

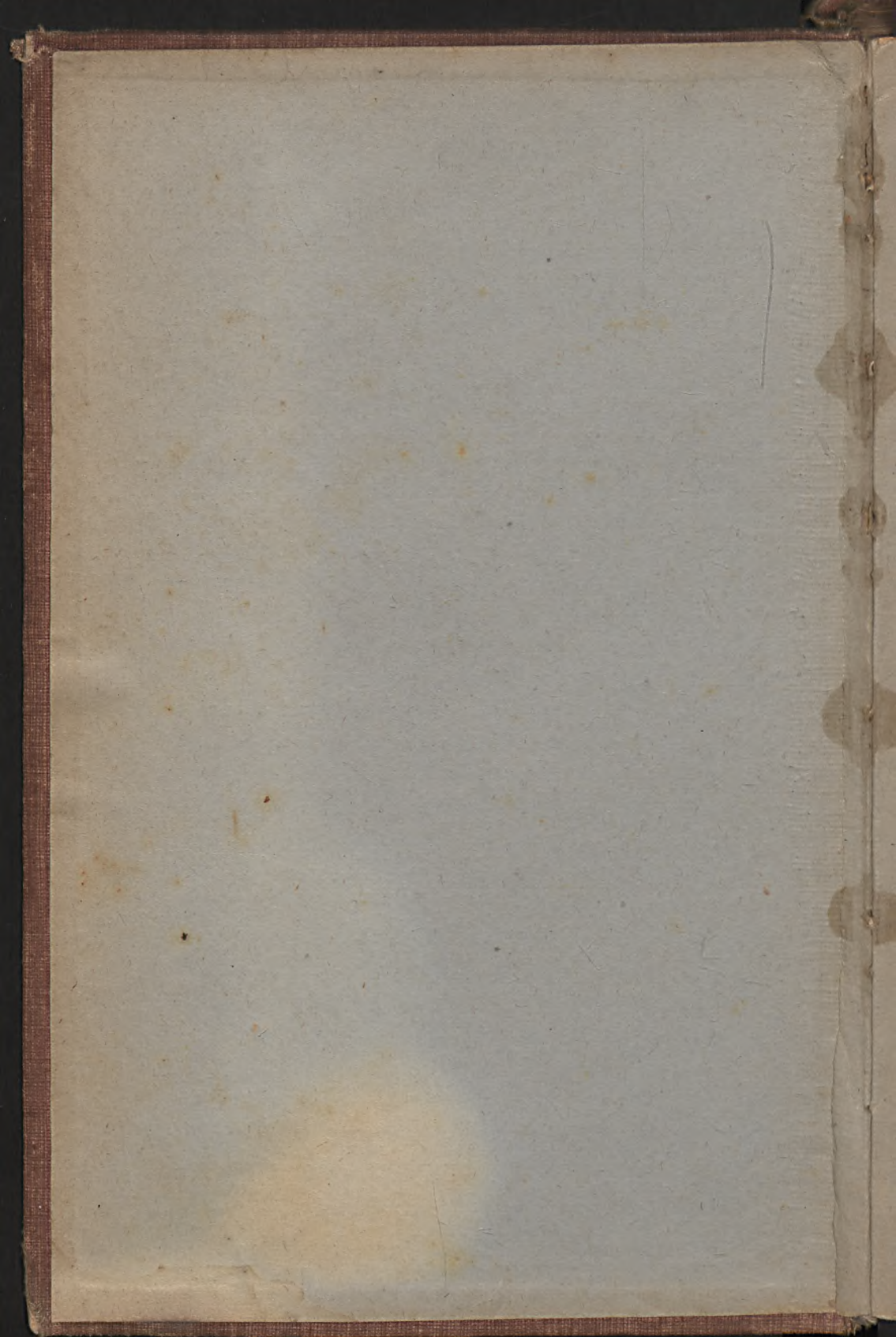
INŻ. WŁ. DZIAKIEWICZ

MIERNICTWO



Spółka Wydawnicza Polska w Krakowie

MILBRNICTWO



65

8, -

7

Inż. WŁODZIMIERZ DZIAKIEWICZ

C. K. PROFESOR WYŻSZEJ SZKOŁY PRZEMYSŁOWEJ W KRAKOWIE

MIERNICTWO

189 RYSUNKÓW W TEKSCIE

SPÓŁKA WYDAWNICZA POLSKA W KRAKOWIE

1906

85-

0-114735

CZCIONKAMI DUKARNI „CZASU”
POD ZARZĄDEM A. ŚWIERZYŃSKIEGO

PRZEDMOWA.

Miernictwo ma bardzo obszerne zastosowanie tak w nauce jak i życiu praktycznem. Z jednej strony bowiem jest ściśle związane z tak ważnemi dziedzinami nauki jak astronomia i geografia, z drugiej jest podstawą wszelkich czynności zawodowego technika, ma wielkie znaczenie w t. zw. sztuce wojennej i potrzebne jest w odpowiedniej mierze w życiu codziennem: w gospodarstwie rolnem czy leśnem, przy wymiarze podatków gruntowych, w sporach granicznych i t. p.

Z tego też powodu, zależnie od potrzeb, czy to naukowych, czy zawodowych, praktycznych, powstała w obcych językach obszerna literatura, opracowująca ten przedmiot, bądź to ściśle naukowo, teoretycznie, bądź praktycznie, dla życia codziennego.

Literatura nasza w tym przedmiocie jest wprawdzie dotychczas skromna, bo niemal cała składa się z niżej wymienionych publikacyj po największej części przestarzałych, jak to już ze spisu chronologicznie ułożonego widać, lecz niedostatek ten może być przy dobrej woli wkrótce wynagrodzony, do czego w pierwszym rzędzie przyczyni się rozpoczęte już, obszerne dzieło znanego w literaturze niemieckiej, Profesora lwowskiej politechniki W. Łaski i Profesora S. Widta, na które z niecierpliwością oczekujemy.

Daleko więcej jeszcze niż dzieła naukowego, dawał się odczuwać w miernictwie brak krótkiego, całkiem przystępnego i ściśle praktycznego podręcznika, takiego jednak, któryby uwzględniał najświeższe rezultaty nauki i ułatwiał zawodowym technikom korzystanie z nich.

Ten brak tylko miałem na myśli i starałem się go niniejszem dziełkiem uzupełnić. Stąd pochodzi, że unikam w niem ile możności wszelkiego teoryzowania, że uwzględniam tylko geodezyę niższą i tylko najważniejsze, najczęściej trafiające się w praktyce zagadnienia, że niepotrzebnie rozwlekłe opisy przyrządów, zajmujące zwykle w dziełach niemieckich wiele miejsca, streszczam krótko, wystarczająco jednak, by opis łącznie z ryciną pozwolił czytelnikowi bez trudu poznać konstrukcyę przyrządu i jego zastosowanie.

Gdzie wywód teoretyczny był konieczny, zwłaszcza przy wyrównaniu błędów pomiarów, tam dodałem przykład w celu wyjaśnienia wzorów i łatwiejszego zrozumienia ich stosowania. Jednem słowem: praca moja ma wyłączny cel, być pomocą technikom w wykonywaniu ich zawodu.

Czy cel ten osiągnęła w takim stopniu, w jakimbym pragnął, nie śmiem przesądzać. Nie wątpię jednak, że jeśli Szanowni Koledzy nie poskapią jej tam, gdzie będzie tego potrzeba, swoich cennych wskazówek, o które uprzejmie proszę i które z wdzięcznością przyjmę, że przy takiej pomocy, cel swój w zupełności osiągnie — w drugim wydaniu.

W końcu niech mi będzie wolno na tem miejscu złożyć uprzejme podziękowanie „Polskiej Spółce Wydawniczej w Krakowie“ za chętnie zajęcie się sprawą wydawnictwa i doprowadzenie tegoż do skutku.

W Krakowie, w listopadzie 1904 r.

W. Dziakiewicz.

SPIS DZIEŁ

wydanych w języku polskim, traktujących o miernictwie i znajdujących się w bibliotekach: Szkoły politechnicznej we Lwowie i Jagiellońskiej w Krakowie:

1. *Grxepski Stanisław*: „Geometrya t. j. miernicka nauka po polsku krótko napisana z greckich i łacińskich ksiąg“. Kraków 1566 r. 8^o, str. 127.
2. *Kaufman Oberst Lt.*: „Początki miernictwa wojennego dla szlachetnej młodzi szkoły Rycerskiej króla Jegomości polskiego“. Toruń 1766 r., str. 133.
3. *Bystrzycki Bazyl*: „Geometrya, albo niektóre łatwiejsze sposoby do rozmierzania wszelkich długości, szerokości, wysokości lub głębokości, ku uczeiwej i pożytecznej zabawie każdego kawalera, z francuskiego na oyczysty język przelożona“. Warszawa 1769 r.
4. *Cieciszowski Colonna*: „Początki miernictwa“. Kraków 1786 r. 8^o.
5. *Hogreve*: „Teorotyczna i praktyczna nauka żołnierskich rozmiarów, czyli miernictwo wojenne, do użycia oficerom i początkowym inżynierom ułożone“. Warszawa 1790 r. 8^o, str. 355.
6. *Mares*: „Wielki geometryczny wynalazek celownicy tryramiennej“. Warszawa 1806 r.
7. *Zaborowski X. J.*: „Jeometrya praktyczna“. Edycya nowsza. Warszawa 1806 r., str. 386.
8. Tenże. — Warszawa 1820 r.
9. *Polński P. M.*: „O geodezyi“. Wilno 1816 r., str. 58. 4^o.
10. *Colberg Juliusz*: „Sposób dochodzenia powierzchni płaskich bez użycia rachunku za pomocą nowo wynalezionego instrumentu, Planimetr zwanego“. Warszawa 1824 r. 8^o, str. 58.
11. *Szachin*: „Miernictwo i równoważenie“. Wilno 1829 r., str. 727.
12. Tenże. — „Jeodezya wyższa“. Wilno 1829 r., str. 231.

13. *Wrześniewski*: „Miernictwo niższe“. Warszawa 1841 r., str. 256.
14. *Józefowicz W.*: „Wykład praktyczny miernictwa i niwelacyi z wszelkimi zastosowaniami dla potrzeb gospodarzy wiejskich“. Warszawa 1843 r., str. 243.
15. *Gerschow A.*: „Poziomowanie topograficzne. Wykład teoretyczny i praktyczny“. Warszawa 1851 r., str. 430.
16. *Mukłanowicz H.*: „Trójkątowanie II. rzędu“. Warszawa 1852 r., str. 137.
17. „Nauka pomiaru gruntów do praktycznego użytku właścicieli ziemskich“. Lwów 1853 r.
18. *Zbrożek D.*: „Teorya planimetru biegunowego“. Kraków 1876 r., str. 11.
19. Tenże. — „Teorya najmniejszych kwadratów“. Podług wykładów napisał Witkowski. Lwów 1878 r., str. 119.
20. *Zaleski*: „Planimetria wykładana w technice krakowskiej“. str. 99.
21. *Regiec L.*: „O wytyczaniu łuków przy budowlach lądowych i wodnych“. Kraków 1895 r., str. 61.
22. *Folkierski W.*: „Oryentowanie trasy i sprawdzenie jej wymiarów katowych za pomocą obserwacyi słońca“. Lwów 1897 r., str. 23.
23. *Łaska W.*: „Astronomia sferyczna i geodezya wyższa“. Lwów 1899 r.
24. *Wojtan W.*: „O pewnem zagadnieniu mierniczem“. Lwów 1901 r.
25. *Kucharzewski*: „Planimetry polskie i ich wynalazcy“. Warszawa 1902 r., str. 46.
26. *Wawrzykiewicz*: „Słowniczek mierniczy“. Warszawa 1903, str. 38.
27. *Blauth J.*: „Niwelacya dwoma latami“. Odbitka z czasop. techn. Lwów 1904.



WSTĘP.

§ 1.

Miernictwo czyli geodezya jest nauką o pomiarach wszelkich obszarów powierzchni ziemi i przedstawieniu ich na rysunku. Nauka ta rozpada się na dwa główne działy:

A. Geodezyę wyższą, traktującą o pomiarach wielkich obszarów, jak: krajów, łądów, wogóle całej powierzchni ziemi;

B. Geodezyę niższą, traktującą o pomiarach mniejszych obszarów.

Różnica między oboma działami polega na tem, że w pierwszym wypadku uwzględnia się przy pomiarach kształt ziemi, i to zależnie od wielkości powierzchni mierzonej, albo kształt kulisty, albo sferoidalny; w drugim zaś wypadku kształtu ziemi uwzględniać nie potrzeba, gdyż uważa się małe powierzchnie kuli ziemskiej za płaszczyzny, co później rachunkiem udowodnimy.

Każdy z tych dwóch działów dzieli się jeszcze na dwie części: a) pomiar długości, kierunków i powierzchni, b) pomiar wysokości punktów na powierzchni ziemi. Zauważyć wypada przy tej sposobności, że przy pomiarze wysokości czyli niwelacyi, zawsze uwzględnionym być musi kształt ziemi, że nie można jej uważać za płaszczyznę, chyba na obszarze mającym w każdym kierunku maksymalną długość 100 m. Jednak w geodezyi wyższej, mając do czynienia z wielkimi obszarami, uwzględnia się (mowa tu zawsze o niwelacyi) kształt sferoidalny ziemi za pomocą rachunko-

wych poprawek, natomiast w geodezyi niższej uwzględnia się tylko kulisty jej kształt, a nadto za pomocą odpowiedniej metody i przyrządów uwzględnienie kształtu ziemi odbywa się niejako naturalnie, wynika z samej metody, bez pomocy rachunku.

Przedmiotem pomiarów są linie, kąty czyli kierunki i powierzchnie. Pomiaru wykonywać możemy albo bezpośrednio (n. p. pomiar długości odcinka linii wykonamy, przykładając w danym kierunku raz po raz, począwszy od punktu początkowego aż do końcowego, jakąś miarę przyjętą za jednostkę, przez co oznaczamy stosunek długości tego odcinka do przyjętej za jednostkę miary), albo pośrednio (n. p. połączymy 3 punkty w trójkąt, zmierzmy tylko jeden bok i przynajmniej dwa kąty, a za pomocą trygonometrii obliczymy długości pozostałych boków, czyli zmierzmy je pośrednio za pomocą kątów; odwrotnie, za pomocą pomiaru trzech boków trójkąta i odpowiednich wzorów trygonometrycznych, obliczyć możemy wszystkie kąty tego trójkąta, czyli pomierzmy je pośrednio).

Pomiar powierzchni wykonuje się zawsze pośrednio, t. z. nie mierzymy powierzchni za pomocą bezpośredniego przykładania do niej jednostki powierzchni, lecz obliczamy ją na podstawie pomiarów odpowiednich elementów.

§ 2. Kształt ziemi.

Ponieważ zajmować się mamy pomiarami różnych obszarów na powierzchni ziemi, więc samo przez się nasuwa się pytanie, jaki kształt ma nasza ziemia?

Na to pytanie, nie mamy dotąd ścisłej odpowiedzi. Przeciwnie, w miarę postępu nauki, odpowiedź staje się coraz trudniejszą a zadanie zawilsze, jak to poznamy z krótkiego zestawienia dotychczasowych usiłowań rozwiązania powyższego pytania i wyników tych badań.

Już starożytni, jak Pitagoras w VI wieku i Arystoteles w IV w. przed Chrystusem, oświadczyli się stanowczo za

kulistym kształtem ziemi, a to na podstawie spostrzeżenia, że patrząc na przyplływający z dali statek, widzimy najpierw szczyty jego masztów, następnie w miarę zbliżania się, coraz niższe części masztów, wreszcie cały statek, co wytłómaczyć się da tylko na podstawie wypukłości powierzchni ziemi, więc i morza.

W drugim wieku przed Chrystusem, uczony Erastotenes obliczył nawet obwód ziemi, na podstawie długości łuku południka między Syeną w południowym Egipcie a Aleksandryą, tudzież pomiaru kąta środkowego, odpowiadającego powyższemu łukowi; zatem nie wątpił o kulistym kształcie ziemi. Pomiar jego a raczej obliczenie okazało się za wielkie o $\frac{1}{6}$, a to wskutek błędów w pomiarze długości łuku (za pomocą ilości dni podróży z Syeny do Aleksandryi, wnosił on o długości), tudzież błędu w pomiarze kąta (z długości cienia rzuconego przez pionową tykę, wnosił on o wielkości kąta promieni słońca z pionem). Znacznie później, bo w IX wieku po Chr. wykonali Arabowie pomiar łuku południka z dość dobrym wynikiem, poczem, w XVI już wieku, podjęli się zadania tego Francuzi, mianowicie Fernel w r. 1524 i Snellius w r. 1617. Wynik ich badań nie mógł być bardzo dokładnym, z powodu braku dzisiejszych dokładnych instrumentów mierniczych.

W wieku XVIII sprawa powyższa rozwija się ogromnie, doświadczenia z wahadłem wykazują, że wahania stają się coraz dłuższe w miarę zbliżania się ku równikowi, czyli, że siła ciężkości maleje, a ponieważ zaledwie część malenia siły ciężkości wytłómaczyć można działaniem siły odśrodkowej wskutek obrotu ziemi, więc tem samem potwierdzoną została teoria Newtona, że siła ciężkości maleje w odwrotnym stosunku do kwadratu z odległości, czyli okazało się, że na równiku powierzchnia ziemi jest wypuklejszą, a ku biegunom spłaszczoną. Późniejsze doświadczenia wzięte z pomiarów łuków, odpowiadających pojedynczym stopniom szerokości geograficznej w pobliżu bieguna i równika okazały, że łuki te nie są równe, a tem samem okazało się, że południki nie są kołami, więc i ziemia nie może być kulą. Odtąd rozwią-

zanie zadania staje się zawilszem niż zrazu sądzono, a na podstawie badań uczonych kształt kulisty ziemi zmienia się na kształt sferoidu, t. j. elipsoidy obrotowej powstałej przez obrót elipsy około jej osi malej, którą jest oś ziemską. Z bardzo licznych pomiarów najsłynniejszym był pomiar Bessela w roku 1837 do 1841, według którego długość połowy osi większej elipsoidy ziemskiej wynosi: $a = 6\,377\,397.156\ m$ ($\log a = 6.804643$), połowa osi malej $b = 6\,356\,078.963\ m$ ($\log b = 6.803189$). Spłaszczenie ziemi $\frac{a-b}{a} = p = \frac{1}{299.1528}$, ekscentrycz. $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ ($\log p = 7.524\,1069 - 10$, $\log e^2 = 7\,814\,410 - 10$). Obwód ziemi na równiku = $40\,070\,368\ m$, $\frac{1}{4}$ część obwodu na równiku = $10\,000\,855.763\ m$. Średnia geometryczna z trzech osi elipsoidy obrotowej t. j. $\sqrt[3]{a \cdot a \cdot b} = 6\,370\,283\ m$ jest równa promieniowi kuli, mającej taką samą powierzchnię jak sferoida ziemską.

Późniejsze badania wykazały, że nie tylko południki, ale również i równoleżniki nie są kołami. Ściśle rzecz biorąc, nie można kształtu ziemi uważać nawet za sferoidę, lecz prędzej jako elipsoidę trójosiową o wszystkich trzech osiach różnych. W końcu, na podstawie dotychczas zebranych dat, okazało się, że ziemia ma kształt niedający się dotychczas matematycznie określić, a nazwano go kształtem geoidalnym. Kształt ten utworzyłaby powierzchnia wody, oblewająca całą powierzchnię ziemi i będąca w spoczynku.

Wkońcu nadmienić wypada, że w ostatnich latach zorganizowano międzynarodowy związek naukowy w celu pomiaru ziemi i związanych z tem badań zboczeń pionu, gęstości skorupy ziemskiej i wabnień osi ziemskiej, tudzież wpływu jaki one wywierają na pomiary wysokości biegun.

Kształt ziemi uwzględnić potrzeba tylko w niektórych wypadkach, zależnie od ważności i rozmiarów prac mierniczych, jak to wspomnieliśmy w § 1.

Przyjmijmy n. p. ziemię, jako kulę o promieniu $r = 6\,370\,300\ m$. Obwód koła wielkiego wynosiłby wtedy

40 005 484 *m*, zaś łuki odpowiadające kątom środkowym, mianowicie:

1' 5' 10' 15' 20'

wynosiłyby:

1852·105 *m* 9260·525 *m* 18521·05 *m* 27781·575 *m* 37042·100 *m*

Obliczywszy stycznice tych kątów i dla tego promienia, otrzymamy, że wynoszą one:

dla 10' 15'
18 521·11 *m* 27 781·65 *m*

Stąd widzimy, że różnice między łukami a stycznymi wynoszą 5, względnie 7 *cm* na długościach 18·5 i prawie 28 *km*. Różnice te są tak małe, że przy bezpośrednim pomiarze tych łuków popełnilibyśmy bezwątpienia większe błędy tak, że mierząc po łuku albo po płaszczyźnie, nie potrafilibyśmy różnicy ich długości skonstatować, bo nieuniknione błędy pomiaru byłyby większe niż te różnice.

Z przykładu powyższego łatwo wysnuć wniosek, że przy pomiarze długości, obszary wynoszące nawet 30 *km* w każdym kierunku, uważać można za płaszczyznę i nawet kulistego kształtu ziemi uwzględniać wcale nie potrzeba.

Przy pomiarze wysokości czyli niwelacyi, przyjęcie powyższe jest niemożliwe i tam przy mniejszych pracach uwzględnia się kształt kulisty, przy wielkich nawet kształt sferoidalny.

Wogóle, przy pomiarach powierzchni, wynoszących około 700 *km*², uważamy ziemię za płaszczyznę, przy pomiarach do kilkuset mil² przyjmujemy już kulisty kształt ziemi, przy większych kształt sferoidalny.

§ 3. Jednostka długości.

Do niedawnych jeszcze czasów panował w dziedzinie miar prawdziwy chaos. Każde państwo, a nawet poszczególne miasta posiadały swoje odrębne miary. Z postępem cywilizacyi okazywała się co raz większa potrzeba ujednostajnienia miar, co pobudziło astronomów francuskich

Dalambrea i Méchaina do pomiaru południka ziemskiego, ażeby na tej podstawie utworzyć naturalną jednostkę długości, któraby, będąc częścią południka ziemskiego, przetrwać mogła niezniszczalna po wszystkie czasy.

Jako jednostkę przyjęto $\frac{1}{10000000}$ część południka sferoidy ziemskiej i nazwano ją metrem.

Wykonano też wzór jednostki metrycznej w platynie, mianowicie sporządzono sztabę platynową o długości jednego metra i tę przechowano dotychczas w Paryżu jako *mètre des archives*. Od lat około 30 większa część państw europejskich i amerykańskich przyjęła tę jednostkę, inne pozostały jeszcze przy swych dawnych miarach.

Wprawdzie późniejsze bardzo dokładne pomiary Bessela wykazały, że czwarta część długości południka ziemskiego wynosi nie równe 10 000 000 *m* lecz 10 000 855·763 *m**), wskutek czego przyjęta jednostka jest nieco za mała, lecz mimo to zatrzymano ją.

Jako większe jednostki są w użyciu:

dekametr = 10 *m*

kilometr = 1 000 *m*

hektometr = 100 *m*

miriametr = 10 000 *m*

a jako mniejsze:

decymetr = *dm* = 0·1 *m*

milimetr = *mm* = 0·001 *m*

centymetr = *cm* = 0·01 *m*

Na oznaczenie powierzchni przyjęto:

1 *m*², 1 *a* (ar) = 100 *m*², 1 *h* (hektar) = 10 000 *m*²

*) Prof. Uniw. Jagiell. A. W. Witkowski podaje w swych tablicach matematyczno fizycznych (1904 r.) następujące daty na str. 140.

Rozmiary ziemi sferoidalnej:

Półoś równikowa <i>a</i> = 6 378·2 <i>km</i>	Powierzchnia $5\,008 \times 10^6$ <i>km</i> ²
" biegunowa <i>b</i> = 6 356·5 "	Objętość $1\,082 \times 10^{12}$ <i>km</i> ³
Splaszczenie $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{295}$	Masa $5\,979 \times 10^{21}$ <i>tn</i>
Ćwiartka połudn. = 10 002 000 <i>m</i>	Średnia gęstość $5\,521 \frac{gr}{cm^3}$
Obwód równika = 40 075 450 <i>m</i>	Długość stopnia na równ. 111 321 <i>m</i>

§ 4. Porównanie miary metrycznej z miarami dawnymi lub innymi, obecnie używanymi.

a. Miary francuskie.

1 m	=	443·296	linii paryskich.
1 m	=	0·513074074	prętów.
1 m	=	3 0784444	stóp paryskich.
1 mm	=	0·443296	linii paryskich.
1 pręt	=	6 stóp parys.	= 1·9490363107 m.
1 parys. stopa	=	12 par. cali	= 144 p. linii = 0·3248394 m.
1 cal paryski	=	12 p. linii	= 0 02706995 m.
1 linia paryska	=	2·255829063	mm.

b. Miary niemieckie.

Ponieważ każde z niemieckich państw związkowych posiadało osobne miary, które obecnie zastąpiono miarą metryczną, więc nie chcąc się rozwlekać podajemy tylko miary pruskie.

1 m	=	3·186199957	stóp pruskich.
1 m	=	38·2343995	cali „
1 m	=	0·2655167	prętów pruskich.
1 mm	=	0·4588128	linii „
1 m ²	=	0·0704991	prętów ² „
1 ha	=	3·9166165	morgów „
1 stopa pruska	=	0·313853497	m.
1 cal „	=	0·0261545	m.
1 pręt „	=	3·7662420	m.
1 linia „	=	2·1795382	mm.
1 pręt ² „	=	14·1845786	m ² .
1 morg „	=	0·2553224	ha.

c. Miary austriackie.

1 stopa wiedeńska	=	0·3160806	m.
1 sążen wied.	=	6 stóp	= 1·896483840 m.
1 sążen □	=	3·596652	m ² .

1 stopa	□	=	0.099907	m ² .
1 morg austr.		=	1.600 s ²	= 0.5754642 ha.
1 mila	□	=	57.54642	km ² .
1 m		=	0.5272916	sążni wied.
1 m ²		=	0.278036	" "
1 a		=	27.803639	" "
1 ha		=	1.737727	morgów.

d. Miary polskie dawne.

1 sążień	=	6 stóp	=	1.72800 m.
1 łokieć	=	2 stopy	=	57.600 cm.
1 mila	=	8.534	km.	

e. Miary angielskie i półn. amerykańskie.

1 yard	=	3 stopy	=	0.91439180 m.
1 przęt	=	2.13151116	yardów.	
1 stopa	=	0.30479727	m.	
1 cal	=	2.539977	cm.	
1 mila ang.	=	1.60933	km.	
1 akr	=	40.46784	a.	
1 m	=	1.093623	yardów.	

f. Miary rosyjskie.

1 stopa	=	1 stopa ang.	=	0.30479727 m.
1 sążień	=	2.13358079	m.	
1 stopa	=	12 cali.		
1 cal	=	10 linii.		
1 sążień	=	3 arszynom.		
1 arszyn	=	28 cali	=	16 werszkom.
1 werszek	=	1 $\frac{3}{4}$ cala.		
1 wiorsta	=	500 sążni	=	1.06679 km.

g. Miary międzynarodowe.

Mila geograficzna	=	7.420 km	=	$\frac{1}{15}^0$ na równiku.
Mila morska (1' dług. geogr. na równiku)	=	1.855109	km.	

h. Inne miary.

Mila francuska	=	4·45226	km
Mila angielska	=	1·60933	km
Mila austriacka	=	7·58594	km
Mila pruska	=	7·53248	km
Mila geogr. □	=	55·0629081	km ²
1 km	=	0·13476292	mil geogr.
1 km	=	0·53905170	mil morskich
1 km ²	=	0·018161046	mil geogr. □

Wszystkie przyrządy służące do pomiaru długości powinny być w urzędzie dla miar i wag sprawdzone, a błąd ich wykonania nie powinien przekraczać dozwolonej granicy, mianowicie:

a) 1 metrowa łąta drewniana do mierzenia towarów w handlu, podzielona na centymetry, może mieć błąd 2 mm, zaś długości 0·5 m, może mieć błąd 1·5 mm

b) dozwolony błąd łąty metalowej o długości 2 lub 1 m, wynosić może odpowiednio 1·5 i 1·0 mm

c) taśmy stalowe mogą mieć odpowiednio do swej długości następujące błędy:

długość	20	10	5	2	1	m
błąd	7·0	4·5	3·5	2·5	1·5	mm

d) podziałki z metalu, drzewa twardego lub kości, długie na 0·5, 0·2, 0·1 m, mogą mieć błąd maxim. 0·5 mm

Do pomiarów geodezyjnych lub pomiarów z planów używamy miar dokładnych, sprawdzonych za pomocą precyzyjnych instrumentów z miarą normalną, o czem mówić będziemy w jednym z dalszych rozdziałów.

§ 5. Miara kątowna.

Jako jednostka do pomiaru kąta, służy jeszcze od czasów starożytnych $\frac{1}{360}$ część kąta, odpowiadającego pełnemu obrotowi prostej około jednego punktu, czyli pełnemu obwodowi koła o promieniu = 1. Ponieważ równym kątem

odpowiadają równe łuki na obwodzie koła, przeto łuki są także miarą kątową. Jeden stopień (1°) podzielono na 60 minut ($60'$) a jedną minutę na 60 sekund ($60''$). Obok tego podziału używany jest jeszcze (wprowadzony podczas wielkiej rewolucyi francuskiej), podział koła na 400° , stopnia na $100'$, minuty na $100''$. Podział ten używany jest w południowych Niemczech, Szwajcaryi i Włoszech, natomiast w samej Francyi nie przyjął się, jak również w astronomii wcale się go nie używa. W ostatnich czasach używany jest coraz bardziej podział koła na 360° , stopnia na $100'$, minuty na $100''$. Jest to bardzo wygodny podział, bo wyrażamy kąty w stopniach, dziesiętnych i setnych stopnia. Prof. Uniw. Jag. A. W. Witkowski podaje dla tego podziału w swych tablicach matematyczno-fizycznych (1904 r.) logarytmy funkcyi i wogóle wszystkie daty.

Ponieważ w miernictwie, zwłaszcza przy obliczeniach współrzędnych, ciągle mamy do czynienia z funkcyami goniometrycznymi lub miarą łukową kąta, przeto podajemy w dalszym ciągu zestawienie tych funkcyi i najważniejszych wzorów trygonometrycznych.

Związek między obwodem koła o promieniu r , kątem pełnym, a łukiem m , odpowiadającym kątowi α° lub α' lub α'' wyrazić możemy za pomocą proporeyi

$$2 r \pi : 360^\circ = m : \alpha^\circ \quad 1)$$

stąd obliczymy:

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{2 \pi}{360^\circ} \cdot r \alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot r \alpha^\circ \\ \text{podobnie:} \\ m &= \frac{\pi}{180 \cdot 60'} \cdot r \alpha' \\ m &= \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60''} \cdot r \alpha'' \end{aligned} \right\} 2$$

nazwijmy:

$$\frac{180}{\pi} = q^\circ = 57.295779513 \dots \log q^\circ = 1.7581226$$

$$\frac{180\ 60}{\pi} = \varrho' = 3437.7467708 \quad \dots \log \varrho' = 3.5362738$$

$$\frac{180\ 60\ 60}{\pi} = \varrho'' = 206264.80625 \quad \log \varrho'' = 5.3144251$$

$$\log \frac{1}{\varrho^0} = 8.2418773 - 10$$

$$\log \frac{1}{\varrho'} = 6.4637261 - 10$$

$$\log \frac{1}{\varrho''} = 4.6855748 - 10$$

to otrzymamy odpowiednie wzory:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{luk } m = \frac{r \alpha^0}{\varrho^0} & \text{kąt } \alpha^0 = \frac{m \varrho^0}{r} \\ m = \frac{r \alpha'}{\varrho'} & \alpha' = \frac{m \varrho'}{r} \\ m = \frac{r \alpha''}{\varrho''} & \alpha'' = \frac{m \varrho''}{r} \end{array} \right\} 3$$

z których, zależnie od potrzeby, obliczymy luk m , mając dane r i α , lub kąt α , mając luk i promień.

Wzory te są w ciągłym użyciu w praktyce, tak dla wyrachowania kąta, jak luku. N. p. chcemy obliczyć, jak wielki może być błąd pomiaru kąta, jeżeli sygnał był w odległości 200 m od instrumentu, ustawiony ekscentrycznie 5.8 cm , t. j. niedokładnie z boku o 5 cm zamiast w kierunku ramienia.

W takim razie

$$\alpha'' = \frac{0.058 \varrho''}{200} = 60'' = 1'$$

Z następującej tabliczki można wprost wyjąć żądane wartości: $\frac{r \cdot \alpha}{\rho}$

Tablica 1.

r	$\alpha = 1''$	$10'$	$20'$	$30'$	$\alpha = 1'$	$10'$	$20'$	$30'$	$\alpha = 1^\circ$
1 <i>m</i>	0-000 <i>m</i>	0 000 <i>m</i>	0-000 <i>m</i>	0 000 <i>m</i>	0 000 <i>m</i>	0 003 <i>m</i>	0-006 <i>m</i>	0 009 <i>m</i>	0-017 <i>m</i>
10 <i>m</i>	0-000	0 000	0-001	0-001	0-003	0-029	0-058	0 087	0-175
57-296	0-000	0-003	0-006	0-008	0-017	0-167	0 333	0-500	1-000
100	0 000	0-005	0-010	0 015	0-029	0-291	0-582	0-873	1-745
200	0-001	0-010	0 019	0-029	0-058	0-582	1-164	1-745	3-491
300	0-001	0 015	0 029	0-044	0-087	0 876	1-745	2-618	5 236
400	0-002	0-019	0-039	0 058	0-116	1-164	2 327	3-491	6-981
500	0-002	0 024	0-048	0-073	0 145	1-454	2 909	4-363	8-727
600	0-003	0 029	0-058	0-087	0-175	1-745	3 491	5-236	10-472
700	0-003	0-034	0-068	0 102	0-204	2-036	4-072	6-109	12-217
800	0-004	0-039	0 078	0-116	0-233	2-327	4-654	6-981	13-963
900	0-004	0-044	0-087	0-131	0-262	2-618	5-236	7-564	15-708
1000	0 005	0 048	0-097	0-145	0-291	2-909	5-818	8-727	17-453
3437-7	0-017	0-167	0-333	0-500	1-000	10-000	20 000	30-000	60 000

Zestawienie funkeyi trygonometrycznych dla kątów w różnych ćwiartkach :

Tabl. 2.

<i>kąt</i>	<i>sin</i>	<i>cos</i>	<i>tg</i>	<i>cotg</i>
0°	0	+ 1	0	∞
90° — α	+ cos α	+ sin α	+ cotg α	+ tg α
90°	+ 1	0	∞	0
90° + α	+ cos α	— sin α	— cotg α	— tg α
180° — α	+ sin α	— cos α	— tg α	— cotg α
180°	0	— 1	0	— ∞
180° + α	— sin α	— cos α	+ tg α	+ cotg α
270° — α	— cos α	— sin α	+ cotg α	+ tg α
270°	— 1	0	— ∞	0
270° + α	— cos α	+ sin α	— cotg α	— tg α
360° — α	— sin α	+ cos α	— tg α	— cotg α
360°	0	+ 1	0	∞
360° + α	+ sin α	+ cos α	+ tg α	+ cotg α
— α	— sin α	+ cos α	— tg α	— cotg α

Znaki funkeyi trygonometrycznych :

Tabl. 3.

ćwiartka	1	2	3	4
<i>sin</i>	+	+	—	—
<i>cos</i>	+	—	—	+
<i>tg</i>	+	—	+	—
<i>cotg</i>	+	—	+	—

Praktyczne zastosowanie tabliczek 2 i 3 będziemy mieli przy obliczeniu zdjęć poligonalnych w § 51 i następnych.

Wzory goniometryczne i trygonometryczne:

$$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} \quad 1)$$

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} \quad 2)$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad 3)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a \quad 4)$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 a = \operatorname{cosec}^2 a \quad 5)$$

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin a \cos \beta \pm \cos a \sin \beta \quad 6)$$

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos a \cos \beta \mp \sin a \sin \beta \quad 7)$$

$$\sin 2 a = 2 \sin a \cos a \quad 8)$$

$$\cos 2 a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad 9)$$

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \beta} \quad 10)$$

$$\operatorname{cotg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} \beta - 1}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} \beta} \quad 11)$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \quad 12)$$

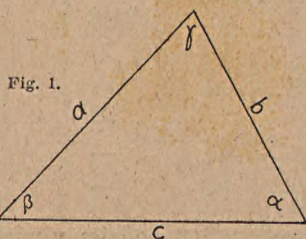
$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \quad 13)$$

$$\sin a + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 14)$$

$$\sin a - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 15)$$

$$\cos a + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 16)$$

$$\cos a - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad 17)$$



$$a = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin a \quad 18)$$

$$a = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin a \quad 19)$$

$$b = \frac{a}{\sin a} \cdot \sin \beta \text{ itd. } 20)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cos a \quad \text{itp.} \quad 21)$$

$$\text{Powierzchnia } F = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} \quad 22)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \end{aligned} \right\} \quad 23)$$

$$2s = a + b + c$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad 24) \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \quad 25)$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} \quad 26)$$

Przypuszczamy przytem, że sposób obliczania funkcyj kątowych czytelnikowi jest znany, więc w tem miejscu nie o tem mówić nie będziemy.

§ 6. Poziom geodezyjny i pozorny.

Wyobraźmy sobie że całą ziemię oblewa jedno wielkie morze, tudzież że na nie wcale nie wywiera wpływu ani słońce ani księżyc, że wogóle zostaje ono w równowadze, to kształt powierzchni wody byłby t. z. poziomem geodezyjnym.

Każda powierzchnia równoległa do opisanego wyżej poziomu geodezyjnego czyli rzeczywistego byłaby także poziomem geodezyjnym, lecz odległym od poprzedniego o odciinek pionu zawartego między obu powierzchniami. Taka powierzchnia poziomu geodezyjnego byłaby prostopadła w każdym punkcie ziemi do pionu tegoż punktu.

Dla odróżnienia, nazywamy płaszczyznę styczną w którymby punkcie ziemi do powierzchni poziomu rzeczywistego,

poziomem pozornym. Jest ona prostopadłą tylko do jednego pionu wyprowadzonego w owym punkcie styczności.

Plaszczyzna przesunięta przez oś obrotu ziemi, czyli t. z. płaszczyzna południka, przecina poziom pozorny w linii prostej, wyznaczającej kierunek południe-północ, a płaszczyzna równoleżnika, prostopadła do osi obrotu ziemi, przesunięta przez dany punkt na ziemi, przecina poziom pozorny w linii prostopadłej do poprzedniej, t. j. w kierunku zachód-wschód.

Dla niezbyt wielkich przestrzeni na powierzchni ziemi, które, jak to poprzednio wykazaliśmy, można uważać za płaskie, obie te linie północ-południe i zachód-wschód, przechodzące przez pewien punkt przyjęty jako początek, tworzą prostokątny układ osi na płaszczyźnie, podobnie jak to przyjmowaliśmy w geometrii analitycznej. Do takiego układu osi nawiązujemy za pomocą odpowiednich metod, pomiary danych części powierzchni ziemi.

Przypuścimy, że na powierzchni ziemi znajduje się parcela, której rzut na poziom pozorny jest regularną figurą, n. p. prostokątem. Jeżeli powierzchnia tej parceli jest w rzeczywistości pofalowana w rozmaite nachylenia, to łatwo zrozumiemy, że długości mierzone po terenie równoległe do jednej lub drugiej pary boków rzutu będą różne, a gdybyśmy chcieli przedstawić tę parcelę na rysunku, zatem na płaszczyźnie tak, ażeby obraz ten przedstawiał rzeczywiste długości parceli we wszystkich kierunkach (z uwzględnieniem nachylenia), to rysunek taki nie mógłby być prostokątem, lecz jakimś nieregularnym wielobokiem. Gdybyśmy następnie w ten sam sposób przedstawić chcieli na rysunku obszar kilku parcel graniczących ze sobą, to wieloboki odpowiadające im, musiałyby się po części nakrywać, po części utworzyłyby się między niemi wolne miejsca.

Natomiast w rzucie na płaszczyznę poziomu pozornego dany obszar da się doskonale przedstawić tak, jak go z góry patrząc widzimy. Wszystkie więc płany obszarów powierzchni ziemi rysujemy w rzucie na poziom pozorny, a co zatem idzie pomiary długości wykonujemy nie uwzględ-

dniając nachyleń, lecz w płaszczyźnie stycznej do powierzchni ziemi, czyli w poziomie pozornym.

Zdawaćby się mogło, że przedstawienie pojedynczych obszarów w rzucie, będzie miało w praktyce niepożądane następstwa. Wyobraźmy sobie bowiem dwie równe co do obszaru parcele, lecz jedna leży np. w poziomie, druga zaś na stoku, przyczem przypuszczamy, że powierzchnię parceli nachylonej, mierzymy z uwzględnieniem nachylenia. Przedstawmy teraz obie powierzchnie w rzucie na poziom, to pierwsza zostanie niezmienną, druga zaś okaże się mniejszą, i to tem bardziej, im większe było nachylenie terenu. Ponieważ podatek gruntowy opłaca się od powierzchni mierzonej w planie, więc właściciel parceli leżącej na poziomie, czułby się pokrzywdzonym w stosunku do właściciela drugiej parceli; płaciłby bowiem podatek od większej powierzchni niż jego sąsiad, mimo, że rozmiary parceli leżącej na stoku, mierzone po terenie, byłyby takie same jak jego. Tymczasem rzecz przedstawia się zupełnie odmiennie. Na terenie nachylonym rośliny rosną pionowo, tak samo jak na zupełnie poziomym, a nie prostopadle do terenu, z czego znów wynika, że na danej parceli, leżącej na stoku, nie może ich więcej rosnąć niż na rzucie tejże parceli na poziom. Słusznem więc jest, że właściciel drugiej parceli, mimo, że pozornie ma taki sam obszar, będzie płacił mniejszy podatek, bo ma mniejsze plony, czyli i pod tym względem usprawiedliwioną jest metoda pomiaru w poziomie bez względu na nachylenie terenu.

§ 7. Plan i podziałka rysunku.

Przedstawienie na rysunku pewnego obszaru, zdjętego za pomocą pomiarów, nazywamy planem. Jeżeli rysunek przedstawia tylko rzut poziomy granic parcel, budynków, dróg, potoków i t. p., to zależnie od celu w jakim został wykonany, nazywamy go albo planem katastralnym, jeżeli służy do wyznaczania podatków od uwidocznionych na nim pojedynczych własności z uwzględnieniem gatunku

ziemi, uprawy, zabudowań i t. p., albo planem gospodarczym czyli rolniczym, gdy obok wielkości podaje rodzaj kultury, dobroć ziemi, stosunki klimatyczne, ulepszenia rolne i t. p., albo planem lasowym, gdy podaje obok powierzchni, także rodzaj i wiek drzewostanu, wyręby i wogóle wszelkie daty odnoszące się do leśnego gospodarstwa. Jeżeli obok wszystkich szczegółów uwidoczniionych w rzucie, przedstawiono jeszcze na planie wysokości poszczególnych punktów, to plan taki nazywamy sytuacyjnym. Plany takie wykonuje się celem studyowania trasy dróg, kolei i t. p. a wykonane w znacznem pomniejszeniu, ze szczególnem uwzględnieniem wysokości, tudzież dróg, budynków, wogóle wszelkich szczegółów, nazywamy kartami topograficznymi.

Celem przejrzystości i łatwego oryentowania się w kartach sytuacyjnych, przyjęto pewne oznaczenia, t. z. znaki sytuacyjne na uwidocznienie różnych przedmiotów i właściwości terenu, tudzież na każdej karcie podany jest kierunek południe-północ, ażeby za pomocą busoli zoryentować się można na terenie podług mapy.

Każdy z wymienionych planów powinien być wiernym obrazem swego przedmiotu t. j. terenu, zatem powinien podawać dokładne kierunki i długości, względnie odległości poszczególnych punktów.

Ponieważ planów wykonywać nie można w naturalnej wielkości, więc rysujemy je w zmniejszeniu, które też powinno być na planie podane. Zmniejszenie to nazywamy skalą planu. Wszystkie wymiary na planie powinny być proporcjonalne do rozmiarów w naturze.

Zwykle używane skale są: a) 1 : 500 t. j. 500-krotne zmniejszenie, używane w planach parcel budowlanych miejskich, b) 1 : 1.000 t. j. 1000-krotne zmniejszenie używane w szczegółowych planach sytuacyjnych do studyowania trasy lub wykupna gruntów, c) 1 : 10000 używa się przy sporządzaniu planów sytuacyjnych generalnych, wreszcie d) 1 : 25000 i 1 : 75000 dla map wojskowych.

Austriackie plany katastralne wykonane jeszcze przed wprowadzeniem miary metrycznej, posiadają następującą skalę:

1 cal na rysunku = 40 sążni w naturze, czyli 1 cal na rysunku = $40 \times 6 \times 12 = 2880$ cali w naturze.

Dla większych miast, tudzież wyjątkowo dla takich miejscowości w których jest bardzo dużo drobnych parcel, przyjęto skalę dwa razy większą, mianowicie 1 : 1440 t. j. 1 cal na rysunku = 20 sążni w naturze.

Dla nowszych planów katastralnych, przyjęto skalę 1 : 2500 a dla większych miast dwa razy większą.

§ 8. Urządzenie austriackiego katastru.

I. Stary podział.

Cały obszar monarchii austriackiej pokryty jest siecią trójkątów, których wierzchołki nawiązano do układu prostokątnego płaskiego. Celem uniknięcia błędu z powodu nieuwzględnienia kształtu ziemi, podzielono cały obszar państwa na 7 części, przyjmując dla każdej z nich inny początek układu, czyli odrębny układ współrzędnych. Południk przechodzący przez dany początek układu przyjęto za oś odciętych, równoleżnik, za oś rzędnych (według fig. 2). Kierunek południka od początku układu na południe przyjęto jako dodatni, na północ jako ujemny. Oś rzędnych na zachód przyjęto jako dodatnią, na wschód jako ujemną.

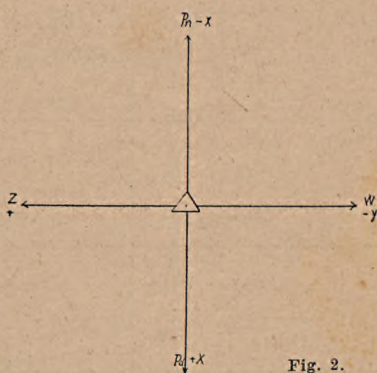


Fig. 2.

Początek układu dla Galicyi znajduje się we Lwowie pod kopcem Unii Lubelskiej, a współrzędne geograficzne jego są:

Długość geogr.	41°	42'	32·50"
szerokość „	49°	50'	56·50"

Wszystkie wierzchołki wspomnianej sieci trójkątów oznaczone są w polu kamieniami odpowiednio utwierdzonymi w ziemi, z wrytymi na nich krzyżami (punkt przecięcia obu linii oznacza wierzchołek trójkąta) i literami K. V. (*Kata-*

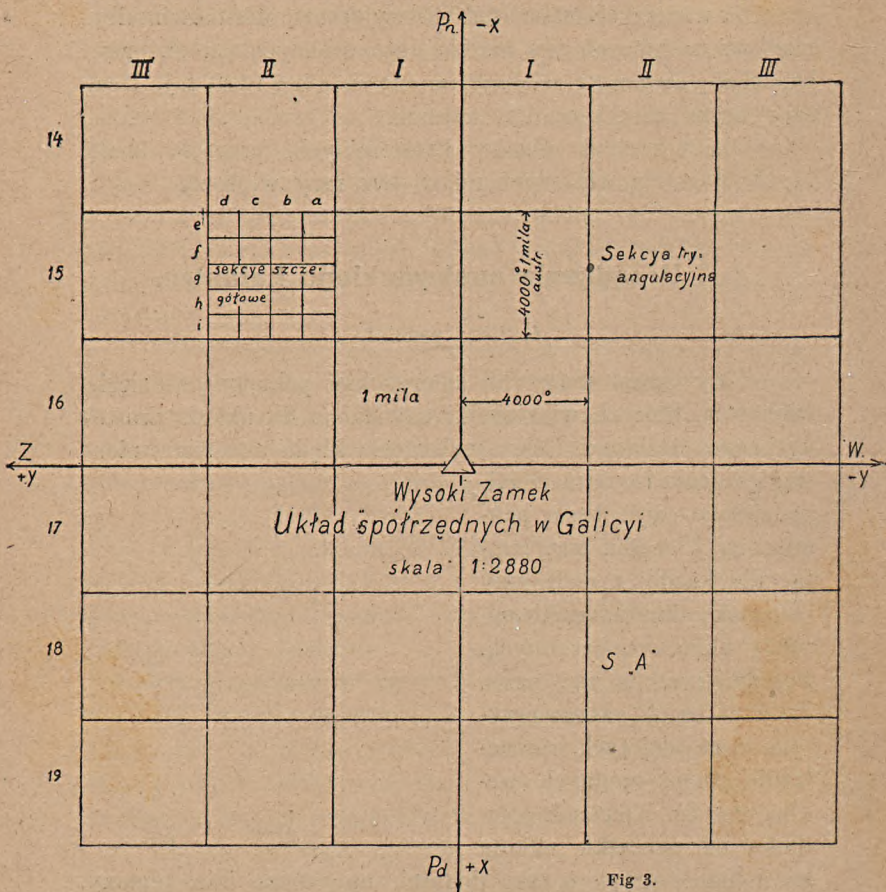


Fig 3.

stral-Vermessung). W mapach topograficznych wojskowych, punkta te oznaczone są małymi trójkątami.

Cały obszar, należący do jednego układu współrzędnych, podzielono na sekcye prostymi poprowadzonymi równolegle do obu osi. Pasy równoległe do osi XX nazwano kolumnami, równoległe zaś do osi YY — wierszami. Kolumny ponume-

rowane są cyframi rzymskimi, począwszy od osi *X* na wschód i zachód, wiersze zaś cyframi arabskimi począwszy od wiersza najbardziej na północ wysuniętego ku południowi. Sekeye są kwadratami o długości boku = 1 mili austr., czyli 4 000 sążni. (Fig. 3 przedstawia graficznie podział na sekeye). Położenie pewnej sekeyi określa się numerem kolumny z uwzględnieniem kierunku (*W* = wschód, *Z* = zachód) i numerem wiersza. Np. Sekeya *A* znajduje się w kolumnie II. *W* — i wierszu 18.

Każdą sekeyę podzielono na 4 części od wschodu na zachód, oznaczając te kolumny literami *a b c d* i na 5 części w kierunku od północy ku południowi, oznaczając wiersze literami *e f g h i*.

Wskutek powyżej opisanego podziału powstało 20 nowych sekeyi szczegółowych, z których każda ma kształt prostokąta, o podstawie 1 000 sążni dług. a 800 sążni wys. (czyli 1 896·48 *m* dług. i 1 517·19 *m* wysok.). Powierzchnia takiej sekeyi wynosi $\frac{1}{2} \frac{1}{0}$ mili austr. czyli 500 morgów austr. lub 287·7 *ha* w miarze metrycznej. W skali 1 : 2 880 przedstawia się każda sekeya szczegółowa jako prostokąt o długości boków $\frac{2}{5} \frac{5}{0}$ cali.

II. Nowy podział.

W nowym podziale kolumny mają szerokość 8 000 *m*, wiersze 10 000 *m*. Numerowanie kolumn zostało takie samo, natomiast wiersze ponumerowano cyframi arabskimi, począwszy od osi *Y* na północ i na południe. Fig. 4 przedstawia podział na sekeye t. z. tryangulacyjne wraz z numerowaniem i na sekeye szczegółowe. Sekeya tryangulacyjna podzieloną jest na 5 kolumn od wschodu na zachód, i 8 wierszy od południa ku północy. Zatem każda sekeya tryangulacyjna składa się z 40 sekeyi szczegółowych o bokach 1 600 i 1 250 *m* tudzież powierzchni 200 *ha*. Na rysunku w skali 1 : 2 500 przedstawia się sekeya szczegółowa jako prostokąt o bokach $\frac{6}{5} \frac{4}{0}$ *cm*. Położenie punktu na pewnej karcie określa się przez podanie kolumny i wiersza sekeyi tryangulacyjnej

tudzież kolumny i wiersza sekcji szczegółowej, n. p. punkt *A* leży w sekcji szczegółowej oznaczonej przez *Pd. Z. II. 2. sek. 2* t. z. południe-zachód kol. II, wiersz 2, sekcja szczegółowa kol. 2 wiersz 4. Każda sekcja tryangulacyjna posiada przynajmniej 2 punkty tryangulacyjne utrwalone odpo-

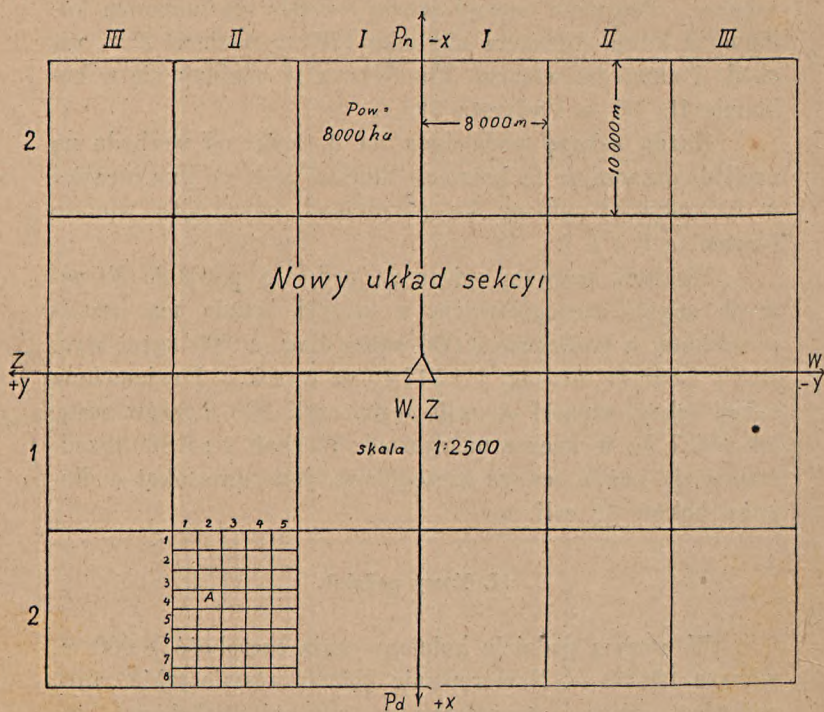


Fig. 4.

wiednio na gruncie. Spółrzędne tych punktów, wraz z opisem topograficznym punktów, otrzymać można w biurze tryangulacyjnym ministerstwa skarbu w Wiedniu za opłatą zasadniczą 20 koron za 5 punktów lub za mniej, za każdy zaś punkt następny po 4 korony. Rysunek każdej sekcji szczegółowej, ujęty jest w ramki prostokątne, zwane liniami sekcijnymi.

§ 9. Prace polowe.

W szczególności sposoby oznaczania punktów na terenie.

Zadaniem pracy w polu jest zebranie na podstawie nauki miernictwa wszelkich danych, potrzebnych do narysowania planu danego obszaru lub odwrotnie, mając plan terenu i narysowany na nim projekt, n. p. podział gruntu, trasę kolei, drogi lub młynówki i t. p. — wytyczenie tego projektu na gruncie według planu.

W pierwszym wypadku, pracę w polu nazywamy zdjęciem terenu, w drugim tytzeniem lub trasowaniem.

Zdjęcie terenu ogranicza się do zdjęcia punktów charakterystycznych. Wyobraźmy sobie n. p. jakiś obszar ograniczony dowolnym wielobokiem; przypuśćmy, że za pomocą pewnej metody zdjęliśmy wszystkie punkty wierzchołkowe, czyli określiliśmy wzajemne położenie tych punktów i narysowaliśmy je na planie — natenczas łącząc dane punkta prostymi, otrzymamy plan zdjętego obszaru, wraz z jego granicami tak co do ich wielkości jak kierunków. Słowem, praca w polu polega zawsze na zdjęciu lub wytyczeniu w jakikolwiek sposób szeregu punktów, które więc musimy w polu uwidocznnić i oznaczyć. Zależnie od rodzaju pracy oznaczać będziemy punkty albo tymczasowo albo mniej lub więcej trwale. N. p. przy zdjęciu parceli, mającej naturalne granice lub miedze, oznaczamy punkty potrzebne do pomiaru małymi palikami wbitymi w ziemię; przy zdjęciu terenu dla trasy czy to kolei czy drogi, utrwalamy punkty służące za podstawę pomiarów tak, aby przetrwać mogły kilka lat, do czego używamy pali o średnicy 10 cm, 1·0 m długich wkopanych w ziemię i zabezpieczonych przed wyrwaniem za pomocą dwóch poprzeczek u dołu pala na krzyż umocowanych, według fig. 5; głowa gwoźdźcia wbitego we wierzch pala oznacza punkt.

Jeszcze lepiej uchronimy palik przed naruszeniem zakopując go zupełnie w ziemię tak, że nad nim pozostanie jeszcze

30 cm gruby pokład ziemi. Położenie takiego palika zaznaczymy na szkicu, odmierzając odległości jego od pewnych punktów stałych (n. p. granie parcel, od figury, mostu, budynków murowanych i t. p.). Przy zdjęciach katastralnych oznacza się punkta tryangulacyjne służące za podstawę zdjęć szczegółowych, kamieniami wmurowanymi w ziemię na odpowiednich fundamentach i opatrzonych znakami. Do oznaczania t. z. stałych punktów niwelacyjnych, używa się przy trasach kolei albo poprzednio opisanych pali z wbitym na wierzchu gwo-

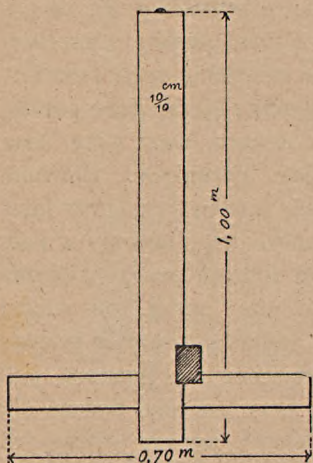


Fig. 5.



Fig. 6.



Fig. 7.

ździem o wypukłej głowie, albo punkty takie oznacza się na cokołach pobliskich budynków murowanych, przyczółkach lub filarach mostów i t. p. W miastach używa się do tego celu żelaznych bolców, wmurowanych na cemencie w kamienne cokoły budynków. Podobnie oznacza się stałe punkty wysokości na stacyach kolejowych.

Ażeby dany punkt na terenie uczynić widocznym z daleka, co jest konieczne przy pracy w polu, używa się do tego t. z. tyczek mierniczych (fig. 6) lub sygnałów. Tyczka miernicza ma zwykle długości 2 do 3 m, średnicę 3 cm, jest jednostajnie gruba, okuta na jednym końcu i pomalowana na biało i czerwono w odstępach co 20 cm. Okucie tyczki powinno być staranne, a koniec ostrza znajdować się powinien na osi geometrycznej tyczki.

Do uwidocznienia punktów bardzo odległych, n. p. na kilka kilometrów, służą t. z. sygnały (fig. 7). Są to słupy 15 do 20 cm średnicy, do 8 m wysokie, które u góry zaostrza się w poprzeczne deseczki pobielone wapnem celem odróżnienia sygnału.

§ 10. Przyrządy do pomiaru długości.

Do pomiaru długości, zależnie od celu, używa się różnych przyrządów. Przy bardzo dokładnych pomiarach używa się łąty mierniczej, którą można zastąpić taśmą stalową przy pomiarach w terenie płaskim lub jednostajnie nachylonym; przy trasach używa się zwykle taśmy stalowej różnej długości, od 5 do 25 m; przy pomiarach mniej dokładnych, służących tylko do oryentacyi, użyć można sznura 50 m dług., a nawet mierzy się krokami lub wnosić można o długości z czasu potrzebnego do przebycia danej drogi, do czego służą specjalne zegarki.

a. Łata miernicza (fig. 8)

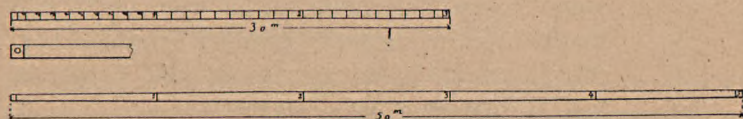


Fig. 8.

jest najdokładniejszym przyrządem do pomiaru długości. Sporządzana bywa zwykle z drzewa, o przekroju prostokątnym, na obu końcach okuta, długości 2 do 5 m. Przekrój łąty

zależy od jej długości i powinien być tak dobrany, ażeby lata nie ugięła się pod własnym ciężarem. Na łacie znajduje się podział na metry i decymetry, drobniejsze zaś części odczytuje się na małej, dokładnej podziałce, którą przy-



Fig. 9.

kłada się do łaty. Okucie jest albo płaskie, albo kształtu odcinka kulistego, lub też zakończone jest płaskimi ostrzami według fig. 9.

b. Taśma stalowa (fig. 10)

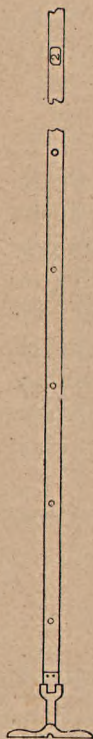


Fig. 10.

zajmuje drugie miejsce po łacie co do dokładności. Jest to pasek stalowy 16 do 24 mm szer., odpowiednio gruby, do 20 m dług. Bywają też taśmy długie na 5, 10, 15, 20, 25, 30 m. Taśma ma podział na metry i decymetry, niekiedy i centymetry. Metry oznaczone są mosiężnymi blaszkami stosownie numerowanymi, co 5 m jest większa blaszka celem łatwiejszej orientacji. Decymetry oznaczone są wybitymi w taśmie dziurkami, a co pół metra umocowany jest mosiężny guziczek. Na obu końcach zaopatrzona jest taśma w pierścienie służące jako pochwyt przy napinaniu jej. Przy pomiarze napina się taśmę wyciągając ją ze siłą najwyżej 10 kg t. j. taką, jaką człowiek bez wysiłku w ciągu dnia wydawać może. Siła ta nie wpływa jednak na wydłużenie taśmy. Natomiast wpływ temperatury może być już widoczny, a mianowicie: jeżeli jednostka długości ogrzana o 1° C. wyżej, przedłuży się o α , to długość l ogrzana o t° C. przedłuży się o długość $l \alpha t$ 1)

gdzie l jest pierwotną długością taśmy. Całkowita więc długość taśmy l_t w temperaturze t° C będzie:

$$l_t = l + l \alpha t = l (1 + \alpha t) \quad 2)$$

Jeżeli l jest rzeczywistą długością taśmy odpowiadającą jej

nominalnej wartości, to l_t jest długością nominalną, zmniejszoną wskutek działania temperatury. Znając temperaturę w której taśma została w fabryce podzieloną, co wynosi zwykle $0^\circ C$, i temperaturę w której pomiar został wykonany, obliczymy łatwo zapomocą wzoru 2 rzeczywistą długość l_t taśmy, którą w danym czasie wykonujemy pomiar. Chcąc zredukować pomiar wykonany taśmą o temperaturze t^0 na pomiar w temperaturze takiej, przy której taśma posiada rzeczywistą długość l , obliczymy z równ. 2

$$l = \frac{l_t}{1 + \alpha t} \quad 3)$$

a pomnożywszy licznik i mianownik przez $1 - \alpha t$ otrzymamy

$$l = \frac{l_t (1 - \alpha t)}{1 - \alpha^2 t^2} \quad 4)$$

Ponieważ współczynnik rozszerzalności α jest ilością bardzo małą, więc $\alpha^2 t^2$ jako ilość bardzo małą rzędu drugiego możemy opuścić, a wzór 4 przekształci się na $l = l_t (1 - \alpha t)$ 5) jako wzór służący do zredukowania długości mierzonej taśmą w temperaturze t^0 , na długość rzeczywistą. Przyjąwszy długość taśmy $l = 20\ m$ i współczynnik $\alpha = 0,0001079$ dla miękkiej stali, to obliczenie wykaże, że przy zmianie temperatury

o $10^\circ C$	długość taśmy	zmieni się o	2.15	mm
o $20^\circ C$	"	"	4.30	"
o $30^\circ C$	"	"	6.47	"

Zmiany powyższe są wogóle małe i mieszczą się w granicach błędów dozwolonych, o których mówić będziemy później, więc tylko w szczególnych wypadkach uwzględnia się wpływ temperatury.

c. Taśma płócienna (fig. 11).

Podobna do poprzedniej, tylko sporządzona z tkaniny lnianej z wplecionymi drucikami mosiężnymi celem zmniejszenia rozciągania się. Długość jej wynosi zwykle 5, 10, 15 do 20 m. Używa się do pomiarów podrzędnych.

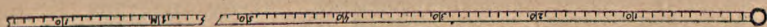


Fig. 11.

d. Do pomiarów rekonesansowych użyć możemy długości kroku lub czasu. Po pewnej praktyce można nabyć znacznej wprawy w chodzeniu z jednostajną chyżością tak, że mierząc za pomocą specjalnego zegarka czas potrzebny do przebycia pewnej drogi, obliczymy jej długość z równania $s = c \cdot t$, gdzie c jest chyżością, t czasem, s drogą. Błąd wynosić może około 5%. Sposób ten przy użyciu kieszonkowej busoli do oznaczania kierunków na szkicu, oddaje wielkie usługi w pustyniach lub w oryentowaniu się.

e. Narzędzia pomocnicze.

Według § 6 mierzymy długości nie uwzględniając nachylenia terenu, czyli mierzymy rzuty tych długości układając łatę poziomo. Do poziomego układania łat używa się często przyrządu przedstawionego na fig. 12.

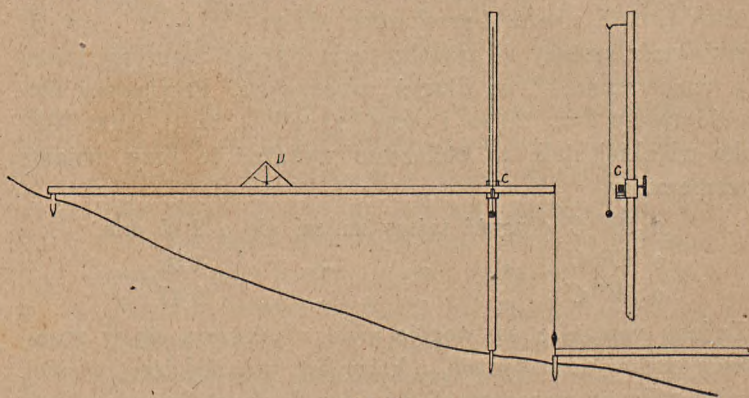


Fig. 12.

Przyrząd ten składa się z łat pionowej z przesuwalnym łożyskiem C dającym się umocować w dowolnej wysokości na łacie pionowej za pomocą śruby lub sprężyny przyciskającej. Łatę mierniczą układa się jednym końcem na paliku wbitym w ziemię, drugim końcem na łożysku C , którego wysokość reguluje się, aż libela lub śródwaga ułożona na łacie wskaże położenie poziome. Ażeby następną łatę ułożyć tak, by czoła obu łat sąsiednich leżały w płaszczyźnie

pionowej, do tego służy pion (fig. 13). Jest to ciężarek zawieszony na cienkim jedwabnym sznurku. Sznurek wypreżony ciężarkiem dotykać powinien czoła obu łąt, lub jak wskazano na fig. 12 ostrze pionu powinno się znaleźć w płaszczyźnie pionowej, stycznej do czoła niższej łąty. Zarazem przy pionowaniu uwzględnić należy grubość sznurka. Wykonanie pionu powinno być dokładne, mianowicie jego ostrze powinno leżeć w linii sznurka.

f. Śródwaga (fig. 14).

Jest to zwykle trójkąt drewniany z zawieszonym u wierzchołka pionem z kulki żelaznej. Na trójkącie umieszczony jest podział kątowy w stopniach, tak urządzony, że gdy podstawa trójkąta spoczywa na płaszczyźnie poziomej, to sznurek pionu wskazuje zero na podziale. Jeżeli podstawa trójkąta tworzy z poziomem kąt α , to pion wskazuje taki sam kąt na podziale. Kąt odczytać można z dokładnością 10 do 20 minut, co jest zupełnie wystarczające.



Fig. 13.

Celem dokładnego układania łąt w danym kierunku, wyciąga się na terenie sznur długości 50 m, obok którego układa się łąty.

Przy pomiarze taśmą stalową, układa się ją w poziomie zwykle od oka, w czem nabywa się wkrótce dostatecznej wprawy.



Fig. 14.

Ponieważ taśma pod wpływem własnego ciężaru ugina się, przeto w paru punktach pośrednich należy ją rękami podtrzymać. Koniec taśmy odpionowuje się na teren i w punkcie tym wbija się szpilkę (fig. 15). Jest to drut 30 cm długi, 4 mm gruby, zaostrozony i zaopatrzony na jednym końcu okiem do zawieszenia go na kółku. Do szpilki przykładą się następną taśmę, napina się ją w danym kierunku, przy końcu zabija się w ziemię szpilkę i t. d.

Szpilki służą zarazem do kontroli ilości przyłożonych taśm, bo pomocnikowi idącemu na przodzie, daje się 5 szpilek, a jeżeli taśma ma długości 20 m to po przyłożeniu jej 5 razy zabraknie mu szpilek, które zbiera pomocnik idący za taśmą, a zarazem jest to znakiem, że przemierzono 100 m.

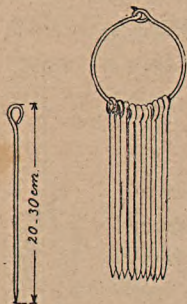


Fig. 15.

Już z powyższych opisów widzimy, ile uwagi trzeba przykładać do zwykłego pomiaru długości. Nietylko że łąty lub taśmy układać należy dokładnie w danym kierunku, gdyż inaczej mierzylibyśmy jakąś linię łamaną, a tem samem wynik pomiaru byłby błędny, ale należy je układać także poziomo, bo wynik byłby znów błędny. Oba zaś błędy razem mogłyby się sumować i pomierzona długość wypadłaby o wiele dłuższą niż jest w rzeczywistości.

Później przy opisie metody pomiaru poznamy jeszcze inne możliwe błędy, tutaj wskazując tylko na wyżej przytoczone, chcemy zwrócić uwagę, że pomiar długości nie jest łatwym i nie należy go lekceważyć, jak się bardzo często trafia u początkujących. Przeciwnie — pomiar długości powinien być zawsze bardzo starannie wykonywany, jest on podstawą wszystkich zdjęć i częstokroć najważniejszą czynnością.

§ 11. Przyrządy do tyczenia kątów o pewnej stałej wielkości (czyli t. zw. węgielnice).

1. Węgielnica zwierciadlana (fig. 16).

Przyrząd ten polega na odbijaniu się promieni świetlnych od zwierciadła, na podstawie znanych praw fizyki, że kąt padania równa się kątowi odbicia i że promień padający, prostopadła padania i promień odbity leżą w jednej płaszczyźnie.

Przypuśćmy, że linia AB i AC na fig. 17, nachylone do siebie pod kątem α , przedstawiają dwa zwierciadła. Pro-

mień wychodzący z punktu P pada na zwierciadło AB w punkcie B , tworząc z prostopadłą padania kąt γ , następnie odbija się od zwierciadła pod tym samym kątem i pada na zwierciadło AC w punkcie C , pod kątem β do prostopadłej padania, na koniec odbija się od zwierciadła AC i wpada do oka umieszczonego w kierunku CQ . Oko widzi zatem obraz punktu P w przedłużeniu prostej QC . Promień padający i odbity tworzą ze sobą kąt φ , który jako kąt zewnętrzny trójkąta BCD równy jest sumie dwu kątów wewnętrznych tegoż trójkąta, jemu nieprzyległych, więc

$$\varphi = 2\gamma + 2\beta = 2(\gamma + \beta) \quad 1)$$

Z trójkąta ABC otrzymujemy:

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ \quad 2)$$

a równocześnie widzimy, że

$$\alpha_1 = 90^\circ - \gamma \text{ i } \alpha_2 = 90^\circ - \beta \quad 3)$$

zatem równ. 2) otrzyma, po wstawieniu wń wartości z równ. 3), kształt następujący:

$$\alpha + 90 - \gamma + 90 - \beta = 180^\circ \quad \text{czyli}$$

$$\alpha = \beta + \gamma \text{ lub } 2\alpha = 2(\beta + \gamma) \quad 4)$$

Porównawszy równ. 1) z 4) dostaniemy

$$\varphi = 2\alpha \quad 5) \text{ t. z. kąt jaki tworzy promień}$$

padający na pierwsze zwierciadło z promieniem odbitym od drugiego zwierciadła, jest dwa razy większy od kąta nachylenia obu zwierciadeł. Jeżeli więc $\alpha = 45^\circ$ to $\varphi = 90^\circ$ lub gdy $\alpha = 30^\circ$ to $\varphi = 60^\circ$ i t. p., czyli, za pomocą przyrządu z dwoma nachylonemi do siebie zwierciadłami, możemy wytyczać pewne stałe kąty.

Zwierciadła umieszczone są w stosownej oprawie uwi-docznionej na fig. 16. Nad obu zwierciadłami znajdują się wolne otwory, przez które widzieć można stojącą w polu tyczkę, a równocześnie widzi się obraz drugiej tyczki w zwierciadle.

Tyczenie kąta odbywa się w następujący sposób: Za pomocą dwu tyczek M i N (fig. 18) wyznaczony jest w polu



Fig. 16.



Fig. 17.

kierunek prostej MN , prócz tego dany jest na tejże prostej punkt A , jako wierzchołek wytyczyć się mającego kąta prostego. Ustawiamy węgielnicę nad punktem A w ten sposób, ażeby pion zawieszony u węgielnicy, znajdował się nad wierzchołkiem A , lub, gdy węgielnica urządzona jest do nasadzania na drążek, to wbijamy go w wierzchołku, pionowo w ziemię. Następnie posyłamy pomocnika z tyczką w kierunku mniej więcej prostopadłym do linii MN , n. p. do punktu P . Promienie wychodzące z punktu P , odbijają się od zwierciadła I , padają na II i odbiwszy się od niego, dochodzą do oka tak, że w zwierciadle II widzimy obraz tyczki P , a równocześnie przez otwór nad zwierciadłem widzimy tyczkę N . Jeżeli obraz tyczki P , znajduje się na lewo lub prawo od widzialnej przez otwór tyczki N , to dajemy znak pomocnikowi, który powoli posuwa tyczkę w linii poprzecznej CD , wskutek czego posuwa się i obraz

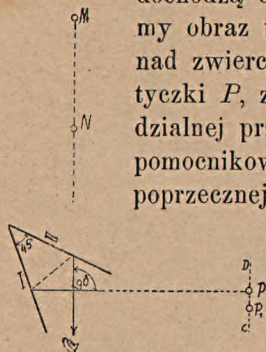


Fig. 18.

P_1 w zwierciadle II . W chwili, gdy obraz P_1 znajdzie się dokładnie w linii NM tak, że wydaje się przedłużeniem tyczki N , dajemy znak pomocnikowi, który natychmiast wbija swoją tyczkę w ziemię.

Jeżeli oba zwierciadła były nachylone do siebie pod kątem 45° , to kierunki AN i AP tworzą kąt prosty, czyli są prostopadłe do siebie.

Ponieważ, jak widocznem jest z fig. 17, punkt D nie jest stałym, lecz położenie jego zależy od położenia punktów B i C , a z drugiej strony nie mamy sposobu oznaczenia położenia tego punktu w przyrządzie, lecz przyjmujemy go stałe w pewnym punkcie, mianowicie w tym punkcie, pod którym zawieszony jest pion, więc tem samem, wskutek konstrukcyi przyrządu popełniamy błąd, mianowicie nie tyjemy prostopadłej ściśle w punkcie A (fig. 19), lecz w punkcie innym, leżącym w pobliżu. Błąd ten, na podstawie doświadczeń obliczony, wynosi 5 do 10 *mm*.

Inną znów niedokładność w tyczeniu popelniamy wskutek tego, że równocześnie patrzeć musimy na obraz tyczki w zwierciadle i tyczkę N , odległą na kilkadziesiąt metrów, wskutek czego oko musi się natężyć a więc i mylić.

Tycząc w tym samym punkcie kąt, raz za pomocą precyzyjnego instrumentu (teodolitu), drugi raz za pomocą węgielnicy, przekonano się, że błąd w kącie tyczonym węgielnicą, wynosi około $\pm 1'$, a stąd wynika, że długich prostopadłych nie powinno się tyczyć węgielnicą, gdyż punkt P (fig. 18) byłby zanadto przesunięty z kierunku rzeczywiście prostopadłego do linii MN .

Przyjmując że błąd w tyczeniu kąta wynosi

1' 2' 5'

to poprzeczne przesunięcie punktu P w odległości 40 m wyniesie 11 mm 23 mm 58 mm

Wogóle dłuższych linii jak 40 metrowych, tyczyć węgielnicą nie należy.

Wyznaczenie wierzchołka kąta.

Mając dany kierunek MN (fig. 19) i punkt P , leżący z boku, możemy za pomocą węgielnicy zwierciadlanej znaleźć wierzchołek „ A ” kąta, a mianowicie:

Jeżeli kąt NAP ma być prostym to użyjemy węgielnicy zwierciadlanej o nachyleniu zwierciadeł pod kątem 45° , lub jednej z węgielnicy opisanych poniżej; jeżeli kąt NAP ma wynosić 60° , to użyjemy węgielnicy o kącie $\alpha = 30^\circ$ podobnie dla innych kątów użyć musimy odpowiednio nachylonych zwierciadeł. W celu odnalezienia wierzchołka, posuwamy się powoli w kierunku MN patrząc przez otwór nad zwierciadłem II tak, by oko widziało zawsze tyczkę N

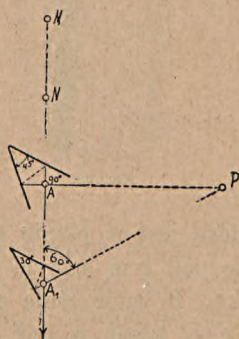


Fig. 19.

kryjącą tyczkę M , a zarazem w zwierciadle II widzimy również przesuwający się obraz tyczki P . W punkcie, w którym obraz tyczki P widziany w zwierciadle wydaje się

przedłużeniem tyczki N , stajemy i opuszczając pion, wyznaczymy na terenie punkt wierzchołkowy A względnie A_1 .

2. Krzyż zwierciadlany (fig. 20).

Przyrząd ten składa się z dwu zwierciadeł w odpowiedniej oprawie, umieszczonych ponad sobą pod kątem prostym.

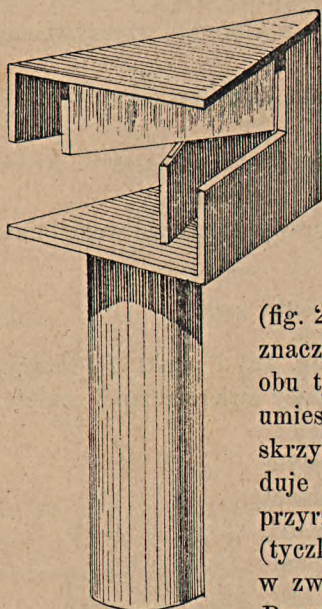


Fig. 20.

Dokładnie w linii pionowej skrzyżowania obu zwierciadeł znajduje się rękojeść z uszkiem, na którym zawieszają się pion. Przyrządu tego używa się do tyczenia kąta 180° czyli do wyznaczania punktów pośrednich na kierunku między dwoma punktami. Przypuśćmy, że dany jest w polu kierunek $A-B$

(fig. 21) za pomocą dwu tyczek, a wyznaczyć mamy punkt pośredni między obu tyczkami. Jeżeli przyrząd jest tak umieszczony, że linia pionowa przez skrzyżowanie zwierciadeł idąca, znajduje się na linii $A-B$, to obracając przyrządem ujrzymy obraz punktu (tyczki) A w linii skrzyżowania E , w zwierciadle I zwróconem ku tyczce. Promień AE pada na zwierciadło I pod $\angle \alpha$ do prostopadłej padania,

którą jest w planie ślad płaszczyzny zwierciadła II , odbija się pod tym samym kątem α w kierunku EA' wpadając do oka. Równocześnie obraz tyczki B znajdzie się w zwierciadle II także w linii skrzyżowania, padając i odbijając się od tego zwierciadła pod kątem β do prostopadłej padania, którą jest w tym wypadku ślad płaszczyzny zwierciadła I . Z rysunku widać, że promień BE odbija się w kierunku EA' czyli że obydwa obrazy w zwierciadłach nawzajem się prze-

dłużają i nie zmieniają swego położenia chociażbyśmy przyrząd obracali w jedną i drugą stronę.

Gdy linia skrzyżowania zwierciadeł nie znajduje się w kierunku AB , to według fig. 22 otrzymamy w każdym zwierciadle obraz odpowiedniej tyczki A' i B' , a posuwając

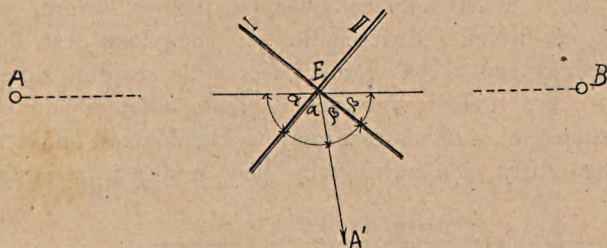


Fig. 21.

się w kierunku poprzecznym względem AB , spostrzeżemy, że obrazy A' i B' zbliżają się do siebie, aż w końcu znajdują się w jednej linii pionowej gdy będzie wypełniony warunek poprzednio w fig. 21 zachodzący. Spuszczając pion zawieszony u przyrządu, wyznaczy się na terenie żądany punkt pośredni.

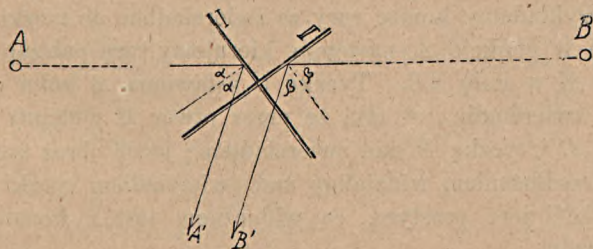


Fig. 22.

Jeżeliby zwierciadła nie były nachylone do siebie pod kątem prostym, to otrzymywalibyśmy rezultaty fałszywe. Najprostszy sposób sprawdzenia węgielnicy polega na tem, że wytyczamy trzy punkty leżące w jednym kierunku i ustawimy węgielnicę na punkcie środkowym; jeżeli obrazy obu tyczek na końcowych punktach ustawionych nie przedłużają się czyli nie znajdują się w linii pionowej, natenczas odpowiednimi śrubkami należy poprawić nachylenie zwierciadeł.

3. Węgielnica zwierciadlana rurowa (fig. 23).

Składa się z rury zamkniętej na jednym końcu denkiem, w środku którego znajduje się mały, okrągły otworek „M”. Drugi koniec rury jest otwarty. Przy tym końcu utwierdzone jest w rurze zwierciadło zakrywające połowę otworu, druga połowa jest wolna. Zwierciadło „z” nachylone jest do osi rury pod kątem 45° , a wprost zwierciadła znajduje się otwór boczny „N”. Celem wytyczenia prostopadłej w punkcie A do prostopadłej AB, umieszczamy węgielnicę nad punktem A, do czego służy pion zawieszony pod środkiem zwierciadła,

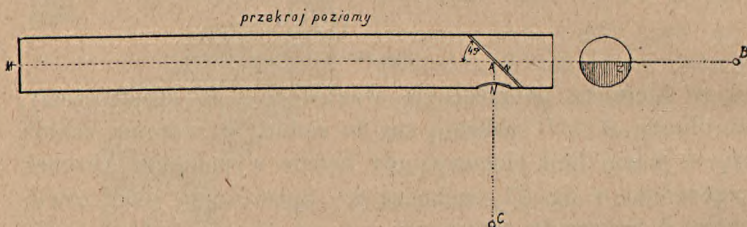


Fig. 23.

lub przykładamy koniec rury ze zwierciadłem do tyczki ustawionej w punkcie A, następnie kierujemy rurę patrząc przez otwór M w linię AB. Tyczka C ustawiona z boku odbije się w zwierciadło „z” tak, że przez otwór M widzimy obraz tyczki C i tyczkę B nad zwierciadłem; jeżeli obraz tyczki C jest przedłużeniem widzialnej nad zwierciadłem tyczki B, to kąt BAC jest prostym, co widocznem jest z konstrukcyi przyrządu.

4. Węgielnica pryzmatyczna (fig. 24).

Fig. 24 przedstawia pojedynczą węgielnicę pryzmatyczną, złożoną ze szklanego pryzmatu t. j. graniastoslupa o przekroju poprzecznym w kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego, w odpowiedniej metalowej oprawie, w której ze spodu wkrębowana jest rękojeść z haczykiem do zawieszenia pionu. Ściana pryzmatu znajdująca się naprzeciw kąta prostego jest zwierciadłem.

Działanie pryzmatu polega na załamaniu i odbiciu promieni. Z fizyki wiadomo, że promień światła przechodząc z powietrza w szkło czyli w środek gęstszy, załamuje się ku prostopadłej padania.

Prom. AB (fig. 25a) pada na przyprostokątnię CC , w punkcie B , pod kątem α do prostopadłej na ścianę, wchodzi do pryzmatu załamując się ku prostopadłej, zatem pod kątem β mniejszym niż α , następnie odbija się w punkcie D od przeciwprostokątnej jako od zwierciadła, pada na drugą przyprostokątnię w punkcie F tworząc z prostopadłą do ściany kąt δ , wychodzi z pryzmatu załamując się od prostopadłej t. j. wychodzi z pryzmatu pod kątem ε .

Z trójkąta BCD otrzymamy:

$$45^\circ + (90^\circ + \beta) + \gamma = 180^\circ \quad 1)$$

podobnie z DEF

$$45^\circ + (90^\circ + \delta) + \gamma = 180^\circ \quad 2)$$



Fig. 24.

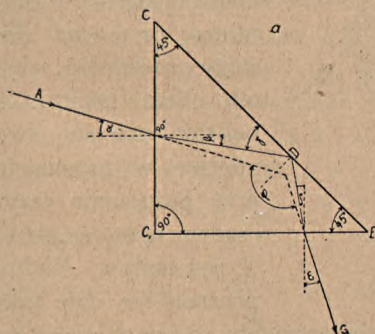


Fig. 25 a.

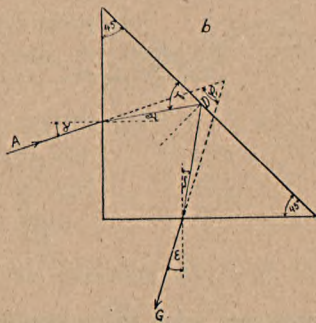


Fig. 25 b.

czyli

$$45^\circ + 90^\circ + \beta + \gamma = 45^\circ + 90^\circ + \delta + \gamma \quad 3)$$

stąd

$$\beta = \delta \quad 4)$$

Nazwijmy współczynnik załamania literą n

$$\text{to } \sin \alpha = n \cdot \sin \beta = \sin \varepsilon = n \sin \delta \quad 5)$$

a ponieważ $\beta = \delta$ więc oba równania możemy napisać w postaci:

$$\sin \alpha = n \cdot \sin \beta$$

$$\sin \varepsilon = n \cdot \sin \delta$$

czyli

$$\alpha = \varepsilon \quad 6)$$

Zarazem z rysunku widzimy, że kąt φ jaki tworzy promień wchodzący do pryzmatu AB z promieniem FG wychodzącym z pryzmatu równy jest $90^\circ + \alpha + \varepsilon$

czyli

$$\varphi = 90 + 2 \alpha \quad 7)$$

Z następnej figury 25b. widocznem jest, że jeżeli promień AB pada z przeciwnej strony prostopadłej padania niż w wypadku poprzednim, to kąt

$$\varphi_1 = 90^\circ - 2 \alpha \quad 8)$$

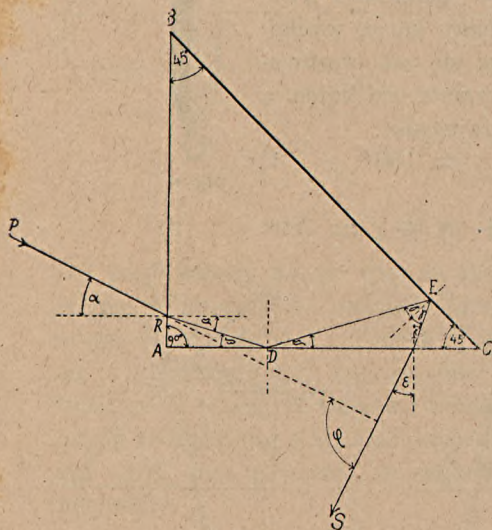


Fig. 26.

Zmianę kąta α wywołamy przez poruszanie w tę i ową stronę pryzmatem, a ponieważ zmiana kąta α wywołuje zmianę kąta φ , zaś oko widzi obraz przedmiotu w kierunku ostatniego promienia dostającego się doń, więc też obraz punktu A będzie zmieniał swe miejsce w pryzmacie przy poruszaniu przyrządem, mimo, że punkt A jest stałym. Nadto, pryzmat nie daje kąta

prostego, więc takie urządzenie pryzmatu nie przydałoby się na nic. Dopiero Bauerfeind wskazał w r. 1851 taki sposób użycia pryzmatu, że obraz pozostanie stałym mimo obracania pryzmatem w tę i ową stronę, jeżeli tylko punkt, którego obraz widzimy w pryzmacie jest stałym, a nadto kąt φ będzie prostym. Niech trójkąt BAC przedstawia na fig. 26 przekrój pryzmatu, a linia PR niech przedstawia promień

padający blisko krawędzi A pod kątem α do prostopadłej padania. Promień ten wchodząc do pryzmatu załamie się, czyli utworzy z prostopadłą padania kąt β i pod tymże kątem β pada na drugą przyprostokątnię AC w punkcie D . Współczynnik załamania n jest dla dwóch materiałów stały, czyli $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ lub $\sin \alpha = n \cdot \sin \beta$ — z drugiej zaś strony wiemy, że $\text{maxim. } \sin \alpha = 1$ czyli $\text{maxim. } \sin \alpha = n \cdot \sin \beta = 1$ więc $\sin \beta = \frac{1}{n}$ 9)

Równanie 9) określa granicę dla kąta β t. j. granicę załamania się promienia; gdyby $\sin \beta$ było mniejsze niż $\frac{1}{n}$ to załamania wcaleby nie było i promień odbiłby się od płaszczyzny AC rozdzielającej oba materiały jak od zwierciadła, nie wychodząc z pryzmatu. Na tej własności polega zastosowanie pryzmatu, mianowicie promień RD odbija się w punkcie D wewnątrz pryzmatu, pada na przeciwprostokątnię w punkcie E , odbije się od niej jak od zwierciadła, przychodzi do punktu F w pobliżu krawędzi C , wychodzi z pryzmatu załamując się w kierunku FS i tworząc z kierunkiem PR kąt φ . — Z trójkąta EFC otrzymujemy

$$(90^\circ - \gamma) + (90^\circ - \delta) + 45^\circ = 180^\circ \quad 10)$$

z trójkąta DEC otrzymujemy

$$\beta + (90^\circ + \gamma) + 45^\circ = 180^\circ \quad 11)$$

z równ. 10) wynika, że $\gamma + \delta = 45^\circ$ 12)

a " 11) " " $\gamma + \beta = 45^\circ$ 13)

zatem $\gamma + \delta = \gamma + \beta$ czyli $\delta = \beta$ 14)

ponieważ $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$, a zarazem musi być dla tych samych materiałów $\frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = \frac{1}{n}$ więc $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta} = n$ 15)

skąd zaś wynika, że $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta}$ 16)

a uwzględniając równ. 14) otrzymamy, że

$$\sin \alpha = \sin \varepsilon \text{ czyli } \alpha = \varepsilon \quad 17)$$

a stąd już łatwo wywnioskować, że $\varphi = 90^\circ$ 18)

Na podstawie powyższego rozważania wynika, że przy tyczeniu prostopadłej za pomocą pryzmatu, należy przyrząd tak ustawić, ażeby promień od tyczki wychodzący, padał blisko krawędzi *A*, zaś oko umieścić blisko drugiej krawędzi *C*. Czy pryzmat jest dobrze ustawiony przekonamy się, wykonując nim małe obroty i patrząc czy wtedy obraz w nim utworzony pozostaje zawsze w tem samym miejscu. Jeżeli ten warunek zachodzi, to promienie padające i wychodzące z pryzmatu tworzą kąt prosty, a patrząc równocześnie przez otwór nad pryzmatem, na tyczkę ustawioną przed nami, jeżeli równocześnie pryzmat znajduje się nad punktem, w którym prostopadłą mamy wytyczyć, widzimy, czy obraz w pryzmacie jest przedłużeniem widzianej tyczki, czy nie. W pierwszym wypadku tyczka *P* jest ustawioną w żądanym kierunku, w drugim trzeba ją przesunąć.

