

# ZEITSCHRIFT FÜR DEN PHYSIKALISCHEN UND CHEMISCHEN UNTERRICHT

53. JAHRGANG

1940

HEFT 4

## Statistische Thermodynamik I.

Von F. Möglich in Berlin.

### 1. Konstanten.

Die allgemeine Gaskonstante  $R$  tritt in der Zustandsgleichung der idealen Gase auf:  $p \cdot V_M = R \cdot T$ . Hier bedeutet  $p$  den Druck,  $V_M$  das Molvolumen eines Gases (d. i. das Volumen von so viel Gramm der Substanz, wie das Molekulargewicht der Substanz angibt),  $T$  ist schließlich die vom absoluten Nullpunkt gerechnete Temperatur in Graden. Die Bestimmung der Gaskonstante kann an jeder gasförmigen Substanz prinzipiell durch gleichzeitige Messung von  $p$ ,  $V_M$  und  $T$  gewonnen werden, vorausgesetzt, daß die Substanz bei den betreffenden Werten dieser Größen in hinreichendem Maße als ideales Gas angesehen werden kann. Je nachdem, welche Maßsysteme benutzt werden, ergibt sich für  $R$ : absolutes Maßsystem (erg)  $8,314 \cdot 10^7$  dyn · cm<sup>3</sup>/°K; Wattsekunde (elektr. Maßsystem)  $8,314 \frac{Ws}{°K}$ ; cal (Kalor. Maßsystem)  $1,986 \frac{cal}{°K}$ ; mm Hg · cm<sup>3</sup>/°K 62357; kg/qm · Liter/°K 846.

Die kinetische Gastheorie lehrt, daß die verschiedenen Dichten der Gase unter gleichem äußeren Druck auf die Verschiedenheit gewisser molekularer Größen zurückgeführt werden können. Die Gewichte der Einzelmoleküle zweier verschiedener Gase verhalten sich direkt wie die Dichten der betreffenden Gase zueinander (gleichen äußeren Druck vorausgesetzt). Dies ist eine Folge der Erkenntnis, daß in gleichen Volumina bei gleichem Druck die gleiche Anzahl Moleküle vorhanden ist. Die Zahl der Moleküle im cm<sup>3</sup> bei 0° Celsius und Atmosphärendruck nennt man die AVOGADROSCHEN Zahl  $N$ . Ihr Wert ist  $N = 2,71 \cdot 10^{19}$ . Eine noch universellere Bedeutung aber hat die LOSCHMIDTSCHEN Zahl. Da nämlich die Dichten zweier Gase sich unter gleichen äußeren Bedingungen wie die Gewichte der Einzelmoleküle verhalten, so verhalten sie sich auch wie die Gewichte von je einem Mol der betreffenden Substanzen. Daraus folgt aber, daß unter gleichen äußeren Bedingungen die Molvolumina aller Gase übereinstimmen. Unter Atmosphärendruck und bei Null Grad Celsius hat das Molvolumen aller idealen Gase den Wert  $V_M^0 = 22412$  cm<sup>3</sup>. Die Zahl der Moleküle im Mol aber wird durch die LOSCHMIDTSCHEN Zahl  $L$  gegeben:  $L = 6,062 \cdot 10^{23}$ .

Während die Größe des Molvolumens als das Volumen einer definierten Gasmenge unmittelbar gemessen werden kann, macht die Bestimmung der LOSCHMIDTSCHEN Zahl größere Schwierigkeiten. Eine der genauesten Methoden ist die der Berechnung mit Hilfe der FARADAY-Konstante  $F = 96490$  Coulomb =  $2,895 \cdot 10^{14}$  el. stat. c. g. s.  $F$  ist die Elektrizitätsmenge, die zum Abscheiden eines Grammäquivalentes eines Stoffes in der Elektrolyse nötig ist. Aus dieser Zahl ergibt sich  $L$  als der Quotient aus  $F$  und  $e$ , wo  $e$  die elektrische Ladung eines gelösten Moleküls bedeutet. Da man  $e$  mit sehr großer Genauigkeit aus spektroskopischen und anderen Messungen kennt, kann man den hier angegebenen Wert von  $L$  daraus berechnen.

Die BOLTZMANNSCHE Konstante  $k$  (auch als Gaskonstante je Molekül bekannt) ist der Quotient aus der absoluten Gaskonstante und der LOSCHMIDTSCHEN Zahl. Für  $k$  ergibt sich entsprechend dem gebrauchten Maßsystem: absolutes Maßsystem  $1,371 \cdot 10^{-16}$ ; elektr. Maßsystem  $1,371 \cdot 10^{-23}$ ; kalor. Maßsystem  $0,327 \cdot 10^{-23}$ .

## 2. Die statistische Bedeutung der Entropie, das Abzählungsverfahren der klassischen Statistik und das MAXWELL-BOLTZMANNsche Verteilungsgesetz.

Der Zusammenhang zwischen der Entropie und der Wahrscheinlichkeit eines thermodynamischen Zustandes ist für die klassische Statistik wie auch für die beiden Formen der modernen Statistik der gleiche, wie er von L. BOLTZMANN eingeführt wurde:  $S = k \cdot \log W$ . Hier ist  $S$  die Entropie,  $W$  die Wahrscheinlichkeit und  $k$  die BOLTZMANNsche Konstante, deren Wert wir im vorigen Absatz angegeben haben. Die verschiedenen Statistiken unterscheiden sich nur durch die Definition der Wahrscheinlichkeit eines thermodynamischen Zustandes voneinander. Ja, sogar der Satz, daß die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes gleich der Zahl seiner Erzeugungsmöglichkeiten ist, gilt allgemein für alle Statistiken. Sie unterscheiden sich lediglich in der Auffassung, was als eine einzelne Erzeugungsmöglichkeit zu bewerten ist.

In der klassischen Statistik kann ein bestimmter thermodynamischer Zustand dadurch erzeugt werden, daß man von jedem einzelnen Molekül angibt, welche Geschwindigkeit und welche Lage es zu einem bestimmten Zeitpunkte hat. Eine zweite Erzeugungsmöglichkeit erhält man z. B. dadurch, daß man die Funktionen zweier Moleküle miteinander vertauscht, denn durch diesen Prozeß wird weder die Zahl, noch die Gesamtenergie des Zustandes verändert.

Um aber zu einer praktischen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Zustandes zu gelangen, verfährt man in etwas gröberer Form, wenn auch prinzipiell ebenso, wie hier beschrieben. Man wird sich nicht für die genaue Lage und die genaue Geschwindigkeit eines Moleküls interessieren, sondern nur angeben, in welchem Geschwindigkeitsgebiet und ebenso in was für einem Volumengebiet sich das einzelne Molekül befindet. Die Angaben, die gemacht werden müssen, sehen etwa folgendermaßen aus: Ein Molekül, das die Kennnummer  $n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$  usw.) hat, liegt in einem Raumgebiet, das gegeben ist durch die Bedingungen:

- die  $x$ -Koordinate hat einen Wert zwischen  $x_n$  und  $x_n + \Delta x$ ;
- die  $y$ -Koordinate hat einen Wert zwischen  $y_n$  und  $y_n + \Delta y$ ;
- die  $z$ -Koordinate hat einen Wert zwischen  $z_n$  und  $z_n + \Delta z$ .

Entsprechende Aussagen werden über die Geschwindigkeitskomponenten  $v_x, v_y, v_z$  gemacht:

- $v_x$  liegt zwischen  $v_{xn}$  und  $v_{xn} + \Delta v_x$ ;
- $v_y$  liegt zwischen  $v_{yn}$  und  $v_{yn} + \Delta v_y$ ;
- $v_z$  liegt zwischen  $v_{zn}$  und  $v_{zn} + \Delta v_z$ .

Faßt man  $x, y, z, v_x, v_y, v_z$  als die Komponenten eines sechsdimensionalen Raumes auf (des sogenannten Phasenraumes), so wird durch diese Begrenzungen in diesem Raum ein sechsdimensionales Parallelepiped mit dem Rauminhalt  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$  abgegrenzt, das wir Phasenzelle nennen wollen. In solche Phasenzellen gleicher Größe läßt sich der Phasenraum lückenlos zerlegen, derart, daß zwei Zellen niemals ineinander übergreifen. Eine solche Zerlegung in Zellen hat den Vorteil, daß wir jetzt den Phasenraum abzählen können, indem wir eine beliebige Reihenfolge der Zellen festlegen und jeder Zelle in dieser Reihenfolge eine Nummer geben. Die komplizierte Beschreibung der Lage und Geschwindigkeit eines Moleküls, die wir in den obenstehenden Bedingungen durchgeführt haben, können wir dann so formulieren, daß wir sagen: Das  $n$ -te Molekül befindet sich in der Phasenzelle mit der Nummer  $k$ .

Die Unterteilung des Phasenraumes in Phasenzellen wird in allen Statistiken im wesentlichen in gleicher Weise durchgeführt; nur ist in der klassischen Statistik die Größe dieser Phasenzellen klein, aber beliebig. In den modernen Statistiken haben diese Zellen dagegen alle die Größe  $h^3$ , wo  $h$  das PLANCKSche Wirkungsquantum bedeutet. Natürlich sind auch in der klassischen Statistik die Phasenzellen untereinander alle gleich.

Die verschiedenen Erzeugungsmöglichkeiten eines thermodynamischen Zustandes werden dadurch beschrieben, daß man angibt, welche Moleküle in der Zelle 1, welche in der Zelle 2, welche in der Zelle 3 usw. sich befinden. Eine derartige Erzeugungsmöglichkeit würde also so zu beschreiben sein: In Zelle 1 befindet sich das 3., 10. und 25. Molekül. In Zelle 2 befindet sich das 107., 208., 3467. und 9525. Molekül. In Zelle 3 befindet sich kein Molekül usw. Dann ist zu berechnen, wieviel derartige Erzeugungsmöglichkeiten, die alle gewissen äußeren Bedingungen<sup>1</sup> genügen müssen, vorhanden sind. Diese Zahl ist die thermodynamische Wahrscheinlichkeit.

Es ist offensichtlich, daß es für den thermodynamischen Zustand keine Rolle spielen kann, welche individuellen Moleküle sich in den einzelnen Phasenzellen befinden. Maßgebend für die Thermodynamik kann also nur die Besetzungszahl der Zellen sein. Daher müssen die Zahlen  $N_i$  (Zahl der Moleküle in der  $i$ -ten Zelle) die thermodynamischen Variablen des Zustandes sein. Die von uns beschriebene Erzeugungsmöglichkeit gehört also zu folgender Verteilung:  $N_1 = 3$ ,  $N_2 = 4$ ,  $N_3 = 0$  usw. Eine derartige Angabe der Besetzungszahlen nennt man eine makroskopische Verteilung. Im Gegensatz dazu bezeichnet man die Einzelangabe, in welchen Zellen sich bestimmte Moleküle befinden, als mikroskopische Verteilung. Es gibt offenbar viele mikroskopische Verteilungen zu einer makroskopischen. Die Zahl der mikroskopischen Verteilungen ist also die Zahl der Erzeugungsmöglichkeiten des betreffenden makroskopischen Zustandes und damit seine thermodynamische Wahrscheinlichkeit. (Man merke hier übrigens an: die Definition des mikroskopischen Zustandes enthält die Voraussetzung, daß man prinzipiell alle gleichartigen Moleküle individuell voneinander unterscheiden kann, wie etwa zwei verschiedene Bürger derselben Stadt!)

Die Frage nach der Zahl der Erzeugungsmöglichkeiten läuft also darauf hinaus zu entscheiden, auf wieviel verschiedene Weisen  $N$  gleichartige Gegenstände zu Gruppen von  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $N_4$ , ... dieser Gegenstände zusammengefaßt werden können. Die Antwort auf diese Frage erteilt die Kombinatorik. Die Zahl der verschiedenen Möglichkeiten und damit die thermodynamische Wahrscheinlichkeit ist:

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! N_4! \dots} \quad N_1 + N_2 + N_3 + \dots = N.$$

In der Gastheorie ist die Zahl der Individuen immer außerordentlich groß, im allgemeinen von der Größenordnung der LOSCHMIDTSchen Zahl. Daher werden auch die Zahlen  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ , ... sehr große Zahlen sein. In diesen Fällen können wir die thermodynamische Wahrscheinlichkeit durch einen einfacheren Näherungsausdruck unter Benutzung der sogenannten STIRLINGSchen Formel  $N_i! \approx \left(\frac{N_i}{e}\right)^{N_i}$  so darstellen:

$W = \frac{N^N}{N_1^{N_1} \cdot N_2^{N_2} \cdot N_3^{N_3} \cdot \dots}$ , und daraus folgt dann für die Entropie unter Benutzung der BOLTZMANNschen Beziehung der bekannte Ausdruck:

$$S = k(N \log N - \sum N_i \log N_i).$$

Wenn wir nun in einem Gase die immer wechselnden Verteilungen der Molekülnzahlen auf die Zellen zu beobachten vermöchten, so würden wir natürlich in der weitaus größten Zahl der Fälle diejenige Verteilungszahl  $N_1^0$ ,  $N_2^0$ ,  $N_3^0$  ... vorfinden, deren thermodynamische Wahrscheinlichkeit am größten ist. Die Hypothese der kinetischen Gastheorie lautet dementsprechend so, daß das Verhalten des wahrscheinlichsten Zustandes übereinstimmt mit dem Verhalten eines Gases, wie es durch die Gleichungen der klassischen Thermodynamik beschrieben wird. Doch haben auch die von der Wertefolge  $N_1^0$ ,  $N_2^0$ ,  $N_3^0$  ... abweichenden Wertefolgen  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  ... physikalisch ihren guten Sinn, denn sie stellen die als Schwankungserscheinungen gelegentlich beobachteten extrem seltenen Fälle der Statistik dar (EINSTEIN, v. SMOLUCHOWSKI).

<sup>1</sup> Z. B. daß die Gesamtzahl konstant sein und die Gesamtenergie einen bestimmten Wert haben soll.

Die Entropie ist nach BOLTZMANN eine Funktion von  $W$ , die mit wachsendem  $W$  größer wird und sich umgekehrt auch mit kleiner werdendem  $W$  verkleinert. Daraus folgt, daß das Maximum von  $W$  und das Maximum der Entropie zusammenfallen müssen. Anstatt also das Maximum von  $W$  aufzusuchen, können wir das gleiche mit der Entropie  $S$  tun. Aus der Mathematik wissen wir, daß eine Funktion dann ihr Maximum hat, wenn sie sich bei kleinen Veränderungen ihrer Argumente nicht ändert:

$$\delta S = -k(\sum \log N_i^0 \delta N_i + \sum \delta N_i) = 0.$$

Allerdings müssen wir bei einer Variation der Variablen  $N_i$  so verfahren, daß sich dabei die schon genannten äußeren Bedingungen nicht ändern. Diese äußeren Bedingungen können von mancherlei Art sein; die am häufigsten auftretenden haben wir bereits genannt: Konstanz der Teilchenzahl und Konstanz der Gesamtenergie. Aber schon im Falle der Behandlung des Gleichgewichtes von dissoziierenden Substanzen wird die erste dieser Bedingungen nicht erfüllt sein. Für das Nächstfolgende aber wollen wir beide Bedingungen annehmen, die sich dann folgendermaßen schreiben:

$$\delta E = \sum E_i \delta N_i = 0^1; \delta N = \sum \delta N_i = 0.$$

Diese Bedingungen besagen, daß die Variation der  $N_i$  nicht mehr so vorgenommen werden darf, daß die  $N_i$  bei der Variation völlig willkürlich geändert werden können, denn zwei der  $\delta N_i$  können aus allen anderen immer mit Hilfe der letzten Gleichungen ausgerechnet werden. Dies ist eine mathematische Komplizierung, der wir dadurch entgehen, daß wir zwei überzählige Größen einführen, auf die wir gewissermaßen die aus den letzten Gleichungen für die  $\delta N_i$  entspringenden Verpflichtungen abwälzen. Der Fehler, den wir begehen, indem wir alle  $\delta N_i$  als voneinander unabhängig ansehen, wird also durch geeignete Wahl der neu eingeführten Funktionen kompensiert.

Mathematisch besteht dieser Schritt darin, daß wir die letzten beiden Gleichungen mit je einer willkürlichen Größe  $\alpha$  und  $\beta$  multiplizieren und dann zu dem Ausdruck für  $\delta S$  hinzuaddieren. Man verfährt dann so, als ob nicht  $\delta S$ , sondern  $\delta S + \alpha \delta N + \beta \delta E$  verschwinden soll, wobei jetzt alle  $\delta N_i$  als unabhängig voneinander betrachtet werden können.

Das Verschwinden von  $\delta S + \alpha \delta N + \beta \delta E$  bedeutet:

$$-\sum (k \log N_i^0 - \alpha + k - \beta E_i) \delta N_i = 0.$$

Diese Größe aber kann nur dann verschwinden, wenn jeder Koeffizient von  $\delta N_i$  verschwindet. Wäre das nämlich nicht der Fall, so würde entgegen unserer Voraussetzung doch eine Relation zwischen den  $\delta N_i$  bestehen. Für die Größen  $N_i^0$  ergibt sich also:

$$N_i^0 = e^{\frac{\alpha}{k} - 1} \cdot e^{\frac{\beta}{k} E_i}.$$

Da die Gesamtsumme der  $N_i^0$  jedenfalls der Gesamtzahl der Moleküle  $N$  gleich sein soll, so muß unfehlbar  $e^{\frac{\alpha}{k} - 1}$  gleich  $N$  dividiert durch die sogenannte Zustandssumme

$Z = \sum_i e^{\frac{\beta}{k} E_i}$ ;  $e^{\frac{\alpha}{k} - 1} = \frac{N}{Z}$  sein. Die Funktion  $-\frac{\alpha}{k} + 1$  erweist sich damit im

wesentlichen als der Logarithmus der Zustandssumme  $Z$ :  $-\frac{\alpha}{k} + 1 = \log \frac{\sum_i e^{-\frac{1}{kT} E_i}}{N}$ .

Hier haben wir  $\beta = -\frac{1}{T}$  gesetzt, wo  $T$  eine zunächst, wie auch  $\beta$ , unbestimmte Funktion ist, deren Übereinstimmung mit der absoluten Temperatur wir sogleich nachweisen werden.

Setzen wir die gefundenen Werte für die  $N_i^0$  in den Ausdruck für die Entropie ein, so ergibt sich  $S = +\frac{E}{T} + kN \log Z$ , wo  $E = \sum_i N_i^0 E_i$  ist. Differenziert man

den für  $S$  erhaltenen Ausdruck nach der Gesamtenergie  $E$ , so ergibt sich  $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$ ,

<sup>1</sup>  $E_i$  ist die mittlere Energie eines einzelnen Moleküls in der Phasenzelle mit der Kennzahl  $i$ .

da  $Z$  zwar von den  $E_i$ , nicht aber von der Gesamtenergie  $E$  abhängt. Diese letztere Gleichung wird aber in der Thermodynamik als Folge des zweiten Hauptsatzes abgeleitet. Dort hat  $T$  die Bedeutung der absoluten Temperatur. Wir sind also in voller Übereinstimmung mit der Thermodynamik, wenn wir  $T$  im gleichen Sinne gebrauchen.

Die Quotienten  $\frac{N_i^0}{N}$  wollen wir durch neue Größen  $w_i$  ausdrücken, die folgendermaßen definiert sein sollen:

$$\frac{N_i^0}{N} = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \cdot w_i.$$

Hier ist das Produkt  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$  wie vorher das beliebige, aber über den ganzen Phasenraum konstante Volumen der Phasenzellen, das wir kurz mit  $X^1$  bezeichnen wollen. Dann lassen sich die  $w_i$  wie folgt darstellen:

$$w_i = \frac{1}{X \cdot Z} e^{-\frac{E_i}{kT}}.$$

Bei hinreichender Kleinheit der Phasenzellen können wir dann die Zustandssumme  $Z$  durch ein sechsfaches Integral ersetzen:

$$Z = \frac{1}{X} \cdot \iiint \iiint \iiint e^{-\frac{E(P)}{kT}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z.$$

Hier bedeutet  $E(P)$  den Wert der Energie eines einzelnen Atomes an der Stelle  $P = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)$  des Phasenraumes.

Besonders einfach wird die Auswertung des Integrales, wenn die Energie  $E$  der einzelnen Teilchen von den Raumkoordinaten  $x, y, z$  nicht abhängt. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Moleküle im wesentlichen nur kinetische Energie haben, was beim idealen Gas ohne äußere Kräfte als zutreffend angenommen wird. Es ist dann:

$$Z = \frac{1}{X} \iiint dx dy dz \cdot \iiint e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z.$$

Da die Integration über die Koordinaten gerade das Volumen  $V$  des Gases liefert und ferner  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi}$  ist, so erhalten wir schließlich für die Zustandssumme eines idealen Gases:

$$Z = \frac{V}{X} \cdot \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}^3.$$

Dies in den Ausdruck für die Entropie eingeführt, ergibt:

$$S = \frac{E}{T} + \left( \log V + \frac{3}{2} \log kT - \frac{3}{2} \log \frac{m}{2\pi} - \log X \right) k \cdot N,$$

und das ist gerade der aus der Thermodynamik bekannte Ausdruck für die Entropie. Der Summand  $-kN \log X$  hat keinen bestimmten Wert, solange nichts über die Größe  $X$  der Phasenzellen festgelegt ist. Da im Rahmen der klassischen Theorie eine solche Festlegung nicht möglich ist, bleibt also, wie auch in der Thermodynamik, eine additive Konstante der Entropie frei wählbar.

Ist die Energie der Einzelmoleküle nur kinetischer Art, so sind auch die  $w_i$  nicht von den Raumkoordinaten abhängig. Man kann dann neue Größen

<sup>1</sup> Der Phasenraum wird im allgemeinen definiert als Raum der Koordinaten und Impulse. Die letzteren unterscheiden sich von den Geschwindigkeiten in allen einfachen Fällen — und nur solche werden hier behandelt — durch den Faktor  $m$  (Masse der Teilchen). Für die praktische Arbeit sind die Formeln jedoch vorteilhafter geschrieben, wenn sie nicht die Impulse, sondern die Geschwindigkeiten enthalten. Aus diesem Grunde weicht unsere Darstellung von den üblichen etwas ab. Der Phasenraum  $X$  hat daher nicht die Dimension: dritte Potenz einer Wirkung, sondern dritte Potenz von Wirkung durch Masse.

