

## 5. Gittergeister bei unperiodischen Teilungsfehlern; von Eberhard Buchwald

1. Gittergeister, die von periodischen Teilungsfehlern herühren, als bekannteste unter ihnen die nach Rowland benannten, sind vielfach untersucht worden. Daß sich auch diesem Probleme noch neue Seiten abgewinnen lassen, zeigen jüngere Arbeiten wie die von Sparrow<sup>1)</sup>, der nach der Cornuschen Methode eine systematische Übersicht über die unvollkommenen Gitter gibt, und die von Minnaert.<sup>2)</sup> Sparrow behandelt auch kurz unperiodische Fehler<sup>3)</sup>; sie erzeugen einen kontinuierlichen Untergrund im Beugungsbilde, sowohl die zufälligen Abweichungen in der Furchenlage, die unsystematische Phasenfehler in das Beugungsphänomen hineintragen, als die Zufälligkeiten der Furchenform mit ihren unsystematischen Amplitudenfehlern.

Nicht betont wird von Sparrow, daß der Untergrund, den wir das „Opaleszenzfeld“ nennen, in seiner idealen Intensitätsverteilung — im ersten Falle ansteigend mit wachsenden Beugungswinkeln, im zweiten von konstanter Intensität — nicht zu beobachten ist. Das wäre nur zu erwarten, wenn die Gitterfurchen oder -spalte die sehr unwahrscheinliche Verteilung genau nach dem Fehlergesetz aufwiesen. Im allgemeinen aber sorgen die Abweichungen von dieser Verteilung dafür, daß auch im Opaleszenzfeld Abweichungen von der Idealintensität, „Intensitätsschwankungen“, auftreten, denen zufolge es als Aneinanderreihung hellerer und dunklerer Streifen, „granuliert“ oder „kanneliert“ erscheint. Die Größe der Intensitätsschwankungen läßt sich berechnen<sup>4)</sup> und erweist sich als beträchtlich:

- 1) C. M. Sparrow, *Astrophys. Journ.* **49**. S. 65. 1919.
- 2) M. Minnaert, *Versl. Amsterdam* **30**. S. 257. 1921.
- 3) a. a. O. S. 82f., 87f.
- 4) E. Buchwald, *Phys. Ztschr.* **26**. S. 672. 1925. Behandelt wird der Fall der unsystematischen Fehler der Spaltlage.



liege, m. a. W. die Wahrscheinlichkeit des Wertepaares  $X_p Y_p$ .  
Mit (9) und (3) wird

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} a_p &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \mu (p g + \xi_p) e^{-h^2 \xi_p^2} d \xi_p \\ &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cos \mu p g \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \mu \xi_p \cdot e^{-h^2 \xi_p^2} d \xi_p \\ &= e^{-\frac{\mu^2}{4h^2}} \cos \mu p g^1) \end{aligned} \right.$$

Weiter bilden wir hieraus

$$a'_p = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_p - a_p)^2 d w_p$$

wofür wegen (11) und

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d w_p = 1$$

geschrieben werden kann

$$\begin{aligned} a'_p &= \int_{-\infty}^{+\infty} X_p^2 d w_p - a_p^2 \\ &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 \mu (p g + \xi_p) e^{-h^2 \xi_p^2} d \xi_p - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \cos^2 \mu p g \\ &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \{1 + \cos 2\mu (p g + \xi_p)\} e^{-h^2 \xi_p^2} d \xi_p - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \cos^2 \mu p g \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-\frac{\mu^2}{h^2}} \cos 2\mu p g \right) - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \cos^2 \mu p g \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) + \frac{1}{2} \cos 2\mu p g \left( e^{-\frac{\mu^2}{h^2}} - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \cos 2\mu p g \right) \end{aligned}$$

Hiermit wird endlich definitionsgemäß

1) Vgl. z. B. D. Bierens de Haan, *Nouvelles Tables d'Intégrales Définies*. Leyden 1867. S. 385.

$$A = \sum_p^{1..N} a_p' = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \left( N - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sum_p^{1..N} \cos 2\mu p g \right)$$

und unter Benutzung einer bekannten Formel für die letzte Summe<sup>1)</sup>

$$(14) \quad A = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \left( N - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \frac{\cos(N+1)\mu g \sin N\mu g}{\sin \mu g} \right)$$