5. Krzyż pryzmatyczny czyli pryzmat Bauerfeinda (fig. 27).

Służy on, podobnie jak węgielnica krzyżowa zwierciadlana, do tyczenia punktów pośrednich linii prostej. Składa się z dwóch pojedynczych pryzmatów ustawionych na sobie w ten sposób, że ściany przeciwprostokątne tworzą kąt 90° .



Fig. 27.

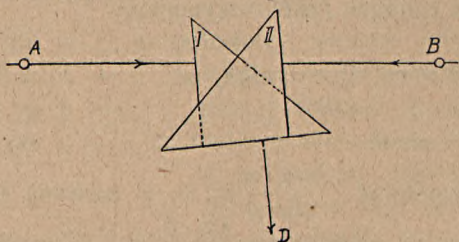


Fig. 28.

Jeżeli pryzmat znajduje się na prostej między punktami *A* i *B* (fig. 28), to obrazy obu tyczek w pryzmatkach

I i *II* utworzą się nad sobą, przedłużając się wzajemnie. Chcąc przeto znaleźć punkt pośredni na prostej, posuwa się

powoli z pryzmatem w kierunku poprzecznym do prostej AB aż oba obrazy znajdą się w jednej pionowej, czyli, jak na rysunku 28, na wspólnym promieniu D wychodzącym z pryzmatów. Pion zawieszony u pryzmatu wyznacza wtedy żądany punkt na terenie.

Pryzmat krzyżowy da się poprawić o tyle, że w razie złego ustawienia płaszczyzn przeciwprostokątnych względem siebie, można je zrektyfikować, przesuwając pryzmaty za pomocą przytrzymujących je śrubek. Sprawdzenie pryzmatu skutecznie najwygodniej w ten sposób, że wytycza się trzy punkty leżące na prostej, następnie umieszczając pryzmat nad punktem pośrednim, patrzymy, czy obrazy w pryzmatkach leżą w jednej pionowej — w przeciwnym razie należy położenie pryzmatów względem siebie poprawić.

Pojedynczy pryzmat powinien wyjść z fabryki dobrym, bo później poprawić się nie da.

6. Węgielnica bębenkowa (fig. 29).

Jest to zazwyczaj graniastosłup ośmioboczny, wewnątrz pusty, zaopatrzony u dołu w tulejkę do umocowania na krótkiej tyczce lub statywie czopowym.

W ścianach bocznych znajdują się podłużne otwory, a mianowicie: otwór wążutki zwany okularzem i naprzeciw niego otwór szerszy, zwany obiektywem, w którym wyciągnięty jest pionowo włos. Okular i włos obiektywu wyznaczają kierunek jednej linii, a równocześnie dwa takie same otwory w innych ścianach, wyznaczają drugą linię, do poprzedniej prostopadłą. Jeżeliby we wszystkich ścianach znajdowały się takie otwory, to prócz kątów prostych, możnaby tyczyć także kąty 45° . Otwory są zazwyczaj podwójne, t. j. nad okularzem urządzony jest obiektyw i odwrotnie, wskutek czego można tyczyć linie w obie strony.

Mając wytyczyć w punkcie A (fig. 30) prostopadłą do kierunku AB , ustawiamy węgielnicę w wierzchołku A , nastę-



Fig. 29.

pnie zwracamy ją w danym kierunku, t. j. obracamy, patrząc przez okular, dopóki włos obiektywu nie padnie na środek



Fig. 30.

tyczki w *B* ustawionej. Po ustawieniu węgielnicy w kierunku *AB*, przechodzimy na przeciwną stronę i patrząc przez okular, kierujemy pomocnika wraz z tyczką dopóty, aż tyczka znajdzie się w linii wyznaczonej przez węgielnicę, t. j. w punkcie *C*.

Węgielnica opatrzona jest tulejką (fig. 29) do nasadzania jej na drążek. Ustawianie węgielnicy w wierchołku odbywa się w ten sposób, że drążek, na którym osadzona jest węgielnica wbija się pionowo w ziemię w danym punkcie.

7. Węgielnica krzyżowa (fig. 31).

Składa się ona z dwu drewnianych ramion prostopadle do siebie zestawionych i połączonych. Na skrzyżowaniu obu

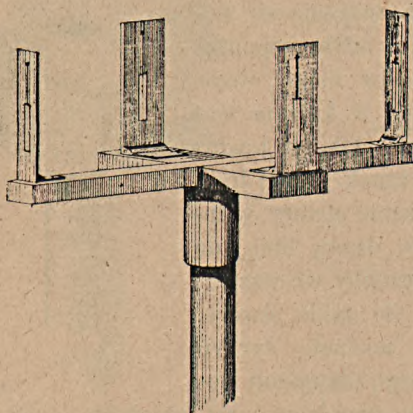


Fig. 31.

ramion, u dołu, znajduje się tulejka służąca do umieszczenia przyrządu na drążku lub statywie. Ramiona opatrzone są na końcach mosiężnymi blaszkami, prostopadle do płaszczyzny ramion przytwierdzone.

W blaszkach tych wyrobione są podłużne otwory, t. z. okulary i obiektywy zupełnie w ten sam sposób, jak u węgielnicy bębnekowej (fig. 29). Sposób tyczenia nie różni się niczem od opisanego pod 6.

§ 12. Sprawdzenie i rektyfikacja węgielnic.

Chcąc sprawdzić czy węgielnica jest dobrą, t. j. czy za pomocą niej wytyczyć się da rzeczywiście taki kąt, do jakiego została sporządzoną, postępujemy w następujący sposób:

Przypuśćmy, że węgielnica jest sporządzoną do tyczenia kątów prostych; wytyczmy prostą $A B C$ (fig. 32) za pomocą trzech tyczek w odległości około 50 m jedna od drugiej, ustawmy węgielnicę na punkcie środkowym B , wytyczmy nią rzekomy kąt prosty $A B D$, a następnie od linii $B D$ drugi raz kąt prosty $D B E$. Jeżeli węgielnica jest dobrą, to punkt E powinien paść na punkt C , bo linia $A B C$ stanowi kąt 180° , więc przez dwukrotne wytycze-

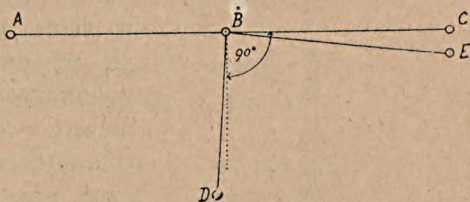


Fig. 32.

nie kąta prostego, powinniśmy również otrzymać kąt 180° . W naszym przykładzie widocznem jest, że węgielnica daje kąt mniejszy niż 90° , mianowicie kąt zamaly o $\frac{\angle C B E}{2}$

o ten kąt należy konstrukcyę węgielnicy poprawić. Niektóre węgielnice n. p. zwierciadlane i bębenkowe dadzą się poprawić przez stosowne, odpowiedniami śrubkami, nachylenie zwierciadeł, lub przesunięcie włosa w obiektywie. Inne, n. p. pryzmatyczna poprawić się nie da. Jeżeli węgielnica jest urządzona do tyczenia kąta 45° , to sprawdzimy ją przez czterokrotne wytyczenie kąta, lub dla 60° przez trzykrotne wytyczenie i sprawdzenie z wytyczonym kątem 180° .

§ 13. Tyczenie linii prostych.

Wyobraźmy sobie w dwóch punktach nad powierzchnią ziemi zawieszone piony i przesunmy przez nie płaszczyznę,

to przetnie ona powierzchnię ziemi w jakiejś linii falistej, której kształt zależy od konfiguracji terenu. Rzut tego przekroju terenu płaszczyzną pionową na poziom pozorny jest linią prostą, więc pod „tyczeniem linii prostej“ rozumiemy wytyczenie śladu płaszczyzny pionowej na terenie, nie uwzględniając tego, że ślad ten nie jest linią prostą, bo

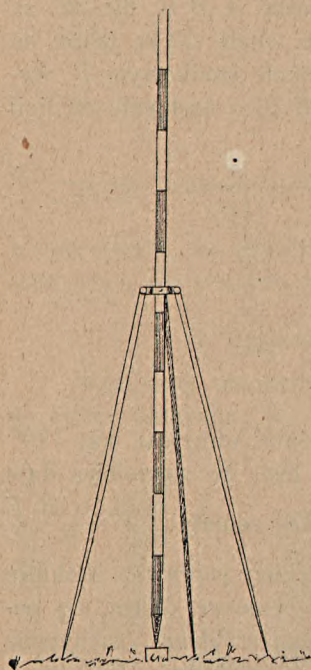


Fig. 33.

jak już powiedzieliśmy, może on być mniej lub więcej falisty, zależnie od kształtu powierzchni ziemi, zawsze jednak rzut jego na poziom pozorny będzie linią prostą. Do wyznaczenia płaszczyzny wystarczają dwie proste równoległe lub przecinające się, w naszym wypadku dwa piony, a ponieważ w danym punkcie terenu tylko jeden pion można wyznaczyć, więc do wyznaczenia takiej płaszczyzny wystarczą dwa punkty terenu. Do uwidocznienia tych punktów, względnie ich pionów, służą tyczki miernicze opisane w § 9. Tyczkę ustawia się w danym punkcie wbijając ją w ziemię ostrzem, następnie reguluje się jej położenie za pomocą pionu w ten sposób, że oddalwszy się parę kroków od tyczki i trzymając w wyciągniętej ręce pion, porównujemy,

czy sznurek pionu jest równoległy do tyczki z jednej i drugiej jej strony. Jeżeli tyczka nie da się wbić w ziemię n. p. na bruku, twardej drodze, lub też w punkcie oznaczonym palem lub kamieniem, to do ustawienia tyczki używa się statywu przedstawionego na fig. 33.

Jeżeli na prostej AB (fig. 34) wyznaczonej przez dwie tyczki A i B mamy wyznaczyć jeden lub kilka punktów pośrednich, to postępujemy w następujący sposób:

Tyczący ustawia się w punkcie O parę kroków przed tyczką A tak, by patrząc w kierunku AB miał tyczkę B zupełnie zakrytą tyczką A . Teraz kieruje pomocnika poruszającego się z tyczką C w kierunku poprzecznym do AB , aż tyczka C skryje się za tyczką A , t. z. patrząc wzdłuż płaszczyzny $a'b'$ stycznej do obu tyczek A i B , widzimy, że tyczka C nie występuje przed płaszczyznę, podobnie patrząc wzdłuż $a''b''$ widzimy, że tyczka C także nie występuje, więc, gdy wszystkie tyczki są równo grube, to ich osie geometryczne znajdować się muszą w jednej płaszczyźnie. W ten sposób wytyczyć można dowolną ilość punktów linii na długości do 300 m, a nawet i większej, jeżeli uzbroimy się w lunetę polową.

Podobnie, mając dane punkta A i C , wytyczymy w sposób opisany powyżej punkt B , lub dalsze punkta, czyli przedłużymy prostą.

Różne wypadki tyczenia prostych, równoległych, prostopadłych i t. p. omówimy w podanych w następnym paragrafie przykładach, przypuściwszy na razie, że umiemy już mierzyć długości.

§ 14. Zagadnienia.

1. Przez dany punkt C (fig. 35) wytyczyć prostą, równoległą do prostej AB .

a) Jeżeli odległość punktu C od prostej AB nie przenosi 40 do 50 m — to rozwiązanie zadania jest łatwe a mianowicie:

Za pomocą jakiegokolwiek węgielnicy znajdziemy punkt D jako rzut punktu C na prostą AB , czyli wierzchołek kąta prostego CDB — zmierzmy długość CD , następnie wytyczymy za pomocą tej samej węgielnicy prostopadłą w punkcie B ,

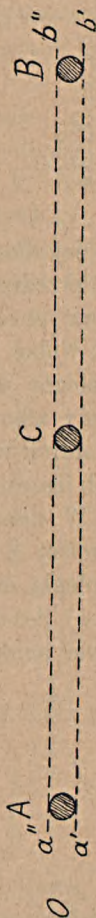


Fig. 34.

odmierzymy na niej długość $BE = DC$ — a teraz prosta CE jest równoległą do AB — w razie potrzeby możemy ją przedłużyć i wytyczyć dowolną ilość punktów pośrednich.

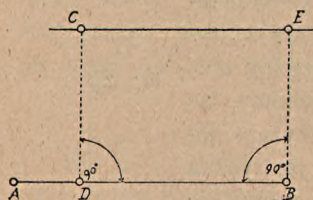


Fig. 35.

lowie jej długości i tak samo punkt E połowiący długość AD , przedłużmy prostą EF i odmierzymy na niej długość $EG = AC$, to, jak już z rysunku widać, prosta CG musi być równoległą do AB . Linie CG możemy albo przedłużyć, albo też dla kontroli wyznaczyć w ten sam sposób jeszcze punkt H lub więcej.

2. W danej odległości „ l ” od od prostej AB wytyczyć prostą równoległą do AB .

a) Jeżeli odległość jest nie wielka, to wytyczymy w dowolnym punkcie n. p. D (fig. 35) prostopadłą $CD = l$ — podobnie w punkcie B prostopadłą $BE = l$ — natenczas prosta CE jest równoległą do AB w żądanej odległości od niej.

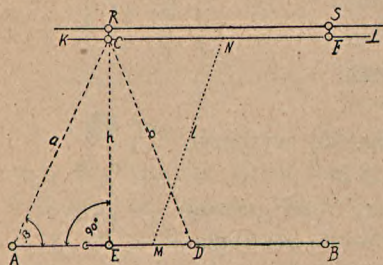


Fig. 37.

kładnie za pomocą tyczek i taśmy.

Wytyczmy sposobem opisanym pod 1. b) prostą KL (fig. 37) w odległości mniej więcej równej żądanej „ l ” —

b) Jeżeli odległość punktu C jest zbyt wielka by użyć można węgielnicy, to zadanie rozwiążemy w sposób następujący (fig. 36):

Obierzmy na prostej AB punkt D , zmierzmy odległości AC , CD i AD , wyznaczmy następnie na prostej CD punkt F leżący w po-

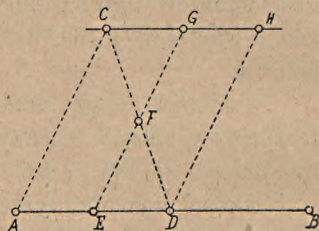


Fig. 36.

a to w ten sposób, że wytyczymy od oka prostopadłą MN (zatem w przybliżeniu prostopadłą), odmierzymy na niej długość $MN = l$ i przez punkt N wytyczymy ściśle równoległą LK do AB .

Ponieważ prostopadłą MN wytyczyliśmy tylko w przybliżeniu, więc z pewnością odległość obu równoległych będzie mniejszą od żądanej.

Należałoby teraz znaleźć dokładną odległość „ h ” obu linii, a następnie prostą LK przesunąć o pewną długość RC t. j. o różnicę $l - h$. W celu obliczenia odległości h , obierzmy punkt C na linii KL i punkt D na AB , wytyczmy boki AC i CD trójkąta ACD i pomierzmy je, przyjawszy że $AC = a$, $CD = b$ i $AD = c$. Mając długości boków, obliczymy na podstawie znanych wzorów trygonometrycznych

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \\ \cos \frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \\ \text{gdzie } s &= \frac{a+b+c}{2} \end{aligned} \right\} 1)$$

teraz obliczymy

$$\sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \quad 2)$$

$$\text{a stąd } h = a \sin \beta \quad 3)$$

Dla kontroli obliczymy jeszcze:

$$\left. \begin{aligned} AE &= a \cos \beta \\ \text{gdzie } \cos \beta &= \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2} \end{aligned} \right\} 4)$$

odetniemy długość AE i zmierzmy prostą EC , której długość powinna się zgodzić z obliczoną równaniem trzecim.

Teraz przesuniemy prostą KL o różnicę $l - h$ w ten sposób, że za pomocą węgielnicy wytyczymy prostopadłe do prostej KL w punktach n. p. C i F , odetniemy na nich poprawkę $l - h$ i wytyczymy prostą $R - S$, która już będzie miała żadaną odległość l od prostej AB .

3. Wytyczyć przez punkt C prostą, równoległą do prostej AB , bez użycia węgla, jedynie za pomocą tyczek i taśmy.

a) Obierzmy dowolny punkt D (fig. 38), wytyczmy prostą DC i drugą dowolną prostą w kierunku DG . Wy-

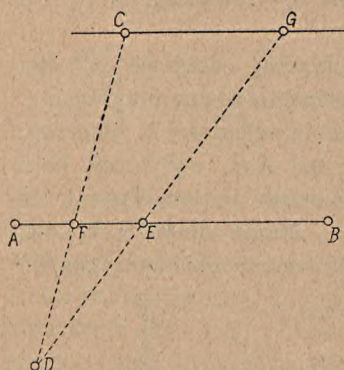


Fig. 38.

szukajmy punkta przecięcia F i E , prostych DC i DG z linią AB (według zagadnienia 4.) i zmierzmy długości DC , DF , DE . Prosta CG ma być równoległą do AB , więc trójkąty FDE i CDG muszą być podobne — stąd ułożyc możemy proporcję

$$DC : DF = DG : DE$$

a z niej obliczymy

$$DG = \frac{DC \cdot DE}{DF}$$

i tę długość odmierzymy na kierunku DG , a teraz prosta CG przedłużona i wytyczona musi być równoległą do AB .

b) Drugie rozwiązanie (fig. 39):

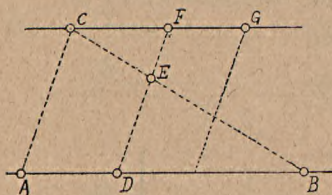


Fig. 39.

Wytyczmy i zmierzmy długość AC i długość BC , tudzież AB , obierzmy punkt D na linii AB i zmierzmy odcinek BD . Na podstawie fig. 39 ułożyć możemy proporcję

$$AB : BD = BC : BE$$

z dwóch podobnych trójkątów

$$ABC \text{ i } DBE, \text{ z proporcji obliczymy } BE = \frac{BD \cdot BC}{AB}$$

i długość BE odetniemy od punktu B na prostej BC , połączwszy punkta D i E otrzymamy kierunek DE równoległy do AC , jeżeli teraz na tym kierunku odetniemy $DE = AC$ to otrzymamy punkt F , który połączony z punktem C wyznacza prostą CF równoległą do AB — dla kontroli, jeżeli

proste te są znacznie od siebie odległe, możemy w ten sam sposób wytyczyć trzeci punkt G i przekonać się czy punkty CFG leżą na jednej linii prostej.

c) Trzeci sposób rozwiązania (fig. 40):

Wytyczmy prostą BC , obierzmy na niej punkt D i wytyczmy kierunek AD przedłużając go poza punkt D . Jeżeli prosta CX ma być równoległa do AB , to trójkąty ADB i CDF muszą być podobne, zatem zmierzwszy długości boków AD , BD i CD , ułożymy proporcję $AD : BD = DF : CD$, i obliczymy nie wiadomą długość

$$DF = \frac{AD \cdot CD}{BD}$$

Fig. 40.

którą odmierzymy na kierunku AF od punktu D do F ; wytyczmy teraz prostą CF , mamy zadanie ukończone.

4. Wyznaczyć w polu punkt przecięcia dwu prostych AB i CD (fig. 41).

a) Wytyczmy za pomocą tyczek dwa punkty E i F na prostej AB , leżące w pobliżu spodziewanego przecięcia się obu prostych co można łatwo na oko ocenić. W punktach E i F wbijemy dwie szpilki od taśmy, i tak samo wytyczmy punkty G i H na prostej CD . Przeciagnawszy następnie przez punkty E i F jeden sznurek, a przez G i H drugi, otrzymamy w punkcie skrzyżowania obu sznurków żądany punkt przecięcia się obu prostych.

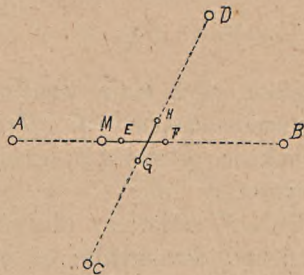


Fig. 41.

b) Drugi sposób (fig. 41):

Ustawmy w punkcie M tyczkę w kierunku AB , natenczas tyczki A i M wyznaczają kierunek, w którym posłany pomocnik z tyczką posuwać się będzie wstecz ku punktowi B .

Ustawivszy się za tyczką C mamy przed sobą kierunek CD , w którym zatrzymamy pomocnika gdy tyczka cofając się w linii AB , znajdzie się równocześnie w kierunku CD .

5. Wytyczyć kilka pośrednich punktów na prostej AB , jeżeli wskutek przeszkód między pkt. A i B celować nie można.

Przypuśćmy, że między punktami A i B znajduje się kilka budynków (fig. 42) wskutek czego z punktu A nie można widzieć tyczki w B ustawionej i odwrotnie, a zadaniem naszym jest wyznaczenie mimo to punktów pośrednich między budynkami. Obierzmy w tym celu dowolny punkt C , z którego oba punkty A i B byłyby widocznymi, tudzież by

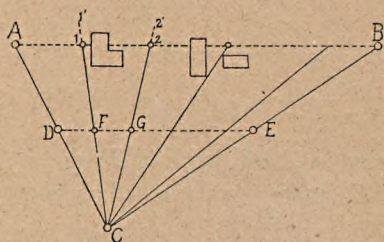


Fig. 42.

proste CA i CB można było wytyczyć i zmierzyć. Zmierzymy teraz obie proste CA i CB i odmierzymy na nich długości $CD = n$. CA i $CE = n$. CB , gdzie współczynnik „ n ” wynosić może $\frac{1}{2}$ lub więcej. Z konstrukcyi widzimy, że trójkąty ACB i DCE są po-

dobne, gdyż mają wspólny kąt przy C i po 2 boki proporcjonalne, zatem AB i DE są równoległe. Ażeby wyznaczyć punkt na prostej AB , leżący równocześnie na kierunku $C-1'$, wytyczmy linię $C-1'$, wyznaczmy następnie punkt przecięcia F , zmierzmy długość CF , to położenie punktu 1 znajdziemy, odmierzając od punktu C , na kierunku $C-1'$ dłu-

gość $C-1 = \frac{1}{n} CF$, podobnie $C-2 = \frac{1}{n} CG$ i t. d.

w ten sposób otrzymać możemy dowolną ilość punktów pośrednich, a przy wytyczaniu ich popełnimy tem mniejszy błąd im większą wartość obierzemy na „ n ”.

6. Wytyczyć pewną ilość punktów prostej idącej przez las, między punktami A i B — jeżeli ani z punktu A nie widać punktu B ani z B punktu A (fig. 43).

Najlepiej zadanie to można rozwiązać używając kompasu, o czem będzie mowa w § 64, lecz i za pomocą tyczek,

taśmy i węgielnicy możemy żądane punkty wytyczyć, choć z większym nakładem pracy i trudu. Przedewszystkiem wytyczymy przybliżony kierunek AB' , kierując się z punktu A ku miejscu B , na głos trąby lub dym rozpalonego w B ogniska, przyczem wypadnie przeciąć w lesie kierunek AB' — następnie znajdziemy punkt B' jako rzut prostopadły punktu B na kierunek AB' za pomocą węgielnicy, zmierzmy długość AB' i BB' . Jeżeli na prostej AB chcemy mieć n. p. n pun-

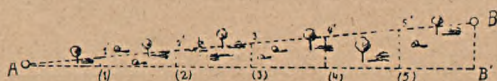


Fig. 43.

któw pośrednich, to zmierzoną długość AB' podzielimy odpowiednio na n równych części, więc

$$A-1 = \frac{AB'}{n}, 1-2 = \frac{AB'}{n} \text{ i t. d.}$$

w punktach 1, 2, 3, ... n -tym wytyczymy za pomocą węgielnicy prostopadłe, i odmierzymy na nich długości

$$1-1' = \frac{BB'}{n}, 2-2' = 2 \cdot \frac{BB'}{n}, 3-3' = 3 \cdot \frac{BB'}{n} \text{ i t. d.}$$

to jak z rysunku widać, punkty $1', 2', 3' \dots$ leżą na prostej $A-B$. W końcu przetniemy las między pojedynczymi



Fig. 44.

punktami, a mając całą linię wolną, możemy dokładnie prostą $A-B$ wytyczyć.

6. Wytyczyć prostą między punktami A i B jeżeli te punkty są nieprzystępne.

Przyjmijmy dowolny punkt b (fig. 44), ustawmy na nim tyczkę i wytyczmy punkt a na kierunku bA . Przejdźmy teraz do tyczki a i nakierujmy pomocnika w linię aB , czyli punkt b przesunijmy do punktu b' . Podobnie z punktu b' celując w kierunek $b'A$, przesunijmy punkt a do a' , na-

stępnie a' do a'' , zaś b' do b'' i t. d., aż w końcu nie będziemy mieli cokolwiek do poprawienia, bo $a''' b''$ i B tudzież $b''' a'''$ i A znajdują się w jednej linii prostej.

7. Wytyczyć prostopadłą do prostej AB w danym punkcie C , za pomocą taśmy (fig. 45).

Koniec taśmy utwierdzimy szpilką w punkcie C , wyciągniemy taśmę w kierunku CB i w punkcie D , na trzecim metrze przytrzymamy ją; następnie przyłożymy i przytrzymamy 12-ty metr w punkcie C , a trzymając taśmę na

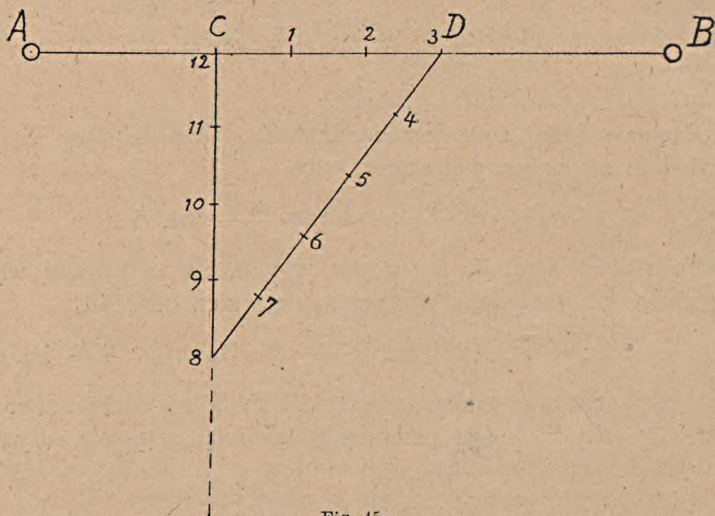


Fig. 45.

ósmym metrze wyciągniemy ją tak, by wszystkie boki trójkąta utworzonego przez taśmę, były dobrze wypreżone. Z figury widocznem jest, że taśma utworzy trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątne: $a = 3\text{ m}$, $b = 4\text{ m}$, a przeciwprostokątna $c = 5\text{ m}$ czyli $a^2 + b^2 = c^2$ t. j. $9 + 16 = 25$. Możemy też za jednostkę przyjąć podwójny metr, czyli

$$\begin{array}{l} a = 6 \quad b = 8 \quad c = 10 \\ \text{lub} \quad a = 9 \quad b = 12 \quad c = 15 \text{ i t. p.} \end{array}$$

zawsze przyprostokątna b tworzy kierunek prostopadły do prostej AB w punkcie C . Sposobu tego używamy do tyczenia prostopadłych niezbyt długich, około 15 m.

8. Z punktu C wytyczyć prostopadłą na kierunek AB za pomocą taśmy i tyczek, czyli znaleźć rzut D punktu C na prostą $A-B$.

a) Na prostej AB (fig. 46) obierzmy dwa punkty E i F leżące po obu stronach punktu C , co można łatwo ocenić okiem. Wytyczmy i zmierzmy boki $EC = a$, $CF = b$ i $EF = m$. Prosta CD na rysunku niech będzie prostopadłą do AB , więc w polu postarać się musimy o wyznaczenie punktu D . Nazwijmy $CD = c$, $ED = d$, $DF = e$, to $d + e = m$. Z trójkątów prostokątnych ECD i FCD otrzymamy: $c^2 = a^2 - d^2$

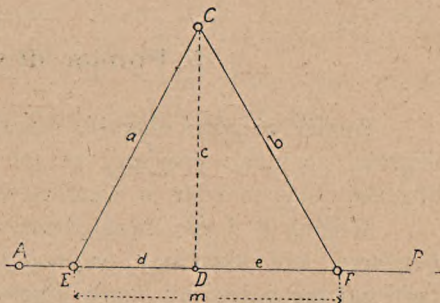


Fig. 46.

i $c^2 = b^2 - e^2$ czyli $a^2 - d^2 = b^2 - e^2$ a ponieważ $e = m - d$ więc $a^2 - d^2 = b^2 - (m - d)^2$ czyli $a^2 - d^2 = b^2 - m^2 + 2md - d^2$ lub $a^2 - b^2 + m^2 = 2md$. d skąd zaś obliczymy

$$d = \frac{a^2 - b^2 + m^2}{2m}$$

a odmierzywszy długość „ d ” od punktu E do D , otrzymamy punkt D jako rzut punktu C na prostą AB .

b) Obierzmy punkty E i F (fig. 47), wytyczmy i zmierzmy długość $CF = a$, $CE = b$, $EF = e$, $DE = d$. Jeżeli $CD = c$ przedstawia na rysunku prostopadłą do AB , to nazwawszy długość $DF = m$ i $d + e = m$, otrzymamy z trójkątów prostokątnych CDE i CDB , następujące równania:

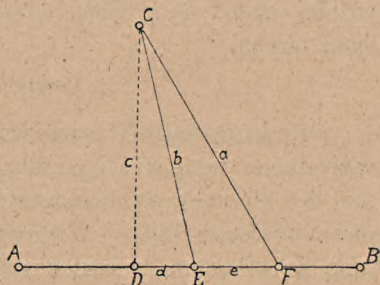


Fig. 47.

$c^2 = b^2 - d^2$, $c^2 = a^2 - m^2$ czyli $b^2 - d^2 = a^2 - m^2$,
 a ponieważ $m = d + e$ więc $b^2 - d^2 = a^2 - d^2 - 2de - e^2$
 skąd $2 \cdot d \cdot e = a^2 - e^2 - b^2$ czyli $d = \frac{a^2 - e^2 - b^2}{2e}$

co posłuży do wyznaczenia punktu D , podobnie jak poprzednio, t. j. przez odmierzenie długości $d = DE$ od punktu E ku D .

§ 15. Pomiar długości.

Pomierzyć jakąś długość, znaczy znaleźć stosunek danej długości do innej, przyjętej za jednostkę. Jako jednostkę długości przyjęto metr, o czem mówiliśmy w § 3.

Według § 6 nie uwzględniamy nachyleń terenu przy pomiarze, lecz układamy przyrządy miernicze w poziomie, czyli zawsze mierzymy rzuty długości. To samo wykonać możemy i w inny sposób, mianowicie mierzyć możemy długość po terenie nachylonym, lecz wynik pomiaru zredukować później trzeba na poziom, mnożąc go przez $\cos$ kąta nachylenia terenu.

1. Pomiar latami.

Przystępując do pomiaru prostej, należy ją przede wszystkim wytyczyć i punkty pośrednie zaznaczyć tyczkami tak, by kierunek był widoczny; w przeciwnym bowiem razie możnaby łatwo zbaczać z danego kierunku i mierzyć jakąś inną linię łamaną, wskutek czego wynik pomiaru byłby zupełnie fałszywy. Mierzac dokładnie, wyciągamy w danym kierunku sznur około 50 m dług. i wzdłuż niego układamyłaty. Po wytyczeniu kierunku przystępujemy do pomiaru, do czego używa się zwykle trzech łat. Pierwszą łatę przykładamy dokładnie płaszczyzną czołową do punktu początkowego, układając ją starannie w danym kierunku poziomo za pomocą środwagi lub libeli, jakśmy to opisali w § 10 lit. e. Po ułożeniu pierwszej łaty, przykładamy do niej drugą tak, by obie stykały się czołami, lub gdy teren jest stromy i druga łata leżeć musi niżej, to za pomocą pionu układa

się ją w ten sposób, by obie płaszczyzny czołowe dwu sąsiednich łąt stykały się z płaszczyzną pionową. Następnie układa się trzecią łątę w ten sam sposób. Po ułożeniu trzech łąt przenosi pomocnik pierwszą łątę, potem drugą i t. d. Łąty powinno się przykładać lekko, by przez uderzanie nie posunąć poprzedniej, należy też zważać, by między ich końce nie dostawał się piasek lub rośliny, wskutek czego powstaćby mogły błędy pomiaru, tudzież na kierunek układania. Pomiar taki jak widzimy jest mozolny i zabiera wiele czasu, jest jednak najdokładniejszy ze wszystkich innych sposobów.

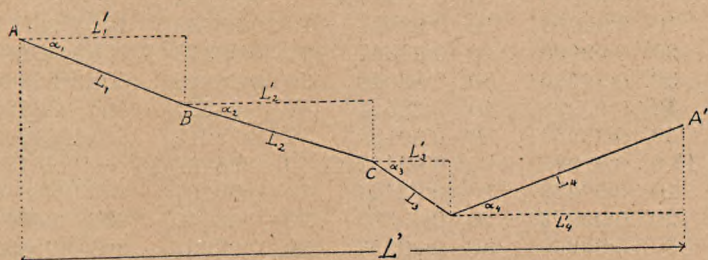


Fig. 48.

Jeżeli teren jest na dłuższych partjach jednostajnie nachylony, to lepiej jest mierzyć wprost po terenie przykładając łąty jedna do drugiej, a pomierzoną w ten sposób długość, zredukować następnie na poziom. W tym celu mierzy się kąt nachylenia terenu za pomocą śródwagi, którą przykładają się do każdej łąty i kąt odczytany zapisuje się w protokół.

Przypuśćmy, że przekrój terenu wzdłuż zmierzyć się mającej prostej AA' (fig. 48) jest linią łamaną $ABCD A'$. Kąty nachylenia pojedynczych części linii do poziomu niech będą $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ a odpowiednie długości mierzone po terenie są: $AB = L_1$ $BC = L_2$ $CD = L_3$ $DA = L_4$. Po zmierzeniu powyższych długości po terenie, tudzież kątów nachylenia za pomocą śródwagi, obliczymy ich rzuty na poziom mnożąc je przez $\cos$ kąta nachylenia, zatem według

figury otrzymamy: $L'_1 = L_1 \cos \alpha_1$ $L'_2 = L_2 \cos \alpha_2$
 $L'_3 = L_3 \cos \alpha_3$ $L'_4 = L_4 \cos \alpha_4$ — w końcu, cała długość
 zredukowana na poziom będzie $L' = L'_1 + L'_2 + L'_3 + L'_4 =$
 $L_1 \cos \alpha_1 + L_2 \cos \alpha_2 + L_3 \cos \alpha_3 + L_4 \cos \alpha_4$.

Za pomocą śródwagi można zmierzyć kąt nachylenia
 łąty do poziomu z zupełnie wystarczającą dokładnością na 10',
 zaś odpowiednie dostawy wyjmują się z tabliczki, jaką po-
 niżej podajemy.

α	$\cos \alpha$	α	$\cos \alpha$	α	$\cos \alpha$	α	$\cos \alpha$
0° 0'	0.00000	5° 0'	0.99619	10° 0'	0.98481	15° 0'	0.96593
10'	0.00000	10'	0.99594	10'	0.98430	10'	0.96517
20'	0.99998	20'	0.99567	20'	0.98378	20'	0.96440
30'	0.99996	30'	0.99540	30'	0.98325	30'	0.96367
40'	0.99993	40'	0.99511	40'	0.98272	40'	0.96285
50'	0.99989	50'	0.99482	50'	0.98218	50'	0.96206
1° 0'	0.99985	6° 0'	0.99452	11° 0'	0.98163	16° 0'	0.96126
10'	0.99979	10'	0.99421	10'	0.98107	10'	0.96046
20'	0.99973	20'	0.99390	20'	0.98050	20'	0.95964
30'	0.99966	30'	0.99357	30'	0.97992	30'	0.95882
40'	0.99958	40'	0.99324	40'	0.97934	40'	0.95799
50'	0.99949	50'	0.99290	50'	0.97875	50'	0.95715
2° 0'	0.99939	7° 0'	0.99255	12° 0'	0.97815	17° 0'	0.95630
10'	0.99929	10'	0.99219	10'	0.97754	10'	0.95545
20'	0.99917	20'	0.99182	20'	0.97692	20'	0.95459
30'	0.99905	30'	0.99145	30'	0.97630	30'	0.95372
40'	0.99892	40'	0.99106	40'	0.97566	40'	0.95284
50'	0.99878	50'	0.99067	50'	0.97502	50'	0.95195
3° 0'	0.99863	8° 0'	0.99027	13° 0'	0.97437	18° 0'	0.95106
10'	0.99847	10'	0.98986	10'	0.97371	10'	0.95015
20'	0.99831	20'	0.98944	20'	0.97304	20'	0.94924
30'	0.99813	30'	0.98902	30'	0.97237	30'	0.94832
40'	0.99795	40'	0.98858	40'	0.97169	40'	0.94740
50'	0.99776	50'	0.98814	50'	0.97100	50'	0.94646
4° 0'	0.99756	9° 0'	0.98769	14° 0'	0.97030	19° 0'	0.94552
10'	0.99736	10'	0.98723	10'	0.96959	10'	0.94457
20'	0.99714	20'	0.98676	20'	0.96887	20'	0.94361
30'	0.99692	30'	0.98629	30'	0.96815	30'	0.94264
40'	0.99669	40'	0.98580	40'	0.96742	40'	0.94167
50'	0.99644	50'	0.98531	50'	0.96667	50'	0.94068
5° 0'	0.99619	10° 0'	0.98481	15° 0'	0.96593	20° 0'	0.93969

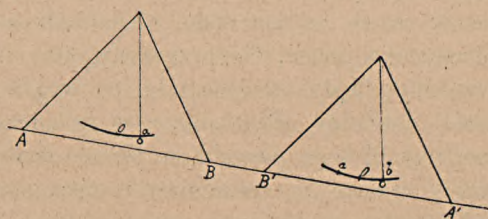
Protokół pomiaru długości.

od punktu	do punktu	ilość lat 30 m dług.	długość uzupełnia- jąca m.	razem m	Kąt nachyl. α	$\cos \alpha$	długość zreduko- wana m
1	2	56	1·563	169·563	4° 10'	0·99736	169·115

Sprawdzenie śródwagi.

Śródwaga używana do pomiaru kąta nachylenia mierzonej długości, powinna być dobrą, t. z. powinna wskazywać 0° 0' 0" gdy ustawimy ją na płaszczyźnie poziomej. W celu sprawdzenia, czy dana śródwaga posiada tę własność, ustawmy ją na

dowolnie nachylonej płaszczyźnie AB i zaznaczmy nachylenie pionu na podziałce w punkcie a (fig. 49 *a*).

Fig. 49 *a*.Fig. 49 *b*.

Następnie obróć-

my śródwagę o 180° tak, by punkt B' przyszedł na miejsce punktu A (fig. 49 *b*), zaś punkt A' na miejsce punktu B — i zaznaczmy znów położenie pionu w punkcie b . Punkty a i b leżeć powinny po przeciwnych stronach i w równej odległości od punktu 0 — w przeciwnym razie należy podziałkę odpowiednio przesunąć.

2. Pomiar taśmą stalową.

Przy pomiarze latami używaliśmy śródwagi lub libeli do układania lat poziomo, jednak przy pewnej wprawie wystarczy najzupełniej, gdy laty układać będziemy poziomo od oka. Tembardziej nie da się użyć ani śródwagi ani libeli

do układania poziomo taśmy stalowej, bo ta, mając długość 10 do 20 *m* ugina się pod własnym ciężarem. W praktyce układamy taśmę poziomo na oko, bez używania przyrządów pomocniczych, na podstawie nabytej wprawy. Pomiar odbywa się w podobny sposób jak opisany poprzednio pomiar łątami, a więc: przykładamy taśmę do punktu początkowego, wyciągamy ją w danym kierunku i wbijamy przy jej końcu szpilkę; następnie przenosi się taśmę dalej, przykładając początek jej do szpilki, wyciąga w danym kierunku i t. d. Jeżeli teren jest stromy, to do pomiaru używamy taśmy 10-cio metrowej, a w środku podpira się ją rękami, ażeby zbyt nie zwisała. Koniec taśmy odpionowuje się dokładnie na teren i w tym punkcie wbija się szpilkę. Taśma stalowa jest dość ciężka, zatem przy swej cienkości a znacznej długości musi się uginać, gdy mierząc, trzymamy jeden jej koniec wyżej, nad terenem. Celem zmniejszenia ugięcia, wyciąga się ją silnie, przyczem zdarzać się muszą szarpnięcia taśmy, a co za tem idzie, niedokładności przyłożenia i odpionowania końca. Te przyczyny, jak i samo ugięcie taśmy wywołują błędy pomiaru tak, że wogóle pomiar taśmą jest mniej dokładny niż łątami, a w terenie stromym nawet niemożliwy. Z tego powodu, w terenie trudnym, stromym, używamy zawsze łąt; natomiast w terenie płaskim, lub lekko, jednostajnie nachylonym, pomiar taśmą prawie nie ustępuje w dokładności łątom, a przewyższa go oszczędnością czasu, czyli szybkością. Nachylenie terenu należy oznaczyć pobieżną niwelacją.

Każdy pomiar wykonuje się przynajmniej dwa razy, ażeby uniknąć błędu grubego wskutek opuszczenia jednej lub kilku łąt lub taśm. Jeżeli oba pomiary zgadzają się dostatecznie, t. z. że różnica dwu pomiarów tej samej długości nie przekracza dozwolonej granicy, o czem mówić będziemy później, to średnią arytmetyczną obliczoną z obu pomiarów, przyjmujemy za rzeczywistą wartość danej długości.

Mierzy się zawsze od punktu początkowego do końcowego, następnie z powrotem w odwrotnym kierunku.

§ 16. Wyrównanie błędów pomiaru.

Każdy pomiar, czy to kąta, czy długości lub wysokości nazywamy spostrzeżeniem. W praktyce nie możemy wykonywać pomiarów w tak idealnych warunkach jakich teoria wymaga lub przypuszcza, lecz zależni jesteśmy od rozlicznych wpływów nie dających się ściśle ani ująć w rachunek, ani uwzględnić. N. p. refrakcja promieni zależną jest od stanu powietrza, który co chwila zmieniać się może, lub też n. p. za pomocą bardzo nawet dobrej i czulej libeli nie potrafimy osi celowej lunety ułożyć ściśle w poziomie, lecz wskutek tarcia płynu o ściany, zawierać ona będzie w stanie spoczynku, pewien kąt z poziomem.

Mimo największej staranności, nie ułożymy łat idealnie w danym kierunku, lecz wogóle w linii łamanej, a tem samem wynik pomiaru powinien wypaść za wielki, naturalnie o ile tylko ten jeden błąd wchodziłby w grę. Wprost przeciwnie wpłynie na wynik pomiaru niedokładne przykładanie łat do siebie. Wskutek bowiem pewnych odstępów między łatami, jakie powstać mogą w ten sposób, że między obie łaty dostanie się ziarnko piasku lub proch, zmierzmy daną długość błędnie, mianowicie pomiar okaże się za mały. Błędy takie wywołane wpływami zewnętrznymi, od nas niezależnymi, nazywamy błędami nieregularnymi. Mogą one razem się zdarzać i po części się znosić, lub też sumować, n. p. przez sumowanie błędu w poziomem układaniu łat i równoczesnym błędzie wskutek niedokładnego układania łat w danym kierunku, otrzymamy pomiar za długi; mogą też znosić się po części, jak n. p. niedokładne przykładanie łat do siebie, zniosłoby po części poprzedni błąd. Prócz tych błędów, powstać jeszcze mogą t. z. błędy grube, n. p. opuszczenie jednej lub kilku łat w rachunku, zły odczyt na taśmie lub przy pomiarze kąta i t. p. Takie błędy są łatwe do wyeliminowania, bo każdy pomiar wykonuje się co najmniej dwa razy, a przez porównanie obu wyników spostrzeżemy natychmiast, że w jednym z pomiarów znajduje się błąd gruby.

Wystarczy więc pomiar jeszcze raz powtórzyć, by otrzymać rozstrzygnięcie. Wogóle błąd gruby da się zaraz na miejscu wyeliminować tak, że w rachubę już go brać nie będziemy.

Inną znów kategorię błędów stanowią t. z. błędy regularne czyli stałe. Błędy te zależą od przyrządów użytych do pomiarów, n. p. błąd w podziale limbusu, błąd w odczycie kąta na kompasie powstający wskutek tarcia igły o ostrze, błąd kolimacyjny w teodolicie, lub błąd fabrykacji łąty czy taśmy t. z. że łąta lub taśma użyta do pomiaru długości, jest dłuższą lub krótszą od swej nominalnej wartości. Taki błąd skonstatować łatwo można przez porównanie danej miary z miarą normalną, sprawdzoną, zatem o długości pewnej i dobrej.

Nazwijmy nominalną długość taśmy przez l_n , a długość jej rzeczywistą otrzymaną przez sprawdzenie i porównanie jej z miarą normalną przez l , to stosunek $\frac{l}{l_n} = r$ jest

współczynnikiem przez który pomnożyć należy wynik pomiaru błędną taśmą, ażeby otrzymać wynik wolny od błędu stałego czyli regularnego. Przypuśćmy n. p. że taśma użyta do pomiaru ma długość nominalną 20'00 *m*, jednak z porównania jej z miarą normalną okazało się, że długość jej wynosi 20'10 *m*. Mierzac taką taśmą, otrzymalibyśmy zawsze za mały wynik pomiaru, bo błąd stały wynosi tu + 10 *cm* na każdą taśmę przyłożoną. Jeżeli jednak wynik pomiaru pomnożymy przez odpowiedni współczynnik, wynoszący w danym wypadku $\frac{20\cdot10}{20\cdot0} = r = 1\cdot005$, to otrzymamy pomiar

zredukowany na miarę dobrą, wolny od powyższego błędu.

Błędy nieregularne nie dadzą się już tak łatwo wyeliminować z pomiaru. Poprzednio wykazaliśmy, że niektóre z nich schodzą się razem, mogą się sumować, natomiast inne działają wprost przeciwnie i mogą znosić inne błędy. Wogóle nie mamy żadnej podstawy do mniemania, czy jedno lub drugie przeważają — przeciwnie, możemy śmiało twierdzić, że w rezultacie błędy te znoszą się, że wogóle suma błędów dąży do zera. Z doświadczenia wiemy, że spostrzeżenia

w tym samym celu kilkakrotnie lub więcej nawet razy wykonane, różnią się, n. p. tasama długość mierzona kilka razy, da po każdym pomiarze inny wynik. Naturalnie różnice będą małe, jak to później zobaczymy, ale zawsze będą. To doświadczenie jednak wskazuje, że przy każdym pomiarze pewne nieznanne na razie błędy, przeważały w różnym stopniu, a z tego możemy w dalszym ciągu wysnuć wniosek, że prawdziwej wartości danej długości poznać nie jesteśmy w stanie, lecz tylko w przybliżeniu i to tem większem, im dokładniej pomiar wykonamy, im więcej będziemy mieli danych, czyli spostrzeżeń do ocenienia tej długości.

W niektórych wypadkach mamy z góry podaną kontrolę pomiarów, jak n. p. przy pomiarze trzech kątów trójkąta, lub kątów zamkniętego wieloboku, wiemy ile ich suma wynosić powinna, a tem samem łatwo obliczyć możemy, jaki błąd popełniliśmy w pomiarach; rozchodzić się jeszcze będzie w jaki sposób poprawić pomiar pojedynczych kątów.

Podobnie łatwo znaleźć możemy kontrolę niwelacyi. Przypuśćmy bowiem, że rozpoczynając niwelację od punktu *A*, dojdziemy do pewnego punktu *B*, skąd następnie wrócimy tą samą lub inną drogą napowrót do punktu *A*. W takim razie punkt *A* jest równocześnie punktem i początkowym i końcowym niwelacyi, więc spadek na całej drodze powinien być równy 0; jeżeli jednak okazała się pewna różnica wysokości na tej zamkniętej drodze, to powodem jej były błędy, których wielkość w sumie od razu jest znana, a to następnie da podstawę do poprawek. Inaczej rzecz się przedstawia przy pomiarach długości, przy zdjęciach obszarów. Tutaj nie mamy żadnej z góry podanej kontroli, lecz ją utworzyć dopiero musimy. W § 8, mówiąc o urządzeniu katastru, wspomnieliśmy o t. z. punktach tryangulacyjnych. Punkty takie zaznaczone są w polu odpowiednio, a wzajemna ich odległość ustalona na podstawie bardzo dokładnych pomiarów. Później, przy opisie metody zdjęć poligonalnych, poznamy jak wielkie usługi oddają takie punkty w celach kontroli pomiarów długości. Przy większych zdjęciach zużywamy takie stałe punkty, lub na podstawie ich przyjmujemy nową

sieć punktów, których odległości i wogóle położenie ustalimy i te służyć nam będą do kontroli pomiarów długości mniejszych i szczegółowych zdjęć.

W innych wypadkach, przy podrzędnych pomiarach, nie można nakładać tyle pracy i kosztów, by tworzyć tak ścisłe kontrole, a wtedy wnosić będziemy o błędach na podstawie własnych, kilkakrotnie powtarzanych spostrzeżeń i różnych metod pomiarów.

Przypuścimy, że mierząc pewną długość n razy otrzymaliśmy n różnych wartości na oznaczenie tej samej długości. Spostrzeżenia te nazwijmy przez $l_1 \ l_2 \ l_3 \ . \ . \ . \ l_n$ to na oznaczenie prawdopodobnej wartości mamy tylko jeden sposób, mianowicie średnią arytmetyczną z danych spostrzeżeń

$$X = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + . \ . \ . + l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \quad 1)$$

Tę prawdopodobną wartość X traktować będziemy na razie jako prawdziwą wartość pomiaru. Przez porównanie wartości X z pojedynczemi spostrzeżeniami, znajdziemy różnice między nimi i te nazwijmy błędami pozornymi ($v \dots$) spostrzeżeń, w odróżnieniu od błędów prawdziwych nieznanymi nam.

Zatem

$$\left. \begin{array}{l} X - l_1 = v_1 \\ X - l_2 = v_2 \\ X - l_3 = v_3 \\ . \ . \ . \\ X - l_n = v_n \end{array} \right\} \quad 2)$$

Sumując ten szereg równań otrzymamy:

$$\begin{aligned} n X - (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n) &= v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v \\ \text{czyli } n X - [l] &= [v] \end{aligned} \quad 3)$$

wstawiwszy za X wartość z równania 1) dostaniemy:

$$n \cdot \frac{[l]}{n} - [l] = [v]$$

$$\text{czyli } [l] - [l] = [v] = 0 \quad 4)$$

Równanie 4 powiada, że algebraiczna suma błędów dąży do zera, cośmy na początku powiedzieli na podstawie rozumowania.

Wykonując pomiar tej samej prostej n_1 razy, otrzymamy pewną średnią arytmetyczną X_1 — wykonując zaś pomiar n_2 razy, otrzymamy wogóle inną średnią arytmetyczną X_2 , różniącą się wogólności od poprzedniej X_1 . Z tego wynika, że na oznaczenie tej samej długości, znaleźć możemy wiele prawdopodobnych wartości różniących się między sobą, a jednak każdą z nich przyjąć można za wartość prawdopodobną. To doprowadza nas do przekonania, że wartość prawdopodobna mieści się w pewnych granicach, w których zmieniać się może bez uszczerbku dla dokładności pomiaru, czyli że ona mieć musi także pewien błąd, t. z. błąd średniej arytmetycznej. Granice dla błędów średniej arytmetycznej oznaczono na podstawie licznych a dokładnych pomiarów, tak dla pomiaru długości, jak kątów lub niwelacji; granic tych przekraczać nie wolno. Zadaniem naszym będzie, wykazać sposób obliczenia błędu średniej arytmetycznej, obliczonej z szeregu bezpośrednich spostrzeżeń, by następnie przez porównanie obliczonego błędu z błędem dozwołonym, wywnioskować o dokładności pomiaru.

Mając szereg błędów pozornych $v_1, v_2, \dots, v_n$ chcemy oznaczyć za pomocą nich błąd średniej arytmetycznej. Najprostszym sposobem tu się nasuwającym byłoby utworzenie średniej wartości, czyli t. z. błędu przeciętnego, ale ponieważ według 4) $[v] = 0$ — więc taką średnią arytmetyczną utworzylibyśmy musieli z wartości bezwzględnych, opuszczając znaki pojedynczych błędów, t. j.

$$\pm t = \frac{[\pm v]}{n} \quad 5)$$

Widzimy z tego, że błąd przeciętny t miałby taki znak, jakibyśmy mu nadali, co znów nieodpowiada naszemu pojęciu o błędach nieregularnych, które mogą być zarówno dodatnie jak ujemne i co z wzoru wyniknąć powinno samo, czyli, że błąd przeciętny t nie charakteryzuje dokładności spostrzeżeń.

Okaże się to najlepiej na następującym przykładzie:

$l_1 = 100.01 \text{ m}$	błędy v w cm
$l_2 = 99.90$	$v_1 = L - l_1 = - 1 \text{ cm}$
$l_3 = 99.99$	$v_2 = L - l_2 = + 10 \text{ „}$
$l_4 = 100.10$	$v_3 = L - l_3 = + 1 \text{ „}$
$[l] = 400.00$	$v_4 = L - l_4 = - 10 \text{ „}$
$L = \frac{[l]}{4} = 100.00$	$[v] = 0$

Błąd przeciętny według równ. 5) byłby

$$\frac{1 + 10 + 1 + 10}{4} \text{ czyli } \pm t = \pm 5.5 \text{ cm}$$

Ten błąd przeciętny wcale nie charakteryzuje dokładności spostrzeżeń, bo jak widzimy, mamy tu albo mały błąd $\pm 1 \text{ cm}$, albo błąd 10 razy większy, tak, że spodziewalibyśmy się przy następnym spostrzeżeniu błędu raczej $\pm 10 \text{ cm}$ niż 5.5 cm . Błąd przeciętny wcale nie uwzględnia wpływu większych błędów.

Dlatego wprowadził Gauss, we wzór na oznaczenie błędu średniego, pojedynczego spostrzeżenia, kwadraty z pojedynczych błędów, a mianowicie wzór Gaussa opiewa:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \quad 6)$$

gdzie m jest błędem średnim pojedynczego spostrzeżenia, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ są błędami prawdziwymi pojedynczych spostrzeżeń, n jest ilością spostrzeżeń.

Błąd średni m ma dwa znaki $\pm$ wynikające z pierwiastkowania, zatem odpowiada naszym pojęciom o błędach nieregularnych, a nadto, ponieważ wprowadzone są weń kwadraty błędów, więc błędy większe tembardziej mają wpływ na wynik rachunku, a nadto usunięta jest dowolność w wyborze znaków, bo kwadraty muszą być zawsze dodatnie. Stosując wzór 6 do poprzedniego przykładu, otrzymamy:

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon_1^2 & = & 1 \\ \varepsilon_2^2 & = & 100 \\ \varepsilon_3^2 & = & 1 \\ \varepsilon_n^2 & = & 100 \\ \hline [\varepsilon^2] & = & 202 \end{array}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{202}{4}} = \pm 7.1 \text{ cm}$$

co jak widzimy daleko lepiej charakteryzuje dokładność spostrzeżeń, niż poprzednio obliczony błąd przeciętny, mianowicie większe błędy mają tu znacznie większy wpływ na błąd średni. Obliczony błąd m nazywa się średnim błędem pojedynczego spostrzeżenia.

Celem porównania błędu przeciętnego t z błędem średnim m , rozpatrzmy przykład następujący (Jordan: *Vermessungskunde II Bd. § 4.*):

Dane są 2 szeregi błędów (bez względu na znaki):

$$\text{I. } v = 5 \ 6 \ 2 \ 7 \ 3 \ 8 \ 10 \ 9 \ 3 \ 5 \quad [v] = 58 \quad [v^2] = 402$$

$$\text{II. } v = 14 \ 3 \ 0 \ 0 \ 6 \ 20 \ 2 \ 2 \ 1 \ 10 \quad [v] = 58 \quad [v^2] = 750$$

stąd w obu wypadkach $t = \frac{58}{10} = 5.8$ mimo, że z I szeregu

widocznem jest, że spostrzeżenia były staranniej wykonane niż w szeregu II, gdzie obok błędu 0, mamy błąd 20, a więc błędy pojedynczych spostrzeżeń nie powinny być w obu wypadkach te same, błąd dla I szeregu powinien być mniejszy niż dla II szeregu, co też wzór 6 charakteryzuje, bo

$$m_I = \pm \sqrt{\frac{402}{10}} = \pm 6.34 \text{ i } m_{II} = \pm \sqrt{\frac{750}{10}} = \pm 8.66$$

§ 17. Rozszerzanie się błędów.

I. Jeżeli długość x , mającą średni błąd $\pm m$ pomnożymy przez a , to iloczyn $X = ax$ będzie miał błąd średni

$$M = \pm am \quad 7)$$

gdyż mnożąc ilość x , mnożymy związany z nią błąd $\pm m$. Celem uwidocznienia tego twierdzenia pomyślmy sobie, że mierzymy pewną długość za pomocą taśmy mającej błąd $\pm m$, t. j. za pomocą taśmy, której długość jest niepewna o ilość $\pm m$. Przykładając taśmę za długą o $+m$ „a” razy, otrzymamy rezultat o am za mały; przykładając taśmę krótszą, otrzymamy rezultat o am za wielki. Jeżeli zaś długość taśmy

jest o ilość m niepewna, czyli błąd jej wynosi $\pm m$, to przykładając ją a razy, otrzymamy rezultat o ilość $\pm a \cdot m$ niepewny, czyli $\pm M = \pm a m$.

II. Przypuśćmy dwa niezależne spostrzeżenia x i x' o błędach średnich $\pm m$ i $\pm m'$ i postawmy sobie pytanie, jaki będzie błąd sumy tych spostrzeżeń?

Dodając oba spostrzeżenia, otrzymamy $X = x + x'$

Możliwe tu są błędy następujące:

$$a) M = + m + m'$$

$$b) M = - m - m' \quad \text{jako błędy największe,}$$

$$\text{lub } c) M = + m - m'$$

$$d) M = - m + m' \quad \text{jako błędy najmniejsze.}$$

Ażeby dojść do pojęcia błędu średniego, pomyślmy sobie, że tak spostrzeżenie x jak i x' powstało z całego szeregu n spostrzeżeń, z których x i x' są średniami arytmetycznymi, czyli

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad 8)$$

$$x' = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + \dots + x'_n}{n} \quad 9)$$

Mając średnie arytmetyczne x i x' , tudzież pojedyncze spostrzeżenia $x_1 x_2 \dots x'_1 x'_2 \dots$ otrzymamy szereg błędów pojedynczych

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = x - x_1 & \varepsilon'_1 = x' - x'_1 \\ \varepsilon_2 = x - x_2 & \varepsilon'_2 = x' - x'_2 \\ \varepsilon_3 = x - x_3 & \varepsilon'_3 = x' - x'_3 \\ \cdot & \cdot \\ \varepsilon_n = x - x_n & \varepsilon'_n = x' - x'_n \end{array} \quad 10)$$

Dodając parami spostrzeżenia $x_1 + x'_1$ $x_2 + x'_2$ otrzymamy dla każdej sumy błąd, równy sumie $\varepsilon_1 + \varepsilon'_1$

$$\begin{array}{l} \text{zatem} \\ \delta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon'_1 \\ \delta_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon'_2 \\ \delta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon'_3 \\ \cdot \\ \delta_n = \varepsilon_n + \varepsilon'_n \end{array} \quad 11)$$

W ten sposób otrzymaliśmy szereg sum spostrzeżeń i dla każdej sumy błąd δ , zatem szereg błędów pojedynczych, z którego będziemy mogli za pomocą wzoru 6 obliczyć błąd średni. W tym celu obliczymy kwadraty tych błędów:

$$\begin{aligned}\delta_1^2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2 + 2 \varepsilon_1 \varepsilon_1' \\ \delta_2^2 &= \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2'^2 + 2 \varepsilon_2 \varepsilon_2' \\ &\vdots \\ \delta_n^2 &= \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n'^2 + 2 \varepsilon_n \varepsilon_n' \\ \hline [\delta^2] &= [\varepsilon^2] + [\varepsilon'^2] + 2 [\varepsilon \varepsilon'] \\ \text{a stąd } \frac{[\delta^2]}{n} &= \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} + \frac{2 [\varepsilon \varepsilon']}{n} \quad 12)\end{aligned}$$

W równaniu 12) mamy według poprzednich definicji kwadraty średnich błędów, a mianowicie:

$$\frac{[\delta^2]}{n} = M^2 \frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 \text{ i } \frac{[\varepsilon'^2]}{n} = m'^2$$

odpowiadających kształtowi wzoru 6. Ostatni wyraz zawiera sumę iloczynów $[\varepsilon \varepsilon']$; iloczyny te powstają z pojedynczych błędów, które są po części dodatnie, po części ujemne, zatem część iloczynów będzie dodatnia, część ujemna, a że nie mamy najmniejszego powodu przypuszczać by dodatnie przeważały nad ujemnymi lub odwrotnie, owszem jedno i drugie mają równe prawa istnienia, co wypływa z natury błędów nieregularnych, więc temsamem suma tych iloczynów zdąża do zera i z tego powodu ostatni wyraz możemy opuścić. W takim razie równanie 12 przedstawia się w formie:

$$\frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} \quad 13)$$

$$\begin{aligned}\text{czyli} \quad M^2 &= m^2 + m'^2 \\ \text{lub} \quad M &= \pm \sqrt{m^2 + m'^2} \quad 14)\end{aligned}$$

Jest to bardzo ważny wzór na błąd średni sumy dwóch spostrzeżeń $x + x'$ o błędach $\pm m$ i $\pm m'$.

Równanie 14 da się graficznie przedstawić za pomocą trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątnymi są m i m' zaś przeciwprostokątną M .

W ten sam sposób można dowieść, że wzór 14 ważnym jest i dla różnicy dwóch spostrzeżeń

$$D = (x \pm m) - (x' \pm m')$$

dla której błąd średni $M = \pm \sqrt{m^2 + m'^2}$ gdyż w poprzednim wywodzie dostalibyśmy $[\delta^2] = [\varepsilon^2] + [\varepsilon'^2] - 2[\varepsilon \varepsilon']$, a że ostatni wyraz jest zerem, więc wzór 14 ważnym jest i dla różnicy.

Podobnie wzór 14 stosuje się do sumy trzech i więcej spostrzeżeń $X = (x \pm m) + (x' \pm m') + (x'' \pm m'') + \dots$. Obliczymy najpierw błąd średni dwóch spostrzeżeń, następnie średni błąd otrzymanego błędu i błędu trzeciego spostrzeżenia i t. d. $M^2 = (m^2 + m'^2) + m''^2$

$$\text{czyli} \quad M^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 \quad 15)$$

W szczególnym wypadku mogą być błędy pojedyncze równe, t. j. $m = m' = m'' = \dots$

$$\text{to} \quad M^2 = m^2 + m^2 + m^2 + \dots = n \cdot m^2$$

$$\text{czyli} \quad M = m \cdot \sqrt{n} \quad \dots \quad 16)$$

Jako przykład zastosowania wzoru 16 przyjmijmy, że przy pomiarze zupełnie dobrymi latami, popełniamy tylko błąd w przykładaniu lat i błąd ten wynosi $\pm m$ na każdą latę. W takim razie wzór 16 powiada, że średni błąd całego pomiaru jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z ilości przyłożonych lat, a tem samem proporcjonalny do całej długości L , bo długość L jest proporcjonalna do ilości przyłożonych lat.

III. Mając szereg spostrzeżeń $ax \ a'x' \ a''x'' \dots$ o błędach średnich $am \ a'm' \ a''m'' \dots$ możemy na podstawie poprzednich rozumowań powiedzieć, że suma lub różnica tych spostrzeżeń, t. j.

$$X = ax + a'x' + a''x'' + \dots \quad 16 \ a)$$

$$\text{lub} \quad X' = ax - a'x' - a''x'' - \dots$$

będzie miała błąd średni, według 14

$$M = \sqrt{(am)^2 + (a'm')^2 + \dots} \quad 17)$$

IV. Prócz błędów czysto nieregularnych, powstają przy pomiarze jeszcze inne błędy, działające jednostronnie, n. p.

wskutek niedokładnie poziomego lub niedokładnie w linii prostej układania łat, okazuje się mierzona długość nieco za wielka. Nazwijmy błąd stąd powstały na jedną łatę przez A , to jasnym jest, że przy n -krotnym przyłożeniu łatę powstanie błąd $n A$. Prócz tego istnieje jeszcze błąd przyłożenia łatę B wskutek którego średni błąd całego pomiaru przybiera wartość według równania 16 $B \sqrt{n}$.

Błędy te działają równocześnie, więc przypuściwszy że w najgorszym razie sumują się, otrzymamy błąd średni pomiaru według równania 17

$$M = \pm \sqrt{(An)^2 + (B \sqrt{n})^2} = \pm \sqrt{A^2 n^2 + B^2 n} \quad 18)$$

§ 18. Średni błąd średniej arytmetycznej.

Dotychczas mówiliśmy o średnim błędzie pojedynczego spostrzeżenia, czyli o błędzie, jakiego obawiać się należy biorąc w rachubę tylko jedno, którekolwiek z danych spostrzeżeń.

Przyjmując jednak średnią arytmetyczną L z danych spostrzeżeń $l_1 l_2 l_3 \dots$ jako wartość najprawdopodobniejszą, nie możemy jej przypisać tego samego błędu jak spostrzeżeniom bezpośrednim. W celu obliczenia średniego błędu średniej arytmetycznej, $L = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{n}$ w formie

$$L = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \frac{1}{n} l_3 + \dots + \frac{1}{n} l_n \dots 19)$$

gdzie L oznacza średnią arytmetyczną, $l_1 l_2 l_3 \dots l_n$ pojedyncze spostrzeżenia, n = ilość spostrzeżeń.

W równaniu 19 współczynniki $\frac{1}{n}$ przy każdym spostrzeżeniu $l_1 l_2 \dots$ przyjąć możemy w tem samym znaczeniu jak współczynniki $a a' a''$ w równ. 16 a , zatem średni błąd dla L znajdziemy jako średni błąd dla sumy, według równania 17 $M = \sqrt{(a m)^2 + (a' m')^2 + \dots}$ podstawiając $a = a' = a'' = \dots = \frac{1}{n}$ i $m = m' = m'' = \dots = m$ zatem

$$M = \pm \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 + \dots} = \pm \sqrt{n \left(\frac{m}{n}\right)^2}$$

czyli $M = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \dots \dots \dots 20)$

t. j. średni błąd M średniej arytmetycznej L jest równy ilorazowi średniego błędu pojedynczego spostrzeżenia m przez pierwiastek kwadratowy z ilości spostrzeżeń $\sqrt{n}$, a zarazem widzimy, że błąd ten jest mniejszy od średniego błędu m .

W powyższych obliczeniach opieraliśmy się na następujących ilościach:

a) na średniej arytmetycznej L z danych spostrzeżeń $l_1, l_2, \dots$ którą przyjęliśmy za najprawdopodobniejszą wartość w miejsce nieznaną, prawdziwej wartości X ;

b) na błędach pozornych $v_1, v_2, \dots$ t. j. różnicach między średnią arytmetyczną i pojedynczymi spostrzeżeniami $v = L - l \dots \dots 21)$ w miejsce błędów prawdziwych

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \dots \dots \varepsilon = X - l \dots \dots \dots 22)$ z równ. 21

otrzymamy $l = L - v$ co wstawivszy w równ. 22 dostaniemy $\varepsilon = v + (X - L) \dots \dots \dots 23)$

mając n spostrzeżeń, otrzymamy w podobny sposób n wartości na ε —

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= v_1 + (X - L) \\ \varepsilon_2 &= v_2 + (X - L) \\ \varepsilon_3 &= v_3 + (X - L) \\ &\dots \dots \dots \\ \varepsilon_n &= v_n + (X - L) \end{aligned} \quad 24)$$

stad otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 &= v_1^2 + (X - L)^2 + 2 v_1 (X - L) \\ \varepsilon_2^2 &= v_2^2 + (X - L)^2 + 2 v_2 (X - L) \\ &\dots \dots \dots \\ \varepsilon_n^2 &= v_n^2 + (X - L)^2 + 2 v_n (X - L) \end{aligned}$$

$$\text{Suma}[\varepsilon^2] = [v^2] + n(X - L)^2 + 2(X - L)(v_1 + v_2 + \dots + v_n) \quad 25)$$

a ponieważ według równ. 4 $[v] = 0$ czyli $(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = 0$ więc $[\varepsilon^2] = [v^2] + n(X - L)^2 \dots \dots \dots 26)$

Drugi wyraz, t. j. $n(X - L)^2$ nie da się nigdy ściśle oznaczyć, bo X jest ilością nieznaną jako wartość prawdziwa;

zamiast jednak różnicy $(X-L)$ t. j. różnicy między wartością prawdziwą X a wartością prawdopodobną L , możemy podstawić najlepszą jaką mamy wartość, mianowicie błąd

średniej arytmetycznej — zatem $X - L = M = \frac{m}{\sqrt{n}}$
czyli $(X-L)^2 = \frac{m^2}{n} \dots \dots \dots 27)$

wracając do równ. 26 — otrzymamy $[\varepsilon^2] = [v^2] + m^2 \quad 28)$

Ponieważ według równ. 6) $m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n}$ czyli $[\varepsilon^2] = n \cdot m^2 \quad 29)$

więc wstawivszy to w równ. 28 dostaniemy $n m^2 = [v^2] + m^2$

czyli $m^2 (n-1) = [v^2]$ a stąd otrzymamy $m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \quad 30)$

jako ostateczny wzór na średni błąd pojedynczego spostrzeżenia zamiast wzoru przybliżonego $m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n}}$ z równ. 6.

Obliczoną wartość na m według równ. 30 wstawmy we wzór 20

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \dots \dots \dots 31)$$

wzór 31 daje wartość średniego błędu średniej arytmetycznej, wyrażoną za pomocą błędów pozornych $v \dots$ w miejsce błędów prawdziwych $\varepsilon \dots$.

Forma 30 lepiej odpowiada rzeczywistości niż równ. 6. Mając bowiem tylko jedno spostrzeżenie, wyrozumować możemy, że błąd tego spostrzeżenia jest nie pewny, gdyż nie mamy sposobu skontrolowania go. Jedno spostrzeżenie jest zarazem i swoją własną średnią arytmetyczną, więc $v = 0$.

Z równ. 6 otrzymalibyśmy $m = \pm \sqrt{\frac{0}{1}} = 0$ czyli według

tego równania, spostrzeżenie to nie miałoby wogóle żadnego błędu — jednak według równ. 30, $m = \pm \sqrt{\frac{0}{0}} = \frac{0}{0}$

co jest symbolem niepewności, a zarazem wynik ten odpowiada naszemu rozumowaniu.

Przykład: Danych jest 5 spostrzeżeń pomiaru kąta

	l	v	v^2
1.	$\alpha = 35^\circ 26' 16''$	$L - l_1 = + 2.8''$	7.84
2.	$\alpha = \quad \quad \quad \quad 20''$	$L - l_2 = - 1.2''$	1.44
3.	$\alpha = \quad \quad \quad \quad 18''$	$L - l_3 = + 0.8''$	0.64
4.	$\alpha = \quad \quad \quad \quad 25''$	$L - l_4 = - 6.2''$	38.44
5.	$\alpha = \quad \quad \quad \quad 15''$	$L - l_5 = + 3.8''$	14.44
Suma $[l] = 140^\circ 104' 94''$		$[v] = 0$	$[v^2] = 62.80$

Średnia arytm.

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \pm 3.96''$$

$$L = \frac{[l]}{n} = 35^\circ 26' 18.8''$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \pm 1.77''$$

Przyjmując ze wszystkich spostrzeżeń średnią arytmetyczną $L = 35^\circ 26' 18.8''$ jako wartość najprawdopodobniejszą, powiemy, że wartość ta jest niepewną o błąd $M = \pm 1.77''$, czyli, że kąt $\alpha = 35^\circ 26' 18.8'' \pm 1.77''$ podczas gdy poprzestając na któremkolwiek pojedynczym spostrzeżeniu mielibyśmy niepewność o $m = \pm 3.96''$.

Z równania 31 $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ widzimy, że średni błąd średniej arytmetycznej jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z ilości spostrzeżeń, czyli, chcąc mieć 10 razy większą dokładność, musielibyśmy wykonać i wziąć w rachunek 100 spostrzeżeń. Wzór ten można przedstawić graficznie, odcinając n na osi odciętych, a odpowiednie M na rzędnych (fig. 50).

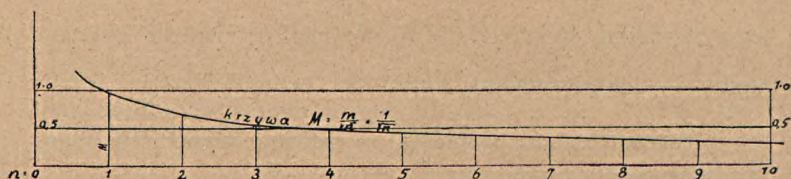


Fig. 50.

Dla	$n = 1$	$M = m$
	$n = 10$	$M = 0.32 m$
	$n = 20$	$M = 0.22 m$
	$n = 50$	$M = 0.14 m$
	$n = 100$	$M = 0.10 m$

Krzywa M zbliża się asymptotycznie do osi odciętych, widzimy też, że aż do $n = 5$ rzędne krzywej szybko maleją, następnie już bardzo powoli, czyli, że wzrostem liczby spostrzeżeń dokładność wzrasta daleko wolniej, co zresztą widocznem jest z wzoru 31. Ponieważ koszt pomiaru wzrastają proporcjonalnie do ilości spostrzeżeń, natomiast dokładność rośnie w odwrotnym stosunku do pierwiastka kwadratowego z ilości spostrzeżeń, przeto w praktyce nie używa się bardzo wielu spostrzeżeń tej samej ilości, raczej zwraca się szczególniejszą baczością na dokładność pomiaru, wykonując go zazwyczaj tylko 2 razy, a w wypadkach bardzo ważnych 5 razy, najwyżej do 10 razy.

§ 19. Dokładność pomiaru prostej.

Przy pomiarze prostej występują, jak mówiliśmy, błędy nieregularne, częścią dodatnie, częścią ujemne, tudzież błędy regularne, jednostronnie działające, a średni błąd pomiaru ujęliśmy we wzór 18 $M = \pm \sqrt{A^2 n^2 + B^2 n}$ gdzie A oznacza wartość błędu układania, B błędu przykładania, na jedną łatę lub taśmę, zaś n ilość łat lub taśm.

Ponieważ ilość łat lub taśm, t. j. n jest proporcjonalna do mierzonej długości l , więc możemy napisać

$$A^2 n^2 = \beta^2 l^2 \text{ i } B^2 n = \alpha^2 l \quad (32)$$

a wstawiwszy powyższe wartości w równ. 18 otrzymamy

$$m = \pm \sqrt{\alpha^2 l + \beta^2 l^2} \quad (33)$$

Jeżeli przypuścimy, że wskutek dokładności pomiaru niema błędu przykładania, lub jest tak mały, że uważać go można za nieistniejący, czyli $\beta = 0$ natenczas

$$m = \pm \alpha \sqrt{l} \quad (34)$$

gdzie α ma znaczenie średniego błędu pomiaru jednostki długości, a zatem możemy powiedzieć, że średni błąd pomiaru m , jest wprost proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego mierzonej długości (do $\sqrt{l}$), albo, że średni błąd pomiaru wzrasta proporcjonalnie do pierwiastka kwadratowego mierzonej długości. Z doświadczeń ustalono granicę błędu układania na 0.03% długości mierzonej, czyli 0.3 mm na 1 m, a współczynnik α przyjęto także na podstawie licznych i dokładnych pomiarów, dla łań $\alpha = 0.003$ dla taśmy stalowej $\alpha = 0.005$.

Na podstawie powyższych dat obliczymy błąd dozwolony dla różnych długości l — dla łań i taśm według wzoru $m = \alpha \sqrt{l}$, a mianowicie:

Mierzona długość	błąd $m = \alpha \sqrt{l}$	
	dla łań	dla taśmy stalowej
10 m	± 0.01 m	± 0.02 m
50	0.02	0.04
100	0.03	0.05
200	0.04	0.07
300	0.05	0.09
400	0.06	0.10
500	0.07	0.11
1000	0.09	0.16

O wielkości błędów dozwolonych według instrukcyi ministeryalnej austriackiej, mówić będziemy przy pomiarze parami w § następnym.

§ 20. Pomiar parami.

Najczęściej wykonuje się pomiar dwa razy, t. j. od punktu początkowego do końcowego i drugi raz z powrotem. Mamy wówczas 2 spostrzeżenia l_1 i l_2 z których obliczymy

średnią arytmetyczną $L = \frac{l_1 + l_2}{2}$ 35)

i błędy pojedynczych pomiarów $v_1 = L - l_1$
 $v_2 = L - l_2$ 36)

Nazwijmy różnicę obu pomiarów przez d
 to $l_2 - l_1 = d$ czyli $l_2 = l_1 + d$
 stąd $L = \frac{l_1 + l_1 + d}{2} = \frac{2l_1 + d}{2} = l_1 + \frac{d}{2}$ 37)

teraz obliczymy błędy pojedynczych pomiarów

$$\begin{array}{ll} v_1 = l_1 + \frac{d}{2} - l_1 = +\frac{d}{2} & v_1^2 = \frac{d^2}{4} \\ v_2 = l_1 + \frac{d}{2} - l_1 - d = -\frac{d}{2} & v_2^2 = \frac{d^2}{4} \\ \hline [v] = 0 & [v^2] = \frac{d^2}{2} \end{array} \quad 38)$$

następnie według równ. 30

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \pm \frac{d}{\sqrt{2}} = \pm 0.71 d \quad 39)$$

i według równania 31 błąd średniej arytmetycznej

$$M = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{2}} = \pm \frac{d}{2} \quad 40)$$

Równanie 40 wskazuje, że średni błąd średniej arytmetycznej z dwu pomiarów, równy jest połowie różnicy obu pomiarów $\left(\frac{d}{2}\right)$.

Mając zatem dwa pomiary tej samej długości, wyrachujemy ich różnicę i połowę tej różnicy porównujemy z wielkością błędu dozwolonego obliczonego z wzoru $m = \pm a\sqrt{L}$ lub wziętego z tabliczki w § 19 podanej. Jeżeli połowa różnicy obu pomiarów nie przekracza błędu dozwolonego, to pomiar przyjmujemy za dobry, w przeciwnym razie należy go powtórzyć, aż obliczony błąd średniej arytmetycznej nie przekroczy dozwolonej granicy.

Austryacka instrukcyja katastralna zaleca pomiar podwójny tam i z powrotem, przyczem różnica obu pomiarów Δs wynosić może najwyżej $\Delta s = 0.0006 s + 0.02 \sqrt{s}$ 41)

gdzie s oznacza długość mierzoną a Δs różnicę obu pomiarów. Instrukcja wspomniana każe dozwoloną różnicę Δs zmniejszyć o 20% dla pomiaru w terenie płaskim, zatem korzystnym, a dozwala zwiększyć o 20% gdy warunki pomiaru są bardzo niekorzystne. Mamy więc 3 granice dozwolonej różnicy obu pomiarów.

1. dla warunków bardzo korzystnych:

$$\Delta s = 0.0005 \cdot s + 0.015 \sqrt{s}$$

2. dla warunków średnich:

$$\Delta s = 0.0006 \cdot s + 0.02 \sqrt{s}$$

3. dla warunków niekorzystnych:

$$\Delta s = 0.0007 \cdot s + 0.025 \sqrt{s}$$

42)

Jeżeli warunki pomiaru są bardzo trudne, to granice błędów wyjęte z poniżej przedstawionej tabeli, należy powiększyć o 20%, jeżeli zaś warunki są bardzo korzystne, to zmniejszyć o 20% (str. 77).

Ustawa pruska rozróżnia także 3 kategorie błędów dozwolonych, stosownie do konfiguracji terenu, a mianowicie:

I kategoria, teren płaski.

Dozwoloną różnicę obu pomiarów oblicza się z wzoru:

$$a = 0.01 \sqrt{4l + 0.005 l^2}$$

II kategoria, teren falisty.

$$a = 0.01 \sqrt{6l + 0.0075 l^2}$$

III kategoria, teren górski, bardzo trudny

$$a = 0.01 \sqrt{8l + 0.01 l^2}$$

43)

Wzory te odpowiadają kształtowi $m = \sqrt{a^2 l + \beta^2 l^2}$

Ponieważ a oznacza dozwoloną różnicę obu pomiarów, więc, według równ. 40, błąd średniej arytmetycznej nie powinien przekraczać połowy tej wartości, t. j.

$$M = \pm \frac{a}{2}$$

Tabela dozwolonych różnic Δs , dwu pomiarów,
obliczona dla średnich warunków pomiaru, według wzoru
$$\Delta s = 0.0006 s + 0.02 \sqrt{s}.$$

(Wyjęta z książki p. S. Latinka p. t. „Praktyczne przykłady pomiarów metodą poligonalną“).

Długość linii s w me- trach	Granica błędu Δs	Długość linii s w me- trach	Granica błędu Δs	Długość linii s w me- trach	Granica błędu Δs	Długość linii s w me- trach	Granica błędu Δs	Długość linii s w me- trach	Granica błędu Δs
0	0.01	202	0.41	556	0.81	971	1.21	1420	1.61
1	0.02	210	0.42	566	0.82	981	1.22	1431	1.62
2	0.03	218	0.43	576	0.83	992	1.23	1443	1.63
3	0.04	225	0.44	586	0.84	1003	1.24	1454	1.64
5	0.05	233	0.45	596	0.85	1016	1.25	1466	1.65
7	0.06	241	0.46	606	0.86	1025	1.26	1478	1.66
9	0.07	250	0.47	616	0.87	1036	1.27	1489	1.67
12	0.08	258	0.48	625	0.88	1047	1.28	1501	1.68
15	0.09	266	0.49	636	0.89	1058	1.29	1513	1.69
18	0.10	274	0.50	646	0.90	1069	1.30	1524	1.70
22	0.11	282	0.51	656	0.91	1080	1.31	1536	1.71
25	0.12	291	0.52	666	0.92	1091	1.32	1548	1.72
29	0.13	299	0.53	676	0.93	1102	1.33	1559	1.73
34	0.14	308	0.54	686	0.94	1113	1.34	1571	1.74
38	0.15	316	0.55	696	0.95	1125	1.35	1583	1.75
43	0.16	325	0.56	706	0.96	1136	1.36	1595	1.76
47	0.17	334	0.57	717	0.97	1147	1.37	1606	1.77
52	0.18	342	0.58	727	0.98	1158	1.38	1618	1.78
57	0.19	351	0.59	737	0.99	1169	1.39	1630	1.79
63	0.20	360	0.60	748	1.00	1180	1.40	1642	1.80
68	0.21	369	0.61	758	1.01	1192	1.41	1654	1.81
74	0.22	378	0.62	768	1.02	1203	1.42	1665	1.82
79	0.23	387	0.63	779	1.03	1214	1.43	1677	1.83
85	0.24	396	0.64	789	1.04	1225	1.44	1689	1.84
91	0.25	405	0.65	800	1.05	1237	1.45	1701	1.85
97	0.26	414	0.66	810	1.06	1248	1.46	1713	1.86
104	0.27	423	0.67	821	1.07	1259	1.47	1725	1.87
110	0.28	433	0.68	831	1.08	1271	1.48	1737	1.88
116	0.29	442	0.69	842	1.09	1282	1.49	1749	1.89
123	0.30	451	0.70	853	1.10	1294	1.50	1760	1.90
130	0.31	461	0.71	863	1.11	1305	1.51	1772	1.91
137	0.32	470	0.72	874	1.12	1316	1.52	1784	1.92
144	0.33	479	0.73	884	1.13	1328	1.53	1796	1.93
151	0.34	489	0.74	895	1.14	1339	1.54	1808	1.94
158	0.35	498	0.75	906	1.15	1351	1.55	1820	1.95
165	0.36	508	0.76	917	1.16	1362	1.56	1832	1.96
172	0.37	518	0.77	927	1.17	1374	1.57	1844	1.97
180	0.38	527	0.78	938	1.18	1385	1.58	1856	1.98
187	0.39	537	0.79	949	1.19	1397	1.59	1868	1.99
195	0.40	547	0.80	960	1.20	1408	1.60	1880	2.00
202		556		971		1420		1892	

Zestawienie dozwolonej różnicy dwu pomiarów, według kategorii I, wzoru 43, dla różnych długości „ l ”.

Długość l w metrach	Dozwolona różnica „ a ”		
	I kateg. m	II kateg. m	III kateg. m
10	0.06	0.08	0.09
50	0.14	0.18	0.20
100	0.21	0.26	0.30
200	0.32	0.39	0.45
300	0.41	0.50	0.57
400	0.49	0.60	0.69
500	0.57	0.70	0.81
1000	0.95	1.16	1.34

§ 21. O wadze spostrzeżeń.

Średnia arytmetyczna L , mająca średni błąd $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ (według równ. 31), powstaje jak wiemy, z szeregu pojedynczych spostrzeżeń $l_1, l_2, \dots$ mających średni błąd m .

Tę średnią arytmetyczną uważać możemy za nowe, fikcyjne spostrzeżenie, tem dokładniejsze, im mniejszy będzie jego średni błąd M ; ten zaś zależy od błędów m i od ilości

spostrzeżeń n co wynika z wzoru 31 $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ skąd otrzymamy $\frac{m^2}{M^2} = n \dots \dots \dots$ 44)

Równanie 44 wskazuje, ile spostrzeżeń złożyć się musi na średnią arytmetyczną, ażeby ta otrzymała pewną dokładność, charakteryzowaną przez wielkość błędu M . Innemi słowy: ilość n charakteryzuje dokładność średniej arytmetycznej w stosunku do dokładności pojedynczego spostrzeżenia, a zatem n przedstawia ważność czyli wagę średniej arytmetycznej, w stosunku do wagi pojedynczego spostrzeżenia, przyjętej za jednostkę.

Jeżeli do wyznaczenia jednej niewiadomej (średniej wartości) mamy dany szereg spostrzeżeń, z których każdemu z różnych powodów przypisać musimy inną dokładność, to łatwo zrozumieć, że prosta średnia arytmetyczna z nich utworzona, nie może być najprawdopodobniejszą wartością. Prosta średnia arytmetyczna bowiem byłaby tylko wtedy najprawdopodobniejszą wartością niewiadomej, gdyby wszystkie spostrzeżenia były równie dokładne, czyli miały równą wagę; jeżeli zaś z góry wiemy, że jedne spostrzeżenia są dokładne, inne mniej dokładne, to popełnilibyśmy świadomie błąd, biorąc przeciętną, za najprawdopodobniejszą wartość.

Zadaniem naszym teraz będzie, wynaleźć sposób obliczania prawdopodobnej wartości pomiaru z szeregu danych spostrzeżeń o różnej wadze. W tym celu przypuścimy, że mamy dane 5 spostrzeżeń $l'_1, l'_2, l'_3, l'_4, l'_5$.

Prosta średnia arytmetyczna z nich utworzona jest:

$$X = \frac{l'_1 + l'_2 + \dots + l'_5}{5} \quad (45)$$

Rozdzielmy te spostrzeżenia na 2 grupy po 2 i 3 razem, i obliczmy dla każdej grupy średnią arytmetyczną l_1 i l_2

$$l_1 = \frac{l'_1 + l'_2}{2} \quad \text{i} \quad l_2 = \frac{l'_3 + l'_4 + l'_5}{3} \quad (46)$$

stąd otrzymamy:

$$2 l_1 = l'_1 + l'_2 \quad \text{i} \quad 3 l_2 = l'_3 + l'_4 + l'_5 \quad (47)$$

Ilości $2 l_1$ i $3 l_2$ uważać możemy za jakieś nowe spostrzeżenia, z których otrzymamy poprzednią wartość X (wyrażoną w równ. 45), a mianowicie:

$$X = \frac{l'_1 + l'_2 + l'_3 + l'_4 + l'_5}{5} = \frac{2 l_1 + 3 l_2}{2 + 3} \quad (48)$$

Analogicznie, mając grupy $l_1, l_2, l_3, \dots$ złożone z $p_1, p_2, p_3, \dots$ ilości jednakowo dokładnych spostrzeżeń, możemy utworzyć z nich wartość średnią według równ. 48

$$X = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[p l]}{[p]} \quad (49)$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ oznaczają ilości spostrzeżeń, z których się składają pojedyncze grupy $l_1, l_2, \dots, l_n$, czyli są wagami tych

częściowych średnich arytmetycznych, bo $l_1, l_2, \dots$ są średniami arytmetycznymi z poszczególnych grup. Ponieważ średnie arytmetyczne $l_1, l_2, \dots$ traktować możemy jako nowe spostrzeżenia, którym przypisaliśmy pewne wagi, zatem wzór 49 zastosować możemy i do szeregu pojedynczych, bezpośrednich spostrzeżeń, z których każdemu nadamy pewną wagę, zależnie od warunków pomiaru. Wartość X w równ. 49 nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik ułamka będącego na prawej stronie równania, przez tę samą liczbę pomnożymy, lub podzielimy, czyli gdy wagi $p_1, p_2, \dots, p_n$ zastąpimy ilościami do nich proporcjonalnymi.

Z równania 31 $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ gdzie według powyższego rozumowania n jest wagą, widzimy, że M^2 jest odwrotnie proporcjonalne do wagi n $M^2 = \frac{m^2}{n} \dots \dots \dots$ 50)

Podstawiawszy $n = p$ możemy napisać:

$$M = \frac{m}{\sqrt{p}} \text{ i podobnie } M^1 = \frac{m}{\sqrt{p^1}}$$

$$\text{a stąd } \frac{p}{p^1} = \frac{M_1^2}{M^2} \text{ czyli } \frac{M}{M^1} = \frac{\sqrt{p^1}}{\sqrt{p}} \dots \dots \dots 51)$$

t. z. wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów średnich, lub błędy średnie są odwrotnie proporcjonalne do pierwiastków kwadratowych z odpowiednich wag.

Z pojęciem wagi wiąże się pojęcie dokładności pomiaru, bo gdy średni błąd się zmniejsza, to waga i dokładność pomiaru się zwiększa, lecz jak wykazaliśmy, waga jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu z błędem średnim, natomiast dokładność pomiaru, jest odwrotnie proporcjonalna do pierwszej potęgi błędem średnim.

Po określeniu znaczenia wag, przystępujemy do zastosowania ich w rachunku.

