

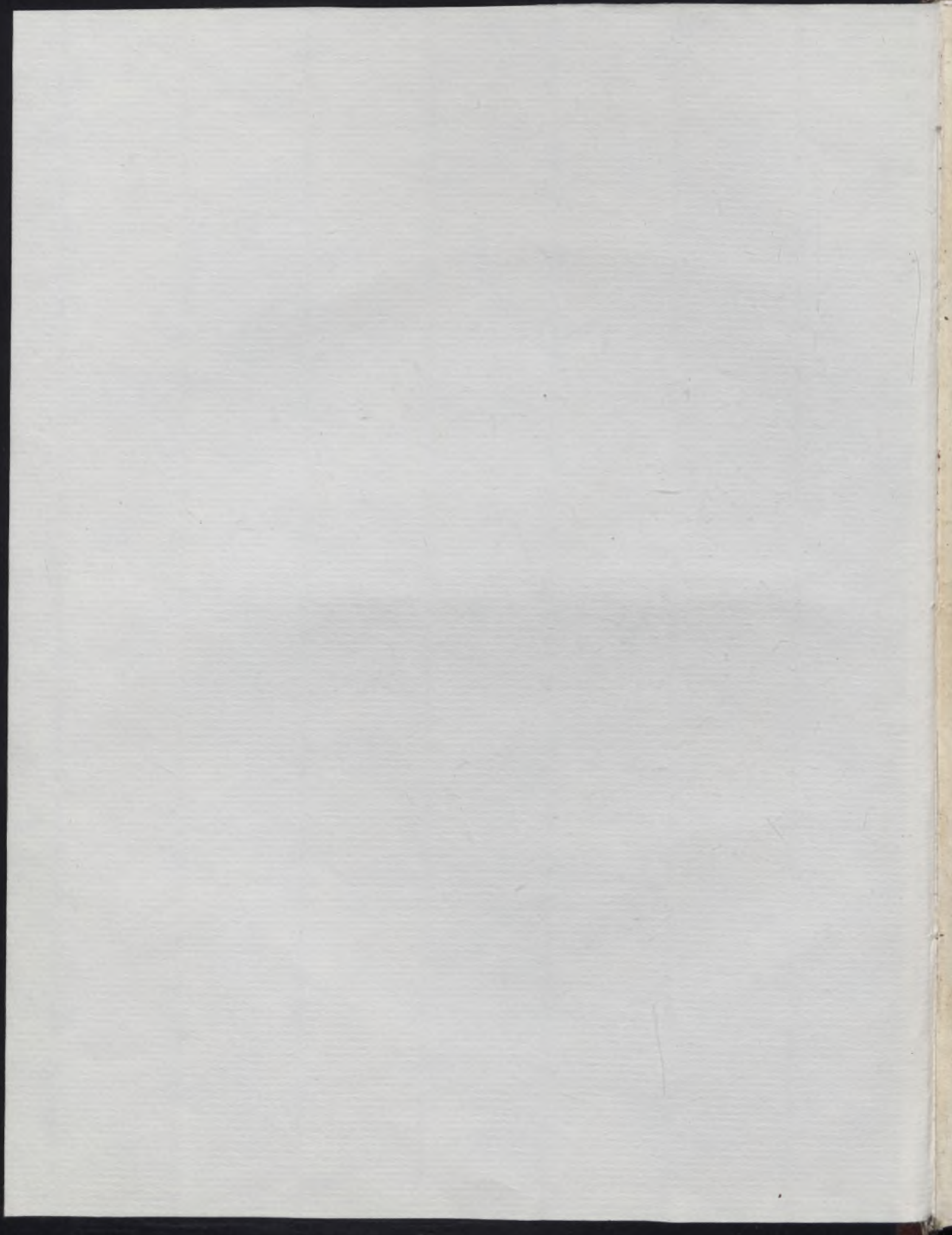


NEWTONI.

PRINCIPIA

PHILOSOPHIE.

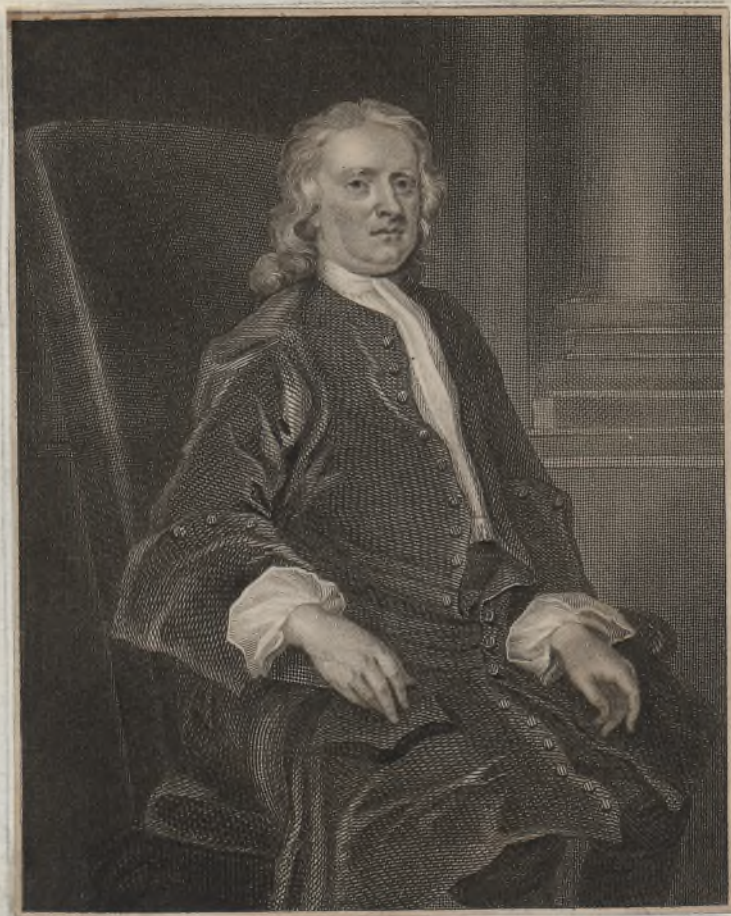
SECUNDO COMMENTARIO PERPETUO.



NEWTONI

**PRINCIPIA
PHILOSOPHIÆ,**

CUM COMMENTARIO PERPETUO.



SIR ISAAC NEWTON.

NY 3163



163

P R
P H
CUM CO

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO.

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheſeos Professorum.

TOMUS PRIMUS



GENEVÆ.

Typis BARRILLOT & FILII Bibliop. & Typogr.

MDCCLXXXIX.



PHILOSOPHIA
NATURALIS
PRINCIPALIA
MATEMATICA
AUCTORE

193

• III 502.051

v

R E R U M
M A T H E M A T I C A R U M
S T U D I O S I S,
P H I L O S O P H I Æ N E W T O N I A N Æ
I N T E R P R E T E S.

QUàm recondita sint simul & utilia *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, norunt ii omnes qui vel ipsum Clarissimi Authoris nomen audierunt. Tanta est rerum dignitas atque sublimitas, tanta sermonis plusquam Geometrica brevitatis, ut præstantissimum illud opus paucissimis duntaxat Geometris factum videatur. Eas ob causas viris Matheseos cultiorisque Physices studiosis gratissimam fore putavimus, eo modo comparatam interpretationem, ut omnes tam utilis Philosophiæ propositiones, corollaria omnia atque scholia inoffenso pede possint decurrere, qui vel ipsis Geometriæ & vulgaris Algebræ ele-

mentis probè imbuti sunt. Quod ut præstaremus, *Mechanices & Calculi infinitorum principia*, quantum instituti nostri ratio postulat, *Newtoni* vestigiis insistentes demonstravimus; perbreve, sed theorematum fecunditate plenum nostris *Commentariis* inseruimus tractatum *Sectionum Conicarum*; Quæ vel minimum, nimiâ obscuritate *Lectori* negotium parere possent, ea omnia exponere & in bono Lumine collocare conati sumus; quæ in *scholiis*, *corollariis*, *propositionumque serie*, prætermittâ demonstratione, pronuntiat *Newtonus*, præmissis vel interjectis *Lemmatis* scrupulosè demonstrata invenient, qui in sola doctissimi *Authoris* verba jurare nolunt; eximia quæ in *Newtoni* *propositionibus* latent inventa, deteximus atque evolvimus; tandem cum præstantissima illa summi viri principia non solum intelligere, sed & illam quam sibi aperuit ad inventionem viam explorare plurimum delectationis habeat & utilitatis, dispersa huc & illuc generalia quædam *problemata* *Lector*
repe-

reperiet. Hæc sunt quæ facere volumus, quo exitu, penès benevolum Lectorem esto iudicium. Ex brevi illo commentariorum nostrorum prospectu satis patet quos nobis lectores postulemus; nec præstantissimis Mathematicis nec imperito Philosophorum vulgo nos scribere profiteamur; ad huiusce operis lectionem eos duntaxat admittimus qui ea quæ jam diximus elementa in promptu habent, & tali insuper pollent mentis acie, ut longioris demonstrationis vim atque seriem studiosè persequi & animo comprehendere possint.

De nostris Commentariis hæc satis dicta sint. Verùm naturalis æquitas & mathematicus candor postulant, ut nos plurimùm debere fateamur Doctissimis Viris, DAVIDI GREGORIO, VARIGNONIO, JACOBO HERMANNO, JOANNI KEILLIO, aliisque multis, qui varias *Newtonianæ Philosophiæ* partes luculentis scriptis illustrarunt. Eâdem æquitatis atque ingenuitatis lege à nobis religiosè factum est, ut eos omnes quorum spoliis aliquandò ditescimus,

mus, in Commentariorum nostrorum decursu honoris causâ nominemus. Publicum quoque grati animi testimonium deesse nolumus Clariss. D^{no}. J. L. CALANDRINO in Academiâ Genevensi Professore in rebus Mathematicis versatissimo, qui hanc nostram *Newtoni* principiorum editionem adornari curavit ad normam elegantissimæ illius editionis, quæ additionibus multis locupletata *Londini* prodiit anno 1726. Deindè id sibi laboris assumpsit vir doctissimus non solum ut schemata incidi, suis locis disponi, typographica menda corrigi sedulò invigilaret, sed etiam ea quæ jam laudavimus Sectionum Conicarum elementa composuit, & quæ à nobis non satis perspicuè videbantur exposita propriis notis aliquandò illustravit.

Hoc nostro labore fruantur rerum mathematicarum Cultores.

R. O M Æ in Regio Conventu SS^æ. Trinitatis,
An. 1739.

ILLUSTRISSIMÆ
SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI

TRACTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTON.

ILLUSTRISSIMAE

SOCIETATI REGIAE

SERENISSIMO REGI

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATAE

ET

AUSPICIIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI

TRACTATUM HUC D.D.

IS. NEWTON

AUCTORIS
PRÆFATIO

A D

LECTOREM.

CUM veteres mechanicam (uti auctor est Pappus) in rerum naturalium investigatione maximi fecerint; & recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc tractatu mathesim excolere, quatenus ea ad philosophiam spectat. Mechanicam verò duplicem veteres constituerunt: rationalem, quæ per demonstrationes accuratè procedit, & practicam. Ad practicam spectant artes omnes manuales, à quibus utique mechanica nomen mutuata est. Cum autem artifices parùm accuratè operari soleant, fit ut mechanica omnis à geometriâ ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad geometriam referatur, quicquid minùs accuratum ad mechanicam. Attamen errores non sunt artis, sed artificum. Qui minùs accuratè operatur, imperfectior est mechanicus, & si quis accuratissimè operari posset, hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam & linearum rectorum & circulorum descriptiones, in quibus geometria fundatur, ad mechanicam pertinent. Has lineas describere geometria non docet, sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accuratè describere prius didicerit, quam limen attingat geometriæ; dein quomodo per has operationes problemata solvantur, docet; rectorum & circulos describere problemata sunt, sed non geometrica. Ex mechanica postulatur horum solutio, in geometria docetur solutorum usus. Ac gloriatur geometria quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur geometria in praxi mechanica, & nihil aliud est quam mechanicæ universalis pars illa, quæ artem mensurandi ac-

curatè proponit ac demonstrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipuè versentur, fit ut geometria ad magnitudinem, mechanica ad motum vulgo referatur. Quo sensu mechanica rationalis erit scientia motuum, qui ex viribus quibuscunque resultant, & virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accuratè proposita ac demonstrata. Pars hæc mechanicæ à veteribus in potentiis quinque ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non artibus sed philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maximè tractamus, quæ ad gravitatem, levitatem, vim elasticam, resistantiam fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: Et eâ propter, hæc nostra tanquam philosophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut à phænomenis motuum investigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant propositiones generales, quas libro primo & secundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cælestibus, per propositiones in libris prioribus mathematicè demonstratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad solem & planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per propositiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ & maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particule per causas nondum cognitæ vel in se mutuò impelluntur & secundum figuras regulares coherent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, philosophi hæctenus naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huic philosophandi modo, vel veriori alicui, principia hæc posita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, vir acutissimus & in omni literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius operam navavit, nec solum typhothetarum sphalmata correxit & schemata incidi curavit sed etiam auctor fuit, ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonstratam a

PRÆFATIO.

XIII

me figuram orbium cœlestium impetraverat, rogare non desistit, ut eandem cum Societate Regali communicarem, quæ deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit, ut de eadem in lucem emittendâ cogitare inciperem. At postquam motuum lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cœpisssem, quæ ad leges & mensuras gravitatis & aliarum virium, & figuras à corporibus secundum datas quascunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus mediorum, ad orbis cometarum & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & unâ in publicum darem. Quæ ad motus lunares spectant (imperfecta cum sint) in corollariis propositionis LXVI. simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum propositionum interrumpere. Nonnulla serò inventa locis minùs idoneis inserere malui, quam numerum propositionum & citationes mutare. Ut omnia candidè legantur & defectus in materiâ tam difficili non tam reprehendantur, quam novis lectorum conatibus investigentur, & benignè suppleantur, enixè rogo.

Dabam Cantabrigiæ, e Collegio
S. Trinitatis, Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

** 3

AUC-

AUCTORIS PRÆFATIO

I N

EDITIONEM SECUNDAM.

IN hęc secundā Principiorum editione multa sparsim emendantur, & nonnulla adjiciuntur. In libri primi sectione II. inventio virium, quibus corpora in orbibus datis revolvi possint, facilior redditur & amplior. In libri secundi sectione VII. theoria resistentiæ fluidorum accuratiùs investigatur, & novis experimentis confirmatur. In libro tertio theoria lunæ & præcessio æquinoctiorum ex principiis suis plenius deducuntur, & theoria cometarum pluribus & accuratiùs computatis orbium exemplis confirmatur.

Dabam Londini,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

E D I.

EDITORIS PRÆFATIO

I N

EDITIONEM SECUNDAM.

NEWTONIANÆ philosophiæ novam tibi, lector benevole, diuque desideratam editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potissimum contineantur in hoc opere celeberrimo, intelligere potes ex indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipsa te ferè docebit auctoris præfatio. Reliquum est, ut adjiciantur nonnulla de methodo hujus philosophiæ.

Qui physicam tractandam susceperunt, ad tres ferè classes revocari possunt. Extiterunt enim, qui singulis rerum speciebus qualitates específicas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum singulorum operationes, ignotâ quâdam ratione, pendere voluerunt. In hoc posita est summa doctrinæ scholasticæ, ab *Aristotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique singulos effectus ex corporum singularibus naturis oriri; at unde sint illæ naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti sint in rerum nominibus, non in ipsis rebus; sermonem quendam philosophicum censendi sunt adinvenisse, philosophiam tradidisse non sunt censendi.

Alii ergo melioris diligentix laudem consequi sperarunt rejecta vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque materiam universam homogeneam esse, omnem verò formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particulatum componentium simplicissimis quibusdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et rectè quidem progressio instituitur à simplicioribus ad magis composita, si particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipsa tribuit natura. Verùm ubi licentiam sibi assumunt, ponendi quascunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertosque situs & motus; quin & fingendi fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrimè permeant, omnipotente prædi-

ta

ta subtilitate, motibusque occultis agitata; jam ad somnia delabuntur, neglectâ rerum constitutione verâ: quæ sanè frustra petenda est ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certissimas observationes investigari possit. Qui speculationum suarum fundamentum desumunt ab hypothesebus; etiamsi deinde secundum leges mechanicas accuratissimè procedant; fabulam quidem elegantem fortè & venustam, fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui philosophiam scilicet experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem principii loco assumunt, quod nondum ex phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in physicam recipiunt, nisi ut quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque methodo incedunt, analyticâ & syntheticâ. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam phænomenis per analysin deducunt, ex quibus deinde per synthesin reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est philosophandi ratio longè optima, quam præ cæteris meritò amplectendum censuit celeberrimus auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in quâ excolendâ atque adornandâ operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit exemplum, mundani nempe systematis explicationem è theoriâ gravitatis felicissimè deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel fixerunt alii: primus ille & solus ex apparentiis demonstrare potuit, & speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo principio ægrè assentiri potuisse, & certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: tibi potius, benevole lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus tute ipse iudicium non iniquum feras.

Igitur ut argumenti sumatur exordium à simplicissimis & proximis; dispiciamus paulisper qualis sit in terrestribus natura gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora cælestia, longissimè à sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in terram. Nulla dari corpora verè levia, jamdudum confirmavit experientia

riencia multiplex. Quæ dicitur levitas relativa, non est vera levitas, sed apparens solummodo; & oritur à præpollente gravitate corporum contiguorum.

Porrò, ut corpora universa gravitent in terram, ita terra vicissim in corpora æqualiter gravitat; gravitatis enim actionem esse mutuam & utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguatür terræ totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuò æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent rectâ moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omninò contra experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, gravitatis actionem esse mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter à centro terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, è quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam verò corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublata scilicet aëris resistentia: accuratius autem comprobatur per experimenta pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantiis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in terram & terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis qua corpus terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in terram. Hoc autem pondus erit ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem aucta vel diminuta mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque telluris ex conjunctis partium actionibus consulari censenda erit; atque aded corpora omnia terrestria se mutuò trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ tra-

* * *

hen-

hentis. Hæc est natura gravitatis apud terram: videamus jam qualis sit in cœlis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare; naturæ lex est ab omnibus recepta philosophis. Inde verò sequitur, corpora quæ in curvis moventur, atque adeò de lineis rectis orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, vi aliqua perpetuò agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in orbibus curvis revolventibus necessariò aderit vis aliqua, per cujus actiones repetitas indefinenter à tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum est, quod mathematicis rationibus colligitur & certissimè demonstratur; corpora nempe omnia, quæ moventur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ, quæque radio ducto ad punctum vel quiescens vel utcumque motum describunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri à viribus quæ ad idem punctum tendent. Cum igitur in confesso sit apud astronomos, planetas primarios circum solem, secundarios verò circum suos primarios, areas describere temporibus proportionales; consequens est ut vis illa, quâ perpetuò detorquentur à tangentibus rectilineis & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, versus corpora dirigatur quæ sita sunt in orbitarum centrâ. Hæc itaque vis non ineptè vocari potest, respectu quidem corporis revolventis, centripeta; respectu autem corporis centralis, attractiva; à quacunque demùm causâ orti fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda sunt, & mathematicè demonstrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in circulis concentricis, & quadratura temporum periodicorum sint ut cubi distantiarum à centro communi; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Vel, si corpora revolvantur in orbitis quæ sunt circulis finitimæ, & quiescant orbitarum apsidibus; vires centripetas revolventium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Obtinere casum alterutrum in planetis universis consentiunt astronomi. Itaque vires centripetæ planetarum omnium sunt reciprocè ut quadrata distantiarum ab orbium centrâ. Si quis objiciat planetarum, & lunæ præsertim, apsidibus non penitus quiescere; sed motu quodam lento ferri in consequentia: responderi potest

potest, etiam si concedamus hunc motum tardissimum exinde profectum esse quod vis centripetæ proportio aberret aliquantum à duplicata; aberrationem illam per computum mathematicum inveniri posse & planè insensibilem esse. Ipsa enim ratio vis centripetæ lunaris, quæ omnium maximè turbari debet, paululum quidem duplicatam superabit; ad hanc vero sexaginta ferè vicibus propiùs accedet quàm ad triplicatam. Sed varior erit responsio, si dicamus hanc apsidum progressionem, non ex aberratione à duplicatâ proportione, sed ex aliâ prorsus diversâ causâ oriri, quemadmodum egregiè commonstratur in hac philosophia. Restat ergo ut vires centripetæ, quibus planetæ primarii tendunt versùs solem & secundarii versùs primarios suos, sint accuratè ut quadrata distantiarum reciprocè.

Ex iis quæ hætenus dicta sunt, constat planetas in orbitis suis retineri per vim aliquam in ipsos perpetuò agentem: constat vim illam dirigi semper versùs orbitalium centra: constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ob eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum distantiae, diminui in eadem proportione quâ distantiae quadratum augetur. Videamus jam, comparatione institutâ inter planetarum vires centripetas & vim gravitatis, annon ejusdem fortè sint generis. Ejusdem verò generis erunt, si deprehendantur hinc & inde leges eadem, eademque affectiones. Primò itaque lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ à corporibus è quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi à viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus: hoc utique consequitur ex ratiociniis mathematicis. Erit igitur vis centripeta lunæ in orbitâ suâ revolventis, ad vim gravitatis in superficie terræ, ut spatium quod tempore quàm minimo describeret luna descendendo per vim centripetam versùs terram, si circulari omni motu privari fingeretur ad spatium quod eodem tempore quàm minimo describit grave corpus in vicinia terræ, per vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcûs à luna per idem tempus descripti sinui verso, quippe qui lunæ translationem de tangente, factam à vi centripeta, metitur; atque adeò computari potest ex datis tum lunæ

tempore periodico, tum distantia ejus a centro terræ. Spatium posterius invenitur per experimenta pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim gravitatis in superficie terræ, erit ut quadratum semidiametri terræ ad orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superius ostenduntur, vis centripeta lunæ in orbita sua revolventis ad vim lunæ centripetam propè terræ superficiem. Vis itaque centripeta propè terræ superficiem æqualis est vi gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem, si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplò celerius in terram caderent quàm ex vi solâ gravitatis. Constat igitur vim illam centripetam, quâ luna perpetuò de tangente vel trahitur vel impellitur & in orbita retinetur, ipsam esse vim gravitatis terrestris ad lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese virtus extendat, cum nullam ejus sensibilem imminutionem, vel in altissimis montium cacuminibus, observare licet. Gravitat itaque luna in terram: quin & actione mutua, terra vicissim in lunam æqualiter gravitat: id quod abundè quidem confirmatur in hac philosophiâ, ubi agitur de maris æstu & æquinoctiorum præcessione, ab actione tum lunæ tum solis in terram oriundus. Hinc & illud tandem edocemur, quâ nimirum lege vis gravitatis decreseat in majoribus à tellure distantis. Nam cum gravitas non diversâ sit à vi centripeta lunari, hæc verò sit reciprocè proportionalis quadrato distantia; diminuetur & gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa solem & secundariorum circa jovem & saturnum sunt phænomena generis ejusdem ac revolutio lunæ circa terram, quoniam porrò demonstratum est vires centripetas primariorum dirigi versùs centrum solis, secundariorum versùs centra jovis & saturni, quemadmodum lunæ vis centripeta versùs terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centris, quemadmodum vis lunæ est ut quadratum distantia à terra: concludendum erit eandem esse naturam universis. Itaque ut luna gravitat in terram, & terra vicissim in lunam; sic etiam gravitabunt omnes secundarii in primarios suos, & primarii vicissim

in

in secundarios; sic & omnes primarii in solem, & sol vicissim in primarios.

Igitur sol in planetas universos gravitat & universi in solem. Nam secundarii dum primarios suos comitantur, revolvuntur interea circum solem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriusque generis planetæ gravitant in solem, & sol in ipsos. Secundarios verò planetas in solem gravitare abundè insuper constat ex inæqualitatibus lunaribus; quarum acuratissimam theoriam, admiranda sagacitate patefactam, in tertio hujus operis libro expositam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoersum propagari ad ingentes usque distantias, & sese diffundere ad singulas circumjecti spatii partes, apertissimè colligi potest ex motu cometarum; qui ab immensis intervallis profecti feruntur in viciniam solis, & nonnunquam adeò ad ipsum proximè accedunt ut globum ejus, in periheliis suis versantes, tantùm non contingere videantur. Horum theoriam ab astronomis antehac frustra quæritam, nostro tandem sæculo faciliter inventam & per observationes certissimè demonstratam, præstantissimo nostro auctori debemus. Patet igitur cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce verò phænomenis manifestum est & mathematicè comprobatur, vires illas, quibus cometæ retinentur in orbitis suis, respicere solem & esse reciprocè ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque cometæ in solem: atque adeò solis vis attractiva non tantùm ad corpora planetarum in datis distantis & in eodem ferè plano collocata, sed etiam ad cometas in diversissimis cælorum regionibus & in diversissimis distantis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde verò sequitur, planetas & cometas universos se mutuò trahere, & in se mutuò graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione jovis & saturni, astronomis non incognita, & ab actionibus horum planetarum in se invicem oriunda; quin & ex motu illo lentissimo apsidum, qui supra memoratus est, quique à causâ consimili proficiscitur.

Eo demùm pervenimus ut dicendum sit, & terram & solem & corpora omnia cœlestia, quæ solem comitantur, se mutuò attrahere. Singulorum

gulorum ergo particulae, quæque minimæ, vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quamadmodum supra de terrestribus ostensum est. In diversis autem distantis, erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciprocè: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere globos eadem lege trahentes, mathematicè demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod à nullis non recipitur philosophis; effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eadem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si gravitas sit causa descensus lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensus in *America*? Si gravitas mutua fuerit inter lapidem & terram in *Europa*; quis negabit mutua esse in *America*? Si vis attractiva lapidis & terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac regula fundatur omnis philosophia: quippe quâ sublatâ nihil affirmare possumus de universis. Constitutio rerum singularum innotescit per observationes & experimenta: inde verò non nisi per hanc regulam de rerum universalium naturâ judicamus.

Jam cum gravia sint omnia corpora, quæ apud terram vel in cælis reperiuntur, de quibus experimenta vel observationes instituere licet; omninò dicendum erit, gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint extensa, mobilia & impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint gravia. Corporum extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non nisi per experimenta, innotescunt; eodem planè modo gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus observationes habemus, extensa sunt & mobilia & impenetrabilia: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, extensa esse & mobilia & impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt gravia, de quibus observationes habemus: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus observationes non habemus, gravia esse. Si quis dicat corpora stellarum inerrantium non esse gravia, quandoquidem eorum gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit

cebit neque extensa esse, nec mobilia, nec impenetrabilia, cum hæ fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis? inter primarias qualitates corporum universorum vel gravitas habebit locum; vel extensio, mobilitas, & impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel rectè explicabitur per corporum gravitatem, vel non rectè explicabitur per corporum extensionem, mobilitatem, & impenetrabilitatem.

Audire nonnullos hanc improbare conclusionem, & de occultis qualitatibus nescio quid musitare. Gravitationem scilicet occultam esse quid, perpetuò arguari solent; occultas verò causas procul esse ablegandas à philosophiâ. His autem facillè respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per observationes clarissimè demonstratur, sed has solum quarum occulta est & ficta existentia nondum verò comprobata. Gravitatio ergo non erit occulta causa motuum cœlestium; siquidem ex phænomenis ostensum est, hanc virtutem reverà existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas, qui nescio quos vortices, materiæ cujusdam prorsus fictitiæ & sensibus omninò ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem gravitatio occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur è philosophiâ, quod causa ipsius gravitatis occulta est & nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuunt absurdi, unde totius tandem philosophiæ fundamenta convellantur. Etenim causæ continuo nexu procedere solent à compositis ad simpliciora: ubi ad causam simplicissimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Causæ igitur simplicissimæ nulla dari potest mechanica explicatio: si daretur enim, causam nondum esset simplicissima. Has tu proinde causas simplicissimas appellabis occultas, & exulare jubebis? Simul verò exulabunt & ab his proximè pendentes & quæ ab illis porro pendent, usque dum à causis omnibus vacua fuerit & probè purgata philosophia.

Sunt qui gravitationem præter naturam esse dicunt, & miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam esse volunt, cum in physicâ præternaturales causæ locum non habeant. Huic ineptæ prorsus objectioni diluendæ, quæ & ipsa philosophiam subruit universam, vix operæ pretium est immorari. Vel enim gravitationem corporibus omnibus inditam esse negabunt: quod tamen dici non potest: vel eo nomine

nomine præter naturam esse affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque idè ex causis mechanicis originem non habeat. Dantur certè primariæ corporum affectiones; quæ quoniam sunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes sint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint verò qualis sit deinde futura philosophia.

Nonnulli sunt quibus hæc tota physica cœlestis vel idè minùs placet, quòd cum *Cartesii* dogmatibus pugnare & vix conciliari posse videatur. His sua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam sibi concedi postulant. NEWTONIANAM itaque philosophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & causas sequi per phænomena comprobatas, potiùs quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram philosophiam pertinet, rerum naturas ex causis verè existentibus derivare: eas verò leges quærere, quibus voluit summus opifex hunc mundi pulcherrimum ordinem stabilire; non eas quibus potuit, si ita visum fuisset. Rationi enim consonum est, ut à pluribus causis, ab invicem nonnihil diversis, idem possit effectus proficisci: hæc autem vera erit causa, ex qua verè atque actu proficiscitur; reliquæ locum non habent in philosophiâ verâ. In horologiis automatis idem indicis horarii motus vel ab appenso pondere vel ab intus concluso elatere oriri potest. Quod si oblatum horologium reverà sit instructum pondere; ridebitur qui finget elaterem, & ex hypothesi sic præproperè confictâ motum indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam machinæ fabricam penitiùs perscrutari, ut ita motûs propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non absimile feretur iudicium de philosophis illis, qui materiâ quâdam subtilissimâ cœlos esse repletos, hanc autem in vortices indefinenter agi voluerunt. Nam à phænomenis vel accuratissimè satisfacere possent ex hypothesibus suis; veram tamen philosophiam tradidisse, & veras causas motuum cœlestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has reverà existere, vel saltè alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum attractionem habere verum locum in rerum naturâ; quinetiam ostensum fuerit, quâ ratione motus omnes cœlestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit & meritò deridenda objectio,

objectio, si quis dixerit eosdem motus per vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse vel maximè concesserimus. Non autem concedimus: nequeunt enim illo pacto phænomena per vortices explicari; quod ab auctore nostro abundè quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somnis plùs æquò indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora planetarum & cometarum circa solem deferantur à vorticibus; oportet corpora delata & vorticum partes proximè ambientes eadem velocitate eademque cursûs determinatione moveri, & eandem habere densitatem vel eandem vim inertiae pro mole materiae. Constat verò planetas & cometas, dum versantur in iisdem regionibus cœlorum, velocitatibus variis variâque cursûs determinatione moveri. Necessariò itaque sequitur, ut fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias à sole, revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim aliâ opus erit directione & velocitate, ut transire possint planetæ; aliâ, ut transire possint cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cœlestia non deferri à materia vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque vortice, sed à pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium soli circumjectum pervadant.

Si plures vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuo penetrare motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt summè regulares, & peraguntur in sectionibus conicis nunc valdè eccentricis, nunc ad circulorum proximè formam accedentibus; jure quaerendum erit, qui fieri possit, ut iidem integri conserventur nec ab actionibus materiae occurrentis per tot sæcula quicquam perturbentur. Sanè si motus hi fictitii sunt magis compositi & difficiliùs explicantur, quam veri illi motus planetarum & cometarum; frustra mihi videntur in philosophiam recipi: omnis enim causa debet esse effectui suo simplicior. Concessa fabularum licentia, affirmaverit aliquis planetas omnes & cometas circumcingi atmosphæris, ad instar telluris nostræ; quæ quidem hypothesis rationi magis consentanea

* * * *

vide.

videbitur quam hypothesis vorticum. Affirmaverit deinde has atmosphæras, ex naturâ suâ, circa solem moveri & sectiones conicas describere; qui sanè motus multò faciliùs concipi potest, quàm con-
similis motus vorticum se invicem permeantium. Denique planetas ipsos & cometas circa solem deferri ab atmosphæris suis credendum esse statuat, & ob repertas motuum cœlestium causas triumphum agat. Quisquis autem hanc fabulam rejiciendam esse putet, idem & alteram fabulam rejiciet: nam ovum non est ovo similis, quàm hypothesis atmosphærarum hypothese vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in parabola moti deflectionem à cursu rectilineo oriri à gravitate lapidis in terram, ab occulta scilicet qualitate. Fieri tamen potest ut alius aliquis, nasi acutioris philosophus, causam aliam comminiscatur. Finget igitur ille materiam quandam subtilem, quæ nec visu, nec tactu, neque ullo sensu percipitur, versari in regionibus quæ proximè contingunt telluris superficiem. Hanc autem materiam, in diversas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas parabolicas describere contendet. Deinde vero lapidis deflectionem pulchrè sic expediet, & vulgi plausum merebitur. Lapis, inquit, in fluido illo subtili natat & cursui ejus obsequendo, non potest non eandem unâ semitam describere. Fluidum verò movetur in lineis parabolicis; ergo lapidem in parabola moveri necesse est. Quis nunc non mirabitur acutissimum hujusce philosophi ingenium, ex causis mechanicis, materiâ scilicet & motu, phænomena naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducens? Quis verò non subsannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine mathematico qualitates occultas, è philosophia feliciter exclusas, denuò revocare sustinuerit? Sed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summè regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant. Moventur in orbibus conicis, hi orbis sunt valdè admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes cœlorum partes, & planetarum regiones liberrimè pertranseunt, & sæpè contrà signorum ordinem incedunt. Hæc phænomena certissimè confirmantur ex observationibus astronomicis: & per vortices nequeunt explicari. Imò, ne quidem cum vorticibus planetarum consistere possunt. Co-
metarum

metarum motibus omninò locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus è cœlis amoveatur.

Si enim planetæ circum solem à vorticibus devehuntur; vorticum partes, quæ proximè ambiunt unumquemque planetam, ejusdem densitatis erunt ac planeta; uti suprâ dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est orbis magni perimetro, parem habebit ac tellus densitatem: quæ verò jacet intrâ orbem magnum atque orbem saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio vorticis permanere possit, debent partes minùs densæ centrum occupare, magis densæ longiùs à centro abire. Cum enim planetarum tempora periodica sint in ratione sesquuplicata distantiarum à sole, oportet partium vorticis periodos eandem rationem servare. Inde verò sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciprocè ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant à centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minùs densæ fuerint, necesse est ut cedent vi majori, quâ partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut fluidum, cujus major est densitas, majore vi gravitatis infimum petat locum: & ratione non ab simili omninò dicendum est, densiores vorticis partes majore vi centrifugâ petere supremum locum. Tota igitur illa & multò maxima pars vorticis, quæ jacet extrâ telluris orbem, densitatem habebit atque adeò vim inertix pro mole materiæ, quæ non minor erit quàm densitas & vis inertix telluris: inde verò cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse meritò videatur. Constat autem ex motu cometarum prorsùs regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimum sentiri potest; atque adeò neutiquam in materiam ullam incurfare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis inertix. Nam resistentia mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel à defectu lubricitatis. Quæ oritur à defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sanè vix observari potest in fluidis vulgò notis, nisi valdè

tenacia fuerint ad instar olei & mellis. Resistentia quæ sentitur in aëre, aqua, hydrargyro, & hujusmodi fluidis non tenacibus ferè tota est prioris generis; & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente fluidi densitate vel vi inertiae, cui semper proportionalis est hæc resistantia; quamadmodum clarissimè demonstratum est ab auctore nostro in peregrina resistantiarum theoriâ, quæ paulò nunc accuratiùs exponitur, hac secundâ vice, & per experimenta corporum cadentium pleniùs confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut fluidi densitas; ergo retardatio seu resistantia erit ut eadem fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi à fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in fluidum ad partes anticæ, hoc est, nisi velocitas relativa quâ fluidum irruit in corpus à tergo, æqualis fuerit velocitati quâ corpus irruit in fluidum, id est, nisi velocitas absoluta fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest fluidorum resistantia, quæ oritur ab eorundem densitate & vi inertiae. Itaque concludendum erit; fluidi cœlestis nullam esse vim inertiae, cum nulla sit vis resistendi: nullam esse vim quâ motus communicetur, cum nulla sit vis inertiae: nullam esse vim quâ mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cum nulla sit vis quâ motus communicetur; nullam esse omninò efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc hypothesin, quæ fundamento planè destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimùm quidem inservit, ineptissimam vocare liceat & philosopho prorsus indignam. Qui cœlos materiâ fluidâ repletos esse volunt, hanc verò non inertem esse statuunt; hi verbis tollunt vacuum, re ponunt. Nam cum hujusmodi materia fluida ratione nullâ secerni possit ab inani spatio; disputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod si aliqui sint adeò usque dediti materiæ, ut spatium à corporibus vacuum nullo pacto admittendum

dum credere velint; videamus quo tandem oporteat illo pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, mundi per omnia pleni constitutionem ex voluntate dei profectam esse, propter eum finem, ut operationibus naturæ subsidium præfens haberi posset ab æthere subtilissimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non potest, siquidem jam ostensum est ex cometarum phænomenis, nullam esse hujus ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate dei profectam esse, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, siquidem diversa mundi constitutio eodem argumento pariter stabiliri posset: vel denique non dicent ex voluntate dei profectam esse, sed ex necessitate quâdam naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces sordidas gregis impurissimi. Hi sunt qui somniant fato universa regi, non providentia; materiam ex necessitate suâ semper & ubique extitisse, infinitam esse & æternam. Quibus positis; erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum necessitate omninò pugnat. Erit etiam immota: nam si necessariò moveatur in plagam aliquam determinatam; cum determinata aliqua velocitate; pari necessitate movebitur in plagam diversam cum diversa velocitate, in plagas autem diversas, cum diversis velocitatibus, moveri non potest; oportet igitur immotam esse. Neutiquam profectò potuit oriri mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate distinctus, nisi ex liberrimâ voluntate cuncta providentis & gubernantis dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur naturæ leges: in quibus multa sanè sapientissimi consilii, nulla necessitatis apparent vestigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, sed observando atque experiendo addiscere debemus. Qui verè physicæ principia legesque rerum, sola mentis vi & interno rationis lumine fretum, invenire se posse confidit; hunc oportet vel statuere mundum ex necessitate fuisse, legesque propositas ex eadem necessitate sequi; vel si per voluntatem dei constitutus sit ordo naturæ, se tamen, homuncionem misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissimè cernuntur consilium optimum & dominium summum sapientissimi & potentissimi entis; non erunt hæc ideò non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sunt futura.

tura. His vel miracula vel qualitates occultæ dicantur, quæ displicent: verum nomina malitiosè indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere philosophiam in atheismo fundari. Horum hominum gratiâ non erit labefactanda philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obrinebit igitur apud probos & æquos iudices præstantissima philosophandi ratio, quæ fundatur in experimentis & observationibus. Huic verò, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc opere præclaro illustrissimi nostri auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem asurgere potuisse, meritò admirantur & suspiciunt quicumque paulò profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergò reſeratis, aditum nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit & penitiùs perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, rex *Alphonsus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque naturæ majestatem propiùs jam licet intueri, & dulcissima contemplatione frui, conditorem verò ac dominum universorum impensiùs colere & venerari, qui fructus est philosophiæ multò uberimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat fabricatoris omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur eximium *NEWTONI* opus adversus atheorum impetus munitissimum præsidium: neque enim alicundè feliciùs, quàm ex hac pharetra, contra impiam catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, & in peruditis concionibus anglicè latinèque editis, primus egregiè demonstravit vir in omni literarum genere præclarus idemque bonarum artium fautor eximius *RICHARDUS BENTLEYUS*, seculi sui & Academiae nostræ magnum ornamentum, Collegii nostri *S. Trinitatis* magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri debeo: huic & tuas quæ debentur gratias, lector benevole, non denegabis. Is enim, cum à longo tempore celeberrimi auctoris amicitiam intimam frueretur, (qua etiam apud posteros censeretur non minoris æstimat, quàm propriis scriptis, quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) ami-

P R Æ F A T I O

XXXI

ci simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cum exemplaria prioris editionis rarissima admodum & immani pretio coëmenda superessent; suavit ille crebris efflagitationibus, & tantum non objurgando perpulit denique virum præstantissimum, nec modestiâ minùs quàm eruditione summâ insignem, ut novam hanc operis editionem, per omnia elimatam denuò & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: mihi verò, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendatè id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
 Maii 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii S. Trinitatis socius,
 astronomiæ & philosophiæ experimentalis
 professor Plumianus.

A U G

AUCTORIS PRÆFATIO

I N

EDITIONEM TERTIAM.

IN editione hacce tertiâ, quam Henricus Pemberton M. D. vir harum rerum peritissimus curavit, nonnulla in libro secundo de resistentia mediorum paulò fusiùs explicantur quàm antea, & adduntur experimenta nova de resistentia gravium quæ cadunt in aëre. In libro tertio argumentum quo lunam in orbe suo per gravitatem retineri probatur, paulò fusiùs exponitur: & novæ adduntur observationes de proportione diametrorum Jovis ad invicem à D. Poundio factæ. Adduntur etiam observationes aliquot cometæ illius qui anno 1680. apparuit, à D. Kirk mense Novembri in Germania habitæ, quæ nuper ad manus nostras venerunt, & quarum ope constet quàm propè orbis parabolici motibus cometarum respondent. Et orbita cometæ illius, computante Halleio, paulò accuratiùs determinatur quàm antea, idque in ellipsi. Et ostenditur cometam in hac orbita elliptica, per novem cælorum signa, non minùs accuratè cursum peregisse, quàm solent planetæ in orbitis ellipticis per astronomiam definitis moveri. Orbis etiam cometæ qui anno 1723. apparuit, à D. Bradleio astronomiæ apud Oxonienses Professore computatus adjicitur.

IS. NEWTON.

Dabam Londini
Jan. 12. 1725-6

50A

I N

VIRI PRÆSTANTISSIMI
ISAACI NEWTONI
OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM,

Seculi Gentisque nostræ decus egregium.

EN tibi norma poli, & divæ libramina molis,
 Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
 Pangeret, omniparens leges violare creator
 Noluit, atque operum quæ fundamenta locârit.
 Intima panduntur victi penetralia cæli,
 Nec latet extremos quæ vis circumrotat orbem.
 Sol folio residens ad se jubet omnia prono
 Tendere descensu, nec recto tramite currus
 Sidereos patitur vastum per inane moveri;
 Sed rapit immotis, se centro, singula gyris.
 Jam patet horrificis quæ sit via flexa cometis;
 Jam non miramur barbati phænomena astri.
 Discimus hinc tandem quâ causâ argentea Phœbe
 Passibus haud æquis graditur; cur subdita nulli
 Hactenus astronomo numerorum fræna recuset:
 Cur remeant nodi, curque auges progrediuntur.
 Discimus & quantis refluxum vaga Cynthia pontum
 Viribus impellit, fessis dum fluctibus ulvam
 Deserit, ac nautis suspectas nudat arenas;
 Alternis vicibus suprema ad littora pulsans.
 Quæ toties animos veterum torfere sophorum,
 Quæque scholas frustra raucis certamine vexant,

Ob.

Obvia conspicimus, nubem pellente matheſi.
 Jam dubios nullâ caligine prægravat error,
 Queis ſuperum penetrare domos atque ardua cæli
 Scandere ſublimis genii conceſſit acumen.

Surgite mortales, terrenas mittite curas;
 Atque hinc cæligenæ vires dignoſcite mentis,
 A pecudum vitâ longè latèque remotæ.
 Qui ſcriptis juſſit tabulis compeſcere cædes,
 Furta & adulteria, & perjuræ crimina fraudis;
 Quive vagis populis circundare mœnibus urbes
 Auſtor erat; Cererisve beavit munere gentes;
 Vel qui curarum lenimen preſſit ab uvâ;
 Vel qui Niliacâ monſtravit arundine pictos
 Conſociare ſonos, oculiſque exponere voces;
 Humanam ſortem minus extulit: utpote pauca.
 Reſpiciens miſeræ tantum ſolamina vitæ.
 Jam vero ſuperis convivæ admittimur, alti
 Jura poli tractare licet, jamque abdita cæcæ
 Clauſtra patent terræ, rerumque immobilis ordo,
 Et quæ præteriti latuerunt ſecula mundi.

Talia monſtrantem mecum celebrate camænis,
 Vos ô cælicolum gaudentes neſtare veſci,
 NEWTONUM clauſi reſerantem ſcrinia veri,
 NEWTONUM Muſis charum, cui pectore puro
 Phœbus adeſt, totoque inceſſit numine mentem:
 Nec fas eſt propius mortali attingere divos.

EDM. HALLEY.

INDEX

INDEX CAPITUM

TOMI PRIMI.

DEFINITIONES.

Pag. 1.

AXIOMATA, SIVE LEGES MOTUS.

13.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

- SECT. I. **D**E methodo rationum primarum & ultimarum. 62.
- SECT. II. De inventione virium centripetarum. 89.
- SECT. III. De motu corporum in conicis sectionibus excentricis. 153.
- SECT. IV. De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum
& hyperbolicorum ex umbilico dato. 175.
- SECT. V. De inventione orbium ubi umbilicus neuter datur. 188.
- SECT. VI. De inventione motuum in orbibus datis. 259.
- SECT. VII. De corporum ascensu & descensu rectilineo. 292.
- SECT. VIII. De inventione orbium in quibus corpora viribus
quibuscunque centripetis agitata revolvuntur. 312.
- SECT. IX. De motu corporum in orbibus mobilibus, deque mo-
tu apsidum. 334.
- SECT. X. De motu corporum in superficiebus datis, deque fune-
pendulorum motu reciproco. 361.
- SECT. XI. De motu corporum viribus centripetis se mutuo peten-
tium. 404.
- SECT. XII. De corporum sphaericorum viribus attractivis. 465.
- SECT. XIII. De corporum non sphaericorum viribus attracti-
vis. 503.
- SECT. XIV. De motu corporum minimorum, quæ viribus cen-
tripetis ad singulas magni alicujus corporis partes
tendentibus agitantur. 533.

E R-

E R R A T A,

antequam legas corrigenda.

I N T E X T U.

Pag. 75. lin. 10. D d, lege, D, d. Pag. 97. l. 2. reciproca, lege, reciprocè. Pag. 107. in figurâ loco T scribe Q, & loco Q scribe T. Pag. 377. in figurâ, scribe R in intersectione rectæ AOC, & cycloidis, Pag. 423. lin. 11. dele viribus.

I N N O T I S.

Pag. 23. lin. 21. col. 1. corporis, lege, corporum. Pag. 52. col. 2. lin. 2. 1—3:2b, lege, $1 - \frac{3b}{2}$. Pag. 72. lin. 26. col. 2. G: g = S: TT: s: tt, lege G: g = $\frac{S}{TT} : \frac{s}{tt}$. Pag. 75. col. 1. lin. 28. D d, lege, D, d. Pag. 86. lin. 2. col. 1. deleantur hæc verba: capiatur PE = PC, & producta PC, tangentem secet in T. Ibid. lin. 15. col. 1. 145, lege 146. Pag. 87. lin. 9. col. 2. zzdz + zzdz, lege, zzdz + zzdz + zzdz. Pag. 96. in circulo majori ad alterum diametri extremum, scribe G. Pag. 102. lin. 26. col. 2. emensus, lege, emensum. Pag. 118. col. 1. lin. 3. EG×GE, lege, EG×GF. Pag. 123. col. 2. lin. 18. BO $\frac{3}{2}$ lege, DO. Pag. 126. col. 2. in figurâ ad alterum ordinatæ extremum, lege, G. Pag. 127. lin. 13. col. 1. deleatur, tum. Ibid. lin. 25. col. 1. 2 AC, L $\frac{3}{2}$ lege 2 AC:L. Pag. 129. lin. 8. col. 2. PO 2 + CE 2 = BC 2 , lege, PO 2 + KE 2 = BC 2 . Pag. 220. col. 1. lin. 8. AD, AB, lege, AD, aB, Pag. 279. col. 1. lin. 9., Lemma, lege, 374. Lemma. P. 287. lin. 9. rr 2 - xx 2 , lege, rr - xx. Ibid. in fig. col. 2. in extremitate secantis, Cø scribatur a. P. 309. col. 2. l. 16., velocitate, leg. velocitas. P. 310. col. 1. l. 3. D L M e, leg. D L M e. Ibid. θ : T, leg. θ : t. P. 311. col. 2. l. 4. EM = $\sqrt{2ABGE}$, leg. EM = $\frac{1}{\sqrt{2ABGE}}$. P. 339. col. 1. l. 4. corpus P, leg. corpus p. Ibid. l. 10. seu kCP, leg. seu KCP. Ibid. col. 2. l. 5. versus p, leg. versus P. P. 344. col. 1. l. 3. tendente ad focum ellipseos, leg. tendente ad centrum ellipseos. P. 368. col. 1. initio lineæ 1 a . scribe: (456). Ibid. col. 2. l. 16. ex generi, leg. ex generis. P. 400. col. 1. l. 8. nota 490. DQ, leg. DH. P. 401. col. 1. l. 15. POp = $\frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm - kkxx - llpp}}$, leg. POp = $\frac{Cpfxdx}{2r\sqrt{kkmm - kkxx - Cpp}}$. P. 426. col. 2. l. 18. NM, leg. nm. P. 441. col. 1. l. 21. (505), leg. (507). P. 442. col. 2. l. 9., leg. arcus PK, π Pk, Kkca in planis T p P, T π P, EST. P. 443. col. 2. l. 2. (509), leg. (508). P. 444. col. 1. l. penultima (509), leg. (510). P. 445. in figurâ, loco B scribe N, & loco N scribe B. P. 455. col. 2. l. 2. (513), leg. (504). P. 473. col. 2. l. 4. quod si sphaeræ, leg. quod si (ut hic supponitur) vires absolutæ particularum utriusque sphaeræ. Ibid. col. 2. l. 7. Si verò &c, hæc ad finem usque nota delenda sunt.



PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I. (²)

*Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate
& Magnitudine conjunctim.*

AER, densitate duplicata, in spatio etiam duplicato fit
quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de
Nive & Pulveribus per compressionem vel liquefac-
tionem

Tom. I.

A

tionem

*Licet primæ definitiones NEWTONIANÆ vix aliquam postulare videantur explica-
tionem; in ipso tamen operis nostri limine, nonnulla levioris momenti præmittenda judi-
camus, quæ ad majora viam sternunt. Prima quæ in posterum sæpius recurrent Me-
chanices principia interfereve non abs re erit, tum ut Lectorum labori parcamus, tum ut
magis continua seruetur nostrarum demonstrationum series.*

(²) I. Materia est substantia trinâ di- bilis, mobilis, divisibilis. Spatium pu-
mentione prædita, solida seu impenetra- rura est illa immensa, penetrabilis, sui
ubique



DEFINI-
TIONES.

tionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunque diversimodè condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium liberè pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Ponderus. Nam ^(b) Ponderi proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissimè instituta, uti posthac docebitur.

DE-

ubique similis, immobilis extensio, in quâ corpora omnia liberrimè moveri intelligimus. In corpore dato materiæ quantitatem seu massam, à corporis magnitudine, aut volumine seu mole distingui oportet. Materiæ quantitas est aggregatum, seu summa omnium materiæ particularum quibus compositum est corpus. Volumen, seu Magnitudo, est tota trina dimensio sub exteriori corporis superficie contenta. Porro inter solidas seu impenetrabiles corporis particulas sive elementa, plura esse possunt disseminata foramina seu pori, vel omni materiâ vacui, vel quos aliena materia liberè pervadat; sic aer subtilior spongiæ poros permeat, & ad spongiæ materiam non pertinet. Si nulla sint inter solidas corporis partes admixta foramina, Massâ & volumen non differunt; at si poris pertusum sit corpus, Massam volumen superat.

2. Densitas est ratio massæ corporis ad illius volumen; adeo ut sub æqualibus voluminibus, densitates sint in ratione directâ massarum; & eadem seu æquali manente in diversis corporibus massâ, densitates sint in ratione voluminum reciproca. Itaque si densitas dicatur D ; massâ M ; volumen V ; erit $D = M : V$; seu densitas exponi potest per massam ad volumen applicatam, sive, quod idem est, densitas erit ut massa per volumen divisa. Si itaque D & $M : V$, per V multiplicentur, erit $DV = M$, seu massa aut quantitas materiæ est ut densitas in volumen ducta; Massa igitur exponi potest per factum ex densitate in volumen. Quare si DV & M , per D dividantur, erit $V = M : D$, seu volumen est ut massa ad densitatem applicata, sive vo-

lumen est in ratione compositâ ex directâ ratione massæ & inversâ densitatis. Si densitates fuerint æquales, seu si $m : v = M : V$, patet massas esse inter se ut volumina directè. His positis facilè intelligitur massam aëris, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fieri quadruplam, nam ob duplicatam densitatem in eodem spatio dupla est massa; ergo duplicato etiam spatio massa rursus duplicatur & fit quadrupla.

^(b) 3. Massam esse ponderi proportionalem; ob frequentissimum hujusce veritatis usum, hic breviter ostendimus. Gravia omnia, ut notissimis constat experimentis, per lineas ad terræ superficiem perpendiculares ac proinde ad sensum parallelas descendunt, & in tubis aëre vacuis plumbum levissimæ plumæ eadem celeritate cadunt, seu æqualia spatia, æqualibus temporibus cadendo percurreunt. Nec successu caret experimentum, etiam si coarctatis ac diductis poris vel superficiebus, corporis figura mutetur; dummodò eadem remaneat massa, idem semper servatur pondus; ex quo sequitur gravitatem non solum exterioribus corporis partibus, sed & interioribus æque inesse; alioquin ejusdem corporis sub diversis superficiebus, idem non remaneret pondus, nec eadem foret sub diversis figuris celeritas; mutatâ enim superficie, partes quæ antè interiores erant, exteriores fiunt & viceversâ; æqualia igitur massæ elementa æquali urgentur vi gravitatis, seu æqualis sunt ponderis; crescit ergo totius massæ pondus ut elementorum æqualium numerus, seu crescit pondus ut massa, sive massa est ponderi proportionalis.



DEFINITIO II. (c)

Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; ideoque

A 2

que

(c) 4. Locus corporis est pars spatii, quam corpus occupat. Motus est continua loci mutatio. Triâ in motu consideranda sunt, corpus quod movetur seu mobile, spatium quod percurritur, & tempus quo percurritur. Spatium percursum est linea quam mobile instar puncti consideratum describere intelligitur. Directio motus est linea recta quam mobile describit aut describere nititur. Motus conspirantes sunt quorum directiones congruunt, aut saltem sunt parallelæ & ad easdem partes tendunt. Motus contrarii seu directe oppositi dicuntur quorum directiones congruunt quidem, aut saltem sunt parallelæ, sed in oppositas partes vergunt. Motus æquabilis seu uniformis est, quo mobile æqualia spatia æqualibus temporibus percurrit. Motus acceleratus, quo mobile majora continuò spatia æqualibus temporibus describit. Motus retardatus quo mobile per minora continuò spatia æqualibus temporibus fertur.

5. Celeritas seu velocitas, est ea corporis moti affectio quâ aptum redditur, datum spatium dato tempore æqualiter percurrendi. Est igitur celeritatis mensura in motu æquabili quærenda, seu, ut habeatur quantitas velocitati proportionalis, quærendum est spatium quod corpus dato tempore percurreret, si illius motus constans atque æquabilis permaneret. Porro manifestum est celeritatem esse duplam, triplam, si temporibus æqualibus duplum, vel triplum percurratur spatium; & contrâ celeritatem esse subduplam, subtriplam, si æqualia spatia, duplo, triplo tempore percurrantur; ergo manentibus temporibus, celeritates sunt ut spatia; & manentibus spatiis, celeritates sunt inversæ ut tempora; quare variantibus temporibus atque spatiis, celeritates semper erunt in ratione compositâ ex directâ spa-

tiorum & reciproca temporum; seu si celeritas dicatur C, spatium S, tempus T; erit C ut S : T, sive $C = S : T$, seu celeritas exponi potest per spatium ad tempus applicatum, & multiplicando utrinque per T, erit $CT = S$, seu spatium est ut celeritas in tempus ducta, & dividendo utrinque per C, erit $T = S : C$, seu tempus est ut spatium ad celeritatem applicatum. Si duorum mobilium celeritates C, c, seu S : T; s : t, fuerint æquales, id est $S : T = s : t$, erit $S : s = T : t$, seu spatia sunt ut tempora.

6. Jam verò cum in motu nihil nisi corpus, spatium percursum & tempus considerentur, & ratio spatii ad tempus celeritatem exponat (5), satis evidens est ad totum corporis motum seu quantitatem motus inveniendam, solius massæ & celeritatis habendam esse rationem. Cum autem motus totius corporis sit æqualis summæ motuum singularum Massæ partium, seu elementorum, patet manente celeritate, motum totius massæ crescere prout crescit numerus elementorum massæ æqualium, seu quantitatem motus esse proportionalem massæ; manente verò massâ, quantitas motus est ut velocitas; nam si corpus idem, duplum spatium eodem tempore percurrit, duplus est illius motus, si triplum triplus &c. Siquidem manentibus tempore & massâ, nulla est alia quam spatiorum varietas, & motus sunt ut spatia; sed spatia temporibus æqualibus percurfa sunt ut celeritates (5), ergo quantitates motus sunt etiam ut celeritates. Quare variantibus massis atque celeritatibus, motus quantitas est semper ut massâ in celeritatem ducta, seu in ratione compositâ massæ & celeritatis; si itaque motus quantitas dicatur Q; Massa M, celeritas C; erit Q ut M C, quod ita exponimus $Q = MC$, dividendo utrinque

DEFINITIONES.

que in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplex est, & duplâ cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III. (d)

Materiae vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo vis Inertiæ dici possit. Exercet verò corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium illud sub diverso respectu & Resistentiæ & Impetus: resistentiæ, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficul-

que per M, & deinde per C, erit $C = Q : M$; & $M = Q : C$; Seu celeritas est ut quantitas motûs ad massam applicata, & massa vicissim, ut quantitas motûs per celeritatem divisa. Si quantitates motûs Q, q, seu MC, mc, fuerint æquales, erit $MC = mc$, & $M : m = c : C$, seu massæ sunt reciprocè ut celeritates; & viceversâ si $M : m = c : C$, erit $MC = mc$, seu si massæ sunt in ratione velocitatum reciproca, quantitates motûs sunt æquales. Præterea cum, (s), fit $C = S : T$, erit etiam $Q = MS : T$, seu quantitates motûs sunt in ratione compositâ ex directis rationibus massæ & spatii & inversâ temporis; inveniatur etiam $QT = MS$, $M = QT : S$, $S = QT : M$, $T = MS : Q$.

Pari facilitate demonstrari possunt cætera theoremata quæ de motuum comparatione, apud scriptores mechanicos fuscè reperiantur.

(d) 7. Vis duplex est, activa & passiva; Activa est potentia motum efficiendi;

Passiva est potentia motum recipiendi vel amittendi; vis activa subdividi solet in vim vivam quæ cum motu actuali conjuncta est, & in vim mortuam quæ est tantum conatus seu sollicitatio ad motum & ex quâ motus actualis non producitur, nisi vis mortuæ actio aliquandiu in corpore continuata fuerit. Sic vis gravitatis in globo qui ex filo pendet vel plano horizontali incumbit, est vis mortua, quâ quidem actu non movetur globus, sed conatur moveri filumque tendit, aut planum premit. Si filum abrumpatur, vel planum sustentans auferatur, tum continuâ gravitatis actione globus motu accelerato cadit. Vis quâ corpus in circuli peripheriâ motum, filum centro alligatum tendit, & quâ proinde conatur a centro recedere est quoque vis mortua.

8. Inest omni materiæ vis insita passiva, seu inertia, ex quâ nullus motus, nullaque tendentia ad motum resultat, sed quæ consistit in renixu quo corpus quodlibet, cuilibet vi externæ mutatio-

nem

ficulter cedendo, conatur statum obstaculi illius mutare. Vulgus resistantiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit: sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper verè quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIONES.

DEFINITIO IV. (e)

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertię. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex Ictu, ex Pressione, ex vi Centripetâ.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta est, qua corpora versus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

Hujus generis est Gravitās, qua corpora tendunt ad centrum

A 3

trum

nem statûs, id est, motûs vel quietis inducere conanti resistit. Etenim nulla potest esse actio corporis in corpus, quin luctatio quædam, ut loquitur Clar. Hermannus in *Phoronomiâ*, fiat inter corpus agens & patiens, dum alteri in alteri resistit; alioquin corpus motum posset sine motûs proprii detrimento, aliud quodcumque movere. Vis illa inertię eadem est in corporibus motis & quiescentibus; tam enim resistunt corpora actioni quâ à quiete ad motum concitantur, quam actioni quâ à motu ad quietem reducuntur. Eadem quippè vis requiritur ad motum datum producendum & ad eundem extinguendum. Quia autem vis illa inertię eadem in omnibus æqualibus materiæ partibus reperitur, consequens est ut sit materiæ proportionalis; dupla in massâ duplicatâ, tripla in triplicatâ. Majoribus etiam

mutationibus corpora magis resistunt quam minoribus, estque resistantia actualis magnitudini mutationis proportionalis.

(e) 9. Nihil fit sine causâ; undè omne corpus ut potè iners & passivum (8) in suo quocumque statu perseverat, nisi causâ aliquâ, seu vi externâ, statum suum mutare cogatur; cum igitur vis aliqua in corpus actu agit; vis impressa seu actio mutat quidem corporis statum; sed cessante illius vis actione, corpus in novo statu per illam actionem recepto perseverat solâ vi inertię passivâ, quâ fit ut sine novâ vi externâ statum suum mutare nullâ ratione possit; adeoque si semel moveretur, sibi relictum, perpetuò atque æqualiter per lineam rectam movebitur, seu secundum directionem quâ impulsus fuerit & quâ movebatur, dum actio vis externæ cessavit.

Quo minor fuerit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major velocitas quâcum projicitur, eo minus deviabit a cursu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quasi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quasi decuplo longius: si modo aeris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circumiret vel denique ut in cœlos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, quâ Projectile vi gravitatis in orbem flecti posset & terram totam circumire, potest & Luna vel vi gravitatis, si modo gravis sit, vel aliâ quâcumque vi, quâ in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, & in orbem suum flecti: & sine tali vi

DEFINITIONES.

Luna

curvam retrahitur, eò minus a tangente deviat corpus, adeoque curva quam motu suo describit, ad tangentem seu rectam lineam propius accedit. Econtra decrescente vi aut celeritate secundum directionem tangentis, aut crescente vi alterâ quæ a tangente desecit, corpus a motu rectilineo magis retrahitur, & major fit lineæ curvatura. Nam effectus sunt causas suis proportionales; est autem motus per tangentem rectilineus, effectus vis secundum directionem tangentis, & deviatio a tangente, effectus vis illius quæ a tangente retrahit.

11. Sit terræ circumferentia DQC , illiusque centrum T , ex quo vim ad centrum trahentem per totum circumquaque spatium propagari fingamus, aut, si magis placuerit, supponamus esse vim per totum spatium diffusam, quâ corpora omnia secundum directionem radiorum, ET , AT , ad centrum T urgeantur, & ex vertice E montis ED projiciatur corpus juxta directionem rectæ EF ad

ET , normalis; corpus illud hâc solâ vi impressâ æquabiliter per rectam EF moveretur (9); at vi centripetâ seu vi tendente ad centrum T ab illâ rectâ perpetuò retrahitur & cogitur incedere in curvâ aliquâ EQ quam tangit in E recta EF (10); augendo vim impressâ secundum directionem tangentis, EF , curva EQ , ad tangentem EF , propius accedit, adeò ut corpus variis & successivè crescentibus celeritatibus projectum, terram tardius semper attingat; deindè circa eam revolvatur, tandemque in infinitum abeat. Ut igitur corpus per rectam EF , datâ velocitate projectum, curvam datam EQ describat, certa ac determinata vis centripeta requiritur; & viceversâ datâ velocitate secundum rectam Ee seu EF , & vi centripetâ etiam datâ, corpus nonnisi certam ac determinatam curvam EQ potest describere; & mathematicorum est ex datis velocitate per tangentem EF & curvâ EQ quam corpus describit, invenire vim centripetâ.

DEFINI-
TIONES.

Luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret Lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe suo terram versus deduceret. Requiritur quippe, ut sit justæ magnitudinis: & Mathematicorum est invenire Vim, quâ corpus in dato quovis orbe datâ cum velocitate accuratè retineri possit; & vicissim invenire viam curvilineam, in quam corpus è dato quovis loco datâ cum velocitate egressum a datâ vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Absoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI. (8)

Vis centripetæ Quantitas Absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro Efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut vis Magnetica pro mole magnetis vel intensiōne virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFI.

tripetam, quâ a tangente retrahitur & in orbitâ suâ retinetur, & reciprocè ex datâ velocitate per tangentem & vi centripetâ, curvam invenire; quæ duo Newtonus mirâ sagacitate & elegantia perfecit.

(8) 12. In centro T existere supponatur corpus, ex quo per omne spatium diffundatur vis, quæ juxta directionem radiorum AT, ET, HT, versus centrum, aut a centro versus spatia circumposita, juxta directionem radiorum, TA, TE, TH, agat; in 1^o. casu vis illa centripeta, in 2^o. vis centrifuga, in utroque vis centralis dicitur.

Hæc vis in centro considerata duplici præsertim ratione variare potest; Si enim corpus quod centrum occupat, & cui vis

inest, in sua æqualia elementa divisum intelligatur, & vis sit singulis elementis æqualis ejusdemque constanter intensiōnis; vis totius corporis centralis, seu vis centralis quantitas absoluta, erit massæ seu summæ elementorum proportionalis. At si manente eadem corporis centralis massâ, vis semper manens æqualis in singulis elementis æqualibus intensivè crescat vel decrescat, vis tota corporis centralis seu vis centralis quantitas absoluta, erit proportionalis intensiōni vis in singulis elementis existentis; quare variantibus massâ & vi singulorum elementorum, vis centralis quantitas absoluta erit in ratione compositâ massæ & intensiōnis vis in singulis elementis æqualibus.

DEFINITIO VII. (h)

Vis centripeta Quantitas Acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis Gravitas major in vallibus, minor in cacuminibus altorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantis à globo terræ; in æqualibus autem distantis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

Tom. I.

B

D E-

(h) 13. Si vis centralis non amplius in centro, sed in quacunque à centro distantia consideretur, possumus in variis illis à centro distantis superficies sphericas fingere quarum commune centrum sit T, & vis centralis in illis distantis seu superficiebus sphericis considerata, dicitur vis acceleratrix. Illius autem quantitas erit proportionalis celeritati quam dato seu constante tempore in singulis materię elementis à centro æquidistantibus producet; nam si supponamus vim illam constantem in elementa materię continuo agere, eo major erit quo major erit velocitas dato tempore genita, ita ut si tempore æquali dupla generetur velocitas, dupla quoque sit vis, cum velocitas illa sit illius vis effectus plenus. Si constans maneat celeritas à vi acceleratrice genita, erit vis in ratione inversa temporis quo celeritas illa producit, nam si eadem celeritas tempore subduplo producat, vis duplicatur. Quare si manente vi constante, celeritas & tempus varient, erit vis acceleratrix in ratione composita ex directa celeritatis genitæ & reciproca temporis. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G; celeritas producta C; tempus quo producit, T, erit $G = C: T$, & $GT = C$, & $T = C: G$. Licet autem variet vis acceleratrix, eadem tamen est illius mensura, modò celeritas nascens seu initio quopis tempore quam minimo producta con-

sideretur, tunc enim vis agit uniformiter.

14. Si vis aliqua per radios divergentes in medio non resistente diffundatur, vis acceleratrix decrescit in ratione duplicata distantiarum à centro; nam quia vis illa, ex hyp., in medio non resistente propagatur, nullus intercipitur radius, nec vis singulorum minuitur, adeoque radii qui in distantia T L, per hemisphærium à semicirculo D L C descriptum diffundebantur, in distantia, T K per hemisphærium E K H propagantur; est autem vis acceleratrix ut radiorum densitas, & radiorum densitas est reciprocè ut superficies hemisphæriorum à semicirculis descriptorum; nam radiorum densitas est ut summa seu numerus radiorum per superficiem quam occupant divisus; hinc enim summa radiorum est ut massa, superficies verò cui insunt ut volumen. Verum cum per hyp., idem numerus radiorum superficies singulorum hemisphæriorum occupet, erit densitas radiorum in ratione inversa illarum superficierum in quavis à centro distantia descriptarum; illæ autem superficies sunt in ratione duplicata distantiarum à centro; ergò & vis acceleratrix est in ratione duplicata distantiarum à centro reciprocè. Egregium illud theoremata, ut ex demonstratione patet, omnem excludit medii resistentiam; quare ut in physicis valeat, medii resistentia in com-

DEFINITIO VIII. (1)

*Vis centripetæ Quantitas Motrix est ipsius mensura proportiona-
lis Motui, quem dato tempore generat.*

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; & in corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc Quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, quâ descensus corporis impedi-
diri potest.

Hæc virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum totius in centrum ex conatibus omnium partium compositum; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad Centrum, tanquam causâ aliqua

computum venire debet. Hæc autem virium seu qualitatuum è centro emanantium theoria ad majorem universalitatem reduci potest, si vis in singulis radiis variè propagari supponatur, aut etiam si per lineas curvas diffundi fingatur. Sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti.

(1) 15. Si vis centripeta in corpore ad centrum propulso consideretur; ut totus illius corporis in centrum conatus seu vis centripetæ quantitas motrix habeatur, ducenda est massa in vim acceleratricem; nam vis motrix totius corporis componitur ex omnibus viribus, quibus singula æqualia elementa urgentur, adeoque ex vi acceleratrice toties sumptâ quot sunt in corpore æqualia materiæ elementa, sive ex vi acceleratrice in massam ductâ. Supponimus enim singula elementa æqualia, æquali vi acceleratrice urgeri. Sed vis acceleratrix est ut celeritas dato tempo-

re genita (13), ergò vis centripetæ quantitas motrix est ut massa in illam celeritatem ducta, seu ut quantitas motûs, dato tempore producta. Si igitur vis acceleratrix dicatur, G ; massa, M , vis motrix, p , erit p , ut, $M G$, & M , ut $p: G$, & G , ut $p: M$, seu massa est ut vis motrix per vim acceleratricem divisa, & vis acceleratrix, ut vis motrix per massam divisa. Si duæ fuerint vires motrices P & p , seu $M G$, & $m g$, æquales, erit $M: m = g: G$, seu massæ sunt ut vires acceleratrices reciproce; & viceversâ, si $M: m = g: G$, erit $m g = M G$, seu si massæ sunt reciproce ut vires acceleratrices, vires motrices sunt æquales. Porro cum vires acceleratrices sint ut celeritates dato tempore genitæ (13), in superioribus proportionibus loco virium acceleratricium celeritates illæ substitui possunt.

quã præditum, sine quã vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa fit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas & sedes Physicas jam non expendo.

DEFINITIONES

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate & ex quantitate materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice & ex quantitate ejusdem materiæ conjunctim. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus & gravitas acceleratrix conjunctim. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones & impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulsus, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuò promiscuè usurpo; has vires non Physicè sed Mathematicè tantum considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem Physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires verè & Physicè tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixerò.

Scholium.

Haftenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notissima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hæc non aliter quam

DEFINI-
TIONES.

ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares distinguere.

(^k) I. Tempus Absolutum, verum, & mathematicum, in se & naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apprens, & vulgare est sensibile & externa quævis Durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) quâ vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

II. Spatium Absolutum, naturâ suâ sine relatione ad externum quodvis, semper manet simile & immobile: Relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ à sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & à vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aerei vel cœlestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, moveatur; spatium Aeris nostri, quod relative & respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aer transit, nunc alia pars ejus; & sic absolutè mutabitur perpetuè.

III. Locus est pars spatii quam corpus occupat, estque pro ratione spatii vel Absolutus vel Relativus. Pars, inquam, spatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; Situs vero propriè loquendo quantitatem non habent, neque

(^k) 16. Quemadmodum Geometra lineam fluxu puncti generari fingunt, ita tempus absolutum mathematicè considerare possumus, tanquam æquabilem unius instantis seu puncti temporis fluxum. Quapropter si corpus aliquod æquabili celeritate moveretur, illud eodem modo ac temporis punctum fluere, spatiaque ab eo descripta forent temporibus proportio-

nalibus (5); eo igitur motu tanquam accuratâ durationis mensurâ uti possemus. Verùm corporum cœlestium & horologiorum motus, quos ad temporis mensuram adhibemus, licet vulgò supponantur æquabiles, variis tamen ex causis accelerantur vel retardantur, sicque mensuræ illæ vulgares non sunt temporis absoluto proportionales.

neque tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de suo loco eadem est cum summa translationum partium de locis suis; ideoque locus totius idem est cum summa locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus Absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis passis fertur, relativus corporis. Locus est navigii regio illa in quâ corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur unâ cum navi: & Quies relativa est permanſio corporis in eâdem illâ navis regione vel parte cavitatis. At quies vera est permanſio corporis in eâdem parte spatii illius immoti in quâ navis ipsa unâ cum cavitare suâ & contentis universis movetur. Unde si Terra verè quiescat, corpus quod relativè quiescit in navi, movebitur verè & absolutè eâ cum velocitate quâ navis movetur in Terra. Sin Terra etiam moveatur, orietur verus & absolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terrâ: & si corpus etiam moveatur relativè in navi, orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terrâ, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terrâ. Ut si Terræ pars illa, ubi navis versatur, moveatur verè in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem versus cum velocitatis parte unâ: movebitur Nauta verè & absolutè in spatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relativè in terrâ occidentem versus cum velocitatis partibus novem.

(1) Tempus Absolutum a relativo distinguitur in Astronomiâ

B 3

per

(1) 17. Equatio temporis dicitur differentia quæ inter tempus absolutum & tempus relativum, (h. e. tempus per solis revolutionem mensuratum) intercedit; quæ

proinde tempori relativo juncta, vel ab eo subducta conficit tempus absolutum & viceversa.

DEFINI-
TIONES.

per *Æquationem* temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accurate mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiae rerum; sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex iisdem colligitur per *Æquationem* Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii Oscillatorii, tum etiam per eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut ordo partium Temporis est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæc de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora & spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi Loca. In Tempore quoad ordinem successionis; in Spatio quoad ordinem situs locantur univèrsa. De illorum essentia est ut sint Loca: & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta Loca; & solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus.

Verum quoniam hæc Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantis rerum à corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca univèrsa: deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur, nec incommodè in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguuntur autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per Proprietates suas & Causas & Effectus. Quietis proprietas est, quod corpora verè quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus

bus Fixarum, aut longè ultra, quiescat absolutè; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum illum datam positionem servet necne, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

DEFINITIONES.

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyranthium partes ^(m) omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relativè quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem è viciniâ corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam verè quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem è viciniâ ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublatâ illâ translatione non verè quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, sine translatione de viciniâ corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est, quod moto Loco movetur unâ Locatum: ideoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. ⁽ⁿ⁾ Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur

ex

^(m) 18. Gyranthium corporum partes singulæ in orbitis curvilineis moventur, adeoque (10) per tangentes orbitarum progredi, atque ita ab axe motus recedere nituntur; ut si trochus vel sphaera circa axem rotatur, singulæ illorum corporum partes circulos describunt, & ab illorum centris per tangentes effugere conantur, cumque omnia illa centra sint in axe motus posita, singulæ partes ab axe recedere nituntur.

⁽ⁿ⁾ 19. Si nauta in navi deambulare supponatur, motusque navis & nautæ conspirent, integra & absoluta nautæ celeritas componitur ex celeritate nautæ respectu loci sui primi in navi, ex celeritate loci illius, id est, navis respectu maris, seu respectu loci secundi, & ex celeritate maris respectu spatii immoti. Si autem motus nautæ, motui navis foret directè oppositus, absoluta nautæ velocitas æqua-

DEFINI-
TIONES.

ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiiri possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod *Immobile* appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt Vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur, nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest sine viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimatur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in quâ hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus à viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eadem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in quâ motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, & conservari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. (°) Nam in motu circulari nudè relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem & absoluto majores vel minores pro quantitate motus.

Si

æqualis foret differentiæ celeritatum navis respectu spatii immoti & nautæ respectu navis. Tandem si motus nautæ respectu navis foret obliquus, illius directio & velocitas in duas alias directiones & velocitates ita resolvi debent, ut una directio cum aliorum motuum communi directione conspiret, alia verò sit ipsi per-

pendicularis, tuncque, ex regulis infra demonstrandis, facillimè invenietur tum absoluta nautæ celeritas, tum illius vera directio.

(°) 20. In motu circulari nudè relativo, id est, in quiete absolutâ corporis inertis, quod motu duntaxat relativo movetur, vires activæ nullæ sunt.

Si pendeat fitula à filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum à contorsione admodum rigescat, dein impleatur aquâ, & unâ cum aquâ quiescat; tum vi aliquâ subitanea agatur motu contrario in orbem, & filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; (P) superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam vas, vi in aquam paulatim impressa, effecit ut hæc quoque sensibilibiter revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim à medio, ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) & incitatore semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo, quiescat in eodem relativè. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea illius verus motus circularis nondum inceperat. Postea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relativè. Quare conatus iste non pendet à translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus circularis

C

circularis

(P) 21. Cum aqua vi inertiae (8) in eodem quiescendi statu perseverare nitatur, in eam non nisi gradatim & per repetitam laterum fitulæ frictionem motus circularis transire potest; adeoque sub initio motus fitulæ, tota aquæ massa quiescit absolutè, sive quod idem est, maximâ velocitate nudè relativâ in vase revolvitur; undè destituta omni vi activâ (20) sicut antè motum fitulæ, plana & quieta manet. Sed cum iterato laterum vasis impulsu, motus circularis ad aquam transierit, singulæ partes aquæ (18) ab axe

motus, seu à medio vasis conantur recedere, cumque minorem fursùm in aère resistentiam inveniant, ad latera fitulæ accumuluntur & ascendunt, & quò celerius aguntur in orbem, eo majori conatu ab axe motus per tangentès recedere nituntur. (10. 11.) Porro cum inter vim centrifugam & celeritatem corporis in dato circulo revolventis certa debeat esse ac determinata proportio, ex vi centrifugâ seu conatu recedendi ab axe cognosci ac mensurari potest velocitas motus circularis absolutâ, ut deinceps demonstrabitur.

DEFINI-
TIONES.

cularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri sunt; & relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Systemate eorum qui Cœlos nostros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas secum deferre; singulæ Cœlorum partes, & Planetæ qui relativè quidem in Cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quam fit in verè quiescentibus) unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Quantitates relativæ non sunt igitur eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed sunt earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantatum mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus propriè intelligendæ erunt hæ mensuræ sensibiles; & sermo erit insolens & purè Mathematicus, si quantitates mensurate hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hæc de quantitibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Mathesin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est: propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora verè moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam argumenta desumi possunt, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentia, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset.

set. (9) Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circulem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augetur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus Cælorum (*) sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si attenderetur ad filum, & deprehenderetur tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret; concludere liceret motum esse globorum, & corpora quiescere; & tum demum ex translatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causas & effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui.

C 2 AXIO.

(9) 22. Si in alternas, seu è diametro sibi oppositas globorum facies, ad motum circulem augendum vel minuendum, imprimerentur vires quælibet æquales, quæ proinde non perturbarent æquilibrium globorum circa commune gravitatis centrum, id est, circa punctum æquilibrii revolvendum, innotesceret ex auctâ vel diminutâ fili tensione augmentum vel decrementum motus &c.

(*) 23. Spectator in globo moto, vel etiam in stellâ fixâ positus, solo oculorum auxilio, seu ex motibus apparentibus discernere non posset, an globus, an stella verè moveretur; quemadmodum telluris incolæ ex apparenti stellarum motu determinare non possunt, an stellæ verè moveantur; sive enim cum terrâ moveamur, & stellæ quiescant absolutè, sive e contra

moveantur stellæ & terra quiescat, eadem omnino sunt apparentiæ, eadem motus relativi; quod quidem notissimo illustratur exemplo navis æquabiliter motæ, cujus motus ab iis qui navi vehuntur oculis non percipitur, dum littora urbesque fugere videntur. Ex optices principiis horum phænomenon petenda est ratio; ea enim corpora quiescere videntur quæ, dum nos ipsi nullam actualem voluntatem nosmet movendi exercemus, eadem respectu oculi positionem constanter servant, ita ut eorum imago quæ in fundo oculi pingitur, eandem semper retinæ partem occupet; ea verò objecta moveri videntur quæ respectu oculi situm suum continuè mutant, seu quorum imagines diversas retinæ partes successivè occupant.

AXIOMA-
TA, SIVE

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

L E X I.

(¹) *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

Projectilia perseverant in motibus suis, nisi quatenus à resistentiâ aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuò retrahunt sese à motibus rectilincis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aere retardatur. Maiora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos, conservant diutius.

L E X

(¹) 24. Ex hac primâ lege quam (9) demonstravimus, sequitur omnem motum esse naturâ suâ æquabilem & rectilineum, adeoque nec illius velocitatem retardari, nec directionem mutari, nisi aliquod obstaculum mobili offeratur; Unde cum projectilia motum suum sensim amittant, querenda est aliqua hujusce retardationis causa. Cum autem corpora projecta vel per medium resistens deferantur, vel etiam super aliorum corporum superficies sca-

bras incedant, & vi gravitatis deorsum semper urgeantur, necesse est ut eam amittant motus sui partem quam in hisce obstaculis superandis continuò absumunt, ac proinde quo major vel minor erit mediæ resistentiæ, eò majus vel minus decrementum accipiet corporis projecti velocitas. Ex his igitur patet majora planetarum & cometarum corpora nullam sensibilem in spatiis cœlestibus experiri resistentiam, cum motus suos diutissimè conservent.

L E X I I.

LEGES
MOTUS;

(^t) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.*

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successivè impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

C 3

L E X

(^t) 25. Si corpus vi activâ qualis est vis gravitatis secundum eandem aut parallelam directionem continuò urgeatur, motus illius continuò acceleratur; nam per leg. 1. manet celeritas acquisita, & per leg. 2. nova conspiranti continuò additur. Si verò aliqua vis in corpus jam motum contrariâ directione perpetuò agat, motus illius continuò retardatur, per leg. 2. Si vis conspirans continuò ac uniformiter agat, id est, si constans sit, corpus eâ vi impulsûm, æqualibus temporibus æqualia accipit celeritatis incrementa, seu motu uniformiter accelerato fertur, & celeritates vi illâ acquisitæ sunt ut tempora quibus generantur. At si vis constans contrariâ directione in corpus motum continuò agat, æqualibus temporibus æqualia fient celeritatis decrementa, & corpus motu uniformiter retardato movebitur. Generaliter tandem, si corpus quiescens quâlibet vi sive constanti sive variabili continuò urgeatur, & deinde eâ celeritate quam vis illius actione continuò acquisivit, contrâ directionem vis illius reagentis projiciatur, ut vestigia sua relegat, corpus illud in itu & reditu suo eandem habebit celeritatem, ubi ad eadem viæ suæ puncta, euando & redeundo pervene-

rit; adeoque motum redeundo non amittet, nisi cum pervenerit ad punctum ex quo cepit euando moveri; nam eadem vis in itu & reditu corporis, æqualibus temporibus æquales celeritatis gradus generat & extinguit (8).

26. Corpora gravia in terræ viciniis, sublata mediî resistentiâ motu uniformiter accelerato descendunt, & motu uniformiter retardato ascendunt. Dem Sublatâ mediî resistentiâ idem est ejusdem corporis pondus, sive eadem illius in subjectum planum pressio, tum in vertice, tum in radice montis; est autem pondus, seu vis motrix (15) ut massa in vim gravitatis acceleratricem ducta; ergò cum ejusdem corporis massa eadem in vertice & in radice montis permaneat, manebit etiam eadem vis acceleratrix gravitatis. Insuper corpora gravia in radice & vertice montis æqualia spatia æqualibus temporibus percurrunt, sublata aëris resistentiâ, ut accuratissimis notum est experimentis (13) constans est igitur vis acceleratrix, & per lineas ad horizontem perpendiculares (3) uniformiter agitur. gravia ergò motu uniformiter accelerato descendunt, & uniformiter retardato ascendunt (25) Q. e. D.

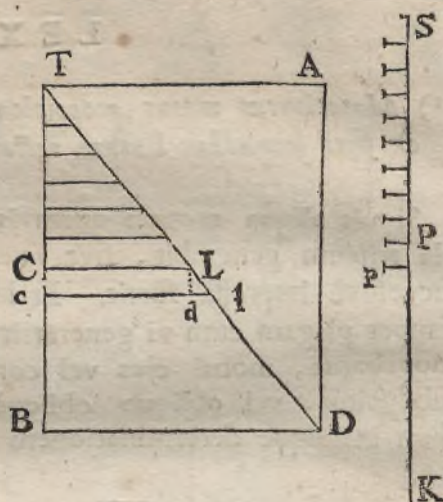
27. Subla-

AXIOMA-
TA, SIVE

27. Sublatâ mediî resistentiâ in terræ vicinîis, spatia quæ corpus è quiete cadendo percurrit sunt ut quadrata temporum quibus percurruntur... Dem... recta SK, repræsentet spatium quod grave cadendo percurrit TC, TB, exponent tempora quibus describuntur spatia SP, Sp, SK; & CL, cl, BD, ad TB, normales, exhibeant celeritates temporibus TC, Te, TB, per spatia SP, Sp, SK, acquisitas; quia in motu uniformiter accelerato, celeritates sunt ut tempora, (25), erit $TC:Te = CL:cl$; & $TC:TB = CL:BD$, adeoque recta, TD, transit per puncta L, l, & triangula TCL, Tc l, TBD, similia sunt. Jam fingamus lineam, cl, motu sibi semper parallelo ita accedere ad lineam CL, ut tandem cum ipsâ coincidat; evanescente tempusculo Cc, celeritas, cl, non differet à celeritate CL, adeoque per tempusculum infinitè parvum seu evanescentem Cc, celeritas CL, uniformis censerî potest. Porro spatia motu æquabili descripta sunt ut celeritas in tempus ducta (5), ergo spatium Pp, quod tempusculo, Cc, percurri supponimus est ut rectangulum, CL, x Cc = Cd; quare si totum tempus, TC, in tempuscula innumera ut Cc, divisum concipiatur, & similiter spatium, SP, tempore TC, percursum in totidem spatiola evanescentia, singulis tempusculis correspondentibus percurra dividatur, erit summa rectangulorum Cd, hoc est area trianguli TCL, ut summa spatio-
lorum Pp, id est ut SP; & eodem modo demonstratur aream trianguli TBD, esse ut spatium SK, tempore TC, percursum. Est igitur triangulum TCL; $TBD = SP:SK$. Sed triangulorum similibus areæ TCL, TBD, sunt ut quadrata laterum homologorum, ergo SP, ad SK, ut quadratum temporis TC, ad quadratum temporis TB. Q. e. D.

28. Coroll. 1... Cum velocitates acquisitæ sint ut tempora (25) erunt etiam spatia percurra ut quadrata velocitatum, & tam velocitates quam tempora erunt inter se in ratione subduplicatâ spatio-
rum.

29. Coroll. 2... Si grave è quiete cadens, dato tempore percurrat spatium, 1, duplo tempore percurreret spatium, 4;



triplo spatium, 9, &c. hoc est, si tempora ab initio motus computata sumantur in progressionem numerorum naturalium, 1, 2, 3, 4, 5. spatia his temporibus descripta erunt ut termini progressionis numerorum quadratorum. 1, 4, 9, 16, 25 &c. spatia verò singulis temporibus seorsim sumptis percurra erunt ut termini progressionis numerorum imparium. 1, 3, 5, 7, 9 &c. nam cum spatium 1^o tempore percursum sit, 1, duplo tempore sit, 4; spatium secundo tempore seorsim sumpto descriptum erit 4-1 seu 3, & ita de cæteris. Unde spatia motu uniformiter retardato descripta temporibus æqualibus secundum numeros impares retrogrado ordine decrefcunt. (25)

30. Coroll. 3... spatium SK, quod grave è quiete cadendo, tempore TB, percurrit, est subduplum spatii quod eodem tempore uniformiter percurri potest, cum velocitate BD, tempore TB, per spatium SK, acquisitâ. Nam compleatur rectangulum TBDA, & spatium quod uniformi celeritate BD, tempore TB, describitur, erit ut rectangulum TBDA (25). Cum ergo (27) spatium SK, sit ut triangulum TBD, subduplum rectanguli TBDA, erit spatium SK, dimidium spatii quod uniformi celeritate BD, tempore TB, percurritur.

31. Co-

(2) LEX III.

LEGES
MOTUS

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digito à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutux) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutatio-

31. Coroll. 4...: celeritas BD , motu uniformiter accelerato acquisita est semper (5) ut duplum spatium percursum $2SK$, applicatum ad tempus TB , quo percurritur, seu ut $2SK:TB$. Quare si vis acceleratrix constans dicatur G ; spatium percursum S ; tempus quo percurritur T ; erit $GT^2 = 2S:T$ (13) adeoque $GT^2 = 2S$, seu vis acceleratrix constans in quadratum temporis ducta, est ut duplum spatium eodem tempore vis illius actione descriptum.

(*) 32. Hæc notissima naturæ Lex innumeris confirmata experimentis, ex ipsâ materiæ inertâ clarè sequitur. Ut autem omnis tollatur ambiguitas, nihil aliud per hanc legem intellectum volumus, nisi æquales fieri in corpore agente & patiente statûs mutationes; cum enim nulla possit esse actio corporis in aliud corpus, quin mutua fiat horumque corporis collisio (8); mutatio statûs æqualiter in utroque cor-

pore recipi debet; undè licet actioni æqualis semper sit & contraria reactio, non idcirco tamen inter corpus agens & patientis fieri debet æquilibrium, idque Newtoniano exemplo manifestum est; si equi lapidem trahentis conatus seu vis activa major sit vi quâ lapis per gravitatem suam, plani scabritiem, mediique resistentiam, equo trahenti reluctatur, equus lapidem trahet cum eâ totius suæ vis parte, quæ post superatam lapidis gravitatem, plani scabritiem, mediique resistentiam, ipsi residua est; si autem totus trahentis equi conatus hisce tribus resistentiis minor sit, vel si ipsis sit æqualis, equus lapidem non movebit. Quare totus ac integer lapidis renixus qui componitur ex ipsius gravitate, plani scabritie, resistentiâ medii & inertâ quæ lapidi etiam omnibus aliis viribus destituto inest, actioni equi lapidem trahentis est semper æqualis.

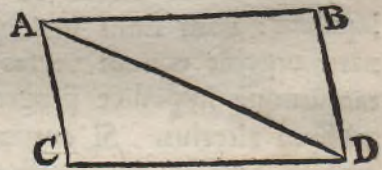
AXIOMA-
TA, SIVE

tiones enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciprocè proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi solâ M in loco A impressâ, ferretur uniformi cum motu ab A ad B; & vi solâ N in eodem loco impressâ, ferretur ab A ad C: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraqûe feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab A ad D. Nam (b) quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, hæc vis per Legem 11. nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD à vi alterâ genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD, sive vis N imprimatur, sive non; (c) atque ideo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ BD. Eodem



(b) 33. Quoniam vis N, agit secundum lineam AC, ipsi BD, parallelam, hæc vis, (per leg. 2) nihil nisi velocitatem secundum lineam ipsi BD, parallelam producet, ac proinde non mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD, à vi alterâ genitam; cum corpus iners duabus hisce viribus ac directionibus simul obsequi possit, & (per leg. 1.), debeat, atque hic supponatur vires M, & N, in mobile eodem modo simul agere ac si singulæ seorsim in illud quiescens imprimerentur.

(c) 34. Idcirco cum in fine ejusdem temporis, corpus quod hic tanquam punctum consideratur simul esse debeat in utraqûe lineâ CD, & BD, in utriusque lineæ concursu D, reperietur necesse est; quia

autem initio & fine temporis dati corpus reperitur in rectâ AD, nempe primum in A, & deinde in D, toto tempore dato motum fuit per lineam AD, nam ex duobus punctis A, & D, datis, recta, AD, positione data est; & corpus quibuslibet viribus impulsum, cessante virium actione, movetur uniformiter in directum secundum ultimam directionem ex viribus impressis resultantem, (per Leg. 1, & 9).

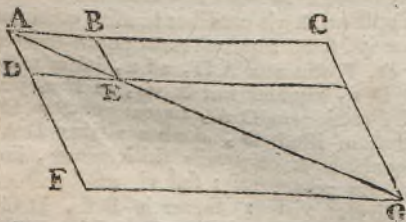
35. Motus compositus per diagonalem AD, motibus per latera AB, AC, distinctis non est æqualis, sed tantum æquipollet. Nam cum eadem sit corporis massa, motus quantitates per diagonalem & per latera sunt ut velocitates uniformes (6) seu ut spatia AD, AB, AC, eodem tempore percurfa (5); est autem sum-

summa laterum $AB + AC$, major diagonali AD ; ergo summa quantitatum motus per latera, major est quantitate motus per diagonalem. Verum quia idem est motus, sive mobile per diagonalem AD , celeritate æquabili ut AD , ex vi unice impressa feratur, sive viribus conjunctis per latera AB, AC , impellatur, siquet motum per diagonalem, motibus per latera disjunctis æquivalere.

Si mobile à pluribus quam duabus viribus in loco A , simul impressis impellatur, inveniri semper poterit unica directio & velocitas ex omnibus separatis composita ipsique æquipollens, quæ media directio dicitur; duarum enim virium media directio reperitur (per coroll. 1. Newt.); deinde diagonalis illa tanquam spatium vi unice percursum consideretur, & cum spatio tertiâ vi descripto pari ratione componatur, sicque vires omnes ad unicum reducentur.

37. Motus omnis in quocumque alios laterales ipsi æquipollentes resolvi potest; nam motus per AD , æquabilis, facto triangulo quocumque ABD , resolvitur in motus per latera AB, AC , motui per diagonalem AD , æquipollentes (35). Eadem ratione motus per AB , in duos quoscumque alios, descripto circa latus AB , triangulo resolvitur, idemque de motu per AC , & de aliis quibuscumque motibus dici debet.

38. Si corpus aliquod A , duplici vi per AC , & per AF , ita urgeatur, ut motus in eadem ratione acceleretur vel retardetur, sive quod idem est, si spatia AB, AD, AC, AF , iisdem temporibus percurra, semper sint in constanti ratione, motu composito parallelogrammi diagonalem AG , describet . . .



Dem . . . ductis DE ad AB , & BE ad AD , parallelis, corpus conjunctis viribus motum, reperiri debet simul in utraque lineâ DE, EB , (34) adeoque in earum intersectione E ; similiter ductis FG , ad AC , & CG , ad AF , parallelis,

Tom. I.

pater corpus motu composito eodem tempore reperiri in G , quo motibus disjunctis attingeret puncta C, F ; cum igitur (ex hyp.) sit AD , ad AB , seu DE , ut AF , ad AC , seu FG , recta AE , producta transit per punctum G ; ergo corpus per diagonalem rectam AG , incedet. Q. e. D.

LEGES
MOTUS.

39. Si spatia secundum unam directionem percurra non sint semper in eadem ratione cum spatiis juxta alteram directionem iisdem temporibus descriptis, mobile per eandem diagonalem rectam progredi non potest; si autem ratio spatiorum viribus separatis iisdem temporibus descriptorum continuè mutetur, mobile per curvam incedet, ut si motus uniformis cum motu continuè accelerato vel retardato componatur.

40. Corpus grave secundum quamlibet directionem AC , quæ non sit ad horizontem normalis projectum, in terræ vicinis, sublata mediâ resistantiâ, parabolam $AE G$, describit, cujus diameter AF , est ad horizontem perpendicularis, & tangens AC , directio projectionis . . .

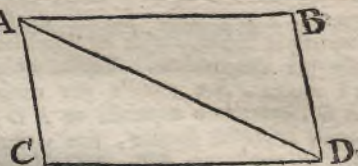


Dem . . . Solâ vi projectionis impressâ, grave uniformiter movetur per rectam AC , (per leg. 1.), solâ vi gravitatis motu uniformiter accelerato per rectam AF , aut ipsi parallelam descendit (26); quoniam verò motus per AC , æquabilis est, spatia AB, AC , sunt ut tempora quibus percurruntur (5). Spatia AD, AF , motu uniformiter accelerato iisdem temporibus descripta sunt ut quadrata temporum quibus describuntur (27), seu ut quadrata rectarum AB, AC , aut ipsis parallelarum & æqualium DE, FG , cum igitur grave motu composito latum in fine temporum AB, AC , reperiat in punctis E, G , (34) evidens est quadrata ordinarum DE, FG , curvæ $AE G$, (39) esse inter se in ratione abscissarum AD, AF , adeoque curvam $AE G$, esse parabolam, (per 20^{am}. lib. 1. conic. Apollon.) cujus diameter AF , & tangens AC ordinatis DE, FG (32. prop. lib. 1. conic. Apollon.) Q. e. D.

D

AXIOMA-
TAB SIVE

argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in lineâ CD , & idcirco in utriusque lineæ concursu D reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab A ad D per Legem I.

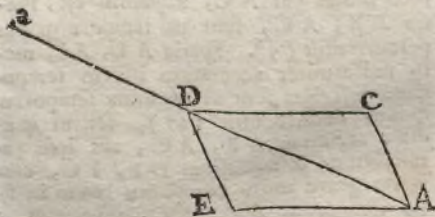


COROLLARIUM II.

Et hinc patet (d) compositio vis directæ AD ex virtutibus quibusvis obliquis AC & CD , & vicissim resolutio vis cujusvis directæ AD in obliquas quascunque AC & CD . Quæ quidem compositio & resolutio abundè confirmatur ex Mechanicâ.

Ut si de rotæ alicujus centro O exeuntes radii inæquales OM , ON filis MA , NP sustineant pondera A & P , & quæ

(d) 41. Quæ de motuum compositione & resolutione dicta sunt, ad vires mortuas possunt transferri. Si corpus seu punctum D , viribus mortuis, seu ut loquuntur Mechanici, potentiis DE , DC , juxta directiones DE , DC , agentibus trahatur vel impellatur & completo parallelogrammo EC , ducatur diagonalis DA , vires DC , DE , vi mediæ, ut DA , juxta directionem DA , agenti æquivalent....



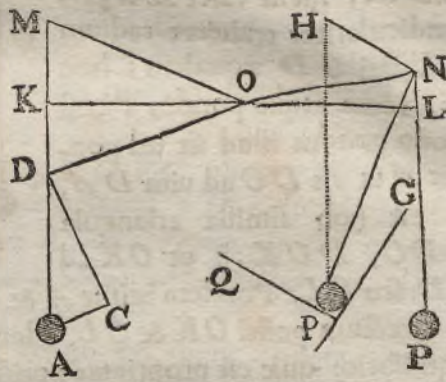
Dem... vis separata DC , considerari potest tanquam vis acceleratrix quæ in corpus D , juxta directionem DC , continuè & uniformiter agit, & vis illa est ut celeritas quam dato tempore generat aut generare potest (13), adedque illa celeritas per rectam DC , expo-

netur, cum ea recta sit ut vis ipsa DC , (per hyp.) simili argumento liquet rectam ED , esse ut celeritatem vi agente per DE eodem tempore dato generandam. Cum igitur celeritates DE , DC , in mediam, DA , æquipollentem componantur (per coroll. 2. Newt.) manifestum est vires quoque laterales DE , DC , in mediam æquipollentem DA , (35) componi, atque aded vim ut DA , in laterales DE , DC , æquivalentes resolveri posse. Quare (35. 36) vires quocunque laterales in unam æquivalentem componi possunt, & vis quælibet in alias quascunque ipsi simul æquipollentes potest resolveri.

42. Producat AD , ad a , ita ut DA , & Da , æquales sint & vis, ut Da , juxta directionem DA , urgeat punctum D , punctum illud D , duabus viribus DA , æqualibus & contrariis sollicitatum, immotum permanebit; sed vis mediæ DA , æquivaleret viribus separatis DE , DC , (41), ergo si punctum D , sublata vi, DA , tribus viribus Da , DE , DC , urgeatur, non movebitur, sed erit inter vires æquilibrium.

43. Si punctum D , tribus viribus Da , D , E , DC , in æquilibrio constitutis urgeatur,

quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum O agatur recta KOL filis perpendiculariter occurrens in K & L , centroque O & intervallorum OK , OL majore OL describatur circulus occurrens filo MA in D : & actæ rectæ OD parallela fit AC , & perpendicularis DC . (e) Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, K , L , D affixa sint an non affixa ad planum rotæ; pondera idem valebunt, ac si suspenderentur à punctis K & L vel D & L . Ponderis (f) autem A exponatur vis tota per lineam AD , & hæc resolvetur in vires AC , CD , quarum AC trahendo radium OD directè à centro



completo parallelogrammo EC , recta a D , producta, per angulum A , transit, estque $DA = Da$, parallelogrammi diagonalis, & vires sunt ut latera trianguli DAC , nempe ut DA , AC , seu ED , DC ... Dem... Ductâ diagonali DA , parallelogrammi EC , vis media ut DA , æquipollet viribus per latera DE , DC , (41); si virium directiones DA , Da , non eandem efficiant lineam rectam, aliquem angulum in D , continent, ac proinde punctum D , à viribus sibi invicem directe non oppositis impulsu moveri debet (contra hyp.); si verò potentia illæ DA , Da , non sint æquales, major minorem superat, motusque oritur (etiam contra hyp.). Ergo recta AD , producta, per angulum A , transit, estque $DA = Da$, parallelogrammi diagonalis & quia $AC = DE$, vires sunt ut latera trianguli DAC . Q. e. D.

44. Cum latera trianguli sint ut sinus angulorum oppositorum, erit vis Da , seu DA , ad vim DC , ut sinus anguli ACD , seu complementi illius EDC ; ad sinum anguli DAC , seu ADE , seu complementi illius EDa ; similiter demonstratur esse a D , ad ED , ut sinus anguli EDC ,

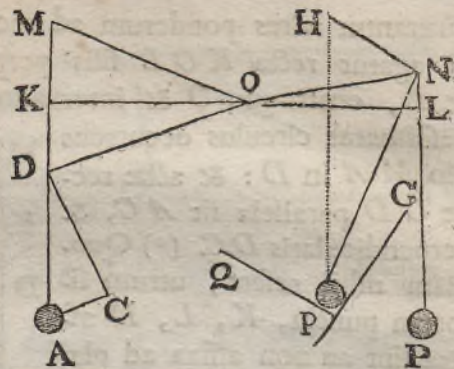
ad sinum anguli a D C . Si igitur tres potentia in æquilibrio circa punctum quodvis D , consistentes, dicantur ut libet 1^a , 2^a , 3^a , erit 1^a , ad 2^am , ut sinus anguli quem 2^a & 3^a potentiarum directiones comprehendunt, ad sinum anguli quem 1^a & 3^a directiones formant. Omnes illas de virium & motuum compositione & resolutione demonstrationes accuratissimis confirmavit experimentis Clariss. Gravifandus in Elementis Physices.

(e) 45. Planum rotæ gravitatis expers & circa centrum fixum O , (fig. Newt.), mobile supponitur, fila quoque gravitate destituta suspenduntur; cumque eadem sit in variis à terrâ distantis corporis gravitas (26) eademque proinde fili longioris vel brevioris quo pondus idem suspenditur tensio, evidens est planum rotæ iisdem semper viribus trahi, sive fila punctis M , & N , sive aliis quibusvis K , D , aut L , in filis MA , NP , sumptis affixa sint. Pondera igitur à punctis M , & N , suspensa idem valebunt ac si suspenderentur à punctis K & L , vel D & L .

(f) 46. Ponderis A , quo punctum D , trahitur, vis tota DA , resolvi potest (41) in vires laterales & æquipollentes D 2 AC ,

AXIOMA-
TA, XVI

tro nihil valet ad movendam ro-
tam; vis autem altera DC , tra-
hendo radium DO perpendi-
culariter, idem valet ac si per-
pendiculariter traheret radium
 OL ipsi OD æqualem; hoc
est, idem atque pondus P , si
modo pondus illud sit ad pon-
dus A ut vis DC ad vim DA ,
id est (ob similia triangula
 ADC , DOK ,) ut OK ad



OD seu OL . Pondera igitur A & P , quæ sunt reciprocè ut radii
in directum positi OK & OL , idem pollebunt, & sic consistent in
æquilibrio: quæ est proprietas notissima (§) Libræ, Vectis, & Axis
in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratio-
ne, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major. Quod

AC , & DC , ita ut punctum D , urgeatur simul vi ut DC , secundum directionem DC , & vi ut CA , secundum directionem rectæ OD , productæ; quia verò centrum O , rotæ fixum supponitur, vis ut AC , trahendo punctum O , juxta directionem radii OD , nullam motum creat, nihilque valet ad rotam circa centrum O , movendam; vis autem altera DC , trahendo radium DO perpendiculariter, idem valet ad rotam circa centrum O , movendam, ac si perpendiculariter traheret alterum radium OL , ipsi OD , æqualem; vires enim æquales æqualibus radiis pariter applicatæ eodem modo rotam movere debent; si itaque pondus aliquod P , è puncto L , suspensum sit vi DC , æquale, seu, quod idem est, si pondus P sit ad pondus A , ut recta DC , ad rectam DA , quæ exponit vim absolutam ponderis A , rota his duabus viribus A , & P , in partes contrarias æqualiter tracta non movebitur. Verùm in triangulis ADC , DOK , anguli DAC , & KDO , ob parallelas AC , DO , & præterea anguli ad K & C recti, æquales sunt, adeoque triangula illa sunt similia & DC : $DA = OK$: DO , seu OL ; pondera igitur A , & P , quæ sunt reciprocè ut radii in directum positi OK , & OL , seu

quæ sunt reciprocè ut perpendiculares OK , & OL , ex centro O , in eorum directiones ductæ idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio.

(§) 47. Sit KL , recta inflexilis & gravitatis expers circa punctum fixum seu fulcrum O , volubilis, hæc vectem & libram exhibet, atque etiam peritrochium circa xam volubile potest exponere, seu rotam cujus est radius longior OL , & centrum O , circa quod rota & cylindrus cujus est radius brevior OK , revolvi possunt; ex demonstratis autem (46) patet esse in his tribus machinis æquilibrio, cum potentiæ seu pondera A , & P , sunt inter se reciprocè, ut rectæ à centro O , ad eorum directiones normaliter ductæ. Sin pondus alterutrum sit majus quàm in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major; nam, manente distantia OL , vis ponderis P , ad movendam rotam est ut pondus P absolutum, & manente pondere P , crescit vis illius ad movendam rotam in ratione distantie directionis ponderis à centro; duplicatâ enim vel triplicatâ illâ distantia, pondus idem P , est in æquilibrio cum duplo vel triplo pondere, cujus distantia directionis à centro est subdupla vel subtripla (46). Ergo in his tribus machinis vis potentiæ seu

Quòd si pondus p ponderi P æquale partim suspendatur filo Np , partim incumbat plano obliquo pG : agantur pH , NH , prior horizonti, posterior plano pG perpendicularis: & si vis ponderis p deorsum tendens, exponatur per lineam pH , resolvi potest hæc in vires pN , HN . Si filo pN perpendiculari esset planum aliquod pQ , secans planum alterum pG in linea ad horizontem parallela; & pondus p his planis pQ , pG solummodo incumberet; urgeret illud hæc plana viribus pN , HN perpendiculariter, nimirum planum pQ vi pN , & planum pG vi HN . Ideoque si tollatur planum pQ , ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublatis, tendetur illud eadem vi pN , quâ planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis PN , ut pN ad pH .
(^h) Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum pN , AM à centro rotæ, & ratione directa pH ad pN ; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque idè se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest.

Pondus autem p , planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis quâ pondus p urget planum pQ sit ad vim, quâ idem vel gravitate suâ vel ictu mallei impellitur secundum lineam pH in plana, ut pN ad pH ; atque ad vim, quâ urget planum alterum pG , ut pN ad NH . Sed & vis Cochleæ per similem virium divisione-

ponderis ad movendam machinam circa centrum motus est semper in ratione compositâ ponderis absoluti seu intensitatis potentie, & distantie directionis illius à centro motus. Vim autem illam ponderis aut potentie ad machinam movendam momentum potentie aut ponderis vocant Mechanici.

(^h) 48. Vis quâ pondus p , tendit filum obliquum pN , dicatur π , & normalis ex centro O , in filum pN , ducta dicatur n , & erit ex demonstratis $\pi: P$, seu p , = $pN: pH$. Præterea si vis π ,

in æquilibrio cum pondere A , consistat, erit etiam (47) $A: \pi = n: KO$; unde per compositionem rationum erit $A \times \pi: p \times \pi = n \times pN: KO \times pH$, seu $A: p = n \times pN: KO \times pH$; & $p: A = KO \times pH: n \times pN$; ideoque si pondus p , sit ad pondus A , in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum, n , & KO , filorum suorum pN , AM à centro rotæ, & ratione directa pH , ad pN , erit æquilibrium.

AXIOMA-
TA, SIVE

visionem colligitur; quippe quæ cuneus est à vecte impulsus. (i) Usus igitur Corollarii hujus latissimè patet, & latè patendo veritatem ejus evincit; cùm pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis & ponderibus directè vel obliquè ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut & vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

COROLLARIUM III.

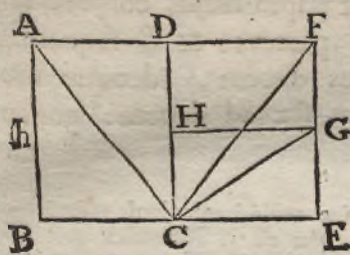
Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, ideoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. (k) Ut

(i) 49. Cunei & cochleæ vires totamque ferè mechanicam hisce theorematibus demonstravit Clariss. Varignonius. Quam latè pateat eorum usus manifestum est ex præclaro opere Joannis Alphonfi Borelli de motibus animalium, & ex variis, inter quas Bernoullianæ eminent, de musculorum motu dissertationibus; sed hæc fusiùs prosequi præsentis non est instituti; in proximo scholio machinarum vires generali mechanicæ principio determinare satis erit; ut autem ea quæ nobis illustranda occurrent in meliori lumine collocentur; generales motuum leges, ne omisissis quidem definitionibus, præmittendæ esse judicavimus.

(k) 50. Corpus perfectè elasticum dicitur cujus partes ex ictu flectuntur, seu introcedunt, & deinde eadem vi quæ fle-

xæ sunt, sese in priorem statum contrariâ directione restitunt. Corpus imperfectè elasticum est cujus partes ex ictu flexæ in priorem quidem statum redire nituntur, sed minori vi eâ quâ flexæ sunt. Corpus non elasticum vocatur cujus partes, ictu percussæ nullâ vi sese restituere conantur. Corpus unum in alterum directè impingere dicitur, si secundum rectam ad contactum perpendicularem impingat; obliquè verò si secundum rectam ad contactum obliquam. Cùm corpora in se mutuo non agant, nisi per massam & velocitatem, tanquam axioma ex legibus 2^a & 3^a notissimum innumerisque confirmatarum experimentis supponimus quantitates motus æquales & contrarias in conflictu sibi mutuo æquipollere.



51. Si globus A, in planum immobile BE, incurrat, quæritur illius motus post impactum.... 1^o. Globus ille in planum directè impingat per AB; si globus & planum omni elasticitate destituantur, globi motus post impactum in B, omnino extinguatur, cum nulla vis globum repellat; si autem planum & globus perfectè elaterè donentur, globus per BA, post impactum resiliat eadè quæ advenit celeritate BA; nam in corporibus perfectè elasticis (50) vis restitutiva æqualis est vi compressivæ, undè si imperfecta fuerit vis elastica, globus minori velocitate Bh, resiliat.... 2^o. Globus A, in planum BE, velocitate & directione AC, obliquè impingat, illius motus resolvatur in motus laterales quorum unus AD, sit plano BE, parallelus, alter autem AB, eidem plano perpendicularis (37), globus A, motu secundum AD, ad planum non accedit, sed tantum motu secundum perpendiculararem AB, vel DC; velocitas globi respectu plani BE, est tantum ut perpendicularis AB; at verò si AC, foret perpendicularis ad planum BE, velocitas quæ ad planum accederet, foret ut AC; ergò cum impetus ejusdem corporis in planum, sint ut velocitates quibus ad planum accedit, ictus obliquus est ad perpendiculararem, ut AB, ad AC; seu sumptâ AC, tanquam radio, ut sinus anguli incidentiæ ACB, ad sinum totum.... 3^o. Si nulla sit in corporibus A, & BE, elasticitas, globus A, per AC, incurrens movebitur per CE, celeritate ut $CE = AD$; nam motus perpendicularis AB, vel DC, ex demonstratis, extinguatur, remanetque tantum motus CE, cui planum ut potè parallelum non opponitur; si verò perfectum fuerit elaterium, resiliat globus per CF, celeritate $CF = AC$, & an-

gulus reflexionis FCE, æqualis erit angulo incidentiæ ACB; nam per vim restitutivam elateris resiliat per normalem CD, celeritate CD, seu BA, & præterea motu ad planum parallelo progreditur per CE, celeritate ut $CE = AD$; ergò motu composito (coroll. 1. Newt.) percurreret diagonalem CF; & cum in parallelogrammis DB, DE, omnia sint paria, erit $FC = AC$, & angulus $FCE = ACR$. Tandem si corpora imperfectè fuerint elastica, manebit quidem post impactum velocitas AD, seu CE, plano parallela, sed velocitas perpendicularis CH, minor erit velocitate DC, seu AB, & completo parallelogrammo HE, globus per diagonalem CG, resiliat.

52. Si globi non elastici in se mutuò directè impingant, quæritur illorum motus post conflictum.... 1^o. Globi in eandem plagam ferantur, subsequens fugientem impellet, donec ambo simul tanquam unum corpus eadè directione ac velocitate incedant, eritque (coroll. 3. Newt.), summa quantitatum motus eadè ante & post conflictum; communis ergò post conflictum velocitas invenitur, summâ quantitatum motus antè conflictum per summam massarum divisâ (6).... 2^o. Globi contrariis directionibus sibi mutuò occurrant, si æqualis in utroque fuerit motus quantitas, post conflictum ambo quiescunt (50). Si verò inæquales sint motus quantitates, per conflictum extinguatur in singulis quantitas motus globi debilius moti (50); & ambo simul post impactum communi velocitate ac directione quasi unicum corpus progrediuntur, estque quantitas motus in utroque simul residua, differentiæ quantitatum motus antè conflictum æqualis (coroll. 3. Newt.). Hinc communis post conflictum velocitas habetur, si differentia illa quantitatum motus antè conflictum ad summam massarum applicetur (6). In hoc utroque casu communis post conflictum velocitas in globi cujusque massam ducta, est illius quantitas motus post impactum (6), ex quâ & quantitate motus ejusdem globi ante conflictum, per subtractionem invenitur quantitas motus in conflictu acquisita vel amissa; quia verò in omni globorum non elasticorum conflictu directo, vel motus omnis cessat, vel globi post impactum communi celeritate feruntur, manifestum est.

LEGES
MOTUS

AXIOMA-
TA, SIVE

(¹) Ut si corpus sphaericum *A* sit triplo majus corpore sphaerico *B*, habeatque duas velocitatis partes; & *B* sequatur in eadem rectâ cum velocitatis partibus decem, ideoque motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B*, ut sex ad decem: ponantur
motus

est respectivam globorum velocitatem per conflictum extingui.

53. Globi elastici in se invicem directè incurrant, quæritur eorum motus post conflictum 1°. Mutatio quæ ex mutuo corporum perfectè elasticorum conflictu in utriusque corporis motu nascitur, dupla est mutationis quam ictus idem in iisdem corporibus omni elaterio destitutis produceret, in corporibus imperfectè tantum elasticis mutatio major est quam in non elasticis, sed duplâ minor.) Nam partes in utroque corpore æquali vi ex ictu comprimuntur (Leg. 3.). Si corpora omni elatere destituerentur, post conflictum vel quiescerent, vel in eandem plagam velocitate communi progredierentur (52) nec partes flexæ restituerentur; si autem accedat vis elastica partes flexæ sese restituent vi & directione (50) quæ semper contraria erit vi compressivæ, & in corporibus perfectè elasticis huic æqualis, in aliis minor; actio igitur corporum in se mutuo ex elateris restitutione orta, actioni ex impactu nascenti æqualis est in corporibus perfectè elasticis, minor in aliis, ex quibus & Lege 2^a constat quod erat primò propositum 2°. Corpora perfectè elastica eadem velocitate respectivâ post conflictum recedunt, quâ antè conflictum ad se invicem accedebant; in corporibus verò imperfectè tantum elasticis, velocitas respectiva quâ post ictum discedunt est ad velocitatem quâ antè ictum ad se mutuo accedebant, in ratione vis restitutivæ ad vim compressivam; nam cum in conflictu corporum non elasticorum omnis velocitas respectiva, quâ ad se mutuo accedebant, destruat ex ictu (52), sitque vis restituta elateris perfecti vi compressivæ æqualis & contraria, manifestum est in corporum perfectè elasticorum conflictu, velocitatem respectivam ex solo impactu amissam, contrariâ directione restitui; in corporibus verò imperfectè elasticis eam

tantum restitui velocitatis respectivæ partem quæ est vi restitutivæ proportionalis 3°. Ut igitur corporum perfectè elasticorum motus post conflictum directum inveniatur, considerentur corpora tanquam omni elatere destituta & in eâ hypothesi, quærat (52) quantitas motus ex conflictu in unoquoque corpore acquisita vel amissa secundum eam directionem quâ corpus antè conflictum movebatur; eadem motus quantitas duplicata, erit quantitas motus in corpore perfectè elastico acquisita vel amissa, quæ proinde quantitati motus corporis antè conflictum addita vel dempta, dat quantitatem motus illius corporis post conflictum 4°. Corporum imperfectè elasticorum motus post conflictum invenitur, si data sit ratio vis restitutivæ elateris ad vim compressivam, sive, quod ex demonstratis idem est, ratio velocitatis respectivæ post impactum ad velocitatem respectivam antè impactum, quam rationem in iisdem corporibus constantem esse experimentis probavit Newtonus, nisi tamen partes corporum ex congressu lædantur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiantur. Corpora omni elaterio destituta supponantur, & in eâ hypothesi quærat quantitas motus in unoquoque corpore ex ictu acquisita vel amissa, cui motus quantitati si addatur quantitas motus vi elasticæ proportionalis, summa erit vera quantitas motus ex conflictu corporum imperfectè elasticorum in unoquoque corpore acquisita vel amissa, ex quâ datâ & ex quantitate motus corporis cujusque antè conflictum, reperitur, ut supra, omnis quantitas motus illius post conflictum. Exemplo lux affulgebit.

(1) 54. Globus *A*, sit triplo major globo *B*, habeatque duos velocitatis gradus, illius motus quantitas (6) erit ut 3×2 , seu 6. *B*, sequatur in eadem rectâ cum velocitatis gradibus, 10, eritque quantitas motus globi *B*, 1×10 , seu, 10, 1°. Si globi elastici non sunt,

motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem, adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summâ partium sexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, ideoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septemdecim vel octodecim, corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum unâ parte progredietur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum unâ parte regredietur amisso motu suo & (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium $15 + 1$ vel $16 + 0$, & differentiæ contrariorum $17 - 1$ & $18 - 2$ semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. ^(m) Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad

mo-

sunt, velocitas communis post conflictum (52) erit $16 : 4$, seu 4 ; quare quantitas motus ipsius *A*, post conflictum erit 3×4 , seu 12 . *B*, verò quantitas motus erit 1×4 , seu 4 . Itaque quantitas motus à corpore *B*, amissa est, 6 , & corpori *A*, acquisita est etiam, 6 2^o. Si globi sunt perfecte elastici, quantitates illæ duplicari debent (53), erunt igitur 12 & 12 . Si quantitati motus, 6 , globi *A*, ante conflictum jungas, 12 , summa erit, 18 , quantitas motus illius post conflictum; si verò ex quantitate motus, 10 , ipsius *B*, ante conflictum subduxeris, 12 , quantitatem motus per conflictum amissam, residuum est $- 2$, quod signum $-$, ut notum est, contrariam positionem significat, seu corpus *B*, post ictum in contrariam plagam resilit cum hac motus quantitate 2

Tom. I.

3^o. Si globi *A* & *B*, sint imperfectè elastici, sitque v. gr., eorum vis restitutiva subdupla vis compressivæ, erit vis compressiva ad vim restitutivam (seu 2 , ad 1) ut quantitas motus, 6 , ex ictu acquisita vel amissa ad quantitatem motus, 3 , solâ vi restitutivâ acquisitam vel amissam; quare hæc quantitas, 3 , addatur quantitati, 6 , ex ictu acquisitæ in corpore *A*, & amissæ in corpore *B*, summa, 9 , erit quantitas motus integra tam ex ictu quam ex elatere acquisita vel amissa; unde quantitas motus globi *A*, post conflictum est, $6 + 9$, seu, 15 , globi *B*, $10 - 9$, seu 1 , quarum summa est, 16 .

^(m) 55. Cognitis quantitatibus motuum quibuscum corpora post conflictum pergent, invenietur cujusque velocitas dividendo quantitatem motus cujusque corpo-

E

ris

AXIOMA-
TA, SIVE

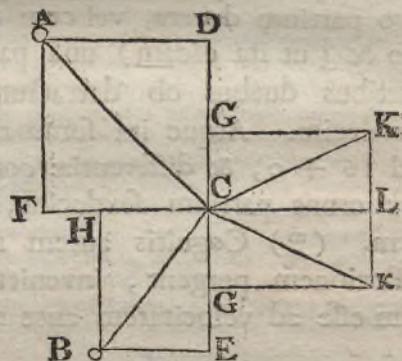
motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

(ⁿ) Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo obliquè, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani à quo

COR-

ris per illius massam (σ), aut etiam quia ejusdem corporis diversæ quantitates motus sunt ut velocitates (σ), dicendo, ut quantitas motus ante conflictum ad quantitatem motus post conflictum, ita velocitas corporis ante conflictum ad illius velocitatem post conflictum.

(ⁿ) 56. Si corpora quæcumque *A* & *B*, diversis in rectis *AC*, *BC*, moventia, incidant in se mutuo obliquè in *C*, & requirantur eorum motus post impactum. Cognoscendus est situs plani *FL*, à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus *C*; deinde corporis utriusque motus *AC*, *BC*, (per coroll. 2.) distinguendus est in duos *AD*, & *AF*, *BE* & *BH*, unum nempe *AF* seu *DC*, & *BH* seu *EC*, huic plano *FL* perpendicularem, alterum *AD*, *BE*, eidem parallelum. Quia verò corpora secundum parallelas *AD*, *BE*, ad se mutuo non accedunt, sed tantum secundum perpendiculares *DC*, *EC*, in se invicem agunt, motus paralleli *AD*, *BE*, per impactum non mutantur, adeoque retinendi sunt iidem post conflictum qui erant ante conflictum; & motibus perpendicularibus *DC*, *EC*, mutationes æquales in partes contrarias *CD*, *CE*, tribuendæ sunt sic ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem ante & post conflictum (coroll. 3. Newt.) Ut itaque corporum *A* & *B*, in se mutuo obliquè incidentium motus post ictum inveniantur, mota duntaxat supponantur per lineas *DC* & *EC*, velocitatibus *DC* & *EC*, atque



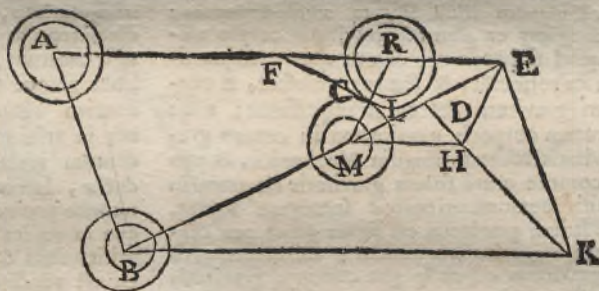
in eâ hypothesi quærantur (52, si fuerint elastica, 53, si non fuerint elastica) eorum velocitas post conflictum in lineâ *CD*, vel *CE*, ex quâ datâ, & ex velocitate parallelâ plano *FL*, etiam datâ, compositus corporis motus (per coroll. 1. Newt.) facile reperietur. Sit exempli causâ *CG*, velocitas corporis *A*, post impactum per *DE*, in *C*; sumptâ *CL*, æquali & parallelâ velocitati secundum *AD*, quæ eadem post conflictum remanet, compleatur parallelogrammum *GL* & *A*, movebitur per illius diagonalem *CK*, velocitate ut *CK*, (per coroll. 1. Newt.) Si corpora angulosa sibi per angulos occurrant, orientur motus circulares, dum pars corporis ex vi instat in unam plagam movetur, altera verò ex conflictu fertur in alteram plagam circa corporis centrum.

57. Da3

corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus: dein corporis utriusque motus (per Corol. II.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex huiusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

C O.

57. Datis duorum globorum A & B, directionibus, celeritatibus & diametris, unâ cum eorum situ antè conflictum, facile est determinare punctum concursus C, & situm plani FL, utrumque globum in puncto C, contingentis. Globus A, feratur per lineam AE, & celeritate ut AE, globus B verò secundum directionem BE, celeritate ut BD,



moveatur. Junctis A & B globorum centris per lineam AB, compleatur parallelogrammum ABKE. Jungantur puncta D & K, & recta DK, ex centro E, intersectetur arcu qui describitur radio EH, summæ semidiametrorum globorum A & B, æquali. Ex puncto intersectionis H, ducatur recta HM, ipsi EA parallela, erunt M & R, loca in quibus globorum centra constituentur, ubi secum invicem concurrerent, & sumptâ lineâ RC, æquali radio globi A, recta FL, ad RC perpendicularis, in puncto C, situm plani designabit, . . . Dem . . . Quoniam recta HM,

est lineæ BK parallela (per const.) erit $DM : DB = MH : BK = RE : EA$, ob $RE = MH$, & $EA = BK$; ergò dividendo $BM : BD = AR : AE$, & alternando $BM : AR = BD : AE$. Cum igitur sit BM ad AR , ut celeritas globi B, ad celeritatem globi A; globus A in R, & B in M, eodem tempore pervenient (6); Cumque sit $MR = EH$, globi in puncto C, se mutuo contingent, & planum EL, ad radium RC, in puncto C, perpendiculariter ductum utrumque globum continget. Q. e. D.

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis Centrum ($^{\circ}$), corporum duorum vel plurimum, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

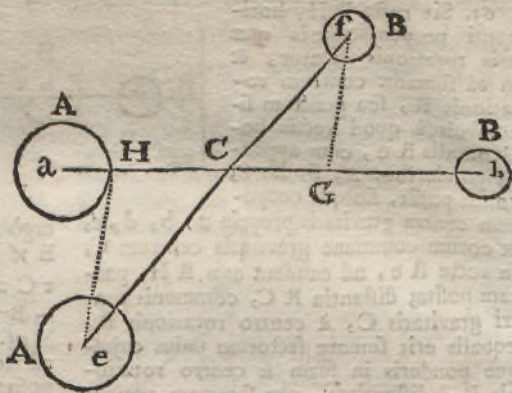
Nam

58. Centrum gravitatis corporis cuiusque, est punctum intra vel extra corpus positum, circa quod undique partes in æquilibrio consistunt, ita ut si per hoc punctum ducatur planum figuram utcumque secans, corporis segmenta quæ utrinque sunt circa planum illud librata æquiponderent; si igitur ex centro gravitatis corpus aliquod suspendatur, datum quemcumque situm retinebit, & semper quiescet, si centri gravitatis descensus impediatur; unde totam corporis gravitatem in centro gravitatis locatam fingunt Mechanici, & pro corpore gravi solum gravitatis centrum in suis demonstrationibus surrogare solent. Planum gravitatis est figura plana per centrum gravitatis transiens; Diameter verò gravitatis est recta per centrum gravitatis ducta; Quare planorum gravitatis, communis intersectio diametrum gravitatis efficit, & in diametrorum gravitatis concursu centrum gravitatis positum est. Centrum magnitudinis vocatur punctum illud, per quod divisâ magnitudo relinquit duas partes utrinque æquales; ut in circulo & ellipsi, ductis utcumque per centrum lineis rectis, lineæ illæ totaque figura in partes æquales dividuntur; ac proinde si gravia homogenea, id est, quorum gravitates sunt voluminibus proportionales, secundum longitudinem in partes similes & æquales secari possint, centrum gravitatis à centro magnitudinis non differt.

59. Ex hisce definitionibus facile colligitur, omnium circularum, ellipsium, sphaerarum & figurarum quarumvis regularium, centrum gravitatis idem esse cum centro magnitudinis, modò tamen gravia supponantur homogenea. In figuris autem irregularibus, communi duorum gravitatis diametrorum intersectione determinari potest centrum gravitatis (58). Sic in quolibet parallelogrammo, centrum illud in duarum diagonalium concursu positum est; in triangulo reperitur in intersectione duarum rectarum quæ à duobus angulis ductæ, latera angulis illis opposita, totumque proinde triangulum bifariam, adeoque in partes æquiponderantes secant, in prismatibus & cylindris, centrum gravitatis est punctum medium rectæ basium oppositarum centra conjungentis; & generaliter in omnibus corporibus quantumvis difformibus centrum gravitatis mechanicè invenitur, si corpus ab aliquâ sui parte liberè suspendatur, & ab eadem parte à quâ pendet, demittatur perpendiculum ita ut in corpore linea quam fecerit perpendiculi filum notetur; deinde ab aliâ parte corpus idem liberè suspendatur ut prius, noteturque iterùm linea perpendiculi ab hac parte super corpus demissi; concursus enim duorum, filorum perpendiculi (quæ sunt diametri gravitatis) erit centrum gravitatis corporis dati.

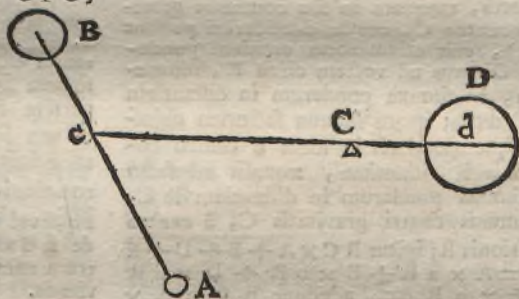
60. Cent.

60. Centra gravitatis a & b, corporum A & B, recta seu vecte inflexibili & gravitatis experte, a b jungantur; & ita dividatur ab, in C, ut sit pondus A, ad pondus B, ut Cb, ad Ca, punctum C, erit centrum gravitatis commune duorum corporum A & B.... Dem... punctum C, fixum maneat, sitque 1^o. a b, horizonti parallela, & quia a b, est vectis cujus fulcrum C, ponderis B momentum seu conatus ad vectem circa C, movendum, erit ut $B \times Cb$, & ponderis A momentum ut $A \times Ca$ (47); verum (per hyp.) $A : B = Cb : Ca$, adeoque $A \times Ca = B \times Cb$; ergo momenta ponderum A & B, equalia sunt, & proinde in equilibrio circa punctum C, consistunt. ... 2^o. vectis, a b, circa punctum C fixum, rotetur, & situm e f, inclinatum ad horizontem a b, obtineat, ductis F G, E H, rectis horizonti a b, perpendicularibus, quæ sunt gravium directiones, ponderum A & B, momenta erunt ut $A \times CH$ & $B \times CG$, (47); sed ob triangula H C e, G f G,



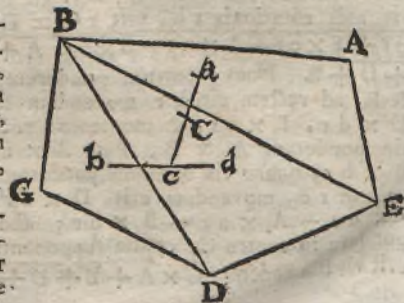
similia $GC : HC = Cf : Ce$, five $Ca = A : B$, adeoque $GC : HC = A : B$ & $A \times CH = B \times CG$; momenta igitur ponderum A & B, in situ quocumque dato equalia sunt & semper æquibran- tur. Quare (58) punctum C, est commune gravitatis centrum duorum corpo- rum A & B. Q. e. D.

61. Coroll. 1.... Duorum corporum A & B, commune gravitatis centrum sit c, & tertii corporis D, centrum gravitatis proprium sit d; jungatur recta c d, quæ ita dividatur in C, ut sit summa ponderum A + B ad pondus D, sicut C d, ad C c, centrum corporum A, B, D, centrum gravitatis commune erit in C; nam duo corpora A & B, (58) considerari possunt tanquam in suo communi gravitatis centro c, coacta, adeoque si fuerit A+B: D = C d: C c, erit C, centrum gravitatis commune trium corporum A, B, D, (60)



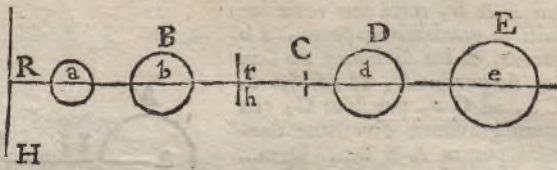
Eadem ratione quatuor, pluriumve, prout quisque voluerit, corporum commune gra- vitatis centrum reperietur.

62. Coroll. 2.... figuræ cujusvis planæ & recti- lineæ centrum gravitatis hoc modo inveniri potest. Figura data, A B G D E in sua triangula dividatur, duorumque triangulorum, B G D, B D E, centra gravitatis b & d, recta jungantur, & ita dividatur, b d, in c, ut area trianguli B G D, sit ad aream trianguli B D E, sicut c d, a d, b c, eritque, c, centrum gravitatis commune duorum triangulorum B G D, B D E, (60). Centrum gravitatis, a, trian- guli B A C, & centrum, c, figuræ B G D E, mox in- ventum jungantur recta c a, quæ ita dividatur in C, ut area trianguli B A E, sit ad aream figuræ B G D E, sicut C c, ad C a & C, erit centrum gra- vitatis totius figuræ datæ A B G D E, (61). Hæc omnia clarè intelliguntur, si figurarum area quævis, instar ponderis centro gravitatis appensi consideretur.



AXIOMA-
TA, SIVE

63. Sit recta R H, hori-
zonti perpendicularis quæ
axis rotationis dicatur, &
in eâ sumatur centrum ro-
tationis R, seu punctum fi-
xum circâ quod vectis hori-
zontalis R e, cum appen-
sis ponderibus A, B, D, E,
rotari possit, sintque corpo-
rum centra gravitatis propria a, b, d, e,
& eorum commune gravitatis centrum C,
in vecte R e, ad eandem axis R H, par-
tem posita; distantia R C, communis centri
gravitatis C, à centro rotationis R,
æqualis erit summæ factorum uniuscujus-
que ponderis in suam à centro rotatio-
nis R, distantiam, per summam ponderum
divisæ. Dem. Momen-
tum cujusque ponderis ad vectem circâ
centrum R, movendum, est ut factum ex
illo pondere in suam ab eodem centro R,
distantiam (47), & omnium momentor-
um summa, seu totus omnium ponderum
ad vectem circâ centrum R, movendum
conatus, ut illorum factorum summa; ve-
rùm quia pondera omnia per vectem R e,
dispersa, tanquam in suo communi gravi-
tatis centro C, coacta considerari possunt
(58), erit etiam totus omnium ponderum
conatus ad vectem circâ R, moven-
dum, ut summa ponderum in distantiam
R C ducta; quare summa factorum unius-
cujusque ponderis in suam à centro ro-
tationis R distantiam, æqualis est facto
ex summâ ponderum in distantiam R C,
communis centri gravitatis C, à centro

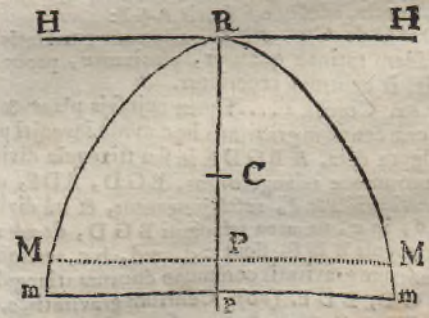


rotationis R; igitur $R C \times A + B + D + E$
&c. = $A \times a R + B \times b R + D \times d R$
 $+ E \times e R$ &c., adeoque $R C = A \times$
 $a R + B \times b R + D \times d R + E \times$
 $e R$ &c.: $A + B + D + E$ &c. Q. e. D.

64. Si pondera ad eandem axis ro-
tationis partem sita non sint, si v. gr. fue-
rit axis rotationis r h, erit $r C = D \times$
 $d r + E \times e r - A \times a r - B \times b r$; $A + B$
 $+ D + E$. Nam momenta ponderum D
& E, ad vectem circâ r movendum sunt
 $D \times d r$, $E \times e r$, & momenta contra-
ria ponderum A & B, sunt $A \times a r$,
 $B \times b r$; quare vis omnium ponderum ad
vectem r e, movendum erit, $D \times d r +$
 $E \times e r - A \times a r - B \times b r$; sed si
pondera in centro C, coacta supponantur,
erit vis illa eadem, $r C \times A + B + D + E$,

ergò $r C \times A + B + D + E = D \times d r +$
 $E \times e r - A \times a r - B \times b r$; ac proinde
 $r C = \frac{D \times d r + E \times e r - A \times a r - B \times b r}{A + B + D + E}$. Q. e. D.

65. Quapropter si omnia pondera sint
ad eandem axis rotationis R H, partem
posita, & quodlibet pondus vocetur p,
summa verò omnium ponderum S p; præ-
terea si distantia à centro rotationis di-
catur x, ac proinde factum cujusque pon-
deris in suam à centro rotationis distan-
tiam sit x p, & omnium factorum summa
f x p; distantia communis centri gravi-
tatis omnium ponderum à centro rotationis
erit generaliter S x p: Si verò pon-
dera fuerint ad diversas axis rotationis
r h, partes posita, & distantia cujuslibet
ponderis à centro rotationis r, vocetur
x, singula verò pondera quæ sunt ad par-
tem r e, posita, dicantur p, eorumque
summa sit S p; insuper singula pondera ad
partem R r, sita dicantur q, & eorum
summa sit S q; distantia communis cen-
tri gravitatis omnium ponderum à centro
rotationis r, erit $f x p - f x q$; $f p +$
 $f q$, vel $f x q - f x p$; $f p + f q$; un-
de si $S x p = S x q$, manifestum est cen-
trum rotationis idem esse cum centro gra-
vitatatis.



66. Harumce formularum auxilio, cen-
tra gravitatis figurarum curvarum repe-
riun-

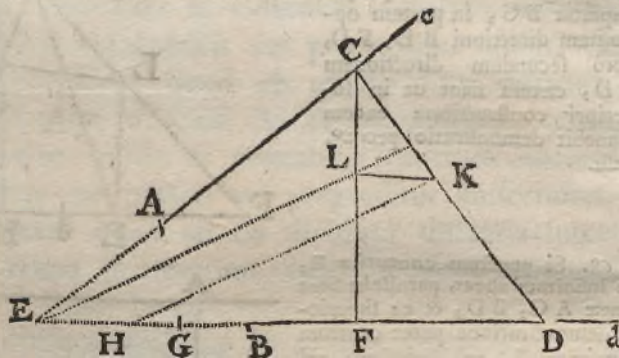
(P) Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione datâ, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in li-

LEGES
MOTVS.

riuntur; Nam si curvæ MRM , axis RP , quo ordinatæ $MMmm$, bifariam dividuntur, ut vectis habeatur, vertexque R , ut centrum rotationis & singula elementa qualia sunt $MMmm$, ut pondera vecti appensa considerentur, distantia centri

gravitatis C , à centro rotationis seu vertice R , erit (per primam formulam) æqualis summæ factorum ex singulis elementis $MMmm$, in suam à vertice R , distantiam per summam eorundem elementorum divisâ.

(P) 67. Duo corpora C & D , æquabiliter moveantur in lineis rectis AC , BD , positione datis, jungaturque recta CD , & itâ dividatur in K , ut sit DK , ad CK , ut corpus C , ad corpus D ; punctum K , quod est centrum gravitatis corporum C & D , (60) vel quiescet vel movebitur uniformiter in lineâ rectâ positione datâ.... Dem... concurrant lineæ AC & BD , in E .



in E . 1^o. Corpora C & D , ex punctis fixis A & B , in eandem plagam proficiantur & iisdem temporibus ad puncta C & D , perveniant, ac proinde spacia AC & BD , erunt in ratione datâ velocitatum (5). In BE , capiatur BG , ad AE , in ratione datâ BD , ad AC , & cum data sit AE , dabitur quoque linea BG ; sit FD , semper æqualis datæ EG , erit $EF = GD$, & quia $BG : AE = BD : AC$, (per const.) erit $BG + BD$, seu $GD : AE + AC$, seu $EC = BD : AC$, adeoque $AC : BD = EC : GD$, seu EF ; est igitur EC ad EF ; in ratione datâ, & propterea ex datis angulo CEF , & laterum EC , EF , ratione, dabitur specie triangulum $EF C$, id est dantur tres anguli. Deindè fecetur CF , in L , ut sit CL , ad CF , in ratione datâ CK , ad CD , id est in ratione corporis D , ad summam corporum $C + D$; & quia in triangulo $EF C$, specie dato datur ratio laterum EF , FC , dataque est ratio CF , ad FL , dabitur quoque ratio ex his duabus composita EF , ad FL , adeoque ob angulum $EF C$, etiam datum dabitur specie triangulum EFL ; Quare dum progrediuntur corpora C & D , punctum L , semper locabitur in rectâ EL , positione datâ; utpote quæ est basis trianguli EFL ,

in quo angulus F , idem constanter manet, & latus EF , positione datum ad latus FL , datam habet rationem. Junge LK , & quia $CL : CF = CK : CD$ (per const.), similia erunt triangula CLK , CFD , & ob datam $FD = EG$, & datam rationem FD , ad LK , seu CD , ad CK ; dabitur LK , magnitudine; lineæ LK , æqualis capiatur EH , & ductâ HK , erit semper $ELKH$, parallelogrammum, ob LK , æqualem & parallelam ipsi LH , locabitur ergò punctum K , in parallelogrammi illius latere HK , quod positione datum est; nam latus EL , positione, latus verò EH , positione & magnitudine datur. Quare punctum K , seu centrum gravitatis in lineâ rectâ positione datâ progreditur. Quoniam verò, ex demonstratis, triangula CEF , LEF , specie, & tria latera EC , EL , EF , positione data sunt, manifestum est rationem rectæ EL , seu lineæ æqualis HK , ad EC , datam esse. Verum quia punctum C , uniformiter movetur (per hyp.) uniformiter crescit recta EC , ergò pariter recta HK , uniformiter augetur, adeoque punctum K , æquabiliter progreditur in lineâ rectâ HK , positione datâ. Q. e. 1^o. demonstrandum....

2^o. Cor-

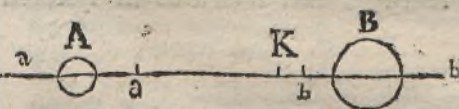
dè m ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quocunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione datâ. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in datâ ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in datâ ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, ideoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

(1) Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium cum distantia centrorum utriusque à communi gravitatis centro sint reciprocè ut corpora; erunt motus relativi

cor-

modo demonstrari posset centrum gravitatis H, moveri in plano ad assumptum perpendiculari; necesse igitur est ut centrum illud H, moveatur in communi illorum planorum ad alia pro lubitu assumpta perpendicularium interfectione, quæ cum sit linea recta HK, positione data, & punctum h, per rectam h k, uniformiter progrediatur, punctum H, æquabiliter fertur in lineâ HK. In omni igitur casu centrum commune gravitatis duorum corporum quæ motu uniformi per lineas rectas positione datas progrediuntur, semper quiescit vel movetur uniformiter in rectâ positione datâ.

Tom. I.

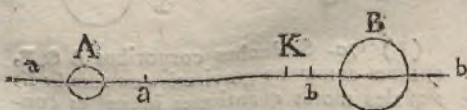


(1) 70. Si duobus corporibus A & B, quorum commune gravitatis centrum sit K, æquales motus quantitates in partes contrarias de novo imprimantur, quibus eodem tempore percurrunt spatia A a, B b, centri gravitatis status non mutatur; Cum enim K, sit commune centrum gravitatis corporum A & B, (per hyp.) erit $A : B = KB : KA$ (60) & quia impressa quantitates motus (6) $A \times A a, B \times B b$ æqua-

F

AXIOMA-
TA, SIVE

corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud à motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque ideo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum; & reliquorum, quibuscum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; distantia autem horum duorum centrorum dividitur à communi corporum omnium centro in partes summis totalibus corporum quorum sunt centra reciproce proportionales, ideoque centris illis duobus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum servat etiam statum suum: manifestum est quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter se nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem systemate actiones omnes corporum inter se vel inter bina sunt corpora, vel ab actionibus inter bina compositæ; & propterea communi omnium centro mutationem in statu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi à viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur de

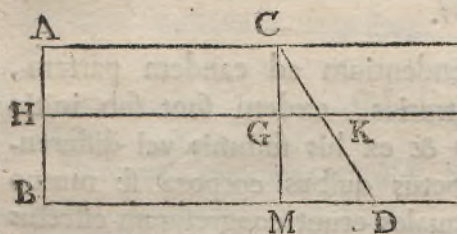


æquales sunt (per hyp.), erit etiam $A : B = B b : A a$, adeoque $K B : K A = B b : A a$, & componendo vel dividendo $K b : K a = B b : A a = A : B$; dum igitur corpora A & B, ad puncta a & b, motibus impressis perveniunt, centrum K,

immutum remansit (60), ac proinde ab æqualibus motuum mutationibus in contrarias partes factis non mutat statum suum motus vel quietis. Quapropter cum mutua corporum actio (per leg. 2. 3.) æquales mutationes in utroque corpore versus partes contrarias producat, commune gravitatis centrum duorum corporum ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem.

de hoc statu. (f) Est igitur systematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis solitarii, quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii seu

LEGE'S
MOTUS.



(f) 71. Motus progressivus seu corporis solitarii seu systematis corporum ex motu centri gravitatis semper æstimari debet... Dem.... 1º. Corpora duo A & B, in lineis AC & BD, parallelis progrediantur cum velocitatibus, ut AC, BD, eorumque commune gravitatis centrum H, per rectam HK, lineis AC & BD, parallelam feratur, ducatur CM, rectæ AB parallela. Quoniam B : A = AH : BH (60) erit B : B + A = AH : AB, & ob parallelas AB, & CM; GK & MD, erit AH : AB = CG : CM = GK : MD, adeoque GK : MD = B : A + B, & B x MD = A + B x GK; verum quia AC = HG = BM, erit HK = AC + GK, & BD = AC + MD; quare A + B x HK = A + B x AC + A + B x GK = A x AC + B x AC + B x MD, ob A + B x GK = B x MD, ergò A + B x HK = A x AC + B x MD, seu summa corporum A & B, in velocitatem centri gravitatis HK, ducta, æqualis est summæ factorum in singulis corporibus A & B, in suam velocitatem AC, BD.... 2º. Si corpora contrariis directionibus CA & BD, moveantur, negativa erit quantitas motus corporis A, propter contrariam directionem CA, adeoque differentia quantitatum motus corporum, in plagas oppositas tendentium, seu quod idem est, quantitas motus in eandem plagam, æqualis erit factò ex summâ corporum, in velocitatem centri gravitatis.... 3º. Si parallelæ AC, BD, ad se mutuo acce-

dant tandemque coincidunt, eadem semper manet demonstratio, quæ proinde etiam obtinet, dum corpora in eadem rectâ feruntur.... 4º. Si corpora non moveantur in lineis parallelis nec in eodem plano, uniuscujusque ponderis directio ac velocitas in duas alias resolvatur, quarum una sit viæ centri gravitatis parallela, altera verò ipsi perpendicularis, & ex demonstratis liquet summam quantitatum motus corporum in plagam versus quam movetur centrum gravitatis esse æqualem factò ex summâ corporum in velocitatem centri gravitatis.... 5º. Si æquabilis non sit corporum motus, sed quâcumque ratione acceleretur vel retardetur, temporibus infinite parvis tanquam æquabilis spectari potest, iisque tempusculis summa quantitatum motus corporum æqualis est factò ex summâ corporum in velocitatem centri gravitatis; unde quovis tempore quantitas motus singulorum corporum æqualis est quantitati motus quam habuissent omnia corpora, si communi velocitate centri gravitatis simul lata fuissent.... 6º. Si trium corporum systema moveatur, duo ex hisce corporibus in suo gravitatis centro coacta fingi possunt (ex Dem) ac proinde trium plurimve corporum aut etiam ejusdem corporis partium systema ad duorum duntaxat corporum systema reducitur; ergò quantitas motus progressivi seu corporis solitarii seu systematis corporum, ex motu centri gravitatis æstimari debet. Q. e. D.

72. Coroll. 1.... Si differentie quantitatum motus versus partes contrarias in systemate corporum sit nihilo æqualis, commune centrum gravitatis quiescit; si inæqualis est progreditur in eam partem versus quam prævalet motus.

73. Coroll. 2.... Motus systematis corporum in plagam datam habetur, si centri gravitatis motus in duos motus resolvatur, quorum unus in plagam datam dirigatur, alter verò sit ipsi perpendicularis; nam summa corporum ducta in ve-

AXIOMA-
TA, SIVE

seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

COROLLARIUM V.

(^r) Corporum dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum sine motu circulari.

Nam differentiarum motuum tendentium ad eandem partem, & summæ tendentium ad contrarias, eadem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi) & ex his summis vel differentijs oriuntur congressus & impetus quibus corpora se mutuo feriunt. Ergo per Legem II. æquales erunt congressuum effectus in utroque casu; & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo se habent in Navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

Si corpora moveantur quomocunque inter se, & à viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur; per-

locitatem centri gravitatis versus datam directionem exponit quantitatem motus totius systematis in eandem partem progredientis.

(^r) 74. Si navi quiescenti in quâ continentur corpora variis modis agitata, motus in directum æquabilis imprimatur, omnia hæc corpora navis velocitatem æquæ participant (leg. 1. 2.), adeoque singulis corporibus additur in eandem plagam æqualis velocitas, ac proinde motus navi impressus respectivas corporum velocitates non mutat; quare differentiarum velocitatum in corporibus quæ ad eandem partem tendunt, & summæ velocitatum in corporibus quæ ad partes contrarias tendunt, eadem manent antè & post motum navi impressum; sed ex his summis vel differentijs quæ sunt respectivæ corporum velocitates, oriuntur congressus & ictus magnitudines quibus corpora se mutuo

feriunt; nam si corpus aliquod M, velocitate C, in corpus quiescens m, incurrat, eadem est ictus magnitudo ac si utriusque corpori nova velocitas c, in eandem partem accederet, & corpus M, cum velocitate C + c, in corpus m, velocitate c, motum impingeret; corpus enim M, in m, non agit per velocitatem c, utriusque corpori communem, sed per solam velocitatum differentiam C + c - c, seu C; hæc autem differentia est ipsamet velocitas quæ corpus M, in aliud m, quiescens agit. Idem ergo erunt congressus ac proinde æquales congressuum effectus in utroque casu (per leg. 2.), & propterea manebunt motus respectivi in uno casu æquales motibus respectivis corporum in altero; si autem motus circularis navi imprimeretur, corpora, propter vim centrifugam (18) in varias partes cum variâ velocitate propellerentur.

pergent omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis non essent incitata.

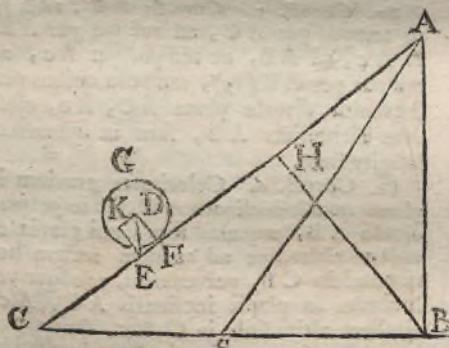
LEGES
MOTUS

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitibus movendorum corporum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per legem I, ideoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Scholium. (a)

Hactenus principia tradidi à mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per leges duas primas & corollaria.

(a) 75. Vis acceleratrix gravitatis, quæ corpus in plano ad horizontem inclinato juxta plani directionem urgetur, est ad vim gravitatis acceleratricem quæ secundum directionem horizonti perpendiculararem sollicitatur, ut altitudo plani ad ipsius longitudinem . . . Dem . . .



Globus G, plano AC, ad horizontem CB, inclinato incumbat; ex A, ad horizontem CB, demittatur perpendicularum AB, & ex centro D, globi ad planum AC, ducatur recta DE, perpendicularo AB, parallela quæ exponat vim gravitatis acceleratricem quæ globus secundum directionem DE, horizonti perpendiculararem urgetur; vis illa, DE, in duas vires resolvatur (41), quarum altera DF, sit ad planum AC, normalis quæ proin-

dè tota plano sustinetur, altera verò DK; seu FE, plano parallela quæ solâ globus ad motum secundum directionem plani AC, sollicitatur, & erit vis acceleratrix juxta plani inclinati directionem agens, ad vim acceleratricem perpendiculariter sollicitantem, ut EF, ad DE; sed quoniam triangula EFD, ABC, ob parallelas DE, AB, & angulos rectos F & B, æquales, similia sunt, est FE:DE=AB:AC. Vis igitur acceleratrix gravitatis secundum directionem plani inclinati AC, est ad vim gravitatis acceleratricem secundum directionem horizonti perpendiculararem, ut plani inclinati altitudo AB, ad ipsius longitudinem AC. Q. e. D.

76. Coroll. 1 Quoniam vis acceleratrix gravitatis juxta directionem DE, horizonti perpendiculararem constans est (76); & vis acceleratrix FE, secundum directionem plani inclinati AC, est ad vim DE, in ratione datâ AB, ad AC; vis acceleratrix FE, constans quoque erit; ea igitur omnia quæ de motibus vi acceleratrice constanti genitis demonstrata sunt, transferre licet ad motus vi gravitatis acceleratrice in plano inclinato productos; nempe. 1º. Grave per planum inclinatam motu uniformiter accelerato descendit, & motu uniformiter retardato ascendit (25). 2º. Velocitates sunt ut tempora quibus acquiruntur (25); spacia è quiete cadendo descripta sunt in ratione duplicatâ temporum quibus percurruntur, itemque

AXIOMA-
TA; SIVE

laria duo prima *Galilæus* invenit descensum gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum projectilium fieri in parabola; conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aëris resistentiam aliquantulum retardantur. Corpore cadente gravitas uniformis, singulis temporis particulis æqualibus æqualiter agendo imprimit vires æquales in corpus illud, & velo-

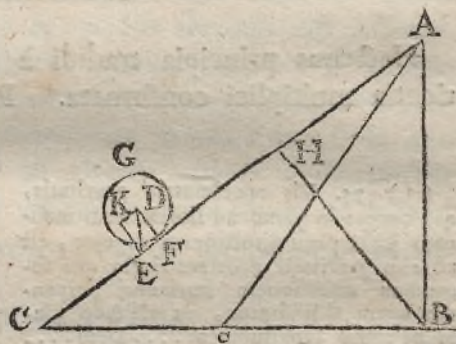
cita-

que velocitatum quæ his temporibus acquiruntur; tempora verò itemque velocitates sunt in ratione subduplicatâ spatiorum (27, 28). 3^o. Spatium à gravi in plano inclinato percursum ab initio motus computatum, dimidium est illius quod eodem tempore ab eodem mobili uniformiter percurri potest cum velocitate ultimo acquisitâ (29).

77. Coroll. 2. Quia vires acceleratrices constantes sunt inter se in ratione velocitatum, quas eodem tempore producant (13), velocitas lapsu perpendiculari per *AB*, acquisita erit ad velocitatem eodem tempore in plano inclinato acquisitam, ut longitudo plani, *AC*, ad ipsius altitudinem *AB* (75).

78. Coroll. 3. Si ex puncto *B*, perpendiculari *AB*, ad planum inclinatum agatur perpendicularis *BH*; spatium *AH*, in plano inclinato eodem tempore percurritur, quo lapsu perpendiculari describitur *AB*; nam ob similitudinem triangulorum *AHB*, *ABC*; $AH : AB = AB : AC$, adeoque *AH*, est ad *AB*, ut velocitas in plano inclinato acquisita ad velocitatem, eodem tempore in perpendicularo *AB*, acquisitam (77). Sed velocitates motu uniformiter accelerato acquisitæ, sunt ut dupla spatia, seu, quod idem est, ut spatia eodem tempore percurfa (76); ergo *AH*, *AB*, sunt spatia eodem tempore percurfa.

79. Coroll. 4. Tempus quo planum *AC* percurritur, est ad tempus quo percurritur ipsius altitudo *AB*, ut longitudo plani *AC*, ad ejus altitudinem *AB*; tempus enim per *AC*, est ad tempus per *AH*, in ratione subduplicatâ *AC*, ad *AH* (76). Sed ob continuam rectorum *AC*, *AB*, *AH*, analogiam *AC*, est ad *AB*, in ratione subduplicatâ *AC*, ad *AH*; tempus igitur per *AC*, est ad tempus per *AH*, hoc est (78), ad tempus per *AB*, ut *AC*, ad *AB*.



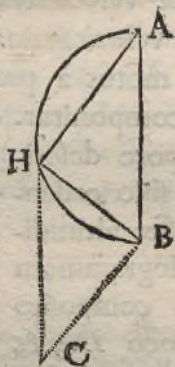
80. Coroll. 5. Cum sit *AC*, ad *AB*, ut tempus per *AC*, ad tempus per *AB*; & *AC*, ad *AB*, ut tempus per *AC*, ad tempus per *AB* (79), tempora quibus percurruntur diversa plana *AC*, *Ac*, ejusdem altitudinis *AB*, sunt ut planorum longitudines.

81. Coroll. 6. Celeritates gravium in plano quovis inclinato *AC*, & in perpendicularo *AB*, æquales sunt, ubi gravia ex eadem altitudine ad eandem rectorum horizontalem *CB*, pervenerint, adeoque velocitates in planis inclinatâ *AC*, *Ac*, ejusdem altitudinis in *C* & *c*, sunt æquales; est enim velocitas in *B*, ad velocitatem in *H*, ut *AB* ad *AH* (ea enim spatia eodem tempore descripta sunt) & ob similitudinem triangulorum *AHB*, *ABC*, sicut *AC* ad *AB*: velocitas autem in *C*, est ad velocitatem in *H*, in ratione subduplicatâ *AC*, ad *AH*; hoc est, ob continuam analogiam rectorum *AC*, *AB*, *AH*, in ratione *AC*, ad *AB*; quare velocitas in *B*, est ad velocitatem in *H*, ut velocitas in *C*, ad eandem velocitatem in *H*, adeoque velocitas in *C*, æqualis est velocitati in *B*.

citates æquales generat: & tempore toto vim totam imprimit & velocitatem totam generat tempori proportionalem. Et spatia temporibus proportionalibus descripta, sunt ut velocitates

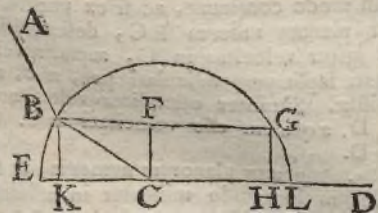
LEGES
MOTUS

82. Coroll. 7. Tempus descensus per chordas quilibet AH, HB, circuli cujus diameter, AB, est ad horizontem perpendicularis, æquale est tempori descensus per totam diametrum AB, ac proinde tempora descensus per omnes chordas sunt æqualia; Cum enim angulus AHB, in semicirculo rectus sit, tempus descensus per AH, æquale est tempori descensus per AB,



(78), & ducta HC, diametro AB, æquali & parallelâ junctâque CB, erit ob, angulum HBC, rectum, tempus per HB, æquale tempori per HC, seu per AB.

83. Si corpus in curvâ immotâ incidit, vis quâ singula curvæ puncta premit, cum vi finitâ quâ movetur corpus comparata, major non est quantitate infinitesimâ primî ordinis; vis seu celeritas quam in singulis curvæ punctis amittit, major non est quantitate infinitesimâ secundi ordinis; tandem vis seu celeritas per finitum curvæ arcum amissa major non est quantitate infinitesimâ primî ordinis, adeoque corpus in curvâ progreditur eadem celeritate finitâ ac si nihil omnino virium amitteret....

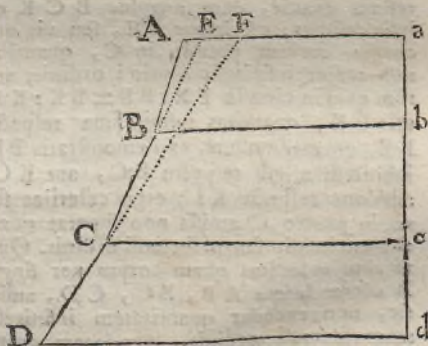
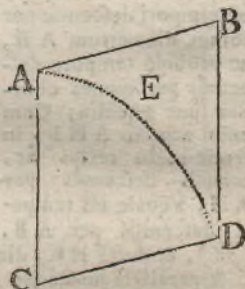


Dem... [Curva quælibet, ut notum est, considerari potest tanquam polygonum ABCD, ex innumeris atque infinitesimis lateribus rectis AB, BC, CD, compositum, quorum duo quævis BC, CD, angulum comprehendunt à duobus angu-

lis rectis, non nisi quantitate infinitesimâ deficientem, ita ut producto latere CD, in E, angulus externus BCE, sit infinitesimus. Centro C, & radio CB, describatur semicirculus E BGL, ex puncto B verò demittatur in rectam ED, perpendicularis BK, & completo rectangulo KF, motus corporis latere BC, expositus, in binos BK, BF, seu KC, resolvitur (coroll. 1. Newt.). His positis manifestum est (51) vim seu celeritatem quâ corpus in latere CD, incurrit, illudque premit seu percutit, perpendiculari FC, sive BK, representari; celeritatem post ictum, (supponendo corpora esse elaterio destituta) rectâ KC, seu CH, exhiberi, & celeritatem ex impactu in C, amissam rectâ EK, exponi, cum EK, sit differentia rectarum BC, KC; hoc est, celeritatum antè & post impactum. Jam si angulus BCK, finitæ quantitatis esset, recta BK, finitam haberet ad rectas BC, KC, rationem, quæ decrescente angulo BCK, semper minuitur adeoque infinitesima evadit, dum angulus BCK est infinitesimus; est igitur BK, seu vis quâ corpus curvam premit in C, quantitas non major infinitesimâ primî ordinis; verum quia in circulo $E K : B K = B K : K L$, erit EK, quantitas infinitesima respectu BK, quemadmodum, ex demonstratis BK, infinitesima est respectu BC, aut KC, adeoque respectu KL; ergo celeritas seu vis in puncto C amissa non superat quantitatem infinitesimam secundi ordinis. Quare cum velocitas quam corpus per singula curvæ latera AB, BC, CD, amittit, non excedat quantitatem infinitesimam secundi ordinis, per latera curvæ numero infinita, hoc est, per arcum curvæ finitum, non potest celeritatem amittere majorem quantitate infinitesimâ primî ordinis quæ est summa quantitatum infinitesimarum secundi ordinis; eâ igitur quantitate neglectâ, corpus eodem modo motum suum in curvâ continuat ac si nihil virium amississet. Q. e. D.

AXIOMA-
FA, SIVE

tes & tempora conjunctim; id est in duplicata ratione temporum. Et corpore sursum projecto gravitas uniformis vires imprimit & velocitates aufert temporibus proportionales; ac tempora ascendendi ad altitudines summas sunt ut velocitates auferendæ, & altitudines illæ sunt ut velocitates ac tempora conjunctim: seu in duplicata ratione velocitatum. Et corporis secundum rectam quamvis projecti motus à projectione oriundus cum motu à gravitate oriundo componitur. Ut si corpus *A* motu solo projectionis dato tempore describere posset rectam *AB* & motu solo cadendi eodem tempore describere posset altitudinem *AC*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & corpus illud motu composito reperietur in fine temporis in loco *D*; & curva linea *AED*, quam corpus illud describet, erit parabola quam recta *AB* tangit in *A*, & cujus ordinata *BD* est ut *ABq*. Ab iisdem legibus & corollariis pendent demonstrata



84. Si grave ex quiete in *A*, per plana contigua *AB*, *BC*, *CD*, descendat, & flexus seu anguli *B*, *C*, motui non officiant, velocitas gravis per plana inclinata descendens, æqualis est velocitati quam lapsu perpendiculari haberet in pari ab horizontè distantia Dem Ductis rectis *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, hq-

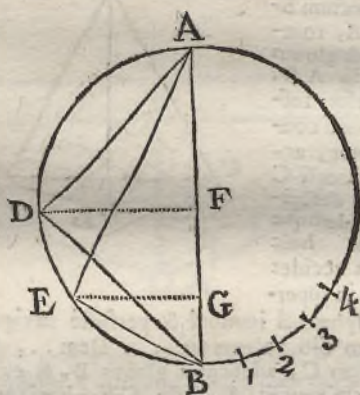
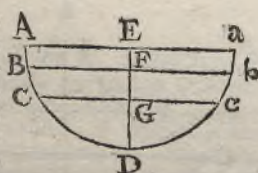
rizonti parallelis & perpendicularo, a *d*, demisso, producantur *CB*, *DC*, donec occurrant rectæ *Aa*, in *E* & *F*; velocitas lapsu per *AB*, acquisita æqualis est velocitati quæ acquireretur lapsu per *EB*, aut etiam per *AB*, (81), adeoque cum flexus *B*, motui non officiat (per hyp.) grave motum suum per planum *BC*, eodem modo continuat, ac si ex puncto *E*, per planum unicum *EC*, descendisset; est igitur velocitas in *C*, æqualis velocitati lapsu perpendiculari per, a *c*, acquisita. Similiter ostenditur velocitatem in *D* æqualem esse velocitati in *d*. Q. e. D.