In der gleichen Weise findet man  $B$ , indem man nacheinander bildet

$$(15) \quad b_p = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_p dw_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \mu (p g + \xi_p) \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \xi_p^2} d\xi_p$$

$$(16) \quad = e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sin \mu p g$$

dann

$$\begin{aligned} b_p' &= \int_{-\infty}^{+\infty} (Y_p - b_p)^2 dw_p = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_p^2 dw_p - b_p^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \left( 1 + e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \cos 2\mu p g \right) \end{aligned}$$

schließlich

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} B &= \sum_p^{1..N} b_p' \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) \left( N + e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \frac{\cos(N+1)\mu g \sin N\mu g}{\sin \mu g} \right) \end{aligned} \right.$$

Zur Bildung des  $C$  ist auszugehen von

$$c_p' = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_p - a_p)(Y_p - b_p) dw_p$$

mit (11), (13) und (15)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X_p Y_p dw_p - a_p b_p$$

mit (12) und (16)

1) Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einf. in d. höhere Mathematik. 1. Bd. Leipzig 1919. S. 297.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin 2\mu(pg + \xi_p) e^{-h^2 \xi_p^2} d\xi_p - \frac{1}{2} e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sin 2\mu pg \\
 &= \frac{1}{2} e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sin 2\mu pg - \frac{1}{2} e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sin 2\mu pg \\
 &= -\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right) e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sin 2\mu pg
 \end{aligned}$$

$C$  ist definiert durch

$$C = \sum_p^{1..N} c_p' = -\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right) e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \sum_p^{1..N} \sin 2\mu pg$$

was — wieder mit Benutzung einer bekannten Summenformel<sup>1)</sup> —

$$(18) \quad C = -\frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right) e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \frac{\sin(N+1)\mu g \sin N\mu g}{\sin \mu g}$$

gesetzt werden kann.

5. Damit sind die Koeffizienten in dem Markoffschen Wahrscheinlichkeitsausdruck (10) gefunden. Die Rechnungen der vorigen Nummer geben weiter die Möglichkeit, die für das Folgende benötigten *Koordinaten des*  $\bar{\mathfrak{C}}$ , des Mittelwertes von  $\mathfrak{C}$ , zu bestimmen.  $a_p$  nämlich ist nach (11) der Mittelwert von  $X_p$ , d. i. der  $X$ -Koordinate von  $\mathfrak{C}_p$ . Also ist

$$(19) \quad a^* = \sum_p^{1..N} a_p$$

der Mittelwert der  $X$ -Koordinate von  $\mathfrak{C} = \sum \mathfrak{C}_p$ , d. h. die  $X$ -Koordinate von  $\bar{\mathfrak{C}}$ .

Ebenso ist nach (15)  $b_p$  der Mittelwert der  $Y$ -Koordinate von  $\mathfrak{C}$ ; also wird

$$b^* = \sum_p^{1..N} b_p$$

der Mittelwert der  $Y$ -Koordinate von  $\mathfrak{C}$ , d. h. die  $Y$ -Koordinate von  $\bar{\mathfrak{C}}$ .

Die Ausrechnung liefert

1) Vgl. H. v. Mangoldt, a. a. O.

$$(20) \quad a^* = e^{-\frac{\mu^2}{4h^2}} \sum_p^{1..N} \cos \mu p g = e^{-\frac{\mu^2}{4h^2}} \cos \frac{(N+1)\mu g}{2} \frac{\sin \frac{N\mu g}{2}}{\sin \frac{\mu g}{2}}$$

$$(21) \quad b^* = e^{-\frac{\mu^2}{4h^2}} \sum_p^{1..N} \sin \mu p g = e^{-\frac{\mu^2}{4h^2}} \sin \frac{(N+1)\mu g}{2} \frac{\sin \frac{N\mu g}{2}}{\sin \frac{\mu g}{2}}$$

$\overline{\mathfrak{G}}^2$  wird hiernach

$$(22) \quad \overline{\mathfrak{G}}^2 = a^{*2} + b^{*2} = e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \frac{\sin^2 \frac{N\mu g}{2}}{\sin^2 \frac{\mu g}{2}}$$

was zu unterscheiden ist von  $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{J}$ . Letzteres ergibt sich durch einen Vergleich von (5) mit (14), (17) und (22) zu

$$(23) \quad \overline{J} = A + B + a^{*2} + b^{*2}$$

und zwar stellt  $A + B$  das Opaleszenzfeld,  $a^{*2} + b^{*2}$  das Fraunhofersche Beugungsbild dar.