$w(v) = \iiint w_i dx dy dz = \frac{V}{X \cdot Z} e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}$  einführen, die offenbar folgende Bedeutung haben:

$$w(v) \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z = \frac{m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$$

ist der Bruchteil von Molekülen des gesamten Gases, deren Geschwindigkeit im Gebiete  $|v_x; v_x + \Delta v_x| |v_y; v_y + \Delta v_y| |v_z; v_z + \Delta v_z|$  liegt. Diese Gleichung nennt man das MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz.

Wenn man sich nicht für die Geschwindigkeitsrichtung, sondern nur für den Betrag der Geschwindigkeit interessiert, so kann man setzen:

$$v_x = v \cdot \cos \Theta; \quad v_y = v \cdot \sin \Theta \cos \Phi; \quad v_z = v \cdot \sin \Theta \sin \Phi.$$

Es wird dann nach einigen Umrechnungen

$$dv_x dv_y dv_z = v^2 dv \sin \Theta d\Theta d\Phi.$$

$\Theta$  nimmt die reellen Werte zwischen 0 und  $\pi$ ,  $\Phi$  zwischen 0 und  $2\pi$  an. Da die kinetische Energie nicht von  $\Theta$  und  $\Phi$  abhängt, so kann man die Mittelung über die

Geschwindigkeitsrichtungen dadurch ausführen, daß man das Integral  $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \Theta d\Theta d\Phi$

auswertet. Der Wert dieses Integrals ist  $4\pi$ . Die Mittelung über die Geschwindigkeiten führt uns zu einem etwas anderen Gesetz:

$$u(v) \Delta v = \frac{4\pi m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} e^{-\frac{m v^2}{2kT}} v^2 \Delta v.$$

$u(v) \Delta v$  ist der Bruchteil der Moleküle, deren Geschwindigkeiten ihrem Betrage nach zwischen  $v$  und  $v + \Delta v$  liegen.

Mit Hilfe dieses Gesetzes berechnet man die effektive oder mittlere Geschwindigkeit eines Moleküls im Gase:

$$\bar{v} = \frac{4\pi m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} v \cdot e^{-\frac{m}{2kT} v^2} v^2 dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

und entsprechend das mittlere Geschwindigkeitsquadrat:

$$\overline{v^2} = \frac{4k m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} \int v^4 e^{-\frac{m}{2kT} v^2} dv = \frac{3kT}{m}.$$

$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$  nennt man auch die Effektivgeschwindigkeit und bezeichnet sie mit  $v_{eff}$ .

Von der Effektivgeschwindigkeit wohl zu unterscheiden ist die sogenannte „wahrscheinlichste Geschwindigkeit“  $v_w$ . Sie ist definiert als die Geschwindigkeit, für die

$u(v)$  ein Maximum hat:  $v_w = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ .

Ersetzen wir weiter in der Größe  $u(v)$  die Variable  $v$  durch  $\sqrt{\frac{2E}{m}}$ , so kommen wir zu einer Funktion  $r(E)$ , die folgende Bedeutung hat:

$$r(E) \Delta E = \frac{2}{(kT)^{3/2} \sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E \Delta E}$$

ist die relative Zahl oder der Bruchteil von Molekülen des Gases, deren Energie im Intervall  $E, E + \Delta E$  liegt. Mit Hilfe dieser Funktion kann man die mittlere Energie berechnen, die dem einzelnen Molekül zukommt:

$$\bar{E} = \int_0^\infty E r(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \int_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E^3} dE = \frac{3}{2} kT.$$

Ebenso merken wir noch den Mittelwert einer Geschwindigkeitskomponente  $\bar{v}_x$  an:

$$\bar{v}_x = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.$$

Führt man mittels  $\frac{mv^2}{2} = e \cdot U$  die der Geschwindigkeit  $v$  entsprechende Voltgeschwindigkeit  $U$  ein und definiert  $\frac{3}{2} kT \equiv \frac{1}{2} m v_{\text{eff}}^2 = \frac{3}{4} m v_w^2 = e U_{th}$ , so ist  $\frac{U}{U_{th}} = \frac{2}{3} \left(\frac{v}{v_w}\right)^2$ . Damit lautet das MAXWELLSche Geschwindigkeitsgesetz für die Geschwindigkeitsbeträge:

$$W\left(\frac{U}{U_{th}}\right) d\left(\frac{U}{U_{th}}\right) = 3 \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sqrt{\frac{U}{U_{th}}} e^{-\frac{3}{2} \frac{U}{U_{th}}} d\left(\frac{U}{U_{th}}\right).$$

Die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Minimalgeschwindigkeit  $U$ , d. h. die Wahrscheinlichkeit des Vorhandenseins von Geschwindigkeiten, die größer als  $U$  sind, wird gegeben durch:

$$\int_{\frac{U_{th}}{U}}^{\infty} W\left(\frac{U}{U_{th}}\right) d\left(\frac{U}{U_{th}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_0^{\frac{U}{U_{th}}} \sqrt{\frac{U}{U_{th}}} e^{-\frac{3}{2} \frac{U}{U_{th}}} d\left(\frac{U}{U_{th}}\right) + 1 + \sqrt{\frac{6}{\pi}} \sqrt{\frac{U}{U_{th}}} e^{-\frac{3}{2} \frac{U}{U_{th}}}.$$

Tabelle 1.

Für die Funktionen  $u(v)$  und  $\int_v^{\infty} u(x) dx$  geben wir die folgende Tabelle 1 an (vgl. die Figur).

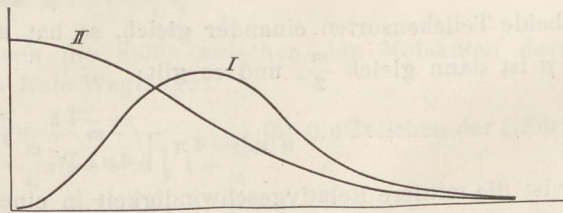
$v$	$u(v)$	$\int_v^{\infty} u(x) dx$	$v$	$u(v)$	$\int_v^{\infty} u(x) dx$
0,1	0,0224	0,999	1,6	0,446	0,1633
0,2	0,0866	0,994	1,7	0,362	0,1229
0,3	0,186	0,983	1,8	0,286	0,0906
0,4	0,308	0,956	1,9	0,220	0,0652
0,5	0,440	0,919	2	0,165	0,0460
0,6	0,567	0,869	2,1	0,121	0,0320
0,7	0,678	0,806	2,2	0,0864	0,0215
0,8	0,761	0,734	2,3	0,0601	0,0142
0,9	0,813	0,655	2,4	0,0408	0,0092
1,0	0,831	0,572	2,5	0,0272	0,0058
1,1	0,814	0,490	2,6	0,0177	0,0036
1,2	0,770	0,411	2,7	0,0112	0,0022
1,3	0,702	0,336	2,8	0,0069	0,0012
1,4	0,623	0,271	2,9	0,0040	0,0007
1,5	0,534	0,212	3	0,0024	0,0004

3. Verhalten der Moleküle untereinander.

Wenn zwei oder mehrere Sorten von Molekülen vorhanden sind, so hat man den wahrscheinlichsten Zustand zu berechnen, indem man für jede Molekülart die Besetzungszahlen bestimmt. Da jede Sorte unabhängig von der anderen die Phasenzellen besetzen kann, so verläuft die Überlegung fast genau wie vorher. Der Einfachheit halber wollen wir die Gleichungen nur für den Fall zweier Teilchenarten angeben. Es seien  $N_i$  und  $n_i$  die Besetzungszahlen der ersten bzw. der zweiten Teilchensorte,  $M$  und  $m$  die Massen. Dann müssen zunächst folgende Nebenbedingungen gelten:

$$0 = \sum E_i \delta N_i + \sum e_i \delta n_i \quad 0 = \sum \delta N_i; \quad 0 = \sum \delta n_i.$$

$E_i$  und  $e_i$  sind die Energiemittelwerte der beiden Teilchensorten in der Zelle  $i$ . Die erste Gleichung sagt aus, daß die Gesamtenergie innerhalb des aus beiden Teilchensorten bestehenden Gases konstant bleiben soll; die beiden letzten sagen aus, daß die Molekülzahlen sowohl des ersten als auch des zweiten für sich konstant bleiben sollen, womit z. B. das Auftreten von Dissoziationsprozessen ausgeschlossen bleibt.



Zeichnerische Darstellung der Funktionen  $u(v)$  und  $\int_v^{\infty} u(x) dx$ .  $u(v)$  verläuft gemäß I und  $\int_v^{\infty} u(x) dx$  nach II.

Wenn man nun die Rechnung entsprechend dem Fall einer Teilchensorte durchführt, so sorgt die erste Nebenbedingung dafür, daß beide Teilgase die gleiche Temperatur haben. Dies liegt daran, daß genau wie früher nur eine Variationskonstante  $\alpha = -\frac{1}{T}$  einzuführen ist, entsprechend nur einer Energiebedingung, aber zwei Größen  $\beta_1, \beta_2$  entsprechend den Zustandsintegralen über jede der beiden Teilchensorten. Das Ergebnis ist schließlich das folgende:

$$N_i^0 = \frac{N}{Z_1} e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad n_i^0 = \frac{n}{Z_2} e^{-\frac{E_i}{kT}}.$$

$Z_1$  und  $Z_2$  sind die Zustandsintegrale der beiden Teilgase. Entsprechend wie vorher ergeben sich hieraus die folgenden Gleichungen:

$$M(v) = \frac{4\pi M^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} e^{-\frac{Mv^2}{2kT}}; \quad M(v_2) = \frac{4\pi m^{3/2}}{(2\pi kT)^{3/2}} e^{-\frac{mv_2^2}{2kT}}$$

und hieraus sieht man unter anderem, daß die Geschwindigkeitsmittelwerte  $\bar{v}_1$  und  $\bar{v}_2$  der beiden Gase sich verhalten wie die Wurzeln aus den reziproken Massen:

$$\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} = \frac{m}{M}.$$

Aus diesen Ansätzen lassen sich auch die Wahrscheinlichkeiten für die Werte der Relativgeschwindigkeiten zwischen einem Molekül der einen und einem Molekül der anderen Sorte ableiten. Auch für sie erhalten wir ein Gesetz, das mit dem MAXWELLSCHEN formal identisch ist. Die hier nicht durchgeführte Rechnung hat das Ergebnis:

$$u(v_r) = 4\pi \sqrt{\frac{\mu}{2\pi kT}}^3 e^{-\frac{\mu v_r^2}{2kT}} v_r^2,$$

wo  $\mu = \frac{m \cdot M}{m + M}$  ist, so daß also die Relativgeschwindigkeit einem Wahrscheinlichkeitsgesetz genügt, wie die absoluten Geschwindigkeiten in einem Gase der gleichen Temperatur, bei dem aber die Moleküle die Masse  $\frac{m \cdot M}{m + M}$  haben. Der Mittelwert des Relativgeschwindigkeitsquadrates und der Erwartungswert der Relativgeschwindigkeit selbst sind daher gegeben durch:

$$\bar{v}_r^2 = \frac{kT}{\mu}; \quad \bar{v}_r = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}}.$$

Sind beide Teilchensorten einander gleich, so hat man ein Gas mit  $2N$  Teilchen vor sich.  $\mu$  ist dann gleich  $\frac{m}{2}$ , und es gilt:

$$u(v_r) = 4\pi \sqrt{\frac{m}{4\pi kT}}^3 e^{-\frac{m v_r^2}{4kT}} v_r^2.$$

Daher ist die mittlere Relativgeschwindigkeit in einem Gase um den Faktor  $\sqrt{2}$  größer als die mittlere Geschwindigkeit im Gase selbst:  $\bar{v}_r = \sqrt{2} \bar{v}$ .

Wir wollen nun weiter die Frage behandeln, wieviel Zusammenstöße ein ins Auge gefaßtes Molekül im zeitlichen Mittel erleidet. Dafür müssen wir eine neue moleküleigene Größe einführen, die wir als Durchmesser des Moleküls bezeichnen. Wir machen also zunächst die naive Annahme, daß ein Molekül als starre Kugel mit definierter Begrenzung angesehen werden kann. Zwei solche Moleküle können sich auf verschiedene Weisen stoßen, genau wie z. B. zwei Billardkugeln. Zentralstöße, wie auch nur leichte Berührungen dieser starren Kugeln, wollen wir in gleicher Weise als Stöße betrachten. In allen Fällen eines Stoßes kommen sich die beiden Kugeln besonders nahe; ihre Mittelpunkte haben im Moment des Stoßes den Abstand  $d$  voneinander, wenn  $d$  der Durchmesser eines solchen Moleküls ist.



Wenn wir jetzt ein bestimmtes Molekül ins Auge fassen, so werden als Stoßpartner alle diejenigen Moleküle in Frage kommen, die einen geeigneten Abstand und eine entsprechend geeignete Geschwindigkeit in Bezug auf das ins Auge gefaßte Molekül haben. Denken wir uns die übrigen Moleküle festliegend, so werden alle die Moleküle für einen Stoß in Frage kommen, die innerhalb des Raumteiles liegen, der überstrichen wird von einer Fläche senkrecht zur Relativgeschwindigkeit des ins Auge gefaßten Elektrons von der Form eines Kreises mit dem Durchmesser  $2d$ . Durch diese Fläche werden nämlich alle Raumgebiete „abgefegt“, welche Mittelpunkte von solchen Molekülen enthalten können, die für den Stoß in Frage kämen. Da wir uns für die sekundliche Zahl von Zusammenstößen interessieren, werden wir die Höhe des zylindrischen Raumgebietes gleich der Strecke machen, die im Mittel von einem Molekül je Sekunde in Bezug auf ein anderes zurückgelegt wird. Diese Strecke ist  $\bar{v}_r$ . Der Rauminhalt dieses Zylinders ist offenbar  $\pi d^2 \bar{v}_r$ , und da im Volumen  $\Omega$  bei Abwesenheit äußerer auf das Gas wirkender Kräfte immer  $\frac{N\Omega}{V}$  Moleküle ( $V$  Gesamtvolumen) vorhanden sind, ist die Zahl der Stöße je Sekunde gegeben durch:

$$\nu = \frac{N}{V} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \bar{v}_r = \frac{N}{V} \sqrt{2} \pi d^2 \cdot \bar{v}$$

Aus der Stoßzahl  $\nu$  finden wir auch die Flugzeit  $\tau$ , die im Mittel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen vergeht. Sie ist offenbar der Kehrwert von  $\nu$ :  $\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 N \bar{v}}$ .

Wenn man nun den von einem Molekül im Mittel in der Sekunde zurückgelegten Weg durch die mittlere Zahl der Stöße dividiert, so gelangt man zu einer Weglänge, die offenbar im Mittel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen zurückgelegt wird, die sogenannte mittlere freie Weglänge:

$$\lambda = \frac{V}{\sqrt{2} \pi d^2 N}$$

wo  $V$  das Gesamtvolumen und  $N$  die Gesamtzahl der Moleküle des Gases bedeuten.

Sind in dem Gase zwei Sorten von Molekülen mit den Gesamtzahlen  $N$  und  $n$  vorhanden, so ist der Weg, den ein Molekül der ersten Sorte zurücklegt, bis es auf eines der zweiten Sorte trifft, entsprechend gegeben durch ( $a$  und  $b$  sind die Durchmesser der beiden Molekülsorten):

$$\lambda_{1,2} = \frac{4V}{\pi(a+b)^2 n \sqrt{1 + \frac{M}{m}}}$$

Berücksichtigen wir hier aber noch die Stöße zwischen den Molekülen derselben Teilchensorte, so erhalten wir als freie Weglänge:

$$\lambda_1 = \frac{V}{\sqrt{2} \pi a^2 N + \frac{1}{4} \pi (a+b)^2 n \sqrt{1 + \frac{M}{m}}} \text{ für die Teilchen der 1. Sorte und}$$

$$\lambda_2 = \frac{V}{\sqrt{2} \pi b^2 n + \frac{1}{4} \pi (a+b)^2 N \sqrt{1 + \frac{M}{m}}} \text{ für die Teilchen der 2. Sorte.}$$

Bei Stößen ist die unmittelbar wichtige Größe nicht eigentlich der Moleküldurchmesser, sondern eine Kreisfläche, deren Durchmesser mit dem Moleküldurchmesser übereinstimmt. Diese Größe bezeichnen wir als Wirkungsquerschnitt.  $d/2 = R$  nennen wir den Wirkungsradius.

Allerdings hat sich die Tatsache ergeben, daß der Wirkungsradius keineswegs mehr als eine molekulare Eigenschaft angesehen werden kann, da er sehr häufig von der Temperatur abhängt. Der Grund hierfür ist darin zu suchen, daß das Molekül eigentlich ein Kraftzentrum ist, das weit über seinen Größenbereich hinaus Wirkungen, und zwar zumeist abstoßende Wirkungen, hervorruft. Diese Effekte werden

also im allgemeinen den Wirkungsquerschnitt vergrößern, weil die abstoßende Wirkung es beim Stoß verhindert, daß sich die Mittelpunkte der Moleküle völlig bis auf den Abstand  $d$  nähern. Jedoch wird dieser Unterschied um so kleiner werden, je größer die Stoßgeschwindigkeit, d. h. je höher die Temperatur ist. Daher sollte im Grenzfall unendlich hoher Temperatur ein Molekülquerschnitt wirksam sein, wie er sich aus der Anschauung der starren Kugeln ergeben würde. Nennen wir  $R$  den Wirkungsradius bei der Temperatur  $T$ , und setzen wir  $d/2 = R_\infty$ , so gibt die SUTHERLANDSche Formel den gut bestätigten Zusammenhang zwischen Wirkungsquerschnitt  $R$  und der Temperatur:

$$R^2 = R_\infty^2 \left( 1 + \frac{T_v}{T} \right).$$

Hier bedeutet  $T_v$  eine Stoffkonstante von der Dimension einer Temperatur. Für einige Substanzen geben wir  $T_v$  und  $R_\infty$  in Tabelle 2 wieder.

Tabelle 2.

Stoff	$T_v$ (°K)	$R_\infty \cdot 10^8$	Stoff	$T_v$ (°K)	$R_\infty \cdot 10^8$
Ar	169	1,43	Luft	113	—
H <sub>2</sub>	76	1,21	N <sub>2</sub>	112	1,60
H <sub>2</sub> O (Dampf)	550	—	Ne	56	—
He	79	0,97	O <sub>2</sub>	132	1,48
Kr	142	1,68	X	252	1,78

Bezeichnen wir mit  $R_{273}$  den Wirkungsradius am Celsiusnullpunkt, so ergibt sich aus

$$\text{ihm } R_\infty \text{ gemäß der Formel } R_\infty^2 = \frac{R_{273}^2}{1 + \frac{T_v}{273}}.$$

Wir wollen  $N_0$  Teilchen, die willkürlich herausgegriffen gedacht werden, auf ihrer Reise durch das Gas verfolgen. Für jedes dieser Teilchen besteht die Möglichkeit, schon auf dem ersten Wegelement ein anderes Teilchen zu treffen und einen Stoß zu erleiden. Der Bruchteil an Teilchen  $dN$ , denen dies bereits auf dem ersten Wegelement  $dx$  zustößt, ist natürlich proportional der Gesamtzahl der ins Auge gefaßten Teilchen  $N_0$  und proportional der Länge  $dx$  des Wegelementes, also  $dN = N_0 \cdot \gamma \cdot dx$ . Hier ist  $\gamma$  eine zunächst noch unbestimmte Proportionalitätskonstante. Für das folgende Wegelement gilt eine entsprechende Gleichung, nur daß  $N_0$  jetzt durch  $N_0 - dN$  zu ersetzen ist. Setzen wir also allgemein  $N(x)$  als die Zahl der Teilchen, die nach Zurücklegung der Strecke  $x$  noch keinen Stoß erlitten haben [wobei zu beachten ist, daß dann  $N(0) = N_0$  ist], so erhalten wir die Differentialgleichung  $\frac{dN}{dx} = -N \cdot \gamma$ , deren

Lösung die Form  $N = N_0 \cdot e^{-\gamma x}$  hat. Mit ihrer Hilfe bildet man die wahrscheinlichste Wegstrecke oder den mittleren Weg bis zum ersten Stoß für ein Teilchen ( $N_0 = 1$ ):

$\bar{x} = \int_0^\infty x e^{-\gamma x} d(\gamma x) = \frac{1}{\gamma}$ . Da diese Größe offenbar mit der von uns berechneten mittleren freien Weglänge identisch sein muß, so ergibt sich für die Konstante der Wert

$\gamma = \frac{\sqrt{2} \pi d^2 N}{V}$ , und das CLAUSIUSsche Gesetz für die Weglängenverteilung nimmt die Form

$$w(x) = e^{-\frac{\sqrt{2} \pi d^2 N}{V} \cdot x}$$

an.

### Kleine Mitteilung.

#### Ein mechanisches Beispiel für eine Kippschwingung.

Von Herbert Schmidt in Halle (Saale).

Die Behandlung der Photozelle führt, falls bei Verwendung der gasgefüllten Zellen kein Spiegelgalvanometer oder kein gleich empfindliches Strommeßinstrument zur Verfügung steht, bei der Messung der kleinen Photoströme zu einiger Verlegenheit. Die Lehrmittelindustrie hat daher für Versuchsanordnungen mit solchen Photozellen zu einem besonderen Hilfsmittel gegriffen. Sie baut die Photozelle in eine Kippschaltung der bekannten Anordnung ein (Fig. 1). Dabei wird der durch die Photozelle  $P$  gehende Strom dazu benutzt, einen Kondensator  $C$  aufzuladen, bis dieser beim Erreichen der Zündspannung einer parallel geschalteten Glimmlampe  $G$  entladen wird, um nun wiederum aufgeladen zu werden usw. Man ersetzt also die Messung des Photostromes durch die Auszählung der Kondensatorentladungen je Zeiteinheit. Es ist erwünscht, den Schülern diese Art der Strommessung durch Aufspeichern und „Auskippen“ der Ladungen an einem mechanischen Beispiele zu erläutern<sup>1</sup>. Hierzu eignet sich die folgende Vorrichtung, bei der das in der Technik benutzte Prinzip der automatischen Kippwaagen Anwendung findet. Man kann sie mit den einfachsten Hilfsmitteln leicht selbst herstellen.

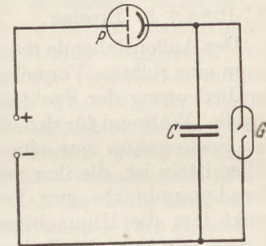


Fig. 1. Kippschaltung.

