E. nicht so aus einheitlichem Guß wie sonst. Immerhin handelt es sich zweifellos um einen interessanten Versuch, und dem Verf. stehen die Erfahrungen an den T. H. zur Seite.

E. Lamla.

Die Prüfungen an den Technischen Hochschulen in Preußen. Herausgegeben und erläutert von OTTO BENECKE. (Heft 44 der Weidmannschen Taschenausgaben von Verfügungen der Preußischen Unterrichtsverwaltung, herausgegeben von GÜLDNER und LANDÉ.) Berlin 1926, Weidmannsche Buchhandlung. 92 Seiten. Preis brosch. RM 1.50.

In einer kurzen Einleitung gibt Verf. eine gedrängte Übersicht über die geschichtliche Entwicklung der Preußischen Technischen Hoch-

schulen, von der Gründung der Bauakademie in Berlin (1799) bis in die neueste Zeit (1871 Diplomprüfung, 1899 Promotionsrecht, 1922 Errichtung von Fakultäten). Der Hauptteil des Büchleins enthält: die Diplomprüfungsordnung (10. 6. 24), die Promotionsordnung (19. 6. 00) und die Verordnung betr. Zulassung außergewöhnlich befähigter Fachschulabsolventen als Hörer und Studierende der Technischen Hochschulen (7. 7. 22). Wie bei allen Bändchen der Weidmannschen Sammlung sind die einzelnen Bestimmungen durch zahlreiche Anmerkungen und Verweisungen erläutert; ein Verzeichnis der angezogenen Erlasse und ein ausführliches Sachverzeichnis erhöhen ebenfalls den Wert des Büchleins.

E. Lamla.

Schröders allgemeiner deutscher Universitäts- und Hochschulkalender. 31. Ausgabe. Sommerhalbjahr 1926. Kirchhain NL, Brückerverlag Kurt Schmersow. 442 Seiten, RM 4.—.

Der Kalender erscheint nach einer mehrjährigen Unterbrechung von neuem. Er enthält kurze Angaben über jede Universität, ihre Einrichtungen, Immatrikulationsbedingungen und zählt die Dozenten und Institute auf. In derselben Weise werden die technischen, tierärztlichen, landwirtschaftlichen, forstlichen, Bergbau- und Handelshochschulen behandelt. Der zweite Teil, S. 311 bis 417 gibt über die studentischen Verbindungen Auskunft und zählt sie nach Hochschulen und nach Verbänden auf. Der dritte Teil behandelt Sport und Leibesübungen und die Einrichtungen dafür an deutschen Hochschulen.

W. Vn.

Korrespondenz.

Ferienkurse in Jena finden in diesem Jahre vom 3. bis 16. August in der Universität statt.

Von den Veranstaltungen in der naturwissenschaftlichen Abteilung sind zu nennen: Naturphilosophie und idealistische Weltanschauung (Prof. Dr. DETMER), Biologie im botanischen Schulunterricht (Prof. Dr. DETMER), Anleitung zu botanisch-mikroskopischen Untersuchungen für Anfänger und für Geübtere (Prof. Dr. HERZOG und J. LANGENDORFF), Zoologie, Entwicklungs- und Vererbungslehre (Prof. Dr. FRANZ), Zoologische Übungen (Prof. Dr. FRANZ), Chemie (Dr. Ing. BRINTZINGER), Bau und Tätigkeit des Gehirns (Prof. Dr. NOLL), Physiologie des Stoffwechsels (Prof. Dr. SCHULZ), Geologie von Deutschland (Prof. Dr. v. SEIDLITZ), Übungen zur historischen Geologie (Prof. Dr. v. SEIDLITZ), Landschaftsbilder der Heimat und Fremde (Geheimrat Prof. Dr. WALTHER, Halle), Geologische Untersuchungen (Dr. DEUBEL), Aufbau und Tiefenkräfte des Erdkörpers (Prof. Dr. v. SIEBERG), Die wichtigsten Gesteine und ihre Einteilung (Dr. DEUBEL). Daneben stehen Abendvorträge: Der tropische Urwald (Prof. Dr. HERZOG), Entstehen und Vergehen der Gebirge (Prof. Dr. v. SEIDLITZ) usw. Gemeinsamer Besuch des Planetariums.