6. Eine Abschätzung der Größe von  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $A$ ,  $B$  gestattet gewisse Vereinfachungen.

$a^*$  wie  $b^*$  enthält nach (20) und (21), je mit zwei Faktoren multipliziert, die kleiner als 1 sind, den aus der klassischen Beugungstheorie bekannten Quotienten der beiden Sinus, der in dem für die Geister allein wichtigen Gebiete zwischen den Hauptmaximis teils verschwindet (nämlich in den Nebenminimis), teils sich so wenig über den Nullwert erhebt (in den Nebenmaximis, von denen in der Nähe der Hauptmaxima abgesehen), daß die überhaupt bemerkbaren Geisterintensitäten von anderer Größenordnung sein müssen als  $a^{*2} + b^{*2}$ . Wir fassen daher im folgenden den Markoffschen Ausdruck (10) nicht als die Wahrscheinlichkeit dafür auf, daß der Vektor  $\mathfrak{G}$  die Koordinaten  $X$ ,  $Y$  von seinem Mittelwert aus gerechnet hat, also die Koordinaten  $X + a^*$ ,  $Y + b^*$ , sondern daß  $\mathfrak{G}$  die Koordinaten  $X$ ,  $Y$  hat.

Ähnliche Quotienten von sinus, auch mit Faktoren kleiner als 1 multipliziert, nur gegenüber  $a^*$  und  $b^*$  von verdoppelten Argumenten zu nehmen, treten in  $A$ ,  $B$  und  $C$  auf — (14), (17), (18) — in  $A$  und  $B$  als Term neben  $N$ , in  $C$  allein. Wir setzen wieder vereinfachend

$$(24) \quad \begin{cases} A = B = \left(1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}\right) \frac{N}{2} \\ C = 0 \end{cases}$$

was in den Nebenminimis genau, in den Nebenmaximis aus den angeführten Gründen annähernd gilt. Wieder müssen wir dabei von der Nachbarschaft der Hauptmaxima absehen, außerdem aber noch, wenigstens hinsichtlich  $A$  und  $B$ , von den Mittelstellen zwischen zwei Hauptmaximis. Denn hier nimmt  $\mu g$  die Werte  $180^\circ, 540^\circ \dots$  an:  $\sin \mu g$  wird ebenso wie  $\sin N\mu g$  gleich Null, der Quotient der Sinus gleich  $N$ . In  $C$  ist dieser Quotient mit  $\sin(N+1)\mu g$  multipliziert, was Null ist, so daß  $C$  auch hier in Strenge verschwindet. Aber in  $A$  und  $B$  tritt  $\cos(N+1)\mu g$  als Faktor des Sinusquotienten auf, d. h.  $\pm 1$ :  $A$  und  $B$  nehmen also an diesen Mittelstellen ganz verschiedene Werte an, ebenso wie unmittelbar neben den Hauptmaximis. Diese bedenklichen Winkelbereiche sind aber so eng begrenzt, daß sie für das Gesamtgebiet nicht ins Gewicht fallen und im folgenden keine gesonderte Behandlung erfahren.

Mit den Vereinfachungen dieser Nummer folgt aus dem Markoffschen Ausdruck als die Wahrscheinlichkeit, daß der Endpunkt von  $\mathcal{C}$  die Koordinaten  $X, Y$  hat,

$$(25) \quad \frac{1}{2\pi A} e^{-\frac{X^2 + Y^2}{2A}} dX dY$$

Die Verteilungsfunktion enthält  $X$  und  $Y$  jetzt nur in der Kombination  $X^2 + Y^2 = r^2$ , wo  $r^2$  die Intensität darstellt. Einem bestimmten  $r^2$ , also allen Punkten eines Kreises um den Koordinatenanfangspunkt, kommt im Gegensatz zu dem nicht vereinfachten Markoffschen Ausdrucke der gleiche Wahrscheinlichkeitswert zu. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Intensität einen Wert zwischen  $r^2$  und  $(r + dr)^2$  habe, wird unter Einführung des ringförmigen Elementarbereichs  $2\pi r dr$ :

$$(26) \quad \frac{1}{2\pi A} e^{-\frac{r^2}{2A}} \cdot 2\pi r dr = \frac{1}{A} e^{-\frac{r^2}{2A}} r dr$$