Man baut sich nach Art der bei Kipploren üblichen Kübel ein Kippgefäß aus Blech in Form eines liegenden Prismas, dessen Grundfläche ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck ist (vgl. Fig. 2). Um sich die Arbeit des Zusammenlötens zu ersparen, kann man auch aus einem Blechkasten eine der unteren waagerechten Kanten mit geeigneten Stücken der anstoßenden Flächen ausschneiden. Um dieses Gefäß auf einer Achse lagern zu können, lötet man an die beiden Dreiecksflächen rechtwinklig gebogene Drahtstücke mit ihren kürzeren Schenkeln an. Die Durchstoßpunkte der Achse durch die Dreiecksflächen müssen so auf deren Symmetrielinien liegen, daß sich das Ganze beim Aufsetzen auf die Achse im stabilen Gleichgewicht befindet; andererseits soll aber die Achse möglichst tief sitzen. Bei der Gefäßlänge 10 cm und 5,5 cm Kathetenlänge der Dreiecksflächen ergab sich 1 cm als günstigster Abstand der Achse von den Hypotenusenkanten.

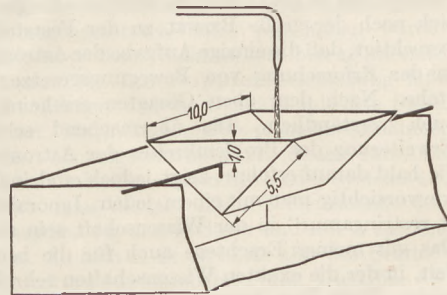


Fig. 2. Mechanische Kippordnung.

Füllt man nun das Gefäß, nachdem man es mit seiner Achse auf eine Glaswanne oder dgl. gesetzt hat, durch einen Wasserstrahl langsam mit Wasser, so verschiebt sich der Schwerpunkt anfangs nach unten, um dann bei zunehmender Füllung nach oben zu wandern, bis er über der Achse zu liegen kommt, was zum Kippen des Gefäßes führt. Es entleert dabei seinen Inhalt und kehrt im leeren Zustande wieder in die Ausgangsstellung zurück, um von neuem gefüllt zu werden usw. Damit es wirklich zum Kippen komme, darf die Achse natürlich nicht zu hoch liegen.

Bei Veränderung der „Stromstärke“ des Wasserzufflusses ändert sich auch die Zahl der Kippvorgänge in der Zeiteinheit. Bei dem elektrischen Gegenbeispiel kommt es allerdings nicht bis zur vollständigen Entleerung des Kondensators, da dieser nur bis

<sup>1</sup> Es sei bemerkt, daß manche im Schrifttum angegebenen Versuche, wie etwa HANS RICHTER, Der Photokippkreis, S. 13, mich nicht befriedigen. Die von H. KRÖNCKE, U.-Bl. 42, 282 (1936) beschriebene Kippvorrichtung wirkt gut und ist auch einstellbar, aber die benutzten Mittel lassen sich noch vereinfachen.

zur Löschspannung der Glimmlampe entladen wird. Man kann diese Sachlage aber auch mit dem mechanischen Versuch nachahmen, indem man durch eine geeignet angebrachte Anschlagvorrichtung, z. B. durch die genügend tief herabgesenkte Zuflußröhre, den Drehwinkel beim Kippvorgang begrenzt, was aber nur bis zu einem gewissen Grade möglich ist, ohne die Kippschwingung überhaupt aufzuheben.

## Berichte.

### 2. Forschungen und Ergebnisse.

**Sterne mit spektralen Eigentümlichkeiten.** Von B. JUNG † in Breslau.

Der Außenstehende macht sich im allgemeinen kaum eine richtige Vorstellung von der überragenden Bedeutung der Spektralanalyse für die Astrophysik. Während für den Physiker oder Chemiker das Spektroskop nur eins unter vielen anderen Hilfsmitteln ist, die ihm zur Untersuchung seiner Forschungsobjekte zur Verfügung stehen, verdankt ihm die Himmelskunde fast ihr gesamtes Wissen von der physikalischen Natur der Weltkörper. Vor allem gilt das für die Fixsterne, die bekanntlich auch bei stärkster Vergrößerung punktförmig bleiben und somit dem Auge keine Struktureigentümlichkeiten verraten. Vor Einführung der Spektralanalyse bestand auch tatsächlich nicht die geringste Hoffnung, etwas über das Sterngefüge in Erfahrung zu bringen. So glaubte sich noch der große BESSEL zu der Feststellung berechtigt, daß die einzige Aufgabe der Astronomie in der Erforschung von Bewegungsgesetzen bestehe. Nach dem oben Gesagten erscheint das auch verständlich. Die überraschend schnelle Erweiterung des Problemkreises der Astronomie, die bald darauf erfolgte, zeigt jedoch eindringlich, wie vorsichtig man mit einem jeden „Ignorabimus et restringamur“ in der Wissenschaft sein sollte. Das gilt meines Erachtens auch für die heutige Zeit, in der die exakten Wissenschaften sehr dazu neigen, ihren Forschungsbereich recht eng abzugrenzen. Gewiß müssen wir uns damit bescheiden, daß wir beim heutigen Stande der Dinge an vieles nicht herankommen. Aber daraus, daß wir noch keinen Weg sehen, folgt keineswegs notwendig, daß es wirklich keinen gibt.

Es soll hier nicht versucht werden, einen umfassenden Überblick über die Anwendung der Spektralanalyse in der Astrophysik zu geben. Der Umfang dieses Sachgebietes ist dazu viel zu groß. Es soll vielmehr lediglich an einigen ausgewählten Beispielen gezeigt werden, wie weitgehende Aussagen auf Grund von Besonderheiten im Spektrum eines Sterns heutzutage möglich sind. Ein paar allgemeine Bemerkungen seien jedoch vorausgeschickt.

Das normale Sternspektrum zeigt Absorptionslinien auf einem kontinuierlichen Grunde. Das Licht, welches das Kontinuum liefert, kommt aus tieferen, höher temperierten Schichten des Sterns und muß die kühleren äußeren Gasschichten — im Schrifttum meist umkehrende Schicht genannt — passieren. Dabei werden die für die betreffenden Gasatome charakteristischen Linien

absorbiert. Das Absorptionsspektrum gibt uns also Auskunft über die in der umkehrenden Schicht vorhandenen Elemente, wenn auch nur sehr unvollkommen. Denn aus dem Fehlen einer Linie folgt nicht das Fehlen des betreffenden Elementes, wie früher vielfach fälschlich angenommen wurde. Vielmehr erscheinen immer nur diejenigen Spektrallinien, für deren Auftreten günstige Anregungsbedingungen herrschen. Wir dürfen also annehmen, daß der Charakter des Sternspektrums im wesentlichen von Temperatur und Dichte in der Nähe seiner Oberfläche abhängen wird. So ist es auch in der Tat, nur überwiegt der Einfluß der Temperatur derartig stark, daß man die Sterne nach ihrem Spektraltyp in eine eindimensionale Reihe einordnen konnte, die heute noch gilt. Es war dies, wie gesagt, im wesentlichen eine „Temperaturskala“. Aus der Möglichkeit einer solchen Anordnung folgt übrigens die Tatsache einer weitgehenden chemischen Gleichmäßigkeit. Man ordnet also den Sternen einen Spektraltyp zu, der durch einen der Buchstaben B, A, F, G, K, M charakterisiert wird. Die Oberflächentemperaturen nehmen von B bis M von 20 000° abs. auf 3000° ab. Die weniger ausgeprägte Abhängigkeit von der Oberflächendichte wurde anfangs nicht beachtet, erweist sich aber als äußerst wichtig zur Bestimmung von Sternmassen bzw. -dimensionen. Es zeigte sich nämlich, daß die Sterne in zwei Gruppen von wesentlich verschiedener Leuchtkraft und Masse gabeln, in Riesen und Zwerge. Jedenfalls gilt das für die Klassen F bis M. Die Riesen besitzen etwa drei bis fünf Sonnenmassen bei 40facher Sonnenleuchtkraft. Bei noch größeren Massen, von etwa 10 Sonnenmassen an, spricht man von Überriesen. Solche Sterne haben mitunter tausend- und mehrfache Sonnenleuchtkraft, sind aber dafür auch selten. Die überwiegende Mehrzahl aller Sterne, unter ihnen auch die Sonne, sind Zwerge. Im folgenden werden uns besonders die Überriesen mit niedrigen Oberflächentemperaturen (Spektralklassen K und M) beschäftigen. Überriesen dieser Spektralklassen zeichnen sich durch extrem große Volumina und entsprechend geringe Dichten aus. Sie sind daher meistens instabil und führen Schwingungen um eine Gleichgewichtslage aus, die sich in einem mehr oder weniger unregelmäßigen Wechsel der Helligkeiten äußert.

Auf einige weitere Spektralklassen, die selten vorkommen, sei der Vollständigkeit halber kurz hingewiesen. Verlängert man die Reihe über B hinaus, so gelangt man zu den O- und schließlich

zu den P-Sternen, den heißesten Himmelskörpern, die man kennt. Die Oberflächentemperaturen können hier mehr als 100 000° betragen. Verwandt mit den M-Sternen sind die N-Sterne. Von jenen unterscheiden sie sich durch noch größere Dimensionen und geringere Dichten. Es sind also besonders extreme Überriesen. Die R- und S-Sterne sind mit den Klassen K und M verwandt, unterscheiden sich jedoch von diesen durch geringeren Sauerstoffgehalt. Diese Tatsache, auf die K. WURM erst kürzlich aufmerksam gemacht hat, zeigt, daß Verschiedenheiten im Spektrum doch mitunter auch durch verschiedene chemische Zusammensetzung bedingt sein können. Erwähnt sei noch, daß manche Sterne auch helle Emissionslinien zeigen. Das gilt besonders für die Typen O und P, aber auch für viele M- und N-Sterne. Es handelt sich hier stets um Himmelskörper mit sehr ausgedehnten Atmosphären, für deren Zustandekommen allerdings recht verschiedenartige Ursachen wirksam sein können.

Nun zu unseren Beispielen. Wir wollen hier eine Gruppe von Sternen betrachten, bei denen aus verschiedenen Gründen sehr viel genauere Aussagen über Masse und Volumen möglich sind, als in normalen Fällen. Es sind dies Doppelsterne, bei denen die eine Komponente zu gewissen Zeiten von der anderen bedeckt wird, sog. Bedeckungsveränderliche. Es gelingt hier in vielen Fällen, Masse und Radius aus der Umlaufzeit und der Dauer des Lichtwechsels abzuleiten, was auf direktem Weg im allgemeinen unmöglich ist. Besonderes Interesse beansprucht nun seit einigen Jahren ein Typ von Bedeckungsveränderlichen, bei denen beide Komponenten Überriesen sind. Der eine Stern ist dann meist ein sehr ausgedehnter K- oder M-Stern, während der andere, ebenfalls Übergigant, einen viel kleineren Durchmesser bei hoher Oberflächentemperatur besitzt. Derartige Sterne haben deshalb in letzter Zeit eine solche Bedeutung erlangt, weil man an ihnen verschiedene Überraschungen erlebt hat, die völlig unerwartet kamen und unseren astronomischen Gesichtskreis wesentlich geweitet haben.

$\varphi$  Aurigae. So heißt der erste Stern dieser Art, auf den die Wissenschaft aufmerksam geworden ist. Mit ihm wollen wir uns daher auch zuerst befassen.  $\varphi$  Aurigae ist schon seit einigen Jahrzehnten als spektroskopischer Doppelstern bekannt. Als Bedeckungsveränderlichen hat ihn zuerst F. BOTTLINGER erkannt und auf die damals bevorstehende Bedeckung Anfang 1932 hingewiesen. In dieser und der folgenden Bedeckung (Herbst 1934) wurde das Beobachtungsmaterial gesammelt, auf dem unsere jetzigen Kenntnisse über dieses merkwürdige Doppelsternsystem beruhen.  $\varphi$  Aurigae besitzt ein Spectrum compositum, in dem sich eine K- und eine B-Komponente überlagern. Wir haben es hier also mit einem System zu tun, in dem ein rötlicher, niedrig temperierter und ein weißer, hoch temperierter Stern um den gemeinsamen Schwerpunkt kreisen und sich dabei gegenseitig von Zeit zu Zeit bedecken. Die Umlaufzeit beträgt — entsprechend dem Zwischenraum zwischen zwei Bedeckungen —

973 Tage. Der Helligkeitsabfall und -wiederanstieg erfolgt rasch und dauert nur etwa einen Tag. Dagegen dauert die totale Bedeckung 37<sup>d</sup>. Wäre die Verfinsternung zentral, so könnte man aus diesen Angaben das Radienverhältnis beider Sterne bestimmen, was auch versucht worden ist. Der Wert 1 : 50, den man so erhält, ist aber sicher falsch, da die aus den Spektren bestimmten Temperaturen in Verbindung mit der Helligkeit beider Komponenten nur 1 : 80 zulassen. Die Bedeckung kann also nicht zentral sein. Übrigens ist der visuelle Helligkeitsabfall gering; er beträgt kaum 0<sup>m</sup>,2. Im kurzwelligen Lichte, z. B. auf photographischen Aufnahmen, ist er stärker ausgeprägt, weil das Helligkeitsverhältnis der verschieden temperierten Sterne nach dem PLANCKSchen Gesetz hier größer ist. Die auffallendste Erscheinung, die man 1932 beobachten konnte, waren die gegen das K-Spektrum nach Violettt verschobenen neuen Absorptionslinien, die nach der Bedeckung noch einen Monat lang sichtbar waren. Ihre Intensität wie auch ihre Violettsverschiebung nahmen im Laufe dieser Zeit mehr und mehr ab. Offenbar ist die K-Komponente von einer sehr ausgedehnten Gashülle umgeben, durch die das Licht des B-Sterns hindurchgeht. Die Spektrallinien erscheinen daher in Absorption. Dieselbe Erscheinung konnte 1934 wieder beobachtet werden, und zwar diesmal auch vor der Bedeckung, wobei die Linien nach der entgegengesetzten Seite verschoben waren. Die Zeitdauer ihrer Sichtbarkeit betrug diesmal jedoch nur 8<sup>d</sup>. Die Dopplerverschiebung läßt darauf schließen, daß die Gashülle mit dem Stern mitrotiert. Macht man nun die plausible Annahme, daß die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation gleich der Umlaufgeschwindigkeit des Systems ist, so erhält man die absoluten Dimensionen: 300 Sonnenradien für den K-Stern und nur 4 für den B-Stern. In dem K-Stern hätte also das Sonnensystem fast bis zur Marsbahn Platz. Die Höhe der Gashülle, die man dem Charakter ihres Spektrums entsprechend als Chromosphäre aufzufassen hat, betrug 230 Millionen Kilometer im Jahre 1932 gegen nur 160 Millionen bei der folgenden Bedeckung. Sie ist also ein labiles Gebilde, das starken Veränderungen ausgesetzt ist. Die Höhe ist im Vergleich zu derjenigen der Sonnenchromosphäre (15 000 km) außerordentlich groß. Wie B. JUNG gezeigt hat, sind aber derartig hohe Chromosphären bei allen solchen Übergiganten zu erwarten. Wichtigste Ergebnisse: Messung der Dimensionen eines Übergiganten und Einblick in die Natur der Chromosphäre eines solchen Sterns.

$\epsilon$  Aurigae. Hier handelt es sich ebenfalls um ein Doppelsternsystem, dessen Komponenten Übergiganten sind und sich gegenseitig bedecken. Die Verhältnisse liegen ähnlich wie bei  $\varphi$  Aurigae, nur viel extremer. Auch sind die Probleme, die uns entgegnetreten werden, noch mehr viestaltig. Die Veränderlichkeit ist schon seit 1821 bekannt, die Art des Lichtwechsels blieb jedoch lange unklar. Im Jahre 1930 sichtete H. LUDENDORFF das inzwischen stark angewachsene Beobachtungsmaterial und zeigte, daß  $\varphi$  Aurigae

ein Bedeckungsveränderlicher mit der ungewöhnlich langen Periode  $27^a$  ist. Das folgende Minimum trat, wie zu erwarten, 1928 bis 1930 ein. In dieser Zeit wurde der Stern sowohl in Berlin-Babelsberg wie auch im Washburn-Observatorium in U.S.A. aufs genaueste beobachtet. Die Gesamtdauer der Bedeckung betrug  $710^d$ , wobei je  $190^d$  auf den Abfall bzw. Wiederanstieg entfallen. Dazwischen blieb die Helligkeit  $330^d$  hindurch völlig konstant. Der Lichtabfall betrug  $3/4^m$ , und zwar, was für das folgende sehr wichtig ist, in gleicher Weise bei photographischen und visuellen Beobachtungen. Schon dieser Umstand gibt zu denken. Es ist hiernach nämlich unmöglich, das im Minimum übrigbleibende Licht der bedeckenden Komponente zuzuschreiben. Damit nämlich der Helligkeitsabfall unabhängig von der Wellenlänge werde, müßten beide Sterne gleiche Temperatur haben, was aber offenbar nicht der Fall ist. Man sieht nämlich immer nur ein einziges Spektrum vom F-Typ, der andere Stern tritt überhaupt nicht in Erscheinung. Wie ist aber dann die konstante Helligkeit während des Minimums zu verstehen? G. P. KUPFER, O. STRUVE und B. STRÖMGREN haben versucht, eine Antwort auf diese Frage zu geben. Nach Untersuchungen dieser Forscher ist die eine unsichtbare Komponente ein ganz gewaltiger Sternriese, der den Durchmesser der Sonne um das Dreitausendfache übertrifft. Auf die Verhältnisse des Sonnensystems übertragen, reicht er also bis zur Saturnbahn. Der sichtbare Stern, ebenfalls ein Übergigant, hat einen siebzehnmal so kleinen Durchmesser, würde aber immerhin den Raum bis zur Venusbahn ausfüllen. Da die Massen ebenfalls annähernd bekannt sind, kann man auf Grund theoretischer Erwägungen auch die Temperatur des Hauptsternes abschätzen und erhält hierfür etwa  $1300^{\circ}$  abs. Wenn auch diese Temperatur mit einer gewissen Unsicherheit behaftet ist, so zeigt doch ihre Größenordnung schon, daß der Stern fast nur infrarotes Licht ausstrahlt und uns daher unsichtbar bleiben muß. Bisher waren so tief temperierte „infrarote“ Sterne nicht bekannt, heute kennt man mehrere davon. Bleibt immer noch die rätselhafte Lichtkurve während der Bedeckung zu erklären. Die Verfasser nehmen an, daß der F-Stern während der Verfinsterung durch die äußeren Schichten, bzw. durch die Atmosphäre der dunklen Komponente hindurchscheint, wobei das Licht eine schalenförmige Schicht hochionisierten Gases zu durchlaufen hat, die den dunklen Stern umgibt. Die Ionisation soll unter dem Einfluß der ultravioletten Strahlung des heißeren Sterns zustande kommen. Ganz ähnliche Verhältnisse liegen ja — wenn auch in viel kleineren Ausmaßen — in der irdischen Ionosphäre, die durch die kurzwellige Sonnenstrahlung hervorgerufen wird, tatsächlich vor. Mit dieser Annahme läßt sich nicht nur das konstante Minimum, sondern auch die Unabhängigkeit des Lichtverlustes von der Wellenlänge erklären, da Elektronen das Licht unabhängig von der Frequenz streuen. Bei neutralen Gasen liegen die Verhältnisse bekanntlich anders. Die numerische Durchrechnung führt jedoch auf Folgerungen, die in der

Hülle des Sterns sicher nicht erfüllt sind. E. SCHÖNBERG und B. JUNG haben daher vorgeschlagen, an Stelle der Elektronenschicht eine Staubschicht anzunehmen, die dasselbe ohne die unangenehmen Folgerungen leisten würde. Die Möglichkeit von Materie im festen Aggregatzustande läßt sich ja bei der niedrigen Temperatur von nur  $1300^{\circ}$  nicht von der Hand weisen, ihre Existenz kann aber so lange nicht als erwiesen gelten, wie nicht auch andere Anzeichen dafür sprechen. So endet die Diskussion über  $\epsilon$  Aurigae einstweilen noch mit einem Fragezeichen. Das wesentliche Ergebnis ist die Erkenntnis, daß es derartig ausgedehnte Sterne mit niedrigen Temperaturen und Dichten (etwa  $10^{-9}$ -fache Wasserdichte) tatsächlich gibt, und daß in ihrer Atmosphäre noch völlig ungeklärte Zustände herrschen. Wir müssen unsere Leser, die Genaueres erfahren möchten, hier auf die nächste Bedeckung im Jahre 1956 vertrösten.

