

Über WasserglockenVon **Eberhard Buchwald** und **Hans König**

(Mit 6 Figuren)

Läßt man einen Wasserstrahl senkrecht nach unten auf eine horizontale Kreisscheibe zentral auftreffen, so erhält man unter Umständen eine rotations-symmetrische, rasch abströmende Wasserhaut vom Aussehen der Fig. 1. Solche „Wasserglocken“ hat erstmalig Savart¹⁾ vor rund einem Jahrhundert beschrieben. Etwa ein Menschenalter später hat Boussinesq²⁾ ihre Theorie gegeben, ohne an den Savartschen Zeichnungen mehr als einen ganz oberflächlichen Vergleich mit der Erfahrung durchführen zu können. Sonst sind sie kaum behandelt worden, auch in Boys' Seifenblasen sucht man sie vergebens — erstaunlicherweise, denn sie sind leicht und in den verschiedensten Formen darzustellen und gehören zu den reizvollsten Erscheinungen der Oberflächenspannung.

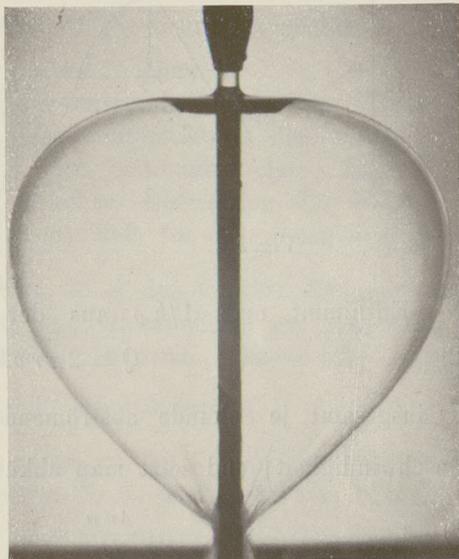


Fig. 1

1. Boussinesq setzt als Bewegungsgleichungen eines Glockenelements von der Masse m und der Dicke h an (Fig. 2):

1) F. Savart, *Ann. chim. phys.* 54. S. 55, 113. 1833. Verwandte Erscheinungen beim Aufprall zweier Wasserstrahlen gegeneinander, ebenda 55. S. 257. 1834. Hierüber auch G. Magnus, *Pogg. Ann.* 80. S. 1. 1850; 95. S. 1. 1855.

2) J. Boussinesq, *Compt. rend.* 69. S. 45, 128. 1869; 157. S. 89. 1913 und in *Mem. prés. à l'Acad. d. Sciences* (2) 23. Paris 1877. S. 639 ff.

$$(1) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 r}{dt^2} = \mp \frac{m}{h \varrho} 2\alpha C \frac{dz}{ds}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg \pm \frac{m}{h \varrho} 2\alpha C \frac{dr}{ds}. \end{cases}$$

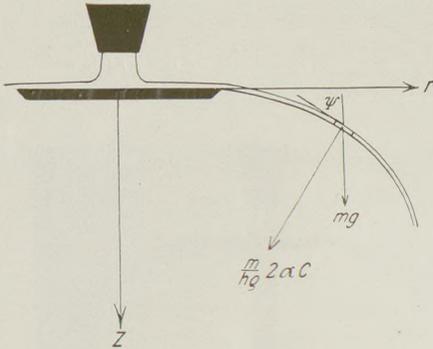


Fig. 2

Hier gelten die oberen Vorzeichen für wachsendes, die unteren für abnehmendes r . ϱ ist die Dichte der Flüssigkeit, $m/h\varrho$ also die Oberfläche des Flüssigkeitselements, α ist die Oberflächenspannung, C die mittlere Krümmung, g die Erdbeschleunigung; der Faktor 2 steht, weil der Kapillardruck an der Außenfläche zum Atmosphärendruck hinzukommt, an der Innenfläche aber abzuziehen ist, s ist die Bogenlänge vom Plattenrande bis zum betrachteten Element, dz/ds und dr/ds sind Richtungskosinus.

Entnimmt man $1/h\varrho$ aus der Kontinuitätsgleichung

$$(2) \quad Q = 2\pi r v h \varrho$$

(Q insgesamt je Sekunde abströmende Flüssigkeitsmenge, $v = \frac{ds}{dt}$ Geschwindigkeit) und setzt man abkürzend

$$(3) \quad \frac{4\pi\alpha}{Q} = k,$$

so nimmt (1) die Form an

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} = \mp k C r \frac{dz}{dt}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = g \pm k C r \frac{dr}{dt}. \end{cases}$$

Elimination der C enthaltenden Glieder liefert

$$(5) \quad v^2 = v_0^2 + 2gz$$

mit v_0 als Geschwindigkeit am Plattenrande ($z = 0$).

Andererseits setzen wir nach bekannten Beziehungen

$$C = \pm \frac{1}{r} \frac{dz}{ds} \mp \frac{d}{dz} \frac{dr}{ds} = \pm \frac{1}{r dz} d(s - r \sin \psi)$$

(ψ vgl. Fig. 1) und finden aus (4¹)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) + k \frac{d}{dt} (s - r \sin \psi) = 0,$$

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} + k s - k r \sin \psi \right) = \frac{d}{dt} ((v - k r) \sin \psi + k s) = 0$$

und hieraus, wenn wir uns auf ein Kurvenstück vom Punkte 1 bis zum Punkte 2 beziehen,

$$(7) \quad k = \frac{(v \sin \psi)_1 - (v \sin \psi)_2}{(s_2 - s_1) - (r \sin \psi)_2 + (r \sin \psi)_1} = \frac{-\Delta(v \sin \psi)}{\Delta s - \Delta(r \sin \psi)}.$$

2. Setzen wir die Richtigkeit der Boussinesqschen Theorie voraus, so kann uns diese Gleichung zur Bestimmung des k und damit der Oberflächenspannung $\alpha = k \frac{Q}{4\pi}$ dienen. Vernachlässigt ist bei ihrer Ableitung *innere* und *äußere Reibung*.

