24 1915

A. Kalähne. Ein Verfahren zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Platten.

Überreicht vom Verfasser.

Professor Kalähne
Oliva bei Danzig

Sonderabdruck

aus den

Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft

Braunschweig
Friedr. Vieweg & Sohn

Ein Verfahren zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Platten;

von A. Kalähne.

(Eingegangen am 28. Dezember 1914.)

---

1. Wesen des Verfahrens. Das hier vorgeschlagene Verfahren zur Bestimmung der Elastizitätskonstanten von Platten ist ein akustisches, d. h. es beruht auf der Bestimmung von Schwingungszahlen, wobei aber die Beschränkung auf das rein akustische Gebiet der hörbaren Schwingungen nicht nötig ist, sondern prinzipiell ebensogut subakustische (langsamere), und supraakustische (schnellere) benutzt werden können. Aus naheliegenden Gründen ist das Arbeiten mit Schwingungen, die vom Ohr als Töne wahrgenommen werden, im allgemeinen am bequemsten, und wird daher hauptsächlich benutzt werden.

Meßmethoden für plattenförmige Körper sind nur in geringer Zahl vorhanden und praktisch wenig erprobt worden. Deshalb kann ein neues Verfahren auf diesem Gebiet sich vielleicht wertvoll erweisen, besonders da es manche Vorzüge aufweist. Diese Vorzüge sind erstens eine sehr einfache Versuchsanordnung und Beobachtungsmethode, zweitens die Möglichkeit, an einer und derselben Platte gleichzeitig sowohl den Dehnungs-, als auch den Torsionsmodul — letzteren indirekt durch Vermittelung der POISSONschen Elastizitätszahl μ — zu bestimmen. Wegen der Einfachheit der Versuchsanordnung und der Möglichkeit, auch verhältnismäßig kleine Platten anzuwenden, eignet sich das Verfahren voraussichtlich gut zur Untersuchung des Temperatureinflusses auf die elastischen Eigenschaften der Körper, auch bis zu tiefen Temperaturen hinab. Vielleicht kann es außer zu rein wissenschaftlichen Untersuchungen auch in der Technik zur Messung der Elastizitätskonstanten von Blechen Verwendung finden, wenn dabei nicht die bei solchem Material unvermeidliche Inhomogenität und Anisotropie zu sehr stören.

Das Verfahren benutzt die freien oder Eigenschwingungen von Platten mit freiem Rande und stützt sich auf die für diese theoretisch abgeleiteten Formeln. Für kreisförmige Platten hat

KIRCHHOFF[1]), für quadratische und rechteckige RITZ[2]) die Theorie entwickelt. Ich habe zunächst kreisförmige Platten in Betracht gezogen, für welche die Theorie einfacher ist, und für sie die nötigen Zahlenrechnungen ausgeführt, die die praktische Anwendung des Verfahrens ermöglichen.

Der Kern des Verfahrens steckt in der aus den Formeln für die Frequenzen der Eigenschwingungen ersichtlichen Tatsache, daß die absoluten Werte der Schwingungszahlen — außer von der Gestalt und den Dimensionen der Platte — von dem Dehnungsmodul (YOUNGschen Elastizitätsmodul) E und der POISSONschen Elastizitätszahl μ abhängen, die den Dehnungsmodul mit dem Torsionsmodul F durch die Formel

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)} \qquad 1)$$

verbindet, daß aber die relativen Schwingungszahlen, also das Verhältnis der Frequenzen der verschiedenen Teiltöne nur von μ, nicht auch von E abhängt. Man kann also durch Bestimmung des Frequenzverhältnisses zweier — oder zur Kontrolle mehrerer — Teiltöne zuerst μ und dann mit dem so gefundenen μ-Werte aus der absolut gemessenen Frequenz E berechnen.

