

ZEITSCHRIFT FÜR DEN PHYSIKALISCHEN UND CHEMISCHEN UNTERRICHT

53. JAHRGANG

1940

HEFT 5

Statistische Thermodynamik II.

Von F. Möglich in Berlin.

4. Die Quantenstatistik von M. PLANCK.

Die Quantenstatistik von M. PLANCK unterscheidet sich von der bisher vorgebrachten klassischen Statistik durch die Annahme, daß die Phasenzellen einen endlichen und wohldefinierten Wert haben. PLANCK führte für die Größe einer solchen Zelle den Wert h^3 ein, wobei h eine nicht zahlenmäßig bekannte und durch das Experiment zu bestimmende neue physikalische Konstante ist. Allerdings müssen wir den Phasenraum dahingehend abändern, daß an die Stelle der Geschwindigkeitskoordinaten v_x, v_y, v_z die Impulse $mv_x = p_x, mv_y = p_y, mv_z = p_z$ zu setzen sind. Würden wir die v als Koordinaten weiterhin benutzen, so würde die Zellengröße $\left(\frac{h}{m}\right)^3$ sein, und damit von der von Fall zu Fall verschiedenen Masse abhängen, während bei Benutzung der Impulse die Größe der Phasenzelle universell ist.

Es muß dann weiter auch eine Festsetzung über die Energie getroffen werden, die den in den einzelnen Zellen sitzenden Molekülen zuerteilt wird. Für den Fall, daß die Moleküle harmonische Oszillatoren von der Frequenz ν sind, sollen nach der PLANCKschen Annahme diese in der i -ten Zelle die Energie $i \cdot h \cdot \nu$ haben. Das Zustandsintegral geht für diesen Fall über in die Zustandssumme

$$Z = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\frac{i h \nu}{k T}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h \nu}{k T}}} = \frac{e^{\frac{h \nu}{k T}}}{e^{\frac{h \nu}{k T}} - 1},$$

und für die Verteilung der Oszillatoren auf die Phasenzellen fand PLANCK die folgenden Ausdrücke:

$$N_i = N \left(1 - e^{-\frac{h \nu}{k T}}\right) e^{-\frac{i h \nu}{k T}};$$

der Energiemittelwert in einem solchen Oszillatoren gas ist:

$$E = \sum i h \nu \cdot N_i = N h \nu \cdot \frac{e^{-\frac{h \nu}{k T}}}{1 - e^{-\frac{h \nu}{k T}}};$$

und die freie Energie, die mit der Zustandssumme durch die Gleichung

$$F = -kNT \ln Z$$

verknüpft ist, hat die Form:

$$F = kNT \ln \left(1 - e^{-\frac{h \nu}{k T}}\right).$$

PLANCK konnte ferner zeigen, daß Gleichgewicht zwischen der Strahlung und einem solchen Oszillatoren gas nur dann vorhanden sein kann, wenn auch die mittlere Energiedichte der Strahlung der Frequenz ν folgendem Ausdrucke gleich ist:

$$\rho, d\nu = \frac{8 \pi h \nu^3 d\nu e^{-\frac{h \nu}{k T}}}{c^3 \left(1 - e^{-\frac{h \nu}{k T}}\right)}.$$



Dieser Ausdruck enthält das PLANCKsche Strahlungsgesetz für die Strahlung eines sogenannten schwarzen Körpers. Für kleine Frequenzen geht sie in das RAYLEIGH-JEANSsche Gesetz über:

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT d\nu.$$

Für große Frequenzen hingegen ergibt sich das WIENSche Strahlungsgesetz:

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi}{c^3} h \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\nu.$$

DEBYE konnte mit Hilfe der PLANCKschen Statistik ein anderes brennendes Problem der Lösung zuführen, indem er annahm, daß auch die Energiedichte für die elastischen Wellen in einem festen Körper im thermischen Gleichgewicht dem PLANCKschen Gesetze genügen müsse. Der Unterschied gegenüber der Strahlung besteht lediglich darin, daß das Frequenzgebiet für die Strahlung unendlich ist, d. h. es treten in der Hohlraumstrahlung beliebig hohe Frequenzen auf, diese allerdings dann mit immer schwächer werdender Intensität, während im Festkörper Frequenzen, deren Wellenlänge kleiner als der Abstand zweier benachbarter Moleküle ist (etwa 10^{-8} cm), nicht auftreten können. Im Festkörper existiert also im Unterschiede zur Hohlraumstrahlung eine größte Frequenz ν_g , die für den betreffenden Stoff charakteristisch ist. Die mit ν_g gebildete Größe $\Theta = \frac{h\nu_g}{k}$, welche die Dimension einer Temperatur hat, bezeichnet man dementsprechend als die charakteristische Temperatur der betreffenden Substanz. Die Rechnungen ergeben im einzelnen

$$\text{für die freie Energie } F = E_0 + 3 LkT \left[\ln \left(1 - e^{-\frac{\Theta}{T}} \right) - \frac{T^3}{\Theta^3} \int_0^{\frac{\Theta}{T}} \frac{x^3 dz}{1 - e^{-x}} \right];$$

$$\text{für die freie Energie bei hohen Temperaturen } F = E_0 - LkT - 3 Lk \ln \frac{\Theta}{T};$$

$$\text{für die freie Energie bei tiefen Temperaturen } F = E_0 + 3 LkT \left[\ln \left(1 - e^{-\frac{\Theta}{T}} \right) - \frac{\pi^4 T^3}{15 \Theta^3} \right];$$

oder für den letzteren Ausdruck näherungsweise

$$F \approx E_0 - \frac{\pi^4}{5} LkT \cdot \frac{T^3}{\Theta}.$$

Freie Energie und Gesamtenergie sind für tiefe Temperaturen in erster Näherung proportional zu T^4 , daher die spezifische Wärme proportional zu T^3 . Die spezifische Wärme eines festen Körpers verschwindet demnach bei tiefen Temperaturen und genügt demgemäß den Forderungen des dritten Wärmesatzes. Für hohe Temperaturen ergibt sich ein konstanter Ausdruck der spezifischen Wärme, wie es nach dem DULONG-PÉTITSchen Gesetz gefordert werden muß.

5. Die modernen Statistiken.

Auch die modernen Statistiken behalten die Annahme PLANCKs über die Größe der Phasenzellen bei. Die aus dem Strahlungsgesetz ermittelte Größe $h = 6,547 \cdot 10^{-27}$ ist die Grundlage jeder modernen Quantenstatistik. Die Größe der Energiewerte in den einzelnen Phasenzellen kann eine Statistik ohne zusätzliche Annahmen nicht angeben. Diese Werte müssen einer anderen physikalischen Disziplin entnommen werden. Entweder bestimmt man die Energieterme aus spektroskopischen Messungen, oder man berechnet sie nach den Methoden der Quantentheorie. Auf jeden Fall muß die Statistik die Frage nach der Größe der Energiewerte als erledigt betrachten und annehmen, daß man in jedem einzelnen Falle die Energiewerte angeben kann.

Zu den modernen Statistiken rechnen wir die BOSE-EINSTEINSche und die FERMI-DIRACsche Statistik. Beiden gemeinsam ist eine zusätzliche Annahme, die über die Voraussetzungen der PLANCKschen Statistik hinausgehen. In der PLANCKschen Statistik wurde das klassische Abzählverfahren im wesentlichen beibehalten und lediglich die endliche Größe der Phasenzellen und der diskreten Energieterme berücksichtigt.

Aber es wurde weiterhin die Annahme gemacht, daß die Moleküle (oder besser gesagt: die Gegenstände der statistischen Abzählung) als Individuen voneinander unterschieden werden können. An der Definition der mikroskopischen Verteilung wurde demgemäß nichts geändert.

Hierin unterscheiden sich die modernen Statistiken von ihren Vorgängern. Nicht etwa aus logischen, sondern aus physikalischen Gründen verzichtet man darauf, die Moleküle als individuelle Größen in Analogie zu den Gegenständen des täglichen Lebens zu betrachten. Die Aussage, daß ein Molekül, das wir z. B. mit der Nummer 1 versehen haben, zu jedem beliebigen Zeitpunkt als solches wiedererkannt werden kann, ist zwar nicht logisch, aber physikalisch sinnlos, weil bei der Beschränktheit unserer physikalischen Meßinstrumente kein Verfahren angegeben werden kann, das gestatten würde, eine derartige Aussage nachzuprüfen.

Es handelt sich bei dieser Einschränkung nicht um eine Beschränkung durch technische Mängel oder Fähigkeiten, sondern die Einschränkung entspricht der Tatsache, daß unsere physikalischen Hilfsmittel wiederum Gegenstände der Physik sind, die wir also als gegeben hinzunehmen haben. Experimentieren wir an den kleinsten Teilchen der Materie, so sind unsere Meßmittel wiederum bestenfalls Elementarteilchen, deren Masse und Energie nicht so wesentlich verschieden ist von der Masse und Energie der zu beobachtenden physikalischen Gebilde. Auf alle Fälle ist man damit von dem Ideal der klassischen Physik, daß ein messender Eingriff den zu messenden Vorgang beliebig wenig stören darf, sehr weit entfernt, und so erhalten unsere physikalischen Aussagen in der Atomphysik einen universelleren Charakter derart, daß der physikalische Vorgang und der messende Eingriff nicht mehr voneinander zu trennen sind.

Diese wirklich prinzipiellen Schwierigkeiten der Fortführung der klassischen Physik wären nur zu überwinden, wenn sich ein ganz neues physikalisches Phänomen finden ließe, das zur Beobachtung von Erscheinungen herangezogen werden könnte und das die angenehmen Eigenschaften hätte, welche die klassische Physik z. B. dem elektromagnetischen Feld beigelegt hat. Von der Anwendung eines solchen neuen Meßverfahrens würde natürlich auch die experimentelle Erfahrung Nutzen haben, und eine Reihe physikalischer Aussagen würde einen ganz anderen Charakter annehmen. Man sieht also daraus schon, daß zwar logisch ganz andere Aussagen möglich wären, wenn andere Meßmittel benutzt werden können, und daß es andererseits im Rahmen der messenden Physik sinnlos wäre, mehr aussagen zu wollen, als nach unserer heutigen Ansicht jemals würde bestätigt werden können.

a) Die BOSE-EINSTEINSche Statistik. Nach dem Vorhergehenden kann als Mikrozustand nicht mehr die Verteilung individueller Moleküle angesehen werden. Fällt aber die Individualität der Moleküle fort, so kann man bestenfalls noch angeben, wieviel Moleküle sich in den einzelnen Zellen befinden. Hingegen besitzen bei der Abzählung die Zellen nach wie vor eine Individualität, denn die Zellen sind ja keine physikalischen Gebilde, sondern die Folge eines mathematischen Ordnungsverfahrens. Allerdings können nicht alle Zellen miteinander vertauscht werden, da ja die meisten Zellen verschiedene physikalische Zustände bedeuten, so daß man bei einer willkürlichen Vertauschung zweier Zellen miteinander zu physikalischen Zuständen gelangen könnte, die den allgemeinen Nebenbedingungen nicht mehr entsprechen. Aus diesem Grunde wollen wir das Abzählungsverfahren in mehrere Schritte aufteilen, indem wir zunächst nur alle die Zellen betrachten, die energetisch wenig voneinander abweichen.

Wir werden demgemäß unter Z_i die Zahl der Zellen verstehen, deren Energie in einem kleinen Bereiche zwischen ϵ_i und $\epsilon_i + \Delta\epsilon$ liegt, und eine Abzählung zunächst nur an ihnen durchführen. Ein Mikrozustand wird durch folgende Angaben bestimmt sein:

Zellen Nr.:	1	2	3	4	5	6	7
Zahl der Teilchen:	17	134	0	134	28	0	0,

während ein Makrozustand jetzt nicht die Zellen selbst nennt, sondern nur angibt, die Zahl der Zellen mit einem Teilchen, mit zwei Teilchen, mit drei Teilchen usw. Nehmen wir den eben angegebenen Mikrozustand als gegeben an, so gehört zu ihm der Makrozustand, 1: keine Zelle mit einem Teilchen; 2: eine Zelle mit 17 Teilchen, eine Zelle mit 28 Teilchen; 3: zwei Zellen mit 134 Teilchen; 4: drei Zellen mit keinem Teilchen.

Man sieht unmittelbar, daß ein solcher Makrozustand noch durch andere Mikrozustände hergestellt werden kann, und wir werden die Zahl dieser Mikrozustände, die den gleichen Makrozustand liefern, als die thermodynamische Wahrscheinlichkeit dieses Makrozustandes definieren.

Um also den Makrozustand allgemein zu bestimmen, müssen wir die Zellenzahl mit keinem, mit einem, mit zwei usw. Teilchen angeben. Da alle Zellen nach wie vor nur dem vorhin angegebenen Energieintervall zwischen ε_i und $\varepsilon_i + \Delta\varepsilon$ angehören sollen, müssen alle Zellenzahlen diesen Index i tragen. Wir bezeichnen also die Zahl der Zellen aus dem Energieintervall i , die mit s Teilchen besetzt sind, mit Z_i^s .

Ausführlicher:

Z_i^0 ist die Zahl der Zellen des Energieintervalles i ohne Teilchen;
 Z_i^1 " " " " " " " " " " i mit 1 Teilchen;
 Z_i^2 " " " " " " " " " " i " 2 "
 Z_i^3 " " " " " " " " " " i " 3 "

Wenn man diese Anordnung mit der aus der klassischen Statistik vergleicht, so kann man sagen, daß in der klassischen Statistik die individuellen Moleküle auf die Zellen verteilt wurden, während in der BOSE-EINSTEINSCHEN Statistik die individuellen Zellen auf Molekülzahlen verteilt werden. Die Z_i^s spielen also hier die Rolle der N_s . Damit können wir die Formel für die Wahrscheinlichkeit aus der klassischen Statistik entlehnen, indem wir nur an die Stelle der N_s die Z_i^s setzen:

$$W_i = \frac{Z_i!}{Z_i^1! Z_i^2! Z_i^3! \dots} \approx \frac{Z_i^{Z_i}}{Z_i^{Z_i^1} \cdot Z_i^{Z_i^2} \cdot Z_i^{Z_i^3} \dots},$$

wo $Z_i = \sum_s Z_i^s$ ist.

Hier hat die Größe W_i den Index i erhalten, um anzudeuten, daß es sich um die Wahrscheinlichkeit einer Verteilung im Energiegebiet i handelt. Da die Verteilungen in verschiedenen Energiegebieten voneinander unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Verteilung in mehreren Energiegebieten einfach das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten: $W = \prod_i W_i$.

Diejenige Verteilung, die dem thermodynamischen Gleichgewichtszustand entspricht, wird, wie auch in der klassischen Statistik, durch ein Maximum von W oder ein Maximum der Entropie gekennzeichnet sein. Der Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und Entropie ist der gleiche wie in der klassischen Theorie. Als Nebenbedingungen werden wieder die Gleichungen auftreten, die Konstanz der Gesamtenergie und Konstanz der Teilchenzahl verlangen. Da $\sum_s sZ_i^s$ die Zahl der Teilchen N_i im Energiegebiet i ist, so muß also gelten:

$$\sum_i N_i = \sum_i \sum_s sZ_i^s = N.$$

Da ferner $\sum \varepsilon_i N_i$ die Gesamtenergie E des Gases ist, erhalten wir:

$$\sum \varepsilon_i N_i = \sum_i \varepsilon_i \sum_s sZ_i^s = E.$$

Für dieses Mal dürfen nicht die N_i als die unabhängigen Größen angesehen werden, sondern die Z_i^s . Allerdings gelten für diese nicht nur die zwei Bedingungen, welche

die Konstanz der Teilchenzahl und der Energie aussprechen, sondern auch noch Bedingungen, die aussagen, daß die Z_i , also die Zahl der Zellen in jedem der Energiegebiete, konstant sind:

$$\sum_s \delta Z_i^s = 0. \quad (i = 1, 2, 3 \dots)$$

Aus der Wahrscheinlichkeit ergibt sich die Entropie

$$S = k \left\{ \sum_i Z_i \ln Z_i - \sum_i \sum_s Z_i^s \ln Z_i^s \right\},$$

und die Bedingungen für einen Extremwert der Entropie lauten zusammen mit den Nebenbedingungen:

$$\delta S = -k \sum_i \sum_s \delta Z_i^s (\ln Z_i^s + 1) = 0.$$

$$\sum_i \sum_s s \delta Z_i^s = 0; \quad \sum_i \varepsilon_i \sum_s s \delta Z_i^s = 0; \quad \sum_s \delta Z_i^s = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots)$$

Von den Nebenbedingungen befreien wir uns nach der gleichen Methode wie in der klassischen Statistik. Die erste der Nebenbedingungen multiplizieren wir mit einer Funktion α , die zweite mit einer Funktion β , und die Bedingungen, welche die Konstanz der Z_i aussprechen, werden mit Funktionen γ_i multipliziert, deren Zahl genau so groß ist, wie die Zahl der Energiegebiete i . Wir verlangen also diesmal einen Extremwert für die Funktion $(S + \alpha N + \beta E + \sum_i \gamma_i Z_i)$ und erhalten:

$$k \sum_i \sum_s \delta Z_i^s \left(\ln Z_i^s + 1 - \frac{\alpha}{k} s - \frac{\beta}{k} \varepsilon_i s - \frac{\gamma_i}{k} \right) = 0;$$

daraus ergibt sich:

$$Z_i^s = e^{\frac{\gamma_i}{k} - 1} e^{\frac{s}{k} (\alpha + \beta \varepsilon_i)}.$$

Aus der Bedingung, daß $\sum_s Z_i^s = Z_i$ ist, findet man:

$$e^{\frac{\gamma_i}{k} - 1} = Z_i : \sum_s e^{\frac{s}{k} (\alpha + \beta \varepsilon_i)} = Z_i \left(1 - e^{\frac{1}{k} (\alpha + \beta \varepsilon_i)} \right).$$

Schließlich bestimmen wir die N_i nach der Gleichung $\sum_s s Z_i^s = N_i$ und erhalten nach einigen Umrechnungen:

$$N_i = Z_i \frac{e^{\frac{1}{k} (\alpha + \beta \varepsilon_i)}}{1 - e^{\frac{1}{k} (\alpha + \beta \varepsilon_i)}}.$$

Daher ist die Gesamtzahl der Teilchen des Gases durch

$$N = \sum_s \frac{Z_i e^{\frac{1}{k} (\alpha + \beta \varepsilon_i)}}{1 - e^{\frac{1}{k} (\alpha + \beta \varepsilon_i)}}$$

und die Gesamtenergie des Gases durch

$$E = \sum_i \frac{Z_i \varepsilon_i e^{\frac{1}{k} (\alpha + \beta \varepsilon_i)}}{1 - e^{\frac{1}{k} (\alpha + \beta \varepsilon_i)}}$$

gegeben.

Jetzt müssen noch die Größen α und β bestimmt werden. Hierzu setzen wir die für die Z_i^s gefundenen Ausdrücke in die Entropie S ein, wobei wir aber $\left(\frac{\gamma_i}{k} - 1 \right)$ durch Z_i ausdrücken. Für den Logarithmus der Z_i^s finden wir:

$$\log Z_i^s = \log Z_i + \log \left(1 - e^{\frac{1}{k} (\alpha + \beta \varepsilon_i)} \right) + \frac{\alpha}{k} s + \frac{\beta}{k} \varepsilon_i s.$$

Dies, über alle i und s summiert, nachdem man vorher mit Z_i^s multipliziert hat, ergibt:

$$\sum_i Z_i \log Z_i + \sum Z_i \log \left(1 - e^{\frac{1}{k}(\alpha + \beta \epsilon_i)} \right) + \frac{\alpha}{k} N + \frac{\beta}{k} E.$$

Wenn man dies mit $(-k)$ multipliziert und zu $k \sum_i Z_i \ln Z_i$ hinzuaddiert, wird S erhalten:

$$S = -\alpha N - \beta E - k \sum_i Z_i \log \left(1 - e^{\frac{1}{k}(\alpha - \beta \epsilon_i)} \right).$$

Offenbar gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial N} = -\alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = -\beta.$$

Da aber aus der Thermodynamik die Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial N} = -\frac{\Phi}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}; \quad \Phi = \frac{E}{N} - T \frac{S}{N} + pV$$

bekannt sind, so erhalten wir für β die gleiche Bedeutung wie in der klassischen Statistik, während α sich als der Quotient des thermodynamischen Potentials von GIBBS, dividiert durch T , erweist. Explizit sieht also die Entropie folgendermaßen aus:

$$S = -\frac{N\Phi}{T} + \frac{E}{T} - k \sum_i Z_i \ln \left(1 - e^{\frac{\Phi - \epsilon_i}{kT}} \right),$$

und daraus ergibt sich z. B. die freie Energie:

$$F = E - TS = kT \sum_i Z_i \ln \left(1 - e^{\frac{\Phi - \epsilon_i}{kT}} \right) + N\Phi.$$

In beiden Gleichungen ist Φ nicht durch $\frac{E}{N} - T \frac{S}{N} + pV$, sondern durch die Gleichung

$$N = \sum_i \frac{Z_i e^{\frac{\Phi - \epsilon_i}{kT}}}{1 - e^{\frac{\Phi - \epsilon_i}{kT}}}$$

zu bestimmen, denn da N bekannt ist, so ist die Größe Φ in dieser Gleichung die einzige Unbekannte, vorausgesetzt, daß wir die Größen Z_i kennen. Diese aber lassen sich in jedem Einzelfalle berechnen.