VV Cephei. Auch dieser Stern ist schon seit langer Zeit als veränderlich bekannt. Doch wurde seine wahre Natur als Bedeckungsveränderlicher erst im Jahre 1936 von McLAUGHLIN erkannt. Dem Bedeckungslichtwechsel überlagern sich allerdings physisch bedingte Helligkeitsschwankungen des Hauptsternes. Die Umlaufzeit ist bei diesem System mit über  $20^a$  ebenfalls sehr groß. Die Bedeckung selbst dauert  $510^d$ , wovon  $470^d$  auf die totale Verfinsterung entfallen. Die teilweise Bedeckung, die sich als Helligkeitsabfall bzw. -wiederanstieg zu erkennen gibt, dauert demnach je 20 Tage. Im Spektrum lassen sich beide Komponenten nachweisen — ein sehr niedrig temperierter M- und ein B-Stern. Die photographische Amplitude des Lichtwechsels beträgt  $0,8^m$ . S. GAPOŠCHKIN hat über diesen Wert das Helligkeitsverhältnis der beiden Sterne und die Elemente des Systems berechnet. Hier macht die niedrige Temperatur des M-Sterns jedoch Schwierigkeiten, da dessen Helligkeitsgradient mit der Wellenlänge im photographischen Gebiete so steil verläuft, daß eine Bestimmung der Leuchtkraft aus dem photographischen Frequenzbereich kaum als möglich erscheint. V. A. GOEDICKE hat deshalb die Rechnung auf einer zuverlässigeren Grundlage unter Benutzung von Intensitäten in diskreten Wellenlängen wiederholt, gelangt dabei aber zunächst zu einem völlig unmöglichen Wert für die Leuchtkraft des roten Sterns, die um zwei Zehnerpotenzen zu groß herauskommt. Die Diskrepanz wird jedoch, wenn auch nicht beseitigt, so doch wesentlich gemildert, wenn man mit GOEDICKE annimmt, daß die „partielle“ Phase der Bedeckung nicht so sehr durch den Durchmesser des B-Sterns wie durch den Gradienten der Lichtdurchlässigkeit des M-Sterns bedingt ist. Letzterer müßte dann eine halbdurchlässige Hülle von großer Ausdehnung besitzen. Unter dieser Annahme ergibt sich der Durchmesser des Sterns zu 1200 Sonnendurchmessern. Das Spektrum zeigt die Linien einiger Elemente in Emission. Während aber die hellen BALMERlinien des Wasserstoffs zur Zeit der Bedeckung vollständig verschwinden, bleiben beispielsweise die dem Eisen angehörenden Emissionen erhalten. Man muß daraus schließen, daß das

Eisengas das ganze System als Hülle umgibt. Diese Hülle ist offenbar chromosphärischer Natur. Wir haben also hier den eigenartigen Fall vor uns, daß die Chromosphäre eines Sterns Räume umschließt, die die gesamte Ausdehnung des Sonnensystems wesentlich übertreffen. Was den Wasserstoff anbetrifft, so könnte man zunächst glauben, daß er eine besondere Atmosphäre um den B-Stern bildet, weil dessen Emissionslinien ja zugleich mit diesem verschwinden. Daß das jedoch nicht der Fall sein kann, erkennt man aus der Tatsache, daß die Balmerlinien ebenso wie die übrigen Emissionslinien keinerlei Dopplerverschiebung zeigen. Das Gas wandert also nicht mit dem B-Stern mit. Auch der Wasserstoff gehört also der chromosphärischen Hülle des Systems an. Daß seine Linien während der Bedeckung verschwinden, erklärt sich zwanglos aus der Tatsache, daß immer nur die nähere Umgebung des Sterns zum Leuchten angeregt wird, während in weiterer Entfernung die anregende Strahlung bereits verbraucht ist.

T Coronae Borealis. Dieser Doppelstern wäre der Aufmerksamkeit der Wissenschaft wahrscheinlich entgangen, wenn ihn nicht ein besonderes Ereignis aus der namenlosen Schar der übrigen schwachen Sterne herausgehoben hätte. Im Jahre 1866 leuchtete im Sternbild Krone ein „Neuer Stern“, eine sog. „Nova“ auf. Natürlich handelt es sich bei solchen Erscheinungen nicht um wirklich „neue“ Sterne, die vorher nicht dagewesen wären. Tatsächlich konnte man auch nachweisen, daß an derselben Stelle bereits vor dem Lichtausbruch ein schwaches Sternchen gestanden hatte, das in der Bonner Durchmusterung verzeichnet war. Wie in solchen Fällen zu erwarten, fiel die Helligkeit bald wieder ab, um unter zahlreichen Schwankungen auf den ursprünglichen Wert zu sinken. Man hatte längst angenommen, daß der Stern ein früheres Stadium wieder erreicht habe, als im Sommer 1937 ein neuer, zunächst geringfügiger Helligkeitsanstieg festgestellt wurde, der in der Folgezeit anhielt. Spektren, die mit dem großen 122-cm-Spiegel der Sternwarte Berlin-Babelsberg erhalten wurden, zeigten während dieser Zeit einen Temperaturanstieg von  $3000^{\circ}$  auf  $6000^{\circ}$ . Eine solche Temperaturzunahme hätte eigentlich einen Helligkeitsanstieg um mehr als 5 Größenklassen zur Folge haben müssen. In Wirklichkeit nahm die Leuchtkraft aber nur um eine Größenklasse zu. Das gab zu denken. Dazu kam noch, daß aus den Emissionslinien eine Anregungstemperatur von  $15\,000^{\circ}$  gefolgert werden mußte. Der Widerspruch ließ sich nur durch die Annahme beseitigen, daß man ein Doppelsternsystem vor sich hatte. Es ergibt sich dann folgendes Bild: Der eine Stern ist ein normaler M-Riese mit einer Oberflächentemperatur von  $3000^{\circ}$ . Wahrscheinlich zeigt dieser Stern einen schwachen, physisch bedingten Lichtwechsel. Die andere Komponente, ein heißer Stern mit kleinem Durchmesser, ist die eigentliche Nova, die seinerzeit zu dem Aufleuchten und dem Helligkeitsanstieg in den letzten Jahren Veranlassung gegeben hat. Anscheinend stellt dieser Stern einen Übergangstyp zwischen normalen weißen Riesen und den sog. weißen Zwergen

dar, Sternen mit hoher Oberflächentemperatur und ganz extrem hoher Dichte.

Ganz ähnlich wie bei T Coronae Borealis liegen die Verhältnisse bei Z Andromedae, einem veränderlichen Stern mit novaartigem Lichtwechsel. Auch hier ist für den Lichtwechsel ein heißer Stern verantwortlich, der mit einem niedrig temperierten Riesen ein Doppelsternsystem bildet.

Diese wenigen Beispiele werden dem Leser gezeigt haben, welche anregenden Zusammenhänge die Analyse von Sternspektren uns zu erschließen vermag. Die Kombination eines weißen und eines roten Riesen bzw. Überriesen zu einem Doppelsternsystem scheint in der Natur recht häufig zu sein. Die Gründe für das Zustandekommen gerade solcher Sternpaare sind uns heute noch unbekannt. Es scheint jedoch, daß sich aus dieser Tatsache interessante kosmogonische Folgerungen ziehen lassen.

**Die Grundlagen der Elektronenoptik.** Von Dr. FRANK MATOSI und Dr. OTTILIE MATOSI-RIECHEMEIER in Berlin-Dahlem.

In den letzten Jahren hat sich die sog. Elektronenoptik, über deren Anfänge in dieser Zeitschrift schon früher berichtet wurde<sup>1</sup>, in stürmischem Tempo weiterentwickelt. Es sind Elektronenmikroskope gebaut worden, mit denen Bereiche, die einer optischen Beobachtung bisher unzugänglich waren, ganz neu erschlossen wurden. So können Teilchen mit einer mittleren Ausdehnung von  $10\text{ m}\mu = 10^{-5}\text{ mm}$  noch sichtbar gemacht werden und nach den Ergebnissen der letzten Monate sogar solche von  $3\text{--}5\text{ m}\mu$ . Im vorliegenden Bericht soll ein Überblick über die Grundgesetze und die wesentlichen Methoden der Elektronenoptik gegeben werden.

I. Die Analogie zwischen Licht- und Elektronenstrahlen. Der Begriff des Elektronenstrahls ist so alt wie die Entdeckung der freien Elektronen selbst (Kathodenstrahlen). Er bringt die schon von J. W. HITTORF beobachtete und nachher von W. CROOKES in seiner Entladungsröhre mit kleiner Kathode und schattenwerfender kreuzförmiger Anode schön demonstrierte einfache Tatsache zum Ausdruck, daß sich die Elektronen geradlinig ausbreiten, sofern sie nicht durch äußere Kräfte daran gehindert werden, daß sie also in dieser Beziehung einen geometrisch-optischen Charakter besitzen. Ebenso lange ist bekannt, daß solche Elektronenstrahlen durch elektrische und magnetische Felder abgelenkt werden können. Entsprechend läßt sich ein Lichtstrahl, obwohl wesensverschieden von dem mit Masse und Ladung behafteten Elektron, von seiner im kräftefreien Feld geradlinigen Bahn ablenken, indem wir ihn durch geeignete Medien verschiedener optischer Dichte schicken. Diese Analogie zwischen Lichtstrahlen und Elektronenstrahlen erschöpft sich aber nicht in solchen augenfälligen Tatsachen qualitativer Natur. Sie ist tiefer begründet in einer bis ins einzelne führenden Parallelität zwischen den

<sup>1</sup> J. BÖHME u. H. STEPS: diese Zeitschr. 47, 126, 167 (1934).

Bewegungsgesetzen eines Partikels in einem Potentialfeld und den Gesetzen der Lichtstrahlen in der geometrischen Optik (HAMILTONSche Analogie). Wie man durch geeignet gestalteten optischen Strahlengang (vermittels Linsen u. dgl.) Strahlen, die von einem Punkt ausgehen, an einer andern Raumstelle wieder sammeln und damit eine Abbildung erzielen kann, so kann man auch erwarten, durch geeignet gewählte elektrische und magnetische Felder Elektronenstrahlen, die von einem Punkte divergent ausgehen, wieder zu sammeln. Tatsächlich hat man seit langem in gewissen Anordnungen, wie in der BRAUNschen Röhre, im Massenspektrographen, gewisse Elektronengruppen in einem Punkt konzentriert und somit eine Art Abbildung erzeugt, ohne daß man dabei bewußt die Analogie zur Optik nutzbringend angewandt.

Fruchtbringend wurde dieser weitgehende Parallelismus erst, als man erkannte, daß nicht nur das Licht „dualen Charakter“ hat — als Lichtquant mit Partikeleigenschaft einerseits —, sondern daß auch Materieteilchen, speziell Elektronen, in gewissen Fällen als Welle in Erscheinung treten. Die Wellenlänge  $\lambda$  einer solchen Materiewelle berechnet sich nach DE BROGLIE bekanntlich zu  $\lambda = \frac{h}{mv}$ , wo  $h$  das PLANCKSche Wirkungsquantum bedeutet,  $m$  und  $v$  Masse und Geschwindigkeit der der Welle zugeordneten Korpuskel sind. Die Wellenlänge eines Elektronenstrahls ist mithin bestimmt durch seine Geschwindigkeit, die sich ihrerseits aus der vom Elektron durchlaufenen Potentialdifferenz ( $\varphi - \varphi_0$ ), der beschleunigenden Spannung, berechnen läßt. Nach dem Energiesatz gilt nämlich  $\frac{m}{2}v^2 - \frac{m}{2}v_0^2 = e(\varphi - \varphi_0)$ , wo  $v_0$  Anfangsgeschwindigkeit,  $e$  die Ladung des Elektrons ist. Im folgenden wird der Nullpunkt des Potentials an die Stelle des Elektronenstrahls gelegt, an der  $v = 0$  ist; daraus ergibt sich die einfachere Beziehung  $\frac{m}{2}v^2 = e \cdot \varphi$ . Praktisch bedeutet dies, daß wir der Kathode der Elektronenstrahlröhre das Potential Null zuordnen, da dort die Elektronengeschwindigkeit im allgemeinen zu vernachlässigen ist. Die folgende Tabelle gibt eine kleine Übersicht über die Größe der „DE BROGLIE-Wellenlänge“ des Elektrons für verschiedene Geschwindigkeiten bzw. beschleunigende Spannungen.

Tabelle 1.

Beschleunigende Spannung in Volt . . . . .	1	10	100	1000	10000
Elektronengeschwindigkeit in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit . . . . .	0,002	0,062	0,02	0,62	0,19
Elektronenwellenlänge in Å	12,2	3,9	1,2	0,39	0,12

Aus der Tabelle erkennt man, daß die Wellenlängen der Elektronenstrahlen mit bequem herstellbaren Geschwindigkeiten viel kleiner sind als die optisch im allgemeinen benutzten kürzesten Wellenlängen. Die Elektronenwellenlängen kommen sogar schon in das Gebiet der Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlen hinein. Diese Tatsache läßt sofort einen grundsätzlichen Vorteil erkennen, den die Elektronenoptik gegenüber der gewöhnlichen Optik besitzt.

Bekanntlich ist dem Auflösungsvermögen eines optischen Apparates durch die Wellenlänge der benutzten Strahlung eine natürliche Grenze gesetzt. Der kleinste noch meßbare Abstand ist  $d_{min} = \lambda / (n \sin u)$ , wo  $n \sin u$  die numerische Apertur des Strahlenbündels mißt ( $n$  = Brechungsindex des Zwischenmediums). Ist bei vorgegebenem  $\lambda$  der zu messende Gegenstand kleiner als  $d_{min}$ , so werden die Beugungswinkel des abgebeugten Lichts so groß, daß schon das Beugungsbild erster Ordnung das Objektiv verfehlt und nach ABBE eine formtreue Abbildung des Gegenstandes infolgedessen nicht mehr stattfinden kann. Bei gegebener Apertur bestimmt daher allein die Wellenlänge die Größe des noch deutlich zu trennenden Abstandes. Setzen wir die Möglichkeit des Baues brauchbarer Elektronenobjektive, d. h. wirksamer elektrischer oder magnetischer Linsen voraus, worauf wir weiter unten ausführlich zurückkommen werden, so erkennt man aus der Kleinheit der Elektronenwellenlänge sofort, welche überlegene Stellung man für das Elektronenmikroskop gegenüber den besten Lichtmikroskopen grundsätzlich erwarten kann. Bei gleicher Apertur verhielten sich die Dimensionen der kleinsten zu beobachtenden Gegenstände in einem Ultraviolett-mikroskop ( $d_{min} = 100 \mu$ ) zu denen in einem Elektronenmikroskop von 10 000 Volt Beschleunigungsspannung ( $d_{min} = 0,01 \mu$ ) wie 1 :  $10^{-4}$ . Derartig günstig liegen die tatsächlichen Verhältnisse heute noch bei weitem nicht. Wir werden sehen, daß alle bis jetzt konstruierten elektrischen oder magnetischen Linsen „Abbildungsfehler“ besitzen, die einen wesentlich größeren Einfluß auf die Abweichung von einer punktförmigen Abbildung haben, als wir dies aus der Optik gewohnt sind. Es ist deshalb notwendig, mit viel kleineren Aperturen zu arbeiten als in der Lichtoptik. Selbst dadurch gelingt es jedoch nicht, den Einfluß der Linsenfehler völlig auszuschalten: das wirklich gemessene Auflösungsvermögen bleibt noch unter dem durch Wellenlänge und Apertur bestimmten Wert. Die Grenze der Brauchbarkeit elektronenoptischer Abbildungsgeräte ist heute ausschließlich bedingt durch die „Güte“ der verwendeten Linsen, nicht aber durch die Wellennatur der benutzten Strahlen. Das beste zur Zeit<sup>1</sup> bekannte „Übermikroskop“ mit Elektronenoptik gestattet eine 20—30mal so starke Vergrößerung wie das Ultraviolett-mikroskop der Lichtoptik. (Vgl. auch Abschn. IV.)

Aus dem Vorhergehenden erhellt, daß alle abzubildenden Objekte, erst recht natürlich alle

<sup>1</sup> D. h. zur Zeit der Korrektur, Mai 1940.



Apparatdimensionen der Elektronenoptik, noch groß gegen die Wellenlänge sind. Deshalb sind wir zur Berechnung des Strahlenganges immer berechtigt, uns auf die Sätze der geometrischen Optik, der Strahlenoptik, zu beschränken, ohne auf den Einfluß der Wellennatur der Elektronen einzugehen. Anordnungen, bei denen gerade die Welleneigenschaft der Elektronen wesentlich ist, wie bei den Beugungsversuchen mit Elektronenstrahlen an Kristallgittern oder einzelnen Molekülen, bleiben in diesem Bericht außer Betracht; denn dort findet ja keine Abbildung statt.

Da die geometrische Elektronenoptik nichts anderes darstellt als die Bewegungsgesetze der Elektronen im elektrischen oder magnetischen Felde, so wäre es im Grunde nicht notwendig, von optischen Begriffen Gebrauch zu machen. Die Verwendung dieser Ausdrucksweise erhöht aber nicht nur das Verständnis der oft komplizierten Verhältnisse, sondern sie hat sich auch als heuristisches Element zur Konstruktion neuer Instrumente voll bewährt.

So weitgehend auch die Parallelität zwischen Elektronen- und Lichtstrahl bezüglich des geometrischen Verlaufs ihrer Bahnen ist, so treten doch wesentliche Unterschiede dann zutage, wenn man die Wechselwirkung zwischen Strahl und bestrahlter Materie betrachtet. Diese ist ja für elektromagnetische Wellen und elektrisch geladene Korpuskeln eine vollkommen andere. Es darf daher nicht wundernehmen, daß die Analogie hier ihre Grenze erreicht hat. Beachtet man diese Unterschiede nicht, so könnte man es für gleichgültig halten, ob etwa Elektronen einer gewissen Wellenlänge zur Abbildung benutzt werden oder kurzwellige elektromagnetische Strahlung von der gleichen Wellenlänge. Wollte man eine Abbildung mit kurzen elektromagnetischen Strahlen verwirklichen, so träte zu der technischen Schwierigkeit, elektromagnetische Wellen von kleinerer Wellenlänge als die Strahlung des gewöhnlichen ultravioletten Lichtes in genügender Intensität herzustellen, die weitere Schwierigkeit starker Absorption dieser Strahlen in der durchleuchteten Materie. Einer noch stärkeren Verkleinerung der Wellenlänge bis ins Gebiet der Röntgenstrahlen würde das Fehlen geeigneter Linsensubstanzen entgegenstehen, da der Brechungsindex der Röntgenstrahlen für alle Medien nur sehr wenig von Eins abweicht. Schnelle Elektronen dagegen werden in der durchstrahlten Materie praktisch nicht absorbiert; sie werden vielmehr verschieden stark gestreut. Natürlich erfahren auch die elektromagnetischen Strahlen (Röntgenstrahlen) in der Materie eine Streuung. Aber das Streuvermögen der Atome ist für die beiden Strahlenarten sehr verschieden, im wesentlichen dadurch bedingt, daß die elektromagnetische Strahlung an der Elektronenhülle der Atome gestreut wird, die Elektronen eines Strahles als Korpuskeln aber in erster Linie durch die Atomkerne aus ihren Bahnen abgelenkt werden. Dieses verschiedene Verhalten der Materie gegenüber Elektronen- und elektromagnetischen Wellen hat zur Folge, daß die Elektronenstrahlen in der Praxis formgetreuer Abbildungen kleinster

Objekte allein erfolgversprechend sind. Die Verschiedenheit hat darüber hinaus den Vorteil, daß gelegentlich vergleichende Betrachtungen eines Objekts im Elektronenlicht und elektromagnetischen Licht wertvolle, einander ergänzende Aufschlüsse liefern können.

Als Maß für die Richtungsänderungen, die ein Strahl beim Übergange von einem Medium in ein zweites von anderer „optischer Dichte“ erfährt, dient bekanntlich der durch das SNELLIUSsche Brechungsgesetz definierte Brechungsindex

$$n_{1,2} = \frac{\sin i_1}{\sin i_2},$$

wobei  $i_1$  bzw.  $i_2$  die Winkel des

Strahls mit der Normalen der Grenzfläche zwischen den beiden Medien sind. Dieses Gesetz gilt sowohl für Wellen- als auch für Korpuskelstrahlen,

nur ist im ersten Fall  $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_1}{v_2}$ ; im zweiten

ist  $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v_2}{v_1}$ , wie es aus dem Unterschied von

HUYGHENS-FRESNELScher und NEWTONScher Lichttheorie seit langem bekannt ist. Im optisch dichteren Medium, d. h. einem Medium, in dem die Richtungsänderung des Strahls auf das Einfallslot zu geschieht, verlangsamt der Lichtstrahl seine Geschwindigkeit, der Korpuskularstrahl dagegen

wird schneller. Die durch die Gleichung  $n_{1,2} = \frac{n_2}{n_1}$

definierten Brechungsindizes der Einzelmedien sind daher direkt proportional der Korpuskulargeschwindigkeit, während der wellenoptische Brechungsindex eines Einzelmediums bekanntlich

gemessen wird durch  $\frac{c}{v}$ , wo  $c$  die Wellengeschwindigkeit im Vakuum darstellt. Um auch den Brechungsindex der Elektronen als dimensionslose Zahl zu erhalten, wird er im allgemeinen ebenfalls

auf  $c$  bezogen<sup>1</sup>, und wir erhalten  $n_{EI} = \frac{v_{EI}}{c}$ , eine

Zahl, die stets kleiner als 1 ist. Medien konstanter optischer Dichte sind für Elektronen also Räume konstanter Geschwindigkeit und damit konstanten elektrischen Potentials. In Wirklichkeit bewegen sich die Elektronen im allgemeinen in elektrischen Feldern kontinuierlich sich ändernden Potentials, also in inhomogenen Medien. Mit genügender Annäherung läßt sich der Strahlverlauf in einem solchen Potentialfeld jedoch veranschaulichen, indem wir den Raum durch Äquipotentialflächen in kleine homogene Bezirke einteilen und die kontinuierliche Variation des Potentials durch kleine unetstige Sprünge in der Grenzschicht ersetzen. An diesen Sprungstellen erfährt das Elektron gemäß dem SNELLIUSSchen Brechungsgesetz jeweils eine Richtungsänderung. Der Brechungsindex läßt sich aus der Geschwindigkeit der Elektronen und damit

<sup>1</sup> Häufig findet man in der Literatur den Brechungsindex eines Einzelmediums gegenüber einem Elektronenstrahl definiert als das Verhältnis der Korpuskelgeschwindigkeit im Feld zu der ohne elektrisches Feld. Der relative Brechungsindex zwischen zwei Medien ist naturgemäß bei beiden Definitionen derselbe.

dem Potentialgefälle nach der auf S. 112 angegebenen Gleichung allgemein bestimmen zu

$$n = \text{const} \cdot \sqrt{v_0^2 + \frac{2e}{m}(\varphi - \varphi_0)}$$

oder bei geeigneter Wahl des Nullpotentials zu  $n = \text{const} \cdot \sqrt{\varphi}$ . Damit lassen sich alle Gesetze des Elektronenbahnverlaufs in die Sprache des Lichtstrahlenweges im inhomogenen Medium übersetzen, wenn wir den Brechungsindex der optischen Gesetze nach dieser Beziehung wählen. Umgekehrt können wir uns bekannte Lichtwege der geometrischen Strahlenoptik als Elektronenbahnen grundsätzlich verwirklichen, wenn wir das Potential  $\varphi$  so wählen, daß es der Gleichung  $\varphi = \text{const} \cdot n^2$  genügt.

Dies gilt für rein elektrische Brechungsfelder. Bei der Mitwirkung magnetischer Felder treten weniger einfache Verhältnisse auf, die unten besprochen werden<sup>1</sup>.