Die Frage, wie sich infolge der *inneren Reibung* die am Plattenrande vorhandenen Geschwindigkeitsunterschiede der einzelnen parallelen Glockenschichten mit der Zeit ausgleichen, kann in leichter Abwandlung einer Bohrschen Überlegung am Wasserstrahl¹⁾ dahin beantwortet werden, daß für den Ausgleich der Faktor $e^{-\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 t}$ maßgebend ist, wo μ den Beiwert der inneren Reibung, ρ und h wieder Dichte und Glockendicke und t die Zeit seit dem Passieren des Plattenrandes bedeuten. Setzen wir

$$\frac{\mu}{\rho} = 0,0125 \quad \text{und} \quad h = 0,02 \text{ cm}$$

(vgl. Nr. 5), so wird der Faktor gleich $e^{-308 \cdot t}$. Bei einer Teilchengeschwindigkeit von 140 cm/sec (vgl. Nr. 7) wird 2 cm vom Plattenrand entfernt $t = \frac{2}{140}$, $e^{-308 \cdot t} = e^{-4,4} = 0,012$. Die Geschwindigkeitsunterschiede sind also hier bereits auf etwa $\frac{1}{80}$ gesunken, brauchen somit nicht beachtet zu werden.

Über die Größe der *Luftreibung* lassen sich zahlenmäßige Angaben nicht machen, da die Reibungsbeiwerte zwischen Luft und Wasser nicht bekannt sind. Man kann ihren Einfluß aber abschätzen, wenn man die Formeln des Widerstands glatter, in Anströmungsrichtung liegender ebener Platten zugrunde legt²⁾, und findet dann, daß auch sie für unsere Zwecke zu vernachlässigen ist.

3. Über die *Erzeugung der Wasserglocken* sei im einzelnen folgendes bemerkt. Das Wasser wurde einem hoch an der Wand verschiebbar angebrachten Glasgefäß entnommen, das aus der Wasser-

1) N. Bohr, Phil. Trans. A 209. 1909. S. 298.

2) Vgl. z. B. Handbuch Geiger-Scheel VII. S. 154ff.

$$(1) \quad \begin{cases} m \frac{d^2 r}{dt^2} = \mp \frac{m}{h \rho} 2\alpha C \frac{dz}{ds}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg \pm \frac{m}{h \rho} 2\alpha C \frac{dr}{ds}. \end{cases}$$

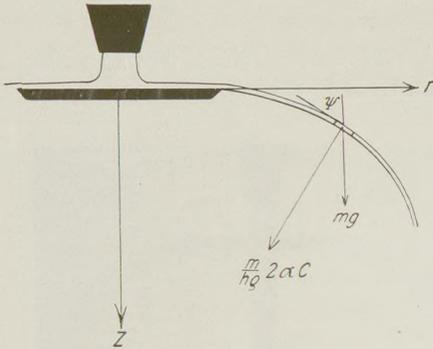


Fig. 2

Hier gelten die oberen Vorzeichen für wachsendes, die unteren für abnehmendes r . ρ ist die Dichte der Flüssigkeit, $m/h\rho$ also die Oberfläche des Flüssigkeitselements, α ist die Oberflächenspannung, C die mittlere Krümmung, g die Erdbeschleunigung; der Faktor 2 steht, weil der Kapillardruck an der Außenfläche zum Atmosphärendruck hinzukommt, an der Innenfläche aber abzuziehen ist, s ist die Bogenlänge vom Plattenrande bis zum betrachteten Element, dz/ds und dr/ds sind Richtungskosinus.

Entnimmt man $1/h\rho$ aus der Kontinuitätsgleichung

$$(2) \quad Q = 2\pi r v h \rho$$

(Q insgesamt je Sekunde abströmende Flüssigkeitsmenge, $v = \frac{ds}{dt}$ Geschwindigkeit) und setzt man abkürzend

$$(3) \quad \frac{4\pi\alpha}{Q} = k,$$

so nimmt (1) die Form an

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} = \mp k C r \frac{dz}{dt}, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = g \pm k C r \frac{dr}{dt}. \end{cases}$$

Elimination der C enthaltenden Glieder liefert

$$(5) \quad v^2 = v_0^2 + 2gz$$

mit v_0 als Geschwindigkeit am Plattenrande ($z = 0$).

Andererseits setzen wir nach bekannten Beziehungen

$$C = \pm \frac{1}{r} \frac{dz}{ds} \mp \frac{d}{dz} \frac{dr}{ds} = \pm \frac{1}{r dz} d(s - r \sin \psi)$$

(ψ vgl. Fig. 1) und finden aus (4¹)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) + k \frac{d}{dt} (s - r \sin \psi) = 0,$$

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} + k s - k r \sin \psi \right) = \frac{d}{dt} ((v - k r) \sin \psi + k s) = 0$$

und hieraus, wenn wir uns auf ein Kurvenstück vom Punkte 1 bis zum Punkte 2 beziehen,

$$(7) \quad k = \frac{(v \sin \psi)_1 - (v \sin \psi)_2}{(s_2 - s_1) - (r \sin \psi)_2 + (r \sin \psi)_1} = \frac{-\Delta(v \sin \psi)}{\Delta s - \Delta(r \sin \psi)}.$$

2. Setzen wir die Richtigkeit der Boussinesqschen Theorie voraus, so kann uns diese Gleichung zur Bestimmung des k und damit der Oberflächenspannung $\alpha = k \frac{Q}{4\pi}$ dienen. Vernachlässigt ist bei ihrer Ableitung *innere* und *äußere Reibung*.