Niech będą dane spostrzeżenia $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$
z wagami $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$

to według równ. 49 otrzymamy średnią wartość pomiaru

$$X = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]} \quad 52)$$

dla $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n$ otrzymamy zwykłą średnią arytmetyczną $X = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n}$

Przez porównanie wartości średniej X (z równ. 52), z pojedynczemi spostrzeżeniami $l_1 l_2 \dots$ otrzymamy szereg błędów

$$\left. \begin{array}{ll} v_1 = X - l_1 & \text{z wagą } p_1 \\ v_2 = X - l_2 & \text{„ } p_2 \\ v_3 = X - l_3 & \text{„ } p_3 \\ \dots & \dots \\ v_n = X - l_n & \text{„ } p_n \end{array} \right\} \quad 53)$$

Jako kontrola rachunku powinno być

$$[v] = 0 \text{ i } [pv] = 0 \quad 54)$$

Ponieważ do rachunku wprowadzić możemy ilości proporcjonalne do wag, więc którąkolwiek wagę n. p. p_1 przyjąć możemy za jednostkę, a inne wagi odpowiednio zmienimy przez podzielenie ich przez p_1 . W takim razie zamiast wag $p_1 p_2 p_3 \dots p_n$ wprowadzimy w rachunek wagi $1 \frac{p_2}{p_1} \frac{p_3}{p_1} \dots \frac{p_n}{p_1}$ 55)

Średni błąd spostrzeżenia odpowiadającego wadze 1, nazwiemy średnim błędem jednostkowym, gdyż będzie on miarą dla innych błędów, a ponieważ błędy średnie są odwrotnie proporcjonalne do pierwiastków kwadratowych z wag, więc błędy średnie pojedynczych spostrzeżeń, przedstawia się teraz w następującej formie:

$$\frac{m}{\sqrt{p_1}} \quad \frac{m}{\sqrt{p_2}} \quad \frac{m}{\sqrt{p_3}} \quad \dots \quad \frac{m}{\sqrt{p_n}} \quad 56)$$

dla spostrzeżeń $l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad \dots \quad l_n$

Jak widzimy, średnie błędy pojedynczych spostrzeżeń są teraz różne, co jest zupełnie słusznem, bo jeżeli przy obliczeniu zwykłej średniej arytmetycznej, przyjmowaliśmy wszystkie spostrzeżenia za jednakowo dokładne, wskutek

czego otrzymać musieliśmy średni błąd m wspólny wszystkim spostrzeżeniom, to teraz, rozróżniając ich stopnie dokładności, rozróżnić powinniśmy i ich błędy średnie, wskutek czego błędy te nie mogą być równe.

Przyjawszy $p_1 = 1$ otrzymamy zamiast równ. 56

$$\begin{array}{ccccccc} m & \sqrt{\frac{m}{p_2}} & \sqrt{\frac{m}{p_3}} & \dots & \sqrt{\frac{m}{p_n}} & & 57) \\ \text{dla } l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n & & \end{array}$$

Równanie 49 możemy też napisać w następującej formie:

$$X = \frac{p_1}{[p]} l_1 + \frac{p_2}{[p]} l_2 + \frac{p_3}{[p]} l_3 + \dots + \frac{p_n}{[p]} l_n \quad 58)$$

co odpowiada wyrażeniu 16 a $X = ax + a'x' + \dots$

gdzie za $a - a'$... podstawimy $\frac{p_1}{[p]} \frac{p_2}{[p]} \dots$

zaś za $x \quad x' \dots$ „ $l_1 \quad l_2 \dots$

zatem błąd dla ilości X obliczymy z wzoru 17

$$M = \sqrt{(am)^2 + (a'm')^2 + \dots}$$

podstawiając za $m \quad m'$... wartości zestawione pod l. 56
zatem

$$M^2 = \left(\frac{p_1}{[p]} \cdot \frac{m}{\sqrt{p_1}} \right)^2 + \left(\frac{p_2}{[p]} \cdot \frac{m}{\sqrt{p_2}} \right)^2 + \left(\frac{p_3}{[p]} \cdot \frac{m}{\sqrt{p_3}} \right)^2 + \dots$$

czyli

$$M^2 = \left(\frac{m}{[p]} \right)^2 \left\{ (\sqrt{p_1})^2 + (\sqrt{p_2})^2 + (\sqrt{p_3})^2 + \dots \right\}$$

$$M^2 = \frac{m^2}{[p]^2} (p_1 + p_2 + p_3 + \dots) = \frac{m^2}{[p]^2} \cdot [p]$$

$$\text{w końcu } M = \pm \frac{m}{\sqrt{[p]}} \dots \dots \dots 59)$$

t. z. średni błąd średniej wartości pomiaru, równa się średniemu błędowi pojedynczych spostrzeżeń, obliczonemu na podstawie prostej średniej arytmetycznej, podzielonemu przez pierwiastek kwadratowy ze sumy wag.

Jeżeli dany jest szereg błędów pojedynczych $v_1 \quad v_2 \quad v_3 \dots$ z wagami $p_1 \quad p_2 \quad p_3 \dots$ to ponieważ błędy $v_1 \quad v_2 \dots$ odpo-

wiadają niejednakowo dokładnym spostrzeżeniom, więc należy je pierwszej sprowadzić do tej samej wagi a to na podstawie

wzoru 51 $\frac{m}{m_1} = \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}}$, wstawiając $m = v \dots$ czemu

odpowiada waga p i $m_1 = v_1$ przyjąwszy wagę $p_1 = 1$ t. z. mając błąd v i odpowiadającą mu wagę p , obliczymy, jakiby był błąd v_1 odpowiadający wadze 1.

$$\frac{v}{v_1} = \frac{1}{\sqrt{p}} \quad \text{stad} \quad v \sqrt{p} = v_1 \dots \dots \dots 60)$$

zatem v_1 oznacza błąd v zredukowany do wagi $= 1$. W ten sposób zredukujemy wszystkie dane błędy do tej samej wagi $= 1$. Zatem:

waga	błąd	waga	błąd zredukowany	
p_1	v_1	1	$v_1 \sqrt{p_1}$	} 61)
p_2	v_2	1	$v_2 \sqrt{p_2}$	
p_3	v_3	1	$v_3 \sqrt{p_3}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
p_n	v_n	1	$v_n \sqrt{p_n}$	

Następnie, otrzymany na podstawie równ. 30 t. j.

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \quad \text{czyli} \quad m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} \quad \text{a wstawiając w ten}$$

wzór wartości błędów zredukowanych z 61) otrzymamy

$$m^2 = \frac{(v_1 \sqrt{p_1})^2 + (v_2 \sqrt{p_2})^2 + (v_3 \sqrt{p_3})^2 + \dots}{n-1} = \frac{[p v^2]}{n-1}$$

$$\text{czyli} \quad m = \pm \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-1}} \dots \dots \dots 62)$$

jako średni błąd pojedynczych spostrzeżeń sprowadzonych do tej samej dokładności czyli wagi.

Teraz, wstawiając wartość 62 w równanie 59, dostaniemy średni błąd najprawdopodobniejszej war-

$$\text{tości pomiaru} \quad M = \pm \sqrt{\frac{[p v^2]}{[p] (n-1)}} \dots \dots \dots 63)$$

gdzie n oznacza ilość spostrzeżeń składających się na średnią wartość pomiaru.

§ 22. Zastosowanie pomiaru parami.

Przypuśćmy, że wykonaliśmy pomiar długości kilku boków polygonu 2 razy, w jedną i drugą stronę, dalej, że boki te są prawie równe i teren jednakowo korzystny, czyli że wszystkim pomiarom przypisać możemy tę samą wagę. To samo odnieść możemy nie tylko do pomiaru długości boków, lecz także do podwójnej niwelacji kilku boków. Z podwójnego pomiaru każdej długości, otrzymamy pewną różnicę „ d ” obu spostrzeżeń.

Ażeby otrzymać łączną długość całego polygonu, dodamy pojedyncze długości, mianowicie ich średnie wartości, a w końcu chcielibyśmy obliczyć błąd sumy długości, więc i różnicę D należącą do sumy boków.

Nazwijmy różnice obu pomiarów boków kolejno przez $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, to, ponieważ różnice te mają charakter błędów prawdziwych a nie pozornych, więc do obliczenia różnicy sumy boków zastosujemy wzór 6.

$$D^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n}$$

$$\text{czyli } D^2 = \frac{[d^2]}{n} \quad \text{lub} \quad D = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \quad \dots \quad 64)$$

Błąd jednego pomiaru całego polygonu obliczymy według równ. 39) wstawiając D zamiast d

$$\text{więc} \quad m = \pm \frac{D}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \quad \dots \quad 65)$$

podobnie średni błąd średniej arytmetycznej według rów. 40)

$$M = \pm \frac{D}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \quad \dots \quad 66)$$

Gdyby różnice $d_1, d_2, \dots$ należały do podwójnych pomiarów długości lub niwelacji o różnych wagach, co by miało miejsce wtedy, gdyby boki polygonu nie były równe, lub warunki pomiaru były różne, czyli różnicom przypisalibyśmy wagi $p_1, p_2, \dots$ natenczas obliczylibyśmy różnicę D

dla wagi 1 po części według wzoru 62) po części według 64)

$$\text{t. j.} \quad D^2 = \frac{p_1 d_1^2 + p_2 d_2^2 + \dots}{n}$$

$$\text{zatem} \quad D = \pm \sqrt{\frac{[p d^2]}{n}} \dots \dots \dots 67)$$

stąd zaś błąd pojedynczego pomiaru całej długości

$$m = \pm \frac{D}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{[p d^2]}{2n}} \dots \dots \dots 68)$$

i średni błąd średniej arytmetycznej

$$M = \pm \frac{D}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[p d^2]}{n}} \dots \dots \dots 69)$$

Zastosowanie tych wzorów trafia się zwykle w praktyce, bo tak pomiary długości, jak niwelację wykonujemy zwykle dwa razy, natomiast wymagać nie można, by wszystkie boki miały równe długości, zatem zwykle mają różne wagi.

Ażeby danym spostrzeżeniom nadać stosowne wagi, rozważmy, że według równ. 51) wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów średnich błędów, tudzież, że wagi zastąpić możemy ilościami do nich proporcjonalnymi, a szukając tych ilości proporcjonalnych, weźmy pod rozwagę równ. 16) t. j. $M = m \cdot \sqrt{n}$ i równ. 34) t. j. $m = a \sqrt{l}$ z których wynika, że błędy są proporcjonalne do drugiego pierwiastka z liczby przyłożeń łąt lub taśm, t. j. do n a zatem i do drugiego pierwiastka z długości $\sqrt{s}$ (gdzie s oznacza długość). Zastępując więc kwadraty błędów, przez kwadraty ilości do nich proporcjonalnych t. j. przez $(\sqrt{s})^2$ powiemy, że wagi są odwrotnie proporcjonalne do długości s .

$$\text{Podstawmy teraz w równaniu 67)} \quad D = \pm \sqrt{\frac{[p d^2]}{n}}$$

zamiast $p_1 p_2 p_3 \dots p_n$ wartości wag według powyższego

$$\text{rozumowania, t. j.} \quad p_1 = \frac{1}{s_1} \quad p_2 = \frac{1}{s_2} \quad p_3 = \frac{1}{s_3} \quad \dots \dots$$

gdzie $s_1 s_2 s_3$ są to mierzone długości, otrzymamy

$$D^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2} + \frac{d_3^2}{s_3} + \dots \right) =$$

$$D^2 = \frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right] \text{ czyli } D = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \quad 70)$$

Wzór 70) pozwala obliczyć różnicę D dwu pomiarów całego poligonu złożonego z pojedynczych boków, na podstawie różnic podwójnych pomiarów d , poszczególnych boków. Mając D , obliczymy z równania 65) błąd jednego pomiaru

$$m = \pm \frac{D}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \quad \dots \quad 71)$$

Następnie z równania 69) średni błąd średniej arytmetycznej

$$M = \pm \frac{D}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \quad \dots \quad 72)$$

Zależnie od rodzaju jednostki s wprowadzonej w rachunek, otrzymamy m i M dla tej jednostki, t. z. jeżeli s wyrazimy w metrach, to wzory 71) i 72) dadzą wartość błędów na 1 m długości, jeżeli s wprowadzimy w kilometrach, to z wzorów powyższych otrzymamy błąd na 1 km długości.

Przykład.

Pomierzono dwa razy boki poligonu a, b, c, d , a mianowicie:

I pomiar	400.08 m	650.90 m	890.78 m	1250.40 m
II pomiar	400.00	650.80	890.66	1250.25
różnice	$d_1 = 8 \text{ cm}$	$d_2 = 10 \text{ cm}$	$d_3 = 12 \text{ cm}$	$d_n = 15 \text{ cm}$
okrągło	$s_1 = 0.4 \text{ km}$	$s_2 = 0.65 \text{ km}$	$s_3 = 0.89 \text{ km}$	$s_n = 1.25 \text{ km}$
	$d_1^2 = 64$	$d_2^2 = 100$	$d_3^2 = 144$	$d_n^2 = 225$
	$\frac{d_1^2}{s_1} = 160$	$\frac{d_2^2}{s_2} = 153.8$	$\frac{d_3^2}{s_3} = 161.8$	$\frac{d_n^2}{s_n} = 180$

$$\text{stad } \left[\frac{d^2}{s} \right] = 160 + 153.8 + 161.8 + 180 = 655.6$$

$$\sqrt{\left[\frac{d^2}{s} \right]} = 25.6 \quad n = 4 \text{ (ilość boków)}$$

§ 23. Sprawdzanie łąt i taśm.

Wszystkie wogóle przyrządy, służące do mierzenia długości, powinny być przed użyciem sprawdzone, t. j. porównane z miarą normalną, której długość została urzędownie sprawdzoną, przyczem urząd dla miar i wag wydaje poświadczenie z wymienieniem błędu miary.

Błędy miar normalnych wynosić mogą najwyżej:

a)	dla taśmy stalowej	20 m	dług.	± 3.5 mm
b)	" "	10 m	"	± 2.4 "
c)	dla łąty	5 m	"	± 1.6 "
d)	" "	3 m	"	± 1.3 "
e)	" "	2 m	"	± 1.1 "

przy temperaturze $+ 15^{\circ} C$.

Do sprawdzania łąt służy urządzenie zwane komparatorem (fig. 51). Jest to zwykły brzus dębowy, mający w od-

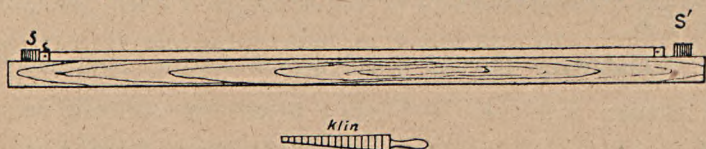


Fig. 51.

stępie nieco większym niż długość łąty, 2 ostrza stalowe S i S' . Odstęp obu ostrzy mierzy się łątą normalną w ten sposób, że przykładamy ją jednym końcem do pierwszego ostrza, zaś między drugi koniec łąty i drugie ostrze wsuwamy klin K z odpowiednio urządzoną podziałką, za pomocą którego można z wielką łatwością zmierzyć wspomniany odstęp z dokładnością 0.1 mm, a szacuje się jeszcze setne części. Urządzenie klina jest łatwe do zrozumienia z figury. Znajac długość komparatora S S' , kładziemy teraz w miejsce łąty normalnej, łątę której długość mamy zbadać, przysuwamy jej koniec do pierwszego ostrza, a podobnie jak poprzednio mierzymy klinem odstęp między drugim jej końcem i drugim ostrzem.

§ 24. Wyznaczenie punktu pośredniego na prostej o danej długości.

Niech będzie dana prosta AB (fig. 52) o długości L , na której mamy wyznaczyć punkt pośredni C w odległości l od punktu A .

W tym celu odmierzymy na prostej AB , odcinek l od punktu A , następnie odcinek $l' = L - l$ od punktu B . Wskutek nieuniknionych błędów w pomiarze, tudzież wskutek tego, że dana długość AB posiada także pewien błąd, mimo czego daną długość przyjąć musimy jako dobrą, pomiary odcinków l i l' nie zejdą się w jednym punkcie, lecz, jak w naszym przykładzie powstanie między nimi pewien odstęp w , lub

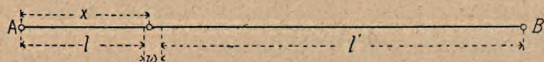


Fig. 52.

też mogą się częściowo nakryć, czyli odstęp w może być ujemny. Na oznaczenie długości L mamy teraz spostrzeżenie

$$L = l + l' + w \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Wobec niezgodności naszego pomiaru z daną długością nie pozostaje nic innego, jak uważać odstęp szukanego punktu C od A za niewiadomą x wyrazić się mającą przez nowy pomiar i za pomocą rachunku wyrównania, niewiadomą tę oznaczyć.

Na oznaczenie niewiadomej x mamy równanie

$$x_1 = l \quad \text{z wagą} \quad p_1 = \frac{1}{l} \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

$$x_2 = L - l' \quad \text{lub} \quad x_2 = l + w \quad \text{z wagą} \quad p_2 = \frac{1}{l'} \quad 3)$$

Wagi przyjmujemy według § 21 odwrotnie proporcjonalne do długości. Z równań 2) i 3) znajdziemy najprawdopodobniejszą wartość niewiadomej za pomocą równ. 49)

$$x = \frac{[p l]}{[p]} = \frac{p_1 l + p_2 (l + w)}{p_1 + p_2} = \frac{p_1 l + p_2 l + p_2 w}{p_1 + p_2} \quad \text{czyli}$$

$$x = \frac{l(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2} + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \cdot w = l + \frac{p_2}{p_1 + p_2} w \quad 3a)$$

Wstawiając za p_1 i p_2 wartości z 2) i 3) otrzymamy

$$x = l + \frac{l}{l + l'} w = l + \frac{l}{L} \cdot w \quad \dots \quad 4)$$

Mając wartość na x znajdziemy błąd

$$v_1 = x - x_1 = \frac{l}{L} \cdot w \quad \dots \quad 4a)$$

$$\text{ i } v_2 = x - x_2 = x - (l + w) = l + \frac{l}{L} w - l - w \quad \text{czyli}$$

$$v_2 = \frac{l}{L} w - w = w \left(\frac{l}{L} - 1 \right) = w \frac{l - L}{L} = \frac{-l'}{L} w \quad 4b)$$

Równanie 4) napisane w formie $x = l + \frac{w}{L} \cdot l$ powiada, że ażeby wyznaczyć punkt C , trzeba do błędnego pomiaru l_1 dodać poprawkę $\frac{w}{L} l$ t. zn. część odstęp w , proporcjonalną do długości l . To samo wyczytać możemy z równań 4a) i 4b).

Przykład.

Niech $AB = 300.00 \text{ m}$ wyznaczyć mamy punkt C w odstęp 50.00 m od punktu A .

Przypuśćmy, że po zmierzeniu 50.00 m od punktu A tudzież 250.000 od punktu B , otrzymamy między obu pomiarami odstęp $w = 30 \text{ mm}$

$$\text{stad } v_1 = \frac{30}{300} \cdot 50 = 5 \text{ mm według równ. 4a)}$$

$$\text{ i } v_2 = 25 \text{ mm}$$

Zatem żądany punkt znajdować się będzie według nowego pomiaru w odstęp 50.005 m od punktu A

W dalszym ciągu możemy wyrachować według równ. 62)

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2}{2-1}} = \pm \sqrt{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2} \quad 5)$$

wstawmy w równ. 5) wartości z równ. 4a) i 4b)

$$v_1 = \frac{l_2}{L^2} \cdot w^2 \text{ i } v_2 = \frac{l'^2}{L^2} \cdot w^2 \text{ i z równ. 2) i 3)}$$

$$p_1 = \frac{1}{l} \text{ i } p_2 = \frac{1}{l'} \text{ natenczas}$$

$$m = \pm \frac{w}{L} \sqrt{l+l'} = \pm \frac{w}{\sqrt{L}} \dots 6)$$

t. j. średni błąd pojedynczego pomiaru na taką jednostkę długości w jakiej wyrażone jest L .

Podobnie średni błąd średniej arytmetycznej x obliczymy według równ. 59) $M = \pm \frac{m}{\sqrt{[p]}}$

$$M = \pm \frac{w}{\sqrt{L}} \cdot \sqrt{\frac{ll'}{l+l'}} = \pm \frac{w}{\sqrt{L}} \cdot \frac{\sqrt{ll'}}{\sqrt{L}} = \pm \frac{w}{L} \sqrt{ll'} \quad 7)$$

błąd M będzie największy dla $l = l' = \frac{L}{2}$

$$\text{a mianowicie } M = \pm \frac{w}{L} \cdot \frac{L}{2} = \pm \frac{w}{2} \dots 8)$$

§ 25. Zagadnienia z pomiarów linii prostych.

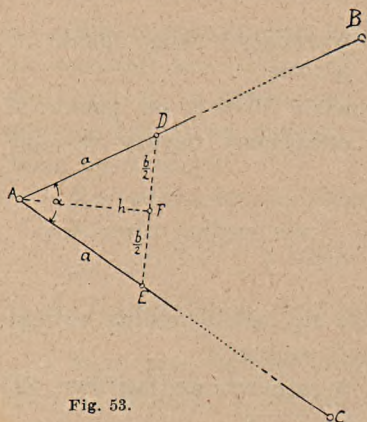


Fig. 53.

1. Za pomocą taśmy zmierzyc kąt α między dwoma kierunkami AB i AC (fig. 53).

Odmierzmy na obu kierunkach dowolną długość $a = AD = AE =$ od 20 do 100 m zależnie od długości ramion i stosunków terenu, następnie zmierzmy długość $DE = b$ i wyznaczmy punkt środkowy F na prostej DE

tak, że $DF = EF = \frac{b}{2}$

a w końcu zmierzmy długość $AF = h$. — Ponieważ trójkąt ADE jest równoramienny, więc h jest jego wysokością

i dzieli go zarazem na 2 trójkąty prostokątne przystające AFD i AFE . — Z elementów trójkąta AFE lub AFD dostaniemy:

$$\frac{b}{2} : a = \sin \frac{\alpha}{2} \text{ czyli } \frac{b}{2a} = \sin \frac{\alpha}{2} \text{ i } \frac{h}{a} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

stąd obliczymy:

$$\sin \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{h}{a} = \frac{bh}{a^2} \quad 1)$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{h^2}{a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4h^2 - b^2}{4a^2} \quad 2)$$

Mając $\sin \alpha$ lub $\cos \alpha$ obliczymy logarytmami kąt α .

Drugi sposób (fig. 54):

Na kierunku AB odmierzymy dowolną długość $AD = a$ podobnie na kierunku AC — długość $AE = b$. Zmierzymy teraz długość $DE = c$, oznaczymy kąt według fig. 54 — a następnie z wzoru Carnotta obliczymy

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \quad 3)$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \quad 4)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \quad 5)$$

gdzie $s = \frac{a+b+c}{2}$. następnie,

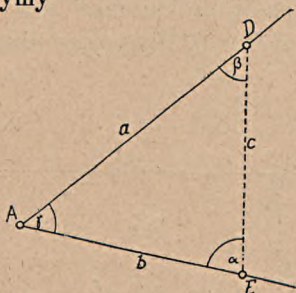


Fig. 54.

mając $\sin \frac{\gamma}{2}$ i $\cos \frac{\gamma}{2}$ obliczymy jak powyżej $\sin \gamma$

a z logarytmów dostaniemy kąt w stopniach.

2. Znaleźć długość prostej AB , jeżeli z powodu przeszkód nie można jej bezpośrednio zmierzyć.

Obierzmy (fig. 55) dowolny punkt C tak, by proste AC i BC można bezpośrednio zmierzyć, — pomierzmy je, zatem $AC = a$ $BC = b$. Odmierzmy następnie na obu kierunkach odcinki proporcjonalne $CD = \frac{a}{n}$ i $CE = \frac{b}{n}$ — natenczas, jak widać z figury, trójkąty ACB i DCE są

podobne, czyli $DE = \frac{AB}{n}$ — jeżeli więc zmierzmy długość DE to z powyższego równania obliczymy $AB = n DE$.

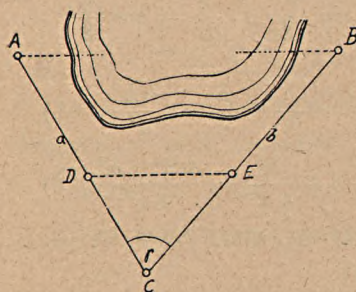


Fig. 55.

Drugi sposób rozwiązania tego zadania polega na twierdzeniu Carnotta

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

przyczem potrzeba zmierzyć boki a i b , tudzież w znany sposób $\cos \gamma$ obliczyć z pomiaru.

3. Wyznaczyć odległość dwóch punktów $A-B$, jeżeli tylko jeden z nich jest dostępny.

W punkcie dostępnym A (fig. 56) wytyczmy prostą do kierunku AB i odmierzymy na niej dowolną długość $AC = b$. Wytyczmy następnie z punktu C część kierunku CB ,

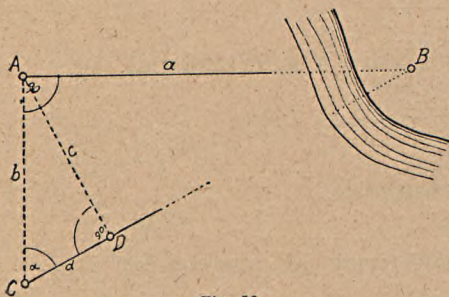


Fig. 56.

zmierzmy kąt α , to z trójkąta prostokątnego CAB możemy obliczyć

$$AB = a = b \times \operatorname{tg} \alpha$$

Drugi sposób.

Prócz prostopadłej b wytyczmy jeszcze linię AD prostopadłą do kierunku CB (fig. 56) oznaczmy teraz

$$AB = a$$

$$AC = b$$

$$AD = c$$

$$CD = d$$

Z figury widocznem jest, że $\triangle ABC \sim CDA$ zatem $a : b = c : d$ a stąd $a = \frac{bc}{d}$ — gdyż długości b, c, d , są pomierzone i znane.

Trzeci sposób rozwiązania.

Wytoczmy z punktu A (fig. 57) dowolny kierunek i długość AC — zmierzmy kąty α i β i obliczymy

$$\gamma = 180 - (\alpha + \beta) -$$

Mając długość AC , obliczymy z reguły wstaw

$$AB : AC = \sin \beta : \sin \gamma$$

a stąd niewiadomą

$$AB = \frac{AC \times \sin \beta}{\sin \gamma}$$

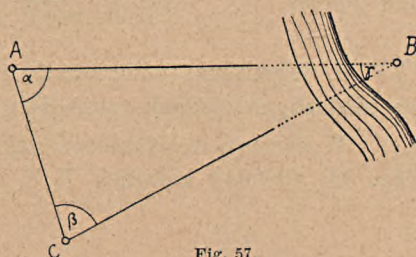


Fig. 57.

4. Wyznaczyć odległość punktów $A-B$, jeżeli jeden z nich n. p. punkt B jest nie tylko że niedostępny, ale i niewidoczny z punktu A , natomiast może być widocznym z innych punktów (fig. 58).

Przypuśćmy, że punkt B jest widoczny z punktów linii AX , poczynawszy od punktu D . Wyznamy rzut punktu B na linię AX t. j. punkt C , zmierzmy długość AC i odejmiemy ją po drugiej stronie punktu C t. j. do punktu F — tak, że $AC = CF$.

Zmierzmy teraz kąt α , to ponieważ trójkąt ABF jest

równoramienny, więc i kąt $CAB = \alpha$. Z trójkąta prostokątnego BCF obliczymy $CB = CF \times \operatorname{tg} \alpha$ a z trójkąta ACB dostaniemy:

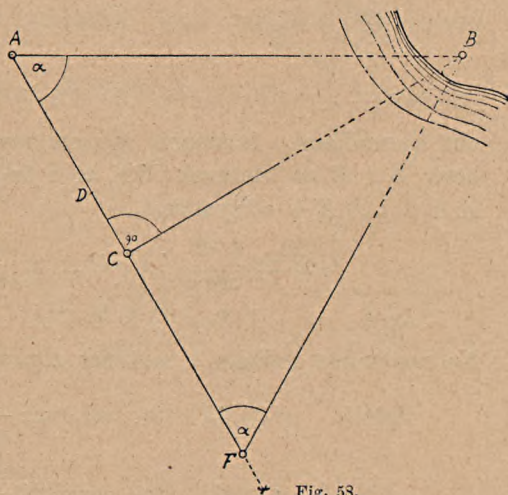


Fig. 58.

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{CF^2 \times \operatorname{tg}^2 \alpha + AC^2}$$

a ponieważ

$$A C = C F$$

więc:

$$A B = \sqrt{A C^2 \times \operatorname{tg}^2 \alpha + A C^2} = A C \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

lub wprost

$$A B = \frac{A C}{\cos \alpha}$$

5. Wyznaczyć odległość dwu punktów $A-B$ jeżeli oba są niedostępne, jednak część linii $A B$ jest dostępna.

Wytyczmy w punkcie C jako dostępnym na linii $A B$ (fig. 59) dowolny kierunek $X Y$ i zmierzmy kąt α między

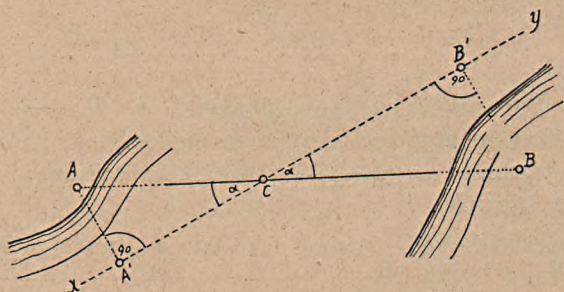


Fig. 59.

obu kierunkami. Następnie wyznaczmy rzuty A' i B' punktów A i B na kierunek $X Y$, to z trójkątów prostokątnych $A A' C$ i $B B' C$ otrzymamy

$$C B = \frac{C B'}{\cos \alpha} \quad \text{i} \quad C A = \frac{C A'}{\cos \alpha}$$

stąd

$$A B = C B + C A$$

Na podstawie zadania 1 możemy z pomiaru otrzymać $\cos \alpha$.

$$\text{Jeżeli } \alpha = 45^\circ \quad \text{to} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{" } \alpha = 60^\circ \quad \text{to} \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

6. Wyznaczyć odległość punktów $A-B$, jeżeli cała długość $A-B$ jest niedostępna.

Obierzmy punkt C (fig. 60) i wytyczmy 2 proste $C X$ i $C Y$ pod kątem prostym do siebie. Znajdźmy teraz rzuty

A' i B' punktów A i B na kierunku CX i rzuty A'' i B'' punktów A i B na kierunku CY — natenczas jak widać z figury

$$AB = \sqrt{A'B'^2 + A''B''^2}$$

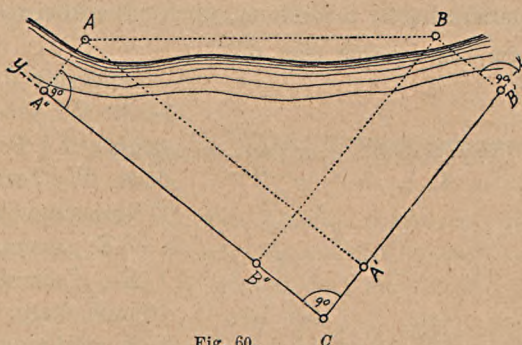


Fig. 60.

7. Wyznaczyć odległość dwu punktów nieprzystępnych $A-B$.

Obierzmy dowolną prostą $CD = a$ (fig. 61) i zmierzmy kąty $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$.

Następnie obliczymy:

z trójkąta ACD — $AD = d$

z proporcji

$$d : a = \sin(\beta + \gamma) : \sin \alpha_1$$

gdzie

$$\alpha_1 = 180 - (\beta + \gamma + \delta)$$

$$\text{stad } d = \frac{a \sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha_1} \quad 1)$$

podobnie z trójkąta CBD obliczymy bok $BD = c$ z proporcji

$$c : a = \sin \gamma : \sin \alpha_2 \quad \text{gdzie } \alpha_2 = 180 - (\gamma + \delta + \epsilon)$$

$$\text{stad } c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha_2} \quad \dots \dots \dots 2)$$

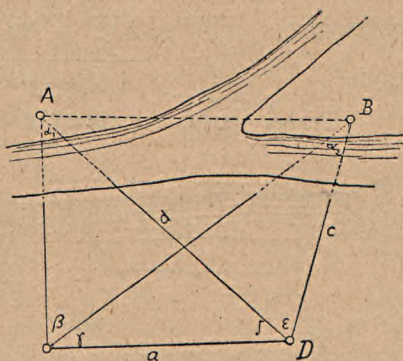


Fig. 61.

Teraz z trójkąta ADB obliczymy

$$AB^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \varepsilon \quad 3)$$

a stąd $AB = \sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos \varepsilon} \quad 4)$

Zadanie to nadaje się zwłaszcza do rozwiązywania za pomocą pomiaru kątów teodolitem, jeżeli odległości są wielkie.

Drugie rozwiązanie (fig. 62).

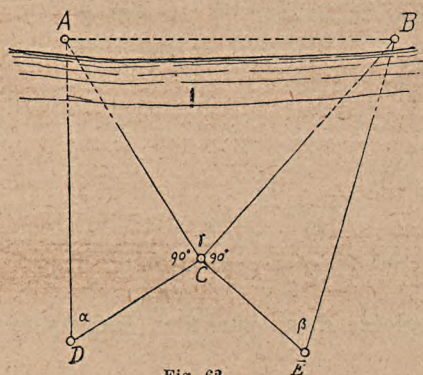


Fig. 62.

Obierzmy dowolny punkt C z którego oba punkty A i B są widoczne. Wytyczmy linię CD prostopadłą do CA i CE prostopadłą do CB . Zmierzymy następnie kąty α i β — to z trójkątów prostokątnych DCA i ECB dostaniemy

$$AC = CD \times \operatorname{tg} \alpha \quad 1)$$

$$\text{ i } BC = CE \times \operatorname{tg} \beta \quad 2)$$

Jeżeli jeszcze zmierzmy kąt γ — to z wzoru Carnotta obliczymy

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \cos \gamma$$

czyli $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \cos \gamma}$

Trzeci sposób rozwiązania (fig. 63):

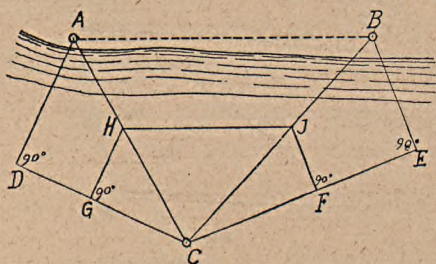


Fig. 63.

Obierzmy punkt C i dwa dowolne kierunki CE i CD . Wyznaczmy rzuty D i E punktów A i B na kierunki CD i CE — i zmierzmy długości CD tudzież CE . Odejmijmy następnie odcinki

$CG = \frac{CD}{n}$ i $CF = \frac{CE}{n}$, wytyczmy w punktach G i F prostopadłe i punkta przecięcia tych prostopadłych z kie-

runkami CA i CB , t. j. punkty I i H , natenczas, jak z figury jest widocznem, trójkąty HCI i ACB są podobne tudzież $CI = \frac{CB}{n}$ i $CH = \frac{CA}{n}$; zatem $HI = \frac{AB}{n}$ po-
zostaje więc zmierzyć długość HI z czego obliczymy

$$AB = n HI$$

§ 26. Zdjęcia małych obszarów.

Pod zdjęciem jakiegoś obszaru rozumiemy pomiar pewnych elementów, wykonany na podstawie zasad nauki miernictwa w ten sposób, że zebrane daty umożliwią narysowanie planu danego obszaru, a więc tak jego granic jak i wszelkich przedmiotów na nim się znajdujących, zatem budynków, dróg, mostów i t. p. Rysunek wykonany na podstawie pomiaru powinien być wiernym obrazem danego obszaru, naturalnie w pewnem zmniejszeniu. Na podstawie takiego rysunku czyli planu, możemy obliczyć powierzchnię tak całego obszaru jak i pojedynczych jego części.

W dalszym ciągu mówić będziemy o zdjęciach terenu, celem wykonania planów, przedstawiających tylko rzuty poziome obszarów, zaś zdjęcia topograficzne zostawimy sobie na później.

Różne metody zdjęć małych obszarów poznamy najlepiej z następujących przykładów:

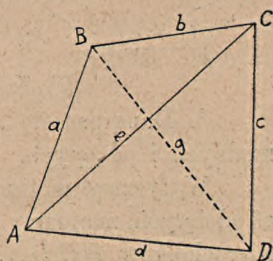


Fig. 64.

1. Daną parcelę w kształcie trapezoidu $ABCD$ (fig. 64) zdjąć i obliczyć jej powierzchnię.

Pomierzmy boki $AB = a$ $BC = b$ $CD = c$ $AD = d$ i przekątnie $BD = g$ $AC = e$.

Mając długości czterech boków i jednej przekątnej, możemy narysować ściśle oba trójkąty przyległe, tworzące razem daną figurę, druga zaś przekątnia służy do kontroli rysunku.

Za pomocą powyższych elementów narysowane oba trójkąty utworzą figurę podobną do figury w naturze, a to na podstawie podobieństwa trójkątów, gdyż wszystkie boki na rysunku, są proporcjonalne do długości boków (obu trójkątów) w naturze.

Powierznię obu trójkątów obliczymy za pomocą znanych wzorów, a mianowicie:

$$I \text{ powierzchnia } A B C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)}$$

$$II \quad \quad \quad A C D = \sqrt{s_1(s_1-c)(s_1-d)(s_1-e)}$$

gdzie $2s = a + b + c$ i $2s_1 = c + d + e$

Zatem cała powierzchnia $F = A B C + A C D$

2. Daną parcelę $A B C D E F G A$ (fig. 65) kształtu

nieumiarowego wieloboku, zdjąć, narysować i obliczyć jej powierzchnię.

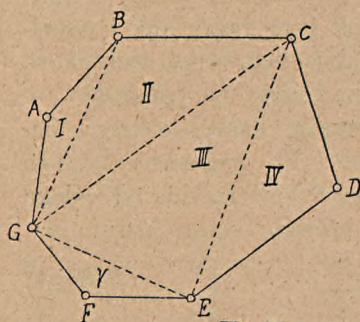


Fig. 65.

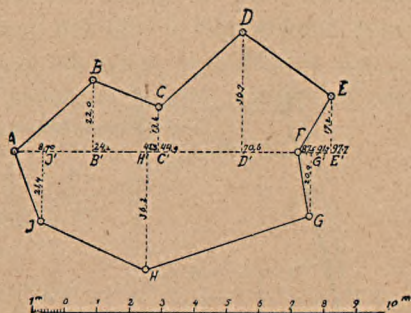
Parcelę tę zdejmujemy, dzieląc ją na trójkąty I II III IV V i mierząc wszystkie boki w każdym z trójkątów.

Powierznię obliczymy w ten sam sposób jak w przykładzie 1.

3. Daną parcelę $A B C \dots$ (fig. 66) zdjąć za pomocą rzędnych i odciętych.

Wytoczmy w tym celu oś pomocniczą n. p. $A F$ jako oś odciętych, znajdziemy za pomocą węgielnicy rzuty $B' C' D' \dots$ wierzchołków $B C D \dots$ na tę oś, zmierzmy następnie odległości tych rzutów od punktu A wypisując miary na szkiecie połowym tak, jak to wskazano na fig. 66. Zazwyczaj mierzy się od początku t. j. od punktu A w sposób ciągły, a nie między poszczególnymi punktami. Następnie zmierzmy długości rzędnych $B B' C C' D D' \dots$ wypisując ich miary wzdłuż. W polu rysuje się ile możności w skali, zaś długości mierzy się przynajmniej 2 razy, kontrolując, czy różnica obu pomiarów nie przekracza dozwolonej granicy.

Mając odcięte i prostopadłe do nich rzędne, narysujemy plan z łatwością. Powierzchnię obliczymy w ten sposób, że obliczymy pojedyncze części parceli między rzędnymi a osią odciętych jako trapezy lub trójkąty — i zesumujemy je. Przy obliczeniu części $DD'FE$ uważać należy, że od trapezu $DD'EE'$ trzeba odjąć trójkąt $EE'F$. Jeżeli obszar jest większy, to częstokroć nie wystarczy jedna oś odciętych, lecz trzeba ich kilka przyjąć, a wówczas wzajemne położenie osi należy osobno, dokładnie zdjąć.



tudzież przekątnię BD , a dla kontroli i drugą przekątnię, i w ten sposób zdjąć osie. Mając wszystkie osie starannie wytyczone, pomierzone i zdjęte, przystępujemy do zdjęć szczegółowych.

Zalomy i wierzchołki granic zdejmujemy za pomocą rzędnych i odciętych, jak to wskazano na fig. 67, przyczem

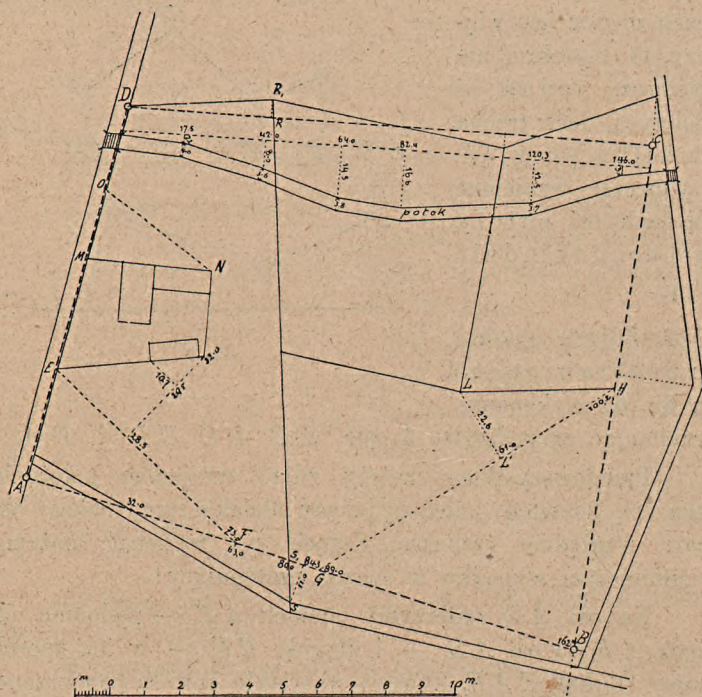


Fig. 67.

zauważyć wypada, że osie pomocnicze należy przyjmować tak, ażeby rzędne nie były zbyt długie, nawet nie należy dopuszczać by wynosiły 40 m — zwykle tylko do 30 m.

Niektóre punkty jak punkt L , lepiej jest zdjąć na oś pomocniczą GH za pomocą odciętej GL i rzędnej LL' . Grupę budynków przy osi AD zdejmujemy częściowo na oś AD , częściowo zaś za pomocą osi EF . Kierunek granicy

wyznaczono za pomocą dwóch linii prostopadłych do trasy, których długości zmierzono, jak to wskazują liczby na rysunku.

Grupę II zdjęto za pomocą osi pomocniczej $X_2 X_2$ której kierunek względem trasy ustala trójkąt ACB , i za pomocą drugiej osi DD_1 której położenie względem poprzecznej osi $X_2 X_2$ ustala trójkąt DEF .

Podobnie zdjęta jest grupa III. Nadmienić tu należy, że osie pomocnicze nawiązujemy tylko do prostych kierun-

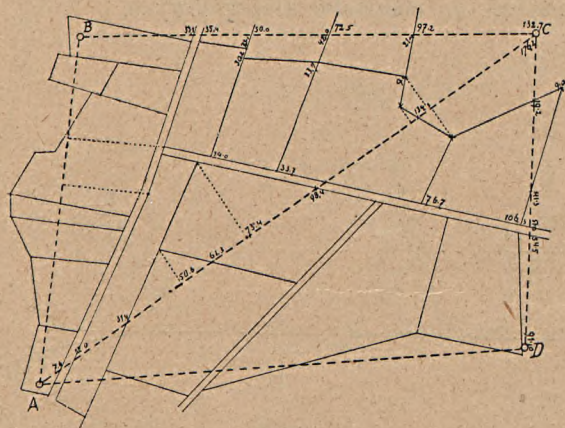


Fig. 69.

ków trasy a nigdy do wytyczonych łuków co uwidoczniło na rysunku przy grupie III.

Nawet dość wielki obszar można dokładnie zdjąć za pomocą tyczek, taśmy i węgielnicy, czego przykładem niech będzie fig. 69.

Głównymi osiami są tu linie AB BC CD i DA . Wzajemne ich położenie zdejmujemy przez podział czworoboku $ABCD$ na dwa trójkąty, zatem zmierzmy boki i przekątnię AC — szczegóły zdejmujemy za pomocą dowolnych, najkorzystniej obranych osi pomocniczych tudzież za pomocą odciętych i rzędnych, co już bardzo łatwo jest poznać z rysunku.

§ 27. Planimetria.

Powierzchnię zdjętego obszaru obliczyć możemy albo na podstawie dat zebranych przez pomiar, albo z planu, przez pomiar potrzebnych elementów za pomocą podziałki, albo też za pomocą osobnych przyrządów, t. z. planimetrów.

I. Obliczenie powierzchni figur geometrycznych na podstawie pomiaru elementów.

1. Powierzchnia trójkąta (fig. 70).

a) dane podstawa c
i wysokość h

$$F = \frac{c \cdot h}{2} \dots 1)$$

b) dane wszystkie boki a, b, c .

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots 2)$$

$$\text{gdzie } s = \frac{a+b+c}{2}$$

c) dane boki a, b
i $\angle \gamma$.

$$F = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} \dots 3)$$

2. Powierzchnia prostokąta o bokach a i b .

$$F = a \cdot b \dots 4)$$

3. Powierzchnia równoległoboku o podstawie a i wysokości h .

$$F = a \cdot h \dots 5)$$

4. Powierzchnia trapezu o bokach równoległych a, b , i wysokości h .

$$F = \frac{a+b}{2} \cdot h \dots 6)$$

5. Powierzchnia trapezoidu (fig. 71).

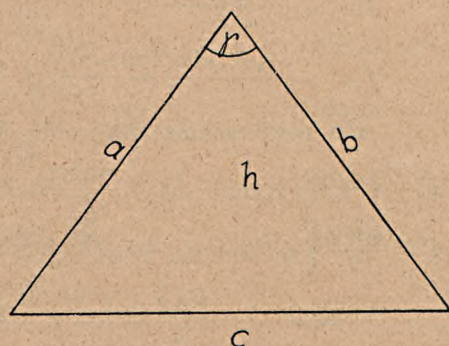


Fig. 70.

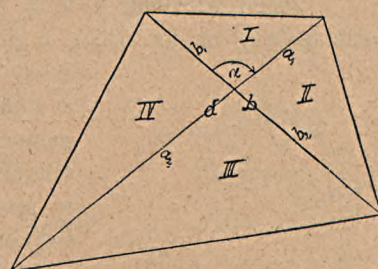


Fig. 71.

Dane są przekątne a , b , i kąt między niemi α .

Nazwijmy części przekątńi odnośnie do rysunku przez a_1 a_2 b_1 b_2 — to powierzchnie trójkątów I II III IV na które trapezoid został przekątniami podzielony, obliczymy według równania 3, a mianowicie:

$$f_I = \frac{a_1 b_1 \sin \alpha}{2}$$

$$f_{II} = \frac{a_1 b_2 \sin (180 - \alpha)}{2} = \frac{a_1 b_2 \sin \alpha}{2}$$

$$f_{III} = \frac{a_2 b_2 \sin \alpha}{2}$$

$$f_{IV} = \frac{a_2 b_1 \sin (180 - \alpha)}{2} = \frac{a_2 b_1 \sin \alpha}{2}$$

stad powierzchnia trapezoidu $F =$

$$F = f_I + f_{II} + f_{III} + f_{IV} = \frac{\sin \alpha}{2} (a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1)$$

$$F = \frac{\sin \alpha}{2} [a_1 (b_1 + b_2) + a_2 (b_1 + b_2)] = \frac{\sin \alpha}{2} (a_1 b + a_2 b)$$

$$\text{czyli } F = \frac{\sin \alpha}{2} \cdot b (a_1 + a_2) = \frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}$$

6. Obliczenie powierzchni nieregularnego wieloboku.

Jeżeli wielobok 1, 2, 3, 4, . . . 9 był zdjęty w sposób podany na fig. 72, t. j. przyjęto 3 osie pomocnicze 2—8 2—6 i 6—8 — tworzące trójkąt, a punkta wierzchołkowe zdjęto za pomocą rzędnych i odciętych, to powierzchnię całej figury obliczymy w ten sposób, że obrachujemy powierzchnię trójkąta 2—6—8, a następnie powierzchnie pozostałych trójkątów i trapezów 2—3—3', 3'—3—4—4', 4'—4—5—5' i t. d. i powierzchnie te następnie zesumujemy. — Ponieważ wszystkie daty potrzebne do obliczenia wzięte są z pomiarów, jak to na fig. 72 wskazano, więc obliczenie przeprowadzimy w następnym sposób:

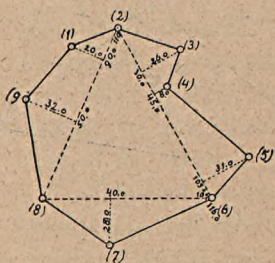


Fig. 72.

$$1. \text{ Powierzchnia trójkąta } I = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$\text{gdzie } s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{100+110+116}{2} = 163.0$$

$$s-a=63 \quad s-b=53 \quad s-c=47$$

$\log 163$	2.21219	$I = \text{N. l. } 3.70396 = 5057.66 \text{ m}^2$
$\log 63$	1.79934	
$\log 53$	1.72428	
$\log 47$	1.67210	
7.40791 : 2		
3.70395		

$$2. \text{ Pow. trójkąta II} = \frac{50 \times 32}{2} = 800.00 \text{ m}^2$$

$$3. \text{ „ trapezu III} = \frac{32+20}{2} \cdot 40 = 1040.00$$

$$4. \text{ „ trójkąta IV} = \frac{20 \times 20}{2} = 200.00$$

$$5. \text{ „ trójkąta V} = \frac{30 \times 26}{2} = 390.00$$

$$6. \text{ „ trapezu VI} = \frac{26+8}{2} \cdot 15 = 255.00$$

$$7. \text{ „ „ VII} = \frac{8+31}{2} \times 60 = 1160.00$$

$$8. \text{ „ trójkąta VIII} = \frac{31 \times 11}{2} = 170.50$$

$$9. \text{ „ „ IX} = \frac{60 \times 28}{2} = 840.00$$

$$10. \text{ „ „ X} = \frac{40 \times 28}{2} = 560.00$$

$$\text{Razem} \quad . \quad . \quad 10483.16 \text{ m}^2$$

W ten sposób obliczona powierzchnia na podstawie bezpośrednich pomiarów w polu, jest bardzo dokładną, jeżeli tylko przy pomiarze elementów zastosowaliśmy wszelkie ostrożności, a sposobu tego używa się zwykle przy pomiarze niewielkich obszarów, n. p. parcel budowlanych w miastach, gdzie grunt jest drogi, gdzie więc wymaga się wielkiej dokładności pomiaru.

7. Jeżeli powierzchnię obliczyć mamy z planu, na podstawie pomiaru elementów podziałką, to w celu uproszczenia rachunku zamieniamy figurę na jeden lub kilka trójkątów.

N. p. dana jest figura $ABCDE$ (fig. 73). W celu zamiany wieloboku $ABCDE$ na trójkąt, połączmy punkt B z D — a z punktu C wykreślmy linię CF równoległą do BD aż do przecięcia się jej z przedłużeniem boku ED

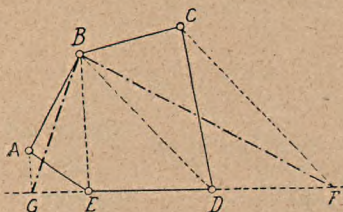


Fig. 73.

w punkcie F , natenczas figura $ABFE$ jest równoważną z danym wielobokiem. Podobnie wykreślmy z punktu A równoległą do przekątnej BE aż do przecięcia z bokiem ED — to znów trójkąt GBF jest równoważny z figurą $ABFE$ czyli dany wielobok $ABCDE$

jest równoważny co do powierzchni z trójkątem GBF — jeżeli więc zmierzmy podziałką podstawę GF i wysokość h

$$\text{to } F = \frac{G \cdot F \cdot h}{2}$$

Dokładność pomiaru powierzchni.

Rozpatrzmy teraz skutki, jakie wywołują błędy popełnione przy pomiarach długości, w obliczeniu powierzchni.

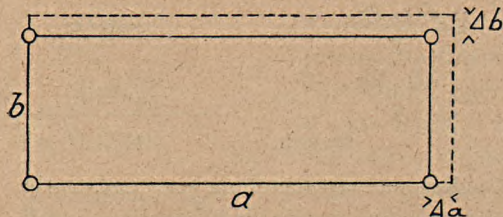


Fig. 74.

Przypuśćmy najprostszy wypadek, t. j. obliczenie powierzchni prostokąta na podstawie pomiaru boków a i b (fig. 74). Powierzchnia $F = a \cdot b$ 1)

Jeżeli pomierzone boki a i b , mają błędy $\pm \Delta a$ i $\pm \Delta b$ to powierzchnia mieć musi jakiś błąd $\pm \Delta F$, czyli

$$F \pm \Delta F = (a \pm \Delta a) \cdot (b \pm \Delta b) \quad \text{lub}$$

$$F \pm \Delta F = ab \pm a \cdot \Delta b \pm b \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b \dots 1 a)$$

ostatni wyraz, jako bardzo mały drugiego rzędu, możemy opuścić, a z równań 1a) i 1) dostaniemy

$$\pm \Delta F = \pm a \Delta b \pm b \cdot \Delta a \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Przypuśmy, że $\Delta a = \Delta b$, natomiast a jest w porównaniu do b o wiele większe; w takim razie iloczyn $a \cdot \Delta b$ musi być bardzo wielkim w porównaniu z iloczynem $b \cdot \Delta a$, a stąd wynika, że błąd Δb wywiera wielki wpływ na obliczenie powierzchni, bo może być wielokrotnie powiększony zależnie od czynnika a , czyli większej długości. Dlatego, gdy mamy obliczyć powierzchnię parceli długiej a wąskiej, to szerokość jej należy zmierzyć dokładnie na gruncie, podczas gdy długość wziąć można z planu, bo błąd stąd powstały, będzie miał wpływ nieznaczny. Powyższe przypuszczenie, że $\Delta a = \Delta b$ jest słusznem gdy wymiary bierzemy nie z gruntu przez pomiar bezpośredni, lecz z planu, za pomocą podziałki, łatwo bowiem zrozumieć, że czy zmierzmy podziałką na planie długość 20 mm czy 200 mm to w obu razach popełniamy ten sam błąd zależny tylko od dokładności odczytu, na co długość wpływać nie może.

Jeżeli Δa i Δb są średnimi błędami pomiarów, to średni błąd powierzchni obliczymy z znanych wzorów 17) i 18) mianowicie: $\Delta F = \pm \sqrt{(a \Delta b)^2 + (b \Delta a)^2} \quad . \quad . \quad 3)$ gdzie ΔF oznacza średni błąd powierzchni.

Co do błędów Δa i Δb , możemy robić pewne założenia i stosownie do tego rozważać, jaki będzie wtedy błąd w powierzchni.

1. Przypuśmy, że $\Delta a = \Delta b = \Delta c \quad . \quad . \quad . \quad 4)$ t. z. że błąd w pomiarze długości jest stały i niezależny od samej długości, co jak pierwej wytłumaczyliśmy, ma miejsce przy pomiarze długości za pomocą podziałki na planie; wstawiając wartości z równ. 4) w równ. 3 otrzymamy

$$\Delta F = \pm c \sqrt{a^2 + b^2} \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Jeżeli a i b są bokami prostokąta, to z równ. 5 widzimy, że $\sqrt{a^2 + b^2}$ oznacza długość przekątnej tego prostokąta, a zatem, że błąd powierzchni jest wtedy proporcjonalny do długości tej przekątnej.

więc błąd w naturze obliczymy, mnożąc liczby wyjęte z tabliczki przez 100 i uważając wynik za metry.

Przypuścimy, że mamy plan dwu parcel w kształcie prostokątów o stosunku boków $n = 2$. Jeżeli powierzchnia rysunku pierwszej parceli wynosi 1 cm^2 czyli 100 m^2 w naturze (w skali 1:1000), to błąd w obliczeniu jej wynosi 0.02 cm^2 na rysunku, czyli 2 m^2 w naturze, zatem 2% — natomiast druga parcela niech ma 900 cm^2 powierzchni, czyli 90.000 m^2 w naturze, to błąd w obliczeniu jej wyniesie 0.47 cm^2 na rysunku, czyli 47 m^2 w naturze, co równa się zaledwie 0.05% a więc bardzo mało w porównaniu z poprzednim błędem.

2. Przypuścimy, że błąd pomiaru długości jest proporcjonalny do samej długości, t. j.

$$\Delta a = c \cdot a \quad \text{i} \quad \Delta b = c \cdot b \quad (10)$$

natenczas, po wstawieniu tych wartości w równ. 5) otrzymamy

$$\Delta F = \pm c \sqrt{(ab)^2 + (ab)^2} = \pm c \cdot F \sqrt{2} \quad (11)$$

czyli błąd powierzchni byłby proporcjonalny do samej powierzchni, a wcale niezależny od jej kształtu. Z teorii błędów jednak wiemy, że takiego wypadku właściwie nie ma, by błąd długości był proporcjonalny do tejże długości, o czem jeszcze powiemy w dalszym ciągu.

3. Przyjmijmy, że błąd pomiaru długości jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z długości t. j. do $\sqrt{l}$, co właśnie ma miejsce jak wiemy, przy bezpośrednich pomiarach w polu, czyli

$$\Delta a = k \cdot \sqrt{a} \quad \text{i} \quad \Delta b = k \sqrt{b} \quad . . . \quad (12)$$

Natenczas otrzymamy

$$\Delta F = \pm k \sqrt{a^2 b + b^2 a} = \pm k \sqrt{ab(a+b)} \quad (13)$$

Wprowadziwszy tu wartości z równ. 7) to

$$\Delta F^4 = k^4 \cdot a^2 b^2 (a^2 + b^2 + 2ab)$$

$$\Delta F^4 = k^4 \cdot F^2 \left(\frac{F + F \cdot n}{n} + 2F \right)$$

$$\Delta F^4 = k^4 \cdot F^3 \left(\frac{1+n}{n} + 2 \right)$$

$$\Delta F^4 = k^4 F^3 \left(\frac{1 + n^2 + 2n}{n} \right) = k^4 F^3 \frac{(1+n)^2}{n}$$

$$\text{czyli } \Delta F = \pm k \sqrt[4]{F^3} \sqrt[4]{\frac{1}{n}} \sqrt{1+n} \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

Zależnie od wartości stosunku boków n otrzymamy różne wartości na ΔF , n. p.

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla kwadratu } n = 1 \\ \Delta F = \pm k \sqrt[4]{F} \cdot \sqrt{2} = \pm 1.414 k \sqrt[4]{F^3} \\ \text{dla prostokąta, dla } n = 10 \text{ czyli } n = 0.1 \\ \Delta F = \pm k \sqrt[4]{F^3} \sqrt[4]{12.1} = \pm 1.865 k \sqrt[4]{F^3} \\ \text{dla } n = 20 \text{ czyli } n = 0.05 \\ \Delta F = \pm k \sqrt[4]{F^3} \sqrt[4]{22.05} = \pm 2.1 k \sqrt[4]{F^3} \end{array} \right\} \quad 15)$$

Przykłady te wskazują, że ΔF rośnie ze wzrostem wartości n .

Przyjawszy dla pomiaru łatami lub taśmą średni błąd na jednostkę $k = 0.005$, czyli $\Delta a = 0.005 \sqrt{a}$ i wstawiwszy to w równ. 15), otrzymamy (według Jordana str. 91)

$$\left. \begin{array}{ll} \text{dla } n = 1 & \Delta F = 0.00707 \sqrt[4]{F^3} \\ n = 10 & \Delta F = 0.00932 \sqrt[4]{F^3} \\ n = 20 & \Delta F = 0.0105 \sqrt[4]{F^3} \end{array} \right\} \quad 16)$$

Wzory powyższe mają znaczenie teoretyczne, bo w praktyce z powodu innych jeszcze źródeł, błędy te będą większe. Zaznaczyć tu należy, że według przyjęcia pod 2) rachować nigdy nie możemy, jedynie tylko na podstawie rozumowania wyłuszczonego pod 1) gdy mierzymy powierzchnie na podstawie pomiaru elementów na planie, lub według 3) gdy elementy mierzymy w polu bezpośrednio. Na podstawie doświadczeń przyjęto pewne granice błędów, n. p. austriacka ustawa katastralna dopuszcza $\frac{1}{2}\%$ błędów powierzchni, co jednak nie jest uzasadnionem, bo błąd i obliczenie powierzchni zależy jak to poprzednio widzieliśmy, od kształtu tej powierzchni, a zatem nie powinno się przyjmować dla różnych kształtów i przypadków, tej samej reguły.

Ustawa pruska dozwala na błąd Δ , obliczony według wzoru $\Delta = 0.01 \sqrt{60 F + 0.02 F^2}$ gdzie F oznacza daną powierzchnię w arach ($100 m^2$) zaś Δ oznacza dozwoloną różnicę dwu pomiarów powierzchni, i wyraża się także w arach.

II. Planimetry.

Obliczenie danej powierzchni na podstawie pomiarów wziętych wprost z gruntu (bezpośrednich), jest bardzo dokładne. Powierzchnie gruntów drogich, n. p. w miastach, oblicza się zawsze z pomiarów bezpośrednich. Częściej jednak zmuszeni jesteśmy obliczać powierzchnie z planów, a wtedy używamy do tego osobnych przyrządów, t. z. planimetrów, których mamy dwa rodzaje. Jedne z nich są to przyrządy ułatwiające rozkładanie danej parceli na trapezy lub trójkąty, obecnie już bardzo rzadko używane; drugie, właściwe planimetry konstrukcyi Wetliego, Amslera i Coradiego. Zwłaszcza dwie ostatnie konstrukcye są bardzo rozpowszechnione.

Planimetr biegunowy Amslera.

Opiszemy tu tylko ten jeden planimetr jako najczęściej używany z powodu swej taniości, a znając zasadę jego i sposób obliczania, łatwo zorientujemy się w innej konstrukcyi.

Planimetr ten, wynaleziony przez prof. Amslera z Szafuzy w r. 1856, ulepszony następnie przez Coradiego, przedstawiony jest na fig. 75. Ramię R' opatrzone ostrzem „o” służącym do ustalenia przyrządu, nazywa się ramieniem biegunowym czyli biegunem, drugie zaś ramię R , opatrzone również ostrzem „w”, służącym do obwodzenia danej powierzchni na planie, zwie się wodzidłem. Oba ramiona są połączone przegubem S . Na ramieniu wodzącym, lub jak w danym wypadku, na jego przedłużeniu, umieszczone jest kółko A , poruszające się po papierze, stosownie do ruchów wodzidła. Z kółkiem A połączone jest za pomocą śruby bez końca i kółka zębatego liczydło L , wskazujące ilość obrotów kółka A . W starszej konstrukcyi planimetru, oś kółka A musiała być równoległa do ramienia wodzącego, w nowszej zaś

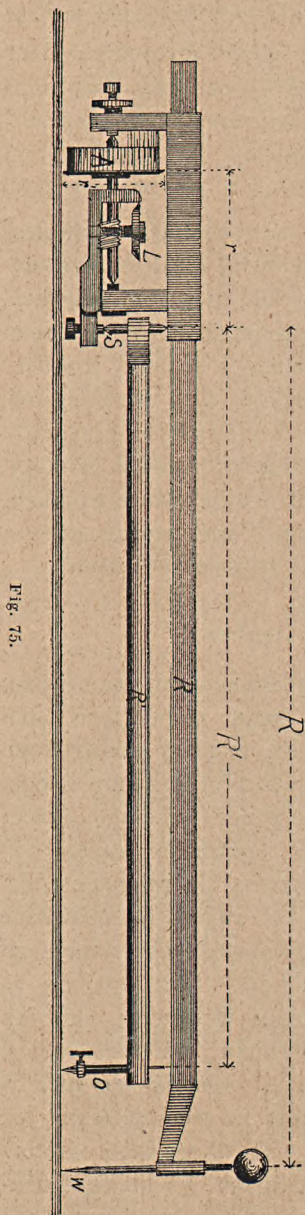


Fig. 75.

konstrukcji, która pozwala na przerzucenie wodzidla ponad ramieniem biegunowem, warunek ten nie jest koniecznym, natomiast wykonać trzeba 2 pomiary z przerzuceniem wodzidla i obliczyć ich średnią arytmetyczną.

Kółko *A* nie zawsze będzie się obracało mimo ruchu wodzidla, n. p. gdy wodzidło odbywa ruch w kierunku prostopadłym do płaszczyzny kółka, to kółko wcale się nie obróci. Gdy wodzidło odbywa ruch obrotowy około swego przegubu, to kółko *A* się obraca, i tem więcej zrobi obrotów przy obwodzeniu tej samej powierzchni, im krótsze jest ramię wodzące.

W wypadkach pośrednich t. j. gdy ramię wodzące odbywa ruch obrotowy i postępowy w jakimkolwiek kierunku, kółko *A* będzie się po części obracało, po części ślizgało po papierze.

Pomijając teorię planimetru celem uniknięcia stosowania wyższej matematyki powiemy, że powierzchnia obwodzona przez wodzidło, jest proporcjonalna do ilości obrotów *n* kółka *A*. Rozróżnić tu musimy 2 wypadki: 1) przy pomiarze powierzchni t. j. przy obwodzeniu granic danej powierzchni umieszczamy biegun zewnętrzny mierzonej powierzchni i 2) przy pomiarze umie-

szczamy biegun wewnątrz powierzchni mierzonej. W pierwszym razie nazwijmy powierzchnię przez P_z , w drugim przez P_w , to do obliczenia powierzchni służą wzory

$$P_z = C_1 n_1 \dots \dots \dots 1)$$

gdzie n_1 jest ilością obrotów kółka A , odczytaną na liczydło L , zaś C_1 jest stałą planimetru, mianowicie

$$C_1 = 2 R r' \pi \dots \dots \dots 2)$$

R jest długością wodzidla od środka przegubu do ostrza, r' jest promieniem kółka A , $\pi = 3.141592$.

W drugim razie

$$P_w = C_1 n_2 + C_2 \dots \dots \dots 3)$$

We wzorze tym C_1 znamy z równ. 2), następnie n_2 jest ilością obrotów kółka A , zaś C_2 jest drugą stałą planimetru

$$\text{i} \quad C_2 = \pi (R'^2 + R^2 - 2 R r) \dots \dots \dots 4)$$

R' jest długością ramienia biegunowego

R " " " wodzącego

r " " " odstepu płaszczyzny kółka A od

środku przegubu.

Znając już teorię błędów zrozumiemy łatwo, że obliczenie stałych C_1 i C_2 z bezpośrednich pomiarów długości R , R' , r i r' — byłoby nadzwyczaj żmudne, bo wymagałoby licznych i bardzo dokładnych spostrzeżeń i wyrównania błędów. Mamy jednak sposób praktyczny, prowadzący prędko do celu, a mianowicie:

Powierzchnię o znanej wielkości obwodzimy wodzidłem, umieszczając biegun zewnątrz — wtedy $P_z = C_1 n_1$ 5) gdzie P_z i n_1 są ilościami znanymi, zatem z równania tego obliczymy niewiadomą

$$C_1 = \frac{P_z}{n_1} \dots \dots \dots 6)$$

Następnie umieszczamy biegun wewnątrz tej powierzchni i znów ją obwodzimy, natenczas $P_w = C_1 n_2 + C_2$ 7) gdzie ilość C_2 jest niewiadomą, reszta jest znana.

Odejmijmy równ. 7) od równ. 5) pamiętając, że mamy do czynienia zawsze z tąsamą powierzchnią, zatem $P_z = P_w$ więc $0 = C_1 n_1 - C_1 n_2 - C_2$ stąd $C_2 = C_1 (n_1 - n_2)$

a wstawivszy z równ. 6) $C_1 = \frac{P_z}{n_1}$ otrzymamy

$$C_2 = \frac{P_z}{n_1} (n_1 - n_2) = P_z \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \dots 8)$$

gdzie n_1 , n_2 i P_z są znane.

Powtarzając doświadczenie kilka razy, i biorąc z otrzymanych wartości na C_1 i C_2 średnią arytmetyczną, wyznaczymy stałe planimetru z wystarczającą dokładnością.

Do każdego przyrządu dodany jest krążek metalowy, z wyrzniętym na nim rowkiem na obwodzie koła i podaną powierzchnią tego koła; po tym rowku obwodzimy wodzidło planimetru przy obliczaniu stałych, lub możemy sobie podobne koło dowolnej powierzchni wykreślić.

Jak wspomnieliśmy wyżej, planimetr Amslera, ulepszony przez Coradiego, ma ramię wodzące urządzone do przerzucania. Obwodzimy więc daną powierzchnię i odczytujemy liczbę obrotów n — następnie przerzucamy wodzidło ponad ramieniem biegunowem, i znów obwodzimy powierzchnię odczytując na liczydło ilość obrotów n' — z tych dwóch odczytów obliczymy średnią arytmetyczną $\frac{n+n'}{2}$ którą wprowadzamy do wzorów na obliczenie powierzchni w miejsce n_1 lub n_2 .

Podwójny odczyt eliminuje błąd powstały wskutek nierównoległości osi kółka A do ramienia wodzącego.

Ilość obrotów kółka A zależna jest przedewszystkiem od jego promienia r' , a następnie od długości ramienia wodzącego R . Promień r' jest stały, natomiast wodzidło jest tak urządzone, że da się przedłużać lub skracać, a tem samem ilość obrotów kółka A przy obwodzeniu tej samej powierzchni może być zmienną, jeżeli zmieniać będziemy długość R . Ramie wodzące jest skonstruowane z rurki wzdłuż przeciętej, w którą wchodzi druga, ruchoma rurka, dająca się wysuwać i w dowolnym punkcie do stałej rurki przytwierdzać za pomocą śrubki. Za pomocą takiego urządzenia można tak dobrać długość ramienia wodzącego, że stała C_1 będzie liczbą okrągłą n. p. 200 lub 500 i t. p.

Oznaczmy długość ramienia wodzącego przez R_1 i obliczmy na podstawie spostrzeżeń, w znany już sposób stałą C_1 . Im krótsze jest ramię wodzące, tem większą będzie ilość obrotów n , kółka A , czyli tem mniejszą będzie stała C_1 co widać z wzoru $P = C_1 n_1$ — z tego wynika, że stała C_1 jest w prostym stosunku do długości R_1 .

Zmieńmy teraz długość ramienia wodzącego na R_2 — natenczas dostaniemy inny odczyt n_2 i inną stałą C_1' .

Z równania 2) wynika:

$$\begin{array}{l} C_1 = 2 R_1 r' \pi \\ \text{i podobnie } C_1' = 2 R_2 r' \pi \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} C_1 = 2 R_1 r' \pi \\ C_1' = 2 R_2 r' \pi \end{array}} \right\} \quad 9)$$

$$\text{a stąd} \quad \frac{C_1}{C_1'} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 10)$$

jako związek między C_1 , C_1' i R_1 , R_2 .

Z równania tego, znając stałą C_1 i promień R_1 a przyjąwszy okrągłą wartość na C_1' — znajdziemy odpowiadającą jej długość ramienia wodzącego R_2 . Trudność leżałaby tutaj w odmierzeniu długości R_2 , czemu jednak zaradzono przez odpowiednie urządzenie planimetru. Na wysuwalnej części ramienia wodzącego znajduje się podziałka, dla której koniec rurki zewnętrznej jest wskazówką. Ustaliwszy więc za pomocą śrubki oba ramiona, odczytamy stan podziałki odpowiadający długości ramienia R_1 . Teraz zmienimy długość ramienia wysuwając ruchome ramię o pewną długość a , czyli $R_2 = R_1 + a$ gdzie a oznacza pewną ilość odstępów podziałki. Dla obu ramion t. j. dla R_1 i $R_1 + a$ znamy stałe C_1 i C_1' i odczyty n_1 i n_2 — zatem dla tej samej powierzchni P otrzymamy:

$$\begin{array}{l} P = C_1 n_1 = 2 R_1 r' \pi n_1 \\ \text{i } P = C_1' n_2 = 2 (R_1 + a) r' \pi n_2 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} P = C_1 n_1 = 2 R_1 r' \pi n_1 \\ P = C_1' n_2 = 2 (R_1 + a) r' \pi n_2 \end{array}} \right\} \quad 11)$$

stąd otrzymamy $R_1 n_1 = (R_1 + a) n_2$ czyli $R_1 (n_1 - n_2) = a n_2$

$$\text{zatem} \quad R_1 = \frac{a n_2}{n_1 - n_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad 12)$$

t. j. długość ramienia wodzącego, wyrażoną w jednostkach podziałki na ramieniu będącej, czyli w tych samych jednostkach, w których wyraziliśmy długość a . Chcąc otrzymać

stałą C_0 w pewnej okrągłej liczbie, musimy obliczyć odpowiadającą jej długość R_0 według równ. 10) $\frac{C_0}{C_1} = \frac{R_0}{R_1}$

$$\text{czyli} \quad R_0 = R_1 \frac{C_0}{C_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

wstawmy tutaj wartość za R_1 z równ. 12)

$$\text{to} \quad R_0 = a \cdot \frac{n_2}{n_1 - n_2} \cdot \frac{C_0}{C_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

Ponieważ znamy stan wskazówki dla długości R_1 , więc teraz, chcąc mieć długość ramienia R_0 , zmienimy poprzednią długość o różnicę $R_1 - R_0$ i stan wskazówki zapiszemy (ten stan wskazówki odpowiada długości ramienia R_0 więc i stałej żądanej C_0). Naturalnie że dla różnej skali będzie stała C_1 różną, o czym pamiętać należy przed przystąpieniem do pomiaru.

Przy użyciu planimetru zważać należy, by go ustawić tak, ażeby kąt rozwarcia obu ramion przy obwodzeniu figury mieścił się w granicach 60° do 120° . Obwodzić należy figurę raz w jednym kierunku, drugi raz w przeciwnym, następnie ramię wodzące przerzucić i tak samo 2 razy obwieść figurę. Z obu podwójnych odczytów należy obliczyć średnią arytmetyczną.

Planimetr Amslera nie daje bardzo dokładnych rezultatów, które zależne są częstokroć od rodzaju papieru, bo od tego zależy ślizganie się kółka. Planimetr ten wymaga częstego kontrolowania stałej C_1 , bo ta może się zmieniać przy różnych gatunkach papieru, a nadto większych powierzchni mierzyć nim nie można, co wynika z jego konstrukcyi, a tak samo przy pomiarze bardzo małych powierzchni daje on za wielkie błędy. Jednak jest najtańszym i ostatecznie błędy pomiaru mieszczą się w granicach dozwolonych, dlatego też jest on bardzo rozpowszechniony.

O wiele dokładniejszym i wogóle najlepszym dotychczas, jest t. z. planimetr precyzyjny Coradiego. Można nim mierzyć bardzo małe i bardzo wielkie powierzchnie bo o szerokości rzeczywistej 40 *cm* a dowolnej długości, a zawsze z jednakową, nadzwyczajną dokładnością, bo 10 razy większą

niż poprzednio opisanym planimetrem. Przyrząd ten jest drogi i dlatego rzadko używany. Znając planimetr biegunowy, łatwo już będzie zastosować planimetr Coradiego, dlatego opis jego opuszczamy.

Dokładność planimetru biegunowego wynosi $\frac{1}{250}$ powierzchni mierzonej — zaś planimetru Coradiego $\frac{1}{2500}$.

§ 28. Niwelacya.

Jest to pomiar względnej wysokości punktów powierzchni ziemi. Ustawmy w dwu punktach A i B (fig. 76) pionowo dwie łaty opatrzone podziałem na centymetry, zaś linia CD przecinająca obie łaty w punktach C i D niech będzie śladem płaszczyzny prostopadłej do pionu punktu J — w takim razie różnicę wysokości h punktów A i B obliczymy według równania $h = AC = CD - BD$.

Do wyznaczenia płaszczyzny poziomej, prostopadłej do pionu danego punktu, użyć możemy bardzo prostego przyrządu, bo zwykłej łaty, którą ustawia się do poziomu za pomocą libeli (opis. w § 31). Sposobu tego, przedstawionego na fig. 77 używa się przy mniej ważnych pomiarach i dla niewielkiej odległości punktów — max. do 40 m.

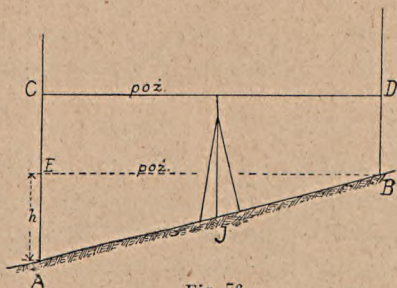


Fig. 76.

Celem wyznaczenia względnej wysokości punktu B nad A (fig. 77) czyli spad, ustawiamy w obu punktach łaty pionowo, następnie ustawiamy łatę E poziomo za pomocą libeli l w dowolnej zresztą wysokości, i odczytujemy na łatach pionowych wysokości h_1 i h_2 . Z rysunku widać, że różnica wysokości h obu punktów równa się różnicy obu odczytów h_1 i h_2 t. j. $h = h_1 - h_2$.

Uważając teren $A-B$ za jednostajnie nachylony, obliczyć możemy jego spad s na jednostkę długości $s = \frac{h}{L}$.

Jeżeli h wyrazimy w cm a L w m , to otrzymamy spad w cm na 1 m dług. czyli w procentach $s^0_0 = \frac{h^{cm}}{L^m}$.

Wyrażając h w mm a L w m , otrzymamy spad w mm na 1 m czyli spad pro mille — $s^0_{00} = \frac{h^{mm}}{L^m}$.

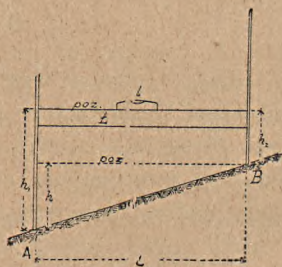
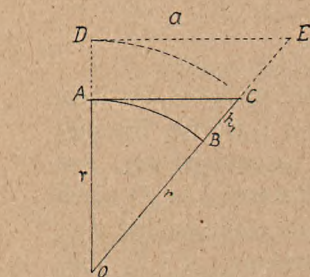


Fig. 77.

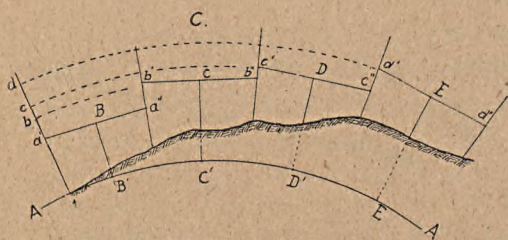
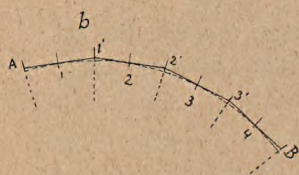


Fig. 78 a b i c.

Jeżeli różnicę wysokości wyznaczyć mamy z większą dokładnością i punkty znajdują się w większej odległości, wtedy używa się specjalnych do tego przyrządów, t. zw. niwelacyjnych, których opis podamy w dalszym ciągu.

Rozważmy teraz, czy przy pomiarze wysokości należy uwzględnić kształt ziemi i w jaki to zrobić sposób. Przypuśćmy w tym celu, że ziemia jest kulą, której przekrój przedstawia łuk AB na fig. 78 a. Łuk ten jest zarazem poziomem rzeczywistym czyli geodezyjnym wszystkich punktów ziemi na tym przekroju leżących, zaś styczna AC

przedstawia poziom pozorny punktu A . Punkty A i B leżą zatem na jednym poziomie rzeczywistym. Wystawmy w punkcie B pion, to przejść on musi przez środek kuli O , a zarazem przetnie poziom pozorny w punkcie C tak, że gdybyśmy mierzyli wysokość punktu B względem punktu A od poziomu pozornego, to okazałoby się, że punkt B leży niżej o długość $h_1 = BC$, podczas gdy, jak wiemy, oba te punkty leżą na tym samym poziomie rzeczywistym, więc ani wyżej, ani niżej jeden od drugiego. Łatwo zrozumieć, że im większą byłaby odległość obu punktów, tem większą okazałaby się różnica ich wysokości mierzona od poziomu pozornego, czyli poziom pozorny powoduje błędy w pomiarze wysokości, a wielkość tych błędów łatwo obliczyć na podstawie fig. 78 *a*, mianowicie otrzymamy następujące relacje:

$$OC = r + h_1 = \sqrt{l^2 + r^2} \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

gdzie $l = AC$

$$\text{czyli } h_1 = \sqrt{r^2 \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)} - r = r \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}} - r \quad 2)$$

Za pomocą powyższego wzoru 2) rozwiniętego w szeregu Newtona, obliczymy wielkości błędów h_1 przyjmując różne wartości na l , mianowicie

dla	$l = 100 \text{ m}$	250 m	1000 m
otrzymamy	$h_1 = 0.0008 \text{ m}$	0.005 m	0.08 m

t. z. różnica między poziomem pozornym a rzeczywistym, na długości 1000 *m* dochodzi do 8 *cm*, zatem jest zbyt wielką, jak to później wykażemy, dla niwelacyi. Wykonując pomiar wysokości za pomocą poziomu pozornego, musielibyśmy przy nieco większych odległościach punktów, uwzględniać kształt ziemi rachunkiem i wprowadzać poprawki.

Wyobraźmy sobie teraz, że między punktami A i B (fig. 78 *b*), leżącymi na poziomie rzeczywistym w znacznej od siebie odległości, wyznaczmy punkty $1' 2' 3' \dots$ w odległościach jeden od drugiego około 100 *m*, i w punktach tych wystawmy piony, to ponieważ odległości ich są w porównaniu z wielkością kuli ziemskiej nadzwyczaj małe, więc piony sąsiednie uważać możemy za równoległe do siebie.

Następnie w punktach środkowych 1, 2, 3, ... wyznaczmy styczne do łuku AB , to styczne te, zawarte między odpowiednimi pionami, uważać możemy za elementa łuków z powodu ich krótkości, czyli poszczególne części poziomu pozornego, t. j. $A-1'$, $1'-2'$, $2'-3'$, $3'-B$, są zarazem częściami poziomu rzeczywistego.

Postępując w ten sposób na dłuższych przestrzeniach, jesteśmy w możności wyznaczyć za pomocą poziomów pozornych, wielobok bardzo zbliżony do kształtu poziomu rzeczywistego i za pomocą niego mierzyć wysokości odległych od siebie punktów, a tem samem uwzględnić wprost kształt ziemi, nie uciekając się do poprawek rachunkowych. W jaki sposób wyznaczyć można takie krótkie poziomy pozorne, poznamy przy opisie instrumentów niwelacyjnych, przyczem również wykazemy, że ze względów praktycznych nie używa się dłuższych celowych (czyli właśnie poziomów pozornych) jak do 100 m najwyżej. Jak z codziennych obserwacji wiemy, ziemia nie jest ani gładką kulą lub elipsoidą, lecz powierzchnia jej jest pofalowana, ma i niziny i wysokie góry; wypadałoby więc rozważyć jeszcze, czy wysokość nie wpływa na niwelację. W tym celu przypuśćmy, że punkt D na fig. 78a znajduje się 1000 m wyżej nad punktem A , tudzież że styczna DE jest równoległą do AC , i obliczmy jej długość pod warunkiem, że punkt E leży na pionie punktu C .

Przyjmijmy średni promień ziemi $r = OA = 6\,370\,000$ m natenczas $OD = r + 1\,000$ m $= 6\,371\,000$ m, tudzież $AC = 100$ m, to z figury otrzymamy:

$$AC : DE = 6\,370\,000 : 6\,371\,000$$

$$\text{czyli } 100 : DE = 6\,370 : 6\,371$$

$$\text{a stąd } DE = 100.01 \text{ m}$$

Już ten przykład wykazuje, że wpływ wysokości na powierzchni ziemi jest bardzo mały, że pion w odstępnie 100 m uważać możemy w przykryce na równoległy bo styczne między nimi zawarte, a w pionowym odstępnie 1000 metrowym od siebie, różnią się zaledwie o 1 cm w długości, że więc wpływ ten wogóle pominąć możemy.

Na fig. 78 *c* przedstawia linia łamana przekrój terenu płaszczyzną pionową, łuk AA' przedstawia poziom rzeczywisty punktu 1 t. j. przekrój kuli o promieniu odpowiadającym punktowi 1 na jej powierzchni. Wyznamy pion $BB' CC' \dots EE'$ w punktach pośrednich, i prostopadłe do nich płaszczyzny, których śladami na rysunku są linie $a'a'' b'b'' c'c'' \dots$ to linie te przedstawiają nam poziomy pozorne, czyli, gdy nie są dłuższe nad 100 *m* każdy, są zarazem elementami łuków współśrodkowych z łukiem AA' i za pomocą nich znaleźć możemy różnice poziomów w punktach E i B , następnie zaś i punktów terenu, jak to później poznamy.

Jeżelibyśmy ziemię uważali za elipsoidę obrotową, to uwzględnienie kształtu ziemi byłoby trudniejsze i byłoby koniecznem wprowadzać poprawki rachunkowe. Przy zwykłych jednak pracach, n. p. przy trasach, zdjęciach miast i t. p. jest to niepotrzebne, tak, że w tych wypadkach przyjęcie kulistego kształtu ziemi najzupełniej wystarcza.

W rezultacie powiedzieć możemy, że sama metoda niwelacyi uwzględnia mechanicznie kulisty kształt ziemi i nie troszcząc się więcej o to, przejść możemy do opisu pracy w polu.

I. Profil podłużny.

Profilem podłużnym nazywamy zdjęcie pewnej linii na powierzchni ziemi, n. p. osi trasy kolei, drogi, kanału lub rzeki. Do takiego zdjęcia zaliczamy: *a*) pomiar długości danej linii z uwzględnieniem odległości poszczególnych na niej punktów, *b*) pomiar kierunków z jakich ta linia się składa, *c*) pomiar wysokości poszczególnych punktów. O pomiarze długości mówiliśmy poprzednio, o pomiarze kierunków mówić, będziemy nieco później, a teraz przystąpimy do opisu pomiaru wysokości.

Przedewszystkiem linia mająca być zdjętą, musi być dokładnie wytyczoną, a punkty których wysokości mamy pomierzyć, powinny być w polu stosownie oznaczone i uwidocznione. W tym celu, w punktach charakterystycznych

t. j. na załamaniach terenu wbija się paliki nieco wystające nad teren, a obok palika, z lewej strony nieco na przodzie wbija się deszczulkę, t. zw. świadek, na której wypisuje się nazwę palika, więc albo jego numer, albo, co częściej ma miejsce, odległość danego punktu od początku linii wyrażoną

w kilometrach, hektometrach i metrach. Fig. 79 przedstawia taką deszczulkę, na której wypisano odległość $2\text{ km} + 235\text{ m}$.

Kilometry i hektometry oznacza się w polu większymi palikami, a gwóźdź wbity w głowę palika oznacza dany punkt.

Mając linię wytyczoną, przystępujemy do niwelacji, której zasadę

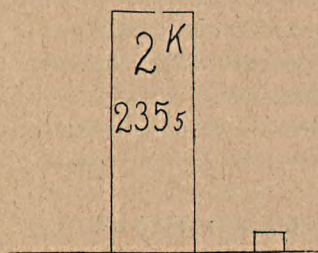


Fig. 79.

poznamy na następujących kilku przykładach.

Przypuśćmy, że mamy pomierzyć względną wysokość trzech punktów $A B C$ (fig. 80).

Ustawmy w punkcie J_1 między punktami B i C instrument niwelacyjny, za pomocą którego wyznaczyć możemy

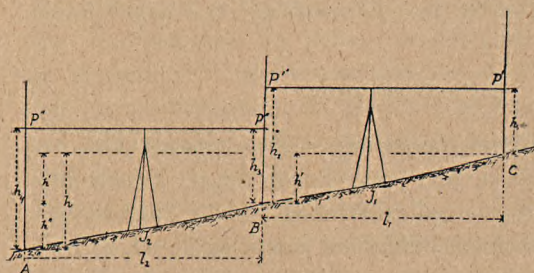


Fig. 80.

poziomą, przedstawioną na rysunku śladem $P' P''$. Następnie odczytamy za pomocą tego instrumentu wysokości h_1 i h_2 na łatach pionowo ustawionych w punktach C i B , to jak z rysunku widać, różnica $h_2 - h_1 = h'$ 1)

jest wysokością względną punktu C nad punktem B . Podobnie, ustawivszy instrument w punkcie J_2 znajdziemy, że wysokość punktu B nad punktem A wynosi $h_4 - h_3 = h''$ 2)

Z tego wynika, że punkt C leży nad punktem A wyżej o

$$h = h' + h'' \quad 3)$$

$$\text{czyli } h = h_2 - h_1 + h_4 - h_3 = (h_2 + h_4) - (h_1 + h_3) \quad 4)$$

Idąc od punktu C do A nazwiemy odczyty h_1 i h_3 odczytami wstecz, zaś odczyty h_2 i h_4 odczytami wprzód, a zatem wyrażenie 4) określić możemy słowami: wysokość punktu początkowego ciągu niwelacyjnego względem punktu ostatniego, równa się sumie odczytów wprzód, zmniejszonej o sumę odczytów wstecz. Jeżeli równanie 4 daje wynik „ h ” dodatni, to punkt początkowy leży wyżej niż końcowy, czyli między obu punktami mamy spad.

Odrotnie, idąc w przeciwnym kierunku od punktu A do C , nazwiemy odczyty h_4 i h_2 odczytami wstecz, zaś h_3 i h_1 odczytami wprzód, a wysokość względną obu punktów końcowych obliczymy według 4)

$$-h = (h_1 + h_3) - (h_2 + h_4) \quad 5)$$

wynik rachunku będzie teraz ujemny, a więc spad jest ujemny, czyli jest wzniesienie t. z. punkt końcowy C leży wyżej niż początkowy A .

Ponieważ odległości w jakich odczytywać możemy na łąkach wynoszą, zależnie od dobroci lunety 50 do 100 m , czyli długości $l_1 \dots l_2$ (fig. 80) wynosić mogą od 100 do 200 m najwyżej, a piony w takich od siebie odległościach ustawione uważać możemy w praktyce jako równoległe, więc i płaszczyznę poziomą wyznaczoną przez instrument w punkcie leżącym gdzieś między obu pionami, także możemy uważać za prostopadłą do obu pionów (łat), i to nie tylko płaszczyznę poziomą wyznaczoną przez instrument w jednym punkcie linii łączącej obie łaty, ale wogóle każdą płaszczyznę styczną do kuli ziemskiej w którymkolwiek punkcie powierzchni o szerokości i długości wynoszącej l_1 lub l_2 w danym wypadku, z czego wynika, że obojętnem jest czy instrument wyznaczający nam ową płaszczyznę ustawimy w środku między punktami, czy bliżej jednego lub drugiego punktu, lub wreszcie z boku. Zawsze będzie to płaszczyzna prostopadła do obu łat czyli pionów, a więc odcinki h_1 h_2 h_3 h_4 mierzone między nią a danymi punktami terenu, dadzą spad terenu. Poprzednio wykazaliśmy już, że płaszczyzna taka, a raczej część jej o niewielkich wymiarach jest elementem poziomu rzeczywistego.

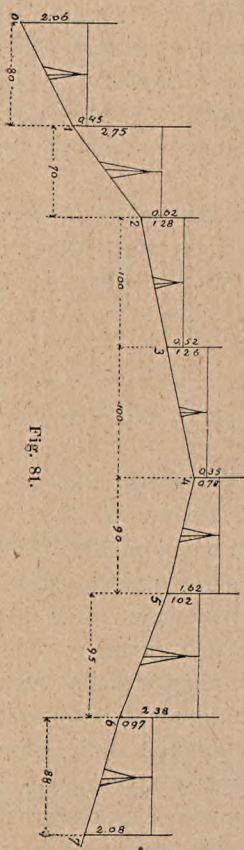


Fig. 81.

Z innych względów, jak się później przekonamy, starać się będziemy o ustawienie instrumentu w środku między dwoma końcowymi punktami, bo wtedy błędy niektóre się znoszą, i kulistość ziemi jest najlepiej uwzględniona.

Sposób prowadzenia protokołu i obliczenia niwelacji wykażemy na następującym przykładzie *).

Zniwelować linię 0...7 (fig. 81) i obliczyć wysokości punktów pośrednich 2—3—4... i 7 jeżeli wysokość punktu początkowego „0” wynosi 345'00 m nad poziom morza Adryatyckiego. Przy tej sposobności dodamy, że za punkt zerowy sieci niwelacyjnej w Austrii przyjęto poziom morza Adryatyckiego, a wszystkie wysokości punktów, podane w mapach topograficznych wojskowych, tudzież wysokości punktów podane i wypisane na stacyach kolejowych, odniesione są do tego poziomu. Wysokość punktu nazywa się znamieniem lub kotą. Jeżeli więc punkt „0” ma wysokość czyli kotę 345'00 m t. z. że za pomocą ściślej niwelacji zmierzono, że jest on wyższym o 345'00 m od poziomu morza Adryatyckiego.