II. Elektrische Abbildungselemente. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf rein elektrische Felder und suchen nach solchen Anordnungen, die als Sammellinsen, Zerstreungslinsen oder als Spiegel für Elektronenstrahlen angewandt werden können. Einige allgemeine Betrachtungen seien dazu vorausgeschickt.

a) Allgemeines. Während sich der Brechungsindex der in der Lichtoptik verwendeten brechenden Medien nur in verhältnismäßig engen Grenzen variieren läßt, kann man die Begrenzungsflächen der Medien willkürlich wählen und den verschiedenen Aufgaben der Optik anpassen. Eine nachträgliche Änderung der Konstruktion ist so gut wie nicht möglich, höchstens können Teile einer Optik gegeneinander verschoben werden. Im Falle der Elektronenoptik dagegen ist nach erfolgter Wahl der Elektrodenform der Verlauf der Potentialflächen nicht mehr willkürlich, hingegen kann man bequem durch Spannungsänderung den Brechungsindex in weiten Bereichen beliebig verändern. Ein einzelnes elektronenoptisches Abbildungssystem ist daher im allgemeinen vielseitiger verwendbar als ein lichtoptisches. Bei gewissen elektrischen Linsensystemen kann durch einfache Spannungsänderungen eine Sammellinse sogar in eine Zerstreungslinse oder in einen Spiegel verwandelt werden. Weiter ist zu beachten, daß im Gegensatz zur Lichtoptik die die Abbildung

vermittelnden Elektronenstrahlen grundsätzlich nicht ohne Rückwirkung auf den Feldverlauf sind. Die Elektronen können z. B. im gasgefüllten Raum durch Ionenbildung das ursprüngliche Feld indirekt verändern, oder sie können im Hochvakuum durch ihre eigenen Felder eine Feldverzerrung hervorrufen. Eine Überschlagsrechnung über die dabei wirksamen Kräfte zeigt jedoch, daß diese Störungen nur geringfügig sind und im allgemeinen vernachlässigt werden dürfen. Die gegenseitige Abstoßung der Elektronen untereinander kann in einem intensiven, anfangs parallelen Bündel eine Verbreiterung hervorrufen, die bei den hohen Stromstärken, wie sie in gasgefüllten BRAUNschen Röhren vorkommen können, merklich werden könnte. Jedoch sorgt dort die vom Strahl selbst erzeugte positive Raumladung dafür, daß der Elektronenstrahl seinen ursprünglichen Durchmesser einigermaßen beibehält (vgl. Abschn. VI). Derartige Störungen durch den Elektronenstrahl selbst können also im folgenden außerhalb der Betrachtung bleiben.

Wie müssen nun die elektrischen Felder gewählt werden, damit sie eine „Abbildung“ erzeugen? Eine Abbildung im üblichen Sinne liegt dann vor, wenn Strahlen, die von einem Punkt ausgehen, in einem Punkte wieder vereinigt werden und wenn verschiedene Punkte des ausgedehnten ebenen Gegenstandes in einer Ebene derart abgebildet werden, daß das Bild dem Gegenstande geometrisch ähnlich ist. Es läßt sich beweisen, daß jedes elektrische Feld, das rotationssymmetrisch ist, derartige Abbildungseigenschaften hat, zur Elektronenbilderzeugung also benutzt werden kann, sofern wir uns auf solche Strahlen beschränken, die nahe der Achse und nahezu parallel zu ihr verlaufen (Paraxialstrahlen, GAUSSsche Dioptrik).

Wir wollen den wesentlichen Gedankengang dieses Beweises hier in vereinfachter Form angeben, wobei wir uns auf eine „kurze“ Linse beschränken, d. h. annehmen, die Ablenkung jedes Strahls geschehe praktisch in einem Punkte der Mittelebene der Linse. Zunächst wird gezeigt, daß die gewünschte Abbildung stets dann erreicht wird, wenn die als klein vorausgesetzten Ablenkungswinkel proportional dem Abstände des Strahls vom Linsenmittelpunkt sind. Sodann zeigen wir, daß rotationssymmetrische elektrische Felder solche abstandsproportionalen Ablenkungen liefern.

Vorausgesetzt sei also nur, daß alle Ablenkungswinkel proportional  $r$  seien, wo  $r$  den Abstand der Durchtrittsstelle der Strahlen durch die brechende Fläche vom Mittelpunkt der Linse angibt (vgl. Fig. 1).

Es sei  $r_2 = 1/n r_3$ , wo  $n$  eine beliebige Zahl ist. Alle durch  $O$  gehenden Strahlen werden nach Voraussetzung nicht abgelenkt.  $P_3$  sei ein beliebiger Objektpunkt außerhalb der Achse, sein Bildpunkt  $P_3'$ . Ist  $\Delta$  der Ablenkungswinkel des zur Achse parallelen Strahles 3, so ist nach Voraussetzung der Ablenkungswinkel  $\delta$  des Strahles 2:  $\delta = 1/n \Delta$ . Zu zeigen ist, daß der Strahl 2' auch durch  $P_3'$  geht. Wir werden umgekehrt zeigen, daß der durch  $P_3'$  gehende Strahl  $\bar{P}_2 P_3'$  — und dann natürlich auch nur dieser — den geforderten Ablenkungswinkel  $1/n \Delta$  hat.

<sup>1</sup> Eine ausführliche Darstellung der Grundlagen der geometrischen Elektronenoptik gibt das Buch von E. BRÜCHE und O. SCHERZER, Geometrische Elektronenoptik, Berlin: Julius Springer 1934. Vgl. hierzu weiter H. BUSCH und E. BRÜCHE: Beiträge zur Elektronenoptik. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1937, eine Sammlung von Vorträgen auf der Physikertagung in Bad Salzbrunn, sowie E. BRÜCHE u. W. HENNEBERG: Erg. exakt. Naturwiss. 15, 365 (1936). Auf die Angabe von Einzelliteratur verzichten wir in diesem Bericht. Es sei nur darauf hingewiesen, daß sich außer den genannten Forschern besonders M. KNOLL und E. RUSKA, sowie M. VON ARDENNE um die Entwicklung der Elektronenoptik verdient gemacht haben.



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{n''} \int_{n'}^{\frac{z''}{\rho}} \frac{dn}{\rho} = \frac{1}{n''} \int_{z'}^{\frac{z''}{\rho}} \frac{1}{\rho} \frac{dn}{dz} dz,$$

wo  $z'$  und  $z''$  die Koordinaten von Eintritts- und Austrittsstelle des Strahles sind und  $n'$  und  $n''$  die dort herrschenden Brechungsindizes. Nun ist aber (vgl. Abschn. I)  $n = \text{const} \sqrt{\varphi}$ , also

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(z'')}} \int_{z'}^{\frac{z''}{\rho}} \frac{1}{\rho} \frac{d\sqrt{\varphi}}{dz} dz = \frac{1}{2\sqrt{\varphi(z'')}} \int_{z'}^{\frac{z''}{\rho}} \frac{dz}{\rho \sqrt{\varphi}} dz.$$

Dabei können wir für  $\varphi$  überall die Werte auf der Achse selbst einsetzen, so daß  $\varphi$  nur noch als Funktion von  $z$  allein anzusehen ist. Nach bekannten

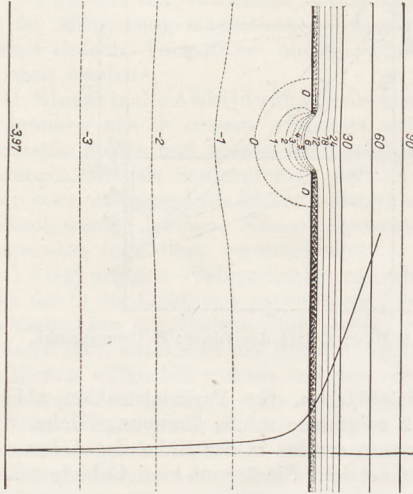


Fig. 3. Potentialfeld einer Lochblenden-Sammellinse.

Formeln der Differentialrechnung läßt sich schließlich der Krümmungsradius der Potentialfläche  $\varphi(z, r) = \text{const}$  in der Nähe ihres Schnittpunktes  $z_0$  mit der Achse allgemein mittels einer Reihenentwicklung von  $\varphi$  nach Potenzen von  $r$  und  $(z-z_0)$  berechnen. Man erhält, wie hier nicht näher aus-

geführt sei,  $\rho = \frac{z}{\frac{d^2\varphi}{dz^2}}$  ( $\varphi$  wiederum nur als Funktion

von  $z$  aufgefaßt). Damit ergibt sich für die Brennweite der elektrischen Linse:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{4\sqrt{\varphi(z'')}} \int_{z'}^{\frac{z''}{\rho}} \frac{d^2\varphi}{dz^2} \frac{dz}{\sqrt{\varphi}} dz.$$

Für die rechnerische Bestimmung der Brennweite aus dieser Formel ist also die Kenntnis des Potentials und seiner zweiten Ableitung längs der Achse notwendig. Grundsätzlich läßt sich  $\varphi$  beim Fehlen von Raumladungen aus der LAPLACESchen Differentialgleichung  $\Delta\varphi = 0$  mit den dem jeweils vorliegenden Problem angepaßten Randbedingungen eindeutig berechnen. Im allgemeinen ist diese Methode zu umständlich, so daß man in konkreten Einzelfällen sich die notwendige Kennt-

nis von  $\varphi$  durch Messungen — etwa mit elektrischen Sonden — erwerben muß. Leider liefern solche Messungen infolge ihrer beschränkten Genauigkeit nur sehr mangelhafte Werte der zweiten Ableitungen, so daß die Brennweite praktisch nur schätzungsweise vorausberechnet werden kann. Ihr genauer Wert wird vielmehr nachträglich aus den Abbildungseigenschaften des Systems festgestellt.

Aus der Gleichung für  $f$  lassen sich leicht zwei allgemeine Folgerungen ablesen: Die Brennweite ist unabhängig von Ladung und Masse der Teilchen, die Gültigkeit der genannten Beziehung ist also nicht auf Elektronen beschränkt. Die Bahnen aller geladenen Teilchen im elektrischen Felde sind die gleichen, wenn die Potentiale gleich sind; nur die Zeit, in der die Bahnen durchlaufen werden, ist eine andere für verschiedene Teilchen, da ihre Ge-

schwindigkeit ( $v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}$ ) natürlich auch durch

$e$  und  $m$  bedingt ist. Ferner kann man alle Spannungen um einen beliebigen Faktor erhöhen, ohne  $f$  zu ändern, da dann in Zähler und Nenner der Multiplikator in derselben Potenz auftreten wird. Man kann daher, ohne den Strahlverlauf zu stören, statt mit Gleichspannung zu arbeiten, alle Teile der Apparatur mit synchroner Wechselspannung betreiben. Allerdings muß dabei in Kauf genommen werden, daß nun die Elektronengeschwindigkeit zeitlich variiert.

b) Lochblendenlinse. Das einfachste rotationssymmetrische Abbildungselement erhält man durch eine Lochblende, die gegenüber einer benachbarten Vollelektrode, z. B. der Kathode selbst, beliebig aufgeladen sein kann. Fig. 3 gibt ein quantitatives Bild des Verlaufs der Äquipotentiallinien, wenn das Potential der Lochblende stark verschieden von dem einer rechts zu ergänzenden Elektrode ist, während der Raum links der Blende nahezu feldfrei sein soll, wie es durch eine auf fast gleichem Potential mit der Lochblende weiter links befindliche Elektrode bewirkt wird. Jede Äquipotentiallinie ist durch ihr Potential gekennzeichnet. Gleichzeitig enthält die Figur den Verlauf des Potentials in der Achse als Funktion des Ortes<sup>1</sup>. Diese Kurve veranschaulicht mittelbar den Geschwindigkeitsanstieg der Elektronen, die, aus der links zu denkenden Kathode austretend, das Feld durchlaufen.

Im vorliegenden Falle läßt sich  $f$  durch Auswertung der allgemeinen Brennweitengleichung berechnen zu  $f = \frac{4\varphi_0}{\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2}$ , wo  $\varphi_0$  das Potential der Blende ist und  $\mathfrak{E}_1$  bzw.  $\mathfrak{E}_2$  die Feldstärken links bzw. rechts der Blende angeben, und zwar dort, wo die Feldstärken (Neigung der  $\varphi$ -Kurven) praktisch

<sup>1</sup> In der aus dem Buche von BRÜCHE-SCHERZER entnommenen Figur sind die Äquipotentialflächen von einem andern Nullpunkt aus gezählt als der in der Potentialkurve zugrunde gelegte. Die in den Formeln auftretenden Potentiale beziehen sich aber immer auf den eingangs definierten Nullpunkt in der Kathode.

konstante Werte angenommen haben. Da ( $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ ) positiv oder negativ sein kann, so kann die Lochblende sowohl Sammell- als auch Zerstreuungslinse sein.

Ein anschauliches mechanisches Bild von den Verhältnissen in elektrischen Linsen erhält man dadurch, daß man die elektrischen Potentiallinien in mechanische Potentiallinien (Höhenlinien) umdeutet und das Elektron als Kugel auffaßt, die sich im „Potentialgebirge“ nach den Gesetzen der Mechanik bewegt, die also von höheren zu niederen Potentialwerten „fällt“. Da das Elektron wegen seiner negativen Ladung in Richtung höheren Potentials beschleunigt wird, so trägt man zweckmäßigerweise das negative Potential nach oben als Höhe auf. Das so erhaltene Potentialgebirge einer Lochblenden-Zerstreuungslinse zeigt Fig. 4. Die Blende liegt senkrecht zur Grundebene des Modells, parallel zum oberen Rand, an der Stelle, wo der Anstieg des Potentials am Rande der Platte beginnt. Rechts von der Blende herrscht kein Potentialgefälle; in einiger Entfernung ist  $\mathcal{E}_2 = 0$ . Links der Blende wird das Potential stark negativ. Dieses Feld greift durch das Blendenloch in Form eines Bergrückens auf die andere Seite über. Von links oben kommende Elektronen fallen das Potentialgebirge hinunter und rollen mit wachsender Geschwindigkeit ( $\mathcal{E}_1 < 0$ ) den Bergrücken hinab, wobei sie stets — bis auf die genau in der Symmetrieachse selbst fliegenden — nach außen abgelenkt werden. Wir haben die Wirkung einer Zerstreuungslinse ( $\mathcal{E}_2 = 0, \mathcal{E}_1 < 0$ ) veranschaulicht. Selbstverständlich muß dieses gleiche System ebenso dispergierend auf Elektronen wirken, die aus entgegengesetzter Richtung kommen. Auch deren Verlauf veranschaulicht das Potentialgebirge. Die Elektronen müssen in diesem Fall eine genügende Anfangsgeschwindigkeit haben, um die gesamte Potentialhöhe zu überwinden, sonst werden sie auf ihrem Wege zur Blende völlig abgebremst und rutschen seitlich vom Bergrücken ab. Aber auch bei genügend hoher Anfangsgeschwindigkeit wird das Gefälle des Bergrückens allen Teilchen, die parallel zum Grat von unten her gegen den Berg anlaufen, eine Bewegungskomponente nach außen erteilen, so daß ein parallel ankommender Elektronenstrahl die Linse divergent verläßt.

Geben wir der Elektrode links von der Blende aber umgekehrt ein stark positives Potential, so wird aus dem Potentialgebirge eine entsprechende Potentialmulde, auf deren oberem Böschungsrund die elektrische Feldstärke  $\mathcal{E}_2 = 0$  herrscht. Lassen wir die Elektronen wieder von links kommen, so müssen sie von der Talsohle aus gegen die Böschung ansteigen ( $\mathcal{E}_1 > 0$ ) und werden dabei von den Seitenwänden nach innen abgelenkt werden (Sammellinse). In entgegengesetzter Richtung fliegende Elektronen werden vom oberen Rande der Böschung mit wachsender Geschwindigkeit in die Mulde fallen und dabei in die mittlere Fallrinne zusammengedrängt werden.

c) Einzellinsen. Bei allen Lochblendenlinsen schließt sich mindestens auf der einen Seite der Linse ein Gebiet mit merklichem Potentialgefälle, also variablem Brechungsindex, an; anders bei den

so. Einzellinsen. Wir verstehen darunter Abbildungssysteme, die in Gebieten mit konstantem Brechungsindex (feldfreie Räume) eingebettet sind. Die Analogie zu einer einzelnen Linse der Lichtoptik liegt auf der Hand, mag der Brechungsindex nun auf beiden Seiten der Linse den gleichen Wert haben (normale Einzellinse), oder mögen sich beide Werte unterscheiden (Immersions-Einzellinse). Wir betrachten hier zunächst nur die erste, durch welche die Elektronengeschwindigkeit im Endeffekt also nicht geändert wird. Sie kann auf verschiedene Weise hergestellt werden; die

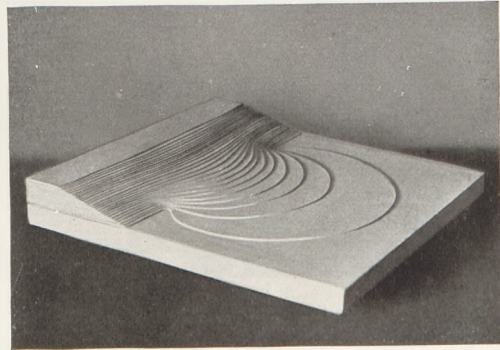


Fig. 4. Potentialgebirge einer Lochblenden-Zerstreuungslinse.

typische Konstruktion besteht aus drei Lochblenden, von denen die äußeren auf gleichem Potential gehalten werden. Den Potentialverlauf zeigt Fig. 5; das zugehörige Potentialgebirge (Fig. 6) hat in der Mitte einen Sattelpunkt.

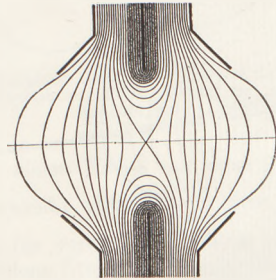


Fig. 5. Potentialfeld der Einzellinse.

Die Brennweite der Einzellinse berechnet sich wieder aus der allgemeinen Formel nach einigen Umformungen; es ist:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\varphi_m - \varphi_a}{\varphi_a}} \int_z^{z'} \frac{[\varphi' / (\varphi_m - \varphi_a)]^2}{\sqrt{\varphi | (\varphi_m - \varphi_a)^3}} dz.$$

Dabei bedeutet  $\varphi_a$  das Potential der Außen- elektroden,  $\varphi_m$  das der Mittelelektrode,  $\varphi = \varphi(z)$  das variable Potential auf der Systemachse,  $\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$ . Die Gleichung zeigt, daß  $f$  immer positiv ist, unabhängig davon, ob die Mittelelektrode positiv oder negativ gegen die äußeren Elektroden aufgeladen ist (Vertauschung von  $\varphi_a$  und  $\varphi_m$  ändert wohl den Zahlenwert von  $f$ , nicht aber das Vor-

zeichen<sup>1</sup>. Die Einzellinse ist daher immer Sammellinse.

Diesen Tatbestand wollen wir uns an Hand von Fig. 6 anschaulich klarzumachen versuchen. In

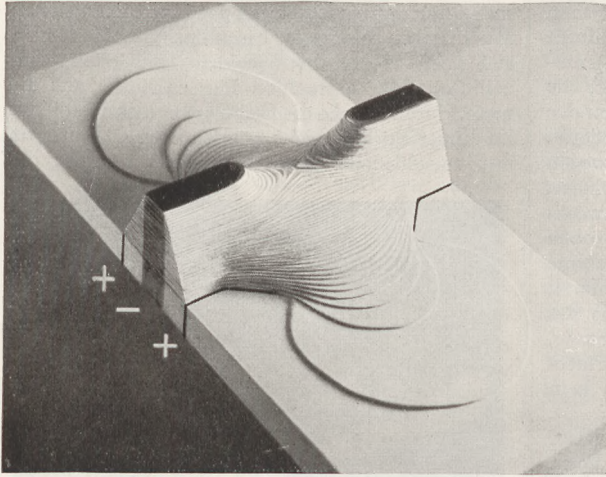


Fig. 6. Potentialgebirge der Einzellinse.

der Figur ist die Mittelelektrode negativ gegenüber den beiden äußeren gewählt. Das parallel zur Symmetrieachse ankommende Elektron verliert an dem aufsteigenden Grat an kinetischer Energie so

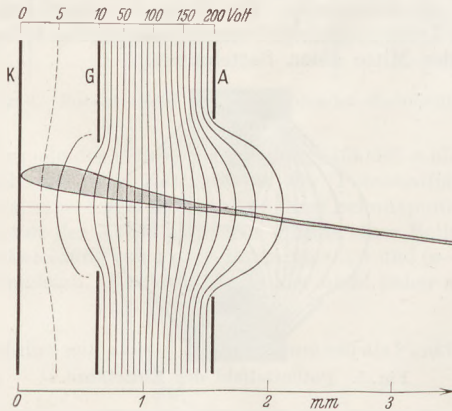


Fig. 7. Potentialfeld einer Immersionslinse (Immersionsobjektiv).

viel, wie es nach Passieren des Sattels wieder gewinnt, da es auf der gleichen Grundebene landet. Seine Richtung wird jedoch geändert. In den Außenbezirken wird das Elektron bei An- und Abstieg nach außen abgelenkt, in der Umgebung des Sattels selbst dagegen nach innen. Welche

<sup>1</sup> Man darf übrigens nicht denken, daß sich der Einfluß von  $(\varphi_m - \varphi_a)$  in der Brennweite nicht bemerkbar machte, weil sich  $(\varphi_m - \varphi_a)$  verkürzen läßt; denn die Potentialdifferenz zwischen Mittel- und Außenelektrode bestimmt auch den Verlauf von  $\varphi(z)$  und  $\varphi'(z)$ .

Ablenkung überwiegt? Die Gesamtzahl aller nach außen bzw. nach innen ablenkenden Niveaustufen ist die gleiche, da beim Durchlaufen des Potentialfeldes jede auf den Elektroden endigende Falllinie (Kraftlinie) kein- oder zweimal — und dann mit entgegengesetzter Ablenkungswirkung — von der Elektronenbahn geschnitten werden muß. Wegen der verringerten Geschwindigkeit auf dem Sattel wirken die dort herrschenden Sammelkräfte aber längere Zeit als die zerstreuen Kräfte auf den Außengraten, so daß der gesamte transversale Impuls nach innen gerichtet ist: Die Anordnung stellt eine Sammellinse dar. Ist umgekehrt die Innenelektrode positiv, so durchläuft der Elektronenstrahl die sammelnd wirkenden äußeren Potentialmulden mit geringerer Geschwindigkeit als den zerstreuen wirkenden Grat im Zentrum. Diesmal überwiegt die Außenwirkung; wir haben wieder eine Sammellinse vor uns.