Die Frage, wie sich infolge der *inneren Reibung* die am Plattenrande vorhandenen Geschwindigkeitsunterschiede der einzelnen parallelen Glockenschichten mit der Zeit ausgleichen, kann in leichter Abwandlung einer Bohrschen Überlegung am Wasserstrahl¹⁾ dahin beantwortet werden, daß für den Ausgleich der Faktor $e^{-\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 t}$ maßgebend ist, wo μ den Beiwert der inneren Reibung, ρ und h wieder Dichte und Glockendicke und t die Zeit seit dem Passieren des Plattenrandes bedeuten. Setzen wir

$$\frac{\mu}{\rho} = 0,0125 \quad \text{und} \quad h = 0,02 \text{ cm}$$

(vgl. Nr. 5), so wird der Faktor gleich $e^{-308 \cdot t}$. Bei einer Teilchengeschwindigkeit von 140 cm/sec (vgl. Nr. 7) wird 2 cm vom Plattenrand entfernt $t = \frac{2}{140}$, $e^{-308 \cdot t} = e^{-4,4} = 0,012$. Die Geschwindigkeitsunterschiede sind also hier bereits auf etwa $\frac{1}{80}$ gesunken, brauchen somit nicht beachtet zu werden.

Über die Größe der *Luftreibung* lassen sich zahlenmäßige Angaben nicht machen, da die Reibungsbeiwerte zwischen Luft und Wasser nicht bekannt sind. Man kann ihren Einfluß aber abschätzen, wenn man die Formeln des Widerstands glatter, in Anströmungsrichtung liegender ebener Platten zugrunde legt²⁾, und findet dann, daß auch sie für unsere Zwecke zu vernachlässigen ist.

3. Über die *Erzeugung der Wasserglocken* sei im einzelnen folgendes bemerkt. Das Wasser wurde einem hoch an der Wand verschiebbar angebrachten Glasgefäß entnommen, das aus der Wasser-

1) N. Bohr, Phil. Trans. A 209. 1909. S. 298.

2) Vgl. z. B. Handbuch Geiger-Scheel VII. S. 154ff.

leitung gespeist und durch ein Überlaufrohr auf gleichem Wasserstande gehalten wurde. Die Wassertemperatur war nach einiger Zeit genügend gleichmäßig, im Winter um 9° , im Sommer um 12° C. Schlauch- und Rohrleitungen führten das Wasser wenige Meter herab zu einem genau vertikalen Messingrohr, an das unten verschiedene Messingdüsen von der Form abgestumpfter Kegel mit Kegelwinkeln um 24° und mit Ausflußöffnungen zwischen 3 und 12 mm Durchmesser angeschraubt werden konnten. 5—10 mm unter der Öffnung — der Abstand ist von geringem Einfluß — stand genau horizontal die Auftreffscheibe aus Messing oder Kruppschem rostfreiem Stahl. Die verwendeten Durchmesser lagen zwischen 12 und 54 mm. Schon Savart hat den Einfluß des Plattenrandes auf die Erscheinung bemerkt: so wurden auch hier verschiedene Randformen untersucht, ganz stumpfe Messingränder bis zu hohlgeschliffenen Stahlschneiden von großer Schärfe.

Die Ausflußmenge Q wurde durch Wägung festgestellt¹⁾. Eine Genauigkeit von 1% bietet keine Schwierigkeit.

4. Zur Gewinnung der Oberflächenspannung aus der Wasserglocke ist nach Gl. (7) *erstens* die Meridiankurve auszumessen, insbesondere die Koordinaten r und z , die Bogenlänge s und der Neigungswinkel ψ ; das bietet keine Schwierigkeit. *Zweitens* ist die Geschwindigkeit v oder auch die mit ihr durch die Kontinuitätsgleichung (2) verknüpfte Glockendicke h zu bestimmen; das ist schwieriger.

Meridiankurve. Die Glocke wurde gegen eine grell durchleuchtete Mattglasscheibe als Hintergrund photographiert, die entwickelte Platte durch den gleichen Photoapparat bei unveränderter Einstellung in natürlicher Größe auf *mm*-Papier projiziert und nachgezeichnet, gegebenenfalls noch einmal vergrößert. r und z sind auf $\frac{1}{10}$ mm unmittelbar zu entnehmen.

Zur Bestimmung der *Bogenlänge* wurde ein *Kurvimeter*, Sonderkonstruktion der Firma A. Ott, Kempten i. Allgäu, verwendet²⁾. Ein Meßrad wird an der Kurve entlang geführt, seine Drehung auf ein Zeigerwerk mit Nonius übertragen. Das Meßrad hat den bei Planimeterrollen üblichen Umfang von 60 mm, ein Noniusteil entspricht einem Tausendstel davon, so daß man am Nonius 0,06 mm abliest und auch bei größeren Bögen eine Genauigkeit von etwa $\frac{1}{10}$ mm erreicht. Die Gesamtablesung geht bis zu 20000 Teilstreichen gleich 120 cm.

1) Vgl. Handbuch Wien-Harms IV. 1. Teil. S. 611.

2) Inzwischen beschrieben in Ztschr. f. Instrumentenkunde 55. S. 176. 1935.