85. Augeatur planorum numerus, & singulorum longitudo minuatur in infinitum ut linea *ABCD* curva evadat, & quia anguli *B*, *C*, *D*, velocitati corporis non officiant (83), manifestum est gravis per curvam descendens velocitatem in singulis curvæ punctis *B*, *C*, *D*, æqualem esse velocitati lapsu perpendiculari acquisita in punctis correspondentibus *b*, *c*, *d*.
86, Si

de temporibus oscillantium pendulorum, suffragante horologio-
rum experientiâ quotidianâ: Ex his iisdem & lege tertiâ *Chris-*
trophorus Wrennus Eques auratus, *Johannes Wallisius S. T. D.* &
Christianus Hugenius, ætatis superioris geometrarum facile prin-
cipes, regulas congressuum & reflexionum durorum corporum
seorsim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Re-*
giâ communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino cons-
pirantes: & primus quidem *Wallisius*, deinde *Wrennus* & *Hu-*
genius inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata est à
Wrenno coram *Regiâ Societate* per experimentum pendulorum: quod
etiam

86. Si grave
descendat per
curvam quamli-
bet ABCD,
ductis lineis Aa,
Bb, Cc, hori-
zonti parallelis,
& ex puncto
curvæ infimo D, rectâ DE, ad hori-
zontem normali, patet (85) gravis per
arcum AD, vel a D, descendens ean-
dem esse velocitatem in punctis æquè al-
tis B & b, C & c. Quare cum ex A,
pervenit ad punctum infimum D, ex im-
petu per lapsum acquisito ascendit per ar-
cum Da, ad punctum a, æquè altum,
in quo omnis velocitas extinguitur, & in
punctis correspondentibus B & b, C & c,
eandem tam in ascensu quam in descen-
su habet velocitatem (26). Si verò ar-
cus Da, arcui DA, similis & æqualis
fuerit, singuli arcus æquè alti CD & Dc,
BD & Db, AD & Da, æqualibus res-
pectivè temporibus percurrentur (26).

87. Velocitas gravis per quemvis cir-
culi arcum EB, descendens in puncto
infimo B, est ad velocitatem quam lapsu
perpendiculari per totam diametrum AB
acquireret, ut chorda EB, ad diametrum
AB..... Dem... Ductâ EG, hori-
zontis parallelâ adeoque ad diametrum
AB, perpendiculari, velocitas per arcum
EB, acquisita, æqualis est velocitati ac-
quisitæ per GB (85). Est ergò ad velo-
citatem per AB, acquisitam in ratione
subduplicatâ GB, ad AB (28). Sed
Tom. I.



propter triangula rectangula similia AEB,
BGE, $GB : EB = EB : AB$, adeoque
EB, ad AB, in ratione subduplicatâ GB
ad AB; velocitas igitur per arcum EB,
acquisita in B, est ad velocitatem per
AB, acquisitam ut chorda EB, ad dia-
metrum AB. Q. e. D.

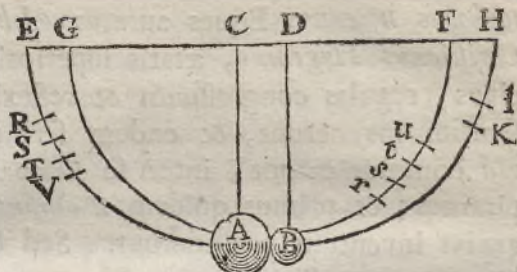
88. Coroll. Ductâ quavis alterâ chor-
dâ DB, erit etiam velocitas per arcum
DB, acquisita in B, ad velocitatem per
diametrum AB, ut DB, ad AB, ac
proindè velocitates per arcus DB, EB,
acquisitæ in puncto infimo B, sunt inter
se ut horum arcuum chordæ; undè si ca-
pantur arcus B1, B2, B3, B4, quo-
rum chordæ sint respectivè ut 1. 2. 3. 4.
velocitas gravis per arcus illos descenden-
tis in puncto B, erunt ut 1. 2. 3. 4.

G

89. Si

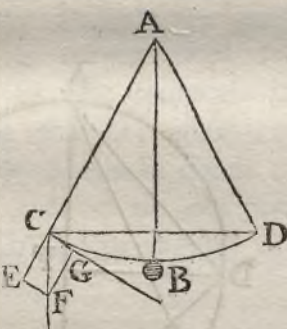
AXIOMA-
TA, SIVE

etiam *Clarissimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus est. Verùm, ut hoc experimentum cum theoriis ad amussim congruat, habenda est ratio, cum resistantiæ aëris, tum etiam vis elasticæ concurrentium corporum. Pendant corpora spherica *A*, *B* filis parallelis & æqualibus *AC*, *BD*, à centris *C*, *D*. His centris &

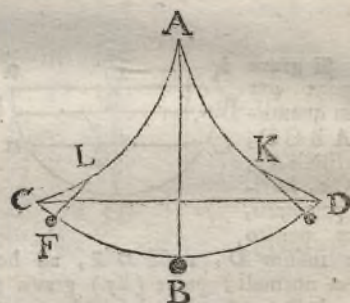


inter.

89. Si pendulum *B*, circa punctum fixum *A*, rotetur, & globus *B*, filo *AB*, appensus infra puncti consideretur, arcum circuli *CBD*, describet, idemque globo huic motus accidet ac si in super-



ficie spherica immota & perfecte lavigata sublato filo volveretur Dem Ad punctum *C*, adducatur globus *B*, & exinde demittatur; & recta *CF*, horizonti perpendicularis vim gravitatis acceleratricem in perpendiculari exponat; ea vis resolvatur in duas vires, quarum una exhibeatur recta *CE*, ad arcum seu tangentem in *C*, perpendiculari; altera verò tangente *CG*; vis *CE*, quæ filum *AC*, directe trahitur ad globi motum nihil confert & solâ vi ut *CG*, urgetur; arcus verò *CBD*, considerari potest ut polygonum cujus latus unum in *C*, positionem habet tangentis *CG*, & si globus per planum *CG*, vi gravitatis urgeatur, sublato filo vis *CE*, plano *CG*, tota sustinetur, & globus solâ vi *CG*, ad motum in plano *CG*, sollicitatur. Cum igitur idem in omnibus punctis arcus *CBD*, eodem modo demonstrari possit, patet filum *AC*, superficiei *CBD*, vices subire, & in utroque casu motum globi per arcum *CBD*, eadem ratione perfici. Q. e. D.



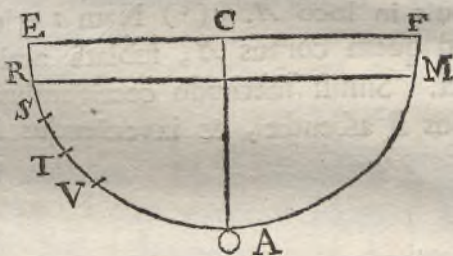
90. Coroll. 1. Pendulum *AB*, inter duas laminas curvas *ALC*, *AKD*, immotas & sese contingentes in *A*, ita oscilletur ut filum *AB*, in situ ad horizontem perpendiculari utramque laminam tangat in *A*; dum verò oscillatur pendulum, curvis laminis filum circumplicetur easque perpetuò tangat ut in *L* & *K*; per hanc fit ad laminas applicationem continuo impeditur motus penduli in circulo, aliamque curvam *CBD*, describere cogitur; & eodem quo usi fuimus ratiocinio (89), demonstratur pendulum in hæc curvâ eodem modo moveri ac si grave *B*, libere & absque filo per curvam immotam & perfecte lavigatam *CBD*, incederet.

91. Coroll. 2. Quapropter omnia quæ de motu gravium in curvis superficibus demonstrata fuere, motui penduli per easdem curvas oscillantis conveniunt. Nempe 1^o. Penduli velocitas semper æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per altitudinem perpendiculari arcui percursu correspondentem (85). 2^o. Pendulum ex *C* demissum, vi gravitatis urgeatur

intervallis describantur semicirculi EAF , GBH radiis CA , DB bisecti. (b) Trahatur corpus A ad arcus EAF punctum quodvis R , & (subducto corpore B) demittatur inde, redeatque post unam oscillationem ad punctum V . Est RV retardatio ex resistantia aeris. Hujus RV fiat ST pars quarta sita in medio, ita scilicet ut RS & TV æquentur, sitque RS ad ST ut 3 ad 2. Et ista ST exhibebit retardationem in descensu ab S ad A quam proximè. Restituatur corpus B in locum suum. Cadat corpus A de puncto S , & velocitas ejus in loco reflexionis A sine errore sensibili tanta erit, ac si in vacuo cecidisset de loco T . Exponatur igitur

LEGES
MOTUS.

te ad punctum infimum B , descendet, & ex impetu concepto, per arcum BD , ascendet ad eandem altitudinem D , ibique omni velocitate amissa, vi gravitatis impellente ad punctum infimum B , relabatur, amissamque recuperans velocitatem redibit ad punctum C , atque ita continuas oscillationes ita & reditu in curvâ CBD , perficiet (86).



92. Coroll. 3. Si nulla foret medii resistantia, nullaque circa laminas incurvas aut centrum rotationis frictio, æquales & perpetuæ forent pendulorum oscillationes; verum has ob causas singulis vibrationibus, licet insensibiliter, minuitur penduli velocitas, arcusque continuo breviores describit ac tandem omninò quiescit.

93. Coroll. 4. Velocitates ejusdem penduli in circuli peripheriam excurrentis, sunt in puncto infimo ut arcuum descriptorum chordæ (88).

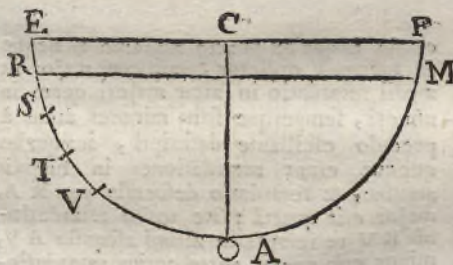
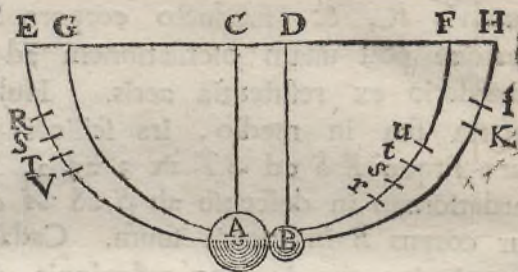
(b) 94. Trahatur corpus A , ad arcus EAF , punctum quodvis R , & demittatur inde, sublata medii resistantiâ ad eandem altitudinem M , ascendere & rursus ad punctum R , redire debet (92). Cum autem post unam oscillationem ex itu & reditu compositam perveniat (ex hyp.) ad punctum V , arcus RV exponet medii retardationem in duplici ascensu & descensu; quare ut habeatur medii retardatio in uno tantum descensu sumenda est quarta pars totius retardationis id est quarta pars arcus RV , dummodo ille des-

centus neque ex puncto supremo R neque ex infimo V ordiatur, nam cum major sit medii retardatio in arcu majori quam in minori, semperque fiant minores arcus à pendulo oscillante descripti, inæquales quoque erunt retardationes in singulis arcibus, & retardatio descensus per RA , major erit quartâ parte totius retardationis RV ut retardatio ultimi ascensus AV , minor erit quartâ parte totius retardationis RV . Hoc autem aut simili calculo determinavit Newtonus punctum S tale ut retardatio in descensu per SA sit quarta pars totius retardationis RV . Dicatur arcus RA , 1 , arcus RV , $4b$, arcus quæsitus SA x ; sintque retardationes arcibus descriptis proportionales, erit arcus SA (x) ad arcum RA (1) ut retardatio arcus SA quæ statuitur esse b , seu quarta pars totius RV , ad retardationem primi arcus RA quæ erit $b : x$. Quærantur successivè

G 2 sive

AXIOMA-
TA, SIVE

tur hæc velocitas per chordam arcus TA . Nam velocitatem penduli in puncto infimo esse ut chordam arcus, quem cadendo descripsit, propositio est geometricis notissima. Post reflexionem perveniat corpus A ad locum s , & corpus B ad locum k . Tollatur corpus B & inveniatur locus v ; à quo si corpus A demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum r , fit st pars quarta ipsius rv sita in medio, ita videlicet ut rs & tv æquantur; & per chordam arcus tA exponatur velocitas, quam corpus A proxime post reflexionem habuit in loco A . (c) Nam t erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus A , sublatâ aeris resistantiâ, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus k , ad quem corpus B ascendit, & inveniendus locus l , ad quem corpus illud ascen-



sive retardationes secundi, tertii, quarti-
ve arcus eâdem ratione; arcus autem se-
cundus est æqualis primo RA , dempta
ejus retardatione $b : x$. Tertius arcus æqua-
lis secundo demptâ ejus retardatione, &
sic deinceps, omnes verò illæ retardationes
simul sumptæ æquabuntur toti retardatio-
ni RV seu $4b$; unde fit æquatio ex quâ
valor arcus SA , seu x , obtinebitur, per

approximationem autem inveniatur æqualis
 $1-3 : 2$. b , sumatur itaque RS æqualis
quartæ parti cum ejus semisse totius re-
tardationis RV , retardatio per arcum SA
erit æqualis ST quartæ parti totius re-
tardationis RV , ideoque cadat corpus ex
puncto S , ejus celeritas in A eadem est
sine errore sensibili, ac si in vacuo de-
cidisset ex T .

(c) 95. t, (fig. Newt.), erit locus
verus & correctus ad quem corpus A , su-
blatâ aeris resistantiâ ascendere debuisset;
nam corpus A , ex t , in medio non resis-
tente descendens, in puncto infimo A ,
eam haberet velocitatem quâ posset ar-
cum At , ascendendo describere (91),
& quâ ob aeris resistantiam, non nisi ar-
cum As , (94) percurreret, ergò cum
post reflexionem ascendat ad s , eam ha-
bet in A velocitatem, quâ in medio non
resistente ad punctum t ascenderet.

ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia, perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus A (ut ita dicam) in chordam arcus TA , quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco A proximè ante reflexionem; deinde in chordam arcus tA , ut habeatur motus ejus in loco A proxime post reflexionem. Et sic corpus B ducendum erit in chordam arcus Bl , ut habeatur motus ejus proximè post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, invenienda sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem remtentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, putà pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directè occurrerent, æquales esse mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque ideo actionem & reactionem semper esse æquales. Ut si corpus A incidebat in corpus B quiescens cum novem partibus motus, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus B resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam ibant, A cum duodecim partibus & B cum sex, & redibat A cum duabus; redibat B cum octo, factâ detractioe partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius A subducantur partes duodecim & restabit nihil: subducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & sic de motu corporis B partium sex subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora ibant ad eandem plagam, A velocius cum partibus quatuordecim, & B tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergebat A cum quinque partibus; pergebat B cum quatuordecim, factâ translatione partium novem de A in B . Et sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex summâ motuum con-

AXIOMA-
TA, SIVE

spirantium & differentiâ contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in mensuris tribuerim difficultati peragendi singula satis accuratè. Difficile erat, tum pendula simul demittere sic, ut corpora in se mutuo impingerent in loco infimo *AB*; tum loca *s*, *k* notare, ad quæ corpora ascendebant post concursum. Sed & in ipsis corporibus pendulis inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis irregularis, errores inducebant.

Porro nequis objiciat regulam, ad quam probandam inventum est hoc experimentum, præsupponere corpora vel absolute dura esse, vel saltem perfectè elastica, cujusmodi nulla reperiuntur in compositionibus naturalibus; (^d) addo quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum à conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam si regula illa in corporibus non perfectè duris tentanda est, debet solummodo reflexio minui in certâ proportionem pro quantitate vis elasticæ. In theoriâ *Wrenni* & *Hugenii* corpora absolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congressus. (^e) Certius id affirmabitur de perfectè elasticis. (^f) In imperfectè elasticis velocitas reditus minuenda est simul cum vi elasticâ; propterea quod vis illa, (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub

(^d) 96. Experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus & non elasticis æque ac in duris & elasticis, ut potè non à conditione duritiei & elasticitatis, sed tantum ab actionis & reactionis æqualitate & oppositione pendentia; nam si regula illa in corporibus non perfectè elasticis tentanda est, ut ex ipsorum motibus antè conflictum inveniuntur motus post conflictum, debet solum modò reflexio minui in certâ proportionem, pro quantitate vis elasticæ (52).

(^e) 97. Certius id affirmabitur de perfectè elasticis; corpora enim perfectè dura seu quorum partes nullâ vi finitâ separari aut flecti possunt, nullâ quoque vi restitutivâ aut repulsivâ pollere videntur; adeoque cum nihil sine causâ fiat, corpo-

rum perfectè durorum concurrentium nulla videtur esse posse reflexio.

(^f) 98. In imperfectè elasticis, velocitas reditus minuenda est cum vi elasticâ, propterea quod vis illa, licet imperfecta, certa tamen ac determinata est, in iisdem corporibus, nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur; dum enim corporis elastici fibræ ex ictu flectuntur, si aliqua abrumpatur fibra, ea non sese restituit, adeoque vis corporis restitutiva minuitur; si verò fibræ extendantur, ut ferri lamina repetitis mallei ictibus in longum diducitur, pars ictus huic fibrarum extensioni adhibita, vi restitutivæ detrahatur. His causis addi potest instantius partium corporis percussus motus

sonæ

sub malleo patiuntur,) certa ac determinata sit (quantum sentio) faciatque ut corpora redeant ab invicem cum velocitate relativâ, quæ sit ad relativam velocitatem concursus in datâ ratione. Id in pilis ex lanâ arctè conglomeratâ & fortiter constrictâ sic tentavi. Primum demittendo pendula & mensurando reflexionem, inveni quantitatem vis elasticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis casibus concursuum, & respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativâ, quæ esset ad relativam velocitatem concursus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe; aliæ ex subere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto lex tertia quoad ictus & reflexiones per theoriam comprobata est, quæ cum experientiâ plane congruit.

LEGES
MOTUS.

In

sono ipso satis indicatus, qui in reflexionem non impenditur. Hæc materia variis Rizzeti experimentis illustratur in Commentariis instituti Bononiensis. Tria globulorum vitreorum paria sibi paravit Rizzetus; globuli primi paris diametrum habebant trium unciarum, secundi duarum, tertii unius, ita ut essent diversorum parium diametri inter se, ut 3. 2. 1. fecit ut globuli primi paris filo appensi simul congregarentur, notavitque velocitatem respectivam quam habuerunt vel antè vel post ictum, detractâ tamen more Newtoniano aëris resistentiæ; idemque tentavit tum in 2^o. tum in 3^o. pari. In 1^o. globulorum pari cum velocitas respectiva antè ictum fuisset 11, fuit post ictum 10; in 2^o. pari cum fuisset antè ictum 16, fuit post ictum 15; in 3^o. pari cum fuisset antè ictum 31, fuit post ictum 30. Unde velocitatis respectivæ defectus erat in primo pari 1:11. in 2^o. pari 1:16. in 3^o. pari 1:31; illi autem defectus sunt fere diametris 3, 2, 1. proportionales. Aliud experimentum tentavit Rizzetus. Chordam calybeam duos pedes longam horizontaliter positam variis modis tendebat, donec tandem repererit tres chordæ tensiones, quæ efficerent ut tempora quibus chorda pulsa sese restituebat,

forent ut 3. 2. 1. Eas autem tensiones se affectum esse ex graviore vel acutiori chordarum sono intelligebat; in singulis tensionibus globum eburneum cujus diameter erat duarum unciarum, filo decem pedes longo appensum & in medio tantisper complanatum in chordam demittebat, & detractâ aëris resistentiâ, velocitatem respectivam antè & post ictum notabat. Observavit autem velocitatem antè ictum esse ad velocitatem post ictum, ut 11, ad 10, in 1^a tensione, cum chorda pulsa restitueretur tempore 3; ut 16 ad 15 in 2^a tensione, cum chorda restitueretur tempore 2; tandem ut 31, ad 30, in 3^a tensione, cum chorda restitueretur tempore 1; unde concludit defectus singulos velocitatis post ictum, temporibus restitutionum esse proportionales. Manente igitur corporum homogeneorum magnitudine & figurâ, constans observatur ratio velocitatis respectivæ post ictum ad velocitatem respectivam antè ictum; sed mutatâ magnitudine, experimenta Rizzeti ostendunt defectus velocitatis respectivæ post ictum in globis homogeneis esse in ratione diametrorum, aut etiam in ratione temporum quibus globi compressi restituantur.

AXIOMA-
TA, SIVE

In attractionibus rem sic breviter ostendo. Corporibus duobus quibusvis A , B , se mutuo trahentibus, concipe obstaculum quodvis interponi, quo congressus eorum impediatur. Si corpus alterutrum A magis trahitur versus corpus alterum B , quam illud alterum B in prius A , obstaculum magis urgebitur pressione corporis A quam pressione corporis B ; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit pressio fortior, facietque ut systema corporum duorum & obstaculi moveatur in directum in partes versus B , motuque in spatiis liberis semper accelerato abeat in infinitum. Quod est absurdum & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debet systema perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obstaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. (§) Tentavi hoc in magnete & ferro. Si hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita, in aquâ stagnante juxta fluent; neutrum propellet alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebunt conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescent.

Sic etiam gravitas inter terram & ejus partes mutua est. Secetur terra FI plano quovis EG in partes duas EGF & EGI : & æqualia erunt harum pondera in se mutuo. Nam si plano alio HK quod priori EG parallelum sit, pars major EGI secetur in partes duas $EGKH$ & HKI , quarum HKI æqualis sit parti prius abscissæ EFG : manifestum est quod pars media $EGKH$ pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit,



(§) 99. Si magnes suberis frusto, similiterque ferrum alio suberis frusto imponantur, ut tam magnes quam ferrum in aquâ liberè stagnet, æquali motûs quantitate sibi mutuo obviam eunt, ita ut eorum celeritates sint in ratione ponderum

reciprocâ; dum verò ad contactum pervenerunt, in æquilibrio consistunt. Quare hoc experimento manifestum est æqualem esse ferri in magnetem & magnetis in ferrum actionem. Similiter si quis in cymbâ aquis innatante positus, cymbam alte-

sed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicam, suspendetur, & quiescet. Pars autem extrema HKI toto suo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam EGF ; ideoque vis quâ partium HKI & $EGKH$ summa EGI tendit versus partem tertiam EGF , æqualis est ponderi partis HKI , id est ponderi partis tertie EGF . Et propterea pondera partium duarum EGI , EGF in se mutuo sunt æqualia, uti volui ostendere. Et nisi pondera illa æqualia essent, terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.

Ut corpora in concursu & reflexione idem pollent, quorum velocitates sunt reciprocè ut vires insitæ: (^h) sic in movendis instrumentis mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum determinationem virium æstimatæ, sunt reciprocè ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ, quæ oscillante librâ sunt reciprocè ut eorum velocitates sursum & deorsum: hoc est pondera, si rectâ ascendunt & descendunt, æquipollent, quæ sunt reciprocè ut punctorum à quibus suspenduntur distantie ab axe libræ; sin planis obliquis aliisve admotis obstaculis impedita ascendunt vel descendunt obliquè, æquipollent, quæ sunt reciprocè ut ascensus & descensus, quâtenus facti secundum perpendicularum: idque ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in trochlea seu polyspasto vis manûs funem directè trahentis, quæ sit ad pondus vel directè vel obliquè ascendens ut velocitas ascensus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus. In horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum

alteram liberè fluitantem ope funis trahat, vel conto aliove instrumento repellat, cymbæ in partes contrarias cum æquali motûs quantitate ferentur, ita ut earum velocitates sint in ratione reciprocâ ponderum.

Tom. I.

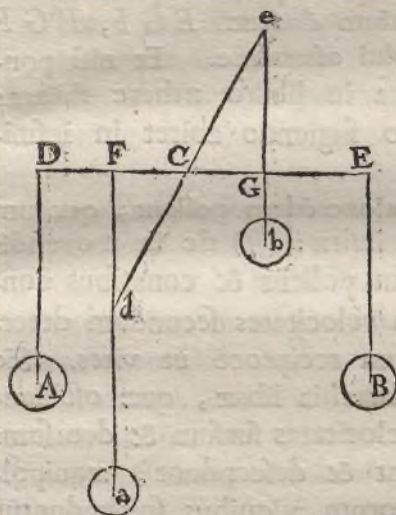
(^h) 100. In movendis instrumentis mechanicis, agentia idem pollent & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates secundum directionem virium æstimatæ sunt reciprocè ut vires ab soluta . . . Dem . . .

H

Dua

AXIOMA-
TA, SIVE

dum & impediendum, si sunt recprocè ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuò. (i) Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte ubi



Duæ potentia, seu, quod idem est, duo pondera ope machinæ cujuscvis datæ in se mutuò ita agant, ut pondus unum secundum propriam directionem moveri nequeat, quin pondus alterum contra propriam illius directionem rapiat; si loco machinæ datæ substituatur vectis cujus longitudo & hypomoclion talia sint, ut duo pondera data, vectis extremitatibus appensa, eadem celeritate ac in machinâ datâ se se mutuò moveant, iidem erunt in vecte & in machinâ datâ conatus ponderum in se mutuò, eadem ipsorum momenta; vis enim eadem requiritur ad eandem velocitatem secundum eandem directionem in iidem corporibus producendam. Itaque vectis DE, horizontalis, cum appensis ponderibus A & B, rotetur circa hypomoclion C, ut situm d e, obtineat, & producatur filum a d, usque ad F; pondus A, secundum propriam directionem percurrit spatium F d; & pondus B, contra propriam directionem eodem tempo-

re percurrit spatium Ge; adeoque horum ponderum velocitates sunt semper ut spatia F d, G e, eodem tempore percursa. Momentum ponderis a, est ut $a \times FC$; momentum ponderis b, est ut $b \times CG$ (47). Sed ob similitudinem triangulorum F C D, e C G; $FC : CG = F d : G e$. Ergo momenta ponderum a. & b, sunt inter se ut $a \times F d$, & $b \times G e$; seu sunt ut facta ex ponderibus in sua respective spatia eodem tempore percursa, adeoque etiam ut facta ex ponderibus in suas respective velocitates; quare si facta illa æqualia sint, aut quod idem est, si pondera seu vires sint recprocè ut velocitates secundum directiones virium æstimatæ, erit æquilibrium. Q. e. D.

101. Coroll. Cum ex demonstratis, momenta virium sint semper ut facta ex vi quâlibet in suam velocitatem, seu in spatium quod dato tempore secundum propriam directionem ex dispositione machinæ percurrere debet, omnium machinarum vires metiri licet.

(i) 102. Vis cochleæ ad premendum corpus est ad vim manûs manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii eâ in parte, ubi à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Nam si resistentia corporis comprimendi ut pondus movendum consideretur, erit (101) momentum vis manubrium circumagentis, ut factum ex vi illâ in suam velocitatem, & momentum resistentiæ ut factum ex resistentiâ in suam quoque velocitatem; ut ergo sit æquilibrium, debet esse resistentia ad vim manûs, ut circularis velocitas manûs ad velocitatem resistentiæ, sive ad velocitatem progressivam cochleæ; aut quia manus describit circulum cujus radius est manubrii longitudo, è centro cochleæ usque ad manus sumpta, dum interea cochlea per altitudinem seu distantiam duarum helicum progreditur, vis cochleæ ad premendum corpus erit ad vim manûs manubrii.

à manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. (k) Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis à malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: Unde solvitur in omnium aptorum instrumentorum genere problema, *Datum pondus datâ vi movendi*, aliamve datam resistantiam vi datâ superandi. Nam si machinæ ita formentur, ut velocitates agentis & resistantis sint reciprocè ut vires; agens resistantiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate (l) eandem vincet. Certè si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistantia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohesione & elevandorum ponderibus oriri solet; superatâ omni eâ resistantiâ, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tracta-

re

nubrium circumagentis ut peripheria circuli prædicto radio descripti ad distantiam duarum helicium.

(k) 103. Momentum cunei est ut factum (101), ex vi impressâ à malleo in cunei velocitatem, seu in spatium quod dato tempore percurrit cuneus secundum directionem vis à malleo impressæ; momentum verò resistantiæ ligni cuneo findendi est ut factum ex illâ resistantiâ in velocitatem, quâ partes ligni cedunt cuneo secundum lineas faciebus cunei perpendiculares, juxtâ quarum directionem partes ligni à cuneo moventur; est etiam momentum resistantiæ ut factum ex resistantiâ ligni in spatium quod partes ligni dato tempore describunt, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Quoniam igitur cuneus agens secundum lineam basi

ipsum perpendicularem, totam suam altitudinem percurrit, dum partes ligni totâ basi cunei latitudine à se invicem moventur, erit (in casu æquilibrîi) vis cunei ad ligni resistantiam, ut cunei altitudo ad latitudinem ipsius basis.

(l) 104. Attritionem seu frictionem, aliasque resistantias ex crassitie rigiditate & funium flexione ortas in machinis considerare necessum est, graves alioquin in praxi errores nascerentur.

Hanc difficilem materiam Sturmîus, Leibnitius, Amontoniûs, Parentius, Lahiriûs & alii tractarunt. Bullingerus Tom. 2^o. Comment. Acad. Petropol. ad tentandam experimentis frictionum mensuram duo proponit theoremata quæ ob eorum facilitatem & usum hic describere non abs re erit.

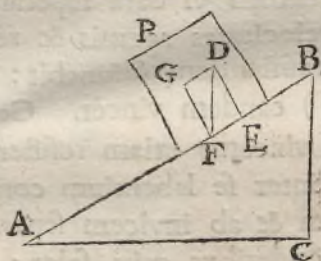
H 2

Suprà

AXIOMATA, SIVE

re non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere, quam latè pateat quàmque certa sit lex tertia motus. Nam si æstimeretur agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim; & similiter resistentis reactio æstimeretur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi ab earum attritione, cohæsiōe, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper

per.



Suprà horizontem AC , experimento sæpius instituto, elevetur planum AB , ad angulum BAC , ita ut si corpus plano AB , ad hunc angulum elevato imponatur, tantum non descendat; descendat autem si angulus nonnihil augeatur; & hæreat cum aliquâ adversus descensum renitentia, si angulus minuat. Hic angulus dicitur angulus quietis, eoque invento sic inferatur.

Uti sinus totus ad sinum rectum anguli quietis, ita pondus absolutum P , ad frictionem ejus super plano ad prædictum angulum inclinato. Atque iterum.

Uti Radius ad tangentem anguli quietis, ita pondus absolutum P , ad frictionem ejus super plano horizontali, cum trahitur in directione ad horizontem parallelâ... Dem... Linea DF , horizonti perpendicularis, pondus absolutum P , seu vim totam quâ corpus in perpendiculo descendere nititur, exponat; & ductâ DE , ad planum AB , normali; vis DF , in binas vires nempe DE , plano perpendicularitatem, & EF , seu DG , plano parallelam

resolvitur (41); vis DE , à plano AB , etiam perfecte levigato tota sustinetur, & solâ vi DG , seu EF , pondus P , nititur juxtâ plani directionem descendere; Cum igitur ob frictionem in plano aspero AB , tantum non descendat, erit frictio æqualis vi EF ; est itaque pondus absolutum P , ad frictionem ejus super plano inclinato AB , ut DF , ad FE , hoc est, ob angulum E rectum & angulum FDE æqualem angulo quietis BAC , ut sinus totus ad sinum anguli quietis. Q . erat 1^{um}.

Jam ut idem transferatur ad planum horizontale, debet vis DE , plano perpendicularis, considerari ut pondus absolutum, & ita planum AB , se habebit ut planum horizontale respectu ponderis DE ; vis autem FE , seu frictio consideranda est tanquam vis in æquilibrio constituta curâ vi æquali trahente pondus DE , secundum directionem plano AB , parallelam; & ob triangulorum FDE , BAC , similitudinem, manifestum est pondus DE , esse ad frictionem EF , seu pondus absolutum in plano horizontali horizontaliter tractum, esse ad frictionem ejus, ut Radius ad tangentem anguli quietis. Q . erat 2^{um}.

105. Coroll. In his duobus casibus, frictiones, cæteris omnibus paribus, sunt pressionibus proportionales; nam frictio in plano inclinato dicatur f ; in plano horizontali F , & erit per 1^{um}. theor. $P : f = AB : BC$; & per 2^{um}. theorema $P : F = AC : BC$. seu $F : P = BC : AC$; adeoque per compositionem rationum $P : F : P : f = AB \times BC : BC \times AC$, ac proinde $F : f = AB : AC = FD : DE$; hoc est, frictio in plano horizontali

per æquales. Et quatenus actio propagatur per instrumentum & ultimò imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

LEGES MOTUS

tali est ad frictionem in plano ad angulum quietis inclinato, ut pressio in plano horizontali ad pressionem in plano inclinato.



MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De methodo rationum primarum & ultimarum, cujus ope sequentia demonstrantur.

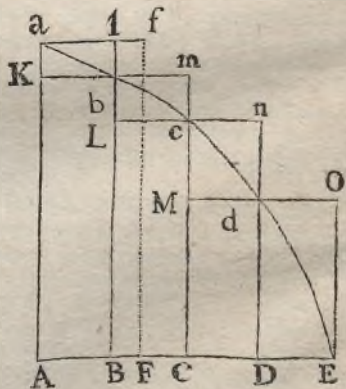
LEMMA I.

Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito constanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ, sunt ultimò æquales.

Si negas; fiant ultimò inæquales, & sit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro datâ differentiâ *D*: contra hypothesin.

LEMMA II.

Si in figurâ quavis A a c E, rectis A a, A E & curvâ a c E comprehensâ, inscribantur parallelogramma quotcunque A b, B c, C d, &c. sub basibus A B, B C, C D, &c. æqualibus, & lateribus B b, C c, D d, &c. figuræ lateri A a parallelis contenta; & compleantur parallelogramma a K b l, b L c m, c M d n, &c. Dein horum parallelogrammorum latitudo minuat, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes quas habent ad se invicem figura inscripta A K b L c M d D, circumscripta A a l b m c n d o E, & curvilinea A a b c d E, sunt rationes æqualitatis.



Nam

Nam figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum Kl , Lm , Mn , Do , hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi Kb & altitudinum ^(m) summa Aa , id est, rectangulum $ABla$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per lemma 1) figura inscripta & circumscripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimò æquales. *Q. E. D.*

LEMMATA III.

Eadem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines AB , BC , CD , &c. sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.

Sit enim AF æqualis latitudini maximæ, & compleatur paralle-

(m) 106. Si fuerint quocumque & cujusvis generis quantitates decrecentes, Aa , Bb , Cc , Dd , erunt omnium differentiarum simul sumptarum æquales excessui maximæ supra minimam. Nam perspicuum est $Aa - Bb + Bb - Cc + Cc - Dd = Aa - Dd$; unde si ultima serie quantitas sit 0, ut in serie Aa , Bb , Cc , Dd , 0, summa differentiarum $Ka + Lb + Mc + Dd$, æqualis erit quantitati maximæ Aa .

107. Linea Bb , motu sibi semper parallelo accedat ad lineam Aa , & interim punctum b , ita moveatur in linea Bb , ut semper reperiatur in arcu ba ; decrecente linearum Aa , Bb , distantia AB , decrescit quoque earum differentia Ka , ac tandem evanescente AB , evanescit Ka , & Bb , seu Ak , fit ultimò æqualis lineæ Aa ; evanescunt autem AB & Ka , cum lineæ Aa , Bb , neque distantes, neque prorsus congruentes dici possunt, sed simul, ut ita dicam, conjungi incipiunt. In illo statu evanescentiæ, linearum Aa , Bb , differentia Ka , minor est quavis lineæ darâ, seu infinitè parva est, aut inasignabilis respectu Ak & Bb ; quantitas autem evanescens, seu infinitè parva, est ad

quantitatem finitam ut finitum ad infinitum; quare cum notum sit infinitum ex finiti additione vel subtractione non mutari, aut tanquam immutatum haberi posse, liquet lineas Bb seu Ak & Aa , seu $Ak + Ka$, pro æqualibus posse usurpari. Similiter, quia evanescente Ka , trianguli Kab , & parallelogrammi Kl , areæ infinitesimæ sunt respectu parallelogrammi evanescentis Ab , parallelogrammum istud Ab , usurpari potest pro parallelogrammo Al , aut etiam pro figurâ $ABba$, hoc est, pro differentia arearum curvilinearum $Aeca$, $Becb$.

108. Ex his sequitur diversos esse infinitesimorum ordines; nam ostensum est (107) parallelogrammum Kl , infinitesimum esse respectu parallelogrammi Ab , hoc verò parallelogrammum infinitesimum esse respectu areæ curvilineæ $Aeca$.

109. Figura $Aeca$, circa axem suum Ae , revolvatur, & quælibet ordinata Aa , Bb , describet circulum, cujus est ordinata ipsa radius, quodlibet rectangulum evanescens ut Kb , ab , describet cylindrum evanescentem, & rectangula Kl , Lm , Mn , Do , singula describent annulos solidos, quorum summa æqualis erit

DE MOTU
CORPORUM
RUM.

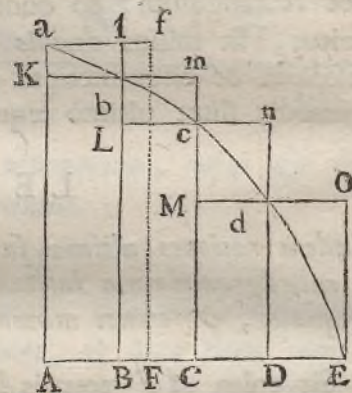
rallelogrammum $FAaf$. (ⁿ) Hoc erit majus quàm differentia figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ; at latitudine suâ AF in infinitum diminutâ, minus fiet dato quovis rectangulo. $Q. E. D.$

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum figurâ curvilineâ.

Corol. 2. Et multo magis figura rectilinea, quæ chordis evanescentium arcuum ab , bc , cd , &c. comprehenditur, coincidit ultimo cum figurâ curvilineâ.

Corol. 3. Ut & figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. (^o) Et propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros acE ,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.



LEMMA IV.

Si in duabus figuris $AacE$, $PprT$, inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ

erit cylindro ex rotatione rectanguli AI descripto. Quare cum hic cylindrus sit infinitesimus, patet (per lemma 1) ultimam rationem solidi ex cylindris omnibus compositi ad solidum ex rotatione figuræ curvilineæ $Aeca$, genitum esse rationem æqualitatis.

(ⁿ) 110. Nam si singulorum parallelogrammorum latitudo æqualis esset lineæ AF , figuræ inscriptæ & figuræ circumscriptæ differentia foret parallelogrammum Af , (lem. 11); cum igitur singulorum parallelogrammorum latitudo minor sit latitudine AF , (ex hyp.) prædicta figu-

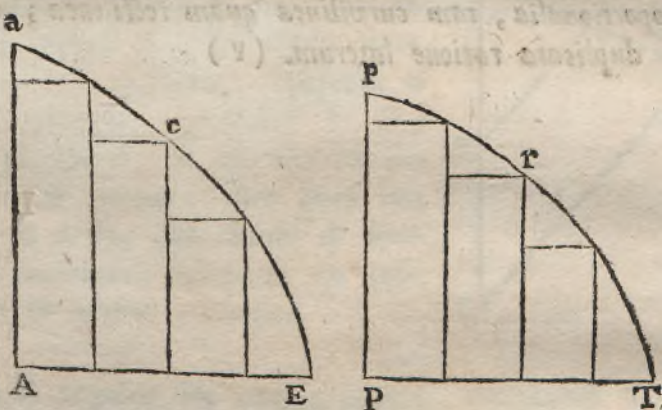
rarum differentia minor quoque est parallelogrammo Af .

(^o) 111. Propterea hæ figuræ ultimæ (quoad perimetros acE) non sunt rectilineæ, seu non sunt ex lateribus rectis quocumque numero finito compositæ, sed sunt figurarum rectilinearum quarum latera numero augentur & longitudine minuuntur in infinitum, limites curvilinei. Dum enim ordinarum Aa , Bb , ac proinde chordarum ab , bc , numerus in infinitum augetur, & distantia AB , BC , in infinitum minuuntur, puncta a , b , K , l , & b , c , L , m , &c. coeunt & curvam acE formant.

112. De-

rimæ parallelogrammorum in unâ figurâ ad parallelogramma in alterâ, singulorum ad singula, sint eadem; dico quod figuræ duæ $AacE$, $PprT$, sunt ad invicem in eâdem illâ ratione.

LIBER
PRIMUS



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita figura ad figuram; existente nimirum figurâ priore (per lemma III) ad summam priorem, & figurâ posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

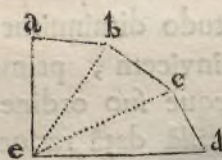
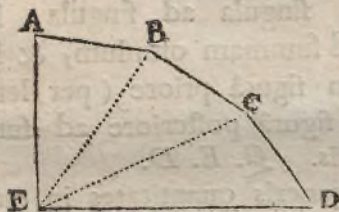
Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eâdem illâ datâ ratione. Nam si in lemmatis hujus figuris sumantur parallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque ideo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, in ultimâ ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultimâ ratione partis ad partem.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

LEMMA V.

Similium figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ sunt in duplicata ratione laterum. (P)

L E M.



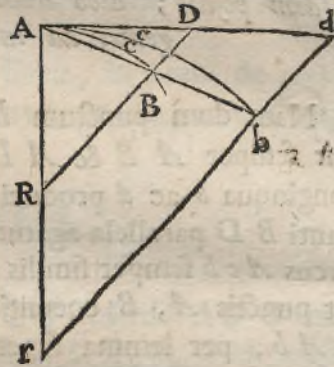
(P) 112. Demonstr. . . . Dux figuræ, ADE, ade, similes dicuntur, quarum latera omnia sibi mutuo respondentia, ut AB, ab, BC, bc, proportionalia sunt, & angulos æquales, ut ABC, abc, continent; undè jam patet summas laterum utriusque figuræ esse inter se ut duo quævis latera correspondentia AB, ab. Ductis ex E, & e, ad omnes angulos lineis EB, EC, eb, ec, figuræ in sua

triangula dividantur; & quoniam anguli D & d, æquales sunt, lateraque ED, ed, DC, dc, proportionalia, (per definit.), duo triangula ECD, ecd, erunt similia, adeoque anguli ECD, ecd, æquales, & latera EC, ec, lateribus CD, cd proportionalia; quare cum anguli BCD, bcd sint etiam æquales (per definit.), æquantur quoque anguli ECB, ecb, & quia BC:bc=CD:cd=EC:ec, triangula duo EBC, ebc similia erunt. Idem eadem ratione de aliis triangulis EBA, eba demonstratur. Verùm areæ singulorum triangulorum similia, quæ in duabus figuris sibi mutuo respondent, sunt inter se in duplicatâ ratione laterum homologorum, ac proinde in datâ ratione; ergò summae triangulorum, in utraq; figurâ, hoc est, figurarum areæ rationem habent laterum homologorum duplicatam. Jam numerus laterum AB, BC, &c. ab, bc, &c. augeatur & eorum longitudo minuatur in infinitum, & (per Cor. 4. Lem. III.) figuræ ABCD, abcd, sunt curvilineæ; simili in igitur figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea, & areæ sunt in duplicatâ ratione laterum. Q. E. D.

113. CURS

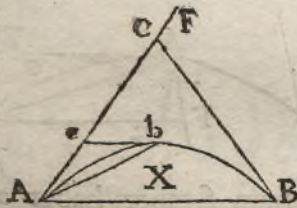
LEMMA VI.

Si arcus quilibet positione datus ACB subtendatur chorda AB , & in puncto aliquo A , in medio curvaturæ (9) continuæ, tangatur à rectâ utrinque productâ AD ; dein puncta A, B ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus BAD , sub chordâ & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimò evanescet.



Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus ACB cum tangente AD angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum A non erit continua, contra hypothesin.

LEM-



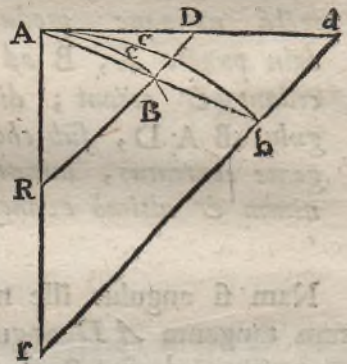
(9) 113. Curva continua BA , considerari potest tanquam descripta motu puncti B continuè mutantis directionem suam quâ per rectam tangentem BC , progredi nititur. Undè si arcus AB , sit ubique versus eandem partem X , cavi, semperque ducantur tangentes AF, BC , sese interfecantes in C , accedente puncto B , ad A , anguli BCF, BAC, CBA , quos tangentes & chordæ complectuntur, continuè, non verò per saltum, decrescunt, & evanescente chordâ AB , evanescent; atque

nulli sunt, dum punctum b , idem omnino est cum puncto A . Necessè igitur est ob continuitatem decrementorum, ut angulus CAb , per omnes magnitudinis gradus inter angulum CAB , & 0 , seu nihilum medios transeat priusquam nullus omnino sit; quod generatim statuendum est de omnibus quantitativibus, quæ nascuntur & continuè crescunt, vel quæ continuè decrescunt & tandem evanescent; non possunt enim continuè crescere vel decrescere, nec ab uno extremo ad alterum pervenire, quin per omnes gradus magnitudinis inter duo extrema medios transeant. Itaque inter tangentem AF , & chordam infinitesimam Ab , nulla duci potest linea recta, quæ angulum finitum cum chordâ vel tangente efficiat; ideoque inter arcum AB , & tangentem AF , nulla duci potest linea recta quæ arcum non secet.

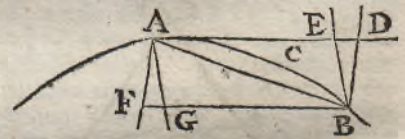
LEMMA VII.

Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB & AD ad puncta longinqua b ac d produci, & (*) secanti BD parallela agatur bd . Sitque arcus $Ac b$ semper similis arcui ACB . Et punctis A, B coeuntibus, angulus dAb , per lemma superius, evanescent; ideoque rectæ semper finitæ Ab , Ad , & arcus intermedius $Ac b$ coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ AB , AD , & arcus intermedius ACB evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*



Corol. 1. Undè si per B ducatur tangenti parallela BF , rectam quamvis AF per A transeuntem perpetuo secans in F , hæc BF ultimo ad arcum evanescentem ACB rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo $AFBD$ rationem semper habet æqualitatis ad AD .



Corol.

(*) 114. Secans RD , supponitur semper efficere cum tangente AD & chordâ AB , angulos finitos, aut angulos ad quos angulus evanescent BAD , rationem habet infinitesimam; nam si anguli ABD , BAD , essent ejusdem ordinis infinitesimi, trianguli ABD latera finitam haberent inter se rationem. Angulus enim externus $B D d$, æqualis duobus internis oppositis DAB , DBA , esset ejusdem

ordinis cum illis angulis; & quoniam in omni triangulo latera sunt ut sinus angulorum oppositorum, latera AB , BD , AD , finitam rationem haberent sinuum angulorum ejusdem ordinis $B D d$, DAB , ABD ; cum autem anguli A & B , supponuntur infinitesimi, angulus ADB est obtusus, adeoque chorda AB , majori angulo opposita, ad tangentem AD , datam habebit majoris inæqualitatis rationem.

Corol. 2. Et si per B & A ducantur plures rectæ BE , BD , AF , AG , secantes tangentem AD & ipsius parallelam BF ; ratio ultima abscissarum omnium AD , AE , BF , BG , chordæque & arcus AB ad invicem erit ratio æqualitatis.

LIBER
PRIMUS

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

L E M M A VIII.

Si recta data AR , BR cum arcu ACB , chorda AB & tangente AD , triangula tria RAB , $RACB$, RAD constituunt, dein puncta A , B accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.

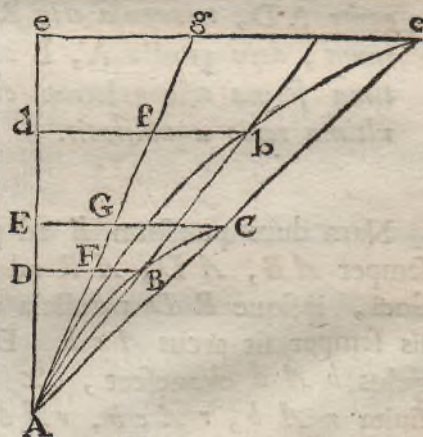
Nam dum punctum B ad punctum A accedit, intelligantur semper AB , AD , AR ad puncta longinqua b , d & r produci, ipsique RD parallela agi rb , & arcui ACB similis semper sit arcus Ac . Et coeuntibus punctis A , B , angulus bAd evanescet, & propterea triangula tria semper finita rAb , rAc , rAd coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia RAB , $RACB$, RAD fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*

Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA IX.

Si recta AE & curva ABC positione data se mutuo secent in angulo dato A , & ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur BD, CE , curvæ occurrentes in B, C , dein puncta B, C , simul accedant ad punctum A : dico quod areae triangulorum ABD, ACE erunt ultimo ad invicem in duplicatâ ratione laterum.

Etenim dum puncta B, C accedunt ad punctum A , intelligatur semper AD produci ad puncta longinqua d & e , ut sint Ad, Ae ipsi AD, AE proportionales, & erigantur ordinatæ db, ec ordinatis DB, EC parallelæ quæ occurrant ipsis AB, AC productis in b & c . Duci intelligatur, tum curva Abc ipsi ABC similis, tum recta Ag , quæ tangat curvam utramque in A , & secet ordinatim applicatas DB, EC, db, ec in F, G, f, g . ^(f) Tum manente longitudine Ae coeant puncta B, C cum puncto A ; & angulo cAg evanescente, coincident areae curvilineæ Abd, Ace cum rectilineis Afd, Age ; ideoque (per lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum Ad, Ae : Sed his areis proportionales semper sunt areae ABD, ACE , & his lateribus latera AD, AE . Ergo & areae ABD, ACE sunt ultimo in duplicatâ ratione laterum AD, AE . Q. E. D.



LEM-

(f) 115. Tum manente longitudine finitâ Ae , & mutatâ, si necessum fuerit, longitudine Ad , ut sit semper $Ad:Ae$

$= AD:AE$, coeant puncta B, C , cum puncto A , &c.

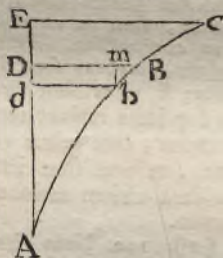
LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quâcunque vi finita describit, sive vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuò augetur vel continuò diminuat, sunt ipso motus initio in duplicatâ ratione temporum.

Exponentur tempora per lineas AD , AE , & velocitates genitæ per ordinatas DB , EC ; (*) & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ ABD , ACE his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per lemma IX) in duplicatâ ratione temporum AD , AE . Q. E. D.

Corol. I. (u) Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similibus figurarum partes temporibus proportionalibus descri-

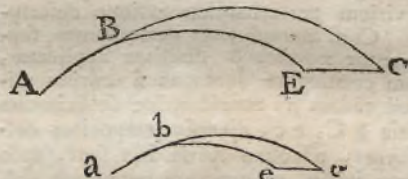
(*) 116. Spatia his velocitatibus descripta erunt ut areæ ABD , ACE , his ordinatis descriptæ. Nam ductâ db , ipsi DB , infinite propinqua, ita ut Dd , sit infinitesima seu evanescentia respectu AD , AE , lineæ DB , db , & rectangulum dmb , ac figura $DdbB$, pro æqualibus respectivè usurpatiposunt (107), aded



ut per tempusculum infinitesimum, Dd , velocitas DB , tanquam uniformis haberi possit; spatium autem æquabili velocitate db , percursum, est ut factum ex velocitate db , & tempusculo Dd , (5), hoc est, ut rectangulum $Dd \times db$, seu ut area $DdbB$; si igitur areæ ACE , ADB , in infinita numero atque infinitesima rectangula, ut dmb , divisæ concipiuntur, erunt summæ spatiorum percursum, seu spatia temporibus AE , AD , percursa, ut summæ horum rectangulorum, hoc est, ut areæ ipsæ ACE , ABD , (Lem. III).

117. Cor. Vis acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motus initio considerari

potest, tanquam vis determinata & immutabilis. Spatia enim, quæ corpus urgente vi acceleratrice constante describit, sunt semper in duplicatâ ratione temporum (27); & contra, si spatia percursa duplicatam habeant temporum rationem, vis acceleratrix constans est; nam si mutabilis esset vis, illa quoque temporum & spatiorum proportio mutaretur. Ergo (Lem. X) vis quælibet acceleratrix finita, utcumque variabilis, ipso motus initio tanquam immutabilis spectari potest.



(u) 118. Corpora duo A & a , curvas similes ABE , abe , illarumque partes similes AB , ab , BE , be , temporibus proportionalibus describant; duobus hisce corporibus, cum ad puncta B & b , pervenerint, accedunt novæ vires acceleratrices in se æquales & similiter applicatæ, quæ prioribus viribus additæ corpora deferant per arcus BC , bc . Jun-

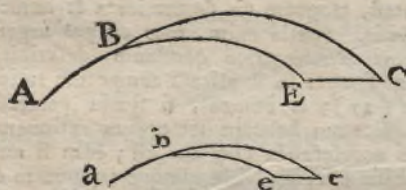
DE MOTU
CORPO-
RUM.

describentium errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum à figurarum similium locis illis, ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus sine viribus istis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proximè.

Corol. 2. (*) Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. (γ) Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directè & quadrata temporum inversè. *Corol.*



gantur rectæ EC, ec, quæ errores solâ virium perturbantium actione genitos exponent; Lineæ enim illæ sunt spatia solâ virium perturbantium actione descripta. Cum autem vires perturbantes supponantur æquales & similiter applicatæ, idem contingere debet ac si corpus aliquod eadem vi acceleratrice sollicitatum spatia EC, ec, diversis temporibus describeret, adeoque spatia illa sunt, ipso motus initio, ut quadrata temporum quibus percurruntur (Lem. X) BC, bc, & quibus absque virium perturbantium actione percurrerentur arcus similes BE, be; si igitur vires illæ perturbantes supponantur constantes, spatia EC, ec, non solùm motus initio, sed & tempore finito descripta, erunt ut prædictorum temporum quadrata (27). Undè si admodum exigua sit virium perturbantium variatio, spatia seu errores erunt quam proximè ut quadrata temporum.

(*) 119. Errores autem qui viribus proportionalibus, seu viribus in datâ ratione existentibus, ad similes figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim. Nam si tempora sunt eadem, errores sunt in data ratione virium; si vires sunt eadem, errores sunt in duplicata ratione temporum quibus generantur; cum igitur vires & tempora varient, errores sunt in ratione compositâ ex datâ virium ratione & duplicatâ temporum.

(γ) 120. Nam vires motus initio tanquam constantes haberi possunt (117); dupla autem spatia, adeoque simplicia spatia, quæ corpora urgentibus viribus constantibus describunt, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim (30); ergo spatia quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt, sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim. Si itaque vires acceleratrices, motus initio, sint G, g, spatia S, s, tempora T, t, erit $S : s = G T T : g t t$, ideoque $G : g = S : T T : s : t t$, & $T T : t t = S : G : s : g$, hoc est, vires sunt ut spatia motus initio descripta directè & quadrata temporum inversè; Temporum verò quadrata sunt ut descripta spatia directè & vires inversè.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directè & vires inversè.

Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directè vel inversè: sensus est, quòd prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciproca. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directè aut inversè: sensus est, quod prima augetur vel diminuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciproca augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directè & C directè & D inversè: sensus est, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$ hoc est, quod A & $\frac{BC}{D}$ sunt ad invicem in ratione datâ.

LEMMA XI.

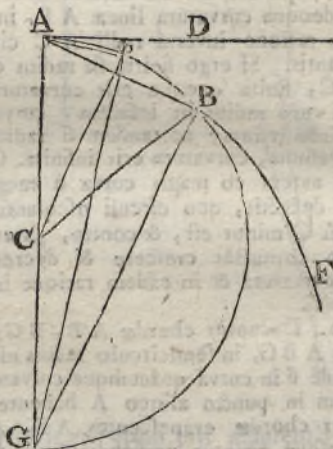
Subtensa evanescens anguli contactus, in curvis omnibus (2) curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ultimo in ratione duplicatâ subtensæ arcus contermini. Cas.

(2) 121. Circuli curvatura est in omnibus circumferentiæ punctis eadem, seu uniformis; in variis autem circulis eo major est, quo minor est circuli radius, adeò ut circuli curvatura sit semper in ratione inversâ radii. Aliarum linearum curvatura in singulis punctis determinatur per curvaturam arcus circularis qui cum per curvaturam arcus in puncto dato congruit, seu, quod idem est, qui curvam in puncto dato osculatur. Est igitur lineæ cujusvis in puncto dato curvatura inversè ut radius circuli curvam lineam in dato puncto osculantis.

Sumantur duo curvæ AF, puncta A & B, ducanturque rectæ AC, BC, ad curvam perpendiculares, & ex puncto intersectionis C, tanquam centro, radiis CA, CB, duo describantur circuli, quorum unus radio CA, descriptus tanget curvam in A, alter autem radio CB, descriptus tanget eam in B. Si ad se mutuò accer-

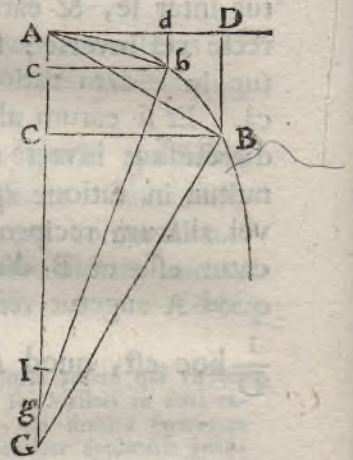
Tom. I.

tant puncta A & B, donec arcus AB evanescat, duæ perpendiculares AC, BC, pro æqualibus usurpari poterunt (Lem. 1), con-



DE MOTU
CORPO-
RUM.

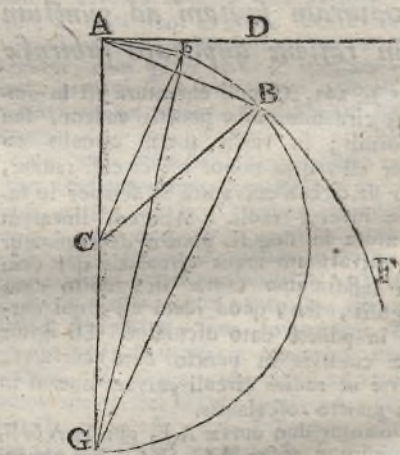
Caf. 1. Sit arcus ille AB , tangens ejus AD , subtensâ anguli contactus ad tangentem perpendicularis BD , subtensâ arcus AB . Huic subtensæ AB & tangenti AD perpendiculares erigantur AG , BG , concurrentes in G ; dein accedant puncta D , B , G , ad puncta d , b , g , sitque J intersectio linearum BG , AG ultimo facta ^(a) ubi puncta D , B accedunt usque ad A . Manifestum est quod distantia GJ minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circularum per puncta ABG , Abg transeuntium) AB quad. æquale $AG \times BD$, & Ab quad. æquale $Ag \times bd$; ideoque ratio AB quad. ad Ab quad. componitur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd . Sed quoniam GJ assumi potest minor longitudine quâvis assignatâ, fieri potest ut ratio AG ad Ag minùs differat à ratione æqualitatis quam pro differentiâ



quâvis

conjungentur duo puncta contactus A & B , duoque circuli tangentes abibunt in unum ABG , qui curvam osculabitur in A , vel B , adeoque curvatura linearum AF , in A , est in ratione inversâ radii AC circuli osculantis. Si ergo finitus sit radius osculi AC , finita quoque erit curvatura in A ; si vero radius sit infinitus, curvatura erit infinitesima; ac tandem si radius sit infinitesimus, curvatura erit infinita. Quoniam autem eo magis curva à tangente AD deflectit, quo circuli osculantis radius AC minor est, & contra, patet angulum contactus crescere & decrescere cum curvaturâ & in eadem ratione inversâ radii.

122. Ducantur chordæ AB , BG ; angulus ABG , in semicirculo rectus est; ac proinde si in curvâ quâcumque curvaturam finitam in puncto aliquo A habente ducantur chordæ evanescentes Ab , AB , ad easque agantur perpendiculares BG , bG , hæ lineæ convenient in puncto G , junctisque punctis A & G , recta AG ad tangentem Ad perpendicularis erit, & fini-



tam habebit magnitudinem, ut pote quæ æqualis est duplo radio finito AC , circuli curvam osculantis in A .

(*) 123. Ubi puncta D , B , accedunt usque ad A , linea AJ (122) est diameter circuli curvam AbB osculantis

quâvis assignatâ, ideoque ut ratio AB quad. ad Ab quad. minùs differat à ratione BD ad bd , quàm pro differentiâ quâvis assignatâ. Est ergo, per lemma 1, ratio ultima AB quad. ad Ab quad. eadem cum ratione ultimâ BD ad bd . Q. E. D.

Caf. 2. (b) Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis datò, & eadem semper erit ratio ultima BD ad bd , quæ priùs, ideoque eadem ac AB quad. ad Ab quad. Q. E. D.

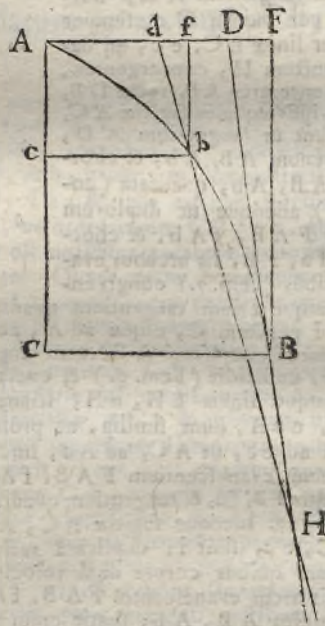
Caf. 3. (c) Et quamvis angulus D non detur, sed recta BD ad datum punctum convergat, vel aliâ quâcunque lege constituatur; tamen anguli D & d communi lege constituti ad æqualitatem semper vergent & propiùs accedent ad invicem quàm pro differentiâ quâvis assignatâ, ideoque ultimo æquales erunt, per lem. 1, & propterea lineæ BD , bd sunt in eadem ratione ad invicem ac priùs. Q. E. D.

Co-

in A , & quoniam accedente puncto B , ad A , accedit punctum G , ad J , atque evanescente arcu AB , evanescit quoque distantia GJ , manifestum est quod distantia GJ minor esse potest quam assignata quævis; quia verò anguli $A b g$, ABG , recti sunt (per hyp.) circuli duo diametris $A g$, $A G$, descripti per puncta b , B , transeunt, adeoque horum circulorum chordæ Ab , AB , sunt mediæ proportionales inter suas respectivè abscissas Ac , AC , seu æquales db , DB , & diametros $A g$, $A G$, ac proinde $AB^2 = AG \times BD$ & $Ab^2 = Ag \times bd$ &c.

(b) 124. Inclinetur jam BD , bd , ad AD , in angulo quovis dato BDF , bd , eadem semper erit ratio ultima BD , ad bd , quæ priùs. Ductis enim BF , bf , ad AC , parallelis, erit obtriangula æquiangula BFD , bfd , $BD : bd = BF : bf$; sed (123) $BF : bf = AB^2 : Ab^2$; est igitur $BD : bd = AB^2 : Ab^2$.

(c) 125. Et quamvis angulus D , non detur, sed rectæ, DB , db , ad datum punctum H , convergant, vel aliâ quâcunque communi lege constituantur, tamen anguli D & d , communi lege constituti (punctis b & B ad A & ad se mutuo accedentibus) ad æqualitatem semper vergent, & evanescente arcu Bb , adeoque coincidentibus lineis HD , Hd , propiùs accedent



ad invicem quam pro differentiâ quâvis assignatâ ac proinde ultimo æquales erunt (per Lem. 1), & propterea lineæ BD , bd , sunt ultimo paralleleæ & in eadem ratione ad invicem ac priùs (124).

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Corol. 1. Unde cum tangentes AD , Ad , arcus AB , Ab , & eorum sinus BC , bc fiant ultimo chordis AB , Ab æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ BD , bd .

Corol. 2. (^d) Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum sagittæ, quæ chordas bifecant & ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ BD , bd .

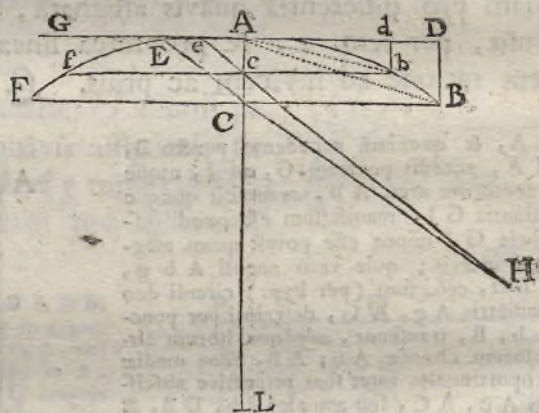
Corol. 3. (^e) Ideoque sagitta est in duplicatâ ratione temporis quo corpus datâ velocitate describit arcum.

Corol. 4. (^f) Triangula rectilinea ADB , Adb sunt ultimo in triplicatâ ratione laterum AD , Ad , inque sesquipli-

cata

(^d) 126. Sit FAB , arcus circuli curvam datam osculantis in A , tangens AD , radius ofculi AL , chordæ FB , fb , ad radium AL , & rectæ BD , bd , ad tangentem AD , normales, per puncta Cc , semper ducantur lineæ EC , ec , ad datum punctum H , convergentes, evanescente arcu AB , rectæ DB , db , & ipsis æquales sagittæ AC , Ac , sunt ut tangentium AD , Ad , arcuum AB , Ab , & chordarum AB , Ab , quadrata (*coroll. 1.*) adeoque ut duplorum arcuum FAB , fAb , & chordarum fb , Fb , iis arcubus evanescentibus (*Lem. 7.*) congruentium, atque etiam tangentium quadrata. Jam ubi punctum C , usque ad A , accedit, chorda evanescens AE , cum tangente AG , coincidit (*Lem. 6.*) & coeuntibus quoque lineis EH , eH , triangula CEA , ceA , sunt similia, ac proinde EC est ad ec , ut AC , ad Ac , hoc est ut arcuum evanescentium FAB , fAb , chordarum FB , fb , & tangentium quadrata.

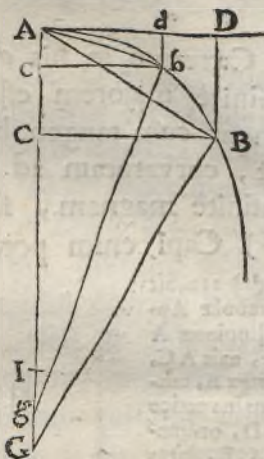
(^e) 127. Ideoque sagittæ AC , Ac , vel EC , ec , sunt in duplicatâ ratione temporum quibus corpus datâ velocitate percurrit arcus evanescentes FAB , fAb , vel dimidios AB , Ab ; spatia enim datâ velocitate percurra sunt ut tempora (⁵), adeoque pro temporibus substitui possunt arcus FAB , fAb , sed sagittæ sunt in ratione duplicatâ eorum arcuum, (*126*), ergo & temporum.



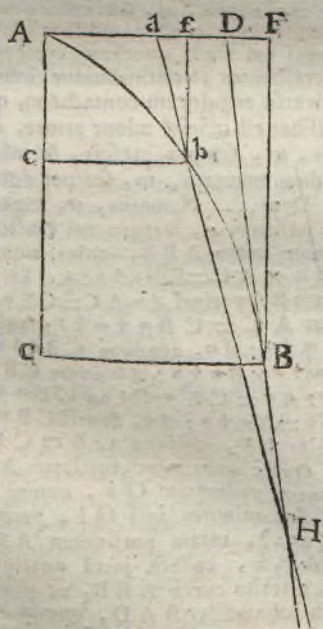
(^f) 128. Triangula rectilinea ADB , Adb , sunt ultimò in triplicatâ ratione laterum AD , Ad , inque sesquiplicatâ laterum BD , bd ; ductis enim BF , bf , ad tangentem AD , perpendicularibus, erit ob triangulorum BDF , bdf , similitudinem $BD : bd = BF : bf$, & propterea areae triangulorum ADB , Adb , sunt in ratione compositâ laterum AD , ad Ad , & BD , ad bd ; sed (*124. 125. cor. 1.*) $BD : bd = AD^2 : Ad^2$, adeoque $\sqrt{BD} : \sqrt{bd} = AD : Ad$; ergo triangula ADB , Adb , sunt in ratione compositâ AD , ad Ad , & AD^2 , ad Ad^2 , hoc est, in ratione triplicatâ laterum AD , Ad ; sunt etiam in ratione compositâ BD , ad bd , & \sqrt{BD} , ad \sqrt{bd} , hoc est, in ratione $BD \times \sqrt{BD}$, ad $bd \times \sqrt{bd}$.

catâ laterum DB, db ; utpote in compositâ ratione laterum AD & DB, Ad & db existentia. Sic & triangula ABC, Abc sunt ultimo in triplicatâ ratione laterum BC, bc . Rationem verò scsquiplicatam voco triplicatâ subduplicatam, quæ nempe ex simplici & subduplicatâ componitur.

Corol. 5. Et quoniam DB, db sunt ultimo parallelæ & in duplicatâ ratione ipsarum AD, Ad : erunt areae ultimæ curvilineæ ADB, Adb (s) ex naturâ parabolæ) (h) duæ tertiæ partes triangulorum rectilinearum ADB, Adb ; & segmenta AB, Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areae & hæc segmenta erunt in triplicatâ ratione tum tangentium AD, Ad ; tum chordarum & arcuum AB, Ab .



Scho-



pro arcu parabolæ usurpari potest. Ductâ enim AC , lineis BF, bf , parallelâ, completisque parallelogrammis AB, Ab , erunt, ex demonstratis, rectæ FB, fb , & ipsiæ æquales abscissæ AC, Ac , ut ordinarum CB, cb , quadrata, quæ est notissima parabolæ proprietas.

130. Quare arcus evanescens spectari potest tanquam arcus parabolæ cujus latus rectum est æquale diametro circuli osculantis. Nam in arcu circulari AB , (vid. fig. textus) ordinata CB , ad diametrum perpendicularis, est media proportionalis inter abscissam AC , & reliquam diametri partem, seu totam diametrum, cum AC , evanescit (Lem. 1.), adeoque quadratum ordinatæ CB , æquale est rectangulo ex abscissâ evanescente AC , & diametro circuli, quæ est proprietas parabolæ cujus latus rectum æquale est prædictæ diametro.

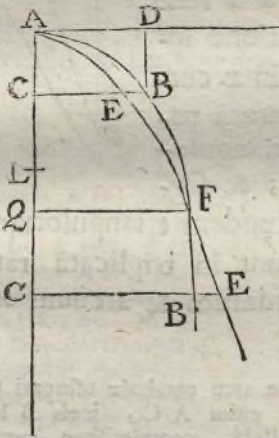
(h) 131. Parabolæ segmentum AbB , est tertia pars trianguli rectilinei ACB , vel æqualis ADB , adeoque area curvilinea $ADBbA$, æqualis est duabus tertijs partibus ejusdem trianguli rectilinei ADB . Vid. Gregor. à S. Vincentio cor. 1. Prop. 232. Lib. V. quadraturæ circuli, aut Archimed. Prop. 17. quadrat. Parabolæ. K. 3. 232.

(s) 129. Arcus evanescens AB , in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus A , habentibus;

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinitè majorem esse angulis contactuum, quos circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinitè minorem; hoc est, curvaturam ad punctum A , nec infinitè parvam esse, nec infinitè magnam, seu intervallum AJ finitæ esse magnitudinis. (i) Capi enim potest DB ut AD ; quo in casu circulus

(¹) 132. Sit parabolæ Apollonianæ AEF , axis AC , vertex A , tangens in vertice AD , ordinata CE , latus rectum AL , circulus diametro AL , descriptus parabolam osculatur in A , (130.) eundemque ac parabolæ contactus angulum efficit in



A . Ad eundem axem AC , & verticem A , describatur superioris generis parabola cujus ordinatæ CB sint semper in subtriplicatâ abscissarum AC , vel parallelarum & æqualium DB , ratione; & erit angulus contactus BAD , angulo contactus EAD , infinitè minor. Dem.
Parabolæ $A FE$, latus rectum AL , dicatur A ; parabolæ $A BB$, latus rectum sit B , & erit ex harum curvarum naturâ $A \times AC = CE^2$ & $B^2 \times AC = CB^3$, adeoque $AC = CE^2 : A = CB^3 : B^2$, unde reperitur $CB^3 = CE^2 \times B^2 : A$, & CB ad $B^2 : A = CE^2$ ad CB^2 ergo cum erit $CB = B^2 : A$, tunc erit $CE^2 = CB^2$, atque adeo parabolæ AEE , ABB , ordinatam habebunt communem quæ dicatur QF , & sese interfecabunt in puncto F ; jam verò si fuerit CB minor quam $B^2 : A$, erit quoque CE^2 minor quam CB^2 , adeoque CE minor quam CB ; sed omnes ordinatæ inter verticem A , & ordinatam communem QF , (quæ est $= B^2 : A$) minores sunt eâ, ergo omnes CE inter A & F comprehensæ sunt minores ordinatis correspondentibus CB ; tota igitur

parabolæ Apollonianæ portio $A EF$, quæ ordinatæ CE terminatur, cadit intrâ portionem $A BF$, alterius parabolæ, ac proinde angulus contactus BAD , semper minor est angulo contactus EAD , cum ergò angulus EAD , aucto in infinitum latere recto AL , possit sine fine minui, manifestum est angulum contactus BAD , quovis angulo dato EAD , infinitè minorem esse. $Q. e. D.$

133. Ad eundem axem AC , & verticem A , successive describantur curvæ AEE , ejus naturæ, ut abscissarum AC , & ordinarum CE , relatio exprimitur æquatione generali $A^m AC = CE^{m+1}$. Si loco exponentis, m , successive ponantur in æquatione numeri quilibet positivi, integri vel fracti continuo crescentes vel decrecentes, obtinebuntur infinitæ series diversæ angulorum contactuum, quorum quilibet est infinitè minor priorè, dum numerus, m , semper crescit, & infinitè major dum numerus, m , semper decrecit. Dem. Numerus, m , augetur numero positivo, n , integro vel fracto, & describatur curva ABB , cujus æquatio sit $B^{m+n} \times AC = CB^{m+n+1}$. Ex hac æquatione & superiori $A^m AC = CE^{m+1}$, reperitur $AC = CB^{m+n+1} : B^{m+n} = CE^{m+1} : A^m$, adeoque $CB^{m+n+1} = CE^{m+1} \times B^{m+n} : A^m$ atque CB^n ad $B^{m+n} : A^m = CE^{m+1}$ ad CB^{m+1} ; sit $CB^n = B^{m+n} : A^m$, & erit $CB^{m+1} = CE^{m+1}$, adeoque $CB = CE = QF$. Quare cum inter verticem A , & communem ordinatam QF , omnes ordinatæ sint minores ipsâ QF , patet ut suprâ (132), totam portionem $A EF$, curvæ AEE , cadere intrâ portionem $A BF$, alterius curvæ ABB , ac proinde angulum contactus BAD , quovis dato angulo contactus EAD infinitè minorem esse, & reciprocè angulum EAD , esse angulo BAD infinitè majorem. $Q. e. D.$

nullus per punctum A inter tangentem AD & curvam AB duci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor circularibus. ^(k) Et simili argumento si fiat DB successive ut AD^4 , AD^5 , AD^6 , AD^7 , &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat DB successive ut AD^2 , $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediarum inferi, quorum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si inter terminos AD^2 , & AD^3 , inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{7}}$, $AD^{\frac{9}{8}}$, $AD^{\frac{7}{9}}$, $AD^{\frac{5}{10}}$, $AD^{\frac{3}{11}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inferi potest series nova angulorum intermediarum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

(1) Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies

cur-

^(k) 134. In æquatione $A^m \times AC = CE^{m+1}$, loco exponentis m , successive ponantur numeri 1, 2, 3, 4, 5 &c., & erit AC successive, ut CE^2 , CE^3 , CE^4 , CE^5 &c., & habebitur (133) series angulorum contactus pergens in infinitum quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Loco m substituantur successive numeri decrescentes, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. erit AC , successive ut CE^2 , $CE^{\frac{3}{2}}$, $CE^{\frac{4}{3}}$, $CE^{\frac{5}{4}}$, &c., & habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum circularibus (132), secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore (133). Loco m , substituantur numeri 1, $1 + \frac{1}{6}$, $1 + \frac{1}{7}$, $1 + \frac{1}{8}$, $1 + \frac{1}{9}$, $1 + \frac{1}{10}$, $1 + \frac{1}{11}$, $1 + \frac{1}{12}$, $1 + \frac{1}{13}$, $1 + \frac{1}{14}$, $1 + \frac{1}{15}$, &c., erit AC , suc-

cessive ut CE^2 , $CE^{\frac{13}{6}}$, $CE^{\frac{11}{7}}$, $CE^{\frac{9}{8}}$, $CE^{\frac{7}{9}}$, $CE^{\frac{5}{10}}$ &c., & habebitur series infinita angulorum contactus, quorum quilibet posterior est infinite minor priore (133), & inter binos quosvis angulos hujus alteriusve seriei inferi potest series nova angulorum intermediarum ab invicem infinitis intervallis differentium; ut enim ea series inveniatur, sufficit inter duos numeros datos, v. G. 1, $1 + \frac{1}{6}$, seriem invenire numerorum crescentium vel decrescentium, quorum quilibet major sit altero ex numeris datis, minor altero, quod facillimum est.

(1) 135. Id exemplo facili illustrare satis erit. Pyramidis & coni sit idem vertex eademque altitudo, & basis pyramidis sit polygonum inscriptum circulo qui basis est conii, numerus laterum polygoni augeatur, & eorum longitudo minuatur in-

DE MOTU
CORPO-
RUM.

curvas & contenta. (m) Præmissi verò hæc lemmata, ut effugerem tædium deducendi longas demonstrationes, more veterum geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium. Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minus geometrica censetur; (n) malui demonstra-

tratum vel circumscriptorum à circulo differentia foret quavis datâ magnitudine minor; quia verò hæc polygonia sunt ut quadrata diametrorum circularum quibus inscribuntur vel circumscribuntur, circulos pariter esse ut quadrata diametrorum concludebant. Varios infinitorum ordines supponit illud idem theorema licet non adverterent veteres. Nam considerabant polygonia circulis inscripta tanquam composita ex infinitis numero atque infinite parvis seu evanescentibus lateribus; manifestum autem est differentiam polygoni inscripti à circulo quavis datâ minorem componi ex infinitis numero atque infinite parvis seu evanescentibus circuli segmentis quorum latera polygoni sunt chordæ; hæc verò segmenta sunt minimæ quantitates illæ quas secundi ordinis infinitesimas dicunt Recentiores. Hic pedem fixerant veteres, primusque longius progredi ausus est celeberrimus Geometra Bonaventura Cavalieri qui anno 1635. indivisibilium methodum in geometriam introduxit. Hoc primum posuit suæ methodi decretum, lineas nempe ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, & solida ex infinitis superficiebus; Deinde indivisibilia illa elementa totamque eorum summam comparat in unâ magnitudine cum singulis elementis eorumque summâ in aliâ magnitudine, & sic duarum magnitudinum rationem determinat. Hæc autem quantitatum indivisibilium hypothesis durior minusque geometrica Newtono visa est.

(m) 136. Quam magnos progressus geometria fecerit hinc cognoscere licet. Veteres geometræ in iis questionibus quæ infiniti considerationem involvunt, suas demonstrationes ad absurdum revocabant & ex falsis suppositionibus verum eruebant. Ut inter duas quantitates quæ ad æqualitatem constanter vergunt, & tandem propius ad invicem accedunt quàm pro datâ quavis differentiâ rationem æqualitatis intercedere demonstrarent, prius supponebant inter eas quantitates esse vel majoris vel minoris inæqualitatis rationem, deinde utrumque falsum demonstrabant, & ex hæc reductione quam ad absurdum vocant, inter illas quantitates perfectam æqualitatem esse concludebant. Quam autem perplexus sit & tædiosus hic demonstrandi modus nemo non videt. Verùm licet imperfecta admodum fuerit veterum geometria, non iis tamen omnino ignota fuerunt methodi infinitesimalis principia. Quantitates infinite parvas seu evanescentes pro nihilo habendas esse in multis demonstrationibus tanquam axioma posuerunt Euclides & Archimedes; in exemplum afferemus unicum vulgaris Geometriæ theorema. Ut demonstrarent circulos esse inter se ut quadrata diametrorum, fingebant iis circulis inscripta esse vel circumscripta polygonia similia quorum latera numero augerentur & longitudine minuerentur in infinitum, ita ut polygonorum inscrip-

torum vel circumscriptorum à circulo differentia foret quavis datâ magnitudine minor; quia verò hæc polygonia sunt ut quadrata diametrorum circularum quibus inscribuntur vel circumscribuntur, circulos pariter esse ut quadrata diametrorum concludebant. Varios infinitorum ordines supponit illud idem theorema licet non adverterent veteres. Nam considerabant polygonia circulis inscripta tanquam composita ex infinitis numero atque infinite parvis seu evanescentibus lateribus; manifestum autem est differentiam polygoni inscripti à circulo quavis datâ minorem componi ex infinitis numero atque infinite parvis seu evanescentibus circuli segmentis quorum latera polygoni sunt chordæ; hæc verò segmenta sunt minimæ quantitates illæ quas secundi ordinis infinitesimas dicunt Recentiores. Hic pedem fixerant veteres, primusque longius progredi ausus est celeberrimus Geometra Bonaventura Cavalieri qui anno 1635. indivisibilium methodum in geometriam introduxit. Hoc primum posuit suæ methodi decretum, lineas nempe ex infinitis punctis constare, superficies ex infinitis lineis, & solida ex infinitis superficiebus; Deinde indivisibilia illa elementa totamque eorum summam comparat in unâ magnitudine cum singulis elementis eorumque summâ in aliâ magnitudine, & sic duarum magnitudinum rationem determinat. Hæc autem quantitatum indivisibilium hypothesis durior minusque geometrica Newtono visa est.

(n) 137. Newtonus ut indirectas & perplexas vitaret veterum demonstrationes, earum tamen certitudinem & evidentiam conservaret, veterum principium Lemmate primo generaliter expressit, illudque in Lemmatis sequentibus ad curvas generatim applicavit, & inde directas perbrevesque

trationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites (°) summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes quâ potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium (P) determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendere posset nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, pervenientis (9) velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: Per

velo-

vesque demonstrationes in toto operis decursu deduxit. Ut autem methodi indivisibilium breviter assequeretur, tutius tamen & accuratius procederet, loco indivisibilium evanescentia divisibilia substituit, & quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas considerat; supponit nimirum lineas describi ac describendo generari non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, & solida per motum superficialium, angulos per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum & sic in cæteris.

(°) 138. Ubi area curvilinea in parallelogramma rectilinea dividitur, & eorum numerus augetur atque latitudo minuitur in infinitum, horum parallelogrammorum summa (Lem. 2.), nunquam potest esse major area curvilinea, sed hæc

Tom. I.

area est terminus ad quem parallelogrammorum decrecentium summa semper accedit & quem tandem attingit, ubi parallelogramma evanescent aut nascuntur. Idem dicendum de evanescentibus curvarum chordis respectu perimetri curvilineæ.

(P) 139. Quantitates evanescentes concipi non debent velut determinatæ aut determinabiles quædam portiones quantitatum quæ certam & definitam parvitatem obtineant. Quasvis enim portiunculas linearum, superficialium aut corporum acceperimus aut designaverimus, hæc semper reipsa finitæ erunt, non evanescentes; itaque non sunt intra certos terminos quantumvis proximos coarctandæ, undè hæc quantitates semper ut decrecentes ac perpetuò diminuendæ accipi debent.

(9) 140. Exempli causâ, gravis fursum projecti & ad altissimum locum pervenientis.

L

141.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

velocitatem ultimam intelligi eam, quâ corpus movetur, neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quâcum corpus attingit locum ultimum & quâcum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum, non antequam evanescent, non postea, sed quâcum evanescent. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quâcum nascuntur. Et summa prima & ultima est quâcum esse (vel augeri aut minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, problema est verè geometricum eundem determinare. Geometrica verò omnia in aliis geometricis determinandis ac demonstrandis legitimè usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex indivisibilibus, contra quam *Euclides* de incommensurabilibus, in libro decimo elementorum, demonstravit. Verum hæc obiectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescent, revera non sunt rationes quantitatum (*) ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decreascentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quam pro datâ quâ-

(*) 141. Seu, quantitatum determinatarum & indivisibilium, sed &c.

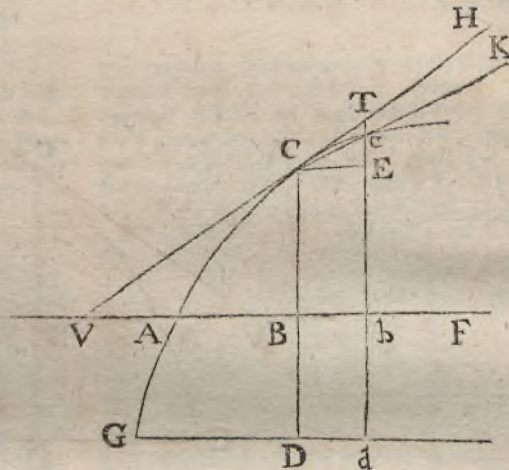
142. Ut quantitatum evanescentium aut nascentium relationes atque proprietates inveniatur, considerantur quantitates finitæ, harum investigantur relationes & proprietates & lex quâ continuè crescunt vel decreascent; quibus cognitis facile intelligitur quanam proprietates quantitatum illis crescentibus ac decreascentibus semper convenient, adeoque & cum in infinitum minuuntur & evanescent vel cum nascuntur. Imò, verò ex Lemmate primo aliisque

sequentibus invenitur quanam sint proprietates quæ licet quantitatum finitis non convenient, evanescentibus tamen & nascentibus competunt, cum nempe quantitates finitæ decreascent ad illas proprietates, ut ita dicam perpetuè accedunt, & ad eas tempore dato accedunt magis quàm pro differentiâ quavis datâ.

Ex præcedentibus Lemmatis facile deducitur ac demonstratur Newtoniana fluxionum methodus cujus generalia principia ut potè nobis in posterum profutura breviter explicabimus.

quâvis differentiâ, nunquam verò transgredi, neque priùs attingere quàm quantitates diminuuntur in infinitum. Res clariùs intelligetur in infinitè magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen idèò dabuntur quan-

143. Quantitates indeterminatæ quæ continuò crescunt vel decrescunt, variables aut fluentes dicuntur; constantes verò aut determinatæ vocantur, quæ aliis continuò crescentibus vel decrescentibus, eadem manent. Ordinatæ BC , BD , super basi AF , motu sibi semper parallelo ità progrediantur, ut ordinatâ BD , eadem semper manente, punctum D , rectam GDd describat, & interim continuò crescente vel decrescente ordinatâ BC , punctum C describat curvam ACc ; abscissa AB , ordinatâ BC , curvæ arcûs Ac , arcûs ACB , $AGDB$, sunt quantitates indeterminatæ seu fluentes; recta verò BD , est quantitas constans.



144. Quantitates fluentes, ut AB , BC , æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori quâ crescunt, ac generantur, evadunt majores vel minores; Si enim punctum B , velociùs semper progrediatur quam punctum C , in lineâ BC , incrementa Bb , fluentis AB , majora erunt incrementis Ec , fluentis BC , eodem tempore genitis. Velocitates quibus illa incrementa ut Bb , Ec , eodem tempore genita, primò nascuntur, dum nempe b , c , coincidunt cum B , C , dicuntur fluxiones, & methodus ex fluentibus inveniendi fluxiones, methodus fluxionum directa vocatur; methodus verò ex fluxionibus inveniendi fluentes, methodus fluxionum inversa appellatur.

145. Velocitates quibus fluentium quantitatum incrementa eodem tempore genita, primò nascuntur, sunt uniformes... Dem... Cum curva ACc , motu puncti C , velocitate quâvis finitâ progredientis describi possit, si illius puncti veloci-

tas secundùm directionem CE , lineæ AB parallelam, supponatur uniformis, velocitas ejusdem secundùm directionem Ec , pro variâ curvæ ACc naturâ, varia quidem erit in diversis curvæ punctis v.gr. in C , & c ; sed quò magis punctum c , ad C , accedet, eò minor erit velocitatis secundùm directionem Ec , variatio in punctis C , & c , adeò ut dum punctum c , coincidit cum puncto C , omnis velocitatis per Ec , variatio expiret. Quare (Lem. 1.) velocitates quibus fluentium incrementa eodem tempore genita primò nascuntur, sunt uniformes. Q. e. D.

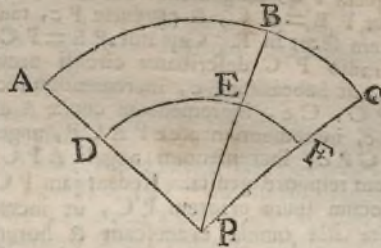
146. Cum ergò velocitates uniformes sint spatiis eodem tempore percurrendis proportionales (5), manifestum est fluxiones (143) esse in ratione incrementorum eodem tempore genitorum, dum primò nascuntur vel ultimò evanescent; adeòque ut fluxionum relatio inveniatur sumere oportet incrementa fluentium eodem tempore genita, & primam eorum incre-

$A C$, sunt (146.) ut trianguli CET , latera CE , ET , & CT , & per eadem latera exponi possunt, vel quod perinde est, per latera VB , CB , & VC , trianguli VBC , similis triangulo CET .

151. Quoniam area $BbcC$, $BbdD$, eodem tempore describuntur communi ordinatarum BC , BD motu, erunt areae illae nascentes vel evanescentes ut fluxiones arearum ACB , $ABDG$, (146); sed area nascens $BbcC$, non differt à parallelogrammo BE , (107); ergò fluxiones arearum ACB , $ABDG$, sunt in ratione primà parallelogrammorum BE , Bd nascentium, seu ob commune latus Bb , in ratione ordinatarum CB , Bd .

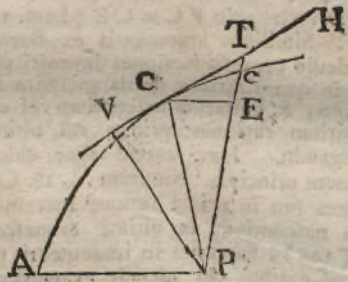
152. Si circulus centro B , radio fluentis BC , descriptus per longitudinem abscissae AB , ad angulos rectos progrediat, describet solidum idem quod ex rotatione figuræ ACB , circa axem AB generaretur, & fluxio solidi geniti erit ut factum ex area circuli illius in incrementum nascens Bb , abscissae AB , & fluxio superficiei solidi geniti erit ut factum ex perimetro ejusdem circuli in arcum Cc , vel tangentem CT , nascentem... Dem... Rectangulum nascens BE , non differt à figurâ $BbcC$ nascente (107), adeòque incrementum nascens solidi ex rotatione figuræ ACB , geniti æquale est solido ex rotatione rectanguli BE , circa latus Bb , genito; hoc autem solidum est cylindrus æqualis factus ex area circuli radio CB descripti in altitudinem Bb ; solidi igitur motu circuli CB per axem AB geniti incrementum nascens adeòque & ipsius fluxio (146) est ut factum ex area circuli in incrementum nascens Bb , abscissae AB . Similiter cum arcus nascens Cc , cum tangente CT coincidat, (Lem. 7.) superficies nascens ex rotatione figuræ $BbcC$, genita æqualis est superficiei conii truncati, adeòque æqualis factus ex semisumma peripheriarum, quarum sunt radii BC , $b c$, in latus CT , seu ob $b c = BC$ (107) æqualis factus ex peripheriâ circuli, cujus radius BC , in latus CT , vel arcum cc nascentem; ergò factum istud est incrementum nascens superficiei curvæ ex rotatione AC descriptæ, adeòque est ut illius superficiei fluxio (146) Q. e. D.

153. Anguli rectilinei APB , EPF , sunt inter se directè ut arcus AB , EF ,



qui angulos subtendunt & reciprocè ut arcum radii AP , EP ... Dem... est angulus APB , ad angulum BPC , seu EPF , ut arcus AB , ad arcum BC , adeòque ut $AB : AP$, ad $BC : AP$; sed ob arcus similes BC , EF , est $BC : AP = EF : EP$; ergò angulus APB , est ad angulum EPF , ut $AB : AP$, ad $EF : EP$. Q. e. D.

154. Hinc sequitur 1º. quemlibet angulum APB exprimi posse arcu AB qui ipsum subtendit diviso per radium AP . 2º. Quemlibet arcum circuli AB , esse ut factum ex angulo APB in radium AP , atque adeò hoc factum exprimi posse. 3º. Incrementum nascens anguli fluentis APB , adeòque & illius anguli fluxionem (146) esse in ratione directâ arcus circularis nascentis & inversâ radii illius.



155. Recta PC fluens circa datum polum P revolvatur, & punctum illius extremum C , curvam $ACCc$, describat quam tangit in C recta VCH in quam ex polo P , demissa sit perpendicularis PV . Sit A punctum in curvâ $ACCc$ fixum, progrediatque recta PC de loco

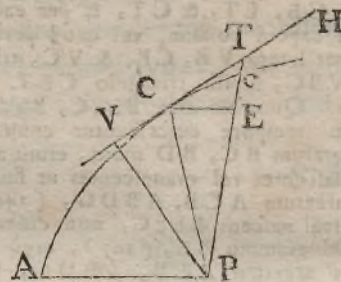
DE MOTU
CORPO-
RUM.

co suo PC , in locum novum Pc , & producta Pc , tangentem secet in T . Capiatur $PE = PC$, & producta Pc , tangentem secet in T . Capiatur $PE = PC$, seu radio PC describatur circuli arcus CE , ut habeantur Ec , incrementum rectæ PC , Cc , incrementum curvæ Ac , PCc , incrementum areæ $PACP$, angulus CPc , incrementum anguli APC , eodem tempore genita. Redeat jam PC , in locum suum priorem PC , ut incrementa illa omnia evanescant & horum incrementorum evanescentium ratio ultima erit ratio fluxionum quantitatum fluentium quarum sunt incrementa (145).

156. Quoniam autem perveniente Pc , in locum PC , triangula CEc , CET , evanescentia sunt ultimò similia & æqualia (Lem. 8.) circuli arcus CE , cum chorda ipsius coincidit, ipsique æqualis est (Lem. 7), & præterea evanescente angulo CPE , anguli PCE , PEC , sunt inter se & duobus rectis æquales, adeoque CE , ad PT , normalis. Manifestum est....

1^o. Triangulum TVF esse triangulo TEC , adeoque & triangulo evanescenti CEC , simile, ac proinde fluxiones arcus AC , & rectæ PC , esse inter se ut duo latera VT , TP , seu VC , PC ... 2^o. Fluxionem anguli APC , esse ut $CE : PC$ (154)... 3^o. Fluxionem areæ ACP , esse ut factum ex rectâ CP , in normalem CE evanescentem; nam area trianguli $PC T$, æqualis dimidio rectangulo $PT \times CE$, seu ob evanescentem ET , dimidio rectangulo $PC \times CE$ (Lem. 1.).

157. Similibus argumentis ex fluentibus calculo expressis fluxiones inveniri possunt, in quantitibus finitis analysim insituendo, & finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel ultimas investigando. Hæc autem sunt calculi fluxionum principia. Nimirum... 1^o. Cum fluxiones sint in primâ ratione incrementorum nascentium & ultimâ evanescentium (146), fluxiones iis incrementis primò nascentibus vel ultimò evanescentibus possunt exprimi... 2^o... Quantitates quæ nonnisi suo incremento nascente aut evanescente differunt sunt æquales (Lem. 1.)... 3^o... Quantitatum constantium nullæ sunt fluxiones, nulla incrementa vel decremента... 4^o. Si inter quantitates indeterminatas, aliqua decrescant, dum aliæ crescunt, decremcentium



fluxiones sunt negativæ, sunt enim ut incrementa negativæ, seu ut decremента.

158. Quantitates fluentes designantur ultimis alphabeti litteris x, y, z, v ; constantes indicantur aliis a, b, c &c. fluentium fluxiones primas aut ipsis proportionalia incrementa nascentia vel evanescentia Newtonus notat iisdem litteris quibus fluentes exponuntur, sed iis punctuatis sic $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{v}$; Leibnitiu litteram d , incrementi nascentis vel evanescentis notam characteristicam fluentibus præponit sic dx, dy, dz, dv . Fluxiones secundæ designantur sic $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{v}$, vel sic $ddx, ddy, dddx, dddv$, vel sic d^2x, d^2y, d^2z, d^2v , & ita deinceps in infinitum.

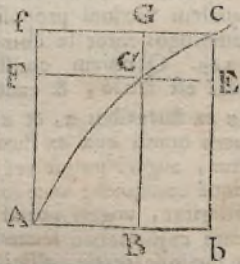
159. Fluxio quantitatis ex pluribus terminis per additionem vel subtractionem compositæ, æqualis est omnibus singulorum terminorum fluxionibus per eadem signa + vel - junctis; ita fluxio quantitatis compositæ $a + z - y$, erit $dz - dy$... Dem... Totius quantitatis $a + z - y$, incrementum tempore dato genitum æquale est differentiæ incrementorum ipsarum z & y , cum nullum sit constantis a , incrementum (156) adeoque incrementum nascentis vel evanescentis quantitatis $a + z - y$, æquale est differentiæ incrementorum nascentium vel evanescentium ipsarum z & y , sed fluxiones sunt in primâ ratione incrementorum nascentium (145), ergo fluxio totius quantitatis $a + z - y$, est $dz - dy$. Q. e. D. Si crescente quantitate z , decresceret y , ipsius y , fluxio foret negativâ nempe $-dy$ (157) adeoque fluxio

dz

$dz - dy$, foret $dz + dy$. Quod in sequentibus semper est observandum.

160. Fluxio quantitatis fluentis ex pluribus variabilibus per multiplicationem compositæ, æqualis est summæ factorum ex singularum variabilium componentium fluxionibus in aliarum variabilium facta ductis, hoc est fluxio quantitatis xy , est $z dy + y dz$, fluxio quantitatis az est adz , fluxio quantitatis zyx est $y x dz + z y dx + x z dy + z y dx \dots$ Dem...

Recta CB, fluens super rectâ AB cui normalis est, progrediatur, illiusque punctum extremum C, describat curvam ACc, perveniat BC in locum bc, & compleantur rectangula BF, bf, BE, cf, EG;



AB, dicatur z , BC dicatur y , adeoque rectangulum BF erit zy . Dum BC, pervenit in bc, incrementum rectanguli BF seu zy , æquale est summæ rectangulorum BE, EG, CF; est autem rectangulum EG, ad rectangulum EB, ut Ec ad BC, & ad rectangulum Cf ut CE, vel Bb, ad FC, seu AB; quare redeunte bc, in locum suum priorem BC, & de crescentibus continuo Ec, & EC atque tandem ultimo evanescentibus, decrescit quoque & tandem evanescit, seu fit insignabilis ratio rectanguli EG, ad rectangula EB & cf; adeoque (Lem. 1.) summa duorum rectangulorum BE, cf, fit ultimo æqualis summæ trium rectangulorum BE, EG, CF; ergo incrementum nascens rectanguli BF, seu zy , æquale est summæ duorum rectangulorum BE, CF, nascentium, seu summæ factorum ex z , in incrementum nascens ipsius y , & ex y , in incrementum nascens ipsius z , adeoque fluxio facti xy (146) est $z dy + y dz$. Unde etiam fluxio az , est adz , quia a , constans nullam habet fluxionem. Q. e. D.

Jam in facto zyx ponatur $zy = v$, & erit $zyx = vx$, adeoque fluxio facti zyx æqualis fluxioni facti vx ; fluxio autem facti vx , est $x dv + v dx$, & fluxio facti $zy = v$, est $z dy + y dz = dv$, id est si in fluxione $x dv + v dx$, pro v & dv scriban-

tur zy , & $z dy + y dz$, fluxio facti zyx , nempe $x dv + v dx$, erit $xz dy + y x dz + z y dx$; & par est ratio aliorum factorum quorumcumque Q. e. D.

LIBER PRIMUS.

161. Cor. 1... Ponantur singulæ fluentes z, y, x , &c. sibi mutuo semper æquales & ipsius $z z$, fluxio erit $z dz + z dz = 2z dz$: fluxio cubi z^3 erit $z z dz + z z dz = 3z z dz = 3z^{2-1} dz$: fluxio potentie z^n erit $nz^{n-1} dz = nz^{n-1} dz$; & eodem argumento fluxio potentie cujuscumque z^m erit $mz^{m-1} dz$.

162. Cor. 2... Fluxio quantitatis $z^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}-1} dz = \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$ nam ponatur

$z^{\frac{1}{2}} = y$ & erit $z = y^2$, $dz = 2y dy$

(161) $dy = d(z^{\frac{1}{2}}) = dz : 2y = dz : 2z^{\frac{1}{2}}$ & generaliter fluxio quantitatis z^m : n est $\frac{m}{n} z^{\frac{m}{n}-1} dz = \frac{m}{n} z^{\frac{m-n}{n}} dz$.

163. Cor. 3... Fluxio fractionis $z : y$ seu zy^{-1} est $y dz - z dy : yy$. Nam fiat $z : y = x$, erit $z = yx$, $dz = y dx + x dy$ & $dx = dz : y - x dy : y = dz : y - z dy : yy = y dz - z dy : yy$: fluxio quantitatis $az^m y^n$ est $am y^n z^{m-1} dz + anz^m y^{n-1} dy$ (160).

164. Fluxiones secundæ ex primis fluxionibus, tertie ex secundis, iisdem regulis colliguntur quibus primæ fluxiones ex fluentibus finitis eruuntur. Ubi tamen sic pergitur ad fluxiones secundas, tertias & sequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare, & pro ejus fluxione primâ unitatem scribere, pro secundâ verò & sequentibus nihil (148). Exemplum unicum afferemus; sit quærenda fluxio fluxionis $y dy : dx$, supponendo quantitatem x uniformiter fluere, adeoque dx constantem seu $= 1$, invenitur fluxio $y ddy + dy^2 : dx$.

165. Ex fluxionibus fluentes inveniuntur operationes influendo iis contrarias quibus ex fluentibus reperientur fluxiones; quare, litterâ S, significante fluentem fluxionis cui præponitur seu summam primam incrementorum nascentium, vel ultimam evanescentium (147) methodi fluxionum inversæ fundamentales formulæ erunt.

1. S.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

1. S. $dx = z$. & S. $adz = az$. S. $dz : a$
 $= z : a$.

2. S. $mz^{m-1} dz = z^m$,
& S. $maz^{m-1} dz = az^m$,

& S. $\frac{m}{n} z^{m-n} dz = z^m : n$.

3. S. $(dz + dy) = z + y$.

4. S. $(z dy + y dz) = yz$.

& S. $(a^m y^n z^{m-n} dz + a n z^m y^{n-1} dy)$
 $= az^m y^n$.

5. S. $(y dz - z dy) : yy = z : y$.

166. Si fluxio cujus fluens quaeritur nulli harum formularum similis fuerit, per novarum variabilium substitutionem aliasque artes quas hic tractare nobis non licet, ad illas saepe reduci potest. Sit in

exemplum fluxio $cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx$, ponatur $cb + cx^{\frac{1}{2}} = z$ & erit $cb + cx^{\frac{1}{2}} = z$, & $cdx = z dz$, & $dx = \frac{z dz}{c}$

adeoque $cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx = z z dz : c$.

Hæc autem fluxio similis est formulæ $maz^{m-1} dz$, estque $z^2 = z^{m-1}$, adeoque

$m=3$, $ma=3a=2:c$, & $a=2:3c$, adeoque S. $maz^{m-1} dz = az^m = 2z^3 : 3c$

loco z , scribatur ipse valor $cb + cx^{\frac{1}{2}}$,

& inveniatur S. $cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx = \frac{2}{3c} (cb + cx) \times cb + cx^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (b + x)$

$\times cb + cx^{\frac{1}{2}}$.

167. Superiorum formularum auxilio ex fluxionibus secundis primæ, ex tertiis secundæ &c. inveniuntur. Exempla sint

S. $ddx = dx$. S. $dx.ddx = \frac{1}{2} dxdx = \frac{1}{2} dx^2$.

Nam ponatur $dx = y$, & erit $ddx = dy$, & $dx.ddx = ydy$, & per

formulam secundam inveniatur S. $ydy = \frac{1}{2} yy$, & si loco y substituatur ipse

valor, dx , erit S. $ydy = S. dx.ddx = \frac{1}{2} dx^2$. Similiter, S. $(dy^2 + yddy) :$

$dx = ydy : dx$, supponendo dx constantem, nam fiat $ddy = dv$, adeoque dy

$= v$, & fluxio proposita evadet, $vdy + ydv : dx$, cujus fluens (per formulam 4^{am})

est $vy : dx$, ob dx constantem. Cum

autem sit $v = dy$, erit $vy : dx = ydy : dx$.

168. Postquam fluentes ex fluxionibus collectæ sunt, si de veritate conclusionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum vicissim colligendæ sunt, & cum fluxionibus sub initio propositis comparandæ. Nam si prodeunt æquales, conclusio recte se habet; sin minus, corrigendæ sunt fluentes sic, ut earum fluxiones fluxionibus sub initio propositis æquantur. Nam & fluens pro lubitu assumi potest, & assumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis assumptæ æqualem fluxioni propositæ, & terminos homologos inter se comparando.

169. Quoniam constantis quantitatis nulla est fluxio, & eadem proinde fluxio dz ex fluentibus z , & $z + a$, colligitur fluens omnis quæ ex fluxione primâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate aliquâ constante; quæ ex fluxione secundâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio secunda nulla est; quæ ex fluxione tertiâ colligitur, augeri potest vel minui quantitate cujus fluxio tertia nulla est. Et sic deinceps in infinitum.

170. Cum fluens composita, quæ ex propositâ fluxione collecta est, unicam variabilem includit, ut fluens $\frac{2}{3} (b + x) \times$

$bc + cx^{\frac{1}{2}}$, quæ (166) deducta est ex fluxione

$cb + cx^{\frac{1}{2}} \times dx$, ita determinari solet constans adjungenda vel detrahenda:

in fluente inventâ loco variabilis x , ponitur 0; tum si fluens ipsa sit etiam 0, completa est. Si quid verò residuum fuerit, ut hic remanet $+\frac{2}{3} b \sqrt{bc}$, hoc

residuum cum signo contrario fluenti primò inventæ adjicitur, ut habeatur fluens

completa, $\frac{2}{3} (b + x) \times bc + cx^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} b \sqrt{bc}$. Hujus regulæ ratio est, quod

fluens inventa supponi possit exhibere aream curvæ alicujus, cujus sit abscissa variabilis

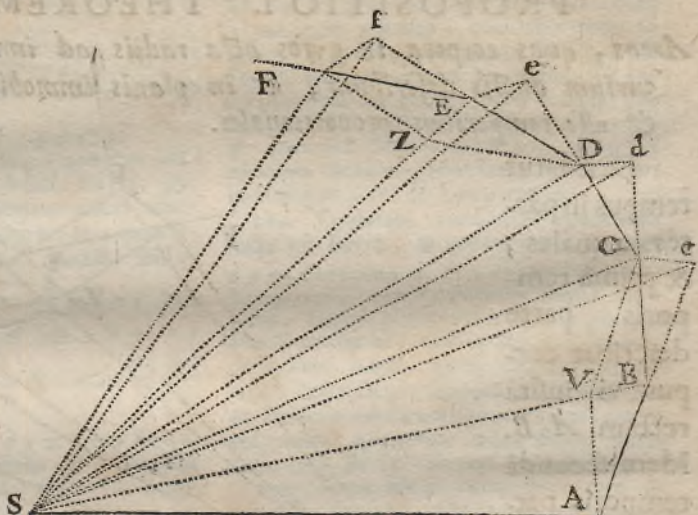
x , adeo ut dum $x=0$, area, fluente expressâ, sit etiam 0; undè si in fluente primò inventâ loco x , substituatur 0, sitque

aliquod residuum, illud ex fluente detrahi debet. Generaliter, quantitas constans adjicienda vel subducenda ex naturâ quaestionis determinatur, aut arbitraria est.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

etiam triangulo SAB . Simili argumento si vis centripeta successivè agat in $C, D, E, \&c.$ faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas $CD, DE, EF, \&c.$

jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC , & SDE ipsi SCD , & SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto



describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis $SADS, SAFS$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatür latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimenter ADF , (per corollarium quartum lemmatis tertii) erit linea curva: ideóque vis centripeta, quâ corpus à tangente hujus curvæ perpetuò retrahitur, agat indefinenter; areæ verò quævis descriptæ $SADS, SAFS$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. I. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistantibus reciprocè ut perpendicularum à centro illo in orbis tangentem rectilineam demissum. ^(b) Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E , ut sunt bases æ-

^(b) 172. Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E , ut sunt bases æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF , æqualibus temporibus uniformi motu

descriptæ (5); æqualium autem triangulorum bases sunt reciprocè ut eorum altitudines, hoc est, reciprocè ut perpendiculara ex centro virium S , in bases demis-

qualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF ; & hæ bases sunt reciproæ ut perpendiculara in ipsas demissa.

LIBER
PRIMUS.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successivè descriptorum chordæ AB, BC compleantur in parallelogrammum $ABCU$, & hujus diagonalis BU in eâ positione quam ultimò habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producat utrinque; (c) transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ AB, BC ac DE, EF compleantur in parallelogrammum $ABCU, DEFZ$; vires in B & E sunt ad invicem in ultimâ ratione diagonalium BU, EZ , ubi arcus isti in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC & EF componuntur (per legem corol. 1.) ex motibus Bc, BU & Ef, EZ : atqui BU & EZ , ipsis Cc & Ff æquales, in demonstratione propositionis hujus generantur ab impulsibus vis centripetæ in B & E , ideòque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus à motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbis curvos, sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bisecant ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. (d) Nam hæ sagittæ sunt semiffes diagonalium, de quibus egimus in corollario tertio.

Corol.

sa. Cum igitur evanescentibus triangulis ASB, BSC &c. ultima perimeter $ABCDEF$, sit linea curva quam (113) rectæ Ac, Bd, Ce, Df , tangunt in punctis A, B, C, D, E , manifestum est velocitates in illis punctis esse reciproce ut perpendiculara à centro S , in tangentes demissa.

(c) 173. Transibit eadem per centrum virium. Nam ex demonstratione propositionis hujus, sumptâ $BV=Cc$, erit VC , æqualis & parallela lineæ Bc , seu AB , adeòque VA, BC , erunt etiam æquales & parallele, & BV , quæ producta transit per centrum S , erit diagonalis parallelogrammi $ABC V$.

174. Si ducantur per puncta quævis $B, & D$, perimetri curvæ vel diversarum curvarum tangentes Bc, De , & demittantur angulorum contactuum subtensæ Cc, Ee , radiis SB, SD , ad centrum virium convergentibus parallelæ, sintque arcus BC, DE , æqualibus temporibus descripti, patet ex corollario 3. vires centripetas in B & D , esse ad invicem in ultimâ ratione subtensarum Cc, Ee .

(d) 175. Nam hæ sagittæ sunt semiffes diagonalium BV, EZ , diagonales enim AC, DF , quæ sunt chordæ arcuum evanescentium ABC, DEF , alias diagonales BV, EZ , bisecant.

Caf. 1. Nam corpus omne, quod movetur in lineâ curvâ, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem (per leg. 1.) Et vis illa, quâ corpus de cursu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima SAB , SBC , SCD , &c. circa punctum immobile S temporibus æqualibus æqualia describere, (^f) agit in loco B secundum lineam parallelam ipsi cC (per prop. XL. lib. 1. elem. & leg. 11.) hoc est, secundum lineam BS ; & in loco C secundum lineam ipsi dD parallelam, hoc est, secundum lineam SC , &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile S . *Q. E. D.*

Caf. 2. Et, per legum corollarium quintum, perinde est, five quiescat superficies, in quâ corpus describit figuram curvilineam, five moveatur eadem unâ cum corpore, figurâ descriptâ, & puncto suo S uniformiter in directum.

Corol. 1. In spatiis vel mediis non resistantibus, si areae non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum; (^g) sed indè declinant in consequentia, seu versus plagam in quam fit motus, si modo arcarum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol.

(^f) 177. Agit in loco B , secundum lineam parallelam ipsi Cc , hoc est, secundum lineam BS ; nam solâ vi insitâ in A , corpus uniformi cum motu progredietur per rectam ABc , & æqualibus temporibus æquales lineas AB , Bc , describeret; verum per vim centripetam in B , detorquetur à rectâ Bc , ut aliam rectam BC , eodem tempore describat quo descripsisset Bc ; adeoque junctâ Cc , vis centripeta agit in B , secundum directionem parallelam ipsi Cc (per coroll. 1. Leg.), sed ob $AB = Bc$, & ob triangulum SBC , æquale triangulo SAB , (per hyp.), erit triangulum $SAB =$ triang. $SBC =$ triang. SBC , adeoque per prop. 40. vel 39. lib. 1. Elem. communis triangulorum SBC , SBC æqualium basis BS , parallela est rectæ Cc , quæ illorum triangulorum vertices jungit; cum igitur, per demonstrata, vis centripeta in B , agat

secundum directionem parallelam lineæ Cc , necessum est ut agat secundum directionem rectæ BS , hoc est, ut tendat ad centrum S .

(^g) 178. Sed indè declinant in consequentia, si modo arcarum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia. Nam si triangulum SBC , æquale non est triangulo SAB , seu SBC , eodem tempore descripto, recta Cc , non erit parallela lineæ BS , sed producta cum lineâ SB , itâ converget ut tendat in plagam motus, si triangulum SBC , triangulo SBC , majus est, & tendat in plagam contrariam si triangulum SBC , triangulo SBC , minus. Quare vis centripeta in B , agens secundum directionem parallelam lineæ Cc , in primo casu declinat in consequentia, in secundo casu declinat in antecedentia.

Corol. 2. (h) In mediis etiam resistantibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant à concursu radiorum versus plagam, in quam fit motus.

Scholium.

Urgeri potest corpus à vi centripetâ compositâ ex pluribus viribus. In hoc casu sensus propositionis est, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum S. (i) Porro si vis aliqua agat perpetuò secundum lineam superficiæ descriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur à plano sui motus: sed quantitatem superficiæ descriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compositione virium negligenda est.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

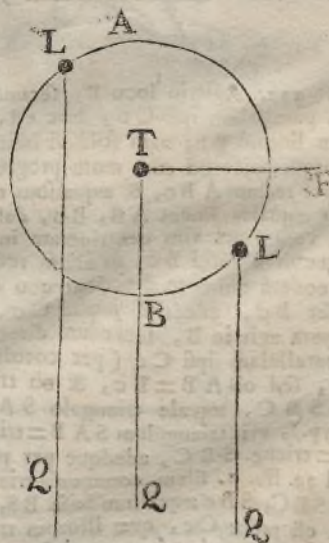
Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcumque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.

(k) Sit corpus primum L, & corpus alterum T: & (per

(h) 179. Cum enim medium resistat accelerationi descriptionis arearum, liquet arearum descriptionem etiam sublatâ medii resistantiâ accelerari oportere, ac proinde per Coroll. 1. virium directiones declinare à concursu radiorum, in S, versus plagam in quam fit motus.

(i) 180. Porro si vis illa perpetuò secundum lineam superficiæ descriptæ perpendicularem agat, planum subjectum duntaxat premit, & corpus in illo plano motum in neutram partem impellit, ac proinde nec superficiæ descriptæ quantitatem auget nec minuit, & propterea in compositione virium in plano agentium negligenda est.

(k) 181. Corpus L, circa alterum T, in curvâ ALB, ita revolvatur, ut circa illius centrum T, semper describat areas temporibus proportionales, dum interim corpus T, urgetur vi acceleratrice secundum directionem TQ, & per Leg. Coroll. 6. si vi novâ acceleratrice quæ æqualis & contraria sit illi quâ corpus T



secundum directionem TQ urgetur, urgea.

legum corol. VI.) si vi novâ, quæ æqualis & contraria sit illi; quâ corpus alterum T urgetur, urgeatur corpus utrumque secundum lineas parallelas; perget corpus primum L describere circa corpus alterum T areas easdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum T urgebatur, jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea (per leg. I.) corpus illud alterum T sibi met ipsi jam relictum vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum L urgente differentiâ virium, id est, urgente vi reliquâ perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum T describere. Tendit igitur (per theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum T ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus unum L radio ad alterum T ducto describit areas temporibus proportionales; atque de vi totâ (sive simplici, sive ex viribus pluribus juxta legum corollarium secundum compositâ) quâ corpus prius L urgetur, subducatur (per idem legum corollarium) vis tota acceleratrix, qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua, quâ corpus prius urgetur, tendet ad corpus alterum T ut centrum.

Corol. 2. Et, si areae illæ sunt temporibus quamproximè proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum T quamproximè.

Corol. 3. Et vice versa, si vis reliqua tendit quamproximè ad corpus alterum T , erant areae illæ temporibus quamproximè proportionales.

Corol. 4. Si corpus L radio ad alterum corpus T ducto describit areas, quæ cum temporibus collatæ sunt valde inæquales; & corpus illud alterum T vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum; nimirum quiescet, si nullâ aliâ vi præter acceleratricem secundum directionem TQ , antè urgebatur; movebitur verò æquabiliter per rectam aliquam TF , si præter vim acceleratricem per TQ , agentem, aliâ vi non acceleratrice ferebatur juxta directionem TF , &c.

geatur corpus utrumque secundum lineas parallelas QT , QL ; perget corpus L , describere circa corpus T , areas easdem ac prius; vis autem acceleratrix quâ corpus T urgebatur jam destruetur per vim sibi æqualem & contrariam; & propterea, per Leg. I. corpus illud T , sibi met ipsi jam relictum vel quiescet vel mo-

vebitur uniformiter in directum; nimirum quiescet, si nullâ aliâ vi præter acceleratricem secundum directionem TQ , antè urgebatur; movebitur verò æquabiliter per rectam aliquam TF , si præter vim acceleratricem per TQ , agentem, aliâ vi non acceleratrice ferebatur juxta directionem TF , &c.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

formiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum T tendentis vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subtractionem vis totius in corpus illud alterum T agentis.

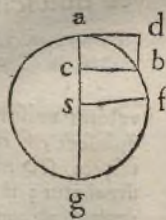
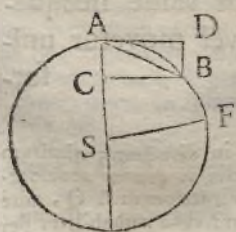
Scholium.

Quoniam æquabilis arearum descriptio index est centri, quod vis illa respicit, quâ corpus maximè afficitur, quâque retrahitur à motu rectilineo, & in orbita sua retinetur; quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem ut indicem centri, circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circularum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circularum radios.

(1) Tendunt hæ vires ad centra circularum per prop. II. & corol. 2. prop. I. & sunt inter se ut arcuum æqualibus tempo-



(1) 182. Corpora duo A & a , circulos $ABGA$, $abga$ æquabili motu

describant, & areæ seu sectores ASF , FSG , & asf , fsg , erunt in singulis circulis ut arcus AF , FG , & af , fg ; hoc est (§) ut tempora quibus describuntur, ac proinde vires quibus corpora A & a , in peripheriis $ABGA$, $abga$ retinentur tendunt ad centra S & s . Sint arcus AB , ab , æqualibus temporibus quam minimis descripti, & ductis tangentibus AD , ad , & ad eas perpendicularibus BD , bd , completisque parallelogrammis CD , cd , vires centripetæ in A & a , erunt inter se ut rectæ Db , db , seu ut sinus versæ AC , ac . (174). Verum

poribus quàm minimis descriptorum finus versi per corol. 4. prop. 1. hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circularum applicata per lem. VII. & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circularum.

Q. E. D.

Corol. 1. Cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ erunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum directè, & ratione simplici radiorum inversè. (m)

Corol. 2. (n) Et, cum tempora periodica sint in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, & ratione velocitatum inversè; (o) vires centripetæ sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè, & ratione duplicatâ temporum periodicorum inversè.

Corol. 3. (p) Unde si tempora periodica æquentur, & prop-

rim ductis chordis A B, a b, est A C : A B = A B : A G, & a c : a b = a b : a g, undè A C = $\frac{A B^2}{A G}$, & a c = $\frac{a b^2}{a g}$; cum igitur chordæ & arcus nascentes æquales sint (per Lem. VII.) erit A C : a c, hoc est, vis centripeta in A, ad vim centripetam in a, ut quadratum arcus evanescentis A B diametro A G divisum, ad quadratum arcus evanescentis, a b, diametro a g, divisum & propterea cum hi arcus & c.

(m) 183. Vis centripeta quâ corpus in peripheriâ circuli uniformiter incedens retinetur, est in omnibus peripheriæ punctis eadem, ut pote semper proportionalis constantis velocitatis quadrato ad radium constantem applicato.

(n) 184. Tempora periodica, hoc est, tempora quibus integræ peripheriæ describuntur sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum directè & ratione velocitatum inversè. Nam (5) velocitates sunt ut peripheriæ ad tempora periodica applicatæ, sed peripheriæ sunt ut radii, ergo velocitates sunt ut radii ad tempora periodica applicatæ, ac proinde tempora periodica sunt ut

Tom. I.

radii directè & velocitates inversè. Si corporum A & a, tempora periodica dicantur T & t, celeritates C & c, radii A S, a s, dicantur R & r, erit C : c = $\frac{R}{T}$: $\frac{r}{t}$ ideòque T : t = $\frac{R}{C}$: $\frac{r}{c}$.

(o) 185. Vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circularum radios; nam vires centripetæ corporum A & a, dicantur V & v, erit (per coroll. 1.) V : v = $\frac{C^2}{R}$: $\frac{c^2}{r}$, sed quoniam (184) C : c = $\frac{R}{T}$: $\frac{r}{t}$, adeòque $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$, erit $\frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, ergò V : v = $\frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$.

(p) 186. Undè si tempora periodica æquentur & propterea (184) velocitates sint ut radii, erunt etiam vires centripetæ ut radii, nam cum sit (185) V : v = $t^2 R : T^2 r$, si T = t, erit V : v = R : r.

N

Et

DE MOTU
CORPO-
RUM.

propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol. 4. (q) Si & tempora periodica, & velocitates sint in ratione subduplicatâ radiorum; (r) æquales erunt vires centripetæ inter se: & contra.

Corol. 5. (f) Si tempora periodica sint ut radii, & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproçè ut radii: & contra.

Corol. 6. (t) Si tempora periodica sint in ratione sesquipli-
catâ radiorum, & propterea velocitates reciproçè in radiorum
ratione subduplicatâ; (u) vires centripetæ erunt reciproçè ut
quadrata radiorum: & contra.

Corol.

Et contrâ si vires centripetæ sint ut radii, tempora periodica æquantur. Cum enim sit (185) $V:v = t^2 R:T^2 r$, si ponatur $V:v = R:r$, erit $R:r = t^2 R:T^2 r$, unde $r t^2 R = R T^2 r$, adeoque $t^2 = T^2$, & $t = T$.

(q) 187. Si tempora periodica sint in ratione subduplicatâ radiorum, velocitates erunt in eadem ratione. Nam (184)

$$C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t} \text{ adeoque } C^2:c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$$

Unde si fuerit $T:t = R^{\frac{1}{2}}:r^{\frac{1}{2}}$ ac proinde $T^2:t^2 = R:r$, erit $C^2:c^2 = R:r$.

Et contrâ si fuerit $C^2:c^2 = R:r$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = R:r$, adeoque $\frac{R}{T^2} = \frac{r}{t^2}$, & $R t^2 = r T^2$, unde $T^2:t^2 = R:r$.

(r) 188. Si & tempora periodica ac proinde velocitates (187) sint in ratione subduplicatâ radiorum, æquales erunt vires centripetæ inter se. Cum sit (185) $V:v = t^2 R:T^2 r$, si ponatur $T^2:t^2 = R:r$, erit $t^2 R = T^2 r$, unde $V=v$.

Et contrâ si $V=v$, cum sit (185) $V:v = t^2 R:T^2 r$, erit $t^2 R = T^2 r$, & proinde $T^2:t^2 = R:r$.

(f) 189. Si tempora periodica sint ut radii & propterea (184) velocitates æquales, vires centripetæ erunt reciproçè ut radii. Quoniam enim (per coroll. 1.)

$$V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}, \text{ si } C^2 = c^2, \text{ erit } V:v$$

$$= \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$$

Et contrâ si fuerit $V:v = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$, cum sit (coroll. 1.) $V:v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, erit $\frac{1}{R} : \frac{1}{r} = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$, adeoque $C^2 = c^2$, & $C = c$.

(t) 190. Si tempora periodica sint in ratione sesquipli-
catâ radiorum, erunt velocitates reciproçè in ratione radiorum subduplicatâ; nam quoniam (184) $C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeoque $C^2:c^2 = \frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2}$ si fuerit $T^2:t^2 = R^3:r^3$, erit $C^2:c^2 = \frac{R^2}{R^3} : \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = r:R$.

Et contrâ si fuerit $C^2:c^2 = r:R$, erit $\frac{R^2}{T^2} : \frac{r^2}{t^2} = r:R$, adeoque $\frac{R^3}{T^2} = \frac{r^3}{t^2}$ & $R^3:r^3 = T^2:t^2$.

(u) 191. Si tempora periodica sint in ratione sesquipli-
catâ radiorum & propterea (190) velocitates reciproçè in radiorum ratione subduplicatâ, vires centripetæ erunt reciproçè ut quadrata radiorum. Nam cum sit (185) $V:v = t^2 R:T^2 r$; si fuerit $T^2:t^2 = R^3:r^3$, erit $V:v = r^3 R : R^3 r = r^2 : R^2$.

Et contrâ si $V:v = r^2 : R^2$, erit (185) $r^2 : R^2 = t^2 R:T^2 r$ ac proinde $t^2 R^3 = T^2 r^3$, & $R^3:r^3 = T^2:t^2$.

Corol. 7. Et universaliter, si (x) tempus periodicum sit ut radii R potestas quælibet R^n , & propterea velocitas reciproce ut radii potestas R^{n-1} ; (y) erit vis centripeta reciproce ut radii potestas R^{2n-1} : & contra.

Corol. 8. (z) Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similibus, centraque in figuris illis similiter posita habentium, par-

(x) 192. Si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet R^n, r^n , velocitates erunt reciproce ut radiorum potestates R^{n-1}, r^{n-1} . Nam ponatur $T:t=R^n:r^n$, & quoniam (184)

$$C:c = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}, \text{ erit } C:c = \frac{R}{R^n} : \frac{r}{r^n}$$

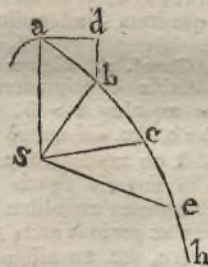
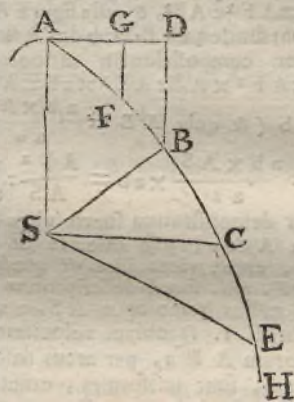
$$= \frac{1}{R^{n-1}} : \frac{1}{r^{n-1}} = r^{n-1} : R^{n-1}.$$

Et contra si fuerit $C:c=r^{n-1}:R^{n-1}$, erit $\frac{R}{T} : \frac{r}{t} = r^{n-1} : R^{n-1}$, adeoque $\frac{R^n}{T} = \frac{r^n}{t}$, undè $R^n:r^n=T:t$.

(y) 193. Et universaliter si tempora periodica sint ut radiorum potestates quælibet R^n, r^n , & propterea (192) velocitates reciproce ut radiorum potestates R^{n-1}, r^{n-1} , erunt vires centripetae reciproce ut radiorum potestates R^{2n-1}, r^{2n-1} . Nam ponatur $T:t=R^n:r^n$, adeoque $T^2:t^2=R^{2n}:r^{2n}$: & cum sit (185) $V:v=t^2R:T^2r$, erit $V:v=R^2r^2n:r^2R^2n$.

Et contra si fuerit $V:v=r^{2n-1}:R^{2n-1}$; cum sit $V:v=t^2R:T^2r$, erit $r^{2n-1}:R^{2n-1}=t^2R:T^2r$, adeoque $t^2R^2n=r^2R^2n$, undè $T^2:t^2=R^{2n}:r^{2n}$ & $T:t=R^n:r^n$.

(z) 194. Corpora A & a, figurarum similibus ABH, abh, centra S, s, in figuris illis similiter posita habentium, partes similes ABE, abe, ita describantur ut areæ ASB, ASC &c. asb, asc &c. circa centra S, s, in singulis figuris descriptæ temporibus quibus describuntur sint respectivé proportionales, & per prop. 11. vires centripetae ad centra S, s, tendent. Per puncta A & a, in curvis similiter posita agantur tangentes AD, ad,



sintque arcus minimi, AF, ab, eodem tempore in utraq; curvâ descripti, & ductis rectis FG, bd, radiis vectoribus AS, as, parallelis, vis centripeta in A, est ad vim centripetam in a, ut FG, ad bd, (174). Sumatur autem ar-

DE MOTU
CORPO-
RUM.

partes describunt, consequuntur ex demonstratione præcedenti-
tium ad hosce casus applicatâ. Applicatur autem substituendo
æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, & dif-
tantias corporum à centris pro radiis usurpando.

arcus AB similis ab, (ita ut sit $a s : A S :: a b : A B$, ac proinde sit $A B = \frac{a b \times A S}{a s}$) ducaturque BD radio AS

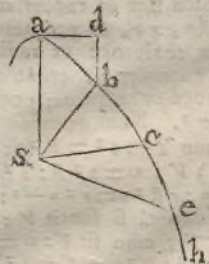
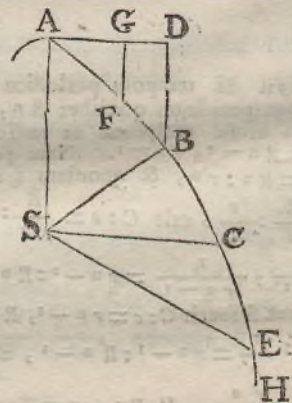
parallela, erit per coroll. 1. Lem. XI. $FG : BD = AF^2 : AB^2$, & quia figuræ ABD & a b d, sunt similes, est $BD : b d = AB : a b$, itaque per compositionem rationis est $FG : b d = AF^2 \times AB : AB^2 \times a b = AF^2 :$

$$A B \times a b \left(\& \text{quia } A B = \frac{a b \times A S}{a s} \right) \\ = A F^2 : \frac{a b \times A S}{a s} \times a b = \frac{A F^2}{A S} : \frac{a b^2}{a s}$$

Cum igitur demonstratum fuerit vires centripetas in A & a, esse inter se ut sunt GF, b d, erunt vires illæ ut quadrata arcuum AF, a b, simul descriptorum applicata ad radios homologos AS, a s.

195. Coroll. 1. Quoniam velocitates finitæ corporum A & a, per arcus nascentes AF, a b, sunt uniformes, erunt illæ ut arcus AF, a b, æqualibus temporibus descripti (5). Unde vires centripetæ in A, & a, erunt ut velocitatum in A & a, quadrata, ad radios AS, a s applicata.

196. Corol. 2. Figuræ similes ASE, a s e, divisæ concipiuntur in innumeros sectores æquales ASB, BSC &c., & a s b, b s c, &c. sibi mutuo in duabus figuris similes, & ob æquabilem arearum seu sectorum in singulis figuris descriptionem, sectores æquales æqualibus temporibus describentur ac proinde arcus AB, BC, & arcus a b, b c, &c. æqualibus respectivé temporibus percurrentur, erit igitur tempus per AB, ad tempus per a b, ut tempus per AE, ad tempus per a e, hoc est, tempora quibus describuntur arcus similes AB, a b, sunt ut tempora quibus describuntur alii quicumque similes arcus, AE, a e, adeoque ut tempora periodica. Cum igitur (195) velocitates in A & a, sint inter se ut arcus AB, a b, ad sua



respectivé tempora applicati, erunt quoque velocitates illæ inter se ut arcus AB, a b, seu ob figurarum similitudinem, ut radii AS, a s, ad tempora periodica applicati, id est, celeritates in punctis correspondentibus A & a, sunt in ratione compositâ ex ratione radiorum homologorum directè & ratione temporum periodicorum inversè, adeoque tempora periodica sunt ut radii directè & velocitates inversè.

197. Coroll. 3. Celeritates in A & a, dicantur

Corol. 9. (a) Ex eadem demonstratione consequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo tempore quovis describit, medius est pro-

LIBER
PRIMUS.

dicantur C, c , vires centripetæ V, v , radii vectores homologî R, r ; tempora periodica T, t , & erit (196) $C : c = \frac{R}{I} : \frac{r}{I^2}$, & $T : t = \frac{R}{C} : \frac{r}{c}$, & $C^2 : c^2 = \frac{R^2}{I^2} : \frac{r^2}{I^2}$. Et quoniam (195) $V : v = \frac{C^2}{R} : \frac{c^2}{r}$ erit $V : v = \frac{R}{I^2} : \frac{r}{I^2} = t^2 R : T^2 r = \frac{t^2}{T^2} : \frac{r}{R}$, hoc est, vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata temporum periodicorum ad radios homologos applicata. Cum igitur cætera omnia de temporibus, velocitatibus & viribus in circulis corollaria, ex superioribus proportionibus deducta sint, evidens est eadem omnia convenire temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcumque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt.

(a) 198. Corpus A, uniformiter revolvatur in circuli peripheriâ ABGA, & idem vel aliud corpus ex puncto A, per radium AS, eadem vi centripetâ quâ corpus A in circuli peripheriâ retinetur, continuè ita urgeatur ut (vi illâ centripetâ constanti permanente, quemadmodum fit in corporibus vi gravitatis constante cadentibus) corpus illud cadendo pereurrat AL, eodem tempore quo corpus A, uniformiter describit arcum AF. Quoniam vis acceleratrix per radium AS, constans est & continuè agit (per hyp.) corpus per AS, motu uniformiter accelerato cadit (25) & spætia percurfa sunt ut quadrata temporum quibus pereurruntur (27), ducatur per A, tangens AD, & sumpto arcu minimo AB, in tangentem demittatur perpendicularis BD, & compleatur rectangulum



CD, eodem tempore quo corpus A, æquabili motu describit arcum AB, per vim centripetam pereurrat DB, seu AC, (ex coroll. 3. Prop. 1^o.) erit igitur AC, ad AL, ut quadratum temporis per AB, ad quadratum temporis per AF, hoc est, ob motum in circulo æquabilem AC: AL = AB² : AF² = $\frac{AB^2}{AG} : \frac{AF^2}{AG}$; cum igitur ob arcum nascentem AB, suæ chordæ æqualem, sit AC = $\frac{AB^2}{AG}$, erit quoque AL = $\frac{AF^2}{AG}$ atque adeò AL × AG = AF² & proinde AL : AF = AF : AG.

199. Coroll. 1. Velocitas quâ corpus A, peripheriam circuli AFGA, uniformiter describit, æqualis est velocitati quam acquireret cadendo per dimidium radium AS, si vi centripetâ constanti continuè urgeretur æquali illi quâ corpus A in peripheriâ circuli retinetur: Nam sit AL altitudo per quam A cadere debet ut acquirat velocitatem quâ peripheriâ circuli describitur, sitque AF arcus eo tempore descriptus quo A cadit per AL eodem etiam tempore motu æquabili pereurreretur, 2 AL per velocitatem eam in L acquisitam (30), adeoque erit AF = 2 AL siquidem eodem tempore eademque celeritate æquabili pereurruntur, sed est semper AF² = AL × AG (198) cum igitur sit 2 AL = AF ac proinde 4 AL² = AF² erit 4 AL² = AL × AG & 4 AL = AG & AL = $\frac{AG}{4} = \frac{AS}{2}$.

200. Coroll. 2. Tempus revolutionis per integram peripheriam est ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidium radium, ut peripheria ad radium. Nam eodem tempore quo dimidius radius motu uniformiter accelerato pereurritur, totus radius describeretur cum æquabili velocitate lapsu per dimidium radium acquisitâ (30) eâ verò ipsa celeritate corpus circuli peripheriam

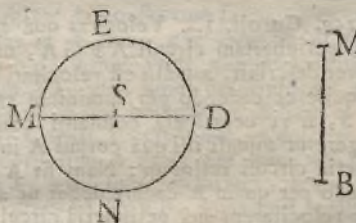
DE MOTU
CORPO-
RUM.

portionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis eâdem datâ vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scho-

(199) describit. Ergo cum spatia eâdem velocitate uniformi percursa, sint ut tempora (5) patet propositum.

201. Coroll. 3. Hinc datâ vi centripetâ quâlibet in datâ à centro distantia, facile est reperire velocitatem quâ corpus projici debet ut circâ prædictum centrum in datâ distantia circum uniformiter describat; velocitas enim illa æqualis est velocitati quam corpus acquireret cadendo per dimidiam distantiam à centro, si datâ vi centripetâ continuò urgeretur (199). Dato autem circuli radio, datur periphæria, & datâ æquabili in circulo velocitate cum periphæria, invenitur tempus periodicum, & arcus dato quovis tempore descriptus habetur.



202. Coroll. 4. Datis circuli radio & velocitate corporis in eo revolventis, facile colligitur proportio vis centripetæ in eo circulo ad vim quamlibet notam qualis est vis gravitatis. Primum enim invenitur tempus revolutionis unius in eo circulo peractæ (5), mox invenietur tempus quo corpus vi illâ centripetâ continuò sollicitatum per dimidium radium caderet (200). Ex datâ autem vi gravitatis seu ex dato spatio quod grave liberè cadendo, dato quodam tempore percurrit, invenitur (27) spatium ab eodem gravi percursum eo tempore quo corpus vi centripetâ sollicitatum per dimidium radium cadit, sed vires acceleratrices constantes, rationem habent spatiorum quæ dato tempore percurrere faciunt (30) est ergo vis ea centripetâ ad vim gravitatis, ut dimidius circuli radius ad spatium id quod grave percurreret eo tempore quo

corpus vi centripetâ sollicitatum dimidium illum radium percurrit.

Exempli causâ. Corpus M, ope fili MS clavo in S alligati, circâ centrum S uniformiter describat circum M N D E, in plano horizontali positum, eaque sit corporis revolventis celeritas quæ acquiritur à gravi per altitudinem M B cadente, quæritur ratio vis centripetæ in circulo ad vim gravitatis. Tempus quo grave cadit per altitudinem M B, dicatur T, & velocitas in B acquisita, quâ (ex hyp.) corpus M circuli periphæriam uniformiter describit, erit $\frac{2 M B}{T}$ (30), periphæria circuli dicatur p, & cum tempus periodicum in circulo sit æquale periphæriæ ad velocitatem $\frac{2 M B}{T}$ applicata (5)

erit id Tempus Periodicum $\frac{p \times T}{2 M B}$, jam verò est periphæria ad radium (200) ut tempus Periodicum ad tempus quo corpus M, solâ vi centripetâ constante sollicitatum, dimidium radium M S percurrit, sive $p : M S = \frac{p \times T}{2 M B}$ ad tempus per dimidium

radius quod est ideo $\frac{T \times M S}{2 M B}$. Cum autem grave tempore T altitudinem M B sit emensus & in motu uniformiter accelerato spatia percursa sint ut quadrata temporum quibus percurruntur (27) erit T^2 ad $\frac{T^2 \times M S^2}{4 M B^2}$, seu $4 M B^2$ ad $M S^2$ ut spatium M B tempore T percursum ad spatium percursum tempore $\frac{T \times M S}{2 M B}$, quo corpus, M, vi centripetâ percurrit dimidium radium, quod erit $\frac{M S^2 \times M B}{4 M B^2} = \frac{M S^2}{4 M B}$ est igitur (13) vis centripetâ in circulo ad vim gravitatis ut $\frac{M S}{2}$, ad $\frac{M S^2}{4 M B}$, sive ut $2 M B$ ad $M S$.

Scholium.

(b) Casus corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus, (ut seorsum collegerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decreſcentem in duplicatâ ratione distantiarum à centrâ, decrevi fusiùs in sequentibus exponere.

Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea gravitatis. Nam si corpus in circulo terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus corol. IX. Et (c) hujusmodi propositionibus *Hugenius* in eximio suo tractatu de *Horologio Oscillatorio* vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

(d) Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur polygonum laterum quocunque. Et si corpus in polygoni lateribus datâ cum veloci-

tate

(b) 203. Ex observationibus colligunt astronomi planetas secundarios, ut sunt Jovis vel Saturni Satellites, radiis ad suum planetam primarium ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiquadratâ distantiarum à centro planetæ primarij; planetas verò primarios radiis ad solem ductis, areas describere temporibus proportionales eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiquadratâ radorum. Quare casus corollarii VI. in corporibus cœlestibus obtinet, id est, planetarum velocitates sunt reciprocè in ratione subduplicatâ radorum & vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radorum.

(c) 204. *Hugenius* ad calcem tractatûs de horologio oscillatorio, de viribus centrifugis in circulo earumque cum vi gra-

vitatis proportione 13. theoremata sine demonstratione proposuit. Eorum aliqua in corollariis propos. hujusce IV. demonstravit *Newtonus*, viamque aperuit cui insistendo cætera omnia facili negotio absolvi possunt, quod postea perfecerunt multi insignes Mathematici.

(d) 205. Duo intelligantur polygona similia & regularia circulis duobus inscripta, quorum latera numero crescant & longitudine minuantur in infinitum, & corpora duo in polygonorum lateribus æquabili velocitate ferantur, atque ad singulos angulos à circulo reflectantur. Manifestum est corporum in polygonis revolventium vires centrifugas non esse mensurandas ex solâ velocitate quâ in singulis angulis incurrunt in circulum & quâ ab illo reflectantur, sed insuper habendam esse rationem frequentiarum impactuum

aut

DE MOTU
CORPO-
RUM.

tate movendo ad ejus angulos singulos à circulo reflectatur ; vis, quâ singulis reflexionibus impingit in circulum, erit ut ejus velocitas : ideoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa , & numerus reflexionum conjunctim : hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta , & aucta vel diminuta in ratione longitudinis ejusdem ad circuli prædicti radium ; id est , ut quadratum longitudinis illius applicatum ad radium : ideoque , si polygonum lateribus infinitè diminutis coincidat cum circulo , ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, quâ corpus urget circulum ; & huic æqualis est vis contraria, quâ circulus continuo repellit corpus centrum versus.

P R O -

aut reflexionum , ita ut si eadem fuerit duorum corporum revolventium celeritas, vires centrifugæ sint ut numeri impactuum aut reflexionum tempore dato peractarum ; nam quò plures sunt tempore dato impactus & reflexiones, eò magis corpus circulum urget ut à centro recedat & viceversa eò magis ad centrum urgetur per circuli reactionem æqualem & contrariam actioni. Quare si varia fuerit corporum in polygonis revolventium celeritas æqualis, vires centrifugæ erunt ut velocitates & numeri impactuum seu reflexionum tempore dato peractarum conjunctim. Est autem numerus reflexionum tempore dato ut numerus laterum polygoni eo tempore descriptorum. Porro si eadem supponatur in utroque polygono velocitas, numeri laterum eodem tempore descriptorum erunt reciproci ut latera singula ; quo enim majora sunt latera, eo minor eorum numerus dato tempore datæque velocitate percurritur ; quare manente eâ-

dem in utroque polygono velocitate, numeri reflexionum sunt inversè ut latera, sive ob polygonorum similitudinem, inversè ut radii circulorum. Si verò ponatur idem circulorum radius, & varia in utroque polygono velocitas uniformis, erunt numeri laterum in utroque polygono dato tempore percursorum, directe ut velocitates æquabiles, seu, ut longitudines dato tempore descriptæ (5). Quare variantibus polygoni velocitate & radio, numerus reflexionum est ut velocitas, seu ut longitudo tempore dato descripta applicata ad radium. Cum igitur supra ostensum sit vim centrifugam in circulo, aut vim centripetam ipsi æqualem & contrariam, esse in ratione composita velocitatis & numeri reflexionum dato tempore peractarum, liquet eandem vim centrifugam esse quoque ut quadratum velocitatis radio divisum, & etiam ut quadratum longitudinis seu arcus dato tempore descripti applicatum ad radium.

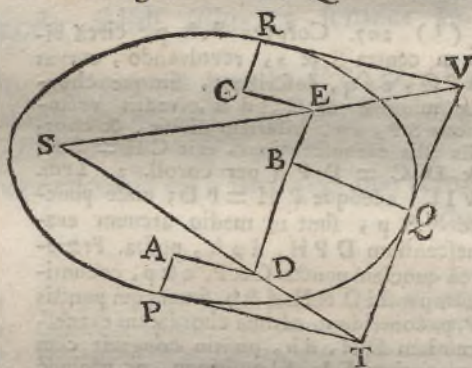
PROPOSITIO V. PROBLEMA I.

LIBER PRIMUS.

Datâ quibuscunque in locis velocitate, quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

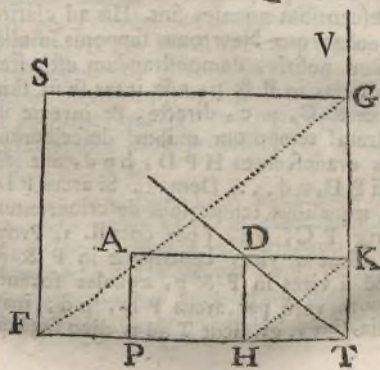
Figuram descriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR in punctis totidem P, Q, R , concurrentes in $T \& V$. Ad tangentes erigantur perpendiculara PA, QB, RC velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R , à quibus eriguntur, reciprocè proportionalia; id est, ita ut sit PA ad QB ut velocitas in Q ad velocitatem in P , & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q . Per perpendicularorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, EC concurrentes in $D \& E$: Et actæ TD, VE concurrent in centro quæsito S .

Nam perpendiculara à centro S in tangentes PT, QT demissa (per corol. 1. prop. 1.) sunt reciprocè ut velocitates corporis in punctis $P \& Q$; ideoque per constructionem ut perpendiculara AP, BQ directè, id est ut perpendiculara à puncto D in tangentes demissa. (°) Unde facile colligitur quod puncta S, D, T sunt in unâ rectâ. Et simili argumento puncta S, E, V sunt etiam in unâ rectâ; & propterea centrum S in concursu rectarum TD, VE versatur. *Q. E. D.*



(°) 206. Puncta S, D, T , sunt in unâ rectâ. Demissis enim ex centro S , in tangentes TV, TF , perpendicularis SG, SF , & ex puncto D , perpendicularis DK, DH , patet angulos FSG, HDK , lineis parallelis contentos esse æquales & propter laterum SF, SG, DH, DK , analogiam, triangula FSG, HDK , esse similia, adeoque angulos SFG, DHK , æquari, ac proinde lineas FG, HK , esse parallelas, & triangula FTG, HTK , similia, erit ergo $TH:TF=HK:FG=DH:SF$, & $TK:TG=HK:FG=DK:SG$. Quare linea TD , producta transibit per centrum S .

Tom. I.



O

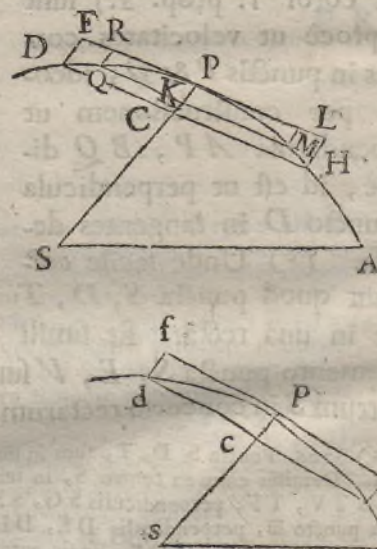
207.

PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur, quæ chordam bisecet, & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directè & tempus bis inversè.

(f) Nam sagitta dato tempore est ut vis (per coroll. 4. prop. 1.) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illâ duplicatâ (per coroll. 1. prop. 1.)

(f) 207. Corpora P & p, circa virium centra S & s, revolvendo, curvas APQ, a p q, describant, sintque chordæ minimæ DH, d h, radii vectoribus SP, sp, bifariam divisæ, & chordis illis evanescentibus, erit CH = PH, & DC = DP (per coroll. 2. Lem. VII.) adeoque PH = PD; unde puncta P & p, sunt in medio arcuum evanescentium DPH, d p h, posita. Præterea quoniam punctis C & P, c & p, coeuntibus, puncta D & H, d & h, simul cum punctis P, p, coincidunt, ultima chordarum evanescentium DH, d h, positio congruit cum tangentium FL, fl positione, ac proinde chordæ evanescentes DH, d h, tangentibus FL, fl, æquidistant, adeoque rectæ DF, d f, radiis SP, sp, parallelæ sagittis PC, p c, evanescentibus æquales sint. His ad clariorem eorum quæ Newtonus supponit intelligentiam positus, demonstrandum est vires centripetas in P & p, esse inter se ut sunt sagittæ P C, p c, directè, & inversè ut quadrata temporum quibus describuntur arcus evanescentes HPD, h p d, aut dimidii PD, p d. . . . Dem. . . . Si arcus PD, p d, æqualibus temporibus describerentur, sagittæ PC, p c, (per coroll. 1. Prop. 1.) essent ut vires centripetæ in P & p. Quod si vires in P & p, æquales forent, tempora verò per arcus PD, p d, inæqualia, sint v. gr. sicut T ad t, dico sagittas

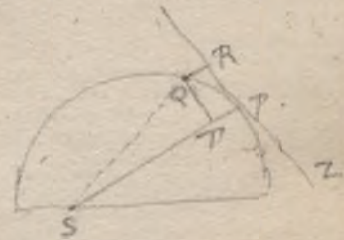
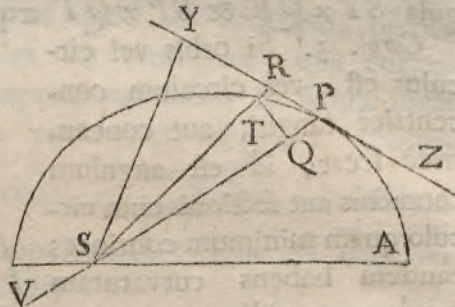


PC, p c, fore ut horum temporum quadrata directè, sive ut T^2 ad t^2 . Sit enim arcus PQ, descriptus eodem tempore t quo arcus p d, positus viribus in P & p, æqualibus, spatia QR, f d, seu PK, p c, virium illarum actione eodem tempore descripta erunt æqualia; Verùm (per coroll. 1. prop. 1.)

rol. 2 & 3, lem. XI.) ideoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directè & tempus bis inversè. Q. E. D.

(g) Idem facile demonstratur etiam per corol. 4. lem. x.

Corol. 1. Si corpus P revolven-
do circa centrum S describat li-
neam curvam APQ; tangat ve-
ro recta ZPR curvam illam in
puncto quovis P, & ad tan-
gentem ab alio quovis curvæ
puncto Q agatur QR distantia
SP parallela, ac demittatur
QT perpendicularis ad distan-
tiam illam SP: vis centripeta erit reciprocè ut solidum
 $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$; si modo solidi illius ea semper su-



matur quantitas, quæ ultimo fit, ubi coeunt puncta P & Q. (h) Nam QR æqualis est sagittæ dupli arcus QP, in cuius medio est P, & duplum trianguli SQP sive SP x QT, tempori, quo arcus iste duplus describitur, proportionale est; ideoque pro tem-
poris exponente scribi potest. Co-

II. & III. Lem. XI.) $PD^2 : PQ^2 = DF : QR$ sive fd , & ob motum per arcus evanescentes uniformem, sunt arcus PD, PQ ut tempora quibus describuntur hoc est ut T ad t, ideoque $PD^2 : PQ^2 = T^2 : t^2 = DF : QR$ sive fd , & quia $DF = PC$ & $df = pc$ ergo $T^2 : t^2 = PC : pc$ itaque si vires in P & p sint æquales erunt sagittæ PC, pc, ut quadrata temporum quibus arcus PD, pd, describuntur. Quoniam igitur manentibus temporibus sagittæ sunt ut vires, & manentibus viribus, sagittæ sunt ut temporum quadrata, necessarium est ut variantibus viribus atque temporibus sagittæ sint ut vires & quadrata temporum conjunctim. Quamobrem si vires in P & p, dicantur V, v, erit $PC : pc = V \times T^2 : v \times t^2$, & dividendo antecedentes per T^2 , & consequentes per t^2 , erit $V : v = \frac{PC}{T^2} : \frac{pc}{t^2}$ Q. e. D.

(g) 208. Idem facile demonstratur etiam per coroll. 1 v. Lem. x. quo statuitur vires esse ut spatia, ipso motus initio, descripta directè & quadrata temporum inversè: Cum enim FD, fd, seu sagittæ PC, pc, sint spatia ex virium centripetarum actione descripta iisdem temporibus quibus percurruntur arcus evanescentes PD, pd, patet per supra dictum coroll. vires centripetas esse inter se in ratione compositâ ex directâ ratione sagittarum PC, pd, & reciproca quadratorum temporum quibus describuntur arcus evanescentes PD, pd, seu HD, hd.

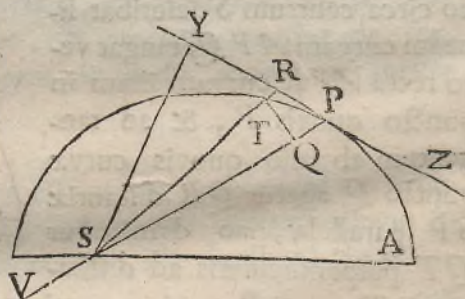
(h) 209. Nam QR æqualis est sagittæ dupli arcus QP, in cuius medio est P, (207), duplum verò trianguli evanescentis SQP, (quod per Lem. VIII, tanquam rectilineum considerari potest) æquale est factò ex perpendicularo QT, in ba-
sim

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciprocè ut
solidum $\frac{SYq \times QPq}{QR}$, si modo SY perpendicularum sit à cen-

tro virium in orbis tangentem PR demissum. (i) Nam rectan-
gula $SY \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

Corol. 3. Si orbis vel cir-
culus est, vel circulum con-
centricè tangit, aut concen-
tricè secat, id est angulum
contactus aut sectionis cum cir-
culo quam minimum continet;
eamdem habens curvaturam
eundemque radium curvaturæ
ad punctum P ; & si PV

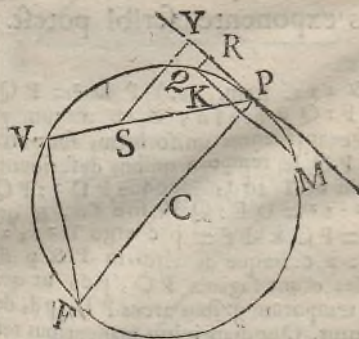


chorda sit circuli hujus à corpore per centrum virium acta:
erit vis centripeta reciprocè ut solidum $SYq \times PV$. (k) Nam
 PV est $\frac{QPq}{QR}$.

sim SP ; cum igitur in eadem curvâ APQ ,
aræ sint proportionales temporibus qui-
bus describuntur, ac proinde rectangulum
 $QT \times SP$, scribi possit loco temporis
quo duplus arcus QP , seu duplum trian-
gulum SPQ , describitur, erit vis centri-
peta in P , directè ut $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$ & in-
versè ut $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$.

(i) 210. Rectangula $SY \times QP$, &
 $SP \times QT$, æquantur; nam tangens PR ,
cum arcu evanescente QP , congruit (per
Lem. VII) & propterea tangens illa
considerari potest tanquam trianguli SPQ ,
basis PQ , producta, & SY , tanquam
perpendicularis ad illam basim productam,
quare area dupli trianguli SPQ , est
 $SY \times QP = SP \times QT$.

(k) 211. PV est $\frac{QP^2}{QR}$. Sit enim cir-
culus osculator $PQVF$, & ductâ chordâ
 QM , quam alia chorda PV , per virium



centrum S acta, bifecat in K , erit (per
prop. 35. lib. 3. Elem.) $QK^2 = VK \times$
 PK ; sed evanescente PK , $VK = VP$;
& (207) $QR = PK$, ac (per coroll. 1.
Lem. VII) $QK = QP$, ergo $QP^2 =$
 $PV \times QR$, & $PV = \frac{QP^2}{QR}$.

Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directè, & chorda illa inversè. Nam velocitas est reciprocè ut perpendiculum SY per corol. 1. prop. 1.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ, & in ea detur etiam punctum S, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, quâ corpus quodvis P à cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum SYq x PV huic vi reciprocè proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

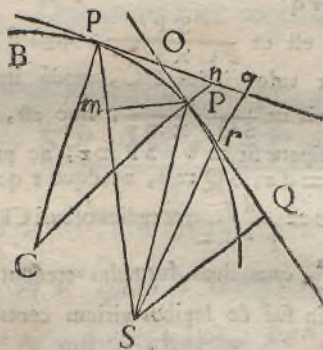
P. R. O.

212. Iisdem positis sit PC, radius oculi = R, & erit vis centripeta in P, reciprocè ut solidum $\frac{SY^3 \times R}{SP}$: quoniam enim rectæ SY, & FCP, ad tangentem P.Y, perpendiculares æquidistant, erit angulus VPF = PSY; cumque sit præterea angulus FVP, in semicirculo æqualis recto SYP, duo triângula PVF, SYP, similia sunt ac proinde SP:SY = PF seu 2R:PV, adeoque PV = $\frac{SY \times 2R}{SP}$ & SY² x PV = $\frac{SY^3 \times 2R}{SP}$; hoc est dividendo per numerum constantem 2, ut $\frac{SY^3 \times R}{SP}$. Hæc est expressio vis centripetæ quam Joannes Bernoullius, Abrahamus de Moivre & Guido Grandus invenerunt.

& universalitate eximias dedit; præclaras quoque addidit Joannes Bernoullius in iisdem Commentariis an. 1710. Duas proposuit Jacobus Hermannus in scholio ad propositionem 22^{am} Lib. 1. Phoronomiæ quas ut potè multum expeditas, nobisque in posterum profuturas & ex superioribus Newtoni formulis facillimè deducendas, hic exscribemus ac demonstrabimus.

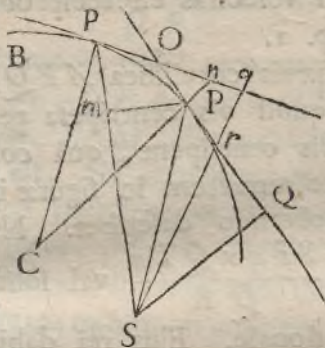
S. C. H. O. L. I. O. N.

213. Newtonus generalem virium centralium theoriam in superioribus propositionibus aperuit; earumque elegantes formulas in propositionis v.1^æ corollariis tradidit. Plurimas per analysim methodumque fluxionum postea exquisierunt alii qui primum inter Geometras locum tenebant. Hos inter eminet Varignonius qui in Commentariis Parisiensibus an. 1700, 1701, 1706, virium centralium formulas suâ varietate



214. Itaque corpus P, circa centrum virium S revolvendo describat curvam B p P, & centro C radio CP descriptus intelligatur arcus infinitesimus Pp circuli curvam B p P osculantis in P, ac centro S radio SP, arcus P m, & denique SQ, Sq;

DE MOTU
CORPO-
RUM



ad tangentes PQ, pq, perpendiculares. Duo Triangula qOr, nCp, seu PCp similia sunt, nam æquales sunt anguli r q O, C p n, sunt enim ambo recti, & anguli r O q, P C p, qui cum angulo P O p duos rectos efficiunt. Similia quoque sunt Triangula p m P, p q f, seu P Q s, ob Angulos ad q & m rectos & angulum m p P communem dum coeunt puncta P, p, quare p P : r q = P C : O q, seu p q, seu P Q; & m p : P p = P Q : S P unde ex æquo m p : r q = P C ad S P & P C = $\frac{SP \times mp}{r q}$. Porro (212) vis centripeta in P est ut $\frac{SP}{PC \times SQ}$; ergo si substituaturs valor ipsius PC, modò inventus eris vis ut $\frac{r q}{SQ^3 \times mp}$, hoc est, si vis centripeta sit = v, SP = z, ac proindè m p = dz, SQ = p, adeoque r q = dp, erit $v = \frac{dp}{p^3 dz}$, & radius osculi CP = r = $\frac{z dz}{dp}$, quas duas formulas tradunt Keil. lius in suâ de legibus virium centripeta-

rum epistolâ ad Halleium directâ & Hermannus loco suprâ citato.

215. Sit Pp = ds, & Pm = dy, & ob triangula similia p P m, P S Q, erit ds : dy = z : p, adeoque $p = \frac{z dy}{ds}$, & sumptis utrinque fluxionibus nullâ constante usurpatâ, inveniatur (163) $dp = \frac{dz dy ds + z ds ddy - z dy dds}{ds^2}$;

quarè $v = \frac{dp}{p^3 dz} = \frac{dp ds^3}{z^3 dy^3 dz}$ ob p,
= $\frac{z dy}{ds}$ & $p^3 = \frac{z^3 dy^3}{ds^3}$, adeoque $v = \frac{dz dy ds^2 + z ds^2 ddy - z dy ds dds}{z^3 dy^3 dz}$;

quæ formula nonnisi nominibus differt à formulis quas Varignonius dedit in Commentariis Parisiensibus, 1701. 1706.

216. Hinc radiorum osculi formula admodum generalis & expedita facile reperitur. Nam invenimus (214) $r = \frac{z dz}{dp}$

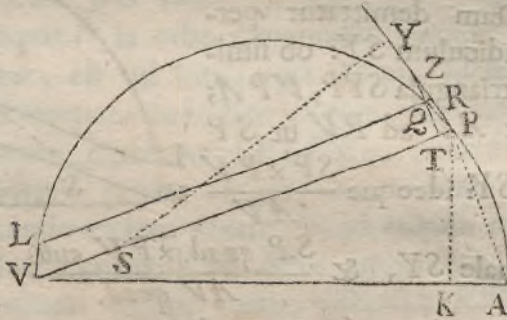
= (215) $\frac{z dz ds^2}{dz dy ds + z ds ddy - z dy dds}$
cum in hac formulâ nulla fluxio constans assumpta sit, in alias infinitas transformari potest, sumptis pro arbitrio constantibus. Si centrum S, in infinitum abeat, ut rectæ SP, evadant parallelæ, erit dz dy ds, quantitas infinite parva respectu z ds ddy & z dy dds; nam cum z finita est dz dy ds est ejusdem generis cum z ds ddy; ubi igitur z, evadit infinita z ds ddy, sit etiam infinita respectu dz dy ds; unde si in formulâ radii osculatoris modò inventâ deleatru membrum dz dy ds, habebitur $r = \frac{z dz ds^2}{ds^2 dz}$ formula generalis radii osculi in curvis quarum ordinatæ SP parallelæ axique perpendiculares sunt, & in quibus dz, sunt elementa abscissarum.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

LIBER PRIMUS.

Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Esto circuli circumferentia VQA ; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, S ; corpus in circumferentiâ latum P ; locus proximus, in quem movebitur Q ; & circuli tangens ad locum priorem



PRZ . Per punctum S ducatur chorda PV ; & actâ circuli diametro VA , jungatur AP ; & ad SP demittatur perpendicularum QT , quod productum occurrat tangenti PR in Z , ac denique per punctum Q agatur LR , quæ ipsi SP parallela sit, & occurrat tum circulo in L , tum tangenti PZ in R . Et ⁽¹⁾ ob similia triangula ZQR , ZTP , VPA ; erit RP quad. hoc est QRL ad QT quad. ut AV quad. ad PV quad. Ideoque $QRL \times PV$ quad.

QRL - i.e. QR.RL

$\frac{QRL \times PV \text{ quad.}}{AV \text{ quad.}}$ æquatur QT quad. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP \text{ quad.}}{QR}$, & punctis P & Q cocuntibus scribatur PV pro RL .

Sic fiet $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$ æquale $\frac{SP \text{ quad.} \times QT \text{ quad.}}{QR}$

Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $\frac{SP \text{ quad.} \times PV \text{ cub.}}{AV \text{ quad.}}$; id est (ob datum $AV \text{ quad.}$) reciprocè ut

quadratum distantiae seu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. *Q.E.I.* *Idem*

(1) 217. Triangula ZQR , ZTP , VAP , quorum communis est mensura dimidius arcus VL , QP ; quare $RP:QT = ZP:ZT = AV:PV$. Est autem $RP^2 = QR \times RL$, per prop. 36. lib. 3. Elem.

(^m) Nam per constructionem hujus propositionis vis prior est ad vim posteriorem ut $RPq \times PT \text{ cub.}$ ad $SPq \times PV \text{ cub.}$ LIBER PRIMUS.

id est, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP \text{ cub.} \times PV \text{ cub.}}{PT \text{ cub.}}$, sive (ⁿ) ob similia triangula PSG, TPV ad $SG \text{ cub.}$

Corol. 3. Vis, quâ corpus P in orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, est ad vim, quâ corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $SP \times RPq$, contentum utique sub distantia corporis à primo virium centro S & quadrato distantia ejus à secundo virium centro R , ad cubum rectæ SG , quæ à primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis à secundo virium centro distantia RP parallela est. (^o) Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P eadem sunt ac in circulo ejusdem curvaturæ. P R O.