Wenn das Plattenmaterial homogen und isotrop und die Platte genau kreisrund und überall gleich dick ist, so sind die möglichen Knotenlinien Durchmesser und Kreise, und die sekundliche Frequenz eines Teiltones mit p Knotendurchmessern und h Knotenkreisen ist

$$N_{ph} = \left(\frac{\beta R}{2}\right)^2 \frac{\delta}{R^2 \pi} \sqrt{\frac{E}{3\varrho(1-\mu^2)}}. \qquad 2)$$

Darin bedeutet, abgesehen von den schon definierten Größen E und μ, N_{ph} die sekundliche Frequenz der Schwingung, ϱ die Dichte des Materials, R den Radius, δ die Dicke der Platte[3]) und $\frac{\beta R}{2}$

[1]) G. KIRCHHOFF, Ges. Abhandl., S. 237, Leipzig 1882 (J. A. Barth); Crelles Journ. **40**, 51, 1850; Pogg. Ann. **81**, 258, 1850.

[2]) W. RITZ, Ann. d. Phys. (4) **28**, 737, 1909.

[3]) In der Darstellung der KIRCHHOFFschen Theorie, die ich im II. Bande meiner Grundzüge der math.-phys. Akustik (Leipzig 1913, B. G. Teubner) gegeben habe, ist statt der ganzen Plattendicke δ die halbe Dicke $D = \delta/2$ benutzt. Im übrigen stimmen die dortigen Bezeichnungen mit den jetzigen überein; von den KIRCHHOFFschen weichen sie größtenteils ab.

einen Koeffizienten, der die verschiedenen Teiltöne unterscheidet, also von p und h, außerdem aber noch von μ abhängt. Diesen Koeffizienten, den ich als Frequenzparameter bezeichnen will, muß man als Funktion von μ kennen, um das vorgeschlagene Verfahren zur Berechnung von μ anwenden zu können. Er ergibt sich als Wurzel einer algebraischen Gleichung von unendlich hohem Grade, die also unendlich viele diskrete Wurzelwerte besitzt, entsprechend den unendlich vielen möglichen ganzzahligen Werten des Index h, die sich von 0 bis ∞ erstrecken.

2. Tabellen und Kurven zur praktischen Anwendung des Verfahrens. Diese Gleichung ist die Gleichung 21) des § 4 der KIRCHHOFFschen Abhandlung, in der x unserem Frequenzparameter $\frac{\beta R}{2}$ entspricht. Sie hat die Form

$$(4\gamma-1)p^2(p-1)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{E_k}{M_k}x^{4k}=0, \tag{3}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} E_k &= -p^2(p^2-1)+4\gamma(p+2k)(p+2k+1) \\ &\quad [p(p-1)-2k+4\gamma k(p+k)], \\ M_k &= 1.2.3\ldots k.(p+1)(p+2)\ldots(p+k).(p+1) \\ &\quad (p+2)\ldots(p+2k+1), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und

$$\gamma=(1-\mu)^{-1} \tag{4a}$$

ist. Die Gleichung läßt sich (für $p=0$ und $p=1$ nach vorheriger Division durch x^4) auf die Form bringen:

$$1-\frac{x^4}{A_1}+\frac{x^8}{A_2}-\frac{x^{12}}{A_3}+\cdots=0, \tag{5}$$

wobei A_1, $A_2\ldots$ gewisse von γ, also von der Elastizitätszahl μ, und von der Zahl der Knotendurchmesser p abhängige Größen sind, die mit steigendem Index schnell wachsen. Deshalb kann man zur Berechnung der niedrigsten Wurzeln, auf die es allein ankommt, mit wenigen Gliedern der Gleichung auskommen. Ich habe außer bei dem Fall $p=1$, wo auch noch das Glied mit A_4 herangezogen werden mußte, nur die Koeffizienten A_1 bis A_3 gebraucht. Doch sind schon damit die Rechnungen recht unbequem und weitläufig.

Tabelle 1.

Kleinste Wurzeln $x^4 \left(= \frac{\beta^4 R^4}{16}\right)$ der Gleichung 5), zugehörige Frequenzkoeffizienten $x^2 \left(= \frac{\beta^2 R^2}{4}\right)$ der Formel 2) und Frequenzverhältnis der Obertöne N_{p1} mit $p = 0$ und $p = 1$ zum zugehörigen Grundton N_{20} mit gleichem μ (fettgedruckte Zahlen).