7. Wir sind nahezu am Ziel. Denn aus (26) folgt als Wahrscheinlichkeit, daß die Intensität an einer Spektralstelle einen Wert  $R^2$  oder darüber habe, durch Integration von  $R$  bis  $\infty$ :

$$(27) \quad \frac{1}{A} \int_R^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2A}} r dr = e^{-\frac{R^2}{2A}}$$

Damit ist die erste der am Schluß von Nr. 1 gestellten Fragen im wesentlichen beantwortet. Eine Ergänzung ist nur insofern nötig, als der abgeleitete Ausdruck dem Wesen des „Geistes“ noch nicht genügend Rechnung trägt. Denn eine Intensität  $R^2$ , auch wenn sie so groß ist, daß sie zur experimentellen Beobachtung ausreicht, macht noch keinen Geist, wenn das Opaleszenzfeld an dieser Stelle annähernd gleich intensiv oder gar intensiver ist. Damit ein Geist auftritt, ist eine weitere Forderung hinzuzufügen:  $R^2$  muß mindestens  $p$  Proz. größer sein als das umliegende Opaleszenzfeld. Erst beide Forderungen zusammengenommen charakterisieren ihn.

Welche von beiden — „Mindestintensität  $R^2$ “ oder „ $p$  Proz. intensiver als die Umgebung“ — die schärfere ist, hängt vom Beugungswinkel  $\varphi$  ab. Bei kleinen Beugungswinkeln ist das Opaleszenzfeld  $2A$  so klein, daß  $R^2$  die Umgebung um mehr als  $p$  Proz. übertrifft. Hier verlangt die erste Forderung mehr. Bei wachsendem  $\varphi$  und damit wachsendem Opaleszenzfeld aber kommen wir an die kritische Stelle, wo  $R^2$  gerade um  $p$  Proz. über die Umgebung ragt, und von hier ab ist die zweite Forderung schärfer.

Die schärfere Forderung bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Geistes. Bis zur kritischen Stelle ist sie durch den mit wachsendem  $\varphi$  ansteigenden Ausdruck (27) gegeben. Darüber hinaus ist er durch einen leicht anzugebenden andern zu ersetzen. Da nämlich nach Nr. 5 (Schluß) das Opaleszenzfeld die mittlere Intensität  $A + B$ , in unserer Vereinfachung  $2A$ , hat, ist nach (27) die Wahrscheinlichkeit einer Intensität von  $p$  Proz. darüber oder einer größeren

$$(28) \quad e^{-\frac{2A + \frac{p}{100} \cdot 2A}{2A}} = e^{-\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

In Figur 1 sind die beiden Wahrscheinlichkeitsausdrücke (27) und (28) dargestellt. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $W$  eines Geistes ist immer der kleinere von beiden Werten maßgebend; denn schärfere Forderung heißt kleinere Wahrscheinlichkeit. Bis zum kritischen Winkel  $\varphi^*$  folgt also die Kurve  $W$

dem ansteigenden  $e^{-\frac{R^2}{2A}}$ , bei  $\varphi^*$  geht sie zu  $e^{-\left(1+\frac{p}{100}\right)}$  über, wie das durch stärkeres Ausziehen angedeutet ist. Über die Abszissenangaben in  $q$  und die Ordinatenbezeichnung vgl. Nr. 9.

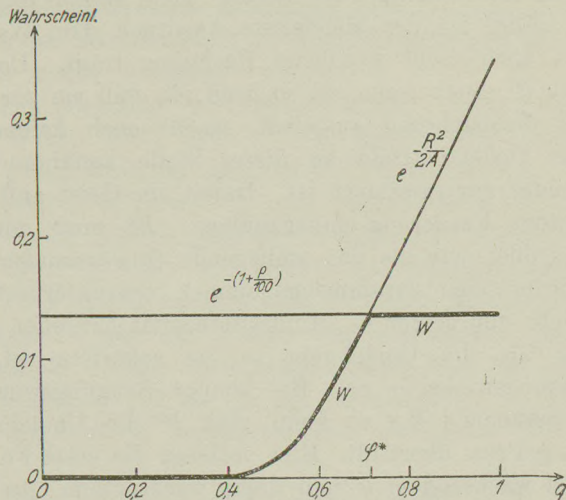


Fig. 1

8. Die wahrscheinliche Anzahl von Geistern in einem bestimmten Winkelbereich  $\varphi_2 - \varphi_1$  — die zweite in Nr. 1 aufgeworfene Frage — ist durch

$$(29) \quad G = Z \cdot \bar{W}$$

gegeben, wo  $\bar{W}$  der Mittelwert des  $W$  für diesen Bereich und  $Z$  die Anzahl der im Bereich hinsichtlich ihrer Intensität voneinander unabhängigen Stellen ist.