(^m) 219. Nam per constructionem hujus propos. vis prior est ad vim posteriorem, (hoc est vis circa S , ad vim circa R) ut $RP^2 \times PT^3$ ad $SP^2 \times PV^3$. Scilicet in demonstratione hujus propositionis (vid. fig. Prop.) inventum erat $\frac{QR L \times PV^2}{AV^2}$

$= QT^2$, & punctis P & Q coeuntibus scribatur PV pro RL , & uterque terminus multiplicetur per $SP^2 \times AV^2$ erit $QR \times PV^3 \times SP^2 = QT^2 \times SP^2 \times AV^2$, est verò $QT \times SP$ area cujus arcus est QP , & QR , est ejus sagitta, itaque sagitta per cubum chordæ, & quadratum distantia multiplicata, æqualis est quadrato areæ cui respondet, multiplicato per quadratum Diametri. Quod utique verum erit sive agatur de vi ad S , sive de vi ad R tendente (vid. fig. Cor.) Quod si sumi intelligantur arcus æquali tempore descripti circa utramque vim, sagittæ eorum arcuum expriment rationem earum virium centripetarum; & areæ illis temporibus æqualibus circa utramque vim descriptæ æquales erunt, nam per Prop. 1. tempus Periodicum est ad integram superficiem descriptam, ut tempus quodvis ad aream ipsi respondentem, ut ergo eodem tempore Periodico idem circulus circa utramque vim absolvitur, quæriturque area eidem tempori correspondens, illa area eadem

Tom. I.

erit utriusque vis respectu, ideoque productum quadrati areæ per quadratum Diametri idem erit tam respectu vis S , quam respectu vis R , ergo sagitta pertinet ad vim S multiplicata per cubum ejus chordæ PV , & quadratum ejus distantia SP æqualis erit sagittæ pertinenti ad vim R , multiplicata per cubum ejus chordæ PT & per quadratum ejus distantia RP , ea enim facta, quadrato areæ in quadratum Diametri ducto æqualia sunt, ideo Sagittæ illæ, sive vires in S & R erunt reciproce ut illæ quantitates quæ eas multiplicant, hoc est Sagitta in S est ad Sagittam in R sicut $RP^2 \times PT^3 : SP^2 \times PV^3$. Q. E. D.

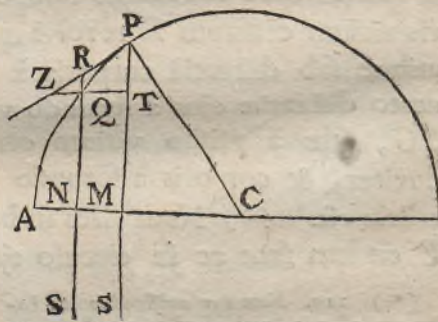
(^o) 220. Triangula PSG, TPV , similia sunt, ob angulos PSG, SPT æquales quia sunt alterni inter parallelas SG, TP , & angulos $VP G, VTP$, æquales per 32. lib. 3. Elem. undè $TP : PV = SP : SG = \frac{SP \times PV}{TP}$ & $SG^3 = \frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$.

(^o) 221. Nam vires in hoc orbe ad ejus punctum quodvis P , eadem sunt ac in circulo orbitam osculante in P , vis enim illa in P , est semper eadem ac si corpus in arcu evanescente circuli osculatoris moveretur, cum arcus ille circuli pro arcu orbitæ evanescente usurpari possit.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in semicirculo PQA : ad hunc effectum requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum S , ut lineæ omnes PS , RS ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.

A semicirculi centro C agatur semidiameter CA parallelas istas perpendiculariter secans in M & N , & jungatur CP . Ob (P) similia triangula CPM , PZT & RZQ est CP, q ad PM, q ut PR, q ad QT, q , & ex naturâ circuli PR, q æquale est rectangulo $QR \times RN + QN$,



sive coeuntibus punctis P & Q rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo est CP, q ad $PM, quad.$ ut $QR \times 2PM$ ad $QT, quad.$ ideoque $\frac{QT, quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM, cub.}{CP, quad.}$, & $\frac{QT, quad. \times SP, quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM, cub. \times SP, quad.}{CP, quad.}$ Est ergo

(per corollarium 1. & 5. prop. vi.) vis centripeta reciprocè ut $\frac{2PM, cub. \times SP, quad.}{CP, quad.}$, hoc est (neglectâ ratione determinatâ $\frac{2SP, quad.}{CP, quad.}$) reciprocè ut $PM, cub.$ Q. E. I.

(9) Idem facilè colligitur etiam ex propositione præcedente.

Scho.

(P) 222. Similia sunt triangula CPM , PZT , anguli enim ad M & T recti æquales sunt, & quoniam anguli $ZPT + MPC$, & anguli $MPC + MCP$, recto æquantur, erit etiam $MCP = ZPT$; & $PR^2 = QR \times RN + QN$ (per Prop. 36. lib. 3. Elem.) Cum autem CP sit radius circuli & SP sit linea infinita adeoque $SM = SP$, erunt

$CP, SP, \frac{2SP^2}{CP^2}$, quantitates constantes.

(9) 223. Idem facilè colligitur ex propositione præcedente quâ constat vim centripetam esse reciprocè ut $SP^2 \times PV^2$. Nam centro virium S in infinitum abeunte, omnes SP sunt æquales adeoque constantes, & propterea vis reciprocè ut PV^2 .

Scholium.

(^r) Et argumento haud multum dissimili corpus inveniatur moveri in ellipsi, vel etiam in hyperbolâ vel parabolâ, vi centripetâ, quæ sit reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

(^r) 224. Ut multa de sectionibus Conicis mox erunt dicenda, visum est eas præmittere ex Conicis propositiones quæ sæpius occurrent, ne memoriæ vitio aut fastidio ad alios Autores recurrendi demonstrationum vis Lectores fugiat.

Def. 1^a. Si Planum quodpiam secet conum, sed per ejus Verticem non transeat, intersectio Coni & istius Plani dicitur *Sectio Conica*.

2^a. Si ducatur planum per Verticem Coni, parallelum plano secanti, conum ipsum vel secabit, vel tanget, vel totum erit extra eum; Hinc distinguuntur sectionum Conicarum species, dicentur primo casu *Hyperbolæ*, 2^o. *Parabolæ*, 3^o. *Ellipses*.

3^a. Si sint duo Coni similes sibi per Verticem oppositi, illud planum verticale quod unum è Conis secat, alterum etiam secabit, ideo, planum sectionis ipsi Parallelum utrumque etiam Conum secabit, & ex utriusque Coni sectione formabuntur in eo Plano duæ *Hyperbolæ oppositæ*.

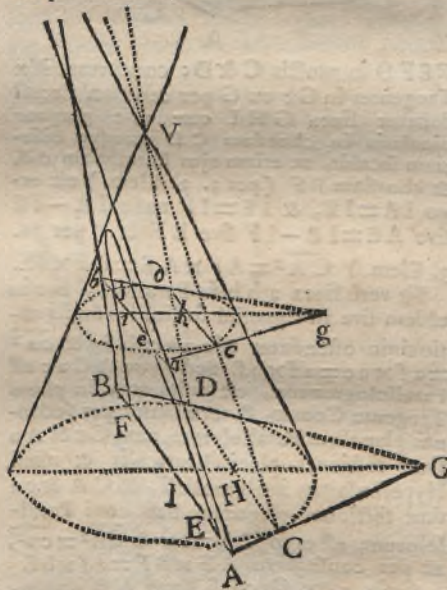
4^a. Si secundum lineas rectas in quibus planum per Verticem Coni ductum secat Coni superficiem, applicentur duo plana Conum tangentia, eorum cum plano Hyperbolarum intersectiones, dicentur Hyperbolarum *Asymptoti*; nam ut ea plana superficiem Coni jam tetigerunt, nullibi eam superficiem iterum attingent, non ergo attingent Hyperbolam quæ terminatur in superficie Coni & quæ est in plano lineis quas tangunt parallelæ.

Lemma I. Sit linea ab unâ Asymptoto ad alteram ducta, quæ per Hyperbolam secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Et si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Asymptoto ad alteram ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Hyperbolam sectæ.

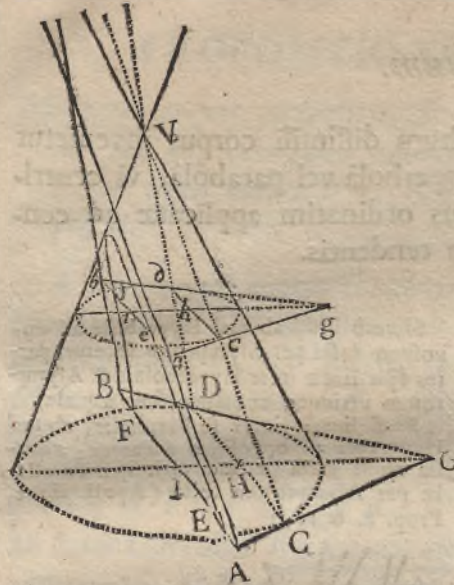
Si verò lineâ ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ductâ per Asymptotos secetur, partes ejus lineæ inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales.

Ex si lineæ, inter se Parallelæ, ab unâ Hyperbolâ ad oppositam ducantur, æqualia erunt facta partium utriusque Parallelæ per Asymptotum sectæ (Apoll. lib. 2. Prop. 8. & 16.)



Demonst. Primum talis sit linea AB ut planum per eam lineam duci possit basi conii parallelum, cujus sectio cum cono erit circulus CEFD, ducatur planum VCD per verticem Coni VCD plano Hyperbolarum parallelum & secundum lineas VC, VD applicentur plana Conum tangentia, in quibus erunt Hyperbolæ Asymptoti & Tangentes circuli CE

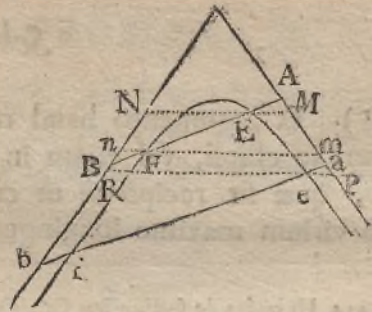
DE MOTU
CORPORUM.



CEFD in punctis C & D: concurrant illa
Tangentes in G; ex G per centrum circuli
ducatur linea GHI quæ erit perpen-
dicularis in chordam CD eamque bifur-
ciam secabit, ut etiam ejus Parallelam AB,
& chordam EF (per 3. 3. Elem.) est er-
go IA=IB, & IB=IF unde IA-IE
five AE=IB-IF five BF & (per 36.
3. Elem.) CA²=AF×AE=AF×BF.

Sit verò linea a b huic Parallela, five in
eâdem five in oppositâ sectione; simili ra-
tiorcinio ostendetur esse ae=bf; & ca²
=af×ae=af×bf. Sed figura ACac est
Parallelogramma, est enim tota in plano
Tangente Conum, & terminatur per sectio-
nes planorum Parallelorum, nam Cc & Aa
sunt sectiones plani Verticalis & plani
Hyperbolarum ipsi Paralleli, & CA & ca
sunt sectiones planorum basi Coni Paral-
lelorum; est ergo CA=ca & CA²=ca²,
ac per consequens AF×BF=af×bf.

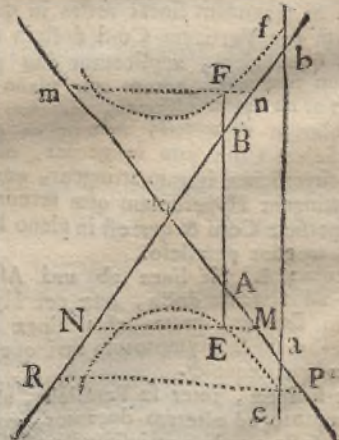
Casus 2^{us}. Quod si linea AB utcum-
que sit ducta inter Asymptotos, & Hyper-
bolam secet in E & F erit AE=BF; nam
per E & F ducantur lineæ MEN, mFn,
tales ut plana per eas ducta sint basi Coni
parallela Triangula AEM & AFm,
BFn & BEN erunt similia propter Paral-
lelas, est ergo AB:AF=EM:Fm
& BE:BF=NE:nF; est



ergo per compositionem rationis... AE×
BE:AF×BF=EM×NE:Fm×nF,
sed per demonstrationem primi casus est
EM×NE=Fm×nF, ergo AE×BE
=AF×BF, unde (per Prop. 16. 6. E-
lem.) AF:AE=BE:BF & dividen-
do AF-AE five EF:AE=BE-BF
five EF:BF, cum ergo sit EF:AE=
EF:BF est AE=BF.

Ducatur verò linea quavis a b, priori AB
parallela, & per punctum e ducatur linea Per
lineæ MEN parallela, similia erunt Trian-
gula AEM & aEP, BEN & bER ob parallelas
est ergo AE:aE=EM:eP
& BE:be=EN:eR, est

ergo per compositionem rationis... AE×
BE:aE×be=EM×EN:eP×eR,
sed per casum primum est EM×EN
=eP×eR, ergo AE×BE=aE×be.
Casus 3^{us}. Si lineæ de quibus agitur,



sed

ab unâ Hyperbolâ ad ejus oppositam ducerentur & per Asymptotas secarentur, eadem prorsus foret demonstratio ac in 2^o. casu, nisi quod in primâ demonstrationis parte, componendo concluderetur, non dividendo.

Lemma II. Sint duæ lineæ in Hyperbolarum plano ductæ quæ in quodam puncto sibi occurrant; facta partium singulæ lineæ sumptarum à puncto concursus usque ad punctum Hyperbolæ, sunt inter se sicut facta partium sumptarum ab Hyperbolâ usque ad utramque Asymptotum.



Lineæ AB, DC sibi mutuo occurrant in H, est $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$.

Demonst... Ducatur per punctum E Hyperbolæ, in quo secatur per lineam AB productam si necesse sit, lineæ cEd, alteri lineæ datæ CHD Parallela: similia erunt Triangula AHC & AEc, BHD & BED: unde habebuntur hæ proportiones

AH five $AE + EH : AE = HC$ five $CG + GH : cE$

& BH five $BF + FH : BE = HD$ five $DI + IH : dE$, & per compositionem

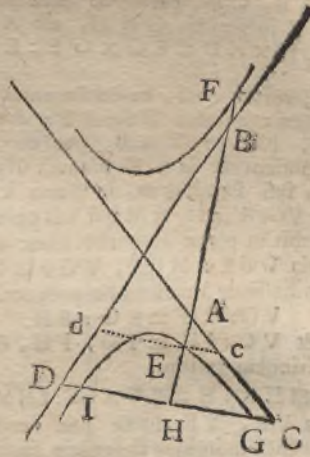
rationis $AE \times BF + AE \times FH + EH \times BF$ (five AE per Lem. I.) + $EH \times FH : AE \times BE = CG \times DI + CG \times IH + GH \times DI$ (five CG per Lem. I.) + $GH \times IH : cE \times dE$ (five $CG \times DG$ per Lem. I.) est verò $BF + FH + HE = BE$, & $DI + IH + HG = DG$

ergo est $AE \times BE + EH \times FH : AE \times BE = DG \times CG + GH \times IH : CG \times DG$.

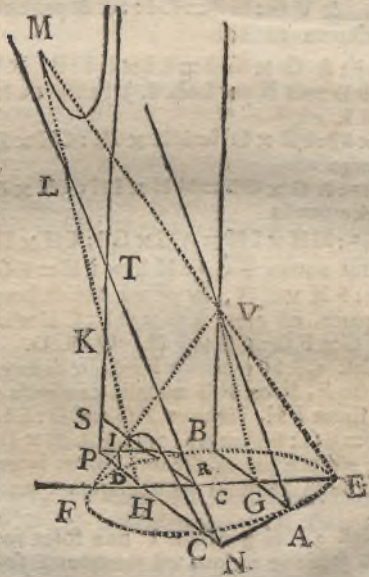
& dividendo $EH \times FH : AE \times BE = GH \times IH : CG \times DG$

ergo alternando $EH \times FH : GH \times IH = AE \times BE : CG \times DG$.

Eadem est demonstratio sive lineæ sint in eadem Hyperbola, sive, una sit in unâ Hyperbolâ altera inter oppositas, sive ambæ inter oppositas ducantur. Ergo facta partium &c.



Lemma III. Sint duæ Parallelae in sectione Conicâ ductæ quæ secantur per lineam quamvis, facta partium uniuscujusque Parallelae sumptarum à curvâ ad punctum ejus interfectionis, sunt inter se ut facta partium lineæ secantis sumptarum à curvâ ad punctum interfectionis cum Parallela.



DE MOTU
CORPO-
RUM.

Sint AB, CD, parallelæ sectæ per lineam EF in punctis G & H, est $AG \times GB : CH \times HD = EG \times GE : EH \times HF$.

Sit V, vertex conï, ex eo ducantur VE, VF ad extremitates lineæ EF; ducatur in BA, planum VAB, per verticem conï transiens & in CD planum Hyperbolarum ipsi Parallelum, in plano VBA ducatur VG, & in H, HM ipsi VG parallela quæ jacebit in plano Hyperbolarum: erunt Triangula VGE & MHE, VGF & IHF ergo similia unde habentur hæc proportioniones

$$VG : MH = EG : EH$$

$$\& VG : IH = FG, FH, \& \text{ per}$$

compositionem rationis

$$\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times GF : EH \times FH.$$

Lineæ VE, VF ductæ per verticem conï & punctum in ejus superficie sumptum sunt semper in superficie conï, ergo earum intersectiones I & M cum lineâ HM in plano Hyperbolarum ductâ sunt in ipsâ curvâ Hyperbolicâ cujus Asymptoti sint TN, TP parallelæ lineis VA, VB; per punctum I in quo lineâ HM occurrit Hyperbolæ ducatur SIR lineis DC & AB parallela, similia erunt Triangula VAG & LRI, VBG & KSI lineis enim parallelis terminantur, erit ergo

$$VG : AG = LI : RI$$

& $VG : GB = KI : SI$ & per compositionem rationis

$$\overline{VG}^2 : AG \times GB = LI \times KI : RI \times SI$$

(= PD x DN per Lem. I.) Sed per Lemma II. est

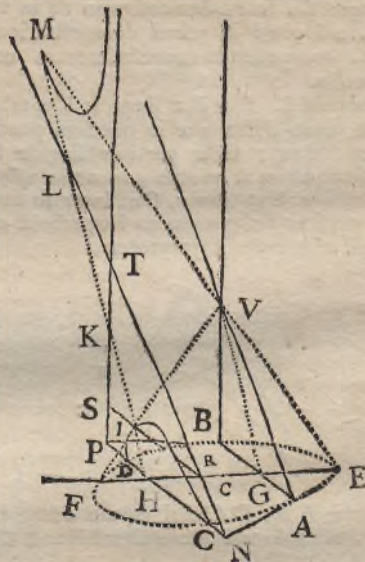
$$LI \times KI : PD \times DN = MH \times IH : CH \times DH$$

$$\text{est ergo } \overline{VG}^2 : AG \times GB = MH \times IH : CH \times DH$$

& alternando
 $\overline{VG}^2 : MH \times IH = AG \times GB : CH \times DH.$
Erat autem $\overline{VG}^2 : MH \times IH = EG \times FG : EH \times FH$, ex primâ demonstrationis parte, est ergo $AG \times GB : CH \times DH = EG \times FG : EH \times FH$. Q. E. D.

Cas. 2. Si punctum F infinitè distaret à puncto E, lineâ FG æqualis censenda foret lineâ FH, ideoque $EG \times FG : EH \times FH = EG : EH = AG \times GB : CH \times DH$, hoc est ipsæ partes secantis forent inter se sicut facta partium parallelarum quas secat.

Cas. 3. Si punctum F non foret in eadem sectione in qua est punctum E sed in opposita, eadem foret demonstratio nisi



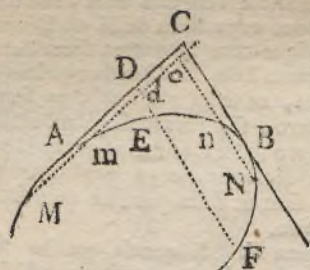
quod puncta M & I, in eadem Hyperbola forent.

Cas. 4. Eadem etiam fiet demonstratio si puncta G & H sint intra extremitates Parallelarum AB, CD, aut intra vertices E & F lineæ secantis, siue sint extra.

Corol. 1. Sumatur medium lineæ secantis puncta E & F sitque c, si intersectio ejus lineæ per Parallelam sit intra vertices, erit factum partium ejus æquale quadrato ejus dimidii dempto quadrato ejus portionis à Centro ad intersectionem sumptæ, v. gr. erit $EG \times GF = cE^2 - cG^2$ ut liquet per 5. 2. Elem. Si intersectio ejus lineæ sit extra vertices, erit factum ejus partium æquale quadrato portionis ejus à Centro ad intersectionem sumptæ dempto quadrato dimidiæ lineæ, v. gr. foret $EG \times GF = cG^2 - cE^2$, ut liquet per 6. 2. Elem.

Corollar. 2. Ex puncto quovis ductæ sint duæ Tangentes ad sectionem Conicam, & ex quodam puncto unius ex illis Tangentibus, ducatur lineâ trans sectionem Conicam alteri Tangenti parallela. Quadratum prioris Tangentis est ad quadratum alterius Tangentis ut quadratum partium

tis in primâ Tangente assumptæ ad factum lineæ Parallelæ alteri tangenti per ejus Partem inter Tangentem & curvam comprehensam (Apol. lib. 3. Prop. 16.)



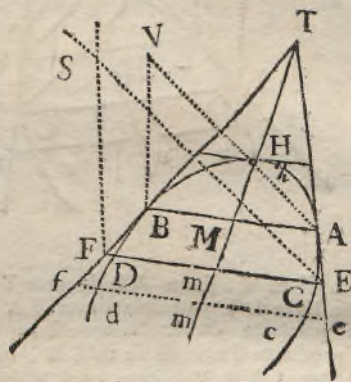
Sint AC, CB Tangentes sectionis Conicæ ABF, ex D ducatur DEF parallela CB, erit $AC^2 : CB^2 = AD^2 : DF \times DE$.

Ducatur Mm c parallela Tangenti AB, & Nn c parallela Tangenti CB, & Mm c lineam DEF secet in d, erit per Lem. sup. $cn \times cN : dF \times dE = Mc \times mc : Md \times md$, est enim M c linea secans parallelas cN, dF; evanescent arcus Mm, & Nn, coincident lineæ Mm c cum AC & Nn c cum BC, eritque $cn = cN = CB$, $dF = DF$, $dE = DE$, $Mc = mc = AC$, $Md = md = AD$, ergo erit $CB^2 : DF \times DE = AC^2 : AD^2$ & permutando & alternando $AC^2 : CB^2 = AD^2 : DF \times DE$. Q. D. E.

Coroll. 3. Si ex variis punctis Tangentis ducantur lineæ Parallelæ trans sectionem Conicam, Quadrata partium Tangentis sunt inter se ut facta Parallelarum per earum partem inter Tangentem & curvam interceptam. Sit AC Tangens ex ejus punctis D & G ducantur Parallelæ DEF, GHI, erit $AD^2 : AG^2 = DF \times DE : GI \times GH$,



nam supponatur in B ea Tangens quæ his lineis sit Parallela secetque priorem in C LIBER PRIMUS, erit per Corollarium superius $AC^2 : BC^2 = AD^2 : DF \times DE = AG^2 : GI \times GH$ ergo alternando, $AD^2 : AG^2 = DF \times DE : GI \times GH$. Q. D. E.



Lemma IV. Dicatur sectionis Conicæ Diameter ea linea quæ Parallelas in curva terminatas bifariam dividit: sit ejus Diametri vertex punctum in quo curvæ occurrit; illæ Parallelæ quas bifecat ipsi ordinatim applicatæ dicantur, & earum alterutra pars dicatur ordinata illius Diametri; portio Diametri ab ejus vertice ad Ordinatarum usque, dicatur ejus abscissa: & denique ea Diameter quæ Parallelas bifecando simul est illis perpendicularis dicatur Axis.

His positis 1º. Linea quæ duas Parallelas bifecabit erit Diameter curvæ: id est cæteras omnes lineas hisce Parallelas etiam bifecabit. (Apol. lib. 2. Prop. 28.)

2º. Linea in Vertice Diametri ducta & Ordinatis Parallela, erit Tangens curvæ in eo Vertice (Apol. Lib. 1. Prop. 17.) & vice versâ ea linea erit Diameter quæ bifecabit lineam quæ erit Parallela Tangenti per ejus verticem ductæ: (Apol. Lib. 2. Prop. 7.)

Denique; Quadrata ordinatarum erunt inter se ut facta partium quas secant in Diametro.

Demonst. In extremitatibus lineæ AB ducantur Tangentes quæ concurrant in T, iper

DE MOTU
CORPORUM.

De Hyperbolâ.

Theor. I. Lineæ omnes ab Interfectione Asymptotorum in eorum Angulo ductæ & utrinque productæ, sunt Hyperbolæ utriusque Diametri, & earum portio inter utramque Hyperbolam comprehensa, dicitur Diameter transversa, & bifariam dividitur in Interfectione Asymptotorum quæ ideo centrum Hyperbolarum vocatur. Tangentes verò in utroque vertice ejsdem Diametri ductæ & inter Asymptotos comprehensæ sunt inter se Parallele & æquales, & bifariam dividuntur ab ea Diametro dicunturque ejus Diametri conjugatæ. (Apol. lib. 1. Prop. 30 lib. 2. Prop. 3. & 19.)

Demonst. Ducta enim quomodocumque linea SCT in Angulo Asymptotorum ZCY per earum interfectionem C, si crura CZ & CY sumantur reciprocè proportionalia sinibus Angulorum adjacentium, ducaturque linea ZY illa per lineam SCT bifariam dividetur; nam in Triangulo CZY est CZ : CY = Sin. Y : Sin. Z = Sin. YCo : Sin. ZCo (per const.) & alternando, Sin. Y : Sin. YCo = Sin. Z : Sin. ZCo. Sed in Triangulo CoY est

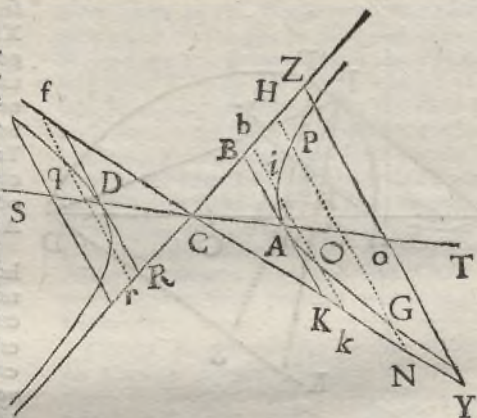
Sin. Y : Sin. YCo = Co : Yo,

& in Triangulo CMZ est
Sin. Z : Sin. ZCo = Co : Zo,

ergo cum duæ priores rationes sint æquales, est Co : Yo = Co : Zo, ideoque Yo = Zo. Omnis autem linea HN lineæ ZY parallela similiter bifariam dividetur in O per lineam ST, partes autem ejus inter Hyperbolam & Asymptotum utrinque contentæ sunt æquales, per Lem. I. cum ergo sit semper HO = ON, & HP = GN est HO - HP = NO - NG sive OF = OG. Ergo linea ST, lineas omnes lineæ ZY parallelas, in Hyperbola contentas bifariam secat, est ergo ejus Diameter per Lemma V.

Sint verò A & D puncta in quibus linea ST occurrit Hyperbolis, per ea ducantur BAK, FDR parallele lineæ ZY inter Asymptotos contentæ, ergo bifecantur in A & D, cum verò sint parallele ordinatis Diametro ST sunt Tangentes in verticibus A & D (per Lemma IV.) & inter se Parallele.

Dico præterea eas esse æquales, ducantur enim Parallele ipsi proximæ biK,



fqr: erit $f q \times q r = b i \times K i$ (per Lem. I.) accedentibusque ordinatis ad Tangentes fit tandem $f q = F D$, $q r = R D$; $b i = B A$, & $K i = K A$ est ergo $F D \times R D = B A \times K A$, sed est $F D = D R$ & $B A = K A$ ergo $F D^2 = B A^2$ & $F D = B A = K A$. Unde tandem cum Triangula CAK & CDF sint similia, & sit CA : CD = KA : FD est etiam CA = CD.

Theor. II. Tertia proportionalis Diametro transversæ & Diametro conjugatæ dicatur Latus Rectum; Est Diameter transversa ad Latus Rectum ut factum Abscissarum ab utroque vertice sumptarum, ad quadratum Ordinatæ; Hinc ista curva *ὑπερβολὰ* sive excedens dicitur, quia quadratum ordinatæ majus est factio lateris Recti per abscissam à proximo vertice (Apol. lib. I. Prop. 21.) Coincidit verò hæc propositio cum ista, est quadratum Diametri Transversæ ad quad. Diametri conjugatæ ut factum abscissarum ad quadratum ordinatæ.

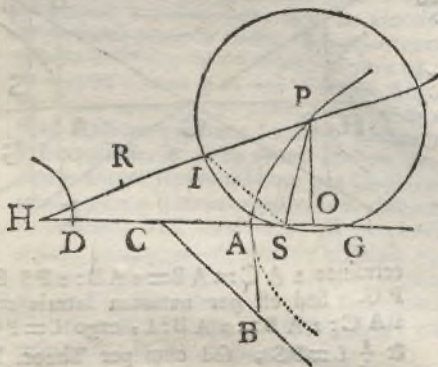
Demonst. Sit ut prius Diameter transversa DAT, conjugata BAK & ordinata inter Asymptotos contenta HPOGN: sunt (per Lem. II.) facta partium sumptarum in lineis DO, HN à puncto Hyperbolæ ad utramque Asymptotum, sicut facta partium earundem linearum à puncto concus O, usque ad Hyperbolam sumptarum; hoc est $A C \times A C : G N \times G H = A O \times D O : P O \times G O$. Sed $G N \times G H$ æqualis est quadrato semi Tangentis BA, sive semidiametri conjugatæ; nam (per Lem. I.) est $G N \times G H = b i \times K i$ & per præced. dem. $b i \times K i = B A^2$ & est $P O = G O$ ideo propor-

portio superior huc redit, $AC^2 : BA^2 = AO \times DO : PO^2$. Sit verò L latus rectum, est per ejus definitionem $2 AC : 2 BA = 2 BA : L$, ergo est $2 AC : L = 4 AC^2 : 4 BA^2 = AC^2 : BA^2$ ideoque $2 AC \cdot L = AO \times DO : PO^2$.

Hinc deducitur quod $PO^2 = \frac{L \times AO \times DO}{2 AC}$
 $= \frac{DO}{AD} \times L \times AO$ ut ergo DO est semper major quàm AD , est etiam PO^2 semper major quàm $L \times AO$. Q. E. D.

Theor. III. Diameter illa quæ Asymptotorum Angulum bifariam dividit est perpendicularis suis ordinatis (ut liquet ex Elem.), ideoque est Axis Hyperbolæ & ejus Diameter Conjugata Axis conjugatus: si à Centro feratur utrinque in Axem longitudo Asymptoti à centro ad extremum Axis conjugati sumptæ, puncta notata in Axi dicuntur foci Hyperbolæ, & si à focus ad quodvis Hyperbolæ punctum ducantur lineæ, earum differentia est semper Axi transverso æqualis. Latus Rectum axis dicitur Latus rectum Principale, & tota linea ordinatim Axi applicata in foco est æqualis illi lateri recto Principali, quod erit majus quadruplo distantia verticis à foco, si denique bifariam dividatur Angulus quem faciunt lineæ ab utroque foco ad idem curvæ punctum ductæ, lineæ eum angulum bifecans, erit Tangens curvæ in eo puncto. (Apol. lib. 3. 51.)

Demonst. Ducatur quævis linea ex foco H , sumatur $HI = DA$, & ducta IS ad alterum focum S , fiat $ISP = PIS$ erit $PI = PS$, ideoque differentia linearum HP, SP erit $HI = DA$ seu axi transverso, dico hoc posito, P ad Hyperbolam pertinere. Centro P , radio PS , describatur circulus $ISGN$ habebitur hæc proportio, $HI : HS = HG : HN$ sumatur dimidium harum linearum manebit proportio, sit autem $\frac{1}{2} HI = HR$, $\frac{1}{2} HS = CS$ $\frac{1}{2} HG = \frac{1}{2} HS + \frac{1}{2} SG$ & demissa PO perpendiculari in SG est $\frac{1}{2} SG = SO$, ergo $\frac{1}{2} HG = CS + SO = CO$, Denique $\frac{1}{2} HN = \frac{1}{2} HI + \frac{1}{2} IN = RI + IP = RP$ est ergo $HR : CS = CO : RP$: componendo primum habetur $HR : CS + HR = CO + HR$: $CO : RP + CO$ & prioris rationis terminos terminis secundæ jungendo habetur $HR : CS + HR = CO + HR$:



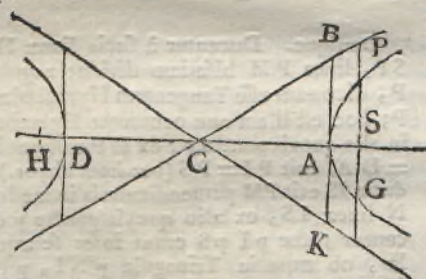
$HR + RP + CS + CO$, sive quia $HR = AC = DC$, & $CS = CH$ est $AC : CS + AC = DO : HP + HO$.

At operationibus contrariis in eandem proportionem $HR : CS = CO : RP$ factis, hoc est, dividendo & postea prioris rationis terminos e terminis secundæ detrahendo, substitutionibus factis erit

$AC : CS - AC = AO : HP - HO$, multiplicatis ergo terminis utriusque proportionis erit

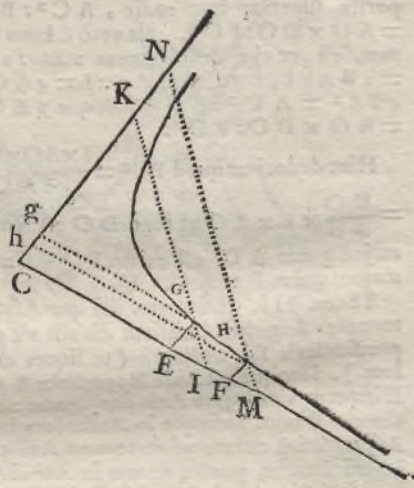
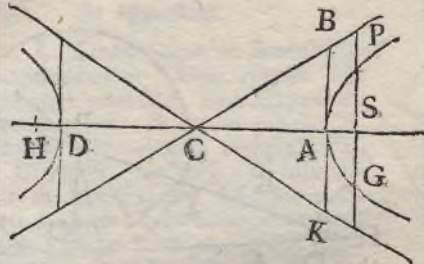
$AC^2 : CS^2 - AC^2 = AO \times DO : HP^2 - HO^2$ sit autem perpendicularis AB erecta ab A usque ad Asymptotam CB , est $CB = CS$, & $CS^2 - AC^2 = AB^2$; est etiam $HP^2 - HO^2 = PO^2$, est ergo

$AC^2 : AB^2 = AO \times DO : PO^2$, sed est $AC^2 : AB^2 = BO \times AO$ ad quadratum ordinatæ in O , (per Thor. II.) ergo PO est ipsa illa ordinata & punctum P ad Hyperbolam pertinet.

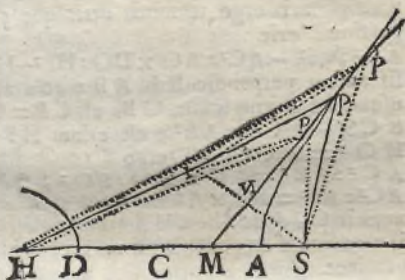


Sit autem PS ordinata in foco, erit $AC^2 : AB^2 = AS \times DS : PS^2$ est verò $DS = CS + AC$ & $AS = CS - AC$, ergo $BS \times AS = CS^2 - AC^2 = AB^2$, ergo $AC^2 : AB^2 = AB^2 : PS^2$, & $AC : AB = AB : PS$, & duplicando omnes

DE MOTU
CORPORUM.



terminos $2 AC : 2 AB = 2 AB : 2 PS$ five
 PG . Sed est per naturam lateris recti
 $2 AC : 2 AB = 2 AB : L$, ergo $L = PG$:
 & $\frac{1}{2} L = PS$, sed cum per Theor. II.
 sit $PO^2 = \frac{DO}{AB} \times L \times AO$ erit ergo
 PS^2 five $\frac{1}{4} L^2 = \frac{DS}{AB} \times L \times AS$ & $\frac{1}{4} L =$
 $\frac{DS}{AB} \times AS$, ut itaque DS est major AB ,
 erit $\frac{1}{4} L$, major AS .



Denique. Ducantur à focus lineæ HP ,
 SP , lineæ PM bifariam dividat angulum
 P ; dico eam esse Tangentem Hyperbolæ in
 P ; hoc est illam non occurrere Hyperbolæ
 in alio quovis puncto p ; ex HP tollatur HI
 $= DA$, erit $PI = PS$ (per hoc Theor.) &
 ducta IS erit PM perpendicularis in medium
 N lineæ IS , ex alio quovis puncto p du-
 cantur rectæ pI pS erunt inter se æqua-
 les, ob æqualia Triangula pNI , pNS
 (per 4. 1. Elem.) sed si p esset in Hyper-
 bolæ, esset $Hp = HI + pS$ five quia
 $pI = pS$ esset $Hp = HI + Ip$, quod ab-
 surdum (per 20. 1. Elem.)

Theor. IV. Si sumantur pro abscissis
 portiones quævis Asymptoti ab Hyperbo-

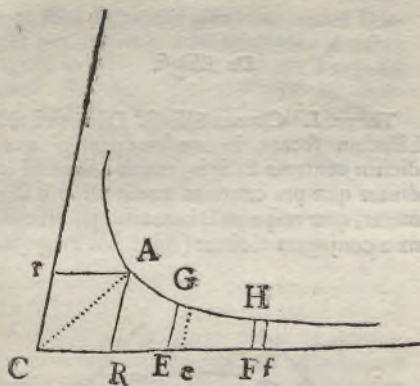
læ Centro, & Ordinatæ sint Parallelae al-
 teri Asymptoto, Ordinatæ erunt suis Abs-
 cissis reciprocè proportionales; Et area
 inter Asymptotum, Hyperbolam, ordina-
 tam Vertici axis occurrentem & ordina-
 tam quamvis comprehensa erit abscissæ hu-
 jus ordinatæ Logarithmus.

Demonst. Sit C centrum Hyperbolæ;
 CE CF abscissæ, EG FH ordinatæ
 Asymptoto CN parallelæ dico quod est
 $CE : CF = FH : EG$, Ductis enim per
 G & H lineis Gg , Hh parallelis Asymp-
 toto CF , & IGK , MHN inter se par-
 allelis trans Hyperbolam, erunt similia
 Triangula IGE & MHF , GKg & HNh
 propter Parallelas, ideoque est

$IG : MH = GE : HF$
 & $GK : HN = Gg$ (five CE) : Hh (five FC)
 compositis rationibus est
 $IG \times GK : MH \times HN = GE \times CE : HF \times FC$.
 Sed, (per Lem. I) est $IG \times GK = MH \times HN$,
 ergo $GE \times CE = HF \times FC$ est ergo
 $CE : CF = HF : GE$,

cum autem Parallelogrammata CG , CH ,
 sint æquiangula & ea lateribus reciprocis
 contineri sit demonstratum, sunt æqualia.

Dico denique areas Hyperbolæ esse abs-
 cissarum Logarithmos; ex centro C ducatur
 axis CA , & ex vertice A ducantur lineæ
 ARA r Asymptotis Parallelæ, ob Angulum C
 bifariam divinum & parallelas, erit $CR = AR$
 sit $AR = 1$; & fingantur duæ ordinatæ
 quæ ita moveantur ut abscissæ unius, sint



Theor. II.) facta abscissarum quadrato ordinatarum æqualia sunt, sicut in circulo: Diversæ Hyperbolæ eodem Asymptotorum angulo descriptæ sunt similes: Si vero idem sit Hyperbolarum axis sed diversus Angulus erunt ordinatæ ad idem axes punctum sicut Radices quadratæ Laterum Rectorum Principalium, & in ea erunt ratione portiones earum Hyperbolarum per Ordinatas terminatarum quarum æquales sunt abscissæ.

Demonst. Axis transversus est perpendicularis conjugato, dividitque bifariam angulum Asymptotorum; si ergo is angulus sit 90°. ejusque dimidium 45°. Triangulum CAH erit Isosceles & CA=AH, cætera ex his facile deducuntur.

semper potentia eadem n alterius; coincident quidem in R, nam quævis potentia unitatis est semper 1, sed procedendo sit CE=x debet esse CF=xⁿ, erunt ergo GE $\frac{1}{x}$ & HF $\frac{1}{x^n}$ est enim

$$CE:CR = AR:GE \text{ five } x:1 = 1:\frac{1}{x}$$

$$\& CF:CR = AR:FH \text{ five } x^n:1 = 1:\frac{1}{x^n}$$

fluxio autem lineæ CE erit dx=Ee, & lineæ CF erit nxⁿ⁻¹dx=Ff, ideo

$$\text{areæ RG fluxio erit } dx \times \frac{1}{x} = \frac{dx}{x} \text{ \& areæ}$$

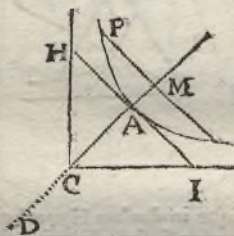
$$\text{RH, } nx^{n-1}dx \times \frac{1}{x^n} = \frac{ndx}{x} \text{ sed } \frac{dx}{x}$$

$$\frac{n dx}{x} = 1:n, \text{ sunt ergo fluxiones earum}$$

arearum in Ratione constanti 1 ad n, ideoque & areæ integræ RG, RH quæ sunt earum summæ, sunt in eadem ratione 1 ad n, sunt autem 1 & n Exponentes potentiarum abscissarum CE, CF, sunt ergo areæ sicut illi exponentes, sed Logarithmi sunt semper ut Exponentes potentiarum quantitatum quarum sunt Logarithmi, ergo illæ areæ RG, RH, sunt Logarithmi abscissarum CE, CF.

In puncto R ubi abscissa est unitas area est 0, ut Logarithmis convenit, sitque negativa retrocedendo ab R versus C, simulque cum sint abscissæ minores unitate CR sunt fractiones.

Theor. V. Si Angulus Asymptotorum sit Rectus, Hyperbola dicitur æquilatera, æqualesque sunt Axes conjugati, ideoque latus Rectum Axis transverso est æquale, ac (per

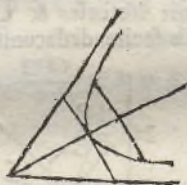
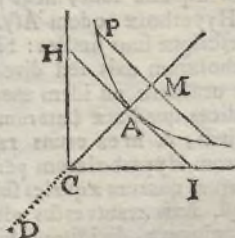


Si in duabus Hyperbolis anguli Asymptotorum sint æquales, ut bifariam dividuntur per axem, similia erunt Triangula CAH, ca h: ideoque CA²:AH²=Ca²:ah² sumantur abscissæ AM, am in ratione AD ad a d erit etiam DM:dm in eadem ratione cum sit ergo AM:am=AD:a d

$$\& D:M:dm = AD:a d.$$

est AM x DM:am x dm = AD²:a d² sed est CA²:AH²=ca²:ah²=AM x DM:MP²=am x dm:m p², & altern. AM x DM:am x dm = MP²:m p² est ergo AD²:a d²=MP²:m p² unde est MP:m p = AD:a d, omnes ergo ordinatæ ac omnia puncta Hyperbolæ determinantur per rationem AD ad a d.

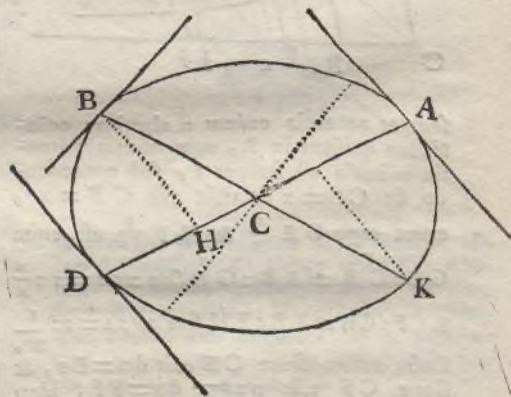
DE MOTU
CORPO-
RUM.



Sint denique in duabus Hyperbolis æquales axes transversi sed diversi Asymptotorum Anguli; diversa erunt Latera Recta, sumantur ergo æquales abscissæ, & quoniam Axis est ad latus Rectum sicut factum partium abscissæ ad quadratum ordinatæ, Axis verò & factum partium abscissæ æqualia sunt utrinque, eadem erit utrinque ratio Lateris recti principalis ad quadratum ordinatæ, erunt ergo ordinatæ quæ ad æquales abscissas pertinebunt, ut Radices quadratæ Laterum rectorum principalium, quæ ratio est constans, sit ergo utraque abscissa in portiones infinitè parvas & utrinque, æquales divisa singula Parallelogrammata quam minima super æquales abscissæ portiones formata erunt in eadem ratione ac ordinatæ, ergo area Hyperbolarum, quæ sunt eorum Parallelogrammorum summæ, in eadem erunt ratione, nempe ut Radices quadratæ laterum Principalium.

De Ellipfi.

Theor. I. Omnes Ellipsis Diametri sese bifariam secant in eodem puncto quod dicitur centrum Ellipsis, eaque Diametri ordinata quæ per centrum transit est ipsa Diameter, quæ respectu Diametri ejus est ordinata conjugata dicitur: (Apol. l. i. Prop. 30.)



Demonst. Si per medium C, Diametri Ellipsis AD, ducatur linea quavis BK, & per puncta B & K ducantur BH, KG ordinatæ Diametro AB, erit per Lemma V.

$AG \times GD : AH \times HD = CK^2 : BH^2$ & propter Triangula similia GKC, CBH est $GK : BH = CG : CH = BC : CK$, est ergo $AG \times GD : AH \times HD = CG^2 : CH^2$, est autem (per 5. 2. Elem.) $AG \times GB = AC^2 - CG^2$ & $AH \times HB = AC^2 - CH^2$, est ergo

$AC^2 - CG^2 : AC^2 - CH^2 = CG^2 : CH^2$, & jungendo terminos secundæ rationis terminis prioris, est $AC^2 : AC^2 = CG^2 : CH^2$, ideo $CG = CH$, ac per consequens $BC = CK$.

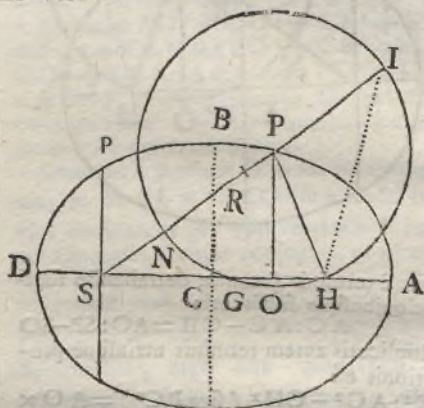
Omnes ergo lineæ per punctum C transeuntes illic bifariam secantur. Sunt autem singulæ Diametri Ellipsis, nam in vertice B ducatur Tangens, & per Centrum C linea illi parallela, ea dividetur bifariam, cum itaque BK bisecet lineam Parallelam Tangenti per ejus verticem ductæ, est Diameter, per Lemma V.

Denique solæ lineæ per Centrum transeun-

eunt sunt Diametri; fingatur enim Diameter per centrum non transiens, ducatur Tangens in ejus Vertice, & illi Tangenti ducatur Parallela per Centrum C, bifariam dividetur in centro, ergo bifariam non dividetur à Diametro supposita quæ per centrum non transit, ergo male supponitur eam esse Diametrum: Omnes ergo Diametri Ellipsis per centrum transeunt, illicque bisecantur.

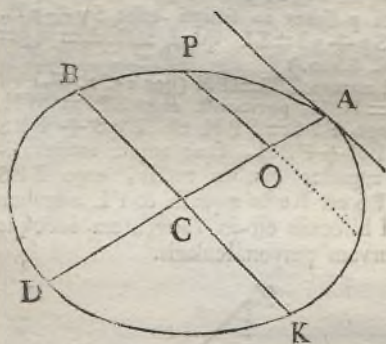
Theor. II. Tertia proportionalis Diametro transversæ ejusque conjugatæ dicatur Latus Rectum, erit Diameter transversa ad Latus Rectum, vel quod idem est quadratum diametri transversæ ad quadratum ejus conjugatæ, ut factum abscissarum sumptarum ab utroque Vertice Diametri ad quadratum ordinatæ, inde quadratum Ordinatæ semper minus deprehenditur factò Lateris recti per utramlibet abscissam, undè hæc curva dicitur Ellipsis; (Apoll. lib. 1. Prop. 21.)

drato semiaxis majoris CA², dicantur que puncta H & S, Foci, summa linearum ab utroque foco ad quodvis punctum Ellipseos ductarum erit semper æqualis Axi majori, (Apoll. Lib. 3. Prop. 52.); & tota linea ordinatim applicata in foco erit æqualis Lateri Recto Principali, quod ergo minus erit quadruplo distantia foci à proximo Vertice.



Demonst. Ducatur quævis linea ex foco S, in eâ sumatur SI = DA & ducta IH ad alterum focum, fiat IHP = I erit IP = PH, ideoque SP + PH = SP + PI = SI = DA sive axi majori: quo posito dico punctum P ad Ellipsim pertinere. Centro P radio PH describatur circulus IHGN habebitur hæc Proportio SI : SH = SG : SN, sumendo dimidium harum linearum manebit proportio; sit autem $\frac{1}{2} SI = SR$; $\frac{1}{2} SH = CH$; $\frac{1}{2} SG = \frac{1}{2} SH - \frac{1}{2} GH$ & demissa PO perpendiculari in GH est $\frac{1}{2} GH = HO$ ergo $\frac{1}{2} SG = CH - HO = CO$. Denique $\frac{1}{2} SN = \frac{1}{2} SI - \frac{1}{2} NI = RI - PI = RP$ est ergo

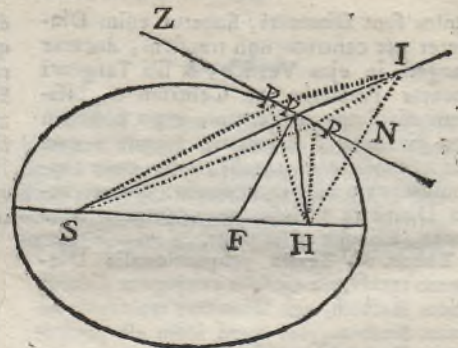
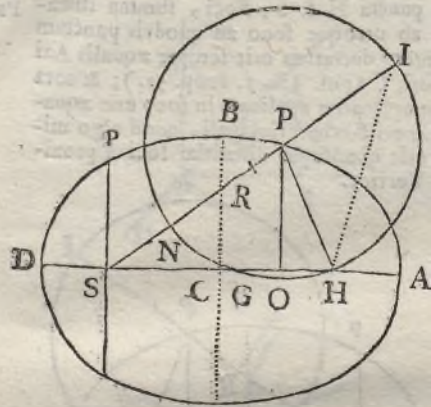
SR : CH = CO : RP & componendo habetur SR + CH = CO : CC + RP, tum prioris rationis terminos jungendo terminis secundæ, est : SR, SR + CH = CC + SR : CO + RP + SR + CH sive quia SR = AC = DC & CH = CS, est AC : AC + CH = DO : SP + SO. At operationibus contrariis factis in eandem proportionem SR : CH = CO : RP, hoc est, dividendo & postea prioris rationis terminos



Demonst. Sit Ellipsis Diameter ACD, ejus conjuga a BCK est per Lemma IV, AC x CD sive AC² : AO x DO = BC² : PO² & alternando AC² : BC² = AO x DO : PO², sed est 2 AC : 2 CB = 2 CB : L, ergo 4 AC² : 4 CB² = AC² : CB² = 3 AC, L = AO x DO : PO², ergo est PO² = $\frac{L \times AO \times DO}{2 AC} = \frac{DO}{2 AC} \times L \times AO$ sed ut 4 DO est semper minus quam 2 AC, est PO² semper minus factò Lateris recti per alterutram abscissam.

Theor. III. Sit AD axis major, à centro feratur utrinque CH, CS, æquales & tales ut quadratum CH² sive CS² cum quadrato semiaxis conjugati CB² sit æquale qua-

DE MOTU
CORPO-
RUM.



minus è terminis secundæ detrahendo substitu-
tionibusque factis erit

$AC : AC - CH = AO : SP - SO$
multiplicatis autem terminis utriusque pro-
portionis est
 $AC^2 : AC^2 - CH^2$ (five BC^2) = $AO \times$
 $DO, SP^2 - SO^2,$

est autem (per 47. 1. Elem.) $SP^2 - SO^2$
 $= OP^2,$ sed est $AC^2 : BC^2 = AO \times DO$
ad quadratum ordinatæ in O, est ergo
PO ipsa illa ordinata, & punctum P ad
Ellipsim pertinet.

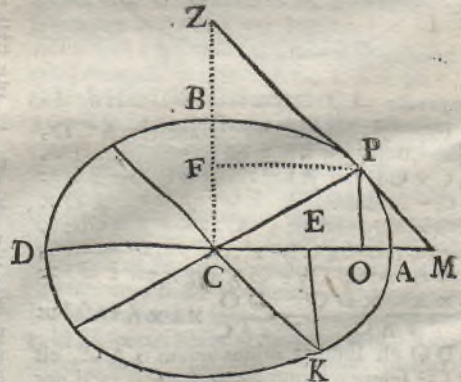
Sit autem Sp ordinata in foco erit
 $AC^2 : BC^2 = AS \times SD : Sp^2,$ est autem
(per 5. 2. Elem.) $AS \times SD = AC^2 -$
 $CS^2 = BC^2,$ est ergo $AC^2 : BC^2 = BC^2 : Sp^2$
five, $AC : BC = BC : Sp,$ & duplicando
omnes terminos: $2 AC : 2 BC = 2 BC : 2 Sp,$
sed est $2 AC : 2 BC = 2 BC : L$ ergo L
 $= 2 Sp,$ & $\frac{1}{2} L = Sp.$

Est autem (per Theorema 2.) $Sp^2,$ five
 $\frac{1}{4} L^2 = \frac{AS}{2 AC} \times L \times DS$ & $\frac{1}{4} L = \frac{AS}{2 AC} \times DS$
ut ergo est AS minor $2 AC$ erit $\frac{1}{4} L$ mi-
nor DS, hoc est latus rectum minus est
quadruplo distantia foci à proximo Vertice.

Theor. IV. Tangens Ellipsis bifariam
dividit Angulum qui fit inter unam è lineis à
foco ductam & productionem alterius: &
lineæ ab utroque foco ductæ, æquales fa-
ciunt angulos cum Tangente, & si bifa-
riam dividatur angulus quem faciunt lineæ
à foco ductæ, linea bifecans erit curvæ per-
pendicularis. (Apol. 48.)

Demonst. Ducantur à focus SP HP
productæque SP in I, dividatur bifariam an-
gulus SPI, dico lineam ZPN non occurrere
Ellipsi in ullo alio puncto p, sit PI = PH &
ducta IH, erit PN perpendicularis in ejus
medium, ex alio quovis puncto p, ducantur
pI, pH, quæ erunt æquales ob æqualia
Triangula pNI, pNH (per 4. 1. Elem.)
sed si p foret in Ellipsi esset $Sp + pH,$
five $Sp + pI = SI$ quod absurdum (per
20. 1. Elem.)

Est autem $ZPS = IPN$ (per 15. 1. El.) est
 $IPN = NPH,$ per const. ergo $ZPS = NPH,$
Si ergo $FPS = FPH$ est $ZPS + FPS$
 $= NPH + FPH,$ sunt autem omnes si-
mul æquales duobus rectis, ergo ZPS
 $+ FPS$ est Recto æqualis & PF angulum
SPH bifecans est in Tangentem ideoque
in curvam perpendicularis.



Theor. V. Sit Diameter quævis AD, &
ducantur utlibet duæ aliæ Diametri inter se
conjugatæ CP, CK, ex utriusque vertice du-
cantur ordinatæ KE, PO in priorem AD, fac-
tum abscissarum à curvâ sumptarum, unius

vertici respondentium erit æquale quadrato abscissæ à centro sumptæ respondenti Vertici alterius Diametri: Unde quadrata ambarum abscissarum à Centro sumptarum erunt simul æqualia quadrato $\frac{1}{2}$ Diametri in quam sumuntur, & quadrata ordinarum erunt æqualia quadrato ejus $\frac{1}{2}$ Diametri conjugatæ. Hinc deducitur summam quadratorum duarum Diametrorum conjugatarum quarumvis esse semper eandem: eas verò Diametros conjugatas esse inter se æquales quarum vertices determinantur per ordinatam erectam in Axem majorem cujus abscissa à centro sumpta sit æqualis radici dimidii quadrati semi Axis majoris.

Demonst. ... Sint CP CK Diametri conjugatæ, PO KE ordinatæ ex earum verticibus in Diametrum AD ductæ; PM Tangens Parallela Diametro CK: Triangula POM, KE C erunt similia & P O: KE = MO: CE, vel PO²: KE² = MO²: CE² five quia (per Cor. 3. Lem. V.) est MO = $\frac{CA^2 - CO^2}{CO}$ est PO²: KE²

= $\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2} : CE^2$, sed per Lemma IV. est PO²: KE² = AO x DO: AE x DE five (per 5. 2. Elem.) = CA² - CO²: CA² - CE² est ergo, CA² - CO²:

CA² - CE² = $\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2} : CE^2$, dividendo primum & tertium terminum per $\frac{CA^2 - CO^2}{CO^2}$ est CO²: CA² - CE² = CA² - CO²: CE² & addendo terminos secundæ rationis terminis primæ est CA²: CA² = CA² - CO²: CE², ergo CE² = CA² - CO² = AO x DO: Pari modo addendo terminos primæ rationis terminis secundæ erit CO²: CA² - CE² = CA²: CA²: ergo CO² = CA² - CE² = AE x DE. Quod erat primum.

Junctis ergo quadratis abscissarum CO², CE² summa est æqualis CA²; nam est CE² = CA² - CO² ergo CE² + CO² = CA² - CO² + CO² = CA².

Sit BC diameter conjugata diametri AC, est PO² = $\frac{BC^2}{AC^2} \times CA^2 - CO^2$ & KE² = $\frac{BC^2}{AC^2}$

Tom. I.

$$\times AC^2 - CE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - AC^2 + \text{LIBER PRIMUS.}$$

$$CO^2 = \frac{BC^2}{AC^2} CO^2, \text{ ergo } PO^2 + KE^2 = \frac{BC^2}{AC^2} \times AC^2 - CO^2 + CO^2 = BC^2.$$

Sit autem Diameter AC axis, ordinatæ erunt perpendiculares, ergo PO² + CO² = PC², & CE² + KE² = CK² (per 47. 1. El.) ergo PO² + CO² + CE² + KE² = PC² + CK², sed PO² + CE² = BC², CO² + KE² = AC² Ergo PC² + CK² = AC² + BC². Quarumvis Diametrorum conjugatarum quadrata æqualem summam facient ac quadrata axium.

Denique si punctum O in axi ita sit sumptum ut sit $\frac{1}{2} CA^2 = CO^2$ & sit ducta in O ejus ordinata & per ejus verticem P ducatur Diameter ejusque conjugata, quadratum abscissæ quæ respondebit vertici Diametri conjugatæ erit æquale AO x DO five AC² - CO² sed CO² = $\frac{1}{2} CA^2$ per hypothesim, ergo hoc quadratum erit etiam æquale $\frac{1}{2} AC^2$, eadem ergo abscissa ac proinde æquales ordinatæ verticibus utriusque Diametri respondebunt, æquales ergo erunt illæ Diametri conjugatæ siquidem sunt Hypothenusæ æqualium abscissarum & Ordinarum.

Cor. I. Si à vertice Diametri PC, producatur Tangens terminata utrinque in M & Z, ad Diametros conjugatas CA, CB productas, erit semiDiameter CK priori conjugata media proportionalis inter partes Tangentis PM PZ: Ductis enim ordinatis PF PO, ob similia Triangula CKE, ZFP, POM, est CK: CE = ZP: FP (five CO) & CK: CE = PM: MO unde compositis rationibus est CK²: CE² = ZP x PM: CO x MO, sed CO x MO = AO x DO (per Cor. 3. Lem. V.) & AO x DO = CE² per præsens Theorema, ergo CK²: CE² = ZP x PM: CE² & CK² = ZP x PM five ZP: CK = CK: PM. Q. E. D.

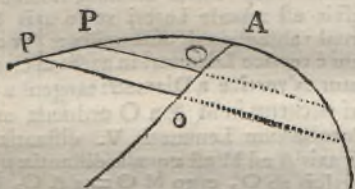
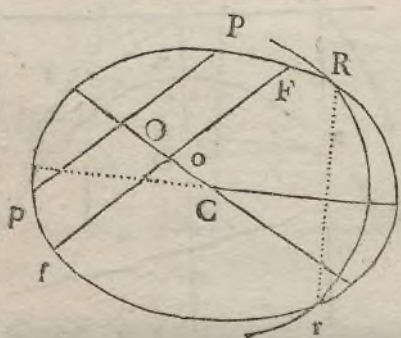
Et conversa per se liquet, nempe quod si duæ Diametri occurrant Tangenti ductæ in Vertice alterius Diametri, ita ut hujus $\frac{1}{2}$ Diameter conjugata sit media proportionalis inter partes tangentis, duæ illæ priores Diametri erunt inter se conjugatæ.

R

Pre-

ex vertice axis minoris, ut centro, cum radio æquali semi axi majori ipse major axis secetur, & datis focus & axi majori puncta quotlibet ad Ellipsum pertinentia inveniri possunt, si ab uno foco ducatur ut libet linea æqualis axi majori & ab ejus extremitate ducatur linea ad alterum focum, fiat in hoc foco super hanc lineam angulus æqualis angulo qui sit inter lineas à focus ductas, secabitur prima linea in puncto ad Ellipsum pertinente.

& aliud illi parallelum per unam è lineis Parabolæ in hoc plano formabitur Hyperbolæ sed quam proxima Parabolæ, & cujus centrum tanto magis à Vertice conii remouetur quo minor est chorda per quam transit planum per Verticem conii ductum, evanescat hæc chorda, centrum ejus Hyperbolæ in infinitum abibit, & ut Planum verticale fiet tangens cono, coincidet hæc Hyperbola cum Parabolâ, sed omnes ejus Diametri à puncto infinitè remoto divergentes erunt Parallelae & infinitæ, tales ergo etiam erunt Diametri Parabolæ. Præterea ex casu 2^o. Lem. III. constat quod si secans infinita plures lineas Parallelas in Sectione Conicâ secet, abscissæ erunt inter se ut facta partium linearum Parallelarum, sed hæc bifariam dividuntur à Diametro, sunt ergo Diametri abscissæ sicut quadrata ordinarum.



Cor. II. Si Ellipsis sit data, sic inveniuntur centrum & Axes: ducantur ut lubet duæ Parallelae Pp, Ff, per earum medium O: o, ducatur linea, erit Diameter, ejus medium C erit Centrum ex quo describatur circulus qui secet curvam in duobus punctis R r ducatur per centrum linea perpendicularis in lineam Rr quæ eam bifariam dividet (per 3. 3. Elem.) erit ergo Axis, alter axis habetur erigendo lineam huic perpendicularem in Centro ad curvam usque.

I X. De Parabola.

I. Theor. Omnes Diametri Parabolæ sunt infinitæ & inter se Parallelae: quadrata ordinarum sunt inter se ut Abscissæ Diametrorum, & cum tertiâ proportionalis abscissæ & ordinatæ dicatur Latus Rectum, factum lateris Recti per abscissam est æquale quadrato ordinatæ, hincque derivatur nomen hujus curvæ. (Apol. lib. 1. Prop. 20.)

Dem. Ducatur in basi conii chorda parallela plano Parabolæ, & infinitè parva, per verticem conii & eam chordam ducatur Planum

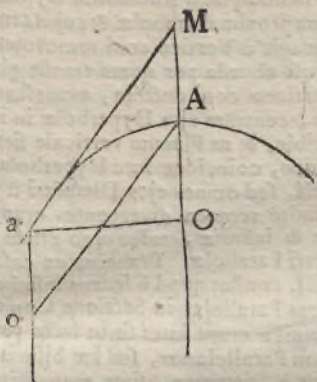
Fiat AO, OP=OP: L erit OP² = AO x L; esto verò quævis alia abscissa Ao & ordinata op erit AO: Ao = OP²: op², & multiplicando primam rationem per L erit L x AO: L x Ao = OP²: op², sed per Hypothesim AO x L = OP² ergo etiam L x Ao = op² hoc est factum Lateris recti per quamvis abscissam æquale est quadrato ordinatæ ipsi respondentis.

Cor. I. Si in Diametrum productam sumatur à Vertice longitudo æqualis lateri Recto, & ab ejus extremo ad extremum abscissæ describatur semi circulus, & in vertice diametri Parabolæ erigatur Perpendicularis ad circulum usque, erit hæc perpendicularis æqualis ordinatæ ad eam abscissam pertinenti.

Cor. II. Si in Diametro quavis sumatur à vertice quarta pars ejus Lateris recti, ordinatim applicata illi puncto erit æqualis lateri recto. Sit enim Ao = 1/4 L est 1/4 LL = op²: ergo LL = 4 op² & L = 2 op, sive toti ordinatim applicatæ in o.

Cor.

DE MOTU
CORPORUM.

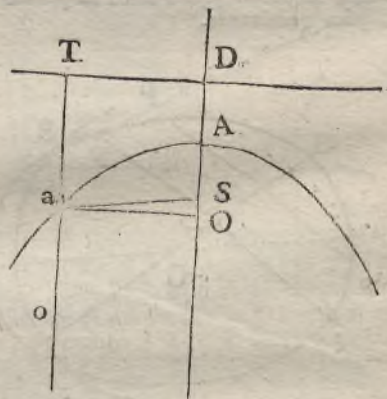


Cor. III. Latus Rectum Diametri cuiusvis est æquale Lateri recto axis & quadruplo abscissæ axis determinatæ per ordinatam à vertice Diametri in axem ductam, Ducatur ex vertice a Diametri tangens a M quæ axi occurrat in M & a O ordinata axi, per Corollarium Lemmatis V. distantia verticis axis A ad M est æqualis distantie ejusdem verticis ab O, ergo $MO = 2 AO$, & (per 47. 1. Elem.) est $a M^2 = MO^2$ (sive $4 AO^2$) $+ a O^2$ (sive $L \times AO$) $= 4 AO + L \times AO$; à vertice A axis ducatur ordinata A o ad Diametrum propositam, evidens est ob parallelas a o, A O, & Tangentem ordinatæ parallelam, esse $ao = AM$ sive $A O \times o A = a M$; fit verò latus Rectum Diametri a o, erit $o A^2$, sive $a M^2 = l \times a o = l \times AO$ sed erat $a M^2 = 4 AO + L \times AO$ ergo $l \times AO = 4 AO + L \times AO$, unde $l = L + 4 AO$. Q. E. D.

Theor. II. Si in axe sumatur à vertice quarta pars ejus lateris recti, id punctum vocatur Parabolæ focus, si verò ultra verticem eadem feratur longitudo & per punctum in quo cadit ducatur linea axi perpendicularis, dicetur Directrix Parabolæ: Si autem producaturs quævis Diameter ad Directricem, portio ejus inter verticem & Directricem comprehensa est quarta pars lateris Recti ejus Diametri, & est æqualis distantie ejus verticis à foco.

Demonst. Ut enim Diameter & axis sunt paralleli, ducta perpendiculari a T à vertice diametri ad directricem erit $a T = OD =$

$DA + AO$, est verò DA, quarta pars lateris recti principalis & AO abscissa axis quæ respondet ordinatæ a O à vertice Diametri ductæ, est verò (per Corol. 2. Theor. præced.) latus rectum diametri æquale quadruplo lateris recti & quadruplo AO, hoc est $= 4 DA + 4 AO$ ergo $a T = DA + AO$ est quarta pars lateris Recti Diametri a o.

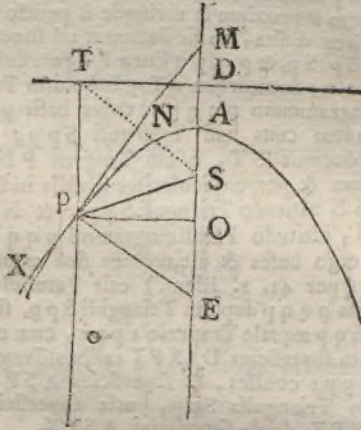
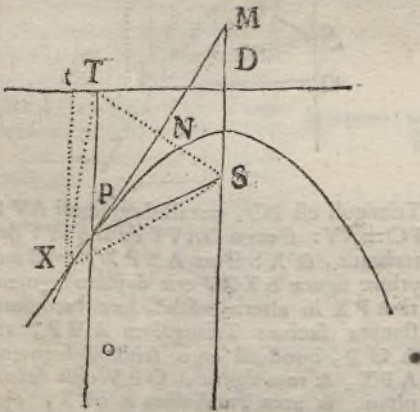


Secundò, B foco Parabolæ S, ad verticem Diametri ducatur S a, fitque ducta a O ordinata axi, (per 47. 1. Ele.) est $S a^2 = SO^2 + a O^2$ & $a O^2 = 4 DA \times AO$: ergo $S a^2 = SO^2 + 4 DA \times AO$, sed est DO^2 (per 8. 2. El.) $= S a^2$ & $S a = DO = a T$.

Theor. III. Si à puncto Parabolæ ducatur perpendicularis ad Directricem, & linea ad focum, bifariamque dividatur Angulus quem faciunt, linea eum dividens erit Tangens in eo puncto, quæ si producaturs donec secet axem, portio axis à foco ad occursum Tangentis contenta erit æqualis lineæ à foco ad punctum Parabolæ ductæ: Angulus Diametri cum Tangente erit æqualis angulo lineæ à foco ductæ cum eâ Tangente, ideo ea quæ secundum Diametros ad Parabolam adpellunt ad focum reflectentur, & Angulus Diametri cum lineâ à foco ductâ bifariam dividitur per perpendicularem ad curvam: Si ea perpendicularis secet axem, pars axis inter eam & ordinatam axi ex Vertice Diametri ductam, est æqualis dimidio lateris recti principalis, & pars axis inter eam & Tangentem comprehensa, est dimidium lateris Recti Diametri, ipsa verò per-

perpendicularis est media Proportionalis
inter ea semilatera recta.

LIBER
PRIMUS.



Demonst. Sit TD directrix, à puncto P
linea PT perpendicularis in Directricem ducatur, ducatur etiam ad focum linea PS & denique ducatur linea PN bifariam dividens angulum SPT; illa linea perpendiculariter & bifariam dividet lineam ST à foco ad punctum T ductam. Ex quovis puncto X lineæ PN ducantur lineæ XT, XS, erunt inter se æquales (per 4. 1. Elem.), erit verò XT directrici obliqua ideoque perpendicularis ab X in Directricem demissa erit brevior quam XT ac per consequens brevior quam XS, ergo id punctum X vicinius erit Directrici quam foco, erit ergo extra Parabolam, ideoque linea PN erit Tangens, cum in unico puncto P Parabolæ occurrat.

Anguli autem TPN, NMS sunt æquales ob Parallelas TP, MS, & per const. TPN = NPS, ergo NMS = NPS, est ergo Triangulum MSP Isosceles, & MS = SP.

Anguli autem XPO, TPN, per verticem sunt oppositi, ergo sunt æquales, sed TPN = NPS per const. ergo XPO = NPS.

Dividatur bifariam angulus SPO per lineam PE ita ut sit OPE = EPS; erit XPO + OPE = NPS + EPS hi qua-

tuor valent duos rectos, ergo XPO + OPE valent rectum & est PE perpendicularis in Tangentem.

Est ergo in Triangulo Rectangulo MPE (ducta perpendiculari PO) MO:PO = PO:OE = $\frac{PO^2}{MO}$, est verò $PO^2 = L \times AO$ &

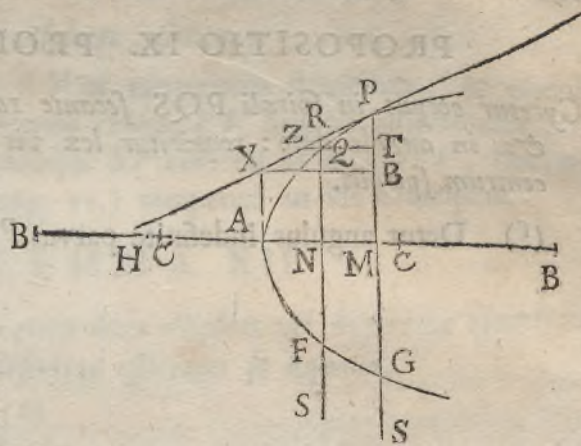
$$MO = 2AO \text{ ergo } OE = \frac{L \times AO}{2AO} = \frac{L}{2}.$$

Ergo etiam EM est æqualis dimidio lateris Recti Diametri PO, est enim ejus Latus Rectum æquale lateri Recto principali & quadruplo abscissæ AO, est verò OE dimidium lateris Recti Principalis & MO = 2AO, sive dimidium quadrupli AO, ergo EM = $\frac{1}{2}L$.

Est etiam ob Triangulum Rectangulum MPE, EM:PE = PE:OE; ergo est PE hoc est perpendicularis in curvam, media proportionalis inter semilatus rectum Diametri & semilatus rectum Axis.

Theor. IV. Superficies Parabolica inter curvam, abscissam axis & ejus ordinatam comprehensa, est ad factum abscissæ per Ordinatum ut duo ad tres, segmentum verò Parabolicum inter curvam & chordam à Vertice ductam terminatum est ejusdem facti sexta pars.

HIS verò circa Conicas Sectiones ad mentem revocatis, sine quibus sequentia intelligi nequeunt, probabitur, vim centripetam quâ corpus tendens ad punctum remotissimum Sectionem Conicam describit, esse reciprocè ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium tendentis: Corpus P moveatur in Sectione conicâ PAF, & vis centripeta agat juxtâ directionem parallelarum PS, RS, axi AB applicatarum. Linea PH, Sectionem tangat in P, sintque ZT, XB, axi parallelæ, & XA ipsa Tangens in A, & ob similia triangula XPB, ZTP, ZQR, erit,



$PX:BX$ (seu AM) = $PR:QT$ & $PX^2:AM^2 = PR^2:QT^2$, & (per Prop. 16. lib. 3. Conic. Appoll. quæ est Cor. 2. Lem. III. de Conicis) $PR^2:QR \times FR = PX^2:AX^2$, adeoque $PR^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2}$, ergo

$$PX^2:AM^2 = \frac{PX^2 \times QR \times FR}{AX^2} : QT^2;$$

& $AX^2:AM^2 = QR \times FR:QT^2$, undè $QT^2:AM^2 \times FR = AM^2 \times 2PM$ ubi $QR = \frac{AX^2}{AM^2 \times 2PM} \times QT^2$

puncta P, Q, coeunt, & $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{AM^2 \times 2PM \times SP^2}{AX^2}$. Est ergo (per coroll. I. & V. prop. VI^a) in omnibus sectionibus conicis vis centripeta reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM \times 2SP^2}{AX^2}$, hoc est, deleta

to $2SP^2$, constante, reciprocè ut $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2}$.

Porrò ob similitudinem triangulorum HAX, HMP, est $HM:PM=HA:AX = \frac{PM \times HA}{HM}$

& $AX^2 = \frac{PM^2 \times HA^2}{HM^2}$ & $\frac{AM^2 \times PM}{AX^2} = \frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$, vis igitur est etiam in omni sectione conicâ reciprocè ut $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2}$.

In Parabolâ (per prop. 35. lib. 1. conic. appoll. sive cor. 1. Lem. V. de Conicis) $HA=AM$, & $HM=2AM$, & (per prop. 20. lib. 1. conic. Appoll. quæ est Theor. 1. de Parabolâ) AM , adeoque & HM

est semper ut PM^2 . Ergò vis centripeta in parabolâ erit reciprocè ut $\frac{4AM^4}{PM \times AM^2}$ five ut $\frac{AM^2}{PM}$, hoc est, ut $\frac{PM^4}{PM} = PM^3$, hoc est, reciprocè ut cubus ordinatæ PM.

In Ellipsi & Hyperbolâ, si latus rectum axis AB, dicatur L, erit (ex prop. 21. lib. 1. conic. appoll. sive Theor. II. de Ellip.) $PM^2:AM \times MB=L:AB$ ac proinde $AM = \frac{PM^2 \times AB}{L \times MB}$, & $AM^2 = \frac{PM^4 \times AB^2}{L^2 \times MB^2}$, & $\frac{AM^2 \times HM^2}{PM \times HA^2} = \frac{PM^3 \times AB^2 \times HM^2}{L^2 \times MB^2 \times HA^2}$, undè deletâ ratione constanti $\frac{AB^2}{L^2}$, erit vis centripeta reciprocè ut $\frac{PM^3 \times HM^2}{MB^2 \times HA^2}$; verùm (per prop. 37. lib. 1. conic. Appoll. sup. cor. 2. Lem. V.) posito centro sectionis C, est $CM:CA=CA:CH$, adeoque dividendo vel componendo $CM:AM=CA:HA$, ac proinde addendo vel detrahendo terminos secundæ rationis è terminis prioris $MB:HM=CA:HA$

& $\frac{HM}{MB \times HA} = \frac{1}{CA}$ & $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2} = \frac{1}{CA^2}$ quæ est quantitas constans. Erit igitur etiam in hyperbolâ & Ellipsi adeoque in omni sectione conicâ vis centripeta reciprocè ut PM^3 , seu reciprocè ut cubus ordinatæ PM; deletâ nimirum, in expressione vis centripetæ suprâ inventâ, quantitate $\frac{HM^2}{MB^2 \times HA^2}$, constante.

Idem aliter.

(^t) Perpendicularum SY in tangentem demissum, & circuli spiralem concentricè secantis chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP cub. est ut $SYq \times PV$, hoc est (per corol. 3. & 5. prop. vi.) reciprocè ut vis centripeta.

LEMMA XII.

Parallelogramma omnia circa datæ ellipseos vel hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta esse inter se æqualia.

Constat ex conicis. (^y)

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum ellipseos. (^z)

(^t) 226. Sit circuli spiralem osculantis in P chorda per centrum virium S ducta PV , demissumque in tangentem perpendicularum SY , & ob angulum SPY , rectum, & SPY , datum, dabitur specie triangulum SPY . Ergò datur ratio SY ad SP , & in virium centripetarum formulis SP scribi potest pro SY . Præterea datur ratio PV ad SP , nam (210) $SY \times QP = SP \times QT$, adeoque $QP = \frac{SP \times QT}{SY}$;

undè ob rationem $\frac{SP}{SY}$ datam, QP scribi potest pro QT . Verùm (211) $PV = \frac{QP^2}{QR}$, ergò PV , est ut $\frac{QT^2}{QR}$. Cum

igitur ex demonstratis in Prop. IX. $\frac{QT^2}{QR}$ sit ut SP , erit etiam PV , ut SP , & propterea SP , loco PV , substitui potest in formulis.

227. Scholion. Propositio IX. facile demonstratur etiam per formulam Hermanni (214), $v = dp : p^3 dz$; est enim in hoc casu $SP = z$, $SY = p$; & si ratio $\frac{SY}{SP}$ da-

ta dicatur $\frac{a}{b}$, erit $\frac{a}{b} = \frac{p}{z}$ ergo $az = bp$,

Tom. I.

& (160) $adz = bdp$, & $\frac{dp}{dz} = \frac{a}{b}$;

undè $v = \frac{a}{b p^3}$; hoc est, ob datam $\frac{a}{b}$ vis centripeta v , est directè ut $\frac{1}{p^3}$, hoc est reciprocè ut p^3 , aut quia $p = \frac{za}{b}$,

v erit ut $\frac{1}{z^3}$ directè, reciprocè autem ut z^3 , deletis nimirum constantibus.

(^y) Demonstratio hujus Lemmatis inferius tradetur ubi nempe Newtonus eo Lemmate ad solutionem proximi Problematis utetur.

(^z) 228. Gyretur corpus in Hyperbolâ, inveniatur Lex vis centralis spectantis centrum Hyperbolæ simili modo, nisi quod vis illa ejus centri respectu sit centrifuga, quoniam centrum Hyperbolæ non est intra Hyperbolam constitutum, sed Hyperbola versus illud convexitatem obvertit; Legatur si lubet utraque solutio hujus Problematis & ad figuram infra positam in qua Hyperbola descripta est referatur, liquebit vere dici de Hyperbolâ ea quæ Newtonus de Ellipsi statuit,

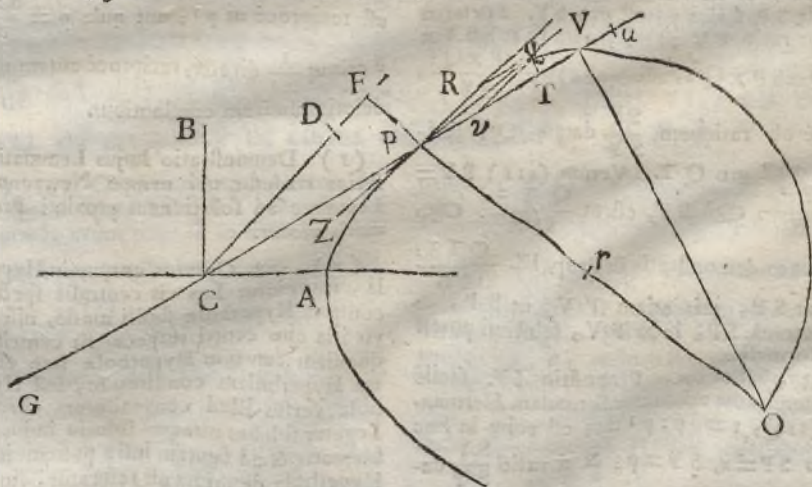
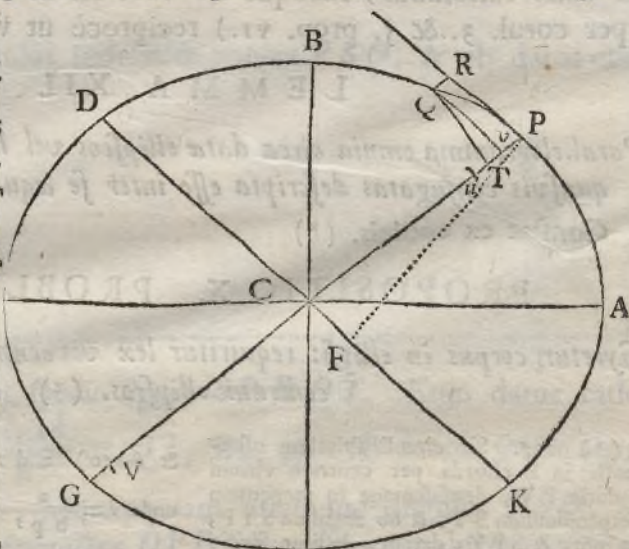
DE MOTU
CORPO-
RUM.

Sunt CA, CB semiaxes ellipseos; GP, DK diametri aliæ conjugatæ; PF, QT perpendiculara ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP ; & si compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (^a) ex conicis) rectangulum PvG ad Qv quad. ut PC quad. ad CD quad. & (ob similia triangula QvT, PCF) Qv quad. est ad QT quad. ut PC quad. ad PF quad. & conjunctis rationibus, rectangulum PvG ad QT quad. ut PC quad. ad CD quad. & PC quad. ad PF quad. id est, vG ad $\frac{QT \text{ quad.}}{Pv}$ ut PC

quad. ad $\frac{CDq \times PFq.}{PCq}$

Scribe QR pro

Pv , & (per lemma XII (^b)) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$



(^a) Ex Conicis, per 21. 1. lib. Apoll. Vide Sup. Lemma IV. de Conicis.

(^b) 219. Parallelogramma omnia circa datæ Ellipseos vel Hyperbolæ Diametros quas-
vis

nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2PC$ pro vG , & ductis extremis & mediis in se mutuo fiet $\frac{QT \text{ quad.} \times PCq}{QR}$ æquale

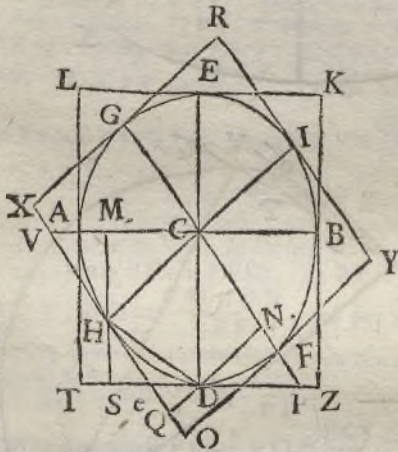
$\frac{2BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per corol. 5. prop. VI.) vis centripeta

reciprocè ut $\frac{2BCq \times CAq}{PC}$; id est (ob datum $2BCq \times CAq$) re-

procè ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directè ut distantia PC . *Q. E. I.*

Idem aliter.

In rectâ PG ab alterâ parte puncti T sumatur punctum u ut Tu sit æqualis ipsi Tv ; deinde cape uV , quæ sit ad vG ut est



vis conjugatas descripta sunt inter se æqualia.

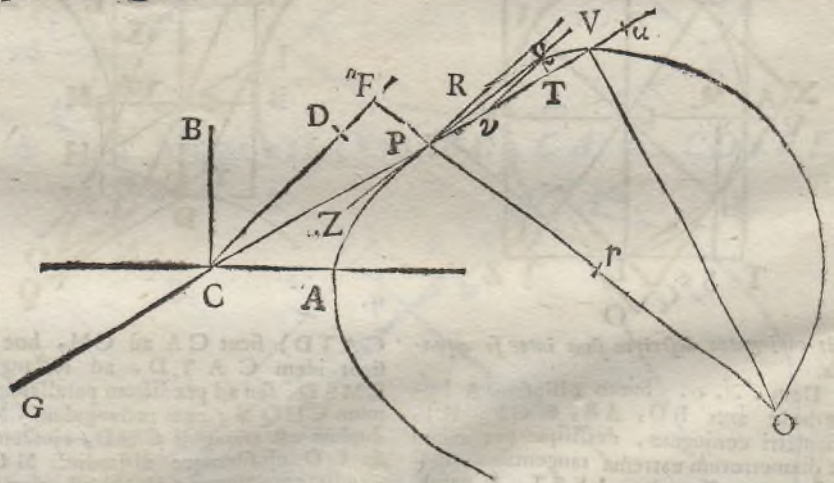
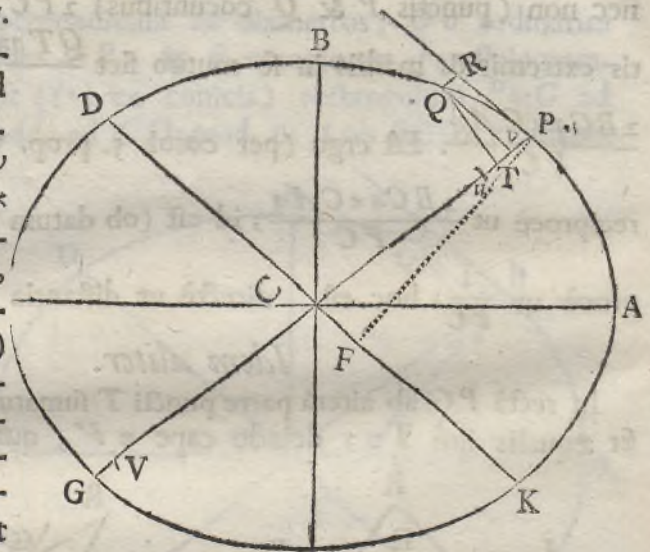
Dem Sunto Ellipseos & hyperbolæ axes ED , AB , & GF , HI , diametri conjugatæ, ductisque per axium & diametrorum extrema tangentibus, describantur rectangulum $LKZT$, & parallelogrammum $XRYO$; jungatur DH , & DN ordinatim applicetur ad diametrum GF , erit (per prop. 37. lib. 1. conic. Apoll. sup. Cor. 2. Lem. V. de Conicis) PC ad CF , (hoc est, parallelogrammum $PCVe$, ad parallelogrammum æquè altum $CHOF$) sicut CF , ad CN , hoc est, sicut idem parallelogrammum $CHOF$, ad parallelogrammum $CHQN$; & similiter VC , erit ad CA , (hoc est, parallelogrammum $PCVe$, ad æquè altum,

$CATD$) sicut CA ad CM , hoc est, sicut idem $CATD$, ad rectangulum $CMSD$, seu ad prædictum parallelogrammum $CHQN$; nam rectangulum $CMSD$, duplum est trianguli CHD , ejusdem basis CD ejusdemque altitudinis MC , & parallelogrammum $CHQN$ est etiam ejusdem trianguli duplum, cum sit utriusque basis communis HC & eadem altitudo ob parallelas HC , QN ; ac proinde $CMSD = CHQN$. Cum igitur sit $PCVe : CHOF = CHOF : CHQN$, & $PCVe : CATD = CATD : CHQN$, necesse est ut sit $CATD = CHOF$, quare rectangulum $LKZT$, quadruplum rectanguli $CATD$, æquale est parallelogrammo $XRYO$, etiam quadruplo parallelogrammi $CHOF$. *Q. E. D.*

DE MOTU
CORPO-
RUM.

DC quad. ad PC qu.

Et quoniam ex conicis est *Qv quad. ad PvG* ut *DC quad. ad PC quad.* erit *Qv quad. æquale Pv x uV*. Adde rectangulum *uPv* utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs ^(c) *PQ* æquale rectangulo *VPv*; ^(d) ideoque circulus, qui tangit sectionem conicam in *P* & transit per punctum *Q*, tran-



^(c) Adde Rectangulum *uPv* utrinque, & prodibit quadratum chordæ arcûs *PQ*, æquale rectangulo *VP x Pv*. Nam (per construct) est quadratum chordæ arcûs *PQ = QT² + PT²*, sed est *QT² = Qv² - Tv²* sive quia *Tv = Tu* est *QT² = Qv² - Tu²*, ideo quadratum chordæ arcûs *PQ = Qv² - Tu² + PT²*, est verò *PT² - Tu² = PT + Tu x PT - Tu* sive *PT - Tv = Pv x Pv*, ergo quadratum chordæ arcûs *PQ = Qv² + Pv x Pv*.

Quod si Rectangulo *Pv x uV* addas idem rectangulum *Pv x Pv*, est *Pv x Vu + Pv x uP = Pv x VP*, erat verò *Qv² = Pv x uV*, ergo *Qv² + Pv x Pv* sive quadratum chordæ arcûs *PQ* erit æquale Rectangulo *Pv x VP*, sive *VPv*.

^(d) Idemque circulus qui tangit sectionem in *P*, & transit per punctum *Q*, transibit etiam per punctum *V*; nam ductis circuli illius chordis *QP*, *QY*, angulus

etiam per punctum V . Coeant puncta P & Q , & ratio uV ad vG , quæ eadem est cum ratione DCq ad PCq , fiet ratio PV ad PG seu PV ad $2PC$; ideoque PV æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$

Proinde vis, quâ corpus P in ellipsi revolvitur, erit reciprocè ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (per corol. 3. prop. VI.) hoc est (ob datum $2DCq$ in PFq) directè ut PC . *Q. E. I.*

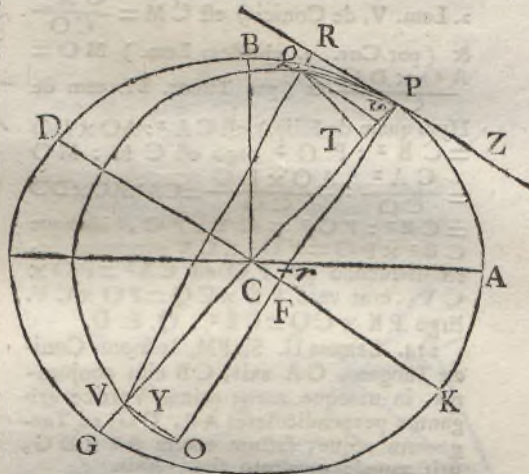
Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis à centro ellipseos: (e) & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in el-

lus $PQv = QPR$, (ob parallelas Qv, PR) = QYP (per 32. 3. Elem.) ac proinde duo triangula $PQv, P Y Q$, quæ communem habent angulum, QPY , & æquales $PQv, P Y Q$, similia sunt, & $Pv : QP = QP : PY$. Undè $P Y = \frac{QP^2}{Pv}$; quare cum sit $Pv \times PV = QP^2$, ideoque $PV = \frac{QP^2}{Pv}$ erit $PV = P Y$.

230. Coroll. 1. . . Ducantur circuli sectionem conicam osculantis diameter PO , & chorda VO , & ob similitudinem triangulorum PFC, PVO , erit $PF : PC = PV : PO = \frac{PC \times PV}{PF}$, sed per secundam demonstrationem Newtonianam $PV = \frac{2DC^2}{PC}$, ergò $PO = \frac{2DC^2}{PF}$, ac pro-

indè radius osculi $Pr = \frac{1}{2} PO = \frac{DC^2}{PF}$, & $PF : DC = DC : Pr$. Quare datis diametris conjugatis eorumque angulo PCD , facile invenitur radius circuli sectionem conicam osculantis in diametri cujusvis extremo.

231. Coroll. 2. . . Datis radio osculi Pr , semidiametro sectionis conicæ PC , & positione tangentis PR , seu angulo PCD , diametrorum conjugatarum, datur altera semidiameter conjugata DC , & describi potest sectio. His enim quæ diximus datis, datur quoque perpendicularis PF , ac proinde DC , media proportionalis inter Pr , & PF , (230) datas. Datis autem diametris conjugatis earumque angulo, sectio conica describi potest; ut notum est ex sectionum conicarum elementis.



232. Coroll. 3. Hinc etiam problema V. aliter solvitur. Cum enim sit vis centralis (212) ut $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, sitque $PF = \frac{BC \times CA}{CD}$, (per Lem. XII.) & $Pr = \frac{DC^2}{PF}$ (230). His valoribus in formulâ $\frac{CP}{Pr \times PF^3}$, substitutis, ea fit $\frac{CP}{BC^2 \times CA^2}$ hoc est, ob constantem quantitatem $BC^2 \times CA^2$, vis est directè ut PC .

(e) Et vicissim si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in Centro Virium &c., ut hæc conversâ demonstretur sequentia sunt præmittenda.

DE MOTU
CIRCULO-
RUM.

lipfi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique ellipsis migrare potest.

233. Lemma I. Ducatur in puncto contactus perpendicularis in Tangentem, ad axem terminatam, & à Centro ducatur ipsi Parallela ad Tangentem usque, harum linearum factum erit æquale quadrato semi-Axis.

Ex P ducatur perpendicularis in Tangentem PK, ducatur ordinata PO perpendicularis in axem, & in C, ducatur CQ, Parallela P, & CV, parallela PO, triangula POK CQV, erunt similia, ergo erit PO:PK = CQ:CV, ergo PK x CQ = PO x CV similia etiam sunt Triangula CMV, OMP, erit ergo CM:MO = CV:PO, sed (per Cor.

2. Lem. V. de Conicis) est $CM = \frac{CA^2}{CO}$

& (per Cor. 3. ejusdem Lem.) $MO = \frac{AO \times DO}{CO}$ & (per Theor. II. tam de

Hyp. quam de Ellip.) est $CA^2 = AO \times DO = CB^2 : PO^2$ ergo est $CM : MO =$

$\frac{CA^2}{CO} : \frac{AO \times DO}{CO} = CA^2 : AO \times DO$

$= CB^2 : PO^2 = CV : PO$, ideoque

$CB^2 \times PO = PO^2 \times CV$ utrumque vero

dividendo per PO est $CB^2 = PO \times$

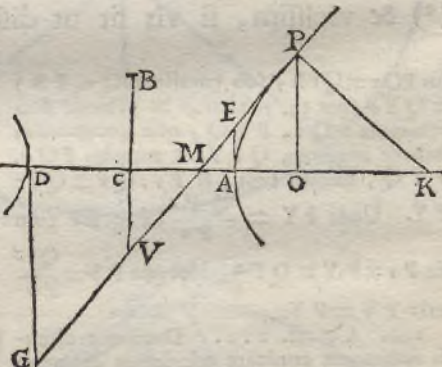
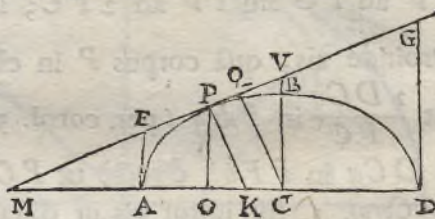
CV, erat verò $PK \times CQ = PO \times CV$.

Ergo $PK \times CQ = CB^2$. Q. E. D.

234. Lemma II. Sit PM, Sectionis Conicæ Tangens, CA axis, CB ejus conjugatus, in utroque axeos primæ Vertice erigantur perpendiculares AE, DG, ad Tangentem usque, factum earum $AE \times DG$, erit æquale quadrato semi-Axis.

Demonst.... Ducta PO ordinata ad axem & CV ad Tangentem usque ipsi Parallela, erit (per Cor. 2. Lemm. V. De Conicis) $CO : CA = CA : CM$. Dividendo verò, est $CA - CO$ vel $CO - CA$, five AO ad CA five CD, sicut $CM - CA$ vel $CA - CM$, five MA ad CM, hoc est $AO : CD = MA : MC$, jungendo terminos primæ rationis terminis secundæ hæc non mutatur, estque $MA : MC = MA + AO$ (five MO) : $MC + DC$, (five MD) hoc est alternando $MA : MO = MC : MD$ sed ob parallelas est $MA : MO = AE : PO$ & $MC : MD = CV : DG$ ergo est $AE : PO = CV : DG$ & est $AE \times DG = PO \times CV$ sed per Lemma præcedens est $PO \times CV = CB^2$. Ergo est $AE \times DG = CB^2$. Q. E. D.

235. Lemma III. Ducantur à focus per-

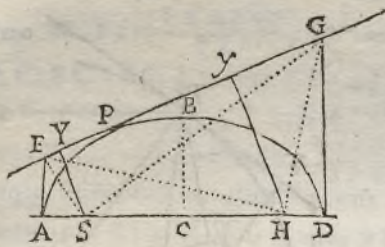


pendiculares in Tangentem Sectionis Conicæ, earum factum erit æquale quadrato semi-Axis.

Demonst.... Sint illæ perpendiculares SY, Hy, ducantur in utroque vertice axeos transversæ lineæ AE, DG, perpendiculares axi usque ad Tangentem, & ducantur à focus S & H, ad earum extremitates lineæ SE SG & HG HE.

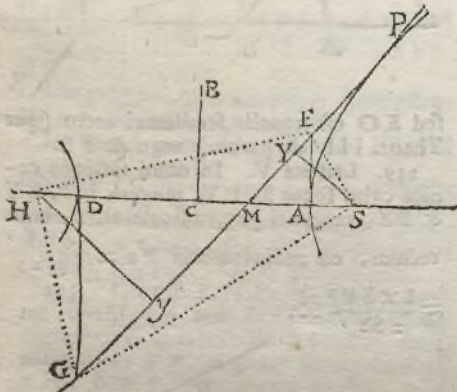
Triangula EAS, SDG, EHG, GHY similia inter se, ut & Triangula GDH, HAE, GSE, ESY: Primò, similia sunt Triangula EAS, SDG quia latera EA & AS, SD & DG circa angulos rectos A & D posita proportionalia sunt, nam (per Lemma præced.) est $EA \times DG = CB^2$, & per naturam focorum (& per 5. vel 6. 2. Elem.) est $AS \times SD = CB^2$ ergo est $EA \times DG = AS \times SD$ ideoque $EA : AS = SD : DG$; Eadem ratione probatur Triangula GDH, HAE esse similia, ob latera proportionalia GD & DH, HA & AE circa angulos rectos A & D posita, est enim ut prius $EA \times DG = CB^2 = DH \times HA$ ideoque $DG : DH = HA : EA$.

Secundò Triangula SDG, EGH sunt similia, latera enim GH & HE, GD & DS



GHy esse similia ut & Triangula GSE, ESy; ex similitudine Triangulorum EAS, GHy est $ES:GH=EA:Hy$, & ex similitudine Triangulorum GDH & ESy est $ES:GH=SY:GD$ ergo est $EA:Hy=SY:GD$ & $EA \times GD=Hy \times SY$ sed $EA \times GD=CB^2$ per Lemma præcedens, ergo etiam $Hy \times SY=CB^2$. Q. E. D.

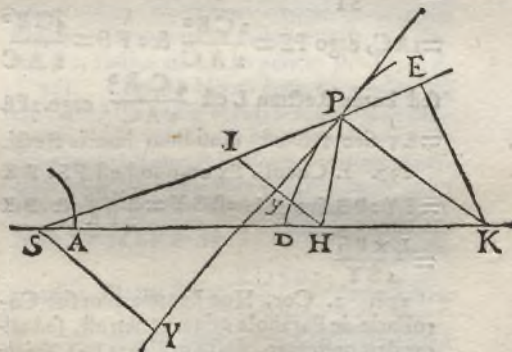
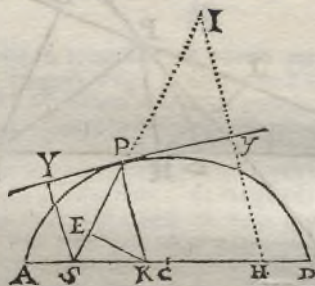
236. Lem. IV. Ducatur à foco S linea SP ad punctum contactus & ex puncto P contactus ducatur perpendicularis in Tangentem quæ secet axem in K, & ex puncto K ducatur in lineam SP perpendicularis KE, pars PE lineæ PS erit æqualis femilateri recto.



DS circa angulos SDG & EHG posita sunt proportionalia, nam ob triangula similia GDH, HAE, est $GH:HE=GD:HA$, sed $HA=DS$, ergo est $GH:HE=GD:DS$; Præterea anguli SDG & EHG sunt ambo recti, SDG quidem per constructionem, angulus verò EHG est in Ellipsi complementum ad duos rectos angulorum GHD & EHA, in Hyperbolâ eorum summa, cum autem illi duo anguli GHD & EHA pertineant ad Triangula Rectangula similia, simul sumpti faciunt Rectum, eorumque complementum ad duos rectos est recto æquale, ergo Angulus EHG est rectus; Eodem modo probatur Triangula HAE, GSE esse similia, ob latera proportionalia SE & GS, AE & HA, circa angulos HAE & GSE rectos posita; nam ob Triangula similia EAS, SDG est $ES:GS=AE:DS$ sive HA; & HAE est rectus per constructionem & GSE in Ellipsi est complementum ad duos rectos angulorum GSD & EAS, & in Hyperbola eorum summa, illi verò Anguli pertinent ad Triangula Rectangula similia &c.

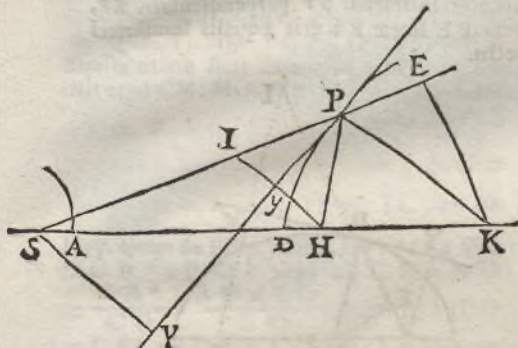
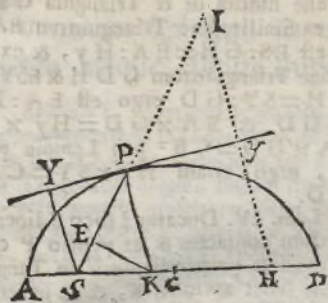
Tertio EGH est simile HGy (per 8. 6. El.) & eadem ratione est GSE simile ESy.

Ex quibus liquet Triangula EAS,



Producatur vel secetur SP in I ut sit $SI=AD$ sive Axi, ducaturque ex altero foco linea HI quæ dividitur bifariam & perpendiculariter per Tangentem in y (per Theor. III. de Hyp. & IV. de Ellip.) ergo $HI=2Hy$ & est HI parallela PK, ergo Triangula PSK ISH sunt similia, estque $PS:PK=SI:IH$ sive $2Hy$, sed ob Parallelas SY, PK, & angulos rectos Y & E similia sunt Triangula PSY, PKE, ergo est $PS:PK=SY:PE$, est ideo $SI:2Hy=SY:PE$ & PE $2Hy$.

DE MOTU
CORPORUM,
L. II. M.

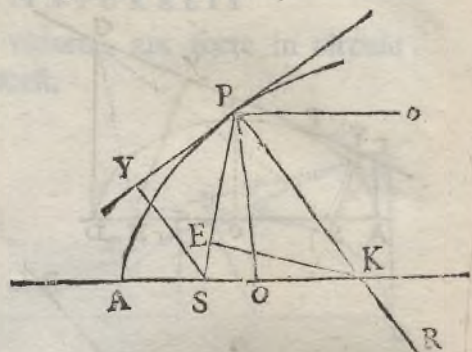


$$= \frac{2Hy \times SY}{SI} \text{ sed } Hy \times SY = CB^2 \text{ \& } SI = 2AC, \text{ ergo } PE = \frac{2CB^2}{2AC} \text{ \& } 2PE = \frac{4CB^2}{2AC}$$

sed Latus Rectum L est $\frac{4CB^2}{2AC}$, ergo $2PE = L$, sive PE est dimidium lateris Recti.

237. 1. Coroll. Ex eo quod est PS:PK = SY:PE sive $\frac{1}{2}L$, est SY = $\frac{L \times PS}{2PK}$ \& PK = $\frac{L \times PS}{2SY}$

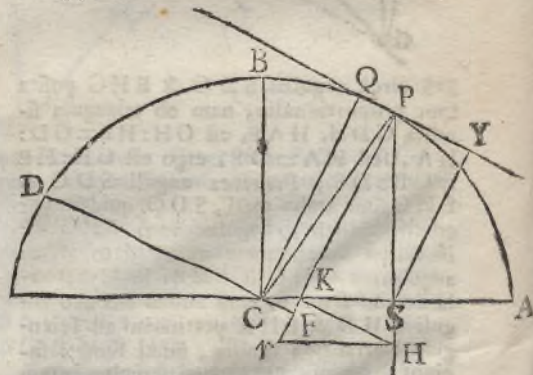
238. 2. Cor. Hoc Lemma cum suo Corollario de Parabola etiam verum est, sed aliter demonstratur, ducta ordinata PO Triangula PKO, PKE sunt æqualia, propter Angulos rectos in O & E; latus PK commune, \& angulum PKO angulo KPE æqualem, ducto enim Diametro Po, erit OPK æqualis PKO ob Parallelas AK \& Po sed oPK est etiam æqualis angulo KPE quia perpendicularis dividit bifariam angulum S Po (per Theor. III. de Parab.) ergo angulum PKO = KPE, \& (per 26. 1. Elem.) Triangulum PKO est æquale Triangulo PKE ideoque PE = KO,



sed KO est æqualis semilateri recto (per Theor. III. de parabol.) ergo \& PE.

239. Lemma V. In omni sectione conicâ cujus focus S, PY, tangens in P, SY \& PK, tangenti perpendiculares, L, latus rectum, est radius osculi Pr = $\frac{4PK^3}{L^2}$

$$= \frac{L \times SP^3}{2SY^3} \dots$$



Dem. : : : Sit APB ellipsis cujus semiaxes AC, BC, semidiametri conjugatæ PC, DC, ac proinde DF, tangenti PY parallela, atque adeo PF, QC, tangenti perpendiculares æquales sunt. Est (per Lem. XII. Newt.) CD:BC = AC:PF, \& CD²:BC² = AC²:PF², ideoque est CD² = $\frac{BC^2 \times AC^2}{PF^2}$

Et quia BC² = CQ x PK sive PF x PK (233.) est CD² = $\frac{PF \times PK}{PF^2} \times AC^2 = \frac{PK \times AC^2}{PF}$; sed est Pr = $\frac{CD^2}{PF}$ (230.)

ergo

ergo est $Pr = \frac{PK \times AC^2}{PF^2}$; est autem

$AC:BC = BC:\frac{1}{2}L$, ergo $BC^2 = \frac{1}{2}L \times$

AC ideoque $PF \times PK = \frac{1}{2}L \times AC$,

ergo $PF = \frac{L \times AC}{2PK}$ & $PF^2 = \frac{L^2 \times AC^2}{4PK^2}$

idque substituatur in valore Pr mox re-

perito erit $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$, & quia $PK =$

$\frac{L \times SP}{2SY}$ (237.) erit $\frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$

$= Pr$. Q. e. 1^{um}.

Idem eodem prorsus modo demonstra-

tur in hyperbolâ. Q. e. 2^{um}.

In Ellipsi crescente focorum distantia

manet $Pr = \frac{4PK^3}{L^2} = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$, adeoque

idem etiam verum est cum focorum distan-

tia infinita evadit, seu cum Ellipsis in Pa-

rabolam mutatur. Q. e. 3^{um}.

240. Coroll. 1. . . Ex his facillima ori-

tur constructio pro determinando radio

curvaturæ in quavis sectione conicâ. Ex K ,

enim super PK , erigatur perpendicularis

KH , cum PS concurrans in H ; ex H

erigatur super PH perpendicularis HR ,

erit Pr , radius curvaturæ. Nam ob an-

gulos rectos PKH , PHR , & lineas PK ,

SY , parallelas est $SP:SY = Pr:PH =$

$PH:PK$, atque inde $SY^2:SP^2 = PK:Pr$;

adeoque $Pr = \frac{PK \times SP^2}{SY^2}$ sed $SY =$

$\frac{L \times SP}{2PK}$ (237), ergo $Pr = \frac{4PK^3}{L^2}$, ac

proinde Pr est radius osculi (239.).

241. Coroll. 2. . . Quoniam in ver-

ticibus sectionum conicarum principalibus

$SP = SY$, erit ibi $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3} = \frac{L}{2}$,

seu radius osculi æqualis dimidio lateris

recti principalis.

242. Theor. Datis in puncto P , vis cen-

tripetæ quâ corpus curvam PpB describit

quantitate absolutâ, vis illius directione PS ,

velocitate corporis, & positione tangentis

PQ , datur curvæ PpB curvatura in P ,

seu radius osculi Pr .

Dem. Sit curvæ PpB , & circuli oscu-

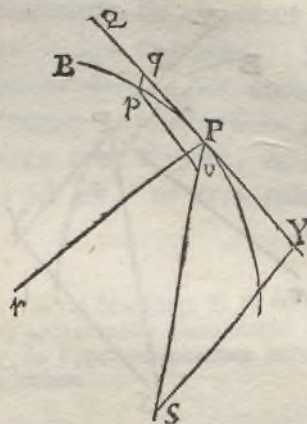
latoris arcus infinitesimus Pp , & quoniam

velocitas corporis P revolvantis finita sup-

ponitur, vis centripetæ constans est, & il-

lius directio sibi parallela per arcum Pp ;

Item. L



adeoque arcus ille est portio parabolæ cu-
jus tangens PQ , & diameter PS (ex notâ
40^a.) Quoniam autem vis centripetæ quan-
titas absoluta in P , data est, datumque proin-
de spatium quod corpus vi illâ constante,
dato tempore percurreret, & præterea cor-
poris P velocitas, ac tangentis PQ po-
sicio data sunt, data est ratio qp sive Pv
ad Pq sive pv , data ergo est parabola
quam corpus P describeret, si vis centri-
petæ eadem maneret & directionem habe-
ret lineæ PS perpetuò parallelam. Cum
igitur datus sit radius circuli parabolam
datam in dato puncto osculantis (239.) da-
tur Pr , radius osculi in puncto P . Q. e. d.

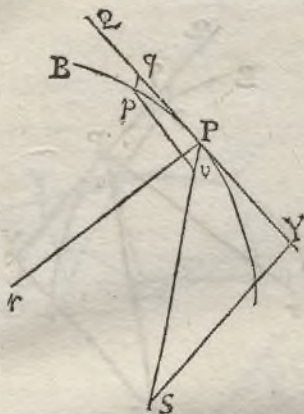
243. Coroll. Hinc datis in puncto P ,
curvaturâ seu radio osculi Pr , positione tan-
gentis PQ , velocitate corporis, & vis cen-
tripetæ directione PS , datur vis illius quan-
titas absoluta in P ; nam propter datas posi-
tionem Tangentis, & vis directionem, datur
ratio SP ad SY & SP^3 ad SY^3 , sive $\frac{SP^3}{SY^3}$ &
propter datum $Pr = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ datur $\frac{L}{2}$ sive

L Latus rectum principale Parabolæ cujus
arcus Pp est portio, PS Diameter & PQ
Tangens unde datur tota Parabola & Latus
rectum Diametri PS ; Denique cum data sit
velocitas corporis in P datur lineola Pq ,
vel pv dato tempore descripta, datur ergo
abscissa Pv sive qp quæ est vis centripetæ
quantitas absoluta.

Datis verò in P , vis centripetæ quantitate
absolutâ, vis illius directione PS , positione
tangentis PQ , radio osculi Pr , sive datâ
curvaturâ, datur velocitas corporis in P ;
&

T

DE MOTU
CORPO-
RUM.



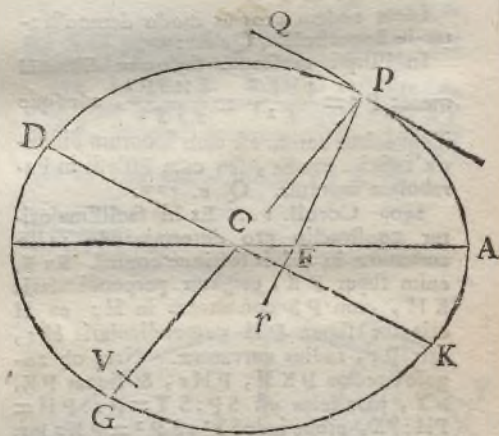
& generatim si ex his quinque, nimirum, vis centripetæ quantitate absolutâ, illius directione, velocitate corporis, positione tangentis & curvaturâ, quatuor data fuerint, quintum determinatum est.

244. Theor. Corpus P, circâ centrum virium S datum revolvendo, curvam PpB describat, sintque data, vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P, data lex secundum quam in variis à centro S distantis vis centripeta agit, positio tangentis PQ, & curvatura in P, determinata ac unica est curva PpB, quam corpus P, circâ centrum virium S, potest describere... Dem... Quoniam datur centrum virium S & punctum P, datur quoque positio rectæ PS, hoc est, directio vis centripetæ, ac proinde ex cæteris etiam datis (243.) datur velocitas quâ corpus in puncto P movetur; sed datis in puncto P, vis centripetæ quantitate absolutâ, positione tangentis seu rectæ secundum quam projicitur corpus, velocitate projectionis determinatur proximum punctum p, tangentis in eo puncto p positio, corporis P in eo velocitas, ut & novâ distantia à centro p S, sed datâ lege vis centripetæ in variis à Centro distantis, datur iterum in puncto novo p, vis centripeta, unde proximum punctum etiam determinabitur, ex his ergo datis omnia puncta curvæ PpB, successive determinantur; ergo data ac unica est curva quam corpus P, his datis describere potest. Q. e. D.

Coroll. Iisdem manentibus, si describatur nova curva quæ curvam PpB quam corpus P describit osculetur in P, quæ

que proinde eandem habet tangentem PQ, ut potè radio osculi PR, perpendiculari, impossibile est ut datis iis quæ numero 244. posuimus, corpus P, hanc novam curvam a priori diversam describat, hoc est, verba Newtoni ferè usurpando, orbes duo se mutuo osculantes eadem vi centripetâ describi non possunt.

245. Hisce positis tandem probabimus quòd si vis centripeta sit ut distantia à centro, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut fortè in circulo in quem Ellipsis migrat focus coeuntibus.

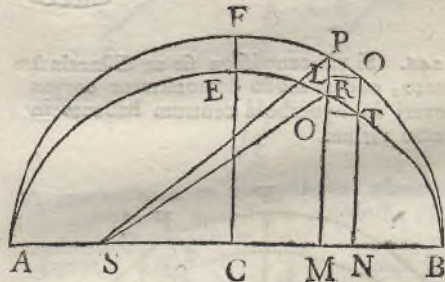


Data sint centrum virium C, & vis centripetæ quantitas absoluta, data à centro distantia CP, & corpus datâ cum velocitate secundum directionem datam rectæ PQ projiciatur, erit PQ tangens curvæ describendæ. Si fuerit CP ad tangentem PQ normalis, & velocitas quâ corpus P, projicitur æqualis velocitati quam idem corpus solâ vi centripetâ, ut est in P, constante sollicitatum acquireret, cadendo per dimidium radium PC, curva describenda erit circulus cujus centrum C, & radius CP (201.) si verò talis non fuerit velocitas projectionis, corpus P, aliam curvam describet, in quâ tangens PQ, non semper erit ad radium vectorem CP perpendicularis, cum hæc sit solius circuli proprietas, ut notum est. Sit ergò PQ ad radium vectorem CP obliqua, per centrum C ducatur recta CK, ipsi PQ

DE MOTU
CORPO-
RUM.

directè, & corporum velocitates in verticibus principalibus inversè; hoc est, ut axes illi minores directè, & ordinatim applicatæ ad idem punctum axis communis inversè; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scho-



est diameter communis AB, aream MRB, esse ad aream correspondentem MPB, ut est EC, ad FC, seu ut RM ad PM; sed ductis ex quocumque diametri puncto S, rectis SP, SR, est etiam triangulum SMR, ad triangulum SMP, ut MR ad MP, ob communem utriusque trianguli altitudinem MS; ergo sector SBR, est ad sectorem SBP, in ratione datâ EC, ad FC.

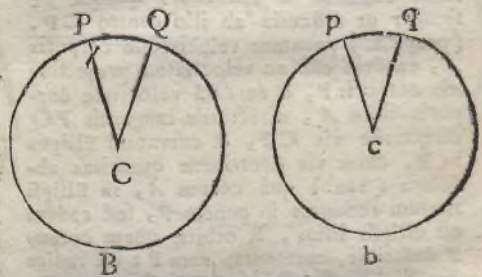
tionem habet semiaxis FC, ad alterum semiaxem EC. Q. e. D.

248. Coroll. 1. . . Idem eodem prorsus modo demonstratur, si AFB fuerit Ellipsis communem axem AB, habens cum Ellipsi AEB. Et generatim duæ quavis figuræ AFB, AEB, quarum semiordinate QN, IN, sunt in datâ ratione & quarum est communis diameter AB, sunt inter se in ratione datâ ordinarum QN, TN.

249. Coroll. 2. Area circuli cujus diameter est medius proportionalis inter duos Ellipsis axes æqualis est areæ Ellipsis. Nam sit $EC:R=R:FC$, & radio R, describatur circulus, illius circuli area, erit ad aream circuli AFB, ut R^2 ad FC^2 , adeoque ut BC ad FC; Quare cum Ellipsis AEB, eandem habeat rationem ad circulum AFB (247), manifestum est aream circuli radio R, describiti æqualem esse areæ Ellipsis AEB.

250. Coroll. 3. . . Quoniam $R^2=FC \times EC$, & areæ circulorum sunt ut radorum quadrata, erunt areæ Ellipsium ut axium rectangula.

251. Coroll. 4. . . Patet etiam in Ellipsis vel ellipsi & circulo aut etiam in quibuscumque curvis quarum ordinatæ QN, IN, datam habent rationem, & quarum

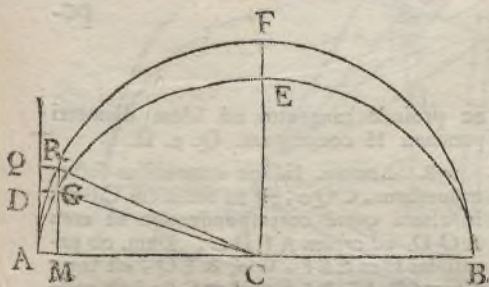


252. Theor. Corpora duo P, p, circa vñrium centra C, c, revolvendo, orbitas PQB, pqb, describant; tempus periodicum in orbitâ PQB, est ad tempus periodicum in alterâ orbitâ pqb, ut area PQBP, ad aream pqb p, directè & sectores PCQ, pcq, simul descripti inversè. . . . Dem. . . . ob æquabilem arearum circa centra C, c, descriptionem (prop. I.) tempus periodicum T, in orbe PQB, est ad tempus t, quo describitur sector PCQ, ut area PQBP, ad sectorem PCQ, & similiter tempus t, quo describitur sector pqc, est ad tempus periodicum θ , in orbe pqb, ut sector pcq, ad aream pqb p, hoc est $T:t=PQBP \text{ area}:PCQ$, & $t:\theta=pcq:pqb p \text{ area}$, undè per compositionem rationum & ex æquo $T:\theta=PQBP \times pcq:pqb p \times PCQ$. Q. e. D.

253.

Scholium.

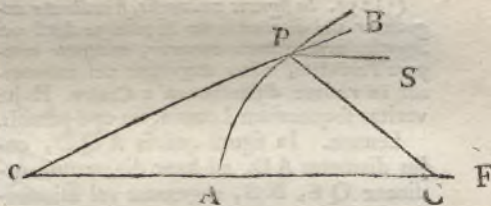
Si ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in parabolam, corpus movebitur in hac parabola; & vis ad centrum infinitè distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est theorema Galilei. (e) Et si conic sectio parabolica (inclinazione plani ad conum sectum mutata) vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hujus



253. Si corpora duo Ellipses AEB, AFB, quarum est axis communis AB, describant, viribus ad centrum Ellipsium C tendentibus, tempora periodica erunt æqualia... Dem... Sint arcus AR, AG, infinitesimi eodem tempore descripti, AQ tangens ad verticem A, QR, DG, axi AB, parallelæ, & quoniam vires centrales sunt ut QR, DG (prop. VI.) & ob communem distantiam à centro AC, æquales sunt vires, seu eadem vis (prop. X.) erit $QR = DG$, sectores verò ACG, ACR, sunt ut GM, RM, seu EC, FC, (251), & area Ellipsium AEB, AFB, sunt etiam ut EC, FC, (247. 248.) quare cum tempora periodica in illis Ellipsis sint ut area AEB AFB directè & sectores ACG, ACR, inversè (252.) erunt eadem ut EC ad FC directè, & EC ad FC inversè, hoc est, ut $EC \times FC$ ad $FC \times EC$, ac proinde in ratione æqualitatis. Q. e. D.

254. His positis facile demonstratur æqualia esse revolutionum in Ellipsis universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam] duæ quævis ellipses circa idem centrum descriptæ dicantur A, & B, describatur tertiâ Ellipsis C, si-

milis Ellipsi A, & axem unum communem habens cum Ellipsi B, tempora periodica in Ellipsis similibus A & C, sunt æqualia (per corol. 3. & 8. prop. IV. Newt.) & tempora periodica in ellipsis C, & B, axem alterum communem habentibus sunt etiam æqualia (253.) tempora igitur periodica in Ellipsis quibusvis A & B sunt æqualia. Q. e. D.



(e) 255. Et si conic sectio parabolica (inclinazione plani ad conum sectum mutata) vertatur in hyperbolam movebitur corpus in hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ. Cum enim Ellipsis centrum C, à vertice A, in plagam F abit, vis centripetæ directio est per lineas PC, PF, à puncto P, ad centrum, & ubi infinita evadit distantia PC, atque PS, ad centrum ducta axi parallela sit, Ellipsi in parabolam mutata, directio est à puncto P, ad S, secundum lineam PS; mutata in Hyperbolam parabolâ, & centro ad alteram verticis A partem translato in c, vis centralis directio est secundum lineam PB, à P ad B, hoc est, à centro C, ad P adeoque in centrifugam versâ (228.)

DE MOTU
CORPO-
RUM.

hujus perimetro vi centripetâ in centrifugam versâ. Et quemadmodum in circulo vel ellipsi si vires tendunt ad centrum figuræ in abscissâ positum, hæ vires augendo vel diminuendo ordinatas in ratione quâcunque datâ, vel etiam mutando angulum inclinationis ordinarum ad abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum à centro, si modo tempora periodica maneat æqualia; (^f) sic etiam in figuris universis si ordinatæ augeantur vel diminuuntur in ratione quâcunque datâ, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore

pe-

256. Ex quibus sequitur hæc generalis Lex; Si corpus revolvatur in sectione conicâ, & vis centralis tendat ad sectionis centrum, aut à centro, vis illa erit directè ut distantia à centro, & contrâ si vis fuerit ut distantia à centro, corpus movetur in sectione conicâ. (245. 246.)

(^f) 257. In figuris universis, si ordinate augeantur vel diminuuntur in ratione datâ vel angulus ordinationis mutetur, manente tempore Periodico, vires augentur vel minuuntur in ratione distantiarum à Centro. Hujus veritas sequentium Lemmatum ope patebit.

Lemma. In figurâ quâvis A Q D, cujus diameter A D, ad hanc diametrum ordinatæ Q E, N G, augeantur vel minuuntur in ratione datâ Q E, ad P E, vel ad angulum quemvis datum P E D, inclinentur, novaque describatur curva A P D, per novarum ordinarum extrema transiens, sitque centrum virium C, in diametro positum utriusque curvæ commune, rectæ P H, Q h, quæ curvas in punctis correspondentibus Q, P, tangunt, ad idem diametri punctum H convergunt. . . . Dem. . . . Ductis rectis P t, Q v, diametro A D parallelis, erit Q v = G E, = P t, & (per hypothèsim) n v : m t = E Q : E P, unde & alternando n v : E Q = m t : E P, & coeuntibus punctis n & Q, m & P, erit propter similitudinem triangulorum n v Q & Q E h m t P & P E H

$$n v : E Q = Q v (G E) : E h$$

$$m t : E P = P t (G E) : E H$$

Cum ergo sit n v : E Q = m t : E P, erit G E : E h = G E : E H, ideoque E H = E h,

ac proindè tangentes ad idem diametri punctum H convergunt. Q. e. D.

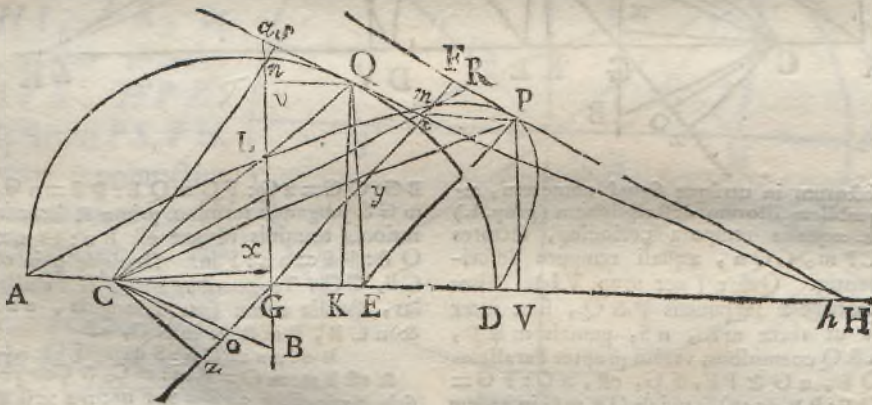
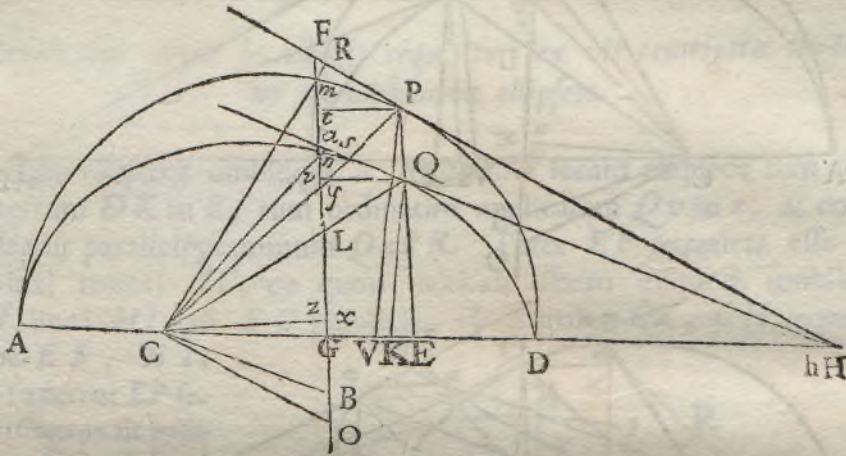
258. Lemma. Iisdem manentibus sector evanescens, C Q n, est ad sectorem C P m, in alterâ curvâ correspondentem ut area A Q D, ad aream A P D. . . . Dem. ob parallelas G m & E P, G n, & E Q, est G y : C G = E P : C E & C G : G L = C E : E Q unde ex æquo G y : G L = E P : E Q = G m : G n (per const.) & hinc G m - G y : G n - G L = y m : L n = G m : G n = E P : Q E. Ex puncto C, demittantur in G m, & G n, perpendiculares C z, C x; & ex punctis P & Q, in diametrum A D, perpendiculares P V, Q K, & erit triangulum C y m : triang. C L n = y m × C z : L n × C x = G m × C z : G n × C x. Verum ob similia triangula C z G, & P V E, C x G & Q K E, est C z : C G = P V : P E, & C G : C x = Q E : Q K atquè aded per compositionem rationum C z : C x = P V × Q E : Q K × P E = P V × G n : Q K × G m (per const.) cum ergo sit triangulum C y m : triang. C L n = G m × C z : G n × C x = G m × P V × G n : G n × Q K × G m = P V : Q K, & P V sit ad Q K, ut parallelogrammum G E P m, ad parallelogrammum G E Q n, hoc est, (per Lem. IV.) & per construct. ut area A P D, ad aream A Q D; ergo triangula C y m, C L n, sunt in ratione arearum A P D, A Q D; at punctis m & P, n & Q coeuntibus, sector C P m, æquatur triangulo C y m, & sector C Q n triangulo C L n; sunt igitur sectores illi evanescentes ut areæ A P D, A Q D, directè. Q. e. d.

259. Theor. Iisdem manentibus, si tempora

periodico; vires ad centrum quodcumque in abscissâ positum tendentes in singulis ordinatis augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum à centro.

LIBER PRIMUS

SEC.



pora periodica in curvis APD, AQD fuerint æqualia, vires centripetæ in punctis correspondentibus P & Q erunt inter se ut distantia à centro CP, CQ.

Demonst. Figura A Q D rectis ex cen-

tro C ductis in sectores innumeros inter se æquales, ut CQ n, & figura A P d, in totidem sectores correspondentes, ad proindè etiam inter se æquales (258), ut CP m divisæ intelligantur; & ob eundem secto-

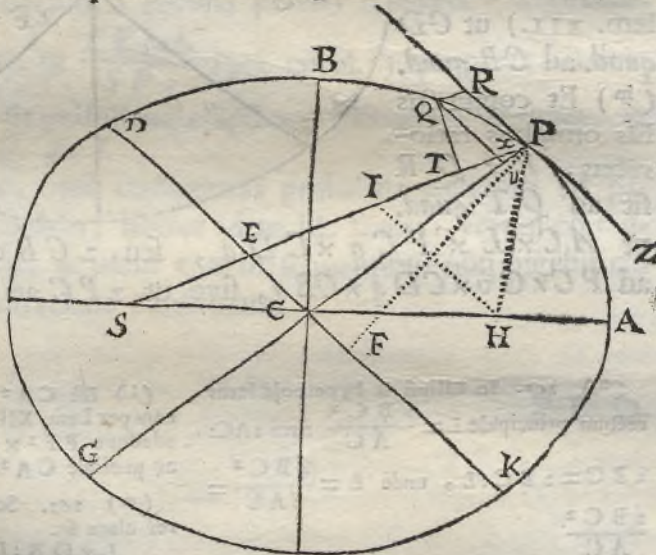
SECTIO III.

De motu corporum in conicis sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum ellipseos.

Esto ellipseos umbilicus S . Agatur SP secans ellipseos tum diametrum DK in E , tum ordinatim applicatam Qv in x , & compleatur parallelogrammum $QxPR$. Patet EP æqualem esse semiaxi majori AC , eo quod, actâ ab altero ellipseos umbilico H lineâ HI ipsi EC parallelâ, ob æquales CS , CH æquentur ES , EI , (s) adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS , PI , id est (ob parallelas HI , PR , & angulos æquales IPR , HPZ) ipsarum PS , PH , quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant. Ad S P demittatur perpendicularis QT , & ellipseos latere recto



prin-

(s) 260. Quia (per prop. 48. lib. 3. conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellipsi) æquales sunt anguli quos rectæ PH , PS , constituunt cum tangente PR , & ob parallelas HI , PR , æquales quoque sunt

anguli alterni PIH , PHI , æquales erunt rectæ PI , PH , adeoque $EP = \frac{PS + PH}{2} = AC$, (prop. 52. lib. 3. conic. apoll. superius Theor. III. de Ellip.)

tis Q & P cocuntibus æquantur $2PC$ & Gv . Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QT quad. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $L \times SPq$ æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta reciprocè est ut $L \times SPq$, id est, reciprocè in ratione duplicata distantiae SP . *Q. E. I.*

LIBER

PRIMUS

Idem aliter.

Cum vis ad centrum ellipseos tendens, quâ corpus P in ellipfi illâ revolvi potest, sit (per corol. 1. prop. X.) ut CP distantia corporis ab ellipseos centro C ; ducatur CE parallela ellipseos tangenti PR ; & vis, quâ corpus idem P circum aliud quodvis ellipseos punctum S revolvi potest, si CE & PS concurrant in E , (n) erit ut $\frac{PE \text{ cub.}}{SPq}$ (per corol. 3. prop. VII.) hoc est, si punctum S sit umbilicus ellipseos, ideoque PE detur, ut SPq reciprocè. *Q. E. I.*

Eâdem brevitate, quâ traduximus problema quintum ad parabolam, & hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem problematis, & usum ejus in sequentibus non pigebit casus cæteros demonstratione confirmare.

P R O.

(n) Nam (per Coroll. III. Prop. VII.) vis tendens ad centrum C , quam exponat recta CP , est ad vim tendentem ad aliud punctum S , quam exponat recta AS , ut $CP \times SP^2$ ad cubum rectæ quæ à centro C ad Tangentem RPZ duceretur parallela ad lineam SP à secundo virium centro ad punctum P curvæ ductam, quæ quidem recta æqualis foret PE , quoniam ipsi esset Parallela & inter easdem Paral-

lelas $DCRPZ$, adeoque $CP \times SP^2 = PE^3 = CP : A = \frac{PE^3}{SP^2}$; hoc est, si punctum S sit umbilicus Ellipseos, adeoque $PE = AC$ (260) detur, erit vis ut SP^2 reciprocè; hic autem supponitur talem esse vim ad centrum C tendentem ut tempora periodica circa centra C , & S , æqualia sint, quod supponi potest.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in hyperbolâ: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA , CB femiaxes hyperbolæ; PG , KD , diametri alix conjugatæ; PF perpendiculum ad diametrum KD ; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP . Agatur SP secans cum diametrum DK in E , tum ordinatim applicatam Qv in x , & compleatur parallelogrammum $QRPx$. (°) Patet EP æqualem esse femiæxi transverso AC , eo quod, actâ ab altero hyperbolæ umbilico H lineâ HI , ipsi EC parallelâ, ob æquales CS , CH æquentur ES , EI ; adeo ut EP semidifferentia sit ipsarum PS , PI , id est (ob parallelas IH , PR & angulos æquales IPR , HPZ) ipsarum PS , PH , quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT .

Et hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L , erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv , seu Px ad Pv , id est (ob similia triangula Pxv , PEC) ut PE ad PC , seu AC ad PC . Erit etiam $L \times Pv$ ad $Gv \times Pv$ ut L ad Gv ; & (ex naturâ conicorum) rectangulum GvP ad Qv quad. ut PCq ad CDq ; & (per corol. 2. lem. VII.) Qv quad. ad Qx quad. punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx quad. seu Qv quad. est ad QTq ut EPq ad PFq , id est, ut CAq ad PFq , sive (per lem. XII.) ut CDq ad CBq ; & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq ut $AC \times L \times PCq \times CDq$, seu $2CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CBq$, sive ut $2PC$ ad Gv . Sed punctis P & Q coeuntibus æquantur $2PC$ & Gv . Ergo & his pro-

(°) 263. Est $SE = SP + PE$ & ob æquales ES , EI , est $PI = EI + PE = ES + PE = SP + 2PE$, ac proinde $PI - SP = 2PE$, ac PE est semidifferentia ipsarum PS , PI ; sed angulus $HPR = RPS$, angulus enim interceptus inter lineas à focus ad punctum Hyperbolæ ductas bifariam dividitur per Tangentem (per prop. 48. lib. 3. Conic. Apoll. vide Theor. V. de Hyp.)

& $RPS = EPZ$ (per 15. 1. Elem.) adeoque $IPR = HPZ$, & ob parallelas IH , PR , angulus $PHI = HPR = IPZ = HIP$, unde $HP = PI$, adeoque EP , est semidifferentia ipsarum PS , PH , & quia differentia rectorum PS , PH , axem totum $2AC$, adæquat (per prop. 51. lib. 3. conic. Apoll. Vide sup. Theor. IV. de Hyperb.) est $EP = AC$.

tripetâ in centrifugam versâ movebitur in hyperbolâ oppositâ. LIBER PRIMUS.

LEMMA XIII.

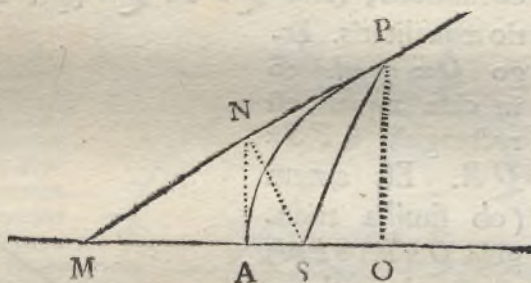
(1) Latus rectum parabolæ ad verticem quemvis pertinens est quadruplum distantie verticis illius ab umbilico figuræ.

Patet ex conicis.

LEMMA XIV.

Perpendicularum, quod ab umbilico parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici à puncto contactus & à vertice principali figuræ.

Sit enim AP parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M , & SN linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur AN & ob æquales MS & SP , MN , & NP , MA & AO



parallelae erunt rectæ AN & OP ; & inde triangulum SAN rectangulum erit ad A , & simile triangulis æqualibus SNM , SNP : ergo PS est ad SN ut SN ad SA . Q. D. E.

Corol. 1. PSq est ad SNq ut PS ad SA .

(1) Corol. 2. Et ob datam SA est SNq ut PS .

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis PM cum recta SN , quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam AN quæ parabolam tangit in vertice principali. P R O.

(1) 266. Dem. ... Illius demonstrationem jam superius in Compendio de Conicis, Theor. IV. de Parabolâ dedimus.

(1) Cum sit (per coroll. 1.) $SA \times PS^2 = SN^2 \times PS$, adeoque $SA \times PS = SN^2$; erit ob datam SA , SN^2 ut PS , id est, variationes quadrati SN^2 , in eadem parabolâ erunt ut variationes rectæ SP sive ut distantie à foco.

Nam

$SPq \times 4SA$: & propterea (per corol. 1. & 5. prop. VI.) vis centripeta est reciprocè ut $SPq \times 4SA$, id est, ob datam $4SA$ reciprocè in duplicatâ ratione distantiae SP . *Q. E. I.*

Corol. I. (*) Ex tribus novissimis propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P secundum lineam quamvis rectam PR quâcunque cum velocitate exeat de loco P , & vi centripetâ, quæ sit reciprocè proportionalis quadrato distantiae locorum à centro, simul agitur; movebitur hoc corpus in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico, & puncto contactus, & positione tangentis, describi potest sectio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex datâ vi centripetâ, & velocitate corporis: & orbis duo se mutuo tangentes eâdem vi centripetâ eâdemque velocitate describi non possunt.

Co.

(*) 268. Si corpus moveatur in aliquâ sectionum conicarum umbilicum habente in centro virium, vis centripeta erit reciprocè proportionalis quadrato distantiae locorum ab umbilico, & contrâ si vis centripeta fuerit quadrato distantiae à centro virium reciprocè proportionalis, corpus movebitur in aliquâ sectionum conicarum. Dem... Prima pars propositionis à Newtono eleganter demonstrata, potest adhuc aliter & generatim demonstrari. Vis centripeta ut $\frac{SP}{SY^3 \times R}$ (212.) sed in

omni sectione conicâ $R = \frac{L \times SP^3}{2SY^3}$ (239.)

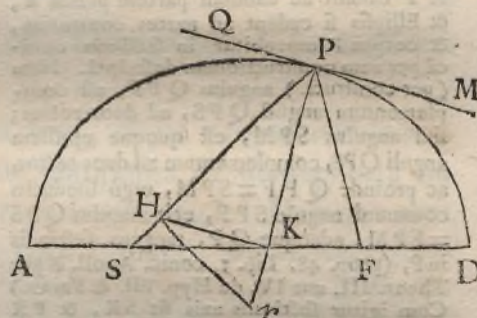
Ergò $\frac{SP}{SY^3 \times R} = \frac{2SY^3 \times SP}{SY^3 \times L \times SP^3} = \frac{2}{L \times SP^2}$

hoc est, ob datam $\frac{2}{L}$, vis est ut $\frac{1}{SP^2}$.

Q. e. 1^{um}.

Corpus P , datâ cum velocitate secundum directionem datam PQ projiciatur, sitque vis centripetæ ad punctum S tendentis quantitas absoluta data in puncto dato P , in variis à centro distantis ea vis sit semper in ratione inversâ quadrati distantiae à centro S , si ea fuerit corporis

Tem. I.



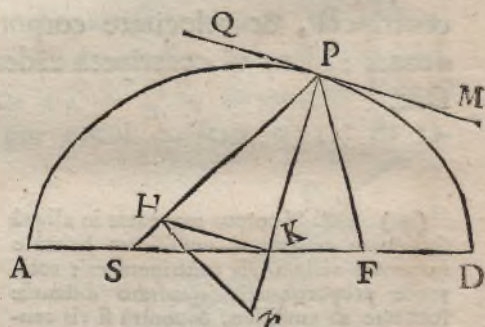
P velocitas quam vi centripetâ ut est in P uniformiter urgente acquireret cadendo per $\frac{1}{2} SP$ & præterea PS sit ad PQ perpendicularis, corpus P circulum describet cujus centrum S & radius PS (201.) Si verò alia fuerit velocitas, aut PS ad PQ obliquâ, corpus P aliam describet orbitam in quâ tangens PQ , non semper erit ad radium vectorem SP perpendicularis. Sit igitur PQ ad SP obliqua, datur Pr , radius circuli orbitam à corpore P describendam osculantis in P ; ex r in PS demittatur perpendicularis rH , & ex H in Pr perpendicularis HK ; jungaturque SK ;

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Corol. 2. Si velocitas, quâcum corpus exit de loco suo P , ea sit, quâ lineola PR in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit; & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium QR : movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione; cujus latus rectum principale est quantitas illa (γ) $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi lineolæ PR , QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his corollariis refero ad ellipsin; & casum excipio, ubi corpus rectâ descendit ad centrum.

P R O.

SK ; Deindè fiat angulus QPF complementum ad duos rectos anguli QPS , & si fuerit PF parallela ipsi SK , describatur parabola cujus umbilicus S , axis SK , & punctum perimetri P , data sunt. Si verò PF ipsi SK occurrat in puncto aliquo F , tunc focus S , & F , & perimetri puncto P datis describatur Hyperbola si puncta S & F cadant ad eandem partem puncti K , & Ellipsis si cadant ad partes contrarias, & corpus P movebitur in sectione conicâ per eam constructionem descriptâ. Nam (per construct.) angulus QPF , est complementum anguli QPS , ad duos rectos; sed angulus SPM , est quoque ejusdem anguli QPS , complementum ad duos rectos, ac proindè $QPF = SPM$, ergò subducto communi angulo SPF , erit angulus $QPS = FPM$, adeòque QP , tangens sectionis in P , (prop. 48. Lib. 3. conic. Apoll. & per Theor. III. aut IV. de Hyp. Ell. & Parab.) Cum igitur sectionis axis sit SK , & PK ad tangentem PQ normalis (per constr.) erit P r radius curvaturæ sectionis in puncto P , (239.) eadem igitur est sectionis conicæ & orbitæ quam corpus P describit tangens atque curvatura in puncto P , porrò sectio conica DPA describi potest vi aliquâ centripetâ ad umbilicum S tendente quæ sit semper reciprocè proportionalis quadrato distantæ ab illo puncto S (per superius demonstrata) & ex datis corporis alicujus A sectionem describentis, velocitate in puncto P , directione tangentis PQ , directione vis PS , & curvaturâ sectionis conicæ in P , datur vis centripetæ quantitas absoluta in puncto P , (242.) quâ corpus A in sectione conicâ



retinetur in P , ponamus velocitatem corporis A eandem cum velocitate projectionis corporis P orbitam suam describentis, tùm eadem erit ejus orbitæ & Sectionis Conicæ curvatura in P , idem virium centrum S , idem punctum P , eadem tangens PQ , eadem velocitas projectionis, eadem lex vis centripetæ, ac proindè eadem illius quantitas absoluta in puncto P , tam in sectione conicâ quàm in orbitâ à corpore P describendâ. Cum igitur corpus P , iis positis unicam curvam describere possit & quidem sectionem conicam DPA possit describere, eam reverâ describet (244.) Q. e. 2^{um}.

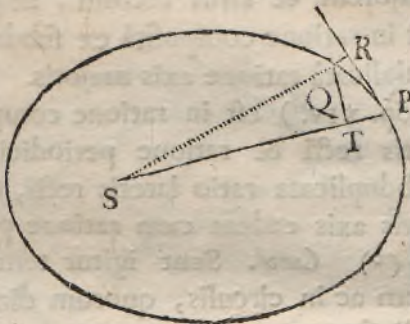
2^{am}, hujusce propositionis partem formulis analyticis invenerunt Hermannus & Bernoullius in monumentis Academiæ Parisiensis, an. 1710.

(γ) * Patet ex notâ 267.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciprocè in duplicatâ ratione distantiae locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia sunt in duplicatâ ratione arearum, quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore describunt.

(²) Nam (per corol 2. prop. XIII.) latus rectum L æquale est quantitati $\frac{QTq}{QR}$, quæ ultimo fit, ubi cocunt puncta P & Q . Sed linea minima QR dato tempore est ut vis centripeta generans, hoc est (per hypothefin) reciprocè ut SPq . Ergo $\frac{QTq}{QR}$ est ut $QTq \times SPq$, hoc est, latus rectum L in duplicatâ ratione areæ $QT \times SP$. Q. E. D.



Corol. (¹) Hinc ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.

P R O-

(²) 269. Sint in Hypothefi propositionis XIV. duarum sectionum conicarum arcus quam minimi PQ, pq , simul descripti, L, l , earundem latera recta, (& per prop. VI. & Hyp.) $QR : qr = Sp^2 : Sp^2$. Sed (267.)



$$\frac{QT^2}{QR} : \frac{qt^2}{qr} = L:l$$

$$= \frac{QT^2}{Sp^2} : \frac{qt^2}{Sp^2} = QT^2 \times Sp^2 : qt^2 \times Sp^2.$$

Sunt autem $QT \times SP, qt \times Sp$, ut sectores evanescentes SQP, Sqp , ergo latera recta L, l , sunt in duplicatâ ratione arearum simul descriptarum; nam areæ quævis simul descriptæ sunt semper ut sectores SQP, Sqp , simul descripti, ob æquabilem circumferentiam virium S arearum descriptionem in utraq; sectione conicâ. Hinc in analogiis loco quadrati areæ dato tempore descriptæ substitui potest sectionis latus rectum & contrâ, dummodo id fiat in Hypothefi propositionis.

(¹) 270. Hinc Ellipseos area tota eique proportionale rectangulum sub axibus (250.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione temporis periodici.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iisdem positis, dico quod tempora periodica in ellipsis sunt in ratione sesquuplicatâ majorum axium.

(^b) Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque ideo rectangulum sub axibus est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & sesquuplicatâ ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum (per corol. prop. XIV.) est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquuplicata ratio majoris axis eadem cum ratione periodici temporis *Q. E. D.*

(^c) *Corol.* Sunt igitur tempora periodica in ellipsis eadem ac in circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus ellipseon.

P R O.

disci. Namque tempus periodicum (252.) est ut area tota directe & area tempore dato descripta inverse, adeoque area tota est ut area $QT \times SP$ quæ dato tempore describitur (hoc est, (269.) ut radix quadrata lateris recti) ducta in tempus periodicum.

(^b) 271. Sit Ellipsis axis major A , minor B , Latus rectum L , tempus periodicum T ; & quoniam $A:B=B:L$, erit $B^2 = A \times L$, $B = A^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, $A \times B = A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$, sed rectangulum $A \times B$, (270.) est

ut $T \times L^{\frac{3}{2}}$, ergò $A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ est ut $T \times L^{\frac{3}{2}}$, & dividendo utrumque terminum per $L^{\frac{1}{2}}$ erit $A^{\frac{3}{2}}$ ut T .

(^c) 272. Circulus est species ellipsis, cujus foci cum centro coincidunt & Latus rectum cum diametro; sed tempora periodica in Ellipsis quæ axem majorem æqualem habent sunt æqualia (271.) ergò in Ellipsi & circulo cujus diameter seu axis æquatur axi majori ellipsis, tempora periodica æquantur.

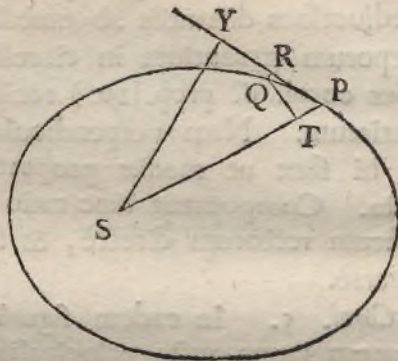
Ve-

PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

LIBER PRIMUS.

Hisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangent orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum sunt in ratione compositâ ex ratione perpendicularorum inversè, & subduplicatâ ratione laterum vectorum principalium directè.

Ab umbilico *S* ad tangentem *PR* demitte perpendicularum *SY*, & velocitas corporis *P* erit reciprocè in subduplicatâ ratione quantitatis $\frac{SY^2}{L}$.



Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus *PQ* in datâ temporis particulâ descriptus, hoc est (per lem. VII.) ut tangens ^(d) *PR*, id est, ob

proportionales *PR* ad *QT* & *SP* ad *SY*, ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, five ut *SY* reciprocè & *SP* × *QT* directè; estque *SP* × *QT* ut area dato tempore descripta, id est (per prop. XIV.) in subduplicatâ ratione lateris recti. *Q. E. D.*

Corol. 1. (e) Latera recta principalia sunt in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendicularorum, & duplicatâ ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum, in (f) maximis & minimis ab umbilico communi distantius, sunt in ratione compositâ ex ratione

(d) * Velocitas est ut tangens *PR*, sed ob angulos ad *T* & *Y* rectos & angulos *QPT*, *YPS*, punctis *P*, *Q*, coeuntibus æquales, triangulum evanescens *QPT*, simile erit triangulo *PSY*, adeoque *QP* (*PR*): *QT* = *SP*:*SY*, & *PR* = $\frac{SP \times QT}{SY}$.

(e) * Velocitatis quadratum *c*², est directè ut $\frac{L}{SY^2}$ (prop. XVI.) ergò *L* est ut *c*² × *SY*².

(f) * Maximæ & minimæ distantie sunt axis partes ab umbilico ad vertices principales contentæ, adeoque cum illic axis sit perpendicularis

DE MOTU
CORPO-
RUM.

ne distantiarum inversè, & subduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè. Nam perpendiculara jam sunt ipsæ distantia.

Corol. 3. (g) Ideoque velocitas in conicâ sectione, in maximâ vel minimâ ab umbilico distantia, est ad velocitatem in circulo in eadem à centro distantia in subduplicatâ ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

Corol. 4. (h) Corporum in ellipsis gyrantium velocitates in mediocribus distantis ab umbilico communi sunt eadem, quæ corporum gyrantium in circulis ad easdem distantias; hoc est (per corol. 6. prop. IV.) reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum. Nam perpendiculara jam sunt semi-axes minores, & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inversè cum subduplicatâ ratione laterum rectorum directè, & fiet ratio subduplicata distantiarum inversè.

Corol. 5. In eadem figurâ, vel etiam in figuris diversis, quarum latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciprocè ut perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. (i) In parabolâ velocitas est reciprocè in subduplicatâ ratione distantia corporis ab umbilico figura; in ellipsi ma-

pendicularis tangenti, ipsa perpendiculara ad tangentem in maximis & minimis distantis sunt ipsæ distantia; mediocres distantia sunt distantia ab umbilico ad vertices axis minoris Ellipseos, adeoque semiaxi majori æquantur.

(g) * Nam circulus ille (272.) est ellipsis cujus latus rectum est ipsa diameter, ideoque est ipsa dupla distantia ab umbilico seu centro, quare cum eadem ponatur distantia tam in conicâ sectione quàm in circulo, velocitates sunt in subduplicatâ ratione laterum rectorum, hoc est in subduplicatâ ratione lateris recti sectionis conicæ, ad duplam illam distantiam quæ est latus rectum circuli.

(h) * Sit A corporis in Ellipsi gyrantis mediocris distantia ab umbilico, sit etiam

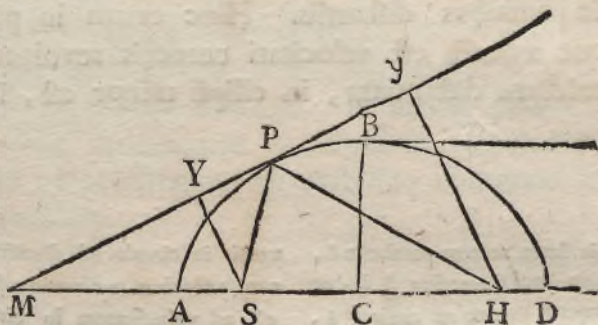
circuli radius A ; semiaxis minor, seu perpendicularis demissa ex umbilico in tangentem axi majori parallelam sit B ; latus rectum L , & circuli latus rectum (272.) erit $2A$, velocitas in Ellipsi sit C , in circulo c , & erit (per prop. XVI.) C^2 :

$$c^2 = \frac{L}{B^2} : \frac{2A}{A^2} = L \times A : 2B^2$$
; sed ex Conicis distantia à foco ad extremitatem semi axis minoris (quæ est mediocris distantia) est æqualis semiaxi majori, est ergo distantia A semiaxis major, ideoque cum ex conicis sit $A : B = 2B : L$, est $2B^2 = A \times L$, ergo $C^2 = c^2$, & $C = c$.

(i) In Parabolâ velocitas est reciprocè in subduplicatâ ratione distantia corporis ab umbilico figura, cum enim velocitas sit reciprocè ut perpendicularum demissum ab umbilico

magis variatur, in hyperbolâ minus quàm in hac ratione. Nam (per corol. 2. lem. XIV.) perpendicularum demissum ab umbilico ad tangentem parabolæ est in subduplicatâ ratione distantia. In hyperbolâ perpendicularum minus variatur, in ellipfi magis.

Co.



bilico ad Tangentem, per præced. Coroll., & (per Cor. 2. Lem. XIV.) quadratum ejus perpendiculari sit semper in Parabolâ ut distantia à foco, erit velocitas reciproce ut radix quadrata illius distantia à foco, sive in subduplicatâ ratione distantia &c.

276. Lemma. Sit Ellipsis APB, cujus axis major AD, foci S & H, semiaxis minor BC, My tangens in P, SY & Hy in tangentem perpendiculares; ob angulos YPS, HPy, æquales (prop. 48. lib. 3. conic. Apoll. sup. Theor. IV. de Ellip.) similia sunt triangula SPY, HPy, undè $SP : SY :: HP : Hy$

$\frac{SY \times HP}{SP} = \frac{SY^2 \times HP}{SP^2}$, ac proindè $SY \times Hy = \frac{SY^2 \times HP}{SP}$
 $= BC^2$ (ex conicis Vid. sup. n. 236.)
 sed $HP + SP = AD$ (prop. 52. lib. 3. conic. Apoll. sup. Theor. III. de Ellipfi)

unde est $HP = AD - SP$ ergò $\frac{SY^2 \times AD - SP}{SP}$
 $= BC^2$; & $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$. Ergò in Ellipfi, SY^2 variatur in ratione $\frac{BC^2 \times SP}{AD - SP}$ sive ob quantitatem BC^2 , constantem in

ratione $\frac{SP}{AD - SP}$.

Crescat distantia SP, minor fiet $AD - SP$, si non mutaretur denominator fractionis $\frac{SP}{AD - SP} = SY^2$, cresceret SY^2 sicut SP, cum autem minuatür denominator Sp crescente, eo ipso major fit valor fractionis $\frac{SP}{AD - SP}$ ergo crescente SP, SY^2 magis crescit quam in solâ ratione SP, ergo perpendicularum in ellipfi magis variatur quam in subduplicatâ ratione distantia SP.

In Hyperbolâ verò, quoniam $HP - SP = AD$ (prop. 51. lib. 3. conic. Apoll. Theor. III. de Hyp.) & $HP = AD + SP$, eodem modo reperitur $SY^2 = \frac{BC^2 \times SP}{AD + PS}$ & crescente SP, crescit etiam $AD + SP$, si idem maneret denominator cresceret SY^2 sicut SP, denominatore aucto, fractio $\frac{SP}{AD + SP}$ fit minor quam eo manente, sed ea exprimit valorem quadrati perpendiculari SY, ergo SY^2 minus crescit quàm SP sive perpendicularum in Hyperbolâ minus variatur quam in subduplicatâ ratione distantia SP.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Corol. 7. (k) In parabolâ velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro distantiam in subduplicatâ ratione numeri binarii ad unitatem; ⁽¹⁾ in ellipsi minor est, in hyperbolâ major quàm in hac ratione. Nam per hujus corollarium secundum velocitas in vertice parabolæ est in hac ratione, & per corollaria sexta hujus & propositionis quartæ servatur eadem proportio in omnibus distantiiis. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in ellipsi minor est, in hyperbolâ major.

Co-

(k) 277. Sit latus rectum parabolæ L , adeoque distantia foci à vertice $\frac{1}{4}L$, & ex umbilico tanquam centro ac radio $\frac{1}{4}L$, describatur circulus, ejus latus rectum seu diameter erit $\frac{1}{2}L$; undè velocitas corporis in vertice parabolæ erit ad velocitatem corporis in illo circulo revolventis ut \sqrt{L} ad $\sqrt{\frac{1}{2}L}$, hoc est, ut $\sqrt{2}$ ad 1. (corol. 2. hujusce Prop.) sed per coroll. 6. velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in aliâ quâvis ab umbilico distantia SP, ut \sqrt{SP} ad $\sqrt{\frac{1}{4}L}$, & (per coroll. 6. prop. IV.) velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4}L$, est etiam ad velocitatem in alio circulo cujus radius SP, ut \sqrt{SP} , ad $\sqrt{\frac{1}{4}L}$; quare velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in eadem parabolâ ad distantiam SP, ut velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{4}L$, ad velocitatem in circulo cujus radius est SP, ac proinde alternando velocitas in vertice parabolæ est ad velocitatem in circulo radio $\frac{1}{4}L$ descripto, hoc est, $\sqrt{2}$ ad 1, ut velocitas in parabolâ in distantia SP, ad velocitatem in circulo ad eandem à centro seu umbilico distantiam descripto.

278. Hinc etiam in parabolâ velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revol-

ventis in circulo ad dimidiam distantiam; nam velocitas in circulo cujus radius $\frac{1}{2}SP$ est ad velocitatem in circulo cujus radius SP, ut $\sqrt{2}$ ad 1, (per coroll. 6. prop. IV.) sed velocitas in parabolâ ad distantiam SP, est ad velocitatem in circulo cujus radius SP, etiam ut $\sqrt{2}$. ad 1, velocitas igitur in parabolâ ad distantiam SP, æquatur velocitati in circulo cujus radius $\frac{1}{2}SP$.

(1) 279. In Ellipsi velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam est ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem à centro distantiam in minore ratione quam $\sqrt{2}$ ad 1; in Hyperbolâ in ratione majore. Sit enim Ellipsis vel hyperbolæ latus rectum L , distantia ab umbilico SP, perpendicularum ad tangentem sectionis in puncto P demissum SY; SP, sit radius circuli, C sit velocitas in Ellipsi vel hyperbola ad distantiam SP; C, velocitas in circulo,

& erit (per prop. XVI.) $c^2 : C^2 = \frac{L}{SY^2}$

$\frac{2SP}{SP^2} = L \times SP : 2SY^2$; sed (276) $2SY^2$

$= \frac{2BC^2 \times SP}{AD + SP}$, ergo $c^2 : C^2 = L \times SP :$

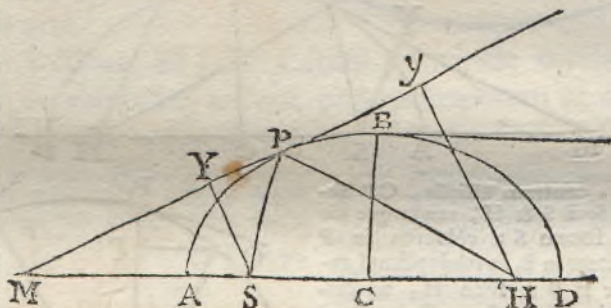
$\frac{2BC^2 \times SP}{AD + SP} = L \times AD + SP : 2BC^2$;

& ob $L \times AD = 4BC^2$ seu $2BC^2 = L$

Corol. 8. Velocitas gyrantis in sectione quavis conicâ est ad velocitatem gyrantis in circulo in distantia dimidii lateris recti principalis sectionis, ut distantia illa ad perpendicularum ab umbilico in tangentem sectionis demissum. (m) Patet per corollarium quintum.

Corol. 9. (n) Unde cum (per corol. 6. prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc circulo sit ad velocitatem gyrantis in circulo quovis alio reciprocè in subduplicatâ ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in conicâ sectione ad velocitatem gyrantis in circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendicularum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

P R O.



$$= \frac{L \times AD}{2}, \text{ est } c^2 : C^2 = 2 AD \mp 2 SP : AD;$$

undè in Ellipsi in quâ 2 SP habet signum —, ratio c^2 ad C^2 , minor est quam ratio 2, ad 1, & ratio c ad C , minor quam ratio $\sqrt{2}$, ad 1; in hyperbolâ major ob $+ 2 SP$ (276.)

280. Coroll. Quoniam distantia ab altero sectionis foco $HP = AD \mp SP$, erit $c^2 : C^2 = 2 HP : AD = HP : \frac{1}{2} AD$, hoc est, velocitas in Ellipsi & hyperbolâ ad quamvis ab umbilico seu centro virium distantiam SP est ad velocitatem in circulo ad eandem distantiam in ratione subduplicatâ distantix HP ab altero umbilico ad semiaxem majorem.

(m) * Nam iste circulus & sectio Conica idem latus rectum habent, quia in circulo distantia à Centro semi diametro æquatur & tota diameter est latus Rectum;

Tom. I.

ideo velocitates sunt reciprocè ut perpendiculara in Tangentem demissa (per Cor. 5, hujusce) sed in circulo semidiameter perpendicularo æquatur, ergo velocitates in sectione & in circulo sunt ut semi-diameter circuli ad Perpendicularum &c.

(n) 281. Sit C velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam dimidii lateris recti $\frac{1}{2} L$, c velocitas in sectione conicâ ad distantiam SP , K velocitas in circulo ad eandem distantiam SP , & erit (per coroll. 8.) $c^2 : C^2 = \frac{1}{4} L^2 : SY^2$

(& per cor. 6. prop. IV.) $C^2 : K^2 = SP : \frac{1}{2} L$. undè, ex æquo, $c^2 : K^2 = SP \times \frac{1}{4} L^2 :$

$SY^2 \times \frac{1}{2} L = SP \times \frac{1}{2} L : SY^2$. Fiat $SP : m = m : \frac{1}{2} L$, & erit $m^2 = SP \times \frac{1}{2} L$, ac pròinde $c^2 : K^2 = m^2 : SY^2$ & $c : K = m : SY$.

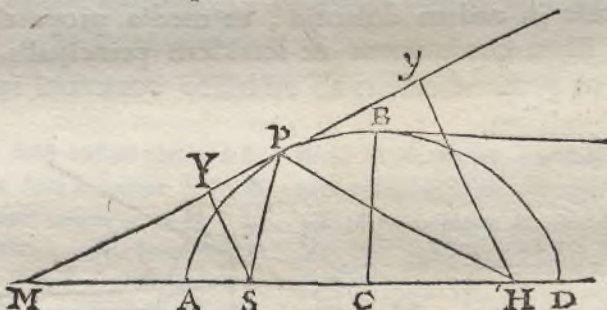
282.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum à centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur linea, quam corpus describit de loco dato cum datâ velocitate secundum datam rectam egrediens.