	$\mu = 0$	$\mu = 0{,}1$	$\mu = 0{,}2$	$\mu = 0{,}25$	$\mu = 0{,}33$	$\mu = 0{,}4$	$\mu = 0{,}5$	
$\left(\frac{\beta R}{2}\right)^4 = x^4$	4,2476	4,5423	4,8090	4,9394	5,1484	5,3088	5,5385	$p = 0$
$\left(\frac{\beta R}{2}\right)^2 = x^2$	2,0610	2,1313	2,1929	2,2225	2,2690	2,3041	2,3534	
$\frac{N_{01}}{N_{20}}$	**1,3398**	**1,4404**	**1,5511**	**1,6131**	**1,7284**	**1,8349**	**2,0286**	
$\left(\frac{\beta R}{2}\right)^4 = x^4$	25,1496	25,5050	25,8633	26,0335	26,3101	26,5253	26,8386	$p = 1$
$\left(\frac{\beta R}{2}\right)^2 = x^2$	5,0149	5,0502	5,0856	5,1023	5,1293	5,1503	5,1806	
$\frac{N_{11}}{N_{20}}$	**3,2601**	**3,4131**	**3,5972**	**3,7032**	**3,9072**	**4,1016**	**4,4657**	
$\left(\frac{\beta R}{2}\right)^4 = x^4$	2,366 24	2,189 43	1,998 77	1,898 32	1,723 38	1,576 75	1,345 82	$p = 2$
$\left(\frac{\beta R}{2}\right)^2 = x^2$	1,538 26	1,479 67	1,413 78	1,377 80	1,312 78	1,255 69	1,160 09	
$\frac{N_{20}}{N_{20}}$	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	

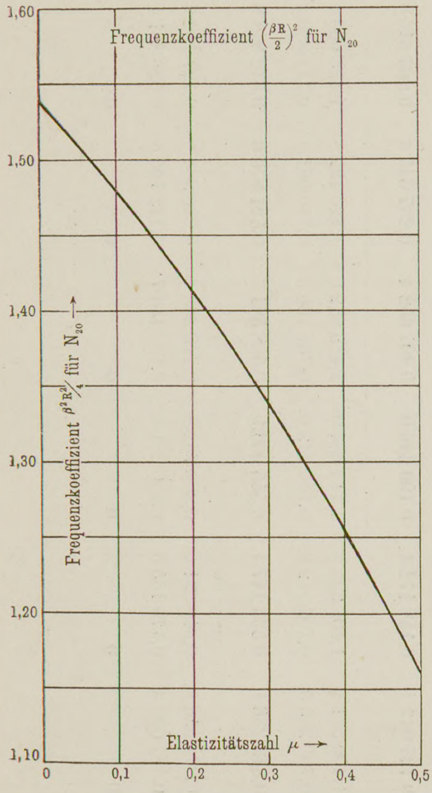
Tabelle 2.

Dekadische Logarithmen der kleinsten Wurzeln x^4 von Gleichung 5), der Frequenzkoeffizienten $x^2 = \frac{\beta^2 R^2}{4}$ von Gleichung 2) und der Frequenzverhältnisse der Obertöne zum Grundton (fettgedruckt). Vgl. Tabelle 5.

	$\mu = 0$	$\mu = 0,1$	$\varphi = 0,2$	$\mu = 0,25$	$\mu = 0,33$	$\mu = 0,4$	$\mu = 0,5$	
$\log x^4$	0,628 143 6	0,657 275 8	0,682 054 8	0,693 674 2	0,711 672 3	0,724 996 4	0,743 392 2	$p = 0$
$\log x^2$	0,314 071 8	0,328 637 9	0,341 027 4	0,346 837 1	0,355 836 2	0,362 498 2	0,371 696 1	
$\log \frac{N_{01}}{N_{20}}$	**0,127 042 4**	**0,158 472 4**	**0,190 646 0**	**0,207 652 4**	**0,237 645 6**	**0,263 616 8**	**0,307 203 5**	
$\log x^4$	1,400 531 1	1,406 625 3	1,412 684 0	1,415 532 6	1,420 122 5	1,423 660 4	1,428 759 8	$p = 1$
$\log x^2$	0,700 265 5	0,703 312 6	0,706 342 0	0,707 766 3	0,710 061 2	0,711 830 2	0,714 379 9	
$\log \frac{N_{11}}{N_{20}}$	**0,513 236 1**	**0,533 147 1**	**0,555 9606**	**0,568 581 6**	**0,591 870 6**	**0,612 948 8**	**0,649 887 3**	
$\log x^4$	0,374 058 9	0,340 331 0	0,300 762 8	0,278 369 4	0,236 381 1	0,197 762 8	0,128 985 3	$p = 2$
$\log x^2$	0,187 029 4	0,170 165 5	0,150 381 4	0,139 184 7	0,118 190 6	0,098 881 4	0,064 492 6	
$\log \frac{N_{20}}{N_{20}}$	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	