Die Z_i sollen berechnet werden unter der Voraussetzung, daß die Teilchen aufeinander keine Wechselwirkung ausüben. $dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ ist ein Volumenelement des Phasenraumes, also $\frac{dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{h^3}$ die Zahl der Phasenzellen in diesem Volumenelement. Für $dp_x dp_y dp_z$ können wir

$$dp_x dp_y dp_z = m^3 v^2 dv \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 1/2 (2m)^{3/2} \sqrt{\epsilon} d\epsilon \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

eingeführen, wo ϵ die von ϑ und φ unabhängige Energie ist. Die Integration über die Winkel ergibt den Faktor 4π . Also ist die Zahl der Phasenzellen in dem Energiegebiete zwischen ϵ ; $\epsilon + d\epsilon$ genau gleich $Z_\epsilon = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon$.

Mit Hilfe dieses Ausdruckes kann man dann die Größen N und E als Integrale schreiben:

$$N = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon - \Phi}{kT}} - 1}; \quad E = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^{\frac{\epsilon - \Phi}{kT}} - 1}.$$

Die eben entwickelte Statistik wurde von BOSE erdacht, um das PLANCKSche Strahlungsgesetz abzuleiten unter der Annahme, daß ein Gas aus lauter Einzelpartikeln besteht, die voneinander unabhängig sind. Daß solche Lichtquanten wirklich

existieren, hatte die physikalische Forschung der letzten 25 Jahre erwiesen; daß aber die alte Statistik nie zum PLANCKSchen Strahlungsgesetz, sondern immer zum WIENSchen Strahlungsgesetz führte, war ebenfalls bekannt. BOSE führte nun rein formal eine derartige Abänderung der statistischen Zählweise ein, daß sich das PLANCKSche Strahlungsgesetz richtig ergab. EINSTEIN wandte die gleiche Abzählung an, um ein ideales Gas zu quanteln. Die Anwendung auf solche materiellen Gase führte allerdings seinerzeit zu keinen praktischen Folgerungen, weil die Quanteneffekte sich erst bei sehr tiefen Temperaturen bemerkbar machen und dann immer von den Effekten überdeckt werden, die von der Existenz von Kräften zwischen den Molekülen herrühren. Erst in neuerer Zeit ist es gelungen, die Quantentheorie auf nicht ideale Gase anzuwenden (SOMMERFELD, WALDMANN).

Die Formeln der PLANCKSchen Strahlungstheorie aus den Formeln der BOSE-EINSTEINschen Statistik herzuleiten, ist nunmehr sehr leicht. Ein Lichtquantengas unterscheidet sich von einem materiellen Gase nur dadurch, daß die Zahl der Lichtquanten N nicht begrenzt ist und daher bei der Variation die eine der Bedingungen, welche die Konstanz der Teilchenzahl ausspricht, fortbleiben muß. Rein formal bedeutet dies das Verschwinden von α oder auch von Φ . Ferner werden wir die Zahl der Zellen Z_i durch die Frequenz ν ausdrücken, indem wir berücksichtigen, daß der Impuls eines Teilchens der Frequenz ν den Wert $\frac{h\nu}{c}$ hat. Da wir soeben für Z_i die Größe $\frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp$ fanden, so erhalten wir jetzt $Z_\nu = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$ und daraus $N_\nu d\nu = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$;

indem wir die Zahl der Teilchen aus dem Gebiete $\nu; \nu + d\nu$, die wir $N_\nu d\nu$ nennen, noch mit der Energie eines Lichtquanten $h\nu$ multiplizieren, erhalten wir die räumliche Dichte der Strahlung $q_\nu d\nu = \frac{4\pi V}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$.

Dieser Ausdruck ist genau halb so groß wie der, den PLANCK angibt. Der fehlende Faktor 2 rührt nur daher, daß wir die Lichtquanten als unpolarisierte Größen angesehen haben. Die hier gefundene Größe ist daher die räumliche Strahlungsdichte für eine Polarisationsrichtung.

Wenn man auch in dem Ausdruck für die freie Energie die speziell für Lichtquanten geltenden Werte einführt, so gelangt man zu genau dem Ausdruck, den wir im Abschnitt 4 für die freie Energie von Oszillatoren angegeben haben.

b) Die FERMI-DIRACsche Statistik. Diese geht aus der soeben behandelten BOSE-EINSTEINschen Statistik durch eine Einschränkung hervor, die es gestattet, die Formeln der FERMI-Statistik besonders einfach aus unseren bisherigen Deduktionen abzuleiten.

Die FERMI-DIRACsche Statistik berücksichtigt eine Erkenntnis von PAULI, die als PAULI-Prinzip in der Physik eine große Bedeutung erlangt hat. PAULI hat nämlich festgestellt, daß im ganzen periodischen System nicht ein einziges Mal der Fall eintritt, daß zwei Elektronen eines Atomes die gleichen Quantenzahlen haben. Dies ist allerdings erst dann richtig, wenn man berücksichtigt, daß ein Elektron eine Art Polarisation zeigt, ähnlich der der Lichtquanten. Dann lautet das PAULI-Prinzip so: zwei Elektronen können nur dann die gleichen Quantenzahlen haben, wenn sie verschiedene Polarisationszustände besitzen.

In dieser Form ist das PAULISChe Prinzip nach allem, was wir heute wissen, streng richtig und ließ sich auch mit gewissen Eigenschaften des Vielkörperproblems der Quantentheorie in Zusammenhang bringen, wie im wesentlichen von DIRAC nachgewiesen wurde. Die erste Anwendung des PAULISchen Prinzips auf die Statistik verdanken wir FERMI.

Die Verknüpfung zwischen dem PAULI-Prinzip und der Statistik stellt die Erkenntnis her, daß die einzelnen Phasenzellen der Statistik mit den sogenannten

stationären Zuständen der Quantentheorie übereinstimmen. Die Aussage des PAULI-Prinzipes, daß niemals zwei oder mehr Elektronen die gleichen Quantenzahlen haben können, bedeutet also hier, daß in jeder Phasenzelle höchstens ein Elektron sich befinden kann. Zwar ist dies insofern nicht ganz richtig, als bei verschiedenen Polarisationszuständen zweier Elektronen immer noch beide die gleiche Phasenzelle besetzen können, doch wollen wir dieser Tatsache genau so Rechnung tragen, wie wir die Polarisation im Falle der Lichtquanten berücksichtigten. Wir werden nur in den Gleichungen, den beiden Polarisationszuständen entsprechend, den Faktor 2 hinzufügen und so verfahren, als ob wirklich in einer Phasenzelle sich höchstens ein Elektron befinden kann.

Die wesentliche Vereinfachung gegenüber der BOSE-EINSTEINschen Statistik beruht dann darauf, daß von den Zahlen Z_i^s nur die Zahlen Z_i^0 und Z_i^1 existieren können. Diese Zahlen geben die Anzahl der unbesetzten und der besetzten Zellen an. Auch ist $Z_i^1 = N_i$, da jede besetzte Zelle nur ein Teilchen tragen kann. Indem wir der Größe s nur die beiden Werte 0 und 1 zuteilen, ergibt sich sofort:

$$Z_i^0 = e^{\frac{\gamma_i}{k}} - 1; \quad Z_i^1 = N_i = e^{\frac{\gamma_i}{k}} - 1 \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{k}(\alpha + \beta \epsilon_i)}}$$

und daraus, da $Z_i^0 + Z_i^1 = Z_i$ sein muß:
$$e^{\frac{\gamma_i}{k}} - 1 = \frac{Z_i}{1 + e^{\frac{1}{k}(\alpha + \beta \epsilon_i)}}$$

Da die Zahlen Z_i die gleichen sind wie im Falle der BOSE-EINSTEINschen Statistik, erhalten wir wieder für den Fall, daß keine Kräfte zwischen den Teilchen wirken, die folgenden Gleichungen:

$$N = 2 \cdot 2 \pi V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{-\frac{1}{kT}(\Phi - \epsilon)} + 1}; \quad E = 2 \cdot 2 \pi \cdot V \cdot \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^{-\frac{1}{kT}(\Phi - \epsilon)} + 1}$$

Hier haben wir bereits α durch $\frac{\Phi}{T}$ und β durch $-\frac{1}{T}$ ersetzt und werden erst nachträglich die Richtigkeit dieser Substitution zeigen. Der Faktor 2 entspricht den beiden Polarisationszuständen! Schließlich ergibt sich für die Entropie, indem wir die gefundenen Werte von Z_i^0 und Z_i^1 in die Formel $S = k \sum_i (Z_i \ln Z_i - Z_i^0 \ln Z_i^0 - Z_i^1 \ln Z_i^1)$ einsetzen:

$$S = -\alpha N - \beta E + k Z_i \ln \left(1 + e^{\frac{1}{k}(\alpha + \beta \epsilon_i)} \right).$$

Daraus wie vorher: $\frac{\partial S}{\partial N} = -\alpha$; $\frac{\partial S}{\partial E} = -\beta$, woraus dann genau wie im Falle der BOSE-EINSTEINschen Statistik die Bedeutung von α und β folgt. Es ergibt sich so:

$$S = \frac{E}{T} + \frac{N\Phi}{T} + k \cdot 2 \cdot 2 \pi \cdot V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \ln \left(1 + e^{\frac{\Phi - \epsilon}{kT}} \right) \epsilon^{1/2} d\epsilon,$$

oder die freie Energie:

$$F = -4 \pi k V \cdot \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} T \cdot \int_0^\infty \ln \left(1 + e^{\frac{\Phi - \epsilon}{kT}} \right) \epsilon^{1/2} d\epsilon - N\Phi.$$

Aus der Gleichung für die Entropie folgt:

$$\left(S + \frac{\Phi}{T} N - \frac{E}{T} \right) = \frac{pV}{T} = 4 \pi k V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \ln \left(1 + e^{\frac{\Phi - \epsilon}{kT}} \right) \epsilon^{1/2} d\epsilon.$$

Indem wir das Integral rechter Hand durch partielle Integration umformen, ergibt sich:

$$\frac{pV}{T} = \frac{2}{3} \cdot 4 \pi \frac{V}{T} \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^{-\frac{\Phi - \epsilon}{kT}} + 1}$$

oder

$$pV = 2/3 E,$$

eine Gleichung, die übrigens sowohl in der klassischen Statistik wie auch in der BOSE-EINSTEIN-Statistik ebenfalls richtig ist. Als „Zustandsgleichung eines idealen FERMI-Gases“ aber würde man die Gleichung erhalten:

$$pV_M = RT \cdot 4 \pi V_M \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \ln \left(1 + e^{\frac{\Phi - \epsilon}{kT}} \right) \epsilon^{1/2} d\epsilon.$$

Hier ist V_M das Molvolumen, die Zahl N ist gleich der LOSCHMIDTSchen Zahl und $L \cdot k$ gleich der absoluten Gaskonstante R . Man sieht, daß diese Gleichung in die gewöhnliche ideale Gasgleichung übergeht, wenn rechter Hand der bei RT stehende Ausdruck gleich 1 wird. Ist dies nicht der Fall, so nennen wir das Gas entartet. Wir werden zeigen, unter welchen Bedingungen ein Quantengas entartet ist. Für hinreichend hohe Temperaturen sind alle Gase nicht entartet.

Die unter dem Integralzeichen in den Gleichungen für N und E vorkommende Funktion

$$u(\epsilon) = 4 \pi V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{-\frac{1}{kT}(\Phi - \epsilon)} + 1}$$

kann man folgendermaßen deuten: $u(\epsilon) d\epsilon$ ist die relative Zahl von Teilchen mit der Energie im Intervall $\epsilon; \epsilon + d\epsilon$. Entsprechend ist

$$w(v_x v_y v_z) dv_x dv_y dv_z = V \cdot \left(\frac{m}{h} \right)^3 \frac{dv_x dv_y dv_z}{e^{-\frac{1}{kT}(\Phi - \epsilon)} + 1}$$

die relative Zahl von Teilchen, deren Geschwindigkeitskomponenten in den Intervallen $v_x; v_x + dv_x | v_y; v_y + dv_y | v_z; v_z + dv_z$ liegen, und

$$w(v) dv = 4 \pi V \left(\frac{m}{h} \right)^3 \frac{v^2 dv}{e^{-\frac{1}{kT}(\Phi - \epsilon)} + 1}$$

gilt als Verteilungsgesetz für die Absolutbeträge der Geschwindigkeiten im Intervall $v; v + dv$.

Wir wollen zunächst versuchen, aus der Gleichung für N , die wir auch in der

Form $\frac{N}{4 \pi V} \frac{h^3}{(2m)^{3/2}} = \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{-\frac{1}{kT}(\Phi - u)} + 1}$ schreiben können, einige Schlüsse über den

Wert des thermodynamischen Potentials Φ zu ziehen. Zunächst ist klar, daß, wenn unser Gas wirklich nicht entartet ist, wir auf die klassische Statistik geführt werden

sollten. Dies würde für $e^{\frac{\Phi}{kT}}$ bedeuten, daß es in den klassischen Wert $\frac{N}{Z}$ übergehen müßte, wo Z das Zustandsintegral der klassischen Statistik bedeutet. Dabei müssen wir allerdings beachten, daß das Zustandsintegral der klassischen Statistik wegen der unbestimmten Größe der Phasenzellen einen willkürlichen konstanten Faktor enthält. Ferner ist zu beachten, daß der Phasenraum in der klassischen Statistik (übrigens durchaus willkürlich) von uns aus Koordinaten und Geschwindigkeiten gebildet wurde, während wir uns in der Quantentheorie aus Zweckmäßigkeitsgründen für Koordinaten und Impulse entschieden haben. Aus diesen Gründen werden für

den Fall der Nichtentartung $\frac{N}{Z}$ und $e^{\frac{\Phi}{kT}}$ nur bis auf einen Faktor übereinstimmen, der nichts weiter enthält als h und m , sowie einen Zahlenfaktor $\frac{1}{2}$, der von der Existenz der beiden Polarisationen herrührt.

Wir machen jetzt die Annahme, daß $e^{-\frac{\Phi}{kT}}$ sehr groß gegen 1 ist. Ferner führen wir unter dem Integral der letzten Gleichung an Stelle von ϵ die Größe $\sqrt{\frac{\epsilon}{kT}}$ als

neue Integrationsvariable ein. Wegen der Annahme über $e^{-\frac{\Phi}{kT}}$ können wir die Zahl 1 im Nenner vernachlässigen und erhalten:

$$\frac{N}{4\pi V} \frac{h^3}{(2mkT)^{3/2}} = 2e^{\frac{\Phi}{kT}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-v^2} v^2 dv.$$

Das Integral ist aber gleich $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, so daß sich schließlich ergibt:

$$e^{\frac{\Phi}{kT}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{V} \cdot \frac{h^3}{(2\pi \cdot mkT)^{3/2}},$$

und das ist, abgesehen von dem genannten Faktor, wirklich der Wert $\frac{N}{Z}$ der klassischen Statistik.

Damit haben wir ein Kriterium für das Auftreten der Entartung gefunden. Die Herleitung war gestützt auf die Annahme $e^{-\frac{\Phi}{kT}} \gg 1$, und das bedeutet:

$$\text{Klassische Theorie} = \text{Nichtentartung, wenn } \frac{1}{2} \frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \ll 1$$

und entsprechend:

$$\text{Quantentheorie} = \text{Entartung, wenn } \frac{1}{2} \frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} \gg 1.$$

Klassische Behandlungsweise des Gases ist daher immer gestattet bei hohen Temperaturen; Quantentheorie ist erforderlich bei tiefen Temperaturen. Wie tief die Temperaturen sein müssen, damit die Quantenphänomene sich zeigen, hängt sehr wesentlich von der Größe m , der Masse eines Teilchens ab. Je kleiner die Masse ist, um so höher kann man die Temperaturen wählen, ohne das Gebiet der Quantentheorie zu verlassen. Daher müssen sich die Quanteneffekte des Gases an den kleinsten uns zur Verfügung stehenden Massen, den Elektronen, am leichtesten nachweisen lassen. Rechnet man das Entartungskriterium für Elektronenmasse und Zimmertemperatur nach, so erhält man ungefähr $2 \cdot 10^3$, was sicher groß gegen 1 ist. Dabei ist die Dichte eines solchen Gases sehr groß angenommen, etwa gleich 10^{22} . Dies entspricht nämlich ungefähr der Dichte der Elektronen in einem Metall.

Für tiefe Temperaturen sind die Quantenintegrale nicht so einfach auszuwerten; man findet für sie im allgemeinen nur asymptotisch richtige Ausdrücke in geschlossener Form. So läßt sich für die Größe Φ bei sehr tiefen Temperaturen ein Ausdruck angeben, der folgende Gestalt hat:

$$\Phi_0 = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Wahrscheinlichkeitsfunktion $w(v_x v_y v_z)$ ein, so erhält man

$$W(v_x v_y v_z) = V \left(\frac{m}{h} \right)^3 \cdot \frac{1}{e^{-\frac{1}{kT} \left[\frac{h^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} - \varepsilon \right]} + 1},$$

und diese Größe ist für $T=0$ gleich $\frac{Vm^3}{h^3}$ für $\varepsilon < \Phi_0$, und gleich Null, wenn $\varepsilon > \Phi_0$ ist. Die Größe $\Phi_0 = \Phi$ für $T=0$ wird als FERMISCHE Grenzenenergie bezeichnet. Denn da jede Zelle des Phasenraumes nur mit einem Teilchen besetzt werden kann, läßt sich der Zustand für $T=0$ nicht dadurch verwirklichen, daß alle Teilchen in die unterste Phasenzelle übergehen, wie das bei der klassischen und der BOSE-EINSTEIN'schen Statistik der Fall ist. Das FERMIGAS muß immer Elektronen mit endlicher Energie enthalten, und deren obere Grenze für den absoluten Nullpunkt ist durch Φ_0 gegeben. Der Wert dieser Größe hat die Größenordnung einiger Elektronenvolt für ein Elektronengas im Metall, so z. B. für Ag gleich 5,45 eV.

Die Energie des Gases für sehr kleine Temperaturen hat den Wert

$$E = E_0 + \frac{\pi}{3} \left(\frac{m}{h} \right)^2 (2\pi k)^2 \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3},$$

wo E_0 die vorgenannte Nullpunktsenergie ist. Denn da nur ein Elektron in der energetisch tiefstgelegenen Zelle sein kann, muß das FERMI-Gas immer eine endliche Energie haben, die natürlich eng mit der FERMI'schen Grenzenergie zusammenhängt; ihr Wert ist

$$E_0 = \frac{4\pi}{5} \frac{V h^2}{m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{5/3}.$$

Differenziert man nach T , so ergibt sich die spezifische Wärme für kleine Temperaturen:

$$C = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{m}{h} \right)^2 (2\pi k)^2 \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3} \cdot T.$$

Sie ist offenbar sehr klein und verschwindet am absoluten Nullpunkt gänzlich. Das ist auch der Grund dafür, daß im Gegensatz zu der klassisch begründeten Erwartung das Elektronengas keinen Beitrag zur spezifischen Wärme liefert. Denn für das Elektronengas ist Zimmertemperatur noch eine sehr niedrige Temperatur und liegt weit im Entartungsgebiet, so daß wir dafür die hier abgeleiteten Näherungsformeln noch anwenden dürfen, während für die spezifische Wärme des Metalles ohne die Elektronen noch das DULONG-PETIT'sche Gesetz gilt.

Wenn man jedoch zu tiefen Temperaturen übergeht, so kommt man in ein Gebiet, in dem für den Metallrumpf das T^3 -Gesetz von DEBYE zu gelten beginnt. Dann verschwindet aber die spezifische Wärme des Metallrumpfes schneller als die spezifische Wärme der Elektronen. In solchen Temperaturgebieten kann man dann auch tatsächlich die spezifische Wärme der Elektronen nachweisen.