*) Przypuszczamy zawsze, że przy niwelacji mamy odpowiedni sposób do wyznaczenia płaszczyzny poziomej, nie wchodząc na razie w szczegóły tego wyznaczenia.

Na rysunku (fig. 81) wypisane są odległości pojedynczych punktów, a nadto, na pionowych wypisano odczyty, mianowicie po lewej stronie pionowej odczyty wprzód, po prawej odczyty wstecz, idąc od 0 do 7.

Na łać w punkcie 0 widzimy odczyt wstecz wynoszący 2.06 m , z tego wynika, że horyzont instrumentu jest wyższy o 2.06 m od punktu 0. Jeżeli więc kota punktu 0 wynosi 345.00 m , więc łatwo wywnioskujemy, że kota horyzontu instrumentu wynosi $345.00\text{ m} + 2.06\text{ m} = 347.06\text{ m}$, oznaczamy ją według wzoru $H = 347.06\text{ m}$. Dalej widzimy, że w punkcie 1 horyzont instrumentu odcina na łać wysokość 0.45 m , czyli odczyt wprzód wynosi 0.45 m , z czego

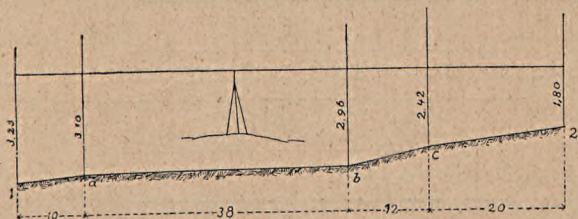


Fig. 82.

wynika, że punkt 1 jest niższy o 0.45 m od horyzontu instrumentu, a więc kota tego punktu wynosić będzie $347.06\text{ m} - 0.45\text{ m} = 346.61\text{ m}$. Stąd wynika łatwy sposób obliczania niwelacji, a mianowicie: wychodząc z pewnego punktu, którego wysokość jest znana, lub dowolnie przyjęta, dodamy do niej odczyt wstecz, a suma ta wyraża wysokość horyzontu instrumentu; odejmując następnie od obliczonej wysokości horyzontu odczyt wprzód, lub wreszcie odczyt na którymkolwiek punkcie, otrzymamy jego wysokość czyli kotę. — Mając obliczoną kotę punktu 1 przenosimy instrument między punkty 1 i 2 i postępujemy tak samo jak poprzednio, bo teraz zamiast punktu 0, mamy punkt 1 o znanej już wysokości, a obliczymy na podstawie odczytów horyzont instrumentu, w tym wypadku $H = 346.61 + 2.75 = 349.36\text{ m}$, następnie kotę punktu 2 $= 349.36\text{ m} - 0.62 = 348.74\text{ m}$ i t. d.

Zestawienie odczytów i obliczenie niwelacji przedstawia następujący protokół niwelacyjny:

Stanowisko instrumentu	Punkt	Odległości od początku w <i>m</i>	Odczyt		Horyzont <i>m</i>	Kota <i>m</i>	UWAGA
			wstecz <i>mm</i>	wprzód <i>mm</i>			
I.	0	0-00	2060		347.060	345.000	Punkt stały na stacyi kolei
	1	80-00		0450		346.610	
II.	1		2750		349.360		
	2	150-00		0620		348.740	
III.	2		1280		350.020		
	3	250-00		0520		349.500	
IV.	3		1260		350.760		
	4	350-00		0350		350.410	
V.	4		0730		351.140		
	5	440-00		1620		349.520	
VI.	5		1020		350.540		
	6	535-00		2380		348.160	
VII.	6		0970		349.130		
	7	623-00		2080		347.050	
Suma . . .			10-070 <i>m</i>	8-020 <i>m</i>			

Różnica $h_p - h_w = 8.020 - 10.070 = -2.050$ *m* (wzniesienie).

Kontrola Kota₀ - Kota₇ = 345-00 - 347-05 = -2.050 *m*.

Przeciętny spad między punktem 0 a 7 wynosi $\frac{2050 \text{ mm}}{623 \text{ m}} = 3.29 \text{ ‰}$

czyli wzniesienie $\alpha = 0.00329$.

Poprzednio mówiliśmy o niwelacyi profilu podłużnego w ogólnych zarysach, t. j. przyjmowaliśmy większą odległość punktów pośrednich, odczytywaliśmy tylko łąty wstecz i wprzód, nie zdejmując szczegółów. Teraz przejdziemy do szczegółowej niwelacyi.

Z jednego stanowiska instrumentu możemy zniwelować nie tylko punkt początkowy i końcowy danej części linii, lecz także dowolną ilość punktów między łątą wstecz, a łątą wprzód, jak to ilustruje fig. 82 (str. 127).

Przypuśmy, że z punktu *J* na którym stoi instrument, da się jeszcze dokładnie odczytać łątę ustawioną w punkcie 1, a z drugiej strony w punkcie 2 — zatem w punkcie 1 będziemy mieli odczyt wstecz, w punkcie zaś 2 odczyt wprzód. Prócz tego punkta *a*, *b*, *c* jako charakterystyczne są w polu oznaczone i należy je zniwelować. Na rysunku oznaczone są odczyty łąt na tych punktach i horyzont instrumentu *H—H*. Jeżeli znamy wysokość punktu 1, to dodając do niej odczyt w tym punkcie, otrzymamy wysokość horyzontu *H*. Horyzont ten jest wspólny dla wszystkich punktów widzialnych z danego stanowiska, więc wysokości punktów *a b c* obliczymy tak samo jak wysokość punktu 2, t. j. odejmując odpowiednie odczyty od horyzontu.

Te odczyty pośrednich punktów oznaczamy zwykle w protokole jako „łąty w bok“, w odróżnieniu odczytów wprzód lub wstecz, czyli „łąt wprzód“ lub „wstecz“, jak to objaśnia poniżej podany protokół niwelacyi szczegółowej:

Stanowisko Instr.	Punkt	Odległość od pocz. <i>m</i>	Odczyt			Horyzont <i>m</i>	Kota <i>m</i>	UWAGA
			wstecz <i>mm</i>	w bok <i>mm</i>	wprzód <i>mm</i>			
<i>J</i>	1	0	3250			403.250	400.000	
	<i>a</i>	10 0		3100			400.150	
	<i>b</i>	48 0		2960			400.290	
	<i>c</i>	60 0		2420			400.830	
	2	80 0			1800		401.450	

Rysunek profilu podłużnego przedstawia fig. 83. Za zwyczaj skalę długości przyjmuje się 1:1000 lub 1:2000; skalę wysokości 10 razy większą t. j. 1:100 lub 1:200, celem uwydatnienia kształtu terenu. Linie terenu, odległości i rzędne niwelacyjne odnoszące się do terenu, rysuje się czarno, wszystkie zaś daty odnoszące się do projektu, rysuje

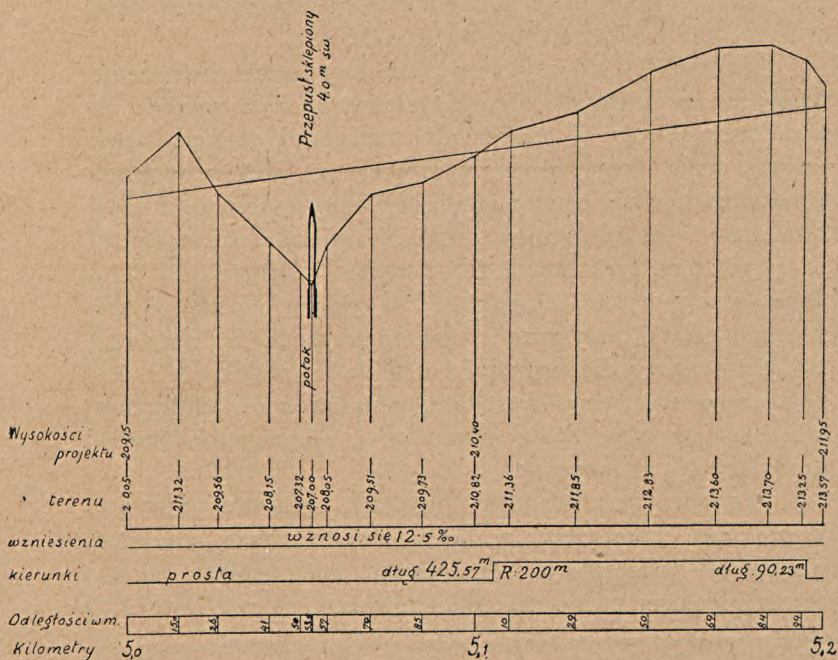


Fig. 83.

się czerwono. Na rysunku podano wszelkie wyjaśnienia, zostaje tylko wytłumaczenie t. zw. płaszczyzny porównawczej (P. p.). Gdybyśmy mieli na rysunku przedstawić wysokości punktów, za pomocą rzędnych mających kilkaset metrów długości, to w skali, musiałyby one mieć długość kilku metrów, nie przynosząc żadnej korzyści rysunkowi; dlatego przyjmujemy t. z. płaszczyznę porównawczą w pewnej wysokości

skracać tem samem rzędne o wysokość płaszczyzny porównawczej tak, by na rysunku długość ich nie przenosiła 20 *cm*. Na fig. 83 przyjęto płaszczyznę porównawczą w wysokości 200 *m*, zatem wszystkie rzędne rysujemy o 200 *m* w skali krótsze.

II. Profile poprzeczne.

Obok profilu podłużnego, bardzo ważne są profile poprzeczne, przedstawiające kształt terenu w kierunku prostopadłym do osi trasy.

Profile poprzeczne służą do obliczenia kubatury robót ziemnych, do projektowania i obliczenia ubezpieczeń korpusu kolei lub drogi projektowanej i są wogóle niezbędne tak dla projektu, jak dla obliczenia kosztorysu robót.

Zdjęcie profilów poprzecznych wykonuje się w sposób następujący:

W danym punkcie, n. p. oznaczonym na fig. 84, liczbą *Km 2 + 500*, ustawia się węgielnicę, i wytycza się nią prostopadłą, oznaczając ją na terenie dwoma tyczkami t_1 i t_2 — a teraz, mając kierunek oznaczony, wyciąga

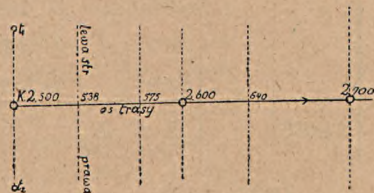


Fig. 84.

się na terenie w kierunku profilu taśmę, od osi w lewo lub prawo, na punktach, w których się teren załamuje, ustawia się łatę i odczytuje się ją w sposób opisany przy niwelacyi profilu podłużnego. Ponieważ wysokości punktów w osi trasy są już znane z niwelacyi profilu podłużnego, więc odczytawszy łatę na paliku w osi, obliczymy horyzont, a stąd i wysokości wszystkich punktów niwelowanych.

Jeżeli teren jest prawie płaski, lub lekko pofalowany, to zdjęcie profilów poprzecznych najłatwiej wykonuje się za pomocą instrumentu niwelacyjnego, nie robiąc nawet szkiców, według poniżej umieszczonego protokołu.

Zdjęcie profili poprzecznych:

Profil Km	Odczyt w osi m	Odległość od osi m	Odczyty na łacie		Kota m	Horyzont m	UWAGA
			lewa strona m	prawa strona m			
1	2	3	4	5	6	7	8
2+500	1.65				243.05	244.70	
		2.30	1.26		243.44		
		6.50	1.82		242.88		
		10.20	2.06		242.64		
		14.60	2.22		242.48		brzeg potoku
		14.70	2.01		242.69		zw. wody
		18.0	1.82		242.88		głęb. 0.4 m
		28.0	1.75		242.95		brzeg potoku
		8.5		1.42	243.28		
		16.5		1.65	243.05		
		28.0		1.52	243.18		
2+538		i t. d.					

Objaśnienia:

W rubryce 1 notuje się nazwę punktu, w którym zdejmujemy profil poprzeczny.

W rubryce 2 wpisujemy odczyt na łacie ustawionej na wspomnianym wyżej paliku, któryto odczyt, dodany do wysokości (koty) punktu podanej w rubryce 6, daje wysokość horyzontu, którą wpisuje się w rubryce 7.

W rub. 3 notuje się odległości punktów niwelowanych, odczytane na taśmie, wyciągniętej w kierunku profilu, počawszy od osi. Zwykle nie podaje się wtedy częściowych odległości pojedynczych punktów niwelowanych, lecz sumaryczne ich odległości od osi.

W rubr. 4 notuje się odczyty łat ustawianych w punktach profilu, mianowicie po lewej stronie trasy t. j. punktów

lewej połowy profilu poprzecznego, a podobnie w rubr. 5 odczyty lat prawej połowy profilu.

W rubryce 6 wpisuje się obliczone wysokości (koty) punktów, — oblicza się je, odejmując odczyty z rubryki 4 lub 5 od wysokości wspólnego horyzontu z rubryki 7.

W uwadze notuje się niektóre spostrzeżenia, n. p. zaznacza się, że dany punkt leży albo na brzegu potoka, albo na środku lub brzegu drogi, albo zniwelowane zwierciadło wody, dno rowu i t. p.

Po obliczeniu profilu poprzecznego, narysowanie go, zwłaszcza na papierze milimetrowym, nie przedstawia już żadnych trudności. Rysunek zdjętego powyżej profilu podany jest na fig. 85.

Powyżej opisany sposób zdjęcia profilów poprzecznych, dogodnym jest tylko w terenie dosyć płaskim, gdy z jednego stanowiska instrumentu da się przynajmniej kilka ich zdjąć. Gdy teren jest trudniejszy, to ciągle przestawianie instrumentu, ustawianie go, następnie wyciąganie taśmy, przedstawiałyby większą trudność i stratę czasu. Dlatego w takich wypadkach zdejmujemy profile poprzeczne za pomocą łąty ustawianej poziomo, do czego znów służy libela opisana w § 31.

Fig. 86 przedstawia przykład zdjęcia profilu poprzecznego za pomocą łąty L i libeli l .

Łatę L długą zwykle 4 m o przekroju $\frac{20}{3}$ cm układamy w pozycji 1 w ten sposób, że opiera się jednym końcem na paliku w osi trasy, drugi zaś koniec opiera figurant na łącie pionowej l , wysokiej zwykle 2 m o przekroju $\frac{2}{3}$ cm z podziałką centymetrową, podnosząc ją dopóki libela l na łącie L umieszczona nie wskaże, że łąta jest pozioma. Naturalnie że ten koniec łąty, tudzież łątę l , przytrzymuje figurant aż do ukończenia pomiaru. Łata L podzielona jest

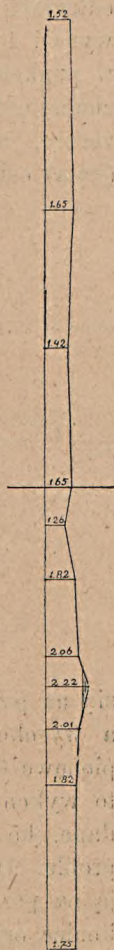


Fig. 85.

na metry i decymetry celem odczytania odległości poziomych. Po ustawieniu łąty w kierunku i poziomo, odczytujemy na łacie l , w odległości odpowiadającej punktowi b od osi, wysokość do dolnego brzegu łąty L , w naszym przykładzie odległość punktu b wynosi 3.60 — wysokość w punkcie b wynosi 1.20 m. Zmierzymy teraz drugą łątą l_2 wysokość w punkcie $a = 0.85$, odczytując równocześnie na łacie poziomej odległość 2.10 m. Zarazem szkicuje się pomiar w książeczce, zapisując wyraźnie miary. Przypuśćmy, że wysokość (kota) osi trasy wynosi 200.00 m, to ponieważ łąta opiera

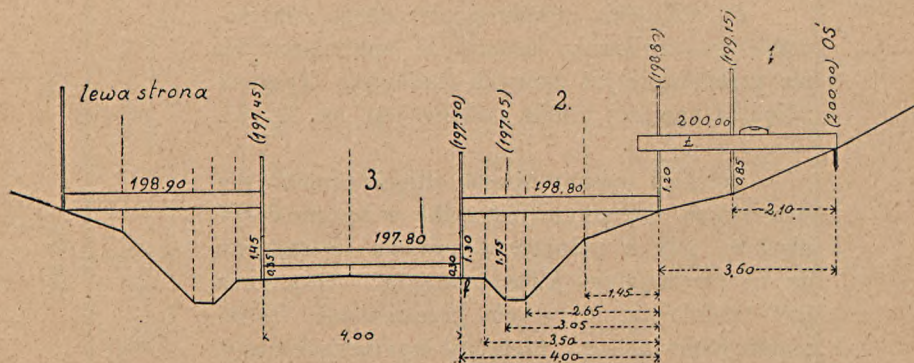


Fig. 86.

się na paliku, więc horyzont ma tę samą wysokość 200.00, a wysokość punktów a i b obliczymy, odejmując odczyty pionowe 0.85 m względnie 1.20 m od horyzontu. Obliczenie to wykonuje się w biurze, a temsamem mamy już wszystkie dane, bo odległości i wysokości punktów do narysowania profilu. Ukończywszy pomiar w pozycyi łąty 1, przenosimy ją na pozycję 2, opierając końcem w punkcie b , a drugi koniec opiera się na łacie l , resztę pomiaru wykonamy jak poprzednio, wyniki pomiaru podane są na rysunku.

Horyzont łąty w poz. 2 zgadza się z kotą punktu b , bo łąta jest wprost na nim oparta, więc $hor_2 = 200.00 - 1.20 = 198.80$ m.

W pozycyi łąty 3 nie można było łąty oprzeć w punkcie f z powodu wypukłości drogi, więc podniesiono ją nad punkt f o 0.30 m .

Kotę punktu f obliczymy, odejmując odczyt 1.30 m od horyzontu pozycyi 2, więc

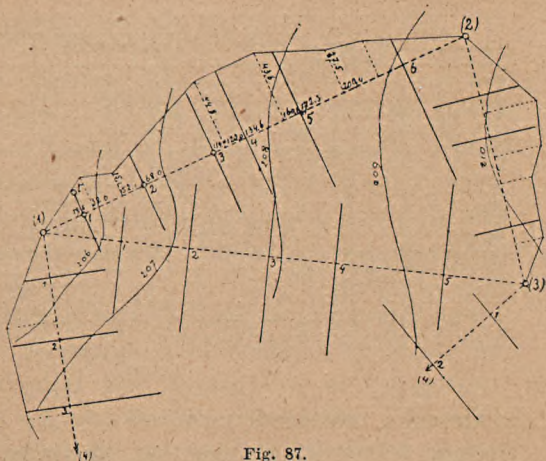
$$\text{kota } f = 198.80 - 1.30 = 197.50\text{ m}$$

a stąd horyzont poz. 3 $= 197.50 + 0.30 = 197.80\text{ m}$.

Wysokości punktów dalszych obliczymy, odejmując odczyty na tych punktach od horyzontu 197.80 .

W ten sam sposób zdejmujemy następnie prawą stronę profilu. Na fig. 86 wysokości horyzontów wypisane są wzdłuż łąt poziomych, odczyty wzdłuż łąt pionowych, a koty odpowiednich punktów u góry łąt pionowych, w nawiasach. Do pomiaru używa się trzech łąt pionowych, bo jeżeli dwie łąty służą do oparcia łąty poziomej jeżeli ta jest cała podniesiona, to trzecia łąta służy do odmierzania wysokości poszczególnych punktów pośrednich.

Za pomocą profili poprzecznych możemy z łatwością zdjąć pas terenu o szerokości do 200 m wzdłuż wytyczonej osi. Sposobu tego używa się zwłaszcza w terenie łatwiejszym, przy trasach kolei i niwelacyi niezbyt wielkich obszarów, służącej do wypracowania projektów melioracyjnych. W terenie trudniejszym i przy zdjęciach większych obszarów, używać będziemy innych sposobów. Fig. 87 przedstawia przykład zdjęcia terenu za pomocą profili poprzecznych.



luje się, czyli zdejmuje się profil podłużny odpowiedniej osi, lub też niwelację uskutecznia się równocześnie ze zdjęciem profili. W każdym razie, wysokości odpowiednich punktów w osi muszą być znane, ażeby profile można było obliczyć i narysować. Na fig. 87 profile poprzeczne oznaczono liniami pełnemi i numerami 1, 2, 3

Przy niwelacyi profili poprzecznych szkicuje się kształt terenu w książeczce w sposób przedstawiony na fig. 88. Odległości poziome wypisane są przy linii terenu, odczyty zaś na łąkach, na rzędnych pionowych. Mając wysokość punktu 1 znajdziemy horyzont, dodając do niej odczyt łąty w punkcie 1, zatem jak wskazano na szkicu

$$\begin{array}{rcl}
 & \text{kota}_1 = 205.65 & \\
 \text{do tego odczyt} & + & 1.90 \\
 \hline
 \text{otrzymamy} & & 207.55 \text{ jako wysokość horyzontu.}
 \end{array}$$

Obejmując następnie inne odczyty wypisane na szkicu, otrzymamy koty wszystkich punktów niwelowanych. Obliczenie to wykonuje się w książeczce, poczem rysuje się plan sytuacyjny na podstawie obliczonych profili, a o czem mówić będziemy nieco dalej.

Na fig. 88 podajemy przykład szkicowania profili w polu, wraz z obliczeniem wysokości poszczególnych punktów. Można też pracować prędzej przy użyciu dwu łąt i dwu taśm, przyczem zdejmuje się równocześnie dwa profile. Pomocnicy powinni być wyćwiczani tak, że podczas gdy jeden trzyma łątę do odczytu, drugi idzie tymczasem na drugim profilu do następnego punktu, potem ten staje, a poprzedni przenosi łątę i t. d. Mając wyćwiczonych pomocników, można używać nawet trzech łąt.

Zamiast opisanego sposobu zdjęcia terenu za pomocą profili poprzecznych, używa się także t. z. metody punktów rozprószonych. Oznacza się mianowicie punkty, mające być zniwelowane za pomocą patyków, wetkniętych w ziemię, w których, u góry umieszczone są kartki z numerami punktów. Położenie tych punktów zdejmuje się ze względu na osie, wytyczone jak w poprzednim przykładzie,

a następnie niweluje się je. Pomocnik stawia latę przy każdym punkcie, dyktuje numer punktu, a następnie patyk wyrywa i odrzuca. W ten sposób widzi się, które jeszcze punkty zostają do niwelacji i sama niwelacja postępuje prędko. Naturalnie położenie punktów musi być na szkicu dokładnie oznaczone. W ten sposób można też oznaczać pojedyncze punkta na profilach, w polu poprzednio wytyczonych a do niwelacji użyć dwóch lat. Metoda ta dogodną



Fig. 89.

jest zwłaszcza przy pracy we dwóch. Jeden wytycza profile, oznacza punkty i szkicuje, drugi idzie za nim niwelując.

Jeżeli profile poprzeczne mają być narysowane osobno, n. p. w celu obliczenia kubatury robót ziemnych, to rysuje się je w skali 1 : 100 lub 1 : 200 tak dla długości jak wysokości. Wszystkie daty odnoszące się do terenu rysuje się czarno, zaś projekt czerwono. Na fig. 89 przedstawiono profil poprzeczny terenu z wrysowanym w nim przekrojem projektu drogi.

§ 29. Obliczenie powierzchni profili poprzecznych.

Najczęściej zdejmuje się profile poprzeczne celem obliczenia kubatury robót ziemnych. Jak wiadomo z budownictwa kolejowego, drogowego lub wodnego, oblicza się kubaturę robót ziemnych w ten sposób, że średnią arytmetyczną z powierzchni dwu sąsiednich profili, mnoży się przez ich odległość, a ponieważ obliczenie powierzchni wchodzi w zakres miernictwa, więc przerwiemy na razie opis niwelacji i zajmujemy się sposobami obliczenia tych powierzchni. Dwa spo-

soby, mianowicie za pomocą planimetru lub przez zamianę danej nieregularnej powierzchni na trójkąt lub trapez, już znamy. Trzeci sposób graficzny opiszemy w dalszym ciągu, przyczem zauważyć wypada, że jest to sposób ułatwiający w wysokim stopniu obliczenie, zatem krótszy niż poprzednie, dokładny, nie wymagający takiego natężenia uwagi, co jest bardzo ważnem z tego powodu, że ilość profili poprzecznych jest zwykle bardzo wielka, przeciętnie przynajmniej 50 na kilometr długości trasy, więc każde ułatwienie obliczenia jest bardzo pożądanem.

W obliczeniu graficznem rozróżniamy następujące wypadki.

1. Teren poziomy płaski.

Jako przykład przyjmujemy obliczenie nasypu (fig. 90 *b*) i przekopu (fig. 91 *b*) kolejowego. Zmieniwszy wymiary możemy obliczyć i wykreślić tablice dla przekrojów drogi, kanałów, murów oporowych i t. p.

a) Nasyp.

Fig. 90 *b* przedstawia przekrój poprzeczny nasypu $ABCD$, którego powierzchnię mamy obliczyć.

Jeżeli teren jest

poziomy, jak to ma miejsce w danym przykładzie, to znając szerokość korony nasypu, nachylenie skarp i wysokość nasypu, potrafimy go łatwo obliczyć jako trapez. Mając jednak setki takich profili, musielibyśmy ciągle obliczać średnią arytmetyczną z obu boków równoległych i mnożyć przez wysokość, co byłoby bardzo nużącym, a czemu zapobiega właśnie obliczenie wykreślne.

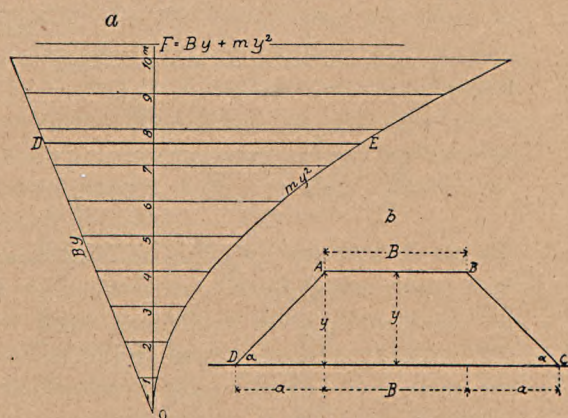


Fig. 90 *a* i *b*.

Oznaczmy według fig. 90 b: szerokość platformy nasypu przez B , wysokość nasypu przez y , kąt nachylenia skarp $= \alpha$, to $\operatorname{tg} \alpha = y : a$ zwykle $\operatorname{tg} \alpha = 1 : 1$ lub $1 : 1.5$ i t. p. wogóle $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m}$. Z rysunku widać, że szerokość podstawy nasypu $= B + 2a$ 1) a ponieważ $a = y \cotg \alpha = m y$,

zatem $B + 2a = B + 2 m y$. . . 2)

Teraz obliczyć możemy powierzchnię trapezu $A B C D$, mianowicie $F_n = \frac{2 B + 2 m y}{2} \cdot y = B y + m y^2$. . . 3)

b) Przekop.

Powołując się na poprzednie oznaczenia, obliczymy zupełnie analogicznie powierzchnię trapezu $A B C D$ (fig. 91 b)

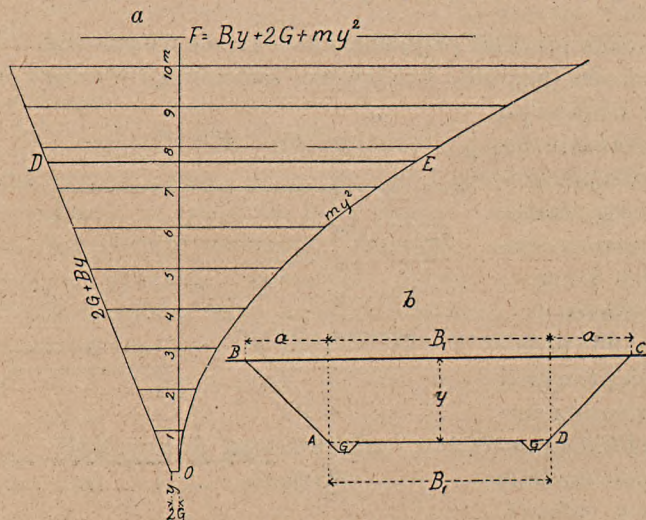


Fig. 91 a i b.

wykopu, bez uwzględnienia powierzchni obu rowów, według wzoru $F_w' = B_1 y + m y^2$, a ponieważ przekrój rowów jest stały, więc wystarczy obliczyć go i jako stałą ilość $2G$ dodać (rowy z obu stron) do poprzedniego obliczenia czyli $F_w = B_1 y + m y^2 + 2G$. . . 4)

Wyrażenie 3 i 4 przedstawić możemy graficznie, bo w obu wypadkach wyraz $m y^2$ przedstawia parabolę, zaś wy-

raz By w równ. 3, tudzież wyraz $B_1y + 2G$ w równ. 4) przedstawia linię prostą. Odetnijmy (fig. 90 a) na osi pionowej wartości $y = 1, 2, 3, 4 \dots$ w pewnej skali n. p. 1 : 100, zaś na poziomych odpowiednie wartości na my^2 , wstawivszy za m wartość zależną od nachylenia skarp, mianowicie dla $tg \alpha = 1 : 1 \dots m = 1.0$

„ „ $= 1 : 1.5 \dots m = 1.5$

„ „ $= 1 : 2 \dots m = 2.0$ i t. d.

to dla każdego m otrzymamy na rysunku odpowiednią parabolę, oznaczoną na fig. 90 a przez my^2 . Za jednostkę dla rzędnych paraboli najwygodniej jest przyjąć 1 mm.

Ponieważ pierwsza część wzoru 3 t. j. wyraz By gdzie B jest ilością stałą a y zmienna, przedstawia linię prostą przechodzącą przez początek układu O , więc do narysowania jej wystarczy wyznaczenie jeszcze tylko jednego punktu, najlepiej jednego z dalszych punktów n. p. na fig. 90 a punktu odpowiadającego $y = 10$. Łatwo teraz zrozumieć, że rzędne zawarte między prostą By a parabolą my^2 — dają w sumie wartość $By + my^2 = F_n$ czyli powierzchnię nasypu, a jeżeli dla tych rzędnych przyjęliśmy za jednostkę 1 mm, więc 1 mm na rysunku przedstawia wartość 1 m² powierzchni, podczas gdy wysokość nasypu, t. j. y możemy odcinać bardzo wygodnie w skali 1 : 100.

Dla ułatwienia odczytów najlepiej jest wykres ten wykonać na papierze milimetrycznym. Mając różne typy przekrojów, mianowicie różne nachylenia skarp, wykreślimy dla każdego z nich osobną krzywą na tym samym rysunku. Obliczenie wykonuje się bardzo prędko i łatwo; n. p. dana jest z profilu podłużnego wysokość nasypu $y = 7.6$ m. Wyszukujemy wtedy na osi y odpowiedni punkt, a następnie zmierzmy podziałką sumę rzędnych między prostą By i parabolą my^2 t. j. odcinek DE , który w odpowiedniej skali podaje wprost wielkość powierzchni przekroju.

Zupełnie podobnie przedstawia się wykres dla obliczenia powierzchni przekopu. Różnica jest tylko w tem, że we wzorze 4) t. j. $F_w = (By + 2G) + my^2$ wyraz $(By + 2G)$ przedstawia prostą nie przechodzącą przez początek układu

lecz przecinającą oś drugą w odległości $2G$ od początku. Do wykreślenia jej wystarczy wyznaczyć jeden punkt w odległości ($2G$) od początku układu na rzędnej, i drugi, n. p. w naszym przykładzie dla $y = 10$ — i oba punkty połączyć, co zresztą jest zupełnie zrozumiałem z fig. 91 *a*. Krzywa my^2 nie różni się niczem od poprzedniej. Obliczenie wykonuje się także w ten sam sposób jak na poprzednim przykładzie, więc n. p. odcinek DE na fig. 91 *a* przedstawia powierzchnię przekroju wykopu dla głębokości wykopu $y = 7.6$ m.

2. Teren jednostajnie nachylony.

Przypuśćmy, że mamy obliczyć powierzchnię przekroju poprzecznego $ABCD$ (fig. 92).

Oznaczmy w tym celu $tg \beta = n$ t. j. styczną kąta nachylenia terenu do poziomu, $1:m = tg \alpha$ — styczną nachylenia skarp, h_o i F_o wysokość i powierzchnię uzupełniającego trójkąta BCE , h i F wysokość i powierzchnię trapezu $ABCD$.

Dalej z rysunku widzimy, że $h_1 = h_o + h$ i $F_1 = F + F_o = AED$.

Oznaczmy dalej przez B_o szerokość podstawy przekroju, to według oznaczeń na fig. 92 obliczymy:

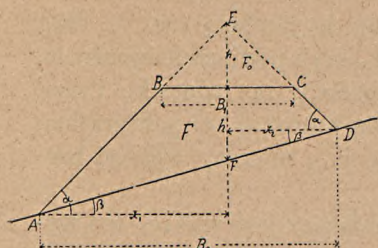


Fig. 92.

$$x_1 (tg \alpha - tg \beta) = x_1 \left(\frac{1}{m} - n \right) = h_o + h = h_1 \quad \dots 1)$$

$$x_2 (tg \alpha + tg \beta) = x_2 \left(\frac{1}{m} + n \right) = h_o + h = h_1 \quad \dots 2)$$

z obu tych równań otrzymamy

$$x_1 = \frac{h_1}{\left(\frac{1}{m} - n \right)} = \frac{m}{1 - m n} \cdot h_1 \quad \dots \dots 3)$$

$$\text{ i } x_2 = \frac{m}{1 + m n} \cdot h_1 \quad \dots \dots \dots 4)$$

współczynnik $k = 1$ czyli wykreślmy parabolę według równania $x = y^2$. W tym celu odetnijmy na osi x (fig. 93) różne wartości, więc $x = 1, 2, 3, 4, \dots$ zaś na rzędnych odetnijmy odpowiednie wartości y^2 . W takim razie rzędne paraboli przedstawiają powierzchnie przekrojów trójkątnych (według fig. 92), podczas gdy na osi x odcinamy wysokości h_1 tych przekrojów, ale pod warunkiem, że współczynnik $k = 1$. Chcąc obliczyć powierzchnię odpowiadającą innemu k , zatem pewnym nachyleniom skarp i terenu, trzeba by rzędną paraboli pomnożyć przez odpowiednie k . Mnożenie to wykonać możemy wykreślić, a mianowicie:

Pomnóżmy rzędną AB przez pewną wartość k odpowiadającą n. p. nachyleniom skarp $1:1.5$ i nachyleniu terenu 10% czyli 100‰ , więc $n = \frac{1}{10} = 0.1$, wówczas

$$k = \frac{m}{1 - m^2 n^2} = \frac{1.5}{1 - 0.0225} = 1.535 \text{ i wartość tę ode-}$$

tnijmy na pionowej punktu B poniżej osi y , więc od C do D . Rzędna CD przedstawia teraz bezsprzecznie wartość powierzchni F_1 dla odpowiedniego h_1 . Połączmy teraz punkt D z początkiem układu O , wykreślmy rzędną paraboli EF_1 i podobnie jak pierwszej pionową punktu F t. j. GH .

Z trójkątów GOH i COD otrzymamy

$$CD : GH = OC : OG \text{ czyli, ponieważ}$$

$$CD = F_1 = k h_1^2 \quad OC = h_1^2 = AB; \quad OG = h_2^2$$

$$\text{więc} \quad k h_1^2 : GH = h_1^2 : h_2^2 \text{ a stąd}$$

$$GH = \frac{k \cdot h_1^2 \cdot h_2^2}{h_1^2} = k \cdot h_2^2 \text{ czyli:}$$

wszystkie odcinki pionowe zawarte między osią Y a prostą OD przedstawiają nam wartości rzędnych paraboli pomnożonych przez dane k . Podobnie wyznaczymy punkt D_1 dla innego nachylenia terenu lecz dla danego m i t. d. tak, że otrzymamy cały pęk prostych, wychodzących z początku układu O , a rzędne zawarte między nimi a osią Y przedstawiać będą powierzchnie przekrojów trójkątnych (według fig. 92). Dla innego nachylenia skarp wykreślimy inny pęk promieni.

Celem ułatwienia wykresu podajemy następującą tabliczkę:

Nachylenia terenu			Wartości k dla		
$\frac{1}{n} = \cotg \beta$	$tg \beta$	$\%$	$m = 1.5$	$m = 1.0$	$m = 0.5$
10.0	0.100	10%	1.535	1.010	0.501
9.0	0.110	11	1.543	1.013	0.502
8.0	0.125	12.5	1.555	1.015	0.502
7.0	0.143	14.3	1.571	1.021	0.503
6.0	0.167	16.7	1.600	1.028	0.504
5.0	0.200	20	1.649	1.041	0.505
4.0	0.250	25	1.745	1.066	0.508
3.5	0.286	28.6	1.836	1.089	0.510
3.0	0.333	33.3	2.000	1.125	0.514
2.5	0.400	40	2.343	1.190	0.521
2.0	0.500	50	3.428	1.333	0.533

Dotychczas wprowadzaliśmy w rachunek F_1 t. j. powierzchnię trapezu $ABCD$ wraz z uzupełniającą go powierzchnią trójkąta BCE (fig. 92), a zarazem wysokość $h_1 = h + h_o$. Ponieważ trójkąt BCE jest niepotrzebny, więc otrzymane wartości z rysunku, trzeba by zmniejszyć o wartość F_o . Zmniejszenie to uskutecznimy także graficznie, zmniejszając rzędne F_1 przez wykreślenie prostej $E_o F_o$ w odstępnie odpowiadającym wartości F_o od osi Y . Ponieważ wysokości h , podane w profilu podłużnym, są mniejsze niż $h_1 = h + h_o$, więc odcinać je będziemy na osi X nie od początku O lecz od K , odległego o h_o od początku układu jak wskazuje fig. 93.

Przekrój nasypu różni się od przekroju wykopu tem, że wykop ma większą szerokość platformy wskutek rowów (fig. 94), zatem, przy tem samym nachyleniu skarp, wykop ma większe F_o i h_o .

Ilość F_o i h_o obliczymy z wzorów:

a) dla nasypu:

$$F_o = \frac{B_1^2}{4m} \quad h_o = \frac{B_1}{2m} \quad \dots \quad 8)$$

gdzie B_1 oznacza szerokość platformy nasypu.

b) dla wykopu:

$$F_o = \frac{B_2^2}{4m} - 2G \quad h_o = \frac{B_2}{2m} \quad \dots \quad 9)$$

gdzie B_2 oznacza szerokość platformy wykopu, a G powierzchnię przekroju rowu.

Cheąc na tym samym wykresie obliczać powierzchnie nasypów i wykopów, należy tylko wyznaczyć punkta K i L tudzież proste $E_o F_o$ i $E' F'$ dla nasypu i przekopu.

Skalę na wysokości t. j. na osi X przyjąć można 1 : 100, co umożliwi dokładne odcinanie wysokości, zaś dla rzędnych parabol, względnie dla rzędnych F_1 można przyjąć za jednostkę 1 mm, a z wystarczającą do-

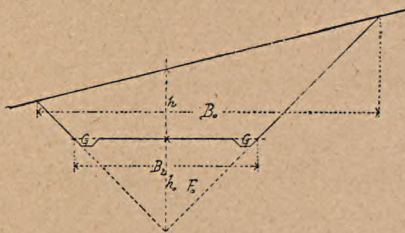


Fig. 94.

kładnością będzie można odczytywać powierzchnię na rzędnych, bo 1 mm długości przedstawia wówczas wartość 1 m² powierzchni.

Przykład.

Obliczyć powierzchnię nasypu dla $h = 6$ m, jeżeli $m = 1$ i $n = 0.10$. W tym celu odcinamy od punktu K w górę, w odpowiedniej skali odcinek h , stąd idziemy poziomo do punktu 1 na paraboli, następnie pionowo i odmierzamy odcinek 2—3, który przedstawia wartość powierzchni. Jeżeli tablica wykreślona była tak, że za jednostkę rzędnych F_1 przyjęto 1 mm, to ilość milimetrów długości rzędnej 2—3 przedstawia taką samą ilość metrów kwadratowych powierzchni.

Obliczenie jak widzimy jest szybkie i zupełnie dokładne; nadaje się ono zwłaszcza do obliczenia powierzchni profili

bez rysowania ich, biorąc tylko wysokości z profilu podłużnego a nachylenie terenu z planu warstwowego.

Lecz obliczenie to da się z korzyścią zastosować także w zwykłych wypadkach, gdy profile poprzeczne są osobno narysowane. Zwykle teren nie jest jednostajnie pochyłony, lecz połamany, a więc przed obliczeniem trzeba teren wyrównać, czyli w znany sposób wielobok nieregularny, zamienić na inny, co jest zrozumiałem z fig. 95.

Pozostaje jeszcze oznaczenie nachylenia terenu w ‰ lub ‰.



Fig. 95.

Wytnijmy w tym celu z grubego papieru rysunkowego dwuramienny prostokątny lineał według fig. 96.

Na poziomym ramieniu wykreślmy podziałkę 100 mm długą, i na ramieniu prostopadłym taką samą podziałkę. Przyłóżmy teraz podziałkę do linii terenu AB (fig. 96) tak, by dolne ramię było poziome, i jednym końcem dotykało linii AB , to na drugim ramieniu, linia AB odcina wzniesienie w procentach, n. p. w danym przykładzie mamy wzniesienie $21^m/m$ na 100 mm dług. czyli $21^0/0$ lub $210^0/00$.

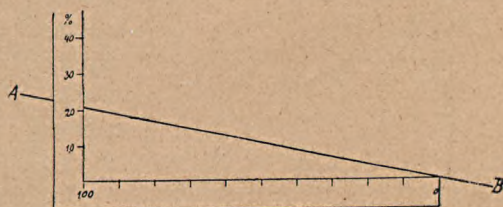


Fig. 96.

Jak widzimy, oznaczenie spadku terenu wymaga zaledwie paru sekund czasu, zwłaszcza gdy profile rysowane są na milimetrowym papierze. Wyrównanie zaś połamanego terenu jest prędsze niż n. p. graficzna zamiana całej figury na trójkąt lub trapez, bo jest tylko częścią tej pracy, a następnie odcięcie wysokości h i zmierzenie podziałką rzędnej F_1 jest w każdym razie szybszem, niż mnożenie odmierzonych na figurze długości i obliczanie powierzchni.

Słowem, użycie grafikonu jest korzystniejsze niż obliczanie za pomocą innych metod i mniej nużące, a od planimetru biegunowego dokładniejsze.

§ 30. O planach warstwowych.

Poprzednio poznaliśmy sposób zdjęcia terenu za pomocą profili podłużnych i poprzecznych. Ponieważ tak profil podłużny, jak poprzeczne, muszą być osobno rysowane, więc nie mogą nam dać takiego obrazu terenu, by go objąć można w całości, a właśnie często zachodzi potrzeba przedstawienia

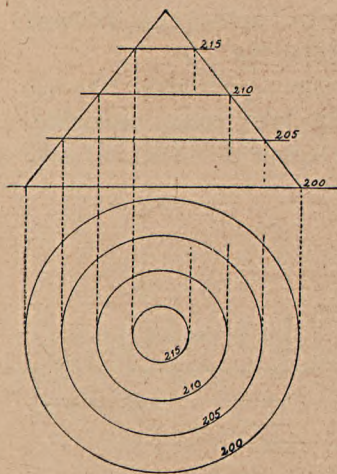


Fig. 97 a i b.

konfiguracji terenu na jednym rysunku. Można by temu zaradzić wypisując na planie wysokości poszczególnych punktów, jednak byłby to sposób niewygodny, bo trudnoby było oryentować się w takiej masie liczb, którymi cały rysunek byłby pokryty. Dlatego wprowadzono inny sposób rysowania planów sytuacyjnych, za pomocą t. z. linii równych wysokości czyli warstwic.

Wyobraźmy sobie jakieś wzniesienie na powierzchni ziemi n. p. górę, kształtu stożka, i przetnijmy ją płaszczyznami poziomymi w pewnych odstępach pionowych, n. p.

co 1 m. W planie, ślady przecięć stożka przedstawia się jako koła współśrodkowe, a wszystkie punkty na jednym kole mają tę samą wysokość, czyli cała linia kołowa przedstawia punkty o równej wysokości. Wysokość wypisana przy takim kole odnosi się więc do wszystkich punktów na nim leżących. Fig. 97 przedstawia w rzucie pionowym i poziomym stożek przecięty płaszczyznami poziomymi, a wysokości 200, 205, 210, 215 wypisane wzdłuż kół, oznaczają, że punkty

leżące na odpowiednich kołach mają wysokości 200, 205... nad poziom morza.

To samo co do stożka, odnosi się wogóle do terenu pokrytego zwykle wzniesieniami w postaci pagórków, łańcuchów gór i t. p. z tą chyba różnicą, że te wzniesienia są nieregularne, więc i przecięcia ich płaszczyznami poziomymi są nieregularne.

Rysunek fig. 98 *a* przedstawia kilkanaście punktów zdjętych w polu, z wypisaniami obok nich wysokościami, a zadaniem naszym będzie, narysować na tej podstawie plan warstwowy. Nadmienić tu wypada, że w polu niweluje się tylko punkty charakterystyczne, t. j. będące na załamach terenu, a więc teren między takimi punktami uważamy za jednostajnie wznoszący się lub spadający. Opierając się na tem przypuszczeniu, zresztą zupełnie słusznem, możemy łatwo między danymi dwoma punktami wyznaczyć położenie punktu trzeciego o wysokości pośredniej. Jako przykład weźmy dwa punkty *A* i *B* na fig. 98 *a*, o wysokościach 275.48 *m*

i 271.26 *m*. Ponieważ teren między oboma punktami spada jednostajnie, więc na linii *AB* znajdować się muszą punkty o wysokościach pośrednich, np. 272.00, 273.00, 274.00 i 275.00.

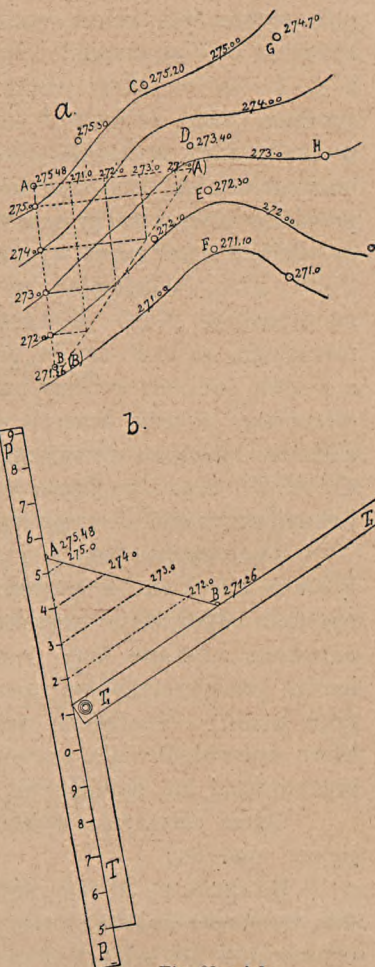


Fig. 98 *a* i *b*.

Ponieważ na rysunku linia AB jest rzutem linii leżącej na terenie nachylonym, więc celem wyznaczenia położenia punktów pośrednich, zrobmy kład tej linii na płaszczyznę rysunku. Dla wykonania kładu przyjmijmy, że linia AB na płaszczyźnie rysunku ma wysokość $271\cdot00$, wykreślmy w punktach A i B prostopadłe do AB — i odetnijmy w skali n. p. $1:100$ wysokość punktu B nad przyjętą wysokością rysunku, więc odcinek $B(B)$ będzie miał długość $0\cdot26\ m$ w skali, gdyż wysokość punktu B wynosi $271\cdot26\ m$, podobnie odcinek $A(A)$ będzie miał długość $4\cdot48\ m$. Linia $(A)(B)$ przedstawia teraz nachylenie terenu, a przyłożywszy podziałkę do odcinka $A(A)$ łatwo wyznaczymy wysokości $272\cdot0'$, $273\cdot0'$, $274\cdot0'$, $275\cdot0'$, pamiętając, że podstawa figury t. j. linia AB ma wysokość $271\cdot0$. Wykreślmy teraz z $272'$ linie równoległe do AB aż do przecięcia się ich z $(A)(B)$ — a z tych punktów wróćmy napowrót do rzutu, to na linii AB otrzymamy punkty, których wysokości wynoszą $272\ 0\ m$... $275\ 0\ m$. Podobnie wyznaczymy pośrednie punkty na liniach CD EF i t. p. i punkty o równych wysokościach połączymy liniami krzywymi. Krzywe te są warstwicami.

Poszczególne punkta i ich wysokości wypisuje się na rysunku ołówkiem, a po wykreśleniu warstwie, wpisuje się na nich odpowiednie wysokości, zaś wszystkie poprzednio ołówkiem napisane koty ściera się, przez co otrzymujemy bardzo przejrzysty obraz terenu. Na planie zostawia się tylko takie punkty odosobnione wraz z wypisaną obok wysokością, które usprawiedliwiają przebieg warstwie, lub są punktami szczytowymi lub najniższymi.

Celem ułatwienia wykresu, używa się często następującego sposobu:

Do punktu A (fig. 98*b*) przykładamy podziałkę PP tak, by punkt podziału $5\cdot48$ (odpowiadający kocie $275\cdot48$ po opuszczeniu $270\ m$) przytykał do A . Do punktu $1\cdot26$ (odpowiadającego kocie $271\cdot26$) na podziałce, przykładamy trójkąt T , następnie podziałkę wraz z trójkątem obracamy około punktu A tak długo, aż krawędź $T_1\ T_1$ trójkąta, przejdzie przez punkt B . Teraz, przytrzymując podziałkę PP , przesu-

wamy trójkąt wzdłuż niej do punktów 2, 3, 4, 5, i kreślimy wzdłuż krawędzi $T_1 T_1$ linie, do przecięcia się ich z linią AB w punktach 2, 3, 4, 5 — odpowiadających wysokościom 272 275 — jak to łatwo z rysunku wyrozumieć.

Mając wprawę, można z dostateczną dokładnością rysować warstwicę od oka, bez żadnych pomocniczych konstrukcji i przyrządów.

Poznawszy zasady pomiaru wysokości, czyli niwelacyi, przystąpimy do opisu przyrządów służących do tych pomiarów. Zaczniemy od poszczególnych części wchodzących w skład przyrządów niwelacyjnych, potem przejdziemy do sprawdzenia, czyli rektyfikacyi przyrządów, a wreszcie do sposobu ich użycia w polu.

§ 31. Libela.

Służy do wyznaczenia poziomu w danym punkcie, a także do pomiaru bardzo małych kątów względem poziomu. Składa się z naczynia szklanego, zazwyczaj w kształcie rurki, rzadziej w kształcie pudełka, wypełnionej prawie całkowicie alkoholem lub eterem; resztę przestrzeni w rurce wypełnia para tego płynu w postaci bańki, która jako lżejsza, zajmuje zawsze najwyższe położenie w rurce. Wewnętrzna ściana rurki jest powierzchnią obrotową, utworzoną przez obrót

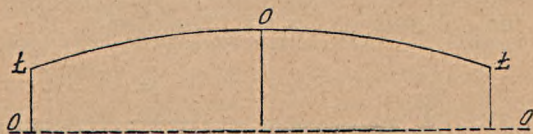


Fig. 99.

łuku EL około osi OO (fig. 99). Na tej powierzchni znajduje się koło powstałe przez obrót punktu środkowego łuku, które nazywamy kołem wielkiem lub zerowem. Koło zerowe oznaczone jest kreską na szkłe i służy za punkt początkowy podziałki wyrytej z obu stron. Odstępki kreszek tej podziałki mogą być dowolne, ale muszą być równe; zazwyczaj podziałka zrobiona jest w milimetrach lub liniach paryskich.

Z konstrukcyi libeli wynika, że jeżeli oś jej jest poziomą, to środek bańki zająć musi punkt zerowy jako najwyższy, lub odwrotnie, gdy środek bańki znajduje się w punkcie zerowym, to oś libeli musi być poziomą.

Chcąc więc poznać czy oś libeli jest poziomą, musimy znać położenie środka bańki. Środek bańki jednak jest punktem idealnym, nieczem nie oznaczonym, zatem do określenia jego położenia, możemy użyć tylko widocznych końców bańki. Nazwijmy położenie środka bańki przez s , położenie lewego końca bańki wyrażone w jednostkach podziałki liczonej od koła zerowego przez l_1 — prawego przez p_1 ; przyjmijmy dalej, że podziałka na prawo od punktu zerowego jest dodatnią, na lewo ujemną, to

$$s = \frac{l_1 + p_1}{2} \quad \dots \dots \dots 1)$$

gdzie l_1 i p_1 wzięte są z odpowiedniami znakami

Położenie środka bańki s wyrażone będzie w jednostkach podziałki na szkle wrytej, a znak, jaki wyniknie z równ. 1) wskaże po której stronie punktu zerowego znajduje się środek bańki. Za pomocą zatem odczytów na libeli i równ. 1) sprawdzić możemy łatwo, czy oś libeli jest poziomą. Ponieważ libela ma służyć do pomiaru małych kątów, n. p. do pomiaru kąta nachylenia danej płaszczyzny do poziomu, więc dajemy jej stosowną oprawę tak, by przyrząd ten umieścić można na płaszczyźnie.

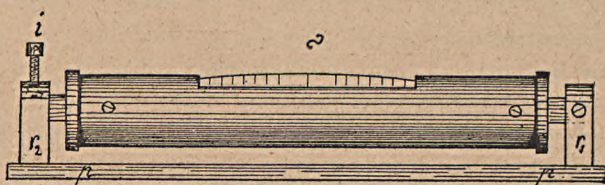


Fig. 100.

Fig. 100 przedstawia t. z. libelę stolikową. Rurka ujęta jest tutaj w oprawę mosiężną u góry wyciętą, ażeby odkryć szkło i uwidocznnić bańkę. Oprawa rurki spoczywa w ramionkach r_1 r_2 . W ramieniu r_1 jest rurka umocowaną przegibnie,

zaś w ramieniu r_2 da się za pomocą śrubki „i“ przesuwąć w kierunku pionowym. Oba ramiona przyśrubowane są stale do podstawy $p-p$. Z tego widocznem jest, że za pomocą śrubki „i“ (nazwa „i“ oznaczać będzie zawsze tę śrubkę), możemy zmieniać nachylenie osi libeli do jej stałej podstawy. Przypuśćmy, że oś libeli nie jest wogóle równoległą do podstawy $p-p$ i położmy przyrząd na płaszczyźnie poziomej. W takim razie, środek bańki nie będzie się znajdował w punkcie zerowym, lecz zajmie inne położenie „N“ (fig. 101). To położenie „N“ środka bańki wtedy, gdy podstawa libeli leży na płaszczyźnie poziomej, nazywamy punktem normalnym. Punkt normalny jest także punktem idealnym, a nadto zmiennym,

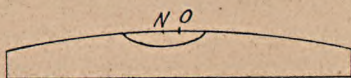


Fig. 101.

bo położenie jego możemy dowolnie zmieniać przez zmianę położenia osi za pomocą śrubki „i“. Możemy więc sprowadzić punkt normalny do punktu zerowego, co też często robimy dla wygody. Jeżeli bowiem punkt normalny jest sprowadzony do punktu zerowego, a libelę położymy na płaszczyźnie nachylonej do poziomu, to bardzo łatwo spostrzeczemy, że płaszczyzna ta nie jest poziomą, bo środek bańki nie znajduje się w punkcie zerowym. W przeciwnym razie t. j. gdyby punkt normalny nie schodził się z zerowym, musielibyśmy znać położenie punktu normalnego, następnie za pomocą równ. 1) obliczyć położenie środka bańki i teraz porównać, czy oba te punkty się schodzą. Jak widzimy, byłoby bardzo wygodnie gdyby podstawa libeli była równoległą do jej osi, czyli, punkt zerowy był identyczny z punktem normalnym. Jak się sprowadza te punkty do tożsamości, poznamy na przykładzie pomiaru kąta za pomocą libeli, — teraz wrócimy do opisu libeli.

Poprzednio mówiliśmy o podziałce umieszczonej na szkle, za pomocą której znaleźć możemy według równ. 1) położenie środka bańki. Rzecz naturalna, że jeżeli libelę pochylimy, to środek bańki przesunie się dalej. Otóż libela powinna być tak urządzona, ażeby pochyleniom o jednakowe

kąty, odpowiadały jednakowe przesunięcia środka bańki. Kąt odpowiadający przesunięciu bańki o jedną przedziałkę nazywa się przewagą libeli, i oznacza się grecką literą ω'' w sekundach. Ponieważ dobra libela powinna najmniejsze wychylenie jej z poziomu wykazywać ruchem bańki, więc przewaga libeli jest miarą dobroci, czyli czułości libeli. Czułość libeli zależy od promienia łuku z obrotu którego utworzyła się wewnętrzna jej powierzchnia, więc im promień ten jest mniejszy, tem mniej czuła jest libela. Nazwijmy promień wspomniany przez R , długość łuku równą jednej przedziałce

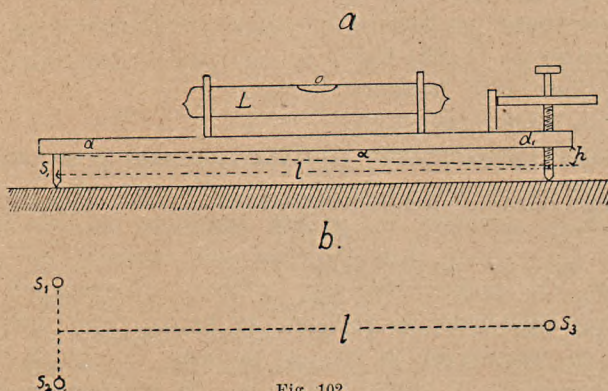


Fig. 102.

przez l , przewagą, czyli wielkość kąta odpowiadającą łukowi l przez ω'' to z proporcji $l : 2 R \pi = \omega'' : 360. 60. 60''$ znaj-

$$\text{dziemy} \quad R = l \frac{360. 60. 60}{2 \pi \cdot \omega''} = \frac{l}{\omega''} \cdot \frac{180. 60. 60}{\pi}$$

$$\text{nazwijmy} \quad \frac{180. 60. 60}{\pi} = q = 206\,264.8$$

$$\text{to} \quad R = \frac{q}{\omega} \cdot l \quad \text{zaś} \quad \omega'' = \frac{q}{R} \cdot l \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Widzimy, że dla tego samego l , przewaga ω'' będzie tem mniejszą, im R będzie większe, czyli libela jest tem czulszą im R jest mniejsze. Wartość przewagi ω'' obliczyć możemy doświadczalnie za pomocą przyrządu zwanego deszczulką rektyfikacyjną (fig. 102).

Dodajmy równanie 10 do 11 to otrzymamy:

$$2 \alpha'' = \omega'' (O S_1 + O S_2) \quad \text{czyli} \quad \alpha'' = \frac{s_1 + s_2}{2} \cdot \omega'' \quad (12)$$

To znaczy, celem pomierzenia kąta nachylenia jakiejś płaszczyzny z poziomem, układamy na niej libelę, odczytujemy stan środka bańki s_1 — następnie przerzucamy libelę i znów odczytujemy położenie środka bańki s_2 — średnia arytmetyczna z obu położań bańki pomnożona przez przewagę libeli, równa się kątowi nachylenia płaszczyzny, wyrażonemu w sekundach, jeżeli przewaga też w sekundach jest wyrażona.

Odjawszy równanie 10 od 11 otrzymamy

$$0 = \omega'' (O S_2 - O S_1 + O N + O N)$$

$$\text{czyli} \quad 2 O N = s_2 - s_1 \quad \text{lub} \quad O N = \frac{s_2 - s_1}{2} \quad \dots \quad (15)$$

t. j. położenie punktu normalnego N względem punktu zerowego znajdziemy, biorąc średnią z różnicy obu odczytów. Znając odstęp ON który z równania 13) wypadnie wraz z odpowiednim znakiem, przesuniemy za pomocą śrubki „i“ środek bańki o ten odstęp, celem sprowadzenia punktu normalnego do zerowego, czyli zrektyfikujemy libelę.

Prócz powyżej opisanej libeli stolikowej, używa się innych opraw n. p. t. z. libeli nasadkowej, urządzonej do nasadzania na lunetę i t. p. które poznamy przy opisie instrumentów niwelacyjnych.

§ 32. Przyrządy optyczne.

Oko normalne widzi dokładnie i wyraźnie na odległość 20 do 25 *cm*, co też nazywamy odległością dobrego widzenia. Wskutek różnych zbożeń fizyologicznych, odległość dobrego widzenia może być u krótkowidzów zmniejszona do 10 *cm*, zaś u dalekowidzów powiększa się do 50 *cm*; takie oko uzbraja się odpowiednią soczewką, za pomocą której odległość dobrego widzenia redukuje się do odległości normalnej.

Drugą własnością oka jest t. z. akomodacya, t. j. własność przystosowania się do odległości. Wiemy bowiem z codziennego doświadczenia, że widzieć możemy nie tylko bliskie, ale także bardzo odległe przedmioty.

Dokładność widzenia zależy od kąta widzenia t. j. od kąta, jaki tworzą promienie przechodzące przez skrajne punkty przedmiotu, a schodzące się w soczewce ocznej; n. p. oko normalne widzieć może w odległości 206 mm przedmiot o rozciągłości $\frac{1}{30}$ mm, czemu odpowiada kąt widzenia 34" — drobniejszych przedmiotów oko nie zobaczy.

Robiono też doświadczenia w celu sprawdzenia stopnia dokładności, z jaką gołym okiem wytyczać można, za pomocą węgielnicy i tyczek, linie lub kąty. Przekonano się, że zazwyczaj błąd na odległości 10 m tyczenia wynosi 1' do 2', a przy znacznej wprawie błąd ten redukuje się na 10" do 20", natomiast za pomocą lunety o powiększeniu 25-krotnem, błąd ten, na odległość do 500 m wynosi zaledwie 0.3" do 1". — Już z tego widzimy jak ważną rolę w dokładności pomiarów odgrywa uzbrojenie oka w odpowiednie przyrządy, z których najważniejszym, wchodzącym w skład wszystkich instrumentów, jest

Luneta.

Konstrukcyja jej znana jest z optyki, więc tylko w krótkości opiszemy ją, natomiast szczegółowo zajmujemy się zastosowaniem jej do instrumentów mierniczych.

Każda luneta składa się przynajmniej z dwu systemów szkiele: obiektywu, czyli szkła przedmiotowego i okularu czyli szkła ocznego.

Promienie świetlne odbite od przedmiotu, przechodzą przez obiektyw, załamują się i tworzą obraz danego przedmiotu między obiektywem a okulem. Obraz ten jest znów przedmiotem dla okularu (lupy), która tworzy nowy obraz powiększony i odsunięty na odległość dobrego widzenia. Konstrukcyję obrazu utworzonego przez obiektyw przedstawia fig. 104, mianowicie: linie I i II przedstawiają na rysunku ślady płaszczyzn stycznych do soczewki, t. z. płaszczyzn

głównych. Wprowadzamy je do konstrukcji zamiast krzywizn soczewki dlatego, że wskutek t. z. diafragmy dopuszcza się do utworzenia obrazu tylko promienie centralne, resztę zaś zatrzymuje diafragma, więc mały ten element soczewki traktować możemy jako płaszczyznę. Punkta F - F oznaczają ognisko, f odległość ogniskową, $P' P_1$ oś soczewki, $g_1 g_2$ t. z. punkta główne, $P - P'$ przedmiot, $P_1 P_1'$ obraz.

Promień $P - P''$ równoległy do osi po przejściu przez soczewkę załamuje się i przechodzi przez ognisko F w kierunku $P'' P_1$. Drugi promień $P P''$ przechodzący przez pierwsze ognisko, załamuje się i biegnie dalej równoległe do osi, w kierunku $P'' P_1$. Obraz punktu P leżeć musi na promieniach z niego wychodzących, więc utworzy się

w punkcie P_1 t. j. w punkcie przecięcia się ich. Promień idący z punktu P' leżącego na osi $P' P_1$, przechodzi przez soczewkę bez załamania, a ponieważ przyjęliśmy że PP' jest prostopadłe do $P' P_1$, więc obraz punktu P'

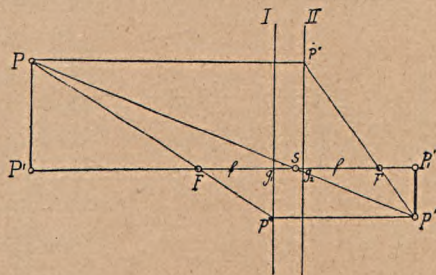


Fig. 104.

utworzy się w punkcie P_1' będącym rzutem punktu P_1 . Otrzymaliśmy więc obraz $P_1 P_1'$ przedmiotu PP' odwrócony względem swego przedmiotu. Połączmy punkty P i P_1 to promień ten przetnie się z osią $P' P_1$ w punkcie S , przez który przechodzą wszystkie promienie łączące odpowiednie punkty przedmiotu i obrazu, czyli t. z. punkty sprzężone. Dlatego punkt S nazywamy środkiem projektywności. Położenie środka projektywności jest zmienne, jak to już z konstrukcji widać, i zależy od odległości przedmiotu. Jeżeli przedmiot zbliża się do soczewki, to punkt S zbliża się do I płaszczyzny głównej, a leży na niej, gdy przedmiot znajdzie się w ognisku F ; gdy przedmiot oddala się od soczewki, to punkt S zbliża się do II płaszczyzny głównej i pada na nią gdy przedmiot znajdzie się w nieskończoności.

Znając w niektórych wypadkach położenie środka projektywności, możemy go użyć do konstrukcji obrazu.

Jak powiedzieliśmy poprzednio, obraz utworzony przez obiektyw, jest przedmiotem dla lupy t. j. okularu; umieścimy lupę tak (fig. 105), by obraz $a-b$ przedmiotu $A-B$ znajdował się w odległości ogniskowej f od lupy l , to, jak już wiemy, jeden promień z punktu b wychodzący, przejść musi przez punkt g_1 , wykreślimy drugi promień równoległy do osi, to ten przejść musi po załamaniu przez ognisko F , zatem obraz punktu „ b ” utworzy się w punkcie przecięcia obu powyższych promieni, t. j. w b' — obraz zaś punktu a utworzy się w a' . Widzimy z rysunku, że nowy obraz $a'b'$ jest względem $a-b$ prosty, nieodwrócony i powiększony.

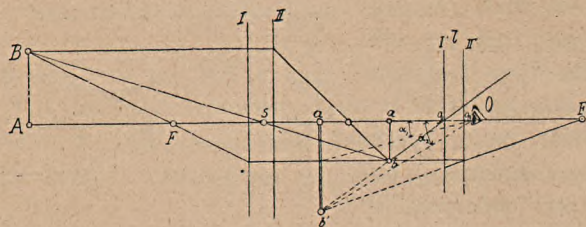


Fig. 105.

Oko umieszczone w punkcie O , widzi obraz $a'b'$ pod kątem α_2 — podczas gdy patrząc na przedmiot $a-b$ musiałoby go odsunąć na odległość dobrego widzenia t. j. do $a'b''$ i widziałoby go pod kątem α_1 . Stosunek tych kątów

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = v \dots \dots \dots 1)$$

nazywa się powiększeniem lunety. Zarazem widzimy z fig. 105, że oko powinno być o ile możności jak najbliżej lupy umieszczone, gdyż wtedy uzyskamy największą wartość stosunku 1).

Ponieważ odległość obrazu, utworzonego przez obiektyw, od tego obiektywu, zależna jest od odległości przedmiotu od obiektywu, czyli jest zmienna, więc, ażeby obraz ten znajdować się mógł w odległości mniejszej niż odległość ogniskowa od lupy, musi być lupa przesuwalna. W tym celu lupa umie-

szczoną jest w t. z. wyciągu okularowym, dającym się za pomocą odpowiedniej śruby wsuwać lub wysuwać z rury lunety.

Celem skrócenia lunety, dodaje się jeszcze trzeci system soczewki t. z. kolektyw, umieszczając go między obiektywem a okulem; skraca on odległość obrazu od obiektywu, a w połączeniu z okulem skraca jego odległość przedmiotową.

Opuszczając wywody teoretyczne, napiszemy

$$v_l = \frac{F}{f} \quad \dots \dots \dots 2)$$

t. z. powiększenie lunety v_l — równa się stosunkowi odległości ogniskowej obiektywu F do odległości ogniskowej okularu f . W praktyce wyznaczyć można łatwo powiększenie lunety za pomocą bezpośredniego pomiaru obu ogniskowych F i f . W tym celu wyjmuje się jedną i drugą soczewkę z lunety, zwraca się ją do słońca rzucając obraz słońca na podstawiony papier. Soczewkę przez próby ustawia się w takiej odległości od papieru, w jakiej obraz słońca staje się wyraźnym (papier zaczyna się palić) — zmierzwszy zwykłą podziałką odstęp soczewki od papieru, mamy odległość ogniskową, skąd obliczymy stosunek $v_l = \frac{F}{f}$.

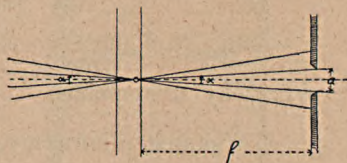


Fig. 106.

Zwykle używane są w miernictwie lunety o powiększeniu $v = 20, 25, 30, 35, 40, 45$.

Wewnątrz lunety, w odległości F od obiektywu (t. j. w odległości ogniskowej), umieszczona jest t. z. diafragma czyli przepona z małym kolistym otworem (fig. 106) o średnicy a . Diafragma przepuszcza tylko promienie centralne, mianowicie stożek promieni mający wierzchołek w punkcie S . Ponieważ kąt α jest mały, więc wielkość jego obliczymy z dostateczną dokładnością z wzoru $\alpha'' = \frac{a}{F} \cdot \rho = \frac{a}{F} \cdot 206264.8$ 2)

a to na podstawie równ. 2) § 31.

ziomym. Punkt przecięcia obu nitek połączony ze środkiem projektywności wyznacza oś celową. Prócz zwykłego krzyża z jednej pionowej i jednej poziomej nitki, używa się krzyża czyli t. z. siatki złożonej z trzech nitek poziomych i jednej pionowej, mamy wtedy 3 punkta siatki, i 3 celowe t. z. górną, średnią i dolną. Jak powiedzieliśmy wyżej, siatka powinna leżeć w płaszczyźnie obrazu, w przeciwnym bowiem razie, punkty siatki nie mogłyby pokrywać punktów obrazu, a oko, patrząc n. p. z punktu O_1 (fig. 108) widziałoby punkt O_1' nakryty przez środek siatki s , patrząc zaś z punktu O_2 widziałoby oko punkt O_2' zakryty środkiem siatki, co nazywamy paralaksą siatki. Gdy siatka znajduje się w płaszczyźnie obrazu, to oko widzieć musi zawsze tylko jeden i ten sam punkt nakryty środkiem siatki, więc nie ma wtedy żadnej wątpliwości co do osi celowej.

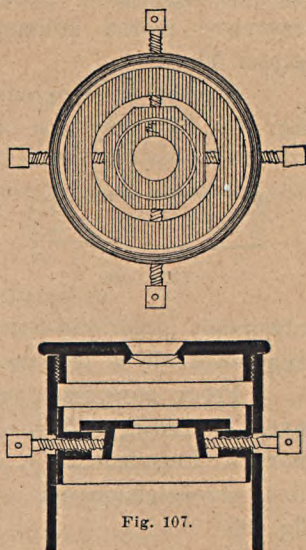


Fig. 107.

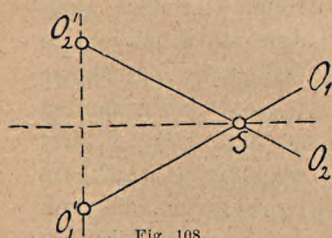


Fig. 108.

Opierając się na tem, łatwo możemy sprawdzić czy paralaksa siatki istnieje; patrząc bowiem przez lunetę zauważymy jakiś punkt zakryty przez środek siatki. Poruszajmy teraz głową w górę i w dół, a jeżeli przytem widoczny jest ruch względny obrazu względem siatki, to dowodzi, że paralaksa istnieje, czyli płaszczyzna siatki nie leży w płaszczyźnie obrazu. Ażeby paralaksę siatki usunąć, należy albo siatkę, albo obraz odpowiednio przesunąć. Zazwyczaj przesuwają się lupę wkręcając lub wykręcając ją, bo tem samem przesuwają się i obraz.

W miernictwie używane są zwykle lunety pojedyncze t. z. Keplerowskie czyli astronomiczne, złożone tylko z obiektywu i pojedynczego okularu. Dają one obraz odwrócony, lecz do tego łatwo jest się przyzwyczaić. Dobrą lunetą odczytywać można milimetry na łacie ustawionej w odległości 50 m.

Szematycznie przedstawiona jest luneta pojedyncza na fig. 109. Widzimy tam obiektyw „O” złożony z dwu soczewek (z flintglasu i kronglasu). Siatka umieszczona jest w odległości „ f ” od okularu, a wyciąg okularowy pozwala na przesuwanie lupy (okularu) tak, by obraz

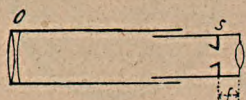


Fig. 109.

utworzony przez obiektyw a będący przedmiotem dla lupy, znajdował się w jej ognisku.

Prócz powyższej, używane są jeszcze lunety o złożonych okularach, mianowicie: Luneta Ramsdena przedstawiona na fig. 110.

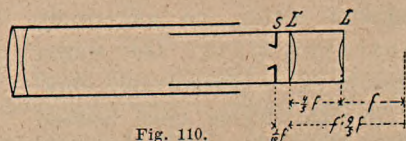


Fig. 110.

Okular złożony jest z dwu soczewek płasko wypukłych, t. j. z soczewki ocznej L i t. z. kolektywu L' umieszczonych w rurze w niezmiennym odstępnie a od

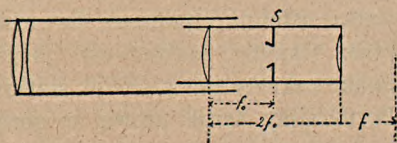


Fig. 111.

siebie. Siatka znajduje się w miejscu S . Odległości ogniskowe i t. p. wskazane są na fig. 110. F jest wspólnym punktem ogniskowym dla kolektywu i okularu, f' odległością ogniskową kolektywu, f okularu — $y = \frac{1}{10} f'$ jest odległością siatki.

Fig. 111 przedstawia lunetę z okulem Huyghensa — kolektyw jest tu w porównaniu z okulem konstrukcji Ramsdena odwrócony, a siatka S znajduje się między kolektywem a właściwym okulem w odległości $y = f_0$.

Kollektyw załamuje promienie wychodzące z obiektywu i skraca odległość obrazową a tem samem i lunety. Celem porównania powyższych trzech rodzajów lunet, nazwijmy v powiększenie, α kąt pola widzenia, h jasność widzenia lunety keplerowskiej, to

$$\begin{array}{lll} \text{dla okularu Ramsdena} & v' = \frac{10}{9} v & \alpha' = \frac{9}{10} \alpha & h' = \frac{81}{100} h \\ \text{" " Huyghensa} & v'' = \frac{2}{3} v & \alpha'' = \frac{3}{2} \alpha & h'' = \frac{4}{9} h \end{array}$$

Poznawszy konstrukcyę libeli i lunety, przystępujemy do opisu instrumentu niwelacyjnego i przyrządów pomocniczych.

§ 33. Łata niwelacyjna.

Długość jej wynosi zwykle 4 do 6 m, przekrój prostokątny $\frac{10}{3}$ cm (fig. 112 a) lub skrzynkowy (fig. 112 b) — ten ostatni jest lepszy ze względu na wyboczenie. Celem



Fig. 112 a i b.

zapobieżenia wpływowi wilgoci, powleka się łątę po wyschnięciu kilkakrotnie farbą olejną (łąty są drewniane, sosnowe — metalowe byłyby za ciężkie). Łata opatrzona jest podziałką zwykle centymetrową (niekiedy półcentymetrową), decymetry oznaczone są dłuższymi kreskami i numerami, jak to wskazuje fig. 113. Numera wypisane są albo naturalnie, a w takim razie widzimy je w lunecie astronomicznej odwrócone, lub wypisane są odwrotnie, a wtedy w lunecie ukazują się naturalnie.

W celu kontroli, zwłaszcza w celu zabezpieczenia się przed możliwymi omyłkami w odczytach, używa się t. z. łąt rewersyjnych, których opis opuszczamy, raz z braku miejsca, a powtórę, technik, znający zasady, łatwo zorientuje się w metodach kontroli po krótkiej informacji.

Często zawiesza się przy łącie pion, który ma służyć do pionowego jej ustawienia.

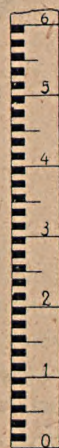


Fig. 113.

§ 34. **Przyrząd niwelacyjny.**

W § 28 poznaliśmy metody niwelacji, nie wdając się na razie w to, jakim przyrządem ją wykonywamy. Przyję-

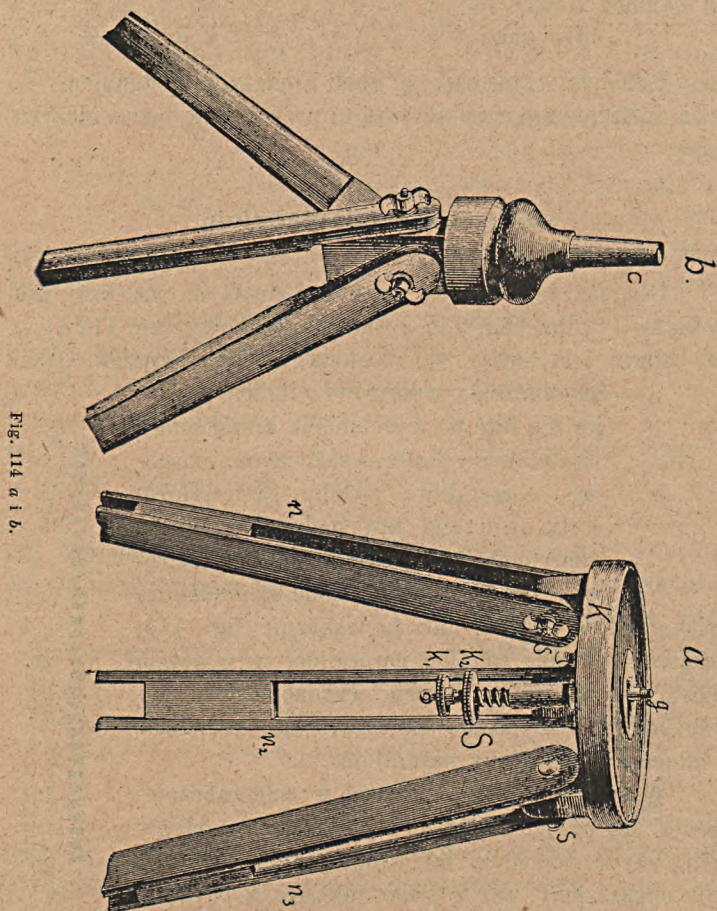


Fig. 114 a i b.

liśmy tam, że dana jest płaszczyzna pozioma, t. z. horyzont, tudzież, że za pomocą odpowiedniego instrumentu i łąty możemy odczytać wysokość horyzontu nad danym punktem

terenu, co nam zupełnie wystarczało tak do przedstawienia metody, jak obliczenia niwelacyi. Teraz przystąpimy do opisu przyrządów.

Najważniejszymi częściami instrumentu niwelacyjnego jest luneta i libela. Oś celowa bowiem, wyznacza płaszczyznę horyzontu, zaś za pomocą libeli układamy tę płaszczyznę, względnie oś celową do poziomu. Ażeby oś celowa wyznaczyć mogła płaszczyznę, musi być instrument tak urządzony,

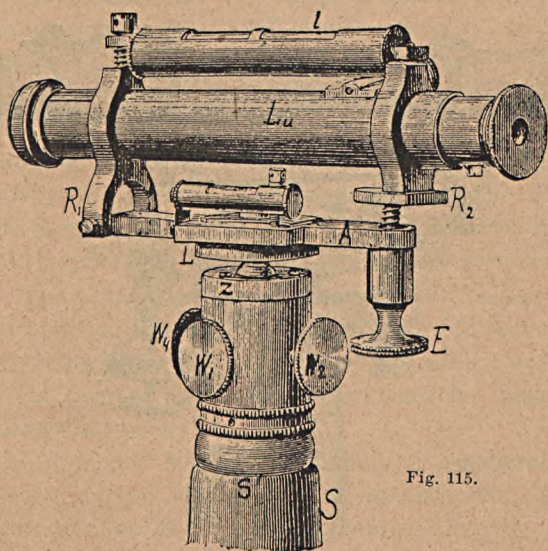


Fig. 115.

by luneta obracać się mogła w płaszczyźnie poziomej, około osi pionowej; w jaki to sposób się odbywa, poznamy przy opisie poszczególnych części instrumentu. W opisie ograniczać się będziemy do rzeczy najważniejszych nie rozwlekając się nad takimi szczegółami, których konstrukcyę poznać można bardzo łatwo z rysunku lub wzięwszy instrument do ręki.

1. Statyw czyli trójnóg. Na nim umieszcza się właściwy przyrząd niwelacyjny. Fig. 114 a przedstawia statyw krążkowy. Składa się on z krążka K i 3 nóg $n_1 - n_2 - n_3$ które ustala się przyciskając do krążka za pomocą śrub s . Śruba S służy do umocowania instrumentu do statywu. Wkręca

się ją mianowicie w dolną część instrumentu t. z. spodarkę do czego służą gwinty g , zaś krążkiem K_2 przyeiska się sprężynę widoczną na rysunku i przyciąga się temsamem silnie instrument do statywu.

Fig. 114 *b* przedstawia t. z. statyw czopowy. Ten różni się od poprzedniego tem, że posiada czop c , na który nasadza się instrument stosownie zakończony tulejką.

Przyrząd niwelacyjny składa się z następujących części:

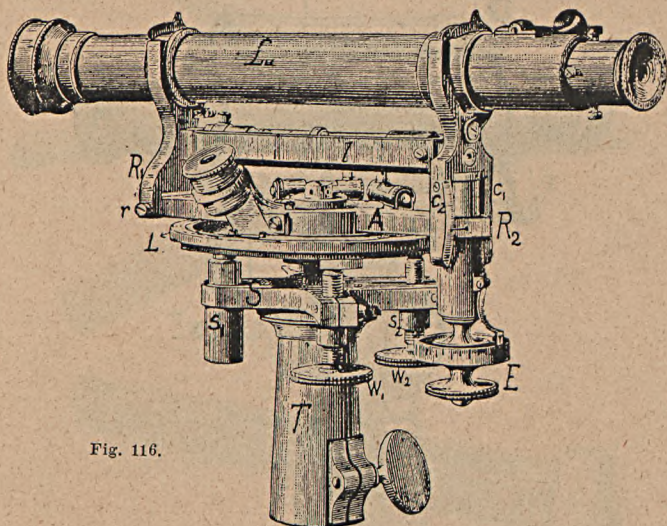


Fig. 116.

2. Ze spodarki t. j. dolnej części instrumentu, służącej do przytwierdzenia go do statywu. Spodarka może mieć różne konstrukcje, n. p. najmniejsze instrumenty niwelacyjne typu przedstawionego na fig. 115 mają spodarkę „S” w kształcie walca zakończonego albo śrubą s' , służącą do wkręcania w odpowiednią mutrę statywu, albo też zakończonego tulejką, podobnie jak na fig. 116, do nasadzania instrumentu na czop statywu. Walec ten jest wewnątrz próżny i opatrzony czterema t. z. śrubami wstawowymi W_1 W_2 W_3 W_4 .

Fig. 116 przedstawia inny typ spodarki „S”. Jest ona zakończona tulejką T do nasadzenia na czop statywu. W spo-

darce mają wloty dwie t. z. śruby wstawowe W_1 i W_2 , a naprzeciw nich znajdują się dwie sprężyny stalowe s_1 i s_2 , podtrzymujące górną część instrumentu. Sprężyny te albo są widoczne, albo ukryte (jak w danym wypadku) w dwu walcach s_1 i s_2 . Często zamiast 2 śrub i 2 sprężyn, urządza się 3 śruby wstawowe, na których górna część instrumentu się wspiera.

3. Na spodarce opiera się limbus. W typie fig. 115 limbus L zakończony jest wydłużeniem umieszczonem w walcu S . Górna część tego wydłużenia opiera się swym kulistym kształtem „ k ” o górne denko walca S , zaś część dolna umieszczona jest między śrubami W . Przykręcając śrubę W_2 a równocześnie odkręcając przeciwległą W_4 przesuwamy dolny koniec limbusu od prawej do lewej, wskutek czego górna część instrumentu pochyla się w stronę przeciwną. Podobnie regulować możemy położenie górnej części instrumentu drugą parą śrub (z której W_3 jest niewidoczna na rysunku).

W typie przedstawionym na fig. 116, limbus L jest krążkiem opartym na śrubach wstawowych i połączonym ze spodarką przegibnie za pomocą odpowiednio urządzonej sztyjki z . Za pomocą śrub wstawowych możemy płaszczyznę limbusu dowolnie pochylać.

4. Na limbusie spoczywa alhidada A , podobnie urządzona w obu typach, umocowana na limbusie tak, że może się obracać po jego górnej płaszczyźnie około swej osi pionowej. Alhidada opatrzona jest dwoma ramionami R_1 i R_2 (na fig. 115 i 116) — na których umieszczona jest luneta. Ramię R_1 połączone jest z alhidadą zawiasowo za pomocą sworznia r , ramię R_2 obejmuje, jak wskazuje fig. 116, koniec alhidady częściami c_1 i c_2 — tak, że za pomocą t. z. śruby elewacyjnej E może się poruszać w kierunku pionowym, a temsamem odpowiedni koniec lunety spoczywający na tem ramieniu, może się zbliżać lub oddalać od alhidady, wykonując obrót około sworznia r .

Urządzenie śruby elewacyjnej przedstawione jest na fig. 117 w widoku i przekroju.

W ramieniu R_2 spoczywa luneta L_u , którą przytrzymuje się za pomocą haczyka h (na fig. jest otwarty) — c_1 i c_2 są to części ramienia obejmujące alhidadę A . U spodu alhidady przytwierdzony jest do niej walec próżny w , wewnątrz tego walca znajduje się śruba S i obejmująca ją

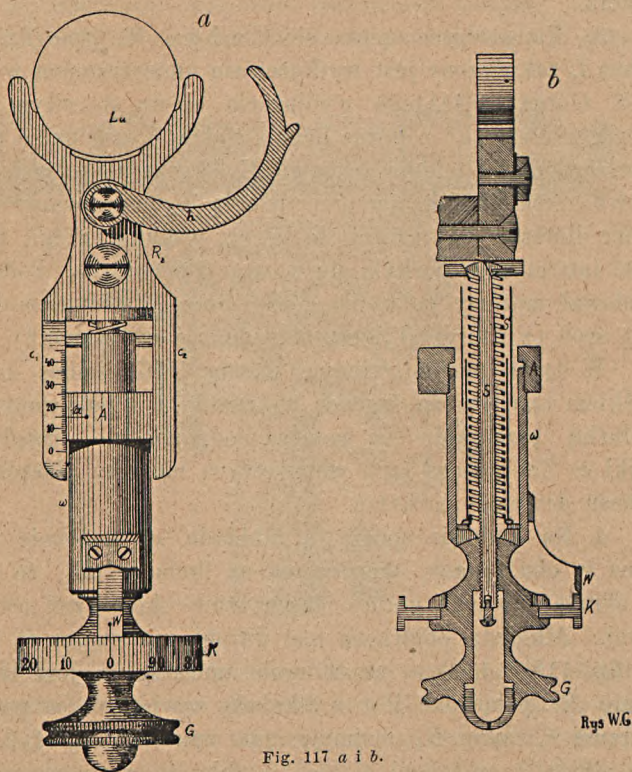


Fig. 117 a i b.

sprężyna s , oparta u dołu wewnątrz walca, a odpychająca u góry ramię R_2 , — co widać w przekroju. Na gwinty śruby S wchodzi mutra śruby elewacyjnej G , której kształt i konstrukcyja jest zrozumiałą z rysunku. Przez przykręcenie mutry G opartej o walec w , ściąga się śrubę s na dół, a wraz z nią i ramię R_2 , — przez odkręcanie zaś, śruba s podcho-

dzi do góry, a sprężyna s_1 odpycha ramię R_2 i umieszczoną w niem lunetę do góry.

Na mutrze G umieszczony jest krążek K podzielony na obwodzie na 100 części. Do walca „ w ” przytwierdzona jest wskazówka W , za pomocą której odczytać możemy na podziałce K setne części jednego obrotu śruby. Na ramionku c_1 umieszczona jest druga podziałka, której odstępów są równe wysokości kroku śruby, a za pomocą wskazówki a wrytej na alhidadzie A , odczytać możemy przesunięcie śruby w kierunku pionowym o całe obroty śruby s . Obie więc podziałki i obie wskazówki dają nam możność odczytania, w całych i setnych częściach obrotu śruby s , przesunięcia ramienia R_2 w dół lub w górę. Na fig. 115 śruba elewacyjna jest urządzona prościej i mniej dokładnie. Często limbus ma podział na stopnie, a alhidada opatrzona jest w noniusz i lupę do odczytu kątów poziomych.

5. Na alhidadzie umieszczona jest luneta L_u i libela l . Umieszczenie lunety i libeli może być różne, mianowicie pod tym względem mamy 3 typy instrumentów.

I. Pierwszy typ charakteryzuje się tem, że luneta jest stale przyśrubowana do alhidady, do lunety zaś stale libela; jak wskazuje fig. 115.

II. Drugi typ posiada lunetę dającą się łatwo wyjmować z łożysk R_1 i R_2 (fig. 116), przekładać w nich i obracać w łożyskach około swej osi, natomiast libela l jest stale do alhidady przyśrubowana.

III. Trzeci typ ma lunetę urządzoną do przekładania jak w typie II, tudzież libelę t. z. nasadkową, dającą się za pomocą stosownie urządzonych ramion, łatwo nasadzać lub zdejmować z lunety.

Instrument niwelacyjny powinien odpowiadać następującym warunkom przedstawionym graficznie na fig. 118.

a. Oś geometryczna lunety, t. j. oś walca metalowego lunety powinna być identyczną, lub co najmniej równoległą do osi celowej CC .

b. Oś libeli ll powinna być równoległą do osi celowej. Jeżeli te dwa warunki są dopełnione, to instrument jest

zdolny do użycia. Ustawmy bowiem za pomocą śrub wstawowych libelę do poziomu, to, ponieważ oś celowa jest równoległą do osi libeli więc i celowa będzie poziomą a odczytawszy łatę, otrzymamy na niej odcinek zawarty między danym punktem na terenie i horyzontem wyznaczonym przez oś celową jak tego § 28 wymaga.

c. Jeżeli płaszczyzna limbusu $\lambda\lambda$ jest równoległą do osi libeli, to zarazem i oś pionowa instrumentu II , która z fa-

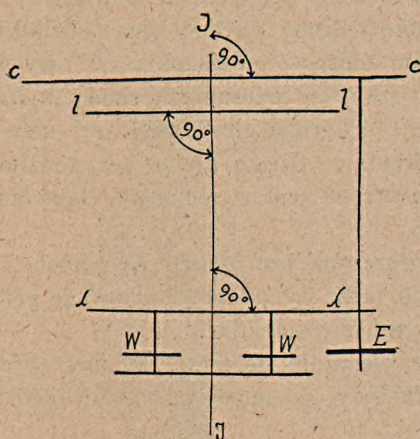


Fig. 118.

bryki wychodzi już prostopadłą do limbusu, musi być rzeczywiście pionową, a ponieważ około tej osi obraca się alhidada wraz z lunetą i libelą, więc libela będzie podczas całego, pełnego obrotu zawsze poziomą a temsamem i oś celowa jako równoległa do osi libeli, opisze płaszczyznę poziomą.