Die *Kurvenneigungen* ψ wurden mit einem *Prismenderivator*¹⁾ gemessen. Grundgedanke: man legt ein 90°-Glasprisma mit der Hypotenusenfläche auf die Kurve und dreht es so lange, bis die durch die beiden Kathetenflächen gesehenen Kurvenstücke lückenlos aneinanderschließen. Das ist nur dann der Fall, wenn die Oberkante des Prismas senkrecht auf der Kurve steht. Zur Festlegung der Kantenrichtung haben wir das Prisma auf einem Teilkreis mit Noniusablesung montiert und ein sehr brauchbares Gerät gewonnen. Harbou²⁾ gibt bei Richtungsbestimmungen an Kreisen als Abweichungen des Mittelwerts der Messungen vom errechneten Wert für seine einzelnen Meßreihen 3'—12' an. Das ist etwa auch unsere Genauigkeit, die freilich wegen der unvermeidlichen Unvollkommenheiten der Kurvenzeichnung nicht voll zur Geltung kommt.

5. *Glockendicke*. Der Fehler der Glockendicke h und damit der Geschwindigkeit v geht [vgl. Gl. (7)] bei unseren Zahlenwerten annähernd prozentual in die Oberflächenspannung ein. Erwünscht wäre also (Fehler 1%) die v -Bestimmung auf 1—2 cm/sec, die h -Bestimmung bei Glockendicken von rund $\frac{1}{10}$ mm, wie sie bei uns vorkommen, auf etwa $\frac{1}{1000}$ mm.

Es wurde versucht, v unmittelbar durch *Momentaufnahmen* mitströmender Papierteilchen zu messen. Die Methode ist brauchbar, aber nicht genau genug, weil die Teilchenspuren auf den Aufnahmen nicht genügend scharf begrenzt sind — nicht nur wegen der Teilchenausdehnung, sondern vor allem wegen der Wirkungsweise der Momentverschlüsse.

h läßt sich *am Plattenrand* bequem und genau mit einer mikrometrisch verstellbaren Nadel messen, die man nacheinander mit der Wasseroberfläche und mit der Platte in Berührung bringt. Ein Rückschluß auf v ist aber hier wegen der Grenzschicht nicht möglich. Eine Übertragung auf die freie Glocke verbietet sich wegen ihrer kleinen Schwankungen. Aus dem gleichen Grunde versagen im allgemeinen *Interferenzmethoden*.

Erfolgreich war dagegen die alte *Mikroskopmethode* des Herzogs von Chaulnes³⁾. Die Scharfeinstellung auf ein Objekt (Strichplatte) einmal durch die Wasserglocke hindurch, einmal ohne sie, verlangt eine Verschiebung des Mikroskoptubus um

$$(8) \quad h^* = \left(1 - \frac{1}{n}\right) h \quad (n \text{ Brechungsquotient}),$$

1) E. v. Harbou, Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. **10**. S. 563. 1930; J. Picht, Ztschr. f. techn. Phys. **13**. S. 316. 1932; H. Kirsten II, ebenda S. 341.

2) a. a. O. S. 582f.

3) Vgl. F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Physik S. 303. 1930.

also bei Wasser um $h/4$. Die Methode ist verhältnismäßig einfach zu handhaben, wenn man Objekt und Tubus in starre, schwingungsfreie Verbindung bringt und deren Längenänderung mit der Temperatur beim Überspülen beachtet, bietet aber zwei Schwierigkeiten.

a) Einerseits ist die Einstellungsgenauigkeit um so größer, je kleiner der freie Abstand Objekt—Objektiv ist; andererseits muß die nie völlig stillstehende Glocke dazwischen Platz haben. Als Kompromiß wurde das Leitzobjektiv 3b 14x (Brennweite 13 mm) mit einem freien Objektstand von 3,2 mm gewählt, dazu das Zeiss'sche Orthoskop-objektiv 28x.

b) Will man h auf $1/1000$ mm (vgl. oben), so muß man h^* auf $2^5/10000$ mm kennen, braucht also eine Feinverstellung des Tubus, die $1/10000$ mm garantiert. Nun ist zwar ein Skalenteil der Zeiss'schen Mikroskopfeinverstellung gleich 0,002 mm; das würde also genügen. Aber nach eigener Angabe der Firma¹⁾ bedeutet das „rund 0,002 mm“ (also sozusagen biologische und nicht physikalische 0,002 mm), und nach der Konstruktion des Triebes kann man auch nichts anderes erwarten als prozentual erhebliche systematische und unsystematische Abweichungen.

Der Tubus wurde infolgedessen auf einer Schraubenspinde montiert, Ganghöhe 0,2 mm, Trommeleinteilung in 0,002 mm. Der mittlere Fehler der Einstellung durch die Glocke hindurch betrug etwa 0,2 Skt., ohne Glocke 0,15 Skt., also der mittlere Fehler der Dicke h nach Gl. (8) 0,002 mm, das sind bei den zumeist in Frage kommenden Dicken 2—3% und ebensoviel in den Geschwindigkeiten.

6. Wir haben die Dicke auch durch die *Absorption ultraroter Strahlung* bestimmt, entweder einfach mit der Gesamtstrahlung einer Nernst- oder Glühlampe, wobei man aber im nahen Ultrarot viele kaum absorbierte Wellenlängen als Ballast mitschleppt. Oder wir zerlegten mit einem Monochromator²⁾ und arbeiteten bei den Wellenlängen um $1,475 \mu$ oder um $1,97 \mu$, in denen der Absorptionskoeffizient nach Dreisch³⁾ auf 29,9 bzw. 104,0 ansteigt, was bei unseren Schichtdicken eine Schwächung auf etwa $3/4$ bzw. $1/3$ bedeutet. Als Empfangsapparat diente ein Vakuumthermoelement nach Johansen in Verbindung mit einem schnellschwingenden Spiegelgalvanometer von Ruhstrat (Spannungsempfindlichkeit $1 \cdot 10^{-6}$ Volt).