Die zuletzt entwickelte Quantentheorie auf der Grundlage von PAULI und FERMI hat ungeahnte Erfolge gehabt, denn es ist mit ihrer Hilfe gelungen, die thermoelektrischen und Leitfähigkeitseffekte zum mindesten bei Metallen befriedigend aufzuklären. Das Problem des Isolators hingegen ist noch nicht so weitgehend gelöst, da hier noch wesentliche, von uns nicht voll beherrschte Strukturschwierigkeiten — so z. B. bei den Halbleitern und Luminophoren — zu überwinden sind.

Kleine Mitteilung.

Sichtwahrscheinlichkeit im Walde.

Von H. Bock in Hamburg.

Der anschauliche Name „Wald“ mag ein vollkommen zufällig verstreutes System gleich großer Kreise in der unendlichen Ebene kennzeichnen, von denen nichts bekannt ist als der Kreisdurchmesser d und ihre durchschnittliche Anzahl n je Flächeneinheit, so daß sich auf jeder wie auch immer gestalteten, jedoch in mindestens einer Dimension hinreichend ausgedehnten Fläche F wahrscheinlich $n \cdot F$ Kreise befinden. Nach dem Gesetz der großen Zahlen steigt diese Wahrscheinlichkeit mit n und F .

1. Die durchschnittliche Sehweite λ . Auf einem rechtwinkligen Streifen von der beträchtlichen Länge l und der Breite d stehen durchschnittlich $n \cdot l \cdot d$ Baummittelpunkte (vgl. Fig. 1). Die durchschnittliche Entfernung zweier Bäume ist somit $\lambda = \frac{1}{n \cdot d}$. Da man den Beobachter

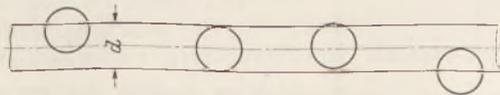


Fig. 1. Probestreifen.

selbst als „Baum“ ansehen darf, ohne den Charakter des ganzen Bestandes wesentlich zu ändern, so ist λ auch die durchschnittliche Länge aller vom Beobachter ausgehenden Sehstrahlen, d. h. die durchschnittliche Sehweite. Die Analogie zur Bestimmung der freien Weglänge in der kinetischen Gastheorie ist augenfällig. Als Zahlenbeispiel betrachten wir stets einen Bestand, der auf je 10 m^2 einen Baum vom Durchmesser $0,2 \text{ m}$ enthält; dann wird $\lambda = 50 \text{ m}$.

2. Der Bedeckungsgrad $B(x)$ gibt an, welcher Bruchteil eines mit dem Halbmesser x um den Beobachter geschlagenen Kreises von Bäumen verdeckt ist. B ergibt sich so. Auf einem Kreisring mit dem Halbmesser x und der Breite dx stehen $2\pi \cdot x \cdot n \cdot dx$ Bäume, von denen das B -fache schon verdeckt ist; der Zuwachs von $2\pi \cdot x \cdot B$ ist aber gleich der Gesamtbreite der noch sichtbaren Stücke des Ringes: $2x \cdot \pi \cdot dB = 2\pi \cdot x \cdot dx \cdot n(1 - B) \cdot d$ oder integriert $B = 1 - C \cdot e^{-x/\lambda}$. Da $B(0)$ verschwindet, so wird

$$B(x) = 1 - e^{-x/\lambda}. \tag{1}$$

Der Komplementärwert $O(x) = 1 - B(x) = e^{-x/\lambda}$ heiße der Öffnungsgrad. Er gibt an, welcher Bruchteil des Kreises noch sichtbar ist und bedeutet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man in irgendeiner Richtung mindestens x Meter weit sehen kann. Für unser Beispiel ist in 100 m Entfernung $O = 13,5\%$.

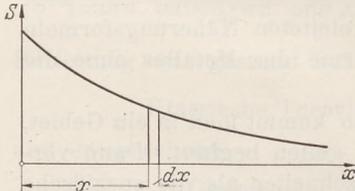


Fig. 2. Wahrscheinlichkeitsfunktion von $S(x)$ über x , von $L(x, b)$ über b .

3. Die Strahlenfunktion $S(x)$ ist diejenige Kurve, deren zwischen x und $(x + dx)$ liegende Fläche ein Maß ist für die wahrscheinliche Anzahl der Sehstrahlen mit der Länge x . Die ganze Fläche zwischen Null und Unendlich repräsentiert dann die Gesamtheit 1 aller Strahlen, die vom Beobachter bis an irgendeinen Baum reichen (vgl. Fig. 2). Von den $2\pi \cdot x \cdot n \cdot dx$ Bäumen des infinitesimalen Ringes ist das O -fache noch sichtbar, und deren Gesamtbreite, dividiert durch den Kreisumfang, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Strahl gerade x Meter lang ist:

$$\frac{2\pi \cdot x \cdot n \cdot dx \cdot e^{-x/\lambda}}{2\pi x} \cdot d = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-x/\lambda} \cdot dx. \text{ Somit hat } S \text{ die Form:}$$

$$S(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-x/\lambda}. \tag{2}$$

Dabei ist von den kleinen Störungen, die durch die endliche Baumdicke entstehen, abgesehen. Die mittlere Länge aller Sehstrahlen ist daher:

$$\frac{\int_0^{\infty} x \cdot S \cdot dx}{\int_0^{\infty} S \cdot dx} = \lambda. \text{ Das ist eine Bestätigung der Ableitung in Nr. 1.}$$

4. Freie Flächen. Dafür, daß irgendein Punkt einer Fläche F von Holz frei sei, besteht, abgesehen von kleinen Randstörungen (vgl. Nr. 6), die Wahrscheinlichkeit $\frac{F - n \cdot f \cdot F}{F}$, wenn unter f der Baumquerschnitt verstanden wird. Um die Freiheit der ganzen Fläche festzustellen, muß man sie ganz abtasten, wobei es jedoch genügt, $\frac{F}{f}$ Punkte zu untersuchen, weil dieses Verhältnis die Höchstzahl der Bäume darstellt, die auf F algebraisch untergebracht werden können. Die Wahrscheinlichkeit für die Leere der ganzen Fläche ist somit nach dem Gesetze des „Sowohl — als auch“:

$$W(F) = (1 - nf)^{F/f} = e^{F/f \cdot \ln(1 - nf)} \sim e^{-nF}. \tag{3}$$

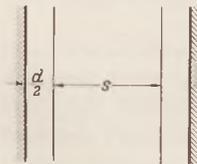


Fig. 3. Reduzierte Baumücke.

Für unser Beispiel und $F = 25 \text{ m}^2$ wird W gleich 8,24%.

$W(F)$ läßt sich weiterhin gut verwenden.

5. Die Lückenzahl $Z(x)$ ist die Anzahl der noch unverdeckten Stellen des um den Beobachter geschlagenen Kreises vom Halbmesser x . Jeder Baum, dessen Mittellinie im Teil s einer Lücke (vgl. Fig. 3) hinzukommt, macht aus ihr zwei Lücken; daher gilt:

$$dZ = \frac{2\pi \cdot x \cdot e^{-x/\lambda} - Z \cdot d}{2x \cdot \pi} \cdot 2\pi \cdot x \cdot n \cdot dx.$$

Im Zähler steht die Summe aller s , und der Faktor hinter dem Bruchstrich ist die Anzahl der beim Wachstum von x um dx neu hinzukommenden Bäume. Die Integration liefert:

$$Z(x) = \pi \cdot x^2 \cdot n \cdot e^{-x/\lambda}.$$

Sein Maximum erreicht Z für $x = 2 \cdot \lambda$ im Betrage $4 \pi \cdot \frac{\lambda}{d} \cdot e^{-2}$. Das kann man gut beobachten, wenn man sich einem Waldrande nähert. Für unser Zahlenbeispiel ist Z bei $x = 100$ m gleich 424.

6. Die Lückenfunktion. Gesucht ist diejenige Kurve $L(x, b)$, deren zwischen b und $(b + db)$ liegende Fläche ein Maß ist für die wahrscheinliche Anzahl der Lücken von der Breite b . Nach Nr. (4) ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Fläche der Fig. 4 frei ist:

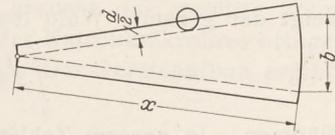


Fig. 4. Freier Kreissektor.

$$W(b) = e^{-n \cdot \left(d + \frac{b}{2}\right) x} = e^{-\frac{x}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b}{d}\right)}$$

Da nun die Gesamtzahl der Lücken nach Nr. (5) $C \cdot \int_0^{\infty} W \cdot db = \pi \cdot x^2 n \cdot e^{-x/\lambda}$ sowie die Summe ihrer Breiten nach Nr. (2) $C \cdot \int_0^{\infty} b \cdot W \cdot db = 2 \pi x \cdot e^{-x/\lambda}$ ist, so ergibt sich in beiden Fällen, wie es sein muß, derselbe Wert $C = \frac{\pi}{2} x^3 \cdot n^2$ und somit:

$$L(x, b) = \frac{\pi}{2} \cdot x^3 \cdot n^2 \cdot e^{-\frac{x}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b}{d}\right)} \quad (5)$$

Die Integration bis $b = \infty$ ist eine zulässige Näherung, weil W mit wachsendem b rasch abnimmt, und zwar um so schneller, je größer x und n sind, was auch der Forderung des Gesetzes der großen Zahlen entspricht.

In unserm Zahlenbeispiel beträgt die Anzahl der in 100 m Abstand befindlichen Lücken, deren Breite z. B. den Wert 0,3 m übersteigt:

$$\int_{0,3}^{\infty} L \cdot db = \pi \cdot x^2 \cdot n \cdot e^{-\frac{x}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{0,3}{2d}\right)} = 95$$

Die Summe der Breiten aller dieser Lücken ist aber:

$$\int_{0,3}^{\infty} b \cdot L \cdot db = 2 \pi x \cdot \left(1 + \frac{x}{\lambda} \cdot \frac{0,3}{2d}\right) \cdot e^{-\frac{x}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{0,3}{2d}\right)} = 47 \text{ m}$$

Hieraus kann man die Wahrscheinlichkeit D_1 dafür ableiten, daß ein Gegenstand oder eine Person von 0,3 m Breite in 100 m Abstand voll sichtbar wird:

$$D_1(x, b) = \frac{\int_{0,3}^{\infty} b \cdot L \cdot db - b \int_{0,3}^{\infty} L \cdot db}{2 \pi x} = \frac{47 - 0,3 \cdot 95}{200 \cdot \pi} = 3\%$$

Das zweite Zählerglied bedeutet, daß der Gegenstand, um voll sichtbar zu sein, sich nicht zum Teil unter die benachbarten Baumgruppen unterschieben darf. Allgemein wird durch Einsetzen von L :

$$D_1(x, b) = e^{-\frac{x}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{b}{2d}\right)} \quad (6)$$

7. Die Durchsichtigkeit $D_2(x, b)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß man von einem Gegenstand mit der Breite b in x Metern Entfernung überhaupt etwas sieht, wobei vorausgesetzt wird, daß der Beobachter den ganzen Gesichtskreis abtastet. Sie ist das wichtigste Ergebnis der vorliegenden Untersuchung. Zu dem völlig freien Teile des Umfanges $2 \pi \cdot x \cdot O(x)$ kommen $2 \cdot Z \cdot \frac{b}{2}$ Umfangsstücke, auf denen der Gegenstand teilweise unter die Lückenränder untergeschoben ist; also wird:

$$D_2(x, b) = \frac{e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot 2 \pi x + Z b}{2 \pi x} = \left(1 + \frac{x}{\lambda} \cdot \frac{b}{2d}\right) e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (7)$$

Vorausgesetzt ist, daß b die Breite d nicht wesentlich übersteigt, weil sonst $Z \cdot b$ zu groß ausfällt. Für $b = 0$ gehen die Gl. (6) und (7) ineinander über, wie es sein muß. In unserm Zahlenbeispiel wird für $x = 100$ m und $b = 0,15$ m der Wert D_2 gleich 23,6%.

Setzt man in Gl. (7) $b=d$, so kann man sie auf den Wald selbst anwenden. Von den $2\pi \cdot x \cdot n \cdot dx$ Bäumen des infinitesimalen Ringes vermag man also $2\pi \cdot x \cdot n \left(1 + \frac{x}{2\lambda}\right) e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot dx$ Stücke ganz oder zum Teil zu erblicken, und demgemäß zeigt der gesamte Wald dem Auge Teile von

$$\int_0^{\infty} 2\pi x n \left(1 + \frac{x}{2\lambda}\right) e^{-\frac{x}{\lambda}} \cdot dx = 4\pi \cdot \frac{\lambda}{d} \quad (8)$$

Bäumen. In unserm Zahlenbeispiel wären das 3140 Stück.

Anmerkung. Den Komplementärwert von D_2 , nämlich:

$$D_3(x, b) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\lambda} \cdot \frac{b}{2d}\right) \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (9)$$

kann man als Undurchsichtigkeit bezeichnen; er bedeutet die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man von dem Gegenstande mit der Breite b überhaupt nichts sieht. In unserm Zahlenbeispiel beläuft er sich für $b=0,25$ m und $x=100$ m auf 70%.

Zusammenfassung. Auf Grund eines einzigen Postulates sind Wahrscheinlichkeitsgesetze über die Sicht im „Walde“ abgeleitet, worunter mathematisch auf der Ebene zufällig verteilte Kreise mit gleichen Durchmessern zu verstehen sind.

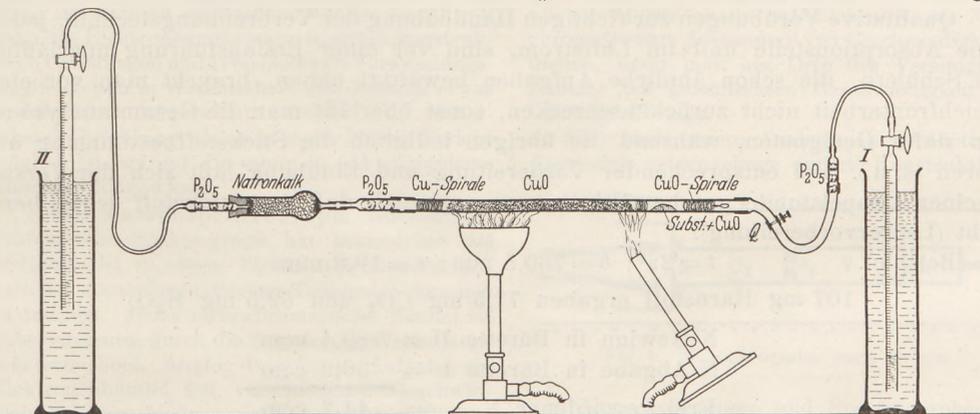
Für die Praxis.

Harnstoff. Gesamtanalyse in einem Arbeitsgang. Von W. Trautmann in Potsdam. In der Regel sind zur Gesamtanalyse einer stickstoffhaltigen organischen Substanz zwei getrennte Untersuchungen, die CHO-Bestimmung und die Stickstoffbestimmung, erforderlich, wodurch die ganze Arbeit verhältnismäßig umständlich wird. Nimmt man jedoch die Verbrennung im Stickstoffstrom vor, so gelingt es, sämtliche Bestandteile des Harnstoffs in einem Arbeitsgange zu erfassen, ohne daß dabei die Schwierigkeit und der Zeitaufwand nennenswert größer werden als bei einer gewöhnlichen Verbrennungsanalyse. Das Verfahren ist sogar sicherer als die getrennte Arbeitsweise, wo die Geschicklichkeit des Ausführenden eine mehr entscheidende Rolle spielt und daher einen zusätzlichen Risikofaktor darstellt. Der Grundgedanke der Methode besteht darin, daß man die mit CuO-Pulver gemischte Substanz in einem gemessenen Stickstoffstrom verbrennt und das gebildete Wasser und Kohlendioxyd mit P_2O_5 und Natronkalk absorbiert, während der freigemachte Stickstoff zusammen mit dem übergeleiteten in einem Meßrohr aufgefangen wird.

Die Arbeit beginnt mit der Herstellung von O-freiem Stickstoff. Das eine der beiden Gasmeßrohre, die für den Hauptversuch gebraucht werden, wird mit Luft gefüllt, während das andere, einschließlich Ansatzrohr, mit Wasser gefüllt wird, worauf beide Hähne zu schließen sind. Zwischen beide Büretten wird ein ss-Rohr mit Kupfer geschaltet und dieses dann erhitzt. Darauf taucht man die Luftbürette tief in das Wasser und treibt, unter Regelung des Gasstroms mit einem Quetschhahn, die Luft über das Kupfer und fängt unter entsprechendem Heben der anderen Bürette den übriggebliebenen Stickstoff auf. Selbstverständlich hat man darauf zu achten, daß der Schlauch, der zur N-Bürette führt, erst dann an diese angeschlossen wird, wenn alle Luft aus ihm verdrängt ist. Da dieser einmal mit Stickstoff gefüllte Schlauch zweckmäßig auch für den Hauptversuch benutzt wird, so schalte man in ihn schon bei dieser Arbeit das P_2O_5 -Watteröhrchen ein, das bei der Verbrennung zum Trocknen des N-Stromes erforderlich ist. Wenn auch der Bedarf an Stickstoff kaum über 40 ccm hinausgeht, so stelle man doch auf alle Fälle die doppelte Menge her. Nach Beendigung dieser Arbeit verschließt man den Schlauch mit einem Quetschhahn.

Das Verbrennungsrohr hat 15 bis 16 cm Länge bei etwa 8 mm Durchmesser. An der Eingangsseite bleibt ein Drittel für die Substanz und eine Kupferoxydspirale frei, dann

folgt, durch einen Pfropfen Kupferwolle gesichert, die Füllung mit CuO-Draht, bis etwa 3 cm vom anderen Ende des Rohres entfernt. Der hier gleichfalls anzubringende Sicherungspfropfen aus Cu-Wolle ist etwa 2 cm lang und vertritt zugleich die zur Reduktion von Stickstoffoxyden erforderliche Kupferspirale. Hatte man das Kupferoxyd vor dem Einfüllen in einem Tiegel ausgeglüht, so braucht das gefüllte Rohr nicht noch einmal geglüht zu werden. Am Ausgangsteile des Natronkalkrohres bringe man auf jeden Fall zur Sicherheit noch ein P_2O_5 -Rohr an¹. Der Geräteaufbau ergibt



Versuchsanordnung zur Harnstoffanalyse.

sich aus der Figur. Die Absorptionsteile und das Verbrennungsrohr ruhen auf zwei nebeneinander stehenden Dreifüßen.

Die eigentliche Untersuchung beginnt mit dem Abwägen von etwa 100 mg gepulvertem und anschließend bei etwa 90° getrocknetem Harnstoff auf einem Stück Glanzpapier mit Hilfe eines Federlöffels.

Dann fügt man dazu vorher ausgeglühtes CuO-Pulver und mischt mit dem Federlöffel sorgfältig durch. Die fast schwarz aussehende Masse bringt man mit einem Fülltrichter in das Verbrennungsrohr und sichert mit einer Kupferoxydspirale, die in diesem Falle besser aus Drahtnetz mit Schlinge besteht, um sie besser handhaben zu können; Cu-Wolle genügt aber auch. Man schiebe diese nicht zu dicht an die Substanz heran, damit man über ihr durch Klopfen einen Durchweg für den Stickstoff herstellen kann; andernfalls könnte durch eine unerwartete Verstopfung die ganze Arbeit verdorben werden. Nachdem das P_2O_5 -Rohr für die Wasserabsorption und das Natronkalkrohr (zusammen mit seinem P_2O_5 -Rohr) zur CO_2 -Absorption, jedes mit seinem Schlauchansatz an der Eingangsseite, gewogen wurden, wird die Versuchsanordnung zusammengesetzt und durch Senken der N-Bürette auf Dichtigkeit geprüft, was sehr wichtig ist. Wurde alles in Ordnung befunden, so werden bei ausgeglichenem Wasserstande die Anfangsstände in beiden Büretten abgelesen und notiert. Darauf senkt man die N-Bürette (I) tief in das Wasser, öffnet ihren Haupthahn, hält aber den Quetschhahn noch fest verschlossen. Nun beginnt man mit dem Erhitzen des Verbrennungsrohres an dessen Ausgangsseite, und zwar zunächst mit einem gewöhnlichen Brenner, später, wenn etwas Kupferoxyd bereits glüht, mit einem Breitbrenner, den man nach Bedarf allmählich stärker brennen läßt. Sobald die Wärme bis zur Substanz vorgedrungen ist und diese sich zu zersetzen beginnt, öffnet man den Quetschhahn ganz vorsichtig, um einen zunächst nur sehr schwachen N-Strom zur Mitnahme der Verbrennungsgase zu erzeugen. Die Auffangbürette ist in dem Maße zu heben, daß kein Überdruck entsteht. Wenn nach etwa fünf Minuten die Zersetzung beendet ist, erhitzt man die Stelle, wo die Substanz lag, noch einmal kräftig und stellt gleichzeitig den N-Strom etwas stärker, um namentlich das Wasser vollends aus dem Verbrennungsrohr zu

¹ Auch für die CHO-Analyse ist dies zu empfehlen.

treiben. Wenn der ziemlich reichliche Wasserdampf heiß in das P_2O_5 -Rohr gelangt, kommt es dort leicht zur Verkohlungs der Watte. Obwohl dies an sich nichts schadet, ist es doch gut, das P_2O_5 -Rohr mit einem Streifen feuchten Filtrierpapiers von Anfang an zu kühlen. Sobald man annehmen kann, daß alle Verbrennungsprodukte aufgefangen sind, schließt man den Hahn von Berütte I, entfernt den Brenner, und liest nach Abkühlung des Verbrennungsrohres die Volumina des verbrauchten und gewonnenen Stickstoffs ab. Die Wägung der Absorptionsteile beschließt den Versuch.