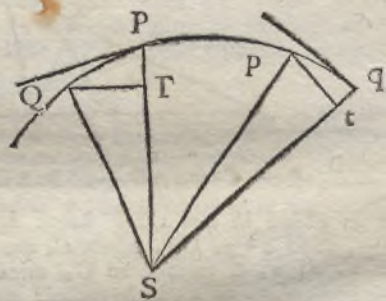
Vis centripeta tendens ad punctum S ea fit, quâ corpus p in orbitâ quâvis datâ p q gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco p. De loco P secundum lineam PR



282. Sit C, centrum Ellipsis, CB semi-
mi-axis minor, foci S & H, tendatque vis
centripeta ad focum S; velocitas in P
erit ad velocitatem in B, in subduplicatâ ra-
tione distantiae HP à foco H, ad dis-
tantiam SP ab altero foco seu centro
virium S; Nam velocitas in P dicatur c,
velocitas in B dicatur c, & erit (per cor. 5.
prop. XVI.) $C:c = CB:SY$, adeoque $C^2:c^2$
 $= CB^2:SY^2$, hoc est, ob $CB^2 = SY \times$
 Hy (235.) $C^2:c^2 = SY \times Hy:SY^2$
 $= Hy:SY$; sed ob similia triangula SPY, HPy,
 $Hy:SY = HP:SP$. Ergo $C^2:c^2 = HP:SP$,
& $C:c = HP^{\frac{1}{2}}:SP^{\frac{1}{2}}$ Q. e. D.

Theorema illud invenit clarissimus Geo-
metra Abrahamus de Moivre.

283. Velocitas angularis corporis P,
in quâvis orbitâ QPp, revolventis seu
angulus PSQ, quem radius vector SP,
dato tempore minimo describit est directè
ut QT perpendicularis ad radium vecto-
rem SP, & distantia SP inversè, dum punc-
ta Q & P coeunt, nam linea perpen-
dicularis QT pro arcu circuli haberi
potest, undè angulus PSQ = $\frac{QT}{SP}$ (153.)

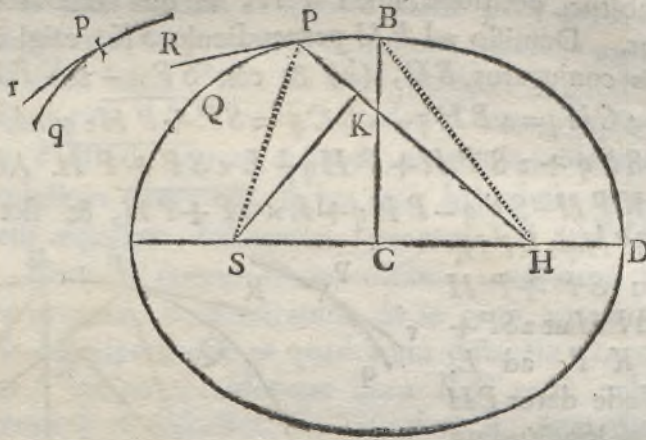


284. Coroll. 1. Hinc velocitas angula-
ris in eadem orbitâ est ubique reciproce in
duplicatâ ratione distantiae SP à centro
virium S. Nam sectores P & Q, pSq, eo-
dem tempusculo descripti sunt æquales
(prop. I.). Unde $QT \times SP = qt \times Sp$,
adeoque $QT:qt = Sp:SP$, & hinc
 $\frac{QT}{SP} : \frac{qt}{Sp} = \frac{Sp}{SP} : \frac{Sp}{Sp} = Sp^2:SP^2$.

285. Coroll. 2. Velocitates angulares in
sectionibus conicis circa umbilicum com-
munem seu centrum virium descriptis
sunt inter se ut radices quadratæ laterum
vectorum principalium directè & quadratè
dis.

ceat corpus P cum datâ velocitate, & mox inde, cogente vi centripetâ, deflectat illud in conï sectionem PQ . Hanc

igitur recta PR tanget in P . Tangat itidem recta aliqua pr orbitam pq in p , & si ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendiculara, erit (per corol. 1. prop. XVI.) latus rectum prin-



cipale conï sectionis ad latus rectum principale orbitæ in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendicularorum & duplicatâ ratione velocitatum, atque ideo datur. (a) Sit L conï sectionis latus

distantiarum inversè. Nam, (per prop. XIV.) Latera recta L, l , sunt in duplicatâ ratione sectorum PSQ, pSq , simul descriptorum, seu $L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}} = QT \times SP :$

$qt \times Sp$, adeoque $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{Sp} : \frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp} = QT : qt$; & hinc velocitates angulares seu anguli minimi PSQ, pSq , hoc est, $\frac{QT}{Sp}, \frac{qt}{Sp}$,

sunt ut $\frac{L^{\frac{1}{2}}}{Sp^2}, \frac{l^{\frac{1}{2}}}{Sp^2}$.

(a) Solutio hujus Problematis duas continet partes; Sit enim corpus è puncto P secundum lineam PR datâ cum velocitate projectum & retineatur circa punctum S per vim centripetam quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantie locorum à Centro cujusque quantitas absoluta in puncto P sit cognita, id corpus describet (per Cor. 1. Prop. XIII.) sectionem aliquam Conicam cujus 1o. queritur Latus Rectum principale, 2o. Dato umbilico S illius sectionis, puncto P , Tangente PR , & latere recto queritur alter umbilicus, quo nempe invento & ex cæteris datis describetur sectio Conica quam Corpus propositum percurrit.

Ad primam solutionis partem, fingitur sectio quælibet Conica cujus umbilicus sit S , & alter umbilicus & latus rectum ad arbitrium sumuntur, unde in quovis ejus puncto P duci poterit Tangens, & quantitas vis in eo puncto erit cognita, est enim ad vim in puncto P quæ data est reciprocè ut quadrata linearum Sp, SP ; Invenietur etiam velocitas in eo puncto p ; Nam velocitas corporis gyrantis in circulo ad distantiam Sp (sive arcus in eo descriptus tempore quo arcus PQ describitur) est media proportionalis inter vim centripetam in p , quæ inventa est, & duplam distantiam Sp (per naturam circuli), hæc verò est ad velocitatem in hæc Sectione Conicâ, ut perpendicularum ab S ad Tangentem communem demissum ad medianam proportionalem inter distantiam Sp & semissem lateris Recti istius sectionis.

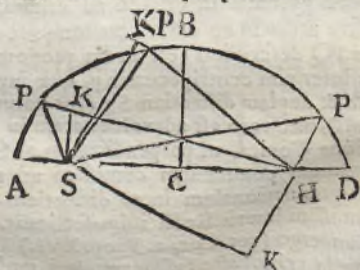
Cum ergo (per Cor. 1. Prop. XVI.) Latera Recta principalia sectionum circa umbilicum communem descriptarum sint in ratione compositâ ex duplicatâ ratione perpendicularorum & duplicatâ ratione velocitatum & ob datas Tangentes in p & P dentur perpendiculara ex S in eas Tangentes demissa, deturque Velocitas corporis moti in P & inventa sit velocitas in puncto p , datur ratio Lateris Recti

DE MOTU
CORPO-
RUM.

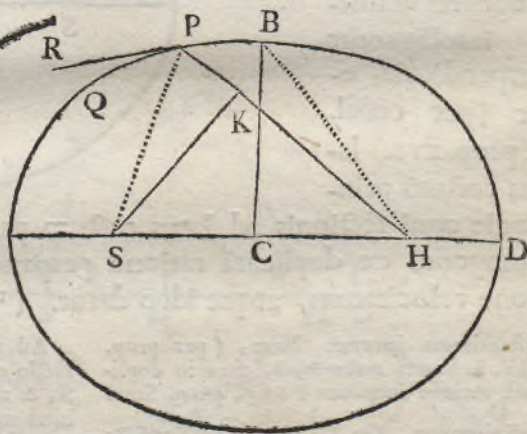
rectum. Datur præterea ejusdem conii sectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH ; & dabitur positione linea PH , in quâ umbilicus alter H locatur. Demisso ad PH perpendiculari SK , erigi intelligatur semiaxis conjugatus BC , (b) & erit $SPq - 2KPH + PHq = SHq = 4CHq = 4BHq - 4BCq = SP + PH$: quad. $- L \times SP + PH$ (c) $= SPq + 2SPH + PHq - L \times SP + PH$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times SP + PH$, & fiet $L \times SP + PH = 2SPH + 2KPH$, seu $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L . Ude datur PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit

quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR

Recti sectionis assumptæ ad Latus Rectum sectionis quam corpus P describit; Quod ergo invenitur, eratque primum.



(b) Erit $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2$, Etenim (per 12. & 13. 2. Elem.) in omni Triangulo SPH , quadratum lateris SH quod consideratur ut Hypothenusa anguli P , æquatur quadratis aliorum laterum SP PH dempto duplo Rectanguli lateris PH in quod cadit perpendicularum, ducti in partem



PK ab Angulo P ad perpendicularum usque interceptam, quæ quidem PK sumitur cum signo $+$ si sit ab eadem parte Tangentis ac S & cum signo $-$ si sit in parte opposita.

(c) 287. $SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$ &c. Ex naturâ Ellipseos est $2BH$ æqualis axi majori $2AC$ ideoque æqualis $SP + PH$ & $4BH^2 = SP + PH^2$, pariter est $2AC : 2BC = 2BC : L$ est ergo $4BC^2 = L \times 2AC$ five $L \times SP + PH$ unde est $4BH^2 - 4BC^2 = SP + PH^2 - L \times SP + PH$.

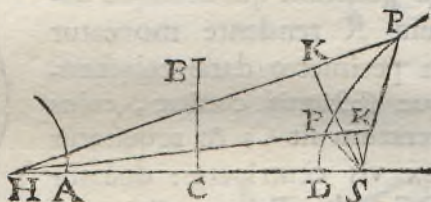
Collatis itaque valoribus ejusdem quantitatis SH^2 , est $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SP^2 + 2SP \times PH + PH^2 - L \times SP + PH$, utrinque detractis æqualibus manet $-2KP \times PH = 2SP \times PH - L \times SP + PH$ transpositifque partibus negativis est $L \times SP + PH = 2SP \times PH + 2KP \times PH$ five $2SP + 2KP : L = SP + PH : PH$ & dividendo $2SP + 2KP - L : L = SP : PH$ unde

cum linea PS ; ideoque figura erit ellipsis, & ex datis umbilicis S, H , & axe principali $SP+PH$, dabitur. Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2SP+2KP$, longitudo PH infinita erit; & propterea figura erit parabola axem habens SH parallelum lineæ PK , & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis; ideoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH , & inde dabitur. Nam si corpus in his casibus revolvatur in conicâ sectione sic inventâ, demonstratum est in prop. XI, XII, & XIII, quod vis centripeta erit ut quadratum distantie corporis à centro virium S reciprocè; ideoque linea PQ rectè exhibetur, quam corpus tali vi describet, de loco dato P , cum datâ velocitate, secundum rectam positione datam PR egrediens. $Q.E.F.$

Corol. 1. Hinc in omni conicâ sectione ex dato vertice principali D , latere recto L , & umbilico S , datur umbilicus alter H capiendo DH ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. ^(d) Nam proportio $SP+PH$ ad PH ut $2SP+2KP$ ad L in casu hujus corollarii, fit $DS+DH$ ad DH ut $4DS$ ad L , & divisim DS ad DH ut $4DS-L$ ad L ,

unde quo magis accedit valor lateris recti L ad quantitatem $2SP+2KP$, eo major est PH respectu SP , si $L=2SP+2KP$, infinitum est SP respectu PH , hoc est, Ellipsis abit in Parabolam, si L fit majus quam $2SP+2KP$, primus terminus Proportionis fit negativus, ideoque PH in partem oppositam Tangentis cadet & sectio fiet Hyperbola; manentibus autem cæteris crescit Latus Rectum cum velocitate in puncto P datâ: Unde quo major fit velocitas respectu vis centripetæ eo magis elongatur Ellipsis quam describit corpus propositum vel etiam in Parabolâ movetur, & tandem in Hyperbolâ.

288. Demonstratio pro Hyperbolâ ita instituitur: Quia PK non est in eadem parte Tangentis ac S , sumitur PK cum signo $-$, ideoque est $SH^2=SP^2+2KP \times PH+PH^2$, & per naturam Hyperbolæ $SH^2=4CH^2=4CA^2+4CB^2$ sive quia $2CA=PH-SP$ & $4CB^2=L \times 2CA$ est $SH^2=PH^2-2SP \times PH$



$+SP^2+L \times PH-SP$ unde collatis valoribus H^2 & detractis quantitibus communibus est $2KP \times PH=-2SP \times PH+L \times PH-SP$ & transpositis quantitibus negativis est $2KP \times PH+2SP \times PH=L \times PH-SP$ unde est $2SP+2KP:L=PH-SP:PH$, & convertendo $L-2SP-2KP:L=SP:PH$.

^(d) 289. In casu hujus corollarii punctum P cadit in D , punctum K cadit in S , fitque $PK=DS=SP$, & $PH=DH$. Quare in omni sectione conicâ est DH , ad DS , ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. Y 3 290.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

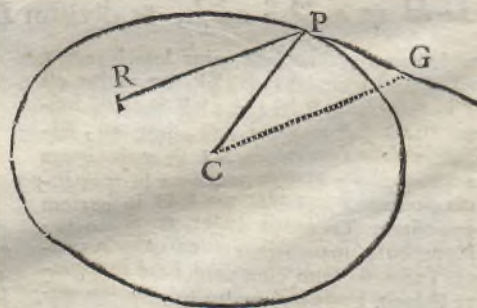
Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D , inveniatur orbita expeditè, capiendò scilicet latus rectum ejus ad duplam distantiam DS , in duplicatâ ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in circulo ad distantiam DS gyrantis (per corol. 3. prop. XVI.); dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4 DS$.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in sectione quâcunque conicâ, & ex orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest orbis, in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo, quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exhibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliquâ extrinsecus impressâ continuo perturbetur, innotescet cursus quam proximè, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogiâ mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.

Si corpus P vi centripetâ ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque sectionis conicæ, cujus centrum sit C ; & requiratur lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & orbis tangenti PG occurrens in G ; & (e) vis illa (per corol. I. & schol. prop. X. & corol. 3. prop. VII.) erit ut $\frac{CG \text{ cub.}}{RP \text{ quad.}}$



(e) 290. Vis ad centrum vel à centro C , tendens est ut CP , (per coroll. I. Prop. X. & Not. 232.) adedque exponatur per lineam CP ; vis ad punctum

R , tendens exponatur per lineam A , & (per corol. 3. prop. VII.) erit $CP \times RP^2$:
 $CG^3 = CP : A = \frac{CG^3}{RP^2}$

Si

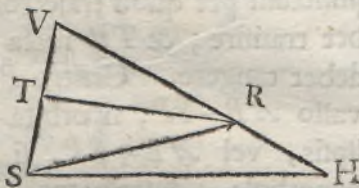
SECTIO IV.

LIBER PRIMUS.

De inventione orbium ellipticorum, parabolicorum & hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab ellipseos vel hyperbolæ cujuscvis umbilicis duobus S, H, ad punctum quodvis tertium V inflectantur rectæ duæ SV, HV, quarum una HV æqualis sit axi principali figuræ, id est, axi in quo umbilici jacent, altera SV à perpendiculo TR in se demisso bisecetur in T; perpendiculum illud TR sectionem conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit HV æqualis axi principali figuræ.

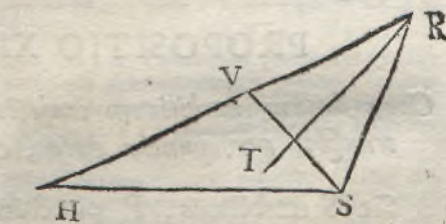


Secet enim perpendiculum TR rectam HV productam, si opus fuerit, in R; & jungatur SR. Ob æquales TS, TV, æquales erunt & rectæ SR, VR & anguli TRS, TRV. (f) Unde punctum R erit ad sectionem conicam, & perpendiculum TR tanget eandem & contra. Q. E. D.

P R O.

(f) * Si fuerint S, & H, Ellipseos umbilici, erit $SR + RH = HV =$ axi majori, ac proinde R punctum perimetri Ellipsis quam TR tangit in R, ob angulos TRS, TRV, æquales (per prop. 52. & 46. lib. 3. conic. Apollon. Theor. III. & IV. de El.) & contra si TR tangat Ellipsim in R, & ducatur SV, ad TR perpendicularis, erit ob angulos TRS, TRV, æquales $VR = SR$, & $VH = SR + RH =$ axi majori.

* Si fuerint S, & H, Hyperbolæ umbilici ob æquales TS, TV, erit $SR = VR$, & $HR - SR = HV$ æqualis axi majori, & R punctum Hyperbolæ quam tangit in R recta TR ob angulos VRT, TRS, æquales (per prop. 51. & 46. lib.

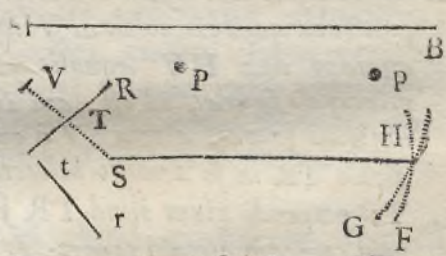


3. conic. Apoll. Theor. III. & IV. de Hyperb.) & contra si TR tangat Hyperbolam in R, & agatur SV ad TR perpendicularis erit $VR = SR$, & $HV = HR - RS$, æqualis axi majori, ut patet. Si

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus describere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis trajectoriæ cujusvis; P punctum per quod trajectoria debet transire; & TR recta quam debet tangere. Centro P intervallo $AB - SP$, si orbita sit ellipsis, vel $AB + SP$, si ea sit hyperbola, describatur circulus HG . Ad tangentem TR demittatur perpendicularum ST , & producatum idem ad V , ut sit TV æqualis ST ; centroque V & intervallo AB describatur circulus FH . Hac methodo sive dentur duo puncta P, p , sive duæ tangentes TR, tr , sive punctum P & tangens TR , describendi sunt circuli duo. Sit H eorum intersectio communis, & umbilicis S, H , axe illo dato describatur trajectoria. Dico factum. Nam trajectoria descripta (eo quod $PH + SP$ in ellipsi, & $PH - SP$ in hyperbola æquatur axi) transibit per punctum P , & (per lemma superius) tanget rectam TR . Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo P, p , vel tanget rectas duas TR, tr . (s) *Q. E. F.*



PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens trajectoriæ describendæ. Centro P intervallo PS describe circulum FG . Ab

* (s) Si orbita sit Hyperbola, focus H , erit in rectâ HS , ultra S , productâ.

umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST , & produc eam ad V , ut sit TV æqualis ST . Eodem modo describendus est alter circulus fg , si datur alterum punctum p ; vel invenien- dum alterum punctum v , si datur altera tan- gens tr ; dein ducenda recta IF quæ tan- gat duos circulos FG , fg si dantur duo puncta P, p , vel transeat per duo puncta V, v , si dantur duæ tangentes TR, tr , vel tangat circulum FG & transeat per punctum V , si datur punctum P & tangens TR . Ad FI demitte perpendicularem SI , eamque biseca in K ; & axe SK , vertice principali K describatur parabola. Dico factum. (h) Nam parabola, ob æquales SK & IK , SP & FP , transibit per punctum P ; & (per lem. XIV. corol. 3.) ob æquales ST & TV & angulum rectum STR , tan- get rectam TR . Q. E. F.

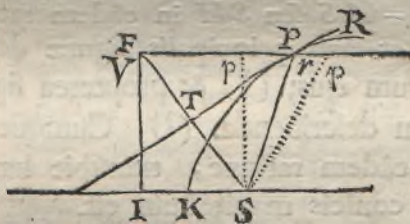


P R O-

(h) 291. Nam Parabola ob æquales SK & IK , SP & FP , transibit per punctum P scilicet Parabola descripta ob æquales SK & IK habet pro directrice lineam IF (per Theor. II. de Parab. n. 224. de Conicis), cum verò distantia puncti cujusvis Parabo- læ à Directrice sit æqualis distantia ejus puncti à foco, vice versâ, punctum quod æqualiter à foco & à Directrice distabit pertinebit ad Parabolam, Finge enim li- neam FP Directrici perpendicularem oc- currere quidem Parabolæ in puncto P , ita ut sit $FP=SP$, sed in eâ posse sumi aliud punctum p ita ut sit etiam $Sp=FP=FP \pm Pp$, erit ob $FP=SP$, $Sp=SP \pm Pp$ sed cum SPp sit Triangulum, absurdum est (per 20. 1. Elem.) esse $Sp=SP \pm Pp$ ergo absurdum est fingere aliud punctum præter id quod ad Parabolam pertinet tale ut ejus distantia à directrice sit æqualis ejus distantia à foco, ergo ob æquales SP & FP , Parabola cujus directrix est IF & umbili- cus S transibit per punctum P .

2^{us}. Casus. Parabola descripta ob æqua- les ST, TV , ob angulum Rectum STR tan- get rectam TR , ejus enim Parabolæ des- criptæ directrix est VI . Jam verò du-

Tom. I.



catur ex IV perpendicularis in directricem quæ rectæ TR occurrat in r & ab r duca- tur ad focum linea rS , ob æquales ST TV & angulum rectum STR erit $Vr=rS$ & punctum r ad Parabolam pertinebit per su- periolem demonstrationis partem, eadem ratione probabitur angulum VrT æqualem esse angulo TrS ideoque linea Tr bifariam dividit angulum VrS , sed ea linea Para- bolæ Tangens est quæ bifariam dividit an- gulum quem faciunt duæ lineæ ductæ à pun- cto quovis Parabolæ una ad focum alte- ra perpendiculariter ad directricem (per Theor. III. de Parabola n. 224.) er- go linea TR tangit Parabolam descriptam sive Parabola descripta tanget Rectam TR .

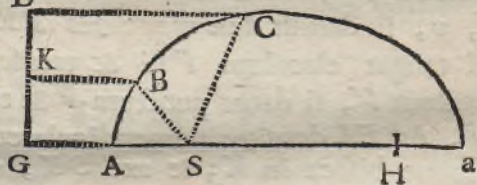
Z

292.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis specie (1) datam describere, quæ per data puncta transibit & rectas tanget positione datas.

Cas. 1. Dato umbilico S , describenda fit trajectoria ABC per puncta duo B, C . Quoniam trajectoria datur specie, dabitur ratio axis principalis ad distantiam umbilicorum. In ea ratione cape KB ad BS , & LC ad CS . Centris B, C , intervallis BK, CL , describe circulos duos, & ad rectam KL , quæ tangat eorundem in K & L , demitte perpendicularum SG , idemque secam in A & a , ita ut sit GA ad AS & Ga ad aS ut est KB ad BS & axe Aa , verticibus A, a , describatur trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter figuræ descriptæ, & cum sit GA ad AS ut Ga ad aS , erit divisim $Ga - GA$ seu Aa ad $aS - AS$ seu SH in eadem ratione, ideoque in ratione quam habet axis principalis figuræ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus; ^(k) & propterea figura descripta est ejusdem speciei cum describenda. (1) Cumque sint KB ad BS & LC ad CS in eadem ratione, transibit hæc figura per puncta B, C , ut ex conicis manifestum est.



(i) 292. Sectiones conicæ sunt ejusdem speciei seu similes quarum axes duo, vel quod idem est, axis major & focorum distantia sunt inter se in datâ ratione; Ex hæc enim ratione unice pendent partium sectionis ratio ac respectiva positio, atque hinc fit ut parabolæ omnes similes sint quod in omnibus focorum distantia infinita majori axi æqualis sit.

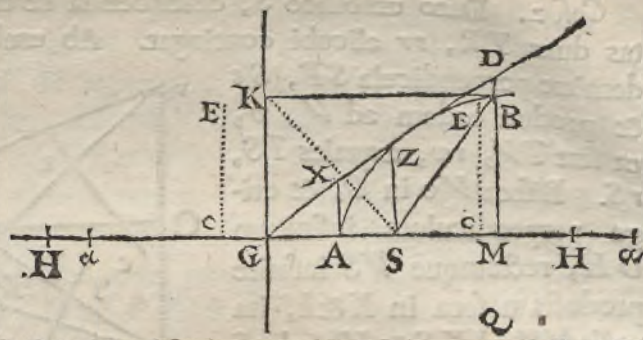
(k) * Si describenda fit hyperbola, punctum a , sumi debet in perpendicularo SG , ad alteram partem lineæ GL , producto ut sit G , inter A , & a , tumque erit $Ga + GA$, seu Aa ad $aS + AS$, seu SH , in ratione GA ad AS , adeoque in ratione quam habet axis principalis hyperbolæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, & propterea hyperbola des-

cripta similis est hyperbolæ describendæ.

(1) Ut demonstretur puncta B & C ad Sectionem Conicam descriptam pertinere quædam prævia ex Conicis sunt usurpanda.

293. Lemma... Sit sectionis conicæ AZB , axis major Aa , foci S, H , semiaxis minor cE erectâ ad axem perpendiculari SZ per punctum Z , ducatur tangens DZG quæ axi occurrat in G ; tum ex punctis G, A , & quovis alio axis puncto M , erigantur ad axem perpendiculares GK, AX, MB, D , & ex puncto sectionis B , ducatur ad GK , perpendicularis BK , erit $1^\circ. SZ = \frac{1}{2}L$, seu dimidio lateri recto, etenim ordinata in foco est semper æqualis semilateri Recto, (per Theor. III. de Ell. & Hyp. & Cor. 2. Theor. I. de Parab. n. 224.) 294.

294. 2^o. Erit. GA ad AS sicut axis major ad distantiam focorum, hoc est GA:AS=Aa:SH; Nam cum G sit punctum in quo Tangens secat Diametrum, ejus distantia GA, Ga, ab utroque vertice sunt inter se sicut abscissa AS Sa ab utroque vertice Diametri sumpta, sive est (per Lem. V. de Conic. n. 224.) GA:Ga



=AS:Sa & convertendo GA:Aa=AS:Sa-AS sive SH (quia AS=Ha) ergo alternando GA:AS=Aa:SH.

295. 3^o. Erit factum GSxSc aequale quadrato semi axis minoris, nam quia est GA:AS=Aa:SH, est componendo GS:AS=SH+Aa:SH, & sumendo dimidium terminorum ultimae rationis est GS:AS=Sc+c a (sive Sa):Sc, est ergo GSxSc=ASxSa, sed factum ASxSa, (partium ab uno foco ad utrumque axis majoris verticem sumptarum) est semper aequale quadrato semi axis minoris, nam id factum aequatur in Ellipsi cA²-cS² (per 5. 2. Elem.) & in Hyperbola cS²-cA² (per 6. 2. Elem.) utrumque verò aequatur quadrato semi axis minoris per naturam focorum (Theor. III. de Hyper. & Ellip. 224.) est ergo GSxSc=cE².

296. 4^o. Perpendicularis AS in axis Vertice A erecta & terminata ad Tangentem in extremitate Z ordinatae quae insitit foco S est aequalis AS distantiae foci à Vertice... Nam cum ob Triangula similia XGA ZGS sit GA:AX=GS:SZ sive $\frac{1}{2}L = \frac{2cE^2}{2cA}$ & sit cE²=GSxSc est GA:AX=GS: $\frac{GSxSc}{cA}$ =cA:Sc (& duplicando hos terminos) =Aa:SH, sed in eadem ratione est GA ad AS (294) ergo GA:AX=GA:AS & AX=AS.

In Parabola idem verum est, in ea enim est GA=AS, GS=2AS & SZ= $\frac{1}{2}L$ =2AS (Cor. I. Lem. V. de Coni. 224.) Ergo haec proportio GA:AX=GS:SZ in hanc mutatur AS:AX=2AS:2AS ergo AS=AX.

297. 5^o. Linea à foco S, ad curvæ punc-

tum quodvis B ducta est aequalis lineae DM, quae per id punctum transit, & perpendiculariter ad axim ducitur, terminaturque hinc ab axi, illinc à Tangente GZ Producentem DM ad Q ubi iterum occurrit Sectioni Conicæ sitque MQ=BM, erit (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) ZX²:ZD²=AX²:DMxDP (sive DM²-BM² per 6. 2. Elem.) sed ob Parallelas AX, SZ, MD est ZX:ZD=AS:SM & ZX²:ZD²=AS²:SM². Ergo est AS²:SM²=AX² (sive AS² per 296):DM²-BM² unde est SM²=DM²-BM² & addendo utrinque BM², SM²+BM² (sive SB² per 47. 1. Elem.) =DM² & SB=DM.

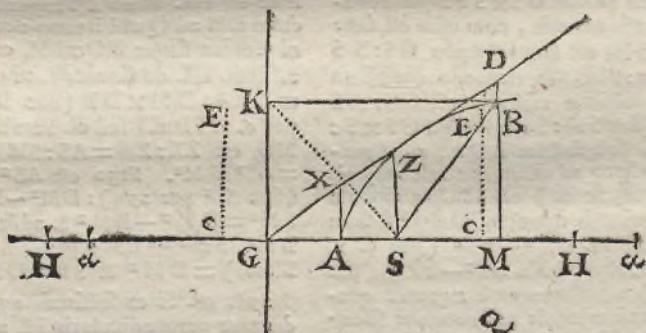
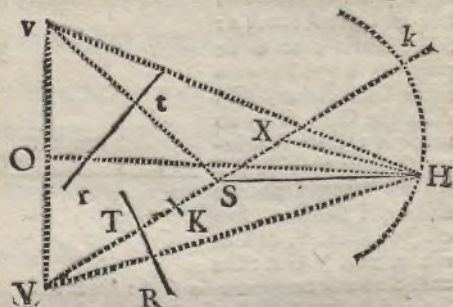
298. 6^o. Si ex sectionis quovis puncto B, ducatur perpendicularis BK ad lineam GK, & linea BS ad focum, erit semper KB:BS=GA:AS, nam propter Triangula similia GMD GAX, est GM (sive KB ob Parallelas GM & KB, GK & MB):MD (sive BS per 297)=GA:AX (sive AS per 296) hoc est KB:BS=GA:AS ideoque KB:BS=Aa:SH quoniam GA:AS=Aa:SH (per 294).

299. Conversa etiam vera est si ducatur perpendicularis in lineam GK, & in ea sumatur B, ita ut sit KB:BS=GA:AS=Aa:SH punctum B est in Sectione Conicâ descriptâ.

Sit enim Sectio Hyperbola aut Parabola, illa in unico puncto B secabitur per lineam KB, eritque (per 298) KB:BS=Aa:SH, dico autem nullum aliud punctum β sumi posse in ea linea KB producta si lubet, ita ut sit KB:BS=Aa:SH, fingatur enim dari illud punctum β, subtrahanturque termini duarum priorum rationum à se mutuo, erit KB-Kβ (sive Bβ):BS-βS=Aa:SH sed quia in Hyperbola est Aa, minor quam SH, & in Parabola ei est aequalis, erit Bβ minor

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Cas. 2. Dato umbilico S, describenda fit trajectoria quæ rec-
tas duas TR, tr alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes
demitte perpendicula ST, St
& produc eadem ad V, v,
ut sint TV, tv, æquales TS,
tS. Biseca Vv in O, & eri-
ge perpendiculum infinitum
OH, rectamque VS infinite
productam seca in K&k, ita
ut sit VK ad KS & Vk ad kS
ut est trajectoriæ describendæ



sunt aut æqualis differentiæ SB - Sβ, sed
SBβ est Triangulum, ergo absurdum est
(per 20. 1. Elem.) unum ejus latus ut Bβ
esse minus aut æquale differentiæ aliorum,
non datur ergo punctum illud β.

2^o. Sectio fit Ellipsis; Ducatur SK; si
GK sit æqualis semi axi minori, erit SK:
GK = Aa:SH nam (per 295) est GS:cE (si-
ve GK ex Hyp.) = cE:Sc & GS²:GK² = cE²:
Sc², & componendo GS² + GK² (five SK²
per 47. 1. Elem.): GK² = cE² + Sc² (five
cA² per nat. focorum): Sc² & SK:GK =
cA:Sc & duplicando terminos posterioris
rationis est SK:GK = Aa:SH.

Si GK sit major quam cE erit GS²:GK² in
minori ratione quam cE² ad Sc², & com-
ponendo erit GS² + GK² five SK² ad GK²
in minori ratione quam cE² + Sc² ad Sc²
unde tandem deducetur in hoc casu esse SK
ad GK in minori ratione quam Aa ad SH.

Et pariter si GK sit minor quam cE, erit
SK ad GK in majori ratione quam Aa ad SH.

Sed (per princ. Trigo.) est in Triang. SKG,
sinus totalis ad sinum ang. KSG (five ad si-
num anguli SKB huic æqualem ob Paralle-
las GS KB) sicut KS ad KG. Ergo ratio si-
nus totalis ad sin Ang. SKB, æqualis est ra-
tioni Aa ad SH, si GK sit æqualis cE, est
illā minor si GK superet cE, est illa major
si GK minor sit quam cE.

Ut verò lineæ KB BS habeant rationem
Aa ad SH, oportet ut in Triang. KBS,
sinus angulorum KSB SKB sint in eā ratio-
ne Aa ad SH; Ergo si GK sit æqualis cE,
est Sinus totalis: Sin. SKB = Sin. KSB: Sin.
SKB, ideoque in hoc casu erit Sin. tot. =
Sin. KSB, hoc est, linea SB erit perpendi-
cularis in SK, unica ergo erit, unicumque
punctum B, sicut etiam linea KB in unico
puncto Sectioni Conicæ occurret.

Si GK sit major cE est sin. totalis ad sin.
SKB in minori ratione quam sin. KSB ad
sin. SKB, unde sinus totalis minor esse de-
beret sinu KSB quod quidem est absurdum.

axis principalis ad umbilicorum distantiam. Super diametro Kk describatur circulus secans OH in H , & umbilicis S, H , axe principali ipsam VH æquante, describatur trajectoria. Dico factum. Nam biseca Kk in X , & junge HX, HS, HV, Hv . Quoniam est VK ad KS ut Vk ad kS ; & composite ut $VK + Vk$ ad $KS + kS$; divisimque ut $Vk - VK$ ad $kS - KS$, id est, ^(m) ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, ideoque ut VX ad HX & HX ad SX , similia erunt triangula VXH, HXS , & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH , ideoque ut VK ad KS . Habet igitur trajectoriæ descriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam SH , quam habet trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum VH, vH æquentur axi principali, & VS, vS à rectis TR, tr perpendiculariter bisecentur, liquet (ex lem. xv.) rectas illas trajectoriam descriptam tangere. *Q. E. F.* ⁽ⁿ⁾

Caf.

nulla ergo duci poteri linea SB quæ determinet punctum B tale ut sit KB ad SB sicut Aa ad SH , sicut etiam in eo casu linea KB nullibi occurrit Sectioni Conicæ.

Denique si GK sit minor cE , est *fin. tot.* ad *fin.* SKB in majori ratione quam *finus* KSB ad *fin.* SKB , dabitur ergo *finus* KSB , sed ut ad acutum vel obtusum angulum æqualiter pertinet duæ duci poterunt lineæ SB (sed non plures) quæ requisitam cum KB habeant rationem, ut etiam linea KB hoc in casu duobus in punctis Ellipsis secat.

Ergo si $KB : BS = GA : AS = Aa : SH$ punctum B est in Sectione Conicâ.

Ex his autem liquet curvam secundum Newtonianam solutionem descriptam transire per puncta B & C omnia enim planè conveniunt ad Lemmatis (193) Hypothesim.

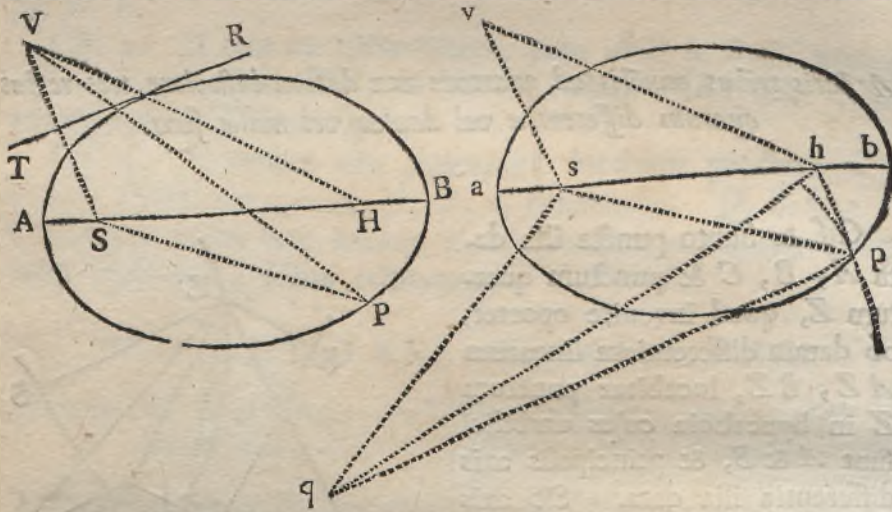
In iis omnibus parabolam usurpamus pro ellipsi in quâ distantia focorum infinita est, ac proximè axi majori æqualis.

^(m) * Id est, ut $2VX$ ad $2KX$, & $2KX$ ad $2SX$; nam $KX = kX = HX$ (per constr.) adeoque $VK + Vk = 2VK + 2KX = 2VX$, & $KS + kS = Kk = Vk - VK = 2KX$; & quia $kS - KS = kX + SX = KX + SX = KS + 2SX$, erit $kS - KS = 2SX$, adeoque $VK : KS = VX : HX = HX : SX$. Quare similia erunt triangula VXH, HXS , quorum latera VX & XH, HX & KS , proportionalia communem angulum X , complectuntur.

⁽ⁿ⁾ * Si describenda sit hyperbola, in SV , versùs V productâ, ita sumantur puncta K, k , ut inter utrumque positum sit V , cæteraque fiant ut Newtonus præscribit, & quoniam $VK : KS = Vk : kS$, erit $Vk - VK : kS - KS = VK : KS = VK + Vk : KS + kS$, sed $Vk - VK = 2VX$, $kS - KS = 2KX$, $VK + Vk = 2KX$, & $KS + kS = 2SX$. Reliqua demonstratio eadem est ac pro ellipsi.

que constituat angulum vsp angulo hsq & angulum vsh angulo psq æquales, triangula svh , spq erunt similia, & propterea vh

LIBER PRIMUS.



erit ad pq ut est sh ad sq , id est (ob similia triangula VSP , hsq) ut est VS ad SP seu ab ad pq . Æquantur ergo vh & ab . Porro (P) ob similia triangula VSH , vsh , est VH ad SH ut vh ad sh , id est, axis conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis ab ad umbilicorum intervallum sh ; & propterea figura jam descripta similis est figuræ aph . Transiit autem hæc figura per punctum P , (q) eo quod triangulum PSH simile sit triangulo psh ; & quia VH æquatur ipsius axi & VS bifecatur perpendiculariter à recta TR , tangit eadem rectam TR . (r) Q. E. F. LEM.

* (P) Similia sunt triangula VSH , vsh , nam (per constr.) angulus $VSP = hsq = vsp$, & angulus $HSP = hsp$, adeoque angulus $VSH = vsh$; & præterea $sp : sh = SP : SH$, & $sv : sp = sh : sq = SV : SP$, ob similia triangula VSP , hsq ; quare ex æquo $sv : sh = SV : SH$, triangula igitur VSH , vsh , quorum latera proportionalia æquales angulos complectuntur sunt similia.

* (q) Nam si ducatur recta SP , peri-

metro figuræ occurrens in P , & angulum PSH , æqualem faciens angulo psh , patet ob similitudinem sectionum conicarum, triangula duo PSH , psh , fore similia; unde vicissim manifestum est punctum P , esse in perimetro figuræ, si triangulum PSH , simile sit triangulo psh .

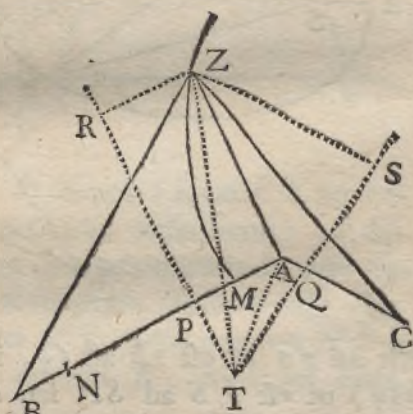
* (r) Eadem est constructio ac demonstratio pro hyperbolâ, si foci H , h , & vertices B , b , ad contrariam partem transferantur.

Erit

L E M M A XVI.

*A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas
quarum differentie vel dantur vel nullæ sunt.*

Cas. 1. Sunt puncta illa da-
ta A, B, C & punctum quar-
tum Z , quod invenire oportet;
ob datam differentiam linearum
 AZ, BZ , locabitur punctum
 Z in hyperbola cujus umbilici
sunt A & B , & principalis axis
differentia illa data. Sit axis
ille MN . Cape PM ad MA
ut est MN ad AB , & erecta
 PR perpendiculari ad AB , de-
missaque ZR perpendiculari ad
 PR ; erit, (1) ex naturâ hujus hyperbolæ, ZR ad AZ ut est MN
ad AB . Simili discursu punctum Z locabitur in aliâ hyperbo-
lâ, cujus umbilici sunt A, C & principalis axis differentia inter
 AZ & CZ , ducique potest QS ipsi AC perpendicularis, ad
quam si ab hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis
 ZS , hæc fuerit ad AZ ut est differentia inter AZ & CZ
ad AC . Dantur ergo rationes ipsarum ZR & ZS ad AZ ,
& idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideo-
que si rectæ RP, SQ concurrant in T , & agantur TZ & TA ,
figura $TRZS$ dabitur specie, & recta TZ in qua pun-
ctum Z alicubi locatur, dabitur positione. Dabitur etiam re-
cta TA , ut & angulus ATZ ; & ob datas rationes ipsarum
 AZ



* (1) Erit ex naturâ hujus hyperbolæ ZR , ad AZ , ut est MN , ad AB , (298).
3002

AZ ac ^(t) TZ ad ZS dabitur earundem ratio ad invicem; & inde dabitur triangulum ATZ , cujus vertex est punctum Z .

Q. E. I.

Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ , æquantur, ita age rectam TZ , ut bifecet rectam AB ; dein quære triangulum ATZ ut supra.

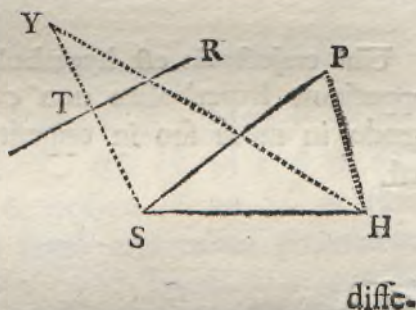
Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro circuli per puncta A, B, C transeuntis. *Q. E. I.*

Solvitur etiam hoc lemma problematicum per librum tactionum *Apollonii à Vieta restitutum.*

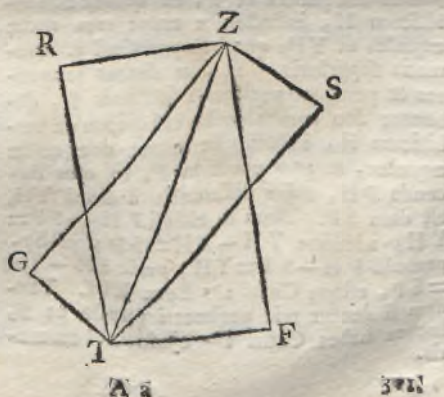
PROPOSITIO XXI. THEOREMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

Detur umbilicus S , punctum P , & tangens TR , & inveniendus fit umbilicus alter H . Ad tangentem demitte perpendicularum ST , & produc idem ad Y , ut sit TY æqualis ST , & erit YH æqualis axi principali. Junge SP, HP , & erit SP

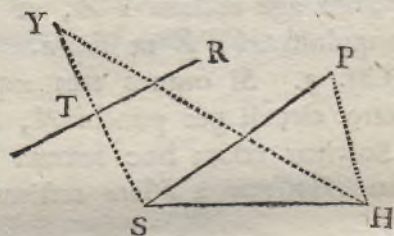


(t) 300. Et recta TZ , in qua punctum Z , alicubi locatur, dabitur positione; ductis enim TF ad RT , & TG ad ST , perpendicularibus, quæ sint in ratione datâ RZ ad ZS , agantur GZ, FZ , ipsi TS, RT parallelæ & se mutuo interfecantes in puncto aliquo Z , juncta TZ , habebit positionem quæsitam; patet enim perpendiculara ZS, ZR , ex puncto Z , in rectas TS, TR , demissa, esse lineis TG, TF æqualia adeoque in datâ ratione.



DE MOTU
CORPO-
RUM.

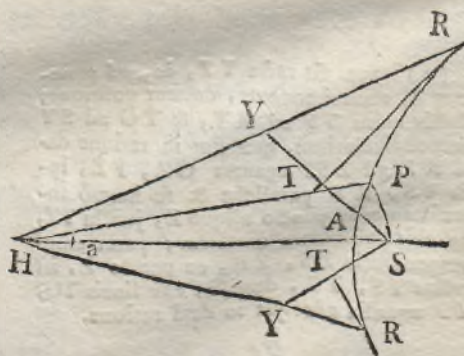
differentia inter HP & axem principalem. (u) Hoc modo si dentur plures tangentes TR , vel plura puncta P , devenietur semper ad lineas totidem YH , vel PH , à dictis punctis Y vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iisdem, atque ideo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per lemma superius, datur umbilicus ille alter H . Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel est YH ; vel, si trajectoria ellipsis est, $PH+SP$; si hyperbola, $PH-SP$) habetur trajectoria. Q. E. I.

*Scholium.*

Ubi trajectoria est hyperbola, sub nomine hujus trajectoriæ oppositam hyperbolam non comprehendo. Corpus enim perpendo in motu suo in oppositam hyperbolam transire non potest.

Casus

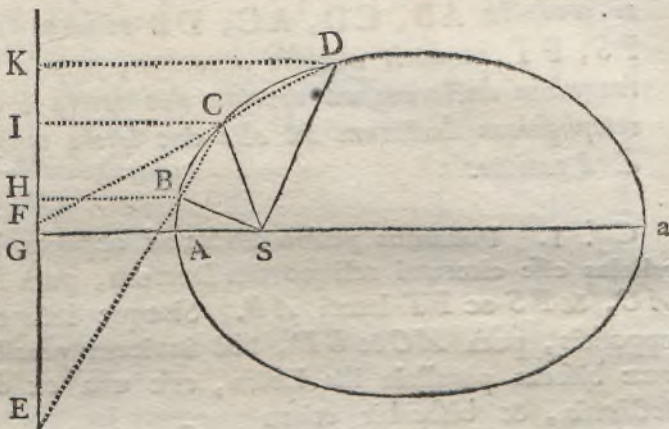
(u) 301. Si dentur tres tangentes, dantur tria puncta ut Y , ex quibus ad umbilicum H , inflectendæ erunt tres rectæ æquales ut YH , quod fit per Caf. 3. Lemmatis superioris. Si duæ dentur tangentes & punctum perimetri sectionis P , dantur duo puncta ut Y , ex quibus ad umbilicum H , inflectendæ erunt duæ rectæ æquales, & 3^{um} punctum P , ex quo ductenda PH , cujus differentia à lineâ YH , est data SP . Nam in ellipsi $PH+SP= YH$, adeoque $YH-PH=SP$; in hyperbolâ $PH-SP=YH$, undè $PH-YH=SP$, estque Casus 2^{us} Lem. XVI. Tandem si dentur tria perimetri puncta ut P , locum habet Casus 1^{us} ejusdem Lemmatis.



* 14 *

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta B, C, D . Junctas BC, CD produc ad E, F , ut sit EB ad EC ut SB ad SC , & FC ad FD ut SC ad SD . Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH , inque GS infinite productâ cape GA ad AS & $G a$ ad $a S$ ut est HB ad BS ; & erit A vertex, & $A a$ axis principalis trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis, vel minor fuerit quam AS ,

erit ellipsis, parabola vel hyperbola; puncto a in primo casu cadente ad eandem partem lineæ GF cum puncto A ; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GF .



Nam si demittantur ad GF perpendiculara CI, DK ; erit IC ad HB ut EC ad EB , hoc est, ut SC ad SB ; & vicissim IC ad SC ut HB ad SB five ut GA ad SA . Et simili argumento probabitur esse KD ad SD in eadem ratione. (*) Jacent ergo puncta B, C, D in conic sectione circa umbilicum S ita descripta, ut rectæ omnes, ab umbilico S ad singula sectionis puncta ductæ, sint ad perpendiculara à punctis iisdem ad rectam GF demissa in datâ illâ ratione.

Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit clarissimus Geometra de la Hire, conicorum suorum lib. VII. prop. xxv.

S E C.

(*) * Jacent ergo puncta B, C, D , in Coni Sectione (vide n. 298.)

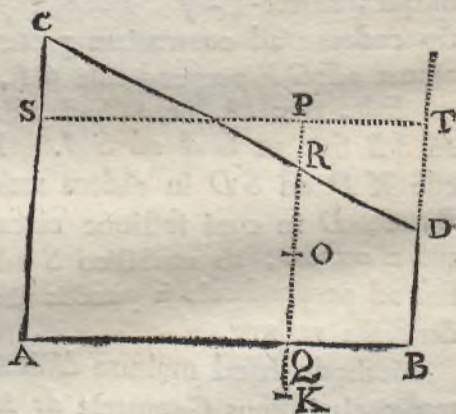
SECTIO V.

Inventio orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

Si à datæ conicæ sectionis puncto quovis P ad trapezii alicujus $ABDC$, in conicâ illâ sectione inscripti, latera quatuor infinite producta AB , CD , AC , DB totidem rectæ PQ , PR , PS , PT in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera $PQ \times PR$, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita $PS \times PT$ in datâ ratione.

Cas. 1. Ponamus primò lines ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, putà PQ & PR lateri AC , & PS ac PT lateri AB . Sintque insuper latera duo ex oppositis, putà AC & BD , sibi invicem parallela. Et recta, quæ bifecat parallela illa latera, erit una ex diametris conicæ sectionis, & bifecabit etiam RQ . Sit O punctum in quo RQ bifecatur, & erit PO ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc PO ad K , ut sit OK æqualis PO , & erit OK ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta A , B , P & K sint ad conicam sectionem, & PK fecet AB in dato angulo, erit (per prop.



17, 19, 21 & 23. lib. III. conicorum Apollonii) rectangulum PQK ad rectangulum AQB in datâ ratione. (y) Sed QK & PR æqua-

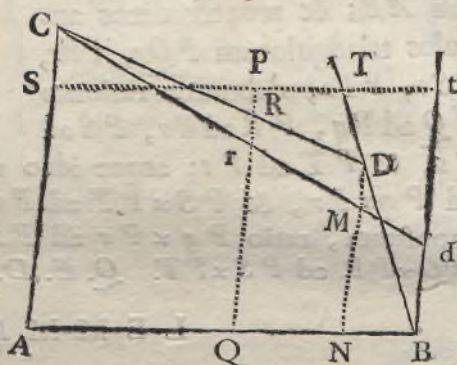
(y) Erit Rectangulum PQK ad Rectangulum AQB in datâ ratione. Liquet (per

Lem. III. de Conic.) quod si linea quævis in Sectione Conicâ terminata ut PK fecet aliam

æquales sunt, utpote æqualium $OK, OP, \& OQ, OR$ differentiæ, & inde etiam rectangula $PQK \& PQ \times PR$ æqualia sunt; atque ideo rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum AQB , hoc est ad rectangulum $PS \times PT$ in datâ ratione. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam trapezii latera opposita $AC \& BD$ non esse parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in t , tum conicæ sectioni in d . Junge Cd secantem

PQ in r , & ipsi PQ parallelam age DM secantem Cd in M & AB in N . Jam ob similia triangula BTt, DBN ; est Bt seu PQ ad Tt ut DN ad NB . Sic & (2) Rr est ad AQ seu PS ut DM ad AN . Ergo ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum PQ in Rr est ad rectangulum PS in Tt , ita rectangulum NDM est ad rectangulum ANB , & (per *cas. 1.*) ita rectangulum PQ in Pr est ad rectangulum PS in Pt , (\dagger) ac



divisim ita rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum $PS \times PT$. *Q. E. D.*

Cas.

aliam lineam etiam in Sectione Conicâ terminatam ut AB , Rectangulum partium lineæ PK erit ad Rectangulum partium lineæ AB ut Rectangulum partium lineæ cuiusvis alius Parallelæ lineæ PK & ad Sectionem terminatæ, ad Rectangulum partium quas hæc nova linea secat in lineâ AB : ideo ubicumque sit punctum P Rectangula $PQK \& AQB$ erunt in eadem datâ ratione.

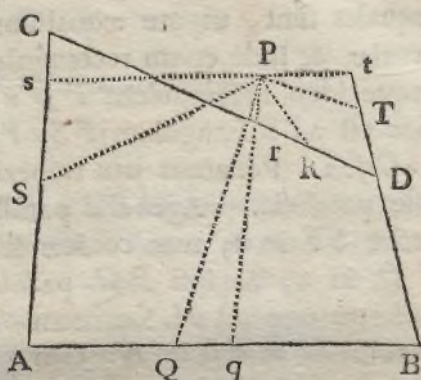
(2) * $Rr : AQ$ seu $PS = DM : AN$. Sunt enim propter parallelas Rr, DM

triangula rCR MCD similia, ideoque $Rr : DM = Cr : CM$; sed est $Cr : CM = AQ$ vel $PS : AN$; ergo $Rr : DM = AQ$, vel $PS : AN$ & $Rr : PS = DM : AN$.

(\dagger) * *Ac divisim.* Ex Demonstratis $NDM : ANB = PQ \times Rr : PS \times Tt = PQ \times Pr : PS \times Pt$, & divisim $NDM : ANB = PQ \times Pr - PQ \times Rr : PS \times Pt - PS \times Tt = PQ \times PR : PS \times PT$, sed ratio NDM ad ANB data est, ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Caf. 3. Ponamus denique lineas quatuor PQ , PR , PS , PT non esse parallelas lateribus AC , AB , sed ad ea utcumque inclinatas. Earum vice age Pq , Pr parallelas ipsi AC ; & Ps , Pt parallelas ipsi AB ; & propter datos angulos triangulorum PQq , PRr , PSs , PTt , dabuntur rationes PQ ad Pq , PR ad Pr , PS ad Ps , & PT ad Pt ; atque ideo rationes compositæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per superius demonstrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data est: ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Q. E. D.



LEMMA XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii $PQ \times PR$ sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera $PS \times PT$ in datâ ratione; punctum P , à quo lineæ ducuntur, tanget conicam sectionem circa trapezium descriptam.

Per puncta A , B , C , D & aliquod infinitorum punctorum P , putà p , concipe conicam sectionem describi: dico punctum P hanc semper tangere. Si negas, junge AP secantem hanc conicam sectionem alibi quam in P , si fieri potest, putà in b . Ergo si ab his punctis p & b ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ pq , pr , ps , pt & bk , bn , bf , bd ; erit ut $bk \times bn$ ad $bf \times bd$ ita (per lem. XVII.) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem trapeziorum bka , $PQAS$, ut bk ad bf ita PQ ad PS . Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit bn ad bd ut PR ad PT . (‡) Ergo trapezia æquiangula $Dnbd$, $DRPT$.

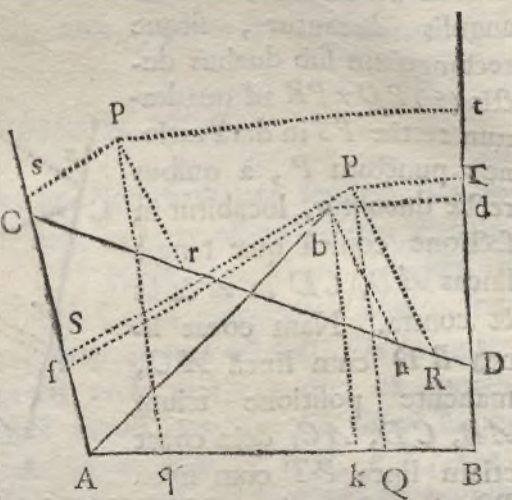
(‡) * Cum sit $bk \times bn = bf \times db =$

item $bf : bk = ps : PQ$
erit $bn : bd = PR : PT$.

Ergo

similia sunt, & ^(a) eorum diagonales Db , DP propterea coincidunt. Incidit itaque b in intersectionem rectarum AP , DP ideoque coincidit cum puncto P . Quare punctum P , ubicunque sumatur, incidit in assignatam conicam sectionem. *Q. E. D.* ^(b)

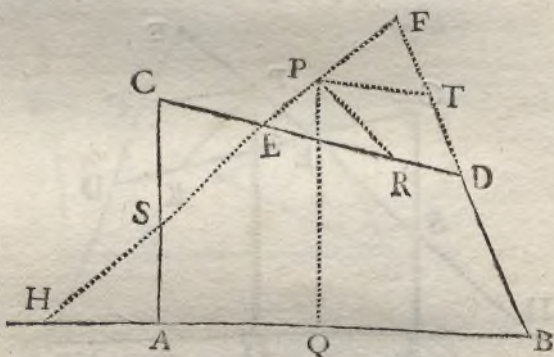
Corol. Hinc si rectæ tres PQ , PR , PS à puncto communi P ad alias totidem positione datas rectas AB , CD ,



fin.

^(a) Ergò trapezia æquiangula $Dnbd$, $DRPT$, similia sunt, & eorum diagonales Dd , DP , propterea coincidunt; nam jungantur nd , RT , & duo triangula ndb , RTP , æquiangula erunt ob latera bn , bd , & PR , PT ; proportionalia, & angulos nbd , RPT , æquales; quare & duo triangula ndD , RTD , æquiangula erunt ob angulum D , communem, & angulos ad T & t , R & n , æquales, erit igitur $bn : nD = PR : RD$, adeoque ductis diagonalibus Db , DP , duo triangula bDn , PDR , erunt similia, ac proinde angulus PDR , æqualis angulo bDn , quod esse non potest, nisi diagonales Db , DP , coincidunt.

^(b) 302. Lemma XVIII per analysim facile demonstrari potest. Producta enim PS , donec singulis trapezii lateribus occurrat in F , E , S , H , ob datos omnes angulos figuræ, data erit ratio laterum quibus singula triangula FPT , FED , PER , ECS , SHA , PHQ , clauduntur. Assumptis igitur CE , tanquam abscissâ & PE tanquam ordinatâ loci punctorum P , data erit ratio PE , ad PR , adeoque PE , in datam quantitatem ducta æquabitur ipsi PR ; ob datam CD , invenietur ED , ut potè æqualis $CD - CE$, & per triangulum FED specie datum



invenietur EF , ac proinde $PF = EF - EP$, & inde per triangulum FPT , invenietur PT , omnesque illæ lineæ exprimentur per lineas CE , PE , unius dimensionis, & alias datas quantitates. Similiter ES & CS & $SA = CA - CS$, atque HS , per triangulum SAH , specie datum, & hinc $PH = HS + SE + EP$, adeoque PQ , per triangulum PHQ , invenientur in lineis CE & PE , unius dimensionis & aliis datis quantitatibus. Quare in rectangulis $PQ \times PR$, $PS \times PT$, rectæ variabiles CE , PE , non plures quam duas dimensiones obtinebunt, unde æquatio quæ ex rectangulo-

quæ curvam in punctis *A* & *B*, *C* & *D* secabant, jam (†) curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangent.

Scholium.

Nomen conicæ sectionis in hoc lemmate latè sumitur, ita ut sectio tam rectilinea per verticem conici transiens, quam circularis basi parallela includatur. (d) Nam si punctum *p* incidit in rectam, quâ puncta *A* & *D* vel *C* & *B* junguntur, conica sectio vertetur in geminas rectas, quarum una est recta illa in quam punctum *p* incidit, & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, sectio conica

eva-

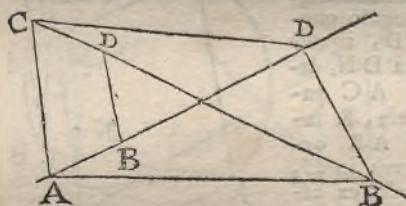
dium *O* chordæ *AC* ducaturque per punctum *D* *DO*, quæ secabit tam chordam *PK* quam totam *RQ* in medio (vide Lem. IV. de Conic. n. 224.) hinc erit $RK = PQ$, sed est (per Cor. 2. Lem. III. de Conic. n. 224.) CR^2 ad $RP \times RK$ in datâ ratione, ideoque est CR^2 ad $RP \times PQ$ in datâ ratione, sed ob parallelas *CR* *SP* & *CS* *RP* est $PS = CR$, ergo PS^2 est ad $RP \times PQ$ in datâ ratione.

Si lineæ *PS*, *RP*, *PQ* in aliis sed datis angulis ad lineas *AC* *CD* *AD* inclinentur, dabuntur earum rationes ad has priores, unde deducetur eodem modo ac in Lemmate XVII. in isto etiam casu fore SP^2 ad $RP \times PQ$ in datâ ratione.

Pariter & conversâ demonstrabitur ut Lemma XVIII.

(†) * Jam curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt, sed tantum tangent; puncta enim *A* & *B*, *C* & *D*, semper supponuntur in conicæ sectionis perimetro posita; quare evanescentibus distantibus *AB* & *CD*, lineæ *AB* & *CD*, ultimò coincidunt cum tangentibus sectionem in punctis *A* & *C*. Vid. Lem. VI. Newt.

Tom. I.



(d) 303. Puncta quatuor *A*, *B*, *D*, *C*, sint in perimetro hyperbolæ vel in perimetris duarum hyperbolarum oppositarum, planum sectionis quo hyperbola in cono generatur accedat ad conici verticem; hyperbolæ in triangula rectilinea mutantur quæ erunt loca punctorum *P*, & quorum latera vel coincidunt cum duobus trapezii lateribus vel sunt ipsius diagonales, ac proinde punctum *P*, incidit in rectam quâ quævis ex punctis quatuor *A*, *B*, *C*, *D*, junguntur & conica sectio vertitur in geminas rectas quarum una est recta illa in quâ punctum *P* incidit & altera est recta quâ alia duo ex punctis quatuor junguntur.

PR, ducuntur. (f) Cæteris in casibus locus puncti *P* erit aliqua trium figurarum, quæ vulgo nominantur sectiones conicæ. (g) Vice autem trapezii *ABCD* substitui potest quadrilaterum, cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & è punctis quatuor *A, B, C, D* possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ, quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu sectio conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

LEM.

signatis erit $S.PqA = S.CAB$, & $S.PrC = S.ACD$, ob parallelas Pq, AC , & $S.PsS = S.PsC = S.CAB$, & $S.PtT = S.ABD$, ob parallelas st, AB , & ob angulum ACD , complementum anguli ABD ad duos rectos, $S.PtT = S.ACD$.

Porro

$PQ:Pq = S.PqA (S.CAB) : S.PQB$
 $Ps:PS = S.PsC : S.PsS (S.CAB)$
 $PR:Pr = S.PrC (S.ACD) : S.PrC$
 $Pt:PT = S.PtT : S.PtT (S.ACD)$.

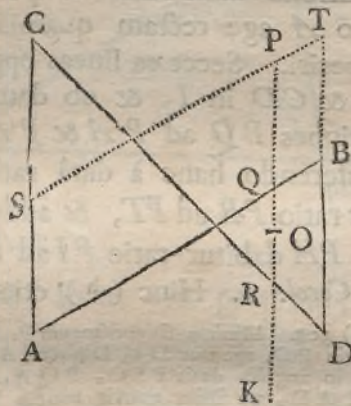
Ergo per compositionem rationum

$PQ \times PR \times Ps \times Pt : PS \times PT \times Pq \times Pr$
 $= PQ \times PR : PS \times PT$
 $= S.PsC \times S.PtT : S.PQB \times S.PrC$
Q. e. D.

306. Coroll... Eadem manente proportionem, si omnes anguli ad *S, T, Q, R*, fuerint æquales, rectangulum $PQ \times PR$, erit quoque æquale rectangulo $PS \times PT$.

(f) * Nam vel punctum *P*, locabitur in sectione rectilineâ per verticem coni transeunte, vel in circulo, vel tandem in aliquâ trium sectionum conicarum, nullæ enim aliæ sunt sectiones conicæ, ut notum est.

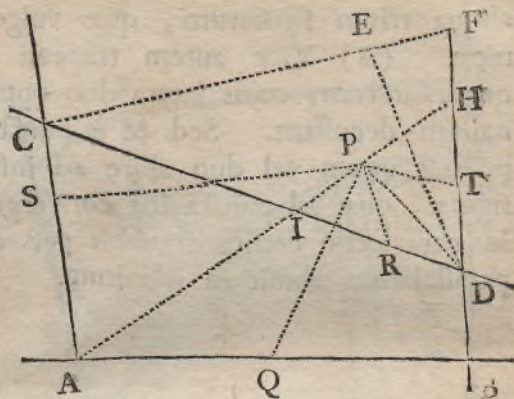
(g) 307. Vice autem trapezii substitui potest quadrilaterum *ABDC*, cujus latera duo *AB, CD*, se mutuo instar diagonalium decussant; huic enim quadrilatero absque mutatione aptari possunt tam constructiones quam demonstrationes Lemmatum XVII. & XVIII. Exemplum sit



Cas. 1. Lem. XVII. ponamus lineas ex puncto *P*, ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta PQ & PR , lateri AC & PS , ac PT , lateri AB ; sintque insuper latera duo ex oppositis puta AC & BD , sibi invicem parallela & recta quæ bifecat &c. cæteræ omnes demonstrationis partes eodem modo transferuntur ad quadrilaterum *CABD*.

DE MOTU
CORPORUM.

Invenire punctum P, à quo si rectæ quatuor PQ, PR, PS, PT ad alias eorundem positione datas rectas AB, CD, AC, BD, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis, PQ × PR, sit ad rectangulum sub aliis duabus, PS × PT, in datâ ratione.

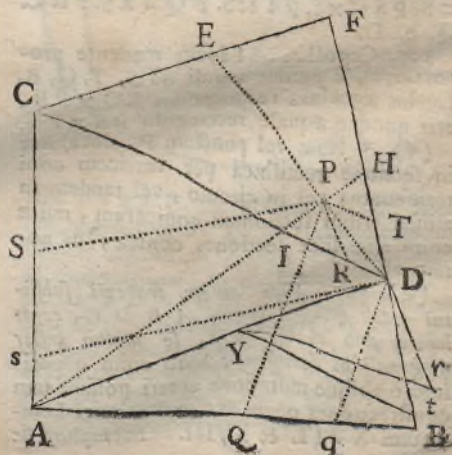


Lineæ AB, CD, ad quas rectæ duæ PQ, PR unum rectangulorum continentes ducuntur, convenient cum aliis duabus positione datis lineis in punctis A, B, C, D. Ab eorum aliquo A age rectam quamlibet AH, in quâ velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppositas BD, CD, nimirum BD in H & CD in I, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes PQ ad PA & PA ad PS, ideoque ratio PQ ad PS. Auferendo hanc à datâ ratione PQ × PR ad PS × PT, dabitur ratio PR ad PT; & addendo datas rationes PI ad PR, & PT ad PH dabitur ratio PI ad PH, atque ideo punctum P. Q.E.I.

Corol. I. Hinc (h) etiam ad loci punctorum infinitorum P

(h) 308. Minima sit punctorum P, D, distantia PD, agantur Ds, Dq, ad AC, AB, in angulis datis PSC, PQA, & junctâ AD, ex illius quovis puncto Y, ducantur Yr, lateri CD, parallela, & Yt, ad DB, in angulo dato PTH; tum ex puncto D, ad Yr, ducatur Dr, in angulo dato PRI; punctis P, D, coeuntibus erit PQ:PA = Dq:DA, & PA:PS = DA:Ds, adeoque PQ:PS = Dq:Ds, & proinde PQ × PR:PS × PT = Dq × PR:Ds × PT. Ratio data rectanguli PQ × PR ad PS × PT sit A ad B, & erit Dq × PR:Ds × PT = A:B, adeoque

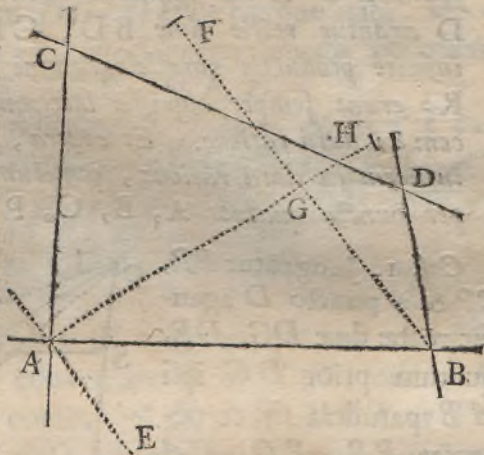
PR:PT = A × Ds : B × Dq
& evanescente PD, ob similia triangula PIR, DYr, erit
PI:PR = DY:DA



punctum quodvis D tangens duci potest. Nam chorda PD , ubi puncta P ac D conveniunt, hoc est, ubi AH ducitur per punctum D , tangens evadit. Quo in casu, ultima ratio evanescentium IP & PH invenietur ut supra. Ipsi igitur AD duc parallelam CF , occurrentem BD in F , & in eâ ultimâ ratione sectam in E , & DE tangens erit, propterea quod CF & evanescentes IH parallelæ sunt, & in E & P similiter sectæ.

LIBER PRIMUS

Corol. 2. Hinc etiam locus punctorum omnium P definiri potest. Per quodvis punctorum A, B, C, D , puta A , duc loci tangentem AE , & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF occur-



rentem loco in F . Invenietur autem punctum F per lem. XIX. Biseca BF in G , & actâ indefinita AG erit positio diametri ad quam BG & FG ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat loco in H , (i) & erit AH diameter sive latus transversum, ad quod latus rectum erit ut BGq ad $AG \times GH$.

Si (k) AG nusquam occurrat loco, lineâ AH existente infinitâ, locus erit parabola, & latus rectum ejus ad diametrum AG pertinens erit $\frac{BGq}{AG}$. Sin

ea alicubi occurrit, locus hyperbola erit, ubi puncta A & H sita sunt ad easdem partes ipsius G : & ellipsis, ubi G intermedium est, nisi forte angulus AGB rectus sit, & insuper BG quad. æquale rectangulo AGH , quo in casu circulus habebitur.

& ob similia triangula PTH, YtD , erit $PT : PH = Yt : DY$ ergo per compositionem rationum $PI : PH = A \times Ds \times Yt : B \times Dq \times Dr = CE : EF$, ob parallelas $IH : CF$, ducta DE , erit tangens in D .

(i) * Et erit AH , diameter (per prop. 7^{am} lib. 2. conic. Apoll. Lemma IV. de

Conic. 224.) sive latus transversum ad quod latus rectum erit ut BG^2 ad $AG \times GH$ (per prop. 21. lib. 1. conic. Apoll. Theor. II. de Hyp. & de Ellip. & Theor. I. de Parab. n. 224.)

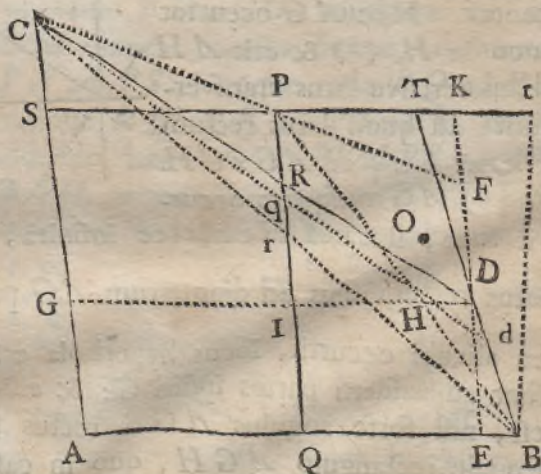
(k) 309. Locus omnium punctorum P est aliqua ex quinque conic sectionibus, per Lem. XVIII. & ipsius scholium. Si locus fuerit

Atque ita problematis veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incepti & ab *Appollonio* continuati non calculus, sed compositio geometrica, qualem veteres quærebant in hoc corollario exhibetur. ⁽¹⁾

L E M M A XX.

Si parallelogrammum quodvis ASPQ angulis duobus oppositis A & P tangit sectionem quamvis conicam in punctis A & P; & lateribus unius angulorum illorum infinite productis AQ, AS occurrit eidem sectioni conicæ in B & C; à punctis autem occursum B & C ad quicumque sectionis conicæ punctum D agantur rectæ duæ BD, CD occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus PS, PQ in T & R: erunt semper abscissæ laterum partem PR & PT ad invicem in datâ ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in datâ ratione, punctum D tanget sectionem conicam per puncta quatuor A, B, C, P transeuntem.

Cas. I. Jungantur BP, CP & à puncto D agantur rectæ duæ DG, DE, quarum prior DG ipsi AB parallela sit & occurrat PB, PQ, CA in H, I, G; altera DE parallela sit ipsi AC & occurrat PC, PS, AB in F, K, E: & erit (per lem. XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$



fuert linea recta ac proinde tangens ipsa AE, (303) recta BF, tangenti parallela nullibi occurreret loco; si vero locus fuerit alia conicæ sectio, recta BF, huic sectioni occurreret in puncto aliquo F, tumque diameter AG, vel utrinque terminabitur ad hyperbolas oppositas, quo casu, puncta A & H, sita erunt ad easdem partes ipsius G, vel claudetur Ellipsi aut circulo, & punctum G, inter A & H positum erit,

vel tandem nullibi occurreret loco qui proinde erit parabola. Porro datis sectionis conicæ vertice, diametro, hujus lateris recto ac ordinatarum angulo sectio describi potest (per prop. 52. 53. 54. 55. lib. I. conic. Apoll. sive ex iis quæ in notâ 224. de Conicis tradita fuere).

(1) * Hoc veterum problema primus in sua Geometriâ Cartesius per calculum analyticum generaliter resolvit.

in ratione datâ. Sed est PQ ad DE (feu IQ) ut PB ad HB , ideoque ut PT ad DH ; & vicissim PQ ad PT ut DE ad DH . Est & PR ad DF ut RC ad DC , ideoque ut (IG vel) PS ad DG , & vicissim PR ad PS ut DF ad DG ; & conjunctis rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque ideo in datâ ratione. Sed dantur PQ & PS , & propterea ratio PR ad PT datur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Quod si PR & PT ponantur in datâ ratione ad invicem, ^(m) tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione datâ, ideoque punctum D (per lem. XVII.) contingere conicam sectionem transeuntem per puncta A, B, C, P . *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si agatur BC secans PQ in r , & in PT capiatur Pt in ratione ad Pr quam habet PT ad PR : erit Bt tangens conicæ sectionis ad punctum B . Nam concipe punctum D coire cum puncto B , ita ut chorda BD evanescente, BT tangens evadat; & CD ac BT coincident cum CB & Bt .

Corol. 2. Et vice versâ si Bt fit tangens, & ad quodvis conicæ sectionis punctum D convenient BD, CD ; erit PR ad PT ut Pr ad Pt . Et contra, si fit PR ad PT ut Pr ad Pt : convenient, BD, CD ad conicæ sectionis punctum aliquod D .

Corol. 3. Conica sectio non fecat conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ conicæ sectiones per quinque puncta A, B, C, P, O ; easque fecet recta BD in punctis D, d , & ipsam PQ fecet recta Cd in q . Ergo PR est ad PT ut Pq ad PT ; ⁽ⁿ⁾ unde PR & Pq sibi invicem æquantur, contra hypothesin. **LEM-**

^(m) * Nam si PR & PT ponantur in ratione datâ, erit quoque ob datas PQ, PS , rectangulum $PQ \times PR$, ad rectangulum $PS \times PT$, in ratione datâ; sed per demonstrata in 1^o casu $PQ \times PR : PS \times PT = DE \times DF : DH \times DG$; ergo $DE \times DF$ ad $DH \times DG$ in ratione datâ.

⁽ⁿ⁾ * Cum enim duæ sectiones conicæ se mutuo interfecerint in punctis O & B ,

(per hyp.) duci poterit recta BD , quæ duos sectionum arcus in B & O convenientes fecet in punctis duobus, eritque per coroll. 1. Lem. XX. $PR : PT = Pr : Pt = Pq : PT$, adeoque $PR : PT = Pq : PT$, unde PR & Pq sibi invicem æquantur, ac proinde Cd coincidit cum CD , & punctum d , cum puncto D , (contra hyp.).

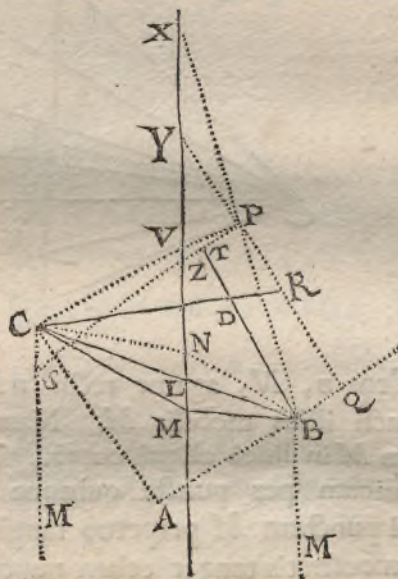
angulum BPT æqualem angulo dato BNM , & angulum CPR æqualem angulo dato CNM . Cum ergo (ex hypothesi) æquales sint anguli MBD , NBP , ut & anguli MCD , NCP ; aufer communes NBD & NCD , & restabunt æquales NBM & PBT , NCN & PCR : ideoque triangula NBM , PBT similia sunt, ut & triangula NCM , PCR . Quare PT est ad NM ut PB ad NB , & PR ad NM ut PC ad NC . Sunt autem puncta B , C , N , P immobilia. Ergo PT & PR datam habent rationem ad NM , proindeque datam rationem inter se; atque ideo (per lem. xx. (o)) punctum D , perpetuus rectarum mobilium BT & CR concursus, contingit sectionem conicam, per puncta B , C , P transeuntem. $Q. E. D.$ Et

(o) Atque ideo per Lemma XX. &c. ut pateat Lemma XX. ad hanc demonstrationem applicari, hæc sunt supplenda constructioni Newtonianæ.

Concurrant lineæ BM , CM in puncto lineæ NM infinite distanti, hoc est, sint illi lineæ NM parallelæ, & ducantur lineæ BA , CA facientes cum illis lineis BM , CM angulos MBA , MCA datis MBD , MCD æquales. Dico lineas BA , CA fore parallelas lineis PT , PR secundum constructionem Newtonianam descriptis: Productis enim BP & PT (si necesse sit) donec secent rectam datam MN in X & Z , erit angulus BPZ exterior respectu Trianguli PZX , ideoque æqualis angulis X & PZX , & angulus BNM erit exterior respectu Trianguli BNX ideoque æqualis angulis X & XBN , anguli vero BPZ & BNM æquales sunt per constructionem Newton. ergo anguli X & PZX æquales sunt angulis X & XBN , unde angulus PZX , quem facit linea PT cum recta NM est æqualis angulo XBN sive angulo dato MBD quem facit linea BA cum linea BM ipsi NM parallelæ, ergo per naturam Parallelarum, est linea PT parallelæ lineæ BA .

Eodem planè modo demonstrabitur lineam CA esse Parallelam lineæ PR . Quibus positis, sit sectio Conica per puncta B , C , P & A transiens, lineæ BD , CD juxta conditiones in Lemmate præscriptas ductæ, concursu suo D percurrent eam sectionem Conicam: Productis enim lineis PT , PR , donec secent lineas CA , BA , in S & Q fiet Parallelogrammum $AS PQ$.

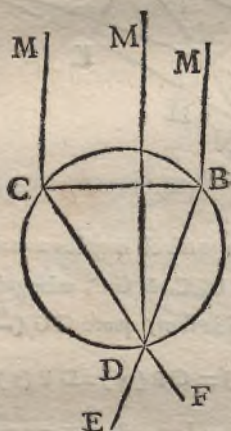
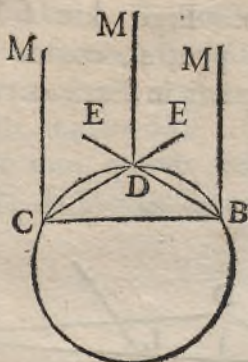
Tom. I.



quod in Angulis suis oppositis A & P tangit sectionem conicam & lateribus anguli A productis occurrit eidem sectioni in B & C , & lineæ BD , CD à punctis occursum B & C ductæ (secundum conditiones Lemmatis hujusce XXI.) abscondunt à Parallelogrammi lateribus PS , PQ partes PT , PR quæ sunt ad invicem in datâ ratione (per demonstrationem Newtonianam hujusce) ergo (per 2. casum Lem. XX.) punctum D tangit sectionem Conicam per puncta quatuor A , B , C , P transeuntem.

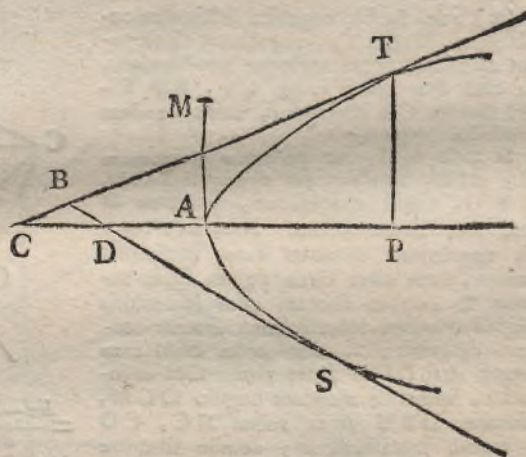
C c

* Ubi

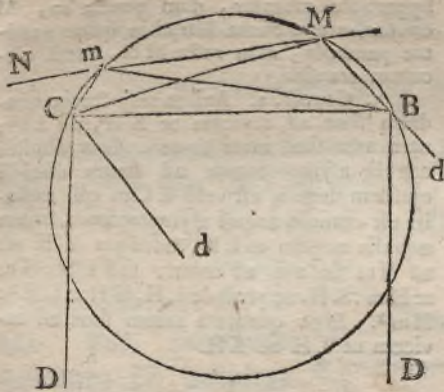
DE MOTU
CORPO-
RUM.

311. Si angulorum mobilium MCD, MBD crura CM, BM sibi invicem parallela maneant, seu, si recta NM ad distantiam infinitam abeat, crura alia CD, BD concursu suo D circulum describent, & contrà. Concurrant enim CM, DM, BM ad distantiam infinitam, & angulus MCD æqualis erit angulo MDF, ac MBD æqualis MDE, quoniam igitur dati sunt anguli MCD, MBD dabantur quoque anguli MDF, MDE ac etiam angulus EDF & ei æqualis CDB. quare cum curva concursu D descripta, necessario transeat per puncta data C, & B, patet punctum D seu verticem anguli dati CDB chordæ CB insistens esse in circuli peripheriâ. Et contrà, si concursus D, tangat circulum per puncta C,

& B transeuntem, dabuntur tres anguli CDB, MCD, MBD atque adeo in quadrilatero MCDBM, cujus duo latera CM, BM concurrunt in M, dabitur angulus CMB, quod fieri nequit, nisi recta NM ad distantiam infinitam abeat, hoc est, nisi parallela fiant crura CM, BM.



312. Lemma.:: Si duæ rectæ parabolam tangant, & puncta contactuum in infinitum abeant, binæ tangentés se mutuò interfecant ad angulum infinitesimum & evadunt parallelæ axi parabolæ. Sit enim parabolæ axis CP, vertex A, CT tangens in T & axem secans in C, TP ad axem ordinata, AM latus rectum axis, erit $CP = 2AP$, & $AP:PT = PT:AM$, adeoque $2AP(CP):PT = 2PT:AM$. Si punctum contactus T, in infinitum abeat, erit $2PT$, infinita respectu AM, & proinde CP, infinita respectu PT, hoc est, sinus totus CP infinitus evadit respectu tangentis PT anguli TCP, quare angulus ille infinitesimus est, & tangens axi CP parallela, altera tangens BS, axem secet in D, & tangentem CT in B, & punctum contactus S in infinitum abeat; erit angulus SDP infinitesimus & angulus TBD duobus internis atque infinitesimis BCD, BDC æqualis, erit quoque infinitesimus.



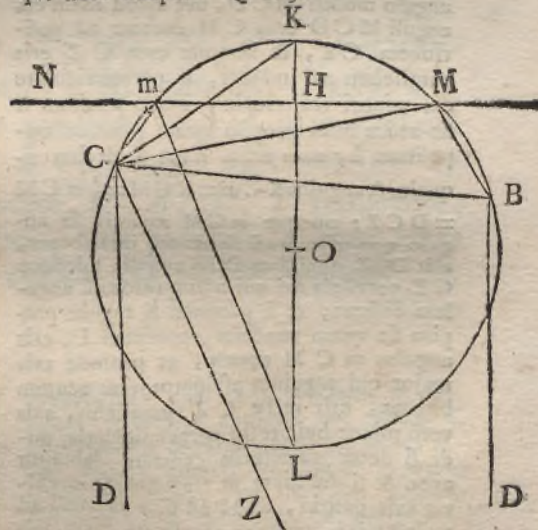
313. Super datâ rectâ CB, describatur segmentum circuli BMmC, quod capiat angulum BMC, datorum MCD, MBD supplementum ad quatuor rectos & compleatur circulus. Si recta data NM, quam in descriptione sectionis conicæ percurrit cruram BMCM concursus M hunc circulum secet, describetur hyperbola; si recta NM circulum contingat, describetur parabola; si recta NM circulo nullibi occurrat, describetur ellipsis.

Cas. 1. Recta NM circulum secet in punctis m, M, & crura Cd, Bd, & CD, BD, sibi invicem parallela erunt sive concurrent ad distantiam infinitam; nam cum in quadrilatero DCMBD dCmBd angulus M vel m sit complementum angulorum C & B ad quatuor Rectos, angulus ad D vel d, evanescit, ideoque lineæ CD, BD erunt parallelae. Cum verò in omni Sectione Conicâ inveniri possit Tangens parallela chordæ cuius datæ (per Lemma IV. de Conicis pag. 129.) ductæ intelligantur Tangentes Sectionis chordis CD Cd Parallelae, illæ Tangentes facient inter se angulum æqualem angulo Dcd quem faciunt inter se illæ chordæ, & puncta contactuum erunt ad distantiam infinitam, nulla verò est sectio conica præter hyperbolam cujus ad infinitam distantiam tangentes angulum finitum communi intersectione faciant; in Ellipsi enim nulla est tangens ad distantiam infinitam, & in parabola hujusmodi tangentes angulum infinitesimum duntaxat, facerent (per Lemma superius 313). Si igitur recta MN circulum secet, describetur hyperbola cujus

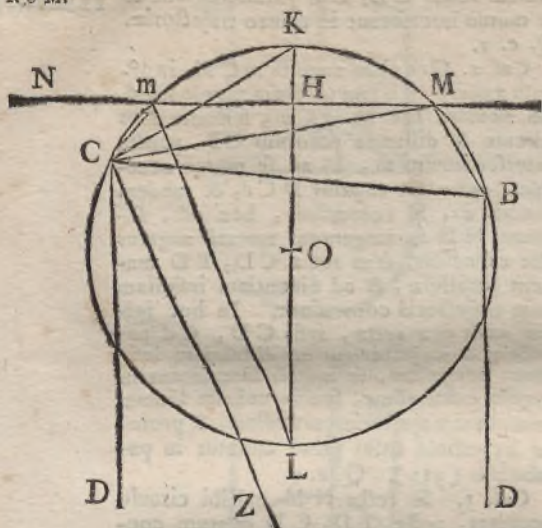
asymptoti seu tangentes ad distantiam infinitam rectis CD, Cd parallelæ sunt & se mutuo interfecant in centro trajectoriæ. Q. e. 1.

Cas. 2. Quoniam angulus mCM, in 1^o casu æqualis est asymptotorum angulo DCd, ob æquales DCM, dCm; si manentibus circulo & distantia polorum CB, puncta intersectionum m, M ad se mutuo accedant, decrescet angulus DCd, & tandem punctis m, M coeuntibus, hoc est, secante MN in tangentem mutatâ angulus ille evanescet, dum rectæ CD, BD manent parallelae, & ad distantiam infinitam cum trajectoriâ conveniunt. In hoc igitur casu duæ rectæ, ipsis CD, Cd parallelæ & trajectoriâ ad distantiam infinitam tangentes, se mutuo interfecant in angulo infinitesimo, seu in unicam lineam coeunt axi trajectoriæ parallelam, & proinde hyperbola casus primî mutatur in parabolam (312). Q. e. 2.

Cas. 3. Si recta NM nullibi circulo occurrat, rectæ BD, CD quarum concursu D sectio conica describitur nunquam possunt fieri parallelae, & proinde curva non abit in infinitum, sed in se redit, estque aded Ellipsis. Q. e. 3.



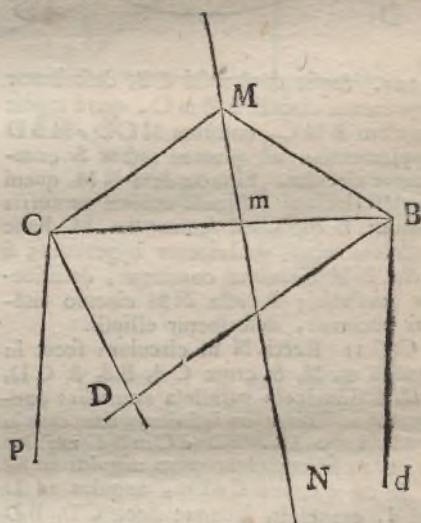
314. Coroll. 1. Ex his axes trajectoriæ facile determinantur. Sit O centrum circuli CmMB ut supra (313) descripti, ab hoc centro in rectam NM cadat perpendicularis OH circulo occurrens in puncto Cc 3



punctis K & L, & rectæ NM in H, jungatur CK, & fiat angulus KCZ æqualis angulo mobili MCD, aut quod idem est, anguli MCD crus CM ducatur ad positionem CK, & alterum crus CZ erit parallelum axi majori, & perpendiculare axi minori trajectorye, modo punctum K sit rectæ MN propius quam punctum oppositum L; nam arcus Km, KM sunt æquales & angulus KCM = $\frac{1}{2}$ m CM = DCZ; cumque mCM æqualis sit angulo quo asymptoti se mutuo intersecant, erit DCZ dimidium illius anguli, adeoque CZ parallela axi qui asymptotorum angulum bisecat; & si punctum K regulæ propius sit quam punctum oppositum L, erit angulus mCM acutus, ac proinde axis major qui angulum asymptotorum acutum bisecat, erit rectæ CZ parallelus, axis verò minor huic rectæ perpendicularis; unde si detur trajectorye centrum dabuntur axes, & si descripta sit trajectory, invenitur axis positio, ductâ ad CZ normali ad trajectoryam utrinque terminatâ quam axis perpendiculariter & bifariam dividit; inventâ autem axium positione, habetur centrum in eorum intersectione communi. Superior autem constructio non solum hyperbolæ convenit, sed & parabolæ in quam

hyperbola mutatur, dum puncta m, M coeunt, atque etiam Ellipsi in quam vertitur parabola, dum recta MN, extrâ circumulum transit.

315. Coroll. 2. Axiom trajectorye quadrata sunt ad invicem ut KH, ad LH; nam axes sunt inter se ut cosinus dimidii anguli asymptotorum ad sinum dimidii ejusdem anguli; est verò KCM qui æqualis est dimidio anguli asymptotorum, etiam æqualis angulo mLK, adeoque LH est ad Hm ut axis ad axem; sed LH : Hm = Hm : KH, ac proinde LH : KH = LH² : Hm². Ergò quadrata axium sunt ad invicem ut LH ad KH.



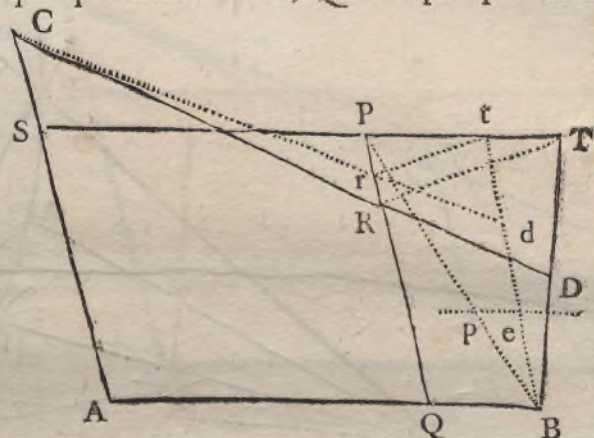
316. Coroll. 3. Si angulorum mobilium summa duobus rectis æqualis fuerit, rectæ BD, CD sunt parallelæ, quando punctum M pervenit ad m, ubi recta NM occurrit rectæ CB productæ, si opus est, & quando M abit in infinitum, cum in utroque casu evanescat angulus BMC. Si itaque linea MN, in hac hypothesi alicubi occurrat rectæ BC productæ, duæ rectæ trajectoryam in distantia infinitâ contingunt, & se mutuo ad angulum datum intersecabunt, adeoque describetur hyperbola; at si MN rectæ CB non occurrat, sed ipsi parallela sit, rectæ CD, BD non evadent parallelæ, nisi quando punctum M abit in infinitum, ac proinde trajectorya erit parabola. Quoniam igitur recta MN rectæ CB productæ occurrit,

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque A, B, C, P, D . Ab eorum aliquo A ad alia duo quævis B, C , quæ poli nominentur, age rectas AB, AC , hisque parallelas TPS, QRP per punctum quartum P . Deinde

à polis duobus B, C age per punctum quintum D , infinitas duas BDT, CRD , novissimè ductis TPS, PRQ (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in $T \& R$. Denique de rectis PT, PR , actâ rectâ tr ipsi TR



parallelâ, abscinde quasvis Pt, Pr ipsis PT, PR proportionales; & si per earum terminos t, r & polos B, C actæ Bt, Cr concurrant in d , locabitur punctum illud d in trajectoriâ quæsità. Nam punctum illud d (per lem. xx.) versatur in conicâ sectione per puncta quatuor A, B, C, P transeunte; & lineis Rr, Tt evanescentibus, coit punctum d cum puncto D . Tranfinit ergo sectio conica per puncta quinque A, B, C, P, D . *Q. E. D.* *Idem*

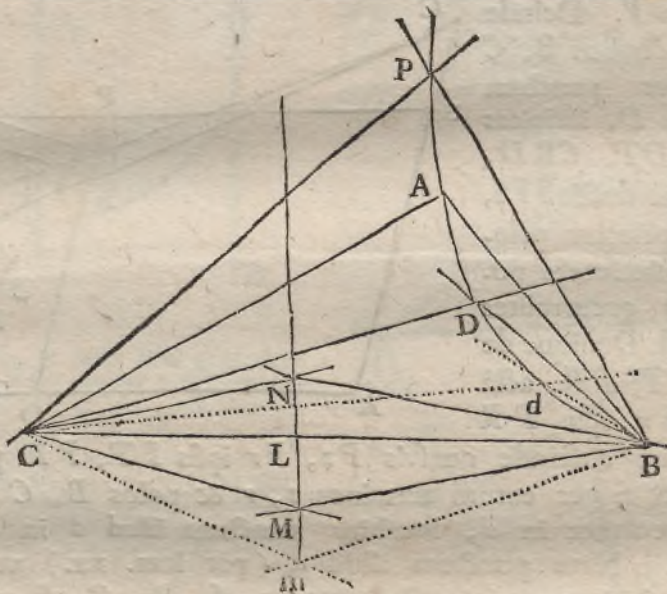
occurrit, vel ipsi parallela est, patet nunquam posse Ellipsim describi, si angulorum mobilium summa, duobus rectis æqualis fuerit.

Scholium. Si crura CM, BM concursu suo M percurrant sectionem conicam per polum alterum C transeuntem, crura duo reliqua CD, BD concursu suo D describunt curvam secundi generis per polum alterum B transeuntem, præterquam ubi anguli BCD, CBD simul

evanescent, quo casu punctum D describet sectionem conicam per polum C transeuntem, & eadem methodo curvas varias tertii, quarti, superiorum generum describere licet. Sed hæc ad præsens institutum non pertinent, qui plura desideraverit legat Geometriam Organicam Celeberrimi Matheseos Professoris Colini Mac-Laurin, ex quo eximio opere non pauca excerptimus.

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis A, B, C ; & circum duorum B, C , ceu polos, rotando angulos magnitudine datos ABC, ACB , applicentur crura BA, CA primò ad punctum D , deinde ad punctum P , & notentur puncta M, N in qui-



bus altera crura BL, CL casu utroque se decussant. Agatur recta infinita MN , & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos B, C , cã lege ut crurum BL, CL vel BM, CM intersectio, quæ jam sit m , incidat semper in rectam illam infinitam MN ; & crurum BA, CA , vel BD, CD , intersectio, quæ jam sit d , trajectoriam quasitam $PADdB$ delineabit. Nam punctum d (per lem. *xxi.*) continget sectionem conicam per puncta B, C transeuntem; & ubi punctum m accedit ad puncta L, M, N , punctum d (per constructionem) accedit ad puncta ADP . Describetur itaque sectio conica transiens per puncta quinque A, B, C, P, D . *Q. E. F.*

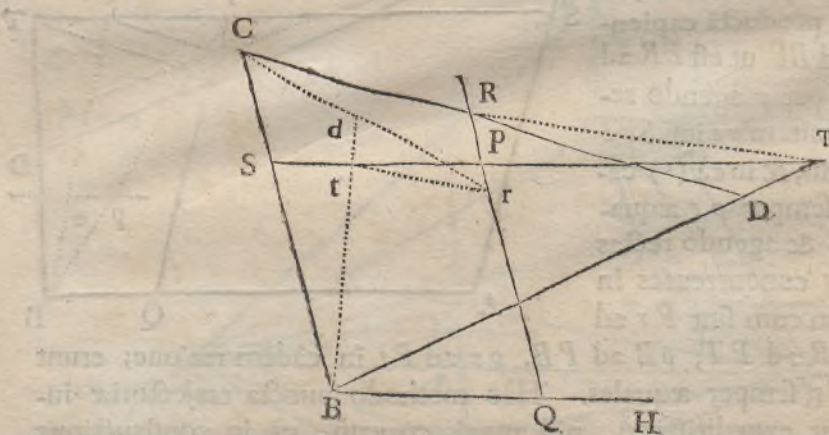
Corol.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere, quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

Cas. 1. Dentur tangens HB , punctum contactus B , & alia tria puncta C, D, P . Junge BC , & agendo PS parallelam rectæ BH , & PQ parallelam rectæ BC , comple parallelogrammum $BSPQ$. Age BD secantem SP in T , & CD secantem



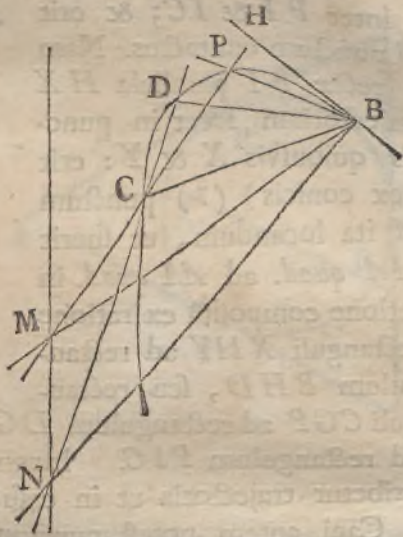
PQ in R . Denique, agendo quamvis tr ipsi TR parallelam, de PQ, PS abscinde Pr, Pt ipsi PR, PT proportionales respectivè; & actarum Cr, Bt concursus d (per lem. xx.) (u) incidet semper in trajectoriam describendam.

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus CBH circa polum B , tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus DC circa polum C . Notentur puncta M, N , in quibus anguli crura BC

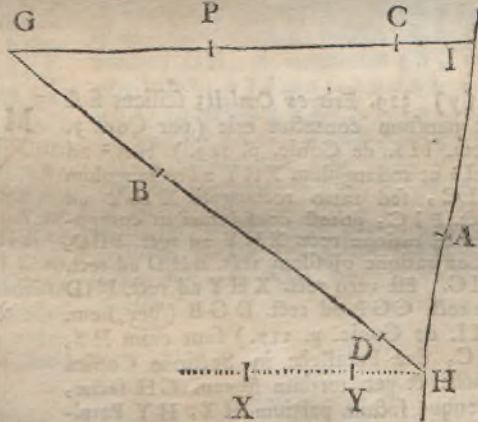
(u) * Demonstratio clara fit, si in punctum A , & recta ABQ sectionis conicæ tangens evadat.

BC secat radium illum, ubi crus alterum BH concurret cum eodem radio in punctis P & D . Deinde ad actam infinitam MN concurrant perpetuo radius ille CP vel CD & anguli crus BC , & cruris alterius BH concursus cum radio delineabit trajectoriam quaesitam.



Nam si in (*) constructionibus problematis superioris accedat punctum A ad punctum B , lineae CA & CB coincident, & linea AB in ultimo suo situ fiet tangens BH ; atque ideo constructiones ibi positae evadent eadem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris BH concursus cum radio sectionem conicam per puncta C, D, P transeuntem, & rectam BH tangentem in puncto B . *Q. E. F.*

Cas. 2. Dentur puncta G, P, C quatuor B, C, D, P extra tangentem HI sita. Junge bina lineis BD, CP concurrentibus in G , tangenti-que occurrentibus in H & I . Secetur tangens in A , ita ut sit HA ad IA , ut est rectangulum sub mediâ proportionali inter CG & GP & mediâ proportionali inter BH & HD ,

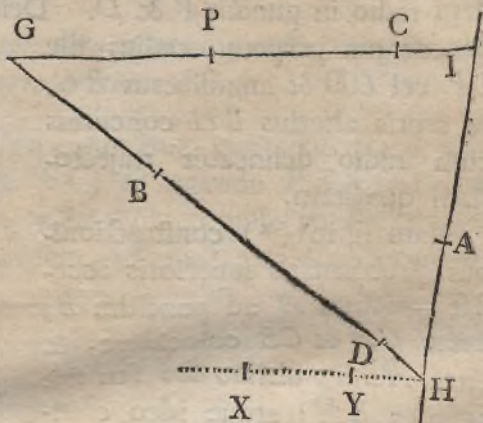


(*) * Nam in alterâ problematis XXI. solutione ABC, ACB , sunt anguli circa polos C & B mobiles; unde si punctum A accedat ad punctum B , coincidunt crura CA, CB , & unicam rectam constituunt, evanescente angulo ACB ; remanet verò angulus ABC quem tan-

gens AB cum BC continet; quare dum anguli ABC, ACB , crus BC cum radio AC , si necessum sit, producto, perpetuo concurret in rectâ aliquâ positione datâ ut NM , cruris AB & radii CA concursus trajectoriam describit.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

ad rectangulum sub mediâ proportionali inter DG & GB & mediâ proportionali inter PI & IC ; & erit A punctum contactus. Nam si rectæ PI parallela HX trajectoriam fecet in punctis quibusvis X & Y : erit (ex conicis) (y) punctum A ita locandum, ut fuerit HA quad. ad AI quad. in ratione compositâ ex ratione rectanguli XHY ad rectangulum BHD , seu rectanguli CGP ad rectangulum DGB , & ex ratione rectanguli BHD ad rectangulum PIC . Invenio autem contactus puncto A , describetur trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.*



Capi autem potest punctum A vel inter puncta H & I , vel extra; & perinde trajectoria dupliciter describi.

(y) 319. *Erit ex Conicis*; scilicet si A sit punctum contactus erit (per Cor. 3. Lem. III. de Conic. p. 119.) HA^2 ad AI^2 ut rectangulum XHY ad rectangulum PIC , sed ratio rectanguli XHY ad rect. PIC , potest considerari ut composita ex ratione rect. XHY ad rect. BHD , & ex ratione ejusdem rect. BHD ad rect. PIC . Est verò rect. XHY ad rect. BHD ut rect. CGP ad rect. DGB (per Lem. III. de Conic. p. 117.) sunt enim HX , GC , duæ Parallele in Sectione Conicâ ductæ & per tertiam lineam GH sectæ, ideoque factum partium HX , HY Parallele HX , quæ sumuntur ab intersectione H ad curvæ puncta X & Y , est ad $BH \times HD$ factum partium lineæ secantis GH sumptarum ab intersectione H ad puncta curvæ B & D , sicut factum partium alterius Parallele $CG \times GP$, ad $DG \times GB$ factum partium correspondentium lineæ secantis. Est ergo ratio HA^2



ad AI^2 æqualis rationi compositæ ex ratione rect. CGP ad rect. DGB & rect. BHD ad rect. PIC ideoque est HA^2 ad AI^2 ut $\sqrt{CGP} \times \sqrt{BHD}$ ad $\sqrt{DGB} \times \sqrt{PIC}$, sed Radices quadratæ illorum Rectangulorum sunt ipse mediâ

diæ proportionales inter illorum latera ; Ergo est HA ad AI ut est recta. sub media proportionali inter CG & GP & media proportionali inter BH & HD ad recta. sub media proportionali inter DG & GB & media proportionali inter PI & IC. Si itaque HI in A secetur in eâ ratione, habebitur punctum contactus.

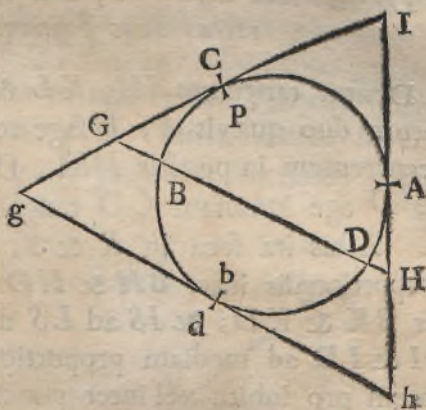
320. Coroll. 1. Si ex punctis quibuscumque H & I recta HI sectionem conicam tangentis in A, agantur duæ quævis recta IG, HG convenientes in G, & sectionem conicam secantes in punctis quatuor C, P, D, B; factum CGP x BHD, erit ad factum DGB x PIC, in datâ ratione, nempe in ratione HA², ad AI²; Ducta enim linea HXY lineæ ICP parallela, erit ut prius (per Lem. III. de Conic. p. 117.) DGB : BHD = CGP :

$$XHY = \frac{CGP \times BHD}{DGB}, \text{ est verò } HA^2 :$$

$$AI^2 = HXY \left(\frac{CGP \times BHD}{DGB} \right) : PIC$$

(per Cor. 3. ejusdem Lem.) ergo HA² : AI² = CGP x BHD : DGB x PIC.

Quod si linea HXY, extra sectionem cadat aut eam tangat, ex puncto quovis h lineæ HAI, ducatur alia linea hy x lineæ ICP parallela quæ sectioni occurrat in x & y, & ducatur alia linea hdb g lineæ HDBG parallela ita ut sectioni occurrat in d & b, & lineæ PC in g, habebiturque ut prius hA² : AI² = CgP x bhd : dgb x PIC. Sed cum ob parallelas GH, bh sit (per Lemma 3^{um}. de Con. p. 117.) CgP : dgb = CGP : DGB, & (per Cor. 3. ejusd. Lem.) sit hA² : bhd = HA² : BHD substitutis his ultimis rationibus loco priorum in proportione hA² : AI² = CgP x bhd : dgb x PIC fiet HA² : AI² = CGP x BHD : DGB x PIC ut prius. Unde satis patet demonstrationem constructionis universalem esse, quomodocumque recta GI, GH sectantur, adeoque etiam valere, ubi recta HX sectioni non occurrat.



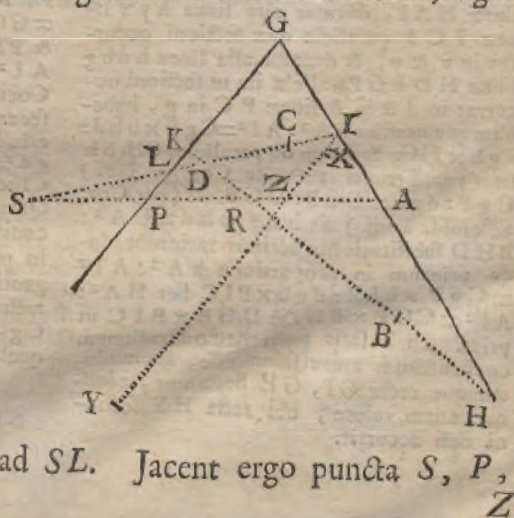
321. Coroll. 2. Coeuntibus punctis C, P, recta IG fit tangens in C & GP, = GC. CI = PI, adeoque CGP = GC², & PIC = CI²; unde in hoc casu HA² : AI² = GC² x BHD : CI² x DGB; Coeuntibus quoque punctis B & D, & secante GH, in tangentem gh, mutatâ erit hA² : AI² = gC² x dh² : CI² x gd², ac proinde hA : AI = gC x dh : CI x gd; & hA x CI x gd = AI x gC x dh; Quare si ducantur tres rectæ sectionem conicam tangentes & inter se concurrentes in punctis I, g, h, facta ex tribus tangentium partibus inter concursum & contactum puncta alternatim sumptis AI, Cg, dh, & Ah, IC, gd, sunt æqualia.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere, quæ transibit per data tria puncta, & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes HI , KL & puncta B , C , D . Per punctorum duo quævis B , D age rectam infinitam BD tangentibus occurrentem in punctis HK . Deinde etiam per alia duo quævis C , D age infinitam CD tangentibus occurrentem in punctis I , L . Actas ita seca in R & S , ut sit HR ad KR ut est media proportionalis inter BH & HD ad mediam proportionalem inter BK & KD ; & IS ad LS ut est media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL & LD . Seca autem pro lubitu vel inter puncta K & H , I & L , vel extra eadem; dein age RS secantem tangentes in A & P , & erunt A & P puncta contactuum. Nam si A & P supponantur esse puncta contactuum alicubi in tangentibus sita; & per punctorum H , I , K , L quodvis I , in tangente alterutra HI situm, agatur recta IY tangenti alteri KL parallela, quæ occurrat curvæ in X & Y , & in ea sumatur IZ media proportionalis inter IX & IY , erit, ex conicis, (2) rectangulum XIY feu IZ quad. ad LP quad. ut rectangulum CID ad rectangulum CLD , id est (per constructionem) ut SI quad. ad SL quad. atque ideo IZ ad LP ut SI ad SL . Jacent ergo puncta S , P , Z



(2) Erit ex Conicis rect. XIY ad LP^2 ut rect. CID ad rect. CLD . Scilicet cum P supponatur punctum contactus alicubi in Tangente KL situm & cum linea IY sit (per

const.) parallela Tangenti KL & utraque secetur per lineam IL , illa in I hæc in L erit (per Lem. III. de Conic. p. 117.) rect. partium Parallela IY ab inter-

DE MOTU
CORPO-
RUM.

In hac propositione, & casu secundo propositionis superioris constructiones eadem sunt, sive recta XY trajectoriam secet in X & Y , sive non secet; eæque non pendent ab hac sectione. Sed demonstratis constructionibus ubi recta illa trajectoriam secat, innotescunt constructiones, ubi non secat; iisque ultra demonstrandis brevitatis gratiâ non immoror.

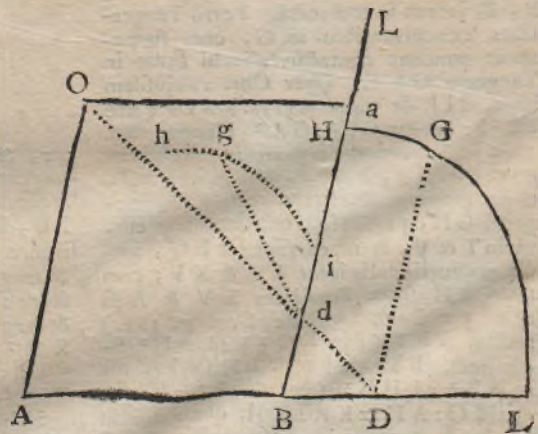
LEMMA XXII.

Figuras in alias ejusdem generis figuras mutare.

Transmutanda sit figura quævis HGI . Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ AO , BL tertiam quamvis positione datam AB secantes in A & B , & a figuræ puncto quovis G , ad rectam AB ducatur quævis GD , ipsi OA parallela. Deinde à puncto aliquo O , in linea OA dato, ad punctum D ducatur recta OD , ipsi BL occurrens in d , & à puncto occurfus erigatur recta dg datum quemvis angulum cum rectâ BL continens, atque eam habens rationem ad Od quam habet DG ad OD ; & erit g punctum in figurâ novâ hgi puncto G respondens.

Eadem ratione puncta singula figuræ primæ dabant puncta totidem figuræ novæ.

Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum g motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratiâ nominemus DG ordinatam primam, dg ordinatam novam; AD abscissam primam,



nam, *ad* abscissam novam; *O* polum, *OD* radium abscinden-
tem, *OA* radium ordinatum primum, & *Oa* (quo paralle-
logrammum *OABa* completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod, si punctum *G* tangit rectam lineam positione
datam, punctum *g* tanget etiam lineam rectam positione da-
tam. Si punctum *G* tangit conicam sectionem, punctum *g* tan-
get etiam conicam sectionem. Conicis sectionibus hic circulum
annumero. Porro si punctum *G* tangit lineam (c) tertii ordinis
analytici, punctum *g* tanget lineam tertii itidem ordinis; & sic
de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem
semper ordinis analytici quas puncta *G*, *g* tangunt. (d) Etenim ut
est *ad* ad *OA* ita sunt *Od* ad *OD*, *dg* ad *DG*, & *AB* ad
AD; ideoque *AD* æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$, & *DG* æqualis est
 $\frac{OA \times dg}{ad}$.

Jam si punctum *G* tangit rectam lineam, atque
ideo in æquatione quavis, quâ relatio inter abscissam *AD* &
ordinatam *DG* habetur, indeterminatæ illæ *AD* & *DG* ad uni-
cam tantum dimensionem ascendunt, scribendø in hac æquatione

OA

(c) 324. Newtonus lineas geometri-
cas in ordines analyticos distinguit secun-
dum numerum dimensionum æquationis
quâ relatio inter ordinatas & abscissas de-
finitur, vel (quod preindè est) secundum
numerum punctorum in quibus à lineâ rectâ
secari possunt; tot enim dimensiones ha-
bet æquatio ad curvam quot possunt esse
illius curvæ & rectæ intersectiones; nam
si intersectiones illæ seorsim querantur,
quoniam eadem est omnium lex & condi-
tio, idem erit calculus in casu unoquoque
& propterea eadem semper conclusio, quæ
igitur debet omnes intersectiones simul
complecti & indifferenter exhibere, adeo-
que tot esse debent æquationis radices ac
proinde dimensiones quot sunt interseccio-
nes. Hinc lineæ primi ordinis erit recta
sola, lineæ secundi sive quadratici ordi-
nis erunt sectiones conicæ & circulus, &
lineæ tertii sive cubici ordinis parabola
cubica, parabola Neiliana, Cissois veterum
Tom. I.

& aliæ. Cum autem recta inter curvas
non sit numeranda, curva primi generis
eadem est cum lineâ secundi ordinis, &
curva secundi generis eadem cum lineâ ter-
tiii ordinis, & lineæ ordinis infinitesimi ea
est quam recta in punctis infinitis secare
potest, qualis est spiralis, cyclois, qua-
dratrix & lineæ omnis quæ per radii vel
rotæ revolutiones infinitas generatur.

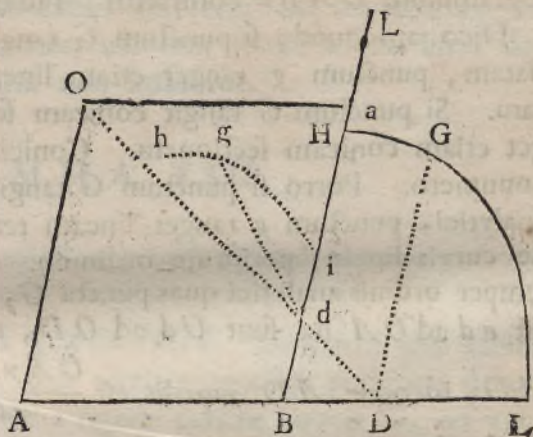
(d) 325. Etenim ob similia triangula,
a d O, *A O D*, *a d : OA = O d : OD*,
(& per constr.) *O d : OD = dg : DG*,
& ob rectas *AO*, *Bd* parallelas *OD* :
OD = AB : AD; undè *a d : OA = dg :*
DG = AB : AD, atque adeò *AD*
 $= \frac{OA \times AB}{ad}$, & *DG* $= \frac{OA \times dg}{ad}$. Sit
OA = a, *AB = b*, *AD = x*, *DG = y*,
a d = z, *dg = u*, & erit $x = \frac{ba}{z}$, $y = \frac{au}{z}$.

E c

* Sit

DE MOTU
CORPO-
R. U. M.
$$\frac{OA \times AB}{ad} \text{ pro } AD, \text{ \& } \frac{OA \times dg}{ad} \text{ pro } DG, \text{ (e) producetur}$$

æquatio nova, in qua abscissa nova ad & ordinata nova dg ad unicum tantum dimensionem ascendent, atque ideo quæ designat lineam rectam. (f) Sin AD & DG , vel earum alterutra, ascende-
bant ad duas dimen-
siones in æquatione pri-
mâ, ascendent itidem
 ad & dg ad duas in



æquatione secundâ. Et (g) sic de tribus vel pluribus dimen-
sionibus. Indeterminatæ ad , dg in æquatione secundâ, &
 AD , DG in primâ ascendent semper ad eundem dimensio-
num numerum, & propterea lineæ, quas puncta G , g tangunt,
sunt ejusdem ordinis analytici.

Dico

(e) * Sit GL , recta positione data & ad illam æquatio quævis $cx + dy + ef = 0$, in qua $+$, significat vel $+$, vel $-$ loco x & y , substituantur eorum valores $(\frac{ba}{z}, \frac{au}{z})$ & producetur $\frac{cba}{z} + \frac{dau}{z} + ef = 0$, hoc est, reductione ad communem denominatorem factâ $cba + dau + efz = 0$ æquatio nova unius dimensionis ad rectam lineam gi .

(f) * Sit GL , sectio conica & ad illam æquatio generalis, $cx^2 + dyy + exy + g^2x + m^2y + n^3 = v$, loco x , y , substituantur $\frac{ba}{z}, \frac{au}{z}$, & prodibit æquatio

nova ad conicam sectionem $\frac{cb^2a^2}{z^2} + \frac{da^2u^2}{z^2} + \frac{eba^2u}{z^2} + \frac{bag^2}{z} + \frac{m^2au}{z} + n^3 = 0$, hoc est, reductione factâ, cb^2a^2

$$+ da^2u^2 + eba^2u + bag^2z + m^2auz + n^3z^2 = 0.$$

(g) * Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus, nam si in serie $1, x, x^2, x^3, x^4$ &c. loco x , & dignitatum ejus substituantur $\frac{1}{z}$, & ipsius dignitates prodibit series nova $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^3}, \frac{1}{z^4}$ &c. & reductione ad communem denominatorem factâ habebitur $\frac{z^4, z^3, z^2, z^1}{z^4}$. Similiter si

in serie y, y^2, y^3, y^4 &c. loco y , substituantur $\frac{u}{z}$, prodibit series nova $\frac{u}{z}, \frac{u^2}{z^2}, \frac{u^3}{z^3}, \frac{u^4}{z^4}$ &c. & per reductionem ad deno-

minatorem communem $\frac{uz^3, u^2z^2, u^3z, u^4}{z^4}$ iisdem x & y valoribus substitutis in sectionibus.

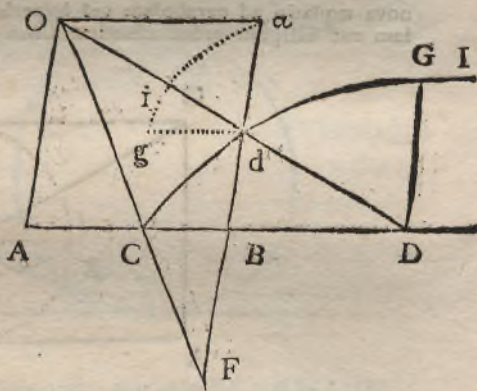
gentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit; idque quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum; lineæ autem parallele sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem problema solvitur in figurâ novâ; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, (k) habebitur solutio quæsitâ.

(1) Utile est etiam hoc lemma in solutione solidorum problematum. Nam quoties duæ sectiones conicæ obvenerint, quarum interfectione problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si hyperbola sit vel parabola, in ellipsim; deinde ellipsis facile mutatur in circulum. Recta item & sectio conica, in constructione planorum problematum, vertuntur in rectam & circulum.

330. Coroll. 3. Si recta linea FG, coincidat cum AD, transformabitur in rectam coincidentem cum a B, nam punctum D, transfertur in d, punctum L, in l.

(k) 331. (Vide fig. Newt. pag. 218.) Figura hgi data in figuram primam HGI, transformatur, faciendū ut O d, ad d g, ita OD, ad DG, parallelam radio OA.

(1) 332. Sit curva CGI, parabola cujus diameter CD, diametri vertex C, ordinata GD radio ordinato primo AO parallela, latus rectum l, sitque OA=a, AB=b, AC=c, AD=x, CD=x-c, GD=y, nova abscissa, a d=z, nova ordinata gd=u, erit ex naturâ parabolæ $lx-lc=yy$, & substitutis pro x, & y, eorum valoribus $\frac{ba}{z}, \frac{bu}{z}$ (325) produ-



cetur æquatio nova ad novam curvam gi, $\frac{lba}{z} - lc = \frac{b^2 u^2}{z^2}$, hoc est, reductione factâ $b^2 u^2 - lbaz + lcz^2 = 0$, æquatio ad Ellipsim cujus diameter aF = $\frac{ba}{c}$, latus rectum = $\frac{la}{b}$, nam $\frac{baz}{c} - z^2; u^2 = \frac{ba}{c} - \frac{la}{b}$.

Si nova ordinata gd, ponatur ad abscissam ad, perpendicularis, & præterea fiat $lc = b^2$, sive $l \times AC = AB^2$ superior ad Ellipsim æquatio in hanc mutabitur $u^2 - \frac{baz}{c} + zz = 0$, quæ est ad circulum cujus diameter $\frac{ba}{c}$, ex tribus autem rectis a, b, c, binæ a & b, vel a & c, possunt ad arbitrium assumi, & tertia de-

DE MOTU
CORPORUM.

terminatur per æquationem $lc = bb$, in circulo.

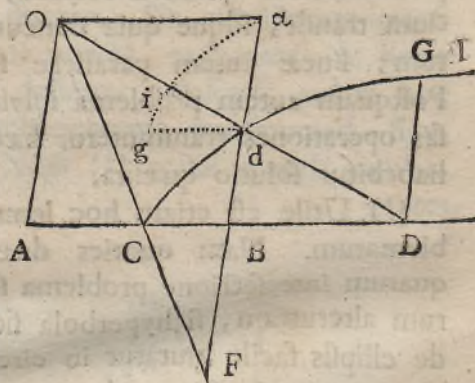
Si vertex C cum puncto A coeat, hoc est, si $AC = c = 0$ æquatio ad novam curvam erit $b^2u^2 - lbaz = 0$, hoc est, curva gi, erit parabola; & eodem modo adeo Sectiones omnes conicas in parabolam transformari, dum diametri AD radio Oa parallelæ vertex C incidit cum puncto A radii ordinati primi O A ordinatis ad diametrum paralleli.

Si parabolæ vertex C cum puncto B coeat, erit $b = c$, adeoque Ellipsis vel circuli gi diameter $\frac{ba}{c}$, erit $a = OA = aB$.

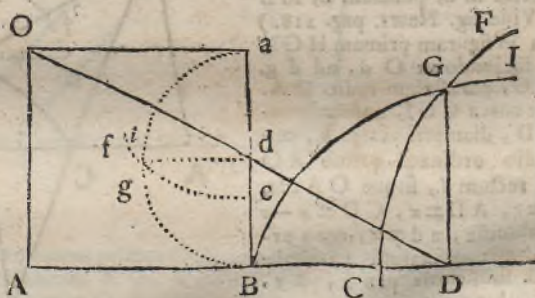
Si curva CGI, fuerit hyperbola cujus sit diameter d, latus rectum l, manentibus cæteris denominationibus ut supra, erit ex naturâ hyperbolæ $dy^2 = lx^2 - 2clx + dlx - ldc + lcc$, & substitutis loco x & y, eorum valoribus & reductione ad communem denominatorem factâ produ-

$$db^2u^2 + 2clbaz + ldcz^2 - lb^2a^2 = 0 - dlbaz - lc^2z^2$$

nova æquatio ad parabolam vel hyperbolam aut Ellipsim prout assumitur linea c;



æqualis vel major vel minor diametro d, Ellipsis autem in circulum abit ponendo $ldc - lc^2 = db^2$, & angulum g d a, rectum, ut ex locorum geometricorum doctrinâ liquet. Eadem ratione transformatur Ellipsis.

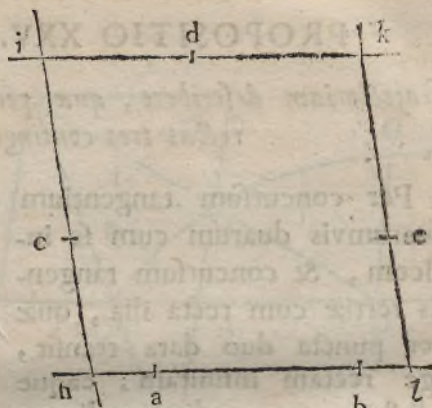


333. His præmissis facile intelligitur hujus lemmatis usus in solidorum aut etiam planorum problematum solutione. Nam sit querenda intersectio G conicæ sectionis BGI cum alterâ sectione conicâ aut rectâ lineâ CGF positione datâ, transformetur (332.) sectio conica BGI in circulum Bga, & lineâ CGF, in lineam c g f, tum ex puncto intersectionis g, circuli Bga, & lineæ c g f, demittatur ad a B nova ordinata sive per-

pendicularis g d, & per punctum d, agatur radius abscindens O d D secans rectam A B in D, denique per D agatur GD radio ordinato primo OA parallela quæ sit ad OD ut g d, ad Od, & erit G punctum intersectionis quæsitum. Cum enim in puncto intersectionis duarum linearum BGI, CGF, communis sit ordinata GD manifestum est intersectionem illam transformari in intersectionem linearum Bga, c g f, & vice versa (331). P R O

DE MOTU
CORPO-
RUM.

gens tertia fiet parallela rectæ per puncta duo data transeunti. Sunt hi , kl tangentes illæ duæ parallelæ, ik tangens tertia, & hl recta huic parallela transiens per puncta illa a , b , per quæ conica sectio in hac figurâ novâ transire debet, & parallelogrammum $hikl$ complens. (n) Secentur rectæ hi , ik , kl in c , d , e , ita ut sit hc ad



latus quadratum rectanguli ahb , ic ad id , & ke ad kd ut est summa rectarum hi & kl ad summam trium linearum, quarum prima est recta ik , alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum ahb & alb : & erunt c , d , e puncta contactuum. Etenim, ex conicis, sunt hc quadratum ad rectangulum ahb , & ic quadratum ad id quadratum, & ke quadratum ad kd quadratum, & el quadratum ad rectangulum alb in eadem ratione; & propterea hc ad latus quadratum ipsius ahb , ic ad id , ke ad kd & el ad latus quadratum ipsius alb sunt in subduplicatâ illâ ratione, & compositè, in datâ ratione omnium antecedentium hi & kl ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli ahb , & recta ik , & latus quadratum rectanguli alb . Habentur igitur

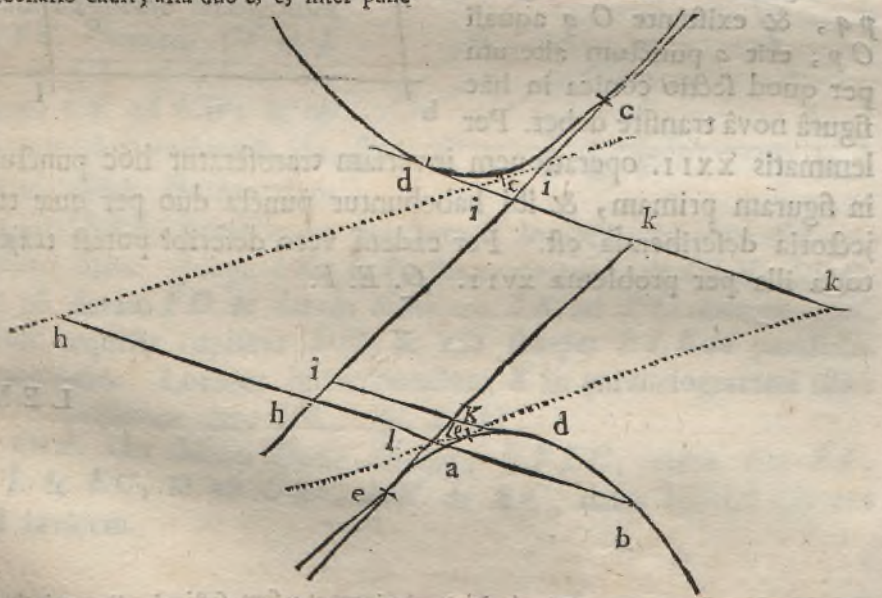
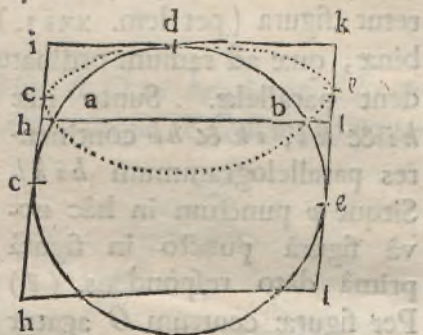
* (n) Inter ah , hb , quærat media proportionalis quæ dicatur M , & inter al , lb , media proportionalis N ; & deinde ita secentur rectæ hi , ik , kl , in c , d , e , ut sit hc , ad M , ic , ad id , & ke ad kd , ut est $hi + kl$, ad $ik + M + N$, & erunt c , d , e , puncta contactuum; Etenim si fuerint c , d , e , puncta contactuum, ob hl parallelam tangenti ik , quæ cum alterâ tangente hi , concurrat in i , erit (per prop. 16. & 18. lib. 3. conic. Apoll. sive per Corol. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) $hc^2 = ah \times hb = ic^2 = id^2$, & ob hl concurrentem sectioni in solo puncto c , & parallelam tangenti ik , quæ alteri tangenti kl occurrit in k , erit (per easdem prop. Apoll.) $ic \times ic$

(ic^2): $id^2 = ke^2 : kd^2$, & ob hl parallelam tangenti ik , quæ cum alterâ tangente kl , convenit in k , erit (per eandem prop. Apoll.) $ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, adeoque $hc^2 : ah \times hb = ic^2 : id^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al \times lb$, & propterea $hc : \sqrt{ah \times hb} (M) = ic : id = ke : kd = el : \sqrt{al \times lb} (N)$, & compositè summa omnium antecedentium est ad summam omnium consequentium ut quilibet antecedens ad suum consequentem, hoc est $hc : M = ic : id = ke : kd = el : N = hc + ic + ke + el (hi + kl) : M + id + kd + N (ik + M + N)$. Habentur igitur (per constr.) ex datâ illâ ratione puncta contactuum c , d , e , in figurâ novâ per inversas operationes (331).

ex datâ illâ ratione puncta contactuum c, d, e , in figura nova. Per inverfas operationes lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam, & ibi (per prob. XIV.) describetur trajectory. Q. E. F. (°) Cæterum perinde ut puncta a, b jacent vel inter puncta h, l , vel extra, debent puncta c, d, e vel inter puncta h, i, k, l capi, vel extra. Si punctorum a, b alterutrum cadit inter puncta h, l , & alterum extra, problema impossibile est.

PRO-

(°) 335. Quoniam duæ parallelæ hi, lk , neque parabolam, neque hyperbolam simplicem contingere possunt, tangent hyperbolas oppositas vel ellipsum, circulo inter ellipses annumerato. Porro Ellipsis tota inter tangentes parallelas, & hyperbolæ oppositæ tota extra easdem sunt; quare in Ellipsi puncta a, b , inter puncta h, l , sita sunt; in hyperbolis extra; atque adeo si punctorum a, b , alterum cadit inter puncta h, l & alterum extra, problema impossibile est. In Ellipsi punctum contactus d , inter puncta i, k , necessario cadit; alia duo c, e , inter punc-



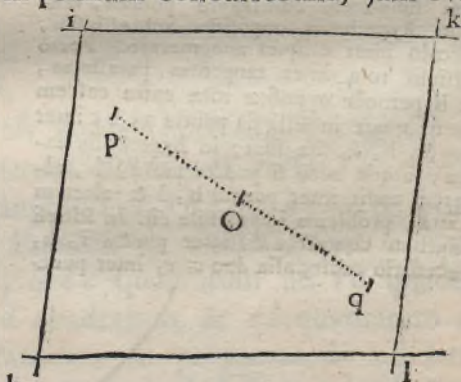
ta h & i, l & k , vel aliquando extra esse possunt; in hyperbolis oppositis contactuum puncta duo ut c, d , extra puncta h, i, k, l , necessario posita sunt; tertium ut e , vel extra, vel intra esse po-

test, undè præscribit Newtonus ut puncta c, d, e , vel inter puncta h, i, k, l , vel extra capiantur, perinde ut puncta a, b , jacent vel inter puncta h, l , vel extra.

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

Trajectoriam describere, quæ transibit per punctum datum, & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita, & eadem pro radio ordinato primo adhibitâ, transmuetur figura (per lem. XXI.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ hi & kl , ik & hl continentes parallelogrammum $hikl$. Sitque p punctum in hâc novâ figurâ puncto in figurâ primâ dato respondens. (P) Per figuræ centrum O agatur pq , & existente Oq aquali Op , erit q punctum alterum per quod sectio conica in hâc figurâ novâ transire debet. Per



lemmatis XXI. operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest trajectoria illa per problema XVII. *Q. E. F.*

LEM.

(p) 336. Parallelogrammi h, i, k, l , sectioni conicæ circumscripti diagonales in sectionis centro O , se mutuo interfecant. Nam rectæ quæ opposita contactuum pun-

tajungunt, sunt sectionis diametri centro O bisectæ (per prop. 27. & 31. Lib. 2. conic. Apoll. utque sequitur ex Lem. IV. de Conic. p. 119).

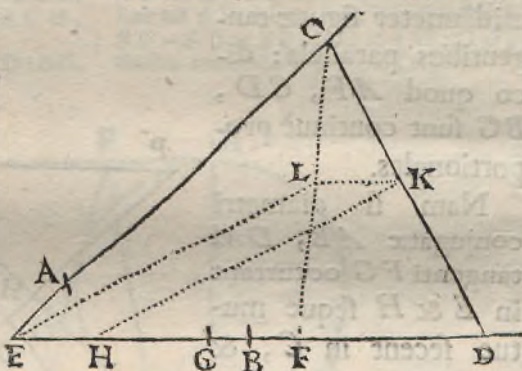
* Vid.

LEMMA XXIII.

Si rectæ duæ positione datæ AC , BD ad data puncta A , B , terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta CD , quâ puncta indeterminata C , D junguntur, secetur in ratione datâ in K : dico quod punctum K locabitur in rectâ positione datâ.

(9) Concurrant enim rectæ AC , BD in E , & in BE capiatur BG ad AE ut est BD ad AC , sitque FD semper æqualis datæ EG ; & erit ex constructione EC ad GD , hoc est, ad EF ut AC ad BD , ideoque in ratione datâ, & propterea dabitur specie triangulum EFC . Secetur CF in L ut sit CL ad CF in ratione CK ad CD ; & ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum EFL ; proindeque punctum L locabitur in rectâ EL positione datâ. Junge LK , & similia erunt triangula CLK , CFD ; & ob datam FD & datam rationem LK ad FD dabitur LK . Huic æqualis capiatur EH , & erit semper $ELKH$ parallelogrammum. Locatur igitur punctum K in parallelogrammi illius latere positione dato HK . *Q. E. D.*

Corol. Ob datam specie figuram $EFLC$, rectæ tres EF , EL & EC , id est GD , HK & EC , datas habent rationes ad invicem.



LEM-

(9) * Vid. not. 67. pag. 39.

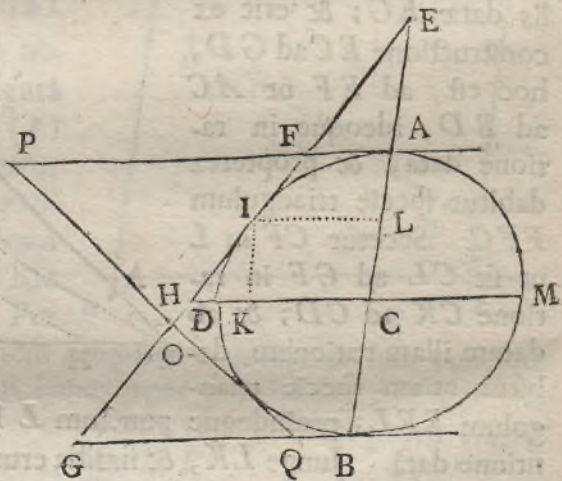
L E M M A XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque conicæ sectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod sectionis semidiameter hisce duabus parallelæ, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.

Sunto AF , GB parallelæ duæ conicæ sectionem ADB tangentes in A & B ; EF recta tertia conicæ sectionem tangens in L , & occurrens prioribus tangenti in F & G ; sitque CD semidiameter figuræ tangentibus parallelæ: dico quod AF , CD , BG sunt continuè proportionales.

Nam si diametri conjugatæ AB , DM tangenti FG occurrant in E & H seque mutuo secent in C , & compleatur parallelogrammum $IKCL$;

(^r) erit ex naturâ sectionum conicarum ut EC ad CA ita CA ad CL , & ita divisim $EC-CA$ ad $CA-CL$, seu EA ad AL , & compositè EA ad $EA+AL$ seu EL ut EC ad $EC+CA$ seu EB ; ideoque, ob similitudinem triangulorum EAF , ELI , ECH , EBG , AF ad LI ut CH ad BG . Est itidem, ex naturâ sectionum conicarum, LI seu CK ad CD ut CD ad CH ; (^l) atque ideo ex æquo perturbatè AF ad CD ut CD ad BG . Q. E. D. Co-



(^r) * Erit ex naturâ sectionum conicarum &c. (per prop. 37. 38. Lib. 1. conic. Apoll. vide cor. 2. Lem. V. de Conic. p. 121.)

(^l) * Cum sit $EA:EL=EC:EB$, & ob similitudinem triangulorum EAF EIL sit $EA:EL=AF:LI$, seu CK , & ob similitudinem triangulorum ECH EBG .

Corol. 1. Hinc si tangentes duæ FG , PQ tangentibus parallelis AF , BG occurrant in F & G , P & Q , seque mutuo secent in O ; erit ex æquo perturbatè AF ad BQ ut AP ad BG , (1) & divisim ut FP ad GQ , atque ideo ut FO ad OG .

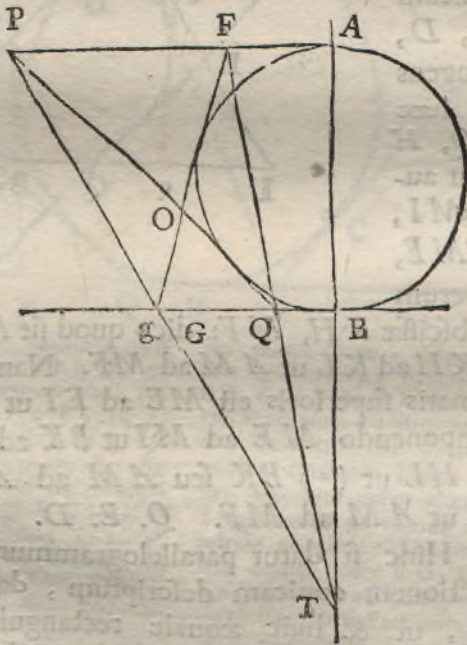
L I R E M
PRIMUS.

Corol. 2. (u) Unde etiam rectæ duæ PG , FQ , per puncta P & G , F & Q ductæ, concurrent ad rectam ACB per centrum figuræ & puncta contactuum A , B transeuntem.

L E M-

E B G sit $EC:EB=CH:BG$, erit $AF:CK=CH:BG$, & quia (ex conic. loco citato) $CK:CD=CD:CH$, erit $AF \times CK:CK \times CD=CH \times CD:BG \times CH$, hoc est, $AF:CD=CD:BG$. & similiter $BQ:CD=CD:AP$, seu $CD:BQ=AP:CD$, adeoque $AF \times CD:CD \times BQ=CD \times AP:BG \times CD$, hoc est $AF:BQ=AP:BG=AP-AF:BG-BQ=FP:GQ=FO:OG$, quæ similia triangula FOP , GOQ .

(1) * Est enim $AF:CD=CD:BG$.



(u) * Agatur enim recta FQ , ipsi AB occurrens in T , & jungatur PT , rectam BG , secans in g , erit $AF:BQ=AT:BT=AP:Bg$, sed per coroll. 1. $AF:BQ=AP:BG$, est igitur $BG=Bg$, proinde punctum g , cum G coincidit. * Nam

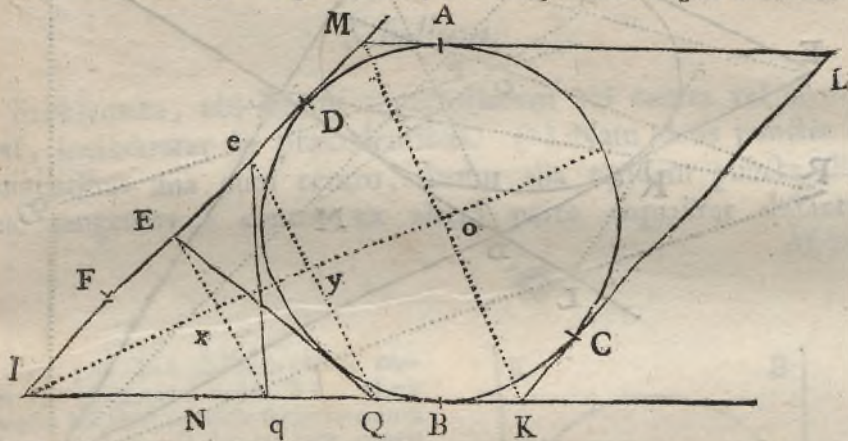
E f 3

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens eq tangentibus KI , MI occurrens in q & e ; (¹) rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque KQ ad Me ut Kq ad ME , & divisim ut Qq ad Ee .

Corol. 3. Unde etiam si Eq , eQ jungantur & bifecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum sectionis conicæ. Nam cum sit Qq ad Ee ut KQ ad Me , transibit eadem recta per medium omnium Eq , eQ , MK (²) (per lem. XXIII.) & medium rectæ MK est centrum sectionis. (^a)

PRO-

(¹) * Nam rectangula $KQ \times ME$, $Kq \times Me$, æquantur rectangulo $MI \times BK$.



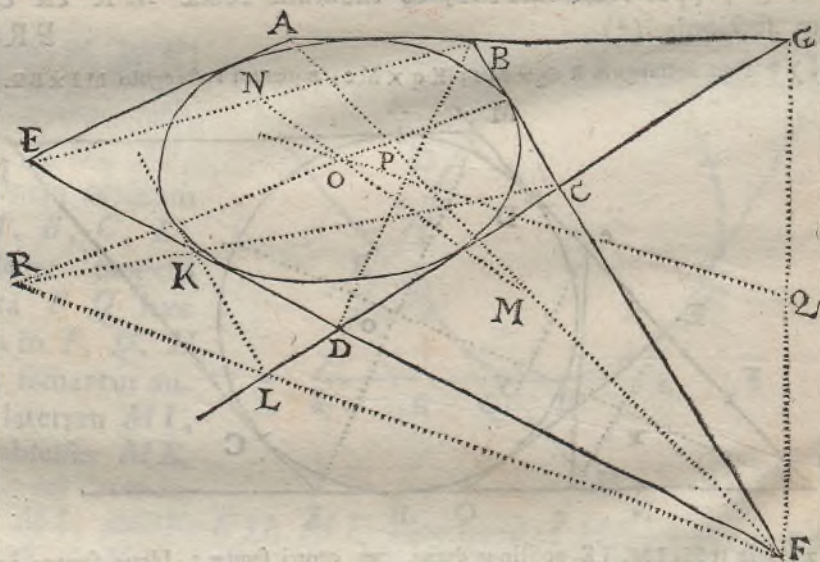
(²) * In rectis IM , IK , positione datis capiatur qN , ad EF , ut est qQ , ad Ee , & puncta N , F , tanquam data seu fixa considerentur, & erit $Nq:FE=qQ:Ee=QK:eM$, & compositè, $Nq:FE=NQ:Fe=NK:FM$; quare si rectæ Eq , eQ , MK , quibus puncta indeterminata E , & q , E , Q , M & K jungantur, secentur in ratione datâ in x , y , o , puncta omnia x , y , o , locantur in unâ eademque rectâ xy , (per Lem. XXIII). Si itaque recta xy , lineas Eq , eQ , bifecat, rectam MK bifecabit, adeoque (³³⁶) per centrum sectionis conicæ transibit.

(^a) Hinc si lineæ quatuor ut ED , eq , EQ , QB sectionem Conicam tangent & sibi mutuo occurrant in punctis e , E , q , Q junganturque puncta opposita e , Q & E , q , bifariamque dividantur lineæ eQ , EQ , linea eas bifecans erit lo-

cus centri figuræ: Idque semper verum erit quamcumque figuram faciant lineæ ED , eq , EQ , QB sive sese decussent sive Trapezium constituent, Concipiatur illas Diametros duci quarum vertex est in puncto contactus harum linearum donec occurrant curvæ altero suo vertice, Tangentes in eo vertice ductæ erunt parallelæ prioribus: Dabuntur ergo Parallelæ duabus lineis ED , QB , quæ erunt Tangentes curvæ, ideoque fiet ut in Lemmatis Hypothesi Parallelogrammum $MIKE$ constans quatuor Tangentibus quarum oppositæ erunt inter se Parallelæ, & Tangentes EQ & eq considerari poterunt ut quinta & sexta Tangens de quibus agitur in hoc Lemmate, ideoque per ejus corollarium 3. si bifecentur lineæ Eq & eQ recta per bisectionum puncta agatur transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. &c.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam describere, quæ rectas quinque positione datas con-
tinget.



Dentur positione tangentes ABG , BCF , GCD , FDE ,
 EA . Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ $ABFE$
diagonales AF , BE biseca in M & N , & (per corol. 3. lem.
xxv.) recta MN per puncta bisectionum acta transibit per cen-
trum trajectoriæ. Rursus figuræ quadrilateræ $BGDF$, sub aliis
quibusvis quatuor tangentibus contentæ, diagonales (ut ita di-
cam) BD , GF biseca in P & Q : & recta PQ per puncta
bisectionum acta transibit per centrum trajectoriæ. Dabitur er-
go

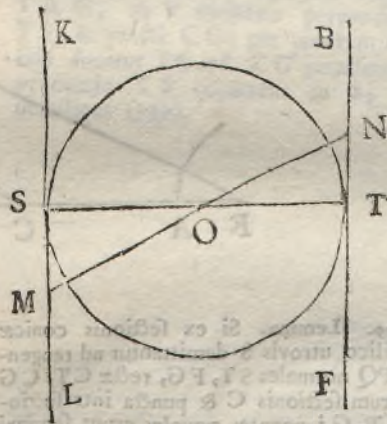
gō centrum in concursu bifecantium. Sit illud *O*. (b) Tangenti cuius *BC* parallelam age *KL*, ad eam distantiam ut centrum *O* in medio inter parallelas locetur, & acta *KL* tanget trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes alias quasvis duas *GCD*, *FDE* in *L* & *K*. Per harum tangentium non parallelarum *CL*, *FK* cum parallelis *CF*, *KL* concursus *C&K*, *F&L* age *CK*, *FL* concurrentes in *R*, & recta *OR* ducta & producta secabit tangentes parallelas *CF*, *KL* in punctis contactuum. Patet hoc per corol. 2. lem. xxiv. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per construct. prob. xiv. trajectoriam describere. *Q. E. F.*

Scholium.

Problemata, ubi dantur trajectoriarum vel centra vel asymptoti, includuntur in præcedentibus. (c) Nam datis punctis & tangentibus unâ cum centro, dantur alia totidem puncta aliaque tangentes à centro ex alterâ parte æqualiter distantes. Asymp-

(b) 337. Datis sectionis conicæ centro *O*, & tangente quavis *BF*, altera tangens *LK* datâ parallela facile invenitur; Nam per centrum *O* ducatur recta quavis infinita *MON* tangenti datæ occurrens in *N*, & sumptâ *OM = ON* per *M* ducatur *MK* tangenti datæ *FB* parallela, erit *MK* tangens; si enim per punctum contactus *T* & centrum *O* agatur sectionis diameter *TOS*, erit *SO = OT* & tangens in *S* tangenti in *T* parallela lineam *NO* in *M* ita secabit in *M*, ut sit *MO = ON*, ob, *SO : OT = MO : ON*.

(c) 338. Hinc datis præter centrum tribus tangentibus non parallelis vel duabus tangentibus convergentibus & puncto, vel tangente & punctis duobus, vel punctis tribus, dantur sex tangentes, vel tangentes quatuor & puncta duo, vel tangens & puncta quatuor, vel puncta sex, quibus datis trajectoria describi potest per prop. (27. 26. 25. 24. 23. 22.). Ex datis centro,



alterutro axe, & duabus tangentibus non parallelis, vel tangente & puncto trajectoria Ellipticæ & Hyperbolicæ ex lemmatis sequentibus facile describuntur.

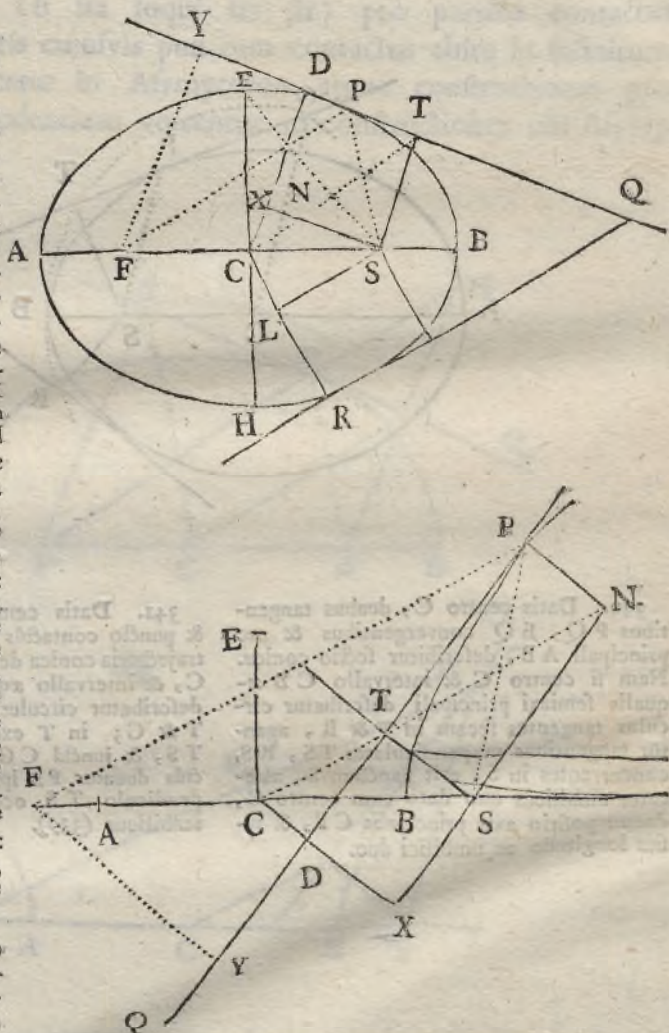
DE MOTU
CORP
RUM.

342. Si ex centro C sectionis conicæ ad tangentem PQ, demittatur perpendicularis CD, & ex altero umbilico S ad CD agatur normalis SX, sitque CE semiaxis minus principalis, erit in ellipfi $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 = CD^2 + CE^2$, & demissa ex umbilico in tangentem perpendiculari ST, junctâque CT, rectam SX secante in N, erit in utraq; sectione XN æqualis DP distantie puncti contactûs P à perpendiculari CD; Nam in Ellipfi $CS^2 = CT^2 - (CB^2) - CE^2$, in Hyperbolâ $CS^2 = CT^2 + CE^2$, & in utraq; sectione $CS^2 = CX^2 + SX^2 = CX^2 + DT^2$; Ergo in Ellipfi $CX^2 + DT^2 = CT^2 - CE^2 = CD^2 + DT^2 - CE^2$, & hinc $CX^2 = CD^2 - CE^2$, & in hyperbolâ $CX^2 + DT^2 = CT^2 + CE^2 = CD^2 + DT^2 + CE^2$, adeoque $CX^2 = CD^2 + CE^2$. Q. e. 1.

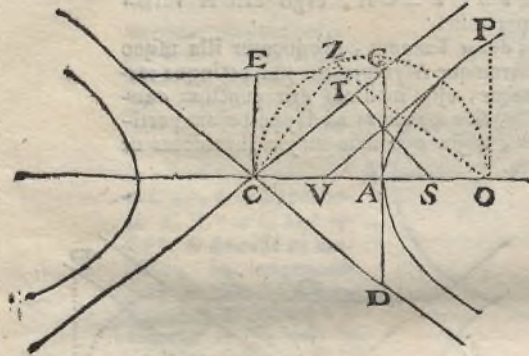
Ex altero umbilico F, in tangentem demittatur perpendicularis FY, & junctis FP, SP, similia erunt triangula FPY, SPT, ob angulos æquales (per natur. Tangentium & focorum) FPY, SPT, & STP, FYP rectos; & quoniam FP & CT, FY & CD sunt parallelæ, similia quoque erunt triangula CTD, FPY, ideoque duo triangula CTD, SPT sunt similia; quare $CD:DT = ST(DX):PT$, & divisim $CD:DT = CD - DX:DT - PT$, & compositè $CD:DT = CD + DX:DT + PT$.

Undè quoniam in Ellipfi $CD - DX = CX$, & $DT - PT = DP$; in hyperbolâ verò $CD + DX = CX$, & $DT + PT = DP$, erit in utraq; sectione $CD:DT = CX:DP$. Verùm ob SX tangenti DT parallelam, $CD:DT = CX:XN$, ergo $XN = DP$. Q. e. 2.

343. Hinc datis centro C, semiaxe minus principali CE, tangentibus duabus non

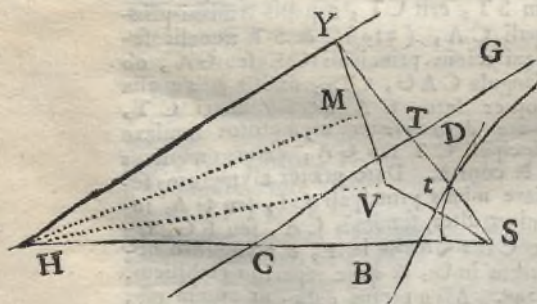


DE MOTU lela est & positione data. Hinc facile erit
CORPO. problematum sectionis IV. constructiones
RUM. ad hyperbolam transferre ubi asymptotus
alterutra cum umbilico data est.



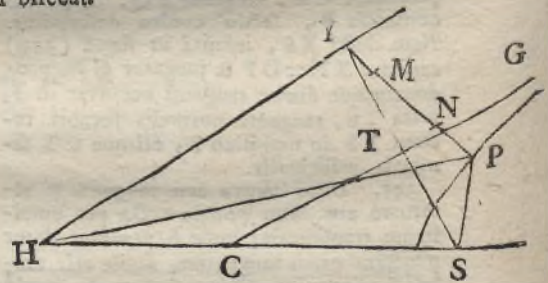
Datis umbilico S, axe principali, & asymptoto CG, invenitur axis positio, demittendo ex umbilico S ad asymptotum perpendicularem ST, & capiendo TC æqualem semiaxi dato, est enim C hyperbolæ centrum, CS axis principalis positio, TS semiaxis minus principalis (348).

Datis umbilico & asymptoto describitur hyperbola specie data, per constr. Caf. 3. Prop. XIX. vel brevius, observando datam esse TS semiaxem minus principalem, undè ob datam axium rationem, dabitur centrum & axium positio cum altera asymptoto, & hyperbola describitur (348).

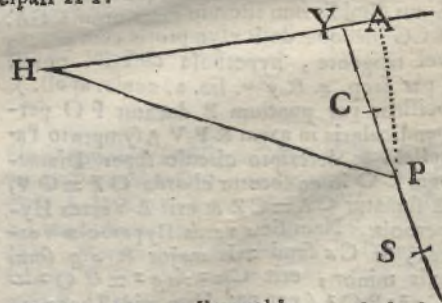


Datis asymptoto, umbilico & tangente, invenitur umbilicus alter ac proinde axis transversi positio & centrum. Sit enim asymptotus data CG, umbilicus S, tangens BD, ex umbilico S, ad asymptotum &

tangentem, demittantur perpendiculara ST, St, & producantur ad Y & V ut sint TY = ST, tV = St; per punctum Y, agatur YH, asymptoto parallela, & juncta YV, bifecetur in M, perpendicularo MH; perpendiculari hujus & rectæ YH communis interfectio H, est umbilicus alter, recta enim HY, asymptoto parallela transit per punctum contactus asymptoti, adeoque ob TY = TS, transit etiam per umbilicum H; Porro rectæ YH, VH, per umbilicum H, ductæ sunt æquales axi principali hyperbolæ per Lem. XV., & ideo æquales inter se; quare perpendicularum HM, ex umbilico H in rectam YV demissum eam in M bifecat.



Datis asymptoto CG, puncto P, & umbilico S, invenitur umbilicus alter H, demisso ad asymptotum perpendicularo ST, & sumptâ TY = ST, actâque YH asymptoto parallela jungatur YP, & in eâ capiatur MN = SP, & ita locetur ut sit YM = PN, hyperbola umbilicis Y, P, & axe principali MN, descripta, rectam YH secabit in altero umbilico H quæsito. Nam PS seu MN est rectarum HY, HP differentia, quæ semper æqualis est axi principali HY.

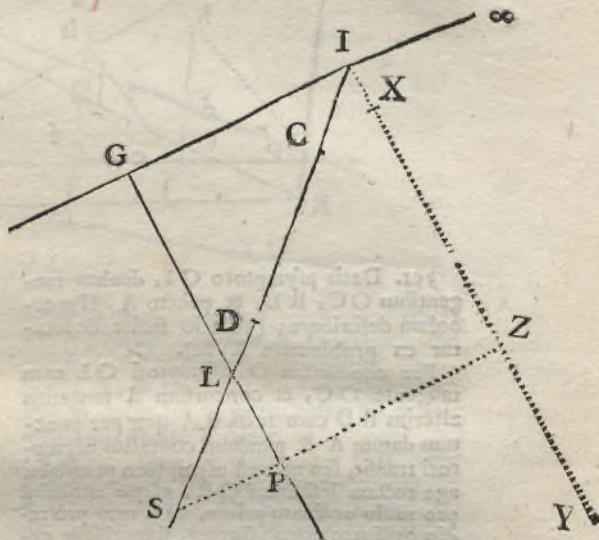
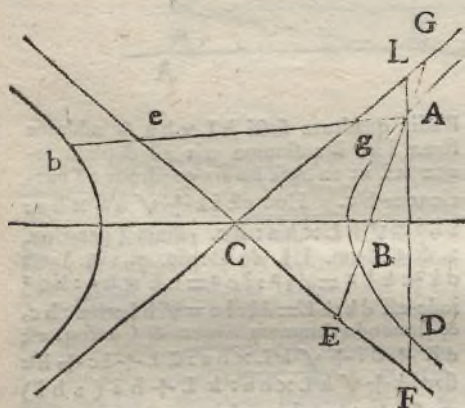


Aliter, Huc redit problema, datis in triangulo HYP latere PY, angulo Y, & latere HY, HP, differentia PS, invenire

venire latera. Ex puncto P, in HY, demittatur perpendicularis PA, capiatur laterum HP, HY, differentia PC=PS, & sumatur YH ad CY, ut est YS ad SC $\mp 2YA$, scribendo $-2YA$, si angulus HYP est obtusus, & $+2YA$, si acutus, & delendo $\mp YA$, si fuerit rectus, erit H punctum quaesitum, facilis est demonstratio ob angulum rectum A.

Sectionis V^a. problemata, ubi asymptotus alterutra data est ad sequentia revocantur.

diam proportionalem inter CL & LD; deinde age SP asymptoto GI parallela, haec secabit tangentem GI, in puncto contactus P; nam si P supponatur esse punctum contactus, & per punctum I agatur IY tangenti GL parallela quae occurrat hy-



349. Data asymptoto CG, cum tribus punctis A, D, B, vel b, hyperbolam describere. Per punctum quodvis A, datum & alia duo D, B, vel b, agantur lineae infinitae AD, AB vel Ab, asymptoto datae occurrentes in L & G, vel g; tum capiantur FD=AL, BE=GA, vel be=gA, juncta FE, aut Fe, erit asymptotus altera (per prop. 8^{am}. lib. 2. Conic. Apoll. per Lem. I. de Conic. p. 115.) quare (346) hyperbola describitur, cum facile inveniri possint quinque sectionis puncta, per angulos mobiles organice potest describi.

350. Datis asymptoto GI, tangente GL, punctisque duobus C, D, Hyperbolam describere, constructio & demonstratio eadem ferè sunt ac problematis (XVI.).

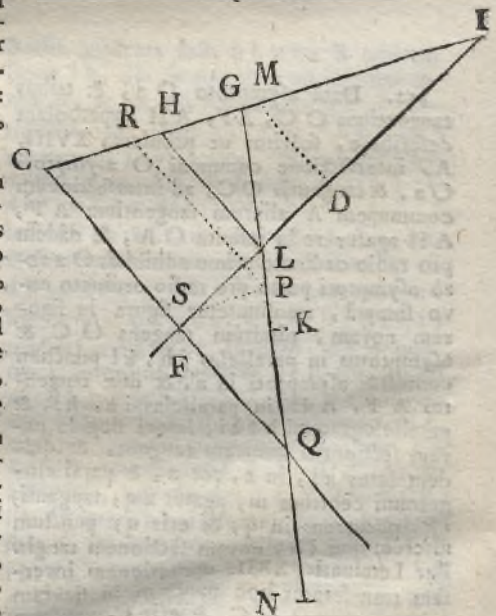
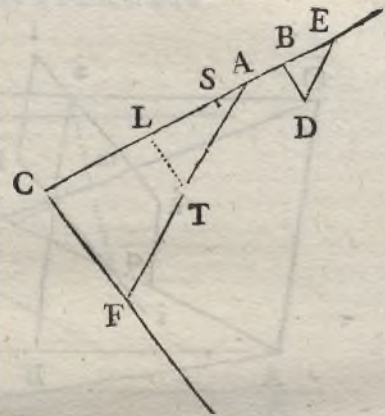
Per puncta duo data C, D, age rectam infinitam CD, asymptoto & tangenti concurrentem in punctis I, L, aetam ita secata in S, ut sit IS ad LS, ut est media proportionalis inter CI & ID ad me-

diæ in X & Y, & in ea sumatur IZ, media proportionalis inter IX & IY erit (per prop. 3. & 10. lib. 2. conic. Apoll.) $IX \times IY$ five $IZ^2 = PG^2$, fit enim ∞ punctum contactus Hyperbolæ & Asymptoti erit $\infty I^2 : \infty G^2 = IX \times IY : PG^2$ (par Cor. 2. Lem. III. de Conic. p. 118.) sed cum ∞I & ∞G sint lineae infinitae quantitate finita GI differentes, pro æqualibus habentur, ergo etiam $IX \times IY$ five $IZ^2 = PG^2$, atque adeo $IZ = PG$, & consequenter juncta PZ, parallela est asymptoto GI; recta ZP producta secet rectam IL, in puncto aliquo S, & ob similia triangula SZI, SLP, erit $IZ^2 : LP^2 = IS^2 : LS^2$; verum (vid. Not. ad probl. XVI. aut Lem. III. de Conic. p. 117.) $XI \times IY (IZ^2) : LP^2 = CI \times ID : CL \times LD$; ergo $IS^2 : LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$, quare si recta IL ita secetur in S, ut sit $IS^2 : LS^2 = CI \times ID : CL \times LD$, & agatur SP, asymptoto GI parallela, erit P punctum contactus. Datis autem tribus punctis C, P, D, Hyperbola describitur (349).

DE MOTU
CORPO-
RUM.

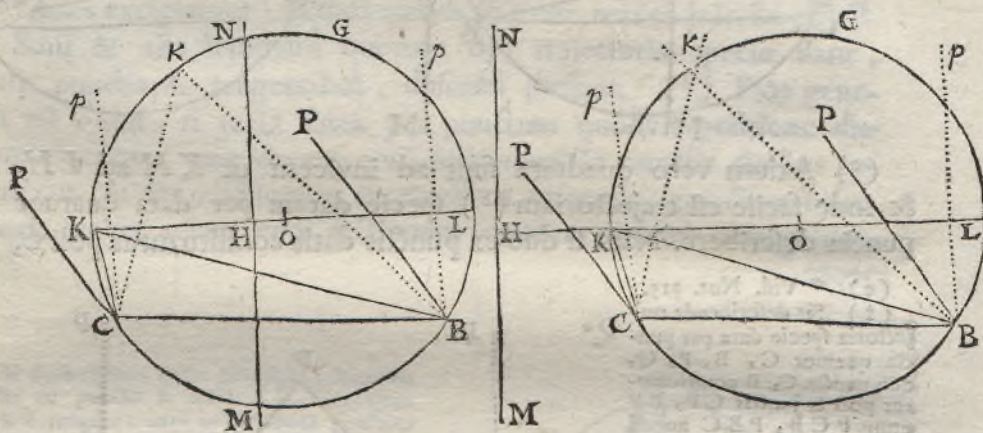
Caf. 2. Data fit asymptotus CE, cum asymptotorum angulo, puncto D, & tangente FA; per punctum D datum agantur recta BD, ad angulum DBE datum, seu æqualem asymptotorum angulo, & DE tangenti FA parallela, capiantur BS æqualis mediæ proportionali inter BE & AE, & AC æqualis 2 SE, erit C hyperbolæ centrum, CF verò rectæ BD parallela asymptotus altera. Nam fit T punctum contactus, CF asymptotus altera, ductâ TL asymptoto FC parallelâ, erit FT = TA (per prop. 3^{am}. Lib. 2. conic. apoll. sup. Theor. I. de Hyp. p. 122.) ac proinde LA = CL: Est autem ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos CL x LT, hoc est AL x LT = CB x BD, adeoque BD : LT = AL : CB. (2 AL + AB) & ob triangula similia ALT, EBD, BD : LT = BE : AL; ergò BE : AL = AL : 2 AL + AB, sed (per constr.) BE : BS = BS : BE + AB, & compositè BE : BS = SE : SE + AB, & BE : SE = SE : 2 SE + AB, est igitur AL = SE, & 2 AL seu AC = 2 SE.