$\bar{W}$  ist bei Bereichen oberhalb der kritischen Stelle  $\varphi^*$  einfach gleich  $W$ . Unterhalb von  $\varphi^*$  muß es im allgemeinen durch graphische Integration gebildet werden. Nur wenn wie bei Sparrow, Nr. 2,

$$2A = N \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right) = N \frac{\mu^2}{2h^2} = \frac{2N\pi^2 \sin^2 \varphi}{\lambda^2 h^2}$$

und hierin überdies  $\sin^2 \varphi = \varphi^2$  gesetzt werden darf, wird das Integral



$$\bar{W} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-\frac{R^2}{2A}} d\varphi \quad \text{zu} \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-\frac{\text{Constans}}{\varphi^2}} d\varphi$$

führt also aufs Fehlerintegral.

Betreffs  $Z$  wird in einer gleichzeitig in der Physikalischen Zeitschrift erscheinenden Arbeit gezeigt, daß die Intensität an einer Spektralstelle  $\varphi$  wesentlich die Intensität in einem Nachbarbereiche mitbestimmt, der nach jeder Seite so weit reicht wie zwei Nebenminima voneinander entfernt sind, das ist bis  $\varphi \pm \frac{\lambda}{Ng}$ .<sup>1)</sup> Wir fassen demnach zwei um  $\frac{\lambda}{Ng}$  entfernte Stellen als unabhängig auf, schreiben also dem Bereiche  $\varphi_2 - \varphi_1$

$$Z = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\lambda/Ng} = \frac{Ng(\varphi_2 - \varphi_1)}{\lambda}$$

unabhängige Stellen zu. In (29) eingesetzt ergibt das

$$(30) \quad G = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) Ng \bar{W}}{\lambda}$$

als die wahrscheinliche Zahl der in  $\varphi_2 - \varphi_1$  anzutreffenden Geister der gekennzeichneten Art. Ersetzen wir noch  $\varphi$  und  $\lambda$  durch das allgemeinere  $q$ , die Ordnung der Interferenz, so tritt, da der Winkelbereich  $\lambda/g$  von einem Hauptmaximum zum nächsten einem  $\Delta q = 1$  entspricht, an Stelle der letzten Gleichung:

$$(30a) \quad G = (q_2 - q_1) N \bar{W}$$

Nach der genannten Arbeit besteht ferner eine „Intensitätskoppelung“ zwischen entfernten Stellen des Beugungsbildes: wenn an der Stelle  $\varphi$  eine hervorragende Opaleszenzintensität herrscht, so kehrt eine solche zwangsläufig wieder erstens in allen andern Ordnungen, also an den Stellen

$$(31a) \quad \varphi' = \varphi \pm n \frac{\lambda}{g} \quad (n \text{ ganze Zahl})$$

zweitens an der zum benachbarten Hauptmaximum symmetrischen Stelle und an den ihr entsprechenden Stellen in allen andern Ordnungen, d. h. bei den Winkeln

$$(31b) \quad \varphi'' = \pm n \frac{\lambda}{g} - \varphi \quad (n \text{ ganze Zahl einschl. Null})$$

1) Genauer  $\varphi \pm \frac{\lambda}{Ng \cos \varphi}$  wie in der bekannten Formel für die Winkelbreite des Beugungsbildes; vgl. z. B. P. Drude, Lehrb. d. Optik, Leipzig 1912. S. 215.

Demnach sind in Fig. 2, wo  $M$  das Mittelbild,  $I$  und  $-I$  die benachbarten Hauptmaxima andeuten, alle vermerkten Stellen miteinander gekoppelt. Der Index an den einzelnen  $\varphi_i'$  und  $\varphi_i''$  gibt den Wert von  $n$  gemäß (31a) und (31b).