Qualitative Vorübungen zur richtigen Handhabung der Verbrennungstechnik, jedoch ohne Absorptionsteile und im Luftstrom, sind vor einer Erstauführung unerlässlich. Bei Schülern, die schon ähnliche Aufgaben bewältigt haben, braucht man vor einer Gleichfrontarbeit nicht zurückzuschrecken, sonst überläßt man die Gesamtanalyse nur den dafür Geeigneten, während die übrigen lediglich die Stickstoffbestimmung ausführen (s. u.). Bei entsprechender Vorbereitung und Einübung läßt sich der Versuch in einer Doppelstunde gut bewältigen, vorausgesetzt, daß der Stickstoff schon bereit steht (Lehrervorbereitung).

Beispiel. $t = 22^\circ$; $b = 760,5$ mm; $e = 19,8$ mm.

107 mg Harnstoff ergaben 77,5 mg CO_2 und 62,5 mg H_2O .

N-Gewinn in Bürette II = 80,4 ccm

N-Abgabe in Bürette I = 36,2 ccm

Frei gewordener N = 44,2 ccm

$V_0 = 39,9$ ccm; Gewicht $p = 49,8$ mg; $\frac{N}{14} = 3,56$.

77,5 mg CO_2 enthalten 21,13 mg C. $\frac{C}{12} = 1,76$.

62,5 mg H_2O enthalten 7,01 mg H. $\frac{H}{1,01} = 6,94$.

Sauerstoff = $107 - (49,8 + 21,13 + 7,01) = 29,06$ mg.

$\frac{O}{16} = 1,82$.

Atomzahlenverhältnis:

C : H : N : O = 1,76 : 6,94 : 3,56 : 1,82 = 1 : 4 : 2 : 1.

Die einfachste Formel für Harnstoff ist demnach CH_4N_2O .

Will man nur den Stickstoffgehalt in Prozenten ermitteln, so kann man dieses Verfahren gleichfalls benutzen. Da dann der übergeleitete Stickstoff nicht getrocknet zu werden braucht, so ist diese Methode sogar noch einfacher als die N-Bestimmung im CO_2 -Strom und dabei sicherer, weil man nicht von der Beschaffenheit der käuflichen Kohlensäure abhängig ist. Zum Abfangen der bei der Verbrennung entstehenden Kohlensäure, und gleichzeitig auch des Wassers, ist hinter dem Verbrennungsrohr lediglich ein Natronkalkrohr erforderlich, das aber nicht gewogen zu werden braucht.

In unserem Beispiel würde sich aus der Proportion $107 : 49,8 = 100 : x$ der N-Gehalt des Harnstoffs zu 46,54% statt 46,6% ergeben.

Berichte.

2. Forschungen und Ergebnisse.

Anwendungen der Elektronenoptik, insbesondere das Elektronenmikroskop. Von Dr. FRANK MATOSSI und Dr. OTTILIE MATOSSI-RIECHEMELER in Graz.

Linsen und Prismen der Elektronenoptik, die wir im 1. Teile dieses Berichtes¹ kennengelernt

¹ Diese Z. 53, 111 (1940). Im folgenden mit (A) zitiert. In (A) sind zwei sinnstörende Druckfehler

haben, werden, mannigfach kombiniert, in verschiedenen Geräten der physikalischen Technik verwendet. Einige der bezeichnendsten elektronen-

zu berichtigen: Auf S. 120, linke Spalte, 4. Zeile von unten ist statt „Verbrauch“ zu lesen: „Verlauf“; auf S. 122, linke Spalte, 28. Zeile von oben, ist „Elektronenobjekte“ durch „Elektronenobjektive“ zu ersetzen.

optischen Anwendungen wollen wir hier besprechen; wir werden den Massenspektrographen, die BRAUNSCHE Röhre, den Bildwandler und das Elektronenmikroskop als Beispiele heranziehen. Dabei sollen aber die drei erstgenannten Apparate nur so weit einer Betrachtung unterzogen werden, als in ihnen elektronenoptische Elemente zur Verbesserung ihrer Eigenschaften benutzt worden sind. Als typisch elektronenoptisches Gerät soll dann das Elektronenmikroskop in seinen konstruktiven Grundlagen und verschiedenen Verwendungsmöglichkeiten in Wissenschaft und Technik etwas ausführlicher besprochen werden. Für weitergehende Belehrung, als sie in einem kurzen Bericht möglich ist, sei auf die schon in (A) angegebene Literatur hingewiesen¹.

I. Der Massenspektrograph. Der normale lichtoptische Spektrograph hat bekanntlich die Aufgabe, die in einem Lichtstrahlenbündel enthaltenen monochromatischen Teilbündel räumlich zu trennen. Jedes monochromatische Bündel ist dabei eindeutig durch die Angabe der Wellenlänge gekennzeichnet. Analog dazu ist die Aufgabe, ein Elektronenbündel mit verschiedenen Geschwindigkeiten (verschiedenen DE BROGLIESCHEN Wellenlängen) „spektral“ in Strahlen homogener Geschwindigkeit zu zerlegen (Geschwindigkeitsspektrograph). Nun sind ja die elektronenoptischen Betrachtungen nicht auf Elektronen beschränkt, sondern sie sind für alle Korpuskularstrahlen gültig. Zur vollen Charakterisierung eines Materiestrahls gehören aber Geschwindigkeit v , Ladung e und Masse m der Teilchen, also drei Bestimmungsstücke. Man braucht daher für Materiestrahlen im allgemeinen nicht nur einen Geschwindigkeitsspektrographen (v variabel, e , m konstant), sondern entsprechende Apparate zur Bestimmung von e und m , bzw. zur Trennung eines bezüglich Masse und Ladung inhomogenen Strahlenbündels in seine homogenen Teile. Dazu haben wir grundsätzlich die Möglichkeit in der Benutzung von elektrischen und magnetischen Feldern, die Ablenkungen proportional $\frac{e}{mv^2}$ bzw. $\frac{e}{mv}$ liefern [vgl. (A) Abschnitt V]. Hinzu kommt als drittes Ablenkelement z. B. die Beugung an einem Gitter, das die Teilchen proportional λ , d. h. proportional $\frac{1}{mv}$, ablenkt. Wegen der Kleinheit der Materiewellenlänge benutzt man wie bei Röntgenstrahlen meist Atomgitter. Die Kombination von drei derartigen Ablenkmessungen ergibt e , m und v einzeln.

¹ Seit Fertigstellung der Handschrift (Herbst 1939) sind weitere wesentliche Fortschritte speziell auf dem Gebiete der „Übermikroskopie“ erzielt worden, die ihren Niederschlag in dem kürzlich erschienenen Buche von M. v. ARDENNE, Elektronen-Übermikroskopie, Berlin: Julius Springer 1940, und im Sonderheft „Übermikroskopie“ des Jahrbuchs der AEG-Forschung, 7. Bd., 1940, gefunden haben. In unserem Berichte wurden bei der Korrektur diese neuesten Ergebnisse noch kurz verarbeitet.

a) Wir befassen uns zunächst mit dem reinen Geschwindigkeitsspektrographen. Schon (A) Fig. 16 hat uns das Prinzip eines solchen Spektrographen gezeigt. Dabei wurde das Magnetfeld als Prisma und als Linse benutzt; es trennte Strahlen verschiedener Geschwindigkeit, fokussierte dagegen solche verschiedener Richtung, aber gleicher Geschwindigkeit (Richtungsfokussierung). Ein solcher Apparat kann natürlich auch als Monochromator zum Aussondern von Geschwindigkeiten dienen, wenn man am Orte des Vereinigungspunktes der gewünschten Geschwindigkeit eine Öffnung anbringt.

Eine noch engere Analogie zu lichteoptischen Apparaten zeigen einige andere Konstruktionen

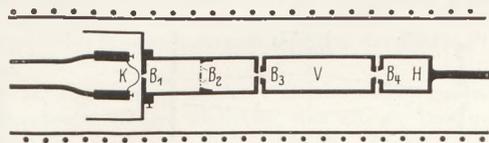


Fig. 1. Monochromator nach RUSCH.

von Monochromatoren und Spektrographen für Elektronenstrahlen. In Fig. 1 z. B. entwerfen Elektronenstrahlen, die von K kommen und die Blende B_1 beleuchten, in einem homogenen longitudinalen Magnetfeld — erzeugt durch eine Spule, deren Drahtwicklungen im Querschnitt durch Punkte angedeutet sind — ein Bild von B_1 auf B_3 für eine bestimmte Geschwindigkeit v_0 , je nach der Größe des Magnetfeldes. Bündel anderer Geschwindigkeit dagegen werden ein Bild von B_1 an anderer Stelle vor oder hinter B_3 liefern. Sorgt man durch eine ringförmige Öffnung B_2 dafür, daß die Achsenstrahlen ausgeschieden werden, die ja für jede Geschwindigkeit durch B_3 gehen, so wird nur

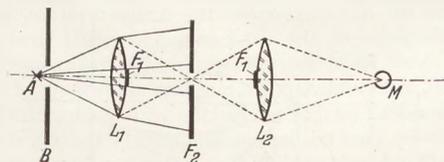


Fig. 2. Zur Quarzlinsenmethode im ultraroten Spektrum.

Strahlung der Geschwindigkeit v_0 aus B_3 austreten. Wiederholt man den Vorgang im Raum V noch einmal, indem man B_3 auf B_4 abbildet, so wird eine unter Umständen in V noch auftretende Streustrahlung anderer Geschwindigkeit weitgehend vom Empfänger H ferngehalten. In dieser Anordnung wird also die „chromatische Aberration“, die Abhängigkeit der Vereinigungsweite von der Wellenlänge bzw. Geschwindigkeit, ausgenutzt, ebenso wie bei der sog. Quarzlinsenmethode, die wegen des großen Unterschiedes der Brennweiten des Quarzes für langwelliges und kurzwelliges Ultrarot für die Isolierung des langwelligeren Ultrarots ($\lambda > 100 \mu$) oft angewandt wird¹. In Fig. 2 ist der Strahlengang für diese optische Methode

¹ Vgl. z. B. F. MATOSSI: Das ultrarote Spektrum. Diese Z. 47, 23 (1934).

skizziert; die Analogie ist ohne weiteres zu erkennen (gestrichelt die langwelligen Strahlen, ausgezogen die kurzwelligen, $M = \text{Empfänger}$)¹.

Fig. 3 zeigt ein elektronenoptisches Analogon zu einem Gitterspektrographen. Die beleuchtete Blende B wird durch die kurze magnetische Linse L auf den rechts angebrachten Schirm abgebildet. F ist das Beugungsgitter, an dem Beugung in die verschiedenen Beugungsordnungen stattfindet. Das Gitter ist in Wirklichkeit eine Metallfolie, deren Kriställchen regellos gelagert sind, so daß Beugung nach Art eines DEBYE-SCHERRER-Röntgenogramms auftritt. Ist der Strahl inhomogen, so erscheinen auf dem Schirm nebeneinander die Geschwindigkeiten, die im Strahl enthalten sind. Gegenüber einer normalen DEBYE-SCHERRER-Aufnahme, die

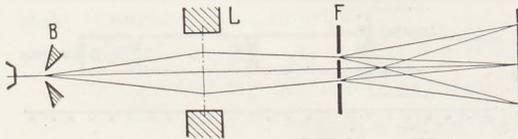


Fig. 3. Beugungsspektrograph nach LEBEDEF.

mit einem schmalen Bündel gleichgerichteter Strahlen arbeitet, ist das Verfahren der Fig. 3 lichtstärker, da hier ja ein breites Bündel Strahlen verschiedener Richtung infolge der Konzentration durch L zur Mitwirkung gelangt.

Einen ähnlichen Erfolg in Bezug auf die Lichtstärke des Elektronenspektrographen erzielte BÜHL durch Ausnutzung der sphärischen Aberration einer langen magnetischen Linse (vgl. Fig. 4). Zwei Blenden B_1 und B_2 sondern zunächst ein schmales Elektronenbündel aus, dieses wird in der Folie F abgelenkt, ohne Linse würden auf einem rechts befindlichen Schirm DEBYE-SCHERRER-Ringe entstehen, die recht lichtschwach sind. Durch eine

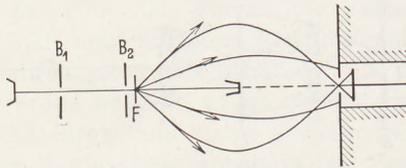


Fig. 4 Anordnung von BÜHL.

magnetische Linse zwischen B_2 und der Auffangfläche werden unter Ausblendung der Zentralstrahlen die abgelenkten Strahlen zu einem Bilde von F vereinigt. Wegen der sphärischen Aberration ist dies an einer bestimmten Raumstelle immer nur für je eine Beugungsordnung möglich. Die Strahlen der übrigen Ordnungen können abgefangen werden. So werden die auf dem Beugungsring verteilten Elektronen wieder zusammengefaßt und können so etwa mit einem Elektrometer leichter nachgewiesen werden.

BRÜCHE schlägt eine Kombination der beiden Anordnungen von Fig. 3 und 4 vor: Einerseits

¹ Da die Figuren durchweg den zitierten Arbeiten entnommen wurden, paßt sich in einzelnen Fällen die Beschriftung unseren Bedürfnissen nicht völlig an.

sollen durch eine Linse zwischen B_1 und F , wobei B_2 wegfällt, Strahlen verschiedener Richtung in einen Bildpunkt von B_1 auf dem Auffangschirm konzentriert werden. Diese Bildpunkte würden dort auf einem DEBYE-SCHERRER-Ring liegen. Andererseits soll eine zweite Linse wie in Fig. 4 wieder die Konzentration des Ringes besorgen.

Man sieht, wie konsequente optische Betrachtung zur Empfindlichkeitssteigerung führen kann. Daß wir es mit Elektronenoptik und nicht mit Lichtoptik zu tun haben, konnte dabei während der qualitativen Diskussion vergessen werden. Erst die technische Durchführung und natürlich die genauen quantitativen Angaben müssen auf die Tatsache, daß es Elektronen- und nicht Lichtstrahlen sind, Rücksicht nehmen. Im lichtoptischen Bereiche wären z. B. Strahlengänge nach Fig. 4 wohl grundsätzlich möglich, aber wegen der nur sehr geringen sphärischen Aberration normaler Glaslinsen praktisch kaum von Nutzen. Dasselbe gilt für die elektronenoptische Quarzlinsenmethode, die in der Optik nur für so extreme Fälle wie das langwellige Ultrarot brauchbar ist.

b) Der eigentliche Massenspektrograph soll eine Trennung von materiellen Strahlen bezüglich e/m ermöglichen, es sollen also im wesent-

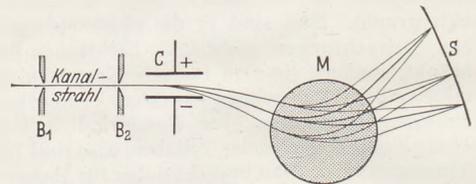


Fig. 5. Schematischer Strahlengang des ASTONschen Massenspektrographen.

lichen verschiedene Massen ausgesiebt werden, da man die Ladung meist als bekannt annehmen darf. Dazu könnte man nun im Prinzip dieselben Geräte benutzen, die als Geschwindigkeitsspektrograph gedient haben. Während dort e/m von vornherein festgelegt war und nur v variierte, müßte jetzt vor Eintritt des Strahls in den Apparat auf irgend einem Wege eine Geschwindigkeitsauslese stattgefunden haben, damit nur noch eine Veränderliche im Strahlenbündel auftritt. Damit wäre aber zweifellos ein starker Intensitätsverlust verbunden, da ja ein Materiestrahl im allgemeinen stets viele Geschwindigkeiten enthält und diese Methode also jeweils nur einen Bruchteil der im Strahl enthaltenen Teilchen erfassen würde. Deshalb ist es wesentlich günstiger, wenn alle Strahlen mit gleichem e/m , die sich aber sowohl nach Richtung als auch nach Geschwindigkeit unterscheiden, in einen Punkt gesammelt werden (Doppelfokussierung). Zunächst hat man in der Entwicklung des Massenspektrographen nur die eine oder die andere Fokussierung erreicht, die Richtungsfokussierung z. B. nach den oben ange deuteten Prinzipien, die Geschwindigkeitsfokussierung im ASTONschen Massenspektrographen, dessen grundlegenden Strahlengang Fig. 5 veranschaulicht.

Der durch zwei Blenden B_1, B_2 der Richtung nach homogenisierte Strahl wird zunächst im elektrischen Prisma C derart zerlegt, daß in jedem Teilstrahl $\frac{e}{mv^2}$ konstant ist; im magnetischen Prisma M , dessen Kraftlinien senkrecht zur Zeichenebene stehen, werden die Strahlen dann in entgegengesetzter Richtung proportional $\frac{e}{mv}$ abgelenkt. Die resultierende Gesamtablenkung ist demnach, wenn man von v absieht, ausschließlich durch den Wert von e/m bestimmt. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß durch das geeignet gewählte Magnetfeld die Teilchen konstanter Ladung und Masse, aber verschiedener Geschwindigkeit, in einen einzigen Punkt fokussiert werden: Die Dispersion der beiden Prismen kann man aus den Ablenkungswinkeln $\Theta_e = \text{const}_1 \cdot \frac{e}{mv^2}$, $\Theta_m = \text{const}_2 \cdot \frac{e}{mv}$ berechnen [vgl. (A)

Abschn.V]. Es ist $\frac{-d\Theta_e}{dv} = \text{const}_1 \cdot \frac{2e}{mv^3}$, $\frac{-d\Theta_m}{dv} = \text{const}_2 \cdot \frac{e}{mv^2}$.

Daraus folgt $d\Theta_m = \frac{\Theta_m}{2\Theta_e} d\Theta_e$, also $d\Theta_m \sim d\Theta_e$. Wird also das Magnetfeld so gewählt, daß $\Theta_m > 2\Theta_e$ ist, so wird die dispergierende Wirkung des elektrischen Feldes durch die entgegengesetzte Dispersion des Magnetfeldes nicht nur aufgehoben, sondern es muß eine Stelle geben, an der eine Konzentration des Strahlenbündels erfolgt, und zwar für alle Strahlen eines Bündels an derselben Stelle; denn der Proportionalitätsfaktor zwischen $d\Theta_m$ und $d\Theta_e$ ist unabhängig von den sich wenig unterscheidenden Geschwindigkeiten der einzelnen Strahlen, er enthält nur die „mittlere“ Geschwindigkeit v des Bündels. Die gleichen Überlegungen gelten natürlich für die Bündel mit anderem e/m -Wert, so daß auf dem Schirm S tatsächlich ein bezüglich der Geschwindigkeit fokussiertes Massenspektrum erscheint.