Ausführliche Programme versendet das Sekretariat, Frh. Cl. Blomeyer, Jena, Carl Zeißplatz 3.

Herbstferienlehrgang 1927 der Staatlichen Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht in Berlin vom 27. September bis 8. Oktober.

I. Vorlesungen.

1. Prof. Dr. SCHEFFERS: Aus der angewandten Mathematik. 4 Std. — 2. Prof. Dr. KOPFF: Einige neuere Probleme der Astronomie. 4 Std. — 3. Prof. Dr. v. BAEYER: Neuere Ergebnisse aus dem Gebiete der Radioaktivität. 4 Std. — 4. Direktor Dr. WEGNER: Eine Reise in den Weltraum. Das Planetarium der Stadt Berlin (mit Lichtbildern). 2 Std. — 5. Studiendirektor Dr. KRAMER: Die darstellende Geometrie in den Lehrbüchern für höhere Schulen. 2 Std.

II. Übungen.

1. Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. HAUSSMANN: Einführung in das Feldmessen. 16 Std. — 2. Studiendirektor Dr. KRAMER: Übungen zur Einführung in die darstellende Geometrie. 8 Std. — 3. Studiendirektor Dr. KRAMER: Zeichnerische Lösung von Aufgaben aus der mathematischen Erd- und Himmelskunde. 8 Std. — 4. Studiendirektor Dr. KRAMER: Übungen zur Schattenlehre und Perspektive. 8 Std. — 5. Studierat WEILL: Praktische Übungen zur Schulastronomie an Instrumenten. 16 Std. — 6. Dr. KOHL

Beobachtungen mit dem Universalinstrument. 3 Std. — 7. Dr. KOHL: Beobachtungen mit dem Durchgangsinstrument. 6 Std. — 8. Prof. Dr. HAUSER: Praktische Übungen an optischen Instrumenten. Zwei Gruppen, je 6 Std. — 9. Prof. Dr. F. F. MARTENS: Übungsversuche an elektrischen Maschinen und Transformatoren. 16 Std. — 10. Prof. Dr. KIEBITZ: Schauversuche zur Hochfrequenztechnik. 10 Std. — 11. Prof. Dr. JOHNSEN: Physikalische Methoden der Mineralbestimmung. 16 Std. — 12. Oberstudienrat Dr. VOLKMANN: Übungen in ausgewählten Schulversuchen. 16 Std. — 13. Geh. Reg.-Rat Prof. HAHN: Übungen in ausgewählten Schülerversuchen aus allen Gebieten der Physik. 16 Std. — 14. Studienrat Dr. ZORN: Übungen in der mechanischen Werkstatt. 16 Std. — 15. Prof. Dr. KÖNIG: Übungen über die wichtigsten Tatsachen der Klima- und Witterungskunde nebst ihrer Bedeutung im Unterricht. 8 Std. — 16. Dipl.-Ing. BLECH: Die Luftfahrt im Unterricht; das Flugzeug im Dienste von Verkehr, Wirtschaft und Forschung. 16 Std.

III. Besichtigungen.

1. Besichtigung des Planetariums der Stadt Berlin. — 2. Besichtigung der Universitätssternwarte in Neubabelsberg. — 3. Besichtigung der optischen Werke der Emil Busch-A. G. in Rathenow.

Bemerkung zu dem Aufsatz: „Die ionisierende Wirkung von Licht bei der Glimmlampe“ von Dr. P. WERNER in Iglau. Diese Zeitschr. **39**, 284; 1926.