Im Falle der Gesamtstrahlung wird die mikroskopische Dickenmessung benutzt, um die Eichkurve „Galvanometerausschlag in Ab-

1) Katalog Mikro 1. S. 15. 1934.

2) C. Leib, Ztschr. f. Phys. 47. S. 143. 1928; Quarzoptik und Wadsworth-einrichtung.

3) Th. Dreisch, Ztschr. f. Phys. 30. S. 200. 1924; vgl. S. 206.

hängigkeit von der Glockendicke“ zu gewinnen. Man hat aber gegenüber der Mikroskopmethode u. a. den Vorteil, die Glocke nicht durch einen Bügel stören zu müssen. Beim Arbeiten mit monochromatischem Lichte wird die Ultrarotapparatur an meßbar veränderlichen Wasserschichten zwischen dünnen Glasplatten geeicht, die Eichkurve sodann auf die veränderten Reflexionsverluste an der Wasserglocke umgerechnet¹⁾. Man gewinnt so eine Kontrolle der Mikroskopmethode Nr. 5.

Tabelle 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	r	Δs	ψ	$\sin \psi$	$r \sin \psi$	v	$v \sin \psi$	α
0,5	4,88		66,4°	0,916	4,47	135,6	124,2	78,4
1,0	5,81	1,05	57,2°	0,841	4,88	139,2	116,9	88,0
1,5	6,45	0,80	47,4°	0,736	4,75	142,7	105,0	83,0
2,0	6,93	0,70	38,8°	0,627	4,34	146,1	91,6	74,1
2,5	7,29	0,62	32,6°	0,539	3,93	149,4	80,5	86,5
3,0	7,55	0,56	24,8°	0,419	3,17	152,6	63,9	80,5
3,5	7,75	0,54	18,3°	0,314	2,43	155,8	48,9	76,4
4,0	7,89	0,52	13,1°	0,227	1,79	158,9	36,0	83,0
4,5	7,97	0,51	7,2°	0,125	1,00	162,0	20,3	81,4
5,0	8,01	0,50	2,1°	0,037	0,30	165,0	6,10	

Mittel 81,3

7. Tab. 1 gibt ein Beispiel, wie α aus einer Glocke gewonnen wird. Der Düsendurchmesser betrug 9,2 mm, der Durchmesser der scharf geschliffenen Stahlplatte 54 mm. Q war gleich 86,4 g/sec. Spalte 1 und 2 geben die Koordinaten der Meridiankurve in Zentimeter, Spalte 2 die Bogenlänge in Zentimeter zwischen zwei um $\Delta z = 0,5$ auseinanderliegenden Kurvenpunkten, Spalte 4 den Neigungswinkel ψ . Die Geschwindigkeitsangaben der Spalte 7

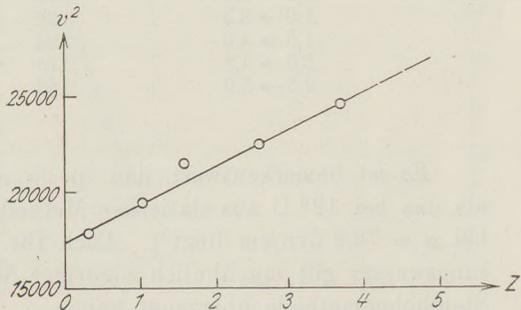


Fig. 3

(in cm/sec) beruhen auf mikroskopischen Dickenmessungen an verschiedenen Stellen eines Meridians. Trägt man v^2 gegen z auf, so erhält man (Fig. 3) eine Gerade, die wie Gl. (5) verlangt der Geschwindigkeitszunahme des freien Falls entspricht. Die Dar-

1) Über die Reflexion des Wassers im Ultrarot vgl. F. Gehrts, Ann. d. Phys. 47. S. 1059. 1915, bes. S. 1064.

stellung ist sehr empfindlich: der herausfallende Punkt käme auf die Gerade zu liegen, wenn die Dicke nur um 0,003 mm größer gemessen worden wäre. Oft liegen die Meßpunkte schlechter. Es genügt im allgemeinen nicht längs eines Meridians zu messen; man muß Messungen längs der Breitenkreise hinzufügen, weil die Glocken unter anderem infolge geringster Unebenheiten des Plattenrandes nicht an allen Stellen eines Breitenkreises von *genau* der gleichen Dicke sind. Systematische Abweichungen von der Gl. (5) glauben wir aber nicht beobachtet zu haben, wir haben sie also immer zugrunde gelegt¹⁾.

Spalte 9 schließlich gibt die nach Gl. (7) und (3) berechneten Werte der Oberflächenspannung in dyn/cm. Daß die Werte stark streuen kann nicht wundernehmen, da in die Gl. (7) die Zuwächse von $v \sin \psi$ usw. längs kleiner Bogenstücke eingehen. Diese Art der Berechnung kann nur lehren, daß ein Gang der α -Werte längs der Kurve nicht merkbar ist²⁾. Ist dies einmal festgestellt, so wird man α gemäß Tab. 2 aus Bogenstücken von einigen Zentimetern Länge ($\Delta z = 2,5$ cm) berechnen; nunmehr liegen die Einzelwerte mit weit geringerer Streuung um den Mittelwert $\alpha = 81,5$ dyn/cm.