Wollen wir nun statt des schmalen ausgeblendeten Ausgangsbündels auch solche Strahlen vereinigen, die von B_2 mit endlicher Apertur ausgehen, was einen beträchtlichen Intensitätsgewinn ergeben würde, dann müssen wir durch eine Linse ein Bild von B_2 erzeugen und dafür sorgen, daß dieser Bildpunkt, der Sammelpunkt der Strahlen verschiedener Ausgangsrichtung, durch geeignete Wahl der Linsenbrennweite mit dem ASTONSchen Geschwindigkeitsfokus zusammenfällt. Die technische Durchführung dieses Gedankens ist nicht einfach, da die Linsen bekanntlich mit starken Abbildungsfehlern behaftet sind, wobei hier naturgemäß besonders die chromatischen Fehler störend wirken. Auch muß erreicht werden, daß das Bild der Blende B_2 nicht nur für eine Masse mit dem Geschwindigkeitsfokus identisch ist, sondern möglichst für alle Massen, und daß ferner der Ort aller Vereinigungspunkte auf einer Geraden liegt, an deren Stelle eine photographische Platte gesetzt werden kann. Diese Forderungen

sind in einer Konstruktion von MATTAUCH¹ verwirklicht worden, die gegenüber den ursprünglichen Massenspektrographen mit nur einfacher Fokussierung einen großen Fortschritt bedeutet und die Empfindlichkeit der Massenspektrographie stark erhöhte. Fig. 6 zeigt den Strahlengang für ein Bündel von konstantem e/m -Wert. Die vom materieleuchteten Spalt S austretenden divergierenden Materiestrahlen werden durch eine elektrische Linse (elektrisches Radialfeld), die auch prismatisch wirkt, parallel gemacht und nach der Geschwindigkeit zerlegt. Ein Magnetfeld als Prisma und gleichzeitig als Linse läßt die Strahlenbündel konvergieren, wobei durch Wahl der Brennweite und der Begrenzung der Magnetfeldlinse (in Fig. 6 schraffiert) die Doppelfokussierung erreicht wird. Das gleiche gilt für die Bündel anderer Masse; das Massenspektrum tritt auf der Platte Pl auf.

II. BRAUNSche Röhre, Bildwandler. Die BRAUNSche Röhre, vielleicht das älteste Instrument, in dem, zunächst unbewußt, Elektronenoptik getrieben wurde², hat sich gerade durch die jetzt mögliche bewußte Anwendung elektronen-

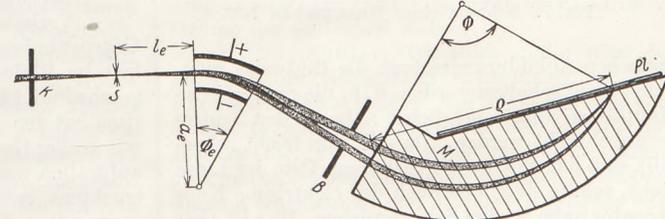


Fig. 6. Strahlengang im Spektrographen nach MATTAUCH. S Spalt, Φ_e Ablenkung im elektrischen Feld, $\Phi = \Theta_m$ Ablenkung im Magnetfeld, M Magnetfeld, Pl Platte; die übrigen Bezeichnungen werden hier übergangen.

optischer Grundsätze auf vielen Gebieten der elektrischen Übertragungstechnik als lebenskräftig erwiesen. Ihre Hauptanwendungsgebiete liegen in der Oszillographie und in der Fernsichttechnik. Die Anforderungen, die dabei an die Eigenschaften der Röhre gestellt werden müssen, mögen kurz gekennzeichnet sein, um die Aufgaben, die hier der Elektronenoptik zu stellen sind, klarzulegen.

a) Kathodenstrahloszillograph. Die BRAUNSche Röhre besteht in ihren wesentlichen Teilen (vgl. Fig. 7) aus der elektronenspendenden Kathode, einer Anode, die neuerdings meist als Blende ausgebildet ist, einem oder zwei senkrecht zueinander stehenden Ablenkondensatoren (in Fig. 7 nur einer gezeichnet) und dem Auffangschirm. Als Oszillographenröhre hat sie die Aufgabe, die an die Kondensatoren angelegten, unter Umständen schnell wechselnden elektrischen Spannungen als Bewegung des Elektronenstrahlflecks auf dem Auffangschirm aufzuzeichnen. Zu diesem Zweck muß der Elektronenstrahl am Orte des Schirms einen möglichst kleinen Durchmesser

¹ J. MATTAUCH: Physik. Z. 38, 951 (1937).
² Der sog. WEHNELT-Zylinder um die Kathode war ein solches rein empirisches elektronenoptisches Element.



haben. Es handelt sich also zunächst darum, das von der Kathode ausgehende divergente Strahlenbündel zu einem Bild der Kathode auf dem Schirm zu konzentrieren, was in der Anordnung nach Fig. 7 durch die „Konzentrationspule“, eine einfache magnetische Linse, erreicht wird¹. Noch günstiger werden die Verhältnisse, wenn man den Lichtverlust, der durch die Schattenwirkung der Anode bedingt ist, durch eine Vorkonzentration mittels magnetischer Kondensorlinse auf die Anodenebene vermeidet; in dieser entsteht also ein Zwischenbild der Kathode, das dann seinerseits durch die Hauptkonzentrationspule auf den Schirm abgebildet wird.

Um einen möglichst kleinen Lichtfleck (kleines Kathodenbild) zu erhalten, müßte nach den

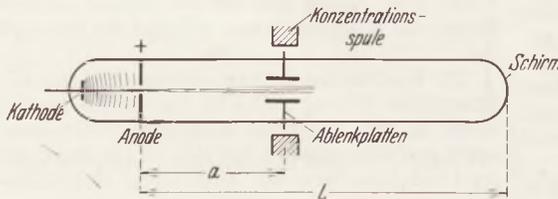


Fig. 7. Schema einer BRAUNschen Röhre.

optischen Abbildungsgesetzen die Bildweite möglichst klein gehalten werden, d. h. die magnetische Hauptlinse müßte möglichst nahe an den Schirm herangebracht werden. Da sich nun leicht zeigen läßt, daß das Prisma am besten am Orte der Linse steht, müßte demnach auch der elektrische Kondensator nahe an den Schirm rücken. Dies ist aber der Erzielung hoher Ablenkungsempfindlichkeit abträglich, für die natürlich der Kondensator gerade möglichst weit ab vom Schirm stehen muß.

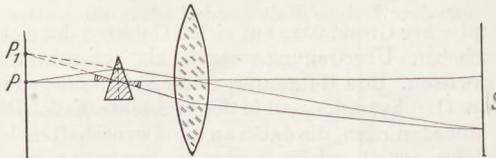


Fig. 8. Optisches Ersatzschema der BRAUNschen Röhre.

Daß Linse und Prisma tatsächlich zusammenstehen sollen, kann man an Hand der Fig. 8 einsehen, in der das optische Ersatzschema der BRAUNschen Röhre gezeichnet ist. Der Kathodenpunkt P würde ohne Prisma auf dem Schirm wieder als Punkt auf der Achse abgebildet werden. Durch das elektrische Prisma im Abstand D von der Kathode wird das Bild seitlich um das Stück S verschoben. Der verschobene Bildpunkt rührt scheinbar von einem Objektpunkt P_1 im Abstand p vom Achsenpunkt P her. Nun ist nach Fig. 8 $p = D \cdot \operatorname{tg} \Theta_e$, ferner $\frac{S}{p} = \frac{b}{g}$, also $S = \frac{b}{g} \cdot D \cdot \operatorname{tg} \Theta_e$ (g und b bedeuten bzw. Gegenstands- und Bild-

¹ Selbstverständlich sind auch elektrische Linsen möglich, die neuerdings einfach durch geeignet aufgeladene metallische Innenbelegungen der Röhre hergestellt werden.

weite, Θ_e den Ablenkungswinkel im Prisma). Ist das Prisma andererseits zwischen Linse und Bild, etwa in der Entfernung Δ vom Schirm, so ist die Verschiebung S' des Mittelstrahls auf dem Schirm einfach durch $S' = \Delta \cdot \operatorname{tg} \Theta_e$ gegeben. In jedem Fall ist die Ablenkung S bzw. S' dem Abstände des Prismas von der Kathode oder vom Schirm proportional. Die Ablenkung ist also am größten, wenn Prisma und Linse zusammenfallen, was ja für die Elektronenoptik keine technische Schwierigkeit ist. Wegen dieser Koppelung von Linse und Prisma ist es also nicht möglich, die Forderungen kleiner Bildweite und großen Lichtzeigers ohne weiteres zu vereinigen. Gerade in der Elektronenoptik hat man aber noch ein weiteres bequemes Mittel zur Verkleinerung des Bildes. Das Gesetz

$B/G = b/g$ (B = Bildgröße, G = Gegenstandsgröße, b , g = Bild- bzw. Gegenstandsweite) gilt in dieser Form ja nur, wenn die Brechungsindizes auf beiden Seiten der Linse einander gleich sind. Ist das nicht der Fall, so berechnet sich, wie aus der Optik bekannt ist, die wahre Bildgröße B' zu $B' = B \cdot n_g/n_b$. Man muß also den Brechungsindex n_b im Bildraum groß im Verhältnis zum Brechungsindex n_g im

Gegenstandsraum machen, bzw. die Geschwindigkeit im Bildraum muß groß gegen die Anfangsgeschwindigkeit sein. Die Erfüllung dieser Forderung hat den weiteren Vorteil, daß die Elektronen mit großer Geschwindigkeit auf den Leuchtschirm aufprallen und so die Helligkeit des Fluoreszenzleuchters erhöhen. — Die Abbildungsfehler der verwandten Linsen müssen natürlich möglichst klein sein, insbesondere muß die Forderung erfüllt sein, daß auch bei großen Ablenkungswinkeln die Güte der Abbildung nicht nachläßt.

Außer den hier genannten einfachsten elektronenoptischen Elementen, die in einer BRAUNschen Röhre Anwendung finden, gibt es noch viele andere, die einzeln oder in verschiedenen Kombinationen die BRAUNsche Röhre von einem Demonstrationsapparat zu einem Hochleistungsinstrument gemacht haben. Beispielsweise wird unter Umständen der Brechungsindex in der Nähe der Prismen durch Verzögerungslinsen stark herabgesetzt, um die Ablenkung zu erhöhen; durch eine Nachbeschleunigungslinse kurz vor dem Schirm kann die Helligkeit so stark erhöht werden, daß heute schon objektive Projektion von Oszillogrammen auf einen Wandschirm möglich ist. Daß natürlich auch die Gaskonzentrationslinse Verwendung findet, besonders in Niederspannungsröhren, bedarf kaum einer besonderen Erwähnung. Für Einzelheiten sei auf die Literatur verwiesen.

b) Fernsehöhren. BRAUNsche Röhren oder auch Abarten davon werden neuerdings in steigendem Maße in der Fernsehtechnik verwandt. Der Oszillographenröhre kommt dabei am nächsten die Bildschreiberöhre, die das Fernsichtbild für den Betrachter erzeugt. Bei ihr werden die Prismen durch Anlegen von Wechselspannungen aus Kipperschwingungskreisen geeigneter Frequenz so gesteuert, daß der Elektronenstrahl die Schreibfläche sehr schnell zeilenmäßig überstreicht. Die

gesamte Bildfläche von etwa $20 \times 20 \text{ cm}^2$ wird heute in über 400 Zeilen 25mal in der Sekunde beschrieben. Die Intensität des Strahls wird für jeden Bildpunkt durch die von der Sendeanlage ankommenden Impulse getreu der Intensität des zu sendenden Bildes gesteuert; das Fernsehbild wird so als Rasterbild aufgebaut. Der schreibende Strahl muß also einen sehr kleinen, gut begrenzten Lichtfleck liefern, damit die Zeilenbreite möglichst gering ist und damit die Intensitätsunterschiede auf der Zeile selbst möglichst scharf herauskommen. Es werden daher an die Abbildungsgüte der Elektronenoptik in der Bildschreiberöhre noch höhere Anforderungen gestellt als in der normalen Oszillographenröhre, von der sich die Bildschreiberöhre grundsätzlich jedoch nicht unterscheidet.

Die Empfängerröhre ist mit der Senderöhre synchron gekoppelt. Das aufzunehmende Bild muß also in analoger Weise zeilenmäßig zerlegt werden. Um eine derartige Zerlegung zu erzielen, wird heute zunächst ein „Bildwandler“ benutzt, der aus dem zu sendenden Gegenstand ein elektronenoptisches Bild erzeugt (Näheres über den Bildwandler s. unter c). Das so entstandene elektronenoptische Bild wird nun als Ganzes durch Ablenkungsspulen mittels geeigneter Kipperschwingungen vor einer feststehenden Öffnung wiederholt schnell vorübergeführt, und zwar jedesmal um eine Zeilenbreite verschoben. Dadurch treffen auf eine hinter der Öffnung stehende Elektrode jeweils Elektronenströme, die der Intensität des gerade vorübergeführten Bildpunktes entsprechen. Diese Aufladung der Elektrode wird nun mit rein elektrischen Mitteln der Sende- und Verstärkertechnik dem Intensitätssteuerorgan der Bildschreiberöhre zugesandt, worauf wir in diesem Zusammenhange nicht weiter eingehen können¹.

Als die zur Zeit wohl beste Lösung der Bildzerlegung in der Senderöhre sei weiter das „Superikonoskop“ erwähnt, das ebenfalls das Bildwandlerprinzip benutzt. Nur wird hier das Elektronenbild, das von dem zu übertragenden Gegenstand im Bildwandler erzeugt wird, nicht an einer Blendenöffnung vorbeigeführt, sondern es wird auf eine mosaikartig unterteilte Schicht entworfen, die Sekundärelektronen auslösen kann. Die einzelnen voneinander isolierten Mosaikflächen sind durch Glimmer von einer leitenden Metallschicht getrennt, so daß jedes Mosaikteilchen mit dem Metallbelag einen Kondensator bildet. Die Mosaikteilchen werden durch das auffallende Elektronenbild je nach der Intensität der einzelnen Bildpunkte zu verschieden starker Sekundäremission angeregt und laden sich daher verschieden stark auf. Ein in einem Seitenansatz der Röhre durch elektronenoptische Sammellinsen erzeugtes sehr feines intensives Elektronenbündel tastet nun seinerseits das feststehende Elektronenbild auf dem Mosaikkondensator ab. Dadurch werden nacheinander alle Mosaikteilchen zu zusätzlicher Sekundäremission angeregt, und ihr Potential wird beim

Auftreffen des Abtaststrahls auf einen und denselben positiven Grenzwert angehoben. Jeder kleine Mosaikkondensator ändert infolgedessen dabei sprunghaft sein Potential vom Ausgangswert aus, also entsprechend der Intensität des Elektronenbildes. Die verschiedenen Helligkeiten des Bildes sind so in zeitlich aufeinanderfolgende Potentialschwankungen umgesetzt, die von der hinteren Kondensatorplatte abgenommen, verstärkt und dem Sender zugeführt werden, von wo sie zur Intensitätssteuerung der Bildschreiberöhre weitergesandt werden. Im Gegensatz zur oben beschriebenen Fernröhre ist hier für die gesteuerte Stromschwankung nicht nur die Elektronenmenge während der Durchgangszeit des Bildpunktes selbst maßgebend, sondern für die Aufladung der Mosaikteilchen ist die sehr viel längere Zeit zwischen zwei Durchgängen des Abtaststrahls in Rechnung zu setzen. Diese Speicherung der Energie macht das Ikonoskop wesentlich ökonomischer als die einfache, oben beschriebene Senderöhre. Allerdings fällt dieser Vorteil nicht ganz so stark ins Gewicht, wie es zunächst scheinen mag, da die Verstärkung der Potentialschwankungen schwieriger ist als die der freien Elektronenströme der einfachen Röhre.

c) Bildwandler. Im Bildwandler wird der abzubildende Gegenstand lichtoptisch auf eine Photokathode abgebildet. Auf dieser Kathode entstehen je nach der Intensität der auffallenden Lichtstrahlen Punkt für Punkt verschieden intensive, photoelektrisch erzeugte Elektronenstrahlen, die nun beschleunigt und mittels elektrischer oder magnetischer Abbildungslinsen zu einem Elektronenbild des Lichtbildes umgewandelt werden. Läßt man das Elektronenbild auf einem Leuchtschirm entstehen, so ist es wieder sichtbar. Auf diesem Wege lassen sich mit dem Bildwandler auch Gegenstände sichtbar machen, die unsichtbare Strahlung aussenden, falls diese wenigstens photoelektrisch wirksam ist (λ_{max} etwa $1,2 \mu$). Der Bildwandler kann technisch z. B. für Beobachtung von Wärmestrahlern unterhalb der Grauglut bis zu einer unteren Temperaturgrenze von 350°C angewandt werden, so daß die Temperaturverteilung solcher Strahler aus der Helligkeitsverteilung des Elektronenbildes erschlossen werden kann. Andere Anwendungsgebiete sind Spektralaufnahmen im Ultrarot, Ultrarotmikroskopie u. a.

III. Das Elektronenmikroskop. Als Elektronenmikroskop werden alle diejenigen elektronenoptischen Systeme bezeichnet, welche die Aufgabe lösen, von einem Gegenstand ein elektronenoptisches vergrößertes Bild zu erzeugen, das entweder auf einem Leuchtschirm sichtbar gemacht wird und dort okular oder photographisch beobachtet werden kann, oder das direkt auf der photographischen Platte aufgefangen wird. Unter Umständen ist eine nachträgliche Vergrößerung auf lichtoptischem Wege zweckmäßig; diese ändert natürlich an der Güte des Bildes, an dem kleinsten noch trennbaren Abstand zweier Objektpunkte, nichts mehr, da ja diese Grenze ausschließlich durch das Auflösungsvermögen der Optik des Elektronenmikroskops gegeben ist [vgl. (A) Abschn. I]. Als

¹ Vgl. hierzu das allgemein verständliche Buchlein von K. LIPPERT: „Das Fernsehen“. München-Berlin 1938.

„förderliche Vergrößerung“ des Elektronenmikroskops wird diejenige Vergrößerung angegeben, die

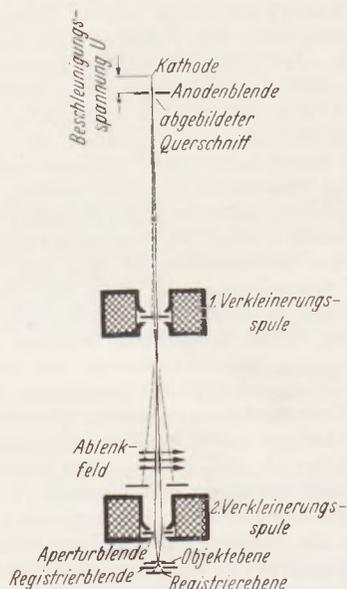


Fig. 9. Schematischer Aufbau des Rasterelektronenmikroskops.

den kleinsten mit dem Instrument noch trennbaren Objektstand auf einen für das Auge bequem aufzulösenden Wert, 0,3 mm, bringt. Was darüber hinausgeht, ist „leere Vergrößerung“.

tung sind neuerdings Konstruktionen angegeben worden. Andererseits bietet die Elektronenoptik auch die Möglichkeit, Elektronen-Selbstleuchter (Kathoden) während des Betriebs mikroskopisch untersuchen zu können (Emissionsmikroskopie).

Die verschiedenen bis jetzt konstruierten Mikroskoptypen sollen hier nicht in historischer Reihenfolge besprochen werden, auch nicht gemäß der eben angedeuteten Einteilung in Emissions- und Durchleuchtungsmikroskope, sondern in der Reihenfolge wachsender Analogie zum Lichtmikroskop. Ein Unterschied zum Lichtmikroskop ist übrigens bei allen Elektronenmikroskopen vorhanden: Eine Okularlupe gibt es hier natürlich nicht, da notwendigerweise reelle Bilder auf einem Schirm erzeugt werden müssen.

a) Das Rasterelektronenmikroskop¹. Das Prinzip des Rasterelektronenmikroskops schließt an die bei der Fernseh-Elektronenoptik benutzte Zerlegung des Bildes oder des Objekts in zeilenförmig angeordnete Bildpunkte an. Zu dem Zweck wird ein sehr feiner Elektronenstrahl hergestellt (Fig. 9), dessen Durchmesser in der Objektebene weniger als 10^{-5} mm beträgt, und zwar durch elektronenoptische Verkleinerung einer schmalen Austrittsblende von etwa 0,1 mm Durchmesser mittels zweier kurz-brennweitigen Spulen. Diese „Elektronensonde“ wird wie in der Fernsichttechnik Zeile für Zeile durch Ablenkfelder über den ganzen zu beobachtenden Gegenstand, etwa eine dünne Folie, geführt, so daß diese in vielen Punkten nacheinander durchleuchtet wird. Hinter der Folie wird die Intensität



Fig. 10. Bildraster von durchstrahlten ZnO-Kristallen.