Warunek „c” nie jest bezwzględnie ko-

niecznym. Jeżeli tylko dwa pierwsze warunki istnieją, to już instrumentem takim możemy niwelować; potrzeba tylko przed każdym odczytem sprowadzić środek bańki do punktu zerowego. Jednak dla wygody i oszczędzenia sobie pracy i czasu na ciągle sprowadzanie środka bańki do punktu zerowego, staramy się zwykle, aby instrument odpowiadał i temu warunkowi, bo wówczas potrzeba tylko raz ustawić libelę we właściwem położeniu, poczem można już alhidadę obracać po limbusie a bańka nie wyjdzie z punktu zerowego.

Przed rozpoczęciem niwelacji należy zawsze sprawdzić czy instrument odpowiada powyższym warunkom, w przeciwnym razie trzeba go poprawić czyli zrektyfikować.

jak przy odczytach przy osi celowej równoległej do osi libeli, mimo, że teraz celowa nie była do osi libeli równoległą.

Z tego widzimy, że chociażby instrument nie odpowiadał warunkowi „b“ § 34, to i takim instrumentem wyznaczyć możemy zupełnie dobrze spadek, potrzeba go tylko ustawić dokładnie w środku między dwoma punktami.

Sposób ten jednak byłby za uciążliwy i zabierałby zbyt wiele czasu, dlatego sprowadzimy obie te osie do równoległości, a wykonamy to najprościej w ten sposób, że mając już wyznaczony spadek między punktami *I* i *II* według poprzedniego opisu i fig. 119, przeniesiemy instrument do

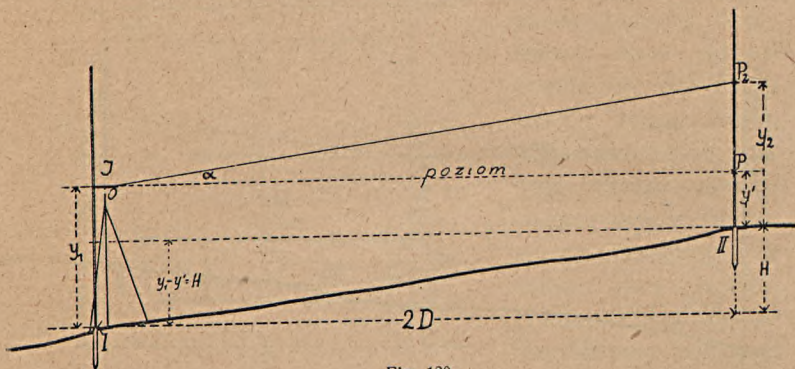


Fig. 120.

punktu *I*, ustawimy go tak, że luneta dotyka obiektywem łąty ustawionej w punkcie *I* na paliku, sprowadzimy bańkę do punktu zerowego i zmierzmy łątą wysokość y_1 (fig. 120) od środka lunety do palika, następnie obrócimy alhidadę z lunetą o 180° , sprowadzimy znowu bańkę do punktu zerowego, i za pomocą lunety odczytamy na łącie ustawionej na paliku w punkcie *II* wysokość y_2 . Z rysunku widzimy, że odczyt y_2 jest za duży, powinien bowiem wynosić y' gdyby celowa była pozioma. Z otrzymanych odczytów y_1 i y_2 obliczymy różnicę wysokości

$$H_1 = y_1 - y_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Z drugiej jednak strony, wiemy już że spadek wynosi H — więc mając spadek H i odczyt y_1 który z powodu małej bar-

dzo odległości od punktu I , uważać możemy za dobry, obliczymy odczyt y' jakiśmy dostać powinni na łacie II , mia-
nowicie z równania $y' = y_1 - H \dots 2)$

tyczasem dostaliśmy odczyt y_2 — co jest dowodem, że oś celowa nie jest równoległą do osi libeli. Podniesiemy więc jeden koniec lunety śrubą wstawową tak, by celowa trafiała obliczoną wysokość y' na łacie II — a ponieważ libela wskutek tego wyjdzie z równowagi, więc sprowadzimy bańkę do punktu zerowego za pomocą śrubki i . Operację tą powtórzymy jeszcze raz lub dwa, aż odczyty zgadzać się będą dokładnie z obliczeniem według równ. 2 — a wówczas musi być oś libeli równoległą do osi celowej, bo otrzymamy spadek zupełnie zgodny z rzeczywistością, co może mieć miejsce tylko wtedy, gdy obie osie są równoległe i poziome.

Możemy też, nie ruszając śrub wstawowych, zatem bez naruszenia libeli, przesunąć siatkę a tem samem i oś celową śrubkami s (fig. 107) w kierunku pionowym aż celowa da żądany odczyt y' .

Przed rektyfikacją osi celowej, usunąć należy paralaksę siatki jeżeli istnieje.

2. Rektyfikacja instrumentu II typu, t. j. luneta do przekładania, libela stale z alhidadą połączona.

Przedewszystkiem sprawdzić należy czy oś geometryczna lunety jest identyczną z osią celową.

Wiemy, że oś celowa jest linią łączącą środek projektywności ze środkiem siatki; może więc zajść wypadek, że obiektyw nie jest centrycznie osadzony w lunecie, tak, że środek projektywności nie leży na osi geometrycznej, to musielibyśmy całą oś celową, t. j. oba powyższe punkty przesunąć, ażeby obie osie się zeszły. Może być też wypadek, że środek projektywności leży na osi geometrycznej, a tylko środek siatki leży z boku, a wtedy tylko ten punkt potrzeba przesunąć.

a) Przypuśćmy, że środek projektywności p (fig. 121) leży na osi geometrycznej gG_1 , — zaś środek siatki znajduje

się pod osią geometryczną w punkcie s_1 — ustawmy łąkę w punkcie A , to oś celowa $s_1 p$ trafi ją w punkcie P_1 . — Obróćmy teraz lunetę o 180° w łożyskach około jej osi geometrycznej $g G_1$, to środek siatki zajmie położenie s_2 z przeciwnej strony, ponad osią $g G_1$ — punkt zaś „ p “ musi pozostać w tem samym miejscu, a teraz oś celowa trafi łąkę w punkcie P_2 , co jest dowodem, że obie te osie nie są identyczne. Zarazem widać z figury, że gdyby oś celowa zgadzała się z osią geometryczną, to w obu położeniach lunety oś celowa powinna trafić łąkę w punkcie G_1 leżącym w środku między P_1 i P_2 — dlatego w praktyce odczytujemy łąkę w jednym i drugim położeniu lunety, obliczamy odczyt śred-

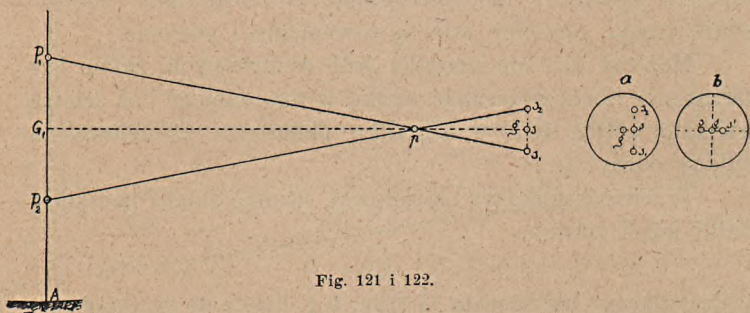


Fig. 121 i 122.

ni, jako średnią arytmetyczną obu odczytów $G_1 = \frac{P_1 + P_2}{2}$

a następnie za pomocą śrubek s (fig. 107) przesuwamy środek siatki w kierunku pionowym tak, by patrząc przez lunetę, otrzymało się obliczony średni odczyt G_1 .

Gdziekolwiekbyśmy teraz łąkę postavili, n. p. bliżej, w punkcie B , lub dalej w C , to ponieważ oś celowa zgadza się z osią geometryczną, otrzymamy zawsze odczyty zgodne przed i po obroceniu lunety.

Ale w powyższy sposób nie koniecznie jeszcze oś celowa została sprowadzoną do tożsamości z osią geometryczną. Że odczyty przed i po obroceniu lunety około osi geometrycznej są zgodne, jest to dowodem, że te obie osie leżą tylko w jednej płaszczyźnie poziomej jak to wskazano na

fig. 122 *a*, gdzie *g* oznacza oś geometryczną, a *s* oś celową. Jeżeli lunetę obrócimy o 180° to oś celowa znajdzie się po przeciwnej stronie, ale w tej samej płaszczyźnie z osią geometryczną.

Zwykle mamy wypadek, że oś celowa znajduje się gdzieś z boku, a więc ani w płaszczyźnie poziomej, ani pionowej z osią geometryczną, lecz n. p. w punkcie s_1 (fig. 122 *a*). Wówczas, za pomocą powyżej opisanej rektyfikacji, sprowadzimy ją do położenia *s* (fig. 122 *a*) w płaszczyźnie poziomej z osią geometryczną. Następnie obracamy lunetę o 90° i rektyfikację raz jeszcze powtórzymy, a wtedy oś celowa bę-

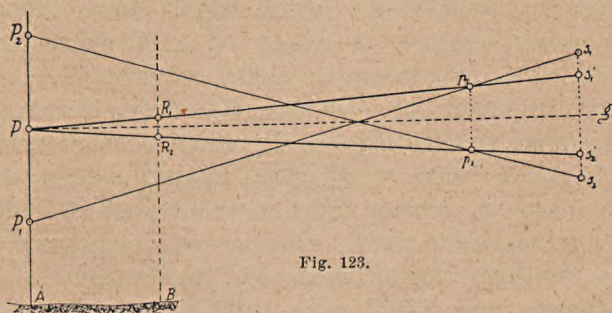


Fig. 123.

dąca w położeniach *s* i *s'* (fig. 122 *b*) zostanie sprowadzona i w tej płaszczyźnie do położenia *g*, t. j. do identyczności z osią geometryczną.

b) Trudniejszą jest rektyfikacja gdy środek projektyczności nie leży w osi geometrycznej.

Przypuśćmy, że środek siatki znajduje się w punkcie s_1 (fig. 123), a środek projektywności w p_1 , czyli linia $s_1 p_1$ jest osią celową, a linia PG osią geometryczną. Patrząc przez lunetę na łatę ustawioną w punkcie *A*, otrzymamy odczyt P_1 . Obróciwszy lunetę około osi geometrycznej o 180° , otrzymamy inny odczyt P_2 . Jeżelibyśmy teraz, na podstawie rektyfikacji pod *a*) opisanej, przesunęli środek siatki tak, by celowa wskazywała odczyt średni $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$, to śro-

dek siatki zająłby miejsce s'_1 , a po obrocie powtórnym, miejsce s'_2 . Celowa $s'_1 p_1$ lub $s'_2 p_2$ trafiałaby zawsze ten sam punkt P na łacie, mimo, że jak z rysunku jest widocznem, obie osie t. j. celowa i geometryczna, nie padają na siebie, owszem mają różne położenia. Ustawmy teraz łatę w innym punkcie n. p. w B , to celowa $s'_1 p_1$ da odczyt R_1 , a po obrocie lunety w łożyskach o 180° około osi geometrycznej, celowa $s'_2 p_2$ da odczyt R_2 . Widzimy więc, że mimo poprzedniej rektyfikacyi otrzymujemy różne odczyty przed i po obrocie lunety, co jest dowodem, że poprzednia rektyfikacya nie jest jeszcze zupełną, że prócz siatki trzeba by jeszcze przesunąć obiektów czyli środek projektywności. Przesunięcie takie jest już trudniejsze i zabiera więcej czasu, nadto nie zawsze nawet możliwe, bo zależy od konstrukcyi lunety. W takim razie rezygnujemy ze ścisłej rektyfikacyi, t. z. nie będziemy się starali by obie osie się zeszły, lecz sprowadzimy je tylko do równoległości. Zwracamy mianowicie lunetę na jakiś punkt daleki, w odległości kilkuset metrów, nastawiając lunetę za pomocą śruby wstawowej lub elewacyjnej tak, by środek siatki padał dokładnie na obrany punkt. Następnie obracamy lunetę około osi geometrycznej o 180° i zauważymy nowy jakiś punkt na który pada obecnie środek siatki. Teraz przesuwamy siatkę w ten sposób, że jej środek padnie pomiędzy oba poprzednio zauważone punkty, ile możności w środek. Rektyfikację tę powtórzymy 3 do 4 razy, aż środek siatki będzie padał zawsze na ten sam punkt przed i po obrocie lunety. Ponieważ punkt ten znajduje się w znacznej odległości od lunety, więc oś celową uważać możemy za dostatecznie dokładnie równoległą z osią geometryczną.

Łatwo zrozumieć, że wówczas oś celowa znajduje się albo pod albo nad osią geometryczną, więc przy niwelacyi luneta powinna być zawsze w tem samym położeniu, bo wskutek obracania jej, popełniałoby się błędy w niwelacyi. Zawsze więc zważać należy, by śruba wyciągu okularowego znajdowała się zawsze albo po prawej, albo po lewej stronie.

Teraz przystąpimy do rektyfikacyi osi libeli.

Przypuśćmy, że oś celowa L (fig. 124 A) nie jest równoległą do osi libeli $\lambda-\lambda$. Sprowadźmy środek bańki do punktu zerowego, to oś libeli $\lambda-\lambda$ będzie poziomą, zaś oś celowa L trafi łaty w punkcie P_1 . Obróćmy teraz alhidadę o 180° , zatem luneta obróci się obiektywem w przeciwną stronę,

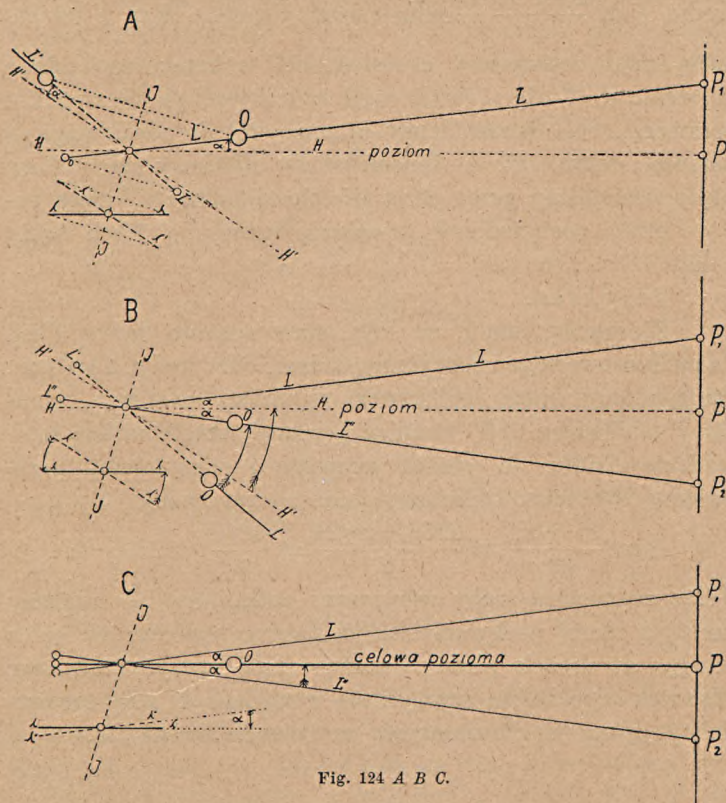


Fig. 124 A B C.

około osi instrumentu $I-I$, prostopadłej do limbusu. Następnie wyjmijmy lunetę z łożysk i przelóżmy ją napowrót obiektywem ku łacie, to celowa zajmie położenie $L'-L'$ (fig. 124 B), a oś libeli położenie $\lambda'-\lambda'$. Teraz sprowadzimy bańkę do punktu zerowego, to celowa zajmie położenie $L''-L''$, wskazując na łacie odczyt P_2 , oś libeli natomiast zajmie położenie $\lambda\lambda$.

Z figury 124 C widać, że odczyty P_1 i P_2 leżą symetrycznie względem punktu P , któryby celowa trafiła, gdyby była do osi libeli równoległą. Ponieważ osi celowej przesuwając już nie wolno po przeprowadzeniu rektyfikacji poprzednio opisanej, więc chcąc, ażeby celowa wskazywała odczyt średni $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$ — podniesiemy lunetę o kąt α za pomocą śruby wstawowej, a że oś libeli wskutek tego zajmie położenie $\lambda'' \lambda''$ (fig. 124 C) czyli bańka wychyli się z punktu zerowego, więc sprowadzimy ją napowrót do równowagi za pomocą śrubki „i”. — Innemi słowy powiemy, że połowę błędu usunęliśmy przez obrót osi celowej o kąt α , drugą połowę przez pochylenie w przeciwną stronę osi libeli także o kąt α .

Przykład.

Kierujemy lunetę na łatę, sprowadzamy bańkę libeli do punktu zerowego i odczytamy na łacie odczyt n. p. 2186 mm. Przekładamy lunetę obiektywem w stronę przeciwną, obracamy alhidadę o 180° kierując ponownie lunetę na łatę sprowadzamy bańkę do punktu zerowego i odczytujemy przypuśmy 2024 mm. Obliczamy teraz odczyt średni

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{2186 + 2024}{2} = \frac{4210}{2} = 2105 \text{ mm.}$$

Teraz za pomocą śruby wstawowej podnosimy lub zniżamy lunetę a raczej pochylamy limbus patrząc równocześnie przez lunetę, aż środek siatki wskaże średni odczyt 2105 mm. Wskutek tego bańka wychyli się z równowagi więc sprowadzimy ją do punktu zerowego za pomocą śrubki „i”.

3. Rektyfikacja instrumentu typu III t. j. gdy tak luneta jak libela daje się łatwo przekładać.

Przedewszystkiem sprowadzimy oś celową do identityczności, względnie do równoległości z osią geometr. w sposób podany przy rektyfikacji poprzedniego typu, a potem sprowadzimy oś libeli do równoległości z osią geometryczną, bo tem samem i oś celowa będzie równoległa do osi libeli.

Przedewszystkiem sprowadzimy bańkę do punktu zerowego, więc oś libeli zajmie położenie $\lambda-\lambda$ (fig. 125 A) i przypuścimy, że oś celowa (identyczna lub przynajmniej równoległa do osi geometrycznej) trafi łątę w punkcie P_1 . Zdejmijmy teraz libelę z lunety i przełożmy ją tak, że śrubka „i” znajdzie się po przeciwnej niż poprzednio stronie. Oś libeli zajmie teraz położenie $\lambda'-\lambda'$ — nachylone do poprzedniego o kąt 2α , co łątwa wywnioskować z długości ramion libeli

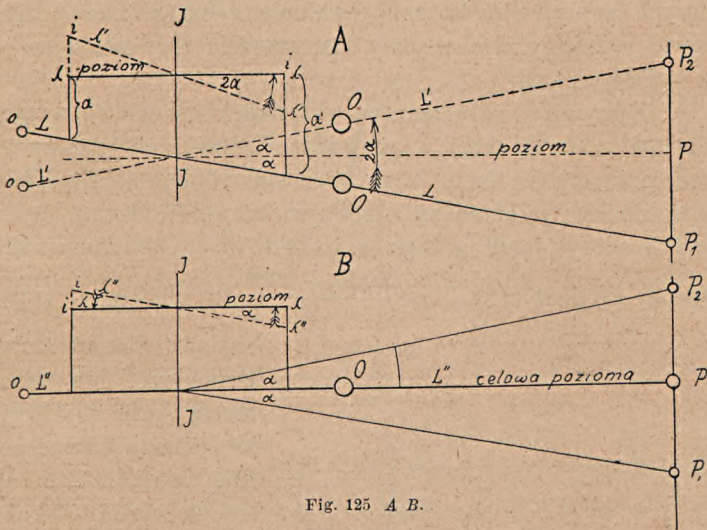


Fig. 125 A B.

oznaczonych na fig. przez a i a' . Sprowadźmy teraz libelę do równowagi, czyli oś $\lambda'-\lambda'$ do położenia $\lambda-\lambda$, za pomocą śruby wstawowej, to jasnem jest, że teraz celowa zajmie inne położenie niż poprzednio, i trafi łątę w punkcie P_2 . Z rysunku widzimy, że gdyby celowa była pozioma, a więc równoległa do osi libeli, to powinna trafiać łątę w punkcie P , leżącym w środku między P_1 i P_2 .

Ponieważ poprzednio zrektyfikowaliśmy oś celową tak, że jest albo identyczną, albo równoległą do osi geometrycznej, więc teraz położenia jej za pomocą przesunięcia siatki zmieniać nie wolno, zatem pozostaje nam wykonać obrót

celowej wraz z osią geometryczną w płaszczyźnie pionowej za pomocą śruby wstawowej tak, by celowa padała na średni punkt P , a ponieważ wskutek zmiany położenia lunety libela wyjdzie z równowagi, więc poprawimy ją za pomocą śrubki „i”. Teraz celowa zajęła położenie $L''-L''$ pośrednie między $L-L$ a $L'-L'$ (fig. 125 B), zatem obróciliśmy ją o kąt α — a oś libeli zajęła położenie $\lambda-\lambda$, zamiast poprzedniego $\lambda''-\lambda''$, więc także obróciliśmy ją o kąt α t. j. o połowę błędu wynoszącego 2α . Przytem przypuszczamy, że pierścienie lunety, na których spoczywa libela, mają dokładnie równe średnice, o czem mówić będziemy jeszcze przy instrumencie uniwersalnym.

Przykład.

Ustawiamy instrument (po rektyfikacyi osi celowej względem osi geometrycznej), sprowadzamy bańkę do punktu 0, i odczytujemy na łacie n. p. 3026 mm. Zdejmujemy libelę i przekładamy ją obracając o 180° , znowu sprowadzamy bańkę do 0 i odczytujemy na łacie n. p. 2826 mm. Obliczamy teraz średnią arytmetyczną $P = \frac{3026 + 2826}{2} = 2926$ mm. i po-

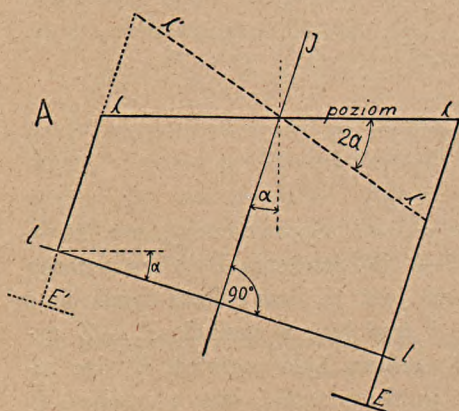


Fig. 126.

chylamy limbus śrubą wstawową, lub samą lunetę śrubą elewacyjną patrząc równocześnie przez lunetę, aż środek siatki wskaże odczyt 2926, libelę zaś, której bańka wyjdzie z punktu zerowego, poprawiamy, sprowadzając za pomocą śrubki „i” bańkę napowrót do zera.

Opisana powyżej rektyfikacya obejmuje:

a) sprowadzenie osi celowej do identyczności, a przynajmniej do równoległości z osią geometryczną, do czego używamy śrubek s trzymających siatkę;

b) sprowadzenie osi celowej do równoległości z osią libeli, w sposób zależny od typu instrumentu, przyczem połowę błędu usuwamy albo śrubą wstawową albo elewacyjną, a połowę śrubką „i” libeli.

Jeżeli usuniemy paralaksę siatki a nadto gdy instrument odpowiada warunkom *a* i *b*, to już jest zupełnie zdolny do użycia, t. z. możemy nim niwelować. Może jednak płaszczyzna limbusu nie być równoległą do osi libeli, a wskutek tego musimy przed każdym odczytem sprowadzać bańkę do punktu zerowego. Ażeby i tej straty czasu sobie zaoszczędzić, sprowadzimy jeszcze płaszczyznę limbusu do równoległości z osią libeli. Ustawmy w tym celu lunetę przez odpowiedni obrót alhidady tak, by była równoległą do linii

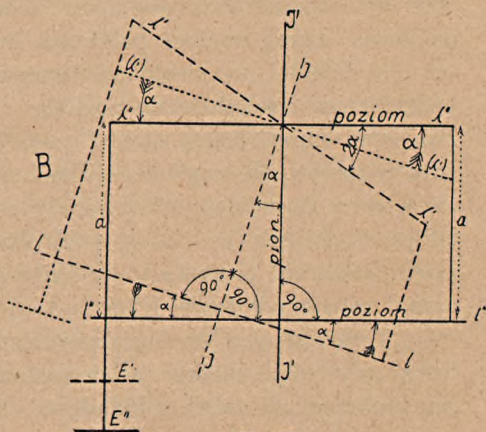


Fig. 127.

przechodzącej przez dwie śruby wstawowe i sprowadźmy bańkę do punktu zerowego za pomocą śrób wstawowych tak, by oś libeli $\lambda-\lambda$ (fig. 126) była poziomą. Wówczas t. z. pionowa oś instrumentu $J-J$ prostopadła do płaszczyzny limbusu $l-l$ nachylonego do poziomu pod kątem α , będzie tworzyła z pionem również kąt α . Obróćmy teraz alhidadę o 180° to śruba elewacyjna E znajdzie się nad tą samą linią podparcia instrumentu, lecz po przeciwnej stronie w miejscu E' (na rysunku oznaczona liniami kreskowanymi), zaś oś libeli, wskutek obrotu około osi J , zajmie położenie $\lambda'-\lambda'$ odchylony się z poziomu o kąt 2α . Zatem wskutek obrotu alhidady mamy następujące położenie osi $\lambda-\lambda$ $J-J$ i płaszczyzny limbusu, przedstawione na fig. 127:

- a) płaszczyzna limbusu $l-l$ nie zmieniała kąta nachylenia α z poziomem;
- b) oś $J-J$ również ma takie samo położenie;
- c) oś $\lambda-\lambda$ znajduje się w położeniu $\lambda'-\lambda'$, nachylona pod kątem 2α do poziomu.

Odechylmy teraz płaszczyznę limbusu $l-l$ o kąt α od obecnego położenia, to zajmie położenie poziome $l''-l''$. Tem samym oś $J-J$ zajmie położenie $J'-J'$, a ponieważ oś ta musi być zawsze prostopadła do limbusu, więc będzie teraz pionową. Przez zmianę położenia limbusu o kąt α , zmieni też i oś libeli $\lambda'-\lambda'$ swoje położenie i zajmie $(\lambda')-(\lambda')$, t. z. będzie teraz nachylona do poziomu o kąt α zamiast o 2α . Ponieważ limbus jest poziomy, więc już nie możemy ruszać śrub wstawowych, czyli że oś libeli sprowadzimy do poziomu za pomocą pozostałej jeszcze śruby elewacyjnej E' , skręcając ją w dół tak, by oś $(\lambda')-(\lambda')$ obróciła się o kąt α , czyli zajęła położenie poziome $\lambda''-\lambda''$, a więc głowa śruby elewacyjnej zajmie położenie E'' .

Teraz już jest oś libeli równoległa do płaszczyzny limbusu, gdy więc limbus będzie ustawiony poziomo, to możemy obracać dowolnie alhidadę, a oś libeli i równoległa do niej oś celowa będą także zawsze poziome, czyli oś celowa zatoczy płaszczyznę poziomą, t. z. płaszczyznę horyzontu. Na podziałce śruby elewacyjnej odczytać możemy stan wskazówki, czyli t. z. markę, za pomocą której możemy każdej chwili bardzo prędko ustawić oś libeli równolegle z płaszczyzną limbusu, gdyż jak widzimy z rysunku ramiona $a-a$ są wtedy sobie równe. Praktyczny sposób tej operacji przedstawia następujący przykład.

Ustawiamy lunetę (wraz z libelą) nad dwoma śrubami wstawowymi, sprowadzamy bańkę do punktu zerowego, i odcytujemy stan śruby elewacyjnej n. p. 20'38 (20'00 odcytamy na podziałce pionowej, zaś 0'38 na obwodzie śruby). Obracamy alhidadę o 180° , przyczem spostrzeczemy, że bańka wyszła z punktu zerowego. Teraz usuniemy cały błąd śrubą elewacyjną, skręcając ją tak, by bańka wróciła do punktu zerowego, poczem odczytamy stan śruby n. p. 24'26. Ponie-

waż jednak połowę błędu usunąć powinniśmy śrubą elewacyjną, a połowę śrubą wstawową, więc ustawimy teraz śrubę elewacyjną na średni odczyt $\frac{20.38 + 24.26}{2} = \frac{44.64}{2} = 22.32$

t. z. robimy napowrót błąd, równający się połowie poprzedniego, wskutek czego bańka wyjdzie z punktu zerowego, a sprowadzimy ją do niego zapomocą śruby wstawowej, czyli pozostałą połowę błędu usuniemy śrubą wstawową. Odczyt na śrubie elewacyjnej 22.32 nazywamy marką, i na ten odczyt ustawiamy zawsze śrubę przed rozpoczęciem niwelacji.

Pozostaje jeszcze ustawienie limbusu do poziomu. Jak wiemy, limbus spoczywa zwykle na trzech śrubach wstawowych lub na dwóch śrubach i dwóch sprężynach, — w każdym razie ma on 3 lub 4 punkta podparcia, więc zawsze 2 linie przecinające się. Jeżeli 2 linie są poziome, to i płaszczyzna przez nie wyznaczona musi być poziomą, przeto ustawimy instrument tak, by libela znajdowała się nad dwoma punktami podparcia i sprowadzamy bańkę do punktu zerowego, następnie obracamy alhidadę o 90° i pozostałą śrubą nad którą teraz stoi libela, sprowadzamy bańkę do zera, czyli 2 linie limbusu, a więc i limbus ustawiliśmy do poziomu.

Teraz możemy niwelować wszystkie punkta naokoło stanowiska instrumentu leżące, a jeżeli tylko statyw jest ustawiony na twardym gruncie i dobrze zaśrubowany, to bańka libeli pozostanie zawsze w punkcie zerowym.

Praktyczne wskazówki.

Statyw należy ustawiać tak, by limbus był poziomy, następnie wbić nogi mocno w ziemię i ześrubować. Przy niwelacji należy zawsze używać parasola do ochrony libeli od słońca, a także i z tego powodu, że pod działaniem słońca metalowe części instrumentu rozszerzają się i to nierównomiernie, bo jedne są więcej, drugie mniej wystawione na działanie promieni. Naturalnie że przed deszczem trzeba także chronić instrument. Codziennie należy instrument oczyścić z kurzu, nie dotykać polerowanych części, zwłaszcza

podziałki limbusu, gołemi rękami, gdyż śniedzieją a najlepiej używać zawsze nieczyszczonych rękawiczek przy pracy w polu.

Bardzo ważnem jest pionowe ustawienie łąty do odczytu. W tym celu łąta opatrzona jest pionem, ale daleko lepszy jest następujący sposób ustawienia łąty:

Pomocnik ustawia łątę na paliku A (fig. 128) pochyla ją naprzód jak wskazuje pozycya I na rysunku, następnie

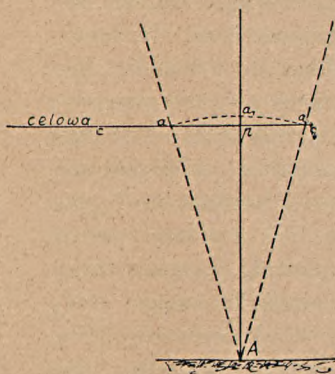


Fig. 128.

pochyla wstecz do poz. II. Łąta odbywa wtedy obrót około punktu A , i przechodzi w tym czasie przez pozycję pionową III. Z rysunku widać, że celowa $c-c$ trafia poz. I. w punkcie a , który to punkt porusza się podczas pochylania łąty po łuku o promieniu Aa i w pozycji III znajdzie się w a_1 — podczas gdy celowa pozioma $c-c$ przecina wtedy łątę poniżej, w punkcie p — następnie w poz. II celowa trafia ten sam punkt a . Z tego wnioskujemy, że przy pionowem usta-

wieniu łąty otrzymamy najmniejszy odczyt, zatem patrząc przez lunetę widzimy jak odczyt zmienia się wraz z pochylaniem łąty, mianowicie powoli zmniejsza się, jest najmniejszym gdy łąta stoi pionowo, a następnie znowu się zwiększa, co doskonale obserwować można przez lunetę i zapamiętać najmniejszy odczyt, który też wpisuje się do protokołu. Postępować tak należy przynajmniej przy odczycie łąty wprzód i wstecz, t. j. przed i po przestawieniu instrumentu na nowe stanowisko.

“Czy łąta stoi i w drugiej płaszczyźnie pionowo, da się łatwo skontrolować za pomocą nitki pionowej w lunecie i odpowiednio figurantowi dać wskazówkę za pomocą umówionych znaków.

§ 36. Błędy niwelacyi.

Przypuśćmy, że wykonaliśmy niwelację między dwoma punktami A i B na dług. L (fig. 129), w ten sposób, że całą długość L podzielimy na równe części, instrument ustawiliśmy w środku tych części, odczytując latę wstecz i wprzód, przyczem długość celowych była wszędzie jednakowa $= s$.

Zatem $L = n \cdot s$ —
a ilość stanowisk $= \frac{n}{2}$.

Przy każdym odczycie popelnimy pewien błąd $\pm \varepsilon$ na który składa się błąd celowej i libeli, jeżeli nie działają żadne inne wpływy zewnętrzne, n. p. wibracja powietrza lub mgła, jeżeli lata stoi zawsze pionowo i podział jej jest dokładny, tudzież gdy długość celowej „ s ” jest tak dobrana, że można dokładnie odczytywać latę. — W takim razie przyjąć możemy, że

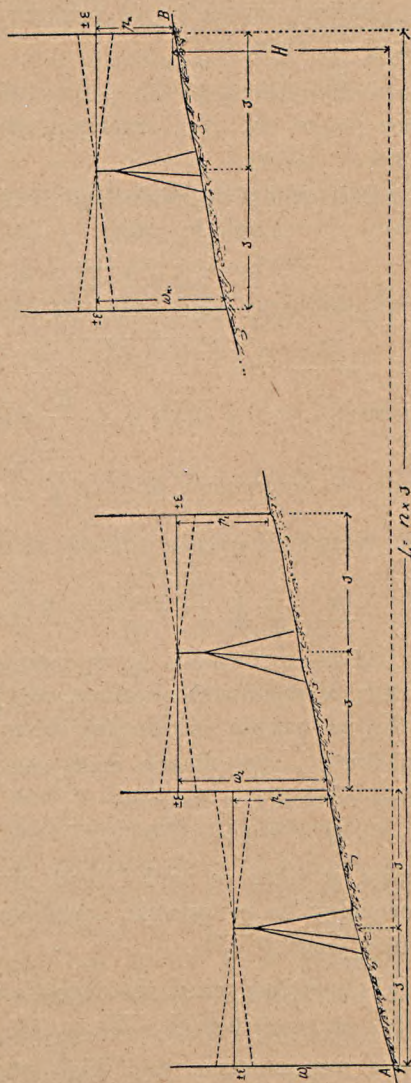


Fig. 129.

błąd $\pm \varepsilon$ jest proporcjonalny do długości celowej, czyli że

$$\pm \varepsilon = k s \quad 1)$$

gdzie k jest współczynnikiem na razie nie znanym.

Różnicę wysokości H punktów A i B obliczymy według § 28 równ. 4)

$$H = (w_1 + w_2 + \dots) - (p_1 + p_3 + \dots) \quad 2)$$

gdzie $w_1 w_2 \dots$ oznaczają odczyty wstecz,

$p_1 p_2 \dots$ „ „ wprzód.

Ilość H będzie miała błąd ΔH złożony z pojedynczych błędów z n celowych, zatem

$$\Delta H = \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm s \pm \dots \quad 3)$$

a stąd obliczymy błąd średni M dla H według § 17

$$M = \pm \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \dots} = \pm \sqrt{n \varepsilon^2} \quad 4)$$

Ponieważ $L = n s$ czyli $n = \frac{L}{s}$ więc wstawivszy to w równanie 4) otrzymamy $M = \pm \sqrt{\frac{L}{s} \cdot \varepsilon^2} \quad 5)$

a po wstawieniu jeszcze wartości na ε z równ. 1) dostaniemy

$$M = \pm \sqrt{\frac{L}{s} \cdot k^2 s^2} = \pm k \sqrt{L \cdot s} \quad 6)$$

Ażeby z równania 6) wyciągnąć jakieś wnioski, przypuścimy, że wykonano niwelację różnych długości $L, L_1, L_2 \dots$ ale biorąc zawsze celowe tej samej długości s . W takim wypadku $\sqrt{s}$ jest ilością stałą zaś L zmienną, i wzór 6) napisać możemy w kształcie

$$M = \pm (k \sqrt{s}) \cdot \sqrt{L} = \pm k_1 \sqrt{L} \quad 7)$$

z czego wynika, że średni błąd niwelacji jest wtedy proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z długości ciągu niwelacyjnego ($\sqrt{L}$).

Przypuścimy teraz, że długość ciągu L jest ilością stałą,

to $M = \pm k \sqrt{L} \cdot \sqrt{s} = \pm k_2 \sqrt{s} \quad 8)$

więc s jest zmienne, czyli błąd średni jest proporcjonalny do długości celowej.

Ten drugi wypadek zdarza się zwykle w praktyce, a więc z równ. 8 wynika, że celem zmniejszenia błędu powinniśmy brać ile możności krótkie celowe, a unikać długich. Jako średnią długość celowych przyjmuje się zwykle 50 m, co zresztą zależy od dobroci lunety i terenu, ale nie powinno się przekraczać 80 m. Im krótsze przyjmujemy celowe, tem częściej musimy przedstawiać instrument i tem więcej mamy odczytów, czyli tem więcej wkładamy pracy w niwelację, zatem wzór 6) powiada, że średni błąd niwelacyi jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z wykonanej pracy.

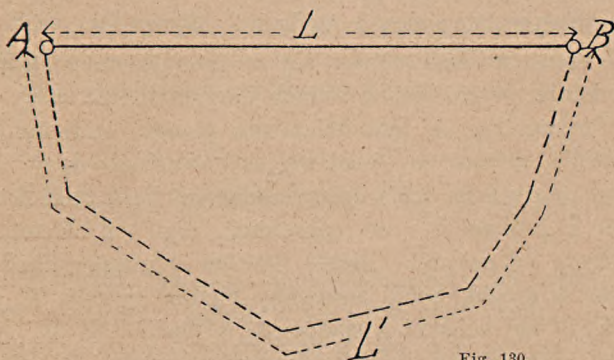


Fig. 130.

Ponieważ średni błąd niwelacyi M , jest proporcjonalny do $\sqrt{L}$ przy stałej s (stałej długości celowej), więc według poprzednich określeń odnoszących się do wag spostrzeżeń, muszą być wagi p i p' dwóch rezultatów niwelacyi wykonanych w tych samych warunkach, między tymi samymi dwoma punktami i przy równych długościach celowych s , odwrotnie proporcjonalne do długości ciągu niwelacyi.

Niwelując bowiem na drodze L (fig. 130) między punktami $A-B$ — a następnie na drodze L' — między temi punktami, dostaniemy wogóle różne rezultaty niwelacyi, a wagi ich p i p' będą odwrotnie proporcjonalne do L i L' .

$$p : p' = \frac{1}{L} : \frac{1}{L'} \quad \dots \dots \dots 9)$$

Dokładność usta- wienia libeli	Długość celowej s w metrach							
	20	40	50	75	100	150	200	300
	$M =$							
$\varepsilon = \pm 1''$	± 0.7	± 1.0	± 1.1	± 1.3	± 1.5	± 1.9	± 2.2	± 2.7
$\varepsilon = \pm 2''$	1.4	1.9	2.2	2.7	3.1	3.8	4.3	5.3
$\varepsilon = \pm 5''$	3.4	4.8	5.4	6.6	7.7	9.4	10.8	13.3
	milimetrom							

Przy zwyczajnej, normalnej długości celowej 50 m dostaniemy błąd średni 2.2 mm na 1 km długości ciągu niwelacji, jeżeli dokładność ustawienia libeli wynosi 2".

§ 37. Niwelacya podwójna (t. z. niwelacya z kontrolą).

Zazwyczaj wykonuje się niwelację dwa razy tam i z powrotem, n. p. przy niwelacji osi kolei (prof. podł.), po zniwelowaniu 3 do 5 km powraca się do tego samego punktu, od którego zaczęto niwelację, tą samą drogą. Powrotna niwelacya nazywa się kontrolą, bo po obliczeniu jej, powinno się otrzymać wyniki zgodne z poprzednią o tyle, o ile dopuszczalna jest pewna różnica czyli błąd niwelacji.

Wogóle przypuśćmy, że wykonaliśmy niwelację na długościach nierównych sobie $s_1 s_2 s_3 \dots$ tam i z powrotem, przyczem otrzymaliśmy odpowiednie pewne różnice dwu niwelacji $d_1 d_2 d_3 \dots$ t. j.

na długości s_1 otrzymaliśmy różnicę $h_1 - h'_1 = d_1$

" " s_2 " " $h_1 - h'_1 = d_2$

" " " " " " " " " " " "

" " s_n " " " $h_n - h'_n = d_n$

Średnią różnicę na długości $s = 1$ km obliczymy według równ. 67) § 22

$$D = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2} + \dots + \frac{d_n^2}{s_n} \right)} = \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \quad 1)$$

Średni błąd m pojedynczej niwelacji obliczymy z równ. 68) § 22

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \quad \dots \quad 2)$$

Średni błąd M średniej arytm. obu niwelacji z równ. 69) § 22

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \quad \dots \quad 3)$$

Jeżeli w powyższych równaniach 1) 2) 3) wyrazimy s w km a różnice d w mm , to otrzymamy błędy w milimetrach na długość jednego km .

Przykład.

Punkt	Odległość s km	Niwelacja		I - II d mm	$\sqrt{s}$	$\frac{d}{\sqrt{s}}$	$\frac{d^2}{s}$	Średnia arytm. $\frac{I+II}{2}$
		I Różnica wysokości m	II (kontrola) Różnica wysokości m					
(1)	0·64	1·425	1·428	— 3	0·8	3·75	14·06	1·4265
(2)	0·81	2·631	2·626	+ 5	0·9	5·55	30·80	2·6285
(3)	0·49	2·856	2·860	— 4	0·7	5·71	32·60	2·8580
(4)	1·00	2·260	2·256	+ 4	1·0	4·00	16·00	2·2580
(5)		9·172	9·170	+ 2			93·46	9·1710
$n = 4$								

Stąd obliczymy błąd M średniej arytmetycznej obu niwelacji na 1 km długości z wzoru 3)

$$M = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left[\frac{d^2}{s} \right]} = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{93·46}{4}} = \pm 2·21 \frac{mm}{1 km}$$

§ 38. Wyrównanie niwelacji.

Z podwójnej niwelacji pewnej długości, otrzymamy wogóle jakąś różnicę „ d ” (§ 37), czyli niezgodność obu

pomiarów. Niezgodność tę wyrównuje się, przyjmując jako najprawdopodobniejszą wartość średnią arytmetyczną obu spostrzeżeń. Prócz ostatecznego rezultatu, t. j. wyrównania wysokości punktu końcowego, trzeba też poprawić i wysokości punktów pośrednich jeżelibyśmy je niwelowali, jak to ma miejsce przy niwelacyi profilu podłużnego. Poprawkę tę uskutecznia się rozdzielając różnicę $\frac{d}{2}$ między średnią arytmetyczną a jednym spostrzeżeniem, proporcjonalnie do długości, na wszystkie punkta pośrednie. Jeżeli długość ciągu niwelacyjnego wynosi L m, to różnica $\frac{d}{2}$ podzielona przez długość, t. j. $\frac{d}{2L} = \delta$ wyraża poprawkę wysokości na 1 m długości — jeżeli d wyrazimy w milimetrach, to poprawka δ wyrażoną będzie w milimetrach. Przypuśćmy, że odległości pośrednich punktów od początku ciągu wynoszą $l_1, l_2, l_3 \dots$ metrów, to poprawki wysokości tych punktów wynosić będą $\delta_1 = \delta \cdot l_1, \delta_2 = \delta \cdot l_2 \dots$ przyczem uwzględnić należy znak poprawki.

Jeżeli ciąg niwelacyi tworzy wielobok zamknięty, to naturalnie punkt początkowy jest zarazem i punktem końcowym ciągu, a więc różnica wysokości powinna być równą zeru; gdyby jednak wskutek niedających się uniknąć nigdy błędów okazała się jakaś różnica d , to należy ją całą, wziętą ze znakiem przeciwnym rozdzielić na punkta pośrednie proporcjonalnie do odległości ich od początku ciągu.

Błędy grube należy pierwszej wynaleźć i wyeliminować z niwelacyi.

Przypuśćmy, że wykonaliśmy niwelację między dwoma punktami stałymi, których wysokości skądinąd są już ustalone i niezmiennie, tudzież, że okazała się różnica w między stałą różnicą wysokości danych punktów, a obliczoną przez nas na podstawie wykonanego pomiaru. Rzecz jasna, że jeżeli wysokości danych punktów zmienić już nie wolno, to uznać musimy nasz pomiar za błędny i różnicę w rozdzielić proporcjonalnie do odległości na wszystkie punkta pośrednie.

z różnicy sumy lat wstecz i sumy lat wprzód, będzie za wielki, bo odjemnik był za mały. Niwelujemy teraz z powrotem, od punktu końcowego do początkowego t. j. w dół. Teraz odczyty wprzód będą z tego samego powodu za małe, a w rezultacie będzie spadek za mały. Zatem średnia arytmetyczna obu pomiarów będzie wartością najprawdopodobniejszą. Fig. 131 *a* i *b* przedstawia graficznie powyżej spisany błąd wywołany skutkiem osiadania się statywu. Z rysunku wido-

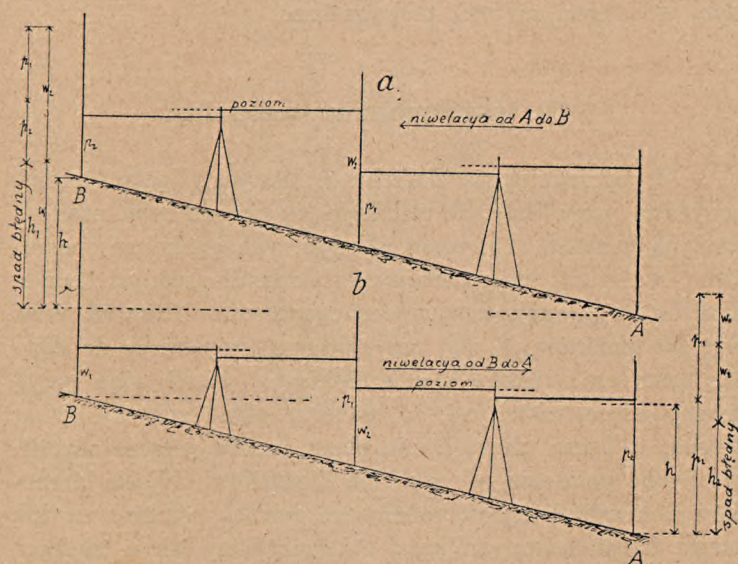


Fig. 131.

czny jest cały przebieg niwelacji tak, że osobno tego opisywać nie ma potrzeby.

Jako dobrą, uważa się niwelację, której średni błąd nie przekracza 3.1 mm na 1 km .

Przy niwelacji profilu podłużnego trasy kolei dopuścić można średni błąd 5 mm na 1 km , jeżeli instrument posiada lunetę o powiększeniu 30 do 35 a przewaga libeli wynosi około $7''$ (podziałka w liniach paryskich), łąta ma podział centymetrowy i celowe bierze się średnio po 50 m długości.

Na błędy w niwelacyi między innemi wywiera wpływ t. z. refrakcyja promieni świetlnych, wskutek czego każdy przedmiot widzimy wyżej, niż jest w rzeczywistości. Wpływ ten jednak jest bardzo mały n. p. dla celowych 100 m długich wynosi około 0.6 mm a tem mniejszy jest dla krótszych celowych. W zwykłych przypadkach wpływu tego uwzględniać nie potrzebujemy, dopiero przy bardzo ważnych pracach, jak zdjęciach krajów i t. p.

Z tego powodu pomijamy wszelkie inne poprawki, jako nam w naszym zakresie niepotrzebne.

§ 39. Instrument uniwersalny.

W poprzednich rozdziałach mówiliśmy o zdjęciach terenu, przyczem poznaliśmy, że redukują się one do zdjęć poszczególnych punktów. Położenie pojedynczych punktów oznaczaliśmy zazwyczaj przez pomiar prostokątnych rzędnych, odniesionych do pewnej, przyjętej osi na terenie. Taka oś, wraz z grupą punktów do niej przynależnych, wystarcza do zdjęcia pasu terenu około 80 m szerokiego. Jeżeli więc przyjmujemy więcej takich osi, to możemy zdjąć znaczny obszar terenu, a celem narysowania planu, trzeba jeszcze określić wzajemne położenie osi czyli ich kierunków. Zdjęcia kierunków dokonywaliśmy dotychczas za pomocą pomiaru zwykłą taśmą trzech boków trójkąta, t. j. łączyliśmy osie w trójkąty, co najzupełniej wystarcza do zdjęcia terenu i narysowania planu. Nie zawsze jednak da się sieć osi łączyć w ten sposób w trójkąty i mierzyć boki; pominąwszy już nakład pracy i czasu, często warunki terenu na to nie pozwalają, n. p. na terenie zabudowanym, w miastach, zrobićbyśmy tego nie mogli, a mimo to pomiar kierunków jest koniecznym. Musimy więc do pomiaru kierunków użyć innego sposobu, t. j. pomiaru kątów za pomocą specjalnego przyrządu, t. zw. teodolitu.

Przed opisem przyrządu nadmienić wypada, że teodolitem nazywamy przyrząd specjalnie do pomiaru kątów poziomych zbudowany; może on jednak być zbudowany tak,

że da się zarazem użyć do niwelacyi i pomiaru kątów pionowych, a wtedy nazywa się instrumentem uniwersalnym lub tachymetrem, o którym też dalej mówić będziemy.

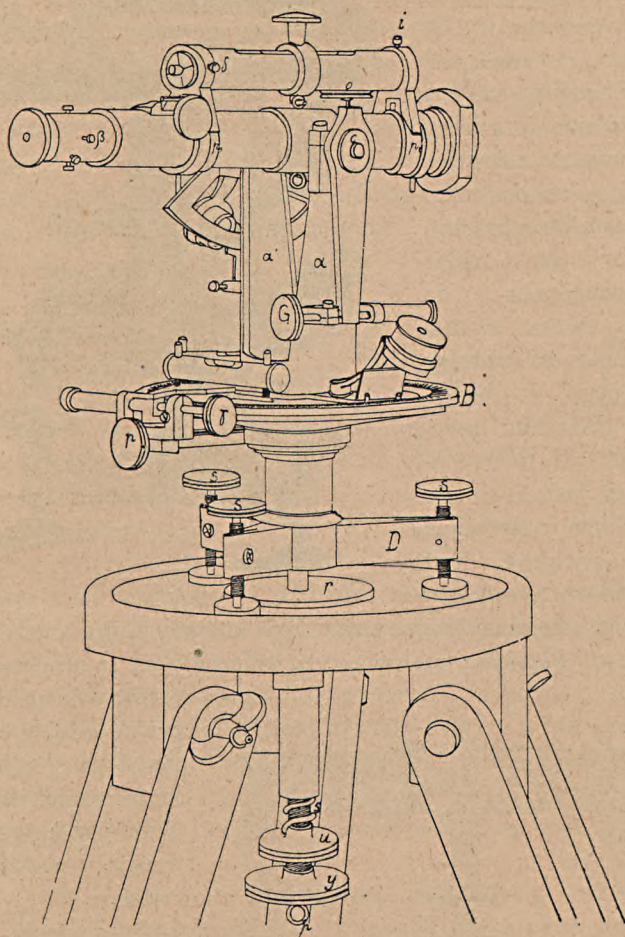


Fig. 132.

Fig. 132 i 132 *a* przedstawia instrument uniwersalny konstrukcyi G. Starke i Kammerer w Wiedniu.

Instrument spoczywa na trójramiennnej spodarce *D*, w której mają wloty trzy śruby wstawowe *s*. Do statywu

zwykle krążkowego, przytwierdza się instrument za pomocą następującego urządzenia.

U spodu spodarki znajduje się wlot dla śruby „z” (fig. 132 b). Śruba „z” 8 mm średnicy, zawieszona jest w otworze w krążku statywu, na płycie *r*. Płyta *r* służy tylko do zawieszenia śruby „z” i jak to widać z figury, śruba „z” da się w otworze krążka, zwykle 8 cm średnicy mającego, w dowolnym kierunku przesunąć. U dołu opatrzona jest śruba z krążkiem *y*, służącym jako pochwyt. Nad krążkiem *y* nacięty

jest na sworzniu śruby gwint, po którym porusza się mutra „u”. Pomiędzy mutrą „u” a drugą płytą *k*, większą niż

otwór w krążku statywu, znajduje się sprężyna *s*, owinięta na sworzniu śruby *z*. Działanie tego urządzenia jest następujące:

Jeżeli śrubę „z” wkręcimy w spodarkę, do czego służy jako pochwyt

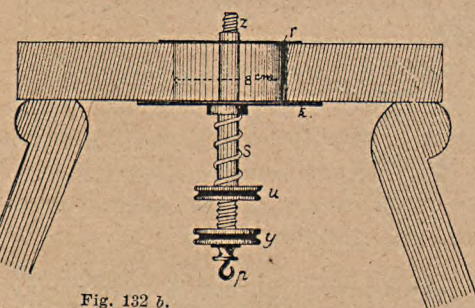


Fig. 132 b.

krążek *y*, a następnie mutrę „u” przykręcimy, to sprężyna *s* opierając się o płytę *k*, ciśnie na mutrę „u” a temsamem

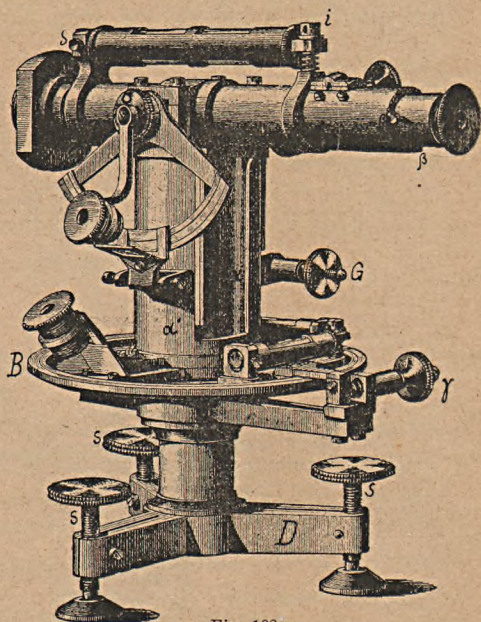


Fig. 132 a.

stara się ściągnąć całą śrubę „z“ w dół. Ponieważ jednak śruba „z“ wkręcona jest w spodarkę opartą nadto za pomocą śrub wstawowych o krążek statywu, więc sprężyna *s* ciągnie zarazem cały instrument, przyciskając go do statywu. Równocześnie widzimy, że cały instrument da się wraz ze śrubą „z“ przesuwac po krążku statywu w granicach otworu w nim wyciętego. Uszko „p“ służy do zawieszania pionu. Wlot śruby w spodarce powinien już z fabryki wyjść tak zrobiony, że po wkręceniu śruby *z* i zawieszeniu pionu, oś pionowa instrumentu zrektyfikowanego i ustawionego, powinna być pionowem przedłużeniem sznurka, na którym wisi pion.

Na spodarce spoczywa limbus *B*, albo stale z nią połączony, albo też ruchomo, zatem dający się obracać. Limbus jest podzielony na 360° . Drobniejszy podział zależy jest od wielkości

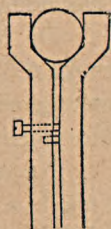
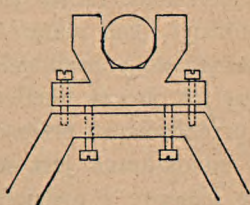


Fig. 133.

średnicy koło limbusu. Na limbusie umieszczona jest alhidada obracająca się po nim około osi prostopadłej do płaszczyzny limbusu, t. z. osi instrumentu czyli osi pionowej, opatrzona dwoma ramionami z noniuszami do pomiaru kątów poziomych. Na alhidadzie znajdują się zwykle dwie krótkie libelki, t. z. krzyżowe, gdyż ustawione są w kierunkach prostopadłych do siebie na płaszczyźnie. Libele te służą do poziomego ustawienia limbusu, a temsamem i osi instrumentu pionowo.

Śruba *p* służy do sprzęgnięcia alhidady z limbusem, t. j. do stałego połączenia ich chwilowo, małe zaś przesunięcia alhidady możliwe są za pomocą śruby *γ*. — Na alhidadzie znajdują się 2 ramiona *a—a'*, w których spoczywa luneta, mogąca obracać się około osi poziomej *c*, w płaszczyźnie pionowej. Łożyska w których obraca się oś pozioma *c* są tak urządzone, że jedno da się nieco zniżyć lub

podwyższyć i służy do rektyfikacyi tej osi. Urządzenie to może być rozmaite, n. p. fig. 133 przedstawia urządzenie łożyska osi poziomej, łatwe do zrozumienia po oglądnięciu instrumentu. Oś pozioma da się unieruchomić za pomocą śruby e , małe zaś obroty możliwe są za pomocą śruby G , co jest łatwe do zrozumienia z rysunku.

Luneta urządzona jest jak zwykle, wyciąg okularowy ma cztery śrubki β do przesuwania siatki, która składa się z trzech nitek poziomych i nitki pionowej. Libela jest albo stale przytwierdzona do lunety a wtedy jest ona rewersyjną, t. z. podział i szkło libeli widoczne jest z góry i od spodu (fig. 132 a), albo libela nasadkowa, dająca się zdejmować i nakładać na pierścienie lunety (fig. 132).

Do rektyfikacyi libeli służy śrubka „ i “, tudzież dwie śrubki $\delta - \delta$ służące do przesunięcia tego końca rurki w kierunku poziomym tak, by oś libeli ustawić można w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez oś instrumentu i oś celową.

Na osi c umieszczone jest stale i obracające się wraz z nią t. z. koło pionowe z podziałem na stopnie i części stopnia, do pomiaru kątów w płaszczyźnie pionowej, czyli kątów pionowych. Na ramieniu α' umieszczony jest noniusz do odezytywania kątów (fig. 132 a). Często instrument posiada tylko $\frac{1}{2}$ część koła pionowego i jeden noniusz, lub całe koło i 2 noniusze. Noniusz koła pionowego da się nieco przesunąć za pomocą odpowiednich śrubek tak, że ustawić się da na 0° lub 90° albo 180° , jeżeli oś celowa jest poziomą.

Dobry instrument odpowiadać powinien następującym warunkom przedstawionym graficznie na fig. 134 a i b .

1. Oś libeli $l-l$ powinna być równoległą do osi celowej $c-g$ i osi geometrycznej lunety.

2. Oś celowa powinna być identyczną z osią geometryczną lunety.

3. Płaszczyzna limbusu $\lambda-\lambda$ równoległa do osi libeli.

4. Oś instrumentu $J-J$ prostopadła do limbusu.

5. Oś celowa i geometryczna powinny przecinać się z osią instrumentu.

6. Oś obrotu lunety $p-p$ (t. z. oś pozioma) powinna być równoległą do limbusu.

7. Oś celowa powinna być prostopadłą do osi obrotu lunety $p-p$.

8. Oś instrumentu $J-J$ powinna przechodzić przez środek limbusu, w przeciwnym razie powstaje t. z. ekscentryczność lunety mająca wpływ na pomiar kąta poziomego.

9. Noniusze powinny być centrycznie osadzone.

10. Podział limbusu powinien być dokładny.

11. Pierścienie lunety służące do nasadzania libeli powinny mieć dokładnie równe średnice.

Warunki 1, 2, 3, 6, 7 dadzą się zawsze zachować, bo jeżeli instrument im nie odpowiada, to można go łatwo poprawić. Pozostałe warunki muszą być zachowane przy budowie instrumentu, później poprawić ich albo wcale nie można, albo bardzo trudno.

Wreszcie dodać wypada, że błędy powstające przy pomiarach wskutek tego, że instrument nie odpowiada wszystkim warunkom wyżej wymienionym, dadzą się odpowiednią metodą pomiaru albo zupełnie wyeliminować, albo zmniejszyć, o czem mówić będziemy przy rektyfikacji.

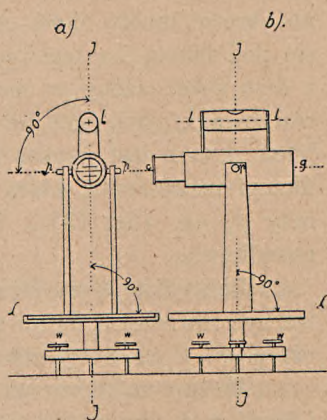


Fig. 134 a i b.

§ 40. Rektyfikacja instrumentu uniwersalnego.

Przed rozpoczęciem pracy należy instrument sprawdzić, a w razie gdyby okazały się pewne błędy, zrektyfikować. Rektyfikację opiszemy w tym samym porządku, w jakim podaliśmy w poprzednim paragrafie warunki, którym dobry instrument odpowiadać powinien.

Luneta instrumentu uniwersalnego może być dwojako umieszczona, albo da się w płaszczyźnie pionowej około osi poziomej $c-c$ obracać, albo spoczywa w łożysku, z którego możemy ją łatwo wyjąć i przerzucić. W pierwszym wypadku, chcąc lunetę obrócić około jej osi geometrycznej, musieliśmy ją wyjąć wraz z osią poziomą z łożysk i przełożyć, co połączone jest zawsze z pewnemi trudnościami, natomiast w drugim wypadku da się luneta bardzo łatwo obrócić około swej osi geometrycznej, podobnie jak w instrumencie typu III. Zależnie od lunety, urządzona jest libela; w pierwszym rodzaju urządzenia, libela jest stale złączona z lunetą tak, że po obrocie lunety około osi $p-p$ (fig. 134) libela znajdzie się pod lunetą i z tego powodu ma szkło i podział widoczne z dwu stron, ażeby w obu położeniach można ją ustawić do równowagi, czyli jest to t. z. libela rewersyjna. Prócz tej libeli zawsze jest jeszcze libela nasadkowa służąca do rektyfikacyi instrumentu, którą można nasadzić na pierścieniu lunety p_1-p_1 (fig. 132). Drugi rodzaj posiada tylko libelę nasadkową.

Rektyfikację zaczniemy od warunku 1 i 2, t. j. oś libeli ma być równoległą do osi geometrycznej i osi celowej, tudzież oś celowa i geometryczna powinny być identyczne.

Weźmy najpierw pierwszy sposób umieszczenia lunety i libeli t. j. luneta da się wprost obracać około osi $p-p$ w płaszczyźnie pionowej, a libela jest stale z nią złączona. Do rektyfikacyi użyjemy zapasowej libeli nasadkowej.

Umieścimy libelę nasadkową na lunecie i przypuścimy, że oś jej nie jest równoległą do osi geometrycznej lunety. Przypuszczamy przytem, że pierścienie lunety mają dokładnie równe średnice.

Nierównoległość osi libeli do osi geometrycznej powstaje wskutek tego, że oba ramionka libeli $r-r$, nie są równe. Sprowadzimy libelę do poziomu (bańkę do punktu zerowego), natenczas oś jej zajmie położenie $l-l$ (rys. 135), zaś oś geometryczna położenie $1-1$; przerzucimy teraz libelę o 180° tak, że jeżeli śrubka „i“ była poprzednio po prawej stronie, to teraz znajdzie się po lewej, a oś libeli zajmie położenie $l'-l'$

nachylone do poprzedniego o kąt α . Sprowadźmy następnie libelę znowu do równowagi, to oś jej przejdzie z położenia $l'-l'$ do poziomu $l-l$, natomiast luneta, a z nią i oś geometryczna pochyli się o kąt α . Z rysunku widać, że oś geometryczną trzeba teraz poprawić o połowę błędu $\frac{\alpha}{2}$ za pomocą śruby wstawowej, lub elewacyjnej, — a ponieważ libela wskutek zmiany położenia lunety musi wyjść z równowagi, więc sprowadzi się ją napowrót do punktu zerowego śrubką „i”. — W ten sposób sprowadzimy oś libeli do równo-

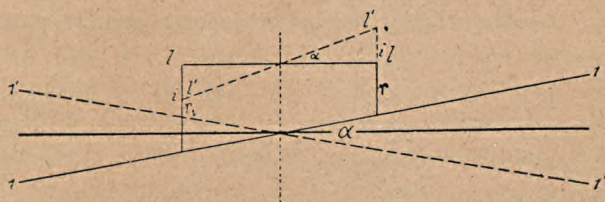


Fig. 135.

ległości z osią geometryczną lunety. W praktyce postępujemy w następujący sposób:

Sprowadzamy bańkę do punktu zerowego i odczytujemy łatę ustawioną w odległości około 100 m; następnie przerzucamy libelę, sprowadzamy ją ponownie do równowagi, i znów odczytujemy łatę. Teraz obliczamy średnią arytmetyczną obu odczytów, n. p. pierwszy odczyt niech będzie 1286, drugi 1300, średni $\frac{1286 + 1300}{2} = 1293$ — i na ten średni

odczyt nastawiamy lunetę za pomocą jednej z wyżej wymienionych śrub, a bańkę, która wyszła z punktu zerowego sprowadzamy napowrót do niego śrubką „i”. Tutaj pośrednio, za pomocą osi celowej zrektifikowaliśmy położenie osi libeli względem osi geometrycznej.

Ponieważ do rektyfikacyi użyliśmy libeli nasadkowej, więc jeszcze należy sprawdzić czy libela stała zgodza się z nasadkową, a w razie niezgodności poprawić ją śrubką „i”, wtedy i ta libela będzie równoległą do osi geometrycznej.

celową do identyczności, względnie równoległości z osią geometryczną w sposób opisany w § 35 rozdz. 3, a następnie oś celową do równoległości z osią libeli w ten sposób, że sprowadzamy bańkę do punktu zerowego i odczytujemy łatę ustawioną w odległości około 100 m, następnie przerzucamy libelę, sprowadzamy ją do równowagi i znów odczytujemy łatę. Teraz obliczymy średnią arytmetyczną obu odczytów na łacie, nastawiamy lunetę śrubą wstawową lub śrubą elewacyjną na ten średni odczyt, a bańkę sprowadzamy do punktu serowego śrubką „i”.

Warunek 3. Oś libeli powinna być równoległą do płaszczyzny limbusu. Tę rektyfikację przeprowadzamy zupełnie podobnie jak przy instrumencie niwelacyjnym, mianowicie:

Ustawiamy lunetę wraz z libelą nasadkową na niej umieszczoną, nad dwoma śrubami wstawowymi, i za pomocą nich ustawiamy libelę poziomo; następnie obracamy alhidadę o 180° , a jeżeli bańka wyjdzie z punktu zerowego, to jest znakiem, że limbus nie jest równoległy do osi libeli.

Połowę błędu usuwamy za pomocą śruby wstawowej, a drugą połowę za pomocą śruby G (fig. 132), która tu zastępuje śrubę elewacyjną. Pod usunięciem połowy błędu rozumiemy pochylenie limbusu, względnie lunety wraz z libelą, odpowiednimi śrubami, tak, by środek bańki przesunął się o połowę odległości o jaką wychylił się z punktu zerowego po obrocie alhidady o 180° . — Mając już limbus równoległy do osi libeli, obrócimy jeszcze alhidadę o 90° i trzecią śrubą wstawową ustawimy libelę poziomo, a więc dwie linie przecinające się i leżące w płaszczyźnie limbusu ustawiliśmy poziomo, więc i cały limbus jest poziomy. Powyższą rektyfikację przeprowadzamy za pomocą libeli nasadkowej, bo libele krzyżowe umieszczone na alhidadzie nie są zwykle dość czule. Po ustawieniu limbusu poziomo, poprawimy jeszcze libele krzyżowe za pomocą śrubek „i”, tak, by ich bańki znajdowały się w punktach zerowych, czyli sprowadzimy je do zgodności z libelą nasadkową. Jeżeli limbus jest równoległy do osi libeli, to i oś instrumentu $J-J$, jako prostopadła do limbusu musi być pionową.

Wskutek robionych poprawek śrubą G , mogło się koło pionowe obrócić, tak, że przy poziomem ustawieniu lunety, zero noniusza nie zgadza się z zerem podziału koła; teraz więc przesuniemy sam noniusz odpowiednimi śrubkami do zgodności z kołem.

Poprzednio wspomnieliśmy, że pierścienie lunety na które nakłada się libelę nasadkową, powinny mieć dokładnie tę samą średnicę, co zazwyczaj już z fabryki wychodzi dobrze obrobione, a w celu przekonania się o dokładności pierścieni, wyjmuje się lunetę z łożysk, ustawia na stałej podstawie w odpowiednio urządzonych dźwigarkach, nasadza się następnie libelę i odczytuje położenie środka bańki s_1 — przerzucamy potem libelę o 180° i odczytujemy położenie środka bańki s_2 . Teraz zdejmujemy lunetę, przekładamy ją w dźwigarkach tak, że pierwszy pierścień przyjdzie w poprzednie położenie drugiego, nasadzamy libelę, odczytujemy środek bańki s_3 — potem znów przerzucamy libelę i odczytujemy środek bańki s_4 . Jeżeli pierścienie są równe to powinien zachodzić warunek

$$s_1 + s_2 = s_3 + s_4 \quad 1)$$

w przeciwnym razie pierścienie lunety nie są równe i lunetę używać można tylko w pewnym, zawsze tem samem położeniu, bo poprawa pierścieni przez naklejenie n. p. cieniotkich pasków papieru jest trudna i nietrwała.

Po dokonaniu opisanej dotąd rektyfikacyi, instrument jest już zdalny do niwelacyi. Ażeby prócz tego zdalnym był do pomiaru kątów i tyczenia linii, musimy sprawdzić czy odpowiada i innym warunkom, ewentualnie zrektyfikować inne błędy.

Warunek 4, t. j. oś instrumentu $J-J$ ma być prostopadłą do limbusu, zachowany jest już przy budowie instrumentu i łatwo poprawić się nie da.

Warunek 5, t. j. oś celowa przecinać się będzie z osią instrumentu, jeżeli luneta jest centrycznie osadzona i celową sprowadzimy do identyczności z osią geometryczną, bo wtedy oś geometryczna przecina się z osią instrumentu. O ekscentryczności lunety mówić będziemy przy warunku 8.

Warunek 6. Oś obrotu lunety $p-p$ powinna być równoległą do limbusu. Rektyfikację wykonać można kilku sposobami.

a. Ustawiamy limbus poziomo i kierujemy lunetę na krawędź muru wysokiego budynku. Następnie obracamy lunetę powoli w płaszczyźnie pionowej, patrząc czy środek siatki znajduje się zawsze na pionowej krawędzi muru. Jeżeli środek siatki schodzi z krawędzi, to jest znakiem, że oś obrotu nie jest pozioma, a ponieważ limbus ustawiliśmy poziomo, więc oś $p-p$ nie jest do limbusu równoległa. W takim razie podnosimy lub opuszczamy jeden koniec osi $p-p$ w łożysku za pomocą odpowiednio urządzonych śrubek (fig. 133).

b. Pionową krawędź muru zastąpić można sznurem zawieszonym na wysokim drzewie, obciążonym kamieniem. Ażeby uniknąć wahań sznura, dobrze jest zanurzyć kamień obciążający w wodzie.

c. Ustawiamy zwierciadło poziomo, zauważymy jakiś wysoki punkt, którego obraz jest w zwierciadle widoczny, kierujemy lunetę na ten punkt tak, by środek siatki padał dokładnie na niego, następnie opuszczamy lunetę na obraz punktu w zwierciadle. Jeżeli środek siatki nie pada na obraz, to oś obrotu lunety nie jest równoległa do limbusu (limbus poziomo ustawiony) i należy ją zrektyfikować jak poprzednio.

d. Ustawiamy limbus poziomo, celujemy do jakiegoś wyraźnego punktu wysoko położonego P (fig. 137) opuszczamy następnie lunetę i odczytujemy łatę ułożoną poziomo na terenie równoległą do osi $p-p$, w odległości kilku metrów od instrumentu. Następnie lunetę przerzucamy, obracamy alhidadę o 180° , celujemy ponownie do tego samego punktu, opuszczamy lunetę i znów odczytujemy łatę. Nazwijmy pierwszy odczyt P_1 , drugi P_2 — to niezgodność odczytów jak widać z rysunku, pochodzi stąd, że linie PP_1 i PP_2 nie są pionowe wskutek tego, że oś obrotu nie jest pozioma, zatem ustawimy oś obrotu

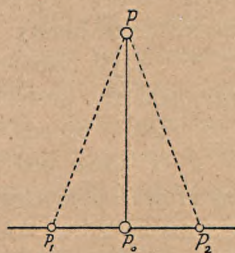


Fig. 137.

poziomo przez podniesienie jednego jej końca tak, by odczyt na łacie był średnią arytmetyczną obu poprzednich odczytów,

$$\text{t. j. } P_0 = \frac{P_1 + P_2}{2}.$$

Warunek 7. Oś celowa powinna być prostopadłą do osi obrotu $p-p$, w przeciwnym razie powstaje t. z. błąd kolicacyjny. Celem rektyfikacyi, ustawmy instrument nad punktem A (o sposobie ustawiania instrumentu w danym punkcie będzie mowa przy końcu paragrafu) i skierujmy lunetę na tyczkę ustawioną w punkcie B (fig. 137 *a*) dokładnie, t. z. środek siatki ma padać na środek tyczki. Następnie prze-

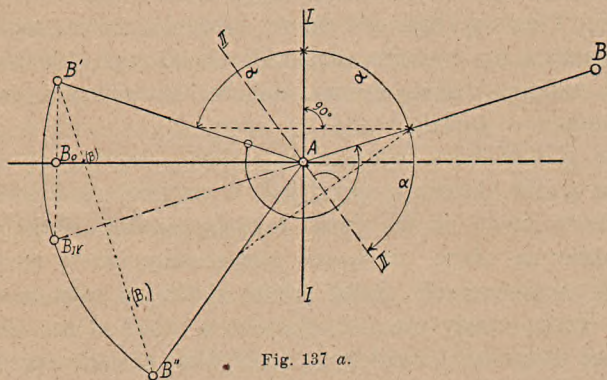


Fig. 137 *a*.

rzućmy lunetę obiektywem w przeciwną stronę. Przypuśćmy, że oś obrotu lunety $I-I'$, tworzy z osią celową AB kąt $\alpha < 90^\circ$, czyli osie te nie są do siebie prostopadłe. W takim razie podczas przerzucania, luneta obraca się koło osi $I-I'$ i po obrocie oś celowa zajmie położenie AB' nachylone do osi $I-I'$ także pod kątem α . Patrząc przez lunetę, możemy nakierować pomocnika z tyczką tak, że umieści on tyczkę w punkcie B' na kierunku celowej. Teraz obróćmy alhidadę wraz z lunetą około pionowej osi instrumentu, aż celowa AB' przyjdzie w położenie pierwotne AB . Obracając alhidadę, obrócimy tem samem oś $I-I'$, która też zajmie położenie $II-II'$, t. j. punkt I' znajdzie się w punkcie II i znowu nachylenie celowej do osi obrotu $II-II'$ będzie

takie same, pod $\angle \alpha$. Teraz przerzucemy lunetę po raz drugi, więc celowa AB po obrocie lunety około osi $II-II'$ przyjdzie w położenie AB'' .

Z rysunku widocznem jest, że błąd kolimacyjny wynosi $\frac{1}{4}$ część kąta BAB'' . Przesuniemy więc celową śrubkami p tak, by przyszła w położenie AB_0 , to wówczas celowa AB_0 i oś II' tworzą kąt prosty. W praktyce postępujemy w ten sposób, że wyznaczymy punkta B' i B'' tyczkami, mierzymy długość $B'B''$, dzielimy ją na 4 części i w czwartej części ustawiamy tyczkę B_0 , zaś śrubkami β (fig. 132 b) przesuwamy siatkę, aż jej środek padnie na środek tyczki. Będzie to wprowadzić tylko przybliżone wyznaczenie $\frac{1}{4}$ kąta $B'AB''$, lecz już różnica będzie bardzo mała, tak że po drugim lub trzecim powtórzeniu tej rektyfikacji, otrzymamy dokładność zupełnie wystarczającą.

Drugi sposób (fig. 137 b). Ustawmy instrument w punkcie A (o ustawieniu instrumentu na danym punkcie mówić będziemy nieco dalej) i wytyczmy dwa punkty B i C . Punkty A B i C leżąc będą na jednej prostej, bo wytyczyliśmy je za pomocą tej samej celowej. Odległość punktów obieramy zwykle około 200 do 250 m jeden od drugiego. Przenieśmy następnie instrument na punkt B i ustawmy go na nim dokładnie, wycelujmy do punktu A , nastawmy lunetę tak, by środek siatki padał na ostrze tyczki A , potem sprzęgnijmy alhidadę z limbusem, a lunetę przerzucmy około osi obrotu.

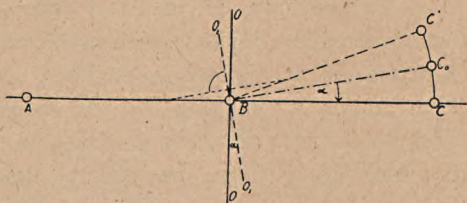


Fig. 137 b.

Jeżeli oś celowa jest prostopadłą do osi obrotu, czyli gdy BA jest prostopadłą do linii OO_1 , to po przerzuceniu lunety środek siatki powinien paść na ostrze tyczki C . Ale przypuśćmy, że oś obrotu O_1O nie jest prostopadłą do celowej BA , mianowicie błąd kolimacyjny ma wartość α . Jeżeli

więc wycelujemy do punktu A i przerzucimy lunetę, czyli obrócimy oś celową około $O_1 O_1$, to zajmie ona położenie BC' odchylone od właściwego położenia BC , jakie po obrocie zająć była powinna, o podwójny kąt α . Ustawmy w kierunku celowej tyczkę C' , zmierzmy odległość CC' i wyznaczmy punkt środkowy C_0 ; ustawmy w nim tyczkę, a w końcu przesunmy siatkę śrubkami poziomymi β w ten sposób, ażeby jej środek padł na ostrze tyczki C_0 .

Wskutek przesunięcia siatki, obróciliśmy, jak to widać z rysunku, celową o kąt α , czyli usunęliśmy błąd kolimacyjny. Jeżeli bowiem obrócimy teraz alhidadę wraz z lunetą tak, by środek siatki padł na ostrze tyczki C , to wskutek tego obrotu lunety, padnie też oś $O_1 O_1$ na kierunek osi OO prostopadły do kierunku celowej, więc po nowem przerzuceniu lunety, celowa padnie na punkt A .

Warunek 8. Oś instrumentu $J-J$ powinna przechodzić przez środek limbusu.

Przypuśćmy, że punkt A (fig. 138) jest środkiem limbusu, natomiast linia pionowa przechodząca przez punkt skrzyżowania się osi celowej z poziomą osią obrotu lunety, przebiega limbus w punkcie A_1 , w odległości ρ od środka A . Wskutek obrotu alhidady po limbusie, zakreśli punkt A_1 koło o promieniu ρ , które jest miarą ekscentryczności osadzenia lunety, a wspomniana pionowa zatacza pobocznice walca, do którego oś celowa jest w każdym położeniu styczna. Wynika z tego, że podczas pomiaru kąta, gdy środek limbusu ustawimy nad wierzchołkiem t. j. w punkcie A , to celowa, nie przechodząc przez środek limbusu, nie może też znajdować się dokładnie w kierunku ramienia kąta.

Ustawmy instrument nad wierzchołkiem, czyli środek limbusu A , nad punktem wierzchołkowym kąta, i skierujmy celową do lewego ramienia t. j. do punktu L , ale wskutek ekscentryczności otrzymujemy celową $L_1 L$, styczną do koła ekscentryczności, zamiast celowej AL . Następnie celujemy do ramienia prawego P i znów otrzymujemy celową $P_1 P$, zamiast celowej AP . Przedłużmy obie celowe do przecięcia się w punkcie B , to widzimy, że kąt między niemi zawarty

jest α_1 , gdy tymczasem mieliśmy pomierzyć kąt o wierzchołku A t. j. α . Przerzucimy teraz lunetę obiektywem w przeciwną stronę, wycelujmy do ramienia lewego, to otrzymamy celową $L_{II} L$ zamiast AL , a tak samo otrzymamy drugą celową $P_{II} P$. Celowe te przecinają się w punkcie C pod kątem α_2 .

Mierząc więc kąt w dwu położeniach lunety, otrzymamy dwie jego wartości α_1 i α_2 wogóle różne, co jest do-

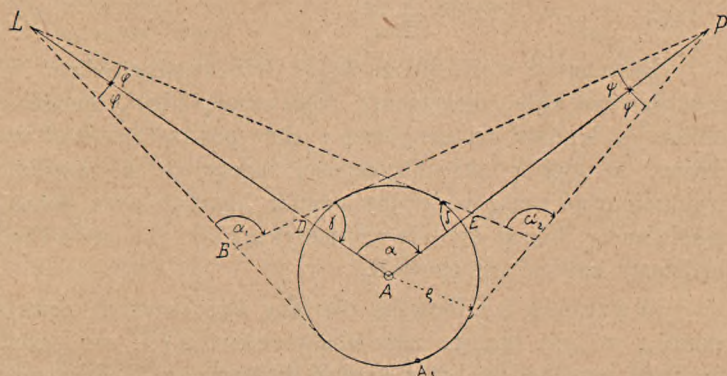


Fig. 138.

wodem, że luneta jest osadzona ekscentrycznie, w przeciwnym bowiem razie dostalibyśmy zawsze tę samą wartość α .

Według oznaczeń na fig. 138, możemy zestawiać następujące równania:

Z trójkąta LBD

$$\alpha_1 + \varphi + \gamma = 180^\circ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

podobnie z trójkąta PCE

$$\alpha_2 + \psi + \delta = 180^\circ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

dodawszy oba równania 1) i 2) do siebie, otrzymamy

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \varphi + \gamma + \psi + \delta = 360^\circ \quad . \quad . \quad 3)$$

$$\text{czyli} \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 360^\circ - (\varphi + \gamma + \psi + \delta) \quad . \quad . \quad 4)$$

Następnie z trójkąta LAE

$$\varphi + \alpha + \delta = 180^\circ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

i z trójkąta PAD

$$\psi + \alpha + \gamma = 180^\circ \quad 6)$$

z równania zaś 5) i 6)

$$2\alpha + \varphi + \psi + \gamma + \delta = 360^\circ$$

$$\text{czyli } 2\alpha = 360 - (\varphi + \psi + \gamma + \delta) \quad 7)$$

Porównajmy równania 4 i 7, to możemy napisać

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha$$

$$\text{czyli } \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad 8)$$

Równanie 8 wskazuje, że mając dwa spostrzeżenia α_1 i α_2 tego samego kąta, otrzymamy rzeczywistą jego wartość α , obliczając średnią arytmetyczną z obu spostrzeżeń. Stąd widzimy, że wpływ ekscentryczności lunety da się zupełnie wyeliminować przez podwójny pomiar kąta w dwu położeniach lunety, biorąc średnią arytmetyczną obu pomiarów i tak będziemy zawsze postępowali.

Warunek 9. Noniusze powinny być osadzone centrycznie, t. z. linia łącząca zera obu przeciwnych noniuszów, powinna przechodzić przez środek limbusu, czyli odczyty na obu noniuszach powinny różnić się ściśle o 180° .

Przypuśćmy, że linia 1—2 łącząca zera obu noniuszów (fig. 139) nie przechodzi przez środek limbusu L , czyli alhidada jest ekscentryczna, tudzież, że po obrocie alhidady o kąt α , linia 1—2 obróci się nie około środka limbusu L , lecz około punktu B i przyjdzie w położenie 1'—2'. Chcąc otrzymać wartość kąta, odczytujemy na limbusie długość łuku 1—1' jako miarę kąta α_1 , a na drugim noniuszu łuk 2—2', odpowiadający kątowi α_2 na limbusie. Według oznaczeń na figurze otrzymamy:

z trójkąta 1' B 2

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad 1)$$

a to na tej podstawie, że kąt obwodowy 1—2—1' wsparty na łuku 1—1' jest równy połowie kąta środkowego α_1 wspartego na tym samym łuku. To samo odnosi się do kąta α_2 .

a kąt α jako zewnętrzny trójkąta $1'-B-2$ jest równy sumie dwu kątów wewnętrznych według równ. 1).

Ponieważ α_1 i α_2 dostajemy z pomiaru, więc z równania 1) dowiadujemy się, że ekscentryczność osadzenia noniuszów da się wyeliminować przez odczyt kąta na obu noniuszach i obliczenie średniej arytmetycznej z otrzymanych dwu wartości kąta. Jeżeliby instrument posiadał tylko jeden noniusz, to łatwo wywnioskować, że błąd ekscentryczności usuniemy, odczytując kąt w dwu położeniach lunety i biorąc średnią arytmetyczną z obu pomiarów.

Jak z powyższego widzimy, błąd ekscentryczności lunety i alhidady da się zupełnie wyeliminować z pomiaru przez podwójny pomiar w dwu położeniach lunety i obliczenie średniej arytmetycznej obu spostrzeżeń.

Warunek 10, t. j. podział limbusu powinien być dokładny. Błąd podziału limbusu poprawić się nie da i musi zostać takim, jakim wyszedł z fabryki. Błąd ten powstaje wskutek niejednostajnego odstępu między pojedynczymi kresekami tak, że w jednym miejscu są one gęstsze, w drugim rzadsze.

Badanie odstępu kresek odbywa się w ten sposób, że za pomocą noniusza mierzymy odstępy jeden po drugim, lub ten sam kąt wytyczony, mierzymy raz po raz różnymi łukami limbusu, obracając go i porównując wyniki. Sposoby zmniejszenia wpływu złego podziału limbusu na pomiar kąta, poznamy później przy opisie metod pomiaru.

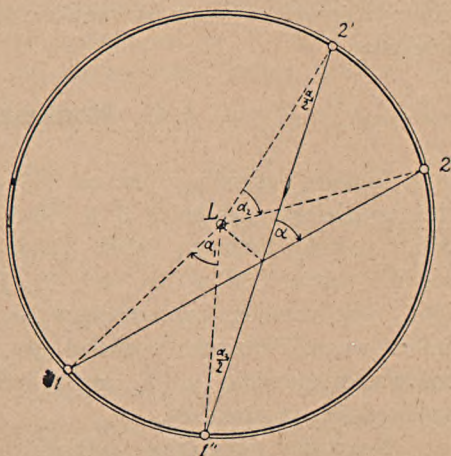


Fig. 139.

W końcu ustawimy jeszcze siatkę w ten sposób, ażeby jedna nitka była pionową, a inne poziome. W tym celu zawieszamy ciężar na cienkim sznurku w odległości kilkunastu metrów i kierujemy lunetą tak, by nitka „pionowa” siatki padała na sznurek. Łatwo wtedy spostrzeżemy, czy nitka jest pionowa czy nie, i w razie potrzeby poprawimy obracając nieco siatkę. Do tego służą również śrubki $s-s$ siatki przechodzące przez otwory walca lunety, nieco większe niż średnica śrubek i wskutek tego można je w tych otworach przesunąć.

§ 41. Noniusz.

Limbus podzielony jest na 360 stopni, każdy zaś stopień podzielony jest na 2, 3, 4 lub 6 części zależnie od wielkości średnicy limbusu, zatem każda przedziałka ma odpowiednio wartość 30' 20' 15' lub 10'. Do alhidady przytwierdzony jest noniusz, przesuwający się wzdłuż podziałki koła limbusowego. Podziałka noniusza jest nieco mniejsza niż limbusowa, mianowicie $(n-1)$ części limbusu, podzielonych jest na n części na noniuszu.

Nazwijmy jednostkę podziałki limbusu przez L a noniusza przez N , to

$$(n-1) L = n N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

$$\text{czyli} \quad n L - L = n N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

$$\text{a stąd} \quad n(L-N) = L \text{ lub } L-N = \frac{L}{n} = a \quad 3)$$

gdzie a nazywa się wartością noniusza

$$\text{n. p.} \quad 9 L = 10 N \text{ więc } L-N = \frac{L}{10} = a.$$

Z powodu takiego urządzenia podziałki noniusza wynika, że jeżeli któraś kreska noniusza zgadza się z pewną kreską limbusu, to sąsiednie kreski różnić się muszą o wartość a , następne o wartość $2a$ i t. d. Przypuśćmy, że zero noniusza przesunięte jest o wartość a od sąsiedniej kreski limbusu w stronę noniusza, to pierwsza kreska noniusza zga-

dza się z odpowiednią kreską limbusu; jeżeli zero przesuniemy o $2a$, to druga kreska noniusza zgodzi się z odpowiednią sobie kreską limbusu, a zatem, jeżeli policzymy na noniuszu i przekonamy się, że n. p. ósma kreska jego zgadza się z jakąś kreską limbusu, to zero noniusza przesunęło się poza ostatnią po sobie kreskę limbusu o $8a$, — znając zaś wartość a , obliczymy łatwo kąt, jaki zero noniusza wskazuje na podziałce limbusu.

Fig. 140 przedstawia przykład podziału noniusza. Podziałka noniusza jest tak urządzona, że 9 części limbusu, podzielone są na 10 części na noniuszu, zatem wartość noniusza $a = \frac{L}{10}$. Jeżeli teraz jedna przedziałka limbusu ma

wartość $L = 20'$ czyli każdy stopień podzielony jest na 3 części, to $a = \frac{20'}{10} = 2'$.

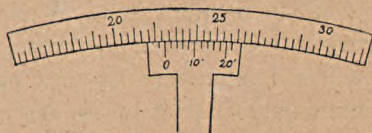


Fig. 140.

Na rysunku widzimy, że trzecia kreska noniusza

zgadza się z jedną z kreszek limbusu, więc zero noniusza przesunięte jest o $3a$ poza kreskę odpowiadającą podziałowi $22^\circ 20'$, a więc wskazuje ono kąt $22^\circ 20' + 3 \times 2' = 22^\circ 26'$.

Jeżeliby limbus miał podział na $15'$ t. j. każdy stopień podzielony byłby na 4 części, a 29 części limbusu podzielonoby na 30 części na noniuszu, to wartość noniusza

$$a = \frac{L}{30} = \frac{15'}{30} = 0.5' = 30''.$$

Przypuśćmy, że jedenasta kreska noniusza zgadzałaby się z jedną z kreszek limbusu, to zero noniusza przesunięte byłoby poza ostatnią kreskę limbusu o wartość $11 \times a = 11 \times 30'' = 5' 30''$. Noniusz jest zawsze odpowiednio ponumerowany, tak że mnożenia wcale wykonywać nie potrzeba, bo wprost odczytujemy minuty i sekundy.

Poza zerem, tudzież przy końcu noniusza, znajduje się jeszcze po jednej lub dwie kreski na noniuszu. Służą one

do ustawiania zera noniusza na kąty odpowiadające całym odstępom podziałki limbusu. Za pomocą bowiem dwu kresek z dwu stron kreski zerowej noniusza umieszczonych, możemy dokładnie ustawić zero noniusza na odpowiedni kąt.

Nieraz zdarza się, że właściwie żadna kreska noniusza ściśle nie zgadza się z jakąś kreską limbusu, w takim razie obliczamy średnią z dwóch odczytów noniusza odnoszących się do dwu najlepiej zgadzających się kresek.

§ 42. Pomiar kąta.

Zależnie od celu i ważności pracy, używamy różnych metod do pomiaru kąta. W niektórych wypadkach jak n. p. przy zdjęciach tachymetrycznych odczytujemy tylko jeden noniusz i mierzymy kąt bez przerzucania lunety, zatem nie eliminujemy nawet błędu ekscentryczności lunety i alhidady.

W innych wypadkach, n. p. przy pomiarze kierunków trasy drogi lub kolei, mierzy się kąt w dwu położeniach lunety i odczytując zawsze 2 noniusze. Przy bardzo ważnych zdjęciach n. p. zdjęciach miast, tryangulacyi i t. p. poświęca się wiele czasu i pracy na pomiar kąta i mierzy się go wielokrotnie, o czem mówić będziemy przy zdjęciach polygono- wych, poprzestając tymczasem na pojedynczem mierzeniu kąta.

Przedewszystkiem ustawiamy instrument z grubsza, uważając by limbus był mniej więcej poziomy przed dokładnem ustawieniem, tudzież by ostrze pionu zawieszonego u spodarki znajdowało się nad palikiem oznaczającym punkt wierzchołkowy kąta. Następnie ustawia się limbus poziomo śrubami wstawowemi i kontroluje się położenie pionu. Jeżeli ostrze pionu nie znajduje się dokładnie nad główką gwoźdźcia wbitego w palik, to przesuwamy instrument na krążku statywowym w odpowiednim kierunku, ustawiamy się powtórnie limbus poziomo, znowu kontrolujemy położenie pionu dopóty, aż ostrze jego znajdzie się w żądanem położeniu, podczas gdy limbus jest poziomy.