Tabelle 2

z	Δs	α
0,5 → 3,0	3,73	82,4
1,0 → 3,5	3,22	82,4
1,5 → 4,0	2,94	80,4
2,0 → 4,5	2,75	80,5
2,5 → 5,0	2,63	81,6

Mittel 81,5

Es ist bemerkenswert, daß dieses α um etwa 10 % größer ist als das bei 12° C aus statischen Methoden gewonnene, das ungefähr bei $\alpha = 73,9$ dyn/cm liegt³⁾. Auch für das von uns benutzte Leitungswasser gilt ein ähnlich niedriger Wert, wie wir uns nach der Steighöhenmethode überzeugt haben.

8. Wir berechnen mit $\alpha = 81,5$ die Meridiankurve und vergleichen sie mit der beobachteten. Nach Gl. (6) ist

$$(v - kr) \sin \psi + k s$$

1) Brauchbare Quadrattafeln: L. M. Milne-Thomson, Standard Table of Square Roots, London 1929.

2) Der Verdacht eines Ganges besteht: vgl. Nr. 10.

3) Vgl. unter anderem F. Schmidt u. H. Steyer, Ann. d. Phys. 79. S. 463. 1926.

längs der Kurve konstant, also beispielsweise gleich dem Werte am Plattenrand $(v_0 - k r_0) \sin \psi_0$, d. h. mit den experimentellen Daten $v_0 = 132,0$; $k = \frac{4 \pi \alpha}{Q} = 11,86$; Plattenradius $r_0 = 2,7$; Abgangswinkel $\psi_0 = 80,8^\circ$ gleich $98,688$. Setzt man $\sin \psi = \frac{\Delta r}{\Delta s}$, so kann man mit genügender Annäherung aus

$$\Delta r = \frac{98,688 - k s}{v - k r},$$

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta s)^2 - (\Delta r)^2}$$

bei willkürlich gewählten Zuwächsen Δz (bei uns meist $0,5$ cm) die Meridiankurve schrittweise konstruieren.

Fig. 4 zeigt in den weißen Kreisen das Ergebnis, die ausgezogene Kurve gibt den Versuchsbefund. Die Übereinstimmung ist nahezu vollkommen. Dem sehr geringen systematischen Unterschied messen wir keine Bedeutung bei.

Um zu veranschaulichen, wie stark sich der Einfluß des α in der Kurvenform ausprägt, ist in den schwarzen Kreisen der Fig. 4 die Meridiankurve angedeutet, die man bei gleichen Anfangsbedingungen mit dem normalen Werte 74 der Oberflächenspannung errechnet. Sie liegt weit außerhalb der beobachteten.

9. Als zweites Beispiel seien die α einer Glocke ähnlicher Gestalt mitgeteilt, die mit der gleichen scharfen

Platte wie die Glocke Nr. 7 gewonnen war, aber mit einer Düse von $0,6$ cm Durchmesser, mit der kleineren Ausflußmenge $Q = 59,3$ und der größeren Anfangsgeschwindigkeit $172,0$. Wiederum zeigt das α bei erwarteter Streuung keinen Gang: aus den Bogenstücken $z = 0,5 \rightarrow 1$ bis $z = 3,5 \rightarrow 4$ berechnet man $87,2$; $82,7$; $80,7$; $78,5$; $80,5$; $80,4$; $82,9$. Der Mittelwert ist $81,8$ in guter Übereinstimmung mit Nr. 7.

Platten mit stumpfem Rande liefern zwar erheblich andere, mehr in die Länge gezogene Glockenformen (die ein Auswerten bis

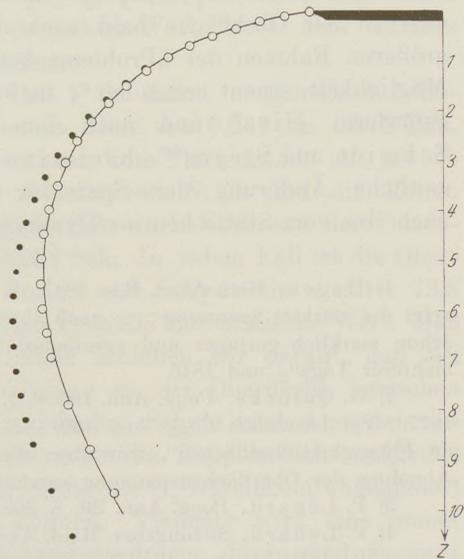


Fig. 4

zu größeren z ermöglichen). Aber die Oberflächenspannung zeigt wesentlich den gleichen übernormalen Wert.

10. Der ungewöhnlich große Wert der Oberflächenspannung, den wir nach unserer dynamischen Methode finden, fügt sich den Ergebnissen ein, die über die kapillaren Verhältnisse von Oberflächen unmittelbar nach ihrer Bildung vorliegen, beginnend mit Hagen¹⁾, gefördert unter anderem durch Quincke²⁾ in einer größeren Reihe von Arbeiten, neuerdings besonders durch Lenard und seine Schule vervollständigt. Lenard³⁾ bestimmt 1887 die Abnahme der Oberflächenspannung mit der Zeit aus den Schwingungen fallender Tropfen, deutet sie hier noch aus Verunreinigungen, später aber (1910)⁴⁾, als er mitangeregt durch bemerkenswerte Arbeiten von Pedersen⁵⁾ und Bohr⁶⁾ über schwingende Flüssigkeitsstrahlen, diesen Fragenkreis wieder aufnimmt, durch das Vorhandensein der Molekelgattungen H_2O , $(H_2O)_2$, $(H_2O)_3$ im Wasser, deren einfachste sich an der Oberfläche bald nach deren Bildung ansammeln. Im größeren Rahmen der „Probleme komplexer Moleküle“⁷⁾ wird diese Möglichkeit erneut behandelt⁸⁾, inzwischen aber auch experimentell gefördert. Hiss⁹⁾ und nach ihm mit verbesserten Hilfsmitteln Schmidt und Steyer¹⁰⁾, Kleimann¹¹⁾ und Seitz¹²⁾ bestimmen die zeitliche Änderung der Spannung reiner Flüssigkeitsoberflächen nach der vom Statischen ins Dynamische abgewandelten Steighöhen-