Caf. 3. Data fit asymptotus GI, cum asymptotorum angulo & duabus tangentibus FI, GQ se mutuo interfecantibus in L & asymptotum in G & I; ex puncto L agatur ad asymptotum GI recta LH, in angulo asymptotorum dato LHG, producat GL ad N, ut fit LN ad HI, ut est GL ad GH, capianturque GK æqualis mediæ proportionali inter GL, & LN, & LP æqualis $\frac{1}{2}$ LK, erit P punctum contactus tangentis GQ. Nam si supponamus P, D esse puncta contactuum, & CQ asymptotum alteram tangenti GQ occurrentem in Q & alteri asymptoto in C, & ex punctis D, P ducantur intelligantur rectæ DM, PR & PS, asymptotis CI & CQ parallelæ ac DM, PR asymptoto CI occurrant in M, R, PS verò tangenti FI in S, erit CR = RG, & CM = MI; & ob similia triangula GLI, PLS, GL : LP = LI : LS, adeoque componendo GP : LP = IS : LS, sed (323.) IS : LS = DI : LD; quare GP : LP = DI : LD, ac proinde GP + LP : GP = LI : DL. Porro in triangulis similibus ILH, IDM, LI² : HI x LH = DI² : DM x MI, & in triangulis similibus GLH, GRP, GH x LH : GL² = GR x RP : GP² = DM x MI : GP², ob MI x DM = CM x DM = CR x RP =



GR x RP ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos, quare per compositionem rationum LI² x GH x LH : GL² x HI x LH = DI² : GP² = LI² x GH : GL² x HI. Verum (per construct.) GH : HI = GL² : GL x LN, & GK² = GL x LN, ac proinde GH : HI = GL² : GK², unde DI² : GP² = LI² x GL² : GL² x GK² = LI² : GK², & DI : GP = LI : GK, atque adeò LI : DI = GK : GP; sed supra invenimus GP + LP : GP = LI : DL, ergò GK : GP = GP + LP : GP, atque

Postquam trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hâc methodo. In constructione & figurâ lemmatis XXI. fac ut angulorum mobilium PBN , PCN crura BP , CP , quorum concursu trajectoria describatur, sint sibi invicem parallela, eumque servantia situm revolvantur circa polos suos B , C in figurâ illâ. Interea vero describant altera angulorum illorum crura CN , BN , concursu suo K vel k , circulum $BGKC$.



Sit circuli hujus centrum O . Ab hoc centro ad regulam MN , ad quam altera illa crura CN , BN interea concurrant, dum trajectoria describatur, demitte normalem OH circulo occurrentem in K & L . Et ubi crura illa altera CK , BK concurrunt ad punctum illud K quod regulæ propius est, crura prima CP , BP parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet, si crura eadem concurrunt ad punctum remotius L . Unde si detur trajectoriæ centrum, dabuntur axes. (d) Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axiom

ita $GK = GP + LP$, seu $GL + LK = GL + 2LP$, ac proinde $LK = 2LP$, & $LP = \frac{1}{2}LK$; invento autem puncto contactus P , si capiatur $PQ = PG$, & per

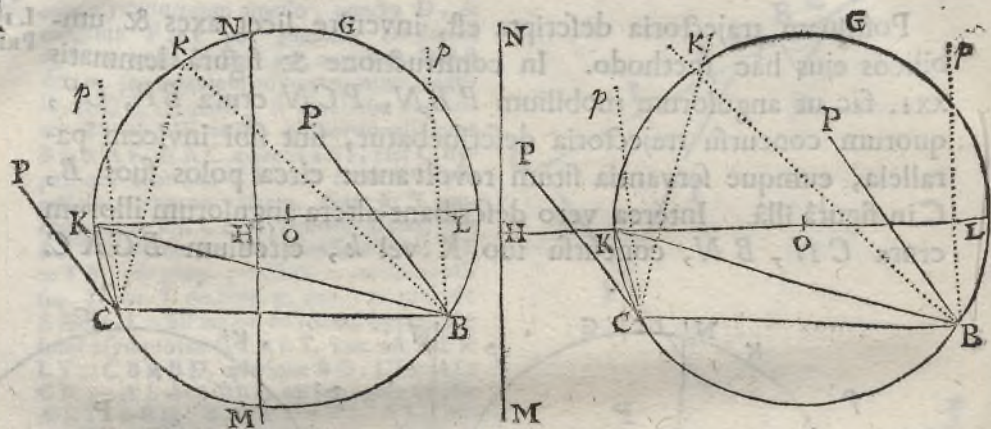
punctum Q , agatur QC , ipsi LH parallela, erit QC altera asymptotus, & hyperbola describerur (346).

(d) * Vid. Not. 314.

H h 2

* Vid.

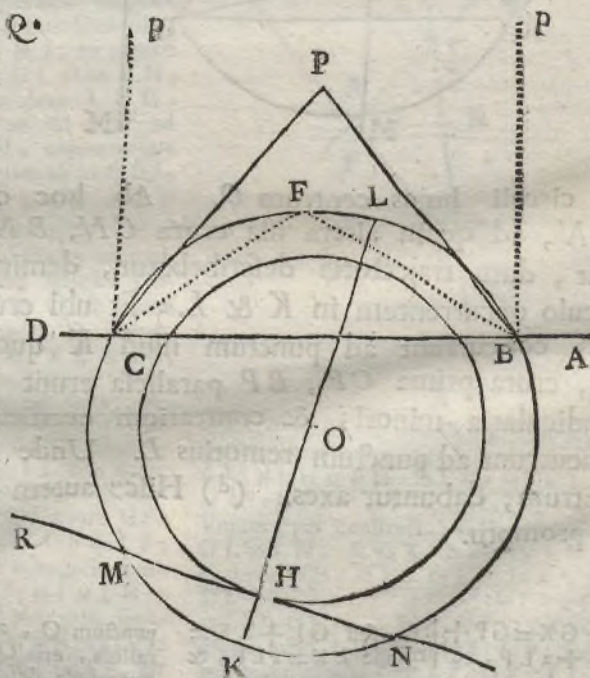
DE MOTU
CORPO-
RUM.



(e) Axium vero quadrata sunt ad invicem ut KH ad LH , & inde facile est trajectoriam (f) specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituentur poli C,

(e) * Vid. Not. 315.

(f) Sit describenda trajectoria specie data per puncta quatuor C, B, P, Q, duo puncta C, B constituentur poli & junctis CP, BP erunt PCB, PBC anguli mobiles, fac ut angulorum illorum crura BP, CP sint sibi invicem parallela, nempe in positione quavis Bp, Cp, & crura alia BC, CB se mutuo interfecent in F; & centro O describe circulum per tria puncta C, F, B transeuntem cujusque profundè segmentum CFB capit angulum CFB, centro O radio OH describatur circulus, (punctum verò H. ita determinetur in Diametro KL ut sit KH ad LH ut sunt ad invicem quadrata axium trajectoriae). Tum crurum BP, CP concursus adducatur ad punctum Q & interea notetur punctum R ubi concurrunt alia crura CA, BD, & ex puncto R agatur recta RMN tangens circulum radio OH descriptum, erit NM regula cujus ope trajectoria describetur.



B, tertium dabit angulos mobiles, *PCK*, *PBK*; his autem datis describi potest circulus *BGKC*. Tum ob datam specie trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, ideoque ipsa *OH*. Centro *O* & intervallo *OH* describe alium circulum, & recta, quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum *CK*, *BK*, ubi crura prima *CP*, *BP* concurrunt ad quartum datum punctum, erit regula illa *MN* cujus ope trajectoria describetur. (g) Unde etiam vicissim trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in datâ quâvis sectione conicâ inscribi potest.

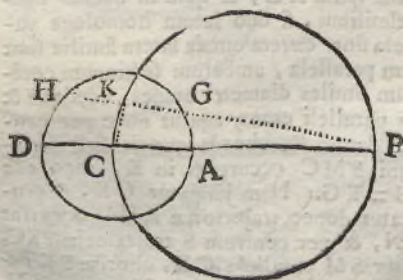
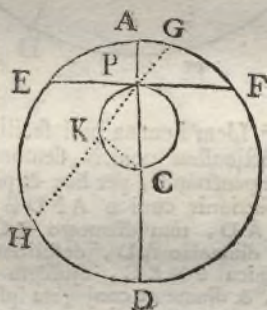
Sunt & alia lemmata quorum ope trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus, describi possunt. (h) Ejus generis est quod, si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam conicæ sectionem in punctis duobus intersectet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam conicæ sectionem ejusdem speciei cum priore, atque

Si describenda foret parabola, ducenda esset ex puncto *R* recta *RN*, circulum *CKB* tangens; nam in parabola punctum *H*, coincidit cum puncto *K* (313).

Quoniam autem ex puncto *R*, duæ tangentibus ut *RN* duci possunt, patet duas trajectorias specie datas per data quatuor puncta posse describi.

(g) * Nam si describatur trapezium quodvis specie datum, & huic circumscribatur sectio conica datæ similis Methodo in notâ præcedente expositâ, deinde in sectione conicâ datâ quatuor agantur lineæ in eâ similiter positæ ac quatuor trapezii latera in sectione trapezio circumscriptâ, habebitur trapezium specie datum in datâ sectione conicâ inscriptum.

(h) * Hoc Lemma facile demonstratur in circulo. Intra vel extra circulum *AFDE* datum sit punctum *P* per quod & per centrum circuli *C* agatur *PD*; tum diametro *PC* describatur circulus *PKCP*, chorda quælibet *GH* per punctum *P* ducta, bifariam divisa est in puncto *K* ubi circulo *PKC* occurrit; Nam junctâ *KC*, erit angulus *CKP* rectus ac proinde chorda *HG* bisecta in *K*.



H h. 2

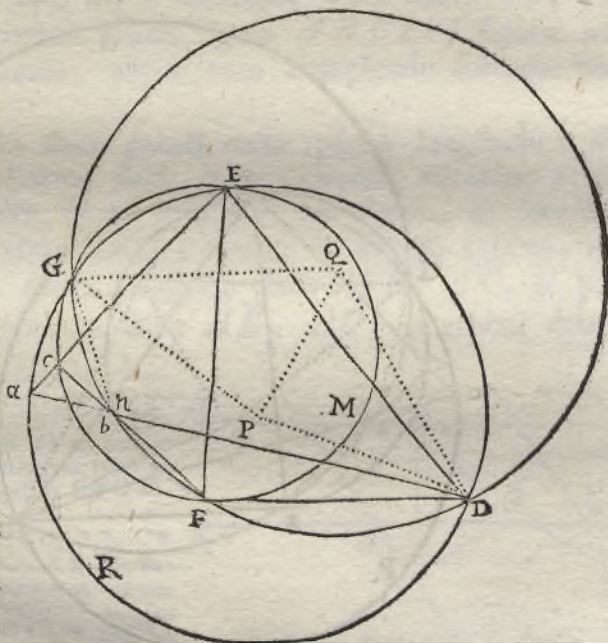
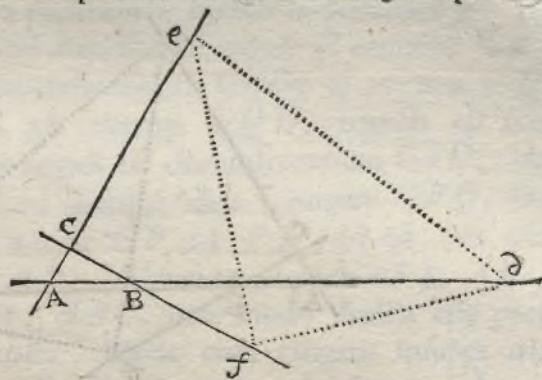
* Idem.

LEMMA XXVI.

LIBER I
PRIMUS

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

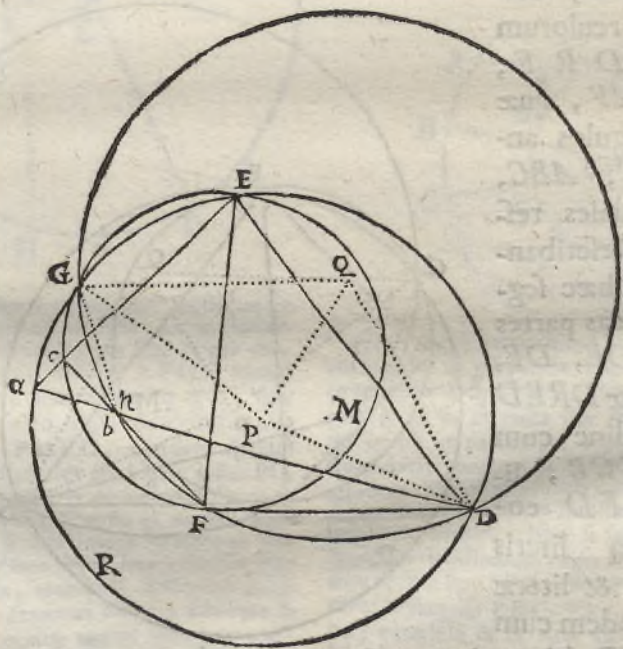
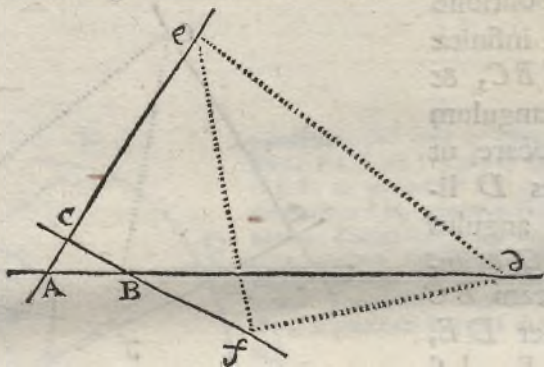
Dantur positione tres rectæ infinitæ AB , AC , BC , & oportet triangulum DEF ita locare, ut angulus ejus D lineam AB , angulus E lineam AC , & angulus F lineam BC tangat. Super DE , DF & EF , describe tria circulorum segmenta DRE , DGF , EMF , quæ capiant angulos angulis BAC , ABC , ACB æquales respectivè. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum DE , DF , EF , ut literæ $DRED$ eodem ordine cum literis $BACB$, literæ $DGFD$ eodem cum literis $ABCA$, & literæ $EMFE$ eodem cum



literis $ACBA$ in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in G , sintque centra eorum P & Q . Junctis GP , PQ , cape Ga ad AB ut est GP ad PQ , & centro G , intervallo Ga describe circulum, qui secet circulum primum DGE in a . Jungetur tum aD secans circulum secundum DFG in b , tum aE .

DE MOTU
CORPO-
RUM.

secans circulum tertium EMF in c . Et jam licet figuram
 $ABCdef$ constituere similem & æqualem figuræ $abcDEF$.
Quo facto perficitur problema.



Agatur enim Fc ipsi aD occurrens in n , & jungantur aG
 bG , QG , QD , PD . Ex constructione est angulus EaD
æqualis angulo CAB , & (i) angulus acF æqualis angulo ACB ,

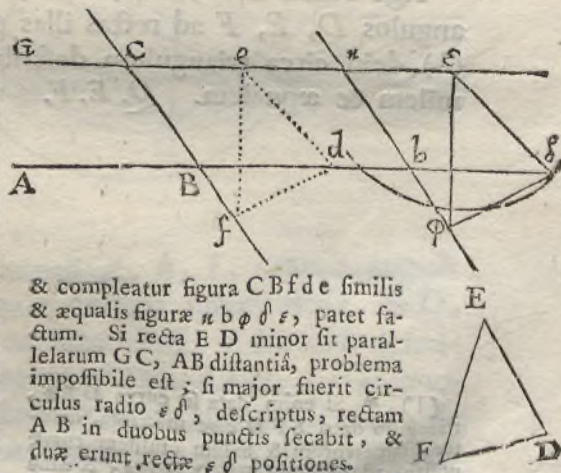
(i) * Angulus acF æqualis angulo ACB ,
nam angulus Fce est anguli acF atque
etiam anguli in segmento EMF comple-
mentum ad duos rectos, quare angulus
 acF , est æqualis angulo quem capit seg-
mentum EMF , hic autem angulus æqualis
est angulo ACB (per constr.). * An-

ideoque triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* seu *Fnd* angulo *ABC*, ideoque angulo *FbD* æqualis est; & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *GPQ*, (*k*) qui dimidius est anguli ad centrum *GPD*, æqualis est angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus *GQP*, qui dimidius est anguli ad centrum *GQD*, æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam *Gbd*, ideoque æqualis angulo *Gba*; suntque ideo triangula *GPQ*, *Gab* similia; & *Ga* est ad *ab* ut *GP* ad *PQ*; id est (ex constructione) ut *Ga* ad *AB*. Æquantur itaque *ab* & *AB*; & propterea triangula *abc*, *ABC*, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde cum tangant insuper trianguli *DEF* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc* respectivè, compleri potest figura *ABCdef* figuræ *abcDEF* similis & æqualis, atque eam complendo solvetur problema. *Q.E.F.*

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum *DEF*, puncto *D* ad latus *EF* accedente, & lateribus *DE*, *DF* in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data *DE* rectis positione datis *AB*, *AC*, & pars data *DF* rectis positione datis *AB*, *AC*, interponi debet;

(*k*) * Angulus *GPQ* dimidius est anguli ad centrum *GPD*, recta enim *PQ*, quæ circulorum *DRGD*, *DGFD* centra jungit, perpendicularis est ad rectam *GD*, quæ puncta intersectionum circulorum jungeret adeoque angulum *GPD* bisecat.

355. Si trium rectarum *GC*, *AB*, *CB* positione datarum duæ *GC*, *AB* sint parallelæ & oporteat triangulum datum *DEF* ita locare ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *GC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat, centro quovis *e* in lineâ *GC*, ad arbitrium sumpto & radio *eδ*, æquali *ED*, describatur circulus rectæ *AB*, occurrens in *δ*; super basi *eδ* construatur triangulum *eδφ* simile & æquale triangulo dato *EDF*, & ex angulo illius *φ* agatur *φn* rectæ *BC* parallela secans *GC* in *n* & *AB* in *b*;



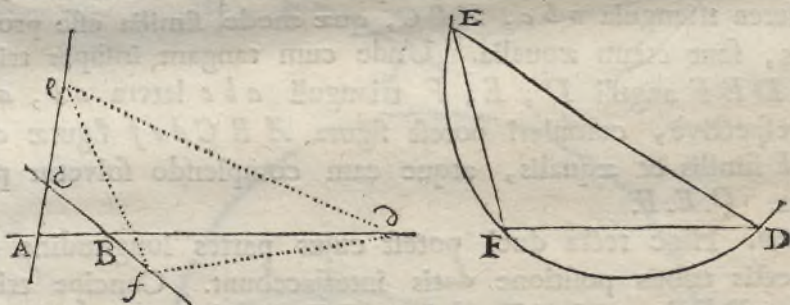
& compleatur figura *CBfde* similis & æqualis figuræ *n b δ ε*, patet factum. Si recta *ED* minor sit parallelarum *GC*, *AB* distantia, problema impossibile est; si major fuerit circulus radio *eδ*, descriptus, rectam *AB* in duobus punctis secabit, & duæ erunt rectæ *eδ* positiones.

& applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX.

Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit trajectoria, quæ sit similis & æqualis lineæ curvæ DEF , quæque à rectis tribus AB , AC , BC positione



dati, in partes datis hujus partibus DE & EF similes & æquales secabitur.

Age rectas DE , EF , DF , & trianguli hujus DEF pone angulos D , E , F ad rectas illas positione datas (per lem. xxvi) (1) dein circa triangulum describe trajectoriam curvæ DEF similem & æqualem. *Q. E. F.*

L E M-

(1) * Si enim data sit curva DEF , triangulo dato EFD circumscripta, dabitur diametrorum & axium ejusdem curvæ positio ad trianguli EFD latera; & hinc

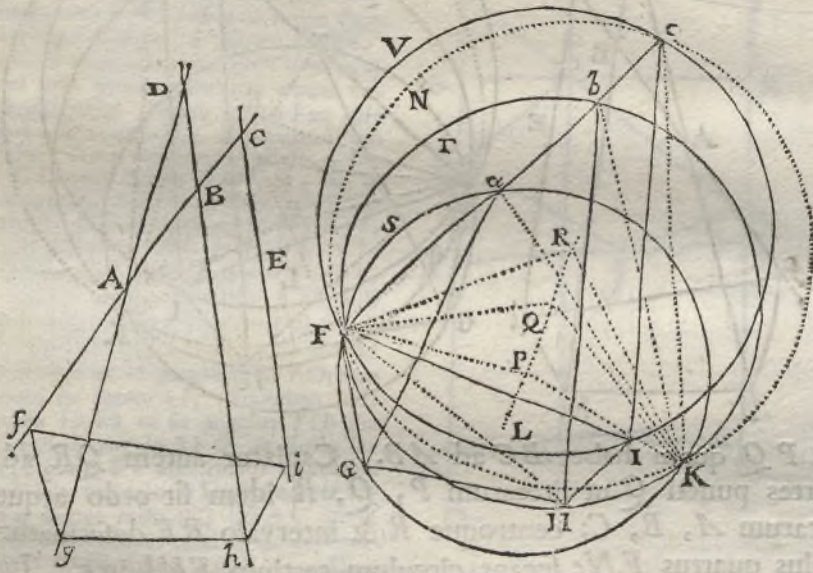
habebitur positio diametrorum & axium curvæ similis & æqualis circa triangulum efd describendæ.

LEMMA XXVII.

LIBER
PRIMUS.

Trapezium specie datum describere, cujus anguli ad rectas quatuor positione datas, quæ neque omnes parallelæ sunt, neque ad commune punctum convergunt, singuli ad singulas consistent.

Dentur positione rectæ quatuor ABC, AD, BD, CE ; quarum prima fecet secundam in A , tertiam in B , & quartam in C : & describendum sit trapezium $fghi$, quod sit trapezio $FGHI$ simile; & cujus angulus f , angulo dato F æqualis, tan-



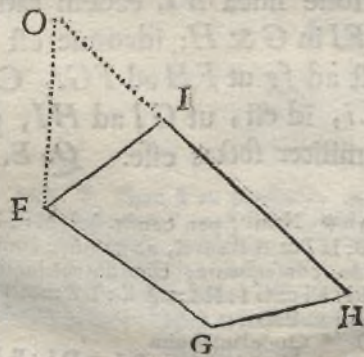
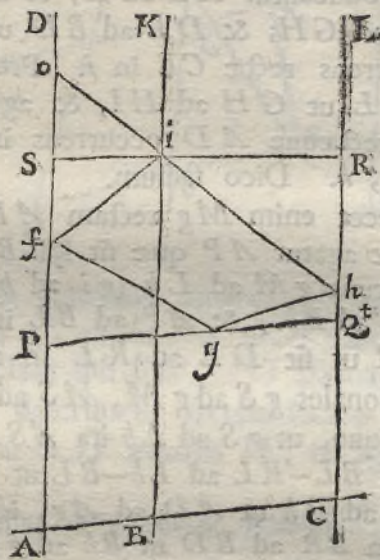
gat rectam ABC ; cæterique anguli g, h, i , cæteris angulis datis G, H, I æquales, tangant cæteras lineas AD, BD, CE respectivè. Jungatur FH & super FG, FH, FI describantur totidem circulorum segmenta FSG, FTH, FVI ; quorum primum FSG capiat angulum æqualem angulo BAD ; secundum FTH capiat angulum æqualem angulo CBD , ac tertium

misses angulorum FPK, FQK, FRK ad centra, ideoque angulorum illorum dimidiis LPK, LQK, LRK æquales. (m) Est ergo figura $PQRK$ figuræ $abcK$ æquiangula & similis, & propterea ab est ad bc ut PQ ad QR , id est, ut AB ad BC . Angulis insuper FaG, FbH, FcI æquantur fAg, fBh, fCi per constructionem. Ergo figuræ $abcFGHI$ figura similis $ABCfghi$ compleri potest. Quo facto trapezium $fghi$ constituetur simile trapezio $FGHI$, & angulis suis f, g, h, i tanget rectas ABC, AD, BD, CE . Q. E. F. Co-

(m) * Est enim angulus $Kab = KPR$, angulus $Kba = KQP$, ac proinde triangulum aKb , simile triangulo PQK , & similiter patet triangulum bKc , esse simile triangulo QKR , adeoque totam figuram $abcK$, similem esse figuræ $PQRK$.

* Si ex quatuor rectis positione datis duæ vel tres fuerint parallelæ manet eadem constructio. Potest tamen hæc alia adhiberi quæ etiam valet, ubi quatuor sunt parallelæ. Datae sint tres parallelæ AD, BK, CL quas quarta AC in A, B, C secat & oporteat describere trapezium simile trapezio $FIHG$ & cuius anguli angulis F, I, H, G æquales, rectas AD, BK, CL, AC , tangant, per punctum quodvis i , rectæ BK , agatur SiR , parallelis AD, BK CL normalis, iisque occurrens in S , & R , producatur HI , ad O , ut sit HI ad IO ut est Ri ad iS jungaturque FO ; tum ex puncto i , agatur if , parallelam AD secans in f , ita ut sit angulus fIB seu iFD , æqualis angulo IFO , & super latere fi , simili FI construatur trapezium $fihg$ simile trapezio $FIHG$, ac per angulum g agatur recta PQ ipsi AC parallelæ, & tandem super rectâ AC , construatur figura similis figuræ $PQhifg$. Dico factum.

Demonstrandum est angulum h esse in parallelâ CL ; si punctum h , non est in lineâ CL producatur ih donec rectæ CL occurrant in t , & producatur ti , donec occurrat rectæ AD in o & erit $HI:IO = hi:io = Ri:iS$, ob figuras $oifh, OIFH$, (per constr.) similes; sed ob similia triangula $tiR, ois, ti:io = Ri:iS$, ergo $hi:io = ti:io$, atque adeo $hi = ti$; quare punctum t , cum h , coincidit.



DE MOTU
CORPO-
RUM.

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli FGH , GHI usque eo, ut rectæ, FG , GH , HI in directum jaceant, & in hoc casu construendo problema ducetur recta $fg hi$, cujus partes fg , gh , hi , rectis quatuor positione datis AB & AD , AD & BD , BD & CE interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ FG , GH , HI , eundemque servabunt ordinem inter se. Idem verò sic fit expeditius.

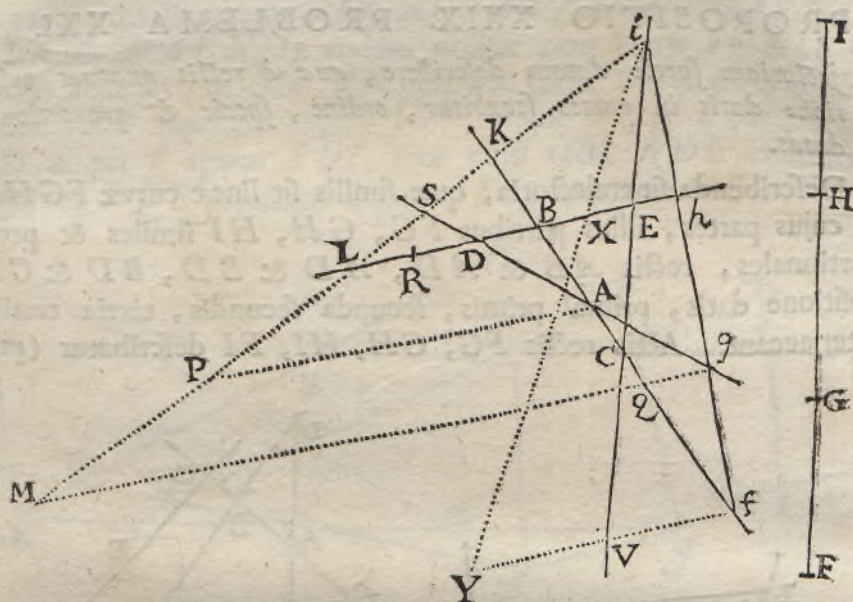
Producantur AB ad K , & BD ad L , ut sit BK ad AB ut HI ad GH ; & DL ad BD ut GI ad FG ; & jungatur KL occurrens rectæ CE in i . Producat iL ad M , ut sit LM ad iL ut GH ad HI , & agatur tum MQ ipsi LB parallela, rectæque AD occurrens in g , tum gi secans AB , BD in f , h . Dico factum.

Secet enim Mg rectam AB in Q , & AD rectam KL in S , & agatur AP quæ sit ipsi BD parallela & occurrat iL in P , & erunt gM ad Lh (gi ad hi , ⁽ⁿ⁾ Mi ad Li , GI ad HI , AK ad BK) & AP ad BL in eadem ratione. Secetur DL in R ut sit DL ad RL in eadem illâ ratione, & ob proportionales gS ad gM , AS ad AP , & DS ad DL ; erit, ^(o) ex æquo, ut gS ad Lh ita AS ad BL & DS ad RL ; & mixtim, $BL-RL$ ad $Lh-BL$ ut $AS-DS$ ad $gS-AS$. Id est BR ad Bh ut AD ad Ag , ideoque ut BD ad gQ . Et vicissim BR ad BD ut Bh ad gQ , seu fh ad fg . Sed ex constructione linea BL eadem ratione secta fuit in D & R atque linea FI in G & H : ideoque est BR ad BD ut FH ad FG . Ergo fh est ad fg ut FH ad FG . Cum igitur sit etiam gi ad hi ut Mi ad Li , id est, ut GI ad HI , patet lineas FI , fi in g & h , G & H similiter sectas esse. *Q. E. F.* In

(n) * Nam (per constr.) $LM:iL = GH:HI = AB:BK$, ac proinde componendo consequentes cum antecedentibus $Mi:Li = GI:HI = AK:EK = AP:BL$ ob parallelas.

(o) * Quoniam enim
 $gM:Lh = AP:BL = DL:RL$
 & $gS:gM = AS:AP = DS:DL$

patet esse $gS:Lh = AS:BL = DS:RL$, & consequenter $gS-AS:Lh-BL = AS-DS:BL-RL = gS:Lh$; unde invertendo permutando & alternando $BL-RL:Lh-BL = AS-DS:gS-AS$ id est $BR:Bh = AD:Ag = BD:gQ$, ob similia triangula ADB , AgQ . * Si



In constructione corollarii hujus postquam ducitur LK secans CE in i , producere licet iE ad V , ut sit EV ad Ei ut FH ad HI , & (p) agere Vf parallelam ipsi BD . (q) Eodem recidit si centro i , intervallo IH , describatur circulus secans BD in X , & producat iX ad Y , ut sit iY æqualis IF , & agatur Yf ipsi BD parallela.

Problematis hujus solutiones alias *Wrennus* & *Wallisus* olim excogitarunt.

P R O.

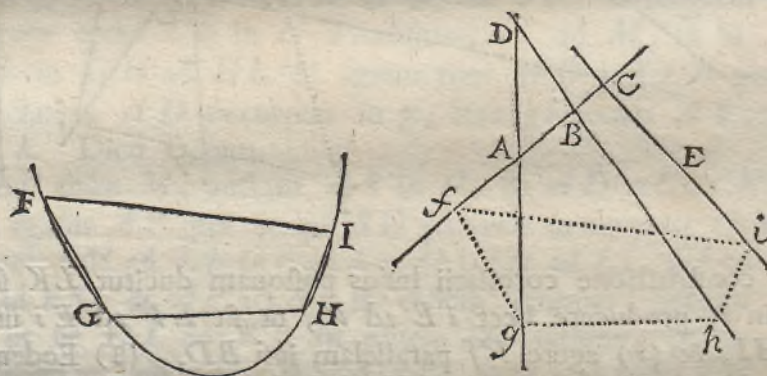
(p) * Si enim ex puncto f , per superiorem constructionem invento agatur fV parallela BD & linea iE producta occurrens in V , erit ob similia triangula iEh , iVf , $EV:Bi = fh:hi$, sed ex supra demonstratis $fh:hi = FH:HI$, ergo $EV:Bi = FH:HI$.

(q) * Nam si ex puncto f , ut supra invento agatur fY , ipsi BD , parallela & recta iX , producta occurrens in Y , erit ob similia triangula iXh , iYf , $ih:hf = iX:XY = IH:HF$. Unde cum sit $iX = IH$ (ex hyp.) erit $XY = HF$.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam specie datam describere, quæ à rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.

Describenda sit trajectoria, quæ similis sit lineæ curvæ $FGHI$, & cujus partes, illius partibus FG , GH , HI similes & proportionales, rectis AB & AD , AD & BD , BD & CE positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis FG , GH , HI , FI describatur (per

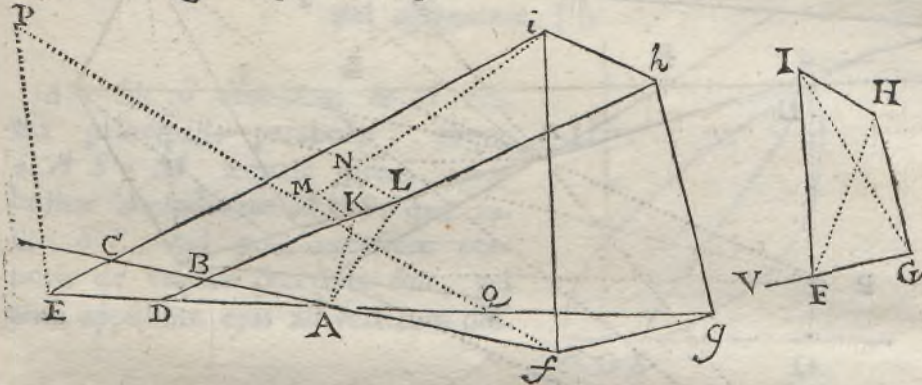


lem. xxvii.) Trapezium $fghi$, quod sit trapezio $FGHI$ simile, & cujus anguli f , g , h , i tangant rectas illas positione datas AB , AD , BD , CE , singuli singulas dicto ordine. Dein circa hoc trapezium describatur trajectoria curvæ lineæ $FGHI$ confimilis.

Scholium.

Construi etiam potest hoc problema ut sequitur. Junctis FG , GH , HI , FI produc GF ad V , jungeque FH , IG , & angulis FGH , VFH fac angulos CAK , DAL æquales. Concurrent AK , AL cum recta BD in K & L , & inde agantur KM , LN , quarum KM constituat angulum AKM æqualem angulo GHI , sitque ad AK ut est HI ad GH ; & LN constituat angulum ALN æqualem angulo FHI , sitque ad AL .

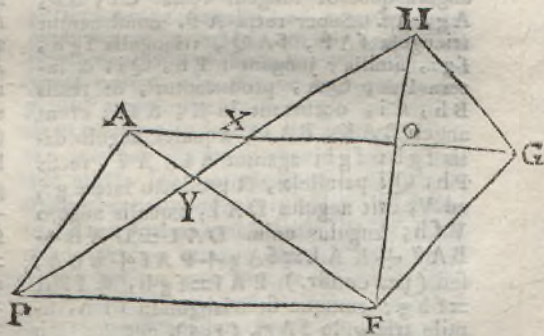
AL ut *HI* ad *FH*. Ducantur autem *AK*, *KM*, *AL*, *LN* ad eas partes linearum *AD*, *AK*, *AL*, ut literæ *CAKMC*, *ALKA*, *DALND*, eodem ordine cum literis *FGHIF* in orbem redeant; & acta *MN* occurrat rectæ *CE* in *i*. Fac angulum *iEP* æqualem angulo *IGF*, sitque *PE* ad *Ei* ut *FG* ad *GI*; & per *P* agatur *PQf*, quæ cum rectâ *ADE* contineat angulum *PQE* æqualem angulo *FIG*, rectæque *AB* occurrat



in *f*, & jungatur *fi*. Agantur autem *PE* & *PQ* ad eas partes linearum *CE*, *PE*, ut literarum *PEiP* & *PEQP* idem sit ordo circularis qui literarum *FGHIF*, & si super lineâ *fi* eodem quoque literarum ordine constituatur trapezium *fg hi* trapezio *FGHI* simile, & circumscribatur trajectory specie data, solvetur problema. (r)

(r) Hæc nova constructio hoc præmissa Lemmate Demonstratur.

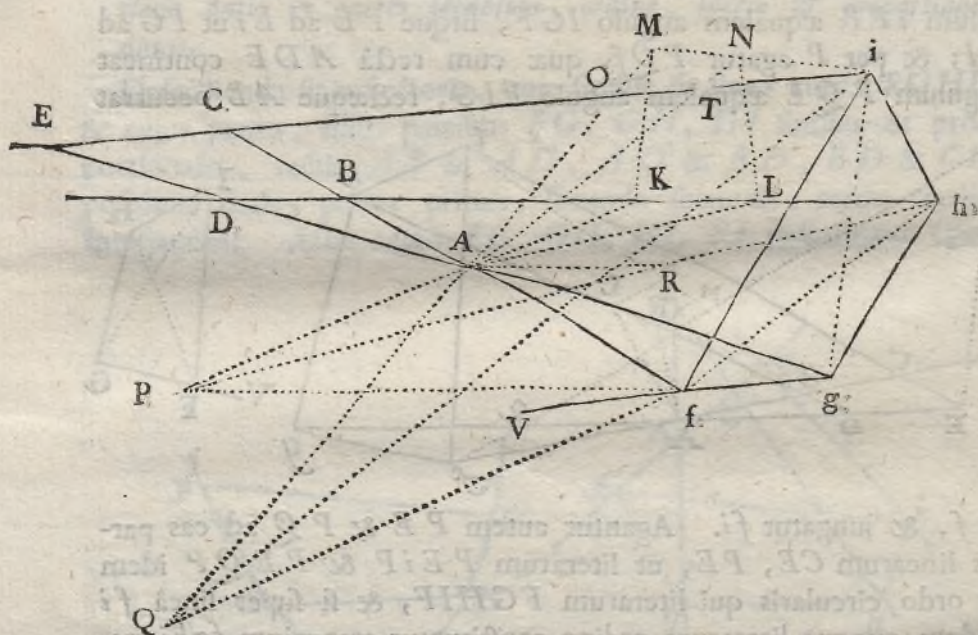
Lemma. Si ex puncto *A* extrâ triangulum *FGH* dato, agatur ad angulum *F* recta *AF*, & ad angulum *G* recta *AG*, secans latus oppositum *HF* in *O*, & super rectam *AF*, construatur triangulum *FAP*, simile triangulo *FGH*, jungaturque *PH* secans *AG* in *X*, & *AF* in *Y*, similia erunt triangula *PHF*, *AGF*, & anguli *HXC*, *HFG* æquales; quoniam enim anguli *AFP*, *HFG* sunt æquales (per hyp.) æquales quoque erunt anguli *PFH*, *AFG*; & quoniam duo triangula *PFA*, *HFG*, similia sunt (per hyp.) erit $PF:AF=HF:FG$, adeoque triangula *AFG*, *PFH*, quorum latera proportionalia æqualem angulum continent sunt similia, & hinc anguli *HPF*, *GAF* æquantur; cumque anguli oppositi



PYF, *AYX*, sint etiam æquales, liquet angulum *AXY* sive *HXC*, æqualem esse angulo *AFP=HFG*. Q. e. D.

Hactenus de orbibus inveniendis. Superest ut motus corporum in orbibus inventis determinemus.

S E C-



357. Hoc itaque, posito, demonstratur Newtoniana constructio. Trapezii $fgh i$, anguli quatuor tangant rectas Ci , Bh , Ag , Af . Super rectâ Af , construantur triangula fAP , fAQ , triangulis fgh , fgi , similia; jungantur Ph , Qi , & latera PA , QA , producantur, ut rectis Bh , Ci , occurrant in K , & O ; erunt anguli BAK , BAO , æquales angulis datis fgh , fgi ; agantur AL , AT , rectis Ph , Qi parallelæ, & producto latere gf ad V , erit angulus DAL , æqualis angulo Vfh ; angulus enim $DAL = DAB + BAK + KAL = fAg + PAf + hPA$; sed (per constr.) $PAf = fgh$, & $fPA = fgh$; cumque sit triangulum fPh , simile triangulo fAg , (356), angulus $fPh = fAg$, adeoque $hPA + fAg = hPA + fPh = fPA = fgh$; quare $DAL = fgh + fgh = Vfh$ (per 32. 1. Elem.). Et similiter ostenditur angulum DAT , esse

æqualem angulo Vfi , ob triangula fAQ , fQi , triangulis fgi , fAg , similia. Agantur rectæ KM , LN , quæ cum rectis AK , AL constituent angulos AKM , ALN angulis ghi , fhi æquales, rectisque AO , AT productis occurrant in M & N , & triangula AKM , ALN similia erunt triangulis ghi , fhi , (unde juxta constructionem Newtoni erit $KM:AK = hi:hg$, & $LN:AL = hi:hf$). Etenim angulus $MAK = PAQ = PAf - QAf = fgh - fgi = igh$, (per constr.) quare cum sit quoque (per constr.) angulus $AKM = ghi$, triangula AKM , ghi sunt similia, angulus verò $NAL = DAL - DAT = Vfh - Vfi$ (per Dem.) sed $Vfh - Vfi = ifh$, ergo triangula ifh , NAL similia sunt. jungatur MN , demonstrandum est hanc lineam productam transire per angulum i , quo trapezium tangit lineam ECi , ex puncto A , ad rectam Ph , agatur AR recta

SECTIO VI.

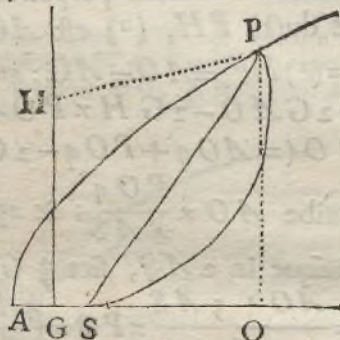
L'IBER PRIMUS.

De inventione motuum in orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in datâ trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum. (1)

(1) Sit *S* umbilicus & *A* vertex principalis parabolæ, sitque $4 AS \times M$ æquale areæ parabolicæ abscindendæ *AP**S*, quæ radio *SP*, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem def-



rectæ *Bh*, parallela, ob similia triangula *fgh*, *fAP* erit $fg : hg = Af : PA$ ob sim. tri. *fgi*, $fAQ \dots gi : fg = QA : Af$ ob sim. tri. *ghi*, *AKM* $hg : gi = AK : AM$ ob sim. tri. *AKL*, *PAR* $AK : AL = PA : PR$ ob sim. tri. *fQi*, *fPh*, $fh : fi = Ph : Qi$; sed ob sim. tri. *fhi*, *ALN*, $fh : fi = AL : AN$.

ergo $AL : AN = Ph : Qi$ & $AL : AN = Ph - AL : Qi - AN$ & quia $AL = Rh$ est $AL : AN = PR : Qi - AN$ undè per compositionem rationum & ex æquo, $AK : AN = QA \times AK : AM \times (Qi - AN)$ quare $AK \times AM : AN \times AM = QA \times AK : AM \times Qi - AN$, ac proindè $AM : AN = QA : Qi - AN$, adeoque $AM : AN = QM$ seu $QA + AM : Qi$ seu $Qi - AN + AN$. Quoniam igitur rectæ *AN*, *Qi*, sunt parallelæ (per constr.) patet puncta *M*, *N*, *i*, esse in unâ rectâ, atque hæc est prima pars constructionis Newtonianæ quæ erat demonstranda.

2^a. illius pars facile ostenditur. Nam (vid. fig. Newt.) junctâ *Pi*, erit (per constr.) triangulum *PiE*, super rectâ *Ei* constructum simile triangulo *fig*, ad cuius angulos *i* & *g*, ductæ sunt ex puncto *E*, rectæ *Ei*, *Eg*; quare (356), si per

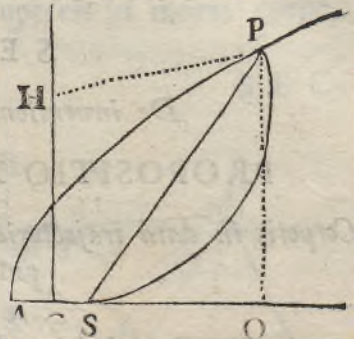
punctum *P* agatur recta *PQ*, quæ cum rectâ *Eg*, contineat angulum *PQE* æqualem angulo *fig*, recta illa *PQ*, producta tanget angulum *f*, trianguli *fig*, seu trapezii *fghi*. Q. e. D.

(1) 338. Newtonus in hac totâ sectione supponit corpus in trajectoriâ conicâ datâ itâ moveri, ut radiis ad trajectoriæ umbilicum ductis areas seu sectores describat temporibus proportionales; eâ enim lege planetas omnes in orbitis conicis revolvi ex phenomenis lib. 3^o. ostendit. Præterea supponit notum esse tempus quo corpus ex puncto trajectoriæ dato v. g. ex vertice illius principali ad aliud ejusdem trajectoriæ punctum datum pervenit, datamque esse aream seu trajectoriæ sectorem huic tempori correspondentem, atque ex his datis querit locum mobilis in trajectoriâ ad aliud quodvis tempus datum, aut contrâ querit tempus quo mobile datum quodvis trajectoriæ punctum attingit; nam cum sint areæ temporibus proportionales, dato tempore quovis, datur area hoc tempore descripta, & vicissim datâ areâ descriptâ datur tempus quo describitur.

(1) * Sit *S* umbilicus, & *A*, vertex principalis parabolæ, datumque sit tempus quo

DE MOTU
CORPO-
RUM.

cribenda est. Innotescit quantitas
areae illius abscindendæ ex tempo-
re ipsi proportionali. Biseca AS in
 G , erigeque perpendicularum GH
æquale $3M$, & circulus centro H ,
intervallo HS descriptus secabit pa-
rabolam in loco quæsito P . Nam,
demissâ ad axem perpendiculari PO
& ductâ PH , (u) est $AGq + GHq$



(= (x) $HPq = AO - AG : quad. + PO - GH : quad.$) = $AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. (y) Unde $2GH \times PO = AOq + POq - 2GAO = AOq + \frac{3}{4}POq$. Pro AOq scribe $AO \times \frac{POq}{4AS}$; & applicatis terminis omnibus ad $3PO$ ductisque in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS (= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO = \text{area } \overline{APO - SPO}) = \text{area } APS$. Sed GH erat $3M$, & inde $\frac{4}{3}GH \times AS$ est $4AS \times M$. Ergo area abscissa APS æqualis est abscindendæ $4AS \times M$. Q. E. D.

Co.

corpus in parabolâ motum, ut modò exposuimus (358.) ex vertice A ad punctum P , aut ex puncto P ad verticem A pervenit, seu datum sit tempus quo sector quilibet APS describitur.

(u) * Est $AG^2 + GH^2 = HP^2$; nam $AG = GS$, $HP = HS = HA$, & angulus G rectus (per constr.) quare $HA^2 = HP^2 = AG^2 + GH^2$.

(x) * $HP^2 = AO - AG^2 + PO - GH^2$. Nam ex puncto H , ad rectam PO demissa intelligatur perpendicularis, hæc erit æqualis ipsi $GO = AO - AG$, & pars rectæ PO inter perpendicularem & punctum P intercepta æqualis erit $PO - GH$.

(y) * Unde sublatis utrinque quadratis $AG^2 + GH^2$; & addito utrinque rectangulo $2GH \times PO$, est $2GH \times PO = AO^2 + PO^2 - 2GAO$; quoniam autem in parabolâ latus rectum $= 4AS = 8AG$,

est $8AG \times AO$ five $8GAO = PO^2$, & $2GAO = \frac{1}{4}PO^2$, & $PO^2 - 2GAO = \frac{3}{4}PO^2$. Cum verò sit $4AS \times AO = PO^2$, adeoque $4AS \times AO^2 = AO \times PO^2$, & $AO^2 = \frac{AO \times PO^2}{4AS}$, erit igitur $2GH \times PO = \frac{AO \times PO^2}{4AS} + \frac{3}{4}PO^2$; & dividendo utrinque per $3PO$, fiet $\frac{2}{3}GH = \frac{AO \times PO}{12AS} + \frac{1}{4}PO$, ductisque omnibus terminis in $2AS$, fiet $\frac{4}{3}GH \times AS = \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO$.

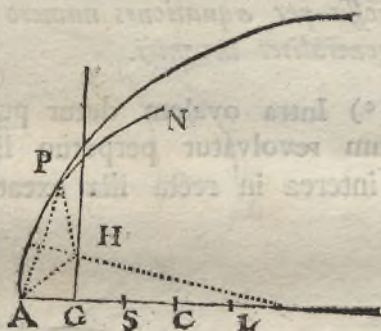
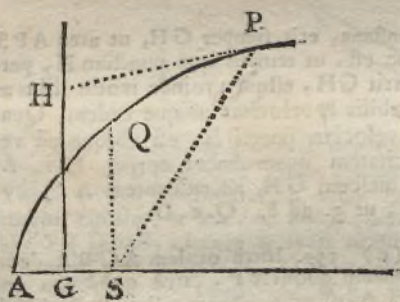
LIBER PRIMUS.

Corol. 1. Hinc GH est ad AS , ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & (a) perpendicularum ad axem ab umbilico S erectum.

Col. 2. (b) Et circulo ASP per corpus motum P perpetuo transeunte, velocitas puncti H est ad velocitatem quam corpus

ob $AS = AO - SO$ unde est $3AS = 3AO - 3SO$. Verum $\frac{4AO \times PO}{6}$ seu $\frac{2}{3}AO \times PO$, est area parabolica $APOA$, (Archimed. prop. 17. quadr. Parab. sup. Theor. IV. de Parab. pag. 133.) & $\frac{3SO \times PO}{6}$ seu $\frac{1}{2}SO \times PO$, est area trianguli PSO , ergo area sectoris Parabolici APS , æqualis est $\frac{4AO - 3SO}{6} \times PO$, quare $\frac{4}{3}GH \times AS = \text{area } APS$; sed $GH = 3M$, (per constr.) &c.

describitur arcus AQ , & tempore quo describitur AP , per simplicem proportionem invenitur HG , & inde punctum H habetur.



(b) * Jungatur AP , & ad medium ejus punctum q , erigatur perpendicularum qL , axem secans in L , & quoniam (ex Dem.) est semper $HP = HA$, ideoque est AP chorda circuli cujus centrum est H . Itaque (per 1. 3ⁱ. Elem.) perpendicularum illud qL , rectæ GH , occurrit in H ; & ob similitudinem triangulorum LGH , LqA , est $GH : qA$ seu $\frac{1}{2}AP = LG$. Lq : Sumatur $AC = 2AS$ dimidio nempe lateris recti parabolæ & centro C , & intervallo CA , describatur circulus AN , hic parabolam osculatur in A (241); coeuntibus verò punctis P & A , H & G , coeunt etiam L & C , fitque $Lq = LA = CA = 2AS = 4GS$, & $LG = CG = 3GS$, atque arcus AP æqualis chordæ AP , (Lem. VII.); unde cum in proportione superiori sit $GH : \frac{1}{2}AP = LG$; Lq erit in hoc casu $GH : \frac{1}{2}AP = 3GS : 4GS$

(a) * Sit perpendicularum illud SQ , erit area ASP , ad aream ASQ , ut $\frac{4}{3}GH \times AS$, ad $\frac{2}{3}AS \times SQ$ (Theor. IV. de Par. p. 133.); sed ex naturâ Parabolæ (Vid. Cor. 2. Theor. I. de Par. p. 131.) SQ æqualis dimidio lateri recto $= 2AS$, ergo area ASP est ad aream ASQ , seu tempus per AP ad tempus per AQ , ut $\frac{4}{3}GH \times AS$ ad $\frac{4}{3}AS^2$, hoc est, ut GH ad AS . Dato igitur tempore quo

DE MOTU
CORPO-
RUM.

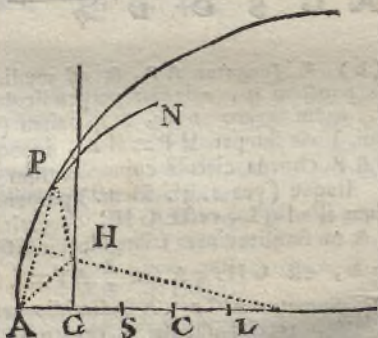
pus habuit in vertice A ut 3 ad 8; ideoque in eâ etiam ratione est linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P , eâ cum velocitate quam habuit in vertice A , describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versâ inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum AP . Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in H .

LEMMA XXVIII.

Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

(c) Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergat-

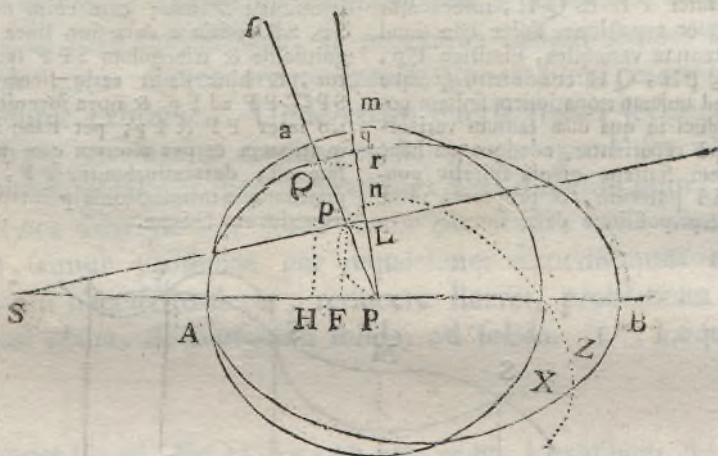


hoc est, $GH : AP = 3 : 8$. Verum ob motum æquabilem & æquidistantium per nascentes AP , GH , velocitas puncti H in G , est ad velocitatem corporis P in A ut GH ad AP , & quoniam (ex Dem.) est semper $\frac{4}{3} AS \times GH$ æqualis area APS , & $\frac{4}{3} AS$, est quantitas

constans, erit semper GH , ut area APS , hoc est, ut tempus quo punctum H , percurrit GH , estque proinde motus illius æquabilis & velocitas ubique eadem. Quare velocitas puncti H , est ubique ad velocitatem quam habet corpus P in A , ut nascens GH , ad nascentem AP , hoc est, ut 3. ad 8. Q. e. D.

(c) 359. Intra ovalem $ACBA$ detur punctum quodvis P , circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta infinita PS , uniformi cum motu, ita ut punctum datum A illius lineæ circuli A a mX arcus æquales æqualibus temporibus describat, & interea in recta illa PS , exeat punctum mobile p de polo P , pergatque semper in eadem recta PS cum velocitate quæ sit ut recta illius intra ovalem quadratum, hoc est, cum linea PS pervenit ad situm PL , & punctum mobile p ad p , velocitas puncti p sit ut quadratum rectæ PQ inter polum P & ovalem $AQCB$ contentæ, hoc motu punctum illud p , describet spiralem $PpnZ$, gyris infinitis.

gatque semper eâ cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet spiralem gyris infinitis. Jam si areæ ovalis à rectâ illâ abscissæ portio per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti à polo, (d) quæ huic areæ proportionalis est, ideoque omnia spiralis puncta per æquationem fini-



(d) 360. His suppositis erit semper recta Pp ut area PAQp; nam circulus AamX divisus intelligatur in arcus innumeros æquales ut am, & ductis radiis PQ, Pq spirali, circulo & ovali occurrentibus in p & n, a & m, Q & q, demissa capiantur ex punctis Q & p, ad Pq, perpendiculara Qr, pL, & eodem tempore quo punctum a, percurreret arcum am, punctum p percurreret rectam Ln; quâpropter nascente arcu am, erit Ln ut velocitas puncti p in rectâ Pf, hoc est, (per Hyp.) ut quadratum rectæ PQ; porro ob triangula similia P am, P Q r est Pa : PQ = am : Qr = $\frac{PQ \times am}{Pa}$, ac proinde sectoris nascentis PQq area $\frac{1}{2} Qr \times PQ = \frac{PQ^2 \times am}{2Pa}$. Cum igitur am & 2Pa, sint quantitates constantes (ex

hyp.) erit sector PQq, nascens seu fluxio areæ PAQ ut PQ², atque idem ut nascens Ln, seu ut fluxio rectæ Pp, & hinc tota area fluens PAQ, erit ut tota recta fluens Pp, (coroll. Lem. IV.) Q. e. D.

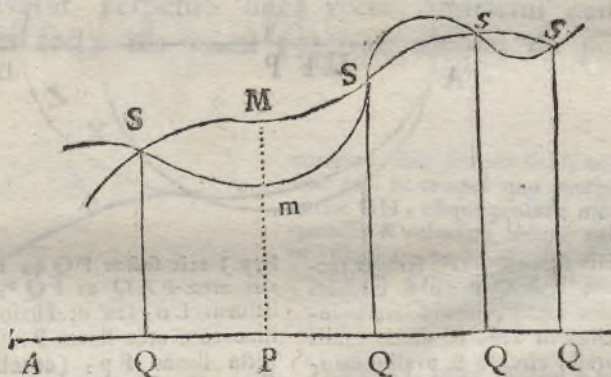
361. Puncta p & Q referantur ad rectam AB, positione datam demissis ad AB perpendicularibus QH, pF sitque area PAQ, æqualis quantitati finitæ E ex lineis variabilibus PH, QH & aliis constantibus quomodolibet compositæ, & quoniam linea Pp areæ PAQ seu quantitati finitæ E proportionalis est (360) linea illa exprimi poterit per factum ex quantitate E in quantitate constantem B, eritque PpE = xB æquatio finita. Verum ob similia triangula Pfp, PHQ & angulum ad H rectum, Pp : pF = PQ, seu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : QH$, & Pp : PF = PQ seu $\sqrt{PH^2 + QH^2} : PH$, & prætere-

DE MOTU
CORPO-
RUM.

finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta spiralem fecat in punctis, numero infinitis, & (e) æquatio, quâ intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, ideoque ascendit ad tot dimensiones

reâ ex naturâ ovalis A Q C B, datur alia æquatio inter P H & Q H, inveniuntur ergò quatuor æquationes finitæ quæ simul quinque tantum variables, nimirum P p, P F, p F, P H, Q H continent, quæque proinde ad unicam æquationem finitam poterunt reduci in quâ duæ tantum variables P F, p F reperientur, adeoque per hanc æquationem finitam omnia spiralis puncta inveniri poterunt, & propterea rectæ cujusvis S p positione datæ intersectio p

cum spirali inveniri etiam poterit per æquationem finitam; cum enim duæ rectæ S p, S B positione datæ sint, linea S P magnitudine & triangulum S P F specie datur, & hinc datur ratio lineæ S F seu $SP \mp PF$ ad F p, & nova invenitur æquatio inter P F & F p; per hanc igitur æquationem & per alteram quæ ad spiralem est, determinabuntur P F, & F p, punctumque intersectionis p invenietur per æquationem finitam,



(e) 362. Lineæ duæ SMS, S m s se mutuo intersectantes in punctis S, s ad eandem rectam A Q positione datam referantur, sintque A Q, A P abscissæ communes, & Q S, P M, P m ad eas ordinatæ; quoniam in communibus linearum S M s, S m s, intersectionibus S, s, ordinatæ P M, P m sunt æquales, si in duabus ad lineas S M s, S m s æquationibus, manente abscissâ communi, loco ordinarum P M, P m, eadem scribatur littera, v. gr. y, & deinde ex illis æquationibus eliminetur littera quæ abscissam communem exprimit, obtinebitur æquatio ex solâ y, & constantibus composita. Porro hæc ultima æquatio non magis primam ordinatam communem S Q,

seu primam intersectionem S, quam secundam aut tertiam &c. determinabit, cum sit eadem omnium lex & conditio idemque calculus; hæc igitur æquatio debet omnes communes ordinatas Q S, omnesque intersectiones S, simul complexi & indifferenter exhibere, & ita tot radices seu ipsius y valores reddere quot sunt communes ordinatæ seu intersectiones, æquatio autem tot dimensiones habet quot radices; Si itaque linearum S M s, S m s, intersectiones S, s, sunt numero finitæ, æquatio quoque quæ illas determinat finita est; at si fuerint intersectiones numero infinitæ, erit æquatio numero dimensionum & radicum infinita. * Exem-

tionem quot sunt interfectiones. Quoniam circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, interfectio una non inuenietur nisi per æquationem duarum dimensionum, quâ interfectio altera etiam inueniatur. (f) Quoniam duarum sectionum conicarum quatuor esse possunt interfectiones, non potest aliqua earum generaliter inueniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, quâ omnes simul inueniantur. Nam si interfectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoque, & propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes interfectiones simul complecti & indifferenter exhibere. Unde etiam interfectiones sectionum conicarum & curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & interfectiones duarum curvarum tertiæ potestatis; quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. (g) Id nisi necessario fieret, reducere liceret, problemata omnia solida ad plana, & plusquam solida, ad solida. (h) Loquor hic de

(f) * Exempli causâ. Sint $ap + px = yy$, & $bx - xx = yy$, æquationes ad parabolam & circulum, & inuenietur $x = \frac{yy - ap}{p}$, & $\frac{byy - bap}{p^2} + \frac{2apyy - aapp}{p^2} = yy$, æquatio quatuor dimensionum, quoniam quatuor esse possunt parabolæ & circuli interfectiones. Sint $ap^2 + p^2x = y^3$, & $bx - xx = y^2$ æquationes ad parabolam 3^æ. potestatis & ad circulum, erit $x = \frac{y^3 - ap^2}{p^2}$ & $\frac{by^3 - bap^2}{p^2} + \frac{y^6 + 2ap^2y^3 - a^2p^4}{p^2} = yy$ æquatio sex

nice quarum interfectiones, seu ordinatæ duabus coni sectionibus communes, problematis solutionem seu ultimæ æquationis radices suppeditant. Quare si huiusmodi interfectiones vel ordinatæ communes generaliter possent per æquationem quadraticam inueniri, problemata solida per æquationes duarum dimensionum solvi ac construi possent, atque ita ad plana reducerentur, eademque ratione plusquam solida ad solida, indeque ad plana reuocarentur.

dimensionum quod esse possunt interfectiones sex, & ita de cæteris. Generatim vero tot esse possunt curvarum duarum interfectiones quot sunt unitates in factio ex potestatis curvæ unius indice seu exponente in alterius exponentem; index autem potestatis curvæ idem est cum numero dimensionum æquationis ad illam curvam.

(h) Nonnunquam proposita ad curvam æquatio ad inferiorem potestatem aut in duas æquationes inferioris potestatis resolvi potest. Sic æquatio $ax^3 - a^2x^2 - bx^2y + axy^2 + abxy - by^3 = 0$ resolvi potest in duas $xx - ax + yy = 0$, & $ax - by = 0$ quarum prior est ad circulum, posterior ad parabolam. Parabolæ autem & circuli cum lineâ quâvis interfectiones per calculos diversos seorsim inueniri possunt.

(g) * Nam in solidorum problematum constructione duæ adhibentur sectiones co-

diculum illud unà cum secante revolvatur circa polum, intersectiones spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutata magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, ideoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat ovalis cujus arca, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

(k) Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æqua-

tionem, constantes sunt rectæ SF, FP, SP, quibus illa positio determinatur, & demissa ex I ad PM perpendiculari Im datur æquatio aliqua inter Pm vel Im & datas SP, FP, SF, quæ intersectio I exhibetur; ubi verò secans SIII, pervenit ad situm si2, manente secantis si2 positione, datur æquatio inter im vel Pm & datas sP, seu SP, Pf, sf, & æquatio hæc à priori diversa non est, nisi ratione quantitatum FP FS, quæ mutatae sunt in FP, fs, per quas secantis si2, positio determinatur, cum utraque æquatio in situ SIII, & situ si2, ab æquatione ad spiralem quæ eadem semper manet & ab æquatione secantis positionem determinante diducantur. Quoniam igitur lineæ fs, FP post primam revolutionem ac proinde post singulas redeunt ad magnitudines pri-

mas FS, FP intersectione primâ in secundam transeunte, secundâ in tertiam, & sic deinceps, æquatio inter IIM, vel PM, & datas PF, PS, SF, redibit ad formam primam quam habebat æquatio inter Im, vel Pm, & easdem datas quantitates PF, PS, SF, adeoque una eademque æquatio exhibebit intersectiones omnes I, II, &c., seu valores Im, IIM, &c., propterea radices exhibebit numero infinitas quibus omnes exhiberi possunt.

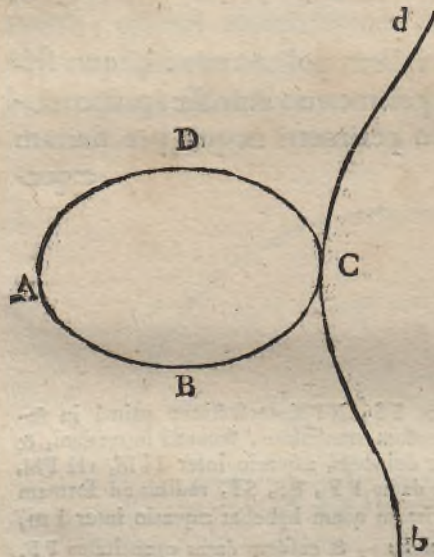
(k) * Eâ enim ratione spiralis describetur gyris infinitis ad quam proinde æquatio erit numero dimensionum infinita, quæ quidem finita deberet esse, si longitudo perimetri ovalis pro lubitu abscissæ seu intervallum puncti spiralem describentis & poli, per finitam æquationem generaliter exhiberi possit.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

æquationem generaliter exhiberi. (1) De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

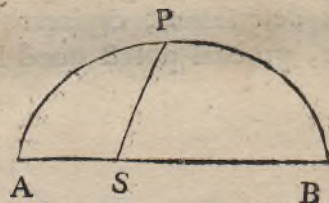
Corollarium.

(m) Hinc area ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem curvarum geometricè rationalium determinari nequit. Curvas geometricè rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æqua-



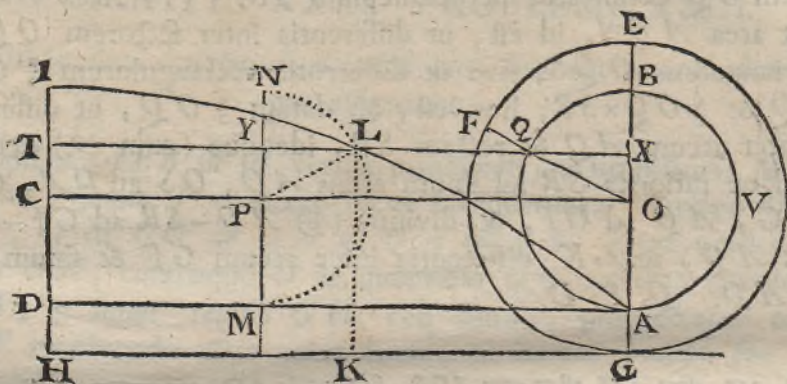
(1) * Ovalẽm ABCD tangat in C curva conjugata bcd, cujus rami Cb, Cd in infinitum pergant, pro hujusmodi ovalibus non valet Newtoni demonstratio. Supponit enim circà punctum datum in ovali perpetuò revolvi lineam rectam uniformi cum motu quæ sit ad peripheriam ovalis terminata, & abscindat areas sibi proportionales; si autem ovalis tangatur à figurâ conjugatâ bcd, cujus rami in infinitum pergunt, evidens est lineâ rectâ inprâ ovalẽm revolvente non percurri to-

tam novæ hujus figuræ aream, nec gyris perpetuis ac infinitis simplicem spiralem describi.



(m) 363. Sit Ellipseos APB, axis AB, umbilicus S, radius vector SP, dataque sint totius Ellipsis area & tempus periodicum, sitque tempus periodicum ad tempus per arcum AP, ita area totius ellipseos ad aream sectoris APS, obtinebitur æquatio inter aream APS, & tempus quo illa describitur. Unde si postea inveniri posset æquatio finita inter aream indefinitam APS & radium vectorem SP ac datas quantitates, inveniretur quoque æquatio finita inter tempus per arcum quemvis AP, & radium vectorem SP, qui ita ex dato tempore per æquationem finitam prodiret; Et viceversa, si ex tempore quo arcus AP describitur, radii vectorem SP longitudo per æquationem finitam posset determinari, ope hujus æquationis & superioris proportionis inter tempora & areas obtineretur æquatio finita inter aream quamlibet ASP & radium vectorem SP ac datas quantitates, quod impossibile esse demonstratum est; & propterea longi-

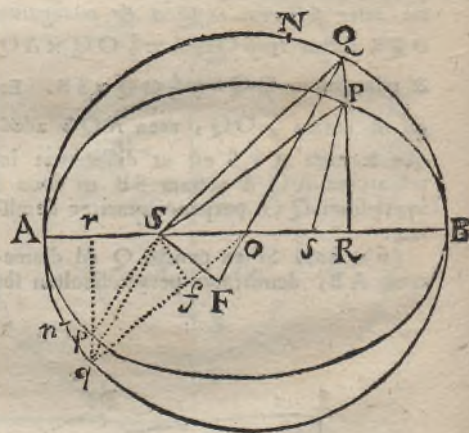
DE MOTU
CORPORUM.
RUM.



altero quidem quo centrum O cum plano
circuli uniformiter feratur per rectam OC ,
altero quo eodem tempore punctum A in
circuli periferiâ uniformiter percurrat semi-
periferiam AVB , & centrum O , circuli mobi-
bilis AVB sit in P quando punctum A
pervenit in L & jam percurrat arcum ML ;
Quoniam in motu æquabili spatia eo-
dem tempore percurfa sunt in datâ ra-
tione, erit recta OC (hoc est semicir-
cumferentia rotæ GFE) quam centrum
 O percurrat, ad semiperiferiam AVB ,
quam eodem tempore percurrat punctum
 A , ut OP ad arcum ML , sed semiperi-
feria GFE est quoque ad semiperiferiam
 AVB , ut arcus GF ad arcum AQ seu
æqualem ML ; est igitur $GF = OP = YX$,
ac proinde $YX - QX = YX - YL = LX =$
 $GK = GF - QX$ est vero QX sinus arcus
 AQ , ergo est GK æqualis differentiæ in-
ter GF & sinum arcus AQ . Q. e. D.

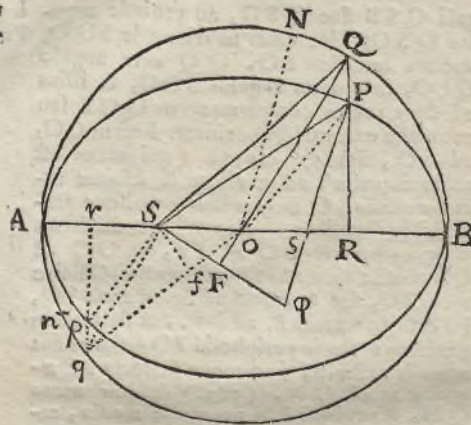
Itaque area APS , est ut GK , adeo-
que area APS , est ad aream semiel-
lipfis APB (vid fig. Newt.) ut GK
ad GH , & area APS , est ad aream
totius ellipseos ut GK ad $2GH$, seu
tempus per arcum AP , est ad tempus
unius revolutionis in Ellipfi ut GK ad
perimetrum rotæ. Si ergo capiatur GK
ad rotæ perimetrum ut est tempus per
 AP , ad tempus periodicum & cætera
fiant ut in Newtonianâ constructione,
erit P locus corporis in Ellipfi. Ex de-
monstratis quædam deducuntur corolla-
ria.

§68. Cor. 1. Planeta revolvatur in El-



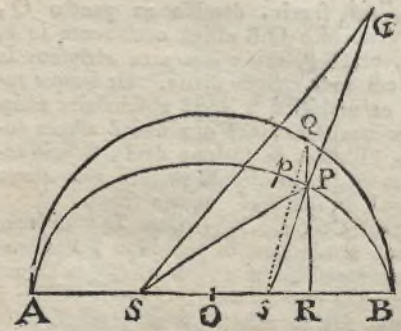
lipfi APB vi tendente ad umbilicum S
quem sol occupat, sitque linea apsidum,
seu axis major AB , centrum O , ac proin-
de excentricitas seu distantia centri O à
sole S , SO ; B aphelion seu punctum in
orbitâ à sole remotissimum, A perihel-
ion sive punctum soli proximum, locus
planetæ in P ; centro O radio OB des-
cribatur circulus BQA qui dicitur circulus
excentricus, & per P agatur recta QR
axi AB normalis & circulo occurrens in
 Q , junganturque SP (quæ dicitur inter-
vallum) & SQ . Ex demonstratis (251)
manifestum est aream SQB esse ad aream
totius circuli ut est area SPB ad aream
totius ellipseos. Quare si area circuli BQA
rectâ SQ ex foco S ductâ in datâ ratio-
ne

DE MOTU
CORPORUM.

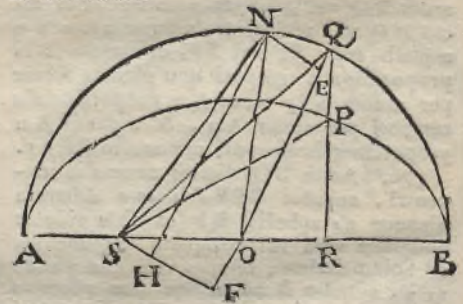


lis angulis PSB, SQO, NOQ quibus etiam quam proximè æqualis est angulus PsB, nam coeuntibus focus S & s cum centro O, puncta Q & P etiam coeunt & angulus SPO angulo SQO est quam proximè æqualis; pariter ut QO proximè coincidit cum PO fingatur SF esse perpendicularem in ipsam PO, & produci donec cum Ps producto in φ concurrat, erunt quam proximè OF, sφ parallelæ, ideoque ob æquales SO, Os, æquales erunt SF & Fφ, SP & Pφ, ut & anguli SPF & FPφ five OPs, sed ob SF æqualem QN & SQ five SP prope æqualem OQ est angulus SPF five OPs prope æqualis angulo NOQ: ergo totus angulus SPs est æqualis angulis SQO & NOQ simul sumptis, & cum angulus PsB sit æqualis angulis PSB & SPs, æqualis prope erit angulis PSB, SQO, NOQ sicut angulus NOB, ergo angulus PsB est quam proximè anomalia media cujus anomalia coæquata est PSB.

Dato autem angulo B s P, angulum PSB, ita quærit Wardus. Producat s P, ad G, ut sit PG = PS, & jungatur SG, erit sG = SP + Ps = AB (ex nat. Ellips.) adeoque in triangulo G s S, datis lateribus G s, S s, angulo S s G dantur anguli S G s (= GSP, ob SP = PG) & G S s, unde cognoscetur angulus PS s five PSB æqualis nempe differentia angulorum G S s, GSP, quare in triangulo SP s, datis angulis duobus PsS, PS s, angulo SP s, qui est summa angulorum GSP, SGP, & latere S s, inveniatur latus SP seu intervallum.



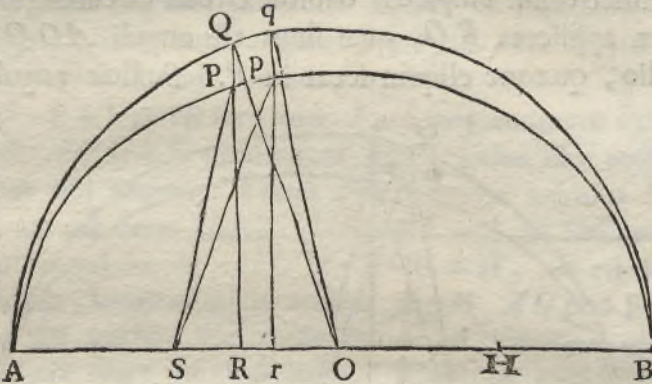
Ubi excentricitas paulo major est. Wardi methodum ita corrigit Bulliadus. Per punctum P Wardi methodo determinatum agatur QR axi AB normalis, & excentrico occurrens in Q, jungaturque sQ, orbitam secans in p, erit p, locus planetæ accuratior.



Methodus Cassini. Omnibus positis (ut supra num. 369.) jungantur SN, ON & agantur NH rectæ QF parallela & lineæ SF occurrens in H, & NE parallela SF rectæ QF occurrens in E, erit NE = HF sinus arcus NQ; cumque sit SF = NQ (369) erit SH differentia inter arcum NQ & ipsius sinum NE; si excentricitas SO exigua fuerit erit fere NQ = NE = HF = SF & proinde SN parallela FQ, adeoque angulus SNO, æqualis angulo NOQ; Porro in triangulo SNO, datis duobus lateribus NO, SO, & angulo intercepto SON (complemento nempe anomalie mediae datae ad duos rectos) inveniatur angulus SNO seu NOQ, & ipsius mensura nempe arcus NQ; & inde innotescet anomalia excentrici BQ; Hinc in triangulo SQO, datis lateribus SO, OQ & angulo SOQ, inveniatur

Scholium.

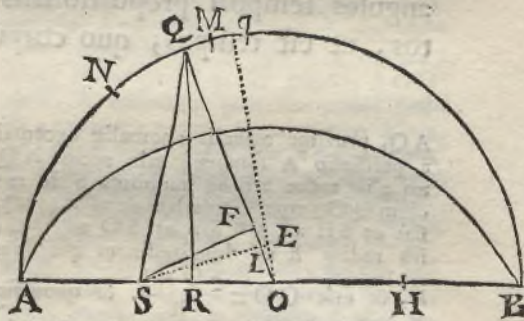
(r) Cæterum, cum difficilis sit hujus curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B , qui sit ad angulum graduum 57.29578 , quem



arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia SH ad ellipseos diametrum AB ; tum etiam longitudo quædam L , quæ sit ad radium in eâdem ratione inversè. Quibus semel inven-

angulus QSO , & sumptâ SR pro sinu toto, erit QR ad PR seu axis major ad minorem, ut tangens anguli dati QSB ad tangentem anguli ad solem PSB , qui ita obtinebitur.

Hæc satis sunt in orbitis planetarum non valde excentricis, sed in orbitis Mercurii & Martis quarum major est excentricitas ita invenitur arcus NQ . Ex datis in triangulo SNO , lateribus SO , NO , & angulo SON , inveniuntur latus SN , & angulus SNO ; deinde quæritur in partibus decimalibus radii ON differentia inter arcum qui metitur angulum SNO , & ejus sinum quæ citrà errorem sensibilem supponi potest æqualis rectæ SH , seu differentiæ inter arcum NQ anguli NOQ mensuram & ejus sinum NE . Sitque ille decimalium numerus A . Invenietur numerus decimalium radii SN quem eadem linea SH continet dicendo ut SN ad NO sic A ad numerum quæsitum B , & quoniam in triangulo rectangulo SHN est SN ad sinum totum ut SH five B ad sinum anguli SNH , inveniatur ergò angulus SNH , ex angulo invento SNO subducendus, ut relinquatur angulus HNO , seu æqualis NOQ , five arcus NQ .



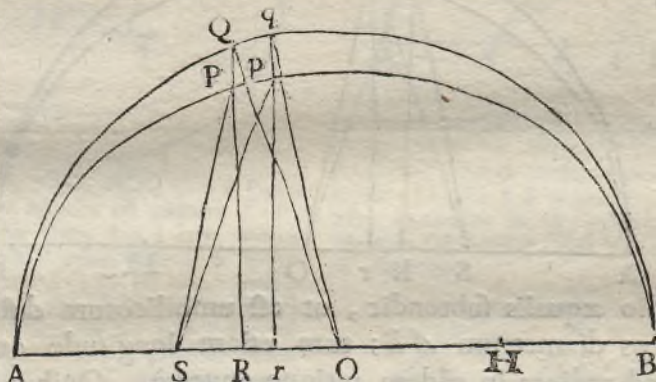
(r) 373. Sit axis major ellipseos AB , centrum O , umbilici S & H , & feratur planeta à perihelio A ad aphelium B , radio AO describatur circulus excentricus AQB ; quoniam radius circuli æqualis est arcui graduum 57.29578 , si fiat AB ad SH seu QO ad SO , ut arcus vel angulus 57.29578 , ad arcum B , erit B arcus æqualis rectæ SO . Cognoscitur arcus AN tempori proportionalis, & dicatur N ; deinde per methodum Wardi aut Cassini vel aliâ ratione inveniat arcus

M m 2

AQ,

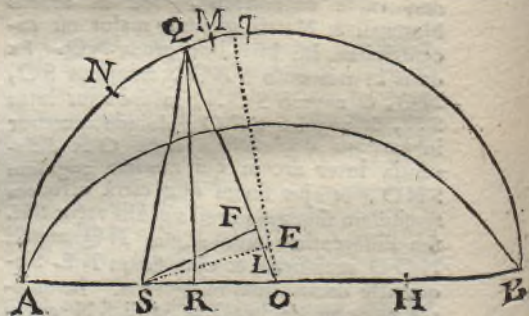
DE MOTU
CORPO-
RUM.

ventis, problema deinceps confit per sequentem analysin. Per constructionem quamvis, vel utcunque conjecturam faciendo, cognoscatur corporis locus P proximus vero ejus loco p . Demissâque ad axem ellipseos ordinatim applicatâ PR , ex proportione diametrorum ellipseos, dabitur circuli circumscripti AQB ordinatim applicata RQ , quæ sinus est anguli AOQ existente AO radio, quæque ellipsin fecat in P . Sufficit angulum illum



rudî calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus temporî proportionalis, id est, qui sit ad quatuor re-
tos, ut est tempus, quo corpus descripsit arcum Ap , ad tem-
pus

AQ , proximè æqualis anomalîæ excentri à perihelio A sumptæ, erit arcus NQ æqualis rectæ SF ex umbilico S in radium QO perpendiculariter demissæ (369). fiat ut SH ad AB sive ut SO ad QO , ita radius R ad longitudinem quandam L , & erit $QO = \frac{SO \times L}{R}$. & quoniam triangulum SOF , simile est triangulo QOR erit $QO : QR = SO : SF$, hoc est, radius ad sinum anguli QOA , ut arcus B ad alium arcum D qui erit æquales rectæ SF : Si itaque arcus AQ rectè assumptus fuisset foret arcus D æqualis arcui NQ (369): Si verò arcus AQ accuratus non est, capiatur $NM = D$, punctum M cadet supra vel infra punctum Q . Sit anomalîa excentri accuratâ (quæ est incognita) Aq , & in radium qO cadat perpendicularum SE erit æquale Nq :



(369) undè $SE - SF$, hoc est ferè $IE = Nq - NM = Mg = Qq - QM$. Quoniam verò angulus QOq , parvus est, erit $OE : Oq$ sive $OQ = LE : Qq = Qq - QM : Qq$. Undè $OQ - OE : OQ = QM : Qq$.
sed

pus revolutionis unius in ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli AOQ ad radium, & angulus E ad angulum $N-AOQ+D$, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut est sinus anguli $AOQ+E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N-AOQ-E+F$ ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli $AOQ+E$ diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertiâ vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli $AOQ+E+G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N-AOQ-E-G+H$, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli $AOQ+E+G$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AOq æqualis angulo $AOQ+E+G+I+\&c.$ Et (1) ex cosinu

Sed OE, est ferè æqualis OF, ergò $OO - OF : OQ = QM : Qq$. Porro OQ, est ad RO, seu radius ad cosinum anguli AOQ , ut SO, ad OF, adeoque $OF = \frac{SO \times \cos. AQ}{R}$. Crescentibus AN,

AQ, QR, decrescit RO, & evanescit ubi AQ est circuli quadrans, ac tandem fit negativa ubi AQ quadrante major est. Quare cum sit $+OQ : +SO = RO : OF$, OF idem signum + vel - habere debet cum RO, adeoque si angulus AOQ , seu arcus AQ est quadrante minor, OF est quantitas affirmativa; Si AQ quadrans est, OF evanescit; Si AQ est quadrante major, OF fit negativa. Est igitur $OQ = \frac{SO \times \cos. AQ}{R}$.

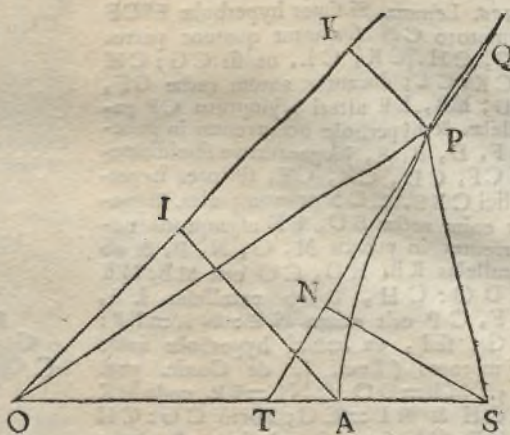
$OQ = QM : Qq$, seu ob $QO = \frac{SO \times L}{R}$, est $\frac{SO \times L - SO \times \cos. AQ}{R} : \frac{SO \times L}{R}$, si-

ve $L - \cos. AQ : L = QM : Qq$, si fuerit AQ minor quadrante, & $L + \cos. AQ : L = QM : Qq$, si fuerit AQ major quadrante. Est autem arcus $QM = AN - AQ + NM = N - AQ + D$, quare si

arcus Qq , dicatur E, erit $E : N - AQ + D = L : L \mp \cos. AQ$ & $AQ + E$, erit æqualis Aq ; invento itaque E per ultimam proportionem, si loco AQ capiatur arcus accuratior Aq , seu angulus $AOQ + E$, & instituat processus priori similis, capiendo arcum E, ad arcum B, ut est sinus arcus $AQ + E$ seu Aq ad radium, & arcum G ad arcum $N - Aq + F$, seu $N - AQ - E + F$, ut est longitudo L, ad longitudinem eandem cosinu anguli AOq seu $AOQ + E$ diminutam ubi angulus AOq recto minor est, auctam ubi major, erit $AQ + E + G$, seu $Aq + G$, arcus magis verus, & similiter si loco arcus Aq , usurpetur arcus $Aq + G$ & idem repetatur processus, inveniatur novus arcus $AQ + E + G + I$, seu $Aq + G + I$, accuratior arcu $Aq + G$, & sic pergere licet in infinitum & quantumvis proximè ad veritatem accedere.

(1) * Ex cosinu Or. Est enim radius ad cosinum anguli inventi AOq , ut qO ad Or, inveniuntur ergò punctum r, & ordinata qr. Deinde si fiat ut axis major ad minorem, ita qr ad pr, habebitur locus corporis p.

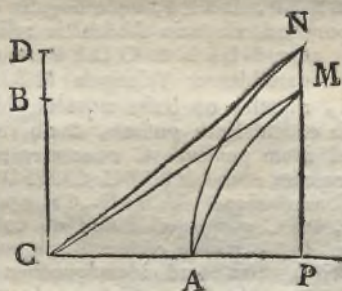
Non dissimili calculo conficitur problema in hyperbolâ. Sit ejus centrum O , vertex A , umbilicus S & asymptotos OK . Cognoscatur quantitas areæ abscindendæ tempore proportionalis. Sit ea A , & fiat conjectura de positione rectæ SP , quæ aream APS abscindat veræ proximam. Jungatur OP ,



& ab A & P ad asymptoton agantur AI , PK asymptoto alteri parallelæ, & (a) per tabulam logarithmorum dabitur area

(a) Diximus superius (Theor. IV. de Hyp. p. 124.) aream inter asymptotum, Hyperbolam, ordinatam in vertice erectam & aliam ordinatam comprehensam, esse Logarithmum abscissæ, idem verò, more veterum demonstrare & ad hanc Propositionem propius accommodare hic non pigebit.

Lemma. Sint duæ hyperbolæ AM , AN quarum centrum C , semidiameter communis AC , semidiametri conjugatæ CB , CD , per punctum quodvis P agatur PMN ordinatim ad diametrum CP applicata, hyperbolis occurrens in punctis M & N , junganturque CM , CN spatia hyperbolica AMP , ANP & sectores AMC , ANC sunt ad invicem in ratione semidiametrorum conjugatarum CB , CD , vel etiam ordinarum PM , PN . Nam ex naturâ hyperbolæ (Theor. II. de Hyp.) $PM^2 : CB^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, & $PN^2 : CD^2 = CP^2 - CA^2 : CA^2$, undè $PM^2 : CB^2 = PN^2 : CD^2$, & $PM^2 : PN^2 = CB^2 : CD^2$, ac $PM : PN = CB : CD$, cùmque idem semper eveniat quâcumque in parte cadat ordinata PMN , liquet spatia hyperbolica AMP , ANP esse inter se ut CB ad CD , vel PM



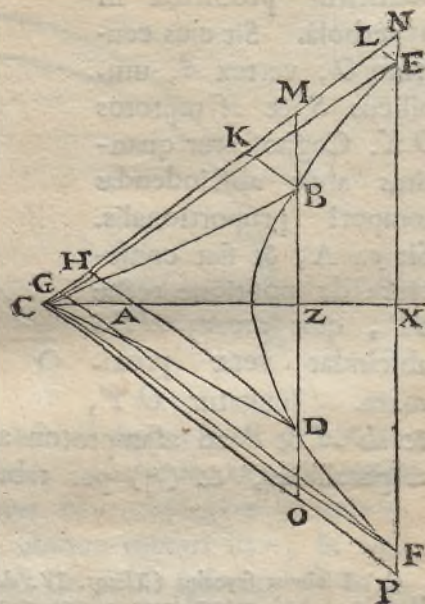
ad PN , sed triangula CPM , CPN sunt ad invicem ut PM ad PN vel CB ad CD ; ergò $CPM - AMP : CNP - ANP = AMC : ANC = PM : PN = CB : CD$. Q. e. D.

375. Coroll. Si duæ semidiametri conjugatæ CA , CD fuerint æquales, hyperbola AN erit æquilatera; quare inventâ quadraturâ spatiorum hyperbolicorum ANP vel ANC in hyperbolis æquilateris, habebitur etiam quadratura spatiorum hyperbolicorum AMP vel AMC in aliis quibusvis hyperbolis.

DE MOTU 376. Lemma. Si super hyperbolæ EBDF
CORPO- asymptoto CN sumantur quatuor partes
RUM. CG, CH, CK, CL, ut sit CG:CH

=CK:CL; ducantur autem rectæ GF, HD, KB, LE alteri asymptoto CP parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in punctis F, D, B, E, junganturque semidiametri CF, CD, CB, CE, sectores hyperbolici CBE, CDF erunt æquales. Agantur enim rectæ BD, EF asymptotis occurrentes in punctis M, O, N, P, & ob parallelas KB, HD, CO erit MB:MK = DO:CH, & ob parallelas LE, GF, CP erit etiam NE:NL = FP:CG; sed, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos (Lem. I. de Conic. pag. 115.) MB=DO, & NE=FP, unde MK = CH & NL=CG; Porro CG:CH = CK:CL (per hyp.) hoc est, NL:MK = CK:CL = LE:KB, ex naturâ hyperbolæ intra asymptotos (Theor. IV. de Hyp. p. 124.) rectæ igitur NE, MB, hoc est, EF, BD erunt parallelæ, ac proinde, linea per earum medium X, Z ducta erit Diameter, transibitque per centrum C; (Lem. IV. de Conic. p. 119.) unde facile deducitur trapezia MXZN, OXZP fore æqualia ut & areæ mixtilineæ BXZE, DXZF, unde singulis ex correspondenti trapezio subtractis relinquuntur areæ MBEN & ODFP æquales, quibus addantur Triangula MBC, ODC, æqualia ob bases æquales MB, OD in eadem linea positas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, erunt æquales areæ CMNEBC, COPFDC, ex quibus denique subtractis Triangulis NEC, PFC quæ æqualia sunt ob bases æquales NE, PF in eadem lineâ positas, & ob vertices ad idem punctum C concurrentes, supererunt sectores hyperbolici CBE, CDF inter se æquales. Q. e. D.

377. Lemma. Si per puncta quævis asymptoti CL, agantur duæ rectæ GF, HD alteri asymptoto CP parallelæ, & hyperbolæ occurrentes in F & D, junganturque semidiametri CF, CD, trapezium hyperbolicum GFDH æquatur sectori CFD. Nam, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos, triangula CHD, CGF, æquantur ob æquales angulos G & H & latera reciproca (per Theor. IV. de Hyp. p. 124.) adeoque sublato communi triangulo CGA, residua spatia GADH, CAF

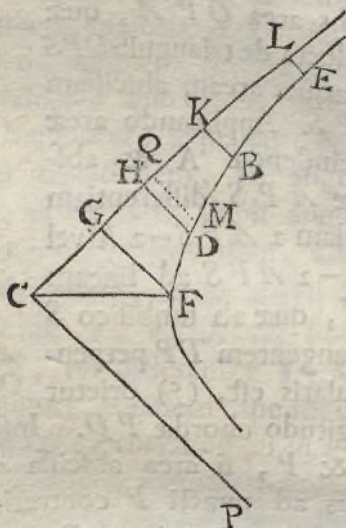


erunt æqualia, quibus si addatur idem spatium hyperbolicum DAF, summa GFDH, CFD erunt æquales. Q. e. D.

378. Coroll. 1. Hinc nisdem positis quæ (num. 376.) trapezia hyperbolica GFDH, KBEL sunt æqualia.

379. Coroll. 2. Si asymptoti partes CG, CH, CK fuerint continuè proportionales, duo sectores CFD, CDB & duo trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, æquantur. Eadem enim ratione quâ num. 376. ostenditur rectam BF tangenti per punctum D ductæ esse parallelam. Unde si super asymptoto CL sumantur partes quocumque CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progressionem geometricâ, & ex punctis G, H, K, L &c. agantur rectæ GF, HD, KB, LE &c. alteri asymptoto parallelæ, trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, KBEL erunt æqualia; & vicissim si trapezia illa æquantur, erunt rectæ CG, CH, CK, CL &c. in continuâ progressionem geometricâ.

380. Coroll. 3. Sit hyperbola FDBE æquilatera, cujus centrum C, asymptotus CL, semiaxis transversus CF, capiantur in asymptoto partes CG, CH, CK, CL, &c. in continuâ progressionem geometricâ, aganturque GF, HD, KB, LE &c., alteri asymptoto CP parallelæ, trapezia hyperbolica GFDH, HDBK, KBEL &c. erunt æqualia; quare eorum summa, scilicet o, GFDH, GFBK, GFEL, &c. erunt in continuâ progressionem arithmeticâ. Si itaque CG sit unitas, CH, CK, CL, &c. numeri, erunt o, GFDH, GFBK, GFEL, illorum numerorum logarithmi.



381. Coroll. 4. Itaque per logarithmorum hyperbolicorum tabulas, inveniri possunt trapeziorum quorumvis GFDH, BGFK, &c. areae; Sumptâ enim CG pro unitate, quarantur in numeris valores rectorum CH, CK, &c. & horum numerorum logarithmi exhibebunt trapezia hyperbolica GFDH, GFBK, &c.

382. Coroll. 5. Sit $CG=1$, $GH=x$, $CH=1+x$, $HD=y$, & erit, ex naturâ hyperbolæ inter asymptotos $1+x \times y=1$, adeoque $y = \frac{1}{1+x}$, & trapezii GFDH

elementum $DHQM$ seu $y dx = \frac{dx}{1+x}$; Si igitur $L. 1+x$, denotet logarithmum numeri $1+x$, erit $L. 1+x = GFDH$, & elementum logarithmi seu $d.L. 1+x = y dx = \frac{dx}{1+x}$. Et similiter elementum logarithmi numeri cujuscvis z seu $d.L. z = \frac{dz}{z}$.

383. Coroll. 6. Cum sit $y = \frac{1}{1+x}$, si peragatur divisio, erit $y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ &c. in infinitum, ac proinde $y dx = dx - x dx + x^2 dx - x^3 dx$ &c. in infinitum, & sumptis utrinque fluentibus $S. y dx = GFHD = L. 1+x = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum. Si autem numerus propositus sit unitate minor, seu $1-x$, eodem modo invenietur ipsius

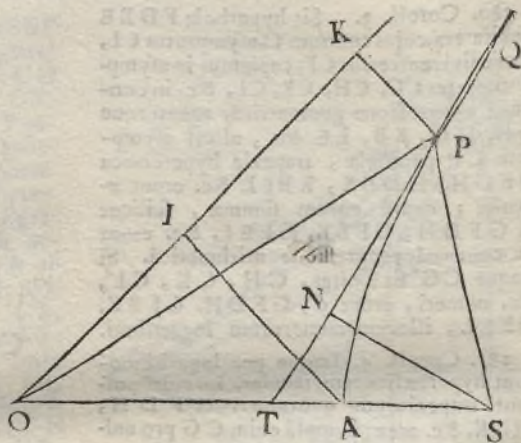
logarithmus $S. -y dx = L. 1-x = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5$ &c.

384. Scholium. Observandum est logarithmos hyperbolicos Neperi à logarithmis Briggii quibus vulgò utimur dinerre; verum cum hyperbolici sint semper ad Briggianos seu vulgares in eadem constanti ratione, nimirum logarithmus hyperbolicus numeri denarii 2. 302585 est ad logarithmum Briggianum numeri denarii 1. 000000, ut quilibet logarithmus hyperbolicus ad ejusdem numeri logarithmum Briggianum, facile est hyperbolicos ad Briggianos & contra Briggianos ad hyperbolicos reducere, adeoque hyperbolarum quadraturam per logarithmos etiam vulgares invenire. Si dividatur 1. 000000, per 2. 302585 &c., quotiens 0. 4342948 &c. per logarithmum quemvis Hyperbolicum multiplicatus, dabit logarithmum vulgarem, & viceversa, si logarithmus quilibet vulgaris per 0. 43429481 & dividatur, quotiens erit logarithmus hyperbolicus.

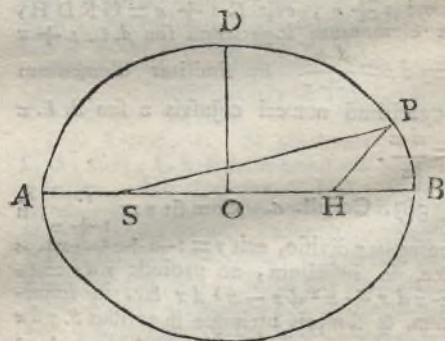
* Et per tabulam. (381. 384.)

DE MOTU
CORPO-
RUM.

$AIKP$, (b) eique æqualis area OPA , quæ subducta de triangulo OPS relinquet aream abscissam APS . Applicando areæ abscindendæ A & abscissæ APS differentiam duplam $2APS - 2A$ vel $2A - 2APS$ ad lineam SN , quæ ab umbilico S in tangentem TP perpendicularis est, (c) orietur longitudo chordæ PQ . Inscribatur autem chorda illa PQ inter A & P , si area abscissa APS major sit areâ abscindendâ A , fecus ad puncti P contrarias partes; & punctum Q erit locus corporis accuratior. Et computatione repetitâ invenietur idem accuratior in perpetuum.



Atque his calculis problème generaliter confit analyticè. Verùm usibus astronomicis accommodatior est calculus particularis qui sequitur. Existentibus AO , OB , OD semiaxibus ellipsos, & L ipsius latere recto, ac D differentia inter semiaxem minorem OD & lateris recti semissem $\frac{1}{2}L$; quære tum angulum Y , cujus sinus sit ad radium ut est rectangulum sub differentia illa D , & semisumma axium $AO + OD$ ad quadratum axis majoris AB ; tum angulum Z , cujus sinus sit ad radium ut est



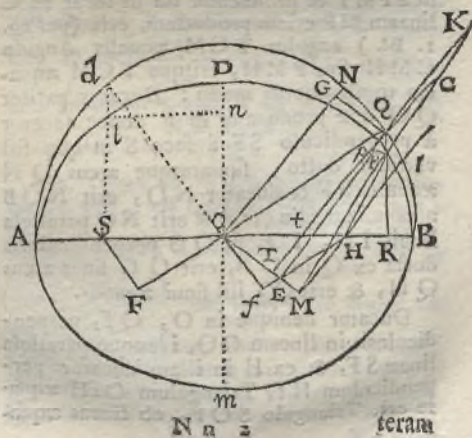
* (b) Eique æqualis area OPA (377).
* (c) Orietur longitudo. Nam cum arcus PQ exiguus sit, accipi potest pro chordâ PQ seu parte PQ tangentis TP productæ; undè triangulum rectilineum SQP , quam proximè æquatur differentia spatio- rum hyperbolicorum APS , ASQ seu A ; sed triangulum rectilineum $SQP = \frac{PQ \times SN}{2}$,

ergò $\frac{PQ \times SN}{2} = A - APS$, vel $= APS - A$, ac proindè $PQ = \frac{2A - 2APS}{SN}$ vel $= \frac{2APS - 2A}{SN}$, prout area A major vel minor est areâ APS .

duplum rectangulum sub umbilicorum distantia SH & differentiâ illâ D ad triplum quadratum semiaxis majoris AO . His angulis semel inventis, locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus BP descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V , primam medii motus æquationem, ad angulum Y , æquationem maximam primam, ut est sinus dupli anguli T ad radium; atque angulum X , æquationem secundam, ad angulum Z , æquationem maximam secundam, ut est cubus sinus anguli T ad cubum radii. Angulorum T, V, X vel summæ $T+X+V$, si angulus T recto minor est, vel differentiæ $T+X-V$, si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum BHP , motum medium æquatum; & si HP occurrat ellipsi in P , ac tã SP abscindet aream BSP tempori proportionalem quam proximè. Hæc praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X , in minutis secundis, si placet, positorum, figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed & satis accurata est ad theoriam planetarum. Nam in orbe vel Martis ipsius, cujus æquatio centri maxima est graduum decem, error vix superabit minutum unum secundum. Invento autem angulo motus medii æquati BHP , angulus veri motus BSP & distantia SP in promptu sunt per methodum notissimam. (d)

Hactc-

(d) 385. Ellipseos quam Planeta describit sit Centrum O , umbilici S, H , & semiaxes OB, OD ; Sole in S posito umbilicus alter H erit ferè centrum medii motus Planetæ, (372) id est, si ex umbilico H agatur linea HI , quæ cum lineâ apsidum OB , constituat angulum IHB anomalie mediæ æqualem, recta illa HI , ferè transibit per locum Planetæ in orbita ellipticâ parum excentricâ revolventis, transeat autem HP , per locum verum Planetæ P & erit angulus PHI , anomalie mediæ IHB , addendus (vel detrahendus) ut motus medius æquatus BHP habeatur, & angulus PHI aut ipsi æquipollens dicetur æquatio tota medii motus, quam in duas partes dividit Newtonus, quarum unam primam æquationem & al-



angulo NOQ , cum sit NO parallela MH & QO parallela FH per constructionem, sumpto verò MH pro radio erit Me tangens ejus anguli MHE quæ in exiguo angulo pro Arcu ipso sumi potest, ideoque Radius ON sive OB erit ad arcum NQ ut MH ad lineam ME ; Dicatur autem angulus anomalie mediæ T erit (per construct.) HOM ejus complementum ad duos Rectos, fiatque ut Radius (qui in toto hoc calculo sumitur æqualis OB) ad $Cof. T$ sic OH ad MH

$$= \frac{OH \times Cof. T}{OB};$$

Præterea arcus $NQ=SF$, & est OQ (sive OB) ad QR ut est OS (sive OH) ad SF ideoque SF sive $NQ = \frac{OH \times QR}{OB}$

unde proportio superius inventa $OB:NQ = MH:ME$ in hanc vertitur $OB: \frac{OH \times QR}{OB} = \frac{OH \times Cof. T}{OB} : ME = \frac{OH^2 \times QR \times Cof. T}{OB^3}$

sive quia (per nat. Ellips.) $OH^2 = OB^2 - OD^2 = OB + OD \times OB - OD$ (per 6. 2. Elem.) est $ME = \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times Cof. T}{OB^3}$

Radius verò KM hac ratione determinatur: Ducatur ex P linea Pp , perpendicularis in TQ ac proinde parallela lineæ ME , ejus portio terminata in linea EK est quidem ita proximè æqualis ipsi Pp , ut Pp pro illa sumi possit, est verò ob parallelas $ME:Pp = KM:KP$.

Facile autem determinatur ratio ME ad Pp , nam angulus TQR est complementum anomalie mediæ QTR , unde est, Radius OB , ad $Cof. T$ sicut QP ad $Pp = \frac{Cof. T}{OB} \times QP$, est autem QP differentia inter QR & PR , est verò QR ad PR ut semiaxis major OB ad minorem OD , est ergo $PR = \frac{OD \times QR}{OB}$ & $QP = QR - \frac{OD \times QR}{OB} = \frac{QR}{OB} \times OB - OD$, itaque $Pp = \frac{Cof. T \times QR}{OB^2} \times OB - OD$, ideoque ME ad Pp sicut

$$\frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times Cof. T}{OB^3} \text{ ad } \frac{OB - OD \times QR \times Cof. T}{OB^2}$$

utroque autem termino multiplicato per OB^3

$OB - OD \times QR \times Cof. T$ superest ratio $OB + OD$ ad OB , æqualis rationi ME ad Pp sive KM ad KP , unde convertendo est $OD:OB + OD = KM - KP (MP):KM$; sive quia $OB + OD$ est ferè $2OB$, est $OD:2OB = MP:KM$.

Erit autem MP proximè æqualis lineæ Tp , hæc verò lineæ Qt , cum enim parva sit excentricitas, Qp compensat ferè partem neglectam Tt , est verò Qt parallela NO , ideoque est QtR æqualis anomalie mediæ, ergo est sinus anomalie mediæ ad radium ut QR ad Qt , sive $sin. T:OB = QR:Qt = \frac{OB \times QR}{sin. T}$

$= MP$ unde cum sit OD ad $2OB$ sicut MP sive $\frac{OB \times QR}{sin. T}$ ad KM erit $KM = \frac{2OB^2 \times QR}{OD \times sin. T}$, sed inventa erat $ME = \frac{OB + OD \times OB - OD \times QR \times Cof. T}{OB^3}$

multiplica ergo valores KM & ME per $2 sin. T \times OD$ eritque KM ad ME sive ratio QR ad $sinum$ anguli K ut $4OB^2$ (sive AB^2) ad $2OD \times OB + OD \times OB - OD \times sin. T \times Cof. T$

& cum sit semi latus rectum $\frac{1}{2}L = \frac{OD^2}{OB}$, erit

$OD - \frac{1}{2}L = OD - \frac{OD^2}{OB} = \frac{OD}{OB} \times OB - OD$, vocetur D ea differentia semiaxis minoris & semilateris recti, & substituto D loco $\frac{OD}{OB} \times OB - OD$ erit Radius ad sinum anguli K ut AB^2 ad $D \times OB + OD \times \frac{2Cof. T \times sin. T}{OB^2}$.

387. Ergo in quovis gradu anomalie mediæ erit, est semper Radius ad AB^2 ut sinus Anguli K , ad $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \frac{2Cof. T \times sin. T}{OB}$ cum verò ratio Radii ad

AB^2 sit constans, hæc altera etiam erit constans, ideoque in omni casu sinus Anguli K ubi anomalie mediæ est T , erit ad ejus sinum ubi anomalie mediæ erit t , ut $D \times \frac{OB + OD}{OB} \times \frac{2Cof. T}{N. n. 3}$

LIBER PRIMUS. PROP. XXXI.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

$$\times \frac{2 \text{Cof. } T \text{ fin. } T}{OB^2} \text{ ad } D \times OB + OD \times$$

$$\frac{2 \text{Cof. } t \times \text{fin. } t}{OB^2} \text{ sive multiplicando utrum-}$$

que terminum per constantes $\frac{OB}{D \times OB + OD}$

$$\text{ut } \frac{2 \text{Cof. } T \times \text{fin. } T}{OB} \text{ ad } \frac{2 \text{Cof. } t \text{ fin. } t}{OB}$$

sed constat ex Trigonometricis, quod duplum facti sinus anguli dati cujusvis per ejus Cosinum, divisum per radium, est æquale sinui Anguli qui est duplus ejus anguli dati, ergo sinus angulorum K in diversis anomaliz mediz gradibus sunt inter se ut sinus dupli anomaliz mediz. Unde sequitur, quod cum duplum anomaliz mediz 45. graduum sit 90. ejusque sinus sit æqualis Radio seu sinui totali, angulus K erit maximus in 45. gradu, sive est illic anomaliz mediz æquatio prima maxima, & si ea data sit, inveniuntur in aliis gradibus æquationes adhibendæ, dicendo ut Radius ad sinum dupli anomaliz mediz ita sinus æquationis maximæ primæ ad sinum æquationis quæsitæ, sive (quia hic de minimis angulis agitur qui sunt inter se ut sui sinus) ita ipsa æquatio maxima ad æquationem quæsitam: Invenietur autem facile maxima illa æquatio, cum enim sit Radius

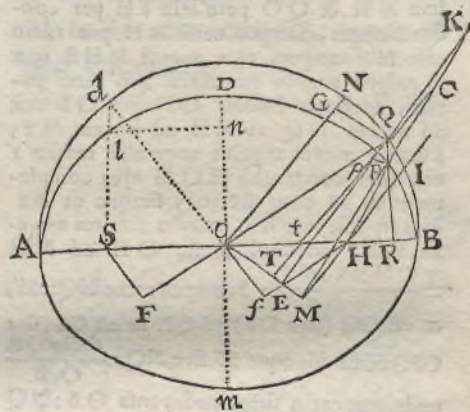
$$\text{ad } AB^2 \text{ ut sinus K ad } D \times \frac{OB + OD \times \text{fin. } 2T}{OB}$$

si T sit 45. gradus, sin. 2T est ipse Radius OB; Est ergo Radius ad AB²

$$\text{ut sinus K ad } D \times \frac{OB + OD}{OB} \times OB$$

sive, ut statuit Newtonus, est Radius ad sinum æquationis primæ maximæ ut AB² ad D × OB + OD. Quod erat 1.º. Dem.

388. Secunda æquatio TQE continetur lineis ductis à puncto Q circuli BQNA ad puncta T & E lineæ OM quæ perpendiculariter in ON lineam motus medii ducitur, est vero OT æqualis sinui arcus QN = SF = Of, & si ex f ducatur ad focum lineæ fH, intersectio ejus lineæ fH (productæ si necesse sit) cum lineæ OM dat alterum punctum E. In hac ergo æquationis parte est investiganda, est verò QE paulo major quam QT & QT est æqualis OG, quæ paulo major est ON sive OB unde QE pro OB commodè assumi potest,



quamvis eâ sit paulo minor; Ut autem valor lineæ TE assignetur, notandum est quod cum sit OM in ON perpendicularis, & Of in OQ, est angulus fOM æqualis angulo NOQ.

Cognoscetur ergo arcus mensurans angulum fOM sive fOE, assumpto Of pro radio, dicendo radius ON sive OB ad arcum NQ ut Of (sive NQ) ad arcum mensurantem angulum fOE qui

ideo erit $\frac{NQ^2}{OB}$, secans illius arcus est

OE, cum verò TO sit sinus arcus NQ (æqualis Of) feratur longitudo Of secundum lineam OM, cadet tantum ultra T quantum arcus NQ suum sinum excedit, & tantum citra E quantum radius ille Of à secante anguli cujus arcus est

$\frac{NQ^2}{OB}$ deficit: Dato ergo arcu NQ, in-

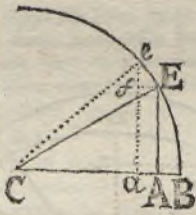
veniat eus excessus super eus sinum, &

dato arcu $\frac{NQ^2}{OB}$ inveniatur excessus eus secantis super radium NQ sive Of & inventis his duobus habebitur lineæ TE quæsitæ.

Lemma I. Dato Arcu invenire eus sinum. Sit radius CB, r, sinus quæsitus EA, x, eus Cosinus CA, $\sqrt{rr - xx}$, Arcus datus BE, v, eus fluxio Ee sit dv.

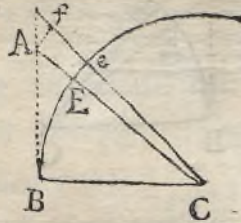
Ducto radio CE, & radio proximo Ce & sinu arcus Be, ductoque ex E in F perpendiculari, erit ef fluxio sinus quæsitæ sive dx. Triangula verò ECA, eFe, pro similibus sunt habenda, nam angulus fEA est

rectus



hanc redit $x = v - \frac{v^3}{2 \times 3 \times r^2} + \frac{v^5}{2 \times 3 \times 4 \times 5 r^4}$ &c. quæ series facile continuatur, & arcu existente parvo citissime convergit.

LIBER PRIMUS. PROP. XXXI.



rectus ut & angulus CEe quia circulus est perpendicularis in radium, & dempto communi CEf remanent CBA & fEe æquales, & ob rectos in f & A, angulus tertius fEe æqualis erit tertio ECA unde habetur hæc proportio, CA ad CE ut eF ad eE, sive $\sqrt{rr-xx} : r = dx : dv$ unde est $dv = \frac{rdx}{\sqrt{rr-xx}}$ & $dv^2 = \frac{rdx^2}{rr-xx}$ sive $rr^2 - xx^2 = \frac{rdx^2}{dv^2}$.

Jam verò supponatur valorem x hac serie exprimi, $x = Av + Bv^3 + Cv^5$ &c. erit $dx = Av + 3Bv^2 + 5Cv^4$ &c. & $dx^2 = A^2dv^2 + 6ABv^2dv + 9BBv^4dv^2$ &c.

& $xx = A^2v^2 + 2ABv^4 + BBv^6$ &c. + $2ACv^6$ &c.

unde $rr - xx = rr - A^2v^2 - 2ABv^4$ &c. & $\frac{rdx^2}{dv^2} = r^2A^2 + 6rrABv^2 + 9rrBBv^4$ &c. + $10ACv^4$ &c.

unde hæ duæ series æquales sunt, & terminorum A, B, C &c. valor ex comparatione terminorum correspondentium harum serierum eruitur, erit ergo

$-rr - A^2v^2 - 2ABv^4$ &c. = $rrA^2 + 6rrABv^2 + 9rrBBv^4$ &c. + $10rrACv^4$ &c.

unde erit $rr = rrAA$, ideoque $A = 1$. $-A^2v^2 = 6rrABv^2$, unde $-1 = 6rrB$ & $B = \frac{-1}{6rr}$

$-2ABv^4 = 9rrBBv^4 + 10rrACv^4$, sive substitutione facta & terminis per v^4 divisis $+\frac{2}{6rr} = \frac{9}{36rr} + 10rrAC$, sive

$10rrAC = \frac{3}{36rr}$

& $C = \frac{3}{10 \times 36rr} = \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5 r^4}$ &c. unde series $Av + Bv^3 + Cv^5$ &c. = x , ad

Lemma II. Dato arcu invenire secantem. Sit ut prius radius CB, r, secans quæsitæ CA, y, Tangens BA $\sqrt{yy-rr}$, Arcus datus BE, v, ejus fluxio Ee, dv; Ducatur ex centro secans Ca, proxima proposita, & radio CA centro C, describatur arcus Af erit fA fluxio secantis quæsitæ sive dy, erunt autem arcus Ee & Af ut eorum radii CE, CA ideoque est $r : y = dv : Af = \frac{ydv}{r}$; præterea Triangula ACB,

a Af, sunt similia, nam ob angulum rectum fAc angulus fAa est complementum anguli CAB sive est æqualis angulo ACB, anguli verò B & f sunt ambo æquales ut pote recti, est ergo CB : BA = Af : fa,

sive $r : \sqrt{yy-rr} = \frac{ydv}{r} : dy$ & quadrando,

do, $rr : yy - rr = \frac{yydv^2}{rr} : dy^2$ sive $r^4 \frac{dy^2}{dv^2} = y^4 - rry^2$, Fingatur ergo esse $y = A + Bv^2 + Cv^4 + Dv^6$ &c.

est $dy = 2Bv dv + 4Cv^3 dv + 6Dv^5 dv$ &c. & $dy^2 = 4B^2v^2dv^2 + 16BCv^4dv^2 + 16C^2v^6dv^2$ &c.

& $y^2 = A^2 + 2ABv^2 + 2ACv^4 + BBv^4$ &c.

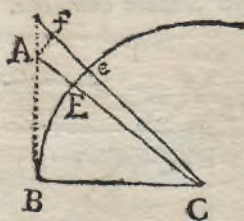
& $y^4 = A^4 + 4A^3Bv^2 + 6A^2B^2v^4 + 4A^3Cv^4$ &c.

est ergo $\frac{r^4 dy^2}{dv^2} = 4r^4B^2v^2 + 16r^4BCv^4 + 16r^4C^2v^6 + 24r^4DBv^6$ &c.

& $y^4 - rry^2 = A^4 + 4A^3Bv^2 + 6A^2B^2v^4 - r^2A^2 - 2r^2ABv^2 + 4A^3Cv^4$ &c.

$-2r^2ACv^4 - r^2B^2v^4$

DE MOTU
CORPORUM
BEM.



Unde collatis terminis corresponden-
tibus harum serierum est $A^4 - r^2 A^2 = 0$, ideoque $A^2 = r^2$, & $A = r$; est
 $4r^4 B^2 v^2 = 4A^3 B v^2 - 2r^2 AB v^2$,
sive divisis omnibus terminis per $B v^2$ & po-
sito r loco A ; $4r^4 B = 4r^3 - 2r^3$

ideoque est $B = \frac{1}{2r}$,

est $16r^4 B C v^4 = 6A^2 B^2 v^4 + 4A^3 C v^4 - 2r^2 A C v^4 - r^2 B B v^4$, quæ divisâ
per v^4 substitutisque valoribus A & B
dant

$8r^3 C = \frac{5}{4} + 4r^3 C - 2r^3 C - \frac{1}{4}$ unde est

$6r^3 C = \frac{5}{4}$ & $C = \frac{5}{2 \times 3 \times 4r^3}$ &c.

Series ergo ad secantis valorem expri-
mendum $A + B v^2 + C v^3$ &c. in hanc
vertitur $r + \frac{v^2}{2r} + \frac{5v^3}{2 \times 3 \times 4r^3}$ &c.

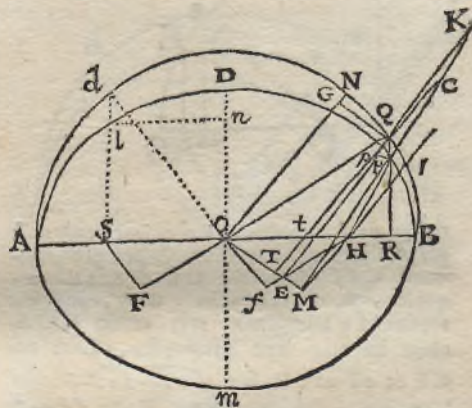
Quæ satis prompte convergit si modo ar-
cus v sit exiguus, ut isto in casu.

HIS positis, inveniuntur commodè par-
tes lineæ TE, sive sinus secundæ æquation-
is, ea enim constat ex differentia inter ar-
cum NQ & ejus sinum (dato radio OB)
& ex differentia inter eum ipsum arcum
NQ sumptum ut radium in angulo fOE &
illius anguli secantem.

Primum ergo differentia inter arcum NQ
& ejus sinum, ex primâ serie inveni-
tur, sit enim $v = NQ$ & $r = OB$, sinus
arcus NQ per eam seriem invenitur

$NQ - \frac{NQ^3}{2 \times 3 \times OB^2}$ &c. & omittis reliquis termi-
nis seriei, hic admodum exiguis, liquet dif-
ferentiam inter arcum NQ & ejus sinum

esse terminum $\frac{NQ^3}{2 \times 3 \times OB^2}$ qui erat in eâ



serie ex arcu NQ tollendus ut obtinere-
tur sinus.

Secundo, ut differentia inter radium &
secantem anguli fOE obtineatur, loco
radii r in serie superius inventâ valor ra-
dii Of sive NQ est substituendus, & lo-
co arcus v , valor arcus qui mensurat

eum angulum & qui inventus fuit $= \frac{NQ^2}{OB}$,

ergo series quæ secantem exprimit in hanc
abit $NQ + \frac{NQ^4}{2 \times OB^2 \times NQ}$ &c. reliquis

terminis ut pote minimis omittis, excessus
secantis super radium est $\frac{NQ^3}{2 \times OB^2}$, qui

junctus cum excessu arcus super sinum
superius invento $\frac{NQ^3}{2 \times 3 \times OB^2}$ efficit sum-

mam $\frac{4NQ^3}{2 \times 3 \times OB^2}$ sive $\frac{2NQ^3}{3 \times OB^2}$ pro va-

lore sinus æquationis secundæ; sed est
(369) ut Radius OB ad QR ita SH sive

OH ad SF sive NQ, ergo $NQ = \frac{OH}{OB} \times QR$
& $\frac{2NQ^3}{3 \times OB^2} = TE = \frac{2OH^3}{3 \times OB^3} \times QR^3$;

Itaque cum in hâc secundâ æquatione ra-
dius QE sit in omni anomalix gradu idem
aut prope idem, & anguli sint minimi
erunt inter se quam proximè ut eorum sinus
TE

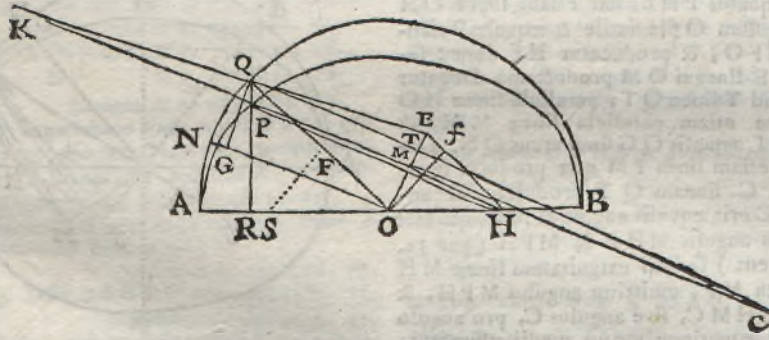
TE, cumque in valore TE quantitas $\frac{2OH^3}{3OB^3}$ sit constans, sinus illi sunt inter ut QR^3 , sed QR est sinus anomaliz excentri, & in eadem prope sunt ratione sinus anomaliz mediz, hinc istz æquationes secundz in variis anomaliz mediz gradibus adhibendz, sunt inter se ut cubi sinuum anomaliz mediz. Si itaque sumatur anomaliz media 90. graduum ejus sinus est ipse Radius, eritque illic maxima æquatio, quæ erit ad aliam quamvis, ut cubus Radii ad cubum sinus anomaliz mediz ipsi convenientis ut statuit Newtonus.

Ut verò determinetur hæc æquatio ubi est maxima, notandum quod si in foco S erigatur usque ad Ellipsim ordinata SI ea erit æqualis semi lateri recto, & si ducatur, In ordinata in minorem axem erit In = OS five OH, & D n erit differentia semi lateris recti & minoris axis quam Newtonus vocat D, & ex natura Ellipseos erit AO^2 five $OB^2:ln^2(OH^2) = OD^2:Dn \times nm$ (five $D \times nm$) sed nm est ferè axi minori $2OD$ æqualis, ergo erit $OB^2:OH^2 = OD^2:D \times 2OD$ & $OH^2 = \frac{2D \times OB^2}{OD}$, quo posito valor TE = $\frac{2OH^3}{3OB^3} QR^3$ est æqualis $\frac{2OH \times 2D}{3OB^3 \times OD} \times QR^3$ vel quia $2OH = SH$ est TE =

$\frac{2D \times SH}{3OB^3 \times OD} QR^3$.
In nonagesimo verò gradu anomaliz mediz linea OM five OE in axem OB cadit & QT cui ferè æqualis est QE coincidit cum QR, unde QE pro QR sumi potest, & prætereà QR nonnihil excedit lineam Sd five axem minorem DO, cum non nihil citra focum cadat, minor tamen est radio OB, unde QR^2 pro $OB \times OD$ satis accuratè sumi potest,

ficque valor TE = $\frac{2D \times SH}{3OB^3 \times OD} QR^3$
in hanc abit TE = $\frac{2D \times SH}{3OB^2} QE$,

sed Radius est ad sinum æquationis maximæ secundæ ut QE ad TE (five $\frac{2D \times SH}{3OB^2} \times QE$) & QE ad $\frac{2D \times SH}{3OB^2} QE$ sicut $3OB^2$, ad $2D \times SH$, ergo æquatio secunda maxima invenietur dicendo ut triplum Quadrati semi axis majoris ad duplum Rectangulum sub umbilicorum distantia SH & differentia D semi axis minoris & semi Lateris Recti, ita Radius ad sinum secundæ æquationis ubi est maxima, & ea data reliquæ invenientur dicendo ut cubus Radii ad cubum sinus anomaliz mediz propositæ ita hæc maxima æquatio, ad quæsitam. Q. E. D.



339. Annihilatur prima æquatio in 90. gradu anomaliz mediz & in primo, negativa fit in secundo quadrante, positiva in tertio, negativa iterum in quarto.
Etenim in 90. gradu anomaliz mediz Tom. I.

OM coincidit cum OH ex constructione, sicque linea FH, non amplius secat lineam OM in E, evanescit itaque ME sinus primæ Equationis.
Excedat verò anomaliz media 90. fiat que

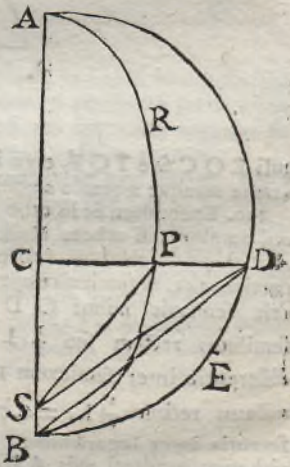
SECTIO VII.

De corporum ascensu & descensu rectilineo.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

Posito quodvis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiae locorum à centro, spatia definire quæ corpus rectè cadendo datis temporibus describit.

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per corol. 1. prop. XIII.) sectionem aliquam conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit sectio illa conica $ARPB$ & umbilicus ejus S . Et primo si figura ellipsis est; super hujus axe majore AB describatur semicirculus ADB , & per corpus decidens transeat recta DPC perpendicularis ad axem; actisque DS , PS erit area ASD areae ASP , atque ideo etiam tempori proportionalis. Manente axe AB minuatur perpetuo latitudo ellipseos, &



semper manebit area ASD tempori proportionalis. (e) Minuatur latitudo.

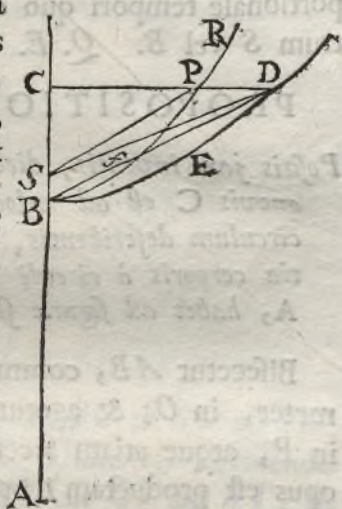
(e) 391. Lemma. Si sectionis conicæ latus rectum ad axem transversum pertinet perpetuo minuatur, & tandem evanescat, manente sectionis axe transverso, omnes ad axem ordinatæ perpetuo minuuntur & tandem evanescent, ac perimeter sectionis cum axe & umbilici cum axis verticibus coincidunt. Est enim, (ex conic.) ordinatæ cujusvis quadratum ad rectangulum abscissarum in ratione datâ lateris recti ad axem transversum; quare si manente axe transverso, adeoq. & abscissarum rectangulo, latus rectum perpetuo minuatur ac tandem evanescat, ordinatæ quadratum adeoque & ordinata ipsa perpetuo minuitur & tandem evanescit, &

perimeter sectionis conicæ cum axe coincidit. Porro ordinata per umbilicum æqualis est dimidio lateri recto (Vid. sup. in Conicis, Theor. III. de Hyperbola & de Ellipsi & Cor. I. Theor. I. de Parab.) adeoque quadratum dimidii lateris recti est ad rectangulum ex distantis umbilici à verticibus, ut latus rectum ad axem transversum, unde rectangulum sub quartâ parte lateris recti & axe transverso æquatur rectangulo ex distantis umbilici à verticibus; quare evanescente latere recto & manente axe transverso, rectangulum sub distantis umbilici à verticibus nullum fit, & umbilicus cum proximo vertice coincidit.

LIBER
PRIMUS.
PROB.
XXXII.

latitudo illa in infinitum: & orbe APB jam coincidente cum axe AB & umbilico S cum axis termino B , descendet corpus in rectâ AC , & area ABD evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque spatium AC , quod corpus de loco A perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area ABD , & à puncto D ad rectam AB demittatur perpendicularis DC (f). Q. E. I.

Cas. 2. Si figura illa RPB hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem AB hyperbola rectangula BED : & (g) quoniam areae CSP , $CBfP$, $SPfB$ sunt ad areas CSD , $CBED$, $SDEB$, singulae ad singulas, in datâ ratione altitudinum CP , CD ; & area $SPfB$ proportionalis est tempori quo corpus P movebitur per arcum PfB ; erit etiam area $SDEB$ eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum hyperbolæ RPB in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus PB cum rectâ CB & umbilicus S cum vertice B & recta SD cum rectâ BD . Proinde area $BDEB$ proportionalis erit tempori quo corpus A recto descensu describit lineam CB .



Q. E. I.

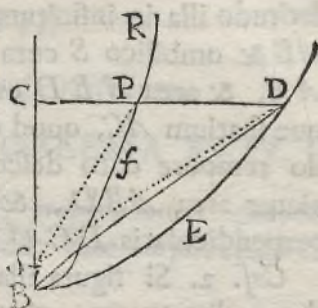
Cas.

(f) 392. Perpendicularis DC. Quoniam area ABD , semper proportionalis est tempori quo corpus ex puncto A per rectam AC cadit, erit totius semicirculi area $ADEB$, proportionalis tempori quo corpus idem cadendo percurrit lineam AB , & divisim area segmenti $BDEB$, proportionalis tempori quo corpus ex A , cadendo percurrit lineam CB .

(g) 393. Quoniam areae. Nam 1º. triangula CSP , CSD quorum est basis communis CS , sunt ut altitudines CP , CD . 2º. areae hyperbolice $CBfP$, $CBED$ sunt ut eadem altitudines CP , CD (374) unde 3º. divisim $CBfP - CSP$ ad $CBED - CSD$, hoc est, sector $SPfB$ ad sectorem $SDEB$ ut CP ad CD .

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Cas. 3. (h) Et simili argumento si figura RPB parabola est, & eodem vertice principali B describatur alia parabola BED , quæ semper maneat data, interea dum parabola prior, in cuius perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum lineâ CB ; fiet segmentum parabolicum $BDEB$ proportionale tempori quo corpus illud P vel C descendet ad centrum S vel B . Q. E. I.



PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C est ad velocitatem corporis centro B intervallo BC circulum describentis, in subduplicatâ ratione quam AC distantia corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore A , habet ad figuræ semidiametrum principalem $\frac{1}{2} AB$.

Bifecetur AB , communis utriusque figuræ RPB , DEB diameter, in O ; & agatur recta PT , quæ tangat figuram RPB in P , atque etiam secet communem illam diametrum AB (si opus est productam) in T ; sitque SY ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque figuræ RPB latus rectum ponatur L . Constat per corol. ix. prop. xvi. quod corporis in lineâ RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P sit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem

(h) 394. Simili argumento. In Parabola 1^o. $CSP : CSD = CP : CD$. 2^o. sit latus rectum Parabolæ $BfP = l$, latus rectum Parabolæ $BED = L$, erit, ex naturâ Parabolæ $CP^2 = l \times CB$ & $CD^2 = L \times CB$, adeoque $CP : CD = \sqrt{l} : \sqrt{L}$, hoc est, in ratione datâ, ergo area $CBBP$ est ad aream $CBED$, in eadem ratione datâ CP ad CD ; Quare 3^o. divisim $SPfB : SDEB = CP : CD$. Cætera se habent ut in demonstratione casus secundi. 395. Scholium. Corporis per rectam

CS , ad centrum S , cadentis velocitas in loco quovis C , est ad velocitatem corporis alterius ad eandem à centro distantiam circulum describentis, vel in ratione minore quam $\sqrt{2}$, ad 1, vel in ratione majore aut in eâ ipsâ ratione. In 1^o. casu recta SC , usurpanda est pro elliptici latitudinis evanescentis; in 2^o. casu, recta SC , est hyperbola cujus latus rectum evanescit; in 3^o. casu, recta SC , est parabola lateris recti evanescentis. Hæc omnia patent ex coroll. 7^o. Prop. XVI. 396.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

re RPB latitudo T
 CP , sic ut pun-
ctum P coeat
cum puncto C ,
punctumque S
cum puncto B ,
& linea SP cum
linea BC , linea-
que SY cum li-
neâ BQ ; & cor-
poris jam rectâ
descendentis in
lineâ CB veloci-
tas fiet ad velo-
citatem corporis
centro B in-
tervallo BC cir-
culum describen-
tis; in subduplica-
tâ ratione ipsius B
 $BQq \times AC \times SP$

$AO \times BC$ ad SYq , hoc est (neglectis æqualitatis ratio-
nibus SP ad BC & BQq ad SYq) in subduplicatâ ratione AC
ad AO five $\frac{1}{2} AB$. $Q. E. D.$

Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO .

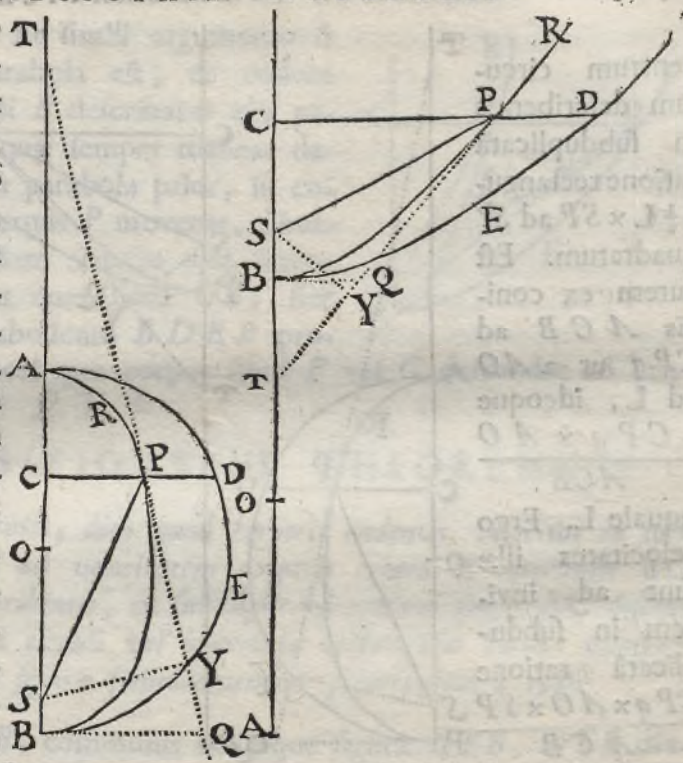
Corol. 2. (k) Corpus ad datam à centro distantiam in circulo
quovis revolvens, motu suo sursum verso ascendet ad duplam
suam à centro distantiam.

P R O.

(k) 397. Corpus ad datam. Si fuerit
 BED circulus, & punctum C coincidat
cum puncto O , erit $AC = AO = \frac{1}{2} AB$,
adeoque velocitas per radium AO ca-
dendo acquisita est æqualis velocitati cor-
poris centro B intervallo $BO = AO$ cir-
culum describens. Unde si corpus illud,
ad datam à centro distantiam BO in cir-
culo revolvens, sursum per OA , projecia-
tur cum eâ velocitate quâ circum def-

cribit, seu quam per AO cadendo ac-
quisivit, ascendet ad punctum A , per spa-
tium OA (25) seu ad duplam suam à
centro B distantiam $BA = 2BO$.

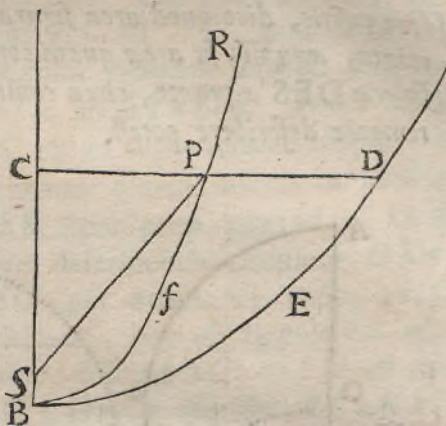
398. Coroll. 1. Velocitas in puncto
quovis C , est ad velocitatem in alio pun-
cto c , in ratione subduplicatâ rectanguli
 $AC \times BC$, ad rectangulum $Ac \times Bc$.
Nam velocitas in C , est ad velocitatem
corporis intervallo BC circum descri-
ben-



PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XXXIV.

Si figura BED parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis C æqualis est velocitati quæ corpus centro B dimidio intervalli sui BC circum uniformiter describere potest.



Nam corporis parabolam RPB circa centrum S describentis velocitas in loco quovis P (per corol. VII. prop. XVI.) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli SP circum circa idem centrum S uniformiter describentis. Minuatur parabolæ latitudo CP in infinitum eo, ut arcus parabolicus Pfb cum rectâ CB, centrum S cum vertice B, & intervallum SP cum intervallo BC coincidat, & constabit propositio. Q. E. D.

P R O-

bentis ut \sqrt{AC} ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, (per hancce prop.); Velocitas corporis intervallo BC circum describentis est ad Velocitatem corporis intervallo Bc circum describentis, (per Cor. 6. Prop. IV.) reciproce in ratione subduplicatâ Radiorum, hoc est, ut \sqrt{Bc} ad \sqrt{BC} ; Denique Velocitas Corporis intervallo Bc circum describentis est ad Velocitatem in c corporis ex A cadentis ut $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad \sqrt{Ac} (per hanc propositionem); Ergo per compositionem rationum) est velocitas in C ad velocitatem in c, in ratione compositâ ex ratione \sqrt{AC} ad $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$, ratione \sqrt{Bc} ad

Tom. I.

\sqrt{BC} , & ratione $\sqrt{\frac{1}{2}AB}$ ad \sqrt{Ac} , sive ut $\sqrt{AC} \times \sqrt{Bc}$ ad $\sqrt{Ac} \times \sqrt{BC}$, hoc est, in ratione subduplicatâ rectanguli $AC \times Bc$ ad rectangulum $Ac \times BC$. Q. E. D.

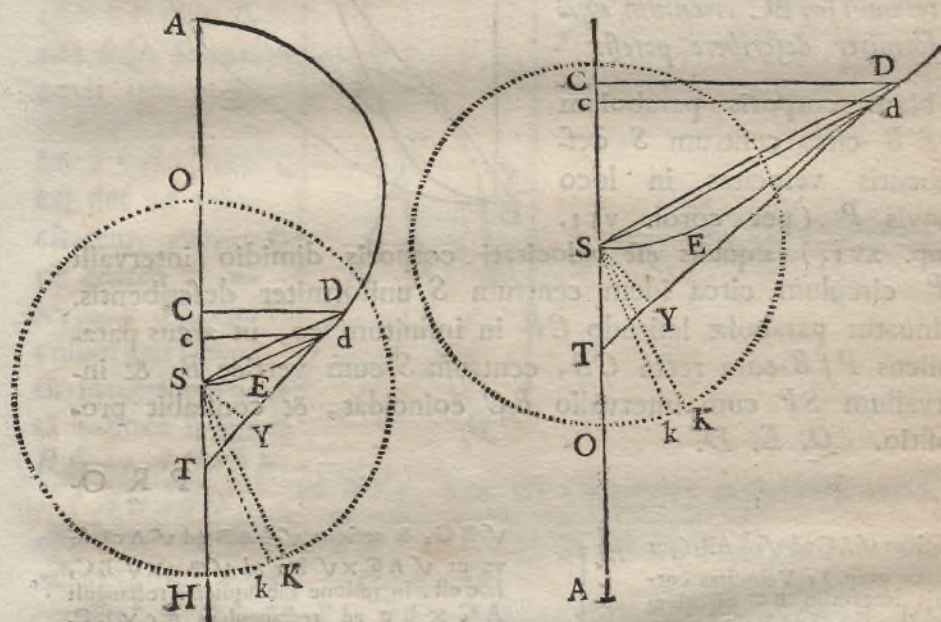
399. Coroll. 2. Si fuerit BfP Parabola, corporis in ea moti velocitas in loco quovis P, erit ad velocitatem corporis ad distantiam SP, circum describentis in ratione $\sqrt{2}$, ad 1; si fit Ellipsis in minori ratione, in majori verò si fuerit hyperbola (per Cor. 7. Prop. 16.) & latitudine orbis imminuta in infinitum ut coincidat BfP cum axe BC, erit corporis cadentis velocitas in loco quovis C ad velocitatem corporis ad distantiam BC circum describentis ut $\sqrt{2}$ ad 1. adeoque $AC : \frac{1}{2}AB = 2 : 1$ in 2^o. casu ratio AC, ad $\frac{1}{2}AB$, minor erit quam ratio 2 ad 1; in 3^o. casu major, & contrâ.

P p

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Hisdem positis, dico quod area figuræ DES, radio indefinito SD descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ DES æquante, circa centrum S uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.



Nam concipe corpus C quam minimâ temporis particulâ lineolam Cc cadendo describere, & interea corpus aliud K , uniformiter in circulo OKk circa centrum S gyrando, arcum Kk describere. Erigantur perpendiculara CD, cd occurrentia figuræ DES in D, d . Jungantur SD, Sd, SK, Sk & ducatur Dd axi AS occurrens in T , & ad eam demittatur perpendicularum SY .

Cas. 1. Jam si figura DES circulus est vel hyperbola rectangularis, bifecetur ejus transversa diameter AS in O , & erit SO .

SO dimidium lateris recti. (1) Et quoniam est TC ad TD ut Cc ad Dd, & (m) TD ad TS ut CD ad SY, erit ex æquo TC ad TS ut CD×Cc ad SY×Dd. Sed (per corol. 1. prop. xxxiiii.) (n) est TC ad TS ut AC ad AO, puta si in coitu punctorum D, d capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC est ad AO seu SK ut CD×Cc ad SY×Dd. Porro corporis descendens velocitas in C est ad velocitatem corporis circuli intervallo SC circa centrum S describentis in subduplicatâ ratione AC ad AO vel SK (per prop. xxxiiii.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis circulum OKk in subduplicatâ ratione SK ad SC (per corol. vi. prop. iv.) & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola Cc ad arcum Kk in subduplicatâ ratione AC ad SC, (o) id est in ratione AC ad CD. Quare est CD×Cc æquale AC×Kk, & (p) propterea AC ad SK ut AC×Kk ad SY×Dd, indeque SK×Kk æquale SY×Dd, & $\frac{1}{2}$ SK×Kk æquale $\frac{1}{2}$ SY×Dd, id est area KSk æqualis area SDD. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particule KSk, & SDD, quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per corollarium lemmatis iv.) area totæ simul genitæ sunt semper æquales. Q. E. D.

Cas.

(1) * Et quoniam est TC ad TD ut Cc ad Dd. Quia in Triangulo TCD, est cd parallela basi CD, ideoque TC:TD ut partes correspondentes Cc, Dd.

(m) * Et TD ad TS ut CD ad SY. Sunt enim propter angulos Y, & C, rectos & angulum T, communem, triangula TCD, TSY, similia.

(n) * Est TC:TS. Nam punctis D, d, coeuntibus, fit TD, tangens; adeoque (396.) TC:TS=AC:AO.

(o) * In ratione AC ad SC, id est in ratione AC ad CD. Est enim SED, circulus, vel hyperbola æquilatera cujus vertexes S & A, sed in circulo & hyperbolâ æquilaterâ ob axium æqualitatem est $CD^2 = AC \times SC$, & proinde AC:CD = CD:SC, & hinc AC ad CD, in ratione subduplicatâ AC ad SC.

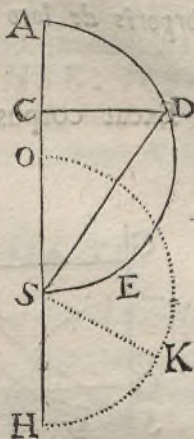
(p) * Et propterea. Nam ex superius demonstratis AC:SK = CD×Cc:SY×Dd,

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

LIBER PRIMUS.
PROP. XXXVI.

Corporis de loco dato A cadentis determinare tempora descensus.

Super diametro AS distantia corporis a centro sub initio, describe semicirculum ADS, ut & huic æqualem semicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD. Junge SD, & areæ ASD æqualem constitue sectorem OSK. (1) Patet per prop. xxxv. quod corpus cadendo describet spatium AC eodem tempore quo corpus aliud, uniformiter circa centrum S gyrando, describere potest arcum OK. Q. E. F.



P R O-

eius temporis quo corpus ex A, cadendo percurrit AS, (400) ad tempus periodicum corporis ad distantiam AS (= 2 SO) in circulo revolventis ut Radices quadratae cuborum distantiarum 1 & 2, sive ut 1, ad $\sqrt{8}$ (191), hoc est, ut 1 ad $2\sqrt{2}$, ergo tempus quo corpus cadendo percurrit AS, est ad tempus periodicum corporis ad distantiam AS in circulo revolventis ut $\frac{1}{2}$ ad $2\sqrt{2}$, hoc est, ut 1, ad $4\sqrt{2}$.

402. Scholium. Si planetarum orbitas circulares esse supponamus, vimque centripetam quã in suis orbitis retinentur, in duplicatã ratione distantiarum à centro decrescere, ex datis temporibus periodicis, facile erit tempora definire quibus usque ad centrum sui motus cadendo pervenerent. Exempli causã, cum tempus periodicum lunæ circa terram revolventis sit dierum 27, hor. 7. minutorum primorum 43, hoc est, minutorum primorum 39343, erit $4\sqrt{2}$, ad 1, hoc est, quam proximè 565685, 100000, ut 39343, ad 6955. 5, seu dies 4, hor. 19, min. prim. 55, & secund. 30, tempus quo luna cadendo ad centrum telluris perveniret.

(1) * Patet per prop. XXXV. Cum enim semicirculorum ADS, OKH, & sectorum OSK, ASD, areæ æquales sint respectivè, erit quoque sector HSK æqualis segmento SED, adeoque (401.) tem-

pus quo corpus ex A cadendo percurrit CS, æquatur tempori, quo corpus aliud in circulo OKH revolvens describit arcum KH, & quoniam tempus per AS cadendo æquatur tempori quo corpus revolvens totum semicirculum OKH, describit (401), erit tempus per AC, æquale tempori per arcum OK.

403. Coroll. Arcus OK, æqualis est summæ arcus AD & lineæ CD. Est enim sector ASD, æqualis sectori AOD, + triangulo DOS, sive $\frac{1}{2} AO \times AD + \frac{1}{2} AO \times CD$: sector verò OSK, = $\frac{1}{2} SO \times OK = \frac{1}{2} AO \times OK$, sed est sector OSK = ASD. Quare $\frac{1}{2} AO \times OK = \frac{1}{2} AO \times AD + \frac{1}{2} AO \times CD$, atque adeò $OK = AD + CD$. Si itaque fiat ut radius ad arcum grad. 57. 29578, qui radio æqualis est, ita CD, ad 4⁰⁰. B, erit B arcus rectæ CD æqualis, & obtinebitur $OK = AD + B$. Hinc dato tempore quo corpus datam AS ex puncto A cadendo percurrit, invenitur tempus quo datam rectæ AS partem AC describit, si fiat ut semicirculus OKH, seu grad. 180, ad arcum AD + B, seu OK, ita tempus quo corpus ex A cadendo percurrit AS, ad tempus quo percurrit AC.

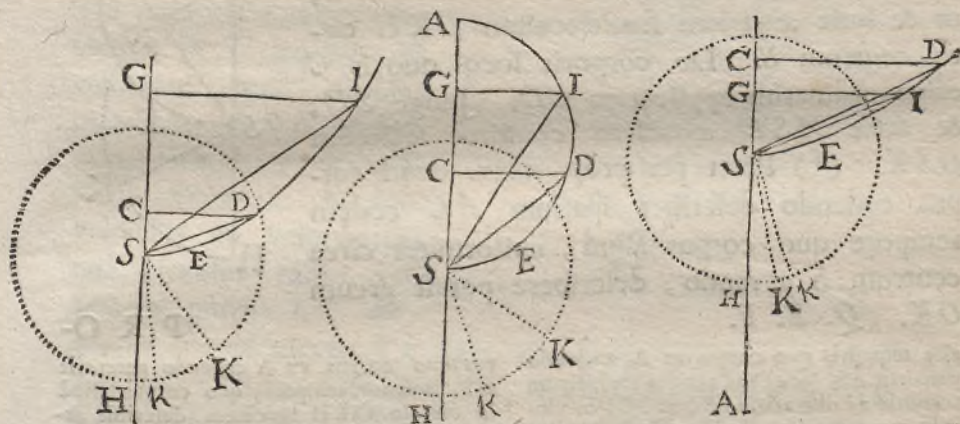
P p 3

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire tempora
ascensus vel descensus.

Exeat corpus de loco dato G secundum lineam GS cum ve-



locitate quâcumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem in circulo velocitatem, quâ corpus ad intervallum datum SG circa centrum S revolvi posset, cape GA ad $\frac{1}{2} AS$. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum A infinite distat, quo casu parabola vertice S , axe SG , latere quovis recto describenda est. Patet hoc per prop. xxxiv. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu circulus, posteriore hyperbola rectangula super diametro SA describi debet. (†) Patet per prop. xxxiii. Tum centro S , intervallo æquan-

(†) * Patet per Prop. XXXIII. Scilicet, fingatur sectio conica latitudinis quam minimâ, ut proximè coincidat cum axe AB , & in ea fingatur esse punctum G ex quo corpus movetur cum datâ velocitate, primo quæritur species illius sectionis, & ex proportione velocitatis datæ ad velocitatem quâcum corpus ad intervallum datum SG circa Centrum S revol-

veretur, agnosceretur, ex Cor. 7. Prop. XVI: & si sit Ellipsis vel Hiperbola ejus axis major ex velocitate in G datâ etiam innotescet, per Prop. XXXIII, quia velocitas corporis cadentis in puncto G , est ad velocitatem corporis in distantia SG revolventis in subduplicatâ ratione distantie puncti G à vertice ulteriore Ellipsis vel Hyperbolæ ad ejus semi Axem-
unde

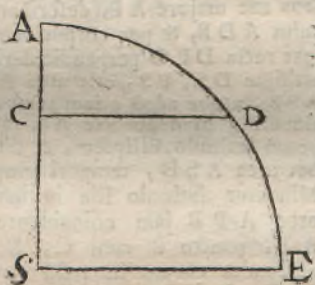
æquante dimidium lateris recti, describatur circulus HkK , & ad corporis descendens vel ascendens locum G , & locum alium quemvis C , erigantur perpendiculara GI , CD occurrentia conicæ sectioni vel circulo in I ac D . Dein junctis SI , SD , fiant segmentis $SEIS$, $SEDS$ sectores HSK , HSk æquales, & per prop. xxxv. corpus G describet spatium GC eodem tempore quo corpus K describere potest arcum Kk . *Q. E. F.*

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XXXVIII.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantie locorum à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & spatia descripta sunt arcibus, arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respectivè proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis A secundum rectam AS ; & centro virium S , intervallo AS , describatur circuli quadrans AE , sitque CD sinus rectus arcus cujusvis AD ; & corpus A , tempore AD , cadendo describit spatium AC , inque loco C acquirat velocitatem CD .



Demonf-

unde si fiat GA ad $\frac{1}{2} SA$ in duplicatâ ratione velocitatis in G ad velocitatem corporis in distantia SG revolventis, erit A vertex ulterior Ellipsis vel Hyperbolæ, & $\frac{1}{2} SA$ semi Axis quæsitus.

Fiat ergo in vertice S Parabola quævis, si curva evanescens in quâ G est, sit Parabola, vel fiat Circulus, vertice S Diametro SA , si sit Ellipsis; vel Hyperbola æquilatera eâdem Diametro si ea cur-

va sit Hyperbola, & si Corpus ex G perveniat in C , erectis usque ad curvas descriptas perpendicularibus GI , CD , erunt segmenta SEI , SED proportionalia temporibus quibus corpus propositum ex G ad S , & ex C ad S movebitur per Prop. XXXII: Sed per Prop. XXXV, corpus G spatia GS , CS , iisdem temporibus cadendo percurrit, quibus corpus K , describit arcus KH , kH ; eodem igitur tempore percurritur GC , quo Kk .

DE MOTU
CORPO-
RUM.

(u) Demonstratur eodem modo ex propositione x, quo propositio xxxii, ex propositione xi demonstrata fuit.

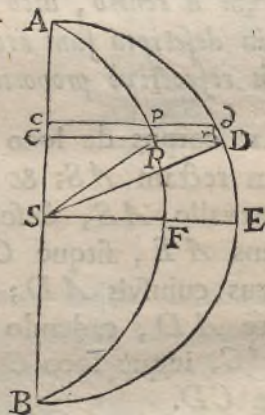
Corol. 1. (x) Hinc æqualia sunt tempora, quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S, & corpus aliud revolvens describit arcum quadrantalem ADE.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad (y) usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per corol. iii. prop. iv.) æquantur.

P R O.

(u) * 404. Demonstratur eodem modo. Nam si corpus non cadit perpendiculariter, describet id (per Cor. 1. Prop. X.) ellipsim aliquam APFB, cujus centrum congruit cum centro virium S; Super hujus ellipseos axe majore AB, describatur semicirculus ADB, & per corpus decidens transeat recta DPC perpendicularis ad axem, actisque DS, PS, erit area ASD, area ASP, atque adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe AB, minuat perpetuo latitudo Ellipseos, & semper manebet area ASD, tempori proportionalis. Minuat latitudo illa in infinitum, & orbe APB jam coincidente cum axe AB, puncto P cum C, & F cum S, descendet corpus in rectam AC, & area ASD, seu huic proportionalis arcus AD, evadet tempori proportionalis. In rectam AC capiatur linea quam minima Cc, agaturque cd, parallela CD, & circulum secans in puncto d, ex quo ad CD, demittatur perpendicularum dr, & arcus Dd proportionalis erit tempori quo percurritur Cc, (ex demonstr.) atque adeo coeuntibus punctis Cc, & dD, erit velocitas in C, ut $\frac{Cc}{Dd}$ (5, 145), sed ob triangula Drd, SCD, similia Cc, seu $dr : dD = CD : SD$, id est, $\frac{Cc}{dD} = \frac{CD}{SD}$. Quare velocitas in loco C, est ut $\frac{CD}{SD}$, hoc est, ob constantem SD, ut CD. Q. E. D.

(x) * Cor. 1. Hinc æqualia. Nam



per coroll. 2. prop. X. tempora revolutionum in ellipsis quibusvis APF, ADB, adeoque & tempora per ellipseon quadrantes APF seu AS, ADE, sunt æqualia.

(y) * Ad usque centrum. Ex quiete cadunt.

405. Æqualia sunt tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad locum C, & corpus aliud revolvens describit arcum circuli AD; Cum enim corpus in circulo uniformiter revolvatur, erit tempus per AD ad tempus per AE seu ad tempus per AS, ut arcus AD, ad quadrantem AE, sed est etiam tempus per AC, ad tempus per AS, ut arcus AD, ad quadrantem AE, ergo tempus per AC, æquatur tempori per AD.

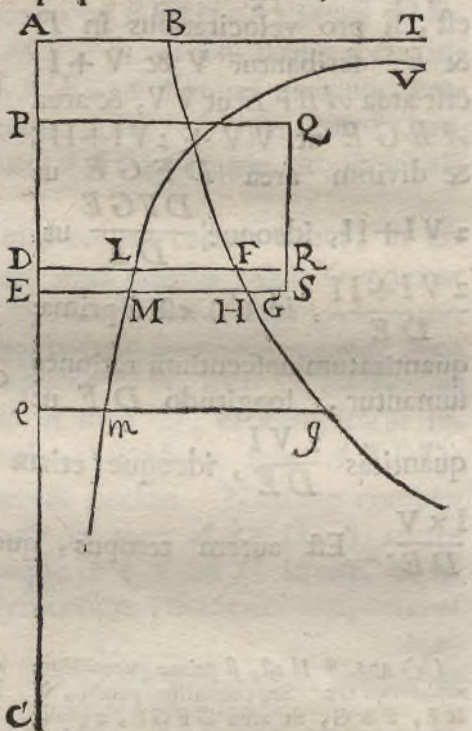
PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XXXIX.

Positâ cujuscumque generis vi centripetâ, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectâ ascendentis vel descendentis tum velocitas in locis singulis, tum tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis A in rectâ $ADEC$ cadat corpus E , (2) de quo loco ejus E erigatur semper perpendicularis EG , vi centripetæ in loco illo ad centrum C tendenti proportionalis: Sitque BFG linea curva quam punctum G perpetuo tangit. Coincidat autem EG ipso motus initio cum perpendiculari AB , & erit corporis velocitas in loco quovis E (2) ut recta, quæ potest aream curvilineam $ABGE$. Q. E. I.

In EG capiatur EM rectæ, quæ potest aream $ABGE$, reciprocè proportionalis, & fit $VL M$ linea curva, quam punctum M perpetuo tangit, & cujus asymptotos est recta AB producta; & erit tempus, quo corpus cadendo describit lineam AE , ut area curvilinea $ABTVME$. Q. E. I.



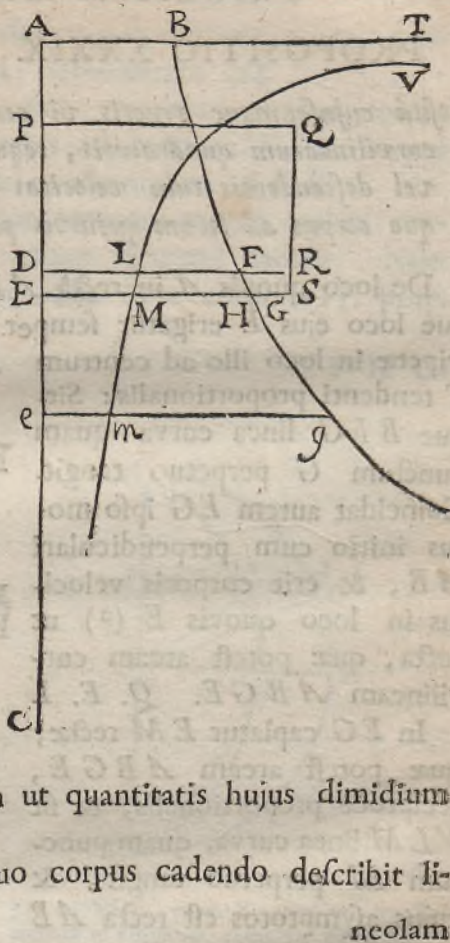
(2) * Deque loco ejus E . Id est, per omnia lineæ AC puncta erigantur perpendicularia ut EG , vi centripetæ in singulis illis punctis proportionalia, sitque BFG curva ad quam omnia illa perpendicularia terminentur. Possunt autem perpendicularia illa ad arbitrium assumi, dummodò singula vi centripetæ in singulis locis proportionalia sint.

Tom. I.

(2) Ut recta, quæ potest aream curvilineam $ABGE$. In prioribus Editionibus erat, ut area curvilinea $ABGE$ latus quadratum; hæ scilicet phrasæ synonymæ sunt; frasis quæ hic juxta Editionem Londinensem adhibetur, veteribus Geometris est familiaris: Ea autem linea quæ potest figuram datam, est linea cujus quadratum est æquale illi figuræ datæ.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Etenim in rectâ AE capiatur linea quam minima DE datæ longitudinis, sitque DLF locus lineæ EMG , ubi corpus versabatur in D ; & si ea sit vis centripeta, ut recta, quæ potest aream $ABGE$, sit ut descendens velocitas: erit area ipsa in duplicatâ ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D & E , scribantur V & $V+I$, erit area $ABFD$ ut VV , & area $ABGE$ ut $VV + 2VI + II$, & divisim area $DFGE$ ut $2VI + II$, ideoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI + II}{DE}$, id (b) est si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus, quo corpus cadendo describit li-



(b) 406. * Id est, si primæ quantitatum nascentium &c. Seu coeuntibus punctis, D & E , F & G , sit area $DFGE$, æqualis rectangulo $DF \times DE$ (107) & velocitatis finitæ V , incrementem nascentis I , evanescit respectu V , (107) ac proinde cum sit $I:V=II:VI$, quadratum II , evanescit respectu rectanguli VI , aut $2VI$; Quare in hoc casu $\frac{DFGE}{DE} = \frac{DF \times DE}{DE} = DF$, & $\frac{2VI + II}{DE} = \frac{2VI}{DE}$; Est igitur longitudo DF , ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, ideo-

que etiam, ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$: Quoniam autem velocitas per spatium evanescens DE , est uniformis (145), si tempus quo DE percurritur, dicatur T , erit $T = \frac{DE}{V}$, (5). Est autem vis ut $\frac{I}{T}$ (13) adeoque si loco T ponatur $\frac{DE}{V}$, erit vis ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF , ergo vis ipsi DF , vel EG &c.

* Porro

neolam DE , ut lineola illa directè & velocitas V inversè, estque vis ut velocitatis incrementum I directè & tempus inversè, ideoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF . Ergo vis ipsi DF vel EG proportionalis facit ut corpus eâ cum velocitate descendat, quæ sit ut recta quæ potest aream $ABGE$. *Q. E. D.*

(c) Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE describatur, sit ut velocitas inversè, ideoque inversè ut linea recta quæ potest aream $ABFD$; (d) sitque DL , atque ideo area nascens $DLME$, ut eadem linea recta inversè: erit tempus ut area $DLME$, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per corol. lem. IV.) tempus totum quo linea AE describitur ut area tota $ATVME$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Si P sit locus, de quo corpus cadere debet, ut urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ (qualis vulgo supponitur gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati, quam corpus aliud vi quâcunque cadens acquisivit eodem loco D , & in perpendiculari DF capiatur DR , quæ sit ad DF ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D , & compleatur rectangulum $PDRQ$, eique æqualis abscindatur area $ABFD$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo $DRSE$, (e) cum sit area $ABFD$ ad aream $DFGE$ ut VV ad $2VI$, ideoque ut $\frac{1}{2}V$ ad I , id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæ-

(c) * Porro cum tempus. Tempus enim est ut spatium uniformiter percursum directè & velocitas inversè (5), quare si spatium constans fuerit, tempus est ut velocitas inversè.

(d) * Sitque DL . Est enim DL , ut DL in constantem DE ducta, hoc est, ut area nascens $DLME$, sed DL est ut latus quadratum areæ $ABFD$ inversè (per constr.) ergo area nascens $DLME$, est ut idem latus quadratum inversè, hoc est, ut velocitas inverse, sive, ut tempus per

DE . Quare summa omnium temporum est ut summa omnium arearum nascentium. Hoc est, &c.

(e) * Cum (coeuntibus punctis D, E) sit area $ABFD$ ad aream $DFGE$, ut VV , ad $2V \times I$; Si enim A sit locus ex quo corpus cadere debet vi quâcunque ut eandem in D velocitatem V acquisiverit ac si ex P vi gravitatis decidisset erit area $ABFD$, ut VV , & area $DFGE$, ut $2VI + II$, hoc est, (406) ut $2VI$. Quare $ABFD : DFGE = VV : 2VI = \frac{1}{2}V : I$.

loco e , erigendo ordinatam eg , & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est recta, quæ potest rectangulum $PQRD$ areâ curvilineâ $DFge$ vel auctum, si locus e est loco D inferior, vel diminutum, si is superior est, ad rectam quæ potest rectangulum solum $PQRD$.

Corol 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam em reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD$ + vel - $DFge$, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit à P & cadendo pervenit ad D , ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2 PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam PD est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam PE in (h) subduplicatâ ratione PD ad PE , id est (lineola DE jamjam nascente) in ratione PD ad $PD + \frac{1}{2} DE$ feu $2 PD$ ad $2 PD + DE$, & (i) divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam DE ut $2 PD$ ad DE , ideoque ut rectangulum $2 PD \times DL$ ad aream $DLME$; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam De , ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2 PD \times DL$ ad aream $DLme$.

corporis in loco e , est ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$, cumque sit velocitas in D , ut \sqrt{ABFD} , sive ut huic æqualis \sqrt{PQRD} (ex Dem.) erit velocitas in e , ad velocitatem in D , ut $\sqrt{PQRD \mp DFge}$, ad \sqrt{PQRD} .

(h) * In subduplicatâ ratione PD , ad PE (27), id est, lineola DE , jamjam nascente in ratione PD , ad $PD + \frac{1}{2} DE$; quadratis enim his ultimis terminis fiet $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4} DE^2$; & cum sit PD quantitas finita; & DE nascentis, evanescit $(107) \frac{1}{4} DE^2$ respectu $PD \times DE$; adeoque $PD \times DE \mp \frac{1}{4} DE^2 = PD \times DE$. Unde est $PD^2 : PD^2 + PD \times DE + \frac{1}{4} DE^2 = PD^2 : PD^2$

$+ PD \times DE = PD : PD + DE$, seu PE ; est igitur $PD : PE$ in ratione duplicatâ PD ad $PD + \frac{1}{2} DE$, atque adeo PD ad $PD + \frac{1}{2} DE$, in ratione subduplicatâ PD , ad PE .

(i) * Et divisim. Tempus per PD , vi uniformi descriptum est ad tempus per DE , ut $2 PD$, ad DE , adeoque ut rectangulum $2 PD \times DL$, ad rectangulum $DE \times DL$, seu ad aream $DLME$; tempus per rectam PD , vi uniformi descriptam sit T , tempus per DE , sit θ , & tempus per De , sit t , erit (ex Dem.) $T : \theta = 2 PD \times DL : DLME$, estque idem tempus θ , quo utrumque corpus describit lineam DE , siquidem utriusque eadem est velocitate in D ; sed (ex constructione) tempus quo corpus

DE MOTU
CORPO-
RUM.

inæquabili motu describit lineam DE est ad tempus quo describit lineam DE, ut area DLME, ad aream DLM e, ergo θ : $T = DLM E : DLM e$; unde ex æquo $T : t = 2PD \times DL : DLM e$.