Bei dem beschriebenen Versuch handelt es sich nicht um eine Ionisierung durch ultraviolettes Licht, sondern um Ionisierung durch Freimachen von Photoelektronen aus der Kathode. Dieser Effekt, auf den A. LAMBERTZ¹⁾ zuerst hinweist, findet durch diesen und H. GREINACHER²⁾ eine eingehende Würdigung. H. GREINACHER weist u. a. auf Versuche mit Wechselspannung hin. Verschwindet die durch die Entladung bewirkte Ionisierung zwischen zwei aufeinander folgenden Scheitelspannungen vollkommen, so brennt die Lampe nur während der Belichtung. Sie erlischt sofort bei Wiederverdunkelung. Bleibt aber zwischen zwei Scheitelspannungen eine hinreichende Restionisierung, so brennt die Lampe im Dunkeln weiter, d. h. die Restionisierung spielt die Rolle der Photoionisierung. Begünstigt wird dieser Zustand durch eine möglichst an die normale Zündspannung heranreichende Scheitelspannung und durch die Wahl von hochfrequentem Wechselstrom. Zur Demonstration des Photoeffektes eignen sich am besten die Lampentypen, bei denen die angelegte Spannung nicht zu nahe an die Zündspannung gerückt werden muß, und bei denen die Restionisierung so schnell verschwindet, daß bei den gebräuchlichen Wechselstromfrequenzen ($n=50$) die Glimmlampe im Dunkeln wieder auslöscht. GREINACHER weist noch hin auf Versuche über Zündung der Lampe durch Influenz (Näherung eines geriebenen Glasstabes oder Entfernung eines geriebenen Hartgummistabes) und

zeigt damit, daß der Ladungszustand an der Kathode für die Zündung von Bedeutung ist.

J. Klaphecke, Münster.

C. H. Müller †. Am 17. März starb in Frankfurt a. M. Prof. Dr. CARL HEINRICH MÜLLER. Während seiner über 30jährigen Tätigkeit als Lehrer am dortigen Kaiser-Friedrichs-Gymnasium hat er im wissenschaftlichen Leben der Stadt, besonders in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern, eine bedeutende Rolle gespielt. Er hat in der math.-naturwiss. Sektion des „Freien Deutschen Hochstifts“ an führender Stelle mitgearbeitet; seiner Initiative und Energie ist es hauptsächlich zu danken, daß die mathematische Abteilung der Frankfurter Stadtbibliothek, die 75 Jahre lang völlig vernachlässigt worden war, wieder begründet und zu einer der reichhaltigsten Deutschlands ausgebaut wurde. Die Gründung der Frankfurter Ortsgruppe des „Ver. zur Förderung des math.-naturw. Unterrichtes“ ist sein Werk.

Auf unterrichtlichem Gebiete eilte er schon in den 90er Jahren in vieler Hinsicht seiner Zeit voraus. Er trat für stereometrische Konstruktionen nach der 2-Tafel-Methode im Klassenunterricht ein (sein „Leitfaden der Projektionslehre“ ist weiteren Kreisen rühmlich bekannt), die vierstellige Logarithmentafel hat er schon in der ersten Hälfte der 90er Jahre eingeführt, er hat seine Schüler im Klassenunterricht im Gebrauch des log. Rechenschiebers unterwiesen, und endlich hat er auf der höheren Schule Übungen in praktischer Geometrie, später auch in Physik und Chemie, getrieben. Beiträge von ihm enthält unsere Zeitschrift in **3**, 216; 1890. — **5**, 109; 1892. — **11**, 254; 1898. — **14**, 319; 1901. — **15**, 316; 1902.

Wer den prächtigen, aufrechten und geistreichen Menschen mit seinen weit über sein engeres Fachgebiet hinausgehenden vielseitigen Interessen gekannt hat, wird mit uns herzlich bedauern, daß er von seinen Freunden so früh hinweggenommen wurde, und sein Andenken werden wir stets in Ehren halten. *H. Kolb.*

60 Jahre Technikum Mittweida. Anfang Juni feierte das Technikum Mittweida sein 60jähriges Bestehen. Mit den festlichen Veranstaltungen, die aus diesem Anlasse stattfanden, war die Weihe eines Ehrenmales für die im Weltkriege Gefallenen verbunden. Möge der Anstalt die bisherige günstige Entwicklung auch weiterhin beschieden sein.