Die einfachste Form einer Immersionslinse besteht aus zwei Lochblenden auf verschiedenem Potential in einem sonst feldfreien Raum. Wir beschreiben

hier nur eine in der Praxis häufig benutzte, etwas abgewandelte Form, das sog. Immersionsobjektiv. Fig. 7 gibt ein Bild der Blendenanordnung mit Äquipotentiallinien und Strahlenverlauf für speziell gewählte Blendenpotentiale. Bei diesem Objektiv grenzt die erste Blende  $G$  („Gitter“) nicht an einen völlig feldfreien Raum an, sondern ist gegen die dicht vor ihr liegende Kathode, das Objekt, noch schwach aufgeladen. Die Wirkung dieses Systems läßt sich ohne weiteres als die zweier hintereinander liegender Lochblendenlinsen verstehen (Abschn. II b), deren erste ( $G$ ) die Elektronenstrahlen sammelt, deren zweite ( $A$ ) sie zerstreut. Wegen der längs des Strahls wachsenden Geschwindigkeit ist die Wirkung von  $A$  gering, und der Strahl wird als schmales konvergentes Bündel das Immersionsobjektiv verlassen. Am plastischen Modell der Fig. 8 kann man leicht das Gesagte nachprüfen.

d) Elektronenspiegel. Erhöht man das Potentialgebirge einer Einzellinse (Fig. 6) so stark, daß die Geschwindigkeit der Elektronen nicht mehr zur Überwindung ausreicht, dann werden die Elektronen zurückgeworfen, die Linse ist zum Spiegel geworden. In der Lichtoptik ist natürlich eine solche Umwandlung des optischen Systems völlig unmöglich. Diese Elektronenspiegel haben jedoch längst nicht die guten Abbildungsqualitäten lichtoptischer Spiegel. Wohl kann man sie aber benutzen, um Intensitäten zu steuern, als elektronenoptische „Irisblende“. Am Modell der Fig. 6 läßt sich leicht überlegen, daß bei allmählicher Erhöhung des mittleren Potentialgebirges zuerst die achsenfernen Strahlen zurückgehalten werden, so daß nur noch eine kleine Blendenöffnung als Linse wirkt. Mit wachsendem negativen Potential schließt sich die Öffnung der Irisblende immer mehr. Es ist klar, daß die rechnerische

Behandlung des Übergangs der Elektronenlinse zur Irisblende bzw. zum Vollspiegel sehr umständlich ist, da man hier keineswegs mehr mit der GAUSS'schen Näherung der Paraxialabbildung auskommt. Gerade in der Nähe der kritischen Spannung, bei der die Elektronen eben nicht mehr durchgelassen werden, bleiben sie sehr lange Zeit im Mittelfelde der Linse und erleiden starke Ablenkungen zur Achse hin, so daß sie nicht mehr als Paraxialstrahlen behandelt werden können. Unter Umständen pendeln die Elektronen sogar zwischen den Sattelpöschungen längere Zeit hin und her. In dieser Abweichung von der GAUSS'schen Dioptrik liegt natürlich die Begründung für die schlechten Abbildungseigenschaften eines solchen Spiegels.

Im Anschluß an die elektronenoptische Irisblende sei noch auf andere Möglichkeiten zur Intensitätssteuerung eines Strahls hingewiesen: Wenn man an einer Stelle möglichst kleinen Querschnitts des Strahls eine Lochblende anbringt (möglichst im feldfreien Raum, damit sie nicht ihrerseits das Feld verändert und als Lochblendenlinse wirkt), dann kann man die durch sie hindurchtretende Strahlung dadurch schwächen, daß man ein ablenkendes Querfeld vor der Blende anbringt und durch seine Variation einen mehr oder weniger großen Teil des Strahlenbündels auf den Blendenrand ablenkt. Eine andere Methode ist die, daß man die Brennweite der abbildenden Linse ändert; dadurch wird der Querschnitt des Bündels am Blendenort geändert, und es kommt ebenfalls nur noch ein Teil durch die Öffnung der Blende.

III. Magnetische Abbildungselemente. Ein Magnetfeld wirkt auf Elektronen in ganz anderer Weise ein als ein elektrisches Feld. Da das magnetische Feld im Gegensatz zum elektrischen stets nur eine Änderung der Geschwindigkeitsrichtung hervorrufen kann, werden Magnetfelder in der Elektronenoptik nur dann benutzt, wenn es sich um abbildende Wirkung auf Elektronen handelt, deren Geschwindigkeitsgröße nicht beeinflusst werden soll. Die Kraft der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$  wirkt stets senkrecht zur Ebene durch  $\mathfrak{H}$  und  $v$  (Linke-Hand-Regel); die zu  $\mathfrak{H}$  senkrechte Komponente der Bahn wird zu einem Kreise vom Radius  $\varrho$  deformiert, nach dem Kraftansatz  $\frac{mv_{\perp}^2}{\varrho} = ev_{\perp}H$ , wo  $v_{\perp}$  die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu  $\mathfrak{H}$  ( $H = |\mathfrak{H}|$ ) ist. Eine unmittelbare Übertragung der Brechungsverhältnisse in elektrischen Feldern und des dort definierten Brechungsindex ist also unmöglich. Will man die Sprache der Lichtoptik auch auf diese Verhältnisse anwenden, so muß der Brechungsindex in unanschaulicher Form durch das magnetische Vektorpotential und die Strahlrichtung ausgedrückt werden. Diese Analogie ist hier wenig fruchtbar. Wir werden die Bahnen, welche die Elektronen im Magnetfelde beschreiben, unmittelbar aus ihren Bewegungsgesetzen zu verstehen suchen, um festzustellen, ob auch in magnetischen Feldern die Konzentration von divergenten Elektronenstrahlen zu „Bildpunkten“ möglich ist. Wir zeigen das zunächst für den Fall, daß die Elek-

tronen auf ihrer ganzen Bahn in einem homogenen Felde verlaufen.

Vorausgesetzt sei, daß die Strahlen wieder nur kleine Winkel mit der Symmetrieachse des Strahlenbündels bilden. Dessen Achse ( $z$ -Richtung) laufe parallel zu den magnetischen Kraftlinien. Die Elektronengeschwindigkeit zerlegen wir in die

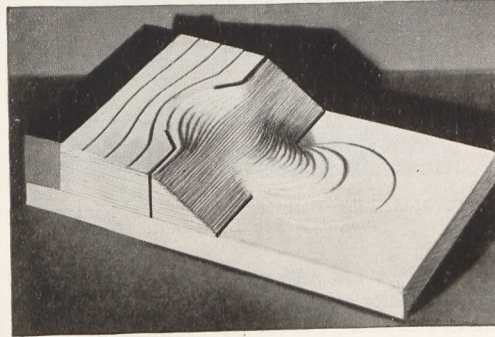


Fig. 8. Potentialgebirge des Immersionsobjektivs.

beiden Komponenten  $v_z$  und  $v_r$ , parallel und senkrecht zur  $z$ -Achse. Das Feld wirkt ausschließlich auf  $v_r = v \cdot \sin \alpha$  ( $\alpha =$  Winkel zwischen  $z$ -Achse und Strahl), wobei die Radialkomponente der Be-

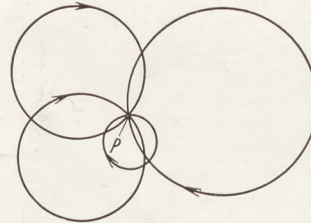


Fig. 9. Projektion der Elektronenbahnen auf eine Ebene senkrecht zur Feldrichtung im homogenen Magnetfeld.

wegung zu einem Kreise mit dem Radius  $\varrho = \frac{mv \sin \alpha}{eH}$  abgelenkt wird. Fig. 9 stellt einige solcher Kreise für verschiedene Werte von  $v_r$ , also für verschiedene Strahlrichtungen, dar. Sie sind gleichzeitig die Projektionen der Elektronenbahnen auf die Ebene senkrecht zur  $z$ -Achse. Die wahren Bahnen sind Schraubenlinien, die Überlagerung der Kreisbewegung mit der linearen Fortpflanzung längs  $z$  mit der Geschwindigkeit  $v_z = v \cos \alpha \approx v$  ( $\alpha$  kleiner Winkel!). Nun ist die zum Durchlaufen des Kreises notwendige Zeit  $\tau = \frac{2\pi\varrho}{v_r} = \frac{2\pi m}{eH}$  von  $\varrho$  und  $v_r$  unabhängig; also haben alle Elektronen nach der gleichen Zeit wieder den Ursprungspunkt in der Projektionsebene erreicht. Sie sind im Raum aber um das Stück  $v_z \cdot \tau \approx \frac{2\pi m v}{eH}$  längs der  $z$ -Richtung fortgeschritten, bilden also den Punkt  $P$  im Bildpunkt  $P'$  ab, der um  $v\tau$  von  $P$  entfernt liegt. Ein räumliches Modell der von den Elektronen beschriebenen Schraubenbewegung zeigt Fig. 10. Von einem ausgedehnten Objekt, das Elektronen

gleicher Geschwindigkeit aussendet, liefert ein homogenes Feld auf die eben beschriebene Weise Punkt für Punkt ein aufrechtes, gleichgroßes Bild in dem angegebenen Abstand. (In der doppelten, dreifachen Entfernung usw. wiederholt sich dasselbe.) Trotzdem können wir dieses abbildende

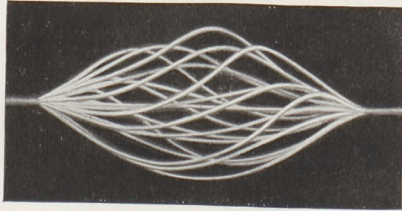


Fig. 10. Modell der Elektronenbahnen im homogenen magnetischen Längsfeld.

System nicht als allgemeine Linse bezeichnen; z. B. hat es hier keinen Sinn, von einer Brennweite zu reden, da parallele Strahlen durch das Feld überhaupt nicht vereinigt werden.

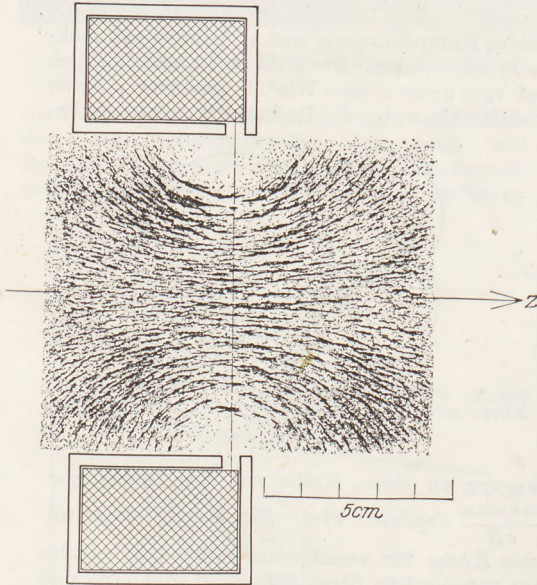


Fig. 11. Durchschnitt durch eine gekapselte Magnetspule mit Kraftlinienfeld.

Eine eigentliche magnetische Linse, die recht häufig bei elektronenoptischen Systemen benutzt wird, erhält man erst bei Verwendung begrenzter magnetischer Felder, in der Regel durch Anwendung einer kurzen stromdurchflossenen Spule. Nun ist es aber praktisch schwer möglich, die zur Erzielung hoher Felder notwendige Zahl Windungen auf genügend engem Raum zusammenzupressen. Man hilft sich durch den Kunstgriff, daß man die Spule nach Fig. 11 mit einer Eisenkapselung versehen, die nur einen engen Spalt freiläßt. In der Figur ist der Verbrauch der magnetischen Kraftlinien ohne weiteres erkennbar. Fig. 12, welche die z-Komponente der zugehörigen Feldstärke längs der Achse zeigt, läßt erkennen, daß das ges-

samte Feld tatsächlich hierdurch in einem sehr kleinen Raum konzentriert ist. Dabei wurde eine Spule aus 6500 Windungen mit 0,1 A benutzt; der Spalt war 4 mm breit; der Innendurchmesser der Spule betrug 10 cm.

Wir wollen nun durch einfache anschauliche Überlegungen die Wirkung eines derartigen inhomogenen Magnetfeldes auf Elektronenstrahlen klarzumachen versuchen und insbesondere die Möglichkeit einer Abbildung erörtern. Wie im elektrischen Falle beschränken wir uns wieder auf Paraxialstrahlen.

$P_1$  sei ein Punkt auf der z-Achse, der Symmetrieachse des rotationssymmetrischen kurzen Magnetfeldes;  $P_1$  liege außerhalb des Feldes. Ein unter

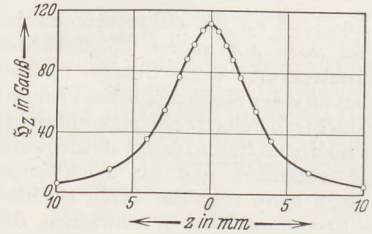


Fig. 12. Verlauf der magnetischen Feldstärke in der Achse für die Spule der Figur 11.

dem kleinen Winkel  $\alpha$  von  $P_1$  abgeschossenes Elektron steht beim Eintritt ins Feld (im Gegensatz zum homogenen Fall) außer unter der Wirkung der axialen Komponente  $S_z$  wesentlich unter dem Einflusse der radialen Komponente  $S_r$ . Aus der Richtung der magnetischen Kraftlinien (vgl. Fig. 11) liest man unmittelbar ab, daß  $S_r$  in der Mitte der Spule verschwindet, links und rechts endliche, entgegengesetzt gleiche Werte besitzt und im Verhältnis zu  $S_z$  nach außen hin zunimmt. In einem willkürlich herausgegriffenen Querschnitte des Feldes senkrecht zur Achse nimmt  $S_r$  mit wachsendem Achsenabstand  $r$  in erster Näherung linear zu (wir setzen  $S_r = r \cdot S_r - 1$ ), vorausgesetzt, daß die Gesamtfeldstärke für konstantes  $z$  unabhängig von  $r$  ist, was in Achsennähe genügend genau erfüllt sein wird<sup>1</sup>.

Das Elektron habe eine Geschwindigkeitskomponente  $v_z \approx v$  parallel der Achse und eine geringe Radialgeschwindigkeit  $v_r = v \cdot \sin \alpha$ . Die Figuren 13a und 13b sind Projektionen des Strahlenverlaufs auf zwei verschiedene Ebenen, die eine auf die durch z-Achse und den Ausgangsstrahl definierte Ebene, die andere auf eine Ebene senkrecht zur z-Achse, wobei zugehörige Strahlprojektionen mit der gleichen Ziffer bezeichnet sind. Beim Eintritt in das Feld wird das Elektron zunächst durch  $S_r$  senkrecht zu seiner Bahn, aus der Zeichenebene heraus, mit einer Kraft  $K_s = evS_r$  abgelenkt. Die Wirkung von  $S_z$  auf die Radialkomponente  $v_r$  kann vernachlässigt werden, solange  $\alpha$  genügend klein ist. Die durch diese Kraft hervorgerufene

<sup>1</sup> Es ist zu bemerken, daß  $S_r$  nicht frei wählbar ist, sondern durch den Verlauf von  $S_z$  mitbedingt ist, da der Zuwachs von  $S_z$  längs der Achse ja durch Kraftlinien, die auf die Achse zu gerichtet sind, gedeckt werden muß.



Bewegungskomponente würde in einer Ebene senkrecht zu den Zeichenebenen der Figur 13 (im Grundriß) eine gekrümmte Bahn darstellen, deren Krümmungsradius wegen der veränderlichen Feldstärke  $\mathfrak{H}_r$  von Punkt zu Punkt variiert. Bis zur Mittelebene der Spule wirkt die seitlich ablenkende Kraft in derselben Richtung, die seitliche Geschwindigkeitskomponente  $v_s$  nimmt bis dahin zu. In der Mittelebene, wo  $\mathfrak{H}_r$  durch Null geht, kehrt sich die Ablenkungsrichtung um,  $v_s$  wird allmählich wieder auf Null abgebremst, so daß dann die Geschwindigkeit des Elektrons wieder nur aus den Komponenten  $v_r$  und  $v_z$  besteht. Das Elektron muß also nach Verlassen des Feldes sich wieder geradlinig in einer Ebene, welche die Achse enthält, bewegen. Vermöge der seitlichen

zu zeigen, daß die nach innen ablenkenden Kräfte  $K_r$  proportional dem Achsenabstand  $r$  sind; denn dann garantiert der allgemeine Abbildungssatz von Abschn. II a die Möglichkeit der Entstehung eines Bildes. Der Betrag der Kraft  $K_r$  ist  $K_r = ev_s \cdot \mathfrak{H}_r$ , wo sich  $v_s$  seinerseits durch Integration aus dem Kraftansatz  $m \frac{dv_s}{dt} = K_s = ev \mathfrak{H}_r = evr \mathfrak{H}_r$  berechnet. Da  $r$  für die Integration innerhalb der kurzen Linse als Konstante anzusehen ist, folgt, daß  $v_s$  und damit auch  $K_r$  proportional  $r$  ist.

Der Verlauf einiger Strahlen ist in Fig. 13 durch zwei Projektionen dargestellt.  $P_1P_2$  sei der Gegenstand,  $P_1'P_2'$  die Projektion des Bildes,  $F$  sei der Brennpunkt; bei  $L$ , dem Linsenort, sind einige Kraftlinien angedeutet. Die Projektion 13a

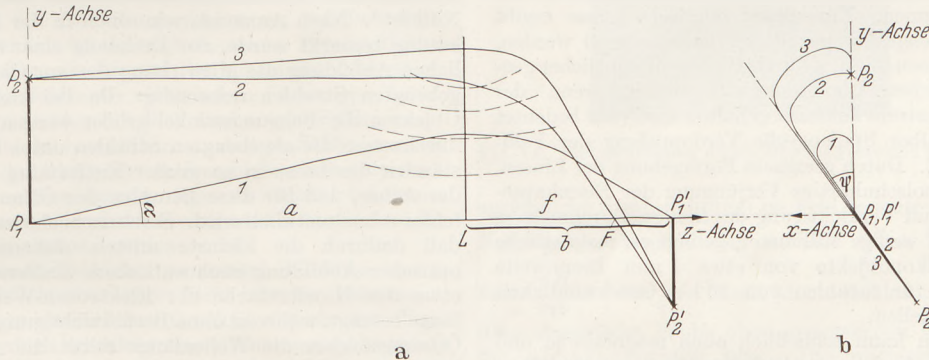


Fig. 13. Abbildung durch eine kurze magnetische Linse. a) Projektion der Elektronenbahnen auf eine Ebene durch die Achse. b) Projektion auf eine Ebene senkrecht zur Achse.

Bewegung des Elektrons innerhalb des Feldes ist diese Ebene aber gegenüber der Ausgangsebene (Zeichenebene) um einen Winkel  $\psi$  gedreht, der sich aus dem Feld zu  $\psi = \frac{e}{2mv} \cdot \int_{z_1}^{z_2} \mathfrak{H}_z \cdot dz$  berechnen läßt, wo  $z_1$  und  $z_2$  zwei Achsenpunkte links und rechts außerhalb des Feldes bedeuten. Wesentlich ist, daß  $\psi$  unabhängig von  $\alpha$  und  $r$  ist; also werden alle Strahlen, die vorher in einer Ebene waren, auch nachher wieder in einer einzigen Ebene verlaufen.

Wir wissen nun zwar, daß das Elektron sich wieder in einer die Achse enthaltenden Ebene bewegt. Eilt es aber von der Achse fort oder auf sie zu? Zur Beantwortung dieser Frage bedenken wir, daß die seitliche Geschwindigkeitskomponente  $v_s$  zusammen mit der stets vorhandenen axialen Feldstärke  $\mathfrak{H}_z$  eine neue Ablenkung ergibt, und zwar wird das Elektron nach der Linken-Hand-Regel zur Achse hin abgelenkt. Diese Kraft überwindet, wie man berechnen kann, die Fliehkräfte des Elektrons. Sie ist größer, als zur Aufrechterhaltung einer Kreisbahn in der Zeichenebene der Fig. 13b notwendig wäre, so daß das Elektron nach Verlassen der Linse nicht von der Achse wegläuft, sondern der Elektronenstrahl die Achse in einem Punkt  $P_1'$  schneiden wird.

Um einzusehen, daß nun auch alle von  $P_1$  ausgehenden Paraxialstrahlen sich im gleichen Schnittpunkte mit der Achse sammeln, brauchen wir nur

ist natürlich im Grunde wesensgleich mit Fig. 1. Auf eine genaue Diskussion der Kräfteverhältnisse für die von einem Punkt außerhalb der Achse ausgehenden Strahlen 2 und 3 verzichten wir hier. Der Winkel  $\psi$ , um den das Bild gegenüber dem Objekt gedreht erscheint, ist in der Zeichnung stark übertrieben. In der Regel beträgt  $\psi$  nur wenige Grade.

Für die kurze magnetische Linse gilt nun selbstverständlich das Linsengesetz  $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ; für die Brennweite ergibt sich  $f = \frac{4m^2v^2}{e^2} \cdot \frac{1}{\int_{z_1}^{z_2} \mathfrak{H}_z^2 \cdot dz}$ . Da

wir in der Praxis das magnetische Feld im allgemeinen durch stromdurchflossene Spulen erzeugen, ist es zweckmäßig, die Brennweite aus Stromstärke  $i$  und Windungszahl  $N$  zu berechnen.

Man erhält dann  $f = 48,4 \cdot \frac{Ud}{i^2 N^2}$ , wo  $U$  die kinetische Energie des Elektrons in e-Volt ist und  $d$  den mittleren Durchmesser der Spule bedeutet. Die Brennweite der Linse der Fig. 11 beträgt z. B. etwa 3 cm.

Aus der Brennweitenformel folgt, daß die magnetische Linse nur Sammellinse sein kann, da  $f$  unabhängig vom Vorzeichen von  $\mathfrak{H}_z$  immer positiv ist. Da sich bei Umkehr des Feldes aber auch das Vorzeichen von  $\mathfrak{H}_z$  umkehrt und damit das von  $v_s$ , so ändert sich dagegen der Drehungs-

sinn der Bahnebene; dies folgt auch unmittelbar aus der Gleichung für  $\psi$ , in der nur  $\mathfrak{H}_z$  das Vorzeichen wechselt. Die Kraft  $K_r$  jedoch ( $\propto v_s \cdot \mathfrak{H}_z$ ) behält ihr Vorzeichen bei.