407. Sit spatium à corpore cadente descriptum $AE = x$, velocitas in E acquisita $= v$, tempus quo AE, percurritur $= t$, vis centripeta in E, hoc est, $EG = y$, erunt dx, dv, dt , quantitatibus x, v, t , fluxiones seu incrementa nascentia vel evanescentia (146. 158), cumque velocitas per spatium nascens DE, sit uniformis (145) erit $v = \frac{dx}{dt}$ (5), ac proinde velocitatis

incrementum $dv = \frac{d^2x}{dt^2}$, si sumatur dt , con-

stans (164) sed est (13) $y = \frac{dv}{dt}$, adeo-

que si loco dv , substituatur $\frac{d^2x}{dt^2}$, invenie-

tur $y = \frac{d^2x}{dt^2}$. Hæ sunt formulæ quas tra-

didit Varignonius in Comm. Paris. an. 1700. Harum formularum ope, datâ inter duas ex variabilibus quatuor y, x, v, t , æquationes quæ simul quatuor duntaxat variabiles complectentur, ex quibus proinde æquationibus per calculum fluxionum & solitas reductiones inveniri poterit æquatio inter duas quilibet ex quatuor variabilibus y, x, v, t , ut demonstravit Varignonius in Comm. Paris. an. 1700, qui in iisdem commentariis an. 1707. 1720. præclara de ascensu & descensu corporum perpendiculari theorematâ edidit.

408. Coroll. Cum sit juxtâ superiores formulas $dt = \frac{dx}{v}$, & $dt = \frac{dv}{y}$, ac proin-

dè $\frac{dx}{v} = \frac{dv}{y}$, vel $y dx = v dv$, erit $S. y dx$

$= \frac{1}{2} v^2$. Sed $y dx = EG \times DE$, seu fluxioni areæ ABGE; ergò (147) $S. y dx =$

areæ ABGE, $= \frac{1}{2} v^2$, & $v = \sqrt{2 ABGE}$. Est igitur ob constantem 2, velocitas in

loco E, ut recta quæ potest aream curvilineam ABGE. Hinc est 1^{us}. casus Prop.

XXXIX. Newt. Quoniam verò $dt = \frac{dx}{v}$

& $v = \sqrt{2 ABGE}$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{2 ABGE}}$;

Quare si capitur $EM = \frac{1}{\sqrt{2 ABGE}}$, erit dt

$= EM \times dx = EM \times DE$, & sumptis utrinque fluentibus $t = \text{area ALME}$. Hic est casus 2^{us}. Prop. XXXIX. Newt.

409. Superior expressio vis centripetæ y ,

$= \frac{dv}{dt}$ si vis centripeta consideretur ut gra-

vitatis in centrum, supponit massam corporum aut eandem esse aut ponderibus proportionalem. Verùm si pondera non sint massis proportionalia, diversæque inter se massæ conferantur, tum habenda est massarum ratio ut determinetur tota corporis gravitas, seu vis tota quæ centrum versus urgetur. Sit vis illa $= y$, & massa $= m$,

erit quidem semper $v = \frac{dx}{dt}$ (5), at fiet y

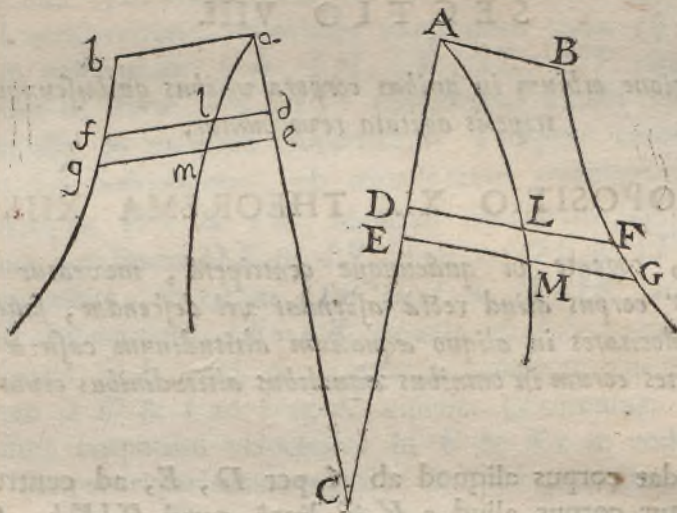
$= \frac{m dv}{dt}$. Etenim vis centripeta conside-

rari potest ut potentia motrix, quæ corpori indefinenter applicata, motum in eo suâ actione producit, quæque tempusculo evanescente eadem constanter permanet,

& uniformiter agit (117). Porrò factum ex potentiâ motrice uniformiter agente & tempore actionis æquale quantitati actionis, crescit enim actionis quantitas cum potentiâ motrice & tempore actionis proportionaliter, & factum ex massâ corporis & celeritate, seu quantitas motus producti est id quod actione illâ effectum est,

seu quantitati actionis æquipollet, cum necessarius sit nexus inter quantitatem actionis & quantitatem effectus & alter alteri æquivalcat. Quare $y dt = m dv$, & y

$= \frac{m dv}{dt}$.



410. Si itaque pondera non supponantur massis proportionalia, & corpora duo A, a , quorum massæ M, m ad idem vel diversa virium centra C , perpendiculariter cadant, earumque vires centripetæ in singulis locis E, e , sint $Y=EG, y=eg$, velocitates V, v , spatia descripta $X=AE, x=ae$, tempora quibus descripta sunt T, t , inveniatur (409) $v = \frac{dx}{dt}, V = \frac{dX}{dT}$, & $y dt = m dv, Y dT = M dV$, adeoque (408), $S. y dx = abge = \frac{1}{2} m v v$; & similiter $S. Y dX = ABGE = \frac{1}{2} M V V$, ob constantes M, m ; undè $v = \frac{\sqrt{2 abge}}{m}, V =$

$$\frac{\sqrt{2 ABGE}}{M}; \text{ proindèque } v:V = \frac{\sqrt{2 abge}}{m} \\ \frac{\sqrt{2 ABGE}}{M}. \text{ Quarè } dt = \frac{dx}{v} = \frac{dx \sqrt{m}}{\sqrt{2 abge}^2} \\ \& dT = \frac{dX \sqrt{M}}{\sqrt{2 ABGE}}; \text{ undè si ponatur } em, \\ = \frac{1}{\sqrt{2 abge}} \& EM = \sqrt{2 ABGE}, \text{ erit} \\ dt = de \times em \times \sqrt{m}, \& dT = DE \times EM \\ \times \sqrt{M}, \text{ ac consequenter } t = alme \times \sqrt{m}: \\ \& T = ALME \times \sqrt{M}. \text{ Undè } t:T = alme \\ \times \sqrt{m}: ALME \times \sqrt{M}.$$

SECTIO VIII.

De inventione orbium in quibus corpora viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

Si corpus, cogente vi quâcunque centripetâ, moveatur utcunque, & corpus aliud rectâ ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab A per D, E , ad centrum C , & moveatur corpus aliud a V in lineâ curvâ $VIKk$. Centro C intervallis quibusvis describantur circuli concentrici DI, EK rectæ AC in D & E , curvæque VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipsi KE in N ; & in IK demittatur perpendicularum NT ; sitque circumferentiarum circumferentiarum intervallum DE vel IN quam minimum, & habeant corpora in D & I velocitates æquales. Quoniam distantiæ CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN ; & si vis una IN (per legum corol. 2.) resolvatur in duas NT & IT , vis NT , agendo secundum lineam NT corporis cursui ITK perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus à cursu rectilineo, facietque ipsum de orbis tangente perpetuo deflectere, inque viâ curvilineâ $ITKk$ progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera IT , secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit



nerabit sibi ipsi proportionalem. (k) Proinde corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium DE , IN , IK , IT , NT rationes primæ) sunt ut lineæ DE , IT : temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus DE & IK describuntur, ob æqualitatem velocitatum sunt ut viæ descriptæ DE & IK , ideoque accelerationes, in cursu corporum per lineas DE & IK , sunt ut DE & IT , DE & IK conjunctim, id est ut DE quad. & $IT \times IK$ rectangulum. (l) Sed rectangulum $IT \times IK$ æquale est IN quadrato, hoc est, æquale DE quad. & propterea accelerationes in transitu corporum à D & I ad E & K æquales generantur. Æquales igitur sunt corporum velocitates in E & K : & eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantis. *Q. E. D.*

Sed & (m) eodem argumento corpora æquavelocia & æqualiter à centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus vel oscilletur pendens à filo, vel impedimento quovis politissimo & perfectè lubrico cogatur in lineâ curvâ moveri, & corpus aliud rectâ ascendat vel descendat,

(k) * Proinde corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ DE , IT . Sunt enim vires acceleratrices ut accelerationes nascentes, seu celeritatum incrementa nascentia directè & tempora inversè (13), undè temporibus æqualibus accelerationes nascentes sunt ut vires acceleratrices, temporibus autem inæqualibus ut vires acceleratrices & tempora conjunctim; sed lineæ DE , IT , sunt ut vires acceleratrices in directionibus DE , IT ; ergò corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ sunt ut lineæ DE , IT ; temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim.

(l) * Sed rectangulum $IT \times IK$ æquale est IN quadrato, cum sit KNI angulus rectus, & lineæ NT ad basim IK

normalis, adeoque crus IN medium proportionale inter hypothenusam IK & illius abscissam IT .

(m) 411. Et eodem argumento. Vis enim acceleratrix motum corporis ascendentis eodem modo retardat, quo motum descendentis accelerat in iisdem locis (25); undè vera est propositio sive corpus utrumque descendat aut ascendat, sive descendente uno, alterum ascendat.

412. Si centrum C in infinitum abeat, rectæ AC , IC fiunt parallelæ & arcus DI , EK in rectas, lineis AC , IC perpendiculares, mutantur. Valet igitur propositio etiam ubi vis centripetæ directio AC , IC sibi perpetuò parallela est, dummodò puncta D , I æque alta sint, hoc est, in eadem rectâ ad directionem vis centripetæ perpendiculi sumantur.

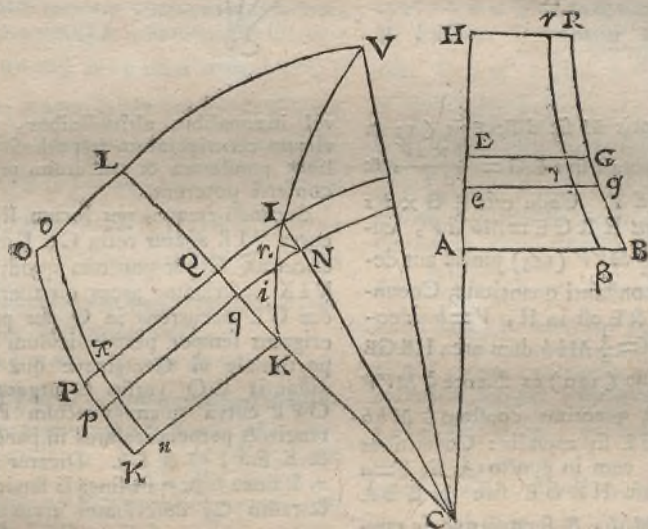
Constantibus, erunt semper areæ CEG sicut x^n sive A^n .

Jam verò per Prop. XXXIX., velocitas corporis cadentis in puncto E, est ut linea quæ potest aream PBGE, sive quæ potest differentiam arearum CPB, CEG, est autem semper CPB ad CEG ut P^n ad A^n , earum ergo differentiarum erunt semper ut $P^n - A^n$, ideoque velocitas corporis cadentis in E erit semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$.

His positis si corpus vel oscillans vel in trajectoriâ quâcumque VIK revolvens in puncto I velocitatem eam habeat quâ (lineâ CI in P productâ) ex I in P ascendere potuisset, vel quod idem est quam acquireret (25) ex P ad I decidendo, in omni aliâ altitudine CK sive A eandem habebit celeritatem quam corpus acquireret rectâ descendendo ex distantia P à centro usque ad

altitudinem æqualem CK, per Prop. præsentem, sed celeritates corporis ex P rectâ descendentis erunt semper ut $\sqrt{P^n - A^n}$, Ergo etiam velocitates corporis in trajectoriâ revolvantis erunt semper in quâvis distantia A à centro ut $\sqrt{P^n - A^n}$. Q. E. D.

414. Scholium. Vera est Propositio XL, si corporum duorum (quorum unum in rectâ alterum in curvâ lineâ fertur) massæ sint æquales & pondera in locis æquæ altis æqualia aut pondera massis inæqualibus proportionalia in locis æquæ altis. Illud idem theorema ad majorem universalitatem admodum eleganter reduxit Varignonius in Comm. Paris. an. 1719. Nos quoque principiis supra positis insistentes, universaliter Newtoni propositionem demonstrabimus.



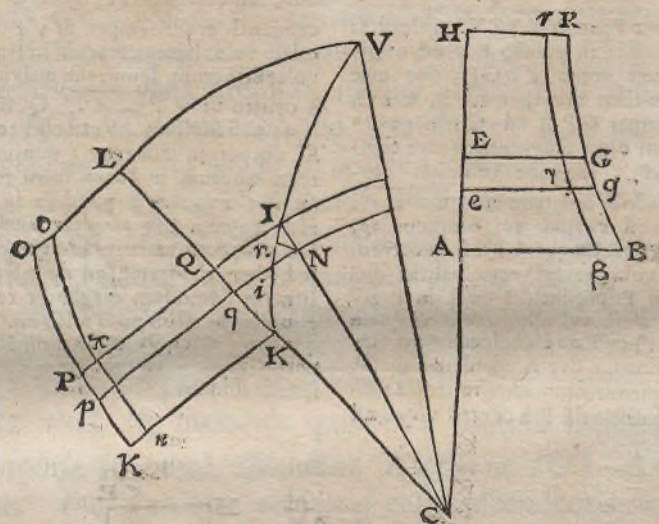
Corpora duo quorum Massa M, m ad ædem vel diversa virium centra C ex locis quibuscumque datis H, V descendant, alterum quidem M , perpendiculariter per rectam HC ; alterum verò m per rectam vel curvam quamvis VIK .

Primum. De loco quovis E lineæ HC erigatur semper perpendicularis EG vi centripetæ in loco illo ad centrum tendenti proportionalis, sitque RGB linea cur-

va quam punctum G perpetuò tangit: Perpendiculares in punctis datis H & A sint HR & AB , perpendicularis in puncto variabili E sit EG cui proxima ducatur linea eg ; velocitates in punctis datis H & A sint b & a , velocitas in puncto variabili E sit v , & vis centripetæ in eo puncto dicatur F , cui EG est proportionalis, sit abscissa HE , s , ejus fluxio Ee erit ds , & tempusculum quo describitur

R r z E e

DE MOTU
CORPO-
RUM.



Ee lapsu corporis M fit dT ; Erit (13 & 409) vis centripeta F five $EG = \frac{M \times dV}{dT}$, & (5) $ds = V dT$. Unde erit $EG \times ds$ five fluxio areæ $HRGE = MV dV$, cujus fluens erit $\frac{1}{2} MVV$ (165) junctâ aut detractâ quâdam constanti quantitate; Coeuntibus enim H & E est in H , $V = b$ ideoque fit $\frac{1}{2} MVV = \frac{1}{2} Mbb$ dum area $HRGE$ evanescit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2} MVV$ detrahenda est quantitas constans $\frac{1}{2} Mbb$ ut areæ $HRGE$ sit æqualis: Coeuntibus verò E & A , cum in puncto A fit $V = a$ erit in eo casu $HRGE$ five $HRBA = \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} Mbb$, & sumpto quovis puncto E erit $HRBA - HREG$ five $EGBA = \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} Mbb - \frac{1}{2} MVV + \frac{1}{2} Mbb = \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} VV$, Unde sic tandem incidimus in duas æquationes
 $HRGE = \frac{1}{2} MVV - \frac{1}{2} Mbb$ &
 $EGBA = \frac{1}{2} Maa - \frac{1}{2} MVV$ quibus comparatis cum iis quas respectu corporis m in curvâ VIK moti simili modo deducemus, velocitates corporum in quibusvis æqualibus

vel inæqualibus altitudinibus, in quavis virium centripetarum hypothesi & in quolibet ponderum & massarum proportione conferri poterunt.

Secundò itaque, per locum K datum in curva VIK agatur recta CKL æqualis CV & centro C per punctum quodvis I lineæ VIK describatur arcus circularis IQ rectæ CL occurrens in Q per punctum Q erigatur semper perpendicularum PQ proportionale vi Centripetæ quâ Corpus in distantia CQ versus C urgetur: sitque OPk curva quam punctum P perpetuò tangit, & perpendiculares in punctis datis L & K sint LO & Kk . Dicatur arcus VI , x , & linea LQ , y ; sit linea LI fluxio arcus VI , & radio CI describatur arcus lineæ CL occurrens in q , & lineæ CI in N , erit $Qq = IN$, ex q erigatur perpendicularis qp usque ad curvam OPK , & ex N ducatur Nn perpendicularis in arcum Ii .

Velocitates corporis m in punctis datis L & K dicantur e & c velocitas in puncto variabili Q sit u : Vis totalis centripeta in Q semper exprimitur per QP , eadem vis QP aget in I (propter æquales CQ , CI), secundum directionem IN , resolvatur ergo illa vis in vires duas quarum una agit in corpus m secundum directionem Ii alte

altera secundum directionem N n, erit IN ad In: ut vis tota Q P ad vim quâ corpus urgetur secundum curvam, sed ob Triangula IN n, IN i similia est IN ad In sicut I i ad IN sive Q q, ideoque I i ad Q q ut vis Q P ad vim agentem secundum curvam quæ itaque erit $\frac{QP \times Qq}{Ii}$; sit dt, tempusculum quo describetur I i per eam vim, eritque (13 & 409) ea vis $\frac{QP \times Qq}{Ii} = \frac{mdu}{dt}$;

Unde erit $QP \times Qq = \frac{mdu}{dt} \times Ii$ sed (5) est I i spatium percursum tempore dt velocitate u est ergo æquale udt ideoque $QP \times Qq \frac{mdu}{dt} \times udt = mdu^2$, sed $QP \times Qq = m u d u$ est fluxio areæ LOQP, hujus fluens est $\frac{1}{2} m u u$ (165) additâ aut detractâ quâdam constanti quantitate, coeuntibus enim Q & L, sit in L, u=c ideoque sit $\frac{1}{2} m u u = \frac{1}{2} m e e$ dum area LOQP evanescit, itaque (170) ex fluente $\frac{1}{2} m u u$ detrahenda est quantitas constans $\frac{1}{2} m e e$, eritque $LOQP = \frac{1}{2} m u u - \frac{1}{2} m e e$, & coeuntibus Q & K sit u=c & $LOKk = \frac{1}{2} m c c - \frac{1}{2} m e e$ & $LOKk - LOQP$ sive $QPKk = \frac{1}{2} m c c - \frac{1}{2} m u u$, sicque tandem incidimus in has duas æquationes

$$LOQP = \frac{1}{2} m u u - \frac{1}{2} m e e \quad \&$$

$$QPKk = \frac{1}{2} m c c - \frac{1}{2} m u u \quad \text{eâdem metho-}$$

do quâ in primo calculo sumus usi.
415. Coroll. 1. Ex primâ Æquatione primi calculi est $V = \frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M}$, ex primâ Æquatione secundi calculi est $u = \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$, unde invenitur $V:u =$

$$\frac{\sqrt{2HRGE + Mbb}}{M} : \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$$

Ex secundâ verò æquatione primi calculi est $V = \frac{\sqrt{Maa - 2EGBA}}{M}$ & ex secunda Æ-

quatione 2^{di}. calculi $u = \frac{\sqrt{mcc - 2QPKk}}{m}$, &

$$\text{hinc est } V:u = \frac{\sqrt{Maa - 2EGBA}}{M} :$$

$$\frac{\sqrt{mcc - 2QPKk}}{m}$$

416. Coroll. 2. Si in perpendicularo QP, ita capiatur Q π, ut factum π Q × m, sit ubique gravitati corporis in I proportio- nale, seu rectæ Q P æquale, erit 2Loπ Q × m = 2LOQP, adeoque $u = \frac{\sqrt{2LOQP + mee}}{m}$

$$= \frac{\sqrt{2Lo\pi Q + ee}}{m} \quad \& \quad u = \frac{\sqrt{cc - 2Q\pi K}}{m}$$

Et similiter si ponatur E γ × M = EG, erit $V = \frac{\sqrt{2H\gamma E + bb}}{M}$ & $V = \frac{\sqrt{aa - 2E\gamma\beta A}}{M}$.

417. Coroll. 3. Si puncta H & V, E & I, fuerint æquæ alta, & in illis lineæ EG, QP vi centripetæ proportionales, sint semper æquales, erit HRGE = LOQP. Quare si præterea massæ M, m, & velocitates b, e, in punctis H, V, æquantur, erit $\frac{2HRGE + Mbb}{M} = \frac{2LOQP + mee}{m}$, adeo-

que $V = u$, in omnibus punctis æquæ altis E & I. Si in punctis æquæ altis H & V, E & I, vires centripetæ massarum M & m rationem semper habeant, erit $HRGE:LOQP = M:m$, proindéque $\frac{2HRGE}{M}$

$$= \frac{2LOQP}{m}$$

Unde si præterea ponatur $bb = ee$, erit $V = u$, quæ est propositio XL. Newtoni. Patet etiam in 4. superioribus formulis (415), Massas M & m exterminari, si fuerint ponderibus proportionales.

minimo descripta, erit ut velocitas, atque ideo ut recta quæ potest aream $ABFD$, & (p) triangulum ICK tempore proportionale dabitur, ideoque KN erit reciprocè ut altitudo IC , id est, si detur quantitas aliqua Q , & altitudo IC nominetur

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XLI.

A , ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z , & ponamus

eam esse magnitudinem ipsius Q ut sit in aliquo casu \sqrt{ABFD} ad Z ut est IK ad KN , & (q) erit in omni casu \sqrt{ABFD} ad Z ut IK ad KN , & $ABFD$ ad ZZ ut IKq ad KNq , & divisim $ABFD-ZZ$ ad ZZ ut IN (r) quad. ad KN quad.

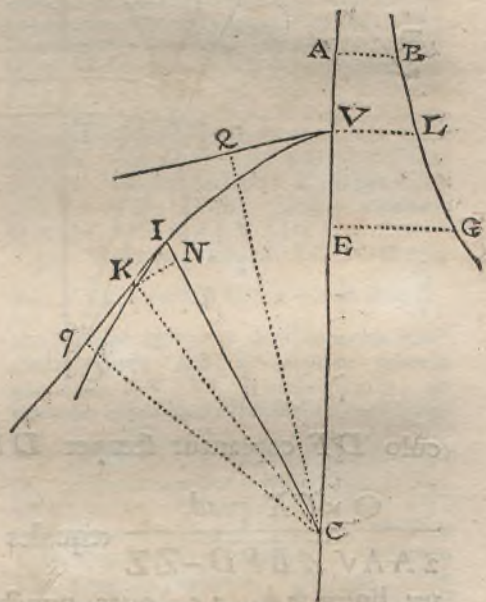
(p) * Triangulum ICK tempore quo describitur proportionale (per Prop. 1.) dato tempore dabitur; Est autem trianguli ICK area $= \frac{1}{2} KN \times IC$. Quare erit rectangulum $KN \times IC$ quantitati constanti æquale, & hinc lineola KN æqualis quantitati constanti ad IC applicata; hoc est, KN reciprocè ut IC .

(q) * Erit in omni casu. Quoniam IK est semper ut \sqrt{ABFD} , hoc est IK ad \sqrt{ABFD} in datâ ratione, & similiter Z ad KN in datâ ratione, si in aliquo casu sit \sqrt{ABFD} ad Z ut IK ad KN adeoque \sqrt{ABFD} ad IK ut Z ad KN , erit in omni casu \sqrt{ABFD} ad IK ut Z ad KN , ac proinde \sqrt{ABFD} ad Z ut IK ad KN .

418. Ducatur VL parallela EG quæ curvæ BFG occurrat in L , & ex centro C ad QV tangentem in V , ac ad qI , tangentem in I , demissis perpendicularis CQ , Cq , erit $CQ \times \sqrt{ABL V}$ quantitas constans & æqualis $Cq \times \sqrt{ABFD}$. Nam (per coroll. 1. prop. 1.) velocitas in V (adeoque $\sqrt{ABL V}$) est ut CQ reciprocè, id est, ut $\frac{1}{CQ}$ directè & proinde $CQ \times \sqrt{ABL V}$

ut quantitas constans 1, & pariter velocitas in I (adeoque \sqrt{ABFD}) est ut Cq reciprocè, id est, ut $\frac{1}{Cq}$ directè, & proinde $Cq \times \sqrt{ABFD}$, ut quantitas constans 1, adeoque $Cq \times \sqrt{ABFD} = CQ \times \sqrt{ABL V}$.

Si itaque capiatur $Q = CQ \times \sqrt{ABL V} = Cq \times \sqrt{ABFD}$, & $Z = \frac{Q}{IC}$ (unde est



$Q = Z \times IC$) erit semper $\sqrt{ABFD} : Z = IC : Cq = IK : KN$. Nam propter triangula IKN , ICq similia, est IK ad KN ut IC ad Cq , sed quia $Z \times IC (=Q) = Cq \times \sqrt{ABFD}$ est $IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$ ergo $IK : KN = IC : Cq = \sqrt{ABFD} : Z$.
(r) * Ut IN^2 , ad KN^2 . Est enim ob angulum INK rectum, $IK^2 - KN^2 = IN^2$.

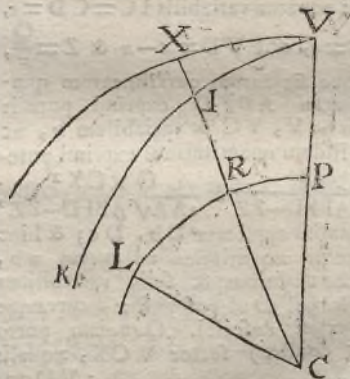
* Un-

DE MOTU
CORPO-
RUM.

in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q. E. F.*
Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est, apfides trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim apfides puncta illa in quibus recta *IC* per centrum ducta incidit perpendiculariter in trajectoriam *VIK*, id (†) quod fit ubi rectæ *IK* & *NK* æquantur, ideoque ubi area *ABFD* æqualis est *ZZ*.

(^u) *Corol. 2.* Sed & angulus *KIN*, in quo trajectoria alicu-

supponantur proportionales, nec vis centripeta æqualis in æqualibus à centro distantis. Nam factum $M \times EG$, ex corporis massa *M* in perpendicularum *EG*, ejusdem corporis gravitatem in loco quovis *I* exhibeat, sitque *BLFG* curva quam punctum *G* perpetuo tangit, velocitas in loco *V* dicatur *C*, lineam *AB* ita abscindatur ut sit area $ABL V = \frac{1}{2} CC$; erit velocitas in *I* $= \sqrt{2 V L F D + 2 A B L V}$ (416), id est $= \sqrt{2 A B F D}$, adeoque ut $\sqrt{A B F D}$, undè lineola *IK* dato tempore quam minimo descripta erit ut $\sqrt{A B F D}$, & triangulum *ICK* &c. Cætera quæ in probl. XXVIII. solutione sequuntur ratio- cinia & constructiones manent eadem.



422. Trajectoria *VIK*, geometricè rationalis est ubi per æquationes finitas inveniri potest sector circuli æqualis areæ *VDca*: & hujus sectoris radius est ad *CX* radium, circuli *VXY*, ut *nn* ad 1 estque *nn* numerus rationalis positivus integer vel fractus. Sit enim sector cir-

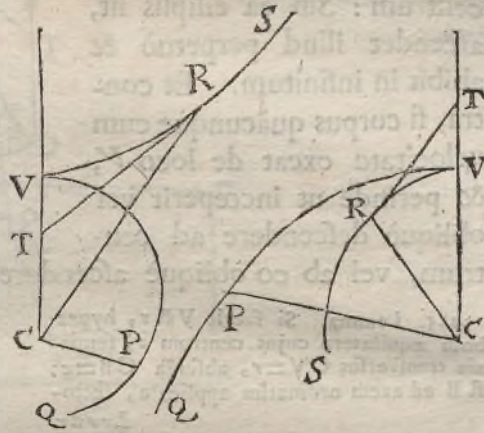
culi *LPC* = areæ *VDca*, id est, æqualis sectori *VIX*, sitque radius *CP* ad radium *CV*, ut *n*, ad 1, erit $CP \times PL = CV \times VX$, & $CP : CV = n : 1 = VX : PL$, (per hyp.) & $CP : CV = n : 1 = PR : VX$ (ex naturâ circuli). Quare per compositionem rationum & ex æquo $nn : 1 = RP : PL$. Si ergo fuerit *nn*, ad 1, ut numerus ad numerum, dato arcu *PL*, inveniri poterit arcus *RP* per æquationem finitam, cum possit semper arcus datus in datâ ratione numeri ad numerum per æquationem finitam dividi. Quoniam igitur assumptæ *CI* positio & punctum *I*, in curvâ *VIK* per finitas æquationes determinantur, erit *VK* curva algebraica seu geometricè rationalis. Hermannus prop. 25. Lib. I. Phoron. hoc elegans & difficile problema solvit: invenire canonem generalem determinandæ gravitatis variabilis pro omnibus curvis algebraicis in infinitum, quantitibus finitis expressum.

(†) * Id quod fit ubi rectæ *IK* & *KN* æquantur. Tunc enim punctum *N* coincidit cum puncto *I*, ob angulum *KIN* rectum, adeoque ob proportionem $\sqrt{A B F D} : Z = IK : KN$, fit $A B F D = Z Z = \frac{Q Q}{I C^2}$ & $I C^2 \times A B F D = Q Q$ quantitati datæ. Hinc cum concessis curvarum quadraturis data sit area *ABFD* in quantitibus constantibus & variabili *IC* seu *CD*, invenietur valor *IC*, hoc est, maximæ & minimæ altitudines corporis trajectoriam *VK* describentis.

(^u) * *Coroll. 2.* Ob angulum *KNI* rectum in triangulo nascente *KIN*, sinus anguli *KIN* est ad sinum totum, ut *KN* ad *IK*, id est, ut Z (seu $\frac{Q}{I C}$) ad $\sqrt{A B F D}$. Verum datâ *IC* datur area *ABFD*, & inde ob quantitatem *Q* datam datur ratio

bi secat lineam illam IC , ex datâ corporis altitudine IC expedite invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut KN ad IK , id est, ut Z ad latus quadratum areæ $ABFD$.

(*) Corol. 3. Si centro C & vertice principali V describatur sectio quælibet conica VRS , & à quovis ejus puncto R agatur tangens RT occurrens axi infinite producto CV in puncto T ; dein junctâ CR ducatur recta CP , quæ æqualis sit abscissæ CT , angulumque VCP sectori VCR proportionalem constituat; tendat autem ad centrum C vis centripeta cubo distantiae locorum à centro reciprocè proportionalis, & exeat corpus de loco V justâ cum velocitate secundum lineam rectæ CV perpendicularem: progreditur



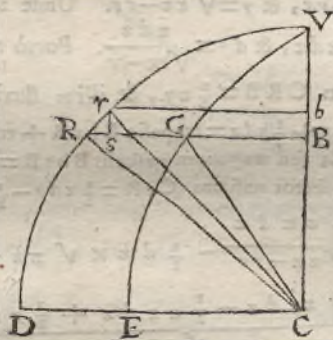
$\frac{Q}{IC}$ ad \sqrt{ABFD} , hoc est, ratio sinus anguli KIN , ad radium. Invenietur ergo sinus anguli KIN , & hinc angulus ipse cognoscetur.

(x) 423. Lemma. Si fuerit DVC , circuli quadrans cujus radius $CV=r$ abscissa $CB=z$, ordinatæ infinite propinquæ BR , br , fluxio arcus DR erit $\frac{r dz}{\sqrt{rr-zz}}$, & fluxio sectoris $CDR = \frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{rr-zz}}$.

Est enim $BR = \sqrt{rr-zz}$, & demissâ ex puncto r in RB , perpendiculari rs , triangula similia RCB , rRs , dant $RB (\sqrt{rr-zz}) : RC (r) = rs (dz) : Rr = \frac{r dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Q. e. 1. Porro sector nascens

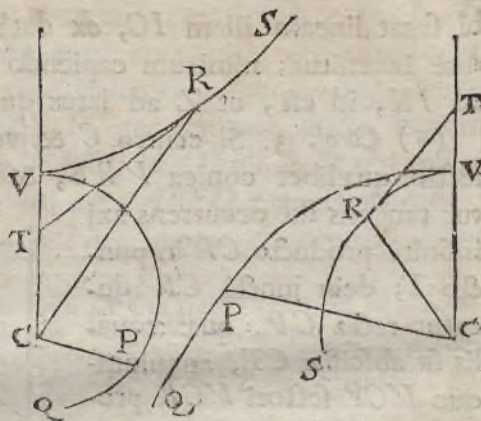
$$CRr = \frac{1}{2} CR \times Rr = \frac{\frac{1}{2} r r dz}{\sqrt{rr-zz}} \quad \text{Q. e. 2.}$$

424. Coroll. Si fuerit $EGVC$, quadrans ellipseos cujus centrum C , semiaxis unus $CV=r$, alter semiaxis $CE=c$, abscissa $CB=z$, & BG ordinatim applicata ad axem CV , sectoris CEG fluxio erit $= \frac{\frac{1}{2} r c dz}{\sqrt{rr-zz}}$. Sunt enim sectores CDR , CEG adeoque & eorum fluxiones in datâ ratione ad c , (251). S. l. 2. 425.



DE MOTU
CORPO-
RUM.

dietur corpus illud in traje-
ctoriâ VPQ quam punctum
 P perpetuò tangit; ideoque
si conica sectio $VR S$ hyper-
bola fit, descendet idem ad
centrum: Sin ea ellipsis fit,
ascendet illud perpetuò &
abibit in infinitum. Et con-
tra, si corpus quâcunque cum
velocitate exeat de loco V ,
& perinde ut incœperit vel
obliquè descendere ad cen-
trum, vel ab eo obliquè ascendere, figura $VR S$ vel hyperbola



425. Lemma. Si fuerit VRr , hyper-
bola æquilatera cujus centrum c , semia-
xis transversus $CV=r$, abscissa $CB=z$,
 RB ad axem ordinatim applicata, secto-

ris hyperbolici CRV fluxio erit $\frac{\frac{1}{2} r r d z}{\sqrt{z z - r r}}$.

Agatur enim $r b$ ordinata, priori RB
infinité propinqua, sitque $RB=y$, erit
(ex naturâ hyperbolæ æquilateræ) $yy =$
 $z z - r r$, & $y = \sqrt{z z - r r}$. Unde $z y d y$
 $= z z d z$, & $d y = \frac{z d z}{\sqrt{z z - r r}}$. Porro trian-

gulum $CRB = \frac{1}{2} z y$, & illius fluxio =
 $\frac{1}{2} z d y + \frac{1}{2} y d z =$ trapeſium $B b r R +$ triang.
 $Cr R$; ſed trapeſium naſcens $B b r R = y d z$,
ergò ſector naſcens. $Cr R = \frac{1}{2} z d y - \frac{1}{2} y d z$

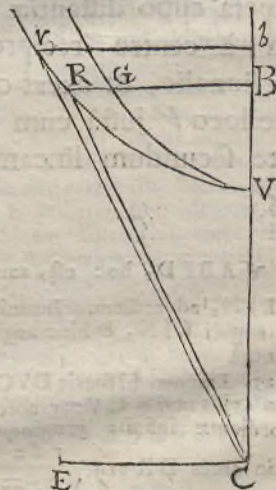
$$= \frac{\frac{1}{2} z z d z}{\sqrt{z z - r r}} - \frac{1}{2} d z \times \sqrt{z z - r r}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} z z d z - \frac{1}{2} z z d z + \frac{1}{2} r r d z}{\sqrt{z z - r r}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} r r d z}{\sqrt{z z - r r}}. \text{ Q. e. D.}$$

426. Coroll. 1. Quoniam (ex demonſ-
tratis) $d y = \frac{z d z}{\sqrt{z z - r r}}$, & $yy = z z - r r$,

$$\text{erit } \frac{d z}{\sqrt{z z - r r}} = \frac{d y}{z}, \text{ \& } z = \sqrt{yy + r r}.$$



adeoque $Cr R = \frac{\frac{1}{2} r r d z}{\sqrt{z z - r r}} = \frac{\frac{1}{2} r r d y}{\sqrt{yy + r r}}$.

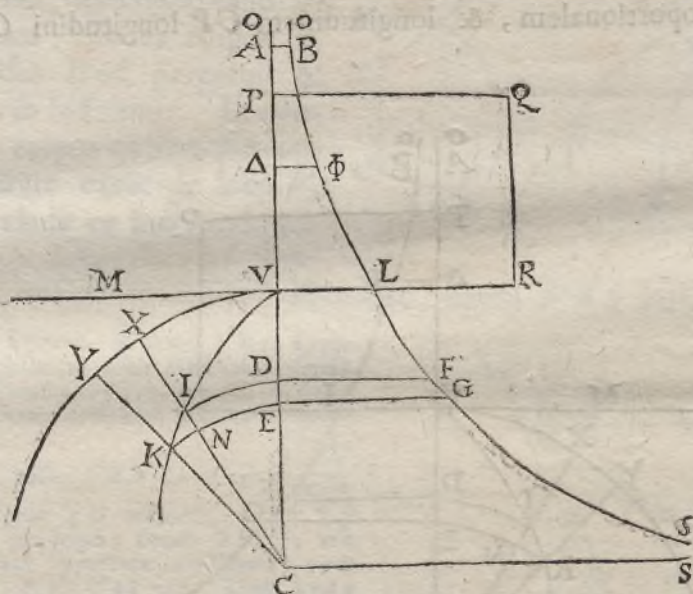
427. Coroll. 2. Si deſcripta fuerit al-
tera hyperbola GV , cujus idem centrum
 C , idem ſemiaxis transversus $CV=r$,
ſemiaxis conjugatus $CE=c$; ſectoris

$$CGV \text{ fluxio erit } = \frac{\frac{1}{2} r c d z}{\sqrt{z z - r r}} = \frac{\frac{1}{2} r c d y}{\sqrt{yy + r r}}.$$

Eſt enim ſector CRV ad ſectorem CGV ,
adeoque prioris fluxio ad fluxionem po-
ſterioris in datâ ratione r ad c . (374).

DE MOTU
CORPO-
RUM.

qualem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex propositione præcedente, per curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem, ut satis facilem, brevitatis gratiâ missam facio.



429. Coroll. 1. Area infinitè protensa
 $OVLo = \frac{f^4}{rr}$; area $OABo = \frac{f^4}{aa}$ & proinde
 $\sqrt{OVLo} = \frac{ff}{r}$, $\sqrt{OABo} = \frac{ff}{a}$.

430. Coroll. 2. Area $ABLV = OVLo - OABo = \frac{f^4 \times aa - rr}{rraa} = \frac{f^4 cc}{rraa}$, ponendo
 $aa - rr = cc$ (429) undè $\sqrt{ABLV} = \frac{f^2 c}{ra}$.

431. Coroll. 3. Similiter si punctum D sit inter puncta data C , V , & punctum Δ inter puncta data V , A ; erit area $AB\Phi\Delta$, vel $ABFD = \frac{f^4 \times aa - xx}{aaxx}$, area $V LFD = \frac{f^4 \times rr - xx}{rrxx}$, $\Delta\Phi LV = \frac{f^4 \times xx - rr}{rrxx}$. (428.)

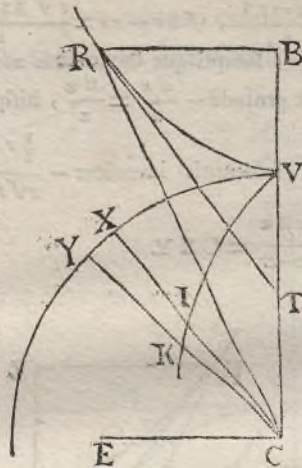
429. 430.)

432. Iisdem manentibus quæ in Lem-

mate superiori (428) si corpus de loco V , cum velocitate quâlibet secundum directionem VM ad CV perpendicularem projiciatur ut curvæ VIK describat, erit VM hujus curvæ tangens in puncto V , CV ad tangentem VM normalis, & velocitas projectionis æqualis erit velocitati quam corpus ex distantia infinita OV , cadendo acquireret in loco V , vel eâ minor, vel major.

433. Primus casus. Velocitas projectionis æqualis sit velocitati per spatium infinitum OV cadendo acquisitæ in loco V , erit (418) quantitas data $Q = CV\sqrt{OVLo} = ff$ (429) & $Z = \frac{Q}{IC} = \frac{ff}{x}$. Sed (per prop. 41.) $\sqrt{ODFo} : Z = IK : KN$, hoc est, (428) $\frac{ff}{x} : \frac{ff}{x} = IK : KN$, ergo $IK = KN$, proindeque angulus KIN rectus est (cor. 2. prop. 41.) In hoc igitur

DE MOTU
CORPO-
RUM.



$x=r$, fit quoque $z=r$, ob $\frac{rr}{z} = x$, &

puncta B & V coeunt, evanescitque sector CRV, & quoniam posita $x=r$ corpus projectum est in V, punctum X coincidit quoque in hoc casu cum puncto V, & fit $CXV=0$, undè æquatio $CXV=CRV+Q$, mutatur in hanc $0=0+Q$. Nulla igitur est quantitas constans addenda vel subducenda, sed est semper $CXV=CRV$. Quare invenitur punctum I in trajectoriâ VIK, capiendò sectorem $CXV=CRV$, & in lineâ CX sumendo $CI=CT$.

437. Casus 3^{us}. Projectionis velocitas major sit velocitate per spatium infinitum cadendo acquisitâ. Sit P locus de quo corpus cadere debet ut urgente gravitate uniformi velocitatem acquirat in loco V æqualem velocitati projectionis. In perpendicularo VL, capiatur VR ad VL in ratione vis gravitatis uniformis ad vim centripetam variabilem in loco V, & compleatur rectangulum PVRQ cujus latus quadratum dicatur e; & velocitas projectionis erit ut e, (per cor. 1. prop. 32.) Quare (430) $Q=re$, $ZZ=\frac{rre}{xx}$; & quoniam

velocitas corporis trajectoriam VIK describentis continuò decrescit atque corpus à centro C perpetuò recedit (434), loco areæ ABFD, (prop. 41.) capiendâ

est quantitas $ee-\Delta\phi LV=ee-\frac{f^4xx-rr}{rrxx}$

$$(431) = \frac{rreexx-f^4xx+f^4rr}{rrxx}, \text{ \&}$$

quantitas ABFD-ZZ, (prop. 41.) erit hic $\frac{r^2e^2xx-f^4xx+f^4rr-r^4ee}{rrxx}$. Est au-

tem area rectanguli PVRQ major areâ infinite protensâ OVL o, hoc est, quantitas ee major quam $\frac{f^4}{rr}$, & proindè

$rree-f^4$, quantitas positiva, fiat igitur $rree-f^4=bbr$, & quantitas ABFD-ZZ, (prop. 41.) evadet $=\frac{bbrxx-bbr^4}{rrxx}$, &

$$\sqrt{ABFD-ZZ} = \frac{b\sqrt{xx-rr}}{x}; \text{ Hinc fa-}$$

ctis debitis substitutionibus, formula (prop. 41.) $\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD-ZZ}}$, in hanc mutabitur

$$\frac{r^3edx}{2xx} \times \frac{x}{b\sqrt{xx-rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^3edx}{bx\sqrt{xx-rr}} = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx-rr}}$$

ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quare sector circuli

$$CXY = \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx-rr}}. \text{ Fiat } x = \frac{rr}{z} \text{ \& erit}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-dz}{z}, \text{ ac } \sqrt{xx-rr} = \frac{r\sqrt{rr-zz}}{z}$$

$$\text{atque } \frac{\frac{1}{2}r^2cdx}{x\sqrt{xx-rr}} = -\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr-zz}} = CXY. \text{ Cen-}$$

tro C, semiaxe $CV=r$, & altero semiaxe $CE=c$, describatur ellipsois quadrans VE, ex cujus puncto quovis R agatur ad axem CV perpendicularum RB, & tangens RT axi producto occurrens in T, & CB dicatur $=z$, erit (ex conicis) CB

$$(z):CV(r)=CV(r):CT=\frac{rr}{z}=x=CI;$$

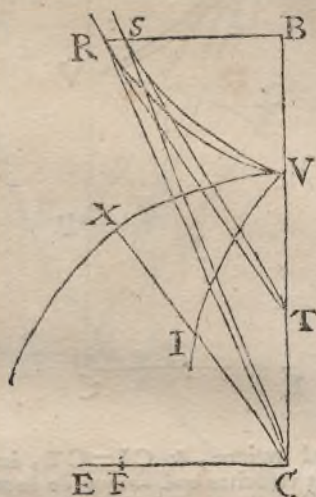
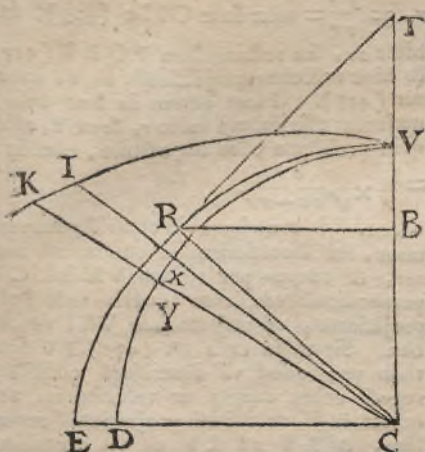
$$\text{\& (424) } \frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr-zz}}, \text{ fluxio sectoris elliptici}$$

$$CRE; \text{ quare cum sit } CXY = -\frac{\frac{1}{2}rcdz}{\sqrt{rr-zz}}, \text{ si}$$

sumantur utrinque fluentes additâ constanti Q, erit sector circuli $CXV=Q-CRE$. Ut inveniantur valor quantitas constantis Q, ponatur $CXV=0$, & erit $Q=CRE$, sed ubi $CXV=0$ puncta X & I cum puncto V coeunt, & fit CT seu CI

trum proportionales; undè in superioribus constructionibus loco sectorum circuli, uti possumus angulis qui ad sectores hyperbolicos vel ellipticos datam habeant rationem.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XII.
PROBL.
XXVIII.



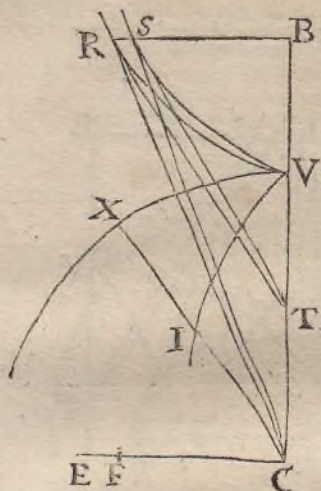
$CI = CV$, adeoque punctum R coincidit etiam cum puncto V, & sector CER, æqualis sit quadranti CEV; ergò $Q = CEV$. Est igitur semper $CXV = CEV - CRB = CRV$. Itaque ut inveniatur trajectoriæ VIK punctum I, capiatur sector circuli CXV, æqualis sectori elliptico CRV, & in lineâ CX, productâ capiatur $CI = CT$, erit I punctum in trajectoriâ quaesitâ.

438. Datâ velocitate projectionis & magnitudine vis centripetæ variabilis, hoc est, ipsius ratione ad aliquam vim centripetam uniformem notam in loco dato V, (fig. not. 430.) describi potest trajectoria VIK. Iis enim datis, dabitur locus P ex quo corpus urgente vi centripetâ constante cadere debet ut in loco V datam projectionis velocitatem habeat; & sumptâ VR ad VL in datâ ratione vis centripetæ constantis ad vim centripetam variabilem in loco V, dabitur rectangulum PQRV. Porro si rectangulum illud æquale fuerit areæ infinite protensæ OVLo, corpus circumulum describet (per cas. 1. not. 433.); si rectangulum minus est areâ OVLo, inveniri poterit punctum A, ex quo ducta perpendicularis AB, abscindat aream ABLV æqualem rectangulo PQRV; & trajectoria VIK, describetur (per constr. cas. 21.) (436). Si rectangulum PQRV areâ OVLo majus est, adhibenda erit constructio casus 31. (437). Observandum autem est sectores circulares esse angulis suis ad cen-

439. Casus 2^{us}, & 3^{us}, construi possunt per hyperbolam vel ellipsim, cujus sit semiaxis $CV = r$, & alter semiaxis quilibet. Nam iisdem positis quæ in constructione casus 21., semiaxe transverso $CV = r$, & semiaxe quovis conjugato CF, describatur hyperbola altera SV, quam in S fecat perpendicularum RB; tangentes RT, ST per puncta R, S ductæ axi occurrunt in eodem puncto T, (257) & sector CRV est ad sectorem CSV in datâ ratione CE ad CF (374). Quare cum (per constr. cas. 21.) sector circuli CXV æqualis sit sectori CRV, erit etiam ad sectorem CSV in datâ ratione CE ad CF, atque ita punctum trajectoriæ I invenietur capiendo sectorem CXV ad sectorem CSV, in datâ ratione CE ad CF, & in radio CX, capiendo $CI = CT$. Idem eodem modo demonstratur in casu 3^o.

440. Hinc si (juxtâ constructionem Coroll. 3. prop. 41.) describatur curva VI capiendo angulum VCI sectori conico VCR proportionalem, vel quod in idem recidit, capiendo sectorem circuli CXV ad sectorem conicum VCR

DE MOTU
CORPORUM.



in datâ ratione, & $CI=CT$, inveniri poterit velocitas quâ corpus de loco V, secundum lineam ipsi CV perpendicularem projici debet ut in trajectoria descriptâ VI progrediatur. Nam sit VS hyperbola quavis, centro C, semiaxe transverso $CV=r$, semiaxe conjugato CF descripta, data erit ratio sectoris circuli CXV, ad sectorem hyperbolicum CSV, (ex hyp.) seu (439) ratio CE ad datam CF; ergo dabitur CE, seu c ; Est autem in cas. 2^o. (430, 436) $cc=aa-rr$ adeoque $aa=rr+cc$; & hinc datis r & c , dabitur a , seu AC, (fig. not. 428). Dato autem puncto A, & vi centripetâ, datur rectangulum PQRV, æquale areæ ABLV, & inde velocitas projectionis habetur, (437). Si trajectoria VI, per sectores ellipseos descripta fuerit, similiter invenietur c ; est autem

in casu 3^o. (437) $c = \frac{re}{b}$, & $rree - f^4$

$= bbrr$, adeoque $b = \frac{re}{c}$, $bb = \frac{rree}{cc}$, &

$bb = \frac{rree - f^4}{rr} = \frac{rree}{cc}$; quare $ccrree$

$- r^4 ee = f^4 cc$, & $ee = \frac{f^4 cc}{ccrr - r^4} =$

$\frac{f^4}{rr} \times \frac{cc}{cc - rr}$, cum igitur data sint c , &

r , ac $\frac{f^4}{rr} = \text{areæ data OVLo (429)}$; dabitur ee , seu rectangulum PQRV (437) & hinc velocitas projectionis in V, habetur (438). Patet autem in hoc casu c majorem esse debere radio r , seu CV, alioquin problema esset impossibile, cum sit $c = \frac{ff}{r} \times \frac{c}{\sqrt{cc-rr}}$.

441. Vis centripeta in centrifugam vertatur, seu directionem in contrariam mutet, & corpus per rectam VM ad CV perpendicularem cum quavis velocitate projiciatur, ut trajectoria VKI describat. Sit ut in casu 3^o. (437) PV spatium per quod vi centrifugâ constante urgeri debet corpus ut velocitatem acquirat in V velocitati projectionis æqualem, & RV ad LV ut vis centrifuga constans ad variabilem in V, & rectangulum PRQV, dicatur ee ; velocitas projectionis in V, erit ut e , (per cor. 1. prop. 39.) & quoniam velocitas in recessu à centro semper crescit, erit velocitas in I vel Δ , ut $\sqrt{ee + \Delta \phi LV}$, quæ (in formulâ prop. 41.) substitui debet loco \sqrt{ABFD} . Invenietur etiam

(430) $Q = re$, $ZZ = \frac{rree}{xx}$, $ee + \Delta \phi LV$.

$= ee + \frac{f^4 \times xx - rr^2}{rrxx}$ (431) $= \frac{rree + f^4 xx - f^4 rr}{rrxx}$.

Hinc quantitas ABFD - ZZ (propof. 41.) fiet hic $= \frac{rree + f^4 xx - f^4 rr - r^4 ee}{rrxx}$.

$= \frac{bbrrxx - bbr^4}{xx}$, ponendo $rree + f^4 = bbrr$.

Quare $\sqrt{ABFD - ZZ} = \frac{b\sqrt{xx-rr}}{x}$. Factis igitur debitis substitutionibus, formula prop. 41.

$\frac{Q \times CX^2 \times IN}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$,

in hanc mutatur $\frac{\frac{1}{2} r^3 e dx}{bx\sqrt{xx-rr}} = \frac{\frac{1}{2} r^2 c dx}{x\sqrt{xx-rr}}$,

ponendo $\frac{re}{b} = c$. Quare sector circuli

$CXY = \frac{\frac{1}{2} r^2 c dx}{bx\sqrt{xx-rr}}$, ut in cas. 3^o. (437).

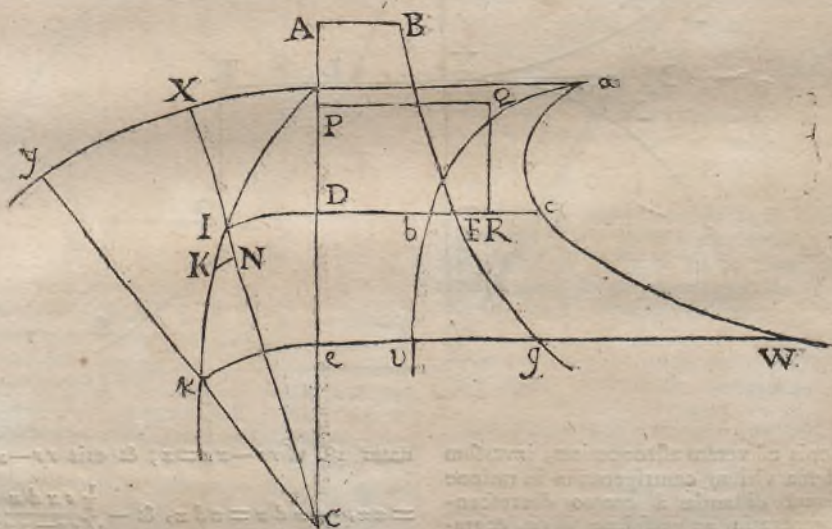
Igitur trajectoria VI construatur per sectores ellipseos prorsus ut in hoc 3^o. casu.

442. Schol. Keillius ad calcem intro-

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus propositionibus præcedentibus: exeat



corpus de loco I secundum lineolam IK , eâ cum velocitate quam corpus aliud, vi aliquâ uniformi centripetâ, de loco P cadendo acquirere posset in D : sitque hæc vis uniformis ad vim, quâ corpus primum urgetur in I , ut DR ad DF . Pergat autem corpus versus k ; centroque C & intervallo Ck describatur circulus ke occurrens rectæ PD in e , & erigantur curvarum Bfg , abv , acw ordinatim applicatæ eg , ev , ew . (y) Ex dato

(y) * Ex dato rectangulo $PDRQ$ &c. Ex datâ vis centripetæ lege, datur curva linea BFG , (per constr. 1^æ partis prop. 39). Dato rectangulo $PDRQ$, datur locus A , de quo corpus urgente vi centripetâ variabili cadere debet, ut velocitatem acquirat in loco D , æqualem veloci-

tati quam corpus aliud urgente aliquâ uniformi vi centripetâ notâ ex loco P cadens acquisivit eodem loco D , (per cor. 1. prop. 39.) dato autem loco A , & descriptâ curvâ BFG , describi poterit altera curva VLM , (per constr. & fig. 2^æ ptis. Prop. 39).

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XLII.
PROBL.
XXIX.

dato rectangulo $PDRQ$, datâque lege vis centripetæ quâ corpus primum agitur, datur curva linea Bfg , per constructionem problematis xxvii, & ejus corol. i. (z) Deinde ex dato angulo CIK datur proportio nascentium IK, KN , & inde, per constructionem prob. xxviii. datur quantitas Q , unâ cum curvis lineis abv, acw : ideoque, completo tempore quovis $Dbve$, datur tum corporis altitudo Ce vel Ck , tum area $Dcwe$, eique æqualis sector XCy , angulusque ICk , & locus k in quo corpus tunc versabitur. *Q. E. I.*

Supponimus autem in his propositionibus vim centripetam in recessu quidem à centro variari secundum legem quamcunque, quam quis imaginari potest, in æqualibus autem à centro distantis esse undique eandem. Atque hætenus motum corporum in orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de motu eorum in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur, adjiciamus pauca.

(z) * Deinde. Cum sit IK ad KN , ut sinus totus ad sinum anguli dati NIK , (per cor. 2. prop. 41.) dabitur quantitas constans Q , unâ cum curvis lineis abv, acw , est enim $IK : KN = \sqrt{ABFD} \text{ (sive } \sqrt{PDRQ}) : Z$; est ergo data Z (per constr. probl. 28. & not. 418).

$$\begin{aligned} & \& Z = \frac{Q}{A} \text{ sive } A \times Z = Q \text{ unde habetur } Q, \text{ ex} \\ & \text{quibus habentur quantitates } \frac{Q}{2\sqrt{ABFD-ZZ}} \\ & \& \frac{Q \times CX^2}{2A^2 \times \sqrt{ABFD-ZZ}} \text{ quæ sunt ordinatæ} \\ & \text{curvarum } abv, acw. \end{aligned}$$

SECTIO IX.

De motu corporum in orbibus mobilibus, deque motu apsidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

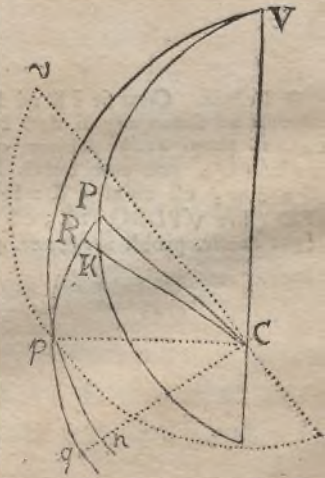
(a) *Efficiendum est ut corpus in trajectoria quâcunque circa centrum virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eadem trajectoria quiescente.*

In orbe VPK positione dato revolvatur corpus P pergendo à V versus K . A centro C agatur semper Cp , quæ sit ipsi CP æqualis, angulumque VCp angulo VCP proportionalem constituat; & (b) area, quam linea Cp describit, erit ad aream VCP , quam linea CP simul describit; ut velocitas lineæ describentis Cp ad velocitatem lineæ describentis CP ; hoc est, ut angulus VCp ad angulum VCP , ideoque in datâ ratione, & prop-

(a) * *Efficiendum est.* Sit VPK quælibet immota trajectoria quam corpus P ad centrum virium C tendens describat pergendo ab V versus K , invenienda est lex vis centripetæ ad C tendentis, quâ urgente corpus aliud p feratur in perimetro figuræ up , priori similis & æqualis, inter eadem hæc ipsa figura up , circa C revolvitur in uno eodemque plano, itâ ut dum corpus P , arcum quemlibet ut VP , percurrit in orbe quiescente VP , aliud corpus p , similem & æqualem arcum up , percurrat in orbe revolvente up .

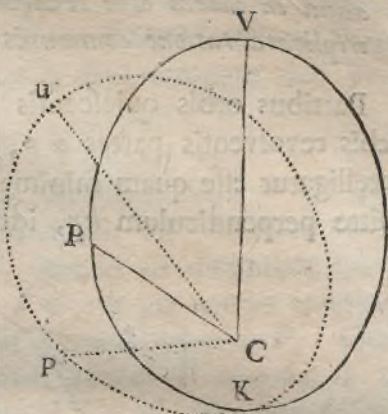
443. Si fuerit CV ad trajectoriam VPK in puncto V perpendicularis, hoc est, si sit CV linea apsidum in orbe quiescente, & correspondens Cu linea apsidum in orbe revolvente, motus angularis lineæ Cu dicitur apsidum motus, qui in consequentia fit, ubi linea Cu , in eandem partem fertur cum corpore P , vel p . In antecedentia verò ubi linea Cu , & corpus P , vel p , in plagas contrarias tendunt.

(b) * *Et area quam linea Cp , describit.* Sit Vpn curva quam corpus p in orbe mobili up revolvens describit, centro C , intervallo CP , vel Cp , describatur circuli arcus Ppq , agatur radius CR orbem



quiescentem VPK secans in K , & radius Cq , trajectoriam Vpn , secans in n , sintque K, n , loca in quibus eodem tempore reperiuntur corpora P, p , id est, arcus PK, pn , sint eodem tempore descripti. Nascentibus arcibus PR, pq , sectores PCK, pCn , æquales sunt factis $\frac{1}{2}PC$

propterea temporis proportionalis. Cum area temporis proportionalis sit quam linea Cp in plano immobili describit, manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit unâ cum puncto p in curvâ illâ lineâ quam punctum idem p ratione jam expositâ describit in plano immobili. Fiat angulus VCu angulo PCp , & linea Cu lineæ CV , atque figura $u Cp$ figuræ VCP æqualis, & corpus in p semper existens movebitur in perimetro figuræ revolvantis $u Cp$, eodemque tempore describet arcum ejus up quo corpus aliud P arcum ipsi similem & æqualem VP in figurâ quiescente VPK describere potest. Quærat igitur, per corollarium quintum propositionis VI., vis centripeta quâ corpus revolvi possit in curvâ illâ lineâ quam punctum p describit in plano immobili, & solvetur problema. *Q. E. F.*



P R O.

$\frac{1}{2} PC \times PR$, $\frac{1}{2} pC \times pq$, adeoque ob $pC = PC$ sectores illi sunt inter se ut arcus PR , pq , seu ut anguli PCK , pCn ; sed quoniam angulus VCK , est ad angulum VCn , in datâ ratione anguli VCP , ad angulum VCp (per hyp.) erit dividendo angulus $VCK - VCP$, ad angulum $VCn - VCp$, hoc est, angulus PCK , ad angulum pCn , in datâ ratione anguli VCP , ad VCp , atque adeo sector PCK , ad sectorem pCn , in eâdem ratione datâ. Unde (per cor. Lem. 4.) totus sector VpC , est ad totum sectorem VPC , eodem tempore descriptum in datâ ratione, sive sector VpC , est ut sector VPC , proindeque (per prop. 1.) ut tempus quo sector uterque describitur. Quare manifestum est (per prop. 2.) quod corpus p , cogente justæ quantitatis vi centripetâ revolvi possit in curvâ lineâ Vpn , quam punctum p perpetuò tangit. Porro dato orbe VPK , & virium centro C , datur longitudo & positio lineæ CP , per (superiorem Newt. constr.) ideoque & lineæ Cp , &

hinc datur punctum quodlibet p , in trajectoriâ Vpn , adeoque & ipsa trajectoria datur. Inveniri igitur potest (per cor. 5. prop. 6.) Lex vis centripetæ quâ corpus p in trajectoriâ illâ Vpn revolvi potest.

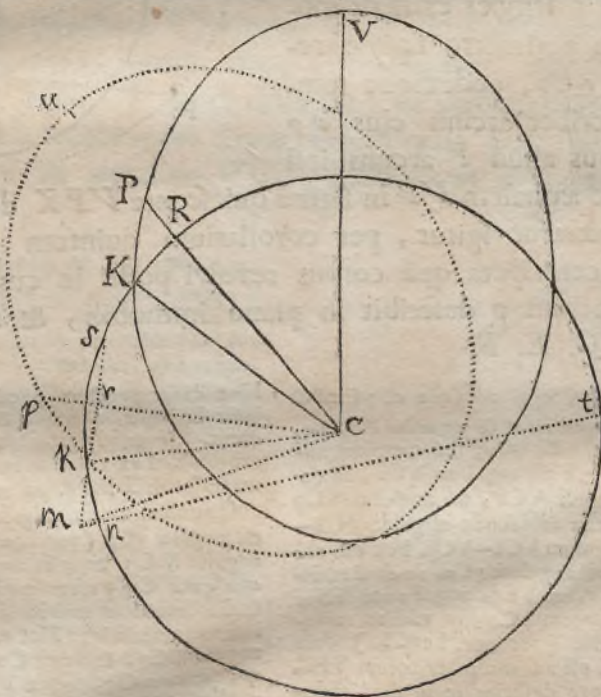
Quoniam autem angulus VCP æqualis est angulo vCp (per constr.) erit quoque angulus VCv æqualis angulo PCp , adeoque datâ Cp , magnitudine & positione, facile invenitur positio lineæ apsidum Cv in orbe mobili Vp : Fiat enim angulus VCv angulo PCp , & lineæ Cv lineæ CV , atque figura $u Cp$, figuræ VCP similis & æqualis, & corpus unâ cum puncto p , semper latum & figuram immotam Vpn describens, describit etiam perimetrum up , figuræ revolvantis $u Cp$, eodemque tempore describit arcum ejus vp , quo corpus aliud P arcum ipsi similem & æqualem VP , in figurâ quiescente VPK , describere potest. Vide Varignonium Legem vis centripetæ in trajectoriâ Vpn determinantem, in Comm. Paris. 1705.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicatâ ratione communis altitudinis inverse.

Partibus orbis quiescentis VP , PK sunt similes & æquales orbis revolventis partes up , pk ; & punctorum P , K distantia intelligatur esse quam minima. A puncto k in rectam pC demitte perpendicularum kr , idemque produc ad m , ut sit mr ad



kr ut angulus VCP ad angulum VCP . Quoniam corporum altitudines PC & pC , KC & kC , semper æquantur, manifestum est quod linearum PC & pC incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis P & p existentium distinguantur motus singuli (per legum corol. 2) in bi-

nos,

nos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas PC , pC determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis PC , pC perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis p erit ad motum transversum corporis P , ut motus angularis lineæ pC ad motum angularem lineæ PC , id est, ut angulus VCP ad angulum VCP . Igitur eodem tempore quo corpus P motu suo utroque pervenit ad punctum K , corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur à p versus C , ideoque completo illo tempore reperietur alicubi in lineâ mk , quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis est; & motu transverso acquireret distantiam à lineâ pC , quæ sit ad distantiam quam corpus alterum P acquirit à lineâ PC , ut est motus transversus corporis p ad motum transversum corporis alterius P . Quare cum kr æqualis sit distantiæ quam corpus P acquirit à lineâ PC , sitque mr ad kr ut angulus VCP ad angulum VCP , hoc est, ut motus transversus corporis p ad motum transversum corporis P , (c) manifestum est quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m . Hæc ita se habebunt ubi corpora p & P æqualiter secundum lineas pC & PC moventur, ideoque æqualibus viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus pCn ad angulum pCk ut est angulus VCP ad angulum VCP , sitque nC æqualis kC , & corpus p completo

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XLIV.
THEOR.
XIV.

(c) * Manifestum est quod corpus p &c. Ex puncto K in rectam PC , demissum intelligatur perpendicularum KR , & erit $PR = pr$. Fingamus corpus P de loco P ita projici ut vi secundum directionem PC , urgente percurrat spatium PR , eodem tempore quo vi alterâ secundum rectam ipsi RR , parallelam impellente, percurrat spatium æquale rectæ RR , adeo ut eo tempore viribus conjunctis describat diagonalem PK . Fingamus similiter corpus p , de loco p ita projici, ut vi se-

cundum directionem pC urgente percurrat $pr = PR$, eodem tempore quo corpus P percurrat PR aut RR vel PK , & vi alterâ secundum directionem rectæ rm , parallelam impellente, corpus p , eodem tempore describat spatium æquale rectæ rm , quæ est ad RR , in ratione velocitatis transversæ corporis p , ad velocitatem transversam corporis alterius P . His positis manifestum est corpora P & p , de locis P , & p , simul egressa, eodem temporis puncto reperiri in locis K , & m .

DE MOTU
CORPO-
RUM.

dentur magnitudine, sunt kr & mr , earumque differentia mk & summa ms reciprocè ut altitudo pC , ideoque rectangulum $mk \times ms$ est reciprocè ut quadratum altitudinis pC . Est & mr directè ut $\frac{1}{2} mt$, id est, ut altitudo pC . Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est lineola nascentis mn , eique proportionalis virium differentia reciprocè ut cubus altitudinis pC . *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p , vel K & k , est ad vim quâ corpus motu circulari revolvi possit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in orbe immobili describit arcum PK , ut lineola nascentis mn ad ^(h) sinum versum arcus nascentis RK , id est ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc est, si capiantur datæ quantitates F , G in

triangulum $pCn = \frac{1}{2} pC \times mr$. Junctis enim pn , pm , erit triangulum nascentis pnC æquale nascenti pmC , ob mn evanescentem respectu lineæ finitæ Cn , & triangulum $pmC = \frac{1}{2} pC \times mr$. Sunt ergo facta $pC \times kr$, & $pC \times mr$, constantia seu data & hinc kr , & mr , sunt reciprocè ut altitudo pC , & propterea dividendo & componendo, earum differentia; mk , & summa ms , sunt reciprocè ut eadem altitudo pC . Quod ut clarius intelligatur, supponamus esse $kr = \frac{F}{pC}$, $mr = \frac{G}{pC}$, & F & G esse quantitates datas, erit $mr - kr = mk = \frac{G - F}{pC}$, $mr + kr = ms = \frac{G + F}{pC}$, hoc est, ob quantitates F , G , $G - F$, $G + F$, datas, erunt kr , mr , mk , ms , ut $\frac{1}{pC}$. Hinc rectangulum $mk \times ms = \frac{GG - FF}{pC^2}$, est reciprocè ut quadratum altitudinis pC ; Est & mt , directè ut

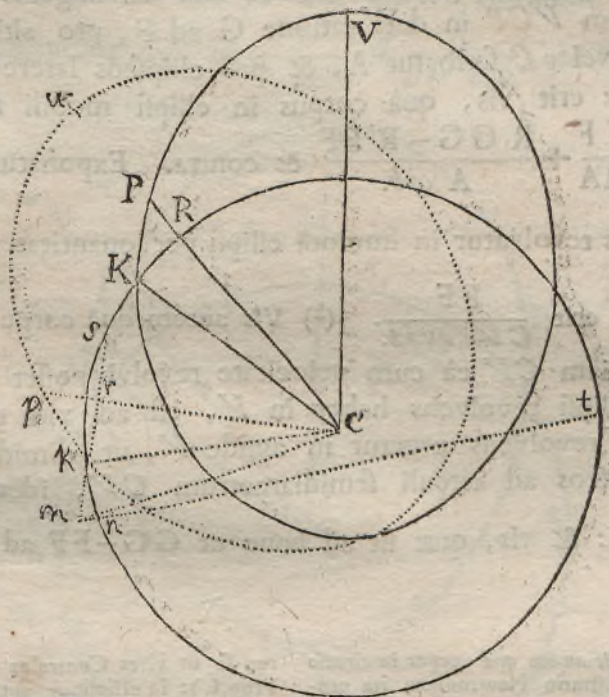
$\frac{1}{2} mt = Cn = Ck = pC$, quare $mn = \frac{mk \times ms}{mt} = \frac{GG - FF}{2pC^2}$, & ideo mn est reciprocè ut cubus altitudinis pC ob datam quantitatem $\frac{GG - FF}{2}$.

(h) * *Ad sinum versum arcus nascentis Rk* , seu Zk , hoc est, ad Zr , nam Zr & mn , sunt spatia nascentia eodem tempusculo viribus illis descripta, & iisdem proinde viribus proportionalia. Est autem $mn = \frac{mk \times ms}{mt}$ (ex Dem.) & $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$. Nam, ex naturâ circuli $Zr:kr = kr:KC + rC$, hoc est, quia rC usurpari potest pro ZC , & quia $ZC = kC$, $Zr:kr = kr:2kC$, & $Zr = \frac{kr^2}{2kC}$; undè $mn:Zr = mk \times ms:kr^2$; ob $mt = 2kC$. Si verò capiantur duæ quantitates G , F , in eâ ratione ad invicem quam habet angulus VCp , ad angulum VCP , seu quam habet mr , ad kr , erit $mk \times ms:kr^2 = GG - FF:FF$; ut ex suprâ demonstratis liquet, ergò $mn:Zr = GG - FF:FF$.

* E

in eâ ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCP , ut $GG-FF$ ad FF . Et (i) propterea, si centro C intervallo quovis CP vel Cp describatur sector circularis æqualis areæ toti VPC , quam corpus P tempore quovis in

LIBRUM
PRIMUS.
PROP.
XLIV.
THEOR.
XLV.



orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus P in orbe immobili & corpus p in orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam, quâ corpus aliquod, radio ad centrum ducto, sectorem illum eodem tempore, quo descripta sit area VPC uniformiter describere

po.

(i) * Et propterea si centro C . Corpus P , in orbitâ VPK revolvens dato tempore datum sectorem PCK ; radio ad centrum C ducto describit (per prop. 1.) & corpus in circulo radio CK descripto uniformiter revolvens, & arcum RK , seu sectorem $CRK = CPK$, describens eodem tempore quo corpus P describit arcum

PK , seu sectorem CPK , dato tempore datum quoque sectorem describit. Quare corpus P , in orbitâ VPK ; & corpus in circulo prædicto revolvens, radiis ad centrum C ductis, sectores æquales temporibus æqualibus describunt. Et propterea si centro C , intervallo CP , vel Cp , describatur &c.

V. v. 3.

* Erit

DE MOTU
CORPO-
RUM.

potuisset, ut GG-FF ad FF. Namque sector ille & area pCk sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si orbis VPK ellipsis sit umbilicum habens C & apsidem summam V; eique similis & æqualis ponatur ellipsis upk, ita ut sit semper pC æqualis PC & angulus VCP sit ad angulum VCP in datâ ratione G ad F; pro altitudine autem PC vel pC scribatur A, & pro ellipseos latere recto ponatur 2R: erit vis, quâ corpus in ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$ & contra. Exponatur enim vis

quâ corpus revolvatur in immotâ ellipsi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, &

vis in V erit $\frac{FF}{CV \text{ quad.}}$ (k) Vis autem quâ corpus in circulo

ad distantiam CV eâ cum velocitate revolvi posset quam corpus in ellipsi revolvens habet in V, est ad vim quâ corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside V, ut dimidium lateris recti ellipseos ad circuli semidiametrum CV, ideoque valet

$\frac{RFF}{CV \text{ cub.}}$: & vis, quæ sit ad hanc ut GG-FF ad FF, valet

RGG

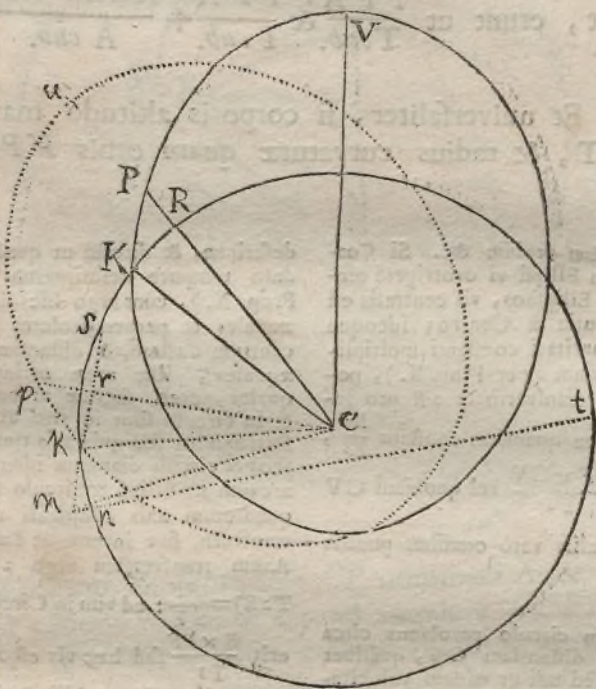
(k) * Vis autem quâ corpus in circulo &c. Demonstratio Newtoniana ita procedit: Vis quâ corpus in Ellipsi circa ejus focum revolvitur, est semper æqualis cuidam quantitati constanti divisa per quadratum distantie à foco (per Prop. XI.) Sumatur ergo pro illâ quantitate constanti, quadratum FF cujus latus F est prima ex illis indeterminatis (sed constantibus) quæ expriment rationem anguli VCP ad angulum VCP, erit vis in V = $\frac{FF}{VC^2}$.

Sit Corpus circa centrum quodvis in circulo revolvens, ad distantiam CV, eâdem velocitate quâ Corpus in ellipsi revolvens urgetur in apside V, sumantur in Circulo & in Ellipsi arcus quamminimi eodem tempore descripti, illi arcus erunt inter se æquales, ob æquales velocitates (ex Hypoth.) & eorum sagittæ erunt in-

ter se ut vires Centrales (per Corol. 4. Prop. I.): in ellipsis autem omnibus in quibus vis centripeta ad focum tendit (& his annumeratur Circulus) latera recta sunt inversè ut arcuum quamminimo tempore descriptorum sagittæ & directè ut quadrata perpendiculari ducti ab extremitate eorum arcuum in lineam ad Centrum virium tendentem (per Corol. 2. Prop. XIII.) sed in apside Ellipseos & Circulo, illa perpendiculara sunt ipsi arcus, ideoque sunt æqualia; Ergo latera recta hujus Ellipseos & hujus Circuli erunt inversè ut sagittæ arcuum sive inversè ut vires Centrales; Latus rectum circuli est ipsa diameter, ergo sumendo dimidium utriusque Lateris recti est vis quâ Corpus in Ellipsi revolvens urgetur &c. Reliqua demonstratio est plana.

$\frac{RGG-RFF}{CV\ cub.}$: estque hæc vis (per hujus corol. 1.) differen-
 tia virium in V quibus corpus P in ellipsi immotâ VPK , &
 corpus p in ellipsi mobili upk revolvuntur. Unde cum (per
 hanc prop.) differentia illa in aliâ quâvis altitudine A sit ad
 seipsam in altitudine CV ut $\frac{1}{A\ cub.}$ ad $\frac{1}{CV\ cub.}$, eadem diffe-

LIBER
 PRIMUS.
 PROP.
 XLIV.
 THEOR.
 XLV.



rentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$. Igitur ad
 vim $\frac{FF}{AA}$, quâ corpus revolvi potest in ellipsi immobili VPK ,
 addatur excessus $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$; & componetur vis tota $\frac{FF}{AA}$
 + $\frac{RGG-RFF}{A\ cub.}$ quâ corpus in ellipsi mobili upk iisdem tem-
 poribus revolvi possit.

Q. d.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Corol. 3. (1) Ad eundem modum colligetur quod, si orbis immobilis $V P K$ ellipsis sit centrum habens in virium centro C ; eique similis, æqualis & concentrica ponatur ellipsis mobilis $u p k$; sitque $2 R$ ellipseos hujus latus rectum principale, & $2 T$ latus transversum sive axis major, atque angulus $V C p$ semper sit ad angulum $V C P$ ut G ad F ; vires, quibus corpora in ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{FFA}{T cub.}$ & $\frac{FFA}{T cub.} + \frac{RGG - RFF}{A cub.}$ respectivè.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima CV nominetur T , & radius curvaturæ quam orbis $V P K$ habet in

(1) *Ad eundem modum &c.* Si Corpus revolvatur in Ellipsi vi centripetâ tendente ad focum Ellipseos, vis centralis est directè ut distantia à Centro; ideoque erit æqualis quantitati constanti multiplicatæ per distantiam (per Prop. X.), posito $2 T$ pro axe transverso & $2 R$ pro latere recto, sit ea quantitas constans $\frac{FF}{T^3}$, vis in V erit $\frac{FF \times CV}{T^3}$ vel quoniam $CV = T$, erit $\frac{FF}{T^2}$ in aliis verò omnibus punctis erit $\frac{FF \times A}{T^3}$.

Sit Corpus in circulo revolvens circa centrum C ad distantiam CV , quâlibet vi centripetâ, sed tali ut eadem velocitate feratur quâ corpus in Ellipsi latum urgetur in extremitate axis transversi, sumantur in eo Circulo & in extremitate axis transversi Ellipseos arcus quamminimi eodem tempore descripti illi arcus erunt æquales, ob æquales velocitates, & eorum sagittæ erunt ut vires Centrales quibus corpora in circulo & Ellipsi retinentur (per Cor. 4. Prop. I.); in Ellipsibus autem diversis (& iis annumeratur Circulus) in quibus vis centripeta ad centrum tendit, in distantis æqualibus à Centro, dupla quadrata facti axium sunt inversè ut sagittæ quam minimo tempore

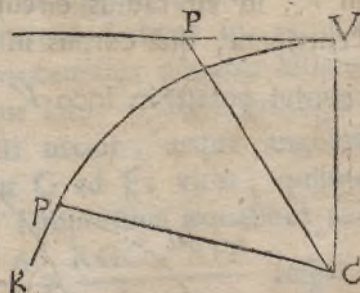
descriptæ, & directè ut quadrata arearum dato tempore descriptarum (per constr. Prop. X.), cum ergo hic sumantur arcus æquales & perpendiculares in lineam ad centrum ductam, & distantia à centro sint æquales, illæ areæ utrinque sunt æquales, ergo sagittæ arcuum in Ellipsi & in circulo sunt inversè ut ipsa quadrata facti axium, seu quia axis transversus Ellipseos & circuli diameter idem sunt, sagittæ arcuum in Ellipsi & circulo sunt inversè ut quadratum axis conjugati ad quadratum transversi, sive inversè ut Latus rectum ad Axem transversum ergo $2 T : 2 R$ (sive $T : R = \frac{FF}{TT}$: ad vim in Circulo quæ itaque

erit $\frac{R \times FF}{T^3}$ sed hæc vis est ad differentiam virium in orbe mobili & immobili, ut FF ad $GG - FF$, ergo illa differentia est $\frac{RGG - RFF}{T^3}$, hæc autem differentia in V est ad differentiam in alio quovis loco inversè ut cubi altitudinum ergo $A^3 : CV^3$ (sive T^3) = $\frac{RGG - RFF}{T^3} : \frac{RGG - RFF}{A^3}$ cum ergo Vis in Orbe immobili sit ut $\frac{FFA}{T^3}$ in orbe mobili erit $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$. Q. E. D.

* E. 3

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Corol. 6. Igitur si ad rectam CV positione datam erigatur perpendicularum VP longitudinis indeterminatæ, jungaturque CP , & ipsi æqualis agatur Cp , constituens angulum VCp , qui sit ad angulum VCP in datâ ratione; vis quâ corpus gyrari potest in curva illa Vpk quam punctum p perpetuè tangit, erit reciprocè ut cu-



448. Lemma. Si corpus ad centrum virium C tendens describat trajectoriam immotam VP , vis centripeta quâ in apside V urgetur est ad vim centripetam corporis alterius in circulo VBQ , ad eandem distantiam CV , eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia CV ad VO radii circuli $VD S$, trajectoriam VP osculantis in V . Capiantur in circulo VBQ & in trajectoriâ VP arcus quam minimi & æquales VB , VD , & ex punctis B & D ad rectam CV demissa intelligantur perpendiculara BE , DF ; arcus evanescentes VB , VD eodem tempore à corporibus duobus percurrentur, ob utriusque corporis velocitatem æqualem, eruntque perpendiculara BE , DF æqualia (per Lem. VII). Quoniam autem arcus evanescentes VD usurpari potest pro arcu circuli curvam VP osculantis in V , erit ex naturâ circuli $VF:DF=DF:VO+FO$, seu $2VO$, adeoque $DF^2=2VO \times VF$, & similiter $BE^2=2VC \times VE=2VO \times VF$; undè $VF:VE=VC:VO$; sed vis centripeta corporis arcum VD describentis, est ad vim centripetam alterius corporis arcum VB describentis ut VF ad VE , quæ sunt spatia viribus illis urgentibus eodem tempusculo descripta, quare vis



centripeta quâ corpus in apside V urgetur, est ad vim centripetam alterius corporis in circulo ad eandem distantiam eâdem cum velocitate revolventis, ut distantia illa CV ad radii VO circuli osculatoris in V . Q. E. D.

449. Cor. 1. Si radius VO circuli trajectoriam VP osculantis in apside V dicatur R , distantia CV , T , distantia

CP , A , vis centripeta in V , $\frac{VFF}{TT}$, hæc

erit ad vim centripetam in circulo VQ , ad eandem distantiam CV eâdem cum velocitate descripto ut T ad R , (448)

hæc ergo erit $\frac{VRFF}{T^3}$, quæ erit ad diffe-

rentiam virium centripetarum in apsidibus V & u , orbis immobilis VP , & orbis mobilis up , ut FF ad $GG-FF$ (per Cor. I. Newt.) ideoque differentia illa erit $\frac{VRGG-VRFF}{T^3}$ quæ erit ad differentiam

in aliis locis P ut A^3 ad T^3 , ideoque in quibusvis locis erit differentia virium in orbe mobili & immobili $\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$.

Quod aliâ ratione demonstravit Hermannus prop. 25. Lib. 1. Phoronomia.

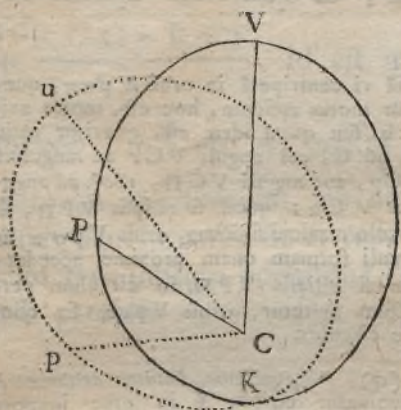
450. Coroll. 2. Hinc si vis centripeta in quovis puncto P , orbitæ immobilis VP , dicatur X , vis in puncto æquè alto p , orbitæ mobilis up erit $= X + \frac{VRGG-VRFF}{A^3}$

Q. E. D.

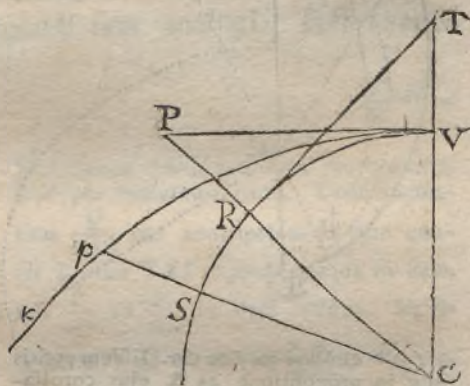
451. Cor. 3. Si orbitæ VP & up sint ellipses quarum umbilicus communis C , erit (240) radius osculi R æqualis dimidio lateri recto ellipseos VP , vel up : & (per prop.

bus altitudinis Cp . Nam (n) corpus P per vim inertiae, nulla aliâ vi urgente, uniformiter progredi potest in rectâ VP . Ad datur vis in centrum C , cubo altitudinis CP vel Cp , reciprocè proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam curvam Vpk . Est (o) autem hæc curva Vpk eadem cum curvâ illâ VPQ in corol. 3. prop. XLI. inventâ, in quâ tibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XLIV.
THEOR.
XIV.



(n) * Nam corpus P . Linea VP considerari potest tanquam trajectory immota, in quâ vis centripeta X in loco quovis P nulla est, & radius osculi R infinitus; erit igitur in hoc casu (per cor. 4.) vis centripeta in loco p , trajectory mobilis, æqualis $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$, adeoque ob datam quantitatem $VRGG - VRFF$ erit X , seu vis in p , ut $\frac{1}{A^3}$.



prop. XI) $X: \frac{VFF}{TT} = TT: AA$, adeoque $X = \frac{VFF}{AA}$, Ergo (450) vis in Orbitâ mobili erit $\frac{VFF}{AA} + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$, & divisâ omnibus terminis per V ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$; & si vis centralis ad centrum Ellipseos dirigatur erit $X: \frac{VFF}{TT} = A: T$ & $X = \frac{VFF \times A}{T^3}$ & vis in Orbitâ mobili erit $\frac{VFF \times A}{T^3} + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$ & divisâ terminis per V erit $\frac{FF \times A}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$; sicut in Cor. 3. & 4. Newt. inventum fuerat;

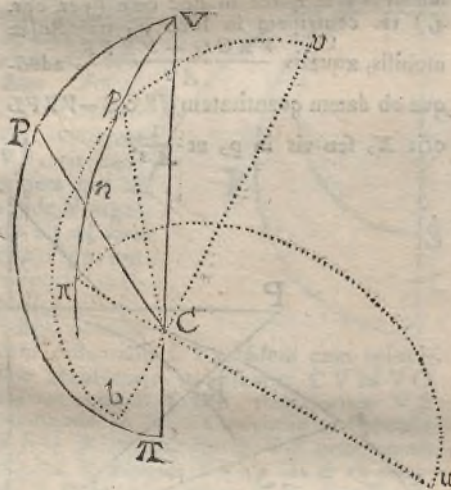
(o) * Est autem hæc curva Vpk eadem &c. Nam si centro C intervallo CV describatur circulus VRS quem recta CP secat in R , recta Cp , in S , sitque angulus SCV ad angulum RCV in datâ ratione, erit quoque sector SVC ad sectorem RVC in datâ illâ ratione, & ductâ per punctum R tangente RT , quæ radio CV producto occurrat in T , ejusdem anguli RCV secantes CP , CT erunt æquales, atque adeo curva Vpk , eadem cum curvâ VPQ , in coroll. 3^o, prop. 41. inventâ, in quâ recta Cp est semper æqualis abscissæ CT , & angulus VCP est semper sectori VCR proportionalis. $X \propto z$

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

(P) *Orbium qui sunt circularis maxime finitimi requiruntur motus apsidum.*

(q) Problema solvitur arithmetice faciendo ut orbis, quem corpus in ellipti mobili (ut in propositionis superioris corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam orbis cujus apsidem requiruntur, & querendo apsidem orbis



(p) * *Orbium qui sunt &c.* Iisdem positis quæ in propositione 44 & ejus corollariis 1. & 2. sit $Vpn\pi$ orbis quem corpus p in ellipti mobili upb revolvens describit in plano immobili, & $V\Pi, vb$, ellipseon immobili & mobili axes transversæ, manifestum est punctum V esse apsidem summam tam in ellipti immotâ $V\Pi$, quam in orbe $Vpn\pi$, & esse π apsidem imam in orbe $Vpn\pi$ si fuerit $\pi = Cb = C\Pi$, in quâ hypothese corpus p pervenit ad locum n , ubi corpus P , in ellipti immotâ pervenit ad apsidem imam Π & in ellipti revolvente corpus p pervenit ad b , ac in orbe $Vpn\pi$, puncta p, b, π , coincidunt. Jam verò

datâ vi centripetâ in orbe $Vpn\pi$, queritur motus apsidum, hoc est, motus axis ucb , seu quod idem est, queritur ratio F , ad G , vel anguli VCP ad angulum VCP , aut anguli VCP , 180° ad angulum VCP ; quod si elliptis $V\Pi$, sit circulo maxime finitima, orbis $Vpn\pi$ ad circuli formam quam proximè accedet, nam si elliptis $V\Pi$, in circulum perfectum mutetur, orbis $Vpn\pi$ sit quoque circulus.

(q) * *Problema solvitur arithmetice.* Revolvatur corpus Y in orbe immoto YZf vi centripetâ datâ tendente ad centrum S , sitque punctum Y apsis summa, f apsis ima in illo orbe. Umbilico S , & axe transversæ $YSF = YS + Sf$, descriptæ intelligantur ellipse immobilis & mobilis, efficiendum est ut corpus Y orbem YZf describens, simul revolvatur in hac ellipti mobili, dum corpus aliud ellipti immobilis describit eâ ratione quam exposuimus prop. 43. & inveniendus est apsidum motus. Id autem absolvitur faciendo ut orbis $Vpn\pi$ (fig. superiori) qui omnes orbis ut YZf quæcumque sit in illis vis centripetæ lex generaliter exhibet accedat ad formam orbis YZf , si ve ei similis & æqualis fiat, ac querendo apsidem $V\pi$, vel rationem angulorum VCP , VCP , in orbe illo $Vpn\pi$. Porro si supponamus orbem $Vpn\pi$, similem & æqualem factum esse orbi YZf , erit vis centripetâ in ellipti immotâ cujus umbilicus S vel C ut $\frac{FF}{AA}$, & vis centripetâ in loco quovis Z orbis YZf vel

Bis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirant formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus red- dantur proportionales. Sit punctum *V* apsis summa, & scri- bantur *T* pro altitudine maximâ *CV*, *A* pro altitudine quavis aliâ *CP* vel *Cp*, & *X* pro altitudinum differentiâ *CV-CP*; & vis, quâ corpus in ellipsi circa umbilicum suum *C* (ut in co-

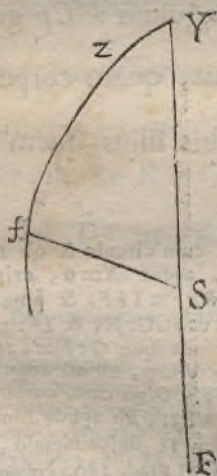
rol. 2.) revolvente movetur, quæque in corol. 2. erat ut $\frac{FF}{AA}$

+ $\frac{RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$, id est ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A \text{ cub.}}$, substi-

tuendo *T-X* pro *A*, erit ut $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A \text{ cub.}}$. Re-

ducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit *A cub.* & numeratores, factâ homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res exem- plis patebit.

Exem-



substituendo *T-X* pro *A* in numeratore, & *P* pro numeratore toto. Unde si quan- titas $\frac{Q}{A^3}$ vim centripetam in loco quo- vis *Z* orbis *YZf* exponat, eaque sit data, erit $\frac{P}{A^3}$ ad $\frac{Q}{A^3}$ in datâ ratione. Sit il-

la ratio 1 ad *B*, & erit $\frac{PB}{A^3} = \frac{Q}{A^3}$, & $PB - Q = 0$. Loco *A*, in quantitate *Q*, substituatur *T-X*, & æqualitatis $PB - Q = 0$, termini omnes analogi se mutuo des- truere debent, hoc est, termini omnes dati seu in quibus non reperitur quanti- tas variabilis *X* erunt simul nihilo æquales, & termini non dati, seu in quibus variabilis *X* invenitur, erunt etiam simul nihilo æqua- les, atque inde determinabitur ratio *G* ad *F* seu anguli *VCP* ad angulum *VCp*, fa- ciendo ut sint termini dati in quantitate *P* ad terminos non datos ejusdem quanti- tatis, ita termini dati in quantitate *Q*, ad terminos non datos ejusdem quantitatis. Quod exemplis patebit.

X x 30

vel in loco *P*, orbis *Vpnπ*, ut $\frac{FF}{AA} +$
 $\frac{RGG - RFF}{A^3} = \frac{FFA + RGG - RFF}{A^3}$
 $= \frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A^3} = \frac{P}{A^3}$

DE MOTU
CORPO-
RUM.(r) *Exempl. 1.* Ponamus vim centripetam uniformem esse,ideoque ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$, sive (scribendo T-X pro A in numerato-re) ut $\frac{T \text{ cub.} - 3 T T X + 3 T X X - X \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$; & collatis nume-

ratorum terminis correspondentibus; nimirum datis cum datis, & non datis cum non datis, fiet RGG-RFF+TFF ad T cub. ut -FFX ad -3 TTX+3 TXX-X cub. sive ut -FF ad -3 TT+3 TX-XX. Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, coeat orbis cum circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T cub. ut -FF ad 3 TT, seu GG ad TT ut FF ad 3 TT, & vicissim GG ad FF ut TT ad 3 TT, id est, ut 1 ad 3; ideoque G ad F, hoc est angulus VCP ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{3}$. Ergo cum corpus in ellipsi immobili, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiat angulum VCP (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in ellipsi mobili, atque ideo in orbe immobili de quo agimus, ab apside summâ ad apsidem imam descendendo conficiet angulum VCP graduum $\frac{180}{\sqrt{3}}$: id ideo ob similitudinem orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripetâ describit, & orbis illius quem corpus in

(r) * *Exemplum 1^{um}.* Ponamus vim centripetam in orbe YZf uniformem seu constantem esse, ideoque ut 1, seu ut $\frac{A^3}{A^3}$, erit $Q = A^3 = T^3 - 3 T T X + 3 T X X - X^3$, & PB = BRGG - BRFF + BTFF - BFFX atque adeo BRGG - BRFF + BTFF - BFFX - T³ + 3 TTX - 3 TXX + X³ = 0, & termini dati BRGG - BRFF + BTFF - T³ = 0, seu BRGG - BRFF + BTFF = T³, & termini non dati -BFFX + 3 TTX - 3 TXX + X³ = 0, seu BFF = 3 TT - 3 TX + X², unde hæc proportio deducitur BRGG - BRFF + BTFF : BFF = T³ : 3 TT - 3 TX + X² = RGG - RFF + TFF : FF. Jam cum orbis YZf, ponatur circulo quam maximè finitimus,

coeat orbis cum circulo & ob factas R & T æquales, atque X=0, erit X²=0, 3TX=0, RFF=TFF, & hinc T³:3TT = RGG:FF = TGG:FF, & T²:3T²=1:3 = GG:FF, adeoque G:F=1:√3, hoc est, angulus VCP, est ad angulum VCP, ut 1, ad √3. Ergo cum corpus in ellipsi immobili VPΠ, ab apside summâ V ad apsidem imam Π descendendo, conficiat angulum VCP grad. 180. corpus aliud in ellipsi mobili upb, atque adeo in orbe immobili Vpπ, seu YZf, ab apside summâ V vel Y, ad apsidem imam π vel f descendendo conficiet angulum VCP vel YSf grad. $\frac{180}{\sqrt{3}}$.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XLV.
PROBL.
XXXI.

in ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi orbes, non universaliter sed tunc cum ad formam circularem quam maximè appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripetâ in orbe propemodum circulari revolvens, inter apsidem summam & apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\sqrt{3}}$ graduum, seu 103 gr. 55 m. 23 sec. ad centrum;

perveniens ab apside summâ ad apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignita-

tum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $T-X|^n$ in seriem indeterminatam per (f) methodum nostram

serierum convergentium reducta, evadit $T^{n-n}XT^{n-1} + \frac{n n - n}{2}$

XXT^{n-2} &c. Et collatis hujus terminis cum terminis numeratoris alterius $RGG-RFF+TFF-FFX$, fit $RGG-RFF$

$+TFF$ ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{n n - n}{2}XT^{n-2}$ &c.

(f) * Per methodum nostram. Vide fragmentum Epistolæ Newtoni ad Oldenburgium & theorematis ibi propositi demonstrationem requiras ex elementis algebrae clarissimorum virorum Wolfii, Abbatis de Molieres, vel ex analysi demonstratâ Patris Reyneau, aut ex aliis passim authoribus. Interim cum hic satis sit duos priores terminos dignitatis $T-X^n$ reperire ob evanescentes terminos in quibus reperitur ipsius X dignitas primâ altior, facile demonstratur ex dignitatum per continuam radicis multiplicationem formatione duos illos priores terminos esse

$T^{n-n}XT^{n-1}$. Ut si fuerit $n=2$, duo priores termini dignitatis $T-X^2$, erunt T^2-2XTX ; si $n=3$, erunt T^3-3XT^2 ; & ita porro; atque hinc patet quam compendiosa sit Newtoniana methodus motum apsidum determinandi, nam præterquam quod sufficit duos dignitatum terminos invenire, possunt quoque termini æquales RFF, TFF , in formulâ $RGG-RFF+TFF-FFX$, deleri; unde tantummodò conferendus terminus datus RGG cum aliis terminis datis, & terminus non datus $-FFX$ cum aliis non datis.

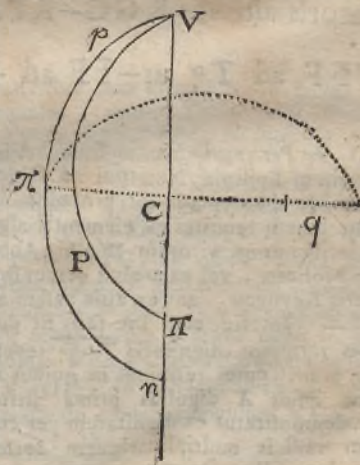
* Id.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Et sumendo rationes ultimas ubi orbis ad formam circulare[m] accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1} , & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1} id est ut 1 ad n ; ideoque G ad F , id est angulus VCP ad angulum VCP , ut 1 ad \sqrt{n} . Quare cum angulus VCP , in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam in ellipsi confectus, sit graduum 180 ; conficietur angulus VCP , in descensu corporis ab apside summâ ad apsidem imam, in orbe propemodum circulari quem corpus quodvis vi centripetâ dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito angulus redibit ab apside imâ ad apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis à centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & \sqrt{n} æqualis 2 ; ideoque angulus inter apsidem summam & apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ gr. seu 90

gr. Completâ igitur quartâ parte revolutionis unius corpus perveniet ad apsidem imam, & completâ aliâ quartâ parte ad apsidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id (t)

(t) * Id quod etiam ex prop. 10. &c. Nam corpus urgente hac vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili $Vp\pi n$, cujus centrum est in centro virium C , axis transversus Vn , axis conjugatus πq , apsidæ summæ duæ V, n , imæ π, q ; ellipseos autem mobilis $VP\Pi$, umbilicus erit C , axis transversus $V\Pi = VC + C\Pi$.



* Idem.

quod etiam ex propositione x. manifestum est. Nam corpus ur-
gente hac vi centripetâ revolvetur in ellipsi immobili, cujus cen-
trum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciprocè

ut distantia, id est directè ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2,

ideoque inter apsidem summam & imam angulus erit graduum
 $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 gr. 16 m. 45 sec. & propterea corpus tali vi re-

volvens, perpetuâ anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab
apside summâ ad imam & ab imâ ad summam perveniet in æter-
num. Porro si vis centripeta sit reciprocè ut latus quadrato-

quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciprocè ut
 $A^{\frac{11}{4}}$, (u) ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ erit n æqualis $\frac{1}{4}$,

& $\frac{180}{\sqrt{n}}$ gr. æqualis 360 gr. & propterea corpus de apside sum-

mâ discedens & subinde perpetuò descendens, perveniet ad apsi-
dem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo
ascensu complendo aliam revolutionem integram, redibit ad apsi-
dem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum
altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centri-
petam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A \text{ cub.}}$, id est, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}^m + c \text{ in } \overline{T-X}^n}{A \text{ cub.}}$

seu (x) (per eandem methodum nostram serierum convergentium) ut

bT

(u) * Ideoque directè ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$, seu ut
 $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, cum sit $A^3 = A^{\frac{12}{4}}$, & proinde est
 $\frac{A^3}{A^{\frac{11}{4}}} = A^{\frac{1}{4}}$, atque ita $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}} = \frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$.

(x) * Seu per eandem methodum. Et-
enim dignitas $\overline{T-X}^n$, evoluta, est $T^m -$
 mXT^{m-1} &c. adeoque $b \times \overline{T-X}^m = bT^m -$
 $mbXT^{m-1}$ &c. & similiter $c \times \overline{T-X}^n$
 $= cT^n - ncXT^{n-1}$ &c. undè $b \times \overline{T-X}^m$
 $+ c \times \overline{T-X}^n = bT^m + cT^n - mbXT^{m-1}$
 $- ncXT^{n-1}$ &c.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

$$bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2} bXXT^{m-2}$$

A cub.

$$+ \frac{nn-n}{2} cXXT^{n-2} \&c.$$

A cub.

fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm-m}{2} bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2} cXT^{n-2} \&c.$ Et su-

mendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & vicissim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV seu T arithmeticè per unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, ideoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F , id est angulus VCP ad angu-

lum VCP , ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum angulus VCP inter apsidem summam & apsidem imam in ellipsi immobili sit 180 gr. erit angulus VCP inter easdem apsidem, in orbe quem corpus vi centripetâ quantitâ $\frac{bA^m + cA^n}{A cub.}$ proportio-

nali describit, æqualis angulo graduum $180 \sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et

(y) eodem argumento si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A cub.}$, angulus

(y) * Et eodem argumento. Si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A^3}$, id est ut $b \times T^m - c \times T^n$, seu ut $\frac{bT^m - cT^n - mbXT^{m-1} + ncXT^{n-1}}{A^3} \&c.$ collatis terminis fiet RGG , hoc est IGG ad $bT^m - cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, adeoque GG ad $bT^{m-1} - cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} - ncT^{n-1}$, & ponendo $T=1$, erit $GG:FF = b-c:mb-nc = 1:\frac{mb-nc}{b-c}$, & $G:F = 1:\sqrt{\frac{mb-nc}{b-c}}$.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XLV.
PROBL.
XXXI.

angulus inter apfides inveniatur graduum $180 \sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec

secus resolvetur problema in casibus difficilioribus. Quantitas, cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in series convergentes denominatorem habentes A cub. Dein pars data numeratoris qui ex illâ operatione provenit ad ipsius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus $RGG - RFF + TFF - FF X$ ad ipsius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque unitatem pro T , obtinebitur proportio G ad F .

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu apfidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad apfidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n , & altitudo nominetur A : erit vis ut altitudinis dignitas illa

$A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus index est $\frac{nn}{mm}-3$. Id (2) quod per exempla

secunda manifestum est. (a) Unde liquet vim illam in majore quam triplicatâ altitudinis ratione, in recessu à centro, decrescere

(2) 452. * Id quod per exempla secunda manifestum est. Si in exemplo secundo loco indicis n , ad confusionem tollendam scribatur p , erit vis centripeta, ut A^{p-3} , & angulus confectus in descensu ab apfide summâ ad apfidem imam æqualis angulo $\frac{180^\circ}{\sqrt{p}}$, adeoque duplus ille angulus seu motus totus angularis quo corpus ab apfide summâ redit ad eandem erit $\frac{360}{\sqrt{p}}$ in exemplo secundo. Est autem in casu corollarii hujus, motus totus angularis quo corpus redit ad apfidem eandem æqualis angulo $\frac{360m}{n}$, ergò $\frac{360}{\sqrt{p}} = \frac{360m}{n}$, & $\frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{m}{n}$, & $\frac{1}{p} = \frac{mm}{nn}$, & $\frac{nn}{mm} = p$; quare A^{p-3}

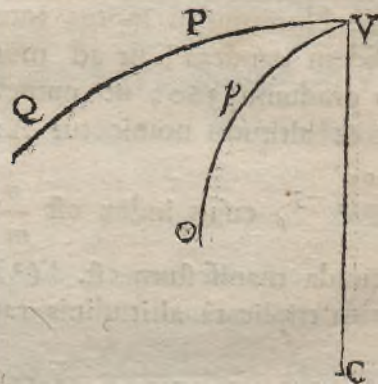
$= A^{\frac{nn}{mm}-3}$.
(a) 453. Unde liquet vim illam. Nam si vis esset ut $\frac{1}{A^3+q}$, seu ut A^{-3-q} , sitque $+q$ quantitas positiva, esset $\frac{nn}{mm} = -3-q$, & $\frac{nn}{mm} = -q$, hoc est quadratum quantitatis $\frac{n}{m}$ negativum quod absurdum est: non potest igitur vis in majore quam in triplicatâ altitudinis ratio seu in ratione $\frac{1}{A^3+q}$, in recessu à centro decrescere.

DE MOTU
CORPORUM.

cere non posse: (b) Corpus tali vi revolvens deque apside discedens, si cœperit descendere nunquam perveniet ad apsidem imam seu altitudinem minimam, sed descendet usque ad centrum, describens curvam illam lineam de quâ egimus in coroll. 3. prop. xli. Sin cœperit illud, de apside discedens, vel minimum ascendere; ascendet in infinitum, neque unquam perveniet ad apsidem summam. Describet enim curvam illam lineam de quâ actum est in eodem coroll. & in coroll. vi. prop. xlii. Sic (c) & ubi vis, in recessu à centro, decrescit in majore quam triplicatâ ratione altitudinis, corpus de apside discedens, perinde ut cœperit descendere vel ascendere, vel descendet ad centrum.

(b) * *Corpus tali vi revolvens, hoc est vi quæ in recessu à centro decrescat in ratione altitudinis triplicatâ deque apside discedens &c.* Sint enim ut in coroll. 3. prop. 41. duæ curvæ VpO , VPQ , quas corpora duo de loco V , secundum directionem ad C V perpendicularem egressa, vi centripetâ ad C tendente, & in triplicatâ altitudinis ratione decrescente in recessu à centro describunt, & corpus in curva VpO , latum ad centrum semper accedat, corpus verò in curvâ VPQ , motum à centro semper recedat ut in eodem cor. 3. prop. 41. manifestum est punctum V esse apsidem summam in curvâ VpO , & esse apsidem imam in curvâ VPQ ; Quare cum in curva VpO , corpus ad centrum semper accedat, nunquam pervenire potest ad apsidem imam, seu altitudinem minimam quæ nulla est, sed gyris infinitis descendit usque ad centrum; in curvâ verò VPQ de apside imâ descendens corpus ascendit in infinitum, neque unquam pervenit ad apsidem summam quæ nulla est. Hæc demonstrari etiam possunt hæc ratione; Si fuerit vis ut $\frac{1}{A^3}$, seu ut

A^{-3} , erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3$, & $\frac{nn}{mm} = 0$ = p (452) & motus totus angularis ab apside ad eandem apsidem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}}$ = $\frac{360^\circ}{9}$; motus verò angularis ab apside sum-



mâ ad imam, vel ab imâ ad summam erit $\frac{180^\circ}{0}$ quæ est quantitas infinita, undè liquet in nostrâ Hypothesi corpus ab apside imâ ad summam aut à summâ ad imam nunquam pervenire posse.

(c) * *Sic & ubi vis in recessu à centro.* Si vis fuerit ut $\frac{1}{A^3 + q}$, & q , quantitas positiva, erit (453) $\frac{nn}{mm} = -q = p$, & (452) motus totus angularis ab apside ad apsidem eandem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{-q}}$, & ab apside unâ ad alteram erit $\frac{180^\circ}{\sqrt{-q}}$; quare ob ima-

trum usque vel ascendet in infinitum. At (d) si vis, in recessu à centro, vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, vel crescat in altitudinis ratione quâcunque; corpus nunquam descendet ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando perveniet: & (e) contra, si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum; vis in recessu à centro aut augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet: & quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eo longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Ut si corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de apside summâ ad apsidem summam alterno descensu & ascensu redierit; hoc est, si fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel

ginariam quantitatem $\sqrt{-q}$, impossibile est ut corpus de apside summâ discedens, adeoque ad centrum accedens, ad apsidem imam unquam perveniat, & ut de apside imâ discedens ac proinde à centro recedens unquam perveniat ad apsidem summam.

(d) * *At si vis in recessu à centro.* Sit vis ut $\frac{1}{A^3 - q}$, & q , quantitas positiva

erit $\frac{nn}{mm} - 3 = -3 + q$, & $\frac{nn}{mm} = q = p$

(452). Unde motus totus angularis ab apside ad eandem erit $\frac{360^\circ}{\sqrt{p}} = \frac{360m}{n}$, mo-

tus angularis ab apside unâ ad alteram $= \frac{180}{\sqrt{p}} = \frac{180m}{n}$, quæ sunt quantitates rea-

les & positivæ, quare in hac Hypothesi corpus ab apside ad apsidem eandem redire & ab apside summâ ad imam atque ab imâ ad summam pervenire poterit. Est autem

$\frac{1}{A^3 - q}$, altitudinis A dignitas, si fue-

rit q major quam 3, è contrâ $\frac{1}{A^3 - q}$ est

dignitas quantitatis $\frac{1}{A}$, si fuerit q minor

quam 3. Liqueat igitur, si vis in recessu à centro vel decrescat in minore quam triplicatâ ratione altitudinis, (quod fit ubi q minor quam 3) vel crescat in altitu-

dinis ratione quâcunque (quod fit ubi q major quam 3) corpus nunquam descendere ad centrum usque, sed ad apsidem imam aliquando pervenire.

(e) * *Et contra si corpus de apside ad apsidem &c.* Nam si vis in recessu à centro non augeatur, nec etiam minuat in minore quam triplicatâ altitudinis ratione, necessariò decrescet vel in triplicatâ vel in majore quam triplicatâ altitudinis ratione, sed supra demonstratum est in his duobus casibus corpus non posse ab apside ad apsidem alternis vicibus descendere & ascendere, ergò si corpus de apside ad apsidem alternis vicibus descendens & ascendens nunquam appellat ad centrum, vis in recessu à centro augebitur, aut in minore quam triplicatâ altitudinis ratione decrescet, & quo citius corpus de apside ad apsidem redierit, eò longius ratio virium recedet à ratione illâ triplicatâ. Quo enim citius corpus de apside ad apsidem redierit, eò minor erit quantitas $\frac{360m}{n}$, aut quantitas $\frac{m}{n}$, adeoque eò ma-

ior erit quantitas $\frac{n}{m}$, ejusque quadra-

tum $\frac{nn}{mm} = p = q$, & hinc eò longius

quantitas $\frac{1}{A^3 - q}$ à quantitate $\frac{1}{A^3}$ recedet.

4 vel 2. vel $1 \frac{1}{2}$ ad 1, ideoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16}$
 $- 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64}-3}$ vel $A^{\frac{1}{16}-3}$ vel $A^{\frac{1}{4}-3}$
 vel $A^{\frac{4}{9}-3}$, id est, reciprocè ut $A^{3-\frac{1}{64}}$ vel $A^{3-\frac{1}{16}}$ vel $A^{3-\frac{1}{4}}$
 vel $A^{3-\frac{4}{9}}$. Si corpus singulis revolutionibus redierit ad apsidem
 eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$
 æqualis A^{-2} seu $\frac{1}{AA}$; & propterea decrementum virium in ra-
 tione duplicatâ altitudinis, ut (f) in præcedentibus demonst-
 ratum est. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quar-
 tis, vel duabus tertiis, vel unâ tertiâ, vel unâ quartâ, ad ap-
 sidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1.
 ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9}-3}$ vel $A^{\frac{9}{4}-3}$ vel A^{9-3} vel A^{16-3}
 & (g) propterea vis aut reciprocè ut $A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut direc-
 tè ut A^6 vel A^{13} . Denique si corpus pergendo ab apside sum-
 mâ ad apsidem summam confecerit revolutionem integram, &
 præterea gradus tres, ideoque apsis illa singulis corporis revo-
 lutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad
 ut 363 gr. ad 360 gr. sive ut 121 ad 120, (h) ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$
 er

(f) * Ut in præcedentibus demonstra-
 tum est. In hoc enim casu corpus def-
 cribit ellipsim immotam circulo finitimam
 (per cor. 1. prop. XIII) intereadum æquali-
 ter movetur in ellipsi simili & æquali
 circa umbilicum revolvente cum celeritate
 duplâ ejus quâ corpus idem in eâdem el-
 lipsi mobili fertur (446).

(g) * Et propterea vis aut reciprocè.
 Ut $A^{\frac{11}{9}}$, vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directè ut A^6 ,
 vel A^{13} . Est enim $A^{\frac{16}{9}-3} = A^{-\frac{11}{9}} =$
 $\frac{1}{A^{\frac{11}{9}}}$, & $A^{\frac{9}{4}-3} = \frac{1}{A^{\frac{3}{4}}}$ & $A^{9-3} = A^6$
 & $A^{16-3} = A^{13}$.

(h) * Ideoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æqu.
 $A^{-\frac{29523}{14641}}$. Erit enim in hac hypothe-
 $\frac{nn}{mm} = \frac{14400}{14641}$, & $\frac{nn}{mm} - 3 = \frac{14400}{14641} - 3 = \frac{29523}{14641}$

Est autem $\frac{29523}{14641} = 2 + \frac{241}{14641} = 2 + \frac{4}{243}$,
 proximè; nam $241 \times 243 = 58563$, & $4 \times$
 $14641 = 58564$; decrevit igitur vis cen-
 tripeta in ratione paulò majore quam du-
 plicatâ, sed quæ vicibus $59 \frac{3}{4}$, propius
 ad duplicatam quam ad triplicatam acce-
 dit,

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XLV.
PROBL.
XXXI.

erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciprocè ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciprocè ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proximè. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicatâ, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus, vi centripetâ quæ sit reciprocè ut quadratum altitudinis, revolvatur in ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per exempla tertia) motus apsidum qui ex vi illâ extraneâ oriatur: &

contra. Ut si vis quâ corpus revolvitur in ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, &

vis extranea ablata ut cA , ideoque vis reliqua ut $\frac{A-cA^4}{A^3}$; erit

(in exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, & n æqualis 4, ideoque angulus revolutionis inter apsidem æqualis angulo gra-

duum $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. (i) Ponamus vim illam extraneam esse

357.45 partibus minorem quam vis altera quâ corpus revolvitur

dit, differentia enim inter 2; & $2 + \frac{4}{243}$, est $\frac{4}{243}$, differentia verò inter 3 & $2 + \frac{4}{243}$ est $1 - \frac{4}{243} = \frac{239}{243}$, Porro $\frac{239}{243}$ est ad $\frac{4}{243}$ seu 239 ad 4 ut $59\frac{3}{4}$ ad 1.

(i) * Ponamus esse $c \times A$ ad $\frac{1}{AA}$, hoc est, ponendo A vel $T=1$, c ad 1, ut 100 ad 35745, id est, ut 1 ad 357, 45, & erit $c = \frac{100}{35745}$, $1-c = \frac{35645}{35745}$, $1-4c = \frac{35345}{35745}$; undè $\frac{1-c}{1-4c} = \frac{35645}{35345}$, & hinc $180 \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 180 \times \sqrt{\frac{35645}{35345}}$ &c.

454. Scholium. Hermannus in scholio ad prop. 25. lib. 1. Phoronomiæ formulam invenit quâ ex datâ vi centripetâ motus apsidum determinatur, & contrâ; hanc ipsam ex prius ostensis hic demonstrabimus. Iisdem igitur positis quæ in not. 449. sit vis centripeta in ellipseos mobilis loco quovis p , seu (451) vis $\frac{VFFA+VRGG-VRFF}{A^3}$

$= \frac{y}{A^3} = \frac{y}{z^3}$, ponendo altitudinem $A=z$, & erit (450) $y = VFFz + VRGG - VRFF$, capiantur utrinque fluxiones & invenietur $dy = VFFdz$, & faciendo $Q dz = dy$, erit $Q = VFF$. Loco VFF , ipsius valor Q substituatur in superiori æquatione, & erit $y = Qz + \frac{QRGG - QRFF}{FF} = Qz - QR + \frac{QRGG}{FF}$

DE MOTU
CORPO-
RUM.

vitur in ellipsi, id est c esse $\frac{100}{33745}$, existente A vel T æquali 1,

& $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180 \sqrt{\frac{35645}{33745}}$, seu 180. 7623, id est,

180 gr. 45 m. 44 f. Igitur corpus de apside summâ discedens, motu angulari 180 gr. 45 m. 44 f. perveniet ad apsidem imam, & hoc motu duplicato ad apsidem summam redibit: ideoque apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 gr. 31 m. 28 sec. Apsis lunæ est duplo velocior circiter.

Hactenus de motu corporum in orbibus quorum plana per centrum virium transeunt. Superest ut motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam scriptores qui motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure motus corporum viribus quibuscunque centra petentium, & planis excentricis innitentium hic considerandus venit. Plana autem supponimus esse politissima & absolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonstrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, usurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & orbitas movendo describunt. Et eadem lege motus corporum in superficiebus curvis peractos subinde determinamus.

S E C.

Jam cum orbis ponatur circulo quam maximè finitimus, erit $z = R = T$, & proinde $y = \frac{QTGG}{FF}$ & hinc $GG:FF = y:QT$, ac $G:F = \sqrt{y}:\sqrt{QT}$ quæ est formula generalis quæsitâ. Nam sit exempli causâ, vis centripeta ut $\frac{bz^m + cz^n}{z^3}$ hoc est $y = bz^m + cz^n$, erit $dy = Qdz = mbz^{m-1}dz + ncz^{n-1}dz$; unde $Q = mbz^{m-1} + ncz^{n-1}$, atque ita per formulam inventam $GG:FF = bz^m + cz^n$: $Tmbz^{m-1} + Tncz^{n-1}$, & ponendo $z = T = 1$, $GG:FF = b + c:mb + nc$, ut in exemplis tertiis Newtonus invenit.

Sit nunc data ratio G ad F , nempe m ad n , & vis centripeta sit ut dignitas aliqua non data altitudinis z , illius dignitatis index dicatur p , sitque adeò vis centripeta ut z^p , & erit $\frac{y}{z^3} = z^p$, ac $y = z^{p+3}$, $dy = Qdz = p + 3 \times z^{p+2}dz$, $Q = p + 3 \times z^{p+2}$. Hinc $G^2:F^2 = m^2:n^2 = z^{p+3}:p+3 \times Tz^{p+2}$, hoc est, ponendo $z = T = 1$, $mm:nn = 1:p+3$, atque ita $\frac{nn}{mm} = p+3$, & $\frac{nn}{mm} - 3 = p$, ut in cor. 1. repertum est.

SECTIO X.

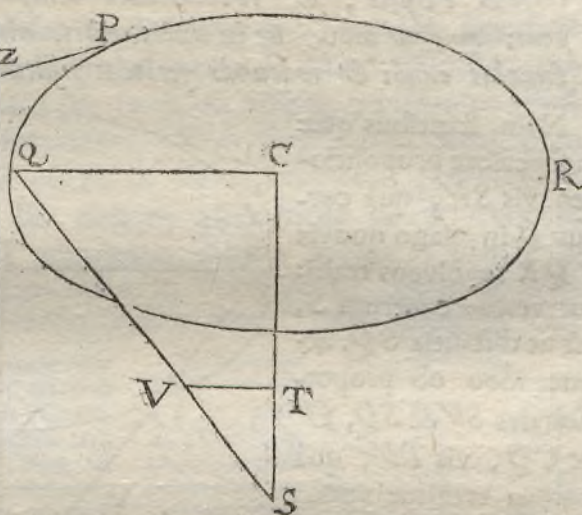
LIBER
PRIMUS.
PROP.
XLVI.
PROBL.
XXXII.

De motu corporum in superficiebus datis, deque funipendulorum motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revoluitur, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundum rectam in plano illo datam egressi.

Sit S centrum virium, SC distantia minima centri hujus à plano dato, P corpus de loco P secundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in trajectoriâ suâ revolvens, & PQR trajectoria illa, in plano dato descripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ , QS , & si in QS capiatur SV propor-



tionalis vi centripetæ quâ corpus trahitur versus centrum S , & agatur VT quæ sit parallela CQ & occurrat SC in T : Vis SV resolvetur (per legum corol. 2.) in vires ST , TV ; quarum ST trahendo corpus secundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV , agendo secundum positionem plani, trahit corpus directè versus punctum C in plano datum, ideoque efficit, ut corpus illud in hoc plano perinde moveatur, ac si vis ST tolleretur, & corpus vi solâ TV revolveretur circa ^(k) centrum C in spatio libero. Datâ autem vi centripetâ TV quâ corpus Q in spatio

(k) * 455. Circâ centrum C in spatio libero. Vis centripetâ SV , ad S tendens in loco quovis Q , dicatur Q , & erit ob triangula SVT , SQC similia. $SQ = Zz$ QC

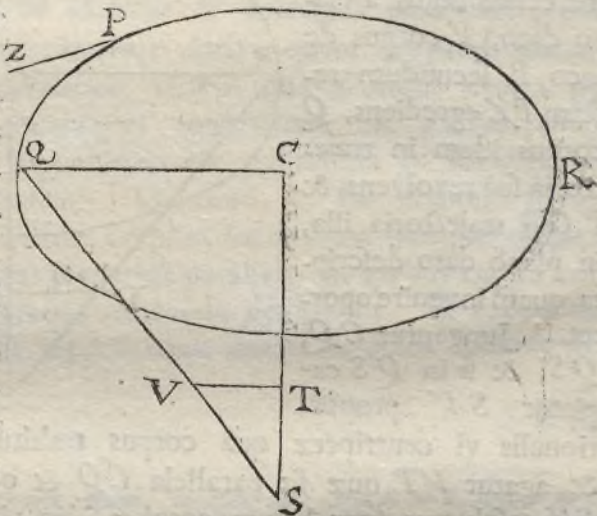
DE MOTU
CORPO-
RUM.

libero circa centrum datum C revolvitur, datur (per prop. XLII.) tum trajectory PQR , quam corpus describit, tum locus Q , in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q ; & contra. $Q. E. I.$

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiae corporis à centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent ellipses, & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citròque discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.

Nam, stantibus quæ in superiore propositione, vis SV , quæ corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur versus centrum S , est ut distantia SQ ; atque ideo ob proportionales SV & SQ , TV & CQ , vis TV , quæ corpus trahitur versus punctum C in orbis plano datum, est ut distantia CQ . Vires



igitur, quibus corpora in plano PQR versantia trahuntur ver-

$QC = SV$ seu $Q:VT = \frac{Q \times QC}{SQ}$. Sed ob angulum QCS rectum $SQ^2 = QC^2 + SC^2$, ergo VT , seu vis ad C tendens in loco Q , sive $\frac{Q \times QC}{SQ}$ erit

æqualis $\frac{Q \times QC}{\sqrt{QC^2 + SC^2}}$. Cum igitur data sit SC distantia minima centri S à plano QPC positione dato, si loco SQ in quantitate Q , scribatur $\sqrt{QC^2 + SC^2}$, obtinebitur valor vis ad C tendentis in lo-

co Q ex solâ distantia QC & quantitatibus datis compositus. Exempli causâ, si vis SV , ad S tendens in loco Q sit ut distantia SQ , erit VT , seu vis ad C tendens in eodem loco Q , ut $\frac{SQ \times QC}{SQ}$

hoc est, ut QC . Si vis SV fuerit ut $\frac{1}{SQ^2}$, erit VT , ut $\frac{QC}{SQ^3}$, hoc est, ut $\frac{QC}{QC^2 + SC^2}$

& itâ de cæteris suppositionibus.

us punctum C , sunt ⁽¹⁾ pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur versus centrum S ; & propterea corpora movebuntur iisdem temporibus, in iisdem figuris, in plano quovis PQR circa punctum C , atque in spatiis liberis circa centrum S ; ideoque (per corol. 2. prop. x. & corol. 2. prop. xxxviii.) temporibus semper æqualibus, vel describent ellipses in plano illo circa centrum C , vel periodos movendi ultrò citròque in lineis rectis per centrum C in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

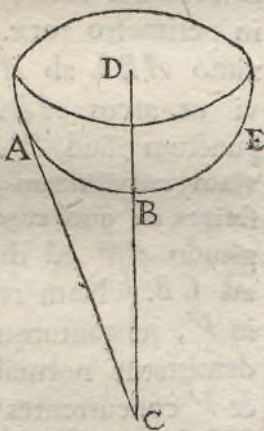
LINÆ
PRIMUS
PROP.
XLVII.
THEOR.
XV.

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. ^(m) Concipe lineas curvas in plano describi, dein circum axes quosvis datos per centrum virium transeuntes revolvi, & eâ revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa obliquè ascendendo & descendendo currant ultrò citròque; peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atque ideo in lineis curvis, quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istitis igitur in casi-

(1) * Sunt pro ratione distantiarum &c. Hoc est vires absolutæ ad S & C tendentes sunt æquales, ita ut si alicubi fuerit $PC=QS$, vis in loco P ad C tendens æqualis erit vi in loco Q ad S tendenti. Nam vis quæ corpus in loco Q ad C trahitur, est ad vim quæ versus S urgetur, ut QC ad QS , & vis in loco Q ad C tendens est etiam ad vim in loco P ad idem centrum C urgentem ut QC ad PC seu QS ; quare vis in loco Q ad S tendens æqualis est vi ad C tendenti in loco P ; Corpora verò quæ moventur viribus centripetis quæ sunt ut distantia, temporibus semper æqualibus ellipses quasvis, utut inæquales, describent circa sua centrâ (per Prop. X). Si autem ellipseos PQR quam corpus in plano describit, latitudo in infinitum minuatur, describet corpus rectam aliquam QCR , motu accelerato ad centrum C accedens, & motu retardato ab ipso recedens usque ad R , deinde rursus ex loco R , ad centrum C recidens, & ita circa centrum C , ultrò citròque oscillabitur.

(m) * Concipe lineam curvam AB in plano $ACED$ descriptam circa axem datum DBC per centrum virium C transeuntem revolvi & eâ revolutione superficiem curvam AEB describi, tum corpus aliquod A ita moveri, ut illius centrum in hac superficie perpetuo reperiatur. Si corpus illud obliquè descendendo & ascendendo per ABE , EBA currat ultrò citròque peragentur illius motus in plano $ACED$ per axem CD transeunte, atque adeò in lineâ curvâ ABE , cum (ex hyp.) nulla adsit vis quæ corpus à plano illo cogat deflectere; superficies AEB perfectè tersa ac polita supponitur.



bus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

Si rota globo extrinsecus ad angulos (n) rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei, quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque cycloidem vel epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum ex eo tempore inter eundem tetigit, ut summa diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui globum roto hoc tempore inter eundem tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

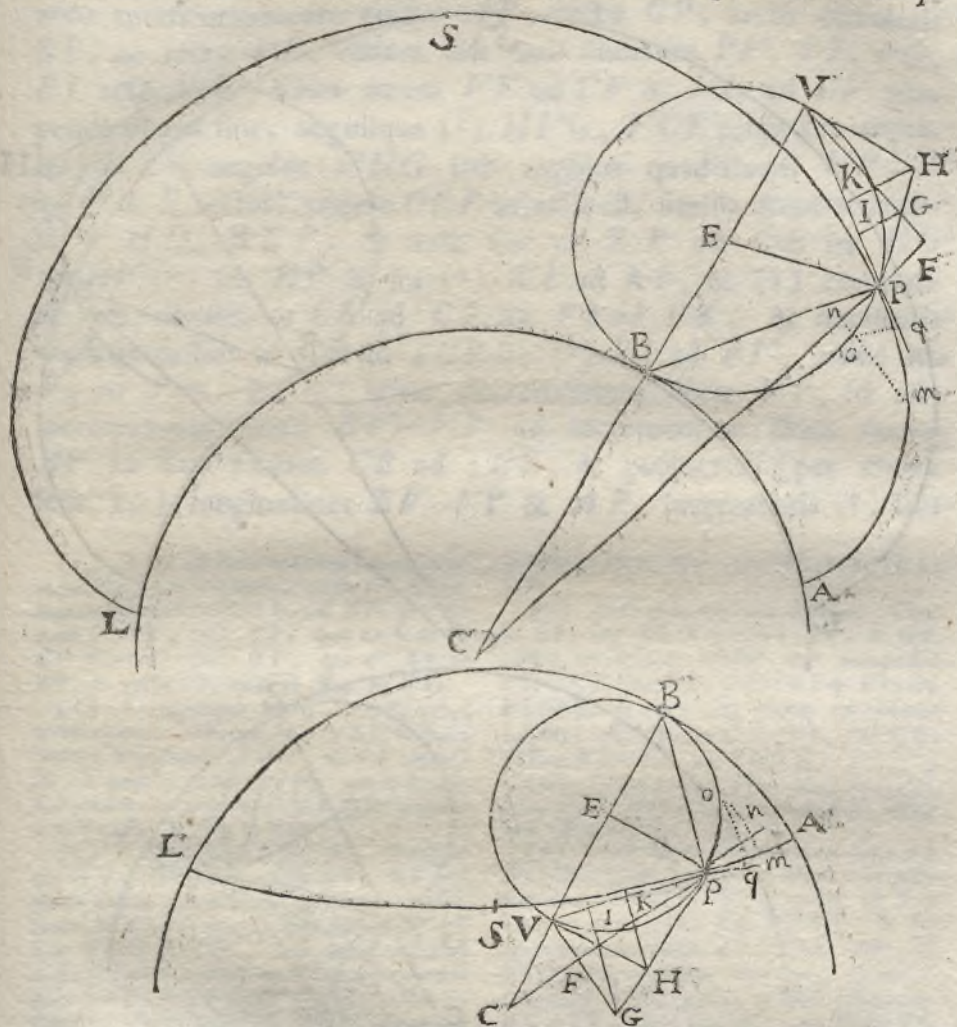
Sit ABL globus, C centrum ejus, BPV rota ei insistens, E centrum rotæ, B punctum contactus, & P punctum datum in perimetro rotæ. Concipe hanc rotam pergere in circulo maximo ABL ab A per B versus L , & inter eundem ita revolve ut arcus AB , PB sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud P in perimetro rotæ datum interea describere viam curvilineam AP . Sit autem AP via tota curvilinea descripta ex quo rota globum tetigit in A , & erit via hujus longitudo AP ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2} PB$; ut $2 CE$ (o) ad CB . Nam recta CE (si opus est producta) occurrat rotæ in V , junganturque CP , BP , EP , VP , & in CP productam demittatur normalis VF . Tangant PH , VH circulum in P & V concurrentes in H , secetque PH , ipsam VF in G , & ad VP demittantur normales GI , HK . Centro item C & intervallo quovis describatur circulus nom secans rectam CP in n , rotæ peri-

(n) * Ad angulos rectos, id est, ita ut planum rotæ productum per centrum globi transeat, illudque proinde in duo hæmisphæria dividat ac circulum maximum in ejus superficie figuet.

(o) * Ut $2 CE$ ad CB . Hoc est, ob $2 CE = 2 CB + 2 BE$, vel $2 CE = 2 CB - 2 BE$, ut summa vel differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.

metrum BP in o , & viam curvilineam AP in m ; centroque V & intervallo Vo describatur circulus secans VP productam in q .

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XLIX.
THEOR.
XVII.



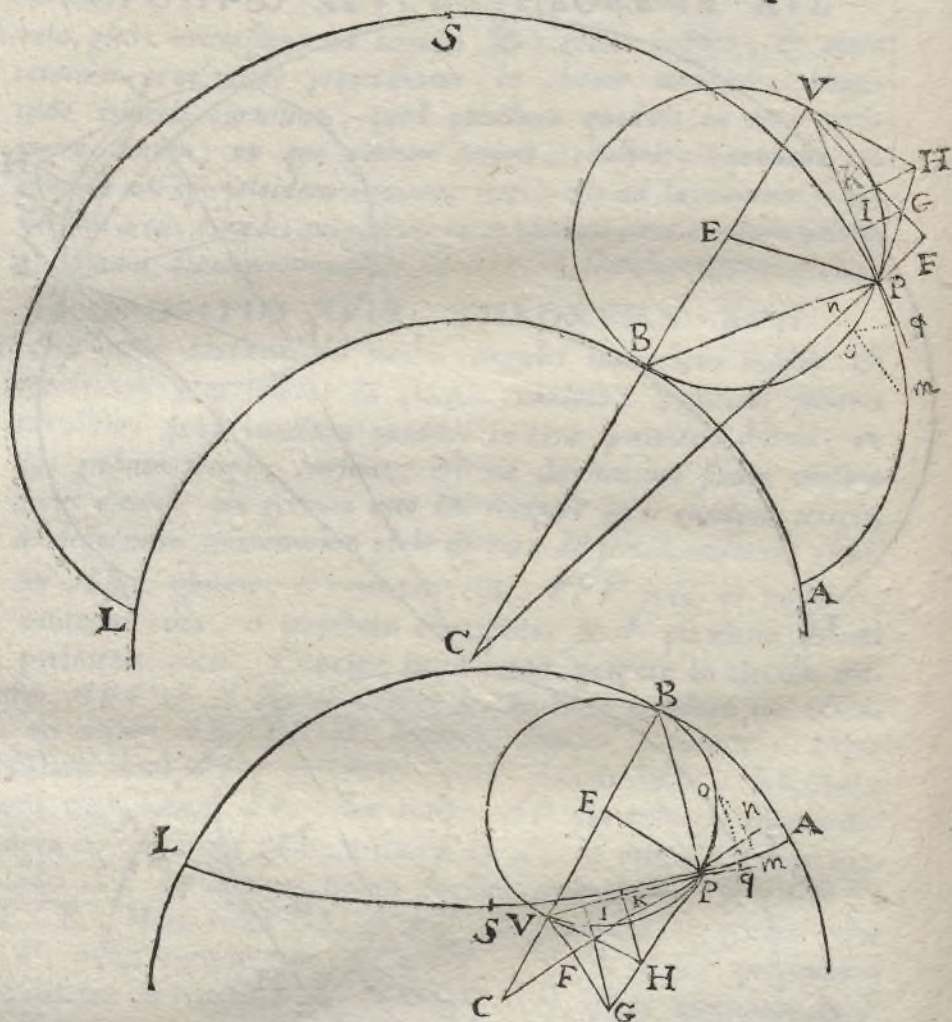
Quoniam rota cundō semper revolvitur circa punctum contactus B , (P) manifestum est quod recta BP perpendicularis est ad

(p) * Manifestum est quod recta BP &c. Nam evidens est in circuli BPV revolutione, centro B radio BP singulis temporibus describi arcum circuli seu incrementum nascentis curvæ AP , ad quod proinde radius BP perpendicularis est, sed ob

angulum VPB in semicirculo rectum, linea VP in eum radius BP est perpendicularis, ergo linea VP est Tangens ejus arcus nascentis seu incrementi curvæ AP , ideoque ipsius curvæ AP .

DE MOTU
CORPO-
RUM.

lineam illam curvam AP quam rotæ punctum P describit, atque ideo quod recta VP tanget hanc curvam in puncto P .



Circuli no radius sensim auctus vel diminutus æquetur tandem distantia CP ; &, ob (9) similitudinem figuræ evanescentis.

(9) * Et ob similitudinem figuræ evanescentis. Hæc figuræ evanescente arcus PO , Pq , considerari possunt tanquam lineæ rectæ, seu partes tangentium HP , VP productarum, & arcus mn , oq , tanquam rectæ lineis Pn , Pq , perpendiculares;

Hinc verò anguli ad verticem oppositi nPo & GPF , OPm & GPI , erunt æquales, atque adeo ob angulos oNP & GFP , oqP & GIP , rectos, proindeque æquales, figuræ evanescentis $Pnomq$, similis erit figuræ $PFGL$.

vis $Pnomq$ & figuræ $PFQVI$, ratio ultima lineolarum evanescentium Pm, Pn, Po, Pq , id (r) est, ratio mutationum momentanearum curvæ AP , rectæ CP , arcus circularis BP , ac rectæ VP , eadem erit quæ linearum PV, PF, PG, PI respectivè. Cum autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares sint, angulique (l) HVG, VCF propterea æquales; & (t) angulus VHG (ob angulos quadrilateri $HVEP$ ad V & P rectos) angulo CEP æqualis est, similia erunt triangula VHG, CEP ; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV (u) seu HP & ita (x) KI ad KP , & (y) compositè vel divisim ut CB ad CE ita PI ad PK , & duplicatis consequentibus ut CB ad $2CE$ ita (z) PI ad PV , atque ita Pq ad Pm . Est (a) igitur decrementum lineæ VP , id est, incrementum lineæ $BV-VP$ ad incrementum lineæ curvæ AP in datâ ratione CB ad $2CE$, & propterea (per coroll. lem. iv.) longitudines $BV-VP$ & AP , incrementis (b) illis

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XLIX.
THEOR.
XVII.

(r) * *Id est ratio mutationum momentanearum, seu incrementorum vel decrementorum nascentium curvæ AP , quæ ex A in m fit AP , rectæ CP , quæ ex C in m fit CP arcus circularis BP , qui ex B in o fit BP , ac rectæ VP , quæ ex V in q fit VP .*

(l) * *Angulique HVG, VCF , propterea æquales. Ob angulum VFC rectum, summa angulorum FCV, CVF æqualis est angulo recto CVH , quare detracto communi angulo CVF , fit angulus $FCV = FVH$ sive HVG .*

(t) * *Et angulus VHG &c. Tangentes HV, HP cum radiis EV, EP angulos rectos constituunt, adeoque quadrilateri $HVEP$, anguli duo reliqui VHP sive VHG & VEP , sunt simul æquales duobus rectis, quare cum sint quoque anguli VEP, CEP simul duobus rectis æquales, liquet angulum CEP , æqualem esse angulo VHG , & in secunda figura cum anguli quadrilateri $VHPE$ in V & P sint recti, reliqui anguli VHP, VEP æquales sunt duobus rectis, sed etiam VHP & VHG sunt æquales duobus rectis, ergo detracto communi VHP , VEP sive CEP est æqualis VHG .*

(u) * *Ad HV , seu HP . Nam circumli tangentes HV, HP sunt æquales.*

(x) * *Et ita KI ad KP . Etenim ob*

parallelas HK, GI , est $HG:HP = KI:KP$.

(y) * *Et compositè vel divisim. Cum sit EP , seu $BE:CE = KI:KP$, si rota globo intrinsicè insistat, erit compositè $BE + CE$, seu $CP:CE = KI + KP$; seu $PI:PK$. Si verò rota globo extrinsicè insistat, erit divisim $CE - BE$, seu $CB:CE = KP - KI$, seu $PI:PK$.*

(z) * *Ita PI ad PV . Nam in triangulo PHV isoscele, est $PK = KV$, adeoque $2PK = PV$.*

(a) * *Est igitur decrementum lineæ VP &c. Dum arcus A in m crescit fitque AP , recta Vq decrescit & fit VP ; quare est Pm incrementum curvæ A in m seu AP , & Pq decrementum rectæ VP . Cum autem sit BV circuli diameter constans, quantum decrescit VP , tantum crescit differentia $BV - VP$, undè decrementum lineæ VP , æquale est incremento lineæ $BV - VP$. Est igitur incrementum lineæ $BV - VP$, ad incrementum lineæ curvæ AP &c.*

(b) * *Incrementis illis genita &c. Cum punctum P est in A , punctum B est etiam in A , fitque $VP = VB$, adeoque $BV - VP = 0$. Simul ergò crescere incipiunt lineæ $BV - VP$ & AP ; & quoniam in datâ ratione crescent, erit semper $BV - VP$ ad AP in datâ illâ ratione CB ad $2CE$.*

DE MOTU
CORPO-
RUM.

genitæ, sunt in eâdem ratione. Sed, (c) existente BV radio, est VP cosinus anguli BVP seu $\frac{1}{2} BEP$, ideoque $BV-VP$ sinus versus est ejusdem anguli; & propterea in hâc rotâ, cujus radius est $\frac{1}{2} BV$, erit $BV-VP$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2} BP$. Ergo AP est ad duplum sinum versus arcus $\frac{1}{2} BP$ ut $2CE$ ad CB . *Q. E. D.*

Lineam autem AP in propositione priore cycloidem extra globum, alteram in posteriore cycloidem intra globum distinctionis gratiâ nominabimus.

Corol. 1. Hinc si (d) describatur cyclois integra ASL & bisecetur ea in S , erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus est sinus anguli VBP , existente EB radio) ut $2CE$ ad CB , atque ideo in ratione datâ.

Corol. 2. Et (e) longitudo semiperimetri cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ, quæ est ad rotæ diametrum BV ut $2CE$ ad CB .

(c) *Sed existente BV radio &c.* Ob angulum BPV rectum, est BV ad VP ut sinus totus ad sinum anguli VBP qui complementum est anguli BVP ad rectum. Quare existente BV radio, est VP cosinus anguli BVP æqualis dimidio angulo ad centrum BEP . Est autem cujuscvis anguli sinus versus æqualis differentie inter radium & cosinum ejusdem anguli, ergo existente BV radio, erit $BV-VP$ sinus versus anguli $\frac{1}{2} BEP$; & quoniam in diversis circulis æqualium angulorum sinus omnes sunt ut circulorum radii, in hâc rotâ cujus radius est $\frac{1}{2} BV$, erit $BV-VP$, duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2} BP$.

(d) 457. *Hinc si describatur &c.* Ubi punctum P pervenit ad S , arcus BP semicirculo, arcus $\frac{1}{2} BP$ quadranti, & sinus versus arcus $\frac{1}{2} BP$ radio, æquales sunt. Quare in hoc casu curva AS , est ad diametrum BV , ut $2CE$, ad CB ; cumque in loco quovis P , sit etiam curva AP , ad duplum sinum versus $\frac{1}{2} BP$, seu ad $BV-VP$ (456) ut $2CE$ ad CB , erit $AS:BV::AP:BV-VP$, & hinc $AS-AP$, seu $PS:BV-BV+VP$, seu $VP::AS:BV=2CE:CB$.

(e) * *Et longitudo semiperimetri.* Patet per notam superiorem.

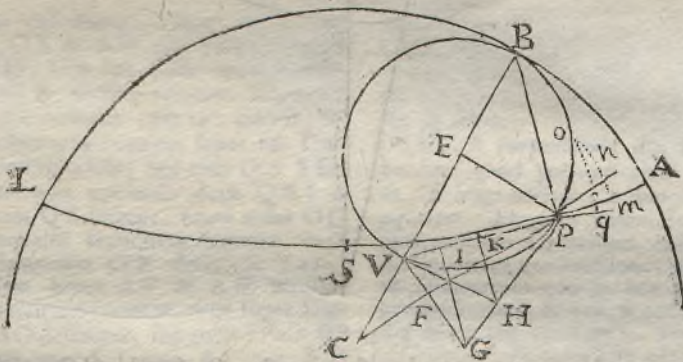
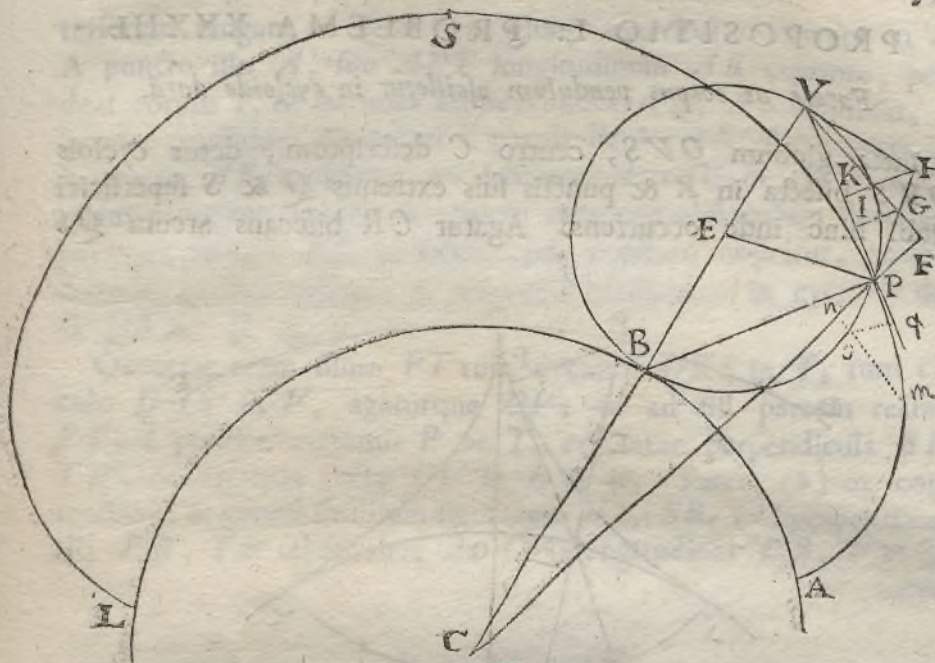
458. *Coroll. 3.* Recta CS cycloidi perpendicularis est, & recta CA eam tangit in A . Est enim BP ad cycloidem perpendicularis, & VP tangens ejus in P , at ubi punctum P pervenit in S , BP fit BS , seu BV , & ubi punctum B est in A , VP coincidit cum VB .

459. *Coroll. 4.* Si per punctum quodvis P agatur PV cycloidem tangens in P , & ad eam erigatur perpendicularum PB globo occurrens in B , jungaturque CB tangentem secans in V , erit BV rotæ diameter.

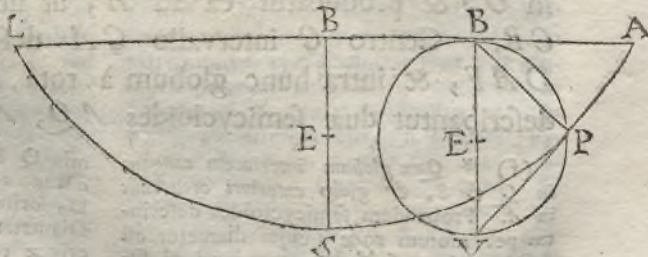
460. *Coroll. 5.* Ex generi cycloidis liquet arcum globi AB , æqualem esse arcui rotæ BP .

461. *Coroll. 6.* Si rotæ diameter VB æqualis constituatur semidiametro globi CB , cyclois intra globum evadet linea recta per centrum globi C transiens. Nam in hoc casu $CS=0$, & $2CE=CB$; unde punctum cycloidis medium S , cum centro coincidit, & quia (457) $AS:BV=2CE:CB$, erit $AS=BV=CB$ atque adeo est AS linea recta per centrum C transiens, nam si curva esset, major foret semidiametro CB .

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XLIX.
THEOR.
XVII.



462. Coroll. 7. Si globi diameter augetur in infinitum, mutabitur ejus superficies spherica in planum, fietque ABL linea recta, & BE finita manente seu nulla respectu infinitae lineae CB, erit CE = CB, adeoque cyclois tam intra quam extra globum abibit in cycloidem vulgarem, quae describitur revolutione rotae in linea recta progredientis, cumque sit semper (457) $AP : BV - VP = 2 CE : CB = 2 : 1$, erit $AP = 2 \times (BV - VP)$, sed $BV - VP$, est duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2} BP$, existente BE radio (456). Ergo in cycloide vulgari AP aequatur quadruplicato sinu, I.



nui verso dimidii arcus BP, inter planum ABL & punctum describens P intercepti; Hinc etiam erit $AS = 4 BE = 2 BS = 2 BV$; Est enim BE sinus versus quadrantis.

teriolem tangant in Q & S & globo exteriori occurrant in A . A puncto illo A , filo APT longitudinem AR æquante, pendeat corpus T , & ita intra semicycloides AQ , AS oscilletur, ut quoties pendulum digreditur à perpendicularo AR , filum parte sui superiore AP applicetur ad semicycloidem illam APS versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliquâ PT cui semicyclois nondum obijcitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oscillabitur in cycloide datâ QRS . $Q. E. F.$

Occurrat enim filum PT tum cycloidi QRS in T , tum circulo QOS in V , agaturque CV ; & ad fili partem rectam PT , è punctis extremis P ac T , erigantur perpendiculara BP , TW , occurrentia rectæ CV in B & W . Patet, (g) ex constructione & genesi similium figurarum AS , SR , (h) perpendiculara illa PB , TW abscindere de CV longitudines VB , VW rotarum

cycloides describens; Liqueat arcus OQ & AF , OS & AD esse proportionales radiis CO , CA sive (per const.) radiis CR , CO & divisim rotarum Diametris OR , AO , ideoque (per nat. circuli) semicircumferentiis rotarum super has Diametros descriptarum; Sed cum Q & S sint puncta extrema cycloidis datæ QRS & CO arcum QS bifecet, erunt arcus OQ & OS æquales semicircumferentiæ rotæ super Diametrum OR descriptæ (460) ergo etiam arcus AF & AD æquales erunt semicircumferentiæ rotæ super Diametrum AO descriptæ, sed arcus FP aut DP est semper æqualis arcui AF aut AD (460); erunt ergo arcus FP & DP semicirculi, & P cadet in extremitatibus Q & S Diametrorum FQ , DS , sed ubi P semicircumferentiam rotæ percurrit semicyclois est descripta, ergo semicycloides descriptæ per motum rotæ ex A proficiscentis terminantur in Q & S . $Q. E. D.$

(g) 463. Patet ex constructione & genesi similium figurarum AS , SR ; Figuræ illæ dicuntur similes quia AO diameter rotæ quæ describitur semicycloides AS , AQ est ad globi DAF radium AC ut diameter OR rotæ quæ describitur cy-

clois QRS ad globi QOS radium OC , (per const.) unde manifestum quod cycloides AS , AQ , QR , quæ eodem modo describuntur ac determinantur sunt inter se similes.

(h) * Perpendiculara illa &c. 1^o. Probandum quod perpendicularum PB abscindat de CV longitudinem VB rotæ Diametro OA æqualem. Fingatur rotam ita positam ut ejus punctum Cycloidem describens sit in P , liquet, ex constructione, eam hujus rotæ Diametrum quæ in hoc casu globo est perpendicularis & quæ, si producat, transire debet per centrum C , utrinque terminari debere in superficie globorum; Jam verò (per Demonst. Prop. XLVIII. XLIX.) Tangens Cycloidis transit semper per unam extremitatem ejus Diametri rotæ quæ globo est perpendicularis & perpendicularum in Tangentem è puncto contactus erectum transit per alteram ejusdem Diametri extremitatem, ergo, cum sit (ex const.) filum PT Tangens Cycloidis in puncto P , & PB perpendicularum in illud, intersectiones V & B linearum PT & PB cum globis QOS & DAF erunt extremitates ejus Diametri rotæ quæ si producat, transit per centrum C , ergo ducta CV .

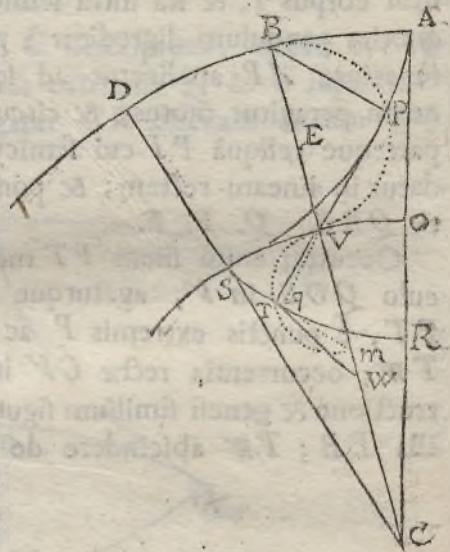
DE MOTU
CORPO-
RUM.

tarum diametris OA , OR æquales. Est (i) igitur TP ad VP (duplum finum anguli VBP existente $\frac{1}{2}BV$ radio) ut

perpendicularum PB abscindet de CV longitudinem VB rotæ Diametro OA æqualem. Q. E. 1^o. D.

2^o. Perpendicularum TW abscindet de CV longitudinem VW rotæ diametro OR æqualem. Fingatur rota Cycloidem SRQ describens ita posita, ut ejus Diameter globo SOQ insitens sit in lineâ CV globumque tangat in V , dicatur m altera extremitas ejus Diametri, & dicatur q punctum illius rotæ Cycloidem describens: Arcus VS erit æqualis arcui Vq (460), utque totus arcus SO est æqualis arcui Vm , erit $VO = qm$, & qm est mensura dupli anguli CVq ; Sit verò rota describens cycloidem APS posita sicut in priore casu, hoc est, ejus Diameter globo DAF insitens sit in productione lineæ CV , erit arcus BA æqualis arcui BP (460) & est BP mensura dupli anguli BVP ; Est autem arcus VO sive qm ad BA sive BP , ut CO ad CA , ideoque ut Diametri rotatum OR ad AO (ex const.); arcus verò diversorum circulorum qui sunt inter se ut suorum circulorum Diametri, sunt similes ideoque ejusdem numeri graduum, ergo angulus CVq est æqualis angulo BVP quoniam arcus qui sunt mensura eorum dupli, sunt ejusdem numeri graduum, ideoque illi anguli CVq , BVP sunt per verticem oppositi & PVq est linea recta; itaque, filum PV productum ad T transit tam per extremitatem V Diametri rotæ globo insistentis quam per ejus rotæ punctum q Cycloidem describens; Ergo (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) filum PT est perpendiculare in Tangentem Cycloidis in puncto illo q sive T , ideoque ex constructione lineâ TW erit ea ipsa Tangens, & (per Dem. Prop. XLVIII. XLIX.) transibit per extremitatem m Diametri rotæ quæ globo insitit, hoc est Diametri jacentis in lineâ CV , ergo TW abscindet de CV longitudinem rotæ Diametro OR æqualem. Q. E. 2^o. D.

* Idem aliter. Ex puncto V ducatur ad semicycloidem SR perpendicularis Vq , & qm tangens in q radio CV occurrens in m , erit (459) $Vm = QR$. Descriptis rotis BPV , Vqm ,



erit angulus BVP , æqualis arcui BP , ad diametrum BV , applicato seu $\frac{BP}{BV}$, hoc est, ob arcum $BA = BP$ (460) & $BV = AO$, angulus $BVP = \frac{BA}{AO}$. Simili ratione, cum sit arcus Vq æqualis arcui SV , & semirota Vqm æqualis arcui SO , erit arcus $qm = VO$, adeoque angulus $qVm = \frac{VO}{OR}$. Quare angulus $BVP : qVm = \frac{BA}{AO} : \frac{VO}{OR} = OR \times BA : AO \times VO$; sed $BA : VO = CA : CO = AO : OR$, (per contr.) adeoque $OR \times BA = AO \times VO$, Ergo angulus $BVP = qVm$. Cum igitur anguli BVP , TVW ad verticem oppositi sint etiam æquales, perpendicularis Vq coincidit cum VT , tangens qm cum TW , & Vm cum VW , unde tandem est $Vm = OR = VW$.

(i) * Est igitur &c. Ob triangula VPB , VTW similia $TV : VP = VW : VB$, & componendo $TP : VP = BW : BV$.

initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes, atque ideo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul perveniunt ad perpendicularum AR . Cumque vicissim ascensus perpendicularorum de loco infimo R , per eisdem arcus cycloides motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis à viribus iisdem à quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eisdem arcus factorum æquales esse, atque ideo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum cycloidis partes duæ RS & RQ ad utrumque perpendiculari latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent.

Q. E. D.

Corol. Vis (ⁿ) quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad totum corporis ejusdem pondus in loco

LIBER
PRIMUS
PROP. LV.
THEOR.
XVIII.

cum tR , TR quæ manent describendæ & accelerationes subsequentes his partibus proportionales sunt etiam ut toti arcus tR , TR , & sic deinceps. Quoniam autem velocitates dato tempore genitæ sunt ut accelerationum summæ, quæ ob datam accelerationum rationem sunt in eadem ratione datæ arcuum tR , TR , liquet accelerationes atque ideo velocitates genitas & partes his velocitatibus descriptas, partesque describendas semper esse ut sunt toti arcus tR , TR , & propterea si pars arcus TR describenda evanescat, quod fit dum corpus pendulum T pervenit ad R , pars arcus tR , simul evanescet, ob datam harum partium rationem. Unde corpora duo oscillantia t & T ex punctis t & T simul demissa, simul perveniunt in R .

(n) * Vis quâ corpus T in loco quovis T acceleratur vel retardatur in cycloide, est ad vim quâ in loco altissimo S , vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, ut arcus TR , ad arcum SR , (ex demonstr. prop. 51.) sed vis quâ corpus in loco S vel Q acceleratur vel retardatur in cycloide, est vis tota quâ ad centrum C , perpendiculariter urgetur; radius enim CS cycloidem SR tangit in S , (458) adeoque directio vis in loco S in cycloide coincidit cum directione vis rectæ trahentis ad centrum C .

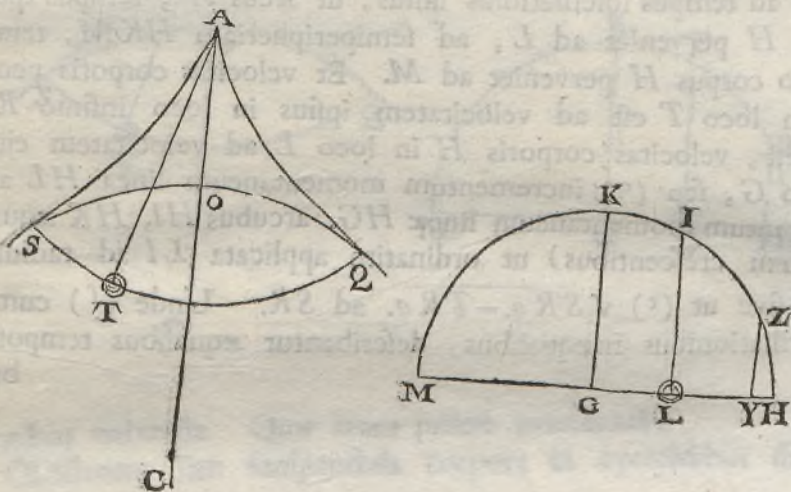
465. Coroll. 1. Si centro A radio AR circulus describatur, cycloidis SRQ arcus nascens in loco infimo R cum circuli illius arcu nascente coincidit. Quare si longitudo penduli AR magna sit, eodem propè modo in exiguis circuli arcibus

PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LII.
PROBL.
XXXIV.

Definire & velocitates pendulorum in locis singulis, & tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis G, intervallo GH cycloidis arcum RS æquan-



te, describe semicirculum HKM semidiametro GK bisectum. Et si vis centripeta, distantis locorum à centro proportionalis, tendat ad centrum G , sitque ea in perimetro HIK æqualis vi centripetæ in perimetro globi QOS ad ipsius centrum tendenti; & (o) eodem tempore quo pendulum T dimittitur è loco

dato H , & agatur AC rectæ HG parallela lineam LD secans in C , de loco H cadant corpora duo, quorum alterum vi constante HA , alterum vi variabili HB vel LD urgeatur, sintque illorum velocitates in eodem loco L , V , v , & erit V^2 ad v^2 , ut area $HACL$ ad aream $HBDL$, (per prop. 39. & not. 408.) id est $V^2 : v^2 = HL \times HA : HL \times BH + DL$.

Tom. I.

nam in centro G evanescit DL erit in illo centro $V^2 : v^2 = 2 HA : BH$, & $V : v = \sqrt{2 HA} : \sqrt{BH}$. Quare datis in loco H viribus HA , HB , & velocitate in loco quovis L vel G vi constante acquisita, datur velocitas vi variabili in eodem loco acquisita.

(o) * Et eodem tempore. Id est, simul demittantur ex locis S & H corpora T & L .

B b b

DE MOTU
CORPO-
RUM.

loco supremo S , cadat corpus aliquod L ab H ad G : quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatiis describendis TR , LG semper proportionales, atque ideo, si æquantur TR & LG , æquales in locis T & L ; patet corpora illa describere spatia ST , HL æqualia sub initio, (p) ideoque subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare (per prop. xxxviii.) tempus quo corpus describit arcum ST est ad tempus oscillationis unius, ut arcus HI , tempus quo corpus H perveniet ad L , ad semiperipheriam HKM , tempus quo corpus H perveniet ad M . Et velocitas corporis penduli in loco T est ad velocitatem ipsius in loco infimo R , (hoc est, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G , seu (q) incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG , arcubus HI , HK æquali fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK , sive ut (r) $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ ad SR . Unde (f) cum, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus

(p) * Ideoque subinde pergere æqualiter urgeri & æqualia spatia illdem nempe temporibus describere.

(q) * Seu incrementum momentaneum &c. Nam incrementa illa sunt spatia eodem tempusculo uniformiter descripta, quæ prout sunt ut velocitates in locis L & G , quibus describuntur, arcus autem HL , HK , quæ tempora exhibent, crescunt ut tempora, hoc est, æquali fluxu.

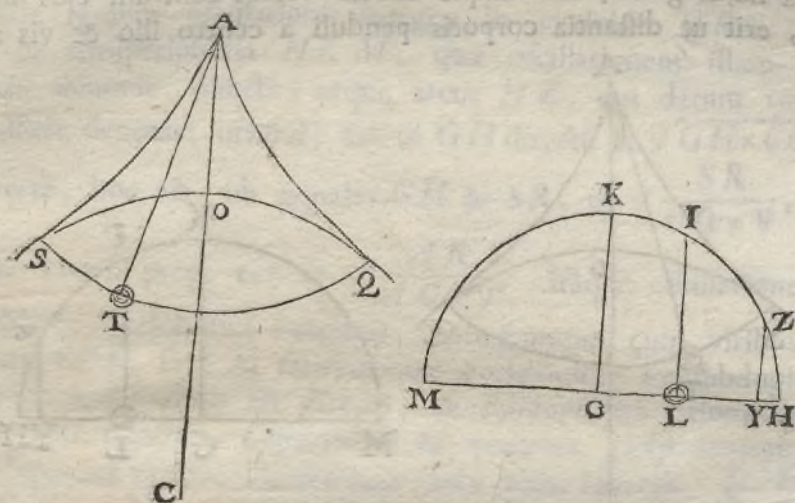
(r) Sive ut $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ ad SR . Est enim, ex naturâ circuli $LI^2 = ML \times LH = GH^2 - GL^2 = SR^2 - TR^2$, adeoque $LI = \sqrt{SR^2 - TR^2}$, & $LI : GK = \sqrt{SR^2 - TR^2} : GK$, seu SR .

(f) 468. Unde cum &c. Datâ vi centripetâ in perimetro globi QOS vel in H datur tum velocitas quâ corpus hæc vi sollicitatum describit circulum HKM , tum tempus quo semiperipheriam HKM percurrit (201) hoc est, tempus unius oscil-

lationis integræ; & contrâ, Dato tempore unius oscillationis integræ, datur vis centripetâ in H vel S (202). Porro dato arcu ST , vel rectâ æquali HL , datur LI sinus arcus HI , & hinc datur hic arcus, adeoque & ratio HI , ad HKM , id est, ratio temporis quo percurritur HL vel ST ad tempus datum oscillationis integræ. Et contrâ dato tempore quo describitur HL vel ST , datur arcus HI , & hinc datur illius sinus rectus LI sinusque versus HL vel arcus ST . Datâ vi centripetâ in S vel H , datur velocitas corporis de loco S vel H in R vel G pervenientis (467); hinc verò datur velocitas corporis in loco quovis dato T vel L ; cum (ex demonstr.) velocitas in R vel G , sit ad velocitatem in T vel L , ut GK ad LI , seu ut SR ad $\sqrt{SR^2 - TR^2}$. Dato tempore quo describitur ST vel HL , datur arcus HI , & illius sinus rectus LI , adeoque & velocitas in L & contrâ. si

bus arcus totis oscillationum arcibus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus descripti in oscilla-

LIBER
PRIMUS,
PROP.
III.
PROBL.
XXXIV.