Po ustawieniu limbusu, zwraca się lunetę najpierw w kierunku lewego ramienia L (fig. 141), celując po wierzchu lunety, następnie gdy sygnał L znajduje się w polu widzenia, sprzęga się limbus z alhidadą i śrubą do ruchu powolnego kierujemy lunetę dokładnie, tak by nitka pionowa padała na środek tyczki sygnałowej, przyczem staramy się, ażeby środek siatki padał ile możności na sam spód sygnału. Teraz odczytujemy noniusz N_1 , następnie zwalniamy alhidadę, celujemy do punktu P na prawem ramieniu w ten sam sposób jak poprzednio i odczytujemy noniusz N_2 . Jeżeli mamy więcej kierunków, to tak samo celujemy do punktu R i t. d. Ponieważ podziałka limbusu postępuje w kierunku ruchu wskazówek na zegarze t. j. od lewej do prawej, więc kąty między danymi kierunkami obliczymy, odejmując od odczytu

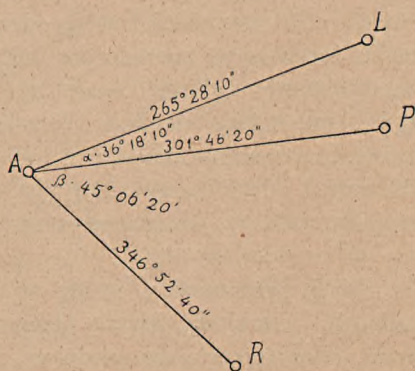


Fig. 141.

prawego ramienia, odczyt w kierunku lewego ramienia; $\alpha = N_2 - N_1$ — jak wskazano na fig. 141. Jest to najprostszy sposób pomiaru kąta, używany przy szybkich, ale za to mniej dokładnych zdjęciach, bo nie staramy się tutaj o wyeliminowanie znanych błędów instrumentu.

Przy dokładnych pomiarach postępujemy w sposób następujący:

Przedewszystkiem ustalimy porządek celowania i odczytów, więc takie położenie lunety, w którym koło pionowe znajduje się po prawej naszej stronie nazwiemy położeniem pierwszym (I), zaś po przerzuceniu lunety, gdy koło pionowe znajdzie się po lewej stronie, nazwiemy położeniem drugim (II) lunety. Jeden noniusz nazwiemy raz na zawsze pierwszym (N_I), pozostały zaś, drugim (N_{II}).

Na niektórych instrumentach nawet noniusze są ponumerowane, a porządek raz przyjęty będziemy zachowywali już niezmiennie w ciągu pomiarów. Porządek w pomiarze jest zazwyczaj przyjęty tak, że po ustawieniu instrumentu na wierzchołku, kierujemy lunetę będącą w pozycji I na sygnał ramienia lewego celując po rurze lunety z grubsza, a gdy sygnał znajdzie się w polu widzenia, natenczas sprzęgamy limbus z alhidadą, zaś dokładne nastawienie celowej na środek sygnału uskuteczniamy już śrubą do ruchu powolnego, przyczem staramy się, by celowa trafiła sygnał ile możności u spodu. Po ustawieniu celu, odczytuje się noniusz I, potem II, kontrolując czy odczyty różnią się o 180° (naturalnie z małą różnicą wskutek ekscentryczności noniuszów). Następnie zwalniamy alhidadę, kierujemy lunetę do prawego ramienia, sprzęgamy alhidadę z limbusem, ustawiamy celową dokładnie i odczytujemy znów oba noniusze w tym samym porządku. Odczyty noniuszów zapisuje się w protokóle, którego wzór podajemy dalej.

Teraz przerzucamy lunetę w położenie II, zwalniamy alhidadę i kierujemy lunetę najpierw do ramienia prawego, odczytnjemy oba noniusze, potem celujemy do ramienia lewego i tak samo odczytujemy oba noniusze. Noniusze odczytuje się zawsze w tym samym porządku, więc najpierw N_I , potem N_{II} . Pamiętać również należy, ażeby po skierowaniu lunety do odpowiedniego punktu, sprzęgnąć dobrze limbus z alhidadą, poczem dopiero następuje dokładne nastawienie celowej na spód sygnału śrubą do ruchu powolnego.

Jeżeli jest więcej kierunków, czyli więcej kątów o wspólnym wierzchołku, to postępujemy tak samo, odczytując noniusze przy każdym celu. Celujemy zawsze w I położeniu lunety, idąc w kierunku ruchu wskazówek na zegarze od pierwszego lewego ramienia do ostatniego kierunku, a następnie po przerzuceniu lunety w położenie II, od skrajnego ramienia prawego, do ramienia lewego. — Postępować należy zawsze w ten sam sposób z wszelką pedanterią, a uniknie się błędów. — Jako przykład podajemy protokół pomiaru kilku kierunków wraz z objaśnieniem rubryk.

P R O T O K Ó Ł.

Stanowisko instrumentu	Cel do punktu	I Położenie lunety		II Położenie lunety		Suma	Średnia	Redukcyja na 0°0'0"	UWAGA
		N. I	N. II	N. I	N. II				
I	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	(1)	62° 40', 40"	(242°), 40', 30"	242° 41', 00"	(62°), 41', 00"	3' 10"	62°, 40', 47.5"	0° 00', 00.0"	(40')
	(2)	87° 32', 20"	(267°), 32', 40"	267, 33, 00	(87), 32, 40	2' 40"	87, 32, 40	24, 51, 52.5	(32')
	(3)	138°, 20, 10	(318), 20, 10	318, 20, 50	(138), 20, 30	1' 40"	138, 20, 25	75, 39, 37.5	(20')
	(4)	183, 26, 10	(3), 26, 00	3, 26, 30	(183), 26, 20	1' 00"	183, 26, 15	120, 45, 27.5	(26')

Rubryka 1 i 2 nie wymaga objaśnień.

W rubryce 3 wpisujemy odczyty noniusza I po porządku przy każdym celu, a równocześnie w rubryce 4, odczyty noniusza II. Liczby w nawiasach w tej rubryce, zwykle opuszcza się w protokóle; są to stopnie, które w pamięci kontroluje się, czy różnica między niemi, a między ilością stopni w rubryce 3, wynosi 180°, natomiast minuty i sekundy wpisuje się.

Doszedłszy do celu ostatniego t. j. do (4) — przerzucamy lunetę, obracamy alhidadę o 180°, i zaczynając od tego ramienia idziemy w przeciwnym kierunku; wpisujemy więc odczyty na noniuszach w protokóle idąc od dołu do góry, ale zawsze zatrzymujemy porządek noniuszów najpierw N_I potem N_{II} . Odczyty na tym samym noniuszu jak, z przykładu widzimy, różnią się o 180° (przez porównanie rubryki 5 z 3). — Podobnie jak poprzednio wpisujemy

całe odczyty w rubrykę 5, a równocześnie odczytując noniusz II, kontrolujemy różnicę stopni i w rubrykę 6 wpisujemy minuty i sekundy. Dlatego liczby stopni w rubryce 6 ujęte są w nawiasy jako niepotrzebne w protokóle.

Rubryka 7. Tutaj wpisujemy sumę minut i sekund ponad najniższym z wszystkich czterech odczytów, n. p. najniższy odczyt celowej (1), odnoszący się tylko do minut, wynosi $40'$ — co możemy w uwadze zanotować — resztę ponad $40'$ dodamy, zatem $40'' + 30'' + 60'' + 60'' = 3' 10''$ co też w rubryce tej wpisaliśmy.

Podobnie dla celowej (2), tutaj możemy przyjąć $32'$ za odczyt najniższy jak zanotowano w uwadze, natenczas suma pozostałych reszt wynosi $2' 40''$, lub przyjąć można okrągło $30'$, a wtedy suma pozostałej reszty wynosiłaby

$2' 20'' + 2' 40'' + 3' + 2' 40'' = 10' 40''$, a w uwadze zanotowaliśmy przyjętą najniższą liczbę $30'$. Jest to obojętne zupełnie jak później się przekonamy.

Rubryka 8 zawiera średnią arytmetyczną z rubryki 7, dodaną do najniższego odczytu, o czem była powyżej mowa, ilość stopni przyjmujemy z rubryki 3 — n. p. średnia arytmetyczna celowej (1) wynosi $\frac{3' 10''}{4} = 47.5''$, która dodana do odczytu $62^{\circ} 40'$ wynosi $62^{\circ} 40' 47.5''$. Podobnie dla celowej (2) otrzymamy $87^{\circ} 32' + \frac{2' 40''}{4} = 87^{\circ} 32' 40''$ — i t. d.

W rubryce 9 obliczamy t. z. redukcję kątów na $0^{\circ} 0' 0''$ w ten sposób, że od wszystkich obliczonych średnich z rubryki 8, odejmujemy kierunek celowej (1), t. j. $62^{\circ} 40' 47.5''$, wskutek czego otrzymujemy w tej rubryce kąty, zawarte między każdą celową, a celową (1) — co już łatwo dojść z przykładu.

Jest to sposób pomiaru już dokładniejszy, przy którym wyeliminowany został błąd pomiaru wskutek ekscentryczności lunety i noniuszów, a używany zwykle przy pomiarach kątów przy trasach, jeżeli podział limbusu jest dostatecznie dobry, lub gdy limbus nie da się na spodarce obracać, czyli, gdy limbus jest nieruchomy. Do jeszcze dokładniejszych po-

miarów używamy instrumentów t. z. repetycyjnych, przy których limbus da się obracać na spodarce i sprzęgać z nią tak samo jak alhidada z limbusem. O tych pomiarach mówić będziemy później, a teraz poznawszy sposób mierzenia kątów, przystąpimy do opisu metody szybkich zdjęć w polu.

§ 43. Tachymetria.

1. Pomiar długości.

Jest to jak wspomnieliśmy, metoda szybkich zdjęć punktów terenu, tak co do ich położenia w planie jak i wysokości. Istnieje kilka wynalazków służących do powiększenia szybkości zdjęć, z których każdy wymaga osobnego, spe-

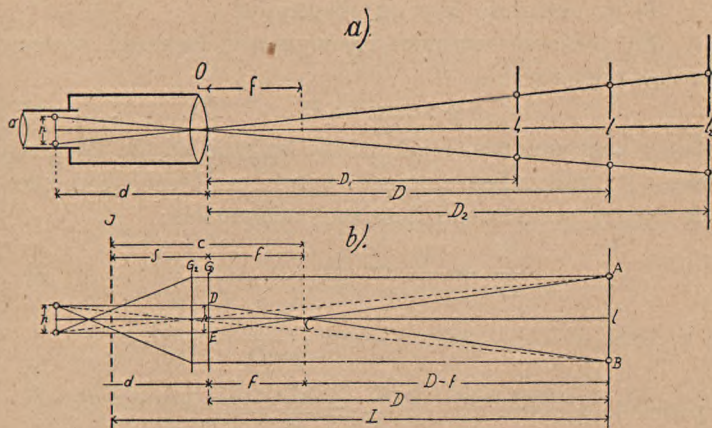


Fig. 142 a i b.

cyalnie zbudowanego instrumentu. Tutaj podamy metodę zdjęć za pomocą zwykłego instrumentu uniwersalnego czyli tachymetru.

Siatka w lunecie tachymetru składa się z trzech nitek poziomych, stale umocowanych i w równych od siebie odległościach. Nazwijmy odstęp skrajnych nitek przez „p” (fig. 142 a), to ponieważ odstęp ten jest stały, więc i rze-

czywista wielkość obrazu zawarta między temi nitkami musi być także równą „ p ” i niezmienna, podczas gdy celowe przez obie skrajne nitki przechodzące, odcinają na łacie wielkości l_1 , l lub l_2 — zależnie od odległości łaty od instrumentu. Z rysunku widzimy, że tak obraz odcinka l_2 jak odcinka l_1 jest taki sam i równy „ p ”, mimo, że pozorne wielkości tych obrazów są różne, co wynika z odczytów. Dalej, z rysunku widocznem jest, że wielkość odcinków na łacie l_1 , l ... l_2 ... zależna jest od odległości łaty więc od D_1 , D ... D_2 ... i wprost do niej proporcjonalna. Na fig. 142 *a* oznacza:

O = obiektyw,

o = okular,

p = odstęp skrajnych nitek siatki,

f = odległość ogniskową obiektywu,

d = odległość obrazu,

D = odległość łaty od obiektywu.

Na podstawie rysunku i powyższych oznaczeń, możemy napisać proporcję:

$$p : d = l : D \quad 1)$$

gdzie d jest zmienne, i jak wiemy zależne od D . Połączmy równ. 1) z równaniem znanem z optyki, a określającym związek między powyższymi ilościami, mianowicie:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \quad 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{to z równ. 1) otrzymamy } \frac{1}{d} = \frac{l}{p \cdot D} \\ \text{i podobnie z równ. 2) } \frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} \end{array} \right\} \quad 3)$$

$$\text{a zatem } \frac{l}{p \cdot D} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} = \frac{D-f}{f \cdot D} \text{ czyli } \frac{l}{p} = \frac{D-f}{f}$$

$$\text{a stąd } D - f = \frac{f}{p} \cdot l \quad 4)$$

Wzór 4) otrzymaliśmy dla lunety pojedynczej. Dla innej konstrukcyi lunety, t. j. zależnie od tego, czy posiada ona kolektyw, otrzymamy nieco odmienny wzór na związek między D , f i l — ale formy podobnej do 4).

Z równ. 4) otrzymamy:

$$D = \frac{f}{p} \cdot l + f = K \cdot l + f \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

t. j. odległość łąty od obiektywu instrumentu, jest równa stałej ilości K , pomnożonej przez odcinek na łącie, zawarty między skrajnemi celowemi, więcej odległość ogniskowa. Równanie to ma ważność, gdy, jak rysunek wskazuje, celowa średnia jest pozioma a łąta stoi pionowo. Ponieważ odległość ogniskowa f i odległość nitek „ p ” są ilościami

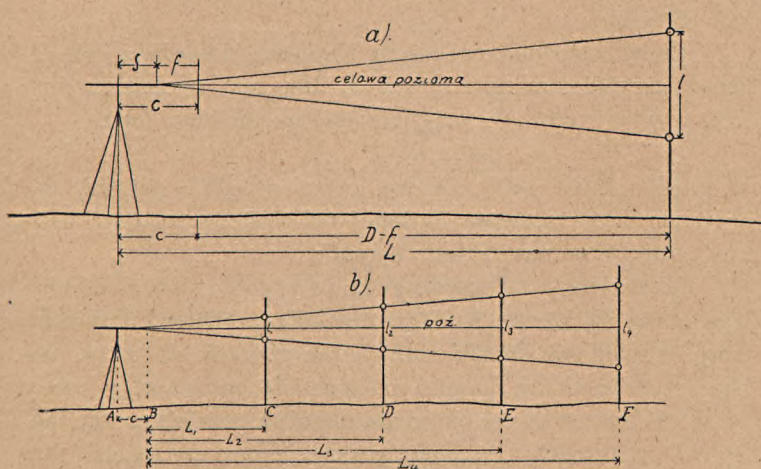


Fig. 143 a i b.

stałemi dla tej samej lunety, więc iloraz ich $\frac{f}{p}$ jest także ilością stałą $= K$. Przy urządzeniu siatki we fabryce, dobiera się odległość nitek skrajnych „ p ” tak, by iloraz $\frac{f}{p}$ był jakąś liczbą okrągłą, n. p. $K = 100, 200, 500$.

Ponieważ instrument ustawiamy nad danym punktem tak, że oś pionowa przechodzi przez ten punkt, więc chcemy mieć odległość punktu, na którym stoi łąta, nie do obiektywu, lecz do środka instrumentu, czyli zamiast odległości D , obliczonej z wzoru 5, chcemy mieć odległość L_1 lub L_2 lub $L_3 \dots$

według rysunku 143 *a*. W tym celu dodajmy do obu stron równania 5), długość δ zmierzoną wprost podziałką na lunecie, od obiektywu do osi poziomej lunety. W takim razie otrzymamy z równ. 5) $L = D + \delta = Kl = f + \delta$ — a ponieważ f i δ są ilościami stałymi, więc nazwijmy ich sumę przez c i oznaczmy ją raz na zawsze dla danej lunety, a wzór powyższy otrzyma teraz kształt $L = Kl + c$ 6) jako wzór na obliczenie odległości łaty od punktu, nad którym stoi instrument, jeżeli średnia celowa (oś celowa główna) jest poziomą, a łata stoi pionowo, czyli prostopadle do celowej średniej.

Stałą c możemy dla lunety Kepplera, Ransdena i Huyghensa przyjąć średnio $c = 0.5 m$, albo też zupełnie ją opuścić, a wtedy wzór 6) przyjmie jeszcze prostszą formę

$$L = K \cdot l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

W każdym razie stałą c łatwo jest uwzględnić później, dodając do L — $\frac{1}{2}$ metra. Możemy też ściśle wyznaczyć wielkość stałej c w następujący sposób:

Wykręcamy obiektyw, zwracamy go do słońca rzucając jego obraz na kartkę papieru. Soczewkę zbliżamy lub oddalamy od papieru, dopóki na nim nie utworzy się ostry, dokładny obraz słońca (papier zaczyna się przepalać); wtedy odległość soczewki od papieru zmierzona podziałką, daje odległość ogniskową f , a zmierzwszy jeszcze na lunecie długość δ , otrzymamy dokładne $c = f + \delta$.

Równanie 7 powiada, że odległość L jest wprost proporcjonalna do odcinka na łacie. Jeżeli więc ustawimy celową średnią poziomo, i odczytamy na łacie dolną i górną nitkę, n. p. górna celowa 3452, dolna 1820 — obliczymy odcinek $l = 3452 - 1820 = 1632 mm$ — to odległość $L = K \times 1.632 m$.

Pozostaje jeszcze wyznaczenie stałej K .

Moglibyśmy wyznaczyć ją przez bezpośredni pomiar ilości f i p , i obliczyć z wzoru: $K = \frac{f}{p}$, lecz ponieważ pomiar dokładny tych wielkości byłby trudny, dlatego stałą K wyznaczamy praktycznie w następujący sposób:

Ustawiamy instrument w punkcie A (fig. 143 b), odmierzamy w danym kierunku najpierw długość c do punktu B , następnie od punktu B począwszy, odmierzamy kilka razy jakąś okrągłą długość n . p. co 50 m , do punktów CDE F . W punktach tych ustawia figurant po kolei latę, na której odczytujemy po sprowadzeniu libeli do poziomu, dwie celowe górną i dolną, czyli odcinki $l_1 l_2 l_3 l_4 \dots$.

Mając dane odległości $L_1 L_2 L_3 \dots$ i odcinki $l_1 l_2 l_3 \dots$ obliczymy z wzoru 6) uwzględnivszy długość c

$$L + c = Kl + c$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{czyli } L_1 = K_1 l_1 \\ L_2 = K_2 l_2 \\ L_3 = K_3 l_3 \\ L_4 = K_4 l_4 \end{array} \right\} 8) \quad \left. \begin{array}{l} \text{stad } K_1 = \frac{L_1}{l_1} \\ K_2 = \frac{L_2}{l_2} \\ K_3 = \frac{L_3}{l_3} \\ K_4 = \frac{L_4}{l_4} \end{array} \right\} 9)$$

Stale $K_1 K_2 \dots$ będą się wogóle nieco różniły ze sobą wskutek błędów popełnionych tak w odmierzeniu długości jak w odczytach. Obliczymy więc średnią arytmetyczną

$$K = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_4}{n} \dots \dots 10)$$

i tę przyjmujemy jako stałą instrumentu.

Zazwyczaj, jak mówiliśmy poprzednio, stała K jest ilością okrągłą, n . p. 100—200 $\dots$ jeżeli więc z rachunku wyniknie, że n . p. $K = 99.97$ lub podobnie, to przyjmujemy okrągło $K = 100$.

Rozpatrzmy teraz wypadek, gdy oś celowa (średnia) nie jest pozioma, lecz nachylona pod $\angle \alpha$. Przypuśćmy, że instrument stoi w punkcie A (fig. 144 a), zaś lata w punkcie B na pochyłym terenie, tudzież że średnia celowa jest prostopadła dołaty, zatem trzeba by latę stosownie pochylić. W takim razie, jak jest z rysunku widocznem, stosunki wcale się nie zmieniły, więc do obliczenia odległości L użyjemy wzoru 6) $L = Kl + c$. Będzie to jednak długość celowej średniej,

czyli odległość powietrzna środka instrumentu od łąty. Chcąc otrzymać odległość poziomą L_h , trzeba długość L pomnożyć przez dostawę kąta nachylenia celowej do poziomu — zatem

$$L_h = L \cdot \cos \alpha = K l \cos \alpha + c \cdot \cos \alpha \quad (11)$$

Ustawianie jednak łąty prostopadłe do celowej nie jest łatwem, wymaga specjalnego urządzenia łąty i zabiera czas. Dlatego łątę ustawiamy pionowo (fig. 144 b), a za to wprowadzimy pewne poprawki do wzoru 11, mianowicie:

Wskutek pionowego ustawienia łąty, otrzymujemy odcinek l (fig. 144 b) — między skrajnemi celowemi, zamiast odcinka l' prostopadłego do celowej głównej — a ponieważ

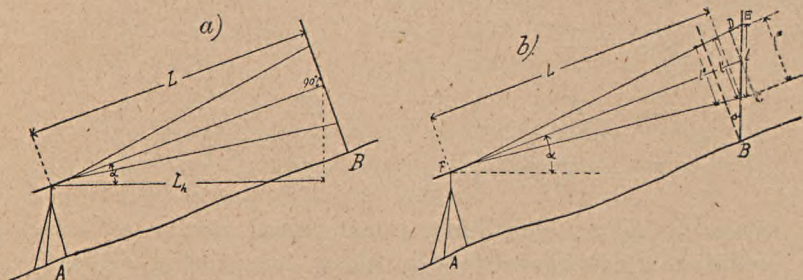


Fig. 144 a i b.

$l' = l \cos \alpha$ — więc wprowadziwszy tę poprawkę we wzór 11) otrzymamy:

$$L_h = K \cdot l' \cos \alpha + c \cos \alpha$$

czyli
$$L_h = K l \cos^2 \alpha + c \cdot \cos \alpha \quad (12)$$

ewentualnie, opuszczając drugi wyraz, otrzymamy wzór uproszczony

$$L_h = K \cdot l \cos^2 \alpha \quad (13)$$

Jako ostateczny wzór na obliczenie odległości łąty, t. j. punktu na którym stoi łąta, od środka instrumentu. Wzór 12, względnie 13, daje tylko przybliżoną wartość na L_h , a to z tego powodu, że przyjęta poprzednio równość $l' = l \cdot \cos \alpha$ nie jest słuszną, bo trójkąt CDE nie jest prostokątnym, mianowicie kąt przy D nie jest prosty, lecz jest większy niż 90° . W przybliżeniu jednak, dla małych kątów α , mo-

żemy tę niedokładność pominąć i dlatego też nie powinno się przy zdjęciach tachymetrycznych bezwarunkowo dopuszczać większych kątów α niż 20° — to już jest ostateczna granica jeżeli zdjęcia nasze mają być dość dokładne.

Łatwo też wywnioskować na podstawie fig. 144 b, że łąta powinna znajdować się w pozycji CD , t. j. jej punkt przecięcia z celową średnią powinien leżeć na pionowej punktu terenu B , tudzież powinna ona być prostopadłą do celowej. Wtedy odczyt na łącie wynosiłby l'' , który jak widzimy, jest nieco inny od przyjętego l' — lecz że różnica jest bardzo mała, więc i to pominąć możemy.

Kąt pionowy α mierzy się na kole pionowym, odczytując go na noniuszu zupełnie w ten sam sposób jak przy pomiarze kąta poziomego. Łatwo zrozumiemy, że bardzo wygodnymby było, gdyby przy celowej poziomej, noniusz wskazywał $0^\circ 00' 00''$ lub okrągły jakiś kąt n. p. 90° lub 180° , wtedy bowiem odczytujemy tylko raz noniusz i otrzymujemy wprost wartość kąta α ; w przeciwnym zaś razie należałoby odczytać noniusz gdy celowa jest pozioma, potem drugi raz przy danem nachyleniu lunety i obliczyć różnicę odczytów, co zabrałoby więcej niż dwa razy tyle czasu. Przy rektyfikacji instrumentu była mowa o ustawieniu zera noniusza na 0° lub 90° , zależnie od konstrukcyi koła pionowego. — Kąty pionowe w górę, oznaczamy znakiem $+$ w protokóle, zaś w dół znakiem $(-)$; nie wchodzi to wprawdzie w rachubę przy obliczaniu odległości L_h , lecz będzie miało znaczenie przy obliczeniu wysokości punktów i dlatego przy sposobności o tem mówimy.

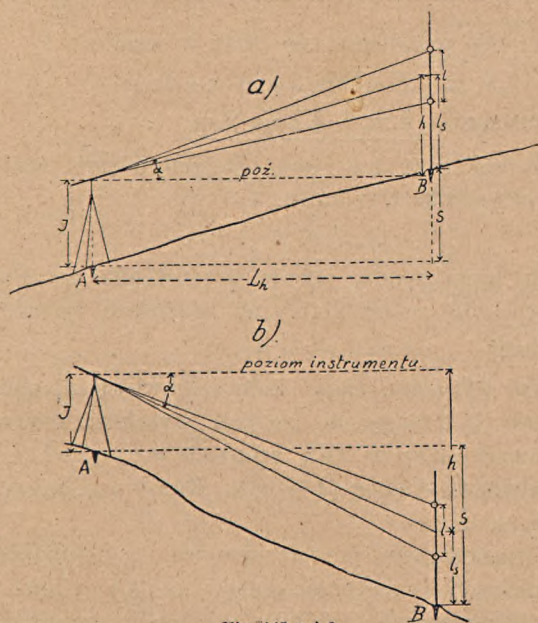
Tachymetryczny pomiar długości, jest mniej dokładny niż pomiar za pomocą łąt lub taśmy żelaznej, ma jednak tę zaletę, że wykonać go można bardzo szybko i wygodnie, a dokładność jego, zwłaszcza w terenie górskim nie zostawia do życzenia.

Wzór 7 — $L = K l$ powiada, że odległość L jest proporcjonalna do odcinka na łącie l . Z tego wniosek, że błąd długości, który nazwijmy przez $m(L)$, zależy od błędu odcinka t. j. od $m(l)$, tak, że

$$m(L) = K \cdot m(l) \quad (14)$$

Pomiar wysokości.

Celem wyznaczenia różnicy wysokości „*s*” (fig. 145 *a*) punktu *A*, nad którym ustawiony jest instrument i punktu *B*, na którym ustawiona jest lata, przyczem punkt *B* leży wyżej niż *A*, przyjmijmy według rysunku, następujące oznaczenia:

Fig. 145 *a* i *b*.

J = wysokość instrumentu mierzona pionowo od wierzchu palika *A* do osi poziomej lunety,

L_h = odległość obu punktów,

α = kąt nachylenia osi celowej (średniej) do poziomu mierzony na kole pionowem; w tym wypadku kąt α oznaczamy znakiem +,

l = odcinek na łać między skrajnemi celowemi,

l_s = odczyt średniej celowej na łać,

to według figury otrzymujemy:

$$\underline{s = J + h - l_s} \quad 17)$$

dzy nimi zdejmuję się tachymetrycznie. Błędy jakie przytem muszą powstać, ograniczają się do tych kilku stanowisk, na dalsze zaś nie mają wpływu.

Porządek pracy w polu i obliczenia zdjęć przedstawimy na następującym przykładzie:

Protokół zdjęcia tachymetrycznego: Dnia																		
K = 100·00.	Stanowisko	Wysokość instrum. J_m	Cel do punktu	Kąt poziomy	Odczyt na łacie			Kąt pionowy	Odcinek l m			$L_h = K l \cdot \cos^2 \alpha$	$h = \frac{K l \sin^2 \alpha}{2}$	$h - l_s$ m	$h + l_s$ m	Horyzont m	Kota m	UWAGA
					górny	średni	dolny		+	—								
					mm													
					5			6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
					3268													
	(21)	1·45	42	190°20'	2280			2°05'	—	1·976	197·20	7·17	4 89	—	205·00	209·89		Kota punktu (21) = 203·55
					1292													
					3268													
		1·45			2280			—		1·976	197·20	7·17	—	9·45	205·00	195·55		
					1292													

Objaśnienia.

Po ustawieniu instrumentu na stanowisku, n. p. w danym przykładzie na punkcie Nr. (21) zapisanym w rubr. 1, mierzymy wysokość instrumentu J , za pomocą taśmy płóciennej lub łąty niwelacyjnej, zapisując ją w metrach w rub. 2. Następnie celuje się do każdej łąty jaką tylko pomoćnik ustawi na wskazanym mu punkcie, zapisuje się numer punktu na którym łąta stoi, poczem odczytuje się na limbusie kąt poziomy zwykle tylko w stopniach i minutach zapisując spostrzeżenie w rubr. 4, podobnie kąt pionowy w rubr. 6 lub 7, zależnie od tego czy jest dodatni czy ujemny. Odczyty na łą-

cie zapisuje się w rubr. 5 w tym samym porządku, więc górny, średni i dolny. Po uskutecznieniu powyższych odczytów, dajemy znak figurantowi, by przeszedł na punkt następny, resztę zaś protokołu oblicza się w biurze. Jako praktyczne wskazówki dodać można, że należy się starać ile możliwości odczytywać łatę przy celowej średniej poziomej, co bardzo ułatwia obliczenie. Jeżeli to jest niemożliwe, to staramy się jak najwięcej punktów zdejmować przy tym samym kącie pionowym, bo wskutek tego zyskujemy na czasie, nie potrzebując co chwila odczytywać tego kąta, a potem przy obliczeniu odpada wyszukiwanie z tablic coraz to nowych $\cos^2 \alpha$ i $\sin^2 \alpha$.

W rubr. 8 oblicza się odcinek na łacie, t. j. odcinek zawarty między skrajnemi celowemi, jako różnicę odczytu górnego i dolnego.

Rubryki 9 i 10 obliczamy albo przy pomocy tablic podających $\cos^2 \alpha$ i $\sin^2 \alpha$, albo też wykreślnie, według poniżej podanego sposobu.

Mając obliczone h w rubr. 10, obliczymy już łatwo rubryki 11 i 12, dodając, względnie odejmując od h odczyt średni l_s z rubryki 5.

Horyzont w rubr. 13, oblicza się w sposób następujący: Stanowisko na którym stoi instrument jest znane, t. z. znamy jego wysokość. Zmierzywszy wysokość instrumentu, t. j. wysokość od wierzchu palika do osi poziomej lunety, dodamy ją do wysokości punktu i otrzymamy horyzont.

W danym przykładzie wysokość stanowiska (21) wypisana w rubr. 15, wynosi 203.55 m, wysokość instrumentu wynosi 1.45 m, więc wysokość horyzontu będzie

$$203.55 + 1.45 = 205.00.$$

Kąt punktu na którym lata stoi, w danym przykładzie punktu 42 (z rubr. 3) obliczymy, zależnie od znaku kąta pionowego, dodając lub odejmując od horyzontu, wartości rubryk 11 lub 12. W powyższym przykładzie przyjęliśmy 2 punkty różniące się tylko znakiem kąta pionowego, czyli że punkt pierwszy leży wyżej niż stanowisko instrumentu, drugi niżej.

Później mówić będziemy jeszcze o sposobie „nawiązania” zdjęć do sieci stanowisk, mianowicie będzie to przy opisie wykonania planu sytuacyjnego, teraz zaś przejdziemy do obliczenia iloczynów z rubryk 9 i 10.

§ 44. Obliczenie iloczynów

$$c \cos \alpha, c \sin \alpha, l \cos^2 \alpha \text{ i } \frac{1}{2} l \sin 2 \alpha.$$

Celem obliczenia odległości L_h i wysokości h obliczyć trzeba wzory:

$$L_h = Kl \cos^2 \alpha + c \cos \alpha$$

$$\text{ i } h = \frac{1}{2} Kl \sin 2 \alpha + c \sin \alpha$$

lub opuszczając w obu wzorach drugie wyrazy, otrzymamy uproszczone wyrażenie $L_h = Kl \cos^2 \alpha$ i $h = \frac{1}{2} Kl \sin 2 \alpha$.

W pierwszym wzorze możemy jednak drugi wyraz łatwo uwzględnić, przyjmując przeciętną wartość

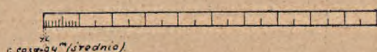


Fig 146.

$$c \cos \alpha = 0,4 \text{ m dla } \alpha \text{ od } 0^\circ$$

do 20° , tembardziej, że poprawkę tę pominąć możemy zupełnie w rachunku, a natomiast uwzględnić ją przez stosownie urządzoną podziałkę (fig 146), mianowicie przesunąć punkt początkowy t. j. zero podziałki na lewo, jak na rysunku naznaczono o wartość przeciętną $c \cos \alpha = 0,4 \text{ m}$, to odcinając taką podziałką odległości L_h obliczone z wzoru $L_h = Kl \cos^2 \alpha$, dodajemy temsamem tę poprawkę, nie troszcząc się o nią więcej. Czy poprawkę tę warto uwzględnić, o tem decyduje skala rysunku, n. p. w skali 1 : 5000 byłaby to za drobna długość do uwzględnienia i przez opuszczenie jej rysunek nie straci, natomiast w skali 1 : 1000 lub większej, już warto wprowadzić ją do rysunku.

W drugim wzorze popełniamy pewien błąd przez opuszczenie wyrazu $c \sin \alpha$. Przyjawszy za c wartość średnią $0,5 \text{ m}$, a za α wartość od 0° do 20° otrzymamy następujące wartości iloczynu $c \sin \alpha$.

$$\alpha = 0^\circ \quad 5^\circ \quad 10^\circ \quad 15^\circ \quad 20^\circ$$

$$c \sin \alpha = 0.000 \text{ m} \quad 0.043 \text{ m} \quad 0.087 \text{ m} \quad 0.129 \text{ m} \quad 0.171 \text{ m} \quad 1)$$

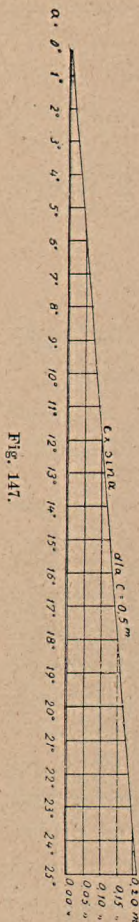
Jak z tego widać, są to dość znaczne błędy wskutek opuszczenia drugiego wyrazu, lecz uwzględnić je łatwo za pomocą grafikonu (fig. 147).

Odetnijmy na osi poziomej w dowolnej skali równe odstępki $0^\circ 1^\circ 2^\circ 3^\circ \dots$ do 20° , w punktach tych wykreślmy prostopadłe rzędne i odetnijmy na nich odpowiednie $c \cdot \sin \alpha$, przyjmując za c średnią wartość $c = 0.5 \text{ m}$; końce rzędnych połączmy krzywą, do czego w zupełności wystarczą wartości podane pod 1). Do wykreślenia rzędnych wystarczy skala 1:50. Za pomocą tego wykresu możemy bardzo łatwo znaleźć wartość wyrażenia $c \sin \alpha$ dla dowolnego α , przez takie zaś uwzględnienie, popelnimy zawsze mniejszy błąd, niż przez całkowite opuszczenie tego wyrazu.

Pozostaje teraz obliczenie pierwszych wyrazów obu wzorów.

Najprostszym sposobem jest obliczenie za pomocą tablic, z których wyszukuje się $\cos^2 \alpha$ względnie $\sin 2\alpha$, zaś mnożenie przez wartość odcinka l , wykonuje się albo za pomocą wysówki logarytmicznej, albo lepiej i prędzej za pomocą maszyny do mnożenia. Można by iloczyn $l \cos^2 \alpha$ otrzymać także za pomocą wysówki logarytmicznej, lecz otrzymujemy wtedy za duże błędy. Zawsze jednak wyszukanie odpowiedniej funkcji z tablic, następnie wykonanie w jakibądź sposób mnożenia, zwłaszcza że tablice podają wartości funkcji co 2 minuty, więc wypada jeszcze między nimi interpolować, zabiera sporo czasu. Wyobraźmy sobie teraz tysiące

pozycei do obliczenia, to łatwo zrozumiemy, jak nużącą będzie taka praca, a temsamem jest i większe prawdopodobieństwo omyłek. Z tego powodu bardzo jest pożądanem



każde uproszczenie i ułatwienie rachunku, czemu właśnie najlepiej, jak się zaraz przekonamy, odpowiada graficzne

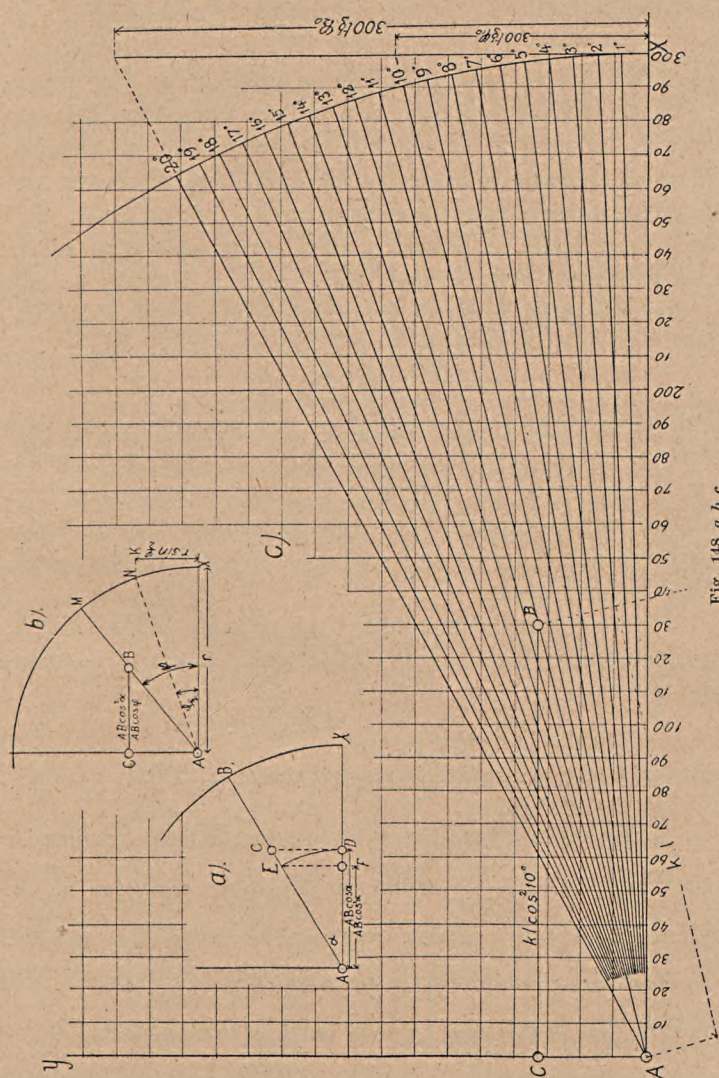


Fig. 148 a b c.

obliczenie. Sposób takiego obliczenia podaje Dr W. Jordan (*Handbuch der Vermessungskunde* II B. 1897) a mianowicie:

obliczone $r \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$ — i z końca tego odcinka (na rysunku dla przejrzystości odsunięto nieco tę prostopadłą od koła, co jednak nie zmienia istoty konstrukcyi) t. j. z punktu K , wykreślimy równoległą do osi AX , aż do przecięcia się z obwodem koła w punkcie N . Punkt N połączony ze środkiem koła A , wykreśla promień AN , nachylony do AX pod kątem $\frac{\varphi}{2}$; chcąc otrzymać cały kąt φ , weźmiemy w otwór cyrkla cięciwę XN i odetniemy ją raz jeszcze w górę do punktu M — w takim razie $XA M = \varphi$, a między kątem α i kątem φ zachodzi związek $\cos \varphi = \cos^2 \alpha$.

Jeżeli więc na promieniu AM odetniemy długość AB , to odcinek $CB = AB \cos \varphi = AB \cos^2 \alpha$.

Wykres ten najlepiej wykonać na papierze milimetrowym, gdyż wtedy mamy ułatwione odrzucanie odcinków na osi i długości rzutów wprost możemy w skali odczytać.

Kąty φ oznaczać będziemy na rysunku cyframi w stopniach, lecz odnoszącemi się do odpowiednich im kątów α , a nie do rzeczywistych wartości φ , jak to zaraz na przykładzie wykażemy.

$$\cos \varphi = \cos^2 \alpha$$

α	φ	$tg \varphi$	α	φ	$tg \varphi$
0°	0° 0'	0.0000	10°	14° 6'	0.2513
1°	1° 25'	0.0247	11°	15° 30'	0.2775
2°	2° 50'	0.0494	12°	16° 55'	0.3040
3°	4° 14'	0.0742	13°	18° 18'	0.3308
4°	5° 39'	0.0990	14°	19° 42'	0.3581
5°	7° 4'	0.1240	15°	21° 5'	0.3857
6°	8° 29'	0.1491	16°	22° 29'	0.4138
7°	9° 53'	0.1743	17°	23° 52'	0.4424
8°	11° 18'	0.1997	18°	25° 15'	0.4715
9°	12° 42'	0.2254	19°	26° 37'	0.5012
10°	14° 6'	0.2513	20°	27° 59'	0.5315

Fig. 148 c przedstawia wykres do obliczania iloczynu $Kl \cos^2 \alpha$. Ponieważ tachymetrem o stałej $K=100$ zdejmujemy się w zwykłych warunkach teren w promieniu około 300 m, więc przyjęliśmy koło o promieniu $r=300$ do wykreślenia grafikonu. Rysunek taki najlepiej wykonać o skali 1:1000, więc promień koła wynosiłby 300 mm. Do odcięcia kątów obliczono we związku $\cos \varphi = \cos^2 \alpha$ styczne kąta φ , co też podajemy w powyższem zestawieniu.

Cheąc wykreślić kąty φ w kole o prom. R , pomnożymy podane w zestawieniu styczne przez R (w naszym przykładzie przez $R=300$) i odetniemy iloczyny $300 \operatorname{tg} \varphi$ na stycznej, jakto zaznaczono na rysunku dla kąta φ_{10} i φ_{20} . Końce tych odcinków, połączone ze środkiem koła A , wyznaczają nam kąty φ , które przy obwodzie koła ponumerowaliśmy liczbami, odpowiadającymi kątom α . Protokół tachymetryczny podaje odcinki „ l “, iloczyn Kl tworzy się przez proste przesunięcie kropki dziesiętnej, bo l wynosi zwykle 100. Cheąc znaleźć np. $Kl \cos^2 10^\circ$ odcinamy iloczyn Kl od punktu A do B w skali rysunku, na promieniu odpowiadającym $\alpha=10^\circ$ i zmierzmy długość odcinka BC , czyli odległość punktu B od osi AY , długość BC jest rzutem promienia AB i jak figura pokazuje

$$BC = AB \cos \varphi$$

$$\text{czyli } BC = AB \cos^2 10^\circ$$

Jeżeli rysunek wykonamy na papierze milimetrowym, to mieć będziemy wszelkie możliwe ułatwienie do odczytania rzutów i wykreślenia ich.

Zapomocą tak urządzonego grafikonu możemy i łatwo i bardzo prędko obliczać odległości, lub gdy wykres jest zrobiony w tej samej skali, w jakiej rysujemy plan sytuacyjny, to wprost cyrklem przenosić możemy długości na plan. Drobniejszego podziału jak co 1° nie potrzeba, bo możemy łatwo interpolować na 30 minut, a dalsza interpolacja nie miałaby celu, albowiem błędy wskutek zaokrąglenia kąta na $\frac{1}{2}$ stopnia nie dadzą się na rysunku spostrzedz.

Podobnie obliczyć można graficznie wzór na wysokość

$$h = \frac{1}{2} Kl \sin 2\alpha + c \sin \alpha$$

skali, mianowicie dla długości użyć możemy skali 1:1000, a dla h skali 1:100 jako zupełnie wystarczającej.

Odetnijmy na osi AX (fig. 149) podobnie jak na fig. 148 c 300 jednostek długości w danej skali (np. 1:1000), a na prostopadłej XX , w końcu podziałki wystawionej, odetnijmy rzędne $r \cdot \operatorname{tg} \alpha$ — w naszym przykładzie $r=300$ — więc rzędne otrzymają wartość $300 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ dla $\alpha = 0^\circ 30' 1''$ $1^\circ 30'$. . . aż do 20° — ale w skali 10 razy większej, więc jeżeli podziałka na osi AX wynosiła 1:1000, to na osi XX wynosić będzie 1:100. Chcąc obliczyć iloczyn $h = L_h \cdot \operatorname{tg} \alpha$ odetnijmy na osi AX długości L_h i zmierzmy następnie długość rzędnej, wystawionej w końcu odcinka L_h między osią AX a promieniem odpowiadającym kątowi α .

Uwaga. Przy wykreślaniu grafikonu odcinaliśmy rzędne $X-1 = 300 \cdot \operatorname{tg} 1^\circ$ $X-2 = 300 \cdot \operatorname{tg} 2^\circ$ i t. d., znacząc zarazem promienie $A-1$, $A-2$ i t. d. odpowiednimi kątami 1° , 2° , 3° . . . Wykres wykonany na papierze milimetrycznym, ułatwia znacznie obliczenie. Promienie wystarczy wykreślić co $10'$, bo i tak dokładniejszych odczytów kąta pionowego nie otrzymamy z pomiarów, względnie ustawiać będziemy lunetę na kąt okrągły.

Przykład. Obliczyć h , gdy dane są: $L_h = 155 \text{ m}$ i $\alpha = 4^\circ$. W tym celu odcinamy $L_h = 155 \text{ m}$ od punktu A do B' na osi AX i w punkcie B' wykreślamy rzędną $B'B$ do przecięcia się z promieniem 4° . Rzędna $B'B$ zmierzona w skali podanej, daje wartość $h = 10.83 \text{ m}$.

Na tym samym rysunku możemy także obliczyć graficznie kotę punktu. Wykreślmy w tym celu na prostopadłej AX_2 podziałkę np. w skali 1:100 lub innej. Protokół tachymetryczny podaje wysokość horyzontu — przypuśćmy, że horyzont wynosi 357.55 m ; przyjmijmy teraz punkt O za poziom porównawczy o wysokości 550.00 , w takim razie horyzont jest wyższy od poziomu porównawczego o 7.55 m i znajduje się na podziałce w wysokości H . Weźmy w cyrkiel odcinek $h = BB'$, odetnijmy go w górę od punktu H do K , a następnie odejmijmy odczyt średni $l_s = \text{np. } 2.47 \text{ m}$, t. j. odetnijmy w dół 2.47 m od punktu K do punktu P ,

którego wysokość 565.94 odezycamy na podziałce, przyczem przypuszczaliśmy, że kąt α jest dodatni. Jeżeli teren spada, czyli α jest ujemne, to od horyzontu mamy odjąć sumę $h + l_s$ — weźmy więc w cyrkiel długość $h + l_s$ i odetnijmy ją w dół od H do S a na podziałce odezycamy kątę 545.25.

Do wykreślenia grafikonu podajemy w następującej tablicy zestawienie styecznych ($tg \alpha$):

α	$tg \alpha$	α	$tg \alpha$	α	$tg \alpha$	α	$tg \alpha$
0° 0'	0.00000	5° 0'	0.08749	10° 0'	0.17633	15° 0'	0.26795
10'	0.00291	10'	0.09042	10'	0.17933	10'	0.27107
20'	0.00582	20'	0.09335	20'	0.18233	20'	0.27419
30'	0.00873	30'	0.09629	30'	0.18534	30'	0.27732
40'	0.01164	40'	0.09923	40'	0.18835	40'	0.28046
50'	0.01455	50'	0.10216	50'	0.19136	50'	0.28360
1° 0'	0.01746	6° 0'	0.10510	11° 0'	0.19438	16° 0'	0.28674
10'	0.02037	10'	0.10805	10'	0.19740	10'	0.28990
20'	0.02328	20'	0.11099	20'	0.20042	20'	0.29305
30'	0.02619	30'	0.11394	30'	0.20345	30'	0.29621
40'	0.02910	40'	0.11688	40'	0.20648	40'	0.29938
50'	0.03201	50'	0.11983	50'	0.20952	50'	0.30255
2° 0'	0.03492	7° 0'	0.12278	12° 0'	0.21256	17° 0'	0.30573
10'	0.03783	10'	0.12574	10'	0.21560	10'	0.30891
20'	0.04075	20'	0.12869	20'	0.21864	20'	0.31210
30'	0.04366	30'	0.13165	30'	0.22169	30'	0.31530
40'	0.04658	40'	0.13461	40'	0.22475	40'	0.31850
50'	0.04949	50'	0.13758	50'	0.22781	50'	0.32171
3° 0'	0.05241	8° 0'	0.14054	13° 0'	0.23087	18° 0'	0.32492
10'	0.05533	10'	0.14351	10'	0.23393	10'	0.32814
20'	0.05824	20'	0.14638	20'	0.23700	20'	0.33136
30'	0.06116	30'	0.14945	30'	0.24008	30'	0.33460
40'	0.06408	40'	0.15243	40'	0.24316	40'	0.33783
50'	0.06700	50'	0.15540	50'	0.24624	50'	0.34108
4° 0'	0.06993	9° 0'	0.15838	14° 0'	0.24933	19° 0'	0.34433
10'	0.07285	10'	0.16137	10'	0.25242	10'	0.34758
20'	0.07578	20'	0.16435	20'	0.25552	20'	0.35085
30'	0.07870	30'	0.16734	30'	0.25862	30'	0.35412
40'	0.08163	40'	0.17033	40'	0.26172	40'	0.35740
50'	0.08456	50'	0.17333	50'	0.26483	50'	0.36068
5° 0'	0.08749	10° 0'	0.17633	15° 0'	0.26795	20° 0'	0.36397

Prócz tego są urządzenia mechaniczne n. p. Voglera, Teischingera, Pullera, umożliwiające szybkie obliczenie zdjęć tachymetrycznych. Opis ich na razie opuszczamy, poprzestając na podanem obliczeniu graficznem bardzo prostem i dokładnem, a nadto łatwem do sporządzenia.

Poniżej podajemy jeszcze krótkie zestawienie iloczynów

$\frac{100 \sin 2\alpha}{2}$ i $100 \cos^2 \alpha$ t. j. dla $K=100$.

1) $\frac{100 \sin 2\alpha}{2}$										
α	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
0'	0.00	1.74	3.49	5.23	6.96	8.68	10.40	12.10	13.78	15.45
10'	0.29	2.04	3.78	5.52	7.25	8.97	10.68	12.38	14.06	15.73
20'	0.58	2.33	4.07	5.80	7.53	9.25	10.96	12.66	14.34	16.00
30'	0.87	2.62	4.36	6.09	7.82	9.54	11.25	12.94	14.62	16.28
40'	1.16	2.91	4.65	6.38	8.11	9.83	11.53	13.22	14.90	16.55
50'	1.45	3.20	4.94	6.67	8.40	10.11	11.81	13.50	15.17	16.83
										18.46
α	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	
0'	18.73	20.34	21.92	23.47	25.00	26.50	27.96	29.39	30.78	
10'	19.00	20.60	22.16	23.73	25.25	26.74	28.20	29.62	31.01	
20'	19.27	20.87	22.41	23.99	25.50	26.99	28.44	29.86	31.24	
30'	19.54	21.13	22.70	24.21	25.75	27.23	28.68	30.09	31.47	
40'	19.80	21.39	22.96	24.49	26.00	27.48	28.91	30.32	31.69	
50'	20.07	21.66	23.22	24.75	26.25	27.72	29.15	30.55	31.92	

2) $100 \cos^2 \alpha$

0°	0°30'	1°00'	1°30'	2°00'	2°30'	3°00'	3°30'	4°00'	4°30'	5°00'	5°30'
100°00'	100°00'	100°00'	99°9'	99°9'	99°8'	99°7'	99°6'	99°5'	99°4'	99°2'	99°1'
6°00'	6°30'	7°00'	7°30'	8°00'	8°30'	9°00'	9°30'	10°00'	10°30'	11°00'	11°30'
98°9'	98°7'	98°5'	98°3'	98°1'	97°8'	97°6'	97°3'	97°0'	96°7'	96°4'	96°0'
12°	12°20'	12°40'	13°00'	13°20'	13°40'	14°00'	14°20'	14°40'	15°00'	15°20'	15°40'
95°7'	95°4'	95°2'	94°9'	94°7'	94°4'	94°1'	93°9'	93°6'	93°3'	93°0'	92°7'
16°00'	16°20'	16°40'	17°00'	17°20'	17°40'	18°00'	18°20'	18°40'	19°00'	19°20'	19°40'
92°4'	92°1'	91°8'	91°5'	91°1'	90°8'	90°5'	90°1'	89°8'	89°4'	89°0'	88°7'

Wyjęte stąd liczby pomnożyć należy przez odcinek l z protokołu zdjęcia.

16*

Jeżeli tak przy obliczeniu h sposobem wykreślnym, jak zapomocą tablic, uwzględnimy poprawkę $c \sin \alpha$ według fig. 147, to dokładność zdjęcia będzie wystarczająca. Tytuły tablic do obliczenia tachymetrycznych zdjęć, podane są przy końcu.

§ 45. Zdjęcia tachymetryczne w polu.

Tachymetryę stosuje się, jak sama nazwa wskazuje, do szybkich zdjęć, przy których nie chodzi o nadzwyczajną dokładność. Za podstawę zdjęć służy wytyczony w polu polygon, którego kąty i boki pomierzemy, względnie cały polygon zdejmujemy według zasad podanych w następnych §§.

Punkta polygonu są stanowiskami dla tachymetru; wysokości ich powinny być znane, t. j. pomierzone albo zapomocą niwelacyi, albo innym sposobem. Zdejmując z każdego stanowiska teren w promieniu około 300 m, możemy łatwo zdjąć sytuację pasu dowolnie długiego, o szerokości zależnej od potrzeby. Gdyby okazała się potrzeba w niektórych miejscach zdjąć szerszy pas, do czego nie wystarczałyby stanowiska na polygonie, to obierzemy stanowisko w dogodnym punkcie z boku, a nawiążemy je do polygonu w następujący sposób:

Przypuśćmy, że punkta I, II, III . . . V . . . są wierzchołkami polygonu (fig. 150), a zarazem stanowiskami dla zdjęć tachymetrycznych. Prócz nich obraliśmy jeszcze na stanowiska punkty Ia, Ib, IIIb . . . a nadto okazała się potrzeba zdjęcia terenu ze stanowiska IIa, IIIa, IVa. Położenie punktów na polygonie jest określone na podstawie pomiaru polygonu; ażeby jeszcze zdjąć położenie punktu np. IIa, pomierzmy w trójkącie II, IIa, III kąty α i β , to tem samem dany jest i kąt $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$. Ponieważ długość II, III jest znana, więc obliczymy długości II, IIa i III, IIa zapomocą reguły wstaw:

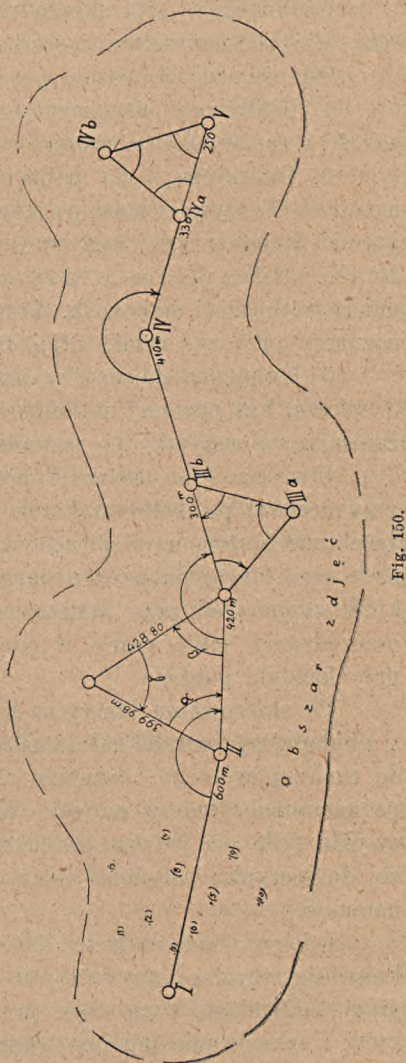
$$\text{II} - \text{III} : \text{II} - \text{IIa} = \sin \gamma : \sin \beta$$

$$\text{a stąd} \quad \text{II} - \text{IIa} = \frac{\text{II} - \text{III} \sin \beta}{\sin \gamma} \quad 1)$$

podobnie
$$\text{III}-\text{II}a = \frac{\text{II}-\text{III} \sin \alpha}{\sin \gamma} \dots \dots \dots 2)$$

Ponieważ przy zdjęciach tachymetrycznych nie rozchodzi się o bardzo wielką dokładność, przeto położenie punktu $\text{II}a$ narysujemy na planie w prosty sposób, biorąc w cyrkiel długość $\text{II}-\text{II}a$ i kreśląc nią łuk z wierzchołka II i podobnie długością $\text{III}-\text{II}a$ łuk z wierzchołka III , punkt przecięcia obu łuków będzie punktem $\text{II}a$. W ten sam sposób zdejmujemy położenie innych, podobnie przyjętych punktów. Dla kontroli dobrze jest zmierzyć jeszcze kąt trzeci w trójkącie i wyrównać zdjęcie w sposób, jaki podamy w dalszym ciągu przy zdjęciach polygonowych i tryangulacyi.

W terenie trudnym, górskim, gdzie tachymetrya właśnie oddaje największe usługi, byłby tak pomiar długości boków polygonu, jak niwelacya stanowisk uciążliwą i zabierałaby wiele czasu. W takich wypadkach wyznaczamy sieć stanowisk i zdejmujemy je zapomocą t. zw. tryangulacyi, zaś pomiar wysokości wykonujemy trygonometry-



cznie, co w następujących paragrafach opiszemy. — Mając wyznaczone stanowiska, przystępujemy do zdjęć szczegółowych.

Czynność w polu składa się z *a)* pomiaru instrumentem, *b)* wyboru punktów i szkicowania ich.

Odnosnie do *a)* postępowanie pracy jest następujące:

1. Ustawiamy instrument na stanowisku, mierzymy wysokość i zapisujemy w protokole w odpowiednich rubrykach.

2. Celujemy do jednego z widocznych stanowisk (zwykle następnego) i odczytujemy odpowiadający tej celowej kąt poziomy na limbusie. Odczyt ten służy do nawiązania zdjętych punktów do sieci stanowisk. Potrzebę i ważność nawiązania poznamy przy rysowaniu zdjęć tachymetrycznych.

3. Celujemy do każdej ustawionej łaty, odczytujemy 3 celowe, kąt poziomy na limbusie i kąt pionowy (+ lub —) zapisując to wszystko po porządku w protokole.

Uwaga. Ile możności powinno się odczytywać łatę przy celowej poziomej, wskutek czego ułatwia się obliczenie. Jeżeli nie można używać celowej poziomej, to dobrze jest nastawiać lunetę na pewien okragły kąt i całe grupy punktów zdejmować przy stałym nachyleniu lunety, przez co oszczędzamy sobie pracy w odczytywaniu kąta pionowego przy każdym punkcie.

Po skierowaniu lunety na łatę, należy sprzągnąć limbus z alhidadą, poczem dokładnie ustawić celową za pomocą śruby do ruchu powolnego; podobnie oś poziomą należy sprzągnąć po ustawieniu lunety na cel. Kąty poziome odczytuje się zwykle tylko na jednym noniuszu, jednak przy nawiązaniu się do kierunku polygonu należy dla kontroli odczytać dwa noniusze.

Odczytywanie na łacie i kątów, wymaga pewnej wprawy, którą się wkrótce nabywa; jest to wogóle część łatwiejsza pracy, natomiast druga część pracy w polu, t. j. wybór punktów i szkicowanie ich jest trudniejsze i wymaga doświadczenia. Dlatego tę drugą czynność wykonuje już technik doświadczony w tego rodzaju zdjęciach. Punkty należy wybierać takie, by charakteryzowały sytuację, tudzież punkty

wskazujące przebieg warstwie w miejscach trudniejszych, punkty najwyższe i najniższe i t. p., wogóle plan powinien być wiernym obrazem terenu, więc też stosownie trzeba dobierać punkty do zdjęcia. Równocześnie szkicuje się położenie punktów, rysując od oka warstwice, ażeby potem, na podstawie tych szkiców można było wykreślić plan warstwowy. Od czasu do czasu sprawdzać należy czy numery punktów na szkicach zgadzają się z numerami protokołu prowadzonego przez drugiego technika przy instrumencie. Ażeby nie tracić czasu jakiego potrzebuje figurant by przenieść latę z jednego punktu do drugiego, używa się dwu lub trzech lat. Jedną latę odczytuje się a równocześnie drugi figurant przenosi drugą na nowy punkt i t. d.

Ilość punktów, potrzebna do zdjęcia n. p. jednego km^2 , jest różna, zależna od konfiguracji terenu, od ilości budynków, dróg, potoków, obiektów i t. p., a wynosi ona od 500 do 1000 na km^2 . Na podstawie licznych doświadczeń przyjąć również można, że razem z wytyczaniem i zdjęciem poligonu względnie sieci stanowisk, można w ciągu godziny zdjąć 30 punktów, co jednak nie może być regułą, bo zależy w wysokim stopniu od stanu powietrza, gęstości stanowisk, od wprawy, terenu i t. p.

§ 46. Rysowanie zdjęć tachymetrycznych.

Po obliczeniu protokołu przystępujemy do ostatniej pracy, t. j. narysowania zdjęcia. Rysunek wykonujemy w tym samym porządku jak pracę w polu, więc najpierw narysujemy sieć stanowisk, względnie polygon (o czym w następnych parag.), a potem, mając podstawę planu podobnie jak wytyczony polygon jest podstawą pomiarów na terenie, przystępujemy do szczegółów, zatem a) do nawiązania zdjęć do podstawy, b) do wrysowania poszczególnych punktów.

a) Nawiązanie. Podział limbusu postępuje w kierunku ruchu wskazówek na zegarze, od lewej ku prawej. Ustawmy instrument n. p. na stanowisku I (fig. 151), skierujmy lunetę

do stanowiska II i odczytajmy na limbusie kąt poziomy n. p. $70^{\circ}00'$, przypuszczając przytem, że punkty I—II... są podstawą zdjęć i położenie ich jest określone i dane na podstawie pomiaru. Jeżeli więc limbus jest tak ustawiony, że celowej w kierunku I—II odpowiada kąt 70° , to punkt początkowy podziału $0^{\circ}0'0''$ (czyli $360^{\circ}00'00''$) znajdować się musi z lewej strony celowej, 90° z prawej strony i t. d. czyli położenie limbusu jest względem kierunku I—II ściśle oznaczone, a tem samem kierunki punktów (1) (2) (3)... za pomocą odczytów na limbusie, są także ściśle oznaczone

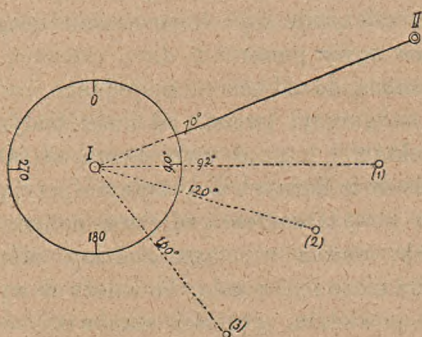


Fig. 151.

względem podstawy I—II. Jeżeli więc mamy podany na planie kierunek I—II, a do punktu I przyłożymy transporter czyli odpowiednio skonstruowany limbus w kształcie koła w ten sam sposób podzielony, zaś linia I—II przejdzie przez środek I i kierunek 70° , to wykre-

ślając odpowiednio rejony przez punkta 92° 120° 160° i t. p. otrzymamy kierunki I (1) — I (2)... zupełnie zgodne z kierunkami na terenie. Z tego widzimy, że do zorientowania, czyli nawiązania punktów do podstawy zdjęcia, wystarcza odczyt na limbusie w kierunku boku podstawy. Do wykreślenia kierunków zdjęć tachymetrycznych, najwygodniejszym jest transporter kołowy, zrobiony z cienkiej tektury, przedstawiony na fig. 152.

Pierścień obwodowy, szeroki około 15 mm, podzielony jest na 360° , każdy zaś stopień na 2 do 4 części zależnie od średnicy, czyli możemy mieć podział na $30'$ lub $15'$ — drobniejsze części odcina się szacując od oka. Jeżeli średnicę koła przyjmiemy 300 mm, to na 1° wypada długość łuku

$$\frac{94\ 2' 48''}{360} = 2.612\text{ mm}, \text{ a na } 15' \text{ wypadnie } 0.653\text{ mm}, \text{ z tego}$$

już można wywnioskować, że trudnoby było rysować kąty z dokładnością na $1'$, jeżeli $\frac{1}{8}$ mm na transporterze przedstawia już wartość łukową dla $7'30''$, czyli, że wystarczy podział co $15'$ na obwodzie, a drobniejsze części dostatecznie dokładnie odetniemy od oka. — Na pasku wewnątrz koła

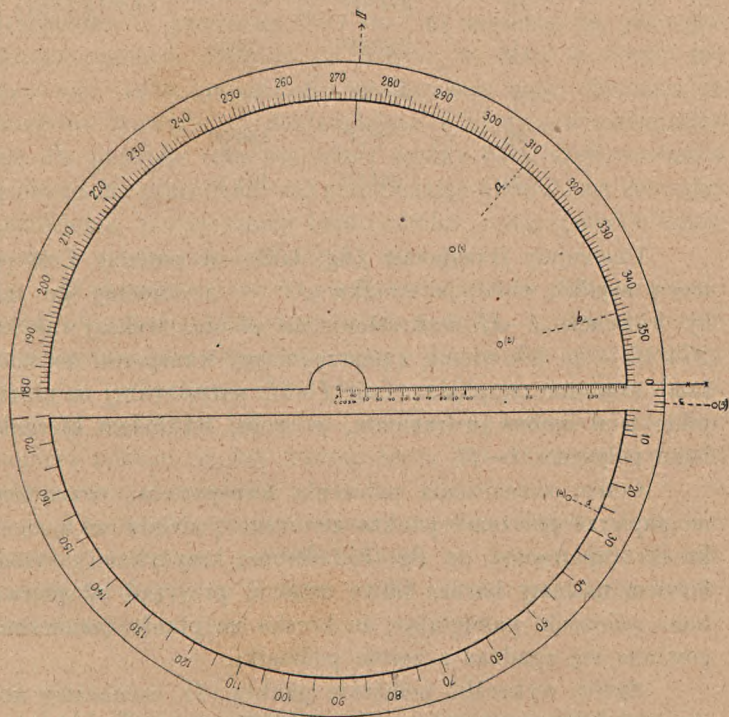


Fig. 152.

oznaczony jest środek koła O , w który wbija się szpilkę wtykając ją w odpowiedni punkt na planie, i wykreślona podziałka w takiej skali, w jakiej rysujemy plan. Początek podziałki przesunięty jest o ilość $c \cdot \cos \alpha = 0.4$ m na prawo celem uwzględnienia drugiego wyrazu wzoru

$$L_h = Kl \cos^2 \alpha + c \cdot \cos \alpha$$

o czem mówiliśmy w poprzednim paragrafie.

Przykład. Wykreślić położenie punktów, na podstawie podanych w protokóle dat:

Stanowisko	Cel do punktu	Kąt poziomy	Odległość L_h	UWAGA
I.	II.	$274^{\circ}15'$		nawiązanie
	(1)	$310^{\circ}25'$	71.00	
	(2)	$345^{\circ}18'$	66.20	
	(3)	$3^{\circ}11'$	150.00	
	(4)	$26^{\circ}43'$	104.10	

Umocujmy transporter (fig. 152) na punkcie I za pomocą szpilki białej w środku „O” — i obróćmy go tak, by kierunek $I-II$ wykreślony na planie, wskazywał kąt $274^{\circ}15'$ — to jak wiemy z poprzedniego, transporter ma takie samo położenie względem linii $I-II$, narysowanej na planie, jakie miał limbus instrumentu, w polu, względem kierunku boku polygonu $I-II$.

Celem zaznaczenia położenia transportera, naznaczymy na papierze położenie punktu zerowego podziału za pomocą kreski (opatrzonej na fig. 152 dwoma krzyżykami), wtedy bowiem możemy bardzo łatwo ustawić przyrząd w pierwotnym położeniu pamiętając, że kreska na planie zaznaczona, powinna się zgadzać z zerem podziałki.

Ażeby wykreślić położenie punktu (1), zaznaczymy kreską „a” odpowiadający mu kąt $310^{\circ}25'$, następnie obróćmy transporter około szpilki, dopóki podziałka nie zgodzi się z kreską a, w końcu odetnijmy za pomocą podziałki na transporterze odległość 71 m i położenie punktu (1) jest wyznaczone. W celu narysowania punktu (2) powróćmy z transporterem w pierwotne położenie t. j. punkt zerowy przesunijmy napowrót do zaznaczonej kreski (czyli tem samem linia $I-II$ wskazywać będzie kąt $274^{\circ}15'$), naznaczymy kreską b kąt $345^{\circ}19'$ odpowiadający kierunkowi punktu (2). —

Obróćmy znowu transporter około środka aż podziałka przyjdzie w kierunku kreski b , odcnijmy odległości $66\cdot20\ m$ i t. d.

Ponieważ umieszczenie podziałki zabrało pewną szerokość wewnątrz koła, więc kątów od $0''$ do $5''$ nie możnaby w zwykły sposób wykreślić, dlatego na tej części umieszczono podział na zewnętrznej stronie pierścienia. Jeżeli urządzimy transporter o promieniu $300\ mm$, to możemy na jego podziałce odcinać długości do $300\ m$ w skali $1:1000$; nie używając osobnej podziałki, a zarazem kąty odcinane na wielkim obwodzie są dokładniejsze i błędy ich zmniejszają się dla punktów leżących bliżej środka koła, czyli wewnątrz pierścienia; przeciwnie zaś przedłużając kierunki na zewnątrz pierścienia, powiększamy błąd rysunku, z tego powodu transportery o większej średnicy są lepsze.

Wykreśliwszy za pomocą transportera położenia punktów, wypiszemy ołówkiem obok każdego z nich wysokość niwelacyjną, a następnie w znany już sposób, przy pomocy szkieców wykreślimy warstwiec w żądanym odstępie, n. p. co $1\ m$ wysokości lub innej. — Przy wykreślaniu warstwiec dopiero pokaże się jak ważną rzeczą jest szkicowanie w polu zdejmowanych punktów.

Transporter wyżej opisany można łatwo sporządzić samemu, odcinając podziałkę kątów za pomocą funkcji trygonometrycznych n. p. $tg\ \alpha$ — dla danego promienia r (za tem iloczyn $r \cdot tg\ \alpha$).

§ 47. Trygonometryczny pomiar wysokości.

W jednym z poprzednich paragrafów wspomnieliśmy, że w terenie górskim, gdzie pomiar długości i niwelacja są trudne i absorbują bardzo wiele czasu, najwygodniej jest, zdjąć sieć punktów stanowiących podstawę do pomiarów tachymetrycznych, metodą trygonometryczną.

Zacniemy od pomiaru wysokości.

Niektóre wysokości, n. p. wieży, budynku, drzewa, pomierzyć możemy w bardzo prosty sposób.

Przypuśćmy n. p. że mamy zmierzyć wysokość szczytu wieży (fig. 153) nad punktem terenu A . Ustawmy w tym celu instrument nad punktem A , zmierzmy odległość L i wysokość instrumentu J , tudzież kąt α między poziomem a promieniem przechodzącym przez szczyt wieży.

Z rysunku obliczymy $h = L \cdot \operatorname{tg} \alpha$ 1)
gdzie L i α są znane.

Nazwijmy wysokość szczytu wieży nad punktem A przez H , to na podstawie rysunku otrzymamy

$$H = J + h = J + L \cdot \operatorname{tg} \alpha$$
 2)

W taki sam sposób moglibyśmy zmierzyć n. p. wysokość szczytu pagórka w porównaniu z danym punktem, jeżeli znany jest kąt pionowy α , odległość L obu punktów, tudzież pod warunkiem, że odległość L nie jest większą od 400 m .

Przy większych odległościach niż 400 m , uwzględnić już należy kulistość ziemi

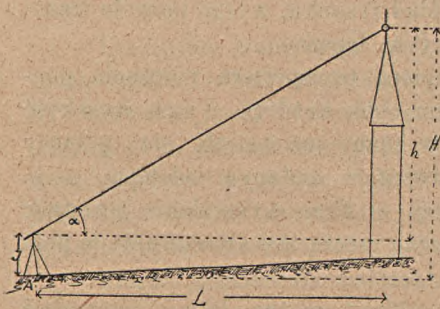


Fig. 153.

i refrakcyę, czyli załamanie promieni, bo jak wiadomo z optyki, promień wychodzący z punktu wyżej położonego, dochodząc do punktu niższego, załamuje się w drodze, bo przechodzi z rzadszych do gęstszych warstw powietrza.

Promień taki musi się ciągle załamywać ku prostopadłej padania, wskutek czego promień wychodzący z punktu B (fig. 154), wskutek ciągłego załamywania się, opisuje krzywą BO , a oko znajdujące się w punkcie O , widzi punkt B w kierunku ostatniego elementu tej krzywej, czyli w kierunku stycznej OB' do BO , więc w punkcie B' .

Przypuśćmy, że z punktu A (fig. 155) na powierzchni ziemi, mamy trygonometrycznie pomierzyć wysokość drugiego punktu terenu B , tudzież że wskutek refrakcyi pro-

Z powyższego zestawienia (5) widzimy, że nawet dla wielkich długości łuku a , kąt β zawarty między poziomem pozornym punktu A a pionem punktu B , uważać można za prosty i dlatego oznaczono go na rysunku jako $\beta = 90^\circ$.

Obliczając długość stycznnej $AD = r \cdot \operatorname{tg} \gamma$ (z trójkąta DAO) dla kąta γ , odpowiadającemu łukowi $a = 20\,000\text{ m}$, przekonamy się, że dla tak wielkiej długości łuku styczna jest zaledwie o 6 cm większą, a podobnie o tyle cięciwa AC mniejszą od łuku, czyli w praktyce możemy przyjąć że $a = AD = AC$ — gdyż błędy, jakie wskutek tego przyjęcia popełniamy, są o wiele mniejsze niż błędy pomiaru takich długości. Różnice te są dla mniejszych długości tembardziej nieznaczne. Możemy więc powiedzieć, opierając się na powyższych dowodach, że pomiar długości na poziomie pozornym nie różni się od pomiaru na poziomie rzeczywistym (geodezyjnym) aż do 30 km .

Rozpatrzmy teraz jak się przedstawiają stosunki wysokości, mianowicie o ile różnią się poziomy, geodezyjny i pozorny. Z trójkątą ACD , który również uważać możemy za prostokątny (kąć prosty przy C) otrzymamy

$$y = a \cdot tg \frac{\gamma}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

gdzie $a =$ długości cięciwy AC

z trójkąta $A O E$ otrzymamy $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{a}{2} : r = \frac{a}{2r}$ 7)

wstawmy to w równ. 6, to $y = \frac{a^2}{2r}$. . . 8)

Wstawiwszy w to równanie $r = 6\,381\,000\text{ m}$ i różne wartości na a , otrzymamy różnice wysokości „ y ” między obu poziomami dla różnych długości „ a ” — mianowicie:

9)

a m	y mm	a m	y mm	a m	y mm	a m	y mm	a m	y mm
100	0·78	400	12·5	700	38·22	1000	78·36	4000	1253·7
200	3·13	500	19·58	800	50·15	2000	313·4	5000	1958·9
300	7·05	600	28·20	900	63·47	3000	705·2	10000	7835·8

Z zestawienia powyższego widać, że różnice wysokości obu poziomów są już tak wielkie, że nie można ich pomijać począwszy od długości stycznej (mierzonej na poziomie pozornym) 400 m.

Wreszcie uwzględnić jeszcze trzeba refrakcję promieni, wskutek której widzimy punkt B w niewłaściwym miejscu B' , więc mierząc kąt pionowy zawarty między poziomem punktu A i promieniem z B wychodzącym, nie mierzymy jego rzeczywistej wielkości α' lecz kąt α .

Na podstawie zmierzonego kąta α i długości a obliczymy z trójkąta prostokątnego ADB'

$$h' + z = a \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

Następnie z trójkąta ABB' który również uważać możemy za prostokątny w przybliżeniu, tudzież na podstawie, że długość AB przyjąć możemy jako równą łukowi a czyli

$$AB = a \text{ otrzymamy } z = a \cdot \operatorname{tg} (a - \alpha') = a \cdot \operatorname{tg} \delta \quad . \quad . \quad 11)$$

przyczem popełniamy wogóle nieznaczne błędy.

Według bardzo licznych doświadczeń Laplace'a i Delambre'a wynosi $\delta = 0.08 \gamma$, czyli 8% kąta jaki tworzą piony obu punktów A i B , zaś według Gaussa

$$\delta = 0.0653 \gamma \text{ lub } \operatorname{tg} \delta = \frac{a}{2r} \times k \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

$$\text{a stąd} \quad a \cdot \operatorname{tg} \delta = \frac{a^2 k}{2r} = z \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

gdzie k jest współczynnikiem, który wyznaczyć można doświadczalnie.

Ponieważ rozchodzi się nam o obliczenie różnicy wysokości rzeczywistych obu punktów t. j. o h , więc na podstawie fig. 155 napiszemy: $h = (h' + z) - z + y$ a uwzględniając równanie: 8), 10), 11) i 13) otrzymamy

$$h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{a^2 k}{2r} + \frac{a^2}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

$$\text{czyli} \quad h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha + a^2 \frac{1-k}{2r} \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

jako wzór na różnicę wysokości dwu punktów terenu.

We wzorze 15 oznacza:

a — odległość obu punktów, znaną z pomiarów;

α — kąt pomierzony między poziomem jednego punktu a promieniem z drugiego wychodzącym:

r — promień ziemi średnio 6 381 000 m;

k — t. z. współczynnik refrakcyi, można go przyjąć średnio $k = 0.13$ z błędem około 25% t. j. $k = 0.13 (1 \pm 0.25)$.

Refrakcja zależna jest od atmosfery i jest ciągle zmienna.

Współczynnik k da się doświadczalnie wyznaczyć w następujący sposób:

Mając daną odległość a dwu punktów A i B , tudzież różnicę ich wysokości h obliczoną na podstawie dokładnej niwelacyi, otrzyma-

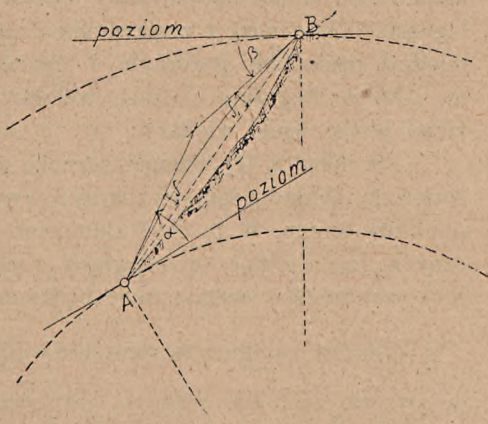


Fig. 156.

$$\text{my z równania 15)} \quad k = 1 - \frac{2r}{a^2} (h - a \cdot \operatorname{tg} \alpha) \quad . \quad . \quad 16)$$

gdzie wstawimy α z pomiaru kąta według fig. 155.

Drugi sposób:

W obu punktach A i B (fig. 156) mierzymy równocześnie kąty pionowe α i β natenczas k obliczymy z wzoru

$$k = 1 - \frac{r}{a} \left(\frac{\beta - \alpha}{\varrho} \right) \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

gdzie a jest odległością obu punktów $\varrho = 206\,265$. — Z kilkunastu spostrzeżeń obliczymy średnią wartość na k .

Ażeby wykazać jaki wpływ ma refrakcja na pomiar wysokości, tudzież wpływ niepewności współczynnika k ,

obliczmy wartość $z = \frac{a^2 k}{2r}$ przyjmując $a = 1000$ m, tudzież

$$k = 0.13 \quad \text{i} \quad k_1 = 0.16 = 1.25 k$$

$$\text{to } z = \frac{a^2 k}{2r} = 0.0102 \text{ m} = 10.2 \text{ mm}$$

$$\text{i } z_1 = \frac{a^2 k_1}{2r} = 0.0127 \text{ m} = 12.07 \text{ mm}$$

skąd $z_1 - z = 2.5 \text{ mm}$ na 1000 m długości, jeżeli niepewność współczynnika k wynosi aż 25% jego wartości. Jak widzimy, niepewność ta ma bardzo mały wpływ na dość znaczne odległości. Natomiast z zestawienia 9 otrzymujemy różnicę y między poziomem pozornym i geodezyjnym $= 78.36 \text{ mm}$ na 1000 m długości, z czego widzimy, że wpływ kulistości ziemi jest o wiele większy.

Za pomocą trygonometrycznego pomiaru, możemy z dostateczną dokładnością wyznaczyć wysokości poszczególnych punktów terenu, n. p. sieci stanowisk dla zdjęć tachymetrycznych, jeżeli znane są odległości z pomiarów bezpośrednich lub pośrednich o czym mówić będziemy później.

Poniżej podajemy zestawienie wartości wyrazu $\frac{1-k}{2r} \cdot a^2$ do wzoru 15, dla różnych wartości k , i dla promienia ziemi $r = 6\,831\,000 \text{ m}$ (szer. geogr. 50°).

$$\frac{1-k}{2r} \cdot a^2.$$

18)

$a =$	1000 m	2000 m	3000 m	4000 m	5000 m	6000 m	8000 m	10000 m
$k = 0$	0.08 m	0.31 m	0.71 m	1.25 m	1.96 m	2.82 m	5.01	7.83 m
$k = 0.1$	0.07	0.28	0.63	1.13	1.76	2.54	4.51	7.05
$k = 0.13$	0.07	0.27	0.61	1.09	1.70	2.45	4.36	6.82
$k = 0.16$	0.07	0.26	0.59	1.05	1.65	2.37	4.21	6.58
$k = 0.20$	0.06	0.25	0.56	1.00	1.57	2.26	4.01	6.27

Zestawienie to wskazuje, że do odległości 5000 m wpływ niepewności współczynnika jest wogóle mały. Możemy więc śmiało używać średniej jego wartości.

Następnie podajemy tabliczkę w celu obliczenia wyrazu $\frac{1-k}{2r} \cdot a^2$ dla $k = 0.13$ i odległości od $a = 0$ do $a = 10\,000\text{ m}$ co 100 m — według Jordana *Handbuch der Vermessungskunde* II B. [10].

19)

$\frac{1-k}{2r} \cdot a^2 \dots k = 0.13.$	a	0 m	100 m	200 m	300 m	400 m	500 m	600 m	700 m	800 m	900 m	Diff.
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	+
	0	0.000	0.001	0.003	0.006	0.011	0.017	0.025	0.033	0.044	0.055	13
	1000	0.068	0.082	0.098	0.115	0.134	0.153	0.175	0.197	0.221	0.246	27
	2000	0.273	0.300	0.33	0.36	0.39	0.43	0.46	0.50	0.53	0.57	4
	3000	0.61	0.66	0.70	0.74	0.79	0.84	0.88	0.93	0.98	1.04	5
	4000	1.09	1.15	1.20	1.26	1.32	1.38	1.44	1.51	1.57	1.64	6
	5000	1.70	1.77	1.84	1.91	1.99	2.06	2.14	2.21	2.29	2.37	8
	6000	2.45	2.54	2.62	2.71	2.79	2.88	2.97	3.06	3.15	3.25	10
	7000	3.34	3.44	3.53	3.63	3.73	3.83	3.94	4.04	4.15	4.25	11
	8000	4.36	4.47	4.58	4.70	4.81	4.93	5.04	5.16	5.28	5.40	12
	9000	5.52	5.65	5.77	5.90	6.02	6.15	6.28	6.41	6.55	6.68	13
	10000	6.82	6.95	7.09	7.23	7.37	7.52	7.65	7.80	7.95	8.10	15

Przykład: Obliczyć poprawkę wysokości dla długości $a = 2\,428\text{ m}$.

1. Na skrzyżowaniu wiersza odpowiadającego długości 2 000 m z kolumną 400 m czyli dla długości 2 400 m, otrzymamy $\frac{1-k}{2r} = 0.39$.

2. W ostatniej kolumnie odpowiednia różnica wynosi + 4 cm, dla 100 m, więc dla 28 m będzie $0.28 \times 4 = 1.12$ cm dodamy ją zatem do 0.39

$$+ 1.12$$

i otrzymamy 0.4012 jako całkowitą poprawkę.

Wykonując pomiar wysokości, ustawiamy w punkcie A (fig. 157 a) instrument, w punkcie B sygnał z tarczą umie-

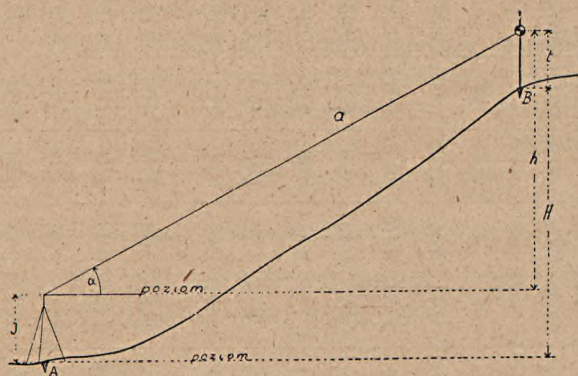


Fig. 157 a.

szczoną w wysokości „t” nad terenem, następnie mierzymy kąt α . Odległość obu punktów musi być znana.

Przy obliczeniu musimy uwzględnić wysokość instrumentu J i sygnału t . Na podstawie rysunku fig. 157 a, gdzie oznacza:

H — rzeczywistą różnicę wysokości punktów terenu A i B,

h — obliczoną ilość według wzoru 15),

J — wysokość instrumentu,

t — wysokość sygnału,

obliczymy:

$$H = h + J - t$$

$$\text{czyli } H = a \cdot \operatorname{tg} \alpha + a^2 \frac{1-k}{2r} + J - t \quad . \quad . \quad . \quad 21)$$

Wzór 21) odnosi się do tego wypadku, gdy teren się wznosi, czyli punkt B (sygnał) jest wyższy od punktu A (instrument), więc gdy kąt α jest dodatni.

Jeżeli teren spada, zatem punkt A (instrument) jest wyższy niż punkt B (sygnał — fig. 157 b), to na podstawie rysunku możemy napisać bez względu na znaki

$$H = h - J + t \quad a)$$

Celem podstawienia wartości za h w powyższy wzór, przedstawmy warunki pomiaru na fig. 158, mianowicie:

Styczna AC przedstawia poziom pozorny punktu A , łuk AD poziom rzeczywisty tegoż punktu, α' kąt jakiką

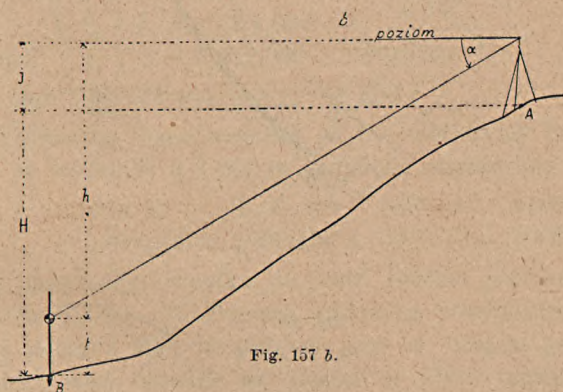


Fig. 157 b.

właściwie mierzyć powinni, zaś α kąt, jaki mierzymy w rzeczywistości, wskutek refrakcyi promieni. Nazwijmy dalej przez h różnicę poziomów rzeczywistych obu punktów A i B , to y oznacza różnicę między poziomem pozornym a rzeczywistym punktu A , czyli taką samą poprawkę jak poprzednio obliczoną według wzoru 8, t. j. $y = \frac{a^2}{2r}$.

Podobnie poprawka refrakcyi $z = \frac{a^2 k}{2r}$.

Z fig. 158 wynika, że wskutek refrakcyi widzimy punkt B w miejscu B' , zatem mierzymy kąt α zamiast α' , tudzież, że mierzony kąt α jest za mały, przeciwnie, jak

w poprzednim wypadku (fig. 155), gdzie wskutek refrakcyi mierzyliśmy znów za wielki kąt.

Dalej, na podstawie fig. 158 łatwo wywnioskujemy, że w tym wypadku należy poprawkę refrakcyi „z” dodać, natomiast poprawkę y wskutek kulistości ziemi, odjąć od obliczonej wysokości h' , tudzież

$$\text{że } h' = a \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad . \quad . \quad . \quad b)$$

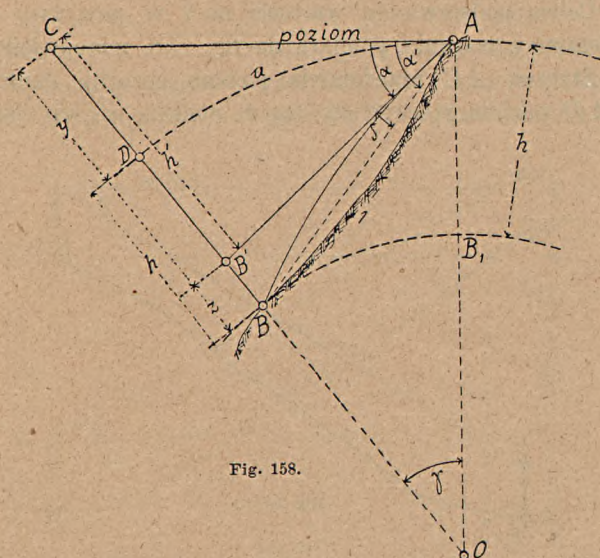


Fig. 158.

następnie $h = h' - y + z$

$$\text{czyli } h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{a^2}{2r} + \frac{a^2 k}{2r} = a \cdot \operatorname{tg} \alpha - a^2 \frac{1-k}{2r} \quad c)$$

a po wstawieniu tej wartości w równ. a) otrzymamy

$$H = a \cdot \operatorname{tg} \alpha - a^2 \frac{1-k}{2r} - J + t \quad . \quad . \quad 22)$$

jako wzór do obliczenia różnicy wysokości dwu punktów, przy terenie spadającym.

Uważając kąt α jako ujemny i wysokość H także jako ujemną, otrzymamy

$$-H = -a \operatorname{tg} \alpha + a^2 \frac{1-k}{2r} + J - t \quad 22 a)$$

Mając kąt punktu A , otrzymamy kąt drugiego, niższego punktu B , przez dodanie do pierwszej ilości — H obliczonej z wzoru 22 a .

Mogłaby tu powstać pewna wątpliwość, czy odległość „ a ” (fig. 158) ma być mierzona w poziomie punktu A czy B . — Ażeby ocenić różnicę długości łuków zależnie od różnicy obu poziomów, przypuśćmy, że różnica poziomów wynosi n. p. 1 000 m , czyli promienie obu kół różnią się o 1 000 m . Ponieważ łuki mają się tak do siebie jak promienie, więc przyjmąwszy średnią wartość promienia ziemi jako $r = 6\,381\,000\,m$ t. j. w punkcie B , łuk należący do poziomu A przez t_1 — łuk zaś należący do poziomu B przez t , obliczymy

$$t_1 : t = r + 1\,000 : r$$

$$\text{czyli } t_1 : t = 6\,282\,000 : 6\,381\,000$$

$$\text{a stąd } t_1 = t \frac{6\,282\,000}{6\,381\,000} = 1\,000\,156\,t$$

Przyjmując różne wartości na t — obliczymy odpowiednio t_1 w wyższym o 1 000 m poziomie, mianowicie

jeżeli $t = 100\,m$	$100\,m$	$5000\,m$	10000
to $t_1 = 100\,0156\,m$	$1000\,156\,m$	$5000\,78\,m$	$10001\,66\,m$

Z powyższego wynika, że jeżeli różnica poziomów wynosi nawet 1000 m , to długości łuków na powierzchni ziemi możemy mierzyć albo w jednym albo w drugim poziomie, bo różnice stąd wynikłe są jeszcze o wiele mniejsze niż błędy pomiarów.