Zum Schluß der Ausführungen über die möglichen Linsentypen sei noch erwähnt, daß die Veränderung der Brennweite allein durch Feldänderung zwar formal möglich, aber nicht immer zweckmäßig ist. Wenn es sich darum handelt, mit kleiner Brennweite und Gegenstandsweite zu arbeiten, dann würde die räumliche Ausdehnung der Felder unter Umständen über das Objekt hinausgreifen, und es würde ein Teil des Feldes unwirksam werden. Man muß also, statt eine Feldvergrößerung vorzunehmen, die Gesamtdimension der Linse verkleinern, um sie mit kurzer Brennweite in die Nähe des Gegenstandes setzen zu können. Für die magnetische Linse ergibt sich beispielsweise: Soll  $f$  halb so groß werden, so können wir dies durch Halbieren sämtlicher geometrischer Dimensionen erreichen, wenn der Spulenstrom konstant gehalten wird (das bedeutet bei halber Spulengröße Verdoppelung der Feldstärke). Durch geeignete Formgebung der Linsen, z. B. polschuhartige Verjüngung der Eisenkapelung und Verkleinerung des lichten Durchmessers bis auf wenige Millimeter, gelingt es, magnetische Mikroskopobjekte von etwa 1 mm Brennweite selbst für Strahlen von 80 kV Geschwindigkeit herzustellen.

Man kann schließlich auch magnetische und elektrische Linsen überlagern, sogar an derselben Raumstelle. Die Brechkraft der Gesamtlinse setzt sich dann in erster Näherung additiv aus den Einzelbrechkraften zusammen derart, daß 
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{el}} + \frac{1}{f_{mg}}$$
 wobei aber für  $f_{mg}$  nicht die Brennweite der reinen magnetischen Linse zu setzen ist (ohne elektrisches Feld), sondern die einer magnetischen Linse mit einem speziellen einfachen elektrischen Feld. Hierauf näher einzugehen, führt über den Rahmen dieses Berichtes hinaus.

IV. Abbildungsfehler. Alle bisher behandelten Strahlengänge sind unter der Voraussetzung GAUSSscher Dioptrik abgeleitet. In den praktischen Aufgaben treten aber stets neben die abbildenden Paraxialstrahlen solche Strahlen, die gegen die Achse merklich geneigt sind, bzw. in endlicher Entfernung von ihr verlaufen. Die einfachen bisher abgeleiteten Abbildungsgesetze sind also nur eine erste Näherung; an den idealen GAUSSschen Strahlengängen sind bei genauerer Rechnung Korrekturen anzubringen. Das wahre Bild weist gegenüber dem GAUSSschen Bildfehler auf. Theoretisch berücksichtigt man diese Abweichungen dadurch, daß man etwa in der Reihenentwicklung des elektrischen Potentials, wie wir sie in Abschnitt II a angedeutet, um ein Glied weitergeht, d. h. auch die dritten Potenzen des Achsenabstandes  $r$  in Rechnung zieht (quadratische Glieder treten in rotations-symmetrischen Feldern ja nicht auf). Die damit erhaltenen „Bildfehler 3. Ordnung“ entsprechen völlig den SEIDELschen Bildfehlern der Lichtoptik. Für monochromatisches Licht gibt es bekanntlich deren fünf unabhängige, nämlich

sphärische Aberration, Astigmatismus, Bildfeldwölbung, Verzeichnung und Komafehler.

Die sphärische Aberration beruht darauf, daß in weitgeöffneten Strahlenbündeln die Vereingungsweite vom Öffnungswinkel der Strahlen abhängt. Da aber Elektronenstrahlen infolge des Beschleunigungsfeldes an der Kathode diese immer nahezu senkrecht verlassen, laufen die Elektronen angenähert parallel zueinander, die Öffnungswinkel sind sehr klein — in der Größenordnung  $2^\circ$  —, so daß die sphärische Aberration in der Elektronenoptik in vielen Fällen gegenüber anderen Abbildungsfehlern zurücktritt.

Sieht man von allen übrigen Linsenfehlern ab, so setzt jedoch der Öffnungsfehler der Güte der Abbildung eine prinzipielle Grenze, auch wenn die Apertur des Elektronenstrahl-Bündels nahezu Null ist<sup>1</sup>. Nach ABBE ist, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, zur Erzielung einer ähnlichen Abbildung die Mitwirkung der am Objekt gebeugten Strahlen notwendig. Da bei kleinen Objekten die Beugungswinkel größer werden, so durchsetzen die abgebeugten Strahlen unter Umständen die Linse in so großer Entfernung von der Achse, daß für diese Strahlen der Öffnungsfehler schon merklich wird. SCHERZER schätzt ab, daß dadurch die kleinste mittels elektronenoptischer Abbildung noch auflösbare Entfernung etwa das Hundertfache der Elektronen-Wellenlänge beträgt, während ohne Berücksichtigung des Öffnungsfehlers die Wellenlänge selbst die Auflösungs-grenze angibt. Auch die SCHERZERsche Grenze ist technisch noch nicht erreicht.

Astigmatismus und Bildfeldwölbung aber treten auch bei engen Bündeln auf, sobald diese von einem außerhalb der Achse liegenden Punkt ausgehen. Der Astigmatismus kommt bekanntlich dadurch zustande, daß die Vereinigungsweite der in der Meridianebene (Ebene aus Mittelstrahl des Bündels und Achse) verlaufenden Strahlen verschieden ist von der der Sagittalstrahlen (senkrecht zur Meridianebene) des gleichen Bündels. Die Bildpunkte, die von Bündeln erzeugt werden, welche von einem ausgedehnten ebenen Gegenstande kommen, liegen zudem nicht wieder in einer Ebene, sondern in einer gekrümmten Fläche, die nur für die achsen-nahen Punkte durch eine Ebene genügend gut angenähert werden kann (Bildfeldwölbung).

Ebenso sind Verzeichnung (Abhängigkeit der Vergrößerung vom Achsenabstand) und Koma in der Elektronenoptik vorhanden. Der Komafehler entsteht bei unsymmetrischem Durchgang eines achsenschieben Bündels durch die Linse.

Für magnetische Abbildungssysteme gibt es neben den schon genannten fünf Bildfehlern noch weitere drei, die in der Lichtoptik kein Analogon haben. Diese sind alle dadurch bewirkt, daß das Magnetfeld die Strahlenebene dreht; sie haben die Eigenschaft, daß Umkehr des Magnetfeldes auch die Richtung der Abweichung von der idealen Abbildung umkehrt. Der charakteristischste dieser magnetischen Bildfehler ist die „Bildzerrung“<sup>2</sup>. Sie rührt daher, daß die Bildzerrung  $\psi$

<sup>1</sup> O. SCHERZER, Z. Physik. 114, 427 (1939).

(Abschnitt III) bei Berücksichtigung der höheren Glieder in der potentiellen Energie nicht mehr unabhängig vom Achsenabstand des Objektpunktes ist, sondern mit wachsendem Abstand ansteigt, wie es deutlich in Fig. 14 sichtbar ist. In diesem Bild erkennt man gleichzeitig den Einfluß der Bildfeldwölbung; nur die Mitte ist scharf abgebildet, das Bild des Randes liegt in einer andern Ebene<sup>1</sup>.

Wenn so auch die Existenz von Bildfehlern 3. Ordnung der Licht- und Elektronenoptik gemeinsam ist, so ist die quantitative Abhängigkeit dieser Fehler vom Achsenabstand bzw. Öffnungswinkel in beiden Fällen verschieden, da die brechenden Flächen vollkommen andere sind. Die genaue theoretische Durchrechnung muß lehren, ob in der Elektronenoptik die Bildfehler durch geeignete Wahl der Abbildungssysteme zu beheben sind. Tatsächlich ist es möglich, solche Potentialfelder zu finden, die bis auf die sphärische Aberration alle Bildfehler der elektrischen Linsen grundsätzlich vermeiden. Jedoch sind solche Felder praktisch nicht herstellbar, so daß es Sache des Gefühls der Elektronenoptiker bleibt, rein empirisch nach solchen Anordnungen zu suchen, bei denen die einzelnen Fehler einigermaßen gleichmäßig zurückgehalten werden.

Sämtliche bisher genannten Bildfehler treten in monochromatischem Licht bzw. für Elektronenstrahlen einheitlicher Geschwindigkeit auf. Enthält jedoch der Elektronenstrahl ein Geschwindigkeitsspektrum, so ist die Abbildung noch mit chromatischen Fehlern dadurch behaftet, daß die Brennweite der Linsen von der Geschwindigkeit der Elektronen abhängt. Da aber im allgemeinen die Elektronenstrahlen fast monochromatisch sind — die Abweichungen betragen bis zu 1% —, so brauchen wir auf diese Fehler nicht näher einzugehen.

V. Ablenkelemente („Prismen“). Wie es den lichtoptischen Linsen entsprechende elektronenoptische Abbildungselemente gibt, so kann man auch elektronenoptische Prismen konstruieren, die einerseits ablenkend auf ein Strahlenbündel wirken, andererseits dispergierend; sie trennen also die verschiedenen Geschwindigkeiten (Farben), die in einem Strahl vereinigt sein können.

Besonders einfache und oft gebrauchte elektronenoptische Prismen sind homogene elektrische bzw. magnetische Felder quer zur Strahlrichtung, wie sie seit langem in BRAUNschen Röhren und anderen Anordnungen bekannt und geläufig sind. Passiert ein Elektronenstrahl ein solches Ablenkefeld nur auf einer sehr kurzen Wegstrecke  $l$ , so lassen sich die Ablenkungswinkel  $\Theta_e$  bzw.  $\Theta_m$  (im elektrischen Feld  $E$  bzw. im magnetischen Feld  $H$ ) mit genügender Genauigkeit nach den beiden folgenden Beziehungen bestimmen:

$$\Theta_e = \frac{e}{m} \frac{l}{v^2} \cdot E \quad \text{bzw.} \quad \Theta_m = \frac{e}{m} \frac{l}{v} H.$$

<sup>1</sup> Eine anschauliche Übersicht über die elektronenoptischen Bildfehler findet man in dem Artikel von DIELS und WENDT in der zitierten Vortragsammlung von BUSCH und BRÜCHE.

Diese Gleichungen lassen sich leicht aus den elektrischen und magnetischen Kräften ableiten. Unter der Einwirkung der konstanten Kraft  $K = e \cdot E$  bzw.  $e v H$  durchläuft das Elektron eine „Wurfparabel“; denn nach dem Fallgesetz ist der Weg in Richtung der Kraft  $y = \frac{1}{2} \frac{K}{m} t^2$ , wobei  $t = \frac{x}{v}$ , wenn  $x$  die Wegstrecke senkrecht zur Kraft (ur-

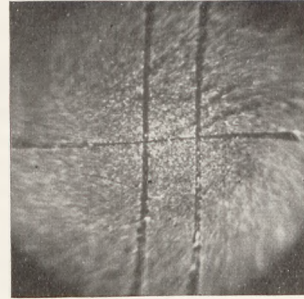


Fig. 14. Bildzerdrehung durch eine magnetische Linse.

sprüngliche Strahlrichtung) im Feld bedeutet. Die Neigung der Wurfparabel ist also  $\frac{dy}{dx} = \frac{eE}{m v^2} x$  bzw.  $\frac{eH}{m v} x$ . Für  $x = l$  und kleine Winkel gehen diese Ausdrücke in die oben angegebenen Werte der Ablenkungswinkel über. Die prismatische,

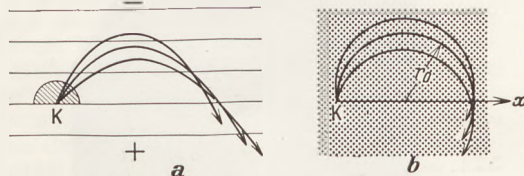


Fig. 15. Fokussierungswirkung homogener elektrischer (a) und magnetischer (b) Querfelder.

„farbenzerstreuende“ Wirkung äußert sich in der Abhängigkeit der Winkel von der Geschwindigkeit  $v$ .

Die Prismen der Elektronenoptik haben aber über die ablenkende Wirkung hinaus im allgemeinen noch Linseneigenschaften, sie fokussieren auch die Strahlen (lichtoptisch: Prismen mit gekrümmten Flächen). Bei sehr kurzen Ablenkefeldern kommt diese Eigenschaft praktisch nicht zur Auswirkung. In ausgedehnten Querfeldern jedoch spielt sie eine größere Rolle und wird dann auch praktisch ausgenutzt, besonders für den Fall eines homogenen magnetischen Querfeldes. Fig. 15 zeigt anschaulich sowohl die ablenkende als auch die fokussierende Wirkung elektrischer (Fig. 15a) und magnetischer (Fig. 15b) ausgedehnter Felder auf Elektronen einheitlicher Geschwindigkeit, aber verschiedener Ausgangsrichtung. Das Magnetfeld ist senkrecht zur Zeichenebene gedacht; in ihm beschreiben die Elektronen die aus Abschn. III bekannten Kreisbahnen, deren Radius für alle Elektronen derselben Geschwindigkeit der gleiche ist. Die Fokussierung

ist nicht streng punktförmig, und man darf daher nicht zu stark divergente Strahlenbündel verwenden. Fig. 16 zeigt, wie man das Bündel, das von der Kathode  $K$  ausgeht, durch die Blende  $B$  begrenzen kann. Enthält dieses Bündel Elektronen verschiedener Geschwindigkeit, dann werden sie in verschiedenen Punkten fokussiert, z. B. bei  $A$  und  $A'$  für zwei herausgegriffene Geschwindig-

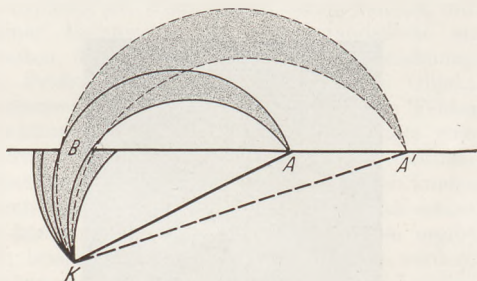


Fig. 16. Strahlengang zur Aufnahme eines Geschwindigkeitsspektrums im magnetischen Querfeld.

keiten. Eine durch  $AA'$  gelegte photographische Platte nimmt so das „Spektrum“ von  $K$  auf. Mit solchen Anordnungen kann man entweder das Geschwindigkeitsspektrum untersuchen oder bei

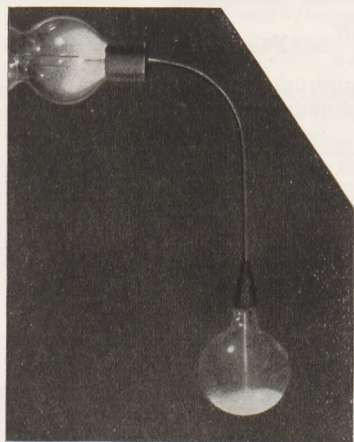


Fig. 17. Führung eines Elektronenbündels durch ein gebogenes Metallrohr.

bekannter Geschwindigkeit  $e/m$  bestimmen, weil ja nach Abschn. III der Bahnradius geladener Teilchen von  $e/m$  abhängt (Massenspektrograph).

Neben der eben betrachteten Richtungsfokussierung (Vereinigung von Strahlen gleicher Geschwindigkeit, aber verschiedener Ausgangsrichtung) ist auch eine Geschwindigkeitsfokussierung (Achromatisierung) möglich. Wir wollen jedoch auf die hierfür zweckmäßigen Feldanordnungen erst an Hand konkreter Anwendungen aus dem Gebiete der Massenspektrographie eingehen.

VI. Raumladungsfelder. Alle bisher behandelten Abbildungselemente wurden unter der Voraussetzung diskutiert, daß der Raum frei von Ladungen, quellenfrei, sei. Die Potentiale mußten also der Differentialgleichung  $\Delta\varphi = 0$  genügen. Dadurch ergibt sich aber eine Beschränkung in der

Auswahl möglicher Potentialfelder; denn unter diesen Umständen ist der Potentialverlauf im ganzen Raume schon durch die vorgesehene Form der Elektroden und deren Potentiale vollständig bestimmt. Sind jedoch Raumladungen in beliebiger Dichteverteilung  $\rho$  vorhanden, so gilt  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ , und es bestünde grundsätzlich die Möglichkeit, durch freie Wahl von  $\rho$  den Verlauf von  $\varphi$  passend abzuändern, um so die Güte der Elektronenlinsen zu verbessern. Leider ist es aber im allgemeinen nicht möglich, eine einmal gewählte Dichteverteilung aufrechtzuerhalten, da sich die Ladungen auszugleichen streben.

Will man Raumladungen trotzdem nutzbringend verwenden, dann muß dafür gesorgt werden, daß die passende Dichteverteilung immer wieder nachgeliefert wird. Glücklicherweise liefert der Elektronenstrahl unter gewissen Umständen selbst eine geeignete Raumladung. Läuft nämlich ein Elektronenstrahl in einem Gasraum, so erzeugt er auf seiner Bahn durch Ionisierung gestoßener Gasatome positive Ionen. Bei geringer Elektronengeschwindigkeit (bis zu einigen Hundert e-Volt), nicht zu kleinem Gasdruck (etwa  $10^{-3}$  mm Hg) und hoher Elektronenemission der Kathode (etwa 1 mA) bleibt die so erzeugte Raumladung stationär. Die positiven Ionen innerhalb des Strahles ziehen die Elektronen, die etwa den Strahl verlassen wollen, in die Bahn zurück, so daß längere Wegstrecken ohne merkliche Verbreiterung des Strahls zurückgelegt werden können. Diese „Gaskonzentration“ ist praktisch schon lange verwirklicht (WEHNELT-Röhre, gasgefüllte BRAUNSCHE Röhre). In den letzten Jahren konnte die Gaskonzentration durch geeignete Wahl der Betriebsdaten so weitgehend ausgenutzt werden, daß man „Fadenstrahlen“ erhielt, die Strecken von mehr als einem Meter mit völlig konstantem, sehr kleinem Querschnitt zurücklegten.

Die brechenden Potentialflächen, die bei der Gaskonzentration wirksam sind, stellen Zylinder um die Strahlachse dar, so daß man den Vorgang auch ähnlich beschreiben kann wie den Durchgang von Licht durch ein Medium mit zylindrischen Schichten, deren Brechungsindex mit zunehmendem Radius abnimmt, wobei der Strahl nahezu parallel zur Zylinderachse verläuft. Bei einem solchen Strahlengang tritt bekanntlich eine Strahlkrümmung zur Achse hin auf, die dafür sorgt, daß sich der Strahl nicht von der Achse entfernt. Die so vom Elektron erzeugte Potentialröhre ist an die Bahn des Strahles gebunden und kann mit diesem verlagert werden, etwa durch Ablenkung des ganzen Strahles in einem Magnetfeld. Dabei bleibt der Charakter als Fadenstrahl erhalten; die „Gaskonzentrationslinse“ wird einfach vom Strahl mitgeführt.

Auch ohne Magnetfeld kann eine Potentialröhre in jede gewünschte Form gebracht werden, indem man den Elektronenstrahl z. B. in einem Metallrohr laufen läßt. Erfahrungsgemäß folgt der Fadenstrahl der Form der Röhre, sobald man nur dafür sorgt, daß der Winkel zwischen Strahl und Rohrwand einen gewissen Betrag nicht überschreitet. Man kann den Mechanismus dieser Strah-

lenführung schematisch so beschreiben, daß sich an der Wand eine negative Raumladung bildet, die auf den Fadenstrahl reflektierend wirkt, so daß die Erscheinung als wiederholte Totalreflexion an der Wand dargestellt werden kann. Ein Beispiel einer solchen Elektronenführung zeigt Fig. 17. Links oben die Elektronenquelle; durch das gebogene Metallrohr werden die Elektronen in das untere Gefäß geleitet, wo der Strahl durch das

Ionisierungsleuchten noch deutlich als Fadenstrahl verfolgt werden kann. Das Ganze entspricht der Fortleitung von Licht in gebogenen Glasröhren.

In dem vorliegenden Bericht haben wir an Hand charakteristischer Beispiele die wesentlichen Grundlagen der Elektronenoptik zu skizzieren versucht. Einige wichtige Anwendungen dieses neuen Forschungsgebietes sollen einem späteren Beitrage vorbehalten sein.

### 3. Geschichte und Erkenntnislehre.

BODO JUNG †. Von W. TRIPPE in Breslau.

In der Nacht vom 24. zum 25. Februar 1940 verschied plötzlich an seiner Arbeitsstätte der planmäßige Assistent der Breslauer Sternwarte Dr. habil. BODO JUNG. Geboren am 17. 1. 1910 zu Essen, verlebte er seine Jugendzeit in Cleve am Niederrhein. Nach Erlangung der Reife im Jahre 1929 siedelte er nach Breslau über, um auf der dortigen Universität Astronomie, Mathematik und Physik zu studieren. Im Jahre 1933 promovierte er mit der Arbeit: „Über die Existenzmöglichkeit absorbierender Materie im Kosmos“ zum Dr. phil., und 1939 wurde er Dr. habil., nachdem er inzwischen zum Assistenten der Breslauer Sternwarte aufgerückt war.

Der hochbegabte Wissenschaftler JUNG soll hier nicht bis ins einzelne gewürdigt werden. Nur so viel sei hervorgehoben, daß seine Doktorarbeit mit dem „Mr. ROBERT KLUMBKE-Preis“ der Astronomischen Gesellschaft ausgezeichnet wurde, und daß sein Ruf als Wissenschaftler bereits sehr früh über die Grenzen des Vaterlandes hinausgedrungen war. Eine bei Gelehrten nicht häufige Gabe zeichnete JUNG besonders aus: er verstand es, selbst schwierige wissenschaftliche Erkenntnisse in leicht verständlicher Darstellung Außenstehenden nahezubringen. Davon zeugen seine zahlreichen Mitteilungen und Referate, die in den

verschiedensten Zeitschriften, z. B. auch in der vorliegenden, erschienen sind.