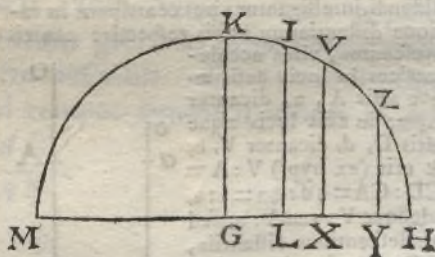


tionibus universis. Quæ erant primò inveniendæ.

Oscillentur jam funipendula corpora in cycloidibus diversis intra

intra

Si corpus non ex summo loco S, vel H, sed ex alio quovis t, (vid. fig. prop. 51.) vel Y, demittatur, erit tempus quo ex loco t pervenit ad R, vel ex Y ad G, æquale tempore dato dimidiæ oscillationis. Hinc dato arcu T t, vel rectâ æquali YL, dabitur & tempus quo describitur & velocitas in T vel L, ac contrâ. Nam cum sint arcus seu spatia quævis æqualibus temporibus descripta in oscillationibus inæqualibus, ut arcus vel spatia integris oscillationibus percurfa (464), dato arcu T t, vel spatio YL, dabitur spatium HX, quod corpus de loco H demissum describit eodem tempore quo aliud corpus percurrit T t vel YL; dato spatio HX, datur arcus HV & illius sinus rectus XV, & hinc datur tempus quo describitur HX & YL, & velocitas in X; cumque sit velocitas in

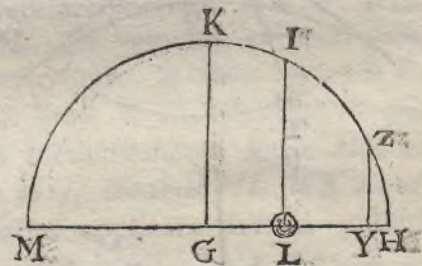
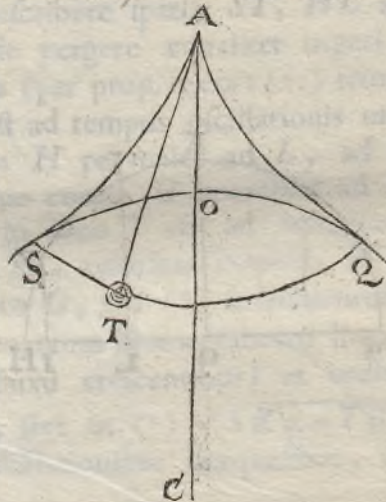


X, in corpore de loco H, cadente ad velocitatem in L, in corpore de loco Y cadente ut HG, ad YG (464) dabitur velocitas in L, vel T; Et contrâ.

B b b 2

DE MOTU
CORPORUM.

intra globos diversos, quorum (t) diversæ sunt etiam vires absolutæ, descriptis: & si vis absoluta globi cujusvis QOS dicatur V, vis acceleratrix quâ pendulum urgetur in circumferentiâ hujus globi, ubi incipit directè versùs centrum ejus moveri, erit ut distantia corporis penduli à centro illo & vis ab-



soluta globi conjunctim, hoc est, ut $CO \times V$. Itaque (u) lineola HY, quæ sit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, describetur dato tempore; & si (*) erigatur normalis YZ circumferen-

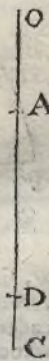
(t) 469. Quorum diversæ sunt &c. Ex centris C, c, per omne circumquaque spatium diffundi intelligantur vires centripetæ in ratione distantiarum à suis respectivè centris crescentes, vires acceleratrices in locis datis æquæ altis A, a; in aliis locis æquæ altis D, d, dicantur V, v, & erit (ex hyp.) $V : A = CD : CA = cd : ca = v : a$, adeoque $V : v = A : a$, sed evanescentibus distantis, C D, c d, sunt V, v, vires absolutæ (per definitionem VI. Newt.) quarè vires absolutæ sunt in ratione virium acceleratricium in locis æquæ altis. Jam verò vires acceleratrices in locis quibuscumque O, o, dicantur B, b, erit (ex Dem.)

$V : v = A : a$
Et per hyp. $CO : CA = B : A$
 $C A$ vel $ca : Co = a : b$

Ergò ex æquo $V \times CO : v \times Co = B : b$, id est, vis acceleratrix in loco quovis O, est ut distantia à centro & vis absoluta conjunctim.

(u) * Itaque lineola nascens HY, quæ sit ut hæc vis acceleratrix $CO \times V$, describetur dato tempore. Nam quadratum temporis quo describitur nascens HY, est ut $\frac{HY}{CO \times V}$ (per cor. V. lem. X.). Undè cum data sit ratio HY ad $CO \times V$ (ex hyp.), quadratum temporis adeoque & tempus ipsum quo describitur HY datum erit.

(x) * Et si erigatur normalis &c. Arcus HZ erit ad semiperipheriam HKM, ut tempus datum quo describitur HY, ad tempus unius oscillationis (prop. 38.) quod proinde erit ut semiperipheria HKM, seu ut radius GH directè, & arcus HZ inversè. Est autem arcus nascens HZ æqualis chordæ HZ (per Lem. 7.) adeoque (ex naturâ circuli) $HZ^2 = HY \times MH = GH \times HY$; Quarè cum sit HY ut



tiæ occurrens in Z , arcus nascens HZ denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens HZ in subduplicatâ ratione rectanguli GHY , ideoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde tempus oscillationis integræ in cycloide QRS (cum sit ut semiperipheria HKM , quæ oscillationem illam integram denotat, directè; utque arcus HZ , qui datum tempus similiter denotat, inversè) fiet ut GH directè & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inversè, hoc est, ob æquales GH & SR , ut $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, sive

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LII.
PROBL.
XXXIV.

(per corol. prop. 1.) ut $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Itaque oscillationes in globis & cycloidibus omnibus, quibuscunque cum viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicatâ ratione longitudinis fili directè, & subduplicatâ ratione distantie inter punctum suspensionis & centrum globi inversè, & subduplicatâ ratione vis absolutæ globi etiam inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam oscillantium, cadentium & revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si rotæ, quæ cyclois integra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi cyclois (γ) evadet linea recta per centrum globi transiens, & oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac rectâ. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est (z) enim hoc tempus (per casum secundum) ad tempus semioscillationis in cycloide quavis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Co-

$CO \times V$, erit HZ^2 ut $2GH \times CO \times V$, seu, ut $GH \times CO \times V$, & hinc tempus unius oscillationis ut $\frac{\sqrt{GH \times CO \times V}}{GH}$
 $= \sqrt{\frac{GH}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{SR}{CO \times V}} = \sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$
 ob $GH=SR$, & $\frac{AR}{AC} = \frac{SR}{CO}$, (per cor. prop. 50.)

(γ) * Cyclois evadet linea recta (461).
 (z) * Est enim hoc tempus &c. Quoniam cycloide QRS in rectam mutatâ sit $AR=AC$, erit (per cas. 2.) tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale (prop. 38.) per circuli quadrantem ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$. Unde erit
 B b b 3. hoc.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

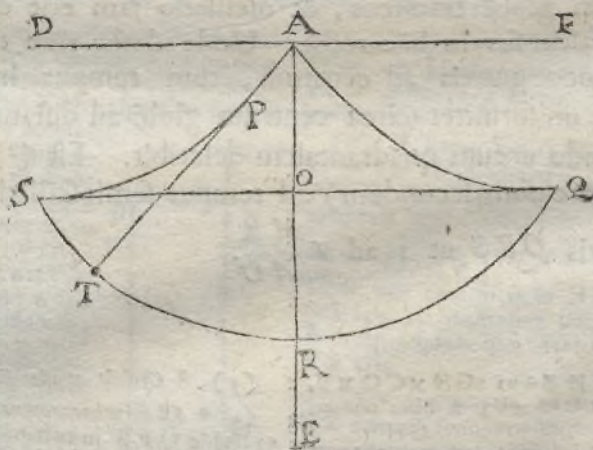
Corol. 2. Hinc etiam consecretantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de cycloide vulgari adinvenierunt. Nam (a) si globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies spherica in planum, visque (b) centripeta ager uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & cyclois nostra abibit in cycloidem vulgi. Isto (c) autem in casu longitudo arcus cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus rotæ inter idem inter planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*: Et (d) pendulum inter duas ejusmodi cycloides in simili & æquali cycloide tempo-
ribus

hoc tempus ad tempus semioſcillationis in cycloide quavis *QRS* in rectam non mutatâ ut $\sqrt{\frac{1}{V}}$ ad $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$, hoc est, ob datam *V*, ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$. Quare dato tempore unius oſcillationis in cycloide quavis *QRS* circa centrum *C*, dabitur tempus descensus de loco quovis ad idem centrum, & tempus huic æquale per quadrantem circuli ad quamvis distantiam descripti.

(a) * Nam si globi diameter augeatur (462).

(b) * Visque centripeta distantie infinitæ (quæ proinde non mutatur) proportionalis non mutabitur, & quoniam centro in infinitum abeunte, radii qui antè erant ad superficiem sphericam perpendiculares sunt paralleli; vis centripeta ager uniformiter secundum lineas huic superficiem in planum mutatæ perpendiculares.

(c) * Isto autem in casu (462).



(d) * Et pendulum inter duas &c. Erit enim in hoc casu diameter rotæ *OR* quâ describitur cyclois *QRS*, æqualis

diametro *AO* rotæ quâ describitur cyclois *APS* (462.), quare semicycloides *SR*, *AS* similes erunt & æquales.

ribus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed (e) & descensus gravium, tempore oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LII.
PROBL.
XXXIV.

Apertantur autem propositiones à nobis demonstratæ ad veram constitutionem terræ, quatenus rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu clavorum, perimetris suis infixorum, cycloides extra globum; & pendula inferius in fodinis & cavernis terræ suspensa, in cycloidibus intra globos oscillari debent, ut oscillationes omnes evadant isochronæ. Nam gravitas (ut in libro tertio docebitur) decrescit in progressu à superficie terræ, sursum quidem in duplicatâ ratione distantiarum à centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

P R O

470. (e) * Sed & descensus &c. Erit in hoc casu tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per diametrum rotæ A O vel O R, seu per dimidiam penduli longitudinem ut peripheria circuli ad ejus diametrum. Nam iisdem positis quæ (in prop. 52. & ejus cor. 2^o.) erit tempus unius oscillationis æquale tempori semirevolutionis in circulo HKM (prop. 38.). Est autem (100.) tempus semirevolutionis in circulo HKM, ad tempus descensus uniformiter accelerati per dimidium radium H G, ut peripheria circuli ad diametrum. Quare cum sit $\frac{1}{2} H G = \frac{1}{2} S R = \frac{1}{2} A R = O R$ (462.) erit tempus unius oscillationis ad tempus descensus perpendicularis per dimidiam penduli longitudinem ut circuli peripheria ad diametrum.

471. Coroll. Dimidia penduli longitudo A O, est ad spatium A E descensu perpendiculari descriptum unius oscillationis tempore in duplicatâ ratione diametri ad peripheriam circuli. Sic enim tempus unius oscillationis t, diameter circuli ad peripheriam, ut d, ad p, & erit (469) tempus descensus perpendicularis per spatium A O = $\frac{d t}{p}$; sed (27) $\frac{d d t t}{p p}$: t t = A O : A E, ergo A O : A E = d d : p p. *Hugenius* cui pendulorum theoria debetur

prop. 25. part. 4. horologii oscillatorii, longitudinem penduli singulas oscillationes uno minuto secundo absolventis invenit pedum Paris. 3. & linearum $8 \frac{1}{2}$, hoc est, linearum $\frac{881}{2}$, & hinc dimidia penduli

longitudo erat linearum $\frac{881}{4} = 220.25$.

Est autem diameter circuli ad peripheriam ut 113, ad 355, quam proxime, & proinde quadratum diametri ad quadratum peripheriæ ut 12769. ad 126025; quare spatium uno minuto secundo descriptum à corpore gravi perpendiculariter cadente, est pedum Paris. $15 \frac{1}{12}$, quam proxime.

472. Coroll. Quoniam propè telluris superficiem gravium directio horizonti ad sensum perpendicularis est gravitasque constant, atque adeò V gravitas absoluta, & A C distantia à centro telluris datæ sunt, in pendulis in cycloidem vulgarem aut etiam in exiguos arcus circuli (465) excurrentibus, tempus unius oscillationis (per cas. 2. prop. 52.) erit ut $\sqrt{A R}$, id est, in ratione subduplicatâ longitudinis penduli & proinde longitudo penduli in ratione duplicatâ temporis unius oscillationis.

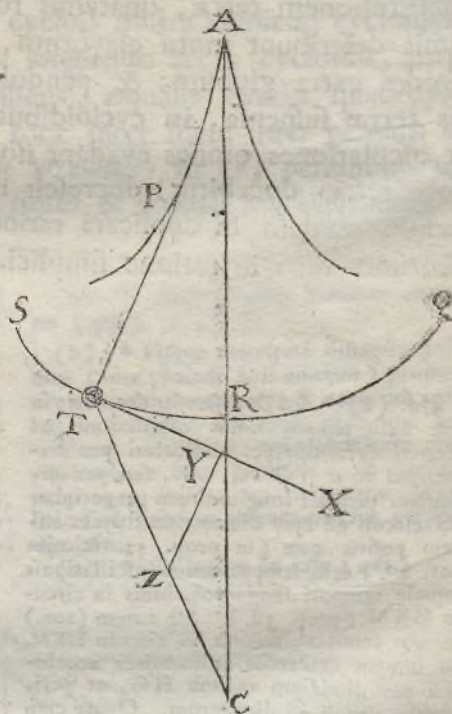
DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oscillationes semper isochronas peragent.

Oscilletur corpus T in curvâ quâvis lineâ $STRQ$, cujus axis sit AR transiens per virium centrum C . Agatur TX quæ curvam illam in corporis loco T quovis contingat, inque hâc tangente TX capiatur TY æqualis arcui TR . Nam ^(f) longitudo arcus illius ex figurarum quadraturis, per methodos vulgares, innotescit. De puncto Y educatur recta YZ tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z , & erit vis centripeta proportionalis rectæ TZ . Q. E. I.

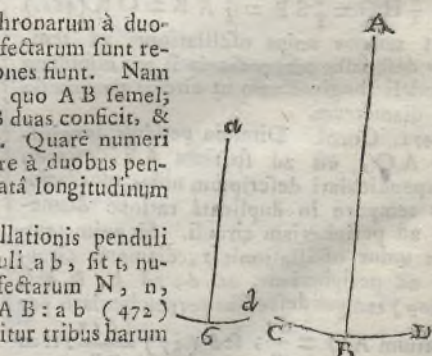
Nam si vis, quâ corpus trahitur de T versus C , exponatur



473. Corol. Numeri oscillationum isochronarum à duobus pendulis AB , a , b , eodem tempore confectarum sunt reciproce ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt. Nam si pendulum ab , bis oscilletur eo tempore quo AB semel; a , b , quatuor oscillationes absolvet, dum AB duas conficit, & ita porro in aliis suppositionibus, ut patet. Quare numeri oscillationum isochronarum eodem tempore à duobus pendulis confectarum sunt in ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inverse (472).

474. Coroll. Hinc si tempus unius oscillationis penduli AB , sit T , tempus unius oscillationis penduli a , b , sit t , numeri oscillationum eodem tempore confectarum N , n , erit $T:t = n:N$ (473), & $Tt:tt = AB:a$ (472) ac propterea $n:n:N = AB:a$. Datis igitur tribus harum proportionum terminis quartus datus est.

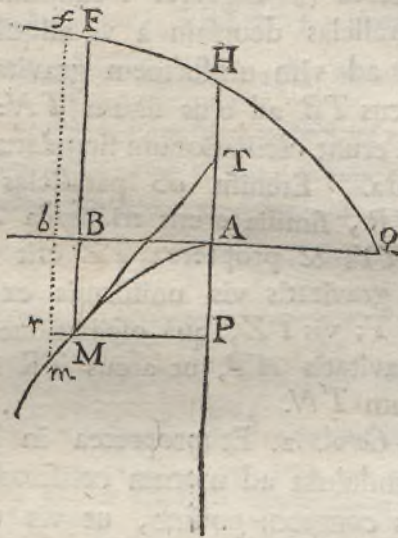
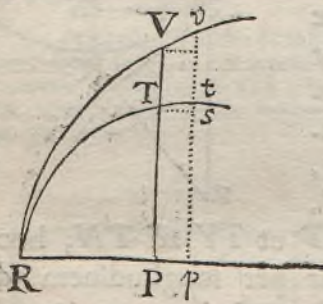
(f) 476. Nam longitudo arcus &c. Curvæ RTt sit axis RP , vertex R , ad axem



ordinatim applicatæ TP , tp , infinite propinque Ts axi parallela & ordinatæ tp occur-

per rectam TZ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ trahendo corpus secundum longitudinem fili PT, motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curvâ STRQ directè accelerat vel directè retardat. (g) Proinde cum hæc sit ut via describenda TR, accelerationes corporis vel retardationes in oscillationum duarum

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LIII.
PROBL.
XXXV.



occurrens in s. Sit $RP=x$, $PT=y$, & erit $Pp=Ts=dx$, $ts=dy$, $Tt^2=dx^2+dy^2$, $Tt=\sqrt{dx^2+dy^2}$; quare RT, fluens ipsius Tt, æqualis erit fluenti quantitatis $\sqrt{dx^2+dy^2}$. Ex æquatione ad curvam RT, queratur valor ipsius dy per dx & alias quantitates, sitque $dy=Qdx$, Q vero quantitas quælibet constans aut variabilis, erit $\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+QQ}$. In perpendicularo PT, capiatur $PV=A\sqrt{1+QQ}$, sitque A quantitas data, & curva RV locus punctorum V, erit areæ RVP elementum $Pp \times PV = Adx\sqrt{1+QQ}$, undè $Tt = dx\sqrt{1+QQ} = \frac{Pp \times PV}{A}$, & capiendo utrin-

que fluentes $RT = \text{areæ } \frac{RVP}{A}$, curvæ igitur RT rectificatio ad quadraturam figuræ RVP reducta est.

476. Idem alia methodo fieri potest. Sit curvæ hujus rectificandæ AMm, axis AP, & vertex A. Per punctum quodvis M agatur tangens MT axi occurrens in T, & MF axi parallela rectam AB axi normalem secans in B; capiatur semper

Tom. I.

AB ad MT sicut constans quævis A ad BF, & punctum F curvam FHQ perpetuò tangat, erit spatium curvilineum BFHA æquale rectangulo sub arcu AM & constanti A comprehenso, adeoque $\text{arcus } AM = \frac{BFHA}{A}$. Nam ductâ mf

priori MF parallelâ & infinitè propinquâ, demissoque ad axem AP perpendicularo MP, quod rectam mf, secat in r; erit ob triangula MPT, Mrm similia $Mr : Mm = MP$, vel $BA : MT = A : BF$ (per constr.) Ergò $BF \times Mr$, id est, elementum $BbFF = Mm \times A$, ac proinde spatium fluens AHFB æquale fluenti $AM \times A$.

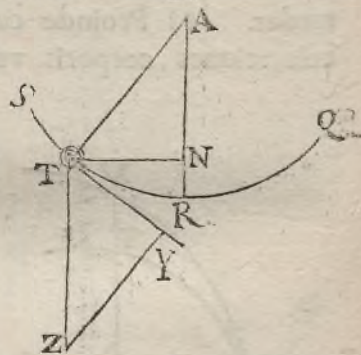
(g) * Proinde &c. Quæ sequuntur manifesta sunt (ex dem. prop. 51.)

C c c

DE MOTU
CORPO-
RUM.

(majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt
semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul
describantur. Corpora autem quæ partes totis semper propor-
tionales simul describunt, simul describent totas. Q. E. D. (h.)

Corol. 1. Hinc si corpus T , filo
rectilineo AT à centro A pendens,
describat arcum circulearem $STRQ$, &
interea (i) urgeatur secundum lineas
parallelas deorsum à vi aliquâ, quæ
fit ad vim uniformem gravitatis, ut
arcus TR ad ejus sinum TN : æqua-
lia erunt oscillationum singularum tem-
pora. Etenim ob parallelas TZ ,
 AR , similia erunt triangula ATN ,
 ZTY ; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN ; hoc est,
si gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam
 AT ; vis TZ , quâ oscillationes evadent isochronæ; erit ad vim
gravitatis AT , ut arcus TR ipsi TY æqualis ad arcus illius si-
num TN .



Corol. 2. Et propterea in horologiis, si vires à machinâ in
pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi gravita-
tis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea
quæ oritur applicando rectangulum sub arcu TR & radio
 AR .

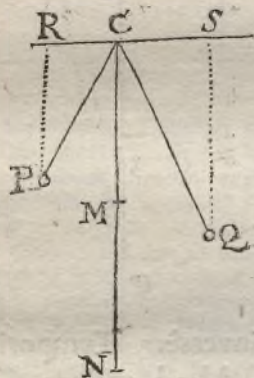
(h) 477. Q. E. D. Datâ vi centri-
petâ TZ quâ corpus in datâ curvâ SRQ
oscillationes semper isochronas peragit,
velocitates illius corporis in locis singu-
lis & tempora quibus tum oscillationes
totæ, tum singulæ oscillationum partes
peraguntur eodem modo definiuntur ac in
cas. 1^o. prop. 52. Ductâ enim ex cen-
tro virium C rectâ quæ curvam tangat
in puncto aliquo S , erit in hoc puncto
 $TZ=TY$, hoc est, vis centripeta in curvâ
 STR æqualis vi centripetæ ad C per-
pendiculariter tendenti in S ; quare ma-

nente constructione cas. 1. prop. 52. &
supponendo vim centripetam in H , (vid.
fig. ibid.) quâ describitur circulus HKM ,
æqualem vi centripetæ in S , tempus unius
oscillationis & singulæ oscillationum par-
tes, & velocitates in locis singulis inve-
nientur profus (ut in not. 468.) iisdem-
que ratiociniis res omnis demonstrabi-
tur.

(i) * Interea urgeatur secundum lineas
parallelas &c. Centro C figuræ superioris
in infinitum abeunte. . .

$\frac{b^2 a - b c c}{a}$, & $b = \frac{a a - c c}{a}$. Jam si in æquatione ad curvam SR loco b scribatur $\frac{a a - c c}{a}$, erit $p p = \frac{a a c c - c c x x}{a a - c c}$ æquatio ad cycloidem, quæ describitur rotatione circuli cujus diameter est RE seu $a - c$ super concavam peripheriam circuli centro C radio CE seu a descripti, ut liquet per n. 466.

Schol. In superioribus de pendulorum motu propositionibus corporis penduli gravitatem in centro seu puncto coactam & filum gravitatis expertis supposuimus, quæ pendulum simplex constituunt. Quamobrem ne demonstratæ oscillationum leges in experimentis valde perturbentur, filum usurpandum est tenue cum globo exiguo & ex materiâ gravissimâ confiato. Si verò filum aut virgæ e quâ globus pendet gravis fuerit & globus major, pendulum non amplius simplex est, sed compositum, quod pluribus ponderibus inter se connexis instructum est.



Pendulum compositum CPQ, onustum quocumque pondusculis P, Q, &c. quorum commune gravitatis centrum M circa punctum suspensionis C oscilletur. Recta CM per punctum suspensionis C & commune gravitatis centrum M ducta vocatur axis penduli compositi PCQ, recta verò RCS in puncto suspensionis C ad axem penduli CM perpendicularis dicitur axis oscillationis. Si in axe penduli compositi CM, capiatur CN æqualis longitudini penduli simplicis suas oscillationes in circulo eodem tempore quo pendulum compositum CPQ semper absolvit.

tis, pendulum illud simplex composito CPQ synchronum vel etiam isochronum dicitur, & punctum N centrum oscillationis penduli compositi CPQ appellatur. Porro si singulorum pondusculorum P, Q &c. gravitas in punctis P, Q &c. collecta intelligatur, & lineæ PC, QC &c. gravitatis expertes supponantur, sitque M summa pondusculorum omnium P, Q, &c. atque ex punctis P, Q &c. ad axem oscillationis RCS demittantur perpendiculara PR, QS &c. erit $CN = \frac{P \times PR^2 + Q \times QS^2}{M \times MC}$ + &c. id est,

si pondera singula penduli compositi ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis, oriatur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi. Hoc pulcherrimum theorema quo linearum ac figurarum omnium oscillantium centrum oscillationis determinatur, primus in horologio oscillatorio invenit ac demonstravit Hugenius. Idem theorema suo quisque modo postea demonstrarunt fratres celeberrimi Jacobus & Joannes Bernoulli, ille in actis Lipsiensibus an. 1691. & commentariis Paris. an. 1703. Hinc verò in actis Lipsiensibus & commentariis Paris. an. 1714, quorum demonstrationes exposuit clariss. Wolfius in elementis Mechanicæ. Hermannus quoque lib. 1^o. Phoron. cap. 5^o. & initio tomi 3^o. Acad. Petropol. duas ejusdem theorematis demonstrationes edidit.

Hugenius horologii oscillatorii parte 4^{ta} prop. 22. distantiam centri oscillationis à puncto suspensionis in sphaerâ filo tenui suspensâ æqualem esse invenit longitudini fili cum radio sphaeræ atque duabus quintis partibus tertiæ proportionalis ad lineam compositam ex radio sphaeræ ac longitudine fili & radii ipsi. hoc est, si filum dicatur L, radius sphaeræ R, distantia centri oscillationis à puncto suspensionis D, erit $D = L + R + \frac{2RR}{5(L+R)}$.

Sed hæc omnia indicare, non verò demonstrare nobis licet, cum his Propositionibus non utatur autor noster.

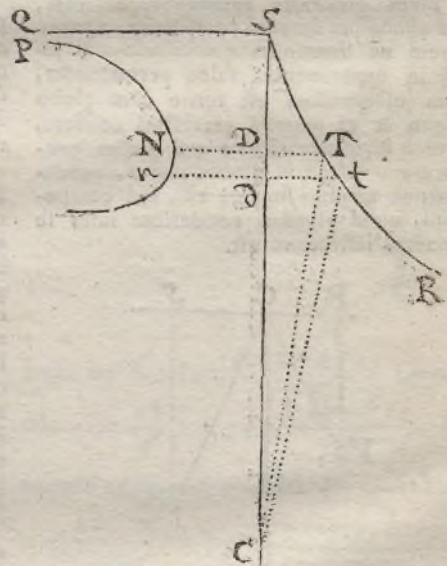
LIBER PRIMUS. PROP. LIII. PROBL. XXXV.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire tempora, quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum virium transeunte descriptis, descendant & ascendent.

Descendat corpus de loco quovis S , per lineam quamvis curvam $STtR$ in plano per virium centrum C transeunte datam. Jungatur CS & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque Dd partium illarum aliqua. Centro C intervallis CD , Cd describantur circuli DT , dt , lineæ curvæ $STtR$ occurrentes in T & t . Et ex datâ tum lege vis centripetæ, tum altitudine CS de quâ corpus cecidit; dabitur velocitas corporis in aliâ quâvis altitudine CT (per prop. xxxix.) ⁽¹⁾ Tempus autem, quo corpus describit lineolam Tt , est ut lineolæ hujus longitudo, id est, ut secans anguli tTC directè; & velocitas inversè. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata DN ad rectam CS per punctum D perpendicularis, & ob datam Dd erit rectangulum Dd



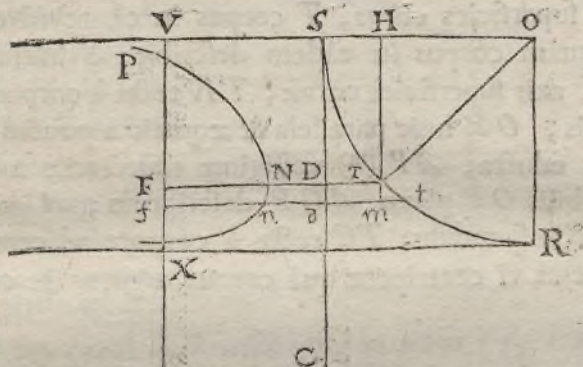
(1)* Tempus autem quo corpus &c. Nam, Tt , est spatium nascens velocitate uniformi descriptum, est autem tempus quo spatium aliquod æquabiliter describitur ut spatium illud directè & velocitas inversè (γ). Porro si centro T radio dato Dd , æquali differentiæ rectarum TC , tC circulus describi intelligatur, erit Tt se-

cans anguli tTC , quare ob datum radium Dd erit semper Tt ut secans anguli tTC , atque adeo tempus quo describitur Tt erit ut illa secans directè & velocitas inversè. Sed datâ tangente curvæ STR in puncto T datur anguli CTt secans; unde dabitur DN proportionalis tempori quo describitur Tt .

$Dd \times DN$, hoc est area $DNnd$, eidem tempori proportionale. Etgo si PNn sit curva illa linea quam punctum N perpetuo tangit, ejusque asymptotos sit recta SQ rectæ CS perpendiculariter insistens: erit area $SQPND$ proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam ST ; proindeque ex inventâ illâ areâ dabitur tempus. *Q. E. L.*

LIBER PRIMUS. PROP. LIV. PROBL. XXXVI.

P. R. O.



479: Exemplum. Centrum virium C , in infinitum abeat, ut sit vis centripeta constans, illiusque directio rectæ SDC semper parallela, & arcus DT , dt , in rectas lineas ad SD normales intuentur. Sit curva STR circuli quadrans cujus centrum O & radius OS ad SD perpendicularis; producantur perpendiculara TD , OS ad F & V , & DF constans gravitatem exhibeat in loco D , punctum F perpetuò tanget rectam VF lineæ SD parallelam, eritque (408) velocitas in D vel $T = \sqrt{2SD \times FD}$. Ex puncto T ad SO demittatur perpendicularum TH rectam dt secans in m , sitque $SO = a$, $SV = FD = b$, $SD = TH = x$ & ob triangula TOH , tTm , similia, erit $HO(\sqrt{aa-xx})$:

$TO(a) = Tm(dx) : Tt = \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$, velocitas in $T = \sqrt{2SD \times DF} = \sqrt{2bx}$. Quare tempus per arcum nascentem $Tt = \frac{Tt}{\sqrt{2bx}}$ (s) = $\frac{adx}{\sqrt{2aabx-2bx^3}}$ undè,

$$DN = \frac{a^2}{\sqrt{2baax-2bx^3}} \quad \text{Si } DN$$

dicatur y , erit $yy = \frac{aa}{2baax-2bx^3}$ æquatio ad curvam PNn , in quâ si ponatur $x=0$ vel $x=a$ erit y infinita, & proinde rectæ OV , RX ad SD perpendicularares sunt hujus curvæ asymptoti.

Similiter si corpus de loco R ascendat in semicirculo RTS , sitque ejus velocitas in R illa quâ possit ad altitudinem verticalem e ascendere, dicanturque XV seu $RO = a$, $FX = x$, ideoque velocitas in $T = \sqrt{2be-2bx}$, & $Tt =$

$$\frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}; \text{ erit tempus per } Tt = \frac{adx}{\sqrt{2be-2bx} \times \sqrt{aa-xx}} \text{ \& } DN = y = \frac{a}{\sqrt{2be-2bx} \times (aa-xx)}, \text{ ubi } DN \text{ per unitatis quadratum, ut servetur homogeneitas, divisa intelligitur. } \text{Schew}$$

PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

Si corpus movetur in superficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium transit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit BKL superficies curva, T corpus in eâ revolvens, STR trajectoria, quam corpus in eâdem describit, S initium trajectoriæ, OMK axis superficiæ curvæ, TN recta à corpore in axem perpendicularis, OP huc parallela & æqualis à puncto O , quod in axe datur, educta; AP (m) vestigium trajectoriæ à puncto P in lineæ volubilis OP plano AOP descriptum; A vestigii initium puncto S respondens; TC recta à corpore ad centrum ducta; TG pars ejus vi centripetæ quâ corpus urgetur in centrum C ,
pro-

Scholium. Si ex his tribus, vi centripetâ in singulis locis, curvâ in quâ corpus ascendit vel descendit, & tempore quo singuli curvæ arcus percurreuntur, duo data fuerint, tertium dabitur. Sit enim (in superioribus figuris) $Dd = dx$, $Tt = dt$, $cm = dy$, velocitas in $T = c$, & erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$, & (5) $cdt = ds$, ideoque $c \cdot c \cdot dt^2 = dx^2 + dy^2$. Quare si datâ vi centripetâ, seu (per prop. 39.) æquatione inter c & x , detur etiam æquatio inter t & x vel y , dabitur æquatio inter x & y , hoc est, æquatio ad curvam STt , & vice versâ. Exempli causâ, positâ vi centripetâ constante & ad distantiam infinitam tendente, corpus ita descendat in curva STt , ut tempus per arcum quemvis ST proportionale sit altitudini correspondenti Sd , dicanturque $Sd = x$, $DT = y$, tempus per $ST = t$, velocitas in $T = c$, & erit dt ut dx , & c ut \sqrt{x} , ideoque cdt ut $dx \sqrt{x}$, & hinc si fuerit a quantitas constans, $cdt = dx \frac{\sqrt{x}}{a}$

& proinde $\frac{x dx^2}{a} = dx^2 + dy^2$, & hinc $(x-a) dx^2 = a dy^2$. Ponatur $x-a = v$,

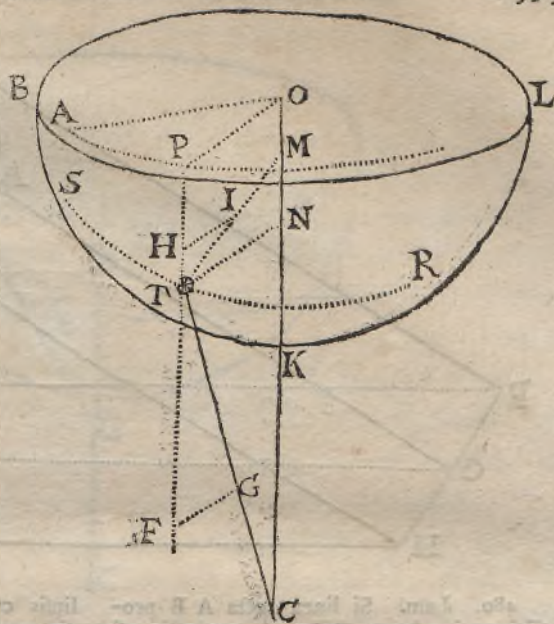
& erit $dx = dv$, & $v^{\frac{1}{2}} dv = a^{\frac{1}{2}} dy$, sumptisque fluentibus $\frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}} y$, $\frac{4}{5} v^{\frac{5}{2}} =$

$4 a y y$, $v^3 = \frac{9}{4} a y y$, æquatio ad parabolam secundi generis, cujus est latus rectum $\frac{9a}{4}$, abscissa v , & ordinatim applicata y .

Sed quoniam in illâ parabolâ, positâ $y=0$, fit $v=0$, adeoque $x-a=v=0$, & $x=a$, patet corpus de altitudine a cadere debere antequam in parabola descendat, capiendamque esse $SD=v$, ut tempus per arcum ST sit proportionale altitudini $v+a$, seu x .

(m) * AP vestigium &c. Si corpus in superficie quâcunque curvâ moveatur, suoque motu curvam describat quæ in plano posita non sit, ad planum est referenda, idque sit si in superficie curvâ aliquod fingatur planum ad quod ex singulis curvæ descriptæ punctis erigantur perpendiculares, quarum extremitates aliam in plano lineam describent, hæc linea primæ vestigium seu lineæ projectionis dicitur.

proportionalis; TM recta ad superficiem curvam perpendicularis; TI pars ejus vi pressionis, quâ corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus M à superficie, proportionalis; PTF recta axi parallela per corpus transiens, & GE, IH rectæ a punctis G & I in parallelam illam $PHTF$ perpendiculariter demissæ. Dico jam, quod area AOP , radio OP ab initio motus descripta, sit temporî proportionalis. Nam vis

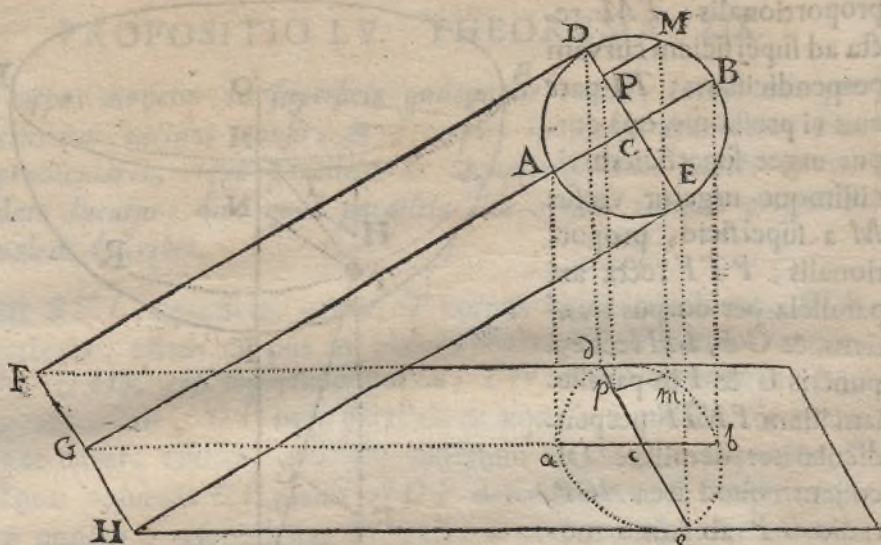


TG (per legum corol. 2.) resolvitur in vires TF, FG ; & vis TI in vires TH, HI : Vires autem TF, TH agendo secundum lineam PF plano AOP perpendicularem mutant solummodo motum corporis quâtenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quâtenus secundum positionem plani factus; hoc est, motus puncti P , quo trajectory vestigium AP in hoc plano describitur, idem est ac si vires TF, TH tollerentur, & corpus solis viribus FG, HI agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano AOP , vi (n) centripetâ ad centrum O tendente & summam virium FG & HI æquante, describeret curvam AP . Sed vi tali describitur area AOP (per prop. I.) temporî proportionalis. Q. E. D.

Corol. Eodem argumento si corpus, à viribus agitatum ad centra duo vel plura in eâdem quâvis rectâ CO datâ tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam ST ; foret area AOP temporî semper proportionalis.

(n) * Vi centripetâ ad centrum O . &c. neas omnes PO, HT, TM, FG, PF, CO esse in eodem plano, atque ideò vim centripetam agentem in plano illo ad centrum O juxta lineam PC dirigere.
Tom. I. D d d 482.

DE MOTU
CORPO-
RUM.



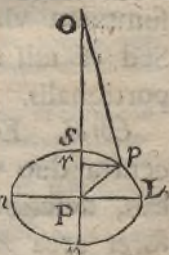
480. Lem. Si linea recta AB projiciatur in planum $FHebd$, projectio est linea recta ab , quæ est ad lineam AB , ut cosinus anguli inclinationis BGb , ad sinum totum. Nam si ex punctis A, B , demittantur ad planum $FHebd$, perpendicularia duo Aa, Bb , patet planum $aABb$, esse ad planum $FHebd$ normale, adeoque perpendicularia omnia ex singulis lineæ AB punctis demissa, cadere in lineam rectam ab , quæ est communis intersectio planorum $FHebd, aABb$. Q. E. 1^{um}. Porro productis BA, ba ut sibi occurrant in G , ob parallelas Aa, Bb , erit ab ad AB , ut Gb ad GB , id est, ut sinus anguli GBb sive Cosinus anguli inclinationis BGb , ad sinum totum. Q. E. 2^{um}.

481. Coroll. Si linea projicienda, plano in quod projicitur parallela fuerit projectio erit linea recta lineæ projiciendæ æqualis & parallela; Nam in hoc casu angulus inclinationis nullus est, & ejus cosinus sit radius. Hinc si linea ED , ad rectam AB perpendicularis, fuerit plano $FHebd$, parallela, projectio illius ed , erit ipsi ED æqualis.

482. Lem. Iisdem positis, si in plano $DFHEBA$, centro C , radio CD , describatur circulus $DAEB$, illius in planum $FHebd$ projectio $daeb$, erit el-

lipis cujus major axis de æqualis sit diametro circuli DE , & ad minorem axem ab , rationem habeat sinus totius ad cosinum anguli BGb , inclinationis planorum. Agatur enim PM ordinatim ad diametrum circuli DE , & projiciatur in rectam Pm , erit $dp = DP$, & $pe = PE$ (481.) atque pm ad PM , ut sinus anguli PMm , seu anguli ABb , ad sinum totum (480) hoc est, ut ab , ad AB seu de , adeoque $pm^2 : PM^2 = ab^2 : de^2$, sed ex naturâ circuli $PM^2 = DP \times PE = dp \times pe$, Ergo $pm^2 : dp \times pe = ab^2 : de^2$. Est igitur $aebd$, ellipsis. Cætera patent per Lemma Superius & ejus coroll.

483. Lem. Sint ellipses datæ $LSMn$ axes Lm, Sn , centrum P , O punctum in axe nS producto datum, p punctum perimetri non datum. Data areâ trianguli OpP , dabitur perpendicularum pr , ex puncto p , ad trianguli basim datam PO demissum & hinc ex naturâ ellipseos dabitur rP , atque ob angulum rectum ad r , dabitur Pp , & inde punctum p in perimetro cum angulo OPP & positione rectæ Op .

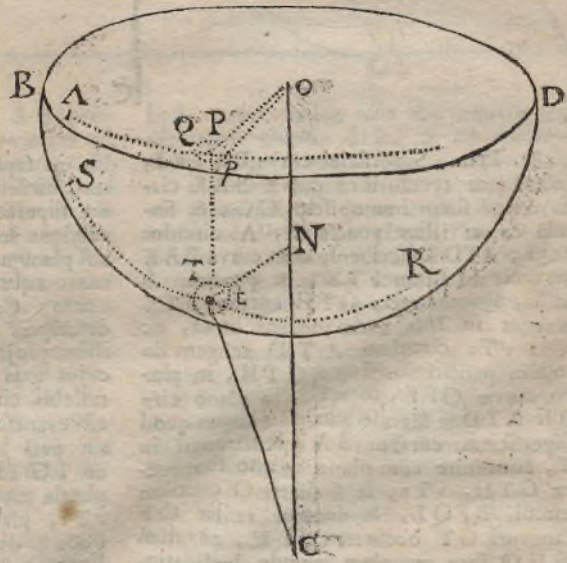


DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curvâ cujus axis per centrum illud transit; inveniendâ est trajectorya quam corpus in eâdem superficie describet, de loco dato, datâ cum velocitate, versus plagam in superficie illâ datam egressum.

Stantibus quæ in superiore propositione constructa sunt, exeat corpus T de loco dato S secundum rectam positione datam in trajectoryam inveniendam STR , cujus vestigium in plano BDO sit AP . Et ex datâ corporis velocitate in altitudine SC , (°) dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine TC . Eâ cum velocitate dato tempore quam minimo describat corpus trajectoryæ suæ particulam Tt , sitque Pp vestigium ejus in plano AOP descriptum. Jungatur Op , & circelli centro T intervallo Tt in superficie curva descripti vestigium in plano AOP sit ellipsis pQ . Et



(°) * Dabitur ejus velocitas in aliâ &c. Nam (per prop. 40.) velocitas corporis in altitudine TC , æqualis est velocitati quam corpus haberet ad eandem altitudinem in lineâ rectâ SC , si de loco S , rectâ fuisset versus C projectum cum eâdem velocitate quâ trajectoryam STR incipit describere in S ; sed datâ in lo-

co: S velocitate corporis per lineam SC versus centrum C projecti, datur illius velocitas in alio quovis loco lineæ SC , (per cor. 2. prop. 39.). Ergo ex datâ corporis velocitate in altitudine SC , dabitur ejus velocitas in aliâ quâvis altitudine TC .

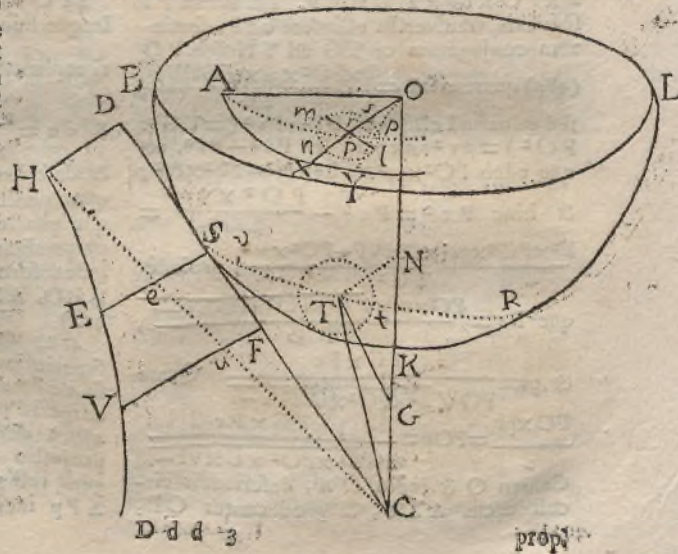
LIBER
PRIMUS.
PROB.
LVI.
PROBL.
XXXVII.

(p) ob datum magnitudine circellum Tt , datamque ejus ab axe CO distantiam TN vel PO , dabitur ellipsis illa pQ specie & magnitudine, ut & positione ad rectam PO . Cumque (q) area POp sit tempore proportionalis, atque ideo ex dato tempore detur, dabitur angulus POp . Et inde dabitur ellipseos & rectæ Op intersectio communis p , unà cum angulo OPp in quo trajectoriæ vestigium APp secat lineam OP . (r) Inde verò (conferendo prop. xli. cum corol. suo 2.) ratio determinandi curvam APp facile apparet. Tum ex singulis vestigiis punctis P , erigendo ad planum AOP perpendiculara PT superficiæ curvæ occurrentia in T , dabuntur singula trajectoriæ puncta T . *Q. E. I.*

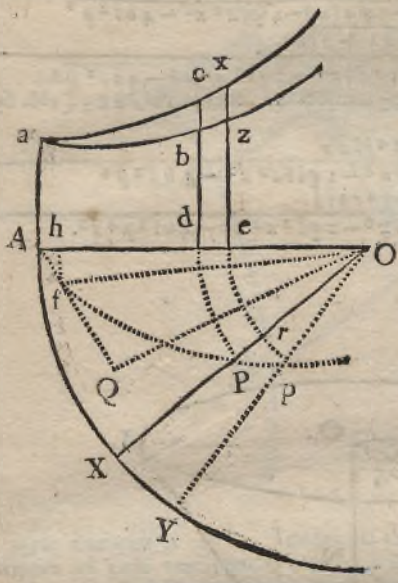
(p) * Et ob datum magnitudine circellum &c. Nam dati velocitate & tempore quibus uniformiter describitur spatium nascens Tt , datur spatium illud Tt , seu radius circelli (5). Præterea datâ altitudine TC , datur tum planum ad axem CO perpendicularare in quo circelli centrum positum est, tum angulus inclinationis plani in puncto T curvam superficiem $BSTD$ tangit (484) ad planum $BODP$, adedque datur angulus inclinationis plani in quo est circellus nas-

cens ad planum $BODP$ (485), undè (482. 486.) ellipsis Ppq , in quam circellus projicitur dabitur specie & magnitudine ut & positione ad rectam PO . (q) * Cumque area POp , sit tempore quo describitur proportionalis (prop. 55.) eodemque tempore quo circelli radius Tt describatur, ex hoc tempore dato datur, atque aded, dabitur angulus POp , & inde dabitur ellipseos & rectæ Op intersectio communis p , unà cum angulo OPp (483).

(r) 487. Inde verò &c. Sit D locus in rectâ CS productâ, de quo corpus vi centripetâ ad C tendente cadendo acquirit in loco S velocitatem cum quâ trajectoriam STR incipit describere. In linea CS , capiatur $CF=CT$, & per puncta F, S, D , erigantur ad CD perpendiculara FV, SE, DH vi centripetæ in illis locis proportionalia, sitque HEV linea quam punctum V perpetuo tangit. Per punctum T , agatur TG , quæ curvam cujus revolutione describitur superficies $BSTKL$, tangat in T ; sitque eadem TG in curvæ illius plano, & productâ, axi OC occurrat in G , velocitates in locis S , & T , seu F , erunt ut \sqrt{DHES} , & \sqrt{DHFV} . (Per 1^{am} partem



LIBER
PRIMUS.
PROP.
LVI.
PROBL.
XXXVII.



$$C \times A O^2 \times T G \times P r \times \sqrt{D H E S}$$

$$= 2 P O^2 \times \sqrt{P O^2 \times D H V F} - C C \times D H E S$$

Harum formularum ope, nullâ amplius habitâ ratione circelli ejusque projectionis ellipseos, describi potest vestigium A P p, & ex dato tempore inveniri locus P, (ut in prop. 41). Cum autem trajectory STR, sit linea duplicis curvaturæ ad promovendam difficilem theoriam motuum in superficiebus curvis quam hic aperuit Newtonus non parum adjumenti conferre poterit tractatus quem de lineis duplicis curvaturæ an. 1731. Parisiis edidit Clarissimus Geometra D. Clairaut. Horum motuum in conoide parabolico, cono, & cylindro exempla dabimus.

489. Exemplum 1. Sit (vid fig. not. 487) curva BSK parabola cujus latus rectum = l, dicatur A O = r, K C = a, D C = b, T N, seu P O = x, & proinde P r = d x, erit ex naturâ parabolæ, N K = $\frac{x^2}{l}$, N G = $\frac{2 x^2}{l}$, adeoque T G = $\frac{4 x^4 + 11 l x x}{11}$, &

$$T G = \frac{x \sqrt{4 x x + 11 l}}{11}$$

quare si in superioribus formulis (488) ponatur C x V D H E S = p p, erit P O p = $\frac{p^2 x d x \sqrt{4 x x + 11 l}}{2 l \sqrt{x^2 \times D H V F} - p^4}$

& O X Y = $\frac{p^2 r^2 d x \sqrt{4 x x + 11 l}}{2 l x x \sqrt{x^2 \times D H V F} - p^4}$. Sit

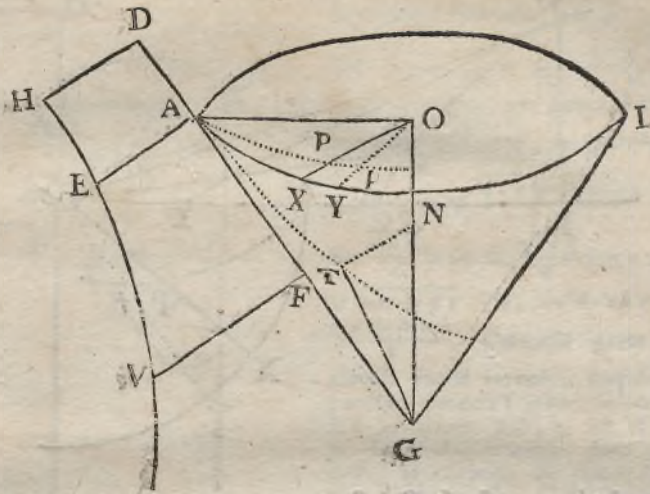
vis centripeta ut distantia à centro C directè, hoc est, in loco quovis T, vel F sit ut T C seu F C, & curva H E V in rectam H e v C mutabitur, & posita D H = q, erit D C (b) : F C seu T C = D H (q) : F u = $\frac{q \times T C}{b}$. Quare cum sit

area D H u F = D H C - F u C = $\frac{1}{2} q b - \frac{1}{2} F C \times F u$, erit D H u F = $\frac{q b b - q \times T C^2}{2 b}$. Est autem T C^2 = T N^2 + N C^2 = x x + $\frac{x x}{l} + a^2 = \frac{x^4 + 11 l x x + 2 a l x x + 11 a a}{11}$. Ergò area D H u F = $\frac{q 11 b b - q x^4 - q 11 x^2 - 2 q a l x x - q 11 a^2}{2 b 11}$

Si itaque hic valor loco D H V F, in superioribus æquationibus substituat, erit

gentem A Q spatio quod corpus in S dato tempore describeret secundum directionem suam in S, sit O Q perpendiculum ex centro O, in tangentem A Q, demissum, velocitas in S ad velocitatem in A ut O Q, ad C quantitatem datam, & ductâ O f, sit area A O f descripta eodem tempusculo quo area nascentes O P p & arcus nascentes T t, S v trajectory STR describuntur, & quoniam velocitates uniformes sunt ut spatia eodem tempore percurfa, erit S v : A f = Q O : C, & demisso ex puncto f, ad A O perpendiculo f h, erit etiam A f : f h = A O : Q O. Unde ex æquo. S v : f h = A O : C, sed (ex dem. 487.) T t = P l = B x P O x p r x V D H V F, adeoque in loco S, S v = B x A O x f h x V D H E S, ergo S v : f h = B x A O x V D H E S : 1 = A O : C, proindeque B = $\frac{1}{C \sqrt{D H E S}}$, & B^2 = $\frac{1}{C^2 D H E S}$. Quo valore in superioribus æquationibus (487) substituto, invenitur P O p = $\frac{C \times T G \times P r \times \sqrt{D H E S}}{2 \sqrt{P O^2 \times D H V F} - C C \times D H E S}$ & O X Y = $\frac{C \times T G \times P r \times \sqrt{D H E S}}{2 \sqrt{P O^2 \times D H V F} - C C \times D H E S}$

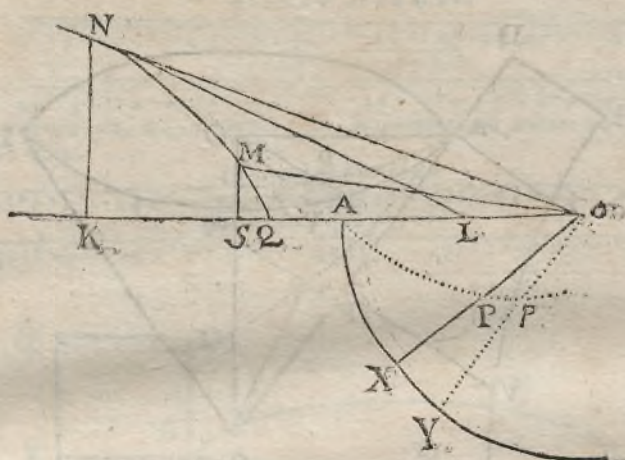
Quo valore in superioribus æquationibus (487) substituto, invenitur P O p = $\frac{C \times T G \times P r \times \sqrt{D H E S}}{2 \sqrt{P O^2 \times D H V F} - C C \times D H E S}$ & O X Y = $\frac{C \times T G \times P r \times \sqrt{D H E S}}{2 \sqrt{P O^2 \times D H V F} - C C \times D H E S}$



491. Exemplum 3^{um}. Tendat vis centripeta ad conii verticem G, & in triplicata ratione distantiarum ab illo puncto G decreseat, sitque HEV curva ad quam terminantur perpendiculara DH, AE, FV vim centripetam in locis singulis D, A, F, vel T, exhibentia, cetera verò maneant ut in exemplo superiori. Quoniam $TG = \frac{f^x}{r}$ erit vis centripeta in loco T vel F ut $\frac{r^3}{f^3 x^3}$, adeoque si fuerit n quantitas data, vis centripeta supponi poterit $= \frac{n^4}{x^3}$. Sit DG = m, & erit (431) area DHVF = $\frac{n^4(mm-xx)}{mmxx} = \frac{kkmm-kkxx}{xx}$, ponendo $\frac{n^4}{mm} = kk$. Quare si dicatur area DHEA = pp, erit PO = $\frac{Cpfx dx}{2r\sqrt{kkmm-kkxx-llpp}}$ = $\frac{qxdx}{\sqrt{hh-xx}}$ ponendo $kkmm-CCpp = kkhh$, & $\frac{Cpf}{2rk} = q$. Similiter inveniatur OXY = $\frac{rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}}$. Quoniam autem crescen-

tibus areis APO, AXO, decreseat PO, seu x, scribendum est $OPp = \frac{-qxdx}{\sqrt{hh-xx}}$ & $OXY = \frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}}$. Fiat $\sqrt{hh-xx} = z$, & erit $hh-xx = zz$ & $-xdx = z dz$, & $POp = q dz$, sumptisque fluentibus & addita constanti Q, erit $APO = qz + Q = q\sqrt{hh-xx} + Q$. Porro area APO evanescit ubi PO, seu $x = AO = r$, quare $0 = q\sqrt{hh-rr} + Q$, & hinc $Q = -q\sqrt{hh-rr}$, proindeque $APO = q\sqrt{hh-xx} - q\sqrt{hh-rr}$. Ex dato igitur tempore quo corpus describit AT, geometricè invenitur longitudo lineæ PO. Ponatur nunc $x = \frac{hh}{y}$ & erit $-dx = \frac{hdy}{yy}$, $hh-xx = \frac{hhyy-h^4}{y^2}$, $\sqrt{hh-xx} = \frac{h\sqrt{y^2-h^2}}{y}$ atque adeò $OXY = \frac{-rrqdx}{x\sqrt{hh-xx}} = \frac{rrqdy}{h\sqrt{y^2-h^2}}$. Sit $\frac{rrq}{hh} = \frac{1}{2} s$, & erit $OXY = \frac{1}{2} \frac{shdy}{\sqrt{yy-h^2}}$. Unde habetur constructio sequens.

DE MOTU
CORPORUM



Centro O , semiaxe transverso $OA = Q$,
semiaxe conjugato $= s$, describatur
hyperbola QMN , ex illius perimetri pun-
cto quovis N , demittatur ad axem OQ ,
perpendicularum NK , & abscissa OK
dicatur y , ductâque rectâ NL , quæ hy-
perbolam tangat in N , & axi occurrat in
 L , erit (ex conic.) $OK(y) : OQ(h)$

$= OQ(h) : OL = \frac{hh}{y} = x$, & sector hy-
perbolicus $ONQ = S \cdot \frac{1}{2} \frac{shdy}{\sqrt{hy-hh}}$ (427)

atque adeò $AXO = ONQ + Q$ constan-

te. Si ponatur x , seu $\frac{hh}{y} = OA = r$, hoc

est $y = \frac{hh}{r}$ evanescet area AXO , quare

si capiatur $OS = \frac{hh}{r}$ & ad axem eriga-

tur perpendicularum SM , hyperbolæ occur-

rens in M , jungaturque OM , erit $o =$

$OMQ + Q$, & $Q = -OMQ$, undè AXO

$= ONQ - OMQ = ONM$. Sumatur

itaque sector circuli $OAX =$ sectori hy-

perbolicum ONM , & in radio OX capi-

piatur $OP = OL$, erit P punctum in ves-

tigio seu curvâ APP . Hinc si ex dato

tempore quærat locus T (vid. fig. su-

per.) in trajectoriâ TR , inveniatur pri-

imum longitudo OP , seu OL , tum aga-

tur LN tangens hyperbolam in puncto

aliquo N ; Deinde capiatur sector circu-
laris $AXO =$ sectori hyperbolico ONM ,
& in radio OX , capiatur $OP = OL$, ac
tandem ex puncto P , erigatur ad planum
 AOP (vid. fig. super.) perpendicularum
 PT , quod superficiæ conicæ occurreret in
loco quæsito T .

Exempl. 4. Moveatur corpus de loco

A per trajectoriam ATR , in superficie

concavâ cylindri recti $AKGL$, in quo sit

baseos centrum O , manifestum est vesti-

gium trajectoriæ ATR , coincidere cum

baseos peripheriâ circulari APL , quam

proinde punctum P , æquabili velocitate

describet (per prop. 56.). Sit vis centri-

petæ constans & per lineas lateri cylindri

AK parallelas semper agat, dicanturque

$HD = a$, $DA = b$, $AF = PT = y$, $mt = dy$,

arcus $AP = x$, $Pp = Tm = dx$, $Tt =$

$\sqrt{dx^2 + dy^2}$, erit area $DHEA = ab$,

area $DHVF = ab + ay$, velocitas in F

vel $T = \sqrt{ab + ay}$, undè tempusculum

quo describitur nascens Tt vel Pp erit $=$

$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ab + ay}}$. Et sit data velocitas quæ

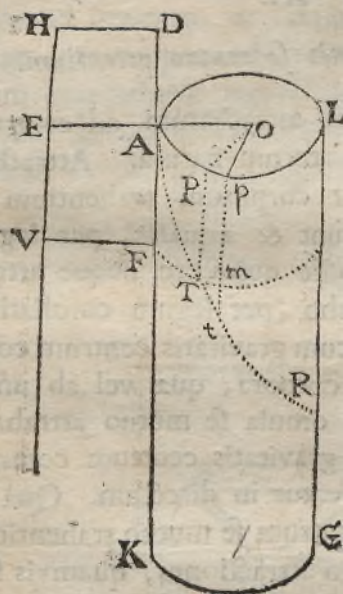
punctum P describit circulum APL di-

caturque c erit tempusculum quo de-

scribitur $Pp = \frac{Pp}{c} = \frac{dx}{c}$; quare $\frac{dx}{c} =$

$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{ab + ay}}$

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LVI.
PROBL.
XXXVII.



$=z\sqrt{a}$ erit $dx = \frac{2czdz}{z\sqrt{a}} = \frac{2c}{\sqrt{a}} \times dz$.

& sumptis fluentibus additâ constanti Q,

erit $x = \frac{2cz}{\sqrt{a}} + Q = \frac{2c\sqrt{q+y}}{\sqrt{a}} + Q$.

Ponatur $y=0$, erit etiam $x=0$, adeoque

$0 = \frac{2c\sqrt{q}}{a} + Q$, & $Q = -\sqrt{\frac{4ccq}{a}}$,

undè $x = \sqrt{\frac{4ccq+4ccy}{a}} - \sqrt{\frac{4ccq}{a}}$.

Sit $\frac{4cc}{a} = p$, & $\frac{4ccq}{a} = nn$, erit $x =$

$\sqrt{nn+py} - n$, $xx+2nx=py$, $y =$

$\frac{xx+2nx}{x}$. Concessâ igitur quadraturâ

circuli facilè invenitur trajectoria ATR

punctum quodvis T capiendò perpendicularum

PT ad arcum AP, ut est AP+2n ad

p. Ex tempore autem dato datur arcus

AP. Si corporis de loco A egredientis

velocitas eadem sit ac velocitas puncti

P in plano baseos APLO revolventis

erit $cc=ab$, & quoniam supposuimus

$ab-cc=aq$, effct $q=0$, & proinde $nn =$

$\frac{4ccq}{a} = 0$, atque hinc $y = \frac{xx}{q}$, seu $p:x$

$=x:y$. Sive scribendo loco p ejus valo-

rem $\frac{4cc}{a}$, in quo loco cc ponatur ab,

erit $4b:x=x:y$, hoc est, 4DA ad ar-

cum AP ut is AP ad PT.

$$\sqrt{dx^2+dy^2}, \text{ \& } \frac{dx^2}{cc} = \frac{dx^2+dy^2}{ab+ay}, \text{ \& } \\ abdx^2+aydx^2-ccdxdx^2=ccdy^2, \\ \text{ \& } dx = \frac{cdy}{\sqrt{ab-cc+ay}\sqrt{aq+ay}}, \\ \text{ponendo } ab-cc=aq, \text{ fiat jam } \sqrt{q+y} \\ =z, q+y=zz, dy=zzdz, \sqrt{aq+ay}$$

SECTIO XI.

De motu corporum viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum naturâ. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuae sunt & æquales, per legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed (f) ambo (per legem corollarium quartum) quasi attractione mutuâ, circum gravitatis centrum commune revolvantur: & si plura sint corpora, quæ vel ab unico attrahantur, & idem attrahant, vel omnia se mutuo attrahant; hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum. Quâ de causâ jam pergo motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando vires centripetas tanquam attractiones, quamvis fortasse, si physicè loquamur, verius dicantur impulsus. In mathematicis enim jam versamur; & propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus à lectoribus mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

Corpora (v) duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuò, figuras similes.

Sunt (u) enim distantie corporum à communi gravitatis centro

(f) * Sed ambo (per leg. corol. 4.) quasi attractione mutuâ vel ad se invicem rectâ lineâ ferantur, vel, si ambo vi impressâ obliquè projiciantur, circum gravitatis centrum commune quiescens aut uniformiter progrediens revolvantur.

(t) * Corpora duo. Si corpora duo S, P se invicem trahentia revolvantur circa commune gravitatis centrum C, perpendendo de S ad T & de P ad Q, similes sunt hæc figuræ quatuor, nimirum P Q C, STC, quas corpora S & T circa commune gravitatis centrum C describunt, tum figura P Q T quam corpus P describit circa corpus S spectatum tanquam immotum, & figura π T Q, quam S circa P similiter spectatum describit.

(u) * Sunt enim distantie corporum à communi gravitatis centro Q C, C T reciproçè proportionales corporibus datis P, S (69.)

DE MOTU
CORPO-
RUM.

æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circum eisdem terminos in planis, quæ unâ cum his terminis vel quiescunt, vel (a) motu quovis non angulari moventur, describunt omninò similes. Proinde similes sunt figuræ, quæ his distantis circumactis describuntur. Q. E. D.

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora S , P circa commune gravitatis centrum C , pergendo de S ad T , deque P ad Q . A dato puncto s ipsi SP , TQ æquales & parallelæ ducantur



semper sp , sq ; & curva pqv , quam punctum p revolvendo circum punctum immotum s describit, (b) erit similis & æqualis curvis, quas corpora S , P describunt circum se mutuo: præindeque (per theor. xx.) similis curvis ST & PQV , quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C : idque quia proportionales linearum SC , CP , & SP vel sp ad invicem dantur.

Cas.

(a) * Motu quovis non angulari. Vide Legum coroll. 5. & 6.

(b) * Erit similis & æqualis curvis, ut patet ex demonstratione propositionis superioris.

Caf. I. Commune illud gravitatis centrum C , per legum collarium quartum, vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quiescit, inque s & p locentur corpora duo, immobile in s , mobile in p , corporibus S & P similia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & pr curvas PQ & pq in P & p , & producantur CQ & cq ad R & r . Et ob similitudinem figurarum $CPRQ$, $spqr$ erit RQ ad rq ut CP ad sp , ideoque in datâ ratione. Proinde si vis, quâ corpus P versus corpus S , atque ideo versus centrum intermedium C attrahitur, esset ad vim, quâ corpus p versus centrum s attrahitur, in eadem illâ ratione datâ; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus PR , pr ad arcus PQ , pq per intervalla ipsis proportionalia RQ , rq , ideoque vis posterior efficeret, ut corpus p gyraretur in curvâ pqu , quæ similis esset curvæ PQV , in quâ vis prior efficit, ut corpus P gyretur; & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione CP ad sp , sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum S & s , P & p , & æqualitatem distantiarum SP , sp) sibi mutuò æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus posterius p trahatur per intervallum majus rq , requiritur tempus majus, (°) idque in subduplicatâ ratione intervallorum; propterea quod (per lemma decimum) spatia ipso motus initio descripta sunt in duplicatâ ratione temporum. Ponatur igitur ve-

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LVIII.
THEOR.
XXI.

loci.

(c) Idque in subduplicatâ ratione intervallorum. Nascentibus arcibus Pq , PQ tempora quibus describuntur intervalla rq , RQ sunt in subduplicatâ ratione eorundem intervallorum, per Lem. X. Quare si velocitates uniformes quibus similes arcus nascentes pq , PQ æqualibus viribus centripetis describuntur, dicantur v , v , tempora T , t , erit $T^2 : t^2 = rq : RQ = sp : CP = pq : PQ$, est verò (s) $v : v = \frac{pq}{T} : \frac{PQ}{t}$ sive ut $\frac{T^2}{t^2} : \frac{t^2}{T^2}$, adeoque $v : v = T : t = \sqrt{sp} : \sqrt{CP}$. Itaque cor-

pora P , p , viribus æqualibus semper attracta, circum centra quiescentia C , s , nascentes figuras similes PQ , pq , adeoque & figuras qualvis similes PQV , pqu , describent temporibus & velocitatibus quæ erunt in subduplicatâ ratione distantiarum similium CP , sp . Est autem (ex Dem.) figura pqu , similis & æqualis figuræ quam corpus P , circum corpus mobile S , (spectatum tanquam immotum, ut in propositione superiori exposuimus) describit eodem tempore, quo circa centrum C , describit figuram similem PQV .

DE MOTU
CORPO-
RUM.



locitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in subduplicatâ ratione distantiae sp ad distantiam CP , eo ut temporibus, quæ sint in eâdem subduplicatâ ratione, describantur arcus pq , PQ , qui sunt in ratione integrâ: Et corpora P , p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C & s figuras similes PQR , pqv , quarum posterior pqv similis est & æqualis figuræ, quam corpus P circum corpus mobile S describit. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, unâ cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; & (per legum corollarium sextum) motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, ideoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius, & propterea figuræ pqv similes & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo viribus distantiae suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per prop. x.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, ellipses concentricas; & vice versâ, si tales figuræ describuntur, sunt vires ^(d) distantiae proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo, viribus quadrato distantiae suæ reciprocè proportionalibus, describunt (per prop. XI. XII. XIII.)

&

(d) * *Distantiæ proportionales.* Cum enim (ex Dem.) corpus p , circa s , & corpora duo P , S , circa commune gravitatis centrum C , & circum se mutuo

figuras similes vi centripetâ æquali describant, sitque (per prop. X.) figura pqv ellipsis cujus centrum S , liquet veritas corollarii.

& circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, sectiones conicas umbilicum habentes in centro, circum quod figuræ describuntur. Et vice versâ, si tales figuræ describuntur, vires centripetæ sunt quadrato distantæ reciproçè proportionales.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LIX.
THEOR.
XXII.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyratione, radiis & ad centrum illud & ad se mutuo ductis, (e) describunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S & P, circa commune gravitatis centrum C revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius P, circa alterum immotum S gyrationis, & figuris, quæ corpora circum se mutuo describunt, figuram similem & æqualem describentis, in subduplicatâ ratione corporis alterius S, ad summam corporum S+P.

Namque, ex demonstratione superioris propositionis, tempora, quibus arcus quivis similes PQ & pq describuntur, sunt in subduplicatâ ratione distantiarum CP & SP vel $s.p$, hoc est, in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum S+P. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes PQ & pq describuntur, hoc est, tempora tota, quibus figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem subduplicatâ ratione. Q. E. D.

P R O-

(e) * Describunt areas temporibus proportionales. Nam tempora quibus describuntur areæ quævis similes spq , CPQ , & spu , CPV , sunt semper in datâ ratione, nimirum, subduplicatâ distantiarum similium sp , CP (ex Dem.) & proinde tempus quo describitur area spq , est ad tempus quo describitur area spu , ut tempus quo describitur area CPQ , ad tempus quo describitur area CPV ; sed (per Tam. I.

prop. I.) tempora quibus describuntur areæ spq , spu , sunt areis illis adeoque & areis similibus CPQ , CPV proportionalia, ergo areæ CPQ , CPV sunt ut tempora quibus describuntur; & quoniam areæ quas corpora S, P circum centrum gravitatis describunt similes sunt areis quas iisdem temporibus describunt circum se mutuo, erunt quoque areæ istæ proportionales temporibus quibus describuntur.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S & P, viribus quadrato distantiae suae reciproce proportionalibus, se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos, quam corpus alterutrum P hoc motu circa alterum S describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos, quam corpus idem P circa alterum quiescens S eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum S.

(f) Nam si descriptæ ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per theorema superius) forent in subduplicatâ ratione corporis S ad summam corporum S + P. Minuatur in hâc ratione tempus periodicum in ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; ellipseos autem axis principalis (per prop. xv.) minuetur in ratione, cujus hæc est sesquiquicatâ, id est in ratione, cujus ratio S ad S + P est triplicatâ; ideoque erit ad axem principalem ellipseos alterius, ut primum duorum mediè proportionalium inter S + P & S ad S + P. Et inversè, axis principalis ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut S + P ad primum duorum mediè proportionalium inter S + P & S. Q. E. D.

P. R. O.

(f) Nam si descriptæ ellipses &c. Axis principalis ellipsium æqualium, quas corpora S, P circum se mutuo describunt (ut ad prop. 57. exposuimus) æqualis est axi principali ellipseos, p q u, quam corpus p vel P, circa corpus s vel S, reverâ immotum describit (ut in prop. 58). Hic axis dicatur A tempus periodicum quod in ellipsis quatuor quas corpora S, P circum C & circum se mutuo describunt (ut in prop. 57.) idem est, dicatur t, tempus periodicum in ellipsi p q u, quam corpus p, vel P, circa corpus S, vel s, reverâ immotum (ut in prop. 58.) des-

cribit dicatur T, sitque X axis principalis ellipseos quam corpus idem P, vel p, circa alterum S vel s reverâ immotum (ut in prop. 58.) describere posset tempore periodico t, erit (per prop. 59.) $T^2 : t^2 = S + P : S$. & (per prop. 15.) $T^2 : t^2 = A^3 : X^3$, quare $A^3 : X^3 = S + P : S$. Jam si capiantur duæ quantitates B, C mediæ proportionales inter S + P & S, erit S + P ad S in ratione triplicatâ S + P, ad B, hoc est $S + P : S = S + P^3 : B^3$, ac proinde $A^3 : X^3 = S + P^3 : B^3$, ideoque $A : X = S + P : B$. Q. E. D.

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXI.
THEOR.
XXIV.

Si corpora duo viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuò, sed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiae corporum à centro illo communi atque respectu distantiae totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, (g) tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium; ideoque eadem sunt, ac si à corpore intermedio manarent. Q. E. D.

Et quoniam datur ratio distantiae corporis utriusvis à centro illo communi ad distantiam inter corpora, dabitur ratio cujusvis potestatis distantiae unius ad eandem potestatem distantiae alterius; ut ratio quantitatis cujusvis, quæ ex unâ distantia & quantitibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex alterâ distantia, & quantitibus totidem datis, datamque illam distantiarum rationem ad priores habentibus similiter derivatur. Proinde si vis, quâ corpus unum ab altero trahitur, sit directè vel inversè ut distantia corporum ab invicem; vel ut quælibet hujus distantiae potestas; vel denique ut quantitas quævis ex hac distantia & quantitibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, quâ corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directè itidem vel inversè ut corporis attracti distantia à centro illo communi, vel ut eadem distantiae hujus potestas, vel denique ut quantitas ex hac distantia & analogis quantitibus datis similiter derivata. (h) Hoc est, vis trahentis eadem erit lex respectu distantiae utriusque. Q. E. D.

P R O.

(g) * Tendunt ad commune gravitatis centrum, est enim communis intersectio omnium rectarum quæ corpora revolvuntia jungunt, & secundum quas, vires quibus corpora se mutuò trahunt, diriguntur.

(h) * Hoc est vis trahentis eadem erit lex &c. Sit (in fig. prop. 58.) $TQ = x$, $CQ = y$, & x ad y in ratione datâ a ad b , seu $x = \frac{ay}{b}$, vis quâ corpora S, P
F f f 2 in

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

*Corporum duorum, quæ viribus quadrato distantiae suæ recipro-
cè proportionalibus se mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur,
determinare motus.*

Corpora (per theorema novissimum) perinde movebuntur, ac si à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto traherentur; & centrum illud ipso motus initio quiescet per hypothesein; & propterea (per legum corol. 4.) semper quiescet. Determinandi sunt igitur motus corporum (per prop. xxv.) perinde ac si à viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum se mutuo trahentium. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

*Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiae suæ recipro-
cè proportionalibus se mutuo trahunt, deque locis datis, secun-
dum datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare
motus.*

(i) Ex datis corporum motibus sub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus spatii, quod unà cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii. Motus autem subsequentes (per legum corollarium quintum, & theorema no-
vissimum)

in locis T, Q se mutuo trahunt sit ut x^m ,
erit $x^m = \frac{a^m y^m}{b^m}$, adeoque eadem vis

etiam ut y^m , ob datam rationem a^m , ad b^m , cumque vis quæ corpora se mutuo trahunt æqualis sit vi quæ ad commune gravitatis centrum C urgentur, erit quoque vis ad C tendens ut y^m . Sit nunc vis quæ corpora se mutuo trahunt ut $c x^n + e x^m$, & c, e quantitates datæ, erit $c x^n + e x^m$

$= \frac{c a^n y^n}{b^n} + \frac{e a^m y^m}{b^m}$, ideoque vis ad C

tendens ut $\frac{c a^n y^n}{b^n} + \frac{e a^m y^m}{b^m}$.

(i) * Ex datis corporum motibus absolutis sub initio, datur uniformis motus absolutus centri communis gravitatis (67, 68, 69) & hinc datur motus spatii quod unà cum hoc centro & eadem cum illo celeritate moveretur uniformiter in directum; nec non corporum motus initiales respectu hujus spatii.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXIII.
PROBL.
XXXIX.

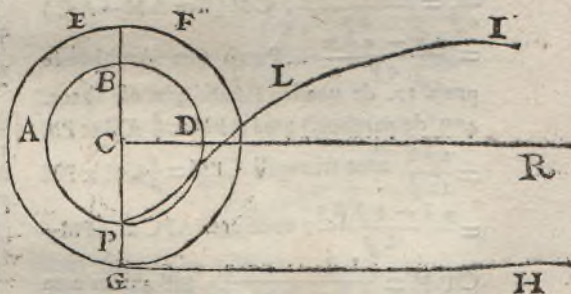
vissimum) perinde sunt in hoc spatio, ac si spatium ipsum unà cum communi illo gravitatis centro quiesceret, & corpora non traherent se mutuo, sed à corpore tertio sito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc spatio mobili, de loco dato secundum datam rectam, datà cum velocitate exeuntis, & vi centripetâ ad centrum illud tendente correpti, (k) determinandus est motus per problema nonum & vicefimum sextum: & (l) habebitur simul motus corporis alterius circum idem centrum. (m) Cum hoc motu componendus est uniformis ille systematis spatii & corporum in eo gyrantium motus progressivus supra inventus, & habebitur motus absolutus corporum in spatio immobili. Q. E. I.

(k) * Determinandus est motus per probl. 9. si corpora projiciantur secundum directionem quæ cum eorum distantia non coincidat, & per probl. 26. si coincidat directio projectionis cum distantia corporum.

(l) * Et habebitur simul motus corporis alterius è regione, si ex corpore cujus locus inventus est, per centrum gravitatis commune duorum, agatur recta quæ ita determinetur ut sit corpus cujus locus quaeritur ad corpus aliud ut distantia data hujus à centro gravitatis communi ad eam rectam, in extremo hujus rectæ erit locus corporis quaeritus (60).

(m) 493. Cum hoc motu componendus est &c. In hypothese hujus problematis, corpora duo circa commune gravitatis centrum ceu umbilicum sectiones conicas describunt (per cor. 2. prop. 38.) & satis est (ex notâ superiori) unius corporis motum determinare. Itaque, exempli gratia, corpus P circum PABD uniformiter describat intreadum circuli centrum C, cum ipsius circuli plano æqualiter movetur per rectam CR diametro PB perpendiculararem, sitque semper circuli planum mobile in plano hujus schematis immoto. In linea CP capiatur CG ad CP in ratione velocitatis centri C per lineam CR progredientis, ad velocitatem corporis P in circuli peripheriâ revolvantis, rota GEF centro C & radio CG descripta super regulam GH ad G normalem progrediatur revolven-

do circa axem suum, & punctum P in plano circuli GEF immotum describet interea trochoidem PLI quæ erit trajectory quam corpus P motu absoluto describit; (ut patet ex prop 31. & not. 367). Hæc enim ratione centrum C percurreret spatium CR = GH = semiperipheria rotæ GEF, eodem tempore quo punctum P revolvetur per totam semiperipheriam PAB; erit que proinde velocitas centri C per lineam CR ad velocitatem puncti vel corporis P in peripheriâ circuli PAB ut semirota ad semicirculum, hoc est, ut radius CG ad radium CP. Hinc si velocitas centri C æqualis sit ve-



locitati corporis P in circulo suo revolvantis, trochois PLI erit cyclois vulgaris; si velocitas centri C major extiterit, erit PLI trochois oblongata, si velocitas centri C minor, erit PLI trochois decurtata.

DE MOTU
CORPORUM.

Sit nunc AP sectio quævis conica cujus vertex A, umbilicus seu virium & gravitatis commune centrum C, axis transversus AC, centrum C uniformiter moveatur in rectâ DR positione datâ, & cum illo planum curvæ APC, ita transferatur in plano hujus schematis immoto, ut axis AC, rectæ BD, positione datæ sit semper parallelus. Dum corpus P in curvâ AP revolvens est in vertice A, sit C in D & A in B, ex datâ velocitate uniformi centri C in lineâ DR, dabitur spatium DC quod centrum illud C dato tempore describit, nec non positio curvæ AP. capiatur (per prop. 30. vel 31. ejusve scholium) area APC rectæ datæ DC seu tempori proportionalis & obtinebitur locus absolutus corporis P, hoc est, punctum trajectory quam corpus P in plano hujus schematis immoto describit.

Sit AP parabola, & umbilicus C, cum plano APC uniformi motu progrediatur in axe BC, dum corpus P est in vertice parabolæ A, sit umbilicus C in D & vertex A in B, & trajectory BZP, quam corpus P, in plano hujus chartæ immoto describit erit parabola secundi generis quæ cubica dici solet. Nam sit AC, seu BD = p, & proinde parabolæ AP, latus rectum = 4p (per theor. 2^{um}. de parabola). PM ad axem AB ordinatim applicatâ = y, BM = x, erit (ex naturâ Parabolæ, per theor. 1^{um}. de Parabolâ)

$$AM = \frac{yy}{4p}, \text{ adeoque } BA = DC = x - \frac{yy}{4p}$$

$$\frac{yy}{4p} = 4px - \frac{yy}{4p}, \text{ CM (sive AM - AC)}$$

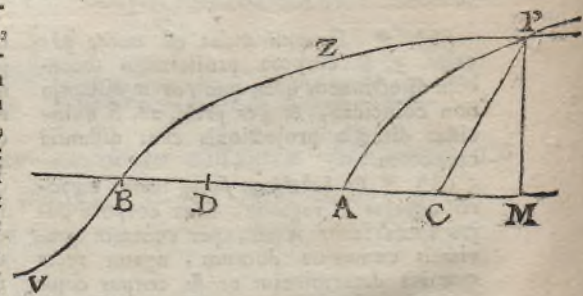
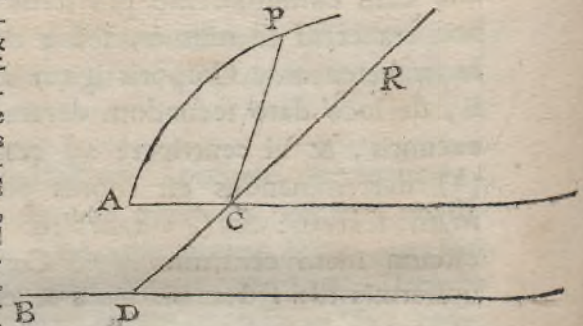
$$= \frac{yy - 4pp}{4p}. \text{ Porro (ex Archimede}$$

$$\text{prop. 17. de quadr. Parab. quæ est theor. 4^{um}. de parabolâ) area APM} = \frac{2}{3} AM \times PM$$

$$= \frac{2y^3}{12p}; \text{ area trianguli CPM} = \frac{1}{2} CM \times PM$$

$$= \frac{y^3 - 4pp}{8p}; \text{ undè area APC} = APM -$$

$$CPM = \frac{y^3 + 12pp}{24p}. \text{ Est autem area}$$



APC, tempori quo describitur proportionalis, seu ut linea DC vel $BA = \frac{4px - yy}{4p}$,

quare si fuerit $\frac{a}{b}$ quantitas constans, erit

$$\frac{y^3 + 12pp}{24p} = \frac{4apx - ayy}{24p}, \text{ hoc}$$

est $y^3 + ayy + 12pp = 4apx$, æquatio ad parabolam cubicam BZP, quæ crura habet contraria BZ, BV in infinitum progredientia.

PRO.

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

Viribus quibus corpora se mutuo trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum à centrīs: requiruntur motus plurium corporum inter se.

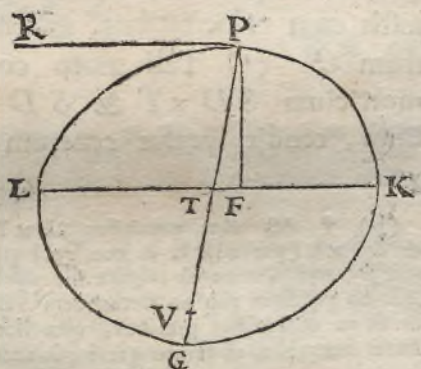
LIBER PRIMUS.
PROP. LXIV.
PROBL. XL.

Ponantur primo corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D . Describent hæc (per corollarium primum theorematis 21.) ellipses centra habentes in D , quarum magnitudo ⁽ⁿ⁾ ex problemate v. innotescit.



Trahat jam corpus tertium S priora duo T & L viribus acceleratricibus ST , SL , & ab ipsis vicissim trahatur. Vis ST , (per legum corol. 2.) resolvitur in vires SD , DT ; & vis SL in vires SD , DL . Vires ^(o) autem DT , DL , quæ sunt

(n) 494. Ex problemate 5. innotescit. Si enim corpus aliquod de loco dato P exeat cum datâ velocitate & secundum datam directionem PR ut ellipsim $PLGK$, circa centrum T datum describat, recta PR positione datâ ellipsim tangeret in P , idèoque diameter LK , ipsi PR parallela (prop. 32. Lib. 1. conic. Appoll. sive Lem. IV. de Conic. & Theor. I. de Ell.) dabitur positione. Præterea, si ex puncto P ad diametrum LK demittatur perpendicularum PF , erit vis centripeta data quâ corpus versus T urgetur secundum directionem PT ad partem vis illius quæ juxtâ directionem PF , agit, ut PT ad PF , proindèque pars illa vis centripetæ dabitur. Datâ autem vi centripetâ juxtâ directionem PF urgente, datâque corporis de loco P exeuntis velocitate in lineâ PR , ad PF perpendiculari, dabitur radius circuli ellipsim osculantis in P , quam corpus P cum hac velocitate atque vi centripetâ potest describere (199.) & hinc dabitur altera dia-



meter conjugata LK , & ellipsis describi poterit (vide Probl. de Ellipsi p. 130).
(o) * Vires autem DT , DL , quæ sunt ut ipsarum summa TL &c. Est enim DT ad TL in ratione datâ corporis L ad summam corporum $T+L$, & DL ad TL in ratione datâ corporis T ad summam corporum $T+L$ (60); quare vires DT , DL , in quâcumque positione corporum T & L , sunt ut TL .

DE MOTU
CORPO-
RUM.

sunt ut ipsarum summa TL , atque ideo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L se mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T & L , prior priori & posterior posteriori, componunt vires distantis DT ac DL proportionales, ut prius, sed viribus prioribus majores; ideoque (per corol. 1. prop. x. & corol. 1. & 8. prop. iv.) efficiunt ut corpora illa describant ellipses ut prius, sed motu cele-



riore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD , (p) actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas TI , LK , ipsi DS parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam IK ; quam ductam concipe per medium corporis S , & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem iste ad lineam IK accessus (q) faciendo ut systema corporum T & L ex unâ parte, & corpus S ex alterâ, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C . (r) Tali motu corpus S , eo quod summa virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, distantia CS proportionalium, tendit versus centrum C , describit ellipsin circa idem C ;

(p) * Actionibus motricibus $SD \times T$, & $SD \times L$ (per def. 8. & not. 12.) quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter ob æqualem vim acceleratricem SD , ut fit in corporibus gravibus, quæ licet massis inæqualia, vi tamen gravitatis acceleratrice, cadendo æqualiter accelerantur.

(q) * Faciendo ut systema corporum T , & L , (seu D centrum gravitatis commune ipsorum) ex unâ parte, & corpus S ex alterâ, justis cum velocitatibus in dato plano secundum directiones parallelas & contrarias impressis gyrentur circa C commune gravitatis centrum virium corporum.

(r) * Tali motu corpus S &c. Corpus S à corporibus T & L trahitur viribus quæ sunt inter se ut $ST \times T$ & $SL \times L$ (ex hyp.) & per resolutionem virium corpus S a corporibus T & L versus D & C juxta directionem SD seu SC trahitur viribus quæ sunt inter se ut $SD \times T$ & $SD \times L$, hoc est, vi quæ est ut $SD \times T + L$, adeoque ut SD , ob datam corporum summam $T + L$, & ut CS , ob datam rationem SD ad CS , (61). Corpus idem S juxta directiones oppositas ipsis DT , DL parallela, trahitur viribus quæ sunt inter se ut $DT \times T$ & $DL \times L$, hoc est, viribus æqualibus (60) quæ proinde nullam

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXIV.
PROBL.
XL.

C; & punctum D, ob proportionales CS, CD, describet ellipsin consimilem è regione. Corpora autem T & L viribus motricibus SD×T & SD×L, prius priore, posterius posteriore, æqualiter & secundum lineas parallelas TI & LK, ut dictum est, attracta, pergent (per legum corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile D ellipses suas describere, ut prius. Q. E. I.

Addatur jam corpus quartum V, & (f) simili argumento concludetur hoc & punctum C ellipses circa omnium commune centrum gravitatis B describere; manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centra D & C, sed acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

(f) Hæc ita se habent, etsi corpora T & L trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunt omniū attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiarum ductæ in corpora trahentia, & (u) ex præcedentibus facillè deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili describunt. Q. E. I.

P R O.

nam mutationem producent. Quare cum systema corporum T & L, seu ipsorum commune centrum gravitatis D, versus S seu C trahatur quoque vi quæ est ut SD, ac proinde ut CD (61), patet quod corpus S, ex unâ parte, & punctum D ex alterâ describant circum C ellipses consimiles, si iustis cum velocitatibus, ut supra dictum est, projiciantur.

(f) * Simili argumento, considerando corpora T & L tanquam corpus unicum in centro D positum, concludetur &c.

(t) * Hæc ita se habent. Nam propositionis demonstratio non supponit vires acceleratrices quibus corpora T & L ad distantiam datam trahunt corpus S, esse æquales viribus acceleratricibus quibus se mutuo ad eandem distantiam trahunt. Unde manet demonstratio, etsi corpus S a

corpore v. gr. T ad distantiam datam trahatur majori vel minori vi acceleratrice quam corpus L ad eandem distantiam.

(u) * Et ex præcedentibus facillè deducetur. Vis enim seu actio acceleratrix, quæ corpus T versus D trahitur, est (ex Dem. & Hyp.) ut $TL \times L + TD \times S$, hoc est, ut $TD \times S + T + L$, ob $TL \times L = TD \times T + L$ (60); & vis acceleratrix quæ punctum D versus C trahitur, est (ex Dem. & Hyp.) ut $SD \times S$, hoc est ut $CS \times S + CD \times S$; sed (61) $CS \times S = CD \times T + L$, adeoque vis acceleratrix quæ punctum D versus C trahitur, est ut $CD \times T + L + S$. Quare vis acceleratrix quæ corpus T versus D trahitur, est

G g g

ad

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorundem centris, moveri posse inter se in ellipsis; & radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quam proximè.

In propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in ellipsis accuratè. Quo magis recedit lex virium a lege ibi positâ, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest, ut corpora, secundum legem hic positam se mutuo trahentia, moveantur in ellipsis accuratè, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab ellipsis errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantque ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per legum corol. quartum) vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quiescet, vel movebitur uniformiter in directum, sine errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in ellipsis, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; (y) nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maxi-

ad vim acceleratricem quâ punctum D trahitur versus C, ut TD ad CD, hoc est ut distantia à punctis ad quæ illæ vires diriguntur. Corpus igitur T ad punctum D, & punctum D ad C trahuntur viribus absolutis æqualibus, hoc est, eodem modo ad sua respectivè centra D & C trahuntur quo traherentur, si circa idem virium centrum ad distantias TD, DE revolverentur, sed in hoc casu æqualibus temporibus periodicis ellipses suas describerent (per cor. 2. prop. X.) ergò & in illo casu corpus T circa D & punctum D circa C, æqualibus

temporibus periodicis suas ellipses describunt. Idem eodem modo demonstratur, cum plura sunt corpora revolventia.

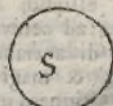
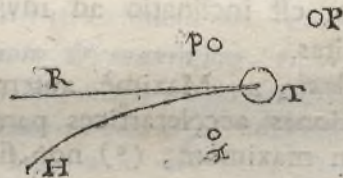
(y) * *Nisi quatenus errores inducuntur &c.* Nam si corpus maximum à communi illo gravitatis centro non erraret, nullaque esset actio minorum corporum in se mutuo, quodlibet exiguum corpus revolveretur in ellipsi circa maximum, atque radiis ad idem ductis describeret areas temporibus proportionales (per cor. 2. & 3. prop. 58.)

maximi à communi illo gravitatis centro, vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora, usque donec error iste, & (2) actiones mutuae sint datis quibuscumque minores; atque ideo donec orbis cum ellipsis quadrent, & areae respondeant temporibus, sine errore, qui non sit minor quovis dato. Q. E. O.

Cas. 2. (a) Fingamus jam systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuo revolventium corporum systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longè maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam aequales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur, efficiunt: manifestum est quod, ex attractionibus in corpus maximum, nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inaequalitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem: secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractio-

(2) * Et actiones mutuae sint datis quibusvis minores respectu actionis corporis maximi in corpora minora; nam cum corporis vis attractiva absoluta hic supponatur materiae proportionalis, diminuta corporis massa, vis attractiva in eadem ratione minuitur.

(a) * Fingamus jam corporum minorum, P, p, π , modo jam descripto circa maximum T revolventium systema progredi uniformiter in directum, seu totius systematis commune gravitatis centrum T, progredi uniformiter per rectam TR, & interea vi corporis alterius longè maximi S, & ad magnam distantiam siti, urgeri ad latus secundum rectas PS, p s, π S, TS, atque à recta TR retrahi & in curvam TH cogi &c.



LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXV.
THEOR.
XXV.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

nes omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; & augendo corporis maximæ distantiam, donec rectorum ab hoc ad reliqua ductarum differentia respectu earum longitudinis & inclinationes ad invicem minores sint, quam datae quævis; perseverabunt motus partium systematis inter se sine erroribus, qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hâc attractione ad modum corporis unius; hoc est, (b) centro suo gravitatis describet circa corpus maximum sectionem aliquam conicam (viz. (c) Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsin fortiore) & radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, sine ullis erroribus, nisi quas partium distantia, perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ, valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. (d) In casu secundo, quo propius accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se; propterea quod linearum à corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maximè autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium systematis, versus corpus omnium maximum, (e) non sint ad invicem reciprocè ut quadra-

(b) * Hoc est, centro suo gravitatis, in quo totum systema gravium P, p, σ , T, unum ac contractum intelligitur (71).

(c) * Hyperbolam vel parabolam attractione languidâ, ellipsin vel circulum fortiore; manente enim velocitate corporis circa centrum virium S projecti, & circulum vel ellipsin describentis minui debet illius ad centrum S attractio, ut ad eandem distantiam possit Parabolam describere, & magis adhuc decrescere illam attractionem oportet, ut describat Hyperbolam (per cor. 7. prop. 16. & Dem. prop. 17).

(d) * In casu 2^o. quo propius accedit corpus omnium maximum ad systema duorum vel plurium corporum, eo magis recedit à casu ubi perturbatio est nulla, nempe quando corpus S infinite distat, ergo eo magis turbabuntur motus partium systematis inter se.

(e) * Non sint ad invicem reciprocè &c. Exempli causâ Si corpora P, p, diversis legibus traherentur, P, v. gr. in ratione reciproca quadrati distantia suæ à corpore maximo S; p verò in ratione cubi distantia.

ra distantiarum à corpore illo maximo; (f) præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum à corpore maximo. Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, perturbat motus inter se, necesse est, ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit, vel minor pro majore, vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessariò mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi, quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXVI.
THEOR.
XXVI.

Corol. 3. Unde si systematis hujus partes in ellipsis, vel circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod eadem à viribus acceleratricibus, ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissimè, aut urgentur æqualiter, & secundum lineas parallelas quamproximè.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

Si corpora tria, quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuo trahant; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quam si maximum illud vel à minoribus non attractum quiescat, vel multò minus vel multò magis attractum, aut multò minus aut multò magis agitetur.

Liquet ferè ex demonstratione corollarii secundi propositionis præ-

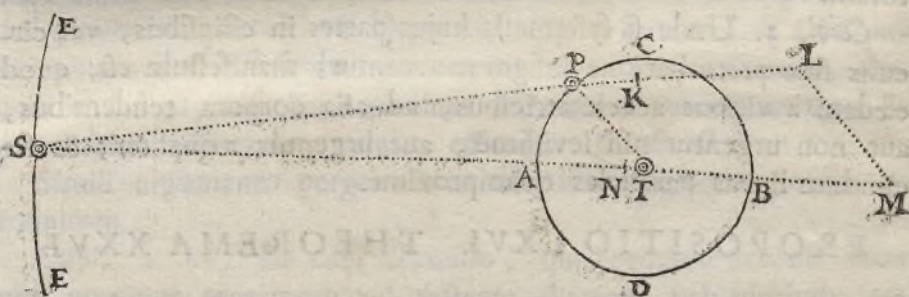
(f) * Præsertim si proportionis hujus inæqualitas &c. Exempli causâ, si inæqualitas attractionum acceleratricum in corporibus P, p, major sit inæqualitate distantiarum SP, Sp; Nam si illæ inæqualita-

tes attractionum & distantiarum essent in datâ ratione, evanescente distantiarum SP, Sp differentiâ, quando corpus maximum S longissimè distat, evanesceret quoque attractionum acceleratricum inæqualitas.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

præcedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora P & S in eodem plano circa maximum T , quorum P describat orbem interiores PAB , & S exteriorem ESE . Sit SK mediocris distantia corporum P & S ; & corporis P versus S attractio acceleratrix, in mediocri illâ distantia, exponatur per eandem. In duplicatâ ratione SK ad SP capiatur SL ad SK , & (g) erit SL attractio acceleratrix corporis P versus S in distantia quâvis SP . Junge PT , eique parallelam age LM occurrentem ST in M ;



& attractio SL resolvetur (per legum corol. 2.) in attractiones SM , LM . Et sic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici. Vis una tendit ad T , & oritur à mutuâ attractione corporum T & P . Hâc vi solâ corpus P circum corpus T , sive immotum, sive hâc attractione agitatum, describere deberet & areas, radio PT , temporibus proportionales, & ellipsin cui umbilicus est in centro corporis T . Patet hoc per prop. xi. & corollaria 2. & 3. theor. xxi. Vis altera est attractionis LM , quæ quoniam tendit à P ad T , superaddita vi priori coincidet cum ipsâ, & sic faciet ut areae etiamnum temporibus proportionales describantur per corol. 3. theor. xxi. At (h) quoniam non est quadrato distantia PT recipro-

(g) * Et erit SL attractio acceleratrix &c. Est enim (ex Hyp.) ut SP^2 ad SK^2 ita attractio acceleratrix in K (quam exhibet linea SK) ad attractionem acceleratricem in P , quam proinde exhibebit linea SL .

(h) 495. At quoniam non est quadrato distantia PT reciprocè proportionalis; Est enim (ex constr.) $SK^2 : SP^2 = SL : SK$, adeoque $SK^3 : SP^3 = SL \times SK : SK \times SP = SL : SP$. Sed ob triangula MLS , TPS simi-

ce proportionalis, componet eâ cum vi priore vim ab hâc pro-
 portione aberrantem, idque eo magis, quo major est propor-
 tio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum
 (per prop. XI. & per corol. 2. theor. XXI.) vis, quâ ellipsis
 circa umbilicum T describitur, tendere debeat ad umbilicum il-
 lum, & esse quadrato distantia PT reciprocè proportionalis;
 vis illa composita, aberrando ab hâc proportione, faciet ut or-
 bis PAB aberret à formâ ellipseos umbilicum habentis in T ;
 idque eo magis, quo major est aberratio ab hâc proportione;
 atque ideo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad
 vim viribus primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertiâ SM ,
 trahendo corpus P secundum lineam ipsi ST parallelam, com-
 ponet cum prioribus vim, quæ non amplius dirigitur à P in T ;
 quæque ab hâc determinatione tanto magis aberrat, quanto ma-
 jor est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris pa-
 ribus: atque ideo quæ faciet ut corpus P , radio TP , areas
 non amplius temporibus proportionales describat; atque ut aber-
 ratio ab hâc proportionalitate tanto major sit, quanto major est
 proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero PAB
 aberrationem à formâ ellipticâ præfatâ hæc vis tertiâ duplici de
 causâ adaugebit, tum quod non dirigatur à P ad T , (i) tum etiam
 quod non sit reciprocè proportionalis quadrato distantia PT .
 Quibus intellectis, manifestum est, quod areæ temporibus tum
 maximè fiunt proportionales, ubi vis tertiâ, manentibus viri-
 bus cæteris, fit minima; & quod orbis PAB tum maximè
 accedit ad præfatam formam ellipticam, ubi vis tam secunda
 quam tertiâ, sed præcipuè vis tertiâ fit minima, vi primâ manente.

LIBER
 PRIMUS.
 PROP.
 LXVI.
 THEOR.
 XXVI.

Exponatur corporis T attractio acceleratrix versus S per li-
 neam

similia $SL:SP=LM:PT$; ergò $LM:PT=SK^3:SP^3$, & proinde vis LM est
 ut $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, seu datâ SK , ut $\frac{PT}{SP^3}$; $\frac{SK^3 \times PT}{SP^3}$, & proinde vis SM est ut
 unde crescente distantia PT crescit vis LM .
 (i) 496. Tum etiam quod non sit reciprocè
 proportionalis &c. Nam PT est ad ST ut vis
 LM est ad vim SM , sed (495) vis LM est ut
 $\frac{SK^3 \times ST}{SP^3}$. Quare vis SM , datis SK &
 ST , est ut $\frac{1}{SP^3}$.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

neam SN ; & si attractiones acceleratrices SM , SN æquales essent; hæ, trahendo corpora T & P æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per legum corol. VI.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio SN minor esset attractione SM , tolleret ipsa attractionis SM partem SN , & maneret pars sola MN , quâ temporum & arearum proportionalitas & orbitæ forma illa elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio SN major esset attractione SM , oriretur ex differentiâ solâ MN perturbatio proportionalitatis & orbitæ. Sic per attractionem SN reducitur semper attractio tertia superior SM ad attractionem MN , attractione primâ & secundâ manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & orbita PAB ad formam præfatam ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio MN vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum P & T attractiones acceleratrices, factæ versùs corpus S , accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio SN non est nulla, neque minor minimâ attractionum omnium SM , sed inter attractionum omnium SM maximam & minimam quasi mediocris; hoc est, non multo major neque multo minor attractione SK . *Q. E. D.*

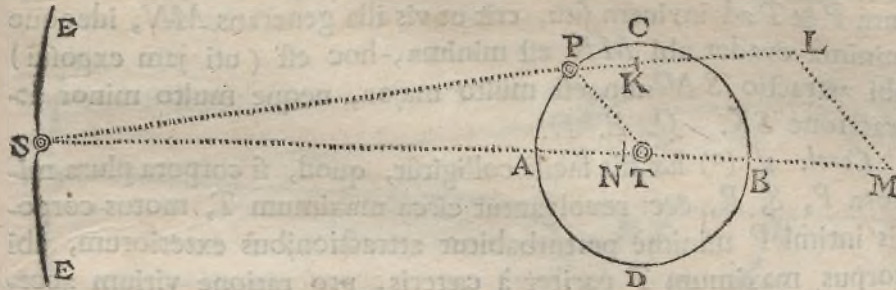
Cas. 2. ^(k) Revolvantur jam corpora minora P , S circa maximum T in planis diversis; & vis LM , agendo secundum lineam PT in plano orbitæ PAB sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus P de plano orbitæ suæ deturbabit.

(k) 497. *Cas. 2.* Planum $TESE$ cum hujus schematis plano congruere supponatur, orbitæ verò PAB planum alterâ sui parte, v. gr. CAD supra planum $TESE$ emineret, & altera parte DBC infra planum $TESE$ deprimi intelligatur, linea recta DC communis planorum $TESE$ & PAB intersectio, linea nodorum dicitur, & illius extrema puncta D & C nodi appellantur. Nodi vel puncta quævis D , C dicuntur esse in quadraturis seu aspectum quadratum obtinere respectu corporis S , dum

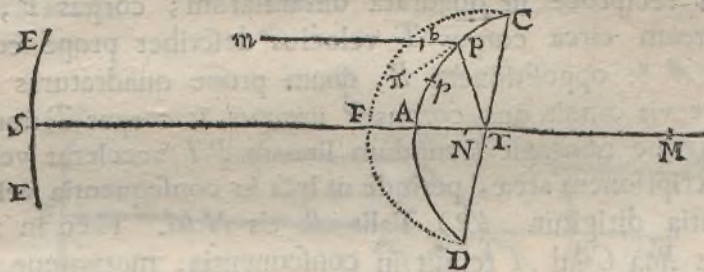
sunt in lineâ rectâ ad ST in puncto T perpendiculari, quod in hoc casu corpus S & punctum C vel D sub angulo recto de loco T videantur. Si super lineâ ST erectum intelligatur planum plano $TESE$ verticale, sintque puncta A & B in illo plano verticali, A quidem inter corpora S & T ; B verò ultrâ T , punctum A dicitur esse in conjunctione, & punctum B in oppositione respectu corporum S & T ; & loca A & B , communi nomine syzigie vocantur. Motus in longitudinem est quo
cor.

bit. (1) At vis altera NM , agendo secundum lineam quæ ipsi ST parallela est (atque ideo, quando corpus S versatur ex-

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXVI.
TRFOR.
XXVI.



tra lineam nodorum, inclinatur ad planum orbitæ PAB) præter perturbationem motus in longitudinem jam ante expositam, indu-



corpus revolvens P à puncto suæ orbitæ dato, v. gr. à puncto C recedit per $CPADB$: motus in latitudinem est is quo corpus revolvens P ad planum immotum $TESE$ accedit vel ab eo recedit. Si corporum revolventium P & S motus inter se conferantur, & utrumque in eandem plagam feratur, v. gr. ab Occidente in Orientem, motus in consequentia fieri dicitur; si verò alterum in unam plagam, alterum in alteram moveatur, motus unius in consequentia alterius vocatur in antecedentia, v. gr. motus ab Oriente in Occidentem in antecedentia fieri dicitur.

(1) * At vis altera NM &c. Si orbitæ PAB (vid. fig. Newt.) pars ACB supra planum $TESE$ elevata, pars verò altera ADB infra ipsum depressa intelligatur, ita ut linea nodorum AB coincidat cum lineâ TS sitque proinde corpus S in lineâ nodorum productâ, vis NM ut potè quæ in corpus P agit secundum lineam ipsi TS parallelam, jacebit in plano orbi-

tæ PAB , & motum corporis P in latitudinem non perturbabit, hoc est, non efficiet ut corpus P ad planum $TESE$ magis accedat aut ab eo recedat. Verùm si corpus S versatur extrâ lineam nodorum, vis NM inducet perturbationem motus in latitudinem. Sit enim $CADT$ pars orbitæ quam corpus P exclusâ vi NM describeret supra planum $TESE$ seu CFD emittens, sit CD lineâ nodorum, Pm recta æqualis & parallela NM , p locus ad quem corpus P exclusâ vi NM tempusculo minimo perveniret, b locus in lineâ Pm ad quem corpus idem P , solâ vi NM , eodem tempusculo traheretur; corpus illud P duabus viribus impulsus, quarum altera agit secundum directionem Pp in plano CAD altera secundum directionem Pm ad planum CAD inclinatum, motu composito describet lineam $P\pi$ quæ non est in plano CAD .

DE MOTU
CORPO-
RUM.

inducet perturbationem motus in latitudinem, trahendo corpus P , de plano suæ orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corpore P & T ad invicem situ, erit ut vis illa generans MN , ideoque minima evadet ubi MN est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio SN non est multo major, neque multo minor attractione SK . *Q. E. D.*

Corol. 1. (n) Ex his facillè colligitur, quod, si corpora plura minora P , S , R , &c. revolvantur circa maximum T , motus corporis intimi P minimè perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum T pariter à cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitur, atque à cætera se mutuo.

Corol. 2. In systemate vero trium corporum T , P , S , si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciproçè ut quadrata distantiarum; corpus P , radio PT , aream circa corpus T velocius describet prope conjunctionem A & oppositionem B , quam prope quadraturas C , D . Namque vis omnis qua corpus P urgetur & corpus T non urgetur, quæque non agit secundum lineam PT accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigitur. (o) Talis est vis NM . Hæc in transitu corporis P à C ad A tendit in consequentia, motumque accele-

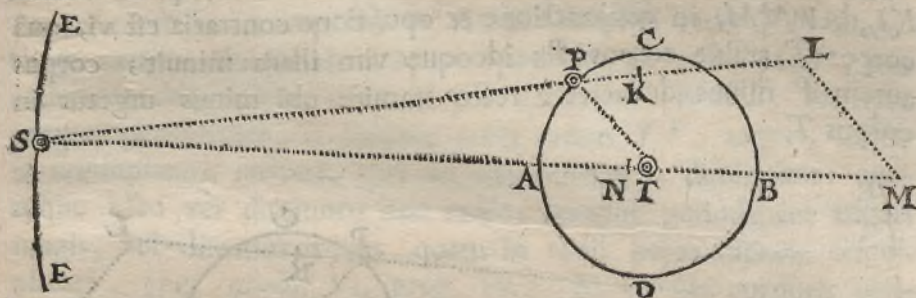
(n) * *Corollarium primum* patet ex demonstratis cum duo tantum sunt corpora minora P , S ; addatur enim tertium corpus R , eodem modo demonstrabitur motum corporis intimi P minimè perturbari attractione ipsius R , ubi corpus maximum T pariter attrahitur à corpore illo R , ac corpus P , & ità de pluribus corporibus ratiocinari licet. Quare ex demonstratis facillè colligitur quod si &c.

(o) 498. *Talis est vis NM.* Si supponamus orbem $CADB$ (vid. fig. Newt.) esse circulo finitimum, & distantiam SD maximam respectu radii PT , erit fere $SC = SK = ST = SN$, & proinde $NM = TM$. Porro corpore P in quadraturis C , D versante, est $SC = SP = SK$; quare cum sit (per constr. prop. 66.) $SL : SK = SK^2 : SP^2$, erit in quadraturis $SL = SK = SC$, & LM coincidet cum CT seu PT , adeoque evanescet TM seu NM .

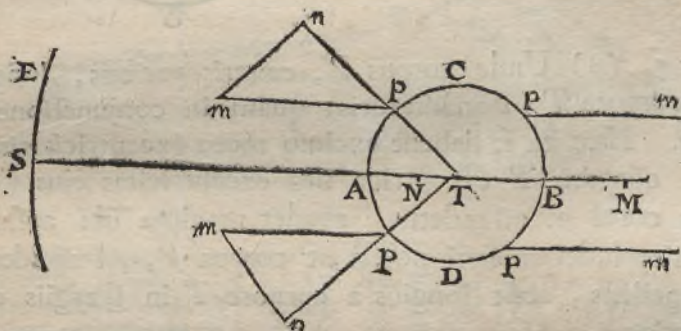
Nulla igitur erit virium SM , SN , in quadraturis differentia, & ideo corpus P reliquis viribus ad centrum T tendentibus agitur, radio vectore areas ibi describet temporibus proportionales. At ubi corpus P extrà quadraturas est in hemiperipheriâ CAD , vis SM major est vi SN & corpus P virium differentiâ NM trahitur secundum directionem ipsi TS parallelam.

Sit Pm æqualis & parallela ipsi NM , & demisso ex m in radium TP productum perpendicularo mn , vis Pm , seu NM , in duas vires Pn , nm resolvitur, quarum altera Pn trahendo secundum directionem radii TP , corporis P motum in longitudinem nihil mutat, nec æquabilem arearum descriptionem turbat; altera vero NM , trahendo secundum directionem nm , radio TP perpendiculararem, hoc est, secundum directionem tangentis in P , motum in longitudinem accelerat in primo qua

rat; dein usque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in consequentia usque ad *B*, & ultimo in antecedentia transeundo à *B* ad *C*.



Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in conjunctione & oppositione quam in quadraturis.



quadrante *CA* retardat in secundo quadrante *AD*.

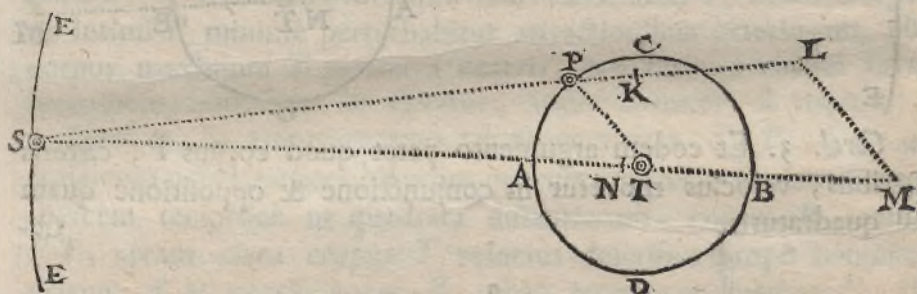
In alterâ hemiperipheriâ *DBC*, vis *SM* minor est vi *SN*, quoniam corpus *P* à corpore *S* longius distat quam corpus *T*, unde si vires perturbantes ad solum corpus *P* referantur, virium *SM*, *SN* differentia *NM* negativa seu ablativa erit, aut quod idem est, contrariâ directione aget; Fingatur enim corpora *T* & *P* urgeri ambo vi *SN* ubique æquali & sibi parallela, pergent moveri inter se quasi omnino abesse illa vis per Cor. 6. Legum motûs, tum trahatur corpus *P* vi *NM* secundum directionem oppositam vi *SN*, ex eâ actione mutabuntur motus corporum *T* & *P* inter se, sed etiam ex eâ actione vis *SN* quæ

trahere corpus *P* lingebatur, reducetur ad vim *SM* quæ est vis reverâ agens dum vis *SN* agit in *T*, ergo si æstimentur motus corporum *T* & *P* inter se, quasi corpus *P* in hemiperipheriâ *DBC* urgeretur virium differentia *NM* in contrariam partem agente, obtinebuntur veræ mutationes motuum corporum *T* & *P* inter se, ex actionibus *SN* & *SM* ortæ, ideoque in posterum considerabitur corpus *P* in hemiperipheriâ *DBC* quasi urgeretur vi *NM* secundum directionem *Pm* ipsi *NM* parallelam à *P* versûs *m* agente; atque ideo, si vis *Pm* in duas vires, ut in alterâ hemiperipheriâ factum est, resolvatur, manifestum erit motum in longitudinem in quadrante *DB* accelerari & in quadrante *BC* retardari.

H h h 2

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Corol. 4. Orbita corporis P , cæteris paribus, curvior est in quadraturis quam in conjunctione & oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt à recto tramite. Et (P) præterea vis KL , vel NM , in conjunctione & oppositione contraria est vi, quâ corpus T trahit corpus P ; ideoque vim illam minuit; corpus autem P minus deflectet à recto tramite ubi minus urgetur in corpus T .



Corol. 5. (q) Unde corpus P , cæteris paribus, longius recedat à corpore T in quadraturis, quam in conjunctione & oppositione. Hæc ita se habent excluso motu excentricitatis. Nam si orbita corporis P excentrica sit, excentricitas ejus (ut mox in hujus corol 9. ostendetur) evadet maxima ubi apsidæ sunt in syzygiis; indeque fieri potest ut corpus P , ad apsidem summam appellens, absit longius à corpore T in syzygiis quam in quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis T , quâ corpus P retinetur in orbe suo, augetur in quadraturis per additionem.

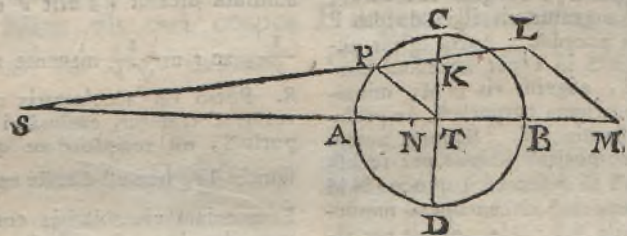
(p) 499. Et præterea vis KL &c. Iisdem positis quæ in notâ superiori, rectæ SL , SM sunt fere parallelæ, ac proinde $TM = PL$ & $LM = PT$ quam proximè; quare coincidente P cum A & K cum T , fit $LM = AT = PK$, & NM seu $TM = PL = AT + KL$, & $NM - LM = KL$, hoc est, vis tota perturbans quâ corpus P in conjunctione à corpore T versus S retrahitur, est ut KL quam proximè; vi enim LM trahitur P versus T & vi NM à corpore T versus S retrahitur. Idem

eodem modo demonstratur, corpore P in oppositione B posito.

(q) * Unde corpus P &c. Nam cum orbita corporis P curvior sit in quadraturis C vel D quam in syzygiis A & B (per cor. 4.) necesse est, cæteris paribus, ut in syzygiis A & B depressior sit quam in quadraturis C & D ad instar elliptico, cujus sit centrum T axis major CD axis minor AB . Hæc ita se habent, si, exclusis viribus perturbantibus, orbita corporis P fuerit circulus cujus centrum T .

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXVI.
THEOR.
XXVI.

ditionem vis LM , ac diminuitur in syzygiis per ablationem vis KL , & (r) ob magnitudinem vis KL , magis diminuitur quam augetur; est autem vis illa vi centripeta (per corol. 2. prop. IV.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii TP directè & ratione duplicatâ temporis periodici inversè: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis KL ; ideoque tempus periodicum, si maneat orbis radius TP , augetur, idque in subduplicatâ ratione, quâ vis illâ centripeta diminuitur: auctoque ideo vel diminuto hoc radio, tempus periodicum augetur magis, vel diminui minus quam in radii hujus ratione sesquiplicatâ, (per corol. VI. prop. IV.) Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus P minus semper & minus attra-



(r) 500. Et ob magnitudinem vis KL &c. Si distantia mediocris SK vel ST ingens fuerit respectu radii TP orbitæ PAB , in loco quovis corporis P , erit vis LM quam proximè ad vim NM ut sinus totus ad sinum triplum distantie angularis corporis P à quadraturâ proximâ. Nam ob ingentem distantiam corporis S (ex hyp.) lineæ SL , SM sunt fere parallelæ ac proindè $LM = PT$, NM seu $TM = PL$, & $SP = SK$; cumque sit ST ad lineam quadraturarum CD perpendicularis, erit etiam SK ad eandem normalis, & existente PT radio, erit PK sinus anguli PTC , hoc est, sinus distantie angularis corporis P à quadraturâ proximâ C . Porro (per prop. 66.) $SL : SK = SK^2 : SP^2$, adeoque $SL - SK : SK = SK^2 - SP^2 : SP^2$, hoc est, $KL : SK = PK \times SK + SP : SP^2 = PK \times 2 SP : SP^2 = 2 PK : SP = 2 PK : SK$, ob $SK = SP$, & $SK + SP = 2 SP$. Quare erit $KL = 2 PK$, &

PL seu $NM = 3 PK$, hoc est, vis LM seu PT ad vim NM seu PL ut sinus totus PT ad $3 PK$ triplum sinum distantie angularis corporis P à quadraturâ proximâ.

501. Coroll. Vis KL in conjunctione A , est ad vim similem in oppositione B , ut AT ad TB , & si orbita PAB circularis fuerit vel circulo finitima, erit vis KL in syzygiis duplo major vi LM in quadraturis quam proximè. Nam corpore P in syzygiis versante, fit $PK = AT = PT = LM$, & proindè NM seu PL fit $= 3 LM$, & $KL = 2 LM$. Tandem iisdem positis, vis NM maxima est in syzygiis, quoniam ibi PK fit maxima seu evadit $= AT$, & $NM = 3 AT$.

Unde ob magnitudinem vis KL (500. 501.) vis centripeta corporis centralis T magis diminuitur quam augetur, ideoque censenda est pro absolute diminutâ ab actione corporis S .

H h h 3

DE MOTU
CORPO-
RUM.

attractum perpetuò recederet longius à centro T ; & contra, si vis illa augetur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S , quâ vis illa diminuitur, (1) augeatur ac diminuat per vices: augebitur simul ac diminuetur radius TP per vices; & (2) tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione sesquuplicatâ radii, & ratione subduplicatâ, quâ vis illa centripeta corporis centralis T , per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S , diminuitur vel augetur. Co.

(1) * *Augeatur ac diminuat per vices.* Quoniam vis quâ corpus P trahitur à corpore T , est ejusdem corporis P vis centripeta quâ in orbitâ suâ retinetur; si remissior fuerit vis illa, corpus P minus attractum à centro T longius recederet; & contra, si augeatur vis illa, corpus P ad T propius accedet. Auctâ igitur actione corporis S in T per accessum corporis T ad S , augetur vis NM , minuiturque vis centripeta corporis P , ac proinde crescit distantia PT . Econtra autem decrescit distantia PT per recessum corporis T ab S decrescit quoque NM & augetur corporis P vis centripeta, minorque fit distantia PT . Hæc omnia per vices contingent, ubi nempe corpus T corpori S proximius fuerit, augebitur radius PT , ubi verò remotius evadet minuetur radius.

(2) * *Et tempus periodicum augebitur ac diminuetur &c.* Corpus P circa T , exclusâ corporis longinqui S vi ablatitiâ, in circulo PAD revolvatur, & accedente vi illâ ablatitiâ corporis S quæ, ob ingentem distantiam ST , parva admodum sit respectu vis quâ corpus P à corpore T trahitur, idem corpus P in orbe fere circulari adhuc revolvatur. Jam verò corporis circulum vel orbem circulo finitimum describentis vis acceleratrix versus T directâ est semper (per cor. 2. prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione simplici radii TP qui dicatur R directè & ratione duplicatâ temporis periodici, quod dicatur t inversè, hoc est, vis acceleratrix corporis P versus T , est ut $\frac{R}{t^2}$, & manente ra-

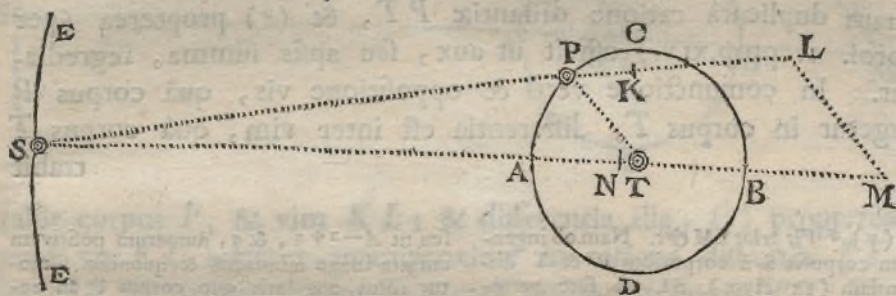
dio ut $\frac{1}{t^2}$; sed vis acceleratrix in distantâ datâ est ut vis absoluta corporis trahentis, ergò si corporis T trahentis vis absoluta dicatur V , erit V ut $\frac{1}{t^2}$ & t^2 ut

$\frac{1}{V}$, ac t ut $\frac{1}{\sqrt{V}}$ manente radio TP seu R . Porrò vis acceleratrix quâ corpus P versus T trahitur, exclusâ vi ablatitiâ corporis S , est reciprocè ut quadratum distantie TP , hoc est directè ut $\frac{1}{R^2}$ (ex hyp.)

Et quoniam vis ablatitiâ corporis S , exigua admodum est respectu vis acceleratricis quâ corpus P à corpore T trahitur, accedente vi illâ ablatitiâ, vis reliqua acceleratrix in corpore P erit adhuc ut $\frac{1}{R^2}$

quam proximè; quare eadem manente reliquâ vi centripetâ absolutâ corporis T & mutato utcumque radio R , quadratum temporis periodici t^2 erit ut distantie cubus R^3 , ac proinde t ut $\sqrt{R^3}$. (per coroll. 6. prop. 4.) hoc est tempus periodicum est in sesquuplicatâ ratione radii TP . Si igitur neque maneat radius idem, neque eadem vis centripeta absoluta in corpore T , sed per actionem corporis longinqui S radius augeatur, & vis centripeta minuatur, aut per diminutionem ejus actionis radius minuatur, & vis centripeta augeatur, quadratum temporis periodici t^2 erit in ratione compositâ ex binis rationibus supra inventis, nimirum ex ratione $\frac{1}{V}$, & ratione R^3 , hoc est t^2 erit

Corol. 7. Ex (u) præmissis consequitur etiam, quod ellipseos à corpore P descriptæ axis, seu apsidum linea, quoad motum angularem, progreditur & regreditur per vices, sed magis ta-



men progreditur, & per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis quâ corpus P urgetur in corpus T in quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi

ccn-

erit ut $\frac{R^3}{V}$, & proinde τ ut $\sqrt{\frac{R^3}{V}}$, aut quod idem est, tempus periodicum augetur ac diminuetur in ratione compositâ ex ratione $\sqrt{R^3}$, sesquuplicatâ radii, & ratione $\frac{1}{\sqrt{V}}$ subduplicatâ hujus quâ vis illa centripeta corporis centralis T per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S diminuitur vel augetur; nam decrescente V crescit pariter $\frac{1}{V}$, & contrâ crescente V in eâdem ratione decrescit $\frac{1}{V}$.

502. Scholium. Hinc ut David Gregorius in scholio ad prop. 17. Lib. 4. Astronomiæ physicæ & geometricæ observavit, si vis centripeta corporis centralis T aliundè quam per vim extraneam corporis S augetur & minuat per vices, ut si corporis T vis centripeta absoluta supponatur ipsius massæ proportionalis & nova ei addatur & detrahatur per vices materia, atque indè ejus vis absoluta in eâdem ratione augetur & minuat, cor-

pus P in minori & majori orbitâ per vices revolvetur, diminuto & aucto per vices radio TP ejusque tempus periodicum minuetur & augetur per vices in ratione compositâ ex ratione sesquuplicatâ radii directè & ratione subduplicatâ vis centripetæ absolutæ corporis T inversè ut supra. Vis enim acceleratrix composita & residua quâ corpus T auctum & diminutum per vices trahit corpus P est hic præcisè in duplicatâ ratione distantia inversè, quod in casu coroll. 6. quam proximè tantum obtinet.

(u) * Ex præmissis. Si corpus P circum T ellipsem circulo finitimam describat cujus umbilicus sit T hujus ellipseos axis major seu apsidum linea motu angulari circa umbilicum T per vices progreditur seu fertur in consequentia & regreditur, seu in antecedentia movetur; progreditur nempe, dum corpus P est in syzygiis A & B, regreditur verò dum corpus P est in quadraturis C & D, sed magis tamen progreditur quàm regreditur, & per excessum progressionis fertur in consequentia.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

centripeta, quâ corpus T trahit corpus P . Vis (y) prior LM , si augeatur distantia PT , augetur in eadem fere ratione cum hâc distantia, & vis posterior, decrefcit in duplicatâ illâ ratione, ideoque summa harum virium (z) decrefcit in minore quam duplicatâ ratione distantia PT , & (a) propterea (per corol. 1. prop. XLV.) efficit ut aux, seu apsis summa, regredia-
tur. In conjunctione verò & oppositione vis, quâ corpus P urgetur in corpus T , differentia est inter vim, quâ corpus T trahit

(y) * *Vis prior LM &c.* Nam ob ingen-
tem corporis S à corporibus P & T dif-
tantiam (ex Hyp.) SL est fere paral-
lela SM , & proinde LM ipsi PT pa-
rallela crescit ubique ut PT , quampro-
ximè; in quadraturis verò LM coincidit
cum PT .

(z) * *Decrescit in minore quam du-
plicatâ illâ ratione*, hoc est, non tantum
minuitur in distantia majore, nec tantum
augetur in distantia minore, quantum mi-
nueretur vel augetur, si vis tota acce-
leratrix, seu virium summa esset semper ut
quadratum distantia reciprocè.

(a) * *Et propterea per cor. 1. prop. 45.*
Sit $TP = A$, & $LM = c \times A$; c verò quan-
titas data, & vis quâ corpus P versus T
exclusâ corporis S actione urgetur, erit (ex
Hyp.) ut $\frac{1}{A^2}$, & accedente vi exigua
 LM in quadraturis, harum virium summa
erit ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, adeoque hæc virium
summa decrefcet in ratione paulò minore
quam in duplicatâ distantia PT seu A .
Nam si distantia variabilis A evadat $b \times A$,
fitque b numerus unitate major, erit vis
in simplici distantia A ad vim in distantia
majore $b \times A$, ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, ad $\frac{1}{b^2 A^2}$
 $+ c \times b A$, hoc est, ut $bb + cbb A^3$ ad $1 +$
 $cb^3 A^3$ five ut $bb \times 1 + cbb^3$ ad $1 \times 1 + cb^3 A^3$,
hæc autem ratio minor est quam ratio
 $\frac{1}{A^2}$ ad $\frac{1}{b^2 A^2}$, seu b^2 ad 1 , cum $(1 +$
 $c A^3)$ minus sit quàm $1 + cb^3 A^3$. Po-
namus itaque virium summam esse ut $\frac{1}{A^2 - q^2}$

seu ut A^{-2+q} , & q , numerum positivum
unitate longe minorem, & quoniam si mo-
tus totus angularis quo corpus P ab ap-
side unâ ad eandem apsidem redit, fit ad
motum angularem revolutionis unius seu
 360° . ut numerus aliquis m ad n vis cen-

tripeta tota est ut $A \frac{n n}{m m} - 3$ (per cor.
prop. 45.) erit hic $\frac{n n}{m m} - 3 = q - 2$, $\frac{n n}{m m}$

$= 1 + q$, $\frac{n}{m} = \sqrt{1 + q}$, & m ad n , seu

motus totus angularis ab apside ad ean-
dem apsidem ad 360° . ut 1 , ad $\sqrt{1 + q}$,
adeoque motus ille angularis ab apside
ad eandem $= \frac{360^\circ}{\sqrt{1 + q}}$, quare cum sit

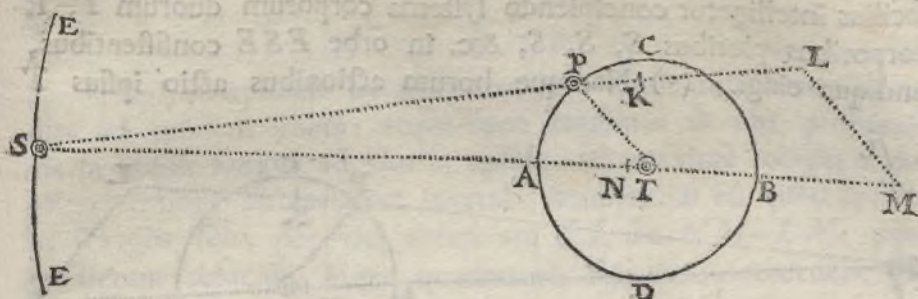
$\sqrt{1 + q}$, paulo major unitate, motus to-
tus angularis ab apside ad eandem apsi-
dem minor erit 360° . & ideo apsidem ob-
viam ibunt corpori P revolventi, seu mo-
vebuntur in antecedentia, aut quod idem
est, regredientur. Idem facile demonstra-
tur (per cor. 2. prop. 45.) vel per exem-
pla tertia. Cum enim vis tota sit (ex

Hyp.) ut $\frac{1}{A^2} + c \times A$, erit (loco cita-

to), angulus revolutionis corporis inter
apsides summam & imam $= 180^\circ \times \sqrt{\frac{1 + c}{1 + 4c}}$

sed quoniam c est numerus positivus,
 $1 + c$
 $1 + 4c$, est numerus unitate minor, ergò
angulus revolutionis corporis P inter apsi-
des minor est 180° .

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXVI.
THEOR.
XXVI.



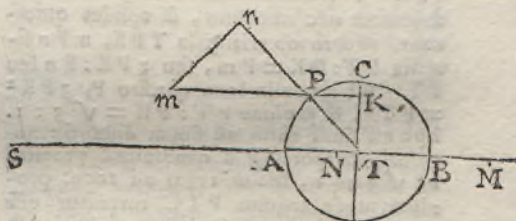
trahit corpus P , & vim KL ; & differentia illa, (b) propterea quod vis KL augetur quamproximè in ratione distantiae PT , decrescit in majore quam duplicatâ ratione distantiae PT , (c) ideoque (per corol. 1. prop. XLV.) efficit ut aux progrediat. In (d) locis inter syzygias & quadraturas pendet motus augis ex causâ utrâque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediat ipsa vel regrediat. Unde cum vis KL in syzygiis sit quasi duplo major quam vis LM in quadraturis, excessus erit penes vim KL , transferetque augem in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis corollarii faci-

(b) * Propterea quod vis KL &c. Est enim in syzygiis $KL = 2AT$, seu $2PT$ quam proximè (501).

(c) * Ideoque per cor. 1. prop. 45. Nam si in superiori calculo loco $+q$ scribatur $-q$, vel loco $+c \times A$, scribatur $-c \times A$, quod vis KL sit ablatitia, inveniatur angulus totius revolutionis corporis P ab apside unâ ad eandem apsidem $= \frac{360^\circ}{\sqrt{1-q}}$, vel angulus inter apsidem

summam & imam $= 180^\circ \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Est autem $\sqrt{1-q}$, numerus unitate minor, & $\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ numerus unitate major, adeoque $\frac{360^\circ}{\sqrt{1-q}}$, arcus major 360° . & $180^\circ \times \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$, arcus major 180° . quare apsidem in hoc casu progrediuntur.

Tom. I.



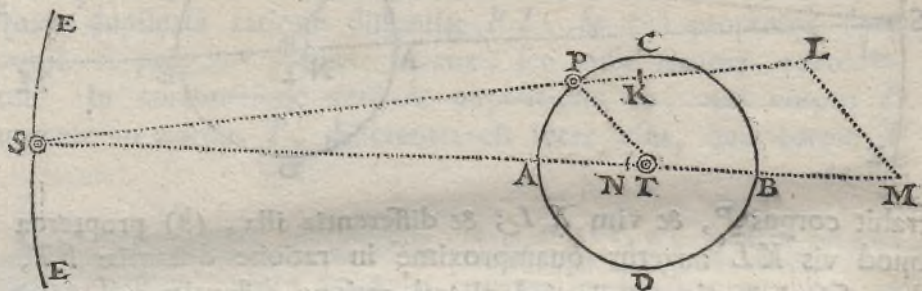
(d) 503. In locis inter syzygias & quadraturas &c. Iisdem positis quæ in Lemmate 500. quæritur distantia angularis corporis P à quadraturâ C , v. gr. ubi apsidem quiescunt. Per locum corporis P agatur Pm parallela & æqualis NM seu TM , & erit $Pm = 3PK$ (500). Vis Pm , si in radium TP productum demittatur perpendicularum mn , resolvitur in vires Pn , nm , quarum nm agendo secundum lineam radio perpendiculararem, vim

I i i

ag.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

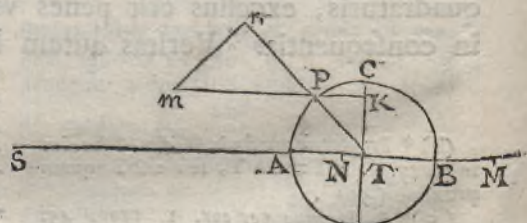
facilius intelligetur concipiendo systema corporum duorum T, P^o corporibus pluribus $S, S, S, \&c.$ in orbe ESE consistentibus, undique cingi. (e) Namque horum actionibus actio ipsius T



minuetur undique, decreſcetque in ratione plusquam duplicatâ distantiæ.

acceleratricem corporis P versus T nec auget, nec minuit, & Pn agendo secundum radium TP à P versus n , vim illam acceleratricem corporis P minuit; vis verò LM seu TP vim acceleratricem corporis P versus T auget. Quare ubi erit $Pn = PT$ vis acceleratrix corporis P nec augebitur nec minuetur, & apſides quiescent. Porro ob triangula TPK, mPn similia $PT : PK = Pm$, seu $3 PK : Pn$ seu PT . Est igitur in loco quaſito $P, 3 PK^2 = PT^2$, & proinde $PT : PK = \sqrt{3} : 1$. hoc est sinus totus ad sinum distantiæ angularis corporis P à quadraturâ proximâ ut $\sqrt{3}$ ad 1 , seu ut 1732 . ad 1000 . proxime; undè angulus PTC invenitur esse $35^\circ. 26'$. circiter. Quiescent igitur apſides in quatuor locis corporis P quæ à quadraturis distant angulo $35^\circ. 16'$; & hinc in singulis corporis P revolutionibus, cæteris paribus, apſides regredientur per gradus revolutionis corporis $P, 141^\circ$, & progredientur per grad. 219 .

504. Iisdem positis, si orbita CPD , circulo finitima sit, erit vis addititia $PT - Pn$, maxima in quadraturis. Nam cum sit semper $PT : PK = 3 PK : Pn$, erit $Pn = \frac{3 PK^2}{PT}$, ac proinde $PT - Pn = PT$



$-\frac{3 PK^2}{PT}$, quæ quantitas maxima evadet ubi erit $PK = 0$, quod in quadraturis contingit.

(e) * Namque horum actionibus &c. Hæc enim ratione corpus P erit semper in quadraturis simul & in syzygiis corporis, seu corporum S , adeoque cum vis ablatitia KL ; in syzygiis & propè syzygias sit ferè duplo major quam vis addititia LM , in quadraturis & propè quadraturas, actio corporis T minuetur undique, decreſcetque proinde in ratione plusquam duplicatâ distantiæ TP .

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXVI.
THEOR.
XXVI.

Corol. 8. (f) Cum autem pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiae TP, in transitu corporis ab apside imâ ad apsidem summam; ut & à simili incremento in reditu ad apsidem imam; atque ideo maximus sit ubi proportio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ: manifestum est quod apsidem in syzygiis suis, per vim ablatitiam KL seu NM-LM, progredientur velocius, inque quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam LM. Ob diuturnitatem verò temporis, quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longè maxima.



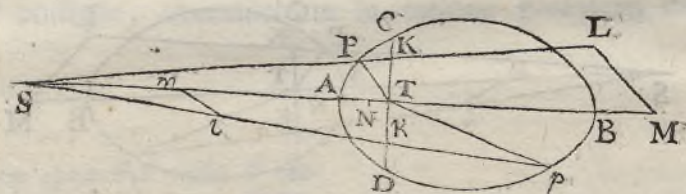
(f) * Cum autem (per corol 7.) pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicatâ ratione distantiae TP quæ augetur in recessu à centro T, sive in transitu corporis P ab apside imâ ad apsidem summam, ut & à simili incremento in accessu ad centrum, sive in reditu ab apside summâ ad apsidem imam, manifestum est progressum vel regressum apsidum maximum esse ubi ratio vis in apside summâ ad vim in apside imâ maximè recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ, porro dum linea apsidum seu major axis ellipseos BCAD, cujus umbilicus est T, in syzygiis A, B versatur, ratio vis totius corporis P in apside summâ positi ad vim ejus in apside imâ versantis, magis recedit à duplicatâ ratione distantiarum inversâ quam in alio quovis lineæ apsidum situ. Sit enim B apsis summa, A apsis ima, & erit TB distantia maxima, AT minima (ex naturâ ellipseos). Unde corpore P in conjunctione A versante erit vis ablatitia KL (seu differentia virium acceleratricium cor-

porum T & P versus S) omnium minima, & corpore P in oppositione B versante, erit differentia illa KL omnium maxima. Cum autem ob ingentem corporis S distantiam (ex Hyp.) sit ferè KL ad kl ut AT ad TB (501) ratio vis corporis P in A versantis ad vim illius in B positi, exprimi hic poterit per rationem $\frac{b}{AT^2} - c \times AT$, ad $\frac{b}{TB^2} - c \times TB$, (si ratio b ad c exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T, ad vim absolutam ablatitiam KL) seu reductione ad eundem denominatorem factâ, per rationem $TB^2 \times b - c \times AT^3$, ad $AT^2 \times b - c \times TB^3$, quæ ratio eò magis recedit à ratione TB^2 ad AT^2 , seu duplicatâ distantiarum inversâ, quo magis ratio quantitatis $b - c \times AT^3$, ad quantitatem $b - c \times TB^3$, recedit à ratione æqualitatis, seu quo minor est AT respectu TB, quare dum linea apsidum est in syzygiis A, B, ratio vis totius in apside summâ ad vim in apside imâ maxi-

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Corol. 9. Si corpus aliquod, vi reciprocè proportionali quadrato distantiae suæ à centro revolveretur circa hoc centrum in ellipsi; & mox, in descensu ab apside summâ seu auge ad apsidem imam; vis illa per accessum perpetuum vis novæ augetur in ratione plusquam duplicatâ distantiae diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuò accessu vis illius novæ impulsus semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum quam si urgeretur vi solâ crescente in duplicatâ ratione distantiae diminutæ; ideoque orbem describeret orbe elliptico interiorem, & in apside imâ propius accederet ad centrum quam prius. (B) Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis in recessu

COR-



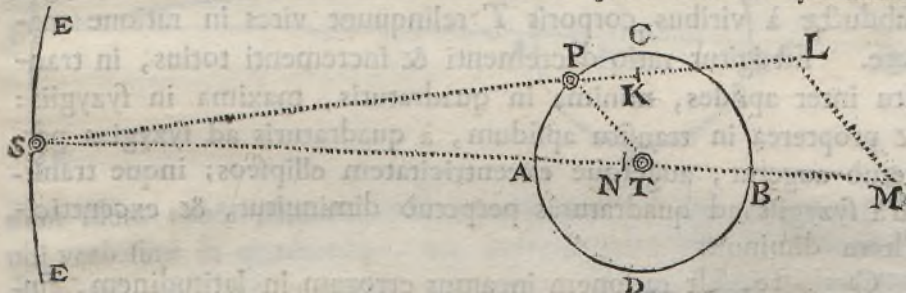
mè recedit à ratione duplicatâ distantiarum inversâ. In hoc igitur lineæ apsidum situ apsidem celerrimè progrediuntur, corpore P in syzygiis vel propè syzygias versante. Dum vero corpus P est in quadraturis C, D, fit vis $LM = CT$, vel DT ; Est autem ex naturâ ellipseos, summa linearum CT , DT , omnium minima; quare in integrâ corporis P revolutione, apsidem viribus CT , DT tardissimè regrediuntur in quadraturis corporis P, & celerrimè progrediuntur in ipsius syzygiis, atque aded excessus progressus supra regressum erit in hoc casu omnium maximus, & apsidem in integrâ corporis P revolutione celerrimè movebuntur in consequentia. Ob contrarias prorsus causas, si linea apsidum in quadraturis posita sit, apsidem velocissimè regredientur, corpore P in quadraturis versante, & tardissimè progredientur corpore P in syzygiis existente, & ex hac utraque causâ fieri poterit ut in integrâ corporis P circum T revolutione, regressus apsidum superet eorum progressum, proindeque ut apsidem in antecedentia ferantur; sed quoniam, cæteris paribus, vis

ablatitia KL quæ progressum apsidem in syzygiis corporis P inducit est (500) fere duplo major vi adjectitiâ LM quæ apsidum regressum in quadraturis corporis P producit, excessu progressus supra regressum, apsidem progrediuntur in integrâ sui revolutione circum T, hoc est, eo tempore quo apsidem ex T visâ omnes cum corpore S, aspectus subeunt; augetur verò progressus ille, si corpora P & S in suis orbitis ferantur in eandem plagam; In hac enim hypothese, apsidem diutius hærent in syzygiis quam in quadraturis, quia in syzygiis progrediuntur cum corpore S, atque aded diutius illud quasi comitantur, in quadraturis verò feruntur in antecedentia & corporis S in consequentia revolventis aspectum quadratum veluti fugiunt; undè fit ut apsidem diutius progrediantur in syzygiis suis quam regrediuntur in suis quadraturis.

(g) * Orbis igitur accessu hujus vis novæ fiet magis excentricus; manente enim distantia apsidem summæ ab orbitæ umbilico, decrescet distantia apsidem imæ ab eodem umbilico, majorque proinde erit ratio prioris distantiae ad posteriorem, quam

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXVI. 3
THEOR.
XXVI.

corporis ab apside imâ ad apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, redieret corpus ad distantiam priorem, ideoque si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic orbis excentricitas adhuc magis augebitur. Quare si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper excentricitas; (h) & contra, diminuetur eadem, si ratio illa decrescat. Jam verò in systemate



corporum T, P, S , ubi apsidæ orbis PAB sunt in quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est, & maxima fit ubi apsidæ sunt in syzygiis. Si apsidæ constituentur in quadraturis, ratio prope apsidæ minor est & prope syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illâ majori oritur augis motus directus, (i) uti jam dictum est. (k) At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter

si vis illa nova non accessisset, hoc est, orbis fiet magis excentricus.

(h) * Et contra &c. Si in descensu corporis ab abside summâ ad apsidem imam, vis centripeta augeatur minus quam in duplicatâ ratione distantie diminuat, corpus describet orbem orbi elliptico exteriori, & in apside imâ, minus accedet ad centrum quam prius, hoc est, orbis fiet minus excentricus, & excentricitas adhuc minuetur, si in corporis ascensu ab apside imâ ad summam, vis centripeta minus decrescat quam antea creverat. Quare si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus minuat, minuetur semper excentricitas.

(i) * Uti jam dictum est (Cor. 7.).

(k) * At si consideretur ratio incremen-

ti vel decrementi totius in progressu corporis P inter apsidæ in quadraturis C, D constituti, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Sit enim apsis ima C , summa D , umbilicus T , erit (ex Dem.) vis in apside imâ ad vim in apside summâ ut

$$\frac{b}{CT^2 + n \times CT}, \text{ ad } \frac{b}{TD^2 + n \times TD},$$

(si ratio b ad n exprimat rationem vis absolutæ trahentis corpus P versus T ad vim absolutam addititiam LM) & reductione ad eandem denominationem factâ ut $TD^2 \times b + nCT^3$ ad $CT^2 \times b + nTD^3$, quæ ratio minor est quam ratio TD^2 , ad CT^2 , ob TD , majorem quam CT ; & quoniam in hoc lineæ apsidum situ ratio TD ad CT seu ratio distantiarum umbilici T à

DE MOTU
CORPORA-
RUM.

inter apsidēs, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in minore quam duplicatâ ratione distantiae apsidis summæ ab umbilico ellipseos ad distantiam apsidis imæ ab eodem umbilico, & contra, ubi apsidēs constituuntur in syzygiis, vis in apside imâ est ad vim in apside summâ in majore quam duplicatâ ratione distantiarum. Nam vires LM in quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, & vires KL in syzygiis subductæ à viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in transitu inter apsidēs, minima in quadraturis, maxima in syzygiis: & propterea in transitu apsidum, à quadraturis ad syzygias perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos; inque transitu à syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in latitudinem, fingamus planum orbis EST immobile manere; & ex errorum expo-

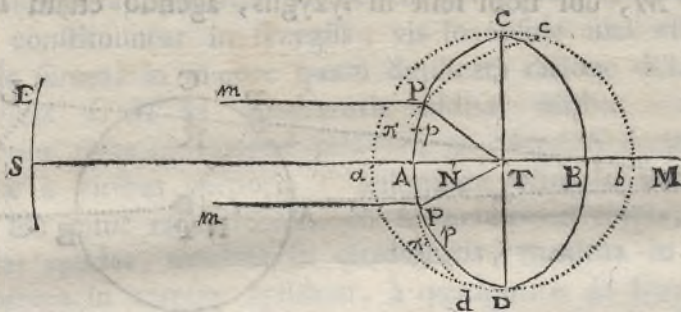
quadraturis maxima est, (ex naturâ ellipseos) patet rationem totius decrementi & incrementi vis centripetæ in transitu corporis P inter apsidēs minimam esse in quadraturis apsidum. Et contrâ si fuerit A apsis imâ, B apsis summa, erit vis in apside imâ ad vim in apside summâ ut $TB^2 \times b - cAT^3$, ad $AT^2 \times b - cTB^3$, adeoque in majore ratione quam TB^2 ; ad AT^2 , & quoniam ratio TB , ad AT , in his apsidum locis maxima est, ex naturâ ellipseos, ratio decrementi & incrementi totius in transitu inter apsidēs, maxima est in syzygiis apsidum, & propterea singulis corporis P revolutionibus in transitu apsidum à quadraturis ad syzygias hæc ratio perpetuò augetur, augetque excentricitatem ellipseos, & in transitu apsidum à syzygiis ad quadraturas perpetuò diminuitur, & excentricitatem diminuit. Maxima ergo est orbis excentricitas, ubi apsidēs sunt in syzygiis, minima ubi sunt in quadraturis.

505. Ex his etiam sequitur in unâquâque corporis P circum T revolutione ex-

centricitatem orbis circa syzygias corporis P augeri, & circa ejus quadraturas minui, minimamque esse in illius quadraturis, maximam in syzygiis, cæteris paribus. Nam (per cor. 7.) corporis P vis centripeta tota in syzygiis decrescit in majore quam duplicatâ ratione distantiae auctæ, & crescit in majore ratione quam duplicatâ distantiae diminutæ, & in quadraturis contrâ. Quare corpus P , in syzygiis & prope syzygias describit partem orbis magis excentrici, in quadraturis verò & prope quadraturas partem orbis minus excentrici (ex demonstratis initio cor. 9.) Et quoniam vis addititia LM in quadraturis corporis P maxima est, & vis ablatitia KL in syzygiis ejus etiam maxima, vis autem addititia excentricitatem diminuit & ablatitia auget, manifestum est quod (cæteris paribus) in unâ corporis P revolutione, excentricitas orbis minima fit in quadraturis corporis P , & maxima in illius syzygiis, arque adeo quod à quadraturis ad syzygias perpetuò augetur, & à syzygiis ad quadraturas perpetuò minuitur.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

cissim eandem in transitu à syzygiis ad quadraturas. Unde fit
ut (o) corpore in syzygiis existente inclinatio evadat omnium
mi-

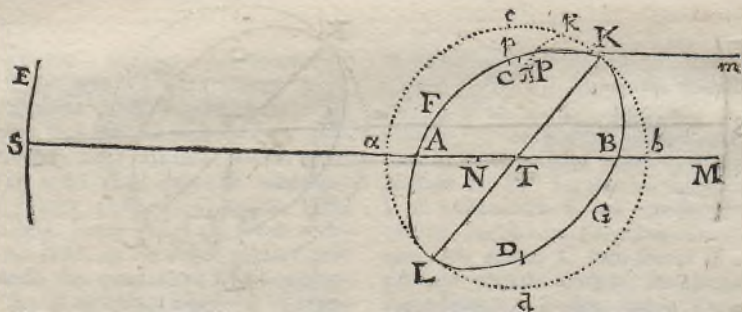


turis ad syzygias, augetur verò in transitu
corporis à syzygiis ad quadraturas, & in
utroque transitu nodi regrediuntur. Sit
enim orbitæ PAB pars CAD supra pla-
num immotum EST elevata altera, verò
pars CBD infra illud depressa intelliga-
tur; per locum corporis P agatur recta
Pm parallela lineæ TS, exhibens dire-
ctionem vis NM, & corpus P feratur pri-
mum à nodo seu quadraturâ C ad conjun-
ctionem A, & quoniam corpus P vi revol-
utionis per arcum Pp urgetur, & vi NM
per rectam Pm trahitur, tempore quam
minimo, vi compositâ, describet lineolam
Pπ quæ non est in plano CPT, sed ab
eo deflectit versus Pm, adeoque corpus
moveretur in plano TPπ quod productum
plano EST non occurreret in C sed ultra
C versus oppositionem B. Centro T &
intervallo TP describatur in plano EST
circulus CaDb, in plano CPD circuli
arcus PC, & in plano πPT arcus Pc
circulo CaDb, occurrens in c. Et quo-
niam vis NM minima est respectu vis re-
volutionis corporis P, angulus Cpc, in-
clinationis planorum CPT & cPT mi-
nimus est seu infinitesimus, & arcus Pc
ab arcu PC non nisi minimâ seu infinite-
simâ quantitate differt; quare cum (ex
hyp.) arcus PC à quadrante CA diffe-
rat finitâ quantitate PA, summa arcuum
PC, Pc semicirculo minor est, & hinc
in triangulo spherico CPc, angulus ex-
ternus Pca (per prop. 13. sphericorum

Menelai, vel per theor. 33. Sphericorum
Clariffi Wolfii), major est angulo inter-
no opposito PcC, hoc est, inclinatio
plani cPT ad planum immotum EST mi-
nor est inclinatione plani CPT ad idem
platum EST. In transitu igitur corporis
P à quadraturâ C ad conjunctionem A
orbitæ inclinatio perpetuò minuitur, &
quoniam nodus C transfertur in c, fitque
proinde obviam corpori revolventi, nodi
regrediuntur. Eodem modo demonstratur
inclinationem minui & nodos regredi in
transitu corporis à quadraturâ D ad op-
positionem B. Jam feratur corpus à con-
junctione A ad quadraturam proximam D,
& in loco quovis P, duplici vi, nempe
vi revolutionis per arcum Pp & vi NM
per rectam Pm urgetur, atque adeo des-
cribit lineolam Pπ, quæ ab arcu Pp ver-
sus Pm declinat. Quare si centro T &
intervallo TP describantur ut supra tres
arcus PD, aD, Pd, eodem modo de-
monstrabitur nodum D transferri in an-
tecedentia in d, & angulum Pda majorem
esse angulo interno opposito Pdd, hoc
est, inclinationem orbitæ augeri in tran-
situ corporis P, à conjunctione ad qua-
draturam proximam, & eadem eodem mo-
do ostenduntur fieri in transitu ab oppo-
sitione B ad quadraturam C. Q. E. D.
(o) * Corpore in syzygiis existente. Vis
enim NM, cæteris paribus maxima est in
syzygiis (501).

DE MOTU
CORPO-
RUM.

tuantur in octantibus post quadraturas, id est, inter C & A , D & B , intelligitur ex modo expositis, quod, in transitu corporis P à nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usque ad quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea denuò in transitu per alios 45 gradus, usque ad nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, (r) & propterea minor est semper in nodo subsequente quam in præcedente. (r) Et simili ratiocinio, inclinatio magis augetur, quam diminuitur, ubi nodi sunt



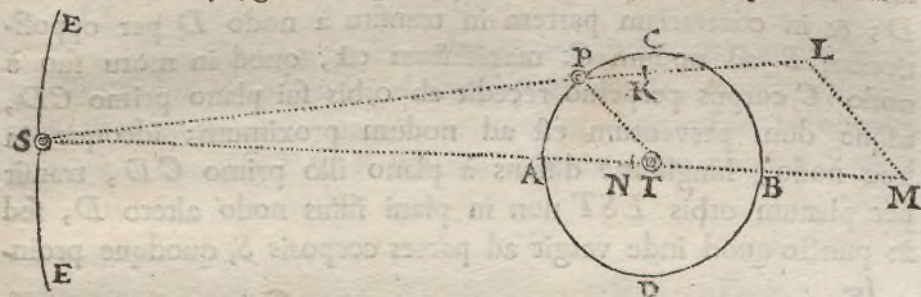
(r) * Et propterea minor est semper inclinatio in nodo subsequente quam in præcedente, quod verum quoque est, ubicumque continuatur nodus K inter c & a , ut patet ex ipsis demonstrationibus in notis 507. & 508. traditis.

(r) 509. Et simili ratiocinio &c. Si nodus K constituatur inter quadraturam C vel c & oppositionem B vel b , & nodus oppositus L inter quadraturam D vel d , & conjunctionem A seu a , feraturque corpus à nodo K per C ad alterum nodum L . 1^o. In transitu corporis à nodo ad quadraturam proximam inclinatio plani perpetuo augetur & nodi progrediuntur. 2^o. In transitu a quadraturâ C vel D ad gradum à nodo nonagesimum F vel G inclinatio minuitur & nodi regrediuntur. 3^o. In transitu à gradu illo 90^o. ad nodum proximum inclinatio augetur & nodi regrediuntur. 2^{um}. & 3^{um}. demonstrantur prorsus ut in notâ 507. 1^{um}. verò ita of-

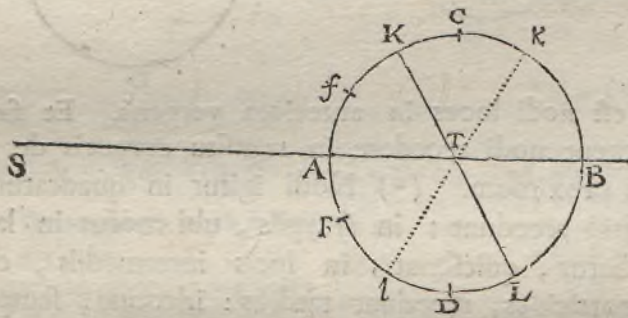
tenditur. Dum corpus P versatur inter nodum K & quadraturam C , vi revolutionis urgetur per arcum Pp , & vi NM trahitur secundum directionem Pm in plagam M , adeoque vi utraq; describet tempusculo minimo lineolam $P\pi$, quæ ab arcu Pp deflectet versus Pm ; quare si centro T , radio TP , describantur ut supra arcus PK , πPK , $Kkca$ in planis $TP\pi$, TPk , EST patet propositum, ut in notâ 507.

510. Coroll. Ex tribus superioribus demonstrationibus (507. 508. 509.) inter se collatis manifestum est nodos progredi quamdiu corpus P inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximam versatur; eos verò regredi, dum corpus P in aliis quibuslibet locis versatur. Unde sequitur in singulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus nodos magis regredi quam progredi, adeoque absolute regredi nisi fuerint in syzygiis.

sunt in octantibus alteris inter A & D , B & C . (t) Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum à syzygiis ad quadraturas, in singulis corporis ad no-



dos appulsibus, diminuitur; fitque omnium minima, ubi nodi sunt in quadraturis, & corpus in syzygiis: dein crescit iisdem gradibus, quibus antea decreverat, nodisque ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur. Co.



(t) * Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis &c. Quoniam in singulis corporis P à nodo ad nodum revolutionibus, linea nodorum regreditur (510) & in transitu nodorum à syzygiis A & B ad quadraturas C & D , inclinatio orbitæ perpetuò minuitur (508.) deinde verò in transitu nodorum à quadraturis C & D , ad syzygias B , & A , perpetuò augetur (509), manifestum est inclinationem minimam esse ubi nodi sunt in quadraturis & corpus P in syzygiis (in quibus vis NM , cæteris paribus, maxima est) & maximam inclinationem esse ubi nodi sunt in syzygiis. Porrò sint nodi K & L inter C & A , D & B primum, deinde regrediendo transeant in loca k & l , inter C & B , D & A , sintque arcus CK & Ck , æquales,

In primo casu inclinatio minuitur in transitu corporis P, per quadrantem KF , (509.) & in secundo casu æqualibus viribus augetur per quadrantem fl , (509). In primo casu inclinatio augetur per arcum FD (508.), & in secundo casu æqualibus viribus minuitur per arcum $cf = FD$ (509.) Tandem in primo casu, inclinatio minuitur per arcum DL , (508.) & in secundo casu augetur æqualibus viribus per arcum æqualem kC , (509). Quare, cæteris paribus, in transitu nodorum à quadraturis ad syzygias inclinatio planorum iisdem gradibus crescit quibus antea decreverat in transitu nodorum à syzygiis ad quadraturas, ideoque nodis ad syzygias proximas appulsis, ad magnitudinem primam revertitur. K k k 2

DE MOTU
CORPO-
RUM.

tâque ideo ipsius vi centripetâ à quâ errores corporis P oriuntur, evadent errores illi omnes, paribus distantis, majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus S circum systema corporum P & T revolvitur.

Corol. 14. (2) Cum autem vires NM , ML , ubi corpus S longinquum est, sint quamproximè ut vis SK & ratio PT ad ST conjunctim, hoc est, si detur tum distantia PT , tum corporis S vis absoluta, ut ST cub. reciprocè; sint autem vires illæ NM , ML causæ errorum & effectuum omnium, de quibus actum est in præcedentibus corollariis: manifestum est, quod effectus illi omnes, stante corporum T & P systemate, & mutatis tantum distantia ST & vi absolutâ corporis S , sint quamproximè in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ

(2) 512. * Cum autem vires NM , ML &c. Ob magnam distantiam corporis S , erit ferè LS parallela MS , & $SN=ST=SK$, ac $ML=PT$; & quoniam NM in syzygiis est ut ML in quadraturis (501). Si auctâ vel diminutâ actione corporis S , orbita $CADB$ unâ cum lineis hinc pendentibus PT , NM , ML augeatur vel diminuat (cor. 6. hujus prop. 66.) tres illæ lineæ in eâdem ferè ratione inter se (cæteris paribus) augetur vel diminuentur. Est autem vis ML ad vim SK ut recta ML ad rectam SK , seu quam proximè ut PT ad ST ; Quare vis ML (adeoque & vis NM) est quam proximè ut vis SK & ratio PT , ad ST , conjunctim, hoc est, si vis acceleratrix SK dicatur A ut $\frac{A \times PT}{ST}$. Porro datâ vi absolutâ corporis S , vis acceleratrix A in distantia SK seu ST est ut $\frac{1}{ST^2}$, (ex hyp.) Quare vires NM , ML , datâ vi absoluta corporis S , sunt ut $\frac{PT}{ST^3}$; hoc est (si detur distantia PT) ut ST^3 reciprocè. Verùm si variabilis sit vis absoluta V corporis S , erit vis acceleratrix A in distantia ST , ut vis absoluta V directè & quadratum distantia ST inversè, (nam manente vi absolutâ corporis S , vis acce-

leratrix est ut ST^2 inversè, & manente distantia ST vis acceleratrix est ut vis absoluta directè, proindeque variantibus vi absolutâ & distantia simul, vis acceleratrix est ut vis absoluta directè & quadratum distantia inversè); Quare si loco vis acceleratricis A ratio illa composita in facto $\frac{A \times PT}{ST}$ ponatur, vires NM , ML erunt quam proximè ut $\frac{V \times PT}{ST^3}$, seu datâ PT , ut $\frac{V}{ST^3}$, hoc est in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis S , & ratione triplicatâ inversâ distantia ST . Vis autem absoluta corporis S , est (ex Dem.) in ratione compositâ vis acceleratricis A & quadrati distantia ST , & vis acceleratrix A in distantia ST est (per coroll. 2. prop. 4.) in ratione compositâ ex ratione directâ distantia ST & ratione duplicatâ inversâ temporis periodici corporis T circum S ad distantiam ST circum descriptentis, adeoque vis absoluta corporis S est ut cubus distantia ST directè, & quadratum temporis periodici corporis T inversè. Quare vires NM , ML (earumque effectus) quæ sunt directè ut vis absoluta, & inversè ut cubus distantia, sunt reciprocè in duplicatâ ratione temporis periodici corporis T .

DE MOTU
CORPO-
RUM.

tetur eorum magnitudo, & si corporum S & T vel maneant, vel mutantur vires in datâ quâvis ratione; (c) hæ vires (hoc est, vis corporis T , quâ corpus P de recto tramite in orbitam PAB deflectere, & vis corporis S , quâ corpus idem P de orbitâ illâ deviare cogitur) agunt semper eodem modo, & eâdem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes, & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut orbium diametri, angulares verò iidem, qui prius, & errorum linearium similium, vel angularium æqualium tempora ut orbium tempora periodica.

Corol. 16. Unde, si dentur orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutantur utcumque corporum magnitudines, vires & distantix; ex datis erroribus & errorum temporibus in uno casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proximè: sed brevius hæc methodo. (d) Vires NM , ML , cæteris stantibus, sunt ut radius TP , & harum effe-

(c) * *Hæ vires &c.* Vis acceleratrix quâ corpus P in loco P versus T trahitur, est (512) ad vim acceleratricem quâ versus S urgetur, in ratione compositâ ex ratione directâ vis absolutæ corporis T ad vim absolutam corporis S , & ratione inversâ duplicatâ distantix PT ad distantiam PS . Quare si vires absolutæ & distantix in datis rationibus mutantur, manebit eadem virium acceleratricium ratio, & ob figurarum similitudinem, in similibus corporum P , T , S positionibus, antè & post distantias viresque mutatas omnium linearum SP , SK , ML , SM , NM , &c. eadem manet ratio, atque adeo vires agunt semper eodem modo & eâdem proportione. Necesse igitur est ut antè & post distantias, & vires mutatas in datis rationibus, similes ac proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora (196) hoc est, errores omnes lineares similes à viribus ML , NM producti, seu deviationes corporis P in longitudinem & latitudinem à locis illis in quibus versaretur, si viribus perturbantibus ML , NM non

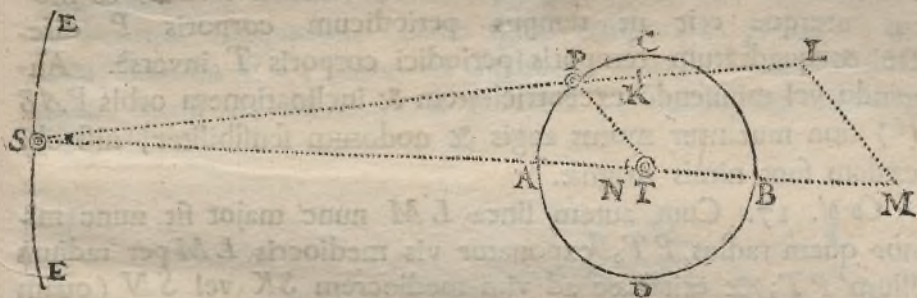
agitaretur, sunt ut orbium diametri, & anguli sub quibus è centro T deviationes illæ similes videntur, semper manent æquales, ut patet ex naturâ figurarum similium (Lem. V. & not. 112), & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora, sunt ut orbium tempora periodica (196). Hæc omnia etiam obveniunt, ubi corporum duorum T , & P systema circâ corpus S revolvitur, ut patet, si loco orbis ESE in demonstratione ponatur orbis quem corpus T circum S describit.