Von dem „Handbuch der Physik“, das H. GEIGER und K. SCHEEL herausgeben, sind 12 Bände erschienen. Das auf 24 Bände veranschlagte Gesamtwerk soll im laufenden Jahre vollendet werden. Der durch die Staatliche Hauptstelle für den naturwissenschaftlichen Unterricht in Berlin angeregte Sammelbezug gibt die Möglichkeit, das vollständige Handbuch zu einem um 30 v. H. ermäßigten Preise zu beziehen. Für Einzelbände beträgt der Preisnachlaß 20 v. H. Alle Bestellungen, die an die Hauptstelle gelangen, werden gesammelt dem Verlage überwiesen, und die Lieferung erfolgt zum Vorzugspreise.

¹⁾ Phys. Zeitschr. XXVI, 1925; S. 254.

²⁾ Phys. Zeitschr. XXVI, 1925; S. 376.

Himmelserscheinungen im September und Oktober 1927.

W. Z.: Welt-Zeit = Bürgerlich. Zeit Greenwich. 0h W. Z. = Mitternacht bürgerl. Zeit Greenwich.
 Stundenzählung von 0h bis 24h. M. E. Z. = Bürgerl. Zeit Stargard = W. Z. + 1h.

W. Z.	September						Oktober						Nov. 2	
	3	8	13	18	23	28	3	8	13	18	23	28		
♃	AR	10h 48m	11.23	11.55	12.25	12.54	13.21	13.48	14.13	14.37	14.59	15.17	15.28	15.28
	D	+ 9,5°	+ 5,6	+ 1,6	- 2,2	- 5,9	- 9,4	- 12,6	- 15,5	- 18,0	- 20,0	- 21,4	- 22,0	- 21,3
♄	AR	11h 16m	11.5	10.54	10.44	10.37	10.33	10.33	10.37	10.44	10.54	11.6	11.20	11.35
	D	- 4,2°	- 3,5	- 2,3	- 0,9	+ 0,5	+ 1,9	+ 2,9	+ 3,6	+ 4,0	+ 4,0	+ 3,7	+ 3,1	+ 2,2
♅	AR	10h 44m	11.2	11.20	11.38	11.56	12.14	12.32	12.50	13.9	13.27	13.46	14.5	14.25
	D	+ 8,0°	+ 6,2	+ 4,3	+ 2,4	+ 0,4	- 1,5	- 3,5	- 5,4	- 7,3	- 9,2	- 11,0	- 12,7	- 14,4
♆	AR	11h 43m	11.55	12.7	12.19	12.31	12.43	12.55	13.7	13.19	13.32	13.44	13.57	14.10
	D	+ 2,7°	+ 1,4	+ 0,1	- 1,3	- 2,6	- 3,9	- 5,2	- 6,5	- 7,8	- 9,1	- 10,4	- 11,6	- 12,8
♁	AR	0h 6m		0.2		23.57		23.52		23.48		23.44		23.41
	D	- 1,1°		- 1,5		- 2,1		- 2,6		- 3,1		- 3,5		- 3,7
♂	AR	16h 0m				16.5				16.11				16.20
	D	- 18,8°				- 19,1				- 19,5				- 19,8

Δ = Sternzeit für 0h Welt-Zeit; für östl. bzw. westl. Länge λ^0 v. Greenwich: $\mp \lambda \cdot 0.657^s$.
 Zeitgl. = Mittl. Z. - Wahre Z.

Zeitgl.	22h	23.	23.	23.	0.	0.	0.	1.	1.	1.	2.	2.	2.
		44m 32s	4.14	23.57	43.40	3.23	23.5	42.48	2.31	22.14	41.56	1.39	21.22

Breite v. Berlin (52,5°). Länge v. Stargard. Aufgang u. Untergang d. ob. ☉-Randes. M. E. Z.