Biorąc n. p. dwa łuki, z których jeden w niższym poziomie ma długości 1000 m , to odpowiadający mu łuk w poziomie o 1000 m wyższym, wynosi 1000·156 m , zatem różnica wynosi 15·6 cm , podczas gdy dozwolony błąd pomiaru długości 1000 m , według § 22, wynosi $\frac{1\,23}{2} = 61\,5\,cm$. Jeżeli poziomy są bliższe sobie, to tembardziej różnica długości będzie mniejszą. W końcu przyjąć możemy w praktyce, że długości łuków AD i BB_1 są równe, czyli $AD = BB' = a$

Przykład.

Dana jest odległość punktów A i B t. j. $a = 2675\,m$. a w celu obliczenia różnicy ich wysokości, pomierzono ze stanowiska A :

$$+ \alpha = 0^{\circ} 32' 10''$$

$$J = 1.20 \text{ m}$$

$$t = 3.00 \text{ m}$$

Różnice wysokości H obliczymy z wzoru 21)

$$H = a \cdot \operatorname{tg} \alpha + a^2 \frac{1-k}{2r} + J - t.$$

$$\log a = 3.42732$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha_1 = 7.97112 - 10$$

$$\log (a \cdot \operatorname{tg} \alpha) = 1.39844$$

$$a \cdot \operatorname{tg} \alpha = 25.0288 \text{ m}$$

Z tablicy 19, dla $\alpha = 2675$

otrzymujemy:

$$a^2 \frac{1-k}{2r} = 0.49 \text{ m}$$

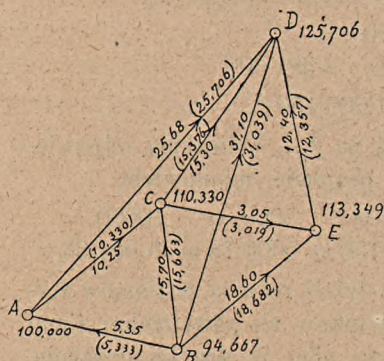


Fig. 159 *a*.

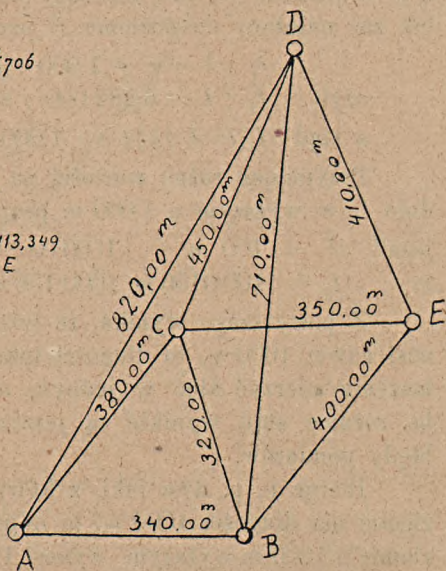


Fig. 159 b.

Zatem:

$$H = + a \operatorname{tg} \alpha \quad + 25.0288$$

$$+ a^2 \frac{1-k}{2r} + 0.4900$$

$+ J$	$+ 1.2000$
-------	------------

$$+ 26.7188$$

$-t$	-3.0000
------	-----------

$$H = + 23.7188$$

Celem kontroli powinno się zawsze wykonywać pomiar z obu stanowisk A i B i obliczać z nich średnią arytmetyczną. Mając n. p. całą sieć punktów, powinno się wykony-

wać pomiary nie tylko od jednego punktu do drugiego, ale też z danego stanowiska zdjęć wszystkie widoczne punkty, a z otrzymanych spostrzeżeń obliczyć wartość najprawdopodobniejszą, czyli wyrównać pomiary.

Bardzo prosty sposób wyrównania pomiarów, podaje następujący przykład.

Przypuśćmy, że położenie punktów $A - B - C - D - E$ (fig. 159 *a*) zdjęto za pomocą t. z. tryangulacji, tudzież, że punkty te służyć mają jako sieć stanowisk do zdjęć tachymetrycznych, więc trzeba jeszcze zmierzyć ich wysokości. Wyniki pomiarów podane są na rysunku, przyczem strzałki oznaczają kierunek wzniesienia, czyli kierunek przeciwny strzałkom, oznacza spad.

Przypuśćmy też, że najdalszy punkt D , był widoczny z punktów A i B , więc z obu tych punktów wykonano pomiar wysokości punktu D . Przyjmijmy kotę punktu $A = 100\ 00\ m$.

Wyrównanie pomiarów wykonamy w następujący sposób:

a. Wyrównanie dla punktu D .

1. Pomiar bezpośredni z punktu A	2. — pośrednio przez punkt B	3. — pośrednio przez B i C
100·00	100·00	100 00
+ 25·68	— 5·35	— 5·35
Kota $D = 125\ 68\ m$	94 65	94 65
	+ 31 10	+ 15·70
	125 75 <i>m</i>	+ 15 30
		125·65 <i>m</i>
4. — pośrednio przez B i E	5. — pośrednio przez B, C i E	Średnia arytmetyczna z tych 5-ciu spostrzeżeń wynosi 125 706 <i>m</i> , którą też przyjmujemy jako wysokość punktu D .
100·00	100·00	
— 5·35	— 5·35	
94·65	94·65	
+ 18·60	+ 15·70	
+ 12·40	+ 3 05	
125·65	+ 12·40	
	125·80	

Mając w ten sposób ustalone wysokości dwu punktów najdalszych, wyrównamy w podobny sposób pomiary wysokości pośrednich stanowisk.

b. Punkt B.

1. Bezpośrednio z A.	2. Bezpośrednio z D.
100.000	125.706
— 5.350	— 31.100
Kota B = 94 650	94.606
3. Pośrednio z D przez C.	4. Pośrednio z D przez E.
125.706	125.706
— 15.300	— 12.400
— 15.700	— 18.500
94.706	94.706

Średnia arytmetyczna z tych spostrzeżeń = 94 667 m.

c. Punkt E.

1. Bezpośrednio z B.	2. Bezpośrednio z D.
94.667	125.706
+ 18.600	— 12.400
113.267	113.306

3. Pośrednio z D przez C.	4. Pośrednio z A przez C.	5. Pośrednio z B przez C.
125.706	100.000	94.667
— 15.300	+ 10.250	+ 15.700
110.406	+ 3.050	+ 3.050
+ 3.050	113.300	113.417
113.456		

Średnia arytmetyczna = 113.349 m.

d. Punkt C. Bezpośrednio.

1. — z A.	2. — z B.	3. — z D.	4. — z E.
100.000	94.667	125.706	113.349
+ 10.250	+ 15.700	— 15.300	— 3.050
110.250	110.367	110.406	110.299

Stąd średnia = 110.330 m.

Mając obliczone i wyrównane wysokości (koty), możemy, o ile zachodzi tego potrzeba, obliczyć spady pomiędzy pojedynczymi punktami. Spady obliczone z kot, wypisane są na rysunku w nawiasach.

Jeżeli sieć punktów ciągnie się dalej, to obliczywszy pierwszą grupę, opieramy się na jednym lub dwu punktach, których wysokość jest już ustalona, wyrównamy grupę następną, potem dalszą i t. d.

Powyższe wyrównanie jest bardzo proste, ale też dowolne. Celem dokładnego wyrównania trzeba by brać w rachubę wagi spostrzeżeń, zależne i od odległości punktów i od innych czynników — n. p. refrakcyja promieni jest zmienną w ciągu dnia a wpływ niepewności współczynnika „ k ” rośnie wraz z odległością, jak tego dowodzi zestawienie 18. — Wogóle powiedzieć możemy, że na błąd pomiaru wpływa głównie odległość i że jest on proporcjonalny do odległości, zatem waga spostrzeżenia musi być, jak to wiemy z teorii błędów, odwrotnie proporcjonalną do kwadratu z odległości,

t. j. $p = \frac{1}{s^2}$ jeżeli s oznacza odległość, a p wagę.

Wracając do naszego przykładu, zastosujemy wzory z § 21 w następujący sposób:

Wyrównanie wysokości punktu D .

Szkic 159 *a* podaje graficznie odległości stanowisk. Na podstawie rachunku pod *a*) obliczyliśmy wysokości punktu D ze spostrzeżeń na różnych drogach, mianowicie:

Kota punktu D	długość	
1. 125.680	$AD = 820\text{ m} = 0.8\text{ km}$	$= s_1$
2. 125.750	$AB + BD = 1050\text{ m} = 1.0\text{ km}$	$= s_2$
3. 125.650	$AB + BC + CD = 1110\text{ m} = 1.1\text{ km}$	$= s_3$
4. 125.650	$AB + BE + ED = 1150\text{ m} = 1.1\text{ km}$	$= s_4$
5. 125.800	$AB + BC + CD + ED = 1420\text{ m} = 1.4\text{ km}$	$= s_5$

Spostrzeżenia i obliczenie zestawimy celem przeglądu w tabelce:

	l	$s \text{ km}$	$p = \frac{1}{s^2}$	$p \cdot l$	$v =$ $0.67 - l$	v^2	$p v^2$
1	125.600	0.8	1.56	0.936	+ 0.07	0.0049	0.0076
2	125.750	1.0	1.00	0.750	— 0.08	0.0064	0.0064
3	125.650	1.1	0.82	0.533	+ 0.02	0.0004	0.0003
4	125.650	1.1	0.82	0.533	+ 0.02	0.0004	0.0003
5	125.800	1.4	0.51	0.408	— 0.13	0.0169	0.0086
	średnia 125.706		4.71	3.100			0.0232

Objaśnienia:

Noczymy $p \cdot l$ obliczamy dla pojedynczych spostrzeżeń odrzucając z kolumny l całe, t. j. 125 — a biorąc w rachubę dziesiętne n. p. $p_1 l_1 = 1.56 \times 0.6$, $p_2 l_2 = 1.0 \times 0.75$ i t. d. a to dla uproszczenia rachunku.

Średnią wartość obliczymy z wzoru

$$x = \frac{[p l]}{[p]} = \frac{3.16}{4.71} = 0.67$$

a następnie błędy $v = x - l$, przyczem jak poprzednio odrzucimy całe 125 z kolumny l .

Zatem prawdopodobna wartość wysokości punktu D wynosi $125 + x = 125.67 \text{ m}$, podczas gdy poprzednio obliczona zwykła średnia arytmetyczna wynosiła 125.706 m . Błąd pojedynczego spostrzeżenia

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{0.0232}{4}} = \pm 0.076 \text{ m}.$$

Błąd prawdopodobnej wartości

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \pm \frac{0.076}{2.17} = \pm 0.035 \text{ m}.$$

Wreszcie wysokość punktu D z uwzględnieniem błędu ma wartość

$$D = 125.67 \text{ m} \pm 0.035 \text{ m}.$$

W ten sam sposób obliczylibyśmy wysokości innych punktów, względnie dalszych grup sieci stanowisk tworzących podstawę do zdjęć tachymetrycznych. Trygonometryczny pomiar wysokości wraz z obliczeniem i wyrównaniem rachunku, wymaga znacznie mniej czasu i pracy niż niwelacja, zwłaszcza gdy stanowiska mają większe odległości; w razie potrzeby możemy między temi stanowiskami przyjąć jeszcze pośrednie, zdejmując ich położenie tachymetrycznie.

Główną rolę w powyższych pomiarach odgrywa kąt pionowy. Pomiar jego wykonuje się tak samo jak pomiar kąta poziomego, więc odczytuje się oba noniusze w dwóch położeniach lunety, celem wyeliminowania błędu ekscentryczności lunety i noniuszów. Niekiedy do pomiarów takich używa się specjalnego instrumentu z kołem pionowym t. z. repetycyjnym, lecz urządzenia takie są rzadkie.

§ 48. Pomiar kątów poziomych.

Do dokładnych pomiarów kątów poziomych (kierunków), używa się teodolitu t. z. repetycyjnego, w którym limbus da się, podobnie jak alhidada, obracać około osi instrumentu i w dowolnym punkcie sprzęgać ze spodarką lub alhidadą.

1. Pomiar jednego kąta metodą repetycyjną.

a) Ustawiamy alhidadę na limbusie tak, by zero noniusza wskazywało na podziałce limbusu $0^{\circ} 00' 00''$ i sprzęgamy je ze sobą. Teraz zwalnimy sprzęg limbusu ze spodarką, obracamy limbus (wraz ze sprzęgniętą z nim alhidadą) aż luneta przyjdzie w kierunek lewego ramienia kąta, sprzęgamy limbus ze spodarką i śrubą do powolnego ruchu nastawiamy celową dokładnie na środek sygnału (alhidada wskazuje zawsze $0^{\circ} 00' 00''$). Po dokładnem ustawieniu celowej, zwalnimy sprzęg alhidady, obracamy ją po limbusie, kierując lunetę do prawego ramienia kąta, sprzęgamy alhidadę i nastawiamy celową dokładnie śrubą do ruchu leniwego. Po ustawieniu celowej, zero noniusza wskazuje na limbusie kąt α .

b) Teraz, nie ruszając sprzęgu alhidady, zwalniamy sprzęg limbusu ze spodarką, zwracamy lunetę napowrót do lewego ramienia, sprzęgamy limbus, nastawiamy dokładnie celową, następnie zwalniamy alhidadę i obracamy ją z lunetą do ramienia prawego, jak poprzednio, sprzęgamy alhidadę i t. d., teraz więc zero noniusza wskazuje na podziałce limbusu podwójny kąt t. j. 2α .

c) Powtarzamy znowu pomiar jak pod b), więc noniusz wskaże kąt 3α , wogóle po n -krotnym obrocie alhidady otrzymamy kąt $n\alpha$. Wkońcu odczytamy oba noniusze i zapiszemy w protokole odczyt, odpowiadający $n\alpha$.

d) Przerzucamy lunetę (przy sprzęgniętym limbusie ze spodarką) i obracamy alhidadę o 180° , celując do prawego ramienia. Na limbusie odczytamy teraz kąt $n\alpha + 180^\circ$.

Teraz zwalniamy alhidadę, celujemy do ramienia lewego, sprzęgamy ją i odczytujemy kąt. Następnie zwalniamy limbus, celujemy do ramienia prawego, potem do lewego i t. d., wogóle wykonamy n pomiarów kąta w stronę przeciwną, niż podczas pierwszego pomiaru.

W protokole zapisuje się zwykle tylko pierwszy i ostatni odczyt kąta. Różnica obu odczytów jest n -krotną wartością mierzonego kąta, więc pojedynczą jego wartość już łatwo obliczyć.

Prócz tego zapisuje się przy pierwszym pomiarze także odczyt przy pierwszym celu do prawego ramienia, bo otrzymana stąd różnica odczytów do prawego i lewego ramienia daje nam przybliżoną wartość kąta, która następnie służy do oryentacyi w obliczeniu, jak to na przykładzie poznamy, tudzież do kontroli obliczenia i pomiaru przed możliwym błędem grubym.

Przy pierwszej i ostatniej celowej w obu położeniach lunety, odczytuje się zawsze oba noniusze, wskutek czego otrzymamy 4 wartości kąta, każdy zaś wynosi $n\alpha$, z powodu n -krotnej repetycyi, a zatem średnią arytmetyczną obliczymy według wzoru

$$\alpha = \frac{n\alpha_1 + n\alpha_2 + n\alpha_3 + n\alpha_4}{4n} = \frac{[n\alpha]}{4n} \quad 1)$$

Pomiar repetycyjny jednego kąta przedstawić można za pomocą równań

$$\begin{aligned} a) \quad \alpha_1 - \alpha_0 &= A_1 \\ b) \quad \alpha_2 - \alpha_1 &= A_2 \\ c) \quad \alpha_3 - \alpha_2 &= A_3 \\ &\vdots \\ n) \quad \alpha_n - \alpha_{n-1} &= A_n \end{aligned} \quad 2)$$

gdzie $A_1, A_2, \dots, A_n$ przedstawiają pojedyncze wartości mierzonego kąta, obliczone z różnicy odczytów prawego i lewego ramienia. Z zestawienia 2) n spostrzeżeń tego samego kąta obliczymy średnią arytmetyczną

$$A = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n} = \frac{\alpha_n - \alpha_0}{n} \quad 3)$$

t. z. różnica między odczytem ostatnim i pierwszym podzielona przez ilość repetycji n równa się średniej wartości mierzonego kąta.

Przykład repetycyjnego 5-krotnego pomiaru kąta.

Kąt	Powtórzenie Nr	I Położenie lunety		II Położenie lunety		UWAGA
		I Noniusz	II Noniusz	I Noniusz	II Noniusz	
1	2	3	4	5	6	7
(1)I(2)	0	0°00'00"	179°59'50"	180°00'10"	0°00'10"	$n = 5$
	1	120°32'20"				
	2	(241 04 30)				
	3	(1 36 50)				
	4	(122 09 20)				
	5	242°41'40"	62°41'50"	62°41'40"	242°41'30"	
			+180°00'00"	180°00'00"		
	$\alpha_n =$	242°41'40"	242°41'50"	242°41'40"	242°41'30"	
	$\alpha_0 =$	000°00'00"	179°59'50"	180°00'10"	000°00'10"	
	$\alpha_n - \alpha_0 =$	242°41'40"	62°42'00"	62°41'30"	242°41'20"	
	+	360°	540°	540°	360°	
	$n \cdot \alpha$	602°41'40"	602°42'00"	602°41'30"	602°41'20"	

$$\alpha = \frac{[n \alpha]}{4 n} = \frac{2 \ 410^{\circ} \ 46' \ 30''}{20} = 120^{\circ} \ 32' \ 19.5''$$

Objaśnienia. Odczyt $120^{\circ} \ 32' \ 20''$ zapisany w kolumnie 3 pod Nr. 1, służy do kontroli przed błędem grubym, wynik bowiem rachunku powinien być albo równy temu odczytowi, albo mało się z nim różnić; w naszym przykładzie wynik $120^{\circ} \ 32' \ 19.5''$ jest bardzo zbliżony do wspomnianego odczytu. Inne pośrednie odczyty w kolumnie 3 ujęte w nawiasy są niepotrzebne i zwykle się je opuszcza, zapisując tylko odczyt Nr. 0 i ostatni, w danym wypadku Nr. 5. Kolumna 4 wykazuje odczyty II noniusza, różne od kolumny 3 mniej więcej o $180''$, podobnie kolumna 5 daje odczyty o $180''$ różne od kolumny 3, wskutek przerzucenia lunety, a kolumna 6 odpowiada kolumnie 3.

Cheąc obliczyć różnice odczytu n -go i pierwszego, dodamy do ostatnich odczytów w kol. 4 i 5 po $180''$, a następnie obliczymy te różnice $\alpha_n - \alpha_0$, gdzie $n = 5$. Ponieważ, jak wskazuje odczyt Nr. 1, kąt mierzony wynosi około $120''$ a powtarzamy go 5 razy czyli ostatni odczyt powinien wynosić $5 \times 120 = \text{około } 600'' = 360'' + 240''$, z czego wynika, że przy repetycyi 0 noniusza obiegło cały limbus i przeszło przez $360''$, zatem do jednych odczytów dodać należy po $360''$ do innych zaś, różniących się od tamtych, po $360 + 180 = 540''$, tak że w końcu dostajemy n -krotne wartości kątów a stąd obliczymy według równania 1 kąt pojedynczy α jako średnią arytmetyczną $= 120^{\circ} \ 32' \ 19.5''$.

Metody repetycyjnej używamy zwykle do pomiaru jednego kąta.

Do pomiaru więcej naraz kątów czyli kierunków, wychodzących ze wspólnego wierzchołka, używamy zwykle metody pomiaru seryami.

Przypuśćmy, że mamy pomierzyć kierunki 0 (1), 0 (2)... względem kierunku 0 (10) (fig. 160) czyli kąty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Ustawiamy w tym celu instrument w wierzchołku 0, a następnie:

1. Sprzęgamy limbus z alhidadą tak, by zero noniusza wskazywało na kole limbusowem $0^{\circ} \ 00' \ 00''$.

2. Zwalniamy limbus względem spodarki, kierujemy lunetę zgrubsza do punktu (0) t. j. do lewego ramienia, sprzęgamy spodarkę z limbusem, nastawiamy śrubą do ruchu powolnego celową dokładnie na środek sygnału.

3. Zwalniamy alhidadę, kierujemy lunetę zgrubsza do punktu (1) tj. do prawego ramienia, sprzęgamy limbus z alhidadą, ustawiamy celową dokładnie na środek sygnału odpowiednią śrubą, poczem odczytujemy oba noniusze, notując je w protokole.

4. W ten sam sposób celujemy do punktów (2)(3)(4) odczytując zawsze oba noniusze. Ażeby sprawdzić, czy w ciągu pracy limbus się nie poruszył, celujemy w końcu jeszcze raz do punktu początkowego (0) i odczytujemy noniusze. Odczyty na obu noniuszach powinny być zgodne z pierwszymi,

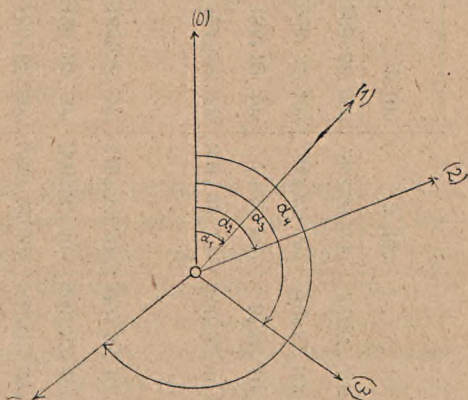


Fig. 160.

co najwyżej z bardzo małą różnicą, powstałą wskutek błędów w celowaniu, w przeciwnym razie pomiar powinno się powtórzyć.

5. Przerzucamy lunetę, zwalniamy alhidadę, celujemy do ostatniego punktu (4), tak samo jak poprzednio, odczytujemy oba noniusze, następnie zwalniamy alhidadę, celujemy do punktu (3) i t. d. aż powrócimy do kierunku 0 (0).

Opisany powyżej pomiar kilku kątów, raz w kierunku od lewej do prawej, drugi raz z powrotem, w kierunku przeciwnym z przerzuconą lunetą, nazywa się seryą. Pierwszą seryę zaczynamy zwykle w ten sposób, że alhidada z limbusem sprzęgnięta wskazuje na pierwszym noniuszu $0^{\circ} 00' 00''$, na drugim 180° , po ukończeniu pierwszej seryi, rozpoczynamy drugą, sprzęgając alhidadę z limbusem na odczyt np. 60° , jeżeli zamierzamy wykonać

6 seryi, lub na 90°, jeżeli pomiar wykonywany w 4 seryach, lub na 100° jeżeli w 3 seryach.

Jak z odczytów zapisanych w protokole oblicza się średnie wartości kątów, lub kąty między pojedynczymi kierunkami, to wykażemy na przykładzie.

1. Pomiar kątów poziomych.

Stanowisko 0 dnia

Cel do punktu	I Położenie lunety		II Położenie lunety		Suma	Średnia	Redukcyja na 0 —	
	Noniusz I	Noniusz II	Noniusz I	Noniusz II				
1	2	3	4	5	6	7	8	
Serya I. Noniusz na 0°.	(1)	54° 22' 20"	234° 22' 10"	234° 22' 30"	54° 22' 10"	1' 10"	54° 22' 17.5"	0° 00' 00"
	(2)	85° 32' 30"	265° 32' 40"	265° 32' 20"	85° 32' 20"	1' 50"	85° 32' 27.5"	31° 10' 10"
	(3)	126° 37' 50"	306° 37' 40"	306° 37' 40"	126° 37' 30"	2' 40"	126° 37' 40"	72° 15' 22.5"
	(4)	162° 58' 20"	342° 58' 30"	342° 58' 10"	162° 58' 20"	1' 20"	162° 58' 20"	108° 36' 02.5"
Serya II. Noniusz na 100°.	(1)	154° 22' 30"	334° 22' 10"	334° 22' 10"	154° 22' 20"	1' 10"	154° 22' 17.5"	0° 00' 00"
	(2)	185° 32' 30"	5° 32' 20"	5° 32' 10"	185° 32' 20"	1' 20"	185° 32' 20"	31° 10' 02.5"
	(3)	226° 37' 40"	46° 37' 50"	46° 37' 30"	226° 37' 50"	2' 50"	226° 37' 42.5"	72° 15' 25.0"
	(4)	262° 58' 30"	82° 58' 20"	82° 58' 40"	262° 58' 30"	2' 00"	262° 58' 30"	108° 36' 12.5"
Sumy	4' 10"	3' 40"	3' 10"	3' 20"	14' 20"	14' 20"	215" × 4	

2. Średnie z obu seryj.

Cel	Serya I.	Serya II.	Suma	Średnia
(1)	0° 00' 00"	0° 00' 00"	00"	0° 00' 00"
(2)	31° 10' 10"	31° 10' 02.5"	12.5"	31° 10' 06.25"
(3)	72° 15' 22.5"	72° 15' 25.0"	47.5"	72° 15' 23.75"
(4)	108° 36' 02.5"	108° 36' 12.5"	15.0"	108° 36' 07.50"
	35"	40"	75	37.50
	75"			

Objaśnienia.

Powyższy przykład podaje pomiar 4 kierunków w dwu seryach. Przy pierwszej seryi alhidada była sprzągnięta z limbusem na 0° 00' 00", przy drugiej na 100° 00' 00". W tem miejscu należy objaśnić, dlaczego przy celu do punktu (0) nie mamy odczytów 0° 00' 00", na I noniuszu, a odpowiednio 180° na drugim, w pierwszej seryi, w drugiej zaś dlaczego nie widzimy odczytów na 100° 00' 00", jeżeliśmy na te odczyty sprzęgli alhidadę? Wytłumaczmy to względami praktycznymi; w praktyce bowiem staramy się, by odczyt 0° 00' 00" odpowiadał kierunkowi południe-północ, dlatego więc ustawiamy pierwszą celową w tym kierunku, lub bardzo do niego zbliżonym, co później ułatwia obliczenie t. z. azymutów (jak to poznamy przy opisie zdjęć polygonalnych). Upatrujemy zatem w kierunku północnym (lub południowym, zależnie od przyjętego systemu) wyraźnie się rysujący i daleki punkt, kierujemy nań pierwszy cel, a potem celujemy do pozostałych punktów (1) (2). Z tego powodu mamy w pierwszej seryi odczyt na (1) 54° a w drugiej 154°, bo odczyty 0° i 100° odpowiadają kierunkowi linii południe-północ.

Kolumn 1, 2, 3, 4, 5 objaśniać już nie potrzebujemy.

W kolumnie 6 obliczamy sumy sekund, jeżeli minuty się zgadzają, w przeciwnym razie także minut i sekund, z kolumn 2 do 5.

W kolumnie 7 obliczamy i opisujemy średnią arytmetyczną z kolumn 2 do 5 w ten sposób, że stopnie i minuty (a jeżeli minuty się nie zgadzają, to stopnie tylko) przyjmujemy z kolumny 2 a sekundy dodajemy, dzieląc przez 4 sumę ich, podaną w kol. 6. Kontrola: sumy sekund (względnie minut i sekund) z kolumn 2—5 dodane razem, powinny się zgodzić ze sumą ich z kolumny 6, jak również taka sama suma utworzona z kolumny 7, pomnożona przez 4, powinna się z poprzedzającymi zgodzić.

Kolumna 8. W celu obliczenia kątów zawartych między kierunkiem pierwszym t. j. do (1) a każdym innym, redukujemy kąty, odejmując od wszystkich kątów w kolumnie 7 (seryi I) pierwszy kąt $54^{\circ} 22' 17.5''$ a w seryi II odejmujemy pierwszy $154^{\circ} 22' 17.5''$. Wtedy każdy kąt w kolumnie 8 wyraża kąt zawarty między kierunkiem 0 (1) a odpowiednim mu numerem, np. w seryi I kąt $72^{\circ} 15' 22.5''$ zawarty jest między ramionami 0 (1) i 0 (3).

Mając obliczoną redukcję na 0, obliczymy średnie wartości odpowiadających sobie kierunków ze wszystkich seryi, co wykonaliśmy w zestawionej tabliczce 2. Obliczenie średnich wartości jest zrozumiałe z przykładu, jak i kontrola za pomocą sum, tam uwidocznioma.

Przy pomiarze kątów trzymać się należy raz przyjętego porządku, więc za pierwsze położenie lunety uważa się takie, w którym koło pionowe znajduje się po lewej stronie, a wtedy noniusz I jest po lewej, II po prawej. Drugie położenie lunety, koło pionowe z prawej, noniusz I z prawej, noniusz II z lewej. Odczytywać zawsze najpierw noniusz I, potem II. Celuje się zawsze w I położeniu lunety najpierw do ramienia lewego, potem do prawego, wogóle porządek celowania postępuje w kierunku ruchu wskazówek na zegarze, zaś w położeniu II lunety kierunek jest przeciwny. Uważać należy bardzo na to, by podczas odczytu alhidada była sprzężona z limbusem, a po ostatnim odczycie skontrolować jeszcze odczyt pierwszy w celu przekonania się, czy limbus nie został poruszony podczas pomiaru. Zaraz na miejscu kontroluje się odczyty noniuszów czy różnią się o 180° (z bar-

dzo małą odchyłką w sekundach), ażeby uniknąć błędów grubszych. Kontrola ta odnosi się do stopni, bo minuty i sekundy dadzą się na pierwszy rzut oka sprawdzić.

Przez zastosowanie metody repetycyjnej lub metody seryami, mierzymy kąty nietylko na pewnej części koła limbusowego, lecz na całym kole, a ponieważ różnice pomiarów powstają głównie wskutek błędnego podziału na limbusie, więc jeżeli z kilkakrotnego pomiaru obliczymy średnią, to tem samem wpływ złego podziału limbusu zmniejszamy do minimum.

W ten sam sposób, w jaki mierzyliśmy kilka kątów razem seryami, możemy mierzyć także i jeden kąt.

§ 49. Wyrównanie pomiaru kątów w trójkącie.

Jeżeli wszystkie 3 kąty w płaskim trójkącie były pomierzone z tą samą dokładnością, tudzież, gdy wszystkim tym spostrzeżeniom nadać możemy tę samą wagę, co ma miejsce wtedy, gdy wierzchołki trójkąta są dokładnie widoczne a boki mniej więcej równe (równe długości celowych), to wyrównanie spostrzeżeń jest bardzo łatwe. Wiemy bowiem, że suma kątów w trójkącie $= 180^\circ$.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad 1)$$

Jeżeli pomiar nie odpowiada powyższemu warunkowi, to błąd obliczymy na podstawie równania

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = \pm w \quad 2)$$

i rozdzielimy go w równych częściach na wszystkie kąty a mianowicie: jeżeli w ma znak dodatni, to z równania 2 widocznem jest, że wtedy $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ czyli poprawka dla każdego kąta wynosić powinna $-\frac{w}{3}$; jeżeli zaś błąd $= -w$, to $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$ i poprawka wynosić będzie $+\frac{w}{3}$. Wogóle, rozdzielamy błąd w na 3 równe części ze znakiem przeciwnym.

Błąd pomiaru kąta nie zależy od jego wielkości; łatwo bowiem zrozumiemy, że czy to będzie kąt 15° czy 100° , to, ponieważ pomiar odbywa się na kole limbusowym, więc z jednakową dokładnością go odczytamy, a wielkość kąta wpływu na to mieć nie może. Natomiast wielki wpływ mieć może błąd w ustawieniu celowej na środek sygnału.

Wyobraźmy sobie n. p., że sygnał (tyczka lub słup) o średnicy 20 cm., ustawiony jest w odległości 100 m. od lunety. Nastawiając wtedy środek siatki na środek sygnału, możemy łatwo popełnić błąd w ocenieniu dokładności położenia celowej, gdyż z obu stron nitki zostaną jeszcze szerokie pasy obrazu sygnału, więc nie łatwo jest ocenić, czy nitka pionowa dzieli je na równe szerokości. Jeżeli ten sam sygnał znajduje się np. w odległości 2000 m., to nitka pionowa siatki zasłania go w znacznej części, zostawiając z obu stron wąskie paski tak, że teraz znacznie jest łatwiej zorientować celową, a najmniejsze zboczenie uwydatnia się znacznym przesunięciem nitki na sygnale, podczas gdy ten sam kąt zboczenia może przejść niepostrzeżenie przy krótkiej celowej. Tak samo łatwiej jest zorientować dobrze celową na sygnał wyraźnie widoczny, niż na mniej wyraźny. Przypuszczając, że wszystkie kąty w trójkącie mierzymy w jednakowych warunkach, a ponieważ wielkość błędu nie zależy od wielkości kąta, więc wszystkim im przypisać możemy ten sam błąd $\pm m$ czyli

$$\pm m \pm m \pm m = \pm w \quad . \quad . \quad 3)$$

Na podstawie zaś teorii błędów § 16—18 otrzymamy

$$m^2 + m^2 + m^2 = w^2 \quad \text{czyli } 3 m^2 = w^2 \quad 4)$$

$$\text{a stąd} \quad m = \pm \frac{w}{\sqrt{3}} \quad . \quad . \quad 5)$$

gdzie m oznacza średni błąd pojedynczego spostrzeżenia, t. z. że otrzymane z pomiaru kąty $\alpha \beta \gamma$ mają przed wyrównaniem błędy $\pm \frac{w}{\sqrt{3}}$, lub, biorąc je w rachunek wprost z pomiaru, możemy się spodziewać, że wartości ich są o ilość

$\pm \frac{w}{\sqrt{3}}$ niepewne. W celu obliczenia prawdopodobnego błędu

już wyrównanej wielkości kąta, przypuśćmy, że mamy dwa spostrzeżenia tego samego kąta niezależne od siebie, a mianowicie pierwsze spostrzeżenie bezpośrednie $x_1 = \alpha$ 6)

i drugie pośrednie za pomocą pomiaru dwóch innych kątów trójkąta $x_2 = 180 - (\beta + \gamma)$ 7)

Przyjmijmy, że waga pierwszego spostrzeżenia $p_1 = 1$ 8) a obliczmy wagę drugiego p_2 .

Jak już wiemy, wszystkie kąty w trójkącie mają ten sam błąd $\pm m$. Jeżeli więc drugie spostrzeżenie x_2 zawiera 2 kąty, to tem samem zawiera w sobie błąd

$$m_2 = \pm m \pm m = \pm m \sqrt{2} \quad . \quad 9)$$

podeczas gdy błąd dla x_1 wynosi $m_1 = \pm m$. . . 10)

Stąd otrzymamy $m_1 : m_2 = 1 : \sqrt{2}$ czyli

$$m_2 = m_1 \sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

a ponieważ wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów, przeto

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

wstawiwszy teraz wartości za $p_1 = 1$ z równ. 8, zaś za m_1 i m_2 z równań 10 i 11, napiszemy

$$1 : p_2 = \frac{1}{m^2} : \frac{1}{2m^2} \quad \text{a stąd} \quad p_2 = \frac{1}{2} \quad . \quad 13)$$

Średni błąd prawdopodobnej wartości obliczymy z wzoru

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{[p]}} \quad \text{według § 21,}$$

gdzie wstawimy $m = \pm \frac{w}{\sqrt{3}}$ $p_1 = 1$ $p_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{więc } M &= \frac{\pm \frac{w}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}} = \pm \frac{\frac{w}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \quad \text{czyli} \\ M &= \pm \frac{w}{3} \sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14) \end{aligned}$$

jako średni błąd kąta, wyrównanego według wzoru 2).

Według austriackiej instrukcyi trygonometryczno-polygonalnej, różnica między sumą pomierzonych kątów w trójkącie a 180° nie powinna przekraczać wartości $2' 10''$ t. j.

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ \leq 130'' \quad . \quad . \quad 15)$$

§ 50. Błędy pomiaru metodą repetycyjną i seryami.

Na błędy pomiaru składają się: a) błąd w ustawieniu celowej α i b) błąd odczytu noniuszów β . Ponieważ mamy tu dwie celowe t. j. do lewego i prawego ramienia, a przy każdej celowej odczytujemy oba noniusze i obliczamy średnią z nich, więc każdy z powyższych błędów popełniamy dwa razy, a zatem średni błąd kąta będzie

$$M_1 = \pm \sqrt{2 (\alpha^2 + \beta^2)} \quad . \quad . \quad 1)$$

Nie poprzestajemy jednak na jednym pomiarze kąta, lecz mierzymy go albo powtarzając pomiar n razy (metoda repetycyjna), przyczem mamy $2n$ celowych a tylko 2 odczyty, początkowy i końcowy, z których obliczamy w znany sposób pojedynczą wartość kąta, albo też mierzymy go seryami, sprzęgając limbus na 0° , potem na 45° lub 90° i t. p., mierząc kąt w każdej seryi niezależnie.

W pierwszym wypadku (metodą repetycyjną) błąd całego pomiaru, jako jedno spostrzeżenie uważanego, wynosi

$$M' = \pm \sqrt{2n\alpha^2 + 2\beta^2} \quad . \quad . \quad 2)$$

A ponieważ różnicę obu odczytów dzielimy przez ilość spostrzeżeń n , ażeby otrzymać pojedynczą wartość kąta, więc przytem dzielimy przez n i błąd M' , zatem średni błąd pojedynczego kąta wynosi

$$M_{rep} = \frac{M'}{n} = \pm \sqrt{\frac{2n\alpha^2 + 2\beta^2}{n^2}} = \pm \sqrt{\frac{2}{n} \left(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n} \right)} \quad 3)$$

W drugim wypadku średni błąd pomiaru jednego kąta wynosi według równ. 1, M_1 , a mając takich n spostrzeżeń niezależnych, obliczymy średni błąd średniej arytmetycznej na podstawie teoryi błędów, według wzoru

$$M_{ser} = \pm \frac{M_1}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{2}{n}(\alpha^2 + \beta^2)} \quad 4)$$

Porównawszy wzory 3 i 4 widzimy, że błąd pomiaru metodą repetycyjną jest mniejszy, niż pomiar seryami, a ponieważ prócz tego, przy pomiarze repetycyjnym wystarczają dwa odczyty a średnie się opuszcza, więc jest on nie tylko dokładniejszy, lecz nadto także łatwiejszy i zabiera mniej czasu.

Jako średnie wartości możemy na podstawie doświadczeń przyjąć $\alpha = 1''$ t. j. błąd w celowej,

$\beta = 5''$ t. j. błąd odczytu,

a wstawivszy je w równ. 3 i 4, otrzymamy następujące zestawienie błędów możliwych:

Ilość pomiarów n	$M_{ser.} = \pm \sqrt{\frac{52}{n}}$	$M_{rep.} = \pm \sqrt{\frac{2}{n}(1 + \frac{25}{n})}$	5)
1	$M_s = \pm 7.2''$	$M_r = \pm 7.3''$	
5	$= \pm 3.2''$	$= \pm 1.5''$	
10	$= \pm 2.3''$	$= \pm 0.8''$	

z czego widzimy, że pomiar metodą repetycyjną jest korzystniejszy dla dokładności pomiarów od metody seryami, a nadaje się szczególnie wtedy, gdy mamy teodolit o większej różnicy nontuszowej.

§ 51. Obliczenie współrzędnych punktu na płaszczyźnie.

Przyjmijmy w dowolnym punkcie 0 na płaszczyźnie (fig. 161 a) prostokątny układ współrzędnych w ten sposób, że oś x leży w kierunku południka, prostopadła do niej oś y w kierunku równoleżnika i oznaczmy jedną połowę osi x , biegnącą na północ znakiem $+$, drugą połowę idącą na po-

łudnie znakiem $-$, podobnie połowę osi y na wschód oznaczmy znakiem $+$, a przeciwną znakiem $-$. Położenie punktu P na tej płaszczyźnie można ściśle oznaczyć albo za pomocą kąta „ α ” mierzonego między kierunkiem $+x$ a kierunkiem OP , czyli t. zw. kąta kierunkowego lub azymutu i długości odcinka OP , lub też za pomocą współrzędnych x i y . Według przyjętego zwyczaju oznacza się kąt kierunkowy $XOP = \alpha$ przez (OP) lub, przyjąwszy, że $OP = a$, to azymut kierunku $OP = (OP) = (a)$. Azymut mierzy się zawsze od osi $+x$ do danego kierunku, czyli od lewej ku

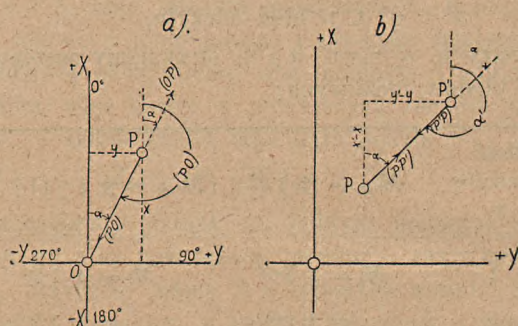


Fig. 161 a i b.

prawej. Zatem według oznaczeń na fig. 161 a napiszemy:

azymut kierunku $OP = (OP) = \alpha$ zaś

azymut kierunku $PQ = (PO) = \alpha_1$

Przyjęto też sposób oznaczania kierunków za pomocą strzałek. N. p. kierunek (OP) oznaczony jest strzałką w górę zwróconą, zatem oznaczającą ruch od O do P , a kierunek (PO) strzałką w przeciwną stronę zwróconą, oznaczającą ruch od P do O .

Na podstawie przyjętego układu współrzędnych i sposobu oznaczania azymutów czyli kierunków, otrzymamy kilka wzorów, mających ciągle zastosowanie w praktyce.

Niech będą dane 2 punkty za pomocą współrzędnych, mianowicie według fig. 161 b

$$\left. \begin{array}{l} \text{punkt } P(x, y) \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{i } P'(x', y') \end{array} \right\} \dots \dots \dots 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{tudzież azymut } (PP') = \alpha \\ \text{ i } \quad \quad \quad (P'P) = \alpha' \end{array} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 2)$$

Z rysunku łatwo można wywnioskować, że chcąc z kierunku (PP') (oznaczonego strzałką), przejść do kierunku przeciwnego $(P'P)$, trzeba dodać do niego $\pm 180^\circ$ t. z. zwrócić się w prawo lub w lewo o całe 180° , zatem

$$(P'P) = (PP') \pm 180^\circ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 3)$$

Obróciwszy zaś linię PP' około punktu P o 360° w prawo, przekonamy się, że znajdzie się ona w tem samym co poprzednio położeniu i kierunek jej się nie zmieni, tak samo wskutek obrotu o 360° w lewo, czyli że

$$\alpha = (PP') \pm 360^\circ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 4)$$

Z równania 3 wynika reguła:

Chcąc zmienić dany kierunek na wprost przeciwny, dodać do niego należy $\pm 180^\circ$, a z równania 4 wynika, że przez dodanie $\pm 360^\circ$ kierunek się nie zmienia. Możemy więc na tej podstawie napisać równanie

$$+ 180^\circ = - 180^\circ \text{ i } \pm 360^\circ = 0 \quad 5)$$

ślusne geodezyjnie, chociaż niesłuszne algebraicznie. Za pomocą równania 5 uniknąć możemy w rachunku kątów ujemnych n. p. $60^\circ = - 60^\circ + 360^\circ = 300^\circ$, to samo odnosi się do wszystkich wielokrotności z 360° ,

$$\text{więc } \pm n \cdot 360 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 5a)$$

Nazwijmy długość odcinka PP' (fig. 161 b) = s , to na podstawie rysunku napisać możemy:

$$\left. \begin{array}{l} y' - y = s \cdot \sin \alpha \\ x' - x = s \cdot \cos \alpha \end{array} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 6)$$

$$\text{lub } \left. \begin{array}{l} y' - y = PP' \sin (PP') \\ x' - x = PP' \cos (PP') \end{array} \right\} \quad 6a)$$

równ. 6 ma znaczenie dla jakiegokolwiek znaku różnic $y' - y$ i $x' - x$, przyczem s uważamy zawsze jako dodatnie, zaś $\sin$ i $\cos$ otrzymują znaki zależnie od położenia ich w różnych ćwiartkach.

ćwiartka	I	II	III	IV	7)	Z równania 6 przez odwrócenie kierunków otrzymamy	7)
$\sin$	+	+	-	-			
$\cos$	+	-	-	+			
tg i $cotg$	+	-	+	-			

$$\left. \begin{aligned} y - y' &= s \cdot \sin \alpha' \\ x - x' &= s \cdot \cos \alpha' \end{aligned} \right\} 7)$$

Następnie z równania 6 obliczymy

$$tg \alpha = \frac{y' - y}{x' - x} \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

$$s = \frac{y' - y}{\sin \alpha} \quad s = \frac{x' - x}{\cos \alpha} \quad s = \sqrt{(y' - y)^2 + (x' - x)^2} \quad 9)$$

Ponieważ s uważamy zawsze jako dodatnie, więc znaki licznika i mianownika w równ. 9 muszą być zgodne, czyli funkcyom $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ nadamy te same znaki, jakie wypadają z odpowiednich liczników. Mając znaki *sinusu* i *cosinusu*, określimy położenie kąta. To samo dostaniemy z równania 8, uwzględniając osobno znak licznika a osobno mianownika. Zależnie od tego kąt leżeć będzie w jednej z ćwiartek, jak wskazuje następujące zestawienie

$tg \alpha = \frac{y' - y}{x' - x}$	I	II	III	IV	ćwiartka
	+	+	-	-	
	+	-	-	+	

Mając dane $tg \alpha$ i ćwiartkę, w której kąt leży, obliczymy kąt za pomocą tablic logarytmicznych w ten sposób, że dla ćwiartki I i III szukamy go w tablicach w kolumnie $\log tg \alpha$ i do otrzymanego kąta ostrego dodamy 180° dla ćwiartki III. Jeżeli kąt znajduje się w ćwiartce II lub IV, to do kąta ostrego, wyszukanego z kolumny $\log cotg \alpha$ (dla danego $\log tg \alpha$), dodamy odpowiednio 90° (II ćw.), lub 270° (IV ćw.).

§ 52. Obliczenie azymutów i współrzędnych trójkąta.

Niech będą dane 3 punkta za pomocą współrzędnych (fig. 162 a-b) t. j. punkt A współrzędnych $y_a - x_a$

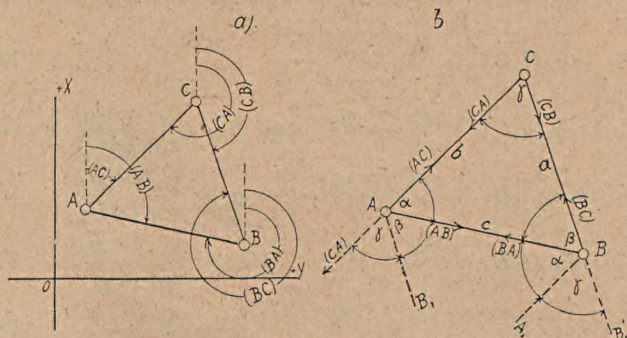
" B " $y_b - x_b$

" C " $y_c - x_c$

tudzież kąty α β γ w trójkącie ABC , a nadto azymut jednego z kierunków, n. p. $(AC) = \varphi$ 1)

Celem lepszego przedstawienia azymutów, naznaczyliśmy odpowiednie kierunki łukami i strzałkami na fig. 162 *a*, zaś na fig. 162 *b* tylko strzałkami i literami.

Na podstawie rysunku fig. 162 *b* i § 51 ustawimy następujące równania, mając powyższe dane.

Fig. 162 *a* i *b*.

$$(AC) = \varphi \quad 1)$$

$$(CA) = \varphi \pm 180^\circ = (AC) \pm 180^\circ \quad (\S 51) \quad 2)$$

$$(AB) = \varphi + \alpha = (AC) + \alpha \quad (\text{fig.}) \quad . . . 3)$$

$$(BA) = (AB) \pm 180^\circ = (AC) + \alpha \pm 180^\circ \quad (\S 51) \quad 4)$$

$$\text{lub } (BA) = (CA) + \alpha = (AC) + \alpha \pm 180^\circ \quad (\text{fig. 162 } b) \quad 5)$$

Równanie 5 objaśnimy w sposób następujący: wykreślamy z punktu B linię $BA_1 \parallel CA$, więc $(BA_1) = (CA)$. Dodajmy $+\alpha$ t. j. $(BA_1) + \alpha$ to otrzymamy kierunek (BA) czyli $(BA_1) + \alpha = (BA) = (CA) + \alpha$.

$$(BC) = (BA) + \beta = (CA) + \alpha + \beta = (AC) + \alpha + \beta \pm 180^\circ \quad 6)$$

$$(CB) = (BC) \pm 180^\circ = (BA) + \beta \pm 180^\circ \quad 7)$$

$$\text{lub } (CB) = (AB_1) = (AB) + \beta = (AC) + \alpha + \beta = (CA) - \gamma \quad 8)$$

Wogóle, za pomocą fig. 162 *b* jesteśmy w stanie bardzo łatwo obliczyć azymut dowolnego kierunku w trójkącie, mając dany azymut jednego boku i kąty. Odwrotnie, mając dane azymuty, obliczymy kąty, n. p.

$$\text{z równania 3) } \alpha = (AB) - (AC) \quad . \quad 9)$$

$$\text{" } 6) \beta = (BC) - (BA) \quad . \quad 10)$$

$$\text{" } 8) \gamma = (CA) - (AC) \quad . \quad 11)$$

Na podstawie rysunku obliczymy następnie:

$$\operatorname{tg} (AC) = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

$$\operatorname{tg} (AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

$$\operatorname{tg} (CB) = \frac{y_b - y_c}{x_b - x_c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

$$\sin (AC) = \frac{y_c - y_a}{b} \quad \text{stad } b = \frac{y_c - y_a}{\sin (AC)} \quad 15)$$

$$\sin (AB) = \frac{y_b - y_a}{c} \quad c = \frac{y_b - y_a}{\sin (AB)} \quad 16)$$

$$\sin (CB) = \frac{y_b - y_c}{a} \quad a = \frac{y_b - y_c}{\sin (CB)} \quad 17)$$

$$\cos (AC) = \frac{x_c - x_a}{b} \quad b = \frac{x_c - x_a}{\cos (AC)} \quad 18)$$

$$\cos (AB) = \frac{x_b - x_a}{c} \quad c = \frac{x_b - x_a}{\cos (AB)} \quad 19)$$

$$\cos (CB) = \frac{x_b - x_c}{a} \quad a = \frac{x_b - x_c}{\cos (CB)} \quad 20)$$

1. Przykład. Dane: (fig. 163 a).

$$a = 825.50 \text{ m} \quad \alpha = 50^{\circ} 30' \quad (AB) = \underline{\underline{22^{\circ} 40' = (b)}}$$

$$b = 947.50 \text{ m} \quad \beta = 62^{\circ} 20'$$

$$c = 985.98 \text{ m} \quad \gamma = \overset{67^{\circ}}{\cancel{46}^{\circ}} 10' \quad y_a = 120 \text{ m}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ} 00' \quad x_a = 86.30 \text{ m}$$

obliczyć azymuty dwóch innych boków t. j. (a) i (c) i współrzędne punktów B i C.

Rozwiązanie.

$$(AC) = (c) = (AB) + \alpha = 22^{\circ} 40' + 50^{\circ} 30' = \underline{\underline{73^{\circ} 10' \quad 1)}$$

$$(BC) = (a) = (AB) + \alpha + \beta = (AC) + \beta = 73^{\circ} 10' + 62^{\circ} 20' = \underline{\underline{135^{\circ} 30' \quad 2)}$$

$$\sin (AB) = \frac{y_b - y_a}{b} = \frac{y_b - 120}{947.50}$$

$$\text{stad } y_b = 947.50 \times \sin 22^{\circ} 40' + 120 \quad 3)$$

$$\cos (AB) = \cos 22^{\circ} 40' = \frac{x_b - x_a}{947.50}$$

$$\text{stad } x_b = 947.50 \times \cos 22^{\circ} 40' + 86.30 \quad 4)$$

$\log 947.50$	2.97658
$\log \sin 22^{\circ} 40'$	9.58588-10
$\log \cos 22^{\circ} 40'$	9.96509-10
$\log (947.54 \sin (AB))$	2.56246
$\log (947.5 \cos (AB))$	2.94167

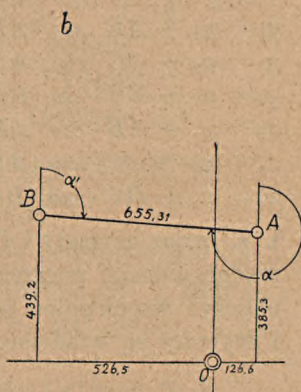
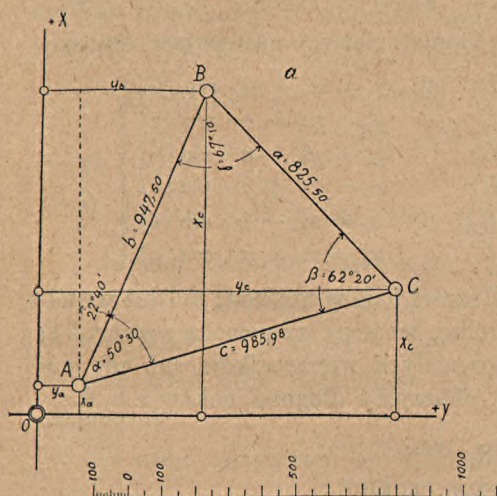


Fig. 163 a i b.

$$N \log 947 \sin (AB) = 365.14$$

$$N \log 947 \cos (AB) = 874.32 \text{ a następnie z równ. 3 i 4.}$$

$$\left. \begin{aligned} y_b &= 365.14 + 120 = 485.14^m \\ x_b &= 874.32 + 86.30 = 960.62^m \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

$$\sin (AC) = \frac{y_c - y_a}{c} = \frac{y_c - 120}{985.98}$$

$$y_c = 985.98 \times \sin 73^{\circ} 50' + 120 \quad 6)$$

$$\cos (AC) = \frac{x_c - x_a}{c} = \frac{x_c - 86.30}{985.98}$$

$$x_c = 985.98 \times \cos 73^{\circ} 10' + 86.30 \quad 7)$$

$$\begin{array}{r|l}
 \log 985.98 = & 2.99387 \\
 \log \sin 73^{\circ} 10' = & 9.98098 - 10 \\
 \hline
 \log \cos 73^{\circ} 10' = & 9.46178 - 10 \\
 \log 985.98 + \log \sin 73^{\circ} 10' = & 2.97485 \\
 \log (985.98 \cdot \cos 73^{\circ} 10') = & 2.45565
 \end{array}$$

$$N \log 2.97485 = 943.74$$

$$N \log 2.45565 = 285.53$$

a z równań 6 i 7

$$y_c = 943.74 + 120 = 1063.74 \quad . \quad . \quad 8)$$

$$x_c = 285.53 + 86.30 = 371.83 \quad . \quad . \quad 9)$$

Z przykładu tego wyciągnąć możemy następujące wnioski

$$\left. \begin{array}{ll}
 y_b = y_a + AB \sin (AB) & \text{lub} \quad y_b = y_a + b \cdot \sin (b) \\
 y_c = y_a + AC \sin (AC) & y_c = y_a + c \cdot \sin (c) \\
 y_c = y_b + BC \sin (BC) & y_c = y_b + a \cdot \sin (a) \\
 x_b = x_a + AB \cos (AB) & x_b = x_a + b \cdot \cos (b) \\
 x_c = x_a + AC \cos (AC) & x_c = x_a + c \cdot \cos (c) \\
 x_c = x_b + BC \cos (BC) & x_c = x_b + a \cdot \cos (a)
 \end{array} \right\} 21)$$

t. z. mając azymuty i długości boków trójkąta, tudzież współrzędne jednego wierzchołka, możemy za pomocą wzorów 21) obliczyć współrzędne pozostałych wierzchołków, lub gdy x y i azymuty są wiadome, obliczymy długości boków i t. d.

2. Przykład (fig. 163 b).

Dane są współrzędne punktów:

$$A \quad \begin{array}{l} y_a = 126.6 \, m \\ x_a = .385.3 \end{array}$$

$$B \quad \begin{array}{l} y_b = -526.5 \, m \\ x_b = 439.2 \end{array}$$

Obliczyć odległość AB obu punktów i azymut (AB).

Rozwiązanie:

$$AB^2 = (y_b - y_a)^2 + (x_b - x_a)^2 = (-653.1)^2 + (53.9)^2 = 653.1^2 + 53.9^2$$

$$2 \log 653.1 = 5.62996 \quad N \cdot \log 5.62996 = 426540.00$$

$$2 \log 53.9 = 3.46318 \quad N \cdot \log 3.46318 = 2905.20$$

$$\frac{1}{2} \log 429445.2 = 2.81645 \quad AB^2 = 429445.20$$

$$AB = N \cdot \log 2.81645 = 655.314 \, m$$

Azymut obliczymy na podstawie wzorów 21).

$$y_b = y_a + AB \cdot \sin (AB) \quad x_b = x_a + AB \cos (AB)$$

$$\text{a stąd} \quad \sin (AB) = \frac{y_b - y_a}{AB} \quad \cos (AB) = \frac{x_b - x_a}{AB}$$

$$\text{czyli} \quad \lg (AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{-663.1}{+53.9} \quad \text{znaki licznika}$$

i mianownika wskazują, że kąt leży w ćwiartce IV, znajdziemy więc $\lg \lg (AB) = \lg \left(\frac{653.1}{53.9} \right)$ — a odpowiadający mu kąt wyszukamy w tablicach logarytmicznych, ale w kolumnie dla $\cotg \alpha$, następnie dodamy do niego 270° .

$$\lg \lg (AB) = \left| \begin{array}{r} \lg 653.1 \\ - \lg 53.8 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{r} 2.81498 \\ 1.73159 \text{ n} \end{array} \right| = 11.08339 - 10$$

$$N \cdot \lg \cotg = 4^\circ 43' 04'' \quad \text{stąd} \quad (AB) = 274^\circ 43' 04''$$

Azymut kierunku przeciwnego $(BA) =$

$274^\circ 43' 04'' - 180^\circ = 94^\circ 43' 04''$ — na podstawie § 51 —
lub też $(BA) = 274^\circ 43' 04'' + 180^\circ = 454^\circ 43' 04'' \pm 360^\circ$ —
odjawszy więc 360° dostaniemy $(BA) = 94^\circ 43' 04''$ (§ 51
równanie 5).

To samo otrzymamy też rachunkiem.

$$\lg (BA) = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} = \frac{126.6 + 526.5}{385.3 - 439.2} = \frac{+653.1}{-53.9}$$

znaki dowodzą, że kierunek (BA) znajduje się w ćwiartce II
a więc obliczywszy zupełnie tak samo jak poprzednio kąt
 $\alpha = 4^\circ 43' 04''$ dodamy 90° i otrzymamy $(BA) = 94^\circ 43' 04''$.

Obliczanie za pomocą 5 cyfrowych logarytmów jest
zupełnie wystarczającym, ale istnieją też tablice do oblicza-
nia współrzędnych n. p. Defert: *Tafeln zur Berechnung*
rechtwinkliger Coordinaten, 1874. Przy obliczaniu iloczynów
i ilorazów, największe usługi oddają maszyny do rachowa-
nia, wymagają znacznie mniej czasu i uwagi niż logarytmy,
a omyłki prawie są niemożliwe.

§ 53. Tryangulacja

czyli zdjęcie danego obszaru za pomocą sieci trójkątów.

Przypuśćmy, że na danym obszarze (fig. 164) wyznaczyliśmy sieć punktów (1) (2) (3) Połączmy te w trójkąty I II III IV Zmierzmy w każdym trójkącie wszystkie 3 kąty, wyrównajmy pomiar kątów i zmierzmy bok a_1 trójkąta I, czyli t. z. podstawę (*basis*) tryangulacyjną, to za

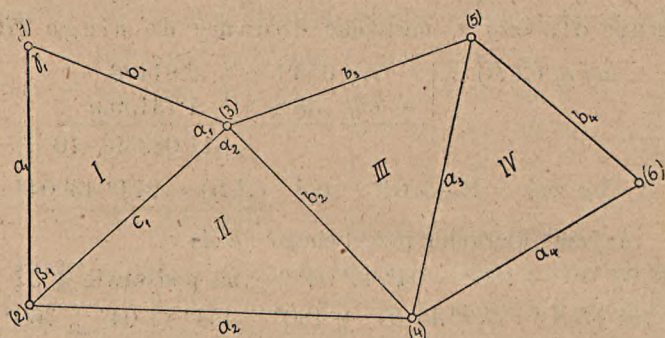


Fig. 164.

pomocą reguły wstaw, obliczyć możemy 2 pozostałe boki trójkąta I, mianowicie:

$$b_1 = \frac{a_1}{\sin \alpha_1} \cdot \sin \beta_1 \quad c_1 = \frac{a_1}{\sin \alpha_1} \cdot \sin \gamma_1 \quad 1)$$

Obliczony bok c_1 należy też do trójkąta II, a ponieważ pomierzyliśmy wszystkie jego kąty $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ więc powtórzmy poprzednie zadanie, t. j. obliczymy

$$a_2 = \frac{c_1}{\sin \gamma_2} \cdot \sin \alpha_2 \quad 2)$$

Podobnie obliczymy bok b_2 , następnie trójkąt III i t. d.

Mając dane boki i kąty trójkąta, tudzież azymut jednego jego boku (względem osi x), obliczyć możemy na podstawie § 52 azymuty innych boków i współrzędne wierzchołków, dalej azymuty i rzędne trójkątów sąsiednich i t. d. Za pomocą zaś współrzędnych, przeniesiemy całą sieć na rysunek.

Tryangulacya dzieli się na 4 klasy, zależnie od jej celu i długości boków, a mianowicie:

Tryangulacya I rzędu o długościach boków 20—50 *km* używana do pomiaru krajów; tutaj uwzględnić już trzeba kształt ziemi przy pomiarze kątów.

Tryangulacya II rzędu, o bokach 10 do 20 *km*.

Oba powyższe rodzaje nazywamy tryangulacją główną.

Tryangulacya III rzędu o bokach 3 do 10 *km* i IV rzędu o bokach do 2 *km* długości; te znów służą do zdjęć mniejszych obszarów, przyczem kształtu ziemi się nie uwzględnia.

Wyobraźmy sobie wielki obszar, n. p. kraj, pokryty siecią trójkątów I rzędu. Wierzchołki tych trójkątów, czyli t. z. punkty tryangulacyjne utrwalone są na terenie za pomocą kamieni wmurowanych w ziemię, na trwałych fundamentach i oznaczonych na nich punktach. Na podstawie bardzo dokładnych pomiarów kątów, oblicza się długości boków, następnie współrzędne wierzchołków czyli t. z. punktów tryangulacyjnych. Ostateczne, wyrównane wyniki pomiarów i obliczeń przyjmujemy jako stałe i niezmiennie, i służą one za podstawę i kontrolę dalszych zdjęć.

Przyjmijmy wewnątrz trójkąta I rzędu kilka punktów nowych czyli podzielimy go na kilka trójkątów mniejszych II rzędu, nawiązując je do ustalonych już punktów I rzędu. Natenczas na podstawie pomiarów tej nowej sieci, obliczymy współrzędne nowych wierzchołków, między którymi będą także i punkta I rzędu. Naturalnie wyniki powinny być zgodne; jednak wskutek nienuknionych błędów, okażą się pewne różnice, czyli pomiar trójkątów II rzędu trzeba wyrównać, do czego jako kontrola służą daty uzyskane z I rzędnej tryangulacji.

Punkta tryangulacyjne II rzędu, służą za podstawę do dalszych zdjęć, a więc do tryangulacji III i IV rzędu, te zaś znów jako podstawa do zdjęć szczegółowych polygonowych.

Na powyższym, pobieżnym opisie urządzenia i celu tryangulacji poprzestajemy, nie wdając się w opis szczegółów i różnych metod służących do pomiarów punktów po-

średnich, w praktyce bowiem, przy zdjęciach zwyczajnych, celem studyowania trasy kolei lub innej drogi, mieć możemy do czynienia co najwyżej z t. z. małą tryangulacją IV rzędu, o długościach boków około 1000 m, w terenie górskim, gdzie punktami tryangulacyjnymi są stanowiska tachymetryczne. Przy takich zdjęciach, tryangulacja i równoczesny trygonometryczny pomiar wysokości jest nadzwyczaj wygodna, oszczędza bowiem $\frac{3}{4}$ czasu jakibyśmy stracić musieli przy zwyczajnym pomiarze długości i niwelacji stanowisk, a z drugiej strony nie wymaga się nadzwyczajnej dokładności. Celem kontroli pomiarów i obliczeń należy od czasu do czasu zmierzyć któryś z boków i porównać z obliczeniem. Obliczenie współrzędnych nie przedstawia trudności a jest bardzo przydatnem do przenoszenia zdjęć na plan.

Do oznaczenia punktów na terenie używa się zwykle pali 1.0 m. długich, 10—12 cm średnicy, wkopanych w ziemię i opatrzonych u dołu dwoma poprzeczkami na krzyż, celem ubezpieczenia ich przed wyciągnięciem. Głowa gwoźdza białego w wierzach pala, oznacza dostatecznie ściśle punkt.

§ 54. Zdjęcia polygonowe.

Szereg punktów (1) (2) (3) ... (n) połączony prostemi, tworzy t. z. polygon czyli wielobok (fig. 165) i to otwarty, gdy kończy się na n-tym punkcie bez żadnego zamknięcia, lub zamknięty, gdy końcowy punkt schodzi się z początkowym, albo oba punkty końcowe są jakimiś punktami stałymi, n. p. tryangulacyjnymi.

1. Polygon otwarty.

Polygon składający się z n boków ma $(n + 1)$ punktów czyli wierzchołków i $(n - 1)$ kątów. Kąty mierzy się zawsze po lewej stronie wieloboku, t. j. idąc od (0) do (n), kąty $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ (fig. 165), idąc zaś od (n) do zera, mierzy się kąty przeciwne, ale zawsze leżące z lewej strony przyjętego kierunku.

Mając dane kąty $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n$, długości boków $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$ i azymut pierwszego kierunku $(0-1) = a$ (fig. 165), obliczymy azymuty innych boków w sposób następujący.

Z trójkąta $(0) A (1)$ otrzymamy

$$a = a_1 + 180^\circ - \beta \dots \dots (a \text{ jest kątem zewnętrznym})$$

stad $a_1 = a + \beta - 180^\circ$ czyli

$$a_1 = (1 - 2) = (a - 1) + \beta_1 - 180^\circ \text{ jako azymut kie-}$$

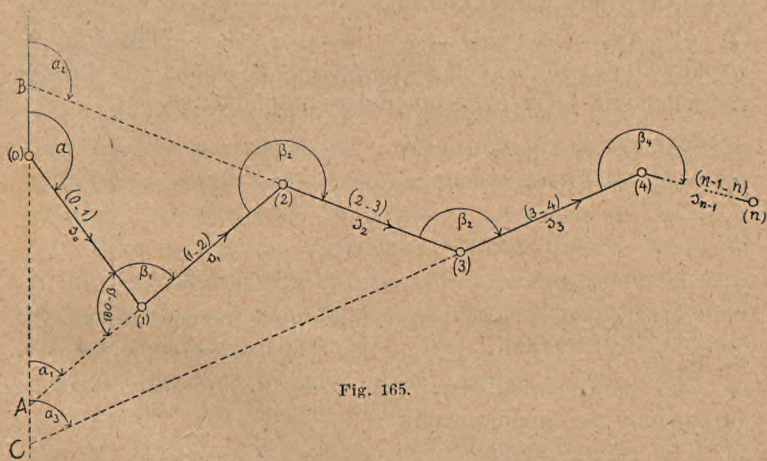


Fig. 165.

runku 1-2, a ponieważ przez dodanie $+ 360^\circ$, jak wiemy, wartość azymutu się nie zmienia, więc

$$a_1 = (1-2) = (0-1) + \beta_1 - 180^\circ + 360^\circ = (0-1) + \beta_1 + 180^\circ$$

dostaliśmy więc drugie wyrażenie na wartość tego samego azymutu, zatem możemy napisać

$$a_1 = (1-2) = (0-1) + \beta_1 \pm 180^\circ \quad 1)$$

Podobnie dostaniemy z trójkąta $A (2) B$

$a_2 = (2-3) = a_1 + (\beta_2 - 180^\circ)$ dodając zaś 360° , jak poprzednio, otrzymamy $a_2 = (2-3) = a_1 + \beta_2 + 180^\circ$

czyli wstawiając jeszcze wartość za a_1 z równ. 1, otrzymamy

$$a_2 = (2-3) = (0-1) + \beta_1 + \beta_2 \pm 2.180^\circ \quad 2)$$

Tak samo dostaniemy z trójkąta $B(3)C$

$$a_3 = (3-4) = a_2 - (180^\circ - \beta_3) = a_2 + \beta_3 - 180^\circ$$

a po wstawieniu a_2 z równ. 2 i przekształceniu jak poprzednio, $a_3 = (3-4) = (0-1) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \pm 3.180^\circ$ 3)

i analogicznie $a_{n-1} = ((n-1)-n) =$

$$= (1-0) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_{n-1} \pm (n-1).180^\circ$$
 4)

gdzie $(n-1)$ jest ilością pośrednich wierzchołków lub ilością kątów $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n-1}$

Nazwijmy teraz kierunki $(0-1) = \alpha_0$, $(1-2) = \alpha_1$, $(2-3) = \alpha_2 \dots (n-1-n) = \alpha_{n-1} \dots$ i przypuścimy, że współrzędne punktu początkowego (0) są znane (y_0, x_0), to na podstawie § 52 obliczymy dalsze współrzędne.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_0 + s_0 \sin \alpha_0 & x_1 &= x_0 + s_0 \cos \alpha_0 \\ y_2 &= y_1 + s_1 \sin \alpha_1 & x_2 &= x_1 + s_1 \cos \alpha_1 \\ y_3 &= y_2 + s_2 \sin \alpha_2 & x_3 &= x_2 + s_2 \cos \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n &= y_{n-1} + s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} & x_n &= x_{n-1} + s_{n-1} \cos \alpha_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

Utworzywszy sumę wszystkich powyższych równań tj.

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + s_0 \sin \alpha_0 + s_1 \sin \alpha_1 + \dots + s_{n-1} \sin \alpha_{n-1}$$

otrzymamy po zredukowaniu

$$y_n = y_0 + [s \sin \alpha] \quad \text{i} \quad x_n = x_0 + [s \cos \alpha] \quad 6)$$

Wzór 6 służyć będzie do kontroli rachunku i do obliczania współrzędnych dowolnego wierzchołka.

Z wzorów 5 otrzymamy dalej

$$tg \alpha_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad tg \alpha_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{i t. d.} \quad 7)$$

A z obu równań 6 obliczymy styczną kąta linii łączącej punkt początkowy (0) z końcowym (n)

$$tg (0-n) = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} \quad \dots \quad 8)$$

tudzież długość tej linii

$$(0) - (n) = S = \frac{y_n - y_0}{\sin (0-n)} \quad \text{lub} \quad S = \frac{x_n - x_0}{\cos (0-n)} \quad 9)$$

§ 55. **Polygony między punktami stałymi.**

Polygony służą jako podstawy do szczegółowych zdjęć, a za podstawę polygonów służą znów punkty tryangulacyjne, które wtedy nazywamy punktami stałymi, jak to opisaliśmy w § 53. Nawiążmy polygon do dwu punktów stałych, przyjmując je za punkta końcowe wieloboku, t. j. za punkty (0) i (n), natenczas azymut (0— n) obliczony na podstawie pomiarów polygonów z równ. 8, tudzież odległości (0) — (n) = S z równ. 9, powinny być zgodne z azymutem i odległością, uzyskanymi z tryangulacji. Jeżeli obliczenie polygonu nie zgadza się z datami tryangulacyjnymi, to, ponieważ uważamy je za stałe i niezmiennie, przeto niezgodność przypisać musimy błędom pomiaru kątów i długości w polygonie i takowe wyrównać, mając jako kontrolę rachunku wyniki tryangulacyjne.

Przy wytyczaniu polygonu zwracać należy uwagę na to, by boki były mniej więcej równe, by wierzchołki były z sąsiednich punktów polygonu dobrze widzialne, wogóle by całemu pomiarowi przypisać można jednakową dokładność, gdyż wówczas wyrównanie błędów będzie proste i łatwe.

Pomiar polygonu obejmuje:

a) pomiar kątów, b) pomiar długości boków, c) niwelację, o której już mówić nie będziemy.

1. **Pomiar kątów.**

Błąd pomiaru kątów nie powinien, według austriackiej instrukcyi ministeryalnej, przekraczać wartości $\pm 75'' \sqrt{n}$, gdzie n oznacza liczbę wierzchołków czyli kątów mierzonych.

Jako błąd uważać należy różnicę w między sumą kątów pomiarowych $[S]$, a sumą kątów rzeczywistych S , otrzymaną z jakiegokolwiek kontroli,

$$\text{t. j. } [S] - S = w \cong 75'' \sqrt{n} \quad . \quad . \quad 1)$$

n. p. suma kątów pomierzonych w trójkącie $[S] = 179^{\circ} 58'$ wiemy zaś, że suma ta powinna wynosić $S = 180^{\circ}$, zatem różnica $w = [S] - S = - 2'$, a ponieważ z równ. 1 wy-

nika, że dozwolona różnica wynosi
 $75'' \sqrt{3} = 75'' \times 1.73 = 130'' = 2' 10''$ — więc pomiar powyższy uważać możemy jako dobry i różnicę $w = -2'$ rozdzielić na wszystkie kąty. Gdyby okazała się za wielka różnica, to pomiar należałoby powtórzyć.

Tabela dozwolonych błędów pomiaru n kątów polygonu według austriackiej instrukcyi polygonalnej :

Ilość kątów n	Waga $p = \frac{10}{n}$	Granica błędu $75'' \sqrt{n}$		Ilość kątów n	Waga $p = \frac{10}{n}$	Granica błędu $75'' \sqrt{n}$	
		'	"			'	"
1	10.00	1	15	21	0.48	5	44
2	5.00	1	46	22	0.45	5	52
3	3.30	2	10	23	0.43	6	00
4	2.50	2	30	24	0.42	6	07
5	2.00	2	48	25	0.40	6	15
6	1.70	3	04	26	0.38	6	22
7	1.40	3	18	27	0.37	6	30
8	1.30	3	32	28	0.36	6	37
9	1.10	3	45	29	0.34	6	44
10	1.00	3	57	30	0.33	6	51
11	0.91	4	09	31	0.32	6	58
12	0.83	4	20	32	0.31	7	04
13	0.77	4	30	33	0.30	7	11
14	0.71	4	41	34	0.29	7	17
15	0.67	4	50	35	0.29	7	24
16	0.63	5	00	36	0.28	7	30
17	0.59	5	09	37	0.27	7	36
18	0.56	5	18	38	0.26	7	42
19	0.53	5	27	39	0.26	7	48
20	0.50	5	35	40	0.25	7	54

Uwaga. Przy oznaczaniu ilości n kątów, należy wliczyć kąt zamykający polygon.

Obliczony błąd w należy porównać z powyższą tabelą czy wielkość jego nie przekracza dozwolonej granicy, następnie rozdzielić ją na wszystkie kąty w równych częściach, dodając do każdego kąta poprawkę $\frac{w}{n}$ ze znakiem przeciwnym. Takie proste wyrównanie pomiaru kątów może mieć miejsce tylko wtedy, gdy wszystkie pomiary były wykonane z jednakową dokładnością, więc przedewszystkiem, gdy wszystkie boki miały prawie jednakową długość, lub przynajmniej, jak austriacka instrukcja dozwala, gdy stosunek długości boku najkrótszego do najdłuższego nie zejdzie poniżej $\frac{1}{4}$. W przeciwnym razie błąd w rozdzielamy na wszystkie kąty nierównomiernie, a mianowicie proporcjonalnie do sumy odwrotności z długości ramion.

Nazwijmy poprawki kątów przez δ_1, δ_2 a odpowiednie długości ramion zamykających te kąty, przez $s_0-s_1, s_1-s_2, s_2-s_3$, to $w = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n$

$$\text{a } \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 \dots = \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1}\right) : \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right) : \left(\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3}\right) : \dots \quad 2)$$

Sposób wyrównania pomiarów okażemy później na praktycznym przykładzie.

Ponieważ luneta zwykle zaopatrzona jest w siatkę tachymetryczną (3 nitki poziome), przeto nie sprawi nam trudności, po odczytaniu kąta, odczytać jeszcze na obu sąsiednich stanowiskach 3 nitki na łać i obliczyć tachymetrycznie odległość i wysokość. Zyskujemy bowiem jeszcze jedną kontrolę pomiaru długości i kąta nachylenia terenu celem redukcji pomiaru na poziom.

2. Pomiar długości boków.

Boki polygonu mierzy się na terenie poziomym lub jednostajnie nachylonym taśmą 20-metrową żelazną, na terenie zaś falistym lub stromym łaćami, zwykle 4-metrowymi. Mierzyć można albo po terenie, zwłaszcza taśmą, redukując potem miarę na poziom, lub układając pojedyncze miary poziomo, co znów stosuje się zwykle przy łaćach. Miara powinna być przedtem sprawdzona. Pomiar wykonuje się przy-

najmniej dwa razy tam i z powrotem, a długości większe niż 200 m. powinno się mierzyć 4 razy. W protokole zapisuje się osobno ilość całych taśm lub łań, osobno długość uzupełniającą danego boku, szkicując zarazem kształt terenu, jak to wskazuje następujący wzór.

Pomiar długości.

Mierzona odległość		Ilość całych		Uzupełnienie długości m	Całkowita odległość m	Różnica cm	Średnia odległość m	Nachylenie terenu	UWAGA
od punktu	do punktu	taśm 20 m	łań 4 m						
1	2	7	—	19·72	159·72	1·0	159·725	0%	
2	1	7	—	19·73	159·73				
2	3	9	—	1·18	181·18	4·0	181·16	5%	
3	2	9	—	1·14	181·14				
3	4	—	20	1·33	81·33	1·0	81·335	6%	
4	3	—	20	1·34	81·34				

Przed pomiarem należy daną prostą wytyczyć i wyznaczyć kierunek tyczkami. Do pomiaru wystarczy dwóch pomocników, a na podstawie doświadczeń zebranych przy zdjęciach miast, przyjąć można, że w ciągu godziny mierzy się przeciętnie 400 m. długości podwójnie lub 800 m. wogóle.

Instrukcja polygonalna austriacka zaleca pomiar podwójny, t. z. parami, przyczem różnica Δs obu pomiarów wynosić może najwyżej

$$\Delta s = 0\cdot0006 s + 0\cdot02 \sqrt{s} \quad \dots \quad 3)$$

gdzie s oznacza średnią długość w całych metrach. Dozwoloną różnicę dwu pomiarów wziąć można z tabeli umieszczonej w § 55.

Gdy różnica obu pomiarów jest większa niż dozwolona, to pomiar należy powtórzyć. Obliczoną wartość średnią zaokrągla się na całe centymetry opuszczając milimetry aż do 5; począwszy od 5 mm. wyżej, dodaje się 1 cm. W terenie

bardzo trudnym wykonuje się pomiar długości tachymetrycznie, odczytując łatę z możliwie największą dokładnością.

Po powyższych objaśnieniach przystępujemy do obliczenia polygonu nawiązanego do punktów stałych.

Niech będą dane 4 punkty stałe A, B, C, D za pomocą rzędnych $A (y_a, x_a)$ $B (y_b, x_b)$ $C (y_c, x_c)$ $D (y_d, x_d)$ (fig. 166) i polygon $B (1) (2) (3) (4) (5) C$ między punktami B i C .

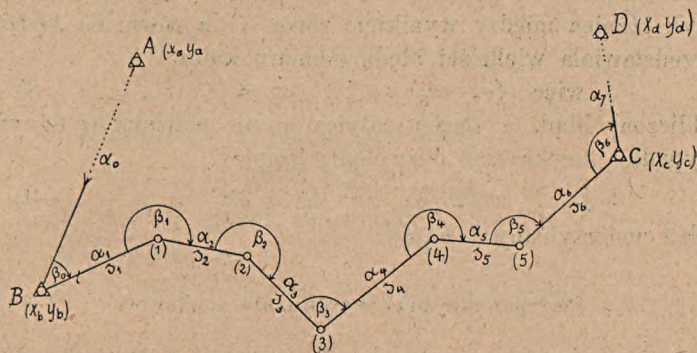


Fig. 166.

Pomierzmy kąty $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_6$ i długości $s_1, s_2, s_3, \dots, s_6$ Azymut kierunku (AB) obliczymy według § 52.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_0 &= \operatorname{tg} (AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \\ \text{i podobnie dla } (CD) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 4)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_7 &= \operatorname{tg} (CD) = \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c} \end{aligned} \right\} \text{stad zaś obliczymy } \alpha_0 \text{ i } \alpha_7.$$

Nazwijmy azymuty kierunków polygonu przez $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ to obliczymy je na podstawie § 54 równ. 4.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= (B-1) = \alpha_0 + \beta_0 \\ \alpha_2 &= (1-2) = \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 \\ \alpha_3 &= (2-3) = \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_4 &= (3-4) = \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ \alpha_5 &= (4-5) = \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 \\ \alpha_6 &= (5-6) = \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 \\ \alpha_7 &= (C-D) = \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 \end{aligned} \right\} 5)$$

5. Na podstawie poprawionych azymutów, obliczamy współrzędne punktów polygonu według § 54, równ. 5)

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= y_b + s_1 \sin \alpha_1 \\ y_2 &= y_1 + s_2 \sin \alpha_2 = y_b + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 \\ y_3 &= y_2 + s_3 \sin \alpha_3 = \\ &= y_b + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + s_3 \sin \alpha_3 \\ y_4 &= y_3 + s_4 \sin \alpha_4 = \\ &= y_b + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + s_3 \sin \alpha_3 + s_4 \sin \alpha_4 \\ y_5 &= y_4 + s_5 \sin \alpha_5 = \\ &= y_b + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + s_3 \sin \alpha_3 + s_4 \sin \alpha_4 + s_5 \sin \alpha_5 \\ \text{и } y_6 &= y_5 + s_6 \sin \alpha_6 = y_b + s_1 \sin \alpha_1 + \dots + s_6 \sin \alpha_6 \end{aligned} \right\} 10)$$

a z ostatniego równania otrzymamy:

$$y_c - y_b = [s \sin \alpha] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

W podobny sposób obliczymy:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_b + s_1 \cos \alpha_1 \\ x_2 &= x_1 + s_2 \cos \alpha_2 = x_b + s_1 \cos \alpha_2 + s_2 \cos \alpha_2 \\ &\vdots \\ x_c &= x_b + s_1 \cos \alpha_1 + \quad \quad \quad + s_6 \cos \alpha_6 \end{aligned} \right\} 12)$$

a stad $x_c - x_b = [s \cos \alpha] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$

Jak wiemy, współrzędne y_b , x_b i y_c , x_c należą do punktów stałych, więc równanie 11) i 13) dają nam kontrolę obliczenia rzędnych polygonu, bo mamy tu warunki

$$\left. \begin{array}{l} \text{z równ. 11)} \quad (y_c - y_b) - [s \sin \alpha] = 0 \\ \text{z równ. 13)} \quad (x_c - x_b) - [s \cos \alpha] = 0 \end{array} \right\} 14)$$

Kąty α są wyrównane, ale chociaż zawierać będą jakieś błędy, to przyjąć je już musimy jako dobre, natomiast mamy tu jeszcze długości s , otrzymane z pomiarów, które również zawierają błędy; stąd pochodzi, że zazwyczaj warunek 14) nie będzie spełniony, czyli otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} (y_c - y_b) - [s \sin \alpha] &= f_y \\ (x_c - x_b) - [s \cos \alpha] &= f_x \end{aligned} \right\} 15)$$

W takim razie f_y i f_x przedstawiają wielkości błędów współrzędnych, powstałe wskutek błędów pomiaru boków, więc musimy je na te długości rozdzielić, czyli wprowadzić

Poprawki d_n^y i d_n^x wprowadzamy, dodając je do odpowiednich iloczynów $s_n \sin \alpha_n$ i $s_n \cos \alpha_n$.

Mając współrzędne już wyrównane, możemy obliczyć, o ileby zaszła tego potrzeba, poprawione długości boków, według wzorów

$$s_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{\sin \alpha_n} \quad \text{lub} \quad s_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\cos \alpha_n} \quad . \quad . \quad 21)$$

Po uskutecznieniu powyżej wymienionych poprawek, będziemy już mieli zupełną zgodność między wynikami po-

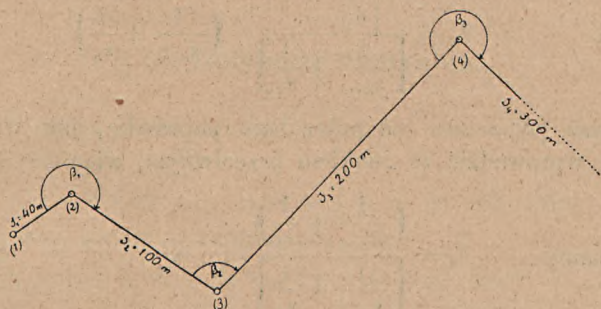


Fig. 167.

miarów polygonu i datami odnoszącymi się do punktów stałych.

Trudniej przedstawia się wyrównanie, gdy boki polygonu mają różne długości tak, że przy wyrównaniu kątów już je trzeba brać w rachubę.

W takim razie błąd w rozdzielamy proporcjonalnie do sumy odwrotności długości ramion. Przypuśćmy, że dany jest polygon (1) (2) . . .

$$\begin{aligned} \text{o bokach} \quad s_1 &= 40.0 \text{ m} \\ s_2 &= 100.0 \\ s_3 &= 200.0 \\ s_4 &= 300.0 \end{aligned}$$

Stosunek najkrótszego do najdłuższego boku wynosi $\frac{40}{300} = \frac{1}{7.5}$ więc w zwykły sposób kątów wyrównać nie możemy.

Przypuścimy, że błąd w kątach $w = 150''$ — to poprawki kątów obliczymy według § 55 równ. 2)

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) : \left(\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \right) : \left(\frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} \right) \quad 22)$$

przyczem $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = w. = [\delta]$.

Z relacji 22) otrzymamy ogólnie

$$[\delta] : \delta_n = \left[\frac{1}{s_{n-1}} + \frac{1}{s_n} \right] : \frac{1}{s_{n-1}} + \frac{1}{s_n}$$

stad
$$\delta_n = \frac{[\delta]}{\left[\frac{1}{s_{n-1}} + \frac{1}{s_n} \right]} \cdot \left(\frac{1}{s_{n-1}} + \frac{1}{s_n} \right)$$

ponieważ $[\delta] = w$ — a prócz tego poprawkę, jak wiemy, należy wprowadzić ze znakiem przeciwnym, więc

otrzymamy
$$\delta_n = \frac{\left(\frac{1}{s_{n-1}} + \frac{1}{s_n} \right)}{\left[\frac{1}{s_{n-1}} + \frac{1}{s_n} \right]} \cdot (w) \dots \quad 23)$$

jako wzór do obliczania poprawek kątów. — Celem uniknięcia ułamków, pomnożymy licznik i mianownik ułamka w równ. 23) przez 1000 przyczem ilorazy zaokrąglać będziemy na liczby całe.

Wracając do naszego przykładu, obliczymy:

Długości	Liczby stosunkowe
$s_1 = 40 \text{ m}$	$\left(\frac{1000}{s_{n-1}} + \frac{1000}{s_n} \right) = \left(\frac{1000}{40} + \frac{1000}{100} \right) = 25 + 10 = 35$
$s_2 = 100 \text{ „}$	
$s_3 = 200 \text{ „}$	$= \left(\frac{1000}{100} + \frac{1000}{200} \right) = 10 + 5 = 15$
$s_4 = 300 \text{ „}$	
	$= \left(\frac{1000}{200} + \frac{1000}{300} \right) = 5 + 3 = 8$
Suma:	$\left[\frac{1000}{s_{n-1}} + \frac{1000}{s_n} \right] = 58$

$$\text{zatem } \delta_1 = \frac{35}{58} (-110'') = -66'' = -1' 06''$$

$$\delta_2 = \frac{15}{58} (-110'') = -29'' = -0' 29''$$

$$\delta_3 = \frac{8}{58} (-110'') = -15'' = -0' 15''$$

$$-[\delta] = -w = -110''$$

Obliczone poprawki $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ dodamy do kątów $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ — i dostaniemy wartości wyrównane $\beta_1 - \delta_1$, $\beta_2 - \delta_2$, $\beta_3 - \delta_3$.

§ 56. Polygony zamknięte.

1. Suma kątów wewnętrznych w wieloboku zamkniętym wynosi (fig. 168):

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = [\alpha] = (n-2) \cdot 180^\circ \quad 1)$$

Suma kątów zewnętrznych:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = [\beta] = (n+2) \cdot 180^\circ \quad \dots 2)$$

Równ. 1) i 2) są warunkami, którym pomiar kątów w wieloboku zamkniętym powinien odpowiadać, w przeciwnym razie błąd w , jeżeli nie przekracza dozwolonej granicy, $w \leq 75'' \sqrt{n}$ —, rozdziela się na wszystkie kąty w znany sposób (§ 55).

2. Obliczenie azymutów.

Jeżeli dany jest którykolwiek azymut, n. p. azymut boku $(1-2) = (\alpha)$ i kąty $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ — to obliczymy azymuty innych boków z równań:

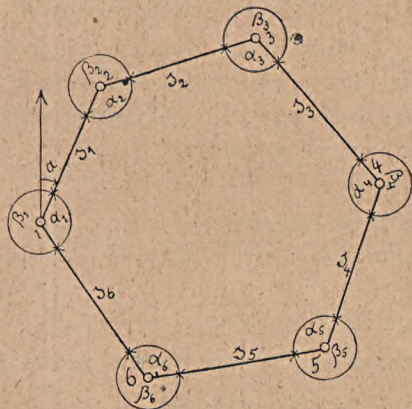


Fig. 168.

Polygony zamknięte w znaczeniu (fig. 168) są dość rzadko używane, natomiast polygony nawiązane do punktów trygonometrycznych lub innych punktów stałych, których położenie określone jest ściśle i związane z tryangulacją, używane jest przy zdjęciach miast, a często przy trasach, w trudnym terenie, jeżeli wypadnie konieczność ominięcia pewnego miejsca niedostępnego i nawiązania dalszej części trasy do poprzedniej. Dalej przy wyznaczaniu miejsc szczybów przy budowie długich tuneli, używane są polygony i tryangulacja, zwłaszcza przy zdjęciach rzek. Przy zdjęciach katastralnych, tworzą one połączenie punktów tryangulacyjnych i podstawę do zdjęć szczegółowych, do nich bowiem nawiązuje się osie pomocnicze I rzędu, do tych zaś II rzędu w razie potrzeby; parcele zaś zdejmujemy się na osie pomocnicze w znany już sposób. Słowem, wielkie przestrzenie dzieli się za pomocą tryangulacji I II III i IV rzędu na małe, za pomocą zaś polygonów zdejmujemy już pojedyncze parcele, czyli najmniejsze obszary.

Na błędy pomiaru kątów wpływają:

a) ekscentryczne ustawienie teodolitu, dla którego ostateczną granicę przyjąć można $e = \pm 5 \text{ mm}$;

b) ekscentryczne ustawienie sygnału $e' = \pm 10 \text{ mm}$;

c) średni błąd pomiaru na limbusie $\mu = \pm 10''$;

d) błąd w celowej zależny od odległości sygnału, tem mniejszy, im sygnał jest dalej, czyli im dłuższa jest celowa.

Opuszczając wszelkie wywody teoretyczne powiemy, że wszystkie tu wymienione błędy wpływają na pomiar kąta tembardziej, im krótsza jest celowa i odwrotnie. Dlatego unikać należy ile możności krótkich boków polygonu, a nigdy nie schodzić poniżej 50 m dług.

Polygonów zupełnie otwartych, nie nawiązanych do żadnych punktów stałych, należy unikać, bo nie możemy ich wyrównać; lepiej jest użyć w takim wypadku polygonu zamkniętego ¹⁾.

¹⁾ Celem studyowania zdjęć metodą polygonalną, polecamy pracę p. F. Nowotnego, prof. Politechniki w Pradze, przetłómaczoną na

Wyczerpującego traktowania o zdjęciach polygonalnych rozmiary tej pracy nie pozwalają, poprzestajemy więc na powyższych opisach, dodawszy jeszcze szczególny wypadek, t. z. punkty węzłowe i przykłady.

§ 57. Punkty węzłowe.