(d) * *Vires NM , ML &c.* Quoniam vires NM , ML sunt (cor. 14.) ut vis SK & ratio PT ad ST conjunctum, manentibus vî SK & ST erunt vires illæ ut radius TP & proinde aucto vel diminuto radio illo TP , manent in datâ inter se ratione, & quoniam ob longinquitatem corporis S ad similes orbis variabilis PAB (sed sibi semper similis & æquè inclinati) partes similiter applicantur quamproximè, illarum effectus periodici (per coroll. 2. Lem. X.) sunt ut vires ipsæ & quadratum temporis periodici corporis P circum T

con-

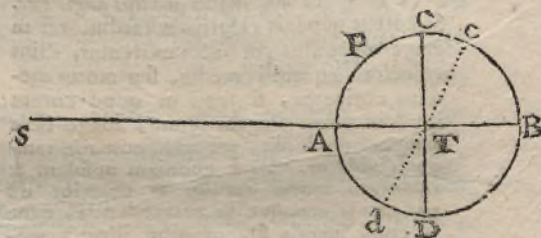
effectus periodici (per corol. 2. lem. x.) ut vires, & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares è centro *T* spectati (id est, tam motus augis & nodorum, quàm omnes

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXVI.
THEOR.
XXVI.



in longitudinem & latitudinem errores apparentes) sunt, in quâlibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis revolutionis quam proximè. Coniungantur hæ rationes cum rationibus corollarii XIV. & in quolibet corporum *T*, *P*, *S* systemate, ubi *P* circum *T* sibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum re-

conjunctim, hoc est, ut radius *TP*, & quadratum temporis periodici corporis *P* quamproximè. Porro si in orbitâ circulari vel circulo finitima *PAB*, sit arcus *Dd* error linearis periodicus v. gr. nodi *D* in antecedentia ad *d* regressi tempore unius revolutionis corporis *P* circum *T*, angulus *DTd*, sub quo error ille *Dd* è centro *T* videtur, hoc est, error angularis periodicus erit $= \frac{Dd}{TD}$ (154). Erro-



res igitur angulares periodici sunt ut errores lineares directe & radius *TD* vel *TP* inversè, adeoque ut quadratum temporis periodici corporis *P* quamproximè. Et hæc quidem vera sunt stantibus vi absolutâ corporis *S* & distantia *ST* & variantibus radio *TP* ac tempore periodico corporis *P*; verum stantibus radio *TP* & tempore periodico corporis *P* & variantibus vi absolutâ corporis *S* atque distantia *ST*, errores periodici tum lineares, tum angulares sunt (coroll. 14.) recipro-

cè ut quadratum temporis periodici corporis *T* circum *S*, quare variantibus tum radio *TP*, & tempore periodico corporis *P*, tum radio *ST*, atque vi absolutâ corporis *S*, errores angulares corporis *P* de centro *T* apparentes, erunt in singulis revolutionibus corporis illius *P* circum *T*, in ratione ex binis superioribus rationibus compositâ, seu erunt ut quadratum temporis periodici corporis *P*, directe & quadratum temporis periodici corporis *T*, inversè.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

volvitur, errores angulares corporis P , de centro T apparen-
tes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius P , ut qua-
dratum temporis periodici corporis P directè, & quadratum tem-
poris periodici corporis T inversè. (e) Et inde motus medius
augis erit in datâ ratione ad motum medium nodorum; & mo-
tus uterque erit ut tempus periodicum corporis P dire-
ctè & quadratum temporis periodici corporis T inversè. Au-
gendo vel minuendo excentricitatem & inclinationem orbis PAB
(f) non mutantur motus augis & nodorum sensibiliter, nisi ubi
eædem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea LM nunc major sit nunc mi-
nor quam radius PT , exponatur vis mediocri LM per radium
illum PT ; & erit hæc ad vim mediocrem SK vel SN (quam
exponere licet per ST) ut longitudo PT ad longitudinem ST .
Est autem vis mediocri SN vel ST , quâ corpus T retinetur
in orbe suo circum S , ad vim, quâ corpus P retinetur in or-
be suo circum T , (g) in ratione compositâ ex ratione radii
 ST , ad radium PT , & ratione duplicatâ temporis periodici

COR-

(e) * *Et inde motus medius augis &c.*
Si corpus quodvis celerius & tardius vel in
piagas oppositas per vices moveatur, illius
velocitas æquabilis media, seu motus me-
dius obtinetur; si spatium quod corpus
illud in unam plagam latum, longo satis
tempore percurrit, per illud notabile tem-
pus dividatur. Hinc quoniam apsidum &
nodorum motus tardior & celerior est
per vices, nuncque in antecedentia, nunc
in consequentia fit, invenitur illorum mo-
tus medius angularis, si spatium angulare
totum, quod plurimum revolutionum corpo-
ris P tempore describunt, per illud tem-
pus dividatur. Quare cum motus angula-
ris periodicus augis & nodorum sit (ex
Dem.) ut quadratum temporis periodici
corporis P directè, & quadratum tempo-
ris periodici corporis T inversè, si ratio
hæc composita per tempus periodicum
corporis P pluries sumptum dividatur, erit
quotiens seu motus medius angularis au-
gis & nodorum ut tempus periodicum cor-
poris P directè & quadratum temporis pe-

riodici corporis T inversè; & inde motus
medius augis & nodorum, qui sunt ambo
ut eadem quantitas, seu ut tempus perio-
dicum corporis P directè & quadratum
temporis periodici corporis T inversè, da-
tam habent ad se mutuo rationem.

(f) * *Non mutantur &c.* Nam vires
 ML , NM motuum augis & nodorum pro-
ductrices, cæteris stantibus, non multum
mutantur, si augeatur vel minuat ex-
centricitas & inclinatio orbis PAB , nisi
magna satis fuerit illa mutatio, ut patet
ex ratione quâ vires illæ ML , NM prop.
66. determinantur.

(g) * *In ratione compositâ ex ratio-
ne radii ST &c.* Nam (per cor. 2. prop.
4.) vis acceleratrix mediocri ST quâ
corpus T circum S ad distantiam ST cir-
culum vel orbem circulo finitimum des-
cribere supponitur, est ad vim similem
quâ corpus P in orbitâ suâ circulari vel
circulo finitimâ retinetur in ratione com-
positâ ex ratione radii ST ad radium PT
directè, & ratione duplicatâ temporis pe-

132

DE MOTU
CORPO-
RUM.

quiescent in syzygiis; extra syzygias verò movebuntur in antecedentia, & velocissimè quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annulli quoque inclinatio variabitur, (i) & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completâque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quâtenus per præcessionem nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam globum corporis *T*, ex materiâ non fluidâ constantem, ampliari & extendi usque ad hunc annulum, & alveo per circuitum excavato continere aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore corollario) (k) in syzygiis velocior erit, in quadraturis tardior quam superficies globi, & sic fluet in alveo refluetque ad modum maris. Aqua, revolvendo circa globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis *S*, nullum acquireret motum fluxus & refluxus. (l) Par est ratio globi uniformiter progredientis in directum, & interea revolventis circa centrum suum (per legum corol. v.) ut & globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, (per legum corol. 6.) Accedat autem corpus *S*, & ab ipso inæquabili attractione mox turbabitur aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. (m) Vis autem *LM* trahet aquam deorsum in quadraturis, facietque ipsam

(i) * *Et axis ejus seu recta per centrum annuli ducta ad planum ejus perpendiculariter, cum plano illo singulis revolutionibus oscillabitur, hoc est, ad planum EST magis & minus per vices inclinabitur (cor. 10.) completâque &c. totum verò corollarium patet ex coroll. 3. 5. 10. 11. 13.*

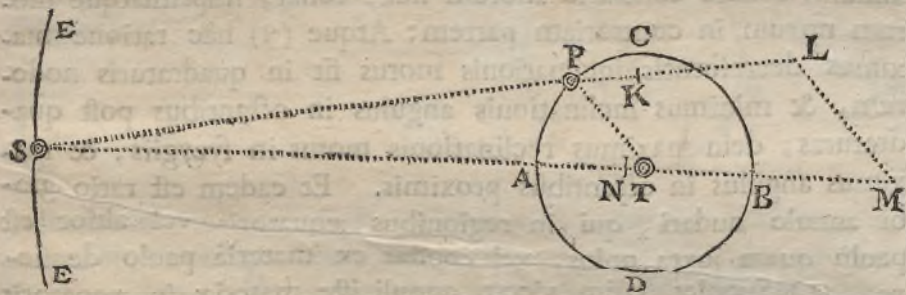
(k) * *In syzygiis velocior erit &c. Per cor. 18. & 3. Nam velocitas uniformis quâ globus circa axem suum revolvitur eodem tempore periodico quo pars quælibet fluidi suam revolutionem absolvit, media erit inter maximam velocitatem fluidi in syzygiis & minimam in quadraturis.*

(l) * *Par est ratio &c. Id est, exclusâ actione corporis *S* aqua uniformiter*

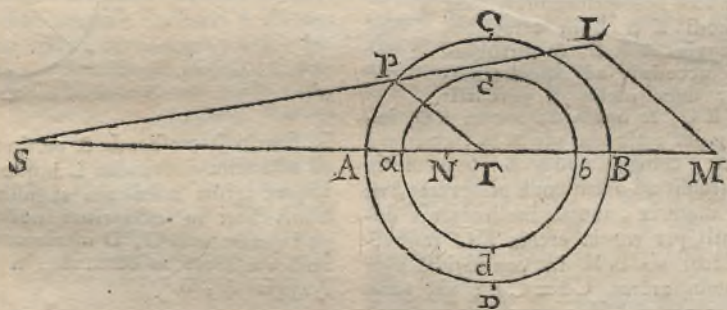
revolvendo circum centrum globi vel uniformiter moti in directum vel de cursu rectilineo per lineas parallelas uniformiter tracti, nullum acquireret motum fluxus & refluxus, accedat autem &c.

(m) * 514. *Vis autem LM &c. Patet per coroll. 5. Verum ut totum hoc corollarium 19^{um} clarius intelligatur, sit ca d b globi solidi æquator hoc est, circulus globi maximus ad axem rotationis globi perpendicularis CADB zona fluida factis profunda, seu annulus fluidus globi ei recompositus, & supponendo quod centrum gravitatis globi solidi accuratè vel quamproximè concidat cum figuræ centro *T*, globus eodem quamproximè modo trahetur à corpore longinquo *S*, & trahet ipse particulam *P* fluidi (71) ac si tota illius*

ipsam descendere usque ad syzygias; & vis KL trahet eandem fursum in syzygiis, sistetque descensum ejus & faciet ipsam ascendere usque ad quadraturas: nisi quatenus motus fluendi & refluxi ab alveo aquæ dirigatur, & per frictionem aliquatenus retardetur.



Corol. 20. Si annulus jam rigeat, & minuatur globus, cessabit motus fluendi & refluxi; (n) sed oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio nodorum manebunt. Habeat globus eundem axem cum annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, & superficie suâ contingat ipsum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusque oscillabitur, & nodi regredientur. (o) Nam globus, ut mox dicetur, ad



illius massa esset in centro T coacta (quod quidem accurate verum esse quibusdam in casibus postea demonstrabitur), sed hic approximatio sufficit; quare fluidi particula quævis P à corpore S inæqualiter attracta totiusque proinde annulus movebun-

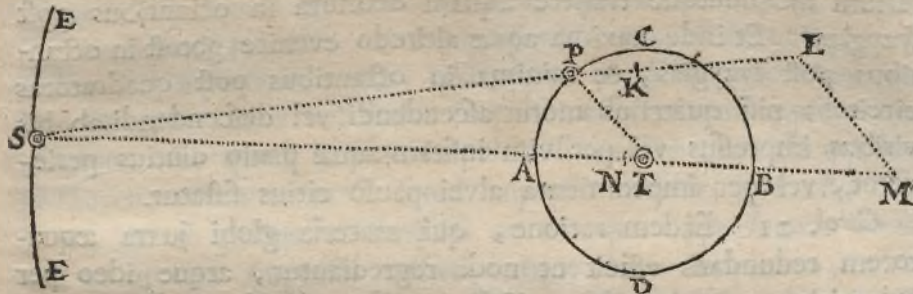
tur, ut in coroll. 19. ex corollariis præcedentibus determinatum est.

(n) * Sed oscillatorius ille &c. Patet per cor. 18. & not. superiorem.

(o) * Nam globus indifferens est &c. Lique; etiam ex legibus 1^a. & 2^a. & not. 9^a.

sum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen phænomena hujus & præcedentis corollarii (f) vix inde mutabuntur; nisi quod loca maximarum & minimarum altitudinum

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXVI.
THEOR.
XXVI.



aquæ diversa erunt. Aqua enim jam in orbe suo sustinetur & permanet, non per vim suam centrifugam, sed per alveum in quo fluit. Et præterea vis LM trahit aquam deorsum maxime in quadraturis, & vis KL seu NM-LM trahit

(f) * Vix inde mutabuntur. Nam major partium globi in centrum T gravitas non impedit quin annulus fluidus vel solidus, impressiones virium LM, NM suscipiat, loca tamen maximarum & minimarum altitudinum aquæ diversa erunt. Hucusque enim supposuimus particulas aquæ ex virium centripetæ & centrifugæ æquilibrio, in orbe suo sustineri & permanere instar corporis solitarii P circum T in spatio libero revolventis; atque inde ex cor. 5. ostensum est in cor. 18. maximam aquæ altitudinem in quadraturas incidere, minimam in syzygias. Verùm si manente eadem vi centrifugâ augeatur vis centripeta, seu gravitas particularum aquæ, particula illa non vi suâ centrifugâ, sed alvei parietibus, ut in mari atque fluminibus telluris contingit, sustinetur & in orbe suo permanet ac proinde non amplius ad legem corporis solitarii circum centrum T, in spatio libero revolventis à centro illo T recedunt, vel ad illud accedunt. Loca igitur maximarum & minimarum altitudinum aquæ diversa erunt, velocitas tamen partium aquæ, cæteris paribus, maxima erit in syzygiis, minima in quadraturis (per cor. 3). Præterea vis LM addititia trahit aquam deorsum,

seu ad centrum T, maxime in quadraturis (513.) & vis ablatitia KL trahit eandem sursum, maxime in syzygiis (501) & idem si globus cum aquâ circumpositâ non revolveretur circa centrum T, minima æquatam altitudines in quadraturis C & D, maximæ in syzygiis A & B essent; verum revolvente cum globo aquâ à C ad A, vis addititia post quadraturas agens, aquam deorsum semper urget, donec vi ablatitiâ vincatur; & similiter hæc vis ablatitia post syzygias sursum trahit aquas, quarum proinde minima altitudines non incident in quadraturas, sed post quadraturas, maxima verò post syzygias. Insuper rotatio globi circa proprium axem maximas aquarum altitudines à syzygiis A & B versus quadraturas D & C transfert, intereadum vires LM, NM simul junctæ maximas eas aquarum altitudines in syzygiis instaurare perpetuò nituntur, aqua autem à C & D continuò fluit versus A & B, dum elevatio ab A versus D & à B versus C transfertur, & idem inter A & D ut & inter B & C dantur duo motus contrarii quibus aqua accinulatur ita ut altitudines maximæ inter hæc puncta incidant fere circa octantes.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

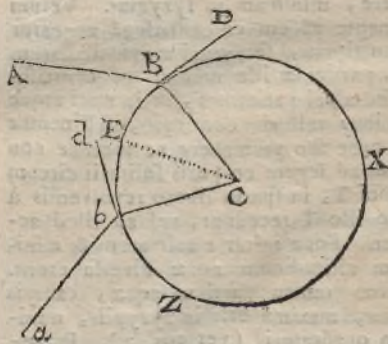
hit eandem sursum maximè in syzygiis. Et hæ vires conjunctæ desinunt trahere aquam deorsum & incipiunt trahere aquam sursum in octantibus ante syzygias, ac desinunt trahere aquam sursum incipiuntque trahere aquam deorsum in octantibus post syzygias. Et inde maxima aquæ altitudo evenire potest in octantibus post syzygias, & minima in octantibus post quadraturas circiter; nisi quatenus motus ascendendi vel descendendi ab his viribus impressus vel per vim insitam aquæ paulò diutius perseveret, vel per impedimenta alvei paulò citius sistatur.

Corol. 21. Eâdem ratione, quâ materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut nodi regrediantur, atque ideo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem vero diminuitur, & per ablationem tollitur; (r) si materia plusquam redundans tollatur, hoc est si globus juxta æquatorem vel depressior reddatur, vel rarior quam juxta polos, orietur motus nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu nodorum innotescit constitutio globi. Nimirum si globus polos eosdem constanter servat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone globum uniformem & perfectè circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque obliquè in superficiem suam facto propelli, & motum inde concipere (u) partim circula-
rectum

(r) * Si materia plusquam redundans tollatur, seu si materia redundans negativa fiat, motus nodorum qui erat in antecedentia, negativus evadet, hoc est, orietur motus nodorum in consequentia.

(u) * Partim circula-
directum. Vis AB quâ globus BXZ obliquè impellitur, secundum directionem AB, in duas vires resolvitur, quarum altera ad centrum C juxta radium BC dirigitur, ei motum globi in directum producit; altera secundum tangentem BD radio BC normalem agit, & motum rotationis circa axem plano ABDXC perpendiculararem inducit.

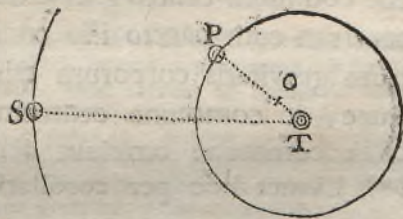


tum globi, facietque ut poli ejus errent per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuò describant. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in casu (per corol. XXI.) nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, quâ ratione (per corol. XX.) nodi regredientur; vel denique ex alterâ axis parte addendo materiam novam, quâ mons inter movendum libretur, & hoc pacto nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius *S*, circa interiorum *P*, *T* commune gravitatis centrum *O*, radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum *T*, radiis ad ipsum ductis, describere potest.

Nam corporis *S* attractiones versus *T* & *P* componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum *T* & *P* commune gravitatis centrum *O*, quam in corpus maximum *T*, quæque quadrato distantiæ *SO* magis est proportionalis reciproçè, quam quadrato distantiæ *ST*: (c) ut rem perpendenti facile constabit.



circulos *H X K H*, *M Z L M* describunt in superficie globi circa puncta *P*, *p*, sive circa loca polorum antequam materia in *N* addita esset. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro *p* vel *P* ubi polus non magis in unam partem trahit quam in alteram; vel in æquatore *E Y Q*, ubi polus unum non magis trahit quam alterum, vel ex alterâ axis parte in *O* ad-

dendo materiam novam quâ motus in *N* inter movendum libretur, seu quâ axis in partes oppositas æquè trahatur, vel etiam addendo materiam novam ex alterâ æquatoris parte in *R*, quâ polus *P* tantum trahatur quantum polus *p* à materiâ in *N* positâ.

(c) * Ut rem perpendenti facile constabit. Nam vis acceleratricis compositæ quâ corpus *S* à corporibus *T* & *P* trahi-

collatum cum demonstratis in prop. LXIV. & LXV. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum à centro, in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio, ubi commune trium centrum quiescit; hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major semper, ubi trium commune illud centrum, (f) minuendo motum corporis *T*, moveri incipit, & magis deinceps magisque agitur.

Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod orbitæ descriptæ propius accedent ad ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directè & quadrata distantiarum inversè, se mutuo trahant agitentque, & orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum ([g] nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste

ter-

ter coincideret cum centro *O* gravitatis communi duorum corporum *P* & *T* hæc duo corpora *P* & *T* ellipses accuratas seorsim describerent circum se mutuo & circum centrum illud *O* (per coroll. 2. prop. 58). Et præterea corpus *S* ex unâ parte & duorum aliorum systema tanquam unum corpus consideratum, hoc est, eorum commune gravitatis centrum *O* ex alterâ parte ellipses accuratas describerent circum commune trium *S*, *T*, *P* centrum gravitatis quiescens (per coroll. 2. prop. 58). Quod adhuc clarius intelligitur, si legantur propositiones 64. 65. Perturbatur iste motus ellipticus aliquantulum per distantiam centri *O*, duorum *P* & *T* à centro in quod tertium *S* trahitur. Detur præterea motus non uniformis in directum communi trium centro, (quod continget, si corpus intimum & maximum *T*, lege cæterorum non attrahitur, ut ex dictis patet) & augebitur perturbatio, proinde &c.

(f) * Minuendo motum corporis *T* &c.

Quâ ratione fit ut centrum commune trium corporum, interea dum corpora *S* & *P* moventur, nunc accedat ad corpus *T* nunc ab illo recedat, pro mutata corporum illorum distantia, & hinc magis ac magis perturbabitur motus ellipticus & magis ac magis deinceps agitur centrum commune gravitatis trium corporum.

(g) * Nimirum umbilicus orbitæ primæ & intimæ, quam v. gr. corpus parvum *P* hic describit in centro gravitatis corporis maximi & intimi *T* quod fere coincidit cum communi centro *O* gravitatis duorum *P* & *T* (per cas. 1. prop. 65); umbilicus orbitæ secundæ quam v. gr. corpus *S* describit in communi centro gravitatis *O*, corporum duorum intimorum *P* & *T*; umbilicus tertie orbitæ quam aliud corpus longius distans describeret in communi centro gravitatis trium interiorum *P*, *T*, *S* &c. Nam idem est ratiocinium seu tria seu quatuor aut plura sint corpora (ut in prop. 64. 65.)

M m m 3

DE MOTU
CORPO-
RUM.

tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In systemate corporum plurium A, B, C, D, &c. si corpus aliquod A trahit cætera omnia B, C, D, &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproçè ut quadrata distantiarum à trahente, & corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D, &c. viribus quæ sunt reciproçè ut quadrata distantiarum à trahente: erunt absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires.

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium B, C, D versus A, paribus distantis, sibi invicem æquantur ex hypothese; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus B, paribus distantis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis A ad vim absolutam attractivam corporis B, (h) ut attractio acceleratrix corporum omnium versus A ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus B, paribus distantis; (i) & ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B. Sed attractio acceleratrix corporis B versus A est ad attractionem acceleratricem corporis A versus B, ut massa corporis A ad massam corporis B; propterea quod vires motrices, quæ (per definitionem secundam, septimam & octavam) sunt ut vires acceleratrices & corpora attracta conjunctim, hic sunt (per motus legem tertiam) (k) sibi invicem æquales. Ergo absoluta vis attractiva corporis A est ad abso-

(h) * Ut attractio acceleratrix corporum omnium, seu ut attractio acceleratrix uniuscujusque corporis versus A &c. Patet enim quod si vis absoluta dupla vel tripla &c. sit, actio quoque acceleratrix in distantia datâ dupla vel tripla erit.

(i) * Et ita est attractio acceleratrix corporis B versus A, ad attractionem acceleratricem corporis A versus B, ob distan-

tiam inter B & A, & A & B eandem.

(k) * Sibi invicem æquales. Si enim attractio acceleratrix corporis B versus A dicatur V & attractio acceleratrix corporis A versus B dicatur v; vis motrix in B erit B x V; in A erit A x v; & (per leg. 3^{am}.) B x V = A x v. Unde V : v = A : B. Ergo absoluta &c.

lutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si singula systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt vel reciprocè, vel directè in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum à trahente, quæve secundum legem quamcunque communem ex distantibus ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires ⁽¹⁾ absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In systemate corporum quorum vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum, si minora circa maximum in ellipsis, umbilicum communem in maximi illius centro habentibus, ^(m) quam fieri potest accuratissimis revolvantur; & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accuratè aut quamproximè, in ratione corporum; & ⁽ⁿ⁾ contra. Patet per corol. prop. LXVIII. collatum cum hujus corol. I.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXIX.
THEOR.
XXIX.

Scho.

(1) * *Vires absolutæ sunt ut corpora.* Omnia enim ratiocinia eadem manent in hujus corollarii hypothese ac in demonstratione & hypothese propositionis.

(m) * *Quam fieri potest accuratissimis revolvantur*, ut in duobus casibus prop. 65. expositum est.

(n) * *Et contra.* Si vires corporum illorum absolutæ sint ad invicem in ratione corporum, & minora corpora circa maximum in ellipsis umbilicum commu-

nem in maximi illius centro habentibus, quam fieri potest, accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maximè proportionales, corporum illorum seorsim spectatorum vires acceleratrices decrescent in ratione duplicatâ distantiarum aut accuratè aut quam proximè; ut liquet ex coroll. 2^o. prop. 58. collato cum prop. 64. 65.

Scholium.

His propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires, quæ ad corpora diriguntur, pendeant ab eorundem naturâ & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem: sive conatus iste fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per spiritus emissos se invicem agitantium; sive is ab actione ætheris, aut aëris, mediæ cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora inæstantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem *impulsus*, non species virium & qualitates físicas, sed quantitates & proportionem mathematicas in hoc tractatu expendens ut in definitionibus explicui. In mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde, ubi in physicam descenditur conferendæ sunt hæ rationes cum phænomenis; ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora spherica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere; & quales motus inde consequantur.

LXX. SECTIO XII.

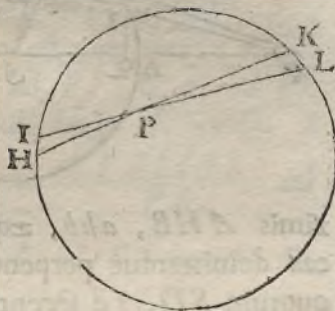
De corporum sphaericorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXX.
THEOR.
XXX.

Si ad sphaericæ superficiæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.

Sit $HIKL$ superficies illa sphaerica, & P corpusculum in-
tus constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ
 HK , IL , arcus quam minimos HI , KL intercipientes;
& ob triangu-
la HPI , LPK (per
corol. 3. lem. VII.) ($^{\circ}$) similia,
arcus illi erunt distantis HP , LP
proportionales; & superficiæ sphaeri-
cæ particulæ quævis ad HI & KL ,
rectis per punctum P transeuntibus
undique terminatæ, erunt in dupli-
catâ illâ ratione. Ergo vires harum
particularum in corpus P exercitæ sunt
inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directè, & quadrata
distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem
æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter
factæ, se mutuo destruent. Et simili argumento, attractiones
omnes per totam sphaericam superficiem à contrariis attractioni-
bus destruantur. Proinde corpus P nullam in partem his attrac-
tionibus impellitur. *Q. E. D.*



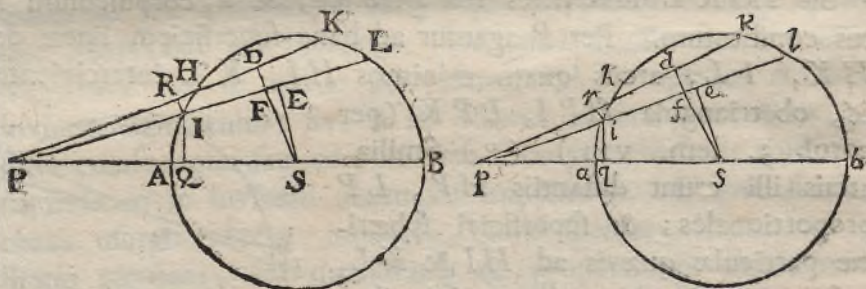
(o) * *Similia &c.* Anguli enim HPI ,
 LPK ad verticem oppositi, & anguli HIL ,
 LKH eidem arcui insidentes æquantur
(per prop. 27. Lib. 3. Elem.) Nam ar-
cus evanescentes IH , KL , pro ipsorum
chordis usurpari possunt (per cor. 3. Lem.
7.) Quare arcus HI , KL distantis HP ,
 LP proportionales sunt, & hinc si ad su-
perficiem sphaericam per punctum P ductæ
Tom. I.

intelligentur innumeræ rectæ ad arcus
quamminimos ut HI , KL terminatæ,
rectæ illæ figuras solidas (pyramides vel
conos) similes formabunt quorum bases
in superficie sphaericâ similes erunt, &
proinde (per Lem. 5.) rationem habebunt
duplicatam laterum HI , HL seu distan-
tiarum HP , LP . Ergo vires &c.

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Isdem positis, dico quod corpusculum extra sphericam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphaerae; vi reciproce proportionali quadrato distantiae suae ab eodem centro.

Sint $AHKB$, $ahkb$ aequales duae superficies sphaericae, centrīs S , s , diametris AB , ab descriptae, & P , p corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur à corpusculis lineae PHK , PIL , phk , pil , auferentes à circulis ma-



ximis AHB , ahb , aequales arcus HK , hk & IL , il : Et ad eas demittantur perpendiculara SD , sd ; SE , se ; IR , ir ; quorum SD , sd secant PL , pl in F & f : Demittantur etiam ad diametros perpendiculara IQ , iq . Evanescant anguli DPE , dpe : & (p) ob aequales DS & ds , ES & es , lineae PE , PF & pe , pf & lineola DF , df pro aequalibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis DPE , dpe simul evanescentibus, (q) est aequalitatis. His itaque constitutis, (r) erit PI ad PF ut RI ad DF , & pf ad pi ut df , vel DF ad ri ; & ex aequo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut RI ad ri , hoc est (per

(p) * Et ob aequales DS & ds , ES & es &c. (Per Prop. 14. Lib. 3. Elem.).

(q) * Est aequalitatis. Nam evanescentibus DPE , dpe angulis, puncta F , f coincidunt cum punctis E , e , & iis punctis coincidentibus, aequales sunt lineae

PE , PF & pe , pf , & lineola DF , df sunt differentiae linearum DS & ES , ds & es , ac proinde (ob aequales DS & ds , ES & es) aequantur.

(r) * Erit PI ad PF &c. Ob parallelas RI , DF & ri , df .

LIBER
PRIMUS
PROP.
LXXI.
THEOR.
XXXI.

(per corol. 3. lem. VII.) (f) ut arcus IH ad arcum ih .
(c) Rursus PI ad PS ut IQ ad SE , & ps ad pi ut se vel
 SE ad iq ; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut IQ ad iq .
Et conjunctis rationibus $PI \text{ quad.} \times pf \times ps$ ad $pi \text{ quad.} \times PF \times PS$,
ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc (u) est, ut superficies circularis,
quam arcus IH convolutione semicirculi AKB circa diame-
trum AB describet, ad superficiem circulare, quam arcus ih
convolutione semicirculi akb circa diametrum ab describet.
Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tenden-
tes attrahunt corpuscula P & p , sunt (per hypothefin) ut ipsæ
superficies directè, & quadrata distantiarum superficierum à cor-
poribus inversè, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque
hæ vires ad ipsarum partes obliquas, quæ (factâ per legum cor-
rol. 2. resolutione virium) secundum lineas PS , ps ad centra
tendunt, ut PI ad PQ , & pi ad pq ; id est (ob similia trian-
gula PIQ & PSF , piq & psf) ut PS ad PF , & ps ad pf .
Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus P versus S
ad attractionem corpusculi p versus s , ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad
 $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc (x) est, ut $ps \text{ quad.}$ ad $PS \text{ quad.}$ Et
simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum
 KL ,

(f) Ut arcus IH ad arcum ih . Nam
triangula evanescentia RHI , rhi similia
sunt ob angulos ad R & r rectos (ex hyp.)
& angulos ad H & h æquales, quos n:m-
pe metiuntur dimidii arcus æquales HK ,
 hk (per prop. 32. lib. 3. Elem.) arcus
enim HI , hi pro tangentibus in H & h
usurpari possunt (per Cor. 3. Lem. 7.).
Quare RI est ad ri , ut arcus IH ad ar-
cum ih .

(c) * Rursus &c. Ob triangula PQI ,
 PES & pqi , pes similia, est $PI:PS$
 $=IQ:SE$.

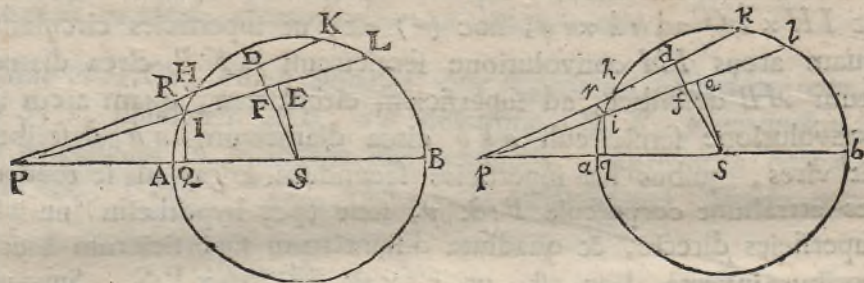
(u) 515 * Hoc est, ut superficies circula-
ris, quam arcus IH convolutione semicirculi
 AKB circa diametrum AB describet. Nam
circularis illa superficies æqualis est factò
ex peripheriâ circuli cujus radius IQ in

arcum evanescentem IH , & similiter su-
perficies circulari quam arcus ih , convo-
lutione semicirculi akb circa diametrum
 ab , describet, æquatur factò ex peripheriâ
circuli cujus radius iq , in arcum evanes-
centem ih , (152). Cum igitur periphe-
riâ circularum sint ut radii, facta illa erunt
inter se ut $IH \times IQ$, ad $ih \times iq$.

(x) * Hoc est &c. Deleto in utra-
que quantitate factò $PF \times pf$, erunt attra-
ctiones ut $\frac{ps}{PS}$ ad $\frac{PS}{ps}$, seu reducendo ad

eundem denominatorem, ut $\frac{ps^2}{PS \times ps}$ ad
 $\frac{PS^2}{ps \times PS}$, hoc est, ut ps^2 ad PS^2 .

DE MOTU CORPUSCULORUM. *KL*, *kl* descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut *ps* quad. ad *PS* quad. inque eâdem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies spherica, capiendo sem-



per *sd* æqualem *SD* & *se* æqualem *SE*, distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum sphericarum in corpuscula exercitæ erunt in eâdem ratione. *Q. E. D.*

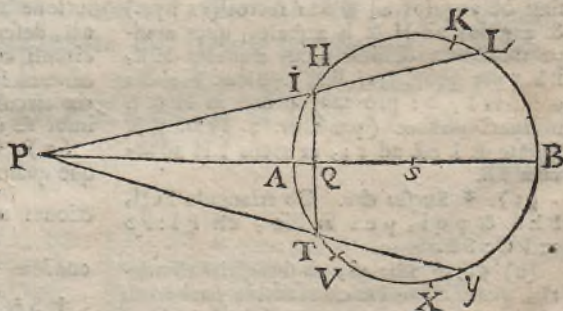
PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad spheræ cujuscvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; ac detur tum spheræ densitas, tum ratio diametri spheræ ad distantiam corpusculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiametro spheræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim à (*y*) spheris duabus attrahi, unum ab unâ & alterum ab alterâ, & distantias eo-

516. Scholium. Si ex alterâ parte diametri *AB* capiatur arcus *AT = AL*, & arcus *TV = IH*, vires obliquæ & æquales *IQ*, *TQ* sibi mutuo opponuntur, nullumque motum in corpusculo *P* producent. Unde patet vires integras in corpusculum *P* ab utroque hemispherio *AHB*, *ATB* seu à totâ superficie sphericâ exercitas esse omnino viribus ad centrum *S* tendentibus æquales.

(*y*) * *A spheris duabus homogenicis, ejusdemque densitatis itâ nempe ut sub æqualibus voluminibus æquales materiæ*



quantitates ubique contineantur, & vis absoluta attrahens sit semper ut quantitas materiæ.

* *Ad*

rum à sphaerarum centrīs proportionales esse diametris sphaerarum respectivè, sphaeras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas sphaeræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas sphaeræ alterius, in ratione compositâ ex ratione particularum directè & ratione duplicatâ distantiarum inversè. Sed particulae sunt ut sphaeræ, hoc est, in ratione triplicatâ diametrorum, & distantiae sunt ut diametri; & ratio prior directè unâ cum ratione posteriore bis inversè est ratio diametri ad diametrum.

Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si corpuscula in circulis, circa sphaeras ex materiâ æqualiter attractivâ constantes, revolvantur; sintque distantiae à centrīs sphaerarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

Corol. 2. Et vice versâ, si tempora periodica sunt æqualia, distantiae erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per corol. 3. prop. 1v.

Corol. 3. Si ad solidorum duorum quorumvis, similium & æqualiter densorum, punctâ singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; vires, quibus corpuscula, (2) ad solida illa duo similiter sita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri solidorum.

P R O

(2) * *Ad solida illa duo similiter sita*, ita ut distantiae corpusculorum à similibus solidorum duorum particulis sint ut eorum solidorum diametri.

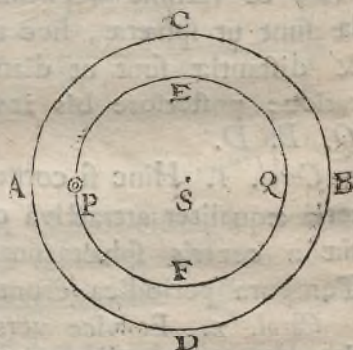
517. Scholium. Hinc si hujusmodi sphaera per centrum perforetur, æqualia erunt tempora omnia, quibus corpus de locis qui-

busvis ad centrum usque cadit, (per cor. 1. prop. 38.) & corpusculorum in hujusmodi sphaerâ per spatia libera minima revolventium tempora periodica erunt æqualia (per cor. 3. prop. 4.) atque ad hujus generis sphaeram pertinent quæ in prop. 51. 52. hujusque corollariis demonstrata sunt.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad sphaeræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quod corpusculum intra sphaeram constitutum attrahitur vi proportionali distantia suæ ab ipsius centro.

In sphaerâ $ABCD$, centro S descriptâ, locetur corpusculum P ; & centro eodem S , intervallo SP , concipie sphaeram interiorem $PEQF$ describi. Manifestum est, (per prop. LXX.) quod sphaericæ superficies concentricæ, ex quibus sphaerarum differentia $AEBF$ componitur, attractionibus suis per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus P . Restat sola attractio sphaeræ interioris $PEQF$. Et (per prop. LXXI.) hæc est ut distantia PS . Q . E . D .

*Scholium.*

Superficies, ex quibus solida componuntur, hic non sunt purè mathematicæ, sed orbes adeo tenues, ut eorum crassitudo instat nihili sit; nimirum orbes evanescentes, ex quibus sphaera ultimò constat, ubi orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta, ex quibus lineæ, superficies & solida, componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Hisdem positis, dico quod corpusculum extra sphaeram constitutum attrahitur vi reciproçè proportionali quadrato distantia suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur sphaera in superficies sphaericas innumeras con-

centricas, & attractiones corpusculi à singulis superficiebus oriundæ erunt reciprocè proportionales quadrato distantia corpusculi à centro (per prop. LXXI.) Et componendo fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in spheram totam, in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantis à centris homogeneorum spherarum attractiones sunt ut spheræ. Nam (per prop. LXXII.) si distantia sunt proportionales diametris spherarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illâ ratione; & distantis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicatâ illâ ratione; ideoque erit ad attractionem alteram in triplicatâ illâ ratione, hoc est, in ratione spherarum.

Corol. 2. In distantis quibusvis attractiones sunt ut spheræ applicatæ ad (a) quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra spheram homogeneam positum, trahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantia suæ ab ipsius centro, constet autem spheræ ex particulis attractivis; (b) decreset vis particulæ cujusque in duplicatâ ratione distantia à particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad spheræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescet in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; dico quod spheræ quævis alia similis ab eadem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantia centrorum.

Nam particulæ eujusvis attractio est reciprocè ut quadratum distantiarum.

(a) * *Ad quadrata distantiarum.* Nam æqualibus distantis, attractiones sunt ut spheræ (per cor. 1.) & æqualibus spheris, attractiones sunt ut quadrata distantiarum à centris reciprocè (per prop. 74.). Quare variantibus spheris & distantis simul, attractiones sunt ut spheræ ad quadrata distantiarum applicatæ.

(b) * *Decrescet vis particulæ cujus-*

que &c. Nam cum vis attractrix absoluta quantitati materiæ proportionalis supponatur, si vis particularum spheræ in majori vel minori ratione quam duplicatâ distantiarum à particulis decreset, corpusculum extra spheram constitutum majori vel minori vi traheretur quam reciprocè proportionali quadrato distantia à centro spheræ.

DE MOTO
CORPO-
RUM.

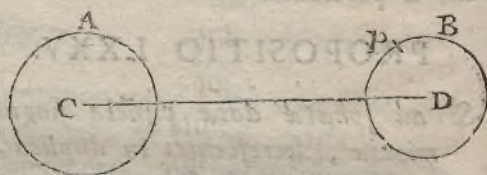
distantiæ suæ à centro sphæræ trahentis, (per prop. LXXIV.) & propterea eadem est, ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus sphæræ. Hæc autem attractio tanta est, quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud à singulis sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur, quâ ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per prop. LXXIV.) reciprocè proportionalis quadrato distantiae suæ à centro sphæræ; ideoque huic æqualis attractio sphæræ est in eadem ratione. (c) Q. E. D.

(d) Corol. 1. Attractiones sphærarum, versus alias sphæras homogeneas, sunt ut sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum à centris earum, quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet, ubi sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius eadem vi, quâ ab ipsis vicissim trahuntur; ideoque cum in omni attractione urgeatur (per legem 3.) tam punctum attrahens, quam punctum

(c) * Q. E. D. Demonstratio clarius intelligitur appositâ figurâ. Sphæra *A* sphæram similarem *B* attrahat, & vis acceleratrix quâ sphæræ *B* particula quævis *P* in centrum *C* sphæræ *A* urgetur est reciprocè ut quadratum distantiae *PC* à centro sphæræ trahentis (per prop. 74.) & propterea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico *C* sito in centro sphæræ trahentis *A*; vis autem tota acceleratrix quâ sphæra integra *B* à corpusculo *C* trahitur, tanta est quanta foret vicissim attractio ejusdem corpusculi *C* versus centrum *D* sphæræ *B*, si modo illud corpusculum *C* à singulis sphæræ *B* particulis eadem vi traheretur quâ ipsas attrahit, ut manifestum est. Foret autem (in hac hyp.) illâ corpusculi *C* versus centrum *D* attractio (per prop. 74.) reciprocè proportionalis quadrato distantiae suæ *CD* à centro *D* sphæræ *B*; Quare attractio sphæræ *B* versus *C* ut potè æqualis attractioni suppositæ corpusculi *C* versus *D*, est in eadem ratione inversâ quadrati distantiae *CD*. Q. E. D.

(d) * Cor. 1. Vis acceleratrix quâ



sphæræ *B* particula quævis *P* versus centrum *C* sphæræ *A* urgetur, est ut sphæra *A* applicata ad quadratum distantiae *CP*, (per cor. 2. prop. 74.) & propterea eadem est ac si vis tota attrahens quæ esset ut sphæra *A* manaret de corpusculo unico *C* sito in centro sphæræ trahentis *A*; & similiter sphæra tota *B* ad centrum *C* trahitur ut corpusculum unicum in centro *D* situm (per prop. 75.) vis autem acceleratrix quâ corpusculum in centro *D* positum versus *C* trahitur, est ut vis absoluta corpusculi *C* seu ut sphæra *A* directè & quadratum distantiae *CD* inversè. Quare attractiones sphærarum acceleratrices versus alias sphæras homogeneas sunt ut sphæra trahentes applicatæ &c.

tum attractum, (e) geminabitur vis attractionis mutuae, confer-
vatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quae superius de motu corporum cir-
ca umbilicum conicarum sectionum (f) demonstrata sunt, obti-
nent, ubi sphaera attrahens locatur in umbilico: & corpora mo-
ventur extra sphaeram.

Corol. 4. Ea vero, quae de motu corporum circa centrum
conicarum sectionum (g) demonstrantur, (h) obtinent ubi mo-
tus peraguntur intra sphaeram.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXXV.
THEOR.
XXXV.

P R O

(e) * Geminabitur vis attractionis mu-
tuae &c. Si sphaera A sphaeram B vi pro-
pria attrahente destitutam trahat, erit vis
acceleratrix sphaerae B versus centrum C
sphaerae trahentis A, ut $\frac{A}{CD^2}$, (per cor.
2. prop. 75.) jam si sphaerae B vis pro-
pria attrahens tribuatur, vis acceleratrix
sphaerae A versus B inde genita, erit ut $\frac{B}{CD^2}$,
& vis illius motrix (15) ut $\frac{B \times A}{CD^2}$, quae
(per Leg. 3.) aequatur vi motrici sphae-
rae B versus sphaeram A ex reactione sphae-
rae A genitae. Quare dividendo per B, vis
acceleratrix sphaerae B, versus centrum C
sphaerae A, rursus erit ut $\frac{A}{CD^2}$, ideoque
attractio tota acceleratrix sphaerae B, ver-
sus centrum sphaerae A, erit in distantia
data ut sphaera ipsa A, & in distantia va-
riabili ut sphaera A ad quadratum distan-

tiae applicata. Quod similiter dicendum
est de attractione sphaerae A versus cen-
trum sphaerae B. Observandum vero est
quod si sphaerae A & B aequales sint &
utraque vi propria attractiva quantitati
materie proportionali praedita sit, attrac-
tio mutua dupla evadit; Si vero sphaera-
rum una altera major sit vel minor, ver.
gr. sphaera B minor quam sphaera A, dum
vis attractrix propria sphaerae B accedit,
geminatur quidem attractio mutua, sed
non idcirco tamen duplicatur; nam attrac-
tio inde genita, caeteris paribus, sphaerae
B proportionalis est.

(f) * Demonstrata sunt. (In Sect.
3^a, 6^a, 7^a, 9^a, 11^a.)

(g) * Demonstrantur. (Prop. 10. 38.
47. 51. 52. 64.)

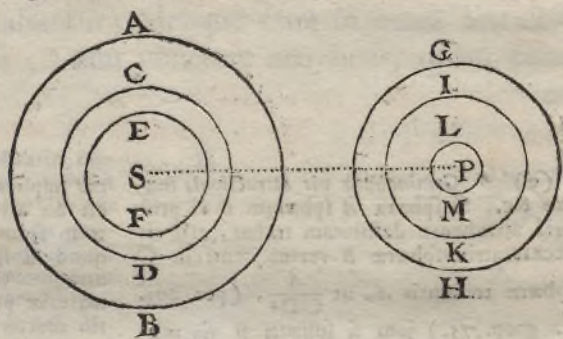
(h) * Obtenent &c. (per prop. 73.)
ubi motus peraguntur intra sphaeram, hoc
est, ubi intra sphaeram solidam via corpo-
ribus motis libera conceditur.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si sphaera in progressu à centro ad circumferentiam (quoad materiae densitatem & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu verò per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sunt undique similes; & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantiae corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujusmodi sphaera una trahit aliam, sit reciprocè proportionalis quadrato distantiae centrorum.

Sunto sphaerae quotcunque concentricae similes AB , CD , EF , &c. quarum interiores additæ exterioribus component materiam densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per prop. LXXV.) trahent sphaeras alias quotcunque concentricas similes GH , IK , LM , &c. singulae singulas, viribus reciprocè proportionalibus quadrato distantiae SP . Et (i) componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum



supra alias; hoc est; vis, quâ sphaera tota, ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita AB , trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam GH ; erit in eadem ratione. Augeatur

(i) * Et componendo, vel dividendo
Oe. Hoc est, in datâ distantia centrorum communium S, P , sit attractio sphaerarum GH, IK, LM à sphaera AB, a, b, c ; à sphaera CD, d, e, f ; à sphaera E, F, g, h, i ; variante verò illâ distantia communium centrorum S, P vires omnes illæ mutabuntur respectivè secundum rationem

illam inversam quadrati distantiae Centrorum, ergò summa vel differentia virium quibus omnes sphaerae GH, IK, LM à sphaeris AB, CD, EF trahuntur in primâ distantia, erit ad summam vel differentiam virium in altero casu inversè ut quadrata distantiarum.

tur numerus sphaerarum concentricarum in infinitum sic, ut materiae densitas unà cum vi attractivâ, in progressu à circumferentiâ ad centrum, secundum legem quamcunque crescat vel decreascat; & additâ materiâ non attractivâ, compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut sphaeræ acquirant formam quamvis optatam; & vis, quâ harum una attrahet alteram, erit etiamnum, per argumentum superius, in eâdem illâ distantiae quadratae ratione inversâ. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si eiusmodi sphaeræ complures sibi invicem per omnia similes, se mutuo trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in æqualibus quibusvis centrorum distantis, ut sphaeræ attrahentes.

(k) *Corol. 2.* Inque distantis quibusvis inæqualibus, ut sphaeræ attrahentes applicatae ad quadrata distantiarum inter centra.

Corol. 3. Attractiones verò motrices, seu pondera sphaerarum in sphaeras erunt, in æqualibus centrorum distantis, ut sphaeræ attrahentes & attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub sphaeris per multiplicationem producta.

(l) *Corol. 4.* Inque distantis inæqualibus, ut contenta illa directè & quadrata distantiarum inter centra inversè.

Corol. 5. Eadem valent, ubi attractio oritur à sphaerâ utriusque virtute attractiva mutuo exercita in sphaeram alteram.

(k) * *Cor. 2.* Attractiones acceleratrices sphaerarum GH, IK, LM &c. in sphaeras AB, CD, EF, &c. singularem verâs singulas sunt (per cor. 1. prop. 75.) ut sphaeræ trahentes applicatae ad quadrata distantiarum inter centra S, P. Quare componendo vel dividendo summa attractionum illarum omnium vel excessus aliquarum supra alias, hoc est, tota attractio acceleratrix sphaeræ compositæ GIMH versus sphaeram compositam ACFB erit ut summa vel differentia sphaerarum concentricarum similarium AB, CD, EF, &c. ad quadratum distantiae SP applicata. Sed si sphaeræ trahentes sunt sibi invicem per omnia similes, summae illae vel differentiae sunt ut sphaeræ ipsæ. Quare patet veritas Coroll. 1. & 2.

(l) * *Cor. 4.* Corollaria 3^{um} & 4^{um}. ex corollariis 1^o & 2^o. manifesta sunt; Nam attractionis quantitas motrix, seu pondus sphaeræ attractæ in sphaeram trahentem æquipollet factio ex vi accelerate ductâ in quantitatem materiae, seu in massam sphaeræ attractæ; vis autem acceleratrix (per cor. 2. prop. hujus) est ut sphaera attrahens applicata ad quadratum distantiae inter centra, & quantitates materiae in sphaeris per omnia similibus, sunt ut volumina, seu ut sphaeræ ipsæ. Quare attractiones motrices seu pondera sphaerarum in sphaeras, sunt ut contenta sub sphaeris per multiplicationem producta directè & quadrata distantiarum inter centra inversè.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

ram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servatâ.

Corol. 6. Si hujusmodi sphaeræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas; sintque distantiae inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si tempora periodica sunt æqualia; distantiae erunt ^(m) proportionales diametris.

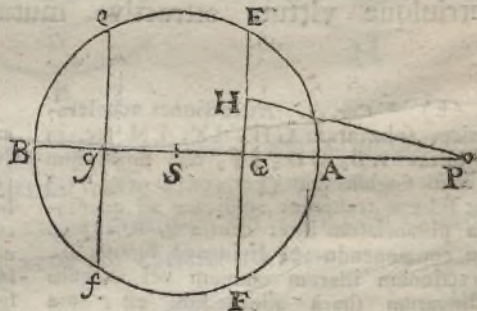
Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent; ubi sphaera attrahens formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ locatur in umbilico.

Corol. 9. ⁽ⁿ⁾ Ut & ubi gyrania sunt etiam sphaeræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula sphaerarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantis punctorum à corporibus attractis: dico quod vis composita, quâ sphaeræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra sphaerarum.

Cas. 1. Sit *AEBF* sphaera; *S* centrum ejus; *P* corpusculum attractum, *PASB* axis sphaeræ per centrum corpusculi transiens; *EF, ef* plana duo, quibus sphaera secatur, huic axi perpendicularia, & hinc inde æqualiter distantia à centro sphaeræ; *G, g* intersectiones planorum & axis; & *H* punctum quodvis in plano *EF*. Puncti *H* vis centripeta in corpusculum *P*, secundum lineam *PH* exercita, est ut distantia *PH*; & (per



le-

(m) * Proportionales diametris. Cor. 6. & 7. constant per cor. 3. prop. 4^{ta}.

(n) * Ut & ubi gyrania &c. Patet per Cor. 2. Prop. 58.

legum corol. 2.) secundum lineam PG , seu versus centrum S , ut longitudo PG . Igitur punctorum omnium in plano EF , hoc est plani totius vis, quâ corpusculum P trahitur versus centrum S , est ut distantia PG multiplicata per numerum punctorum, id est, ut solidum quod continetur sub plano ipso EF & distantia illa PG . Et similiter vis plani ef , quâ corpusculum P trahitur versus centrum S , est ut planum illud ductum in distantiam suam Pg , sive ut huic æquale planum EF ductum in distantiam illam Pg ; & summa virium plani utriusque ut planum EF ductum in summam distantiarum $PG + Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & ($^{\circ}$) corpusculi distantiam PS , hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS ; vel ut summa æqualium planorum $EF + ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in spherâ totâ, hinc inde æqualiter à centro spheræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS , hoc est, ut spherâ tota & ut distantia PS conjunctim. *Q. E. D. (P)*

Cas. 2. Trahat jam corpusculum P spheram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, quâ spherâ illa trahitur, erit ut distantia PS . *Q. E. D.*

Cas. 3. Componatur jam spherâ altera ex corpusculis innumeris P ; & quoniam vis, quâ corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi à centro spheræ primæ, & ($^{\circ}$) ut spherâ eadem conjunctim, atque ideo eadem est, ac si proderet tota de corpusculo unico in centro spheræ; vis tota, quâ corpuscula omnia in spherâ secunda trahuntur, hoc est, quâ spherâ illa tota trahitur, eadem erit, ac si spherâ illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro spheræ primæ, & ($^{\circ}$) propterea proportionalis est distantie inter centra spherarum. *Q. E. D.*

Cas.

($^{\circ}$) * Et corpusculi distantiam PS . Est enim $Pg = PG + 2GS$, adeoque $Pg + PG = 2PG + 2GS = 2PS$.

(P) * *Q. E. D.* Observandum est vires obliquas GH , in plano quovis EF , ex utraq; axis PE parte in æqualibus distantis sumptas esse æquales & opposi-

tas, nullumque proinde motum producere.

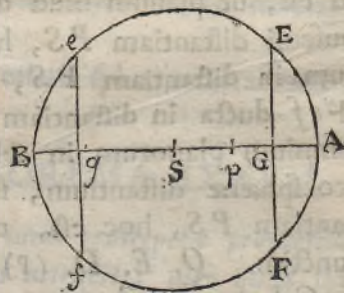
(q) * Et ut spherâ eadem conjunctim per cas. 1.

(r) * Et propterea proportionalis est distantie &c. Si data est spherâ prima trahens per cas. 2.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Cas. 4. Trahant sphaeræ se mutuo, & vis geminata propor-
tionem priorem servabit. *Q. E. D.*

Cas. 5. Locetur jam corpusculum p intra sphaeram $AEBF$; & quoniam vis plani ef in corpusculum est ut solidum contentum sub plano illo & distantia pg ; & vis contraria plani EF ut solidum contentum sub plano illo & distantia pG ; (1) erit vis ex utraque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiaë distantiarum, id est, ut summa illa ducta in pS distantiam corpusculi à centro sphaeræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium EF , ef in sphaerâ totâ, hoc est, attractio sphaeræ totius, est conjunctim ut summa planorum omnium, seu sphaera tota, & ut pS distantia corpusculi à centro sphaeræ. *Q. E. D.*



Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur sphaera nova, intra sphaeram priorem $AEBF$ sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex sphaeræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum pS . *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si sphaeræ in progressu à centro ad circumferentiam sint utcumque dissimilares & inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sint undique similes; & vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujusmodi sphaeræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiaë inter centra sphaerarum.

Demonstratur ex propositione præcedente eodem modo,

(1) * Erit vis ex utraque composita ut differentia solidorum, hoc est, ut $ef \times pg - EF \times pG$. Est autem $Sg = SG$, adeoque $pg - pG = pS + SG - pG = 2pS$; Quare cum sit etiam $EF = ef$, erit $ef \times pg - EF \times pG = ef \times pg - pG$

$= 2ef \times pS = ef + EF \times pS$. Si punctum G est inter p & S situm, vis tota erit ut $ef \times pg + EF \times pG$, & quoniam est semper $Sg = SG$, atque in hoc casu $pg + pG = pS + SG + pG = 2pS$, similiter inveniatur vis tota ut $ef + EF \times pS$.

quo propositio LXXVI. ex propositione LXXV. demonstrata fuit. (§)

Corol. Quæ superius in propositionibus x. & LXIV. de motu corporum circa centra conicarum sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphericorum conditionis jam descriptæ, & attracta corpora sunt spheræ conditionis ejusdem.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXXVIII.
THEOR.
XXXVIII.

Scholium.

Attractionum casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi vires centripetæ decrescunt in duplicatâ distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in conicis sectionibus, & componentes corporum sphericorum vires centripetas eadem lege, in recessu à centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod est notatu dignum. Casus ceteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, figillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare ut sequitur.

LEMMA

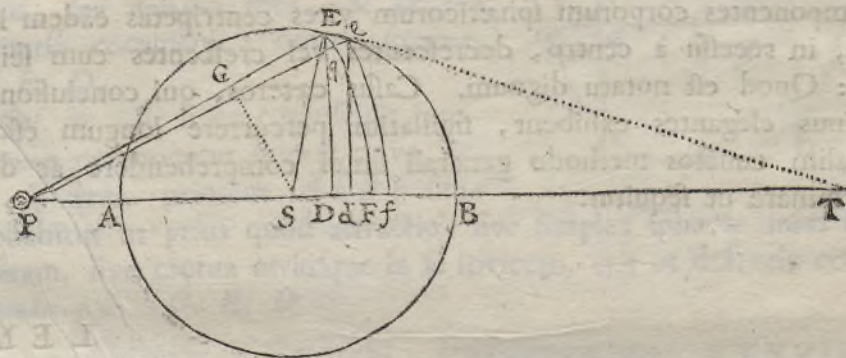
(§) Quæ in corollariis prop. 76. ubi attractio spheræ versùs spheram erat quadrato distantie centrorum reciproce proportionalis, demonstrata sunt, ea, mutatis mutandis, ad casum hujus propositionis 78. transferri possunt. Nimirum si ejusmodi spheræ complures per omnia similes se invicem trahant, attractiones acceleratrices

singularum in singulas erunt ut spheræ trahentes & distantie inter centra conjunctim; attractiones vero motrices ut spheræ attrahentes & attractæ & distantie inter centra conjunctim, eademque valent ubi attractio oritur à spheræ utriusque virtute attractivâ mutuo exercitiâ in spheram alteram.

L E M M A XXIX.

Si describantur centro S circulus quilibet AEB , & centro P circuli duo EF , ef , secantes priorem in E , e , lineamque PS in F , f ; & ad PS demittantur perpendiculara ED , ed : dico quod, si distantia arcuum EF , ef in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis Dd ad lineam evanescentem Ff ea sit, quæ lineæ PE ad lineam PS .

Nam si linea Pe secet arcum EF in q ; & recta Ee , quæ cum arcu evanescente Ee coincidit, producta occurrat rectæ PS in T ; & ab S demittatur in PE normalis SG : ob ^(t) similia triangula DTE , dTe , DES ; erit Ed ad Ee , ut DT



ad TE , seu DE ad ES ; & ob ^(u) triangula Eeq , ESG (per lem. VIII. & corol. 3. lem. VII.) similia, erit Ee ad eq seu Ff ut ES ad SG ; & ex æquo, Dd ad Ff ut DE ad SG ; hoc est (ob similia triangula PDE , PGS) ut PE ad PS .
Q. E. D. PRO-

(t) * Ob similia triangula DTE , dTe , DES . Ob parallelas DE , de , triangula DTE , dTe similia sunt; & quoniam recta TE circulum AEB tangit in E , erit angulus SET rectus, & proinde demisso ex puncto E ad basim ST perpendicularo ED , erit triangulum DES simile triangulo DTE . (prop. 8. Lib. 6. Elem.).

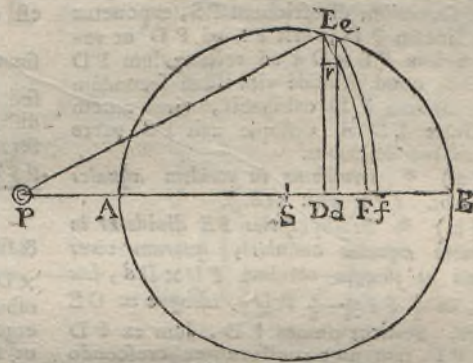
(u) * Et ob triangula Eeq , ESG &c. Anguli ad G & q recti sunt & proinde æquales; & quoniam anguli PEq , SEe sunt quoque recti & æquales, (ex naturâ circuli) detracto communi angulo SEq , anguli residui GES , qEe , erunt etiam æquales. Quare triangula Eeq , ESG sunt similia (prop. 4. lib. 6. Elem.).

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXXIX.
THEOR.
XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens $EFfe$, convolutione sui circa axem PS , describat solidum sphaericum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in P , est in ratione compositâ ex ratione solidi $DEq \times Ff$, & ratione vis quâ particula data in loco Ff traheret idem corpusculum.

Nam si primò consideremus vim superficiiei sphaericæ FE , quæ convolutione arcus FE generatur, & à linea de ubi vis secatur in r ; erit superficiiei pars annularis, convolutione arcus rE genita, ut lineola Dd , manente sphaeræ radio PE (uti (*) demonstravit Archimedes in lib. de Sphaerâ & Cylindro.) Et hujus vis, secundum lineas PE vel Pr



undique in (y) superficie conicâ fitas exercita, ut hæc ipsa superficiiei pars annularis; hoc est, ut lineola Dd , vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato sphaeræ radio PE & lineola illa Dd : at secundum lineam PS ad centrum S tendentem minor in ratione PD ad PE , (z) ideoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelliga-

(*) 518. Uti demonstravit Archimedes &c. Facilis est demonstratio. Quoniam enim angulus PEr rectus est (ex naturâ circuli) erit angulus DEr æqualis angulo DPE , ob summam angulorum $DPE + PED$ recto PEr æqualem. Undè si ex puncto r in lineam DE demissum intelligatur perpendiculum quod æquale erit lineæ Dd , constituetur triangulum evanescens simile triangulo EPD , eritque adèò $DE:PE = Dd:Er = \frac{PE \times Dd}{DE}$, sed

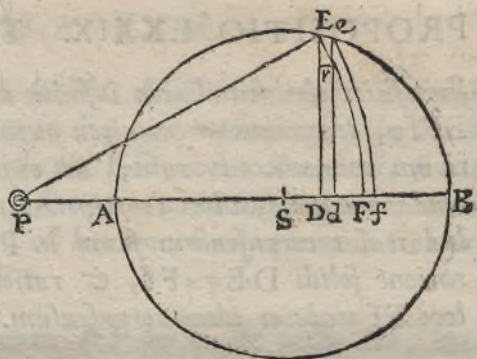
(515) zona circularis convolutione arcus rE genita, est ut rectangulum $rE \times DE$; Quare si in hoc rectangulo loco rE substituatür valor ipsius modò inventus, erit zona ut $PE \times Dd$; hoc est, ob datum radium PE , ut Dd . Q. E. D.

(y) * In superficie conicâ. Nam in convolutione puncti E , linea PE superficiem conicam describit.

(z) * Ideoque ut $PD \times Dd$. Nam si vis secundum directionem PE agens per lineam PE exponatur, vis illius pars quæ agit

DE MOTU
CORPO-
RUM.

tur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur Dd ; & superficies FE dividetur (a) in totidem æquales annulos, quorum vires erunt: ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2}PFq - \frac{1}{2}PDq$, ideoque ut (b) DE quad. Ducatur jam superficies FE in altitudinem Ff ; & fiet



solidi $EFfe$ vis exercita in corpusculum P ut $DEq \times Ff$: putâ si detur vis quam particula aliqua data Ff in distantia PF exercet

agit secundum directionem PS , exponetur per lineam PD ; erit PE ad PD ut rectangulum $PE \times Dd$ ad rectangulum $PD \times Dd$, quod proinde vim illam secundum directionem PD exhibebit, vires autem obliquæ ED ab utraq; axis PB parte se mutuo destruant.

(a) * Dividetur in totidem æquales annulos. (Per not. 518.)

(b) * Et superficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2}PFq - \frac{1}{2}PDq$, ideoque ut DE quad. Scilicet omnes PD , dum ex PD in PF mutantur uniformiter crescendo progressionem Arithmeticam faciunt, quoniam omnes particule Dd quibus lineæ PD successive augentur sunt æquales: ergo omnium PD summa eâ ratione invenitur quâ summa progressionum Arithmeticarum obtinentur, nempe primum & ultimum progressionis terminum simul junctos multiplicando per numerum terminorum progressionis, & dimidium facti sumendo; Progressionis verò hujusce primus terminus est PD , ultimus PF numerus vero terminorum DF , siquidem DF est summa incrementorum æqualium evanescentium lineæ PD , ergo summa omnium PD est $\frac{PF + PD \times DF}{2}$ sive (quia DF

est differentia linearum PF & PD) est

$$\text{summa omnium } PD = \frac{PF + PD \times PF - PD}{2}$$

sed (per 6. 2. Elem.) factum summae & differentia duarum linearum æquatur differentia quadratorum ipsorum, ergo

$$\frac{PF + PD \times PF - PD}{2} = \frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$$

& summa omnium $PD \times Dd = \frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$

$\times Dd$, sed Dd est particula quæ in omnibus hisce casibus ut eadem assumitur, ergo vires totius superficiei FE quæ sunt ut summa omnium $PD \times Dd$ sunt ut $\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$ sive ut $PF^2 - PD^2$ sed PF^2 est æquale PE^2 per constr. & $PE^2 - PD^2 = DE^2$ (per 47. 1. El.) ergo vires superficiei FE , sunt ut DE^2 . Q. E. D.

Idem aliter. Sit radius datus $PE = a$, variabilis $FD = x$, erit fluxio $Dd = dx$, & $PD = a - x$, atque aded $PD \times Dd = adx - xdx$, & sumptis utrinque fluentibus (165.) S. $PD \times Dd = ax - \frac{1}{2}xx = \frac{2ax - xx}{2} = \frac{DE^2}{2}$, (prop. 13. lib. 6.

Elem.). Quarè vis superficiei convolutione arcus FE genitæ erit ut DE^2 .

DE MOTU
CORPO-
RUM.

constucta sunt, concipe axem sphaeræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd & sphaeram totam dividi in totidem laminas sphaericas concavo-convexas $EFfe$; & erigatur perpendiculum dn . Per theorema superius vis, quâ lamina $EFfe$ trahit corpusculum P , est ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad distantiam PE vel PF exercita conjunctim. Est autem (per lemma novissimum) Dd ad Ff ut PE ad PS , & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ est ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad distantiam PF exercita conjunctim, hoc est (ex hypothesi) ut $DN \times Dd$, seu area evanescens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc est, sphaeræ vis tota ut area tota ANB .
Q. E. D.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta, ad particulas singulas tendens, eadem semper maneat in omnibus distantis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota, quâ corpusculum à sphaera attrahitur, (d) ut area ANB .

Corol. 2. Si particularum vis centripeta sit reciprochè ut distantia corpusculi à se attracti, & fiat (e) DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$; erit vis, quâ corpusculum P à sphaerâ totâ attrahitur, ut area ANB .

Corol. 3. Si particularum vis centripeta sit reciprochè ut cubus distantiae corpusculi à se attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$; erit vis, quâ corpusculum à totâ sphaerâ attrahitur, ut area ANB .

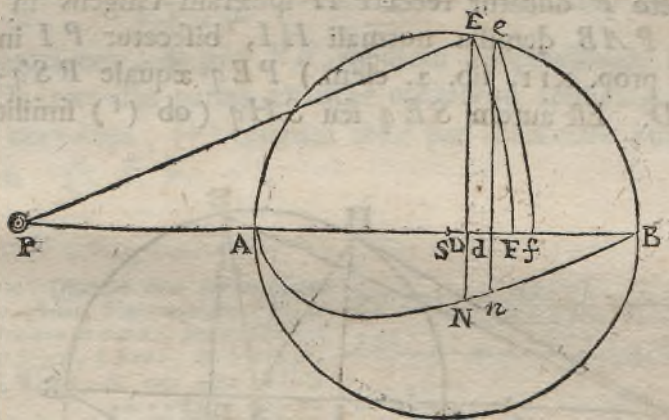
Co-

(d) * Ut area ANB . Nulla enim habenda est ratio vis particulæ Ff quæ eadem in omnibus distantis manet ex hyp.

(e) * Fiat DN &c. Substitutâ quantitate $\frac{1}{PE}$ loco vis particulæ Ff .

Corol. 4. Et universaliter si vis centripeta ad singulas sphaerae particulas tendens ponatur esse reciproce ut quantitas V , fiat

LIBER
PRIMUS.
PROPS
LXXX.
THEOR.
XL.



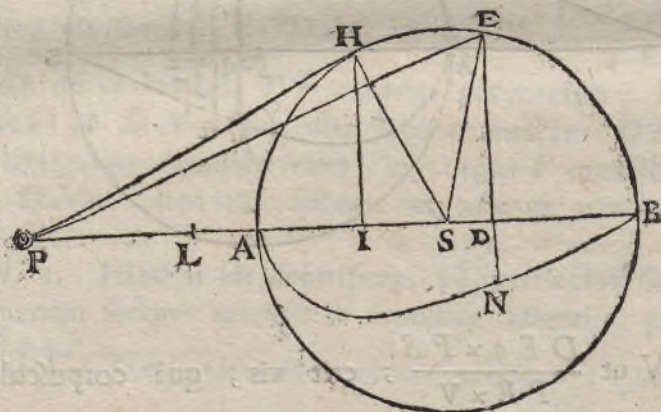
autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis, qua corpusculum a sphaera tota attrahitur, ut area ANB .

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO LXXXI. THEOREMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est area ANB.

A puncto P ducatur recta PH sphaeram tangens in H , & ad axem PAB demissa normali HI , bifecetur PI in L ; & erit (per prop. xii. lib. 2. elem.) PEq æquale $PSq + SEq + 2PSD$. Est autem SEq seu SHq (ob (f) similitudinem



triangulorum SPH , SHI) æquale rectangulo PSI . Ergo PEq æquale est contento sub PS & $PS + SI + 2SD$, hoc (g) est, sub PS & $2LS + 2SD$, id est, sub PS & $2LD$. Porro DE quad. æquale est $SEq - SDq$, seu (†) $SEq - LSq + 2SLD - LDq$, id est, $2SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$ (per prop. vi. lib. 2. elem.) æquatur rectangulo ALB . Scribatur itaque $2SLD - LDq - ALB$ pro DEq ; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum corollarium

quar-

(f) * Ob similitudinem triangulorum etc. (Per prop. 13. lib. 6. Elem.)
(g) * Hoc est sub PS & $2LS + 2SD$. Ob $PS + SI = PI + 2SI = 2LI + 2SI = 2LS$.

(†) * Seu $SE^2 - LS^2$ etc. Ob $SD = LD - LS$, adeoque $SD^2 = LD^2 - 2SLD + LS^2$.

quartum propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ DN , resolvet sese in tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PF \times V}$ -

$\frac{LDq \times PS}{PE \times V}$ - $\frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inver-

sa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, ^(h) quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt. $Q. E. F.$

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXXXI.
THEOR.
XLI.

Exem-

(h) 519. Quarum areæ per methodos vulgatas innotescunt. Sint variabiles $PE = z$, $LD = x$, adeoque $Dd = dx$, sint constantes $PA = a$, $PB = b$, $PS = c$, & $LS = m$, $LA = p$, $LB = q$, & erit areæ AND fluxio $DN \times dx$ ut $\frac{2mc \times dx}{zV} - \frac{c \times dx}{zV}$

$-\frac{pqcdx}{zV}$: quoniam verò $PE^2 (zz) = 2PS \times LD (2cx)$; est $x = \frac{z^2}{2c}$ & $dx = \frac{z dz}{c}$, quibus valoribus loco x & dx in formula substitutis illa in haec mutatur $\frac{mz^2 dz}{cV} - \frac{z^4 dz}{4c^2 V} - \frac{pqdz}{V}$.

Sit vis attractiva ut distantia z dignitas $\frac{1}{z^n}$ erit $V = z^n$, quo valore loco V in formulâposito, fiet $DN \times dx$ ut $\frac{mz^{2-n} dz}{c}$

$-\frac{z^{4-n} dz}{4c^2} - pqz^{-n} dz$, unde sumptis singulorum terminorum fluentibus (165) erit $S. DN \times dx$, seu area AND , ut $\frac{mz^{3-n}}{3-n \times c} - \frac{z^{5-n}}{5-n \times 4c^2} - \frac{pqz^{1-n}}{1-n} + Q. constans.$ Sed fluens illa evanescere debet dum fit $PE (z) = PA (a)$ est ergo $Q = \frac{a^{5-n}}{5-n \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{3-n \times c}$ ac proinde fluens accurata ubi $PE (z) =$

$$PB (b) \text{ erit } \frac{mb^{3-n}}{3-n \times c} - \frac{b^{5-n}}{5-n \times 4c^2} - \frac{pqbb^{1-n}}{1-n} + \frac{a^{5-n}}{5-n \times 4c^2} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{ma^{3-n}}{3-n \times c}$$

520. Cum sit semper $PE^2 = 2PS \times LD$; & ubi PE fit PB fit $LD = LB$, ubi verò PE fit PA fit $LD = LA$, erit $PB^2 (b^2) = 2PS \times LB (2cq)$ & $PA^2 (a^2) = 2PS \times LA (2cp)$ quibus valoribus loco, b^2 & a^2 substitutis, formula fit $\frac{2mqb^{1-n}}{3-n} - \frac{q^2 b^{5-n}}{5-n} - \frac{pqbb^{1-n}}{1-n} + \frac{p^2 a^{1-n}}{5-n} + \frac{pqa^{1-n}}{1-n} - \frac{2mpa^{1-n}}{3-n}$.

& restitutis litteris figuræ $\frac{2SLB \times PB^{1-n}}{3-n} - \frac{LB^2 \times PB^{1-n}}{5-n} - \frac{ALB \times PB^{1-n}}{1-n} + \frac{AL^2 \times PA^{1-n}}{5-n} + \frac{ALB \times PA^{1-n}}{1-n} - \frac{2SLA \times PA^{1-n}}{3-n}$.

521. Cor. 1. Hinc liquet aream ANB , seu attractionem cui proportionalis est, semper posse algebraicè inveniri, tribus tantum casibus exceptis in quibus est $n=1$ vel 3 , vel 5 , seu in quibus vis attractiva decrescit in ratione distantia simplici, vel triplicatâ vel quintuplicatâ. In his enim casibus tribus divisores $1-n$, $3-n$, $5-n$, evanescunt; sed tum fluens per logarithmos, aut quod idem est, per quadraturam hyperbolæ obtinetur, ut exemplis infra positis patebit.

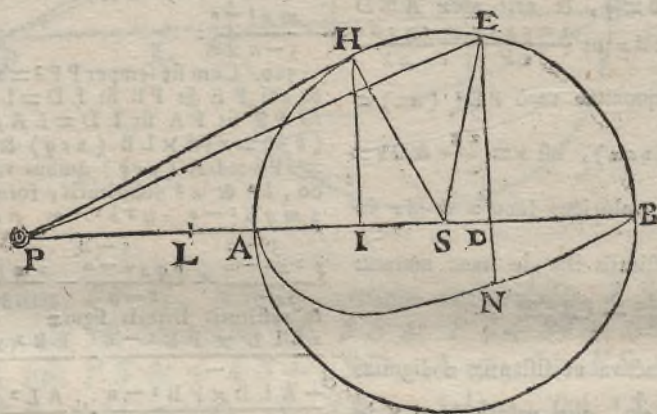
DE MOTU
CORPO-
RUM.

Exemp^l. I. Si vis centripeta ad singulas sphaeræ particulas tendens sit reciprocè ut distantia; pro V scribe distantiam PE ; dein $\propto PS \times LD$ pro PEq , & fiet DN ut $SL -$

$\frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Pone DN æqualem ejus duplo $\propto SL - LD$

$-\frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $\propto SL$ ducta in longitudinem

AB describet aream rectangulam $\propto SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, eâ lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD , (i) describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, (†) id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de areâ



(i) 522. Describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$.

Area quam describet erit trapezium, nam si à puncto L in longitudinem AB semper erigantur perpendiculara æqualia LD , omnes terminabuntur in recta linea ducta à puncto L in terminum perpendiculari in B erecti & æquali LB , sicque formabitur Triangulum cujus pars secundum AB sita est area quæ sita, & ea erit Trapezium cujus latera in A & B perpendicularia, inter se parallela sunt, & latus puncto A

insistens erit æquale LA , latus verò oppositum in B erectum erit æquale LB , hujus ergo trapezii superficies erit $\frac{LA + LB}{2}$

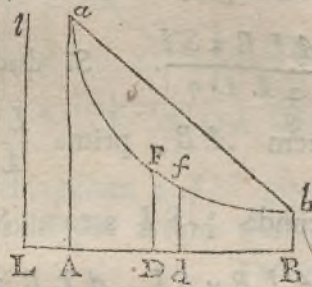
$\times AB$, sed $AB = LB - LA$, ergo per 6. 2. El. $\frac{LA + LB}{2} \times LB - LA = \frac{LB^2 - LA^2}{2}$:

(quod trapezium est æquale Trapezio $AaBb$ in figura Newtoniana descripto ut liquet per ejus figuræ const.).

(†) Id est, aream $SL \times AB$, cum enim hæc areæ sit

priore $2SL \times LAB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$, ducta itidem per motum localem normaliter in

eandem longitudinem, describet aream hyperbolicam; quæ subducta de areâ $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam ANB . Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendiculara Ll, Aa, Bb , quorum Aa ipsi LB , & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB per puncta ab describatur hyperbola ab . Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ ANB æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas sphaeræ particulas tendens sit reciprocè ut cubus distantiae, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE \text{ cub.}}{2ASq}$ pro V , dein $2PS \times LD$ pro PEq ; & fiet DN

fit $= \frac{LA+LB}{2} \times AB$, sitque $LB=LA+2AS$ erit $LA+LB=2LA+2AS=2LS$ unde $\frac{LA+LB}{2} \times AB=LS \times AB$. Unde etiam sequitur Trapezium $AabB$ rectangulo $LS \times AB$ esse æquale.

Cæterum per methodos vulgares casus iste sequenti ratione solvitur. Sic $AD=x, Dd=dx$ erit areæ AND fluxio $DN \times Dd = 2SL \times dx - LA \times dx - x dx - \frac{ALB \times dx}{LD}$.

Primi termini $2SL \times dx$, fluens (165) est $2SL \times x = 2SL \times AB$, ubi AD , seu $x = AB$. Secundi termini $LA \times dx + x dx$, fluens est $LA \times x + \frac{1}{2} x x = \frac{2LA+AB \times AB}{2} = LS \times AB$, quando x , seu AD , fit AB . Quare duorum priorum terminorum fluens est $2SL \times AB - LS \times AB$ sive $SL \times AB$.

Jam ut tertii termini $\frac{ALB \times dx}{LD}$ fluens inveniatur describatur hyperbola AB , prout Newtonus præscribit, & super asymptoto LB erigantur perpendiculara duo inti-

nitè propinqua, DF, df , hyperbolæ occurrentia in $F \& f$, sitque $AD=x, Dd=dx$, & erit (per theor. 4. de hyperbolâ) $LA \times Aa = LD \times DF$, adeoque $DF = \frac{LA \times Aa}{LD} = \frac{ALB}{LD}$, & $DF \times Dd$, seu

fluxio areæ $AaFD = \frac{ALB \times dx}{LD}$. Quare area hyperbolicâ $AaFD$, æqualis est fluenti tertii termini, & area hyperbolica $AabB$, est ejusdem termini fluens, ubi x , seu $AD=AB$. Hæc igitur subducta de rectangulo $SL \times AB$, sive de trapezio $AabB$ ipsi æquali, relinquet aream quæsitam ANB . Relinquitur autem area $aFba$; undè patet constructio.

523. Cor. 1. Si distantia corpusculi P à sphaerâ evanescat, erit $Bb=LA=0$ ideoque hyperbola Afb cum suis asymptotis Ll, LB congruet nullaque erit ejus area. Quare corpusculo posito in A , seu in contactu sphaeræ attractio erit ut rectangulum $SL \times AB = 2AS^2$, ut etiam demonstrari posset eodem modo ac demonstrata fuit Prop. 72.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2PS} - \frac{ALB \times ASq}{2PS \times LDq}$, id (k) est (ob con-

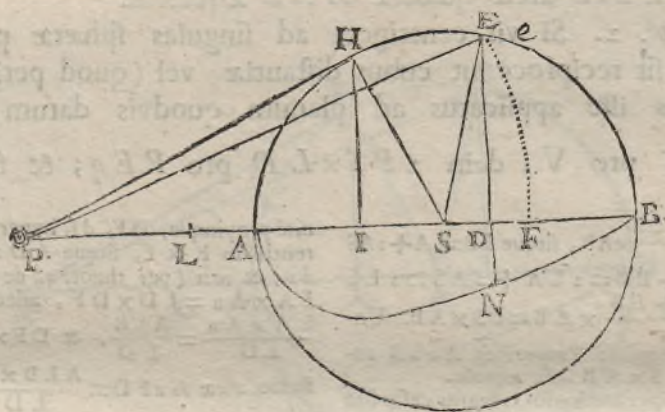
tinuè proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2} SI -$

$$\frac{ALB \times SI}{2LDq}.$$

Si ducantur hujus partes tres in longitudi-
nem AB , prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream hyperbolicam; se-

cunda $\frac{1}{2} SI$ aream $\frac{1}{2} AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream.

$\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2} AB \times SI$. De primâ sub-



524. Cor. 2. Vis quâ corpusculum P, versùs portionem sphaeræ convolutione superficièi AEF, genitam trahitur est ut $LB - \frac{1}{2} x \times x - AaFD$; Nam (per not. 522.) vis illa est ut $2SL \times x - LA \times x - \frac{1}{2} x \times x - AaFD$, & $2SL = 2LA + 2AS$ & $2SL - LA = LA + 2AS = LB$, unde vis illa est $LB - \frac{1}{2} x \times x - AaFD$; sed P posito in contactu sphaeræ est $LB = AB$ & areâ hyperbolicâ evanescit, vis ergo fit in contactu $AB - \frac{1}{2} x \times x$, sive $AB - \frac{1}{2} AD \times AD$.

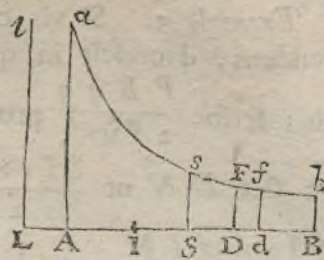
525. Cor. 3. Quoniam attractio cor-

pusculi P versùs sphaeram totam est ut $SL \times AB - Aa bB$, ejusdem attractio versùs portionem sphaeræ convolutione superficièi FEEB (fig. prop. 80.) genitam, erit ut $SL \times AB - LB \times x + \frac{1}{2} x \times x + AaFD - Aa bB = SL \times AB - LB \times AD + \frac{1}{2} AD^2 - DF bB$, sive substitutis $LA + \frac{1}{2} AB$ pro SL , $LA + AB$ loco LB , & pro $AB - AD$ posito BD fiet ut $LA + \frac{1}{2} BD \times BD - DF bB$, & corpusculo in contactu posito, erit ut $\frac{1}{2} BD^2$.

(k) * Id est, ob continuè proportionales &c. Per prop. 8. l. 6. Et, undè $AS^2 = PS \times SL$.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXXXI.
PROB.
XLI.

ducatur summa secundæ & tertix, & manebit area quæsitâ ANB. (1) Unde talis emergit problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipsi SI æquetur, perque punctum s asymptotis Ll, LB describatur hyperbola a s b occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum 2 ASI subductum de area hyperbolica A a s b B relinquet aream quæsitam ANB.



Exem-

(1) 526. * Unde talis emergit problematis constructio. Sit, ut supra AD = x, Dd = dx, erit areæ AND, fluxio DN x Dd, ut $\frac{LSI \times dx}{LD} - \frac{1}{2} SI \times dx - \frac{ALB \times SI \times dx}{2LA + x^2}$.

Jam ut primi termini $\frac{LSI \times dx}{LD}$, fluens habeatur, describatur hyperbola a s b, eo modo quo jubet Newtonus, erectisque perpendiculis DF, df, sit AD = x, Dd = dx, & quoniam (per theor. 4. de hyperbolâ) LS x SI = LD x DF, erit $DF = \frac{LSI}{LD}$, & DF x Dd = $\frac{LSI \times dx}{LD}$.

Patet igitur (ut in not. 522.) aream Hyperbolicam A a s b B, æqualem esse fluenti primi termini, dum AD seu x = AB; secundi termini $\frac{1}{2} SI \times dx$, fluens est $\frac{1}{2} SI \times AD = \frac{1}{2} SI \times AB$, dum sit AD = AB; tertii tandem termini fluens hoc modo invenitur. Quantitatis $\frac{dx}{(LA + x)^2}$ fluens

(165) est $-\frac{1}{LA + x} + Q$ constans; & quoniam fluens illa evanescere debet ubi x = 0, erit $Q = \frac{1}{LA}$. Quare fluens

accurata est $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LD} = \frac{1}{LA} - \frac{1}{LB}$, ubi x = AB. Est igitur tertii termini $\frac{1}{2} ALB \times SI \times \frac{dx}{LA + x}$ fluens = $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB} = \frac{1}{2} LB \times SI - \frac{1}{2} LA \times SI$

= $\frac{1}{2} AB \times SI$, unde summa 2^a & 3^a termini est AB x SI = 2 AS x SI. Quare rectangulum 2 ASI subductum de areâ hyperbolica A a s b B relinquet aream quæsitam ANB.

527. Cor. 1. Si corpus P sphaeram tangat in A, attractio evadet infinita, nam in hoc casu LA = 0 & Aa cum asymptoto Ll coincidit, ac proinde attractio per aream hyperbolæ infinitam B L l a s b exponitur.

528. Coroll. 2. Vis quâ corpusculum P in sphaeræ portionem convolutione superficiei AEF, genitam trahitur, est ut A a FD - $\frac{1}{2} SI \times AD - \frac{1}{2} LB \times SI + \frac{ALB \times SI}{2LD}$, ut ex notâ

526. manifestum est. Quare in contactu ubi LA = 0, erit vis illa ut area infinita A a FD, cujus respectu alix finitæ quantitates evanescunt.

529. Cor. 3. Et quoniam corpusculi P attractio in sphaeram totam est ut area hyperbolica A a s b B - 2 ASI, ejusdem attractio versus portionem concavo convexam, convolutione superficiei FEEB, genitam, erit ut A a s b B - A a FD - 2 ASI + $\frac{1}{2} AD \times SI + \frac{1}{2} LB \times SI - \frac{ALB \times SI}{2LD} = DFbB + \frac{1}{2} LA - \frac{1}{2} BD \times SI - \frac{ALB \times SI}{2LD}$, ponendo AB pro 2 AS, $\frac{1}{2} LA + \frac{1}{2} AB$ pro $\frac{1}{2} LB$, & $\frac{1}{2} BD$ pro $\frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} AD$.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

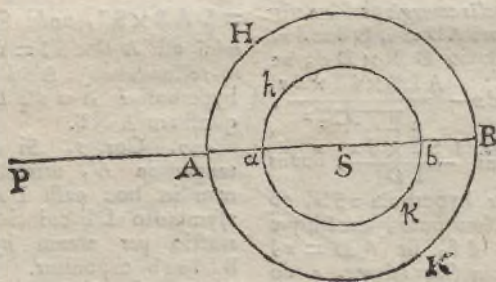
Exempl. 3. Si vis centripeta, ad singulas sphaeræ particulas tendens, decrefcit in quadruplicatâ ratione diftantia à particu-

lis; fcribe $\frac{PEqq}{2AScub.}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ (m) pro PE,

& fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}} - \frac{SIa}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}}$

$\frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$ (n) Cujus tres partes ductæ in

longi-



530. Cor. 4. Simili modo inveniri potest vis quâ corpus P trahitur versùs sphaeram concavam AaHBKa, si ex attractione in sphaeram totam solidam detrahatur attractio in sphaeram interiorem a h b k. Patet autem corpusculi P in A, seu in contactu positi attractionem versùs sphaeram cavam AaHBKa, interiori concentricam, infinitam esse; Nam si ex vi infinitâ quâ versùs sphaeram solidam AHBKS, trahitur, subducatur vis finita quâ versùs sphaeram interiorem a h b k s urgetur, relinquetur attractio infinita versùs sphaeram concavam AaHBKa; quin imò, si ex sphaerâ concavâ detrahatur pars quævis à contactu remota ut HhBkKk, attractio corpusculi in contactu A positi versùs residuam HhAaKk, adhuc infinita erit, ut patet (per cor. 2. & 3.).

(m) * Pro PE. Erit $PE^2 = 4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}$, & $AS^3 = PS \times SI \times \sqrt{PS \times SI}$.

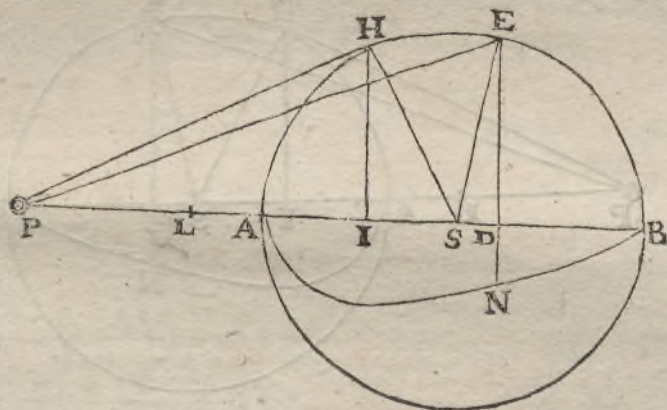
Unde fiet $\frac{SID \times PS}{PE \times V} = \frac{4SLD \times PS \times AS^3}{PE^5} = \frac{4SL \times LD \times PS^2 \times SI \sqrt{PS \times SI}}{4PS^2 \times LD^2 \times \sqrt{2PS \times LD}} = \frac{SL \times SI \sqrt{SI}}{LD \sqrt{2LD}} = \frac{SI^2 \times SL}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}}$. Et ita de cæteris terminis.

(n) * Cujus tres partes &c. Sit $AD = x$ fluxio $AD = dx$, & erit area AND fluxio $DN \times dx$, ut $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{3}{2}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{1}{2}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{dx}{LA+x}^{\frac{1}{2}}$, quantitatis $\frac{dx}{LA+x}^{\frac{3}{2}}$, seu $LA+x^{-\frac{3}{2}} dx$ fluens est.

LA

longitudinem AB , producunt areas totidem, viz. $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXXXI.
PROBL.
XLI.



$$\text{in } \frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}; \frac{SIq}{\sqrt{2SI}} \text{ in } \sqrt{LB} - \sqrt{LA}; \& \frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}}$$

in

$\frac{-2}{LA+x^2} + Q \text{ const. (165)}$ quæ evanescere debet ubi $x=0$; Quare erit $Q = \frac{2}{\sqrt{LA}}$, & fluens accurata $= \frac{2}{\sqrt{LA}} - \frac{2}{\sqrt{LB}}$, dum fit $x=AB$. Primi igitur termini fluens erit $\frac{2SI \times SL}{\sqrt{2SI}}$, in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$. Quantitatis $\frac{dx}{LA+x^2}$, fluens est $2(LA+x)^{-\frac{1}{2}} + Q \text{ const.}$ & factâ $x=0$, invenitur $Q = -2\sqrt{LA}$; quare fluens accurata est $2\sqrt{LB} - 2\sqrt{LA}$, dum $x=AB$. Secundi igitur termini fluens

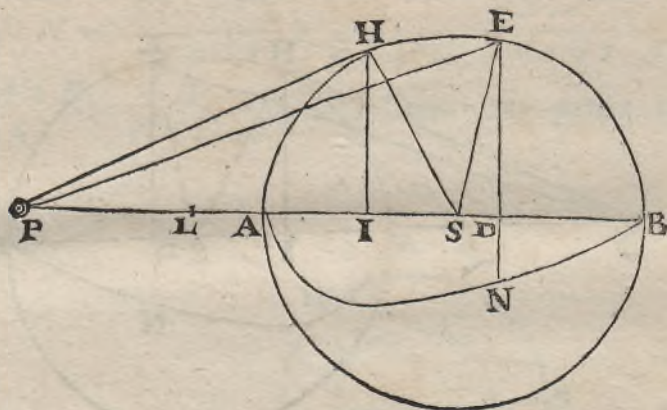
erit $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$, in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$.

Quantitatis $\frac{dx}{LA+x^2}$, fluens est $\frac{-2}{3(LA+x)^{\frac{3}{2}}}$

+ Q , & $Q = \frac{2}{3\sqrt{LA}}$, undè fluens in-

tegra erit $\frac{2}{3\sqrt{LA}} - \frac{2}{3\sqrt{LB}}$, ubi

$x=AB$, & proindè tertii termini fluens est $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$.

DE MOTU
CORPO-
RUM.in $\frac{I}{\sqrt{LA \text{ cub.}}} - \frac{I}{\sqrt{LB \text{ cub.}}}$ Et (o) hæ post debitam re-

ductionem fiunt $\frac{2 SIq \times SL}{LI}$, SIq , & $SIq + \frac{2 SI \text{ cub.}}{3 LI}$.
 Hæ vero, subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4 SI \text{ cub.}}{3 LI}$.
 Proin-

(o) * Et hæ post debitam reductionem
 etc. Est $PS \times SI = AS^2$ (per prop. 8.
 Lib. 6. Elem.) sed $PS = LS + LI$, ob
 $PI = LI$, (per constr.) & $SI = LS - LI$,
 ergò $PS \times SI = LS^2 - LI^2 = AS^2$, &
 hinc $LI^2 = LS^2 - AS^2 = LS + AS \times$
 $LS - AS = LB \times LA$. Quare LI five
 $LS - LI = \sqrt{LA \times LB}$, & $2 LS -$
 $2 SI = 2 \sqrt{LA \times LB}$, & $2 SI = 2 LS$
 $- 2 \sqrt{LA \times LB} = LB - 2 \sqrt{LB \times LA} +$
 LA , & extractâ utrinque radice quadra-
 tâ $\sqrt{2 SI} = \sqrt{LB} - \sqrt{LA}$. His posi-
 tis, facilis est terminorum reductio; erit
 enim $\frac{I}{\sqrt{LA}} - \frac{I}{\sqrt{LB}} = \frac{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}{\sqrt{LB \times LA}}$

$= \frac{\sqrt{2 SI}}{LI}$. Quare patet primum fluentis
 terminum esse $\frac{2 SI^2 \times SL}{LI}$; secundum ve-
 rò esse SI^2 . Tertius terminus, redu-
 ctione ad communem denominatorem factâ,
 est $\frac{SI^2 \times LA \times LB}{3 \sqrt{2 SI}} \times \frac{\sqrt{LB^3 - \sqrt{A^3}}}{LA \times LB \sqrt{LA \times LB}}$
 $= \frac{SI^2 \times \sqrt{LB^3 - \sqrt{LA^3}}}{3 LI \times \sqrt{LB - \sqrt{LA}}}$. Peractâ di-
 visione invenitur $\frac{LB^{\frac{3}{2}} - LA^{\frac{3}{2}}}{LB^{\frac{1}{2}} - LA^{\frac{1}{2}}} = LB +$

LB

Proinde vis tota, quâ corpusculum *P* in sphaeræ centrum trahitur, est ut $\frac{SI cub.}{PI}$, (*P*) id est, reciprocè ut $PS cub. \times PI$.

LIBER PRIMUS.
PROP. LXXXI.
PROBL. XII.

Q. E. I.

Eâdem methodo determinari potest attractio corpusculi fiti intra sphaeram, sed expeditius per theorema sequens.

P R O-

$$LB^2 \times LA^2 + LA = LB + LI + LA \\ = 2SI + 3LI, \text{ ob } LB + LA = 2LS \\ = 2SI + 2LI. \text{ Quare tertius terminus} \\ \text{est } \frac{SI^2 \times 2SI + 3LI}{3LI} = SI^2$$

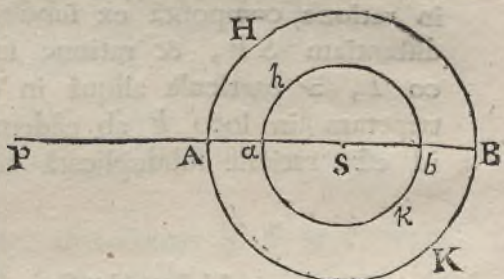
$$+ \frac{2SI^3}{3LI}, \text{ unde tres fluentes ad} \\ \text{communem denominatorem reducti fiunt} \\ \frac{6SI^2 \times SL - SI^2 \times 3LI - SI^2 \times 3LI - 2SI^3}{3LI}$$

$$= \frac{6SI^2 \times SL - LI - 2SI^3}{3LI}, \text{ sed quia } SL - LI \\ = SI \text{ fiunt } \frac{6SI^3 - 2SI^3}{3LI} = \frac{4}{3} \frac{SI^3}{LI}.$$

(*P*) * Id est reciprocè ut $PS^3 \times PI$.
Nam cum fit $PS \times SI = AS^2$, ideòque
 $SI = \frac{AS^2}{PS}$, hinc, dato radio *AS*, est *SI*

ut $\frac{1}{PS}$, SI^3 , ut $\frac{1}{PS^3}$; Est verò $= \frac{1}{2} PI$
ideòque etiam & *LI* ut *PI*, unde erit
 $\frac{4SI^3}{3LI}$ ut $\frac{1}{PS^3 \times PI}$, neglectâ fractio-
ne $\frac{4}{3}$.

531. Cor. 1. In accessu corporis *P*
ad sphaeram, ita crescit illius attrac-
tio, ut in contactu infinita evadat, dum
enim coincidit *P* cum *A*, puncta *H* & *I*
cum eodem puncto *A* coincidunt, fit
que $PI = 0$, & proinde quantitas $\frac{1}{PS^3 \times PI}$
infinita.



532. Cor. 2. Attractio corpusculi in
contactu *A* positi versus sphaeram cavam
A a H B K a, infinita est. Hæc enim attrac-
tio habetur, si ex attractione infinita
versus sphaeram solidam *A H B K S*, sub-
ducatur attractio finita versus sphaeram in-
teriorem *a h b k S*.

533. Hic adjungemus solutionem casus
tertii qui pendet à quadraturâ hyper-
bolæ, ubi nempe vis est ut PE^5 reci-
procè (520). Scribe igitur $\frac{PE^5}{2AS^4}$ pro

V; dein $8PS^3 \times LD^3$ pro PE^6 , & PS
 $\times SI$ pro AS^2 , unde est $\frac{PS}{PE \times V} = \frac{SI^2}{4LD^3}$

& fiet *DN*, ut $\frac{SL \times SI^2}{2LD^2} - \frac{SI^2}{4LD} - \frac{ALB \times SI^2}{4LD^3}$
seu, ut $\frac{SL \times SI^2}{LD^2} - \frac{1}{2} \frac{SI^2}{LD} - \frac{1}{2} \frac{ALB \times SI^2}{LD^3}$;

undè fluxio $DN \times Dd$, erit ut $\frac{SL \times SI^2 \times dS}{LA + S^2}$

DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In spherâ centro *S* intervallo *SA* descriptâ, si capiantur *SI*, *SA*, *SP* continuè proportionales: dico quod corpusculi intra spheram, in loco quovis *I*, attractio est ad attractionem ipsius extra spheram, in loco *P*, in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiarum à centro *IS*, *PS*, & subduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis *P* & *I*, ad centrum tendentium.

Ut, si vires centripetæ particularum spheræ sint reciprocè ut distantie corpusculi à se attracti; vis, quâ corpusculum situm in *I* trahitur à spherâ totâ, erit ad vim, quâ trahitur in *P*, in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantie *SI* ad distantiam *SP*, & ratione subduplicatâ vis centripetæ in loco *I*, à particulâ aliquâ in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eâdem in centro particulâ oriundam, id est, ratione subduplicatâ distantiarum *SI*, *SP* ad invicem reci.

$$-\frac{1}{2} \frac{SI^2 \times dx}{LA+x} - \frac{1}{2} \frac{ALB \times SI^2 \times dx}{LA+x^3}, \text{ po-}$$

sita $AD=x$.

Quantitatis $\frac{dx}{LA+x^2}$, fluentem supra

(526) invenimus esse $\frac{1}{LA} - \frac{1}{LB} - \frac{LB-LA}{LA \times LB}$

$= \frac{AB}{LI^2}$ ubi x seu $AD=AB$. Quare primi

termini fluens erit $\frac{SI \times SI^2 \times AB}{LI^2}$.

Quantitatis $\frac{dx}{LA+x^3}$ fluens $= \frac{-1}{2LA+x^2}$

+ Q const. quæ evanescere debet posi-

tâ x , seu $AD=0$, quare erit $Q = \frac{1}{2LA^2}$

& fluens accurata, ubi $AD=AB$, erit

$\frac{1}{2LA^2} - \frac{1}{2LB^2} = \frac{LB^2-LA^2}{2LA^2 \times LB^2} = \frac{2SL \times AB}{2LI^4}$

$= \frac{SL \times AB}{LI^4}$; undè tertii termini fluens erit

$$\frac{1}{2} \frac{ALB \times SI^2 \times SI \times AB}{LI^4} = \frac{1}{2} \frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2},$$

& differentia fluentium primi & tertii ter-

mini erit $\frac{1}{2} \frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$. Secundi

termini $\frac{1}{2} SI^2 \times \frac{dx}{LA+x}$, fluens est area

hyperbolæ quæ ita describitur. Ad punc-

ta *L*, *A*, *B*, vid. (fig. exempli 2ⁱ.) erige

perpendiculara *Ll*, *Aa*, *Bb*, & asymptotis

Ll, *LB*, describe Hyperbolam æquilateram

cujus sit dignitas $\frac{1}{2} SI^2$, & quoniam est

(theor. 4. Hyp.) $LD \times DF = \frac{1}{2} SI^2$ ideòque

$DF = \frac{1}{2} \frac{SI^2}{LD}$, erit $DF \times Dd = \frac{1}{2} \frac{SI^2 \times dx}{LA+x}$

positâ $AD=x$. Quapropter area hyper-

bolica *AabB*, æqualis est fluenti secundi

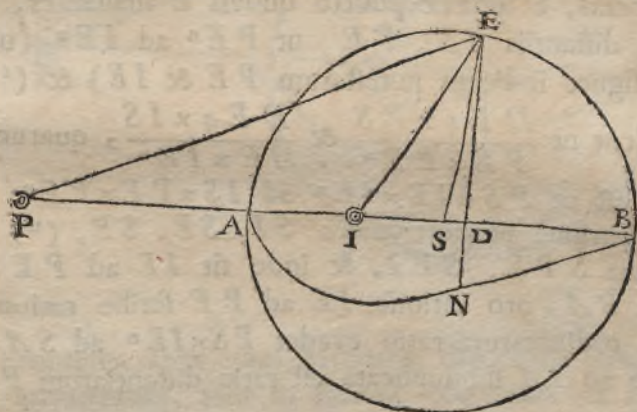
termini ubi $AD=AB$. Hæc igitur area

subducta de rectangulo $\frac{1}{2} \frac{SL \times SI^2 \times AB}{LI^2}$

relinquet aream quæsitam *ANB*.

reciprocè. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* à spherâ totâ factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum spheræ sunt reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum, colligitur quod attractio in *I* sit ad attractionem in *P*, ut distantia *SP* ad spheræ semidiametrum *SA*: si vires illæ sunt reciprocè

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXXXII.
THEOR.
XLI.



in triplicatâ ratione distantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad invicem ut *SP quad.* ad *SA quad.*: Si in quadruplicatâ, ut *SP cub.* ad *SA cub.* Unde cum attractio in *P*, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciprocè ut *PS cub.* \times *PI*, attractio in *I* erit reciprocè ut *SA cub.* \times *PI*, id est (ob datum *SA cub.*) reciprocè ut *PI*. Et (9) similis est progressus in infinitum. Theorema verò sic demonstratur.

Stan-

(9) * Similis est progressus in infinitum. Vires centripetæ acceleratrices à particulâ aliquâ in centro positâ oriundæ, sint inter se in distantis *IS*, *PS* reciprocè ut harum distantiarum potestates IS^n , PS^n , & vis quâ corpusculum situm in *I* trahitur à spherâ totâ, erit ad vim quâ trahitur in loco *P* ut $IS^{\frac{1}{2}}$ ad $PS^{\frac{1}{2}}$ & $PS^{\frac{n}{2}}$ ad $IS^{\frac{n}{2}}$ conjunctim, hoc est, ut $PS^{\frac{n-1}{2}}$ ad $IS^{\frac{n-2}{2}}$. Quare cum sit, (ex Hyp.) $PS:AS=AS:SI$, adeo-

que $IS = \frac{AS^2}{PS}$, & $IS^{\frac{n-1}{2}} = \frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, vi-

res illæ erunt ad invicem ut $PS^{\frac{1}{2}}$ ad $\frac{AS^{n-1}}{PS^{\frac{n-1}{2}}}$, seu ut PS^{n-1} ad AS^{n-1} .

Hinc si $n=1$, vires erunt in ratione æqualitatis, si $n=2$, erunt ut *PS* ad *AS*; Si $n=3$ ut PS^2 ad AS^2 , si $n=4$ ut PS^3 ad AS^3 , & ita porò in infinitum.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Stantibus jam ante constructis, & existente corpusculo in loco quovis P , ordinatim applicata DN (r) inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$.

Ergo si agatur IE , ordinata illa pro alio quovis corpusculi loco I , (f) mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone

vires centripetas, è sphaeræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantis IE , PE , ut PE^n ad IE^n (ubi numerus n designet indicem potestatum PE & IE) & (t) ordinatae illae fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio

ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob continuè proportionales SI , SE , SP , (u) similia sunt triangula SPE , SEI , & inde fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA ; pro ratione IE ad PE scribe rationem IS ad SA ; & ordinarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. (x) Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum PS , SI ; &

(r) * *Ordinatim applicata DN inventa fuit &c.* (cor. 4. prop. 80.)

(f) * *Mutatis mutandis.* Nempè corpore in I fito, radio IE , describendus arcus circuli, & in formulâ attractionis $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, loco PS & PE , scribe IS , & IE .

(t) * *Et ordinatae illae &c.* Si loco V scribantur PE^n , & IE^n , quæ sunt reciproce ut vires acceleratrices in locis P & I , (per cor. 4. prop. 80.)

(u) * *Similia sunt triangula SPE, SEI*, per prop. 6. Lib. 6. Elem.

(x) * *Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum PS, SI*, ob continuè proportionales PS , SA , SI . Porro vires in distantis PS , IS , sunt ad invicem ut IS^n , ad PE^n (ex Hyp.) & $IS:PS=IS^2:AS^2=IE^2:PE^2$, (ob proportionales $IE:PE=IS:AS$), atque adeo $IS^n:PS^n=IE^{2n}:PE^{2n}$, & $IS^{\frac{n}{2}}$

$PS^{\frac{n}{2}}=IE^n:PE^n$. Quare IE^n est ad PE^n in ratione subduplicatâ virium in distantis PS , IS , & ordinarum ratio $PS \times IE^n$, ad $SA \times PE^n$ æqualis est rationi $PS^{\frac{1}{2}} \times IS^{\frac{n}{2}}$, ad $IS^{\frac{1}{2}} \times PS^{\frac{n}{2}}$.

534. Scholium. Iisdem positis quæ in prop. 82. si centro I radio IA sphaera $ACMD$ descripta sit, vis quâ corpusculum in I situm à totâ sphaerâ majore $AHBK$ versus centrum S trahitur, æqualis est vi quâ subductâ sphaera minore $ACMD$ traheretur. Nam corpusculum in centro I sphaeræ $ACMD$ positum, æqualiter undiquè ab hujus sphaeræ minoris partibus trahitur.

535. Cor. 5. Si centro S radio SI descripta sit sphaera $IhbK$, & vis centripeta in recessu corporis attracti decrescat in triplicatâ ratione distantiarum à particulis materiæ trahentibus, corpusculum in I situm seu in contactu sphaeræ cavæ $AHBKI$, subductâ sphaerâ interiore $IhbK$, vi infinitâ retrahitur à centro S versus A . Nam vis quâ corpuscu-

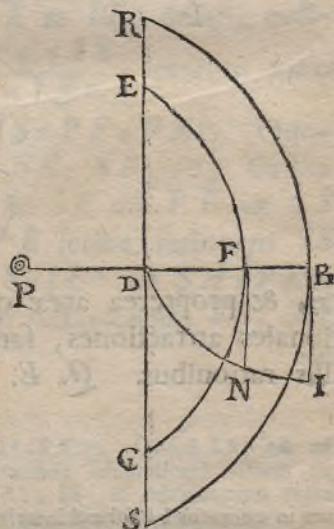
PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim quâ corpusculum in centro sphaeræ locatum ad ejus segmentum quodcunque attrahitur.

Si P corpus in centro sphaeræ, & $RBSD$ segmentum ejus plano RDS & superficie sphaericâ RBS contentum. Superficie sphaericâ EFG centro P descriptâ secetur DB in F , ac distinguatur segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem superficies illa non purè mathematica, sed physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur ista profunditas O , & erit hæc superficies (per (y) demonstrata Archimedis) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum sphaeræ esse reciprocè ut distantiarum dignitas illa, cujus index est n ; & vis, quâ superficies EFG trahit corpus P , erit (per prop. LXXIX.) ut $\frac{DEq \times O}{PF^n}$, id

(z) est, ut $\frac{2 DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{PF^n}$.

Huic proportionale sit perpendicularum FN ductum in O ; & (a) area curvilinea BDI , quam ordinatim applicata FN in



(y) * Per demonstrata Archimedis. Nam (515) elementum superficiei EFG , est ut PF ducta in elementum lineæ DF , adeoque ob datam PF , respectu superficiei totius EFG , superficies illa (165.) erit ut $PF \times DF$, & proinde lamina ex hæc superficie & profunditate O , genita erit ut $PF \times DF \times O$.

(z) * Id est &c. Nam (per prop. 13. Lib. 6. Elem.) $DE^2 = 2PF - DF \times DF$
 $= 2PF \times DF - DF^2$. Quare $\frac{DE^2 \times O}{PF^n}$

$$= \frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$$

(a) 537. * Et area curvilinea &c. Si segmentum $RBSDR$, in laminas innumeras profunditatis evanescentis O divisum intelligatur, & capiatur semper perpendicularum FN , vi singularum laminarum proportionale; manifestum est (per Lem. 4.) summam elementorum $FN \times O$, seu aream curvilineam $DNIB$, proportionalem fore summæ virium. Sit igitur $PD = a$, $PF = x$

in longitudinem DB per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota quâ segmentum totum $RBSD$ trahit corpus P .
Q. E. I.

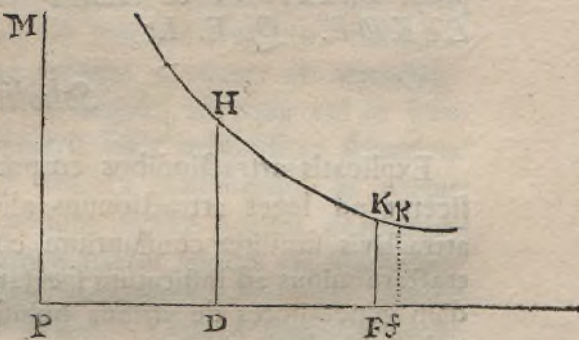
LIBER
 PRIMUS.
 PROP.
 LXXXIII.
 PROBL.
 XLII.

$=x$, $DF=x-a$, & erit laminæ sphericæ EFG vis attractiva ut $\frac{2x dx - 2a dx}{x^{n-1}} = \frac{2x dx - 2a dx + a dx}{x^n} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{a dx}{x^n} = x^{2-n} dx - a a x^{-n} dx$, cujus fluens $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{a a x^{1-n}}{1-n} + Q$ const. Sed posita $x=a$, segmentum & vis illius evanescent, ergò erit $Q = -\frac{a^{3-n}}{3-n} + \frac{a^{3-n}}{1-n} = \frac{2a^{3-n}}{3-n \times 1-n}$, & fluens accurata $= \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{a a x^{1-n}}{1-n} + \frac{2a^{2-n}}{3-n \times 1-n}$.

538. Cor. Hinc patet vim quâ corpus in P locatum, à segmento trahitur semper posse algebraicè exponi, duobus casibus exceptis in quibus n est 1 vel 3. tum autem per logarithmos vel areas hyperbolicas habetur. In 1^o. casu areæ DNI , fluxio erit $x dx - \frac{a a dx}{x}$. Primi termini fluens est $\frac{1}{2} x x + Q$, quæ evanescere debet posita $x=a$, quare erit $Q = -\frac{1}{2} a a$, & fluens accurata $= \frac{1}{2} x x - \frac{1}{2} a a$. Ut secundi termini fluens obtineatur, per punctum P agatur PM ad PF normalis, & asymptotis PM , PF , describatur Hyperbola æquilatera cujus sit dignitas PD^2 ; per puncta D , F , f erigantur perpendiculara DH , FK , fk hyperbolæ occurrentia in H , F , f , sintque puncta F , f , infinite propinqua, & erit area hyperbolica $DHKF$,

æqualis fluenti secundi termini; nam (per theor. 4. de hyperbolâ) $PD \times DH = PD^2 = PF \times FK$, & ideò $FK = \frac{PD^2}{PF}$, ac $FK \times Ff = \frac{PD^2 \times dx}{x}$ & area $DHKF$ evanescit, ubi PF seu $x = PD$.

In 2^o. casu areæ DNI , fluxio est $\frac{dx}{x} - \frac{a a dx}{x^3}$. Secundi termini fluxio est $\frac{a a}{2 x x} + Q$, & invenitur $Q = -\frac{1}{2}$, posita $x=a$, atque adeò fluens accurata, erit $\frac{a a}{2 a x} - \frac{1}{2}$. Ponatur $a=1$, & primi ter-



mini $\frac{dx}{x}$, fluens, erit area hyperbolica $DHKF = S. \frac{a a dx}{x}$. Quare area DNI est ut, $DHKF + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x x$.

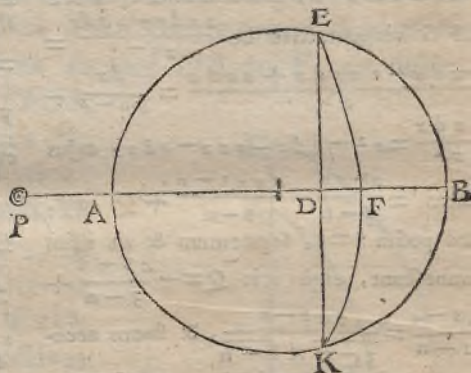
DE MOTU
CORPO-
RUM.

PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim, quâ corpusculum, extra centrum sphaeræ in axe segmenti cujuscvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.

A segmento $E B K$ trahatur corpus P in ejus axe $A D B$ locatum. Centro P intervallo $P E$ describatur superficies sphaerica $E F K$, quâ distinguatur segmentum in partes duas $E B K F E$ & $E F K D E$.

(^b) Quærat^r vis partis prioris per prop. LXXXI. & vis partis posterioris per prop. LXXXIII.; & summa virium erit vis segmenti totius $E B K D E$. *Q. E. I.*

*Scholium.*

Explicatis attractionibus corporum sphaericorum, jam pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum deque motibus inde oriundis, ob (^c) earum in rebus philosophicis aliqualem usum, subjungere.

S E C.

(^b) * Quærat^r vis partis prioris. 525. 529.

(^c) * Ob earum in rebus philosophicis aliqualem usum. Vide quaestiones Lib 4. optices Newtoni. 30 theorema: a ad cal-

cem astronomiæ clariss. Keillii, Physicam Clariss. s^rGravesandii, Dissertationem Clariss. De Maupertuis in commentariis Paris. 1732. ubi has Newtoni sectiones clarè exponit.

SECTIO XIII.

De corporum non sphaericorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longè fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicatâ distantiarum à particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicatâ distantiarum à particulis; attractio versus corpus sphaericum, propterea quod (per. prop. LXXIV.) sit reciprocè ut quadratum distantiae attracti corporis à centro sphaerae, haud sensibilibiter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur propositio de sphaeris attractivis. Et (d) par est ratio orbium sphaericorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullae sunt. Quod si sphaeris hisce orbibusque sphaericis partes quaelibet à loco contactus remotae auferantur, & partes novae ubivis addantur: mutari possunt figurae horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additae vel subductae, cum sint à loco contactus remotae, augebunt notabiliter attractionis excessum, qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus figurarum omnium. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicatâ vel plusquam triplicatâ ratione distantiarum à particulis, attractio longe fortior erit in contactu, quam cum trahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujus-

(d) * Et par est ratio orbium sphaericorum concavorum. (Per prop. 71.) * Lu-

DE MOTU
CORPO-
RUM.

modi sphaeram trahentem (e) augeri in infinitum, constat per solutionem problematis XLI. in exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per exempla illa & theorema XLI. inter se collata, facile (f) colligitur de attractionibus corporum versus orbis concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra orbis, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his sphaeris & orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eò ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit propositio de corporibus universis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materia equaliter attractiva constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales, & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales, & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus (g) ad attractionem in totum secundum. *Q. E. D.*

Co-

(e) * Augeri in infinitum constat &c. (521. 527. 531.).

(f) * Facile colligitur de attractionibus &c. 528. 530. 532. 535. 536.

(g) 539. * Ad attractionem in totum secundum. Corpora similia A, a, seorsim attrahant corpuscula C, c sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita, sintque P, p particulae totis A, a, proportionales & in totis similiter sitæ & attractio

decreseat in ratione dignitatis distantiarum, cujus sit index n; erit attractio corpusculi C in particulam P ad attractionem corpusculi c in particulam p, ut $P \times p c^n$, ad $p \times P C^n$. Unde si corpora A & a in particulas innumeras ut P & p divisâ intelligantur, erit, componendo, attractio corpusculi C in totum corpus A ad attractionem corpusculi c in totum corpus a, ut $P \times p c^n$ ad $p \times P C^n$, quod par-

Corol. I. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decreſcant in ratione dignitatis cujuſvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directè, & distantiarum dignitates illæ inverſè. Ut si vires particularum decreſcant in ratione duplicatâ distantiarum à corpusculis attractis, corpora autem ſint ut $A \text{ cub.}$ & $B \text{ cub.}$ ideoque tum corporum latera cubica, tum corpusculorum attractorum distantia à corporibus, ut A & B : attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ quad.}}$ &

$\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ quad.}}$, id eſt, ut corporum latera illa cubica A & B . Si vires particularum decreſcant in ratione triplicatâ distantiarum à corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ cub.}}$ & $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ cub.}}$, id eſt, æquales. Si vires decreſcant

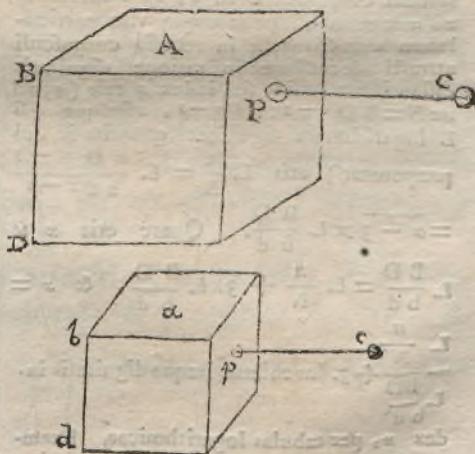
in ratione quadruplicatâ; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A \text{ cub.}}{A \text{ q q.}}$

& $\frac{B \text{ cub.}}{B \text{ q q.}}$, id eſt, reciprocè ut latera cubica A & B . Et ſic in cæteris.

Co.

particulæ omnes P , p ſint ubique totis ſimiles & in iis ſimiliter ſitæ, & distantia earum à corpusculis C , c ſemper maneat proportionales distantis PC , pc . Cum igitur ſit P ad p ut A ad a , & distantia pc , PC ſint lateribus homologis bd , BD proportionales (ex Hyp.) erit attractio corpusculi C , in totum corpus A , ad attractionem corpusculi c in totum corpus a , ut $A \times pc^n$ ad $a \times PC^n$, atque etiam ut $A \times bd^n$ ad $a \times BD^n$, & ut $BD^3 \times bd^n$, ad $bd^3 \times BD^n$, hoc eſt, ut bd^{n-3} ad BD^{n-3} , ob proportionales $A:a = BD^3:bd^3$, (per Hyp.) ex quibus patet corollarium 1^{um}, quod ſequitur; Nam ſi $n=2$, erunt attractiones ut BD ad bd ; ſi $n=3$, erunt æquales; ſi, $n=4$, erunt ut bd , ad BD , hoc eſt, reciprocè ut latera cubica corporum.

Tom. I.



Corol. 2. (h) Unde vicissim, ex viribus, quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti; si modo decrementum illud sit directè vel inversè in ratione aliquâ distantiarum.

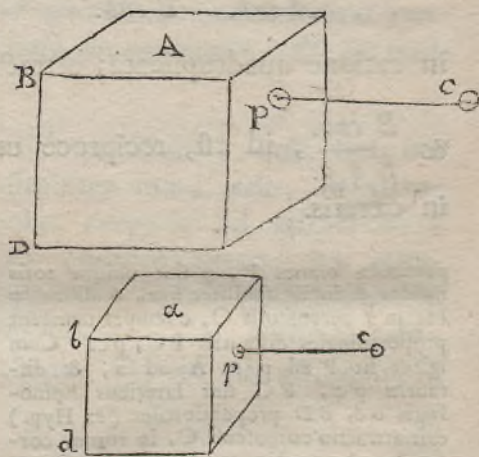
PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum equalium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantia locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi globi ex materia consimili & equali constantis, & centrum habentis in ejus centro gravitatis.

Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpusculum aliquod *Z* viribus, quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantia *AZ*, *BZ*; sin particulæ statuatur inæquales, sint ut hæ particulæ & ipsarum distantia *AZ*, *BZ* conjunctim,

(h) 540. * Undè vicissim &c. Nam si experimentis inventum sit attractionem corpusculi *C* in corpus *A*, esse ad attractionem corpusculi *c*, in corpus *a*, ut est *BD* ad *bd*, vel ut 1 ad 1, vel ut *bd* ab *BD*, vires particularum attractivarum decrescunt in ratione distantiarum duplicatâ, vel triplicatâ, vel quadruplicatâ (539). Et generatim, si experimentis inventa fuerit attractio corpusculi *C* in *A* ad attractionem corpusculi *c* in *a*, ut numerus *N* ad numerum *n*, ponaturque vim particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti decrescere in ratione dignitatis distantiarum cujus sit index *x* erit (539) $n: N = BD^x : bd^x$, adeoque (si *L* logarithmum significet quantitatis cui præponitur) erit $L \frac{n}{N} = L \frac{BD^x}{bd^x}$

$= x - 3 \times L \frac{BD}{bd}$. Quare erit $x \times L \frac{BD}{bd} = L \frac{n}{N} + 3 \cdot L \frac{BD}{bd}$, & $x = \frac{L \frac{n}{N}}{L \frac{BD}{bd}} + 3$. Invenietur itaque dignitatis index *x*, per tabulas logarithmicas. Exempli causâ, Si $\frac{n}{N} = \frac{bd}{BD}$, erit $L \frac{bd}{BD} =$

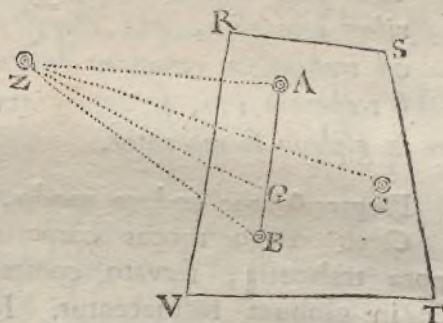


$-L \frac{BD}{bd}$, & ideo $x = -1 + 3 = 2$. Si $\frac{n}{N} = 1$, erit $L \frac{n}{N} = 0$, & proinde $x = 3$. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD}{bd}$, erit $x = 4$, prorsus ut supra. Si $\frac{n}{N} = \frac{BD^p}{bd^p}$, erit $L \frac{n}{N} = p \times L \frac{BD}{bd}$, & $x = p + 3$. Sed si $\frac{n}{N} =$

LIBER
PRIMUS.
PROP.
LXXXVIII
THEOR.
XLV.

five (si ita loquar) ut hæ particulæ in distantias suas AZ , BZ respectivè ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur AB , & secetur ea in G ut sit AG ad BG ut particula B ad particulam A ; & erit G commune centrum gravitatis particularum A & B . Vis $A \times AZ$ (per legum corol. 2.) resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$.

Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG , æquantur; ideoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum G , & vim $A+B \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ A & B consisterent in eorum communi gravitatis centro G , globum ibi componentes.



Eodem argumento, si adjungatur particula tertia C , & componatur hujus vis cum vi $A+B \times GZ$ tendente ad centrum G ; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis globi illius in G & particulæ C ; hoc est, ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C ; & eadem erit, ac si globus & particula C consisterent in centro illo communi, globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque $RSTV$, ac si corpus illud, servato gravitatis centro, (i) figuram globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit, ac si corpus attrahens $RSTV$ esset sphericum: & propterea si corpus il-

$\frac{bdp}{BDP}$, invenietur $x=3-p$. Si $\frac{BD}{bd}=10$, (i) * *Figuram globi indueret.* Per prop. 77.

$$\text{erit } x = \frac{L \frac{n}{N}}{1.000000} + 3 = L \frac{n}{N} + 3.$$

scilicet

DE MOTU
CORPO-
RUM.

lud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum (k) movebitur in ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantia locorum à singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcumque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit, ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.

Demonstratur eodem modo, atque propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit, ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in lineâ rectâ; corpus attractum movebitur in ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quâcumque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubi vis positum in rectâ, quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit,

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano, cui recta *AP* perpendicularis est, describi intelligatur circulus; & invenienda sit vis, quâ corpusculum quodvis *P* in eundem attrahitur. A circuli puncto quovis *E* ad corpusculum attractum *P* agatur recta *PE*. In rectâ *PA* capiatur *PF* ipsi *PE* æqualis, &

(k) * Movebitur in ellipsi &c. Per cor. prop. 78. & per cor. 1. prop. 10.

$$-\frac{1}{PH^{n-1}}; \text{ erit attractio corpusculi } P \text{ in circulum ut } \frac{1}{PA^{n-2}}$$

$$-\frac{PA}{PH^{n-1}}$$

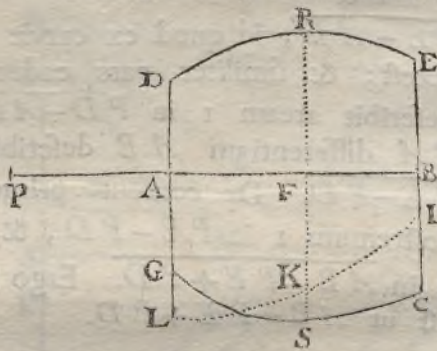
LIBER
PRIMUS.
PROP.
XC.
PROBL.
XLIV.

Corol. 3. Et si diameter circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciprocè ut PA^{n-2} , propterea quod (r) terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evaneschet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

Invenire attractionem corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quacunque distantiarum ratione decrefcentes.

In solidum (f) $DECG$ trahatur corpusculum P , situm in ejus axe AB . Circulo quolibet RFS ad hunc axem perpendiculari secetur hoc solidum, & in ejus semidiametro FS , in plano aliquo $PALKB$ per axem transeunte, capiatur (per prop. xc.) longitudo FK vi, quâ corpusculum P in circulum illum attrahitur, proportionalis. Tangat autem punctum K curvam lineam LKI , planis extimorum circularum AL & BI occurrentem in L & I ; & erit attractio corpusculi P in solidum ut (t) area $LABI$. *Q. E. I.*



Co-

hoc est, ob datam quantitatem $n-1$, ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$ ubi $PF=PH$.

(r) * Terminus alter evaneschet. Ob PH , infinitam.

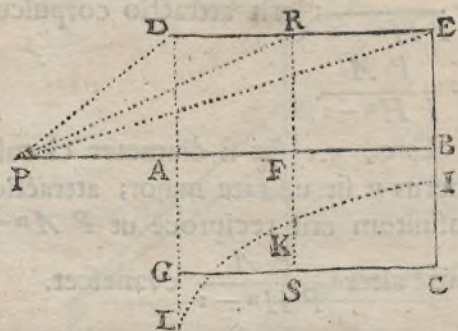
(f) * In solidum $DECG$ &c. Convolutione superficiei $ADREB$ circa axem AB genitum.

(t) * Ut area $LABI$. Pater per cor. lem. 4. Nam area illa est ut summa virium singulorum circularum, qui per omnia puncta lineæ AB describi possunt.

541. Scholium. Sit abscissa $PF=x$, ejus fluxio dx , ordinatim applicata $FR=y$, $PR=\sqrt{yy+xx}$, & vis reciprocè ut

DE MOTU
CORPO-
RUM.

Corol. I. Unde si solidum cylindrus sit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revolutus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciproçè ut quadrata distantiarum à punctis: (u) erit attractio corpusculi P in hunc cylindrum ut $AB - PE + PD$.



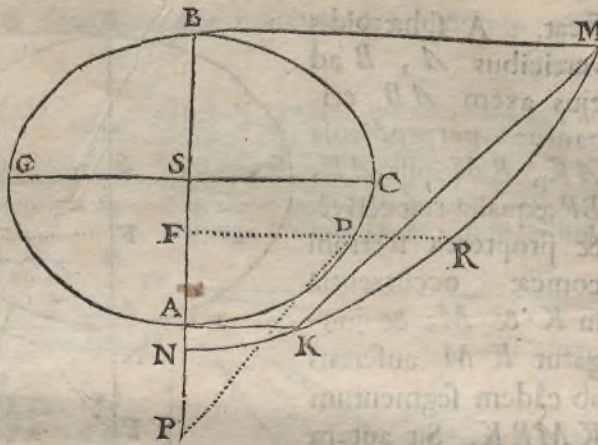
Nam ordinatim applicata FK (per corol. I. prop. xc.) erit ut $1 - \frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB , describit aream $1 \times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB , describit aream 1 in $PE - AD$, id quod ex curvæ LKI quadraturâ facilè ostendi potest; & similiter pars eadem ducta in longitudinem PA describit aream 1 in $PD - AD$, ductaque in ipsarum PB , PA differentiam AB describit arearum differentiam 1 in $PE - PD$. De contento primo $1 \times AB$ auferatur contentum postremum 1 in $PE - PD$, & restabit area $LABI$ æqualis 1 in $AB - PE + PD$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB - PE + PD$. Co-

ut distantie dignitas cujus index n , erit FK ut $\frac{1}{PF^{n-2}} - \frac{PF}{PR^{n-1}} = \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{x}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}}$ (per cor. 2. prop. 90.) Quare area $AFKL$ fluxio erit ut $\frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{-x dx}{(yy+xx)^{\frac{n-1}{2}}}$, & hujus fluens ut vis quâ corpusculum P in solidum $DRSG$ trahitur. Datâ verò curvæ DRE naturâ, inveniendus est valor ordinatæ y per abscissam x , & inde fluens determinanda.

(u) * Erit attractio corpusculi P &c. Si ordinatim applicata FR , dicatur b , patet (429) areæ $AFKL$, elementum fore ut $dx - \frac{xdx}{(bb+xx)^{\frac{1}{2}}}$. Fiat $bb+xx=zz$, & erit $xdx=zdz$, & proinde elementum prædictum ut $dx-dz$. Quare $AFKL$ erit ut $x-z+Q$, & quoniam hæc area evanescit, ubi PF , seu $x=PA$, & PR seu $z=PD$, erit $Q=PD-PA$, & area $AFKL$, seu attractio corpusculi P , in cylindrum $DRSG$, ut $PF-PR+PD-PA=AF-PR+PD=AB-PE+PD$, ubi fit $PF=PB$, & $PR=PE$.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XCI.
PROBL.
XLV.

Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit, quâ sphaerois *AGBC* attrahit corpus quodvis *P*, exterius in axe suo *AB* situm. (x) Sit *NKRM* sectio conica cujus ordinatim applicata *ER*, ipsi *PE* perpendicularis, æquetur semper longitudini *PD*, quæ ducitur ad punctum illud *D*, in quo applicata ista sphaeroidem secat.



(x) 542. Sit *NKRM* sectio conica cujus ordinatim applicata *ER* æquetur semper longitudini *PD* &c. Sit *AP = a*, curvæ datæ *ACB* cujus convolutione generatur sphaerois sit semiaxis *AS = b*, alter semiaxis *SC = c*, *AE = x*, erit *PE = a + x*, & (ex

naturâ Ellipseos) erit $BD^2 = \frac{cc}{bb} \times 2bx - xx$;

unde quadratum *ER* ordinatæ ad curvam *NKRM* sive $PD^2 = PE^2 + ED^2 =$

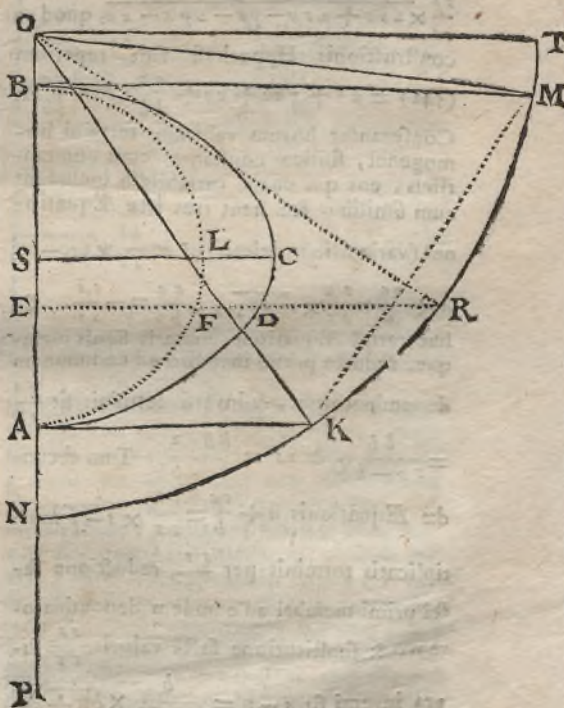
$a^2 + 2ax + xx + \frac{cc}{bb} \times 2bx - \frac{cc}{bb} xx$; cum

ergo hæc Aequatio ad curvam *NKRM*, ultra secundum gradum non assurgat constat eam curvam esse ex Sectionibus Conicis :

erit autem Ellipsis si quantitas $xx - \frac{cc}{bb} xx$ sit

negativa, quod evenit ubi *SC* (sive *c*) major est quàm *AS* (sive *b*); Erit verò Parabola si ea quantitas evanescat, ideoque si $c = b$ quod evenit ubi curva *ACB* est circulus; Denique erit Hyperbola si ea quantitas sit positiva, hoc est, si *AS* sit longior axis.

543. Sit *ACB* Ellipsis cujus axis *CS* sit major axi *AS*, quo casu curva *NKRM* erit Ellipsis, hac ratione ejus curvæ *NKRM* determinabuntur Axes & Vertex. Dicatur ejus Ellipseos *NKRM* semiaxis *ON = s*, alter semiaxis *OT* dicatur *t*, distantia verticis *N* à vertice *A* curvæ *ACB*, dicatur



sphaeroidis centrum S & semidiameter maxima SC : & vis, qua
sphaer-

LIBER
PRIMUS.
PROP. 2
XCI.
PROBL.
XLV.

lorem quantitatis $\frac{t^2 + s^2 - PO^2}{t^2}$ deter-
minabimus, quam esse æqualem quantitati
 $\frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$, ita ex valoribus su-
pra inventis statuitur; Est $st = \frac{bbt^2}{c^2 - b^2}$ ex

tertiâ Equatione, unde erit $s^2 + t^2 =$
 $\frac{b^2 t^2 + c^2 t^2 - b^2 t^2}{c^2 - b^2} = \frac{c^2 t^2}{c^2 - b^2}$, ideoque

$\frac{s^2 + t^2}{t^2} = \frac{c^2}{c^2 - b^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2}$. Est

verò $AO = s - p$, & $PO = PA + AO$

$= a + s - p$, & cum sit $s - p = \frac{cc - bb}{cc - bb} \times$

$\frac{ba + cc}{cc - bb}$ (ex secundâ Equatione) est PO

$= a + \frac{cc}{cc - bb} \times \frac{ba + cc}{cc - bb}$, quo valore

reducto ad communem denominatorem,

deletisque terminis sese destruentibus est

$PO = \frac{cc}{c^2 - b^2} \times a + b$ sive $= \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2}$

$\times PS$, cumque sit $t^2 = \frac{CS^2 - AS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$

$\times PS^2 - AS^2 + CS^2$ est $\frac{PO}{t^2} = \frac{PS}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$

& $\frac{PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{PS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$

Unde tandem est $\frac{s^2 + t^2 - PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2}$

$= \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{PS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ sive

$= \frac{CS^2 - AS^2}{CS^2} \times \frac{PS^2 - AS^2 + CS^2}{PS^2}$

reducendoque ad eundem denominatorem,

deletisque terminis sese destruentibus

$= \frac{CS^2}{CS^2 - AS^2} \times \frac{-AS^2 + CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2} =$

$\frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$ diviso numeratore &

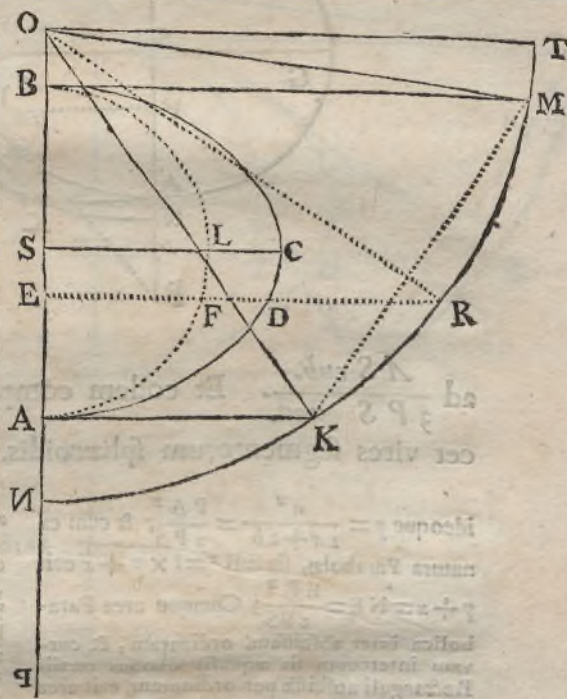
denominatore per $CS^2 - AS^2$. Est ergo

$\frac{s^2 + t^2 - PO^2}{t^2} = \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$

Q. E. D.

544. Sit autem curvâ data ACB cir-
culus, ita ut sphaeroidis ejus convolutione
genita, sit accurata sphaera, erit curva,

NKRM Parabola, stantibus enim quæ in
n^o. 542. dicta sunt, erit ut prius $PE = a + x$,
& ex naturâ Circuli $EF^2 = 2bx - xx$, unde
erit PF^2 quadratum $= PE^2 + EF^2 =$
 $a^2 + 2ax + xx + 2bx - xx = a^2 + 2ax + 2bx$;
cum ergo ordinata ER ad curvam NKRM



sumatur æqualis PF , ejus ordinata qua-
dratum erit æquale abscissæ ipsi per quan-
titates constantes ductæ, sed ultra primum
gradum non assurgenti, quæ est Parabolæ
proprietas. Dicatur ergo ejus Parabolæ
latus rectum l , distantia vertex N à ver-
tice A curvæ ACB dicatur p , abscissa NE
erit $p + x$ & ex Parabolæ natura erit or-
dinatæ ER quadratum $= lp + lx$ confe-
ratur hic valor cum valore ejusdem ER^2
supra invento $a^2 + 2ax + 2bx$, termini con-
stantes cum constantibus & qui varia-
bilem includunt cum similibus, fiunt duæ
Equationes $lp = a^2$, & $l = 2a + 2b = 2PS$,
ideoque

DE MOTU
CORPO-
RUM.

$$= \frac{1}{2} OP \times PB - AP = \frac{1}{2} OP \times AB. \text{ Un-}$$

de tandem fluens quæstra hujus tertii ter-
mini est $\frac{2 PO}{t^2} \times \frac{1}{2} OP \times AB + \frac{2 PO}{t^2} \times$
 $MRK = \frac{PO^2}{t^2} \times AB + \frac{2 PO}{t^2} \times MRK,$
 quæ detracta ex fluente terminorum positivo-
 rum $AB \times \frac{t^2 + t^2}{t^2}$ fit $AB \times \frac{t^2 + t^2 - PO^2}{t^2}$
 $-\frac{2 PO}{t^2} \times MRK,$ cum ergo fit $\frac{t^2 + t^2 - PO^2}{t^2}$
 $= \frac{CS^2}{PS^2 - AS^2 + CS^2} \& \frac{PO}{t^2} = \frac{PS}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$
 (543) est fluens quæstra (quia $AB = 2AS$)
 $\frac{2 AS \times CS^2 - 2 PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}.$

Si autem curva ACB fit circulus,
 sphæroidis in sphæram veram mutatur, fit
 $CS = AS$ & segmentum MRK fit $\frac{2 AS^3}{3 PS}$
 (544) ideoque mutatur hæc formula in
 istam $\frac{2 AS \times AS^2 - 2 PS \times \frac{2 AS^3}{3 PS}}{PS^2 - AS^2 + AS^2}$

$$= \frac{2 AS^3 - \frac{4}{3} AS^3}{PS^2} = \frac{2 AS^3}{3 PS^2}$$

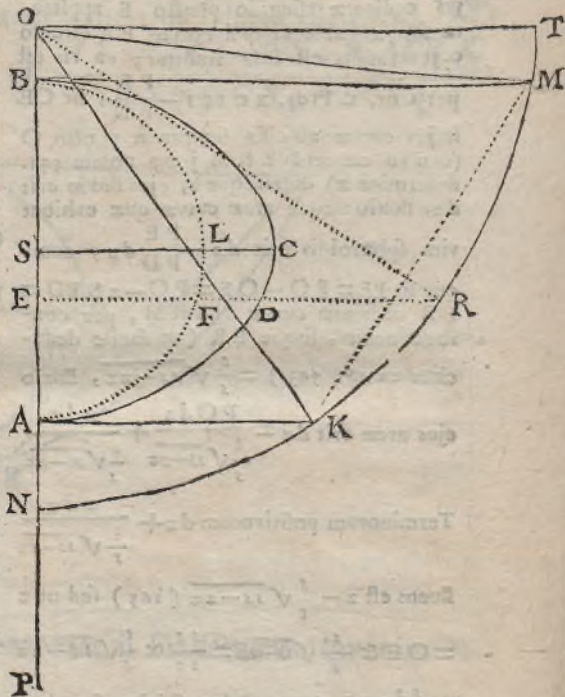
quæ expri-
 met vim sphære; itaque divisa expressio-
 ne vis sphæroidis & vis sphære per com-
 munem multiplicatorem 2; Erit vis sphæ-
 roidis ad vim sphære ut $\frac{AS \times CS^2 - PS \times MRK}{PS^2 - AS^2 + CS^2}$

ad $\frac{AS^3}{3 PS^2}$. Q. E. D.

Potest etiam determinari vis sphære,
 hoc calculo, sit ut prius $PA = a$, AB
 $= 2b$, abscissa $AE = x$, $PF = v$, erit PE^2
 $= a^2 + 2ax + xx$, & $EF^2 = 2bx - xx$
 (ex naturâ circuli) ideoque $PF^2 (vv)$
 $= a^2 + 2ax + 2bx$, unde invenitur $x =$
 $\frac{vv - a^2}{2 \times a + b}$ & $dx = \frac{v dv}{2 \times a + b} = \frac{v dv}{a + b}$ & PE
 $= a + x = \frac{a^2 + 2ab + vv}{2 \times a + b}$ & $\frac{dx}{PF} = \frac{dv}{a + b}$

Itaque, cum fluxio areæ quæ exprimit vim
 sphære sit per Cor. 1. Prop. xc. ut $\frac{dx}{PF} -$
 $\frac{PE dx}{PF}$, erit ea fluxio ut $dx \frac{a^2 + 2ab + vv}{2 \times a + b^2} dv$

cujus fluens est $x = \frac{a^2 v + 2abv + \frac{1}{2} v^3}{2 \times a + b^2}$
 $= + Q \text{ const.},$ quæ evanescere debet ubi $x = 0$



$$\& v = a \text{ ideoque est } - \frac{a^3 + 2a^2b + \frac{1}{3}a^3}{2 \times a + b^2}$$

$$+ Q = 0, \& Q = \frac{\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b}{2 \times a + b^2} : \text{Vis au-}$$

tem totius Sphære obtinetur si fiat $x = AB$
 ($2b$) & $v = PB (a + 2b)$, estque ideo $2b +$
 $\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b - a^3 - 4a^2b - 4ab^2 - \frac{1}{3}a^3 - 2a^2b - 4ab^2 - \frac{8}{3}b^3$

$$\frac{2 \times a + b^2}{4a^2b + 8ab^2 + \frac{8}{3}b^3} = 2b \times 1 -$$

$$\frac{2a^2 + 4ab + \frac{4}{3}b^2}{2 \times a + b^2}, \& \text{reducen-}$$

$$\text{do ad eundem denominatorem } = 2b \times$$

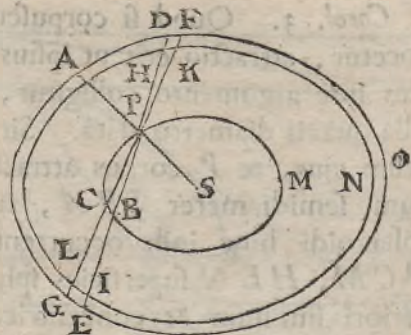
$$\frac{2a^2 + 4ab + 2b^2 - 2a^2 - 4ab - \frac{4}{3}b^2}{2 \times a + b^2}$$

$$= 2b \times \frac{\frac{2}{3}b^2}{2 \times a + b^2} \text{ sive ponendo } AS \text{ pro } b,$$

& PS pro $a + b$ dividendoque numerato-
 rem & denominatorem per 2, vis tota
 Sphære est $\frac{2 AS^3}{3 PS^2}$. Q. E. I.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

culo P , & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pariter ratione, si superficiebus sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia DPF , $EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires conii DPF & segmenti conici $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra sphæroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus P à sola sphæroide intimâ $PCBM$, & propterea (per corol. 3. prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, quâ corpus A trahitur à sphæroide totâ $AGOD$, ut distantia PS ad distantiam AS . *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E corpore dato formanda est sphaera vel cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per prop. LXXX. LXXXI. & XCI.) (a) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis

æquales, erunt ut distantia DP , EP . Sed quoniam evanescentibus angulis DPF , EPG , lineæ DH , FK & GL , EI , sunt parallelæ, erit superficies $DHKF$, ad superficiem $GLIE$, ut rectangulum $p \times \frac{DH+FK}{2}$, ad rectangulum $p \times \frac{GL+EI}{2}$, hoc est, (ob $DH+FK=LG+EI$) ut p ad P , seu ut DP ad EP . Quare si DPF , EPG conos vel pyramides in sphæroide AGO designent, solida $DHKF$, $GLIE$ erunt ut superficies prædictæ in perpendicularibus p . P , similia ductæ, hoc

est, ut quadrata distantiarum DP , EP . Quoniam igitur vis quâ particula solida $DHKF$ trahit corpusculum P est ad vim quâ illud trahitur à particula solida $GLIE$, ut solidum $DHKF$ ad solidum $GLIE$, hoc est, ut $\frac{DP^2}{EP^2}$, ad $\frac{EP^2}{EP^2}$, manifestum est corpusculum P utrinque æqualiter attrahi.

(a) * *Inveniri potest.* Hoc est per propositiones citatas inveniri potest generalis expressio seu formula attractionis corpusculi

sis distantis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

P R O -

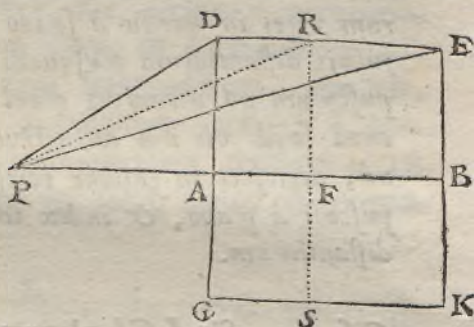
pusculi in sphaeram vel cylindrum aliamve figuram regularem, & lex attractionis corpusculi in eandem figuram experimentis inventa conferri debet cum generali illa formula, & inde habebitur aequatio cujus ope determinari poterit formula generalis exponens indeterminata, quae exhibebit attractionem in singulas particulas materiae.

Exemplum. In cylindrum ADEKG trahatur corpusculum P, situm in ejus axe AB, ut in prop. XCI; supponaturque vis in singulas cylindri particulas tendens reciproce ut distantiae dignitas cujus index n, & dicatur PA=a, PD=b, PB=c, PE=e, RF=g, PF=x, PR=y, critique $yy=xx+gg$, ideoque $ydy=xdx$. Quare fluxio vis qua corpusculum P in cylindrum ADRSG trahitur, erit (541)

$$\text{ut } \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{ydy}{y^{n-1}} = \frac{dx}{x^{n-2}} - \frac{ydy}{y^{n-1}} = x^{2-n}dx - y^{2-n}dy; \text{ cujus fluens} = \frac{x^{3-n}}{3-n} - \frac{y^{3-n}}{3-n} + Q \text{ const.}; \text{ haec autem eva-}$$

nescit, ubi $x=a$, & $y=b$; Quare erit $Q = \frac{b^{3-n} - a^{3-n}}{3-n}$, & fluens accurata = $\frac{b^{3-n} - a^{3-n} + c^{3-n} - e^{3-n}}{3-n}$, ubi $x=c$, & $y=e$.

Jam vero vis qua corpusculum P in totum cylindrum ADEKG trahitur, experimentis inventa sit ut $b-a+c-e$, & habebitur aequatio $\frac{b^{3-n} - a^{3-n} + c^{3-n} - e^{3-n}}{3-n} = b-a+c-e$, ex qua determinandus est valor indicis generalis n. Porro posito $n=2$, aequalia sunt aequationis membra ergo vis in singulas cylindri particulas tendens erit reciproce ut quadratum distantiae a particula, quemadmodum in cor. I. prop. XCI. positum est. Verum si hac ratione, varios tentando numeros, non potest indicis generalis n valor inveniri, ponatur $3-n=z$, & vis corpusculi in cylindrum experimentis reperta sit ut quantitas q; & erit $qx = b^z - a^z + c^z - e^z$. Fiat $a^z=p$, $b^z=v$, $c^z=r$, $e^z=s$, & erit (L significante Logarithmum quantitatis cui praefigitur) $L.a^z = L.p$, $L.b^z = L.v$, $L.c^z = L.r$, $L.e^z = L.s$, adeoque $zL.a = L.p$, & $z = \frac{L.p}{L.a} = \frac{L.v}{L.b} = \frac{L.r}{L.c} = \frac{L.s}{L.e}$. Unde $\frac{L.a \times L.v}{L.b} = L.p$, atque adeo $L.v \frac{L.a}{L.b} = L.p$, proindeque $v \frac{L.a}{L.b} = p$, & simili modo invenietur $v \frac{L.c}{L.e} = r$, & $v \frac{L.e}{L.c} = s$. Quare aequatio erit $\frac{q \cdot L.v}{L.b} = v - v \frac{L.b}{L.a} + v \frac{L.b}{L.c} - v \frac{L.b}{L.e}$, quae ab exponente indeterminata libera est. Ut autem tollatur etiam L.v, ponatur $v = t + 1$, & (383) erit $L.v = L.t + 1 = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 - \&c.$ in infinit. Si itaque in aequatione modo inventa loco v scribatur $t + 1$, & loco L.v series $t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \&c.$, obtinebitur aequatio ab exponentibus & logarithmis indeterminatis libera, ex qua per reversionem serierum invenietur valor quantitatis t, & inde reperietur L.v, atque per L.v habebitur valor



Tom, I. V v r lor

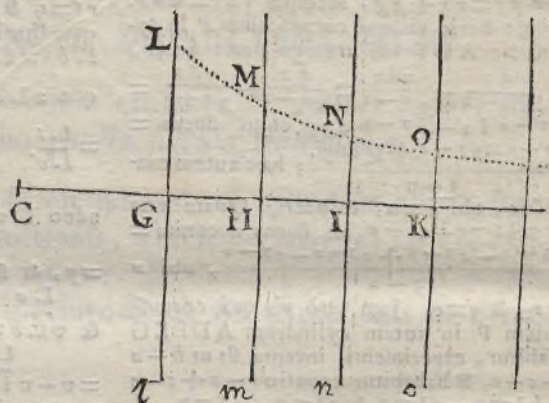
DE MOTO
CORPORUM.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si solidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu à solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi à plano, & index ternario minor quam index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit LGL planum quo solidum terminatur. Jaceat solidum autem ex parte plani hujus versus L , inque plana innumera

mHM , nIN , oKO , &c. ipsi GL parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra solidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus n ternario non minor. Ergo



(per

lor indicis z , & inde valor ipsius n . Nam cum sit $z = \frac{L.v}{L.a}$, & $L.v = L.t + 1$, erit $z = \frac{L.t + 1}{L.a}$, & $n = 3 - z = 3 - \frac{L.t + 1}{L.a}$.

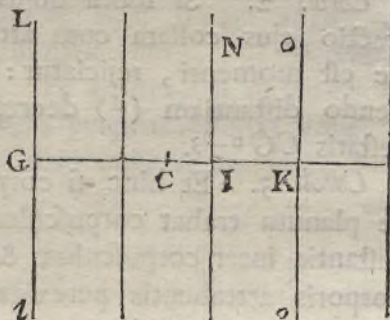
Si in æquatione vel quantitate exponentiali proposita, indeterminata z in solis

quantitatum datarum exponentibus reperiretur, hæc æquatio vel quantitas superiori methodo posset ad aliam reduci numero terminorum finitam, in quâ nulla esset amplius exponents vel logarithmus indeterminata. Nam si $q = fa^z + gb^{2z} + hc^{3z} + \&c.$, sique $v = a^z$ erit $q = fv +$

(per corol 3. prop. xc.) vis, quâ planum quodvis mHM trahit punctum C , (b) est reciprocè ut CH^{n-2} . In plano mHM capiatur longitudo HM ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM . Similiter in planis singulis lGL , nIN , oKO , &c. capiuntur longitudo GL , IN , KO , &c. ipsis CG^{n-2} , CI^{n-2} , CK^{n-2} , &c. reciprocè proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudo captae, ideoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum versus OK producta. Sed area illa (per notas quadratarum methodos) est reciprocè ut CG^{n-3} , & propterea vis solidi totius est reciprocè ut CG^{n-3} . *Q. E. D.*

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XCIII.
THEOR.
XLVII.

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani lGL intra solidum, & capiatur distantia CK æqualis distantiae CG . Et solidi pars $LGLoKO$, planis parallelis lGL , oKO terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus.



Proinde corpusculum C solâ vi solidi ultra planum

$$\frac{2L.b}{g\sqrt{L.a}} + \frac{4L.c}{b\sqrt{L.a}} + \dots \text{erit enim } z = \frac{L.v}{L.a} \text{ \& } b^2 z = b^2 \frac{L.v}{L.a} \text{ \& } Lb^2 z = \frac{2L.v}{L.a} L.b$$

$$= \frac{2L.b}{L.a} L.v, \text{ unde est } b^2 z = \frac{2L.b}{L.a} L.v \text{ \& sic de cæteris.}$$

(b) * *Est reciprocè &c.* Sit $CH=x$, erit MH ut $\frac{1}{x^{n-2}}$, (Hyp.) & area $GLMH$, elementum ut $\frac{dx}{x^{n-2}}$, adoque (165) area

ipsa ut $Q \text{ const.} - \frac{1}{(n-3)x^{n-1}}$, quæ evanescit ubi $x=CG$, Quare $Q = \frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$, & area $GLMH$, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$ $-\frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$. At cum CH infinita evadit, terminus $\frac{1}{(n-3)CH^{n-3}}$ evanescit sitque area infinita $GLOK$, ut $\frac{1}{(n-3)CG^{n-3}}$, seu ob datam $n-3$ ut CG^{n-3} , reciprocè.

DE MOTU
CORPORUM.

num OK fiti trahitur. Hæc autem vis (per casum primum) est reciprocè ut CK^{n-3} , hoc est (ob æquales CG, CK) reciprocè ut CG^{n-3} . *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si solidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; (c) innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractivâ solidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIKO$, in infinitum versus KO productæ.

Corol. 2. Si solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis ceterioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius ceterioris augendo distantiam (d) decreset quam proximè in ratione potestatis CG^{n-3} .

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex unâ parte planum trahat corpusculum è regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decreset quamproximè in

ra-

(c) * *Innotescit ejus vis &c.* Ex demonstrationis attractio solidi totius $LGKO$, in infinitum versus O producti, est ut $\frac{1}{CG^{n-3}}$

solidi verò infiniti $NICO$, ut $\frac{1}{CI^{n-3}}$.

Quare attractio solidi $LGIN$, est ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$.

(d) * *Decrescet quam proximè &c.* Vis enim attractiva, si corpus infinitum sit, est ut $\frac{1}{CG^{n-3}} - \frac{1}{CI^{n-3}}$; sed si perexigua sit distantia CG respectu CI , ter-

minus $\frac{1}{CI^{n-3}}$, minimus erit respectu

termini $\frac{1}{CG^{n-3}}$ & negligi poterit, ideo-

que attractio erit quam proximè ut CG^{n-3} reciprocè. Quod tamen verum esse non potest, si fuerit $n=3$; Nam in hoc casu

$\frac{1}{CH^{n-2}} = \frac{1}{CH}$, ideoque MH erit ut $\frac{1}{CH}$

& rectangulum $MH \times CH$ datum, proindeque curva LMO hyperbola, cujus asymptotus CK , & area illius finita $LMNIG$ vim exponit solidi $LGIN$; area verò infinita $NQKI$, vim solidi infiniti $NIKO$.

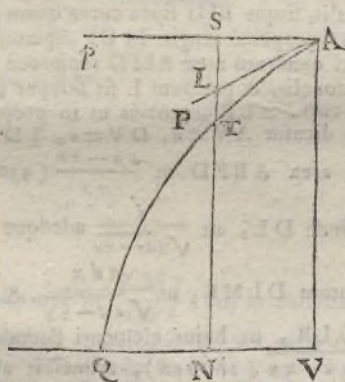
ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & index ternario minor quam index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decreſcunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, aſſertio non valet; propterea quod, in hoc caſu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in corollario ſecundo, ſemper eſt infinite major quam attractio partis ceterioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter verſus planum datum trahatur, & ex datâ lege attractionis quæratuſ motuſ corporis: ſolvetur problema quærendo (per prop. xxxix.) motuſ corporis rectâ deſcendentis ad hoc planum, & (per legum corol. 2.) componendo motuſ iſtuſ cum uniformi motu, (a) ſecundum lineas eidem plano parallelas factò. Et contra, ſi quæratuſ lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, eâ conditione ut corpus attractuſ in datâ quâcunq; curvâ lineâ

mo-

(a) 346. *Secundum lineas eidem plano parallelas &c.* Corpus A quod ad planum VQ perpendiculariter & ſecundum lineas lineæ AV parallelas trahitur, exeat de loco A juxtâ directionem quamlibet AP. 1º. Si projectionis directio AP plano VQ parallela fuerit, dabitur tempus quo corpus, datâ velocitate uniformi projectionis, percurreret lineam AS, & per prop. 39. invenietur in lineâ SN lineæ AV parallelâ ſpatium ST quod corpus vi attractrice eodem tempore deſcribit, & hinc habebitur punctum T in trajectoriâ ATQ, quam corpus utroque motu, impreſſo nimirum & ex vi attractrice genito deſcribit. 2º. Si directio projectionis AP plano trahenti VQ parallela non eſt, ductâ AS plano VQ & SL rectæ AV parallelis, motuſ projectionis AL reſolvatur in motuſ AS & SL, & datis velocitatibus uniformibus AS & SL, dabuntur tem tempus quo percurritur AS, tum ſpatium ST quod corpus hoc eodem tempore deſcri-



bit ex vi attractrice & motu impreſſo SL ſimul (per cor. 3. prop. 39.) unde habebitur punctum T trajectoriæ ATQ cujuſ omnia puncta eodem modo poſſunt inveniri.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

$A + O \Big| \frac{m}{n}$ resolvo (†) in seriem infinitam $A^n + \frac{m}{n} O A^{n-1} + \frac{m(m-1)}{2n^2} O O A^{n-2} + \dots$ &c. atque hujus termino in quo

(†) 548. Resolvo in seriem infinitam &c. Ut hæc liqueant sequentia de dignitatibus formulis sunt memoriæ revocanda.

Lemma. Binomii $a + b$, dignitas $a + b^n$ cujus index n , est $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3 + \dots$

&c. Satis patet ex potentiariarum formatione. Si enim binomium $a + b$, ad 2^{am} , 3^{am} , 4^{am} , &c. dignitates evehatur, in singulis dignitatis cujusque terminis, index litteræ a unitate perpetuò decrevit, dum contrà index litteræ b unitate crescit, & coefficientes seu uncia singulorum terminorum progrediuntur ut numeri $\frac{n}{1}, \frac{n \times n - 1}{1 \times 2}, \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3}, \dots$ &c.

549. Cor. 1. Si ponatur $a = P$, & $\frac{Q}{b} = \frac{Q}{a}$, adeoque $a^n = P^n$, $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$, $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$, $\frac{b^4}{a^4} = Q^4$, his valoribus in lemmatis formulâ substitutis erit $a + b^n = P^n + \frac{n}{1} P^{n-1} Q + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2} P^{n-2} Q^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} P^{n-3} Q^3 + \dots$ &c. & si rursus ponatur $P^n = A$, $\frac{n}{1} P^{n-1} Q = B$, $\frac{n \times n - 1}{1 \times 2} P^{n-2} Q^2 = C$, $\frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} P^{n-3} Q^3 = D$, & ita porro, erit $a + b^n = P + P Q^n = P^n + \frac{n}{1} A Q + \frac{n-1}{2} B Q + \frac{n-2}{3} C Q + \frac{n-3}{4} D Q + \dots$ &c.

550. Cor. 2. Iisdem formulis uti possumus pro polynomio quovis ad datam

dignitatem evehendo, si pars una polynomii litteræ a binomii ponatur æqualis, cæteræ verò partes omnes supponantur æquales litteræ b . Exempli causâ. Sit trinomium $d + e + f$ ad tertiam dignitatem elevandum, pone $n = 3$, $d = a$, $e + f = b$, & formula $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n \times n - 1}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n - 1 \times n - 2}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3} b^3$, mutabitur in seriem $d^3 + 3 d^2 (e + f) + 3 d (e + f)^2 + (e + f)^3$; cum enim perventum est ad coefficientem in quâ est $n - 3$, abrumpitur series ob $n - 3 = 0$. Porro per eandem formulam generalem $(e + f)^2 = e^2 + 2ef + ff$, & $(e + f)^3 = e^3 + 3e^2f + 3ef^2 + f^3$. Quare tandem $(d + e + f)^3 = d^3 + 3d^2e + 3d^2f + 3de^2 + bdef + 3dff + e^3 + 3e^2f + 3ef^2 + f^3$.

Ita etiam formulam pro dignitate infinitinomii possumus obtinere, sit enim series $A + BZ + CZ^2 + DZ^3 + EZ^4 + \dots$ ad dignitatem p evehenda sub ducto calculo inveniatur.

$$A^p + p A^{p-1} B Z + \frac{p(p-1)}{2} A^{p-2} B^2 Z^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6} A^{p-3} B^3 Z^3 + \dots$$

551. Cor. 3. Si ex binomio $a + b$, extrahenda sit radix cujus index $\frac{m}{p}$, loco n , in formulâ generali scribatur $\frac{m}{p}$, & erit $\frac{a + b}{p} = a^{\frac{m}{p}} + \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b^1 + \frac{m \times m - p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2 + \frac{m \times m - 1 \times m - 2p}{1 \times 2 \times 3 \times p^3} a^{\frac{m-3p}{p}} b^3 + \frac{m \times m - p \times m - 2 \times m - 3p}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times p^4} a^{\frac{m-4p}{p}} b^4 + \dots$ &c. vel etiam erit $\frac{a + b}{p} = P$

O duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{m m - m m}{2 n n}$ OOA $\frac{m-2n}{n}$

$$= P + \frac{m}{P} Q + \frac{m^2}{P^2} R + \frac{m^3}{P^3} S + \frac{m^4}{P^4} T + \frac{m^5}{P^5} U + \frac{m^6}{P^6} V + \frac{m^7}{P^7} W + \frac{m^8}{P^8} X + \frac{m^9}{P^9} Y + \frac{m^{10}}{P^{10}} Z + \dots$$