1) Hagen, Berl. Akad. Ber. 1845. (S. 168: „Die ganz frische Oberfläche zeigt die stärkste Spannung . . .; nach einer halben Minute wird dieselbe aber schon merklich geringer und vermindert sich noch sehr auffallend während mehrerer Tage.“) und 1846.

2) G. Quincke, Pogg. Ann. **105**. S. 1. 1858 usw. bis Wied. Ann. **2**. S. 145. 1877. Vgl. besonders Pogg. Ann. **160**. 1877. S. 568 ff.: „Elastische Nachwirkung an Flüssigkeitsoberflächen“, worunter eben die erst rasche, dann langsame Abnahme der Oberflächenspannung verstanden ist.

3) P. Lenard, Pogg. Ann. **30**. S. 209. 1887.

4) P. Lenard, Sitzungsber. Heid. Akad. d. Wiss. 1910, 18. Abh.

5) P. O. Pedersen, Phil. Trans. A **207**. S. 341. 1907.

6) N. Bohr, ebenda A **209**. S. 281. 1909.

7) P. Lenard, Sitzungsber. Heid. Akad. d. Wiss. 1914, 27. u. 28. Abh.

8) Eine schöne Bestätigung haben diese Vorstellungen über die Konstitution des Wassers kürzlich durch Ramakrishna Rao erfahren (Proc. Roy. Soc. A **145**. S. 489. 1934). Er stellt aus der Intensität der Ramanbanden nicht nur die Anwesenheit einfacher, doppelter und dreifacher H_2O -Molekeln fest, sondern bestimmt sogar ihre prozentuale Beteiligung bei verschiedenen Temperaturen.

9) R. Hiss, Diss. Heidelberg 1913.

10) F. Schmidt u. H. Steyer, Ann. d. Phys. **79**. S. 442. 1926.

11) E. Kleinmann, Ann. d. Phys. **80**. S. 245. 1926.

12) E. O. Seitz, Ann. d. Phys. [5] **1**. S. 1099. 1929.

methode: dauernde Neubildung der Oberfläche in der Kapillare durch Anblasen, dann Abstellen des Luftstromes und Beobachtung des allmählichen Absinkens der gehobenen Flüssigkeitssäule. Dabei zeigt sich die Erklärung durch das Ein- und Auswärtswandern der verschiedenen Molekelsorten nicht als hinreichend. Vielmehr bestehen in erster Linie Zusammenhänge mit der Ausbildung einer elektrischen Doppelschicht in der Wasseroberfläche¹⁾.

Als Gesamtergebnis dieser Arbeiten entnehmen wir für unsern Fall: nach den erstaunlich genauen Messungen von Schmidt und Steyer klingt α sehr rasch nach einer e -Funktion zum statischen Endwerte ab. Besonders hoch ist das anfängliche α bei der uns gerade interessierenden Temperatur von $12,5^\circ$, nämlich $96,6$ dyn/cm; es ist nach $\frac{1}{1000}$ Sek. auf $87,5$ gefallen, nach $\frac{5}{1000}$ Sek. auf $75,5$ und sinkt bei $\frac{13}{100}$ Sek. unter 74 . Der statische Endwert ist $73,5^2)$. Im Einklang damit findet Bohr³⁾ $0,06$ Sek. nach Bildung seiner Strahloberflächen bereits den statischen Wert, ohne über kürzere Zeiten Aussagen machen zu können.

Nun hat unsere Glocke Tab. 1 in ihrem ausgemessenen Bereiche von $z = 0,5$ bis $z = 5$ cm ein Alter von $0,039$ bis $0,078$ Sek., wenn man von der Düse aus rechnet, vom Plattenrande aus jeweils $0,023$ Sek. weniger. Bei der Glocke von Nr. 9 sind die Zeiten kürzer: Punkt $z = 0,5$ wird $0,029$ Sek. nach Verlassen der Düsenöffnung erreicht, Punkt $z = 4$ $0,054$ Sek. In jedem Fall ist die Oberfläche alt genug, um nach Schmidt und Steyer ein α unter $73,8$ zu liefern, das ist bis auf wenige Promille der statische Wert. Daß wir einen erheblich größeren finden schieben wir darauf, daß bei uns nicht die beruhigten Verhältnisse an der Oberfläche herrschen wie in den Kapillaren der Lenardschen Schule nach Abstellen des Luftstromes. Bei uns wird sich weder die Doppelschicht ungestört ausbilden, noch werden sich die einfachen H_2O -Molekeln ungehindert an der Oberfläche ansammeln können. Vielmehr wird eine immer erneute Durchmischung die Molekelanordnung stören und so zwar nicht das hohe α der jungfräulichen, aber auch nicht das tiefe α der gealterten Oberfläche zustande kommen lassen.

Es ist von Interesse zu untersuchen, ob eine Flüssigkeit, die keine Komplexmolekeln bildet, eine Abnahme des α mit alternder

1) E. Kleinmann, a. a. O., S. 260; E. O. Seitz, a. a. O., S. 1107.