Vom Wissenschaftler JUNG kaum zu trennen ist der Mensch; beide waren nicht nur aufs engste miteinander verbunden, sondern sie waren eins. Ebenso wahrheitsuchend und kompromißlos wie der Wissenschaftler war auch der Mensch JUNG. Das brachte ihn in einen tiefen Gegensatz zur Welt und zum Leben, und darunter hat er sehr gelitten. Geäußert hat er sich darüber aber kaum, selbst zu seinen nächsten Freunden nicht; sie haben es nur fühlen können. Sehr vieles von dem, was er in seinem kurzen Leben geschaffen hat, wird er sich daher wohl unter Opfern, die wir nur ahnen können, haben abringen müssen. Seine einzige Erholung bildeten einsame Wanderungen im Riesengebirge und am Rhein, auf denen er trotz seines schwächlichen Körpers die größten Strapazen auf sich nahm und ein spartanisches Leben führte, und die Lektüre gedankenreicher Aufsätze, Abhandlungen und Bücher. Besondere Liebe hegte er zu den Klassikern der deutschen Dichtung. Den ersten Teil des „Faust“ z. B. konnte er fast vollständig aus dem Gedächtnis anführen. „So ging er“, um mit den Worten seines Lehrers Prof. SCHOENBERG zu schließen, „vollkommen selbstlos als ein Träumer und wahrer Diener der Wissenschaft durch sein kurzes Leben, seine Lehrer, Kollegen und Schüler in tiefster Trauer hinterlassend.“

### Neu erschienene Bücher und Schriften.

**Spannungsoptik.** Von Dr. GUSTAV MESMER. XI, 222 Seiten mit 197 zum Teil farbigen Abbildungen. Berlin: Julius Springer 1939. Brosch. RM 28,50, geb. RM 30,—.

Unter Spannungsoptik versteht man die optische Ermittlung von Spannungszuständen mit Hilfe der Erscheinungen der Doppelbrechung in durchsichtigen Körpern. Obwohl die dazu notwendigen physikalischen Grunderscheinungen schon seit etwa 100 Jahren bekannt sind, hat das Verfahren doch erst seit etwa 30 Jahren vielfache technische Anwendung gefunden. In den letzten 10 Jahren ist eine große Fülle weiterer Arbeiten über dieses für die moderne Festigkeitslehre so wichtige Gebiet erschienen. Es ist daher sehr zu begrüßen, daß jetzt ein Werk vorliegt, das einen ausgezeichneten Überblick nicht nur über die dem Verfahren zugrunde liegenden physikalischen Erscheinungen, sondern auch über die verschiedenen

diesbezüglichen Meßverfahren und die Einzelheiten der praktischen Versuchstechnik gibt.

Das Buch gliedert sich in folgende Abschnitte: 1. Grundgleichungen der ebenen elastischen Zustände; 2. Grundgleichungen der optischen Doppelbrechung; 3. Grundtatsachen der ebenen Spannungsoptik; 4. die vollständige Bestimmung des Spannungsfeldes; 5. Geräte; 6. Versuchstechnik und Auswertung; 7. Dynamische und räumliche Probleme; Strömungsdoppelbrechung; 8. Anwendungen.

In den ersten beiden Kapiteln werden zunächst die physikalischen Grundlagen über die in einem Körper auftretenden elastischen Spannungszustände und über die optische Doppelbrechung in übersichtlicher und klarer Weise erörtert. Dann folgen in den nächsten beiden Kapiteln die eigentlichen Grundlagen und Auswertungsverfahren der optischen Spannungsanalyse. Kapitel 5 bringt einen

ausführlichen Überblick über die zu den Messungen benötigten Geräte und ihren Aufbau; in Kapitel 6 wird die praktische Versuchstechnik eingehend besprochen, und es werden die einzelnen Verfahren zur Auswertung der optischen Aufnahmen mitgeteilt. Im 7. Kapitel wird, wenn auch nur kurz, die Anwendung der optischen Spannungsanalyse auf zeitlich veränderliche Vorgänge sowie auf räumlich verteilte Spannungszustände erwähnt. Das letzte Kapitel bringt dann an Hand sehr schöner Aufnahmen, die zum Teil in vorzüglicher Weise farbig wiedergegeben sind, eine große Zahl praktischer Anwendungsbeispiele, aus denen die Bedeutung des Verfahrens für die verschiedenen Zweige der Technik hervorgeht. Den Schluß des Buches bildet ein Schrifttumsverzeichnis, das neben einer Reihe grundlegender älterer Arbeiten nicht weniger als 239 Einzelabhandlungen bringt, die alle nach 1929 erschienen sind.

Die Darstellung ist überall klar und verständlich und setzt ein Minimum an mathematischen Kenntnissen voraus; die Ausstattung des Buches mit seinen zahlreichen Figuren und Abbildungen ist wie immer bei den Werken des Verlages Springer ganz vorzüglich. Zusammenfassend läßt sich sagen, daß hier ein Buch vorliegt, das nicht nur den Anfänger in dieses für Meßtechnik und Werkstoffkunde gleichermaßen wichtige Gebiet einzuführen imstande ist, sondern auch dem auf diesem Gebiete bereits arbeitenden Forscher und Ingenieur ein unentbehrliches Hilfsmittel sein wird.

L. Bergmann.

GEORG SIMON OHM als Lehrer und Forscher in Köln 1817—1826. Festschrift zur 150. Wiederkehr seines Geburtstages. Herausgegeben vom Kölnischen Geschichtsverein in Verbindung mit der Universität und dem Staatlichen Dreikönigsgymnasium in Köln. Mit 336 Seiten und 8 Abbildungen. Köln: Kommissionsverlag I. P. Bachem 1939. Preis RM. 4,50, geb. RM. 6,—.

Am 16. März 1939<sup>1</sup> wurde die 150. Wiederkehr des Geburtstages von GEORG SIMON OHM festlich begangen. Zu seinem Gedächtnis und zur Würdigung seiner unsterblichen Verdienste um die Entwicklung der Elektrizitätslehre und der Elektrotechnik ließen die im Titel genannten Kölner Körperschaften diese Festschrift erscheinen. OHM wirkte 9 Jahre, von 1817 an, als Oberlehrer am damaligen „Kölnischen Gymnasium“, dem ehemaligen Jesuitengymnasium in der Marzellenstraße, das jetzt den Namen „Staatliches Dreikönigsgymnasium“ trägt. Sein Hauptinteresse war zunächst der Mathematik zugewandt, und sein zuerst erschienenenes Buch hat den Titel „Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie als höheren Bildungsmittels an vorbereitenden Lehranstalten“, das allerdings damals durch Unverstand eine Ablehnung erfuhr. Aber in den letzten beiden Jahren seiner Kölner Tätigkeit wandte sich OHM mehr der Physik zu, besonders Untersuchungen über Fragen der Stromelektrizität, ein Gebiet, das noch völlig in den An-

fängen steckte. War doch selbst ÖRSTEDT, der 1820 die Ablenkung der Magnetnadel durch den elektrischen Strom entdeckte, noch gar nicht im Besitz des Begriffs „elektrischer Strom“; ein von ihm geschaffener Begriff des „elektrischen Konflikts“ wurde benutzt, um die beobachteten Erscheinungen der Nadelablenkung in recht schwerfälliger Weise zu beschreiben. Erst durch AMPÈRE war der „elektrische Strom“ zu einem festen Begriff in der neuen Lehre geworden. Wer heutzutage im Unterricht seine Schüler in das Verständnis des OHMSchen Gesetzes einführen will, dem stehen Akkumulatoren und moderne Zeigerinstrumente zur Verfügung. Ohne irgendwelche Schwierigkeiten ist die Sache in verhältnismäßig kurzer Zeit zu erledigen. Aber die Konstruktion solcher Instrumente setzt ja die Beherrschung des OHMSchen Gesetzes voraus. OHM mußte sich seine Meßinstrumente erst ersinnen und bauen. Sie beruhten auf der einfachen Ablenkung der Magnetnadel durch den elektrischen Strom, wobei er mit klarem Urteil erkannte, daß bei der Konstruktion von der Benutzung des SCHWEIGGERSchen Multiplikators wegen seines erheblichen Widerstandes abzusehen war. Die größten Schwierigkeiten traten bei seinen ersten Versuchen aber dadurch auf, daß man zu dieser Zeit noch nicht die „konstanten Elemente“ kannte, daß er also auf das VOLTA-Element, bzw. auf die VOLTASche Säule, angewiesen war. Zu bewundern ist, daß schon OHM zu der klaren Erkenntnis kam, daß die Inkonstanz des VOLTA-Elements — er nennt sie das „Wogen der Kraft“ — auf chemische, durch den Strom verursachte Vorgänge im Innern des Elements zurückzuführen sei. Die Versuche verliefen sofort glatter und lieferten befriedigende Ergebnisse, als er auf POGGENDORFFS Rat das kurz vorher von SEEBECK entdeckte Thermoelement als Stromquelle benutzte. Nach einer kaum zweijährigen intensiven Beschäftigung mit dem Problem veröffentlichte OHM 1826 in SCHWEIGGERS Journal für Chemie und Physik, Bd. 46, S. 137 bis 166 seine bahnbrechende Arbeit: „Bestimmung des Gesetzes, nach welchem Metalle die Kontakt-Elektrizität leiten, nebst einem Entwurfe zu einer Theorie des VOLTASchen Apparates und des SCHWEIGGERSchen Multiplikators.“ Seiner experimentellen Arbeit ließ OHM 1827 ein mehr theoretisch gefaßtes Buch folgen: „Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet.“ In diesem Buche findet sich die Anwendung des Gesetzes auf Teile der Leitung und auf Stromverzweigungen, die Untersuchung von Flüssigkeitswiderständen, die Feststellung der Abhängigkeit eines Flüssigkeitswiderstandes von der Temperatur, die Herausarbeitung der Tatsache, daß mehrere hintereinandergeschaltete Elemente bei kleinem äußeren Widerstande keine merkliche Stromvergrößerung herbeiführen u. a.

Es ist selbstverständlich, daß die Festschrift, die aus Beiträgen verschiedener Verfasser besteht und die Absicht verfolgt, die unsterblichen Verdienste GEORG SIMON OHMS als eines ehemaligen Kölners zu würdigen, auch die Zeit- und Raumverhältnisse und sonstigen Umstände, in denen

<sup>1</sup> Vgl. diese Zeitschr. 50, 128 (1937).

OHMS Arbeiten stattfanden, ausführlich darstellt. Aus allem geht hervor, daß hier ein ganz Großer an der Arbeit war, der seiner Zeit weit vorausseilte. So ist es zu erklären, daß OHM mehr als 10 Jahre auf eine allgemeine Anerkennung der wissenschaftlichen Welt warten mußte. Zwar hatte schon 1828 J. W. PFAFF die Verdienste OHMS voll erkannt, wenn er von ihm sagt: „Ein wohlbegabter, unternehmender und der Mathematik neue Regionen erobernder Physiker tritt, der erste in Deutschland und der einzige bis jetzt, auf dem Felde auf, das die Franzosen allein bisher mit den Künsten und Vorteilen der höheren Analysis in Besitz hatten.“ Aber das konnte er nur den fähigeren Köpfen begreiflich machen. OHMS Werk war es, daß mit der Vorherrschaft des Auslandes auf diesem physikalischen Gebiete gebrochen wurde. Offenbar waren auch gewisse philosophische Richtungen mit daran schuld, daß die allgemeine Anerkennung OHMS in Deutschland so lange auf sich warten ließ. Die Wende in der Beurteilung wurde besonders auch dadurch herbeigeführt, daß der französische Physiker POUILLET 1837 der Pariser Akademie eine Abhandlung über den elektrischen Strom vorlegte, die zu denselben Resultaten wie die Arbeiten OHMS führte, allerdings auf offenbar selbständigen Wegen. Ob POUILLET die „Galvanische Kette“ von OHM gekannt hat, steht nicht fest, jedenfalls erwähnt er den Namen OHMS nicht; aber die Priorität OHMS wurde nicht angefochten. Endgültig wurde dann die Weltgeltung OHMS festgelegt, als in England die Royal Society im Jahre 1841 den Beschluß faßte, OHM die goldene Copley-Medaille zu verleihen, und dabei seine großen Verdienste ausführlich herausstrich.

Die Festschrift, die einen Einblick in die Werkstatt eines großen Forschers bietet und die Schwierigkeiten aufzeigt, mit denen ein bahnbrechendes Genie zu kämpfen hat, ehe es die Anerkennung der Welt findet, verdient wärmste Empfehlung. Jeder, auch der Laie, der das OHMSche Gesetz einmal im Schulunterricht kennen gelernt hat, wird sie mit großem Interesse lesen.

*P. Steindel.*

**Weltharmonik.** Von JOHANNES KEPLER. Übersetzt und eingeleitet von M. CASPAR. 459 Seiten. München-Berlin: R. Oldenbourg 1939. Preis geb. RM 28.—.

Zum ersten Male wird uns dieses bedeutende Werk KEPLERS hier in deutscher Sprache dargeboten und damit einem breiteren Leserkreise zugänglich gemacht. KEPLER selbst hat dieses Buch, dessen Plan er schon früh gefaßt hatte, und dessen Ausführung ihn, während ein widerwärtiges Schicksal seine Schaffenskraft mehrfach auf eine harte Probe stellte, zwei Lebensjahrzehnte hindurch beschäftigte, besonders hoch eingeschätzt. Und in der Tat bietet es uns die großartige Gedankenwelt dieses Genius in reifster Form.

Gewiß suchen wir die Harmonie im Kosmos heute nicht mehr dort, wo sie KEPLER zu finden hoffte. Unsere Vorstellungen von der im Naturgeschehen waltenden Ordnung sind völlig andere geworden. Aber gerade darin liegt der unver-

gleichliche Reiz der Schriften KEPLERS, daß sie uns hineinführen in eine Zeit, in der der Grundstein zu dem, was wir heute unser wissenschaftliches Weltbild nennen, erst gelegt wurde. KEPLER war bekanntlich einer der bedeutendsten Geister, die es formen haben, wenn uns die Pfade, die zu ihm geführt haben, aus dem Blickfeld des heutigen Wissensstandes auch häufig verschlungen erscheinen. In gewissem Sinne gibt uns KEPLER in der Weltharmonik aber doch ein Vermächtnis, das bis zum heutigen Tage noch der Einlösung harret: Er wollte nicht weniger, als die Welt aus einem einheitlichen Bauplan verstehen, der ihr mit Notwendigkeit, auch für den Schöpfer bindend, zugrunde liegen mußte. KEPLER glaubt, ihn gefunden zu haben. Wir Heutigen freilich haben unsere Forschungsziele niedriger gesteckt, und viele von uns glauben gar nicht mehr an die Möglichkeit, daß wissenschaftliche Forschung zu jenen Gipfeln der Erkenntnis zu führen vermag, auf denen KEPLER bereits zu stehen wählte.

Manchen interessanten Zusammenhang in der Geometrie der Polygone und Polyeder hat KEPLER bei seinen mühevollen Untersuchungen aufgedeckt. Auch hier bei der Kleinarbeit zeigt sich sein überragender Genius, der überall Zusammenhänge aufdeckt, die anderen verschlossen blieben. Allein schon wegen der interessanten Abschnitte, die sich mit diesen Fragen befassen, erscheint das Werk für den mathematisch interessierten Leser lohnend. Eine ausführliche Einleitung, die der Übersetzer dem Buche voranstellt, führt in anregender Weise in das Leben und die Gedankenwelt KEPLERS ein.

*B. Jung †.*

**Die Erde als Planet.** Von K. STUMPF. Band 42 der Sammlung „Verständliche Wissenschaft“. IV u. 158 Seiten, 50 Abbildungen. Berlin: Julius Springer 1939. Preis geb. RM 4,80.

Im Rahmen der Sammlung „Verständliche Wissenschaft“ ist hier ein Band erschienen, der die Lücke zwischen den rein astronomischen und den geophysikalischen Werken dieser Buchreihe schließt. Die Erde wird in ihrer Bezogenheit auf das Weltganze behandelt. Die historische Entwicklung des heliozentrischen Weltbildes und seiner Konsequenzen ist ausführlich besprochen und füllt die ersten Kapitel. Es folgt dann ein Exkurs auf die uns benachbarten Himmelskörper Sonne und Mond, soweit sie für die Erde unmittelbare Bedeutung haben. Auch hier finden die historischen Fragen ihre volle Würdigung. Dagegen sind die Kapitel über den Erdmagnetismus und die geophysikalischen Probleme etwas kurz geraten. Wenn auch zugegeben werden muß, daß ein tieferes Eindringen in diese Materie nicht Aufgabe dieses Bandes sein konnte, hätte mancher Leser darüber doch wohl gern etwas mehr erfahren. Das gilt nicht zuletzt auch für die kosmogonischen Probleme. Das Buch schließt mit einer Betrachtung der übrigen Planeten des Sonnensystems und wirft die Frage auf, ob dort oder sonst irgendwo im Weltall uns ähnlich geartete Geschöpfe zu erwarten sind.

Die Schreibweise ist anschaulich und klar. Besonders der historisch interessierte Leser erhält eine gute Einführung in den hier behandelten Problemkreis.  
*B. Jung t.*

**Die Wissenschaft von den Sternen.** Von W. KRUSE. Band 43 der Sammlung „Verständliche Wissenschaft“. XIII u. 180 Seiten, 101 Abbildungen. Berlin: Julius Springer 1939. Preis geb. RM 4,80.

Eine kurze Einführung in die Probleme und Forschungsmethoden der Fixsternastronomie. Ausgehend von der Anschauung werden im ersten Teile die interessantesten Fragen der modernen Astrophysik behandelt, soweit sie den einzelnen Stern betreffen. Der Leser erfährt hier, wie man die

Örter der Sterne am Himmel festlegt, ihre Entfernung und Bewegung mißt, und wie es gelungen ist, ihre physikalische Natur zu erforschen. Es schließt sich dann, hierauf aufbauend, ein zweiter Teil an, in dem ein Bild unseres eigenen Sternsystems und der fernen Spiralnebelwellen entworfen wird.

Das ganze Werk zeichnet sich durch vorzügliche Klarheit der Darstellung und meisterhafte Erfassung des Wesentlichen aus. Auf ausführliche Behandlung von Einzelfragen ist bewußt Verzicht geleistet worden. Hervorgehoben sei noch die Ausstattung mit hervorragendem Bildmaterial, das zum Teil mit den Instrumenten der Hamburger Sternwarte, der der Verfasser als Observator angehört, gewonnen wurde. Wir wünschen dem Büchlein weiteste Verbreitung.  
*B. Jung t.*

### Korrespondenz.

**Bericht über einen Unfall beim Arbeiten mit Explosivstoffen.** Ein auch als Mitarbeiter bewährter langjähriger Leser schreibt:

„Wie alljährlich, beabsichtigte ich auch heuer in der 8. Klasse der Oberrealschule im Unterricht in organischer Chemie den explosiven Zerfall von knallsaurem Silber an einer kleinen Probe vorzuführen. Ich benützte hierzu ein Präparat, das ich vor etwa 12 Jahren nach einer Vorschrift von K. A. HOFMANN<sup>1</sup> bereitet und in einer runden Pappschachtel in der Menge von schätzungsweise 10 g aufbewahrt hatte. Ich öffnete die Schachtel und war im Begriff, mittels eines kleinen Hornlöffels eine Messerspitze voll aus der Schachtel zu entnehmen, als eine furchtbare Explosion erfolgte. Durch die Gewalt der Explosion wurde ein hölzerner Pultdeckel, über den das Präparat in etwa 15 cm Höhe im Augenblick der Explosion gehalten wurde, glatt durchschlagen und das Holz in zahllose Splitter zerfetzt. Bemerkenswert ist, daß das 1½ cm dicke Brett halbkreisförmig, scharf in der Form der runden Pappschachtel, durchschlagen wurde. Die Wucht der Explosion entlud sich nach unten, woraus sich erklärt, daß die Verletzungen an meiner linken Hand (die Schachtel wurde seitlich mit Daumen und Zeigefinger gehalten) nur geringfügiger Natur (Hautabschürfungen) waren. Kalkstaub fiel von der Saaldecke, ein Knopf des Arbeits-

kittels wurde weggerissen, der in der rechten Hand gehaltene Hornlöffel zersplittert, Augenbrauen und Wimpern wurden schwach versenkt, der Kittel in Brusthöhe an etwa 15 Stellen durchlöchert.

Durch diesen Unfall angeregt, schaffte ich mir die Broschüre an: LANGHANS, Explosionen, die man nicht erwartet [vgl. diese Z. 45, 177 (1932)]. Darin findet sich auf S. 24 die folgende Bemerkung: „Gefährlicher noch als das Knallquecksilber ist das entsprechende ... Silbersalz, welches ... noch leichter unvermutetem Zerfall anheimfällt.“ Diese Äußerung steht allerdings im Gegensatz zu der Bemerkung von K. A. HOFMANN. Ich bin nur froh, daß ich die Substanz nicht in einer Pulverflasche aufbewahrt habe, die Folgen wären nicht auszudenken. Die Wirkung des Knallquecksilbers führe ich seit der Zeit, wo mir die Arbeiten von Prof. Stock über die Giftigkeit des Hg zur Kenntnis gekommen sind, nicht mehr vor; dafür wählte ich eben das analog zusammengesetzte Silbersalz. Jahr für Jahr entnahm ich der Schachtel eine Probe; nie geschah das geringste, so daß ich mir der Gefahren gar nicht mehr bewußt geworden bin. Vielleicht kann mancher Kollege aus meinem Unfall eine Lehre ziehen.“

Anmerkung der Redaktion: Ohne dem sehr erfahrenen Berufskameraden gute Lehren erteilen zu wollen, sei auf folgende Möglichkeiten für die Auslösung der Explosion hingewiesen. Die Entnahme des Knallsilbers mittels eines Hornlöffels kann bei einem derart reibungsempfindlichen Stoffe die Ursache der Explosion gewesen sein. Ein leichter Druck des Hornlöffels auf das Präparat oder ein winziges Sandstaubkörnchen, das aus der Luft dazwischen geraten ist, kann die Zersetzung ausgelöst haben. Herstellung geringerer Mengen oder Aufteilung einer so großen Sprengstoffmenge in kleinere Proben bis zu 1 g durch vorsichtiges Ausschütten dürfte sich in ähnlichen Fällen empfehlen.

<sup>1</sup> Über das knallsaure Silber schreibt K. A. HOFMANN [vgl. diese Z. 31, 229 (1918); 33, 76 (1920); 34, 41 (1921); 38, 110 (1925); 42, 46 (1929)] in seinem „Lehrbuch der anorganischen Chemie“, 1922, S. 309: „Eine Probe von ... Silberfulminat erwies sich nach 40jährigem Aufbewahren in einer verschlossenen Flasche vollkommen unverändert.“ Aus diesem Grunde hielt ich die vorsichtige Handhabung des knallsauren Silbers für ungefährlich, bis ich durch den Unfall eines Besseren belehrt wurde.