Der abzubildende Gegenstand kann einerseits von Elektronen durchstrahlt werden, wie ja normalerweise auch im Lichtmikroskop durchleuchtete Objekte untersucht werden. In diesem Falle dient das Elektronenmikroskop dazu, Gegenstände, die für lichtoptische Untersuchungen ungeeignet sind, zu beobachten, sei es, daß das hohe Auflösungsvermögen elektronenoptischer Systeme ausgenutzt werden soll, sei es, daß für Lichtstrahlung das Objekt keine Kontraste bietet, die aber unter Umständen bei Elektronenbeleuchtung vorhanden sein können. Auch für Aufsichtbeobach-

des Elektronenstrahls je nach der durchlaufenen Masse von Punkt zu Punkt variieren. Man registriert nun diese Intensitäten, indem man eine photographische Platte hinter die Folie bringt. Würde diese Platte im Raume feststehen, dann könnte natürlich nur eine „Kontaktkopie“ ohne Vergrößerung entstehen. Bewegt man aber die photographische Platte synchron mit der Sondenbewegung, so vergrößern sich die Abstände der auf der Platte registrierten Bildpunkte gemäß der

¹ M. V. ARDENNE: Z. Physik **109**, 553 (1938). Vgl. auch das bereits genannte ARDENNESche Buch.

Geschwindigkeit der Platte. Je größer diese gegenüber der Sondenbewegung ist, um so größer ist das Bild. Da die Plattengeschwindigkeit aus mechanischen Gründen begrenzt ist, ist die Zeit für eine ganze Aufnahme von sehr vielen Bildpunkten recht groß, mehrere Minuten, unter Umständen sogar einige Stunden, was für die allgemeine Anwendbarkeit des Rastermikroskops nachteilig ist.

Das Auflösungsvermögen des Rastermikroskops ist im wesentlichen begrenzt durch die Schärfe der Sonde und die Dicke der durchstrahlten Schicht, in welcher der Sondenstrahl durch Streuvorgänge verbreitert wird; ebenso ist natürlich die Korngröße der photographischen Platte und die Geschwindigkeit der Sonde maßgebend für das Auflösungsvermögen. In Zeilenrichtung konnten bisher günstigstenfalls Abstände von etwa $1 \cdot 10^{-5}$ mm getrennt werden, was einer förderlichen Vergrößerung von rund 32 000 entspricht. Da die einzelnen Zeilen in Abständen von etwa $1 \cdot 10^{-4}$ mm aufeinanderfolgen, ist quer zur Zeilenrichtung das Auflösungsvermögen geringer. Fig. 10 zeigt ein derartiges Rasterbild, aufgenommen mit Elektronen von 23 ekV Geschwindigkeit an einer Folie von ZnO-Kristallen, deren Grenzen sich durch die verschiedene Helligkeit bemerkbar machen. Die Vergrößerung ist hier nur 8000fach. Das Bild ist trotz der für den Betrachter störenden Zeilenstruktur schärfer und damit aufschlußreicher als ein Lichtbild gleicher Vergrößerung, bei dem aber infolge des geringeren Auflösungsvermögens die Helligkeitsverteilung durch Beugungserscheinungen völlig verwischt ist.

b) Das Schattenmikroskop. Wie beim Rastermikroskop ist auch beim Schattenmikroskop (H. BOERSCH) die feine Elektronensonde das wesentliche Werkzeug für eine brauchbare Vergrößerung. Die Stelle des kleinsten Sondendurchmessers dient als nahezu punktförmige Elektronenquelle, die von dem zu untersuchenden Objekt eine Schattenprojektion entwirft (vgl. Fig. 11). Wie bei jedem Schattenwurf folgt die Vergrößerung unmittelbar aus den Abständen des Auffangschirms von Gegenstand und Strahlungsquelle, $V = b/g$. Das Auflösungsvermögen ist einerseits begrenzt durch die Breite der Sonde (d), andererseits durch etwaige Streuvorgänge im Objekt. Sieht man von letzteren ab, was sehr dünne Objektschichten voraussetzt, so ist die Unschärfe des Bildes, wie leicht ersichtlich ist, durch $V \cdot d$ gegeben, wenn $b \gg g$. Das Auflösungsvermögen, der kleinste noch trennbare Abstand im Objekt, ist also durch d gegeben. Bei den bisherigen Konstruktionen hat d den Wert $0,1 \mu$. Die Unschärfe durch Streuung im Objekt kann bei dickeren Objekten sehr störend wirken. M. v. ARDENNE hat daher das Prinzip des Schattenmikroskops dadurch abgewandelt, daß er mit der Elektronensonde auf einer Antikathode eine entsprechend feine Röntgenstrahlquelle erzeugt, die ihrerseits zum Schattenwurf benutzt wird. Der wesentliche Vorteil dieser Konstruktion beruht darauf, daß die Streuung der Röntgenstrahlen wesentlich geringer ist als die von Elektronen der im allgemeinen verwandten Geschwindigkeiten.

Das Schattenmikroskop zeichnet sich im Vergleich zu den sog. Übermikroskopen (vgl. Abschn. e) nicht durch besonders hohe Auflösung aus, jedoch hat es naturgemäß den nicht zu unterschätzenden Vorteil großer Tiefenschärfe (lichtoptisches Analogon: die Lochkamera). Eine solche Tiefenschärfe ist z. B. für stereoskopische Aufnahmen unbedingt erforderlich.

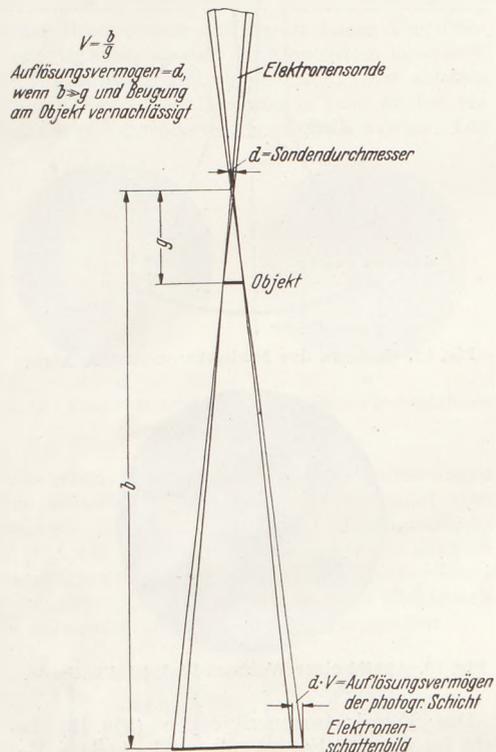


Fig. 11. Strahlengang im Schattenmikroskop.

c) Das Feldelektronenmikroskop¹. Durch sehr hohe Felder in der Größenordnung von etwa 10^6 bis 10^7 Volt/cm können aus einem Metall Elektronen herausgezogen werden, auch ohne besondere Energiezuführung durch Erhitzung oder Bestrahlung. Die Austrittsarbeit der Elektronen, die bei deren Befreiung überwunden werden muß, hat die Größenordnung von wenigen Volt. Da die dabei maßgebenden atomistischen Kräfte sich aber in einer äußerst dünnen Schicht auswirken, entspricht diese Austrittsarbeit sehr hohen Feldstärken, die auch durch äußere Felder der angegebenen Stärke nicht ganz überwunden werden. Jedoch können die Elektronen nun von selbst die restliche Potentialschwelle infolge des quantenmechanischen sog. Tunneleffekts überwinden. Dieser gibt eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß Teilchen eine Energieschwelle überwinden, auch wenn ihre Eigenenergie dazu nicht ausreicht, wobei die Wahrscheinlichkeit um so größer ist, je geringer der fehlende Restbetrag an Eigenenergie ist. Dieser Tunneleffekt ist also grund-

¹ E. W. MÜLLER: Z. Physik 106, 541 (1937).

sätzlich stets vorhanden, wird aber erst durch das Anlegen hoher Felder so verstärkt, daß eine merkliche Elektronenausbeute zustande kommt.

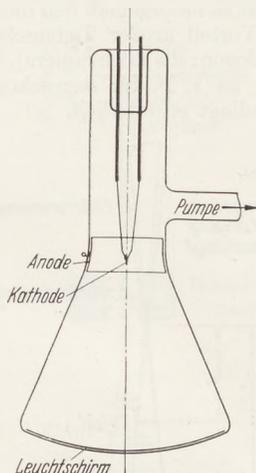


Fig. 12. Schema des Feldelektronenmikroskops.

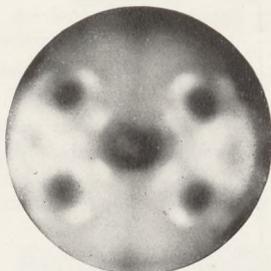


Fig. 13. Abbild einer Wolfram-Einkristalkathode.

Das Feldelektronenmikroskop (Fig. 12) besteht im wesentlichen aus einer sehr kleinen Kathode, deren Oberfläche eine kleine Kugelkappe

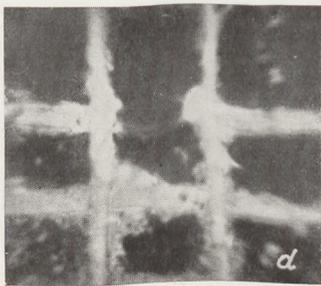


Fig. 14. Veränderungen auf einer Glühkathode (65fach vergrößert).

darstellt, einer in der Nähe befindlichen Anode und einem Leuchtschirm, der konzentrisch zur Kathode angebracht ist. Durch die an der Kathode liegende hohe Feldstärke verlassen die Elektronen deren Oberfläche praktisch radial und durchlaufen den feldfreien Raum vor dem Leuchtschirm geradlinig, so daß auf diesem ein Projektionsbild der Kathode mittels Zentralprojektion entsteht, und zwar in einer Vergrößerung, die dem Verhältnis der Krümmungsradien von Leucht-

schirm und Kathode gleich ist. Bei dem in Fig. 12 dargestellten Mikroskop ist diese Vergrößerung

$$V = \frac{10 \text{ cm}}{5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}} = 200000.$$

Die Helligkeitsverteilung auf dem Schirm gibt die Emissionsverteilung auf der Kathode wieder. In Fig. 13 ist auf diese Weise die Projektion einer emittierenden Kathode aus einem WOLFRAM-Einkristall erhalten, wobei die Bedeutung der Kristallsymmetrie für die Emission deutlich zutage tritt. Die Mitte des Bildes entspricht der Emission einer Rhombendodekaëderfläche (110), die also schlecht emittiert, eine hohe Austrittsarbeit besitzt; die vier anderen schwarzen Punkte entsprechen den Ikositetraëderflächen (211). Auf diese Weise läßt sich die Abhängigkeit der Austrittsarbeit von der Kristallrichtung bequem untersuchen. Die Abbildung ist so gut, daß die förderliche Vergrößerung bis zu 50000 geht.

Weder im Feldelektronenmikroskop noch in den Elektronensondenmikroskopen ist die Vergrößerung auf elektronenoptischem Weg erreicht worden, diese beiden Apparate sind also unter diesem Gesichtspunkt nicht zu den Mikroskopen im engeren Sinne zu zählen. Dagegen sind die folgenden Typen in enger Analogie zu den lichtoptischen Mikroskopen entstanden.

d) Das Emissionsmikroskop¹. Dieses dient dazu, „selbstleuchtende“ Objekte abzubilden. Es liegt auf der Hand, welche Bedeutung ein solches Instrument für die Erforschung der Vorgänge auf Kathoden bei hohen Temperaturen hat, wo eine lichtmikroskopische Untersuchung praktisch ausgeschlossen ist, irgendwelche Veränderungen auf den Kathoden sich aber in der Stärke der Elektronenemission kundtun. Auf diese Weise lassen sich auch Umkristallisierungen bei hohen Umwandlungstemperaturen verfolgen. Man kann also erstmalig Glühkathoden im Betrieb direkt beobachten. Bei den technisch im allgemeinen

verwandten Glühkathodenröhren sind allerdings häufig sich stark ausbildende Raumladungen einer sauberen Abbildung hinderlich; man muß die Raumladungen deshalb durch etwas veränderte Betriebsbedingungen, Unterheizung oder hohe Spannung, die die Raumladung zerstört, möglichst beseitigen. Die Anwendung des Elektronen-

¹ Literatur siehe in den in (A) angegebenen Zusammenfassungen.

mikroskops ist natürlich keineswegs auf hochtemperierte Kathoden beschränkt, auch photoelektrisch emittierende Kathoden können abgebildet werden.

Fig. 14 und 15 geben Beispiele für die Anwendung der Emissionsmikroskopie. Aus Fig. 14a ersieht man die ungleiche Elektronenemission an verschiedenen vorbehandelten Stellen der Glühkathode. Die späteren Aufnahmen *d* und *f* zeigen deutlich, daß Veränderungen während der Emission stattgefunden haben. In Fig. 15 sind zum Vergleich Elektronen- und Lichtbild einer Zinkelektrode, die durch Bestrahlung zu Photoemission angeregt wurde, nebeneinander gestellt. Zweifellos ist dabei das lichtoptische Bild in seiner Qualität besser. Man sieht, daß sich die Abbildungsfehler [vgl. (A) Abschn. IV] bei dem hier notwendigen großen Gesichtsfeld sehr stark auswirken. Aus diesem Grund ist es in der Emissionsmikroskopie noch nicht möglich, sehr hohe förderliche Vergrößerungen zu erreichen. Ihr Maximalwert liegt zur Zeit bei etwa 100. Aufgabe der Emissionsmikroskopie ist es aber auch weniger, sehr stark zu vergrößern, als Vorgänge sichtbar zu machen, die dem Lichtmikroskop unzugänglich sind.

Der grundsätzliche Aufbau eines Emissionsmikroskops ist einfach: Die Kathode wird durch ein elektronenoptisches System vergrößert auf dem Leuchtschirm oder der photographischen Platte abgebildet. Beschränkt man sich nicht auf nur ganz geringe Vergrößerungen, so nimmt man zweckmäßigerweise wie beim Lichtmikroskop die Vergrößerung meistens in zwei Stufen vor, indem man ein reelles Zwischenbild erzeugt und dieses weiter vergrößert. Abgesehen von den geringeren technischen Mitteln, die für jede einzelne Linse bei zweistufiger Ausbildung des Mikroskops erforderlich sind, hat dieses Vorgehen noch den Vorteil, daß auch an der Stelle des Zwischenbildes ein Leuchtschirm angebracht werden kann. Dadurch verschafft man sich bei geringer Vergrößerung einen Gesamtüberblick über das Bild und wählt nun besonders interessierende Stellen aus, die man mit Hilfe einer Blendenöffnung der zweiten Vergrößerungsstufe zuführt. Das so entstehende Endbild gibt zwar nur einen kleinen Ausschnitt aus dem zu untersuchenden Objekt, diesen dafür aber mit einer der Gesichtsfeldbeschränkung entsprechenden genügend einheitlichen Schärfe. Die Einstufung des gewünschten Bildausschnitts über die Blendenöffnung kann dabei entweder durch Ablenkfelder geschehen, die das Elektronenbündel als Ganzes zur Seite schieben, oder auch durch mechanische Verschiebung des Objekts selbst.

Es sei bemerkt, daß für diese Überlegungen die Selbstleuchtereigenschaft des Objekts nicht wesentlich ist. Sie gelten vielmehr in gleicher Weise für das sog. Übermikroskop, in dem Objekte durchleuchtet werden (Abschn. e). Erst dort kommen die Vorteile voll zur Auswirkung, weil man dabei die Vergrößerung auf Kosten des Gesichtsfeldes weiter steigern kann, als es beim Emissionsmikroskop natürlicherweise möglich ist, wo ja bei den üblichen Anwendungen immer ein erheblicher Teil der Kathode gleichzeitig beobachtet werden muß.

Als Linsen benutzt man einerseits magnetische (KNOLL-RUSKA), andererseits elektrische (BRÜCHE-JOHANNSSON). Erstere haben den Vorteil, daß sie technisch leichter zu handhaben sind; sie können außerhalb des Vakuums der Entladungsröhre angebracht und justiert werden. Jedoch lassen sie dann nur geringe Vergrößerungen zu. Erst neuerdings ist es möglich geworden, so kleine magnetische Linsen zu konstruieren, wie sie zur Erzielung kleiner Brennweiten und damit hoher Vergrößerung nötig sind; sie sind dann natürlich innerhalb der Entladungsröhre anzubringen. Mit solchen magnetischen Linsen konnten in zwei Stufen bis 30000fache Vergrößerungen erhalten werden. Die

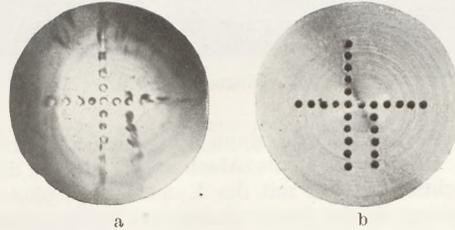


Fig. 15. Elektronen- und Lichtbild einer Photokathode (2fach vergrößert).

elektrischen Linsen lassen hohe Vergrößerungen ohne weiteres zu. Als Objektiv verwendet man gern eine elektrische Linse, das Immersionsobjektiv [vgl. (A) Abschn. IIc], das sich schon deshalb aufdrängt, weil das bei ihm vorhandene Beschleunigungsfeld ohnehin nötig ist, um den Elektronen die notwendige Geschwindigkeit zu erteilen.

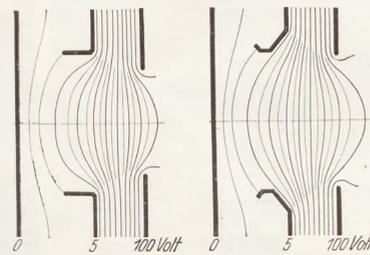


Fig. 16. Einfluß des Profils der Blenden auf das Potentialfeld.

Die Schwierigkeiten bei dem Bau der Elektronenmikroskope liegen nicht in der Erzielung hoher Vergrößerungen. Wie schon mehrfach erwähnt wurde, ist das Augenmerk besonders auf gut abbildende Linsen zu legen. Wie sehr bei elektrischen Linsen die Form der Linsenelektroden den Verlauf der Potentialflächen außerhalb der optischen Achse und damit die Güte des Bildes beeinflusst, mag Fig. 16 veranschaulichen, aus der ersichtlich ist, daß die Potentialflächen bei der Anordnung rechts auch noch am Rande nahezu kugelförmig sind, während links stärkere Deformationen auftreten, welche die optische Abbildung ungünstig beeinflussen. Der Bereich des scharf abgebildeten Gesichtsfeldes beträgt für die rechte Anordnung gegenüber einer mit nur ebenen Elektroden etwa das Dreifache.

Den Aufbau eines technisch sehr einfachen magnetischen zweistufigen Mikroskops zeigt Fig. 17:

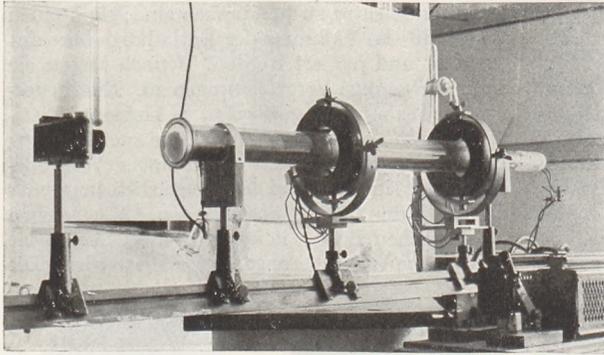


Fig. 17. Magnetisches Mikroskop

Rechts die Kathode, dann die beiden abbildenden Magnetspulen, als Abschluß des Rohres der Leuchtschirm, der mit der Kamera links fotografiert werden kann. Außer rein magnetischen und rein elektrischen Mikroskopen können natürlich mannigfache Kombinationen vorkommen. Auf weitere technische Einzelheiten gehen wir nicht ein.

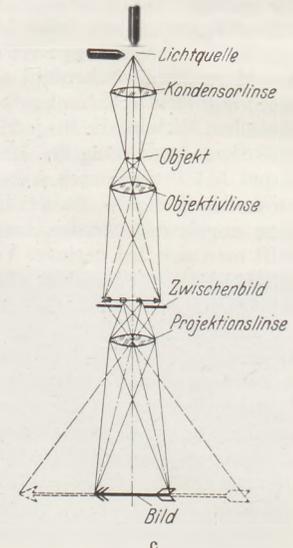
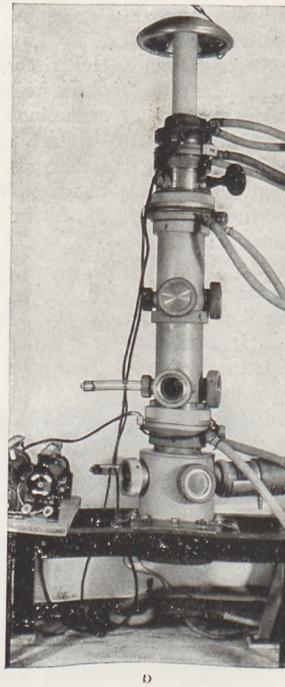
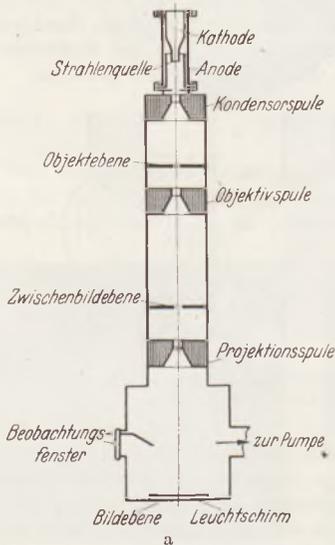


Fig. 18a—c. Magnetisches Übermikroskop. a Schema des Übermikroskops; b praktische Ausführung; c lichtoptisches Ersatzschema.