Im Gegensatz zu den von periodischen Fehlern herrührenden Geistern läßt sich also über Zahl und Intensität der hier untersuchten nur eine Wahrscheinlichkeitsaussage machen, wenn man den Winkelbereich  $\lambda/2g$  oder  $\Delta q = \frac{1}{2}$  von einem

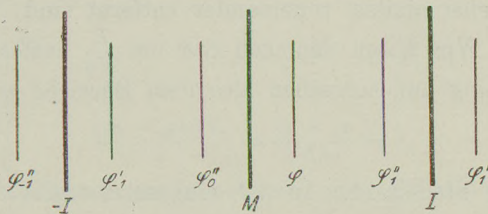


Fig. 2

Hauptmaximum bis halbwegs zum nächsten ins Auge faßt. Damit aber sind die Verhältnisse im ganzen übrigen Beugungsbilde festgelegt: an den gekennzeichneten Stellen kehren Geister wieder, in einer Intensität, die nach Nr. 2 proportional dem Quadrate der Ordnungszahl  $q$  ist.

Alles das bezieht sich auf *eine* Wellenlänge. Jedes  $\lambda$  hat sein Geistersystem; die Spektrallinie sammelt aber ihre Geister nicht um sich wie die Rowlandschen, sondern verstreut sie wie die Lymanschen.<sup>1)</sup>

9. Wir stellen ein *Zahlenbeispiel* in einer Form dar, die gegebenenfalls als Rechenvorschrift bei der Beurteilung fehlerhafter Gitter dienen kann. Unser Gitter habe

$$N = 10000$$

unendlich schmale Spalte, die Gitterkonstante sei

$$g = 2 \cdot 10^{-4}$$

a) Die linearen Abweichungen  $\varepsilon_i$  der einzelnen Spalte von ihrer richtigen Lage werden gemessen<sup>2)</sup>, hieraus der mittlere Fehler

$$m = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i^2}{N}}$$

1) Zu deren Theorie vgl. C. Runge, Ann. d. Phys. 71, S. 178. 1923.

2) Vgl. die Ausführungen und photographischen Aufnahmen von L. C. Glaser, Ztschr. f. techn. Physik 7, S. 31. 1926.

bestimmt.  $h$  hängt mit ihm durch die Gleichung zusammen

$$h = \frac{1}{\sqrt{2} m}$$

Wird  $m$  in Bruchteilen des  $g$  ausgedrückt, so stellt sich  $h$  als  $c/g$  dar, wo  $c$  der nunmehr die Präzision charakterisierende Zahlenfaktor ist. Wir nehmen  $m$  als  $g/20$  an.

b) Für den fraglichen Bereich des  $q$  wird der Wert von

$$\frac{\mu^2}{2h^2} = \frac{4\pi^2 \sin^2 \varphi}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{2h^2} = \frac{4\pi^2 q^2 \lambda^2}{g^2 \lambda^2} \cdot \frac{1}{2h^2} = \frac{2\pi^2 q^2}{c^2}$$

und der von

$$e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} = e^{-\frac{2\pi^2 q^2}{c^2}}$$

tabellarisch festgelegt.  $\mu^2/2h^2$  steigt in unserem Beispiel für  $q = 0$  bis  $q = 1$  von 0 bis 0,395.  $e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}}$  fällt im gleichen Bereiche von 1 auf 0,674.

c) Eine entsprechende Tabelle oder Kurve wird für

$$(32) \quad 2A = N \left( 1 - e^{-\frac{\mu^2}{2h^2}} \right)$$

berechnet: Figur 3, die nach (23) gleichzeitig den Anstieg des Opaleszenzfeldes mit  $q$  darstellt.<sup>1)</sup>

d) Die Wahrscheinlichkeit, daß an einer Stelle ein Geist von der Intensität  $R^2$  oder einer größeren auftritt, ist nach (27)

$e^{-\frac{R^2}{2A}}$ . Man zeichnet diese Kurve durch den interessierenden Bereich. Hierbei ist die Maßzahl von  $R^2$  dadurch bestimmt,