Die Ergebnisse enthält die Tabelle 1. Für die Werte $\mu = 0$, 0,1, 0,2, 0,25, 0,33, 0,4, 0,5 sind daselbst die Wurzeln $x^4 = \left(\frac{\beta R}{2}\right)^4$ und ihre Quadratwurzeln $x^2 = \left(\frac{\beta R}{2}\right)^2$ für $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, d. h. für Schwingungen ohne, mit einem und mit zwei Knotendurchmessern angegeben.

Fig. 1.



Die Werte $\left(\frac{\beta R}{2}\right)^2$ sind nach Gleichung 2) direkt den sekundlichen Frequenzen proportional; der Quotient je zweier in einer Vertikalspalte stehender Werte dieser Größe gibt daher das entsprechende Frequenzverhältnis an. Dieses Verhältnis, unter Zugrundelegung der Frequenz des Grundtons N_{20} als Divisor, ist in den fettgedruckten Zahlen der Tabelle angegeben. Da man wohl immer den Grundton (mit zwei Knotendurchmessern, ohne Knotenkreise) zur Messung mitbenutzen wird, so ist es natürlich das Nächstliegende, alle Intervalle auf ihn zu beziehen, wie es auch Kirchhoff getan hat. Die Wahl der beiden Werte 0,25 und $0{,}33 = {}^1/_3$ für μ rechtfertigt sich dadurch, daß Kirchhoff sie seinen Rechnungen zugrunde gelegt hat, deren Resultate hier als Kontrolle der Richtigkeit unserer Rechnungen dienen konnten. $\mu = 0$ und $\mu = 0{,}5$ sind die Grenzen, zwischen denen die Werte μ liegen. Zur besseren Vergleichung mit den Kirchhoffschen Zahlen sind in Tabelle 2 die dekadischen Logarithmen der Zahlen von Tabelle 1 in derselben Anordnung mitgeteilt.

Um die so berechneten Werte benutzen zu können, müssen auch die Zwischenwerte bekannt sein. Deshalb sind die hauptsächlich in Betracht kommenden Größen, nämlich das Quadrat des Frequenzparameters $\left(\frac{\beta R}{2}\right)^2$, sowie die Frequenzverhältnisse N_{01}/N_{20} und N_{11}/N_{20} in den Figuren 1 bis 5 in Kurvenform mit μ als Abszissen dargestellt. Aus Figur 4 oder 5 ist zu einem beobachteten Frequenzverhältnis der zugehörige Wert von μ zu entnehmen; mit diesem erhält man dann nach einer der Figuren 1 bis 3 den Frequenzkoeffizienten $\left(\frac{\beta R}{2}\right)^2$, der in Formel 2) zur Berechnung von E einzusetzen ist.

Fig. 2.