Es sei jedoch noch die Frage besprochen, wie die Vergrößerung variiert werden kann, wenn die Gesamtentfernung Gegenstand-Bild konstant gehalten wird, wie es aus technischen Gründen notwendig ist. Wenn die Linsen auf der Achse beweglich angeordnet sind, ist dies einfach durch ihre Verschiebung zu erreichen. Bei kleinerer Gegenstandsweite wird das Bild größer; dabei muß die Brennweite der Linse durch Wahl eines anderen Potentials entsprechend geändert werden. Bei

feststehenden Linsen läßt sich das Ziel nicht einfach durch Spannungsänderung erreichen, da mit der hierdurch erzielten Änderung der Brennweite nicht nur die Vergrößerung, sondern auch der Bildort verschoben wird. Zu einer feststehenden Linse muß vielmehr eine davon unabhängige elektrische oder magnetische Zusatzlinse gesetzt werden, sei es am Ort der ersten Linse selbst, oder auch an anderer Stelle des Strahlengangs. Eine solche Zusatzlinse entwirft durch passende Wahl der Spannung vom Objekt an geeigneter Stelle ein im allgemeinen virtuelles Bild, das jetzt seinerseits durch die ursprüngliche Linse mit unter Umständen geeignet abgeänderter Brechkraft am vorgegebenen Bildort abgebildet wird. Gerade hierbei ist die optische „Biegsamkeit“ der Elektronenlinsen sehr von

Vorteil, so daß tatsächlich durch einfache Potentialänderungen die Vergrößerung innerhalb gewisser Grenzen kontinuierlich variiert werden kann (etwa um das Doppelte). Im lichtoptischen Falle kann die Vergrößerung bekanntlich nur durch Auswechseln der Objektiv- und Okulare diskontinuierlich verändert werden.

e) Das Übermikroskop¹. Der grundsätzliche Aufbau der Optik des Emissionsmikroskops bleibt auch dann erhalten, wenn man nicht Selbstleuchter

¹ B. v. BORRIES u. E. RUSKA: Verh. dtsh. Ges. Naturforsch. 95. Verslg Stuttgart, S. 72. Berlin: Julius Springer 1939. — M. v. ARDENNE: Elektronen-Übermikroskopie. Berlin 1940. — Jahrbuch der AEG-Forschung, Bd. 7, Sonderheft „Übermikroskopie“, 1940.

untersucht, sondern wenn das abzubildende Objekt, wie es in der Lichtmikroskopie üblich ist, durchstrahlt wird. Bei diesem „Übermikroskop“ tritt an die Stelle der Kathode des Emissionsmikroskops das Objekt, das seinerseits durch eine Elektronenquelle mittels einer Kondensatorspule „beleuchtet“ werden muß. Den schematischen Aufbau eines solchen Durchstrahlungsmikroskops und ein Beispiel für die praktische Ausführung zeigt Fig. 18. Es handelt sich um ein magnetisches zweistufiges Mikroskop, dessen Magnetspulen sehr kleiner Brennweite im Innern des Rohres sitzen. Fig. 19 zeigt in instruktiver Weise den Strahlengang in einer solchen Magnetlinse. Das unmittelbar vor den magnetischen Kraftlinien angebrachte Objekt streut einen Teil der Elektronen auf die dick gezeichnete Blende zwischen den Polen und läßt einen

Vergrößerungsfaktor ist in beiden Fällen durch lichtoptische Nachvergrößerung auf 10000 gebracht

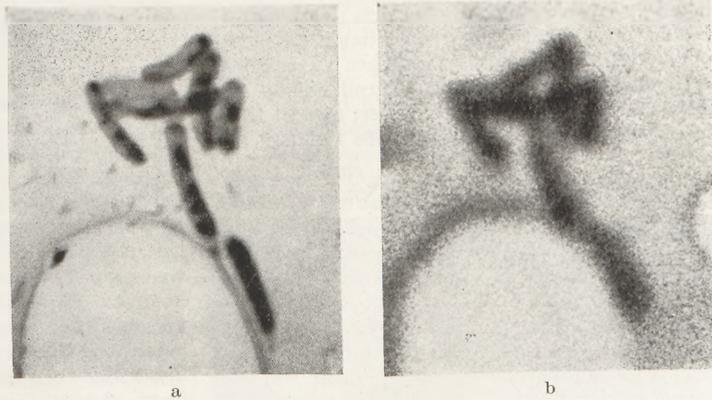


Fig. 20 a und b. Bacterium coli. a elektronenoptisch, 4200fach vergrößert, 2,4fach nachvergrößert; b lichtoptisch 1000fach vergrößert, 10fach nachvergrößert.

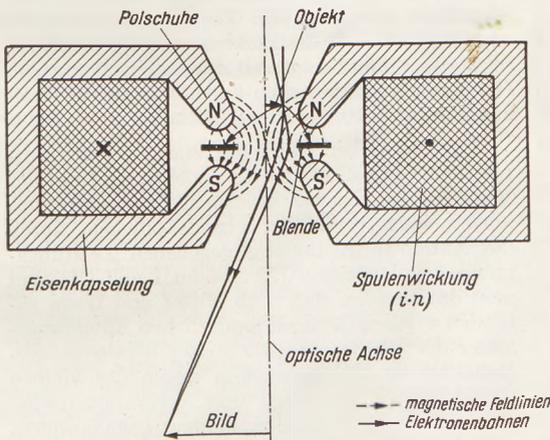


Fig. 19. Polschuhlinse.



Fig. 21. Tabakmosaikvirus mit Goldkolloidteilchen (20 000fach vergrößert).

anderen Teil der Elektronen durch, die von ihm ein Bild erzeugen.

In einer neueren Ausführung hat die Objektivspule eine Minimalbrennweite von 5,4 mm, die Projektionsspule eine solche von 1 mm, die Bildweite beträgt in beiden Stufen 400 mm; das bedeutet eine 75fache Vergrößerung in der ersten Stufe, 400fache in der zweiten, so daß im ganzen 30000fach vergrößerte Abbildungen möglich sind. Nicht nur die Vergrößerung, auch das Auflösungsvermögen ist außerordentlich hoch, so daß lichtmikroskopisch nicht mehr auflösbare Abstände noch gut getrennt werden können. Daher auch der Name Übermikroskop.

So zeigt z. B. Fig. 20 die mikroskopischen Bilder von Bacterium coli¹, und zwar sowohl elektronenoptisch als auch lichtoptisch. Der Ver-

worden. Die Größe der schwarzen Punkte innerhalb der Bakterien in der elektronenoptischen Abbildung beträgt etwa 100 bis 200 mµ, eine Größe,

die lichtoptisch nicht mehr aufgelöst werden kann, wie das Vergleichsbild deutlich lehrt.

Neuerdings ist auch ein Übermikroskop mit elektrostatischen Linsen konstruiert worden (MAHLV. ARDENNE), nachdem längere Zeit das magnetische Übermikroskop das Feld beherrscht hat. Elektrostatische Linsen von genügend kleiner Brennweite erfordern die Anwendung hoher Spannungen bei sehr geringem Elektrodenabstand der elektrischen Linsen; sie konnten daher erst durch konsequente Anwendung der Erfahrungen der Hochspannungstechnik auch auf elektronenoptische Systeme hergestellt werden. Die magnetischen und elektrostatischen Übermikroskope unterscheiden sich zur Zeit in ihrer Leistungsfähigkeit nur in geringem Maße, wesentliche Unterschiede bestehen vor allem in der technischen Handhabung. v. ARDENNE hat sogar ein Universal-

¹ Vgl. diese Z. 52, 218, 220 (1939).

Übermikroskop gebaut, das wahlweise als magnetisches oder elektrisches Übermikroskop gebraucht werden kann. Außerdem ist es durch geeignete Ausblendungen gelungen, „Dunkelfeldbeleuchtung“ anzuwenden und damit gelegentlich vorteilhafte Kontrastwirkungen zu erzielen. Schließlich dient auch das Übermikroskop zur Herstellung stereoskopischer Bilder; dies ist möglich durch die verhältnismäßig große Tiefenschärfe

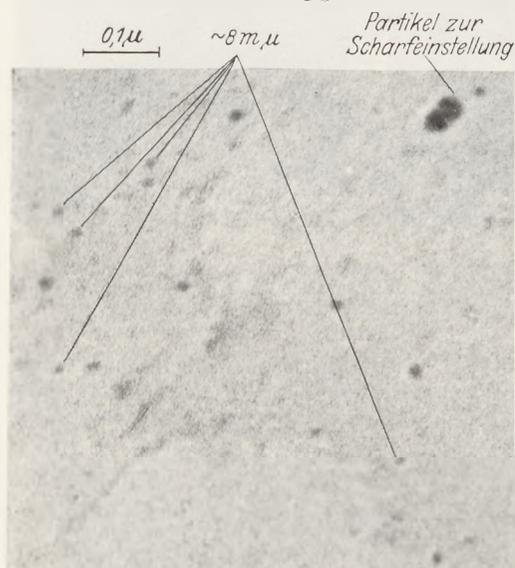


Fig. 22. Iodestimmoleküle auf Kollodiumhaut
(100 000fach vergrößert).

(bis zu 2μ), die sich aus den geringen Aperturen der Linsen (10^{-2} bis 10^{-3}) ergibt.

Die Anwendung aller bisher möglichen technischen Verbesserungen hat den noch auflösbaren Minimalabstand im Objekt auf 3μ herabgedrückt, so daß der förderliche Vergrößerungsfaktor rund 100000 beträgt. Man ist daher heute in der Lage, Bakterien, Kolloidteilchen und sogar größere Moleküle sichtbar zu machen und zu untersuchen, was für Medizin und Biologie überragende Bedeutung hat.

Fig. 21 zeigt ein Beispiel eines übermikroskopischen Bildes bei 20000facher Vergrößerung. Die schwarzen Punkte stellen Goldkolloidteilchen dar, die nur als Prüfobjekte zur Scharfeinstellung eingestreut waren. Das eigentliche Versuchsobjekt war der Virus der Tabakmosaikkrankheit, dessen Individuen als sich wenig abhebende graue fadenförmige Gebilde in der unteren Hälfte der Figur

zu erkennen sind. Einzelne Fäden haben eine Dicke von weniger als 20μ . Eine Aufnahme der neuesten Zeit, mit 100000facher Vergrößerung, zeigt Fig. 22, in der Eiweißmoleküle mit 8μ Durchmesser noch deutlich sichtbar sind.

Bei der Vergleichung von Lichtbild und Elektronenbild muß beachtet werden, daß die Kontraste in beiden Fällen auf verschiedenem Weg entstehen: Im Lichtbild ist die verschiedene Absorption elektromagnetischer Wellen an den einzelnen Objektpunkten maßgebend. Im Elektronenbild dagegen ist bei den hohen hier benutzten Geschwindigkeiten (bis zu 80 ekV) echte Absorption so gut wie nicht wirksam, sondern im Elektronenbild kommen die Intensitätsunterschiede durch die verschiedene Streufähigkeit der Objektpunkte gegenüber Elektronen zustande. Die Wirkung dieser Streuung liegt im wesentlichen darin, daß mehr oder weniger große Mengen von Elektronen durch seitliche Ablenkung um große Winkel aus dem Strahl entfernt werden. Bei dünnen Objekten kommt ein erheblicher Teil andererseits ungehindert hindurch, und schließlich werden einige Elektronen nur um so kleine Winkel gestreut, daß sie sich als Verbreiterung des abbildenden Strahls störend bemerkbar machen. Damit nicht schon der Objektträger eine derartige Verbreiterung bewirkt oder die Intensität des Elektronenstrahls merklich schwächt, muß er möglichst dünn gewählt werden. Die Objektträger bestehen deshalb aus Kollodiumhäutchen von 10 bis 20μ Dicke.

Die Versuche, möglichst starke elektronenoptische Vergrößerungen zu erzielen, sind mit der Konstruktion des beschriebenen Übermikroskops noch keineswegs an der grundsätzlichen, durch die ABBESche Bedingung gegebenen Leistungsgrenze angelangt [vgl. (A) Abschn. I und IV], und man darf hoffen, daß noch Mittel und Wege gefunden werden, die noch hinderlichen Abbildungsfehler der Elektronenoptik weiter herabzusetzen. Dabei ist im Übermikroskop wegen des kleinen Gesichtsfeldes praktisch nur gegen sphärische Aberration und Beugungsfehler anzukämpfen, während im Emissionsmikroskop gerade die übrigen Abbildungsfehler vermieden werden müssen.

Wenn wir das auf dem Gebiete der Elektronenoptik und speziell auf dem der Elektronenmikroskopie Geleistete uns noch einmal vergegenwärtigen, dann wollen wir gerade heute nicht an der Feststellung vorbeigehen, daß die grundlegenden Erkenntnisse sowohl als auch die technische Entwicklung im wesentlichen deutschen Forschern zu danken sind.

3. Geschichte und Erkenntnistehre.

Berzelius-Bildnisse. Von RUDOLF WINDERLICH in Oldenburg i. O.

Im Auftrage der Kgl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften hat ihr Bibliothekar ARNE HOLMBERG seine Bibliographie über BERZELIUS¹

¹ ARNE HOLMBERG: „Bibliografi över J. J. Berzelius.“ Utgiven av Kungl. Svenska Vet-

durch ein geistvolles Buch über die Bildnisse des großen Schweden ergänzt¹. Er hat die Schätze

skapsakademien, 2 Bde. Stockholm u. Uppsala: Almqvist & Wiksell 1933 u. 1936. [Vgl. diese Z. 47, 190 (1934).]

¹ ARNE HOLMBERG: „Berzelius-Porträtt. Illustrerad Beskrivning.“ Utgiven av Kungl. Svenska

schwedischer und finnländischer Sammlungen und Museen, sowie die Ergebnisse einer Rundfrage an alle wissenschaftlichen Akademien und gelehrten Gesellschaften ausgewertet, denen BERZELIUS angehört hatte. Trotzdem vermutet er, daß ihm mancherlei verborgen geblieben ist; er bittet deshalb um weitere Mithilfe.

Gemälde, Skulpturen, Denkmünzen, Zeichnungen, Schattenrisse, Holzschnitte, Stiche, Steindrucke und Daguerrotypen vermitteln eine gute Vorstellung von dem Aussehen des Mannes während der verschiedenen Abschnitte seines Lebens. Sie zeigen neben dem Wandel der Gesichtszüge mit zunehmendem Alter zugleich die Abhängigkeit von der Wesensart und dem Können des Künstlers und Beurteilers. HOLMBERG bemüht sich, für die einzelnen Bildnisse in zeitlicher Folge ohne Rücksicht auf ihren künstlerischen Wert die Umstände zu ermitteln, unter denen sie entstanden sind. Er sieht in ihnen Zeugnisse für den nachhaltigen Einfluß des Dargestellten auf seine Zeitgenossen weit über die Kreise der Chemiker hinaus. Eine Auswahl weniger Beispiele aus dem Reichtum des Gebotenen genügt, um diesen Grundgedanken zu erhärten.

H. G. SÖDERBAUM hatte als wahrscheinlich ältestes Bildnis des BERZELIUS seiner Ausgabe der Reiseaufzeichnungen¹ den Nachdruck eines Aquarells beigegeben, das die Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm besitzt. Es zeigt einen jungen Mann im braunen Direktorialfrack mit kurzen hellblauen Hosen, weißen Strümpfen und schwarzen Halbschuhen, der mit einem Buche vor einem Tische sitzt und die Destillation aus einer Retorte beobachtet. G. W. A. KAHLBAUM hat dasselbe Bild in Schwarzweißdruck für die deutsche Ausgabe der selbstbiographischen Aufzeichnungen des BERZELIUS² als Vorsatzblatt gewählt. Man vermutete bisher, daß dieses Aquarell um 1800 entstanden ist. Das ist jedoch so wenig beglaubigt wie die Persönlichkeit des Dargestellten: es ist weder ein Künstlerzeichen, noch eine Jahreszahl noch sonst irgendeine beweiskräftige Angabe vorhanden. HOLMBERG spricht deshalb von der Möglichkeit, daß hier überhaupt nur ein Phantasiebild vorliegt, das wegen seiner Ähnlichkeit mit unzweifelhaften BERZELIUS-Bildnissen zu dem Glauben verleitet hat, auch hier sei BERZELIUS dargestellt.

Die beiden ältesten, sicher zu belegenden Bildnisse des BERZELIUS sind scherzhafte Zeichnungen aus dem Jahre 1810, ohne jeden Anspruch auf künstlerischen Wert. Wir sehen auf ihnen

Vetenskapsakademien. Stockholm u. Uppsala: Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B. 1939.

¹ H. G. SÖDERBAUM: „Jac. Berzelius. Resanteckningar.“ Utg. av Kungl. Svenska Vetenskapsakademien. Stockholm 1903.

² „Jakob Berzelius. Selbstbiographische Aufzeichnungen.“ Herausgeg. im Auftrag der Kgl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften von H. G. SÖDERBAUM. Nach der wörtlichen Übersetzung von ÉMILIE WÖHLER, bearbeitet von GEORG W. A. KAHLBAUM. Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1903.

BERZELIUS mit Freunden Karten spielen. Einer von ihnen war der Zeichner. Diese beiden harmlos heiteren Spottbilder und die von BERZELIUS eigenhändig gezeichnete spätere Karikatur (1838) übertreiben das wirre Kraushaar, die kräftigen Augenbrauen und die eigentümliche Nasenform. Offenbar sind diese Merkmale sehr auffällig gewesen, denn sie sind überall zu finden, selbst auf mißlungenen Darstellungen, wie auf dem englischen Schattenriß von 1812, der mit dem zeitlich nächstgelegenen, künstlerisch wertvollen Aquarell des Jahres 1816 in dem lebenskundlich viel wichtigeren Merkmal der Schädelform so wenig übereinstimmt, „daß man nicht ohne weiteres die beiden Bildnisse gleichsetzen könnte, wenn man nicht wüßte, daß sie dieselbe Person darstellen sollen“.

Kopfform, Haar, Nase und Lippen sind in ihrer Eigenart sehr scharf ausgeprägt auf dem Brustbild aus Biskuitporzellan von Sèvres, das 1819 bei dem Aufenthalt in Paris entstand. BERZELIUS hat es FRIEDR. WÖHLER geschenkt. KAHLBAUM hat eine gute Wiedergabe davon als Vorsatzbild für die deutsche Ausgabe von H. G. SÖDERBAUMS „Berzelius' Werden und Wachsen 1779—1821“¹ verwendet.

Alle bisher genannten Bildnisse sind Seitenansichten, und zwar Linksansichten, bis auf eines der Scherzbilder, das BERZELIUS von vorn zeigt, jedoch auch hier ein wenig nach rechts gewandt, so daß die linke Seite mehr zu sehen ist. Das ist wahrscheinlich kein bloßer Zufall, denn von der Gesamtheit aller Bildnisse zeigen die meisten eine Seitenansicht, die von den Künstlern vermutlich bevorzugt wurde, weil sie besonders charakteristisch erschien.

BERZELIUS ist als Mann von Weltruf während seiner Reisen häufig gemalt, gezeichnet und modelliert worden. Als er 1822 auf der Heimfahrt aus Karlsbad in Berlin weilte, hat der Bildhauer C. F. TIECK eine Büste von ihm geschaffen, die in mancherlei Stoffen nachgeformt worden ist; ein Bronzestück steht im Deutschen Museum in München. Zur selben Zeit hat LEONHARD POSCH in Berlin ein Medaillon aus Wachs hergestellt, von dem viele Abgüsse in Eisen, Biskuit-, Sèvres- und Lava-Porzellan hergestellt worden sind. BERZELIUS hatte selbst 36 Stück in Eisen für seine Freunde in Schweden und Deutschland bestellt.