Nieraz zaś może wypadek, że z kilku punktów stałych n. p. I II III (fig. 169) wykonać potrzeba pomiar polygonów do punktu centralnego C .

Z danych n. p. trzech polygonów, otrzymamy 3 różne wartości współrzędnych na oznaczenie wspólnego punktu

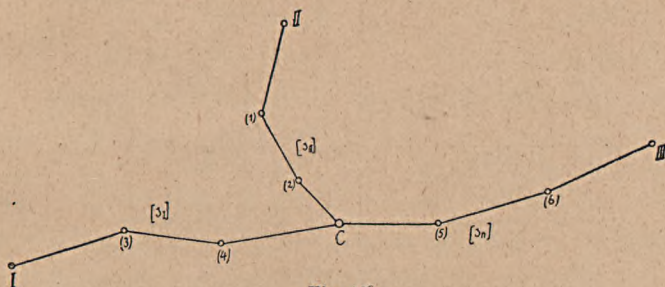


Fig. 169.

węzłowego C . Z obliczenia zatem dostaniemy

$$C_1 (y_1 \ x_1)$$

$$C_2 (y_2 \ x_2)$$

$$C_3 (y_3 \ x_3)$$

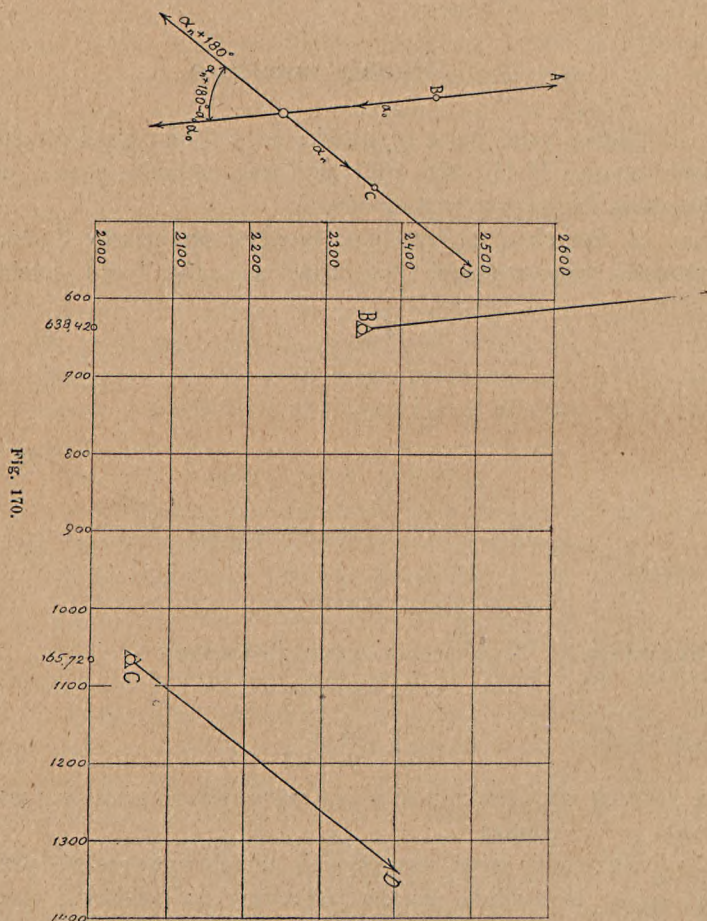
z których wypośredkować mamy najprawdopodobniejsze wartości y i x punktu C .

Nazwijmy wagi powyższych trzech spostrzeżeń przez $p_1 \ p_2 \ p_3$ to średnią wartość obliczymy na podstawie teorii błędów:

$$y = \frac{[p \ y]}{[p]} \dots 1) \quad \text{ i } \quad x = \frac{[p \ x]}{[p]} \dots 2)$$

polskie przez p. Stanisława Latinka, p. t. *Praktyczne przykłady pomiarów metodą polygonalną*, Kraków 1902. — Praca ta przedstawia szczegółowo zdjęcie miasta Pisku w Czechach.

Im dłuższy jest polygon, tem większe jest prawdopodobieństwo, że punkt końcowy jest mniej dokładnie wyznaczony, więc wagi są odwrotnie proporcjonalne do długości polygonów, czyli odwrotnie proporcjonalne do sumy boków polygonu



$$\text{czyli } p_1 = \frac{1}{[s_I]} \quad p_2 = \frac{1}{[s_{II}]} \quad p_3 = \frac{3}{[s_{III}]} \quad \dots \quad 3)$$

gdzie $[s_I] \dots$ oznaczają sumę długości boków odpowiednich polygonów.

Jeżeli długości pojedynczych boków we wszystkich polygonach są mniej więcej równe, to wagi przyjąć można jako odwrotnie proporcjonalne do ilości boków

$$\text{zatem } p_1 = \frac{1}{n_I} \quad p_2 = \frac{1}{n_{II}} \quad p_3 = \frac{1}{n_{III}}$$

gdzie $n_I, n_{II}, \dots$ oznaczają ilości boków danych polygonów.

Obliczywszy wagi, oznaczmy już łatwo według równań 1 i 2 prawdopodobne, średnie wartości współrzędnych x i y punktu C .

1. Przykład.

Dane współrzędne czterech punktów stałych (fig. 170).

$A \quad \begin{aligned} y_a &= 325.65 \text{ m} \\ x_a &= 5290.26 \text{ m} \end{aligned}$	$C \quad \begin{aligned} y_c &= 1066.72 \text{ m} \\ x_c &= 2053.16 \text{ m} \end{aligned}$
$B \quad \begin{aligned} y_b &= 638.42 \text{ m} \\ x_b &= 2342.36 \text{ m} \end{aligned}$	$D \quad \begin{aligned} y_d &= 3038.81 \text{ m} \\ x_d &= 2631.86 \text{ m} \end{aligned}$

Między punktami B i C wytyczono polygon i pomierzono kąt

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 126^\circ 16' 10'' & \beta_3 &= 220^\circ 15' 20'' \\ \beta_2 &= 163^\circ 08' 20'' & \beta_4 &= 110^\circ 02' 10'' \end{aligned}$$

tudzież długości $s_1 = 125.15 \text{ m}$ $s_2 = 190.45 \text{ m}$ $s_3 = 226.22 \text{ m}$.

Z danych współrzędnych obliczymy azymuty:

$$\text{tg } (AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{+ 312.77}{- 2947.90}$$

$$\text{tg } (CD) = \frac{y_d - y_c}{x_d - x_c} = \frac{+ 1973.09}{+ 578.70}$$

$$\log \text{tg } (AB) = \begin{array}{r|l} \log 312.77 = & 12.49523 - 10 \\ \log 2947.90 = & 3.46951 \quad n \\ \hline & 9.02572 - 10 \end{array}$$

$$(AB) = \underline{\underline{83^\circ 56' 36.5'' + 90^\circ}}$$

$$(AB) = \underline{\underline{173^\circ 56' 36.5''}}$$

$$\log \text{tg } (CD) = \begin{array}{r|l} 3.29515 \\ 2.76245 \quad n \\ \hline 10.53270 - 10 \end{array}$$

$$(CD) = 73^\circ 39' 14.4''$$

Obliczenie i wyrównanie polygonu

Punkt	Kąt polygonu β	A z y m u t α	Długość boku s	$\log s$ $\log \sin \alpha$ $\log s \sin \alpha$	$\log s$ $\log \cos \alpha$ $\log s \cos \alpha$
I	2	3	4	5	6
B	126° 16' 10.0"	173° 56' 36.5"	125.15 ^m		
		+ 9.5"		2.09728	2.09728
	163° 08' 20.0"	120° 12' 56.0"		9.93658	9.70179 <i>n</i>
		+ 9.5"		2.03386	1.79907 <i>n</i>
(1)	220° 15' 20.0"	103° 21' 25.5"	190.45	2.27968	2.27968
(2)		+ 9.5"	9.98809	9.36364 <i>n</i>	
		+ 9.5"	2.26777	1.64332 <i>n</i>	
C		110° 02' 10.0"	143° 36' 55.0"	226.22	2.35453
	+ 9.4"		9.77321	9.90582 <i>n</i>	
	541.82	2.12774	2.26035 <i>n</i>		
Suma	619° 42' 00"	253° 39' 14.4"	[s]		
3 × 180°	540° 00' 00"	79° 42' 37.9"			
$\alpha_n - \alpha_o =$	79° 42' 00"	$= \alpha_n - \alpha_o$			
$w =$	79° 42' 37.9"				
	- 37.9"				

$$\frac{w}{4} = + 9.5''$$

zestawiono w następującej tabeli:

Różnica rzędnych $y_n - y_{n-1} = s \sin \alpha$		Różnica odciętych $x_n - x_{n-1} = s \cos \alpha$		Poprawione $s \sin \alpha$ i y	Poprawione $s \cos \alpha$ i x	Punkt
7		8		9	10	11
+	-	+	-	+ 638.420	+ 2342.360	B
- 71			+ 33	+ 108.036	- 62.994	
108.107			62.961	+ 746.456	+ 2279.366	(1)
- 100			+ 49	+ 185.190	- 44.029	(2)
185.290			43.980	+ 931.646	+ 2235.337	
- 122			+ 60	+ 134.074	- 182.177	C
134.196			182.117	+ 1065.720	+ 2053.160	
427.593			289.058	427.300	- 289.200	
427.300	$= y_c - y_b$	$x_c - x_b =$	289.200	$y_c - y_b$	$x_c - x_b$	
+ 0.293	$= f_y$	$f_x =$	- 0.142			
$d_y = \frac{-f_y}{[s]} =$	$-0.54 \frac{mm}{1 m}$	$d_x =$	$+0.26 \frac{mm}{1 m}$			

$$\sqrt{f_y^2 + f_x^2} = 0.32$$

Objaśnienia.

W rubryce 2 podano zmierzone kąty polygonu β , których suma $[\beta] = 619^{\circ} 42' 00'' = 3 \times 180^{\circ} + 79^{\circ} 42' 00''$. Suma ta po odtrąceniu $3 \times 180^{\circ}$ powinna zgodzić się z różnicą kątów obu danych kierunków, a mianowicie kątem między

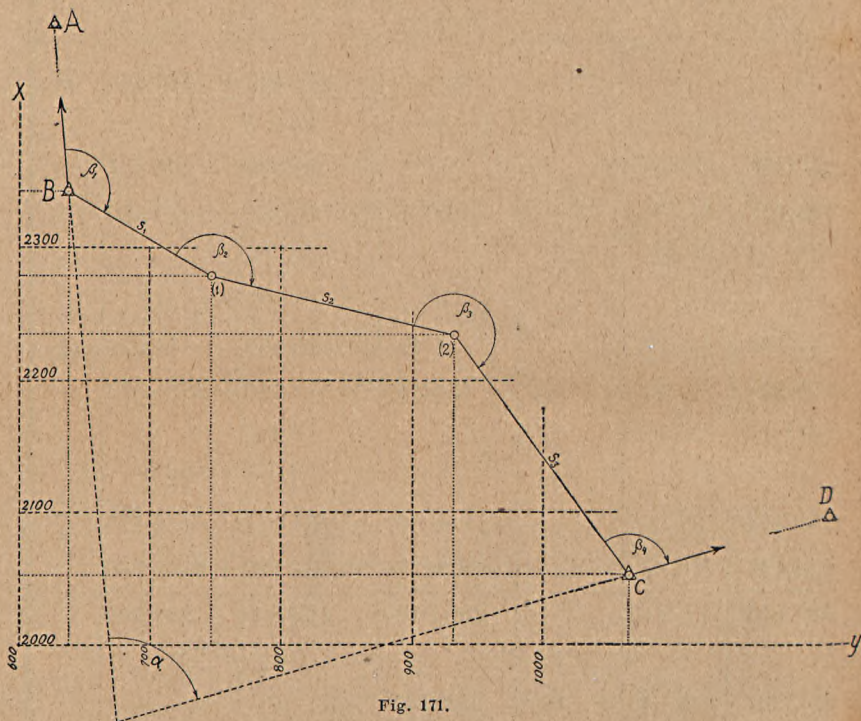


Fig. 171.

dzi obu danymi kierunkami, obliczony na podstawie fig. 171, powinien zgodzić się z $[\beta]$.

Z fig. 171 widzimy, że $\alpha = \alpha_n + 180^{\circ} - \alpha$ więc $\alpha = 73^{\circ} 39' 14.4'' + 180^{\circ} - 173^{\circ} 56' 36.5'' = 79^{\circ} 42' 37.9''$ co obliczono w rubryce 3.

Różnica między $[\beta]$ i $(\alpha_n - \alpha_o)$ wynosi $-37.9''$, którą rozdzielimy w równych częściach na wszystkie 4 kąty, dodając do nich po $9.5''$ — a do ostatniego $9.4''$ celem zgodzenia rachunku, co uwidoczniło w rubr. 2.

Rubr. 3 zawiera następnie azymuty kierunków ($B-(1)$) ($1-2$) . . . obliczone według wzoru § 55 — i na podstawie poprawionych już kątów z rubr. 2.

W rubr. 5 i 6 przygotowano logarytmy celem obliczenia iloczynów $s \sin \alpha$ i $s \cos \alpha$, które też uwidocznione są w rubr. 7 i 8. Ponieważ kąty β są większe od 90° — więc funkey obliczono z wzorów

$$\sin (90 + \alpha) = \cos \alpha \quad \text{i} \quad \cos (90 + \alpha) = -\sin \alpha$$

skąd też wynikiły liczby ujemne w rubr. 8.

Sumy $[s \sin \alpha]$ i $[s \cos \alpha]$, otrzymane z dodania liczb w rubr. 7 i 8, powinny się zgodzić odpowiednio z różnicami $(y_c - y_b) = [s \sin \alpha]$ i $(x_c - x_b) = [s \cos \alpha]$. W naszym przykładzie jednak otrzymaliśmy pewne różnice f_y i f_x — za pomocą których sprawdziliśmy przedewszystkiem dokładność pomiaru według wzoru

$$\Delta s = \sqrt{f_y^2 + f_x^2} = 0.32 \text{ m}$$

Ponieważ sumą boków wynosi 541.82 m, a dla tej długości dozwolona różnica wynosi według tabeli w § 55 $\Delta s = 0.79 \text{ m}$ — więc pomiar uznajemy za dobry; obliczymy

$$\text{poprawkę na jednostkę długości } d_y = \frac{-f_y}{[s]} \quad \text{i} \quad d_x = \frac{+f_x}{[s]}.$$

a następnie poprawki dla boków, mnożąc d_y i d_x przez odpowiednie długości boków według równ. 19) § 55. — Poprawki te uwidocznione są w rubrykach 7 i 8 — tak, że po ich uwzględnieniu otrzymamy $[s \sin \alpha] = y_c - y_b$ i $[s \cos \alpha] = x_c - x_b$.

W końcu w rubryce 9 i 10 obliczono współrzędne według wzoru $y_n = y_{n-1} + s_n \sin \alpha_n$ i $x_n = x_{n-1} + s_n \cos \alpha_n$ (§ 55 równ. 12).

Kontrole wskazane na przykładzie są łatwe do zrozumienia i spamiętania a świadczą o dobrze przeprowadzonym rachunku.

Zestawienie wielokrotności kąta 180° $n \times 180^\circ$.

n	$n \times 180$	n	$n \times 180$	n	$n \times 180$	n	$n \times 180$	n	$n \times 180$
1	180°	4	720	7	1260	10	1800	13	2340
2	360	5	900	8	1440	11	1980	14	2520
3	540	6	1080	9	1620	12	2160	15	2700

Zestawienie sum kątów wewnętrznych wieloboków zamkniętych $[\alpha] = (n-2) 180^\circ$.

n	$[\alpha]$	n	$[\alpha]$	n	$[\alpha]$	n	$[\alpha]$	n	$[\alpha]$
3	180°	7	900	11	1620	15	2340	19	3060
4	360	8	1080	12	1800	16	2520	20	3240
5	540	9	1260	13	1980	17	2700	21	3420
6	720	10	1440	14	2160	18	2880	22	3600

Zestawienie sum kątów zewnętrznych wieloboków zamkniętych $[\alpha] = (n+2) \times 180^\circ$.

n	$[\alpha]$	n	$[\alpha]$	n	$[\alpha]$	n	$[\alpha]$	n	$[\alpha]$
3	900	7	1620	11	2340	15	3060	19	3780
4	1080	8	1800	12	2520	16	3240	20	3960
5	1260	9	1980	13	2700	17	3420	21	4140
6	1440	10	2160	14	2880	18	3600	22	4320

§ 58. Wytyczenie południka.

Najprostszy sposób wytyczenia linii południkowej w danym punkcie, jest za pomocą mapy katastralnej. Każdy pojedynczy arkusz mapy przedstawia prostokąt, którego boki są równoległe do układu osi współrzędnych, czyli jedna para boków jest równoległa do osi x — druga do y ; zatem wszystkie linie wykreślone na mapie katastralnej równoległe do lewego lub prawego boku prostokąta, przedstawiają kierunki południków tych punktów, przez które przechodzą. Stąd też łatwy sposób wytyczenia w polu południka.

Oznaczmy na planie stanowisko teodolitu, wykreślmy przez ten punkt południk i odnajdźmy w polu jeden z dalszych punktów, odpowiadający punktowi planu, leżącemu na wykreślonym południku.

Oznaczmy odszukany punkt na terenie tyczką lub wogóle sygnałem, to linia łącząca stanowisko teodolitu z uwidocznionym punktem, przedstawia kierunek południka, zaś prostopadle do niej, równoleżnika.

Wyznaczyć też można kierunek południka za pomocą igły magnetycznej (kompasu), znając zboczenie jej w danym punkcie, o czym będziemy mówili przy zdjęciach, za pomocą busoli.

Bezpośrednie wytyczenie południka za pomocą słońca lub gwiazd, wymaga wiele czasu i znajomości położenia gwiazd, tudzież tablic pomocniczych, ale ponieważ plany katastralne znajdują się obecnie nawet w każdej gminie, więc pierwszy sposób jest tak łatwy, że możemy, praktycznie postępując, inne metody i sposoby opuścić.

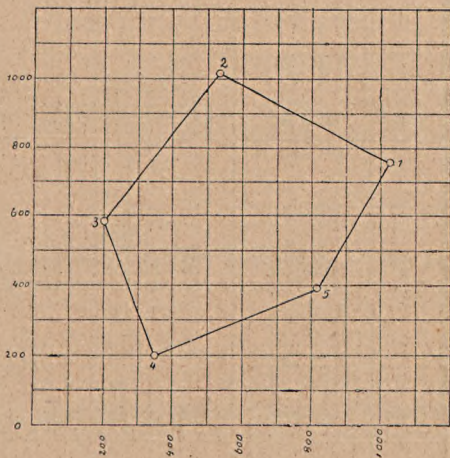


Fig. 172.

2. Przykład (według G. Krafta i Scheringa).

Dany pięciobok (fig. 172) — (1) (2) (3) (4) (5) (1), w którym pomierzono boki i kąty wewnętrzne. Obliczyć i wyrównać wielobok, jeżeli dane są:

$$\begin{aligned} \text{odcinka } x \text{ punktu (5)} &= 200.00 \text{ m} \\ \text{i rzędna } y \text{ punktu (4)} &= 200.00 \text{ m} \end{aligned}$$

Obliczenie, wyrównanie i kontrola rachunku

Punkt	Długość boku m	Kąt polygonu		Azymut α	Ćwiartka	Zredukowany azymut
		zmierzony i poprawka	poprawiony			
1	(1-2) 422, 45	-10" 142° 21' 20"	142° 21' 10"	30° 10' 20"	I	30° 10' 20"
2	(2-3) 556, 24	-10" 87° 14' 00"	87° 13' 50"	87, 13, 50 117, 24, 10 180 297, 24, 10	IV	62, 35, 50
3	(3-4) 540, 22	-10" 100, 33, 30	100, 33, 20	100, 33, 20 397, 57, 30 -180 217, 57, 30	III	37, 57, 30
4	(4-5) 412, 80	-10 121, 29, 10	121, 29, 00	121, 29, 00 339, 26, 30 -180 159, 26, 30	II	20, 33, 30
5	(5-1) 506, 08	-10 88, 22, 50	88, 22, 40	88, 22, 40 247, 49, 10 -180 67, 49, 10	I	67, 49, 10
Suma	2437, 79	540, 00, 50	540	142, 21, 10 210, 10, 20 -180		
	(5-2) 180 =	540, 00, 00	540	-180		
		0, 00, 50		30, 10, 20		

uwidoczniłone są w następującym zestawieniu:

$\log s \cdot \sin \alpha$ $\log \sin \alpha$ $\log s$ $\log \cos \alpha$ $\log s \cos \alpha$	Δx $s \cos \alpha$ i poprawka m	Δy $s \sin \alpha$ i poprawka	Poprawione		Odcięta x_n $x_{n-1} + \Delta x$	Rzędna y_n $y_{n-1} + \Delta y$
			$s \cos \alpha$ Δx	$s \sin \alpha$ Δy		
2,326 998 9,701 223 2,625 775 9,936 774 2,562 549	+0,04 +365,22	+0,02 +212,32	+365,26	+212,34	756,34	1026,01
2,693 574 9,948 312 2,745 262 9,662 987 2,408 249	+0,02 +256,01	+0,06 +493,83	+256,03	-493,77	1012,37	532,24
2,521 508 9,788 937 2,732 571 9,896 779 2,629 350	+0,04 -425,94	+0,04 -332,28	-425,90	-332,24	586,47	200,00
2,161 246 9,545 506 2,615 750 9,971 422 2,587 162	+0,04 -386,51	+0,02 -144,96	-386,47	+144,98	200,00	344,98
2,670 829 9,966 610 2,704 219 9,576 948 2,281 177	+0,02 +191,06	+0,06 +468,63	+191,08	+468,69	391,08	813,67
Razem	+812,29 -812,45	+825,91 -826,11	+812,37 -812,37	+826,01 -826,01		
$f_x = -0,16$	$f_y = -0,20$					

$$\Delta s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = 0,26 \text{ m na długości } 2437,76.$$

3. Przykład.

Dane są współrzędne punktów A i B — t. j. y_a x_a y_b x_b (fig. 173), tudzież współrzędne y_d x_d i y_e x_e punktów D i E .

Obliczyć współrzędne punktu C , jeżeli z punktu A widocznym jest punkt D i C — zaś B jest niewidoczny, a podobnie z punktu B widocznym jest punkt C i E — zaś A jest niewidoczny.

Zadanie takie nazywa się weinaniem wprzód.

Z danych współrzędnych obliczymy:

Azymut kierunku (AD)

$$\operatorname{tg}(AD) = \frac{y_d - y_a}{x_d - x_a}$$

$$\text{a stąd } (AD) = (d) \quad 1)$$

$$\operatorname{tg}(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

$$\text{" } (AB) = (c) \quad 2)$$

$$\operatorname{tg}(BE) = \frac{y_e - y_b}{x_e - x_b}$$

$$\text{" } (BE) = (e) \quad 3)$$

Następnie zmierzmy kąty δ i ε i otrzymamy z pomiaru $(AC) = (AD) + \delta$ i $(BC) = (BE) - \varepsilon$ 4)

Mając azymuty wszystkich boków trójkąta ACB , obliczymy kąt

$$\alpha = (AB) - (AC) \quad \beta = (BC) - (BA) \quad \gamma = (CA) - (CB) \quad 5)$$

Celem zastosowania reguły wstaw, obliczymy jeszcze długość boku $AB = c$

$$AB = \frac{y_b - y_a}{\sin(AB)} = \frac{x_b - x_a}{\cos(AB)} \quad \dots \quad 6)$$

Wreszcie dostaniemy długości boków a i b z równań

$$a = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha \quad \text{i} \quad b = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta \quad \dots \quad 7)$$

a stąd

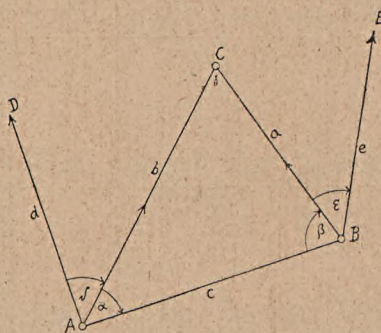


Fig. 173.

$$\left. \begin{aligned} y_c &= y_a + b \cdot \sin(AC) \\ x_c &= x_a + b \cdot \cos(AC) \end{aligned} \right\} \dots 8)$$

$$\text{lub } \left. \begin{aligned} y_c &= y_b + a \sin(BC) \\ x_c &= x_b + a \cos(BC) \end{aligned} \right\} \dots 9)$$

Weinanie wprzód używane jest do obliczenia współrzędnych punktu niedostępnego, n. p. szczytu wieży i t. p.

4. Przykład.

Dane są trzy punkty za pomocą współrzędnych (fig. 173 a)

$A(y_a x_a)$ $B(y_b x_b)$ $C(y_c x_c)$

Obliczyć współrzędne punktu $D(y_d x_d)$, jeżeli w punkcie D dadzą się zmierzyć kąty α i β .

Mając współrzędne punktów A , B i C , potrafimy obliczyć odległości ich a i b , tudzież kąt γ , zatem ilości te uważamy za wiadome.

Do obliczenia współrzędnych punktu D , potrzebujemy kątów φ i ψ tudzież długości boków CD i AD . W celu obliczenia ich, ustawmy następujące równania:

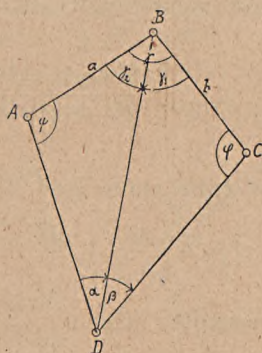


Fig. 173 a.

Z czworoboku $ABCD$ — $(\alpha + \beta) + \gamma + \varphi + \psi = 360^\circ$

$$\text{więc } \frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{360 - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} \dots 1)$$

Z trójkątów DAB i DCB otrzymamy

$$DB = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \psi = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \varphi$$

$$\text{a stąd } \sin \varphi : \sin \psi = \frac{a}{\sin \alpha} : \frac{b}{\sin \beta} \dots 2)$$

Prawa strona proporcji 2) składa się z ilości znanych, więc obliczyć ją możemy, — nazwijmy stosunek

$$\frac{a}{\sin \alpha} : \frac{b}{\sin \beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \eta} \dots 3)$$

to zamiast równ. 2) napiszemy

$$\sin \varphi : \sin \psi = 1 : \operatorname{tg} \eta \dots 4)$$

Na podstawie znanych twierdzeń o proporcjach, dostaniemy z równ. 4)

$$\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{1 - \operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \eta} = m \quad . \quad . \quad 5)$$

gdzie $\operatorname{tg} \eta$ jest ilością znaną z równ. 3) — zatem prawa strona równania jest wiadoma

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \eta} = m \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

Z drugiej znów strony, na podstawie twierdzeń i wzorów trygonometrycznych, wiemy że

$$\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right)} \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

w czym znów ilość $\operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2}$ jest znaną, bo

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{360 - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} \text{ według równ. 1)}$$

nazwijmy więc $\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) = n \quad . \quad . \quad . \quad 8)$

i podstawmy w równ. 5) wartości z 7) i 8) to

$$\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right)}{n} = m \quad \text{a stąd} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right) = m \cdot n \quad 9)$$

za pomocą zaś logarytmów obliczymy kąt $\frac{\varphi - \psi}{2}$ — a mając $\frac{\varphi + \psi}{2}$ (równ. 1) — znajdziemy już łatwo kąty φ i ψ .

Celem przejrzystości, wypiszemy powyższe wzory razem, mianowicie

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right) &= m \cdot n \\ m &= \frac{1 - \operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \eta}, \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \eta} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} \quad \text{czyli} \quad \operatorname{tg} \eta = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} \\ n &= \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) \quad \text{gdzie} \quad \frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{360 - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} \end{aligned} \right\} 10)$$

Mając już obliczone kąty φ i ψ , znajdziemy

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= 180 - (\beta + \varphi) \quad \text{czyli} \quad \sin \gamma_1 = \sin (\beta + \varphi) \\ \text{i podobnie} \quad \sin \gamma_2 &= \sin (\alpha + \psi) \end{aligned} \right\} 11)$$

W końcu za pomocą reguły wstaw obliczymy boki

$$\left. \begin{aligned} CD &= \frac{b}{\sin \beta} \times \sin (\beta + \varphi) \\ \text{tudzież} \quad AD &= \frac{a}{\sin \alpha} \times \sin (\alpha + \psi) \end{aligned} \right\} 12)$$

Ponieważ z warunków zadania dane są współrzędne punktów A , B , C , a temsamem i azymuty (AB) i (BC) — a obliczyliśmy już kąty φ i ψ , tudzież długości boków CD i AD , więc mamy już wszystko do obliczenia współrzędnych punktu D , mianowicie

$$\left. \begin{aligned} y_d &= y_c + CD \times \sin (CD) \\ x_d &= x_c + CD \times \cos (CD) \end{aligned} \right\} 13)$$

$$(CD) = (CB) - \varphi \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

$$\text{lub} \quad \left. \begin{aligned} y_d &= y_a + AD \times \sin (AD) \\ x_d &= x_a + AD \times \cos (AD) \end{aligned} \right\} 15)$$

$$(AD) = (AB) + \psi \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

Zadanie powyższe, t. z. weinanie wstecz używa się do oznaczenia współrzędnych punktu, z którego widoczne są trzy inne punkty stałe, za pomocą pomiaru tylko dwu kątów. W praktyce jest bardzo często używane, n. p. z danego punktu D (fig. 173 *a*) widoczny jest jakiś daleki punkt stały A , i n. p. dwa szczyty wież w punktach B i C przyjęte także jako punkta stałe, więc mające współrzędne obliczone. W takim razie, przez pomiar kątów α i β możemy wyznaczyć ściśle położenie naszego stanowiska D względem danego układu współrzędnych.

Na tem kończymy dział o zdjęciach wielobokowych, nie dlatego, żeby przedmiot ten miał być zupełnie wyczerpany, — przeciwnie, przedstawiliśmy tu zaledwie kilka wypadków, lecz w zwykłej praktyce często się trafiających, n. p. przy zdjęciach rzek, obejmujących często szerokie na

parę kilometrów przestrzenie wzdłuż rzeki, ogromne usługi oddaje III lub IV rzędna tryangulacja, przy której nie potrzeba jeszcze uwzględniać kształtu ziemi, a przestrzenie objęte pojedynczymi trójkątami traktuje się jako zupełnie płaskie. Między punktami tryangulacyjnymi, nawiązując się do nich, tyczymy polygony celem zdjęć szczegółów. Zyskujemy przytem na dokładności, mamy kontrole długości, w przeciwieństwie n. p. do bardzo długich polygonów, tyczonych wzdłuż brzegów bez tryangulacji. Te bowiem im są dłuższe, tem większe muszą dawać odchyłki od kierunku rzeczywistego, tembardziej gdy nie mają nawiązań do punktów stałych.

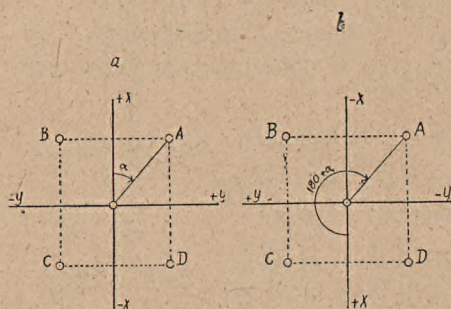


Fig. 174 a i b.

według fig. 174 b, t. j. $+x$ na południe, $-x$ na północ, $+y$ na zachód, $-y$ na wschód. Zamianę jednego układu na drugi uskutecznić łatwo, na podstawie następującej:

Porównajmy współrzędne punktów $ABCD$ leżących w czterech ćwiartkach w obu układach — więc

	układ niemiecki (a)	układ austriacki (b)
Punkt		
A —	$+x \quad +y$	$-x \quad -y$
B —	$+x \quad -y$	$-x \quad +y$
C —	$-x \quad -y$	$+x \quad +y$
D —	$-x \quad +y$	$+x \quad -y$

Jak widzimy, znaki są wprost przeciwne; zatem przez zmianę znaków, przedstawimy punkt w układzie drugim i nawzajem. — Azymut (OA) w układzie (a) wyraża się kątem α , w układzie zaś (b), kątem $180 + \alpha$ — czyli jest wprost przeciwnym kierunkiem.

ZDJĘCIA ZA POMOCĄ KOMPASU.

§ 59. Opis kompasu.

Kompas jest to przyrząd służący do pomiaru kątów kierunkowych za pomocą igły magnetycznej, która też jest najważniejszą jego częścią składową. Igła umieszczona jest w pudełku mosiężnym, na ostrzu pionowym tak, że może się

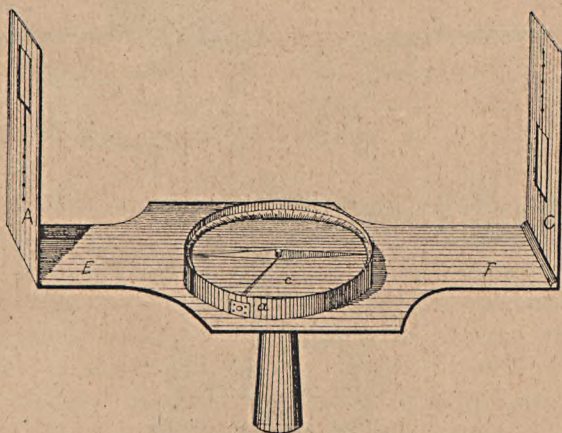


Fig. 175.

swobodnie w płaszczyźnie poziomej obracać. Na obwodzie pierścienia wewnątrz pudełka umieszczonego (fig. 175), znajduje się podział na 360° . Zero podziałki znajduje się w kierunku północnym, 180° w południowym, 90° na wschód, 270° na zachód, czyli podziałka postępuje w kierunku ruchu wskazówek na zegarze. Końce igły prawie że dotykają podziału na limbusie wskazując kąt, a ponieważ nie ma tu noniuszów, więc dokładność odczytu wynosi 5 do 10 minut, zależnie od wielkości przyrządu.

Kompas umieszczony jest na płycie *E F*, opatrzonej dioptrym *A i C*, w ten sposób urządzonym, że linia przechodząca przez okular i włos dioptry, przechodzi przez oś obrotu

igły i przez $0^{\circ} 00' 00''$, tudzież przez $180^{\circ} 00' 00''$ na limbusie. Pod płytką znajduje się tulejka do osadzenia kompasu na statywie czopowym.

Zamiast kompasu z dioptrym, używa się często kompasu teodolitowego (fig. 176).

Właściwy kompas „a” umieszczony jest na płytce c, spoczywającej na dwu ramionach d d, w których, jak widać z rysunku umieszczona jest luneta na osi poziomej. Oś

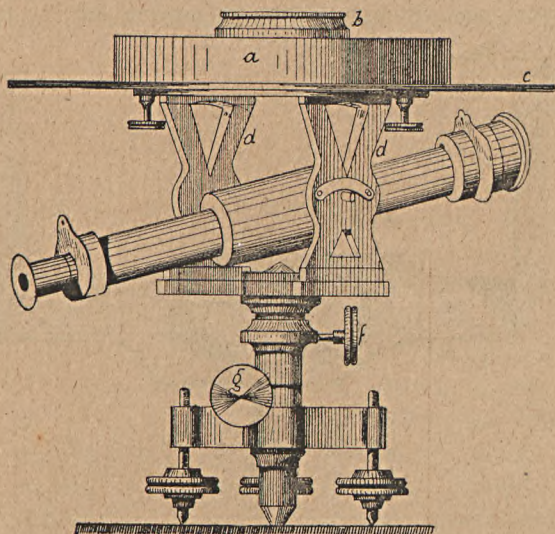


Fig. 176.

obrotu lunety tak jest urządzona, że luneta daje się łatwo wyjmować, przekładać w łożyskach, lub przerzucać wprost przeciwnym kierunku i to jest ogromną zaletą przyrządu. Wreszcie limbus i spodarka wraz ze śrubami wstawowemi, urządzona jest nakształt znanych nam instrumentów.

Śruba f, służy do ustalenia lunety i wogóle górnej części instrumentu w danem położeniu, zaś śruba g, do ruchu powolnego (śruba mikrometryczna). Na osi poziomej znajduje się koło pionowe podobnie jak w tachymetrze, do ustawienia instrumentu służy libela pudełkowa „b”.

Linia łącząca oba bieguny igły magnetycznej, zawieszonej swobodnie i będącej w równowadze, nazywa się osią magnetyczną, zaś płaszczyzna pionowa przesunięta przez oś magnetyczną, przecina powierzchnię kuli ziemskiej w t. z. południkach magnetycznych, różniących się od południków geograficznych, bo pierwsze przechodzą przez bieguny magnetyczne ziemskie, drugie zaś przez bieguny geograficzne.

Kąt zawarty między południkiem magnetycznym, a geograficznym, nazywa się zboczeniem igły, czyli deklinacją. Deklinaacya może być równą zeru, albo wschodnią lub zachodnią.

Linia krzywa, nieregularna, łącząca takie punkta na ziemi, w których niema zboczenia igły magnetycznej, dzieli ziemię na dwie części — na jednej mamy zboczenie wschodnie, na drugiej zachodnie. Obecnie n. p. zachodnie zboczenie ma wschodnia część półn. Ameryki, ocean Atlantycki i prawie cała Europa z wyjątkiem północno-wschodniej Rosyi. W ciągu wieków zmienia się deklinacya na wszystkich punktach ziemi, wschodnia przechodzi na zachodnią i odwrotnie. W XVI. wieku n. p. miała Europa zboczenie wschodnie, które powoli zmieniał się, przeszło przez 0 i obecnie mamy zachodnie; to zboczenie przeszło już przez swoje maximum i od lat 70-ciu zmniejsza się, dążąc znów do wschodniego. Paryż n. p. miał w r. 1580 zboczenie wschodnie wynoszące $11^{\circ}5'$, a w roku 1663 — wynosiło już 0° . W roku 1700 było zboczenie zachodnie $8^{\circ}10'$ w r. 1780 wynosiło $19^{\circ}55'$ w r. 1805 — $22^{\circ}05'$ w r. 1814 — $22^{\circ}34'$, w r. 1816 — $22^{\circ}25'$ w r. 1828 — $22^{\circ}05'$ w r. 1832 — $22^{\circ}03'$ a w roku 1892, wynosiło zboczenie zachodnie $15^{\circ}3'$, zmniejszając się rocznie o $0^{\circ}13'$. Okres zmienności zboczenia wynosi 470 do 480 lat.

Zboczenie igły magnetycznej zależne jest od długości i szerokości geograficznej, a wielkość jego odczytać można najwygodniej z mapy, na której wykreślone są linie równych zboczeń igły, czyli t. z. izogony. Prócz zmienności w ciągu wieków, ma igła jeszcze dzienne zmienności zboczenia, mianowicie rano o godz. 8 i wieczór o 10 — zbacza igła naj-

więcej z właściwego położenia na wschód, popołudniu o 2 i w nocy o 2 najwięcej na zachód, ma więc dziennie 2 maxima i 2 minima zboczeń. Dienne zboczenia rosną wraz z szerokością geograficzną, i w lecie są zawsze większe niż w zimie, zmieniają się w okresach około 10 letnich i dochodzą maxim. do 11'5'.

Chcąc za pomocą igły magnetycznej wyznaczyć kierunek południka geograficznego w danym punkcie (zatem w punkcie o znanej szerokości i długości geogr.), trzeba znać deklinację i to z uwzględnieniem nie tylko roku, ale miesiąca, dnia i godziny.

Prócz opisanej deklinacji, ma jeszcze igła drugie zboczenie w płaszczyźnie pionowej, t. z. inklinację, która jednak nie wchodzi w rachubę przy zdjęciach, a wpływ jej na położenie igły w płaszczyźnie pionowej usuwa się, przez obciążenie odpowiedniego końca igły.

W punktach odległych od siebie o 8 km. w każdym kierunku, różnice zboczeń igły są tak małe, że osie magnetyczne uważać możemy za równoległe; na tem polega zastosowanie kompasu w miernictwie.

Ponieważ igła magnetyczna ulega też wpływom atmosferycznym, mianowicie przy zmianach temperatury, podczas burzy i t. p. okazują się zmiany w położeniu igły, a nadto niektóre skały, jak: bazalt, serpentyn, granit, porfir, zawierające żelazo, wpływają na jej położenie, przeto zdjęcia za pomocą kompasu nie mogą być nadzwyczaj dokładne w porównaniu z teodolitem, jednak do zdjęć tachymetrycznych, głównie w lasach, zwłaszcza między punktami stałymi, kompas bardzo się nadaje.

Celem uzupełnienia tego rozdziału, podajemy zestawienie deklinacji dla niektórych miejscowości, wyjęte z tablic matematyczno-fizycznych Prof. Uniwers. Jagiellońskiego A. W. Witkowskiego (str. 139). z tem objaśnieniem, że szerokości i długości geograficzne tudzież deklinacja, podane są w stopniach i setnych częściach stopnia zamiast minut; chcąc więc wyrazić je w minutach, trzeba setne stopnie zamienić na minuty mnożąc je przez 0.6.

Tabela deklinacji (δ) zachodniej dla następujących miejscowości: φ = szerokość geogr. — λ = długość geogr. od Ferro

rok 1890

MIEJSCOWOŚĆ	φ	λ	δ	MIEJSCOWOŚĆ	φ	λ	δ
Brody	50,°08	25,°15	4,°95	Sambor	49,°52	23,°18	5,°42
Cieszyn	49, 73	18, 65	8, 08	Stary Sącz	49, 62	20, 63	7, 25
Czerniowce	48, 28	25, 93	5, 26	Sanok	49, 57	22, 20	6, 06
Czortków	49, 02	25, 80	4, 63	Skole	49, 03	23, 52	5, 36
Dolina	48, 97	24, 02	5, 22	Stanisławów	48, 93	24, 72	5, 04
Kołomyja	48, 52	25, 03	5, 02	Stryj	49, 27	23, 88	5, 27
Kraków	50, 06	19, 97	7, 35	Tarnopol	49, 55	25, 57	5, 17
Krosno	49, 70	21, 78	6, 35	Tarnów	50, 02	20, 98	6, 83
Lwów	49, 83	24, 02	5, 17	Warszawa w r. 1873-5	52, 22	21, 03	—
Nisko	50, 52	22, 15	6, 67	Warszawa w r. 1848			—
Przemyśl	49, 78	22, 77	5, 57	Wieliczka	49, 98	20, 07	
Rawa ruska	50, 23	23, 62	5, 11	Zakopane w r. 1898-5	49, 30	19, 96	6, 62
Rzeszów	50, 03	22, 02	6, 15				

Roczny ubytek wynosi około 0 11°, zatem w połowie b. r. 1904, wynosi ubytek 1°595°.

W punktach pośrednich, możemy obliczyć deklinację z dostateczną dokładnością za pomocą zwykłej interpolacji.

§ 60. Sprawdzanie kompasu.

1. Czułość igły sprawdza się w ten sposób, że zbliża się do niej kawałek żelaza, wskutek czego wychyli się ona z położenia równowagi; następnie, gdy igła powróci do spoczynku, obserwuje się, czy igła powróciła dokładnie do tego samego położenia, w jakim znajdowała się przedtem. Jeżeli okaże się jaka różnica w położeniu igły, to albo jej siła magnetyczna jest osłabiona, albo tarcie na ostrzu jest za wielkie. W obu wypadkach trzeba igłę oddać do laboratorium do naprawy.

2. Igła powinna obracać się w płaszczyźnie poziomej, w wysokości podziałki. Ustawmy za pomocą libeli pudełkowej kompas poziomo, to jeżeli jeden koniec igły znajduje się nad pierścieniem z podziałką, a drugi poniżej, czyli igła okazuje inklinację, natenczas trzeba odpowiedni jej koniec nieco obciążyć n. p. kawałeczkiem wosku, a rektyfikacya pod tym względem będzie skończoną.

3. Podziałka na kole powinna być dobrą i nie zawierać grubych błędów, linie 0° — 180° i 90° — 270° — powinny być prostopadłe do siebie.

-Celem sprawdzenia, wyjmuje się koło podziałowe i za pomocą dobrego cyrkla mikrometrycznego sprawdza się podział.

4. Igła powinna być dokładnie centrycznie osadzoną, zatem linia łącząca oba końce igły powinna przechodzić przez ostrze na którym opartą jest igła. Celem sprawdzenia, odczytuje się kąt, jaki wskazuje jeden koniec igły na podziałce i kąt jaki drugi koniec wskazuje. Oba odczyty różnić się powinny o 180° . W przeciwnym razie igła osadzona jest ekscentrycznie, a błąd pomiaru kątów jaki się wskutek tego popełnia, usuniemy podobnie jak przy teodolicie, przez odczytanie stanu obu końców igły i obliczenie z nich średniej.

5. Sam przyrząd, jakoteż statyw, nie powinien zawierać w sobie ani żelaznych śrub, ani okuć, wogóle nie powinno być w pobliżu przyrządu żelaza.

§ 61. Pomiar polygonu za pomocą kompasu.

W celu zdjęcia polygonu $A, B, C, D \dots H, A$, — (fig. 177), za pomocą kompasu, ustawmy przyrząd nad punktem A (podobnie jak teodolit) — tak, by igła będąca w spoczynku, wskazywała 0° — czyli 360° t. j. kierunek północny, następnie obróćmy przyrząd i nakierujmy celową (czy to dioptru czy lunety) na punkt D . Wskutek obrotu przyrządu, igła wychyli się nieco, ale wkrótce powróci do swego poprzedniego położenia t. j. do kierunku północnego, zaś 0° podziałki obróci się wraz z lunetą lub dioptrym, o kąt a i znaj-

dzie się w kierunku $A B$. — Odczytajmy teraz na podziałce kąt jaki igła wskazuje, to różnica między 360° , a danym odczytem daje wartość kąta a , czyli wprost azymut boku AB po dodaniu poprawki deklinacyjnej δ , więc

$$(AB) = a + \delta \quad 1)$$

Pomierzywszy w ten sam sposób wszystkie kąty wierzchołkowe, jak wskazano na rysunku, a także i wszystkie dłu-

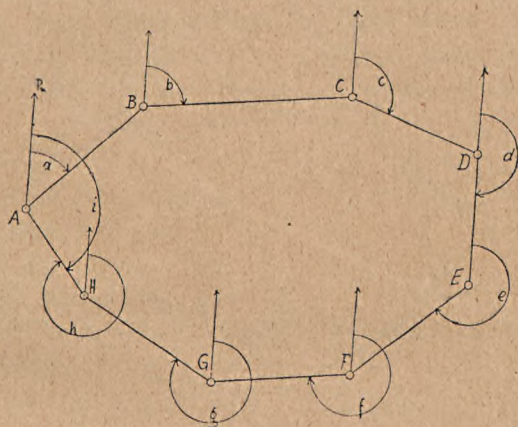


Fig. 177.

gości boków, możemy na podstawie teorii zdjęć wieloboków zamkniętych (§ 56), obliczyć współrzędne i wyrównać pomiary.

Zupełnie podobnie zdejmujemy kąty polygonu nawiązanego do punktów stałych i wyrównamy następnie pomiary tak samo, jak przy zdjęciach za pomocą teodolitu.

Drugi sposób pomiaru kątów, t. z. z omijaniem.

Ustawmy instrument w punkcie A (fig. 178), i zmierzmy kąt a — jak w poprzednim przykładzie, następnie przenieśmy się z instrumentem na punkt C , i zmierzmy kąt c i kąt a . Z rysunku widocznem jest, że $b = a - 180^{\circ}$. — Podobnie omijając punkt D — zmierzmy w wierzchołku E kąt e

należący do kierunku EF i kąt β — to $\angle d = \beta - 180^\circ$ itd. Metoda ta jest wygodniejszą od poprzedniej, bo oszczędza połowę czasu na ustawianie instrumentu.

Kąt mierzy się zawsze od lewej ku prawej, a że podziałka na kole postępuje także w tym kierunku, więc zawsze odeczyt prawej celowej, odjąć trzeba od 360° . Celem uproszczenia rachunku, urządza się podziałkę w przeciwnym kierunku niż kierunek ruchu wskazówek na zegarze, t. j. po-

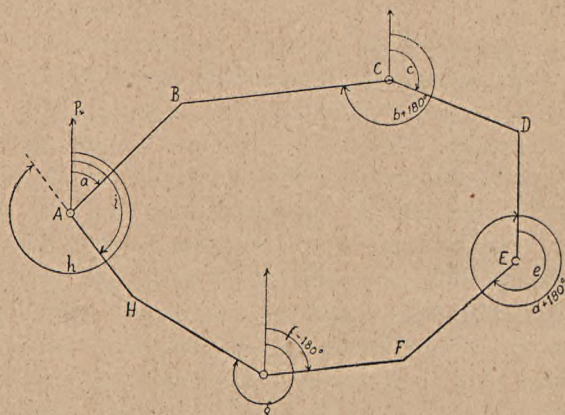


Fig. 178.

działka postępuje od prawej do lewej, a wskutek tego odeczytujemy wprost wielkość kąta. Odczyty kątów i pomiary boków notuje się w protokóle według następującego wzoru.

Protokół zdjęcia busoła (kompasem):

Stanowisko	Od punktu	Do punktu	Kąt odczytany β	Deklinacja δ	Kąt obliczony $360 - \beta + \delta$	Długość boku m	Szkice i uwagi
A.	A.	B.	223° 15'	+1° 04'	137° 49'	23,46	

§ 62. O dokładności pomiaru kątów kompasem i wpływie długości boków na błędy pomiarów.

Za pomocą kompasu mierzyć można kąty z dokładnością 5 do 10' (teodolit daje 100 razy większą dokładność).

Przypuśćmy, że poligon (0) (1) (2) (fig. 179) jest otwarty i ciągnie się prawie w linii prostej, tudzież, że wszystkie boki są sobie równe; w takim razie przyjąć możemy, że błędy pomiaru kątów są sobie równe. Nazwijmy błąd pomiaru kąta przez ε — a długość boku przez l , to poprzeczne przesunięcie punktu końcowego każdego boku wynosi

$$q' = \pm \varepsilon l \quad . \quad . \quad 1)$$

Stąd poprzeczne przesunięcie punktu końcowego polygonu złożonego z n boków, czyli średni błąd pomiaru polygonu, wskutek błędów w kątach, wyniesie według teorii błędów

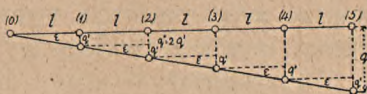


Fig. 179.

$$q = \pm \sqrt{(l\varepsilon)^2 + (l\varepsilon)^2 + \dots + (l\varepsilon)^2} = \sqrt{n(l\varepsilon)^2}$$

$$\text{czyli} \quad q = \pm l\varepsilon \sqrt{n} \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Ponieważ wszystkie boki są równe, więc nazwawszy całą długość polygonu przez L otrzymamy

$$L = n l \quad \text{a stąd} \quad n = \frac{L}{l} \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

wstawmy to w równ. 2), to

$$q = \pm l\varepsilon \sqrt{\frac{L}{l}} = \pm \varepsilon \sqrt{L \cdot l} \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Przypuśćmy, że dane są 2 polygony o takich samych długościach sumarycznych L , lecz pojedyncze boki w jednym mają długości l_1 w drugim zaś l_2 to na podstawie równ. 4) — ich błędy średnie wynoszą:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \pm \varepsilon \sqrt{L} \sqrt{l_1} \\ q_2 &= \pm \varepsilon \sqrt{L} \sqrt{l_2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

$$\text{więc} \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}} \quad 6)$$

stąd wniosek, że błędy pomiaru za pomocą busoli rosną wraz z długością boków, a zatem unikać należy długich boków, w przeciwieństwie do pomiarów teodolitem. Wogóle przy tego rodzaju zdjęciach używa się krótkich boków do 20 m

§ 63. Graficzne wyrównanie zdjęć wieloboków zamkniętych.

W niektórych wypadkach, zwłaszcza przy zdjęciach mniej ważnych, tachymetrycznych, nie opłaci się przeprowadzać całego rachunku wyrównania, lecz wystarczy przybliżyć sposób graficznego wyrównania pomiarów.

Przypuśćmy, że zdjęty został wielobok zamknięty 1, 2, 3, 4, 5, 6 — (fig. 180).

Przenosząc jednak zdjęcie na rysunek w ten sposób, że mniej więcej jedną połowę rysowaliśmy od punktu 1 do 4 — a potem drugą połowę od 1 do 4 przez 6 i 5 — okazało się, że zamiast jednego punktu 4, dostaliśmy 2 punkty 4₁ i 4₂ — czyli wielobok nie schodzi się, chociaż w naturze był zamknięty. To niezamykanie się wieloboku przypisać musimy błędom w pomiarze i błędom rysunkowym, a ponieważ wszystkim błędom pomiaru i wszystkim błędom rysunkowym możemy przypisać równe wartości, więc przypuszczamy, że właściwe położenie punktu znajduje się pośrodku między 4₁ i 4₂. Połączmy więc te punkty i przepołówmy prostą 4₁ i 4₂ — to punkt 4 będzie szukany punktem, na którym wielobok się zamyka. Następnie zmienimy położenie innych punktów w ten sposób, że wykreślimy rzędne 2 2, — 3 3, 5 5, — 6 6, z punktów, 2, 3, 5, 6, prostopadłe do zamykających 1—4₁ i 1—4₂ z punktów 2, 3, 5, 6, wykreślimy równoległe do linii 4₁ 4₂ aż do przecięcia się z zamykającą 1—4 w punktach 2' 3' 5' 6', w tych zaś wykreślimy nasze rzędne 2' 2'' 3' 3'' prostopadłe do linii 1—4 i odmierzymy na nich długości poprzednich rzędnych, więc 2 2₁ = 2' 2''

natenczas punkta $2'' 3'' 5'' \dots$ będą wierzchołkami zamykającego się wieloboku $1-2'' 3'' 4'' 6'' 5'' 1$.

Może też zajść drugi wypadek, mianowicie ostatnie boki $3 4_1$ i $5 4_1$ — przecinają się (fig. 180 b). W takim razie punkt zamykający 4 i punkty $2''-3'' 5'' 6''$ — wyznaczamy tym samym sposobem jak poprzednio co jest zupełnie zrozumiałem z rysunku.

Trzeci wypadek.

Punkty $4_1 4_2$ i punkt początkowy 1 , leżą na jednej prostej (fig. 180 c). Położenie punktu zamykającego 4 , przyjmiemy tutaj także pośrodku między 4_1 i 4_2 . Zakreślmy następnie promieniem $1-4$ łuk z punktu 1 , obierzmy na nim punkty a i b tak, by długość $4-a = 4-b$, wykreślmy proste $1-a$ i $1-b$ i rzędne $2-2_1 3-3_1 \dots$ prostopadłe do $1-4_1$ z punktów $2_1 3_1$ wykreślmy równoległe do linii 4_1--a , aż do

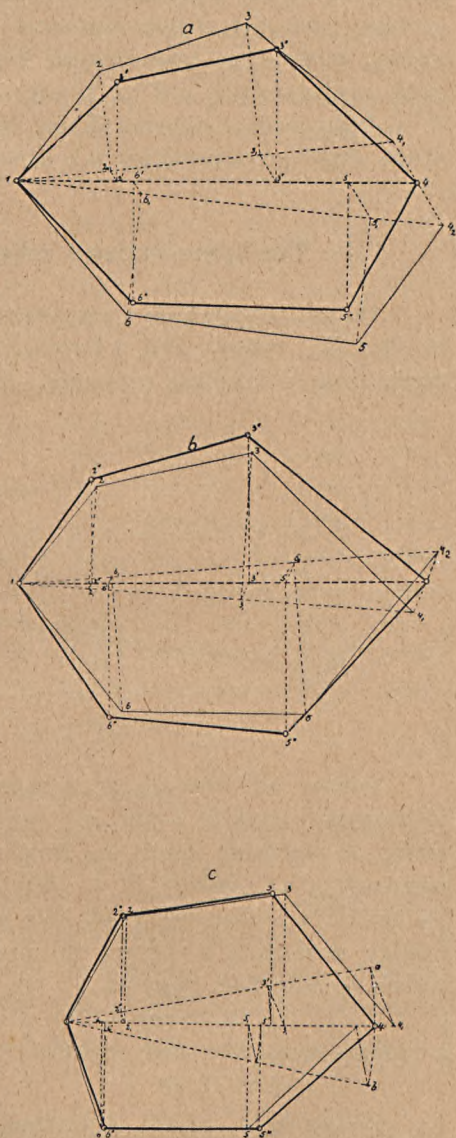


Fig. 180 a b c.

Długość L obieramy zwykle stałą n. p. 20 m. lub w razie potrzeby inną, ale zawsze w całych metrach. Kąt pionowy odczytuje się z dokładnością tylko 30' z powodu małego koła pionowego. Zatem do obliczenia zdjęcia wystarczy mała tablica dla $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ którą też podajemy.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
0°,00'	0.000	1.000	7°,00'	0.122	0.993	14°,00'	0.242	0.971
0°,30'	0.009	1.000	7,30	0.130	0.992	14,30	0.250	0.969
1,00	0.017	0.999	8,00	0.139	0.991	15,00	0.259	0.966
1,30	0.026	0.999	8,30	0.148	0.990	15,30	0.267	0.964
2,00	0.035	0.999	9,00	0.156	0.988	16,00	0.276	0.962
2,30	0.044	0.999	9,30	0.165	0.987	16,30	0.284	0.959
3,00	0.052	0.998	10,00	0.174	0.985	17,00	0.292	0.956
3,30	0.061	0.998	10,30	0.182	0.984	17,30	0.300	0.954
4,00	0.070	0.998	11,00	0.191	0.982	18,00	0.309	0.951
4,30	0.078	0.997	11,30	0.199	0.980	18,30	0.317	0.948
5,00	0.087	0.997	12,00	0.208	0.979	19,00	0.325	0.946
5,30	0.096	0.996	12,30	0.216	0.977	19,30	0.334	0.943
6,00	0.104	0.995	13,00	0.225	0.975	20,00	0.342	0.940
6,30	0.113	0.994	13,30	0.233	0.973			

Wzór protokołu.

Punkt	Z mierzono			Obliczono			Uwagi i szkice
	Azy- mut	Dłu- gość <i>m</i>	Kąt piono- wy	$L \cos \alpha$	$L \sin \alpha$	Kota	
(1)	25° 20'	10.0	+ 5° 30'	9.96	+ 0.96	100.96	Kota stanowiska
(2)	36° 10'	20.0	— 6° 00'	1.990	— 2.08	97.92	(0) = 100.00

Ustawwszy instrument na pewnym stanowisku, możemy w około niego zdjąć teren w podobny sposób jak przy zdjęciach tachymetrem. Różnica polega na tem, że mierzy się

i lunetę nastawimy tak, by środek siatki padał na obliczony w równ. 2) odczyt l .

Teraz sprawdzimy, czy noniusz koła pionowego wskazuje na $0^{\circ}00'$ — jeżeli nie, to albo go odpowiednio przesuniemy, jeżeli jest do tego urządzony, albo nastawimy go na $0^{\circ}00'$ a siatkę przesuniemy tak, by dostać odczyt l .

2. Oś celowa powinna przecinać się z osią pionową, około której igła się obraca, a zarazem powinna znajdować się w tym samym południku co igła, wtedy gdy busola wskazuje odczyt $0^{\circ}00'$.

Sprawdzenie i rektyfikacja.

Ustawmy instrument w punkcie O (fig. 183) i obróćmy busolę tak, by igła wskazywała $0^{\circ}00'$ na podziale. Przy-

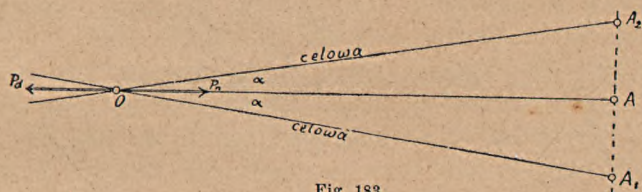


Fig. 183.

puśćmy na razie, że celowa przecina się z osią pionową, ale ma pewne zboczenie (α) od południka, t. j. wychyla się w kierunku OA_1 , w którym ustawmy tyczkę A_1 . — Wyjmijmy teraz lunetę z łożysk i przelóżmy ją, to celowa wyznaczy teraz kierunek OA_2 o przeciwnem zboczeniu; ustawmy znowu tyczkę w A_2 przepołówmy odstęp $A_1 A_2$ — i ustawmy tyczkę w punkcie środkowym A , siatkę zaś posuniemy odpowiedniemi śrubkami tak, ażeby celowa padała na środek tyczki A — to, jak z rysunku widzimy, igła i celowa znajdują się teraz w tym samym południku.

Drugi wypadek może być taki, że celowa nie przecina się z osią pionową, co poznamy w ten sposób, że po zrektifikowaniu celowej według powyższego opisu, powtórzymy sprawdzenie, ale tyczkę A ustawimy dalej od instrumentu, przyczem okaże się podobny jak poprzednio błąd. W tym

wypadku rektyfikację wykonamy według fig. 183, ale punkta A_1 , A_2 i A przyjmijmy w znacznej odległości, n. p. 20 m. czyli celowa będzie równoległą do południka.

Ściśle biorąc, trzeba by wtedy mierzyć kąt w dwu położeniach lunety, ale błąd wogóle jest tak mały, że wobec błędów i niedokładności pomiaru busolą, możemy go nie uwzględniać.

Przykład:

Przez punkt (1) dany w polu i na planie, wytyczyć w lesie linię w kierunku oznaczonym na mapie.

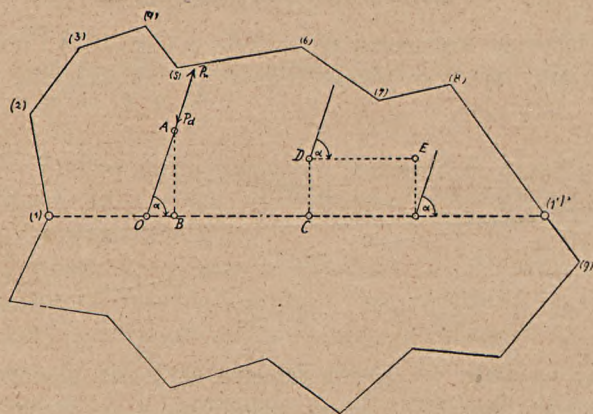


Fig. 184.

Przypuśćmy, że rysunek przedstawiony na fig. 184, przedstawia plan obszaru lasu, na którym oznaczono linią (1)—(1'), t. j. n. p. kierunek projektowanego przecięcia, a linią $P_n—P_d$ jak zwykle kierunek południka.

Ponieważ punkt (1) dany jest także na terenie, a również kierunek południka łatwo jest za pomocą kompasu wyznaczyć, przeto w danym zadaniu rozchodzi się jeszcze o azymut kierunku (1)—(1') — mając go bowiem, wytyczymy łatwo żądany kąt. W tym celu zmierzmy kąt α na planie za pomocą transportera, lub obliczmy go w następujący sposób:

Odetnijmy na kierunku południka, od punktu O do A 100 dowolnych jednostek, n. p. milimetrów, wykreślmy odcinek AB prostopadłe do $(1)-(1')$ i zmierzmy go w tych samych jednostkach, to stosunek

$$\frac{AB}{100} = \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{a za pomocą logarytmów}$$

lub tablic podających $\sin \alpha$ — znajdziemy kąt α czyli azymut kierunku $(1)-(1')$. Azymut ten, pomniejszony o deklinację odpowiednią punktowi (1) , równa się kątowi α , który mamy wytyczyć za pomocą kompasu w punkcie (1) . Obliczywszy więc kąt $\alpha_1 = \alpha - \delta$, ustawimy instrument w polu w (1) i obrócimy kompas, aż igła wskaże na podziale kąt α_1 ; wówczas diopter, względnie celowa lunety znajduje się w żądanym kierunku $(1)-(1')$. Posyła się teraz pomocnika z tyczką naprzód, o ile stosunki terenu pozwalają, kierując następnie tyczkę, aż celowa padnie dokładnie na jej środek. W tym punkcie wbija pomocnik palik, ustawia na nim powtórnie tyczkę której położenie znowu sprawdzimy, względnie poprawimy od instrumentu i zaznacza ostrzem tyczki właściwy punkt na paliku. Teraz przenosimy instrument na wyznaczony punkt, ustawimy go dokładnie, celujemy do punktu (1) — przerzucamy lunetę i wyznaczamy w ten sam jak poprzednio sposób, nowy punkt. Jako kontrola ustawienia lunety lub dioptru w danym kierunku, służy odczyt kąta na busoli, który powinien zgadzać się z obliczonym kątem α_1 .

Trafić się łatwo może, że n. p. doszedłszy do jakiegoś punktu C , nie możemy dalej tyczyć kierunku, bo w nim właśnie stoją drzewa.

Wobec takiej przeszkody, którą na razie usunąć trudno, poradzimy sobie, omijając ją. Zatem wytyczymy prostą CD , prostopadłą do $(1)-C$, zmierzmy jej długość, ustawimy w D instrument i wytyczymy kierunek α , n. p. aż do punktu E — w nim znów wytyczymy $EF = CD$ i prostopadłą do DE , następnie ustawimy się w punkcie F , wytyczymy kierunek α , poczem dalsze punkta w żądanym kierunku.

Podobnie wytyczyć możemy szereg linii równoległych, lub o danych kierunkach.

§ 65. Tyczenie łuków.

Jak z codziennego doświadczenia wiemy, tak drogi kołowe, jak wodne lub koleje, składają się z części prostych o różnych kierunkach, połączonych między sobą łukami. Tytając więc oś drogi, wytyczyć musimy proste i łuki, o czym właśnie teraz mówić będziemy.

1. Przypuśćmy, że dane są dwa kierunki X_1-X_2 , X_2-X_3 przecinające się w punkcie B t. z. wierzchołku, między którymi wytyczyć mamy łuk o promieniu r , dotykający obu kierunków.

Na podstawie oznaczeń na fig. 185, otrzymamy:

Długość stycznej

$$AB=BC=r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad 1)$$

mianowicie, z trójkąta prostokątnego OAB , z tego samego trójkąta

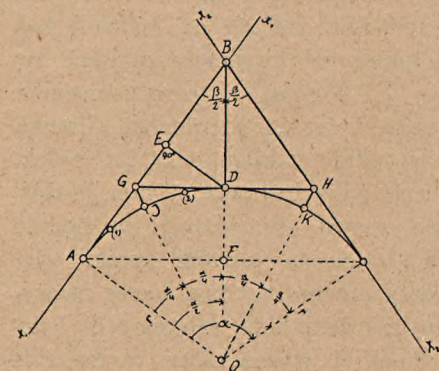


Fig 185.

kąta obliczymy też odstęp wierzchołka B od środka łuku D .

$$\underline{BD} = (BO - r) = r \cdot \sec \frac{\alpha}{2} - r = r \left(\sec \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \dots 2)$$

$$\text{Długość łuku } ADC = \frac{r \pi \alpha}{180} \dots \text{ jeżeli } \alpha \text{ wyrazimy}$$

w stopniach; zwykle jednak α otrzymujemy w stopniach, minutach i sekundach, więc:

$$ADC = \frac{r \pi \alpha''}{180 \cdot 60 \cdot 60} \dots \text{ nazwijmy ilość}$$

$$\text{stałą } \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = q = 206 \, 265 \text{ — to:}$$

$$ADC = \frac{\alpha''}{q} \cdot r \dots \dots \dots 3)$$

Środek łuku, t. j. punkt D dzieli łuk na dwie równe części, z których każdej odpowiada kąt środkowy $\frac{\alpha}{2}$

Wykreśliwszy w punkcie D (fig. 185) styczną GH , t. z. styczną pomocniczą, to przetnie ona styczne główne w punktach G i H , które uważać możemy za wierzchołki połówek łuku, podobnie, jak dla całego łuku wierzchołkiem był punkt B . Z rysunku łatwo wywnioskujemy, że

$$GD = DH = AG = GH = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \dots\dots 7)$$

Podobnie odstęp środków tych połówek łuków od wierzchołków będzie:

$$CJ = HK = r \left(\sec \frac{\alpha}{4} - 1 \right) \dots\dots\dots 8)$$

W powyższy sposób podzieliliśmy łuk na 4 części i wytyczyliśmy 5 punktów łuku, między którymi wytyczymy następnie punkty pośrednie inną metodą. Zupełnie tak samo moglibyśmy łuk podzielić na 8 części za pomocą stycznych w punktach J i K . Takie dzielenie łuków jest konieczne, jeżeli łuk jest długi, n. p. powyżej 600 m dzieli się łuk na 4 części, a powyżej 1500 m dzieli się go na 8 części.

Często trafia się wypadek, że wierzchołek B znajduje się albo bardzo daleko, albo w miejscu niedostępnym tak, że pomiar kąta β i pomiar stycznych jest albo niemożliwy, albo utrudniony.

W takich wypadkach radzimy sobie w sposób następujący.

Przypuśćmy, że punkt B , tudzież część stycznych około punktu B jest niedostępna. W celu wytyczenia łuku, obierzmy na danych kierunkach punkty M i N i zmierzmy kąty γ i δ (fig. 186), tudzież długość $MN = e$.

Następnie obliczymy $\beta = 180 - (\gamma + \delta) \dots\dots 9)$

i z trójkąta MBN

$$\left. \begin{aligned} A = MB &= \frac{e}{\sin \beta} \cdot \sin \delta \\ C = NB &= \frac{e}{\sin \beta} \cdot \sin \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 10)$$

Wreszcie kąt środkowy

$$\alpha = 180 - \beta = 180 - [180 - (\gamma + \delta)] = \gamma + \delta \dots \quad (11)$$

$$\text{więc: } BC = AB = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma + \delta}{2} \dots \quad (12)$$

Położenie początku i końca łuku, t. j. punktów A i C jest określone za pomocą równań 10 i 12, bo mając obli-

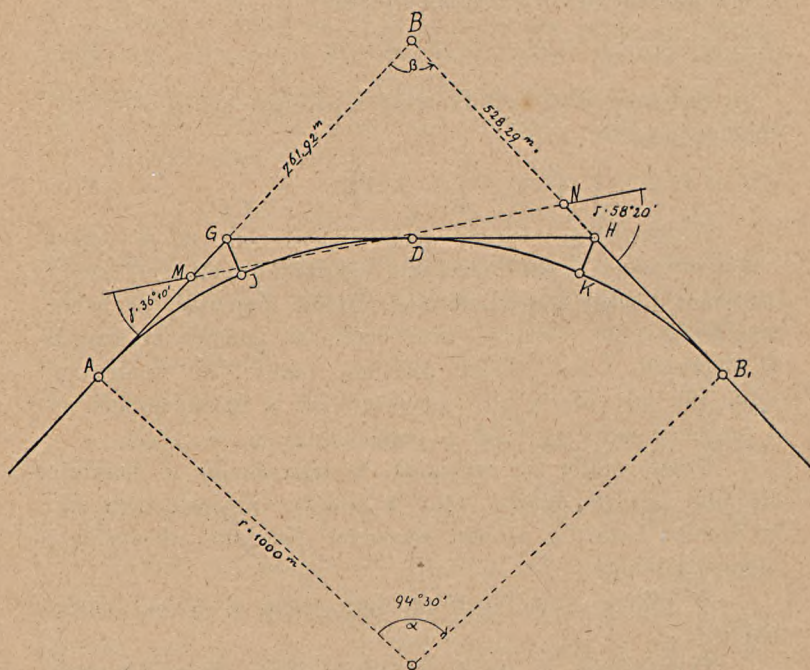


Fig. 186.

czoną odległość BC , odmierzymy następnie długość $AB - BM$ do punktu M i otrzymamy punkt A , a podobnie odmierzając różnicę $BC - BN$ do punktu N , dostaniemy punkt C .

Środek łuku D wytyczymy za pomocą stycznej pomocniczej, a mianowicie według oznaczeń na fig. 185 długość

$$AG = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} \quad (\text{równ. 7})$$

Odmierzwszy na stycznych od A i C w górę długość $AG = 437.41$ m otrzymamy wierzchołki G i H — a odciawszy na kierunku GH także 437.41 m dostaniemy środek łuku D .

Punkta J i K wytyczymy w znany sposób, odmierzając w odpowiednich kierunkach długość

$$GJ = HK = r \cdot \left(\sec \frac{\alpha}{4} - 1 \right) = 1000 \times 0.09148 = 91.48 \text{ m}$$

$$\text{Długość łuku } AJDKC = \frac{r \pi \alpha}{180} = 1649.34 \text{ m}$$

$$" \frac{1}{2} " \quad AJD = DKC = 824.67 \text{ m}$$

$$" \frac{1}{4} " \quad AJ = JD = DK = KC = 412.335 \text{ m.}$$

Przypuśćmy, że z pomiaru trasy wypadła, że początek łuku A jest w km $3 \text{ km} + 523.45 \text{ m}$ to punkt J ma położenie:

$$3 \text{ km} + 523.45 \text{ m} + 412.335 \text{ m} = 3 \text{ km} + 935.785 \text{ m}$$

punkt D ma położenie:

$$3 \text{ km} + 523.45 \text{ m} + 824.67 = 4 \text{ km.} + 348.12 \text{ m}$$

koniec łuku C ma położenie:

$$3 \text{ km} + 523.45 + 1649.34 = 5 \text{ km} + 172.79 \text{ m.}$$

2. Tyczenie punktów pośrednich za pomocą rzędnych i odciętych. (fig. 187).

Niech O oznacza środek koła, AC kierunek stycznej, AM część łuku, x odciętą, y rzędną punktu M na łuku.

Na podstawie figury, otrzymamy, dla danego x .

$$y = AN = r - ON \text{ — a z trójkąta } ONM$$

$$ON = \sqrt{r^2 - MN^2} = \sqrt{r^2 - x^2} \text{ więc:}$$

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} \dots \dots \dots 11)$$

Przyjmując różne wartości na x , otrzymamy dla danego r , wartości rzędnej y . Wartości rzędnych, dla różnych promieni i różnych x , zestawione są w tablicach n. p. przytoczonych poprzednio Sarrazin'a i Oberbecka

Zwykle wytycza się punkty pośrednie, przyjmując odcięte co 5, 10 lub 20 m i odcinając odpowiadające im rzędne. Im mniejszy jest promień łuku, tem gęściej trzeba go wytyczyć.

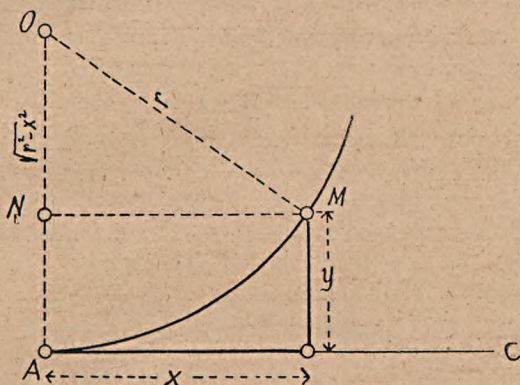


Fig. 187.

3. Tyczenie punktów pośrednich za pomocą współrzędnych biegunowych.

Sposób ten polega na znanem twierdzeniu geometrycznem, że kąty obwodowe δ, δ , (fig. 188) opierające się na równych łukach, są sobie równe, a zarazem każdy z nich równy jest połowie kąta środkowego γ , opartego na tym samym łuku.

Jeżeli więc $Ab = bc = cd = s$

to kąty $BAb = \frac{\gamma}{2} = bAc = cAd \dots = \delta$.

a ponieważ $\text{arc } \gamma = \frac{s}{r}$ więc:

$$\text{arc } \delta = \frac{s}{2r} \dots \dots \dots 12)$$

Kąt δ odpowiadający pewnemu łukowi, możemy też obliczyć z proporcji:

$$\gamma'' = 360 \times 60 \cdot 60'' = s = 2r\pi$$

$$\text{czyli } \gamma'' = \frac{180, 60, 60}{r \cdot \pi} s = \delta \frac{s}{r} = 264265 \frac{s}{r} \dots 13)$$

$$\text{a ponieważ } \delta = \frac{\gamma}{2} \text{ więc } \delta'' = 264265 \frac{s}{2r} \dots \dots \dots 14)$$

Wielkości kątów δ dla różnych długości s i różnych promieni, zestawione są w zwykłe używanych tablicach do tyczenia łuków.

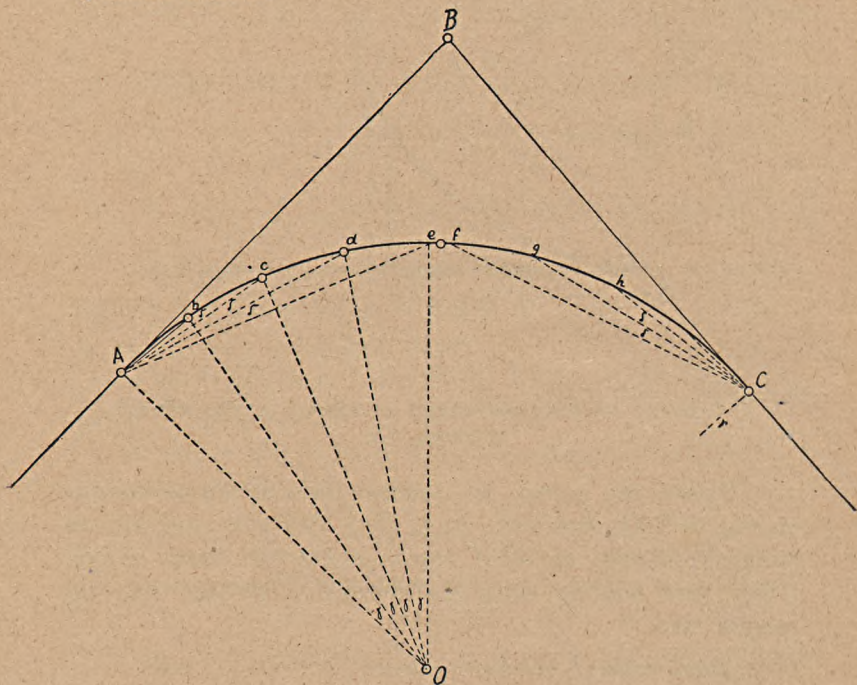


Fig. 188.

W celu wytyczenia punktów pośrednich, ustawiamy instrument n. p. w punkcie A , celujemy do wierzchołka B — i odczytujemy noniusz. Następnie, wyjmujemy z tablic wartość kąta δ dla danego r i danej długości s (s wynosi zwykle 5, 10, 15, 20 m) i dodając do odczytu kierunku AB — kąt δ , nastawiamy alhidadę na odczyt $(AB) + \delta$, czyli luneta wskazuje wtedy kierunek $A - b$; pomocnik zaś przesuwa taśmę, przytrzymaną w punkcie A , za jeden koniec,

trzymając na długości „s” szpilkę lub tyczkę, tak długo, aż ta znajdzie się w kierunku celowej $A - b$. To samo powtarza się na części $b - c$ i t. d. Gdy łuk jest długi, to tyczymy go z punktu początkowego aż do połowy części łuku między dwoma punktami wytyczonymi poprzednio, potem z następnego punktu J (fig. 185) wstecz do (1) i wprzód do (2) itd. W zwykłych warunkach, gdy łuk nie jest długi, tyczy się go z obu punktów końcowych, ku środkowi łuku.

Odczytywanie kątów na limbusie powinno być bardzo dokładne, bo n. p. błąd $1'$ na odległość $100\ m$ da już błąd $29\ cm$ w wytyczeniu punktu, a nadto błąd ten zależny jest jeszcze od poprzednich punktów z pewnym błędem wytyczonych, więc łatwo może dojść do znacznych przesunięć. Z tego powodu staramy się łuk podzielić na kilka części ściśle wytyczonymi punktami, a z nich na obie strony tyczyć tylko po kilka punktów pośrednich.

Nadto popełniamy błąd, odmierzając taśmą nie części łuków s , lecz cięciwy, przyjmując długości łuków za długości cięciw. Błędy te jednak będą nieszkodliwe w praktyce, gdy przyjmować będziemy małe wartości na s , nie przekraczające $\frac{1}{10}$ części promienia danego łuku, czyli gdy dla

promienia	200 m	300 m	500 m	1000 m
tyczyć będziemy punkta				
pośrednie co	20 m	30 m	50 m	100 m
zwykle jednak tyczy się co	10 m	10 m	20 m	20 m

zatem błędów wyżej wymienionych obawiać się nie trzeba.

4. Przy tyczeniu osi gościńców, nie wymaga się takiej dokładności wyznaczenia punktów łuku jak przy trasie kolei, łuki mają małe promienie i są wogóle nie długie. W takich wypadkach możemy obejść się bez pomiaru kąta teodolitem i postąpić w następujący sposób:

Odmierzmy na obu kierunkach, począwszy od wierzchołka B (fig. 189) równe odcinki $BB_1 = BB_2 = a = 20\ m$ zmierzmy prostą $B_1B_2 = 2\frac{b}{2}$ wyznaczmy punkt połowiący ją C ,

to na kierunku BC leżeć będzie środek łuku D . Wytyczmy $B_1 E$ prostopadle do AB i zmierzmy odcinek $B_1 E$ i BE_1 , natenczas z trójkątów podobnych OAB i $C_1 B_1 B$ otrzymamy $AB:r=a:c$ a stąd, gdy $B_1 E=c$, długości stycznej $AB=\frac{r \cdot a}{c}$ 15)

tę samą długość odetniemy na drugim kierunku i otrzymamy punkt A_1 t. j. koniec łuku.

Położenie punktu D wyznaczymy praktycznie w ten sposób, że zmierzmy cięciwę $AA_1=l$, w punkcie połowią-

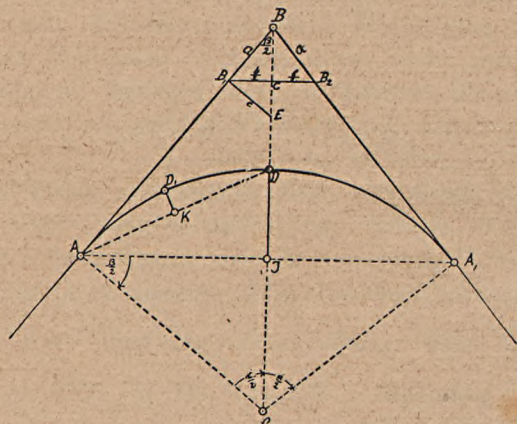


Fig. 189.

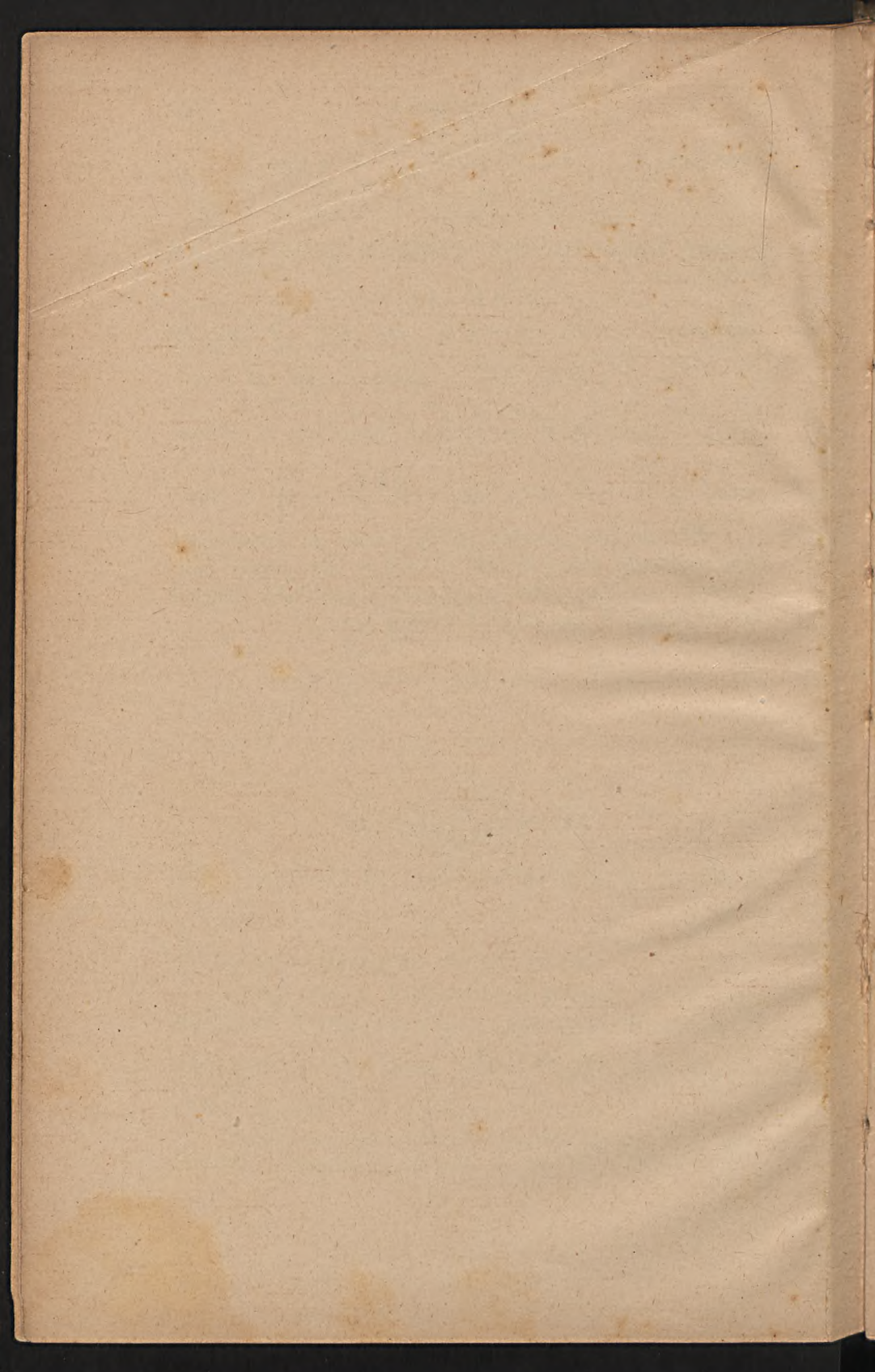
cym J wytyczymy prostopadłą, i odmierzymy na niej długość

$$y = \frac{l^2}{8r} \quad 16)$$

(na podstawie twierdzenia geometrycznego).

Dalsze punkty wyznaczymy w podobny sposób, n. p. zmierzmy cięciwę $AD=l_1$, w punkcie połowiącym ją K , odmierzymy na prostopadłej rzędnej długość $y_1 = \frac{l_1^2}{8r}$ i otrzymamy punkt D_1 i t. d.

Moglibyśmy także obliczyć długości cięciwy AA_1 , mianowicie, z trójkątów podobnych AJO i B_1CB ,



SPIS AUTORÓW DZIEŁ

z których korzystałem przy układaniu niniejszej pracy.

- Bauerfeind: „Elemente der Vermessungskunde“, 2 Bde, 8. Stuttgart. 1890.
- Baur F.: „Lehrbuch der niederen Geodesie“. Berlin. 1895.
- Dr Barfuss W.: „Handbuch der Feld-Messkunde“, 4 Aufl. von W. Jeep. Weimar. 1889.
- Franke J. H.: „Die Coordinaten-Ausgleichung... nach Näherungsmethoden in der Klein-Triangulirung und Polygonalmessung“. München. 1884.
- Dr Fuhrmann A.: „Über einige geodötische Instrumente...“ Leipzig. 1895.
- Gross H.: „Einfache Operationen der praktischen Geometrie“. Stuttgart. 1887.
- Jessen, W. u. V. Schmid: „Feldmessen und Nivelliren“. Wittenberg. 1879.
- Jordan W. Prof.: „Handbuch der Vermessungskunde“. — Stuttgart. 1897.
- Laska W. Dr.: „Lehrbuch der Vermessungskunde“. — Hannover. 1894.
- Sarrazin, H. u. O. Oberbeck: „Taschenbuch zum Abstecken v. Kreisbögen“. Berlin. 1896.
- Vogler: „Lehrbuch der prakt. Geometrie“, 1 u. 2 Theil. — Berlin. 1899.
- Witkowski A. W. Prof.: „Tablice matematyczno-fizyczne“ Warszawa. 1904.
-

SPIS ROZDZIAŁÓW.

Paragraf.	Str
1. Wstęp	1
2. Kształt ziemi	2
3. Jednostka długości	5
4. Porównanie miar	7
5. Miara kątowna	9
6. Poziom geodezyjny i pozorny	15
7. Plan i podziałka rysunku	17
8. Urządzenie austriackiego katastru	19
9. Prace polowe	23
10. Przyrządy do pomiaru długości	25
11. Przyrządy do tyczenia kątów o pewnej stałej wielkości (czyli t. zw. węgielnice)	30
12. Sprawdzenie i rektyfikacya węgielnic	43
13. Tyczenie linii prostych	43
14. Zagadnienia	45
15. Pomiar długości	54
16. Wyrównanie błędów pomiaru	59
17. Rozszerzanie się błędów	65
18. Średni błąd średniej arytmetycznej	69
19. Dokładność pomiaru prostej	73
20. Pomiar parami	74
21. O wadze spostrzeżeń	78
22. Zastosowanie pomiaru parami	84
23. Sprawdzanie łąt i taśm	88
24. Wyznaczenie punktu pośredniego na prostej o danej dłu- gości	90
25. Zagadnienia z pomiarów linii prostych	92
26. Zdjęcia małych obszarów	99
27. Planimetrya	105
28. Niwelacya	119

Paragraf.	Str.
29. Obliczenie powierzchni profili poprzecznych	138
30. O planach warstwowych	148
31. Libela	151
32. Przyrządy optyczne	157
33. Łata niwelacyjna	165
34. Przyrząd niwelacyjny	166
35. Rektyfikacja instrumentu niwelacyjnego	173
36. Błędy niwelacyi	187
37. Niwelacja podwójna, t. z. niwelacja z kontrolą	191
38. Wyrównanie niwelacyi	192
39. Instrument uniwersalny	196
40. Rektyfikacja instrumentu uniwersalnego	201
41. Noniusz	214
42. Pomiar kąta	216
43. Tachymetria	221
44. Obliczenie iloczynów $c \cos \alpha$ i t. d.	233
45. Zdjęcia tachymetryczne w polu	244
46. Rysowanie zdjęć tachymetrycznych	247
47. Trygonometryczny pomiar wysokości	251
48. Pomiar kątów poziomych	269
49. Wyrównanie pomiaru kątów w trójkącie	277
50. Błędy pomiaru kątów metodą repetycyjną lub seryami	280
51. Obliczenie współrzędnych punktu na płaszczyźnie	281
52. Obliczenie azymutów i współrzędnych trójkąta	284
53. Tryangulacja	290
54. Zdjęcia polygonowe	292
55. Polygony między punktami stałymi	295
56. Polygony zamknięte	305
57. Punkty węzłowe	309
58. Wyznaczenie południka i przykłady pomiaru polygonów	316
59. Zdjęcia za pomocą kompasu. Opis kompasu	325
60. Sprawdzanie kompasu	329
61. Pomiar polygonu za pomocą kompasu	330
62. O dokładności pomiaru kątów kompasem i wpływie długości boków na pomiar kątów	333
63. Graficzne wyrównanie zdjęć wieloboków zamkniętych	334
64. Tachymetryczne zdjęcia kompasem	336
65. Tyczenie łuków	342



*Opisane. Stady przy dwukr. promiane i przy je-
dnokr.*

$$\text{Tab. I } \Delta s = 0.00015 \cdot s + 0.005 \cdot T \cdot s + 0.015$$

S d		Dla uwzgl. pol. i wreszty			
		ΣS	$\Delta(h-d)$		
		Wkr.	cm.		
1	2				
4	3				
14	4	40	14	377	44
27	5	51	15	1030	75
45	6	63	16	1084	46
65	7	77	17	1140	47
88	8	92	18	1197	48
113	9	109	19	1255	49
140	10	127	20	1315	50
168	11	147	21	1376	51
198	12	167	22	1438	52
229	13	190	23	1502	53
262	14	213	24	1567	54
295	15	238	25	1634	55
329	16	265	26	1702	56
365	17	292	27	1772	57
404	18	322	28	1842	58
437	19	352	29	1914	
475	20	384	30		
513	21	417	31		
551	22	452	32		
591	23	488	33		
631	24	526	34		
671	25	565	35		
712		605	36		
		647	37		
		690	38		
		734	39		
		780	40		
		827	41		
		876	42		
		926	43		
		977			