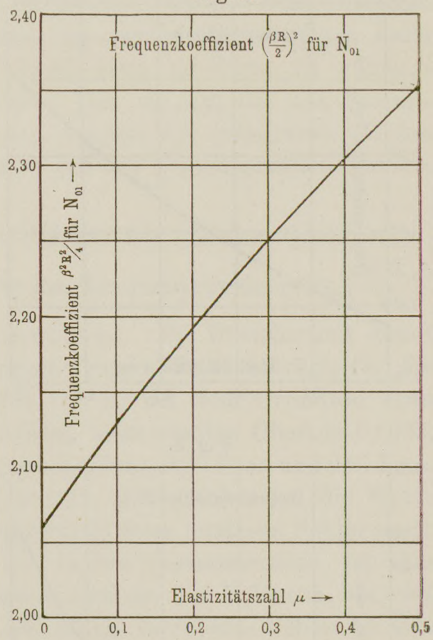
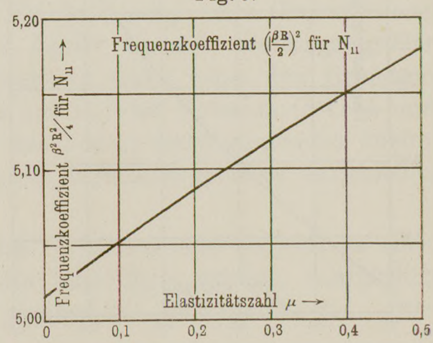


Fig. 3.



3. Genauigkeit des Verfahrens. Es sei noch ein Wort über die bei dem Verfahren erreichbare Genauigkeit gesagt. Die Bestimmung der Schwingungszahl kann im allgemeinen mit sehr großer Genauigkeit erfolgen. Es ist z. B. durch Vergleichung mit geeichten Klangkörpern leicht möglich, mittlere Schwingungsfrequenzen von etwa 200 bis 500 Schwing./sec auf 0,2 bis 0,5 Schwing./sec zu messen, d. h. mit einer Genauigkeit von etwa $^1/_{1000}$ ihres Wertes. Die bei den Plattentönen wirklich erreichte Genauigkeit in der Frequenzbestimmung wird im allgemeinen

dadurch verkleinert werden, daß infolge von Inhomogenität und Anisotropie des Materials sowie Ungleichmäßigkeiten in der Dicke und der Kreisform der Platten zu jedem System von Knotenlinien nicht ein einziger Ton, sondern zwei Töne mit geringem Unterschied der Schwingungszahlen gehören, deren Mittelwert dann der Berechnung zugrunde gelegt werden muß. Die so entstehende Unsicherheit kann unter Umständen sehr groß werden, jedenfalls mehrere Hundertstel betragen; sie muß natürlich durch sorgfältige Wahl des Versuchsmaterials möglichst verkleinert werden und kann dann unwesentlich sein.

Fig. 4.

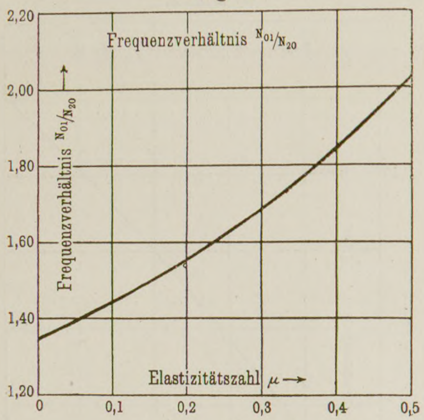
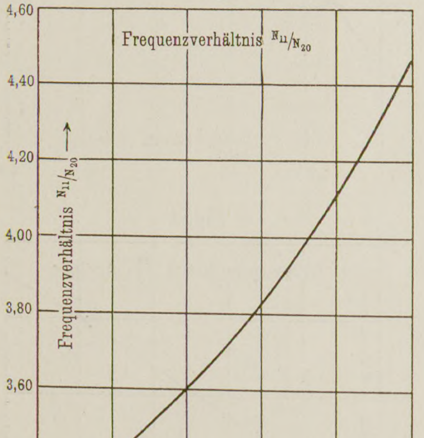


Fig. 5.