Aus Anlaß der 7. Deutschen Naturforscherversammlung in Berlin 1828, an der BERZELIUS teilnahm, schlug dort die Königliche Münze eine Medaille mit dem Kopfbild des BERZELIUS, das WILH. KIRCHNER graviert hatte, „In memoriam conventus naturae scrutat. totius Germaniae septim. . .“ Für die 9. Versammlung 1830 in Hamburg wurde die Denkmünze noch einmal mit derselben Vorderseite geprägt, d. h. mit dem Kopf des BERZELIUS in Linksansicht. Gleichzeitig wurde in Berlin eine kleinere Münze mit der gleichen Vorderseite geschlagen; ihre Rückseite verweist mit den Worten „Pondera et numeros investigavit“ auf den Wahlspruch des Gefeierten; sie zeigt außerdem eine chemische Waage mit Gewichtskasten

¹ Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1899.

und Pinzette. Über die Vorgeschichte dieser Denkmünzen hat BERZELIUS selbst an WÖHLER berichtet¹. Übrigens witterte der kritische Forscher in der ganzen Angelegenheit nichts weiter als das geschickte Unternehmen eines geschäftstüchtigen Mannes; „blott en privatspeculation of directeurs for medalpräglingen Loos“².

Wie dem auch sei, Berlin hat den großen Mann aufrichtig geschätzt und geehrt. Der Berliner Maler FRANZ KRÜGER hat den bewunderten Gast der Preußischen Hauptstadt gezeichnet. KRÜGERS Blatt hat viele Nachahmer gefunden. Für zahlreiche Stiche ist es das Vorbild gewesen, aber es ist selbst nirgends mehr aufzufinden; auch die näheren Umstände, unter denen es entstanden ist, haben sich nicht ermitteln lassen. Nach einem der abgeleiteten Stiche ist eine Ätzung als Titelbild für den zweiten Band von KOPPS „Geschichte der Chemie“ hergestellt worden. Sie trägt dort die Unterschrift: „Berzelius. Gezeichnet von Professor Krüger im Jahre 1827.“ Sie ist aber keinesfalls unmittelbar nach der ursprünglichen Vorlage gemacht worden, sondern geht auf einen „Stahlstich von CARL MAYER“ in Nürnberg zurück, der mehrfach abgedruckt worden ist, z. B. im 4. Bande der ersten Auflage von MEYERS Konversationslexikon. Jene Ätzung ist ein Spiegelbild der angeblichen Vorlage und so schlecht gelungen, daß HOLMBERG von einer Karikatur spricht, von einem abscheulichen Bild, „anskrämlika bild“. In etwas verbesserter Form ist es in den „Briefwechsel zwischen J. BERZELIUS und F. WÖHLER“ übergegangen³.

In der Berliner National-Galerie wird eine wenig bekannte Zeichnung aufbewahrt, für die BERZELIUS dem Meininger Hofmaler S. F. DIEZ gegessen hat, wahrscheinlich 1840 während der Naturforschertage in Kopenhagen.

Für G. BUGGES „Buch der großen Chemiker“⁴ hat SÖDERBAUM das Ölgemälde von J. G. SANDBERG als Vorlage gewählt, das BERZELIUS mit schwarzem Frack und weißer Weste im Ordensschmuck zeigt. Das Bild hat ein seltsames Schicksal gehabt: Einige Freunde hatten es für die Akademie malen lassen, der es im März 1827 mit einer kleinen Feier überreicht wurde. Sie ließ es zunächst im Bibliotheksraum aufhängen, aber nach einiger Zeit in BERZELIUS' Privatwohnung bringen. Nach seinem Tode hat die Witwe das kostbare Andenken dem Gymnasium in Linköping geschenkt, weil sie nicht ahnte, wer der wahre Besitzer war. Erst ein

halbes Jahrhundert später wurde das Versehen entdeckt und das Bild zurückgefordert. Das Domkapitel in Linköping weigerte sich jedoch, seinen Besitz herauszugeben. So begnügte sich schließlich die Akademie mit einer kleinen Kopie, die JEAN HAAGEN im Jahre 1904 angefertigt hat. Übrigens hat SANDBERG selbst sein Gemälde noch einmal als Mittelstück für ein Gruppenbild in Gripsholm benutzt.

Anlässlich des 200jährigen Bestehens der Kgl. Schwedischen Akademie der Wissenschaften tragen die Briefmarken zu 10 und 30 öre, die 1939 ausgegeben wurden, das Kopfbild des BERZELIUS nach einer Tuschzeichnung von TORSTEN SCHONBERG, der sich eng an das berühmte große Gemälde von O. F. SÖDERMARK gehalten hat. Dieses Ölbild (130 × 100 cm) schmückt den Sitzungssaal der Akademie. Es ist häufig kopiert worden.

Heute sind wir überzeugt, daß eine getreue Wiedergabe der Züge eines Menschen durch die geschickteste Künstlerhand niemals so gut möglich ist wie durch eine sorgfältige Photographie. Ließ doch LESSING den Maler CONTI klagen: „Ha! Daß wir nicht unmittelbar mit den Augen malen! Auf dem langen Wege, aus dem Auge durch den Arm in den Pinsel, wieviel geht da verloren!“¹ Es geht nicht nur vieles verloren, wie CONTI klagt, sondern es wird vieles durch das Hirn des beurteilenden Künstlers umgearbeitet und verändert. „Man kann sich fragen, ob BERZELIUS' Aussehen in seinen älteren Tagen wirklich mit dem wohlfrisierten und korrekten Bild übereinstimmte, wie es durch SÖDERMARKS Gemälde der Nachwelt überliefert wird. Seine Porträtkunst hat charakterisiert und zugleich „maßvoll idealisiert“².

Glücklicherweise sind einige Daguerrotypen aus jener Zeit erhalten geblieben, die erkennen lassen, wie weit der Künstler der Wirklichkeit nahe kam. Die vorzügliche Aufnahme, die Frau LAURA MITSCHERLICH am 25. Juni 1845 in Berlin gemacht hat, zeigt auch bei dem alten Manne noch das wirre Haar seiner Jugend und nicht etwa ein wohlgepflegtes Gelock. Dafür fesselt der unbestechlich scharfe, kritische Blick des unerbittlichen Wahrheitssuchers, ein Blick, hinter dem ein feiner Spott zu lauern scheint. Fest geschlossene Lippen und tief eingegrabene Falten verraten eine seelische Festigkeit, die im harten Lebenskampf errungen wurde und nun auch die Beschwerden des Alters ertragen läßt.

In dem schwerkranken Manne steckte noch ein mächtiges Feuer der Seele. E. HENNINGSEN hat das 1896 in seinem Gemälde „Die Skandinavische Naturforscherversammlung in Kopenhagen 1847“ prachtvoll zum Ausdruck gebracht: BERZELIUS sitzt links im Vordergrund an einem Tische, mit gespanntem Blick aufmerksam zuhörend, bereit, bei der nächsten Gelegenheit aufzuspringen und in die Aussprache einzugreifen. Aus dem Briefwechsel mit WÖHLER wissen wir, daß BERZELIUS

¹ Briefwechsel zwischen J. BERZELIUS und F. WÖHLER, Bd. 1, S. 233f. Leipzig 1901.

² Brief vom 26. September 1828 an FLEMING. Vgl. H. G. SÖDERBAUM: „Jac. Berzelius-Levnads-teckning“. Bd. 2, S. 474. Uppsala 1929.

³ „Briefwechsel zwischen J. BERZELIUS und F. WÖHLER.“ Im Auftrage der Kgl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, mit einem Commentar von J. VON BRAUN, herausgeg. von O. WAL-LACH. 2 Bde. Leipzig: W. Engelmann 1901. Das BERZELIUS-Bild enthält der erste Band.

⁴ GÜNTHER BUGGE: „Das Buch der großen Chemiker“. Bd. 1, Tafel 38. Berlin: Verlag Chemie 1929.

¹ G. E. LESSING: „Emilia Galotti“. Erster Aufzug, vierter Auftritt.

² ARNE HOLMBERG: „Berzelius Porträtt“. S. 33.

für diese Fahrt nach Kopenhagen auf die Mitreise seines Arztes angewiesen war, daß er unterwegs zusammenbrach und dennoch mit aller Energie dem Ziele zustrebte. Nicht das Großkreuz des Danebrog-Ordens hatte ihn gelockt, sondern die Wissenschaft. Er schrieb seinem Freund und Lieblingsschüler, daß „ein Doktordiplom, für mich speziell stilisiert, worin meine chemischen Arbeiten mit Lob erwähnt werden, ... meine kleine Eitelkeit weit mehr geschmeichelt und befriedigt hat, als alle die

königlichen Auszeichnungen, die ich empfangen habe“¹.

In wenigen Jahren wird sich der Todestag des großen Schweden zum hundertsten Male jähren. Da wird es gut sein für seine wissenschaftlichen Verehrer, sich zu vergewissern, wie das äußere Bild dieses Ausnahmemenschen sich in den Augen seiner Zeitgenossen spiegelte.

¹ Briefwechse! BERZELIUS-WÖHLER, Bd. 2, S. 690.

Neu erschienene Bücher und Schriften.

Atombau und Spektrallinien. II. Band. 2., umgearbeitete und erweiterte Auflage des „Wellenmechanischen Ergänzungsbandes“. Von ARNOLD SOMMERFELD. 820 Seiten mit 62 Abbildungen. Braunschweig: Vieweg & Sohn 1939. Preis geh. RM. 35,—, geb. RM. 38,—.

Bald nach dem Weltkrieg, Ende 1919, erschien die 1. Auflage von SOMMERFELDS „Atombau und Spektrallinien.“ In 5 dauernd vermehrten und umgearbeiteten Auflagen hat dann das Buch zwei Jahrzehnte hindurch als das gründlichste Lehrbuch der Atomphysik allen lernenden Physikern gedient. Es war einfach das Buch, nach dem man die Quantenphysik des Atombaus studierte. Dieser erste Band ist ein Lehrbuch der ersten Form der Quantenphysik, jener, die noch mit anschaulichen Atommodellen arbeitet. Kurz nach dem Erscheinen der grundlegenden Arbeiten von SCHRÖDINGER, HEISENBERG und DIRAC gab SOMMERFELD im Jahre 1928 den „Wellenmechanischen Ergänzungsband“ heraus. In jahrelanger Arbeit hat er jetzt diesen Band, um das 2 $\frac{1}{2}$ -fache seines Umfanges vermehrt, als zweiten Band des Gesamtwerkes erneut herausgegeben.

Das Buch beginnt mit der Herleitung der Wellengleichung SCHRÖDINGERS aus der Gedankenwelt HAMILTONS. Aus dieser ergibt sich die ursprüngliche DE BROGLIESche Theorie des Elektrons. In ihr steckt das Prinzip der Komplementarität (BOHR), „welches unter allen erstaunlichen Entdeckungen dieses Jahrhunderts die erstaunlichste ist“, das die Doppelnatur nicht nur des Lichtes, sondern auch des Elektrons und damit aller Materie zur Folge hat. Nachdem dann die nötigen Erläuterungen der mathematischen Methode vorgetragen sind (Kugelfunktionen, BESSELSche Funktionen), wird am Tunneleffekt der charakteristische Unterschied zwischen klassischer und Wellenmechanik dargestellt, und es werden die einfachsten Anwendungen, auf Oszillator und Rotator, gebracht. Dann wird die Wellengleichung verallgemeinert auf den Fall, daß es sich um Kräfte handelt, die zeitabhängig sind, und für mehrere Massenteilchen. Es folgt die statistische Deutung der Wellenfunktion, Normierungs- und Orthogonalitätsbedingungen für Oszillator und Rotator. Das 2. Kapitel bringt das Wasserstoffatom, den Prüfstein der SCHRÖDINGERSchen Theorie, einschließlich des normalen ZEEMAN-Effektes, dazu die Serien- und die Bandenspektren. Das 3. Kapitel macht den Leser bekannt mit den allgemeinen Methoden und

Gesichtspunkten, wie dem Begriff des Wellenpakets, zu dem die statistische Deutung führt, der Operatorenrechnung, der Matrizenrechnung, die am Fall des Oszillators durchgeführt wird, der Unschärfebeziehung und der Transformationstheorie. „Diese grundsätzlichen und reichlich abstrakten Dinge“ werden verhältnismäßig kurz behandelt, „zumal ja hierüber mehrere kompetente Darstellungen vorliegen.“ Der Nachdruck liegt hier wie im ganzen Buch darauf, den Leser in der praktischen Anwendung der neuen Begriffswelt und im Gebrauch der erforderlichen mathematischen Methoden zu schulen. Das 4. Kapitel beginnt mit der Feststellung: „Von jeder mathematisch-physikalischen Disziplin müssen wir heutzutage verlangen, daß sie dem Relativitätsprinzip genügt.“ Es wird gezeigt, daß die relativistische SCHRÖDINGER-Gleichung des Ein-Elektronenproblems dem Spin des Elektrons noch nicht Rechnung trägt. Erst DIRACS genialer Gedanke, die SCHRÖDINGER-Gleichung zu linearisieren, führt weiter. Um die Verallgemeinerung zu finden, benutzt SOMMERFELD aus didaktischen Gründen statt der DIRACSchen Matrizen hyperkomplexe Einheiten. Mit der Durchführung des DIRACSchen Gedankens gelingt es, das mechanische und magnetische Moment des Elektrons in die Wellenmechanik einzuführen, „ohne daß irgendeine Modellvorstellung über Struktur und Bewegung des Elektrons zugrunde gelegt wird“. Nach einer Darstellung der Gruppen der hyperkomplexen Einheiten und ihrer Untergruppen und dem Nachweise der Invarianz der DIRACSchen Gleichungen gegen LORENTZ-Transformationen wird das KEPLER-Problem auf der neu gewonnenen Grundlage behandelt und gezeigt, daß jetzt die Feinstrukturformel hergeleitet werden kann. Auch die Entdeckung des Positrons wird besprochen. Von dem neuen Standpunkt aus sind jetzt Anwendungen der Theorie auf Probleme möglich, die vorher nur unbefriedigend, unvollständig oder gar nicht behandelt werden konnten. Zunächst bringt das 5. Kapitel die von SCHRÖDINGER entwickelte Störungstheorie, und zwar im Zusammenhang, wodurch ihre Leistungsfähigkeit besonders deutlich wird. Es werden als Anwendungen behandelt: Der STARK-Effekt, die Dispersionstheorie, die RUTHERFORDSche Streuformel, die Gitterbeugung, die DIRACSche Spin-Korrektur, der anomale ZEEMAN-Effekt. Die vier folgenden Kapitel geben dann eine ausführliche Darstellung des Photoeffektes und des kontinuier-

lichen Röntgenspektrums, wie sie von SOMMERFELD selbst und anderen behandelt wurden, des COMPTON-Effekts und des Mehrkörperproblems: Heliumspektrum, Wasserstoffmolekül, PAULI-Prinzip, BOSE- und FERMI-Statistik und das Problem der chemischen Bindung. Alle diese Kapitel beginnen mit historischen Einleitungen und einer Übersicht über das Ganze. Zum Schluß folgt ein Kapitel über Näherungsmethoden zur Berechnung von Eigenfunktionen, gekennzeichnet durch die Namen HYLLERAAS, THOMAS-FERMI, HARTREE und WENTZEL-BRILLOUIN-KRAMERS. Der Anhang bringt auf 100 Seiten mathematische Zusätze und Ergänzungen und ein ausführliches Namen- und Sachverzeichnis.

Das zweibändige Werk bildet in seiner neuen Gestalt das umfassendste Lehrbuch der Physik der Atomhülle und wird wie in den vergangenen zwei Jahrzehnten auch weiter allen, die sich gründlich in die Atomphysik einarbeiten wollen, als Führer dienen. Jeder der beiden Bände ist in seiner letzten Auflage genügend lange nach dem Abschluß der behandelten Methoden erschienen, so daß man annehmen darf, daß hier eine dauernde Form erreicht ist. „Es ist klar, daß ein Verständnis der neuen Theorie nur auf der Grundlage der alten Theorie möglich ist“ (Vorwort zur 5. Auflage des I. Bandes). So setzt die Lektüre des 2. Bandes eine Bekanntschaft mit dem ersten voraus. Das

Werk ist ein Lehrbuch der theoretischen Physik. Seine eigentliche Aufgabe ist danach nicht so sehr eine Erörterung der ins Philosophische führenden Grundlagen, noch auch die Ausspinnung rein mathematischer Probleme, die durch die Physik angeregt sind; es ist vielmehr ein Buch, nach dem man die Quantenphysik des Atombaus wirklich gründlich studieren kann. Ein lange gehegter Wunsch vieler ist mit dem Erscheinen dieses Buches in Erfüllung gegangen. Der zweite Band besonders bringt die algebraischen und funktionentheoretischen Hilfsmittel der Wellenmechanik und übt sie so, daß man sie bei geduldigem Fleiße verstehen und wirklich gebrauchen lernt. Ein reicher Stoff wird vor dem Leser ausgebreitet, der ihn doch nie übersättigt; die Gründlichkeit der mathematischen Darstellung verschafft ihm ein Gefühl der inneren Sicherheit, und das außerordentliche pädagogische Geschick, mit dem die Probleme und ihre Lösungen vorgetragen werden, halten ihn in gespannter und begeisterter Teilnahme. Darüber hinaus gibt das Studium des Werkes jedem Leser einen tiefen Eindruck von der gewaltigen Arbeit, die die theoretischen Physiker bei dem Ersinnen neuer Vorstellungen und bei ihrer mathematischen Verarbeitung geleistet haben, um die Probleme zu klären, die die Atomhülle bietet.

Ernst Zimmer.

Korrespondenz.

GERHARD LÖSCHNER gefallen.

Mit den beiden viel beachteten Arbeiten „Herstellung eines Interferenzspektroskopes nach PÉROT-FABRY aus Spiegelglasplatten“ [52, 191 (1939)] und „Erzeugung des optischen Doppler-Effektes mit bewegten Spiegeln und sein Nachweis mit einem Interferometer nach PÉROT-FABRY“ [53, 10 (1940)] ist GERHARD LÖSCHNER vor Jahresfrist in den Kreis der Verfasser von Beiträgen für unsere Zeitschrift eingetreten. Nun gibt Herr Dr. habil. PETER BRAUER in München über seinen Freund und Mitarbeiter die folgende Nachricht:

„Der Unteroffizier und Anwärter auf Beförderung zum Offizier des Beurlaubtenstandes in einem Infanterieregiment cand. phys. GERHARD LÖSCHNER, Assistent an der Technischen Hochschule München, ist am 19. Juni 1940 im 25. Lebensjahre bei Lunéville als Führer eines Stoßtrupps gefallen.

Ogleich er bei Kriegsanfang — von schwerer Krankheit nicht völlig genesen — ‚zeitlich untauglich‘ war, gelang es ihm unter Überwindung erheblicher Schwierigkeiten, noch vor Beginn des Polnischen Feldzugs seiner freiwilligen Meldung zum Kriegsdienste zum Erfolg zu verhelfen. Zur gleichen Zeit stand er unmittelbar vor seiner Abschlußprüfung als Physiker. Den Versuchen seiner Freunde, ihn zur Ablegung dieser Prüfung während des Winters zu bewegen, setzte er seine entschiedene Weigerung entgegen; er glaubte es nicht ver-

antworten zu können, seine Truppe auch nur für wenige Wochen zu verlassen. Diese Kompromißlosigkeit, diese Treue zur selbstgewählten Aufgabe, schien seine hervorragendste Charaktereigenschaft zu sein; denn sie kennzeichnete im gleichen ungewöhnlichen Maße seine Art zu arbeiten. Sie führte dazu, daß er in einem Alter, wo ein Student im allgemeinen nur als pädagogisches Objekt interessant zu sein pflegt, nicht nur seinerseits selbst zum Lehren berufen wurde, sondern vor allem als produktiver Mitarbeiter von vollkommener Selbständigkeit galt. Als solcher ist er unersetzlich. Seinen um ihn trauernden Freunden — und wie könnte er mit seiner Fähigkeit zur Treue keine Freunde gehabt haben! — ist er zum Vorbilde geworden.“

Druckfehler-Berichtigung.

In Heft 4 des laufenden Jahrgangs der Zeitschrift sind in dem Berichte von FRANK und OTILIE MATOSI: „Die Grundlagen der Elektronenoptik“ die beiden folgenden Druckfehler als sinnstörend zu verbessern:

1. Auf Seite 120, linke Spalte, Zeile 4 von unten, muß das Wort „Verbrauch“ ersetzt werden durch „Verlauf“.

2. Auf Seite 122, linke Spalte, Zeile 28 von oben, ist magnetische „Mikroskopobjekte“ in „Mikroskopobjektive“ zu ändern.