2) Diese Angaben beziehen sich auf destilliertes Wasser. Es wird erlaubt sein, sie im Wesentlichen auf Leitungswasser zu übertragen. Dessen statisches α ist gleich dem des destillierten. Vgl. z. B. Pedersen, a. a. O. S. 379.

3) N. Bohr, Proc. Roy. Soc. A 84. S. 395. 1910.

Oberfläche zeigt. Solche Versuche sind in Vorbereitung, bisher liegen von anderer Seite eindeutige Aussagen hierüber nicht vor¹⁾.

11. Sowohl bei der Mikroskop- wie bei der monochromatischen Ultrarotmethode wird die Glocke durch den hindurchgeführten Metallbügel gestört, der Mikroskop oder Monochromator mit Strichplatte oder Thermoelement verbindet. Wir haben eine ähnliche Störung auch bei der Aufnahme der Meridiankurven angebracht, um genau die gleiche Form

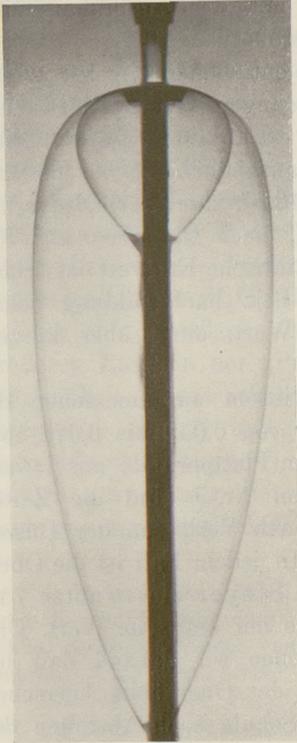


Fig. 5

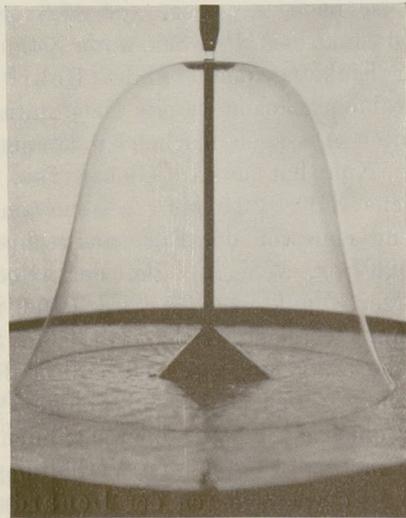


Fig. 6

zu photographieren, an der die Dickenmessungen durchgeführt worden sind, und um zu verhindern, daß sich die Glocke wie in Fig. 1 am Plattenhalter schließt. Denn eine solche geschlossene Glocke zeigt im Laufe der Zeit Formänderungen, erklärbar durch Adhäsionskräfte, die an der Zusammenflußstelle wirksam werden und sie allmählich nach oben oder nach unten verschieben. Wir nennen diese theoretisch wie experimentell interessanten Formen im Gegensatz zu den bisher allein untersuchten „freien Glocken“ „erzwungene“ und zeigen in Figg. 5 und 6 zwei Beispiele.

1) Vgl. R. Hiss, a. a. O., S. 42f.; F. Schmidt u. H. Steyer, a. a. O., S. 458f.

In Fig. 5 sind zwei Glocken übereinander photographiert. Ausgangspunkt war hier eine „normale Form“ wie in Fig. 1. Wurde sodann der Wasserdruck vermindert, so kroch der Vereinigungspunkt am Halter abwärts, und es bildete sich die wiedergegebene langgestreckte Form. Aber sie ist instabil: stört man sie mechanisch unter unveränderten Zuflußverhältnissen, so springt sie in die mitphotographierte kleine über. Diese ist als freie Form aufzufassen, kann sich aber durch selbständiges Herabsaugen allmählich in eine wiederum andere erzwungene verwandeln.

Eine noch eigentümlichere erzwungene Form, nun endlich eine wahre „Glocke“, zeigt die letzte Figur. Hier hat sich bei den anfänglichen Zuflußverhältnissen eine große Glocke gebildet, die aber nicht die geschlossene Form der Fig. 1 erreichen konnte, weil sie in der Gegend ihres größten Durchmessers eine Wasserfläche traf, auf der sie nahezu senkrecht aufsaß. Durch Vermindern des Wasserdrucks wird die aufprallende Wasserhaut nach außen gezogen, es bildet sich die Glockenform, die sich dann im allgemeinen rhythmisch erweitert und verengt.

Wir behalten uns vor auf diese [und ähnliche Erscheinungen zurückzukommen.

Zusammenfassung

An Wasserglocken wird die Meridiankurve, die Abflußmenge je Sekunde und die Glockendicke gemessen, letztere nach der Mikroskopmethode des Herzogs von Chaulnes oder durch Absorption ultraroter Strahlung. Mit diesen Werten wird auf Grund einer Theorie von Boussinesq eine Neubestimmung der dynamischen Oberflächenspannung des Wassers durchgeführt. Sie liegt etwa 10% über dem statischen Werte, bei 81,5 dyn/cm gegenüber 74 dyn/cm bei 12° C. Die Lenardschen Vorstellungen über die Spannung frischer Oberflächen lassen als Erklärungsmöglichkeit die noch nicht vollendete Ausbildung einer elektrischen Doppelschicht in der Wasseroberfläche zu; hinzu kommt vielleicht, daß die einfachen H₂O-Molekeln die komplexen noch nicht hinreichend von der Oberfläche verdrängt haben.

Danzig-Langfuhr, Theoretisch-Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, Juni 1935.

(Eingegangen 27. Juni 1935)





14679

Politechniki Gdańskiej

800

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.