Wesentlich ist für uns die Abschätzung der bei der Bestimmung von μ aus dem beobachteten Frequenzverhältnis erreichbaren Genauigkeit. Bei dem ersten Oberton ist der Anstieg des Frequenzverhältnisses (N_{01}/N_{20}) im Mittel etwa 0,014 für eine Änderung der Elastizitätszahl μ um $\Delta\mu = 0{,}01$. Ist also dies Verhältnis auf 0,014, d. h. auf etwa $^3/_4$ bis 1 Proz. seines Wertes genau bekannt, so läßt sich daraus μ bis auf 0,01 genau bestimmen. Dies bedeutet eine Genauigkeit von etwa 10 Proz. für μ, wenn $\mu = 0{,}1$, dagegen 2,5 Proz., wenn es 0,4 beträgt. Es kommt aber nicht sowohl μ selbst, als vielmehr die Werte von

$1+\mu$ und $1-\mu$ bzw. $1-\mu^2$ in Betracht. Für $1+\mu$ ist die durch den angenommenen Fehler von 0,01 im Werte von μ erzeugte Unsicherheit nur etwa 0,7 bis 1 Proz.; für $1-\mu$ ist sie natürlich größer, aber doch höchstens 2 Proz., wenn nämlich $\mu = 0{,}5$ ist. Für $1-\mu^2$ endlich ist sie im ungünstigsten Falle (wenn μ in der Nähe von 0,5 liegt) etwa 1,3 Proz., im günstigsten (bei kleinem μ) etwa 1 Proz. Das ist also der aus der ungenauen Kenntnis des Wertes von μ unter der Quadratwurzel von Gleichung 2) herrührende Fehler bei der angenommenen Fehlergrenze für μ.

Dazu kommt freilich noch die aus der gleichen Quelle stammende Unsicherheit der Werte des Frequenzkoeffizienten $\left(\frac{\beta R}{2}\right)^2$, der ebenfalls in Formel 2) enthalten ist. Die Unsicherheit dieser aus den Kurven 1 bis 3 zu entnehmenden Werte beträgt, für die angenommene Fehlergrenze 0,01 von μ, bei dem Grundton etwa 0,0076, beim ersten Oberton 0,0058, beim zweiten Oberton 0,0033, d. h. in Prozenten ausgedrückt etwa 0,5 Proz., 0,25 Proz. und 0,07 Proz. Da für die Berechnung von E, auf die es abgesehen ist, die Werte zu quadrieren sind, so verdoppeln sich diese letzteren Fehler noch. Der Gesamtfehler, der sich aus beiden zusammensetzt, ist aber beim Grundton nicht die Summe, sondern die Differenz, da, wie aus dem Verlauf der Kurven ersichtlich, hier beide Fehler in entgegengesetztem Sinne wirken; er wird also im allgemeinen kleiner als 1 Proz. anzusetzen sein. Bei Benutzung eines Obertones zur Berechnung von E kann der Fehler danach allerdings größer werden. Man wird deshalb wohl in erster Linie den Grundton dazu benutzen, was sich auch aus anderen Gründen (Stärke und verhältnismäßig lange Dauer des Tones) meist empfehlen dürfte. Doch wird diese Frage erst durch Versuchsergebnisse entschieden werden können.

Messungen zur Prüfung des Verfahrens sind bis jetzt an einer Zink- und einer Messingplatte ausgeführt worden, ausführlich jedoch nur an ersterer. Sie ergaben für Zink die Werte:

$$E = 11\,010 \,.\, 10^8 \,\frac{\text{Dyn}}{\text{cm}^2} = 11\,120 \,\frac{\text{kg. Gew.}}{\text{mm}^2}$$

$$F = 4\,634 \,.\, 10^8 \quad " \quad = 4\,723 \quad "$$

$$\mu = 0{,}188 \pm 0{,}009$$

bei Zugrundelegung des Grundtones zur Berechnung von E. Mit dem ersten Oberton erhält man:

$$E = 10970 \,.\, 10^8 \frac{\mathrm{Dyn}}{\mathrm{cm}^2},$$

d. h. einen Wert, der nur um 0,4 Proz. von jenem abweicht; μ ist aus dem Frequenzverhältnis des ersten Obertones zum Grundton abgeleitet.

Über diese und weitere Versuche mit anderem Plattenmaterial wird an anderer Stelle berichtet werden, wobei noch gewisse hier gar nicht oder nur flüchtig berührte, das Verfahren betreffende Fragen eingehend behandelt werden sollen.

Danzig-Langfuhr, Technische Hochschule, Dezember 1914.