♁ Aufg.	5h 13m	5.21	5.29	5.38	5.46	5.55	6.3	6.12	6.21	6.30	6.39	6.48	6.57
♁ Unterg.	18h 45m	18.33	18.22	18.10	17.58	17.46	17.34	17.23	17.11	17.0	16.50	16.39	16.30

Breite v. Berlin (52,5°). Länge v. Stargard. Aufgang u. Untergang d. ob. ☾-Randes. M. E. Z.

♁ Aufg.	12h 42m	17.36	19.36	22.5	2.27	8.12	13.52	16.59	18.44	23.5	3.47	9.31	14.9
♁ Unterg.	21h 34m	0.34	7.41	14.36	17.46	19.0	21.19	2.9	9.37	15.3	16.40	18.5	22.22

Mondphasen W. Z.	Neumond		Erstes Viertel		Vollmond		Letztes Viertel	
		Sept. 25.	22h 10,8m	Sept. 4.	10h 44,5m	Sept. 11.	12h 53,9m	Sept. 18.
	Sept. 25.	15h 37,4m	Nov. 2.	15h 15,8m	Sept. 11.	21h 14,7m	Sept. 17.	14h 31,6m

Verfinsterungen der Jupitertrabanten I, II, III, IV. E: Eintritt, A: Austritt. W. Z.

I		II		III		IV	
Sept. 2.	20h 13,5m E	Okt. 3.	0h 37,1m A	Sept. 2.	2h 30,9m E	Sept. 16.	18h 28,3m E
" 8.	3h 39,7m E	" 4.	19h 5,8m A	" 12.	18h 23,9m E	" 24.	1h 23,6m A
" 9.	22h 8,3m E	" 10.	2h 32,2m A	" 19.	20h 59,4m E	Okt. 21.	17h 28,0m A
" 17.	0h 3,3m E	" 11.	21h 1,0m A	" 27.	2h 12,3m A	" 29.	18h 41,9m E
" 13.	18h 32,1m E	" 18.	22h 56,2m A	Okt. 7.	18h 6,0m A	" 29.	21h 29,6m A
" 25.	22h 42,0m A	" 20.	17h 25,1m A	" 14.	20h 42,2m A		
		" 26.	0h 51,6m A	" 21.	23h 18,6m A		
		" 27.	19h 20,5m A	" 29.	1h 55,3m A		

Tägliches Erscheinen und Verschwinden der Planeten. Breite von Berlin. Länge von Stargard.

M. E. Z.	♃	♄	♅	♁	♂
Sept. 3.	—	—	—	Da 19,8h Dm 4,2h	Da 19,9h U 21,5h
" 13.	—	—	—	Da 19,4h Dm 4,5h	Da 19,5h U 20,9h
" 23.	—	A 4,1h Dm 5,4h	—	Da 19,0h Dm 4,8h	Da 19,1h U 20,2h
Okt. 3.	—	A 3,5h Dm 5,6h	—	Da 18,6h U 5,0h	Da 18,7h U 19,6h
" 13.	—	A 2,9h Dm 5,9h	—	Da 18,2h U 4,2h	Da 18,3h U 19,0h
" 23.	—	A 2,7h Dm 6,2h	—	Da 17,8h U 3,5h	Da 17,9h U 18,4h
Nov. 2.	—	A 2,5h Dm 6,4h	—	Da 17,5h U 2,7h	Da 17,5h U 17,8h

A = Aufgang; U = Untergang; Da und Dm = Erscheinen bzw. Verschwinden in der Dämmerung.

W. Z. Jupiter in Opposition Sept. 22. 12h. Venus im größten Glanz Okt. 17. 20h. Merkur in gr. östl. Elongation 24° 41' Okt. 18. 16h. — Herbstäquinoktium: Sept. 24. 1h 27m. A. Weill.

Für die Redaktion verantwortlich: Ministerialrat Professor Dr. K. Metzner, Berlin W. 8.

Nachdruck nur mit Quellenangabe und mit Genehmigung der Verlagsbuchhandlung gestattet.

Verlag von Julius Springer in Berlin W. — Druck der Univ.-Druckerei H. Stürtz A.G., Würzburg.