1) Hier sei bemerkt, wie eine endliche Spaltbreite  $a$  in Rechnung zu setzen ist. Sie tritt nach der Beugungstheorie in der Ausgangs-

gleichung (1) für  $J$  in der Form des Faktors  $\frac{\sin^2 \frac{\mu a}{2}}{\left(\frac{\mu a}{2}\right)^2}$  auf und so fort,

bis der gleiche Faktor dann auch in  $\bar{J}$ , (5), erscheint. Nach (23) ist zu vermuten, daß er auch in  $A$ ,  $B$ ,  $a^{*2}$ ,  $b^{*2}$  auftritt, was über  $\mathfrak{E}$ ,  $a_p$ ,  $a_p'$  leicht zu bestätigen ist. An Stelle unseres  $2A$ , (32), ist demnach schließlich zu schreiben

$$N \left( 1 - e^{-\frac{\mu a}{2h^2}} \right) \frac{\sin^2 \frac{\mu a}{2}}{\left(\frac{\mu a}{2}\right)^2}$$

daß in unsern Formeln den Hauptmaximis (oder wenn der endlichen Spaltbreite Rechnung getragen wird, wenigstens dem Mittelbilde) die Intensität  $N^2$  zugeschrieben wird. In Figur 2 sind als Abszissen- und Ordinatenbezeichnung die Zahlenwerte unseres Beispiels eingetragen. In Spalte 1 der folgenden Tabelle ist  $e^{-\frac{R^2}{2A}}$  für einige  $q$  vermerkt, wobei  $R^2 = 1000$  ge-

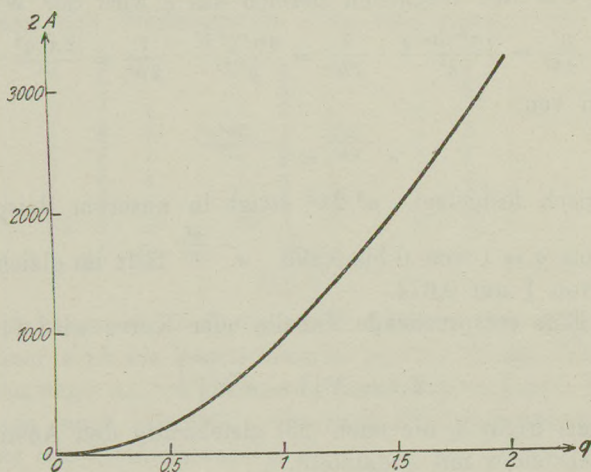


Fig. 3

setzt ist; d. h. wir lesen die Wahrscheinlichkeit ab, daß der Geist eine Intensität gleich  $1/100000$  von der des Mittelbildes ( $N^2 = 10^8$ ) hat.

Verlangen wir als Mindestintensität  $1/10000$  des Zentralbildes, setzen wir also  $R^2 = 10^4$ , so ergeben sich wesentlich kleinere Wahrscheinlichkeiten, die Zahlenwerte in Spalte 2 der Tabelle.

e) In das gleiche Schaubild (Fig. 2) zeichnen wir die der Abszissenachse parallele Gerade  $e^{-(1 + \frac{p}{100})}$  ein, die nach (28) die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß der Geist mindestens  $p$  Proz. intensiver ist als das umgebende Opaleszenzfeld. In Figur 2 ist  $p$  gleich 100 gewählt, wodurch die fragliche Wahrscheinlichkeit zu  $e^{-2} = 0,1353$  wird.

f) Um die wahrscheinliche Zahl  $G$  der charakterisierten Geister in einem Winkelgebiete  $q_2 - q_1$  zu finden, ist aus Figur 2 durch graphische Integration das mittlere  $\bar{W}$  des Ge-

Tabelle

$$e^{-\frac{R^2}{2A}}$$

q	Mittlerer Fehler $m = \frac{g}{20}$		Mittlerer Fehler $m = \frac{g}{40}$	
	1. $R^2 = 1000$	2. $R^2 = 10\ 000$	3. $R^2 = 1000$	4. $R^2 = 10\ 000$
0	0	0	0	0
0,2	0,0 <sub>10</sub> 13	0	0	0
0,4	0,0017	0	0,0 <sub>10</sub> 13	0
0,6	0,0572	0,0 <sub>12</sub> 47	0,0 <sub>4</sub> 13	0
0,8	0,195	0,0 <sub>6</sub> 81	0,0017	0
1	0,345	0,0 <sub>4</sub> 24	0,0165	0
1,2	0,470	0,0 <sub>8</sub> 53	0,0572	0,0 <sub>12</sub> 47
1,4	0,566	0,0029	0,120	0,0 <sub>6</sub> 63
1,6	0,639	0,0113	0,195	0,0 <sub>6</sub> 81
1,8	0,694	0,0259	0,272	0,0 <sub>6</sub> 22
2	0,736	0,0465	0,345	0,0 <sub>4</sub> 24

bietes zu bestimmen und dieses dann gemäß (30a) mit  $N(q_2 - q_1)$  zu multiplizieren. Wir fragen in unserem Beispiel nach der wahrscheinlichen Geisterzahl zwischen Mittelbild bis halbwegs zum ersten Hauptmaximum. Dann ist

$$Z = N(q_2 - q_1) = \frac{10^4}{2}$$

die Zahl der unabhängigen Stellen. Und da sich  $\bar{W}$  graphisch zu 0,0016 ergibt, ist 8 die fragliche Anzahl. Von  $q = \frac{1}{2}$  bis  $q = 1$ , wo z. T. schon die  $p$ -Proz.-Forderung als die schärfere zu berücksichtigen ist, ist  $\bar{W} = 0,105$ ,  $G = 525$ .

Hätten wir die zehnfache Mindestintensität  $R^2 = 10000$  verlangt, so hätte sich  $G$  im Gebiete  $q = 0$  bis  $q = \frac{1}{2}$  praktisch Null, im Gebiete  $q = \frac{1}{2}$  bis  $q = 1$  auch nur zu 0,011 ergeben: im Durchschnitt wiese also nur jedes hundertste Gitter dieser Art *einen* solchen Geist auf. In allen Fällen einer Mittelung über derart ausgedehnte Winkelbereiche, in denen  $W$  stark ansteigt, ist eine Häufung der Geister bei den größten Beugungswinkeln des Bereiches zu erwarten.

10. Damit auch der Einfluß der Gitterpräzision hervortrete, seien noch Angaben über ein Gitter hinzugefügt, das nur einen halb so großen mittleren Fehler als das in Nr. 9 behandelte hat, also

$$m = \frac{g}{40}$$

296 E. Buchwald. Gittergeister bei u

Spalte 3 und 4 der Tabelle geben die Wahrscheinlichkeitswerte eines Geistes wieder  $R^2 = 1000$  und  $R^2 = 10000$ .

Die wahrscheinliche Anzahl der Geister ist bei der geringeren Mindestintensität  $R^2 = 1000$  im Bereich

$$\begin{aligned} q = 0 \text{ bis } q = \frac{1}{2}: & \text{ praktisch Null,} \\ q = \frac{1}{2} \text{ bis } q = 1: & 17 \\ q = 1 \text{ bis } q = 1\frac{1}{2}: & 378 \\ q = 1\frac{1}{2} \text{ bis } q = 2: & 677 \end{aligned}$$

Der letzte Bereich fällt schon ganz in die „p-Proz.-Forderung“.  $G = 677$  kehrt von nun ab für jedes weitere  $q_2 - q_1 = \frac{1}{2}$  wieder.

Bei der größeren Mindestintensität  $R^2 = 10000$  ist im Bereich  $q = 1\frac{1}{2}$  bis  $q = 2$  nur 0,020 Geist zu erwarten. Das Gebiet näher am Mittelbild,  $q = 0$  bis  $q = 1\frac{1}{2}$ , ist praktisch geisterfrei.

#### Zusammenfassung

Unperiodische Teilungsfehler eines Gitters rufen einen kontinuierlichen Untergrund im Beugungsbilde hervor, das Opaleszenzfeld, das im Mittel mit wachsenden Beugungswinkeln ansteigt. In allen praktischen Fällen treten Abweichungen vom Mittel, Intensitätsschwankungen, auf, die den Untergrund granuliert erscheinen lassen. Stellen großer positiver Schwankung heben sich als Geister ab.

Berechnet wird die Wahrscheinlichkeit, bei einem gegebenen Gitter an einer bestimmten Spektralstelle einen Geist anzutreffen, der eine gegebene Mindestintensität hat oder der um einen gegebenen Betrag intensiver ist als das umliegende Opaleszenzfeld; ferner die wahrscheinliche Anzahl derartiger Geister in einem bestimmten Winkelgebiet. Für den Bereich von einem Hauptmaximum bis halbwegs zum nächsten lassen sich nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über das Auftreten von Geistern machen; durch die Geisterverteilung in einem solchen Bereich aber sind die Verhältnisse im ganzen übrigen Beugungsbilde eindeutig bestimmt.

Danzig, Technische Hochschule.

(Eingegangen 15. April 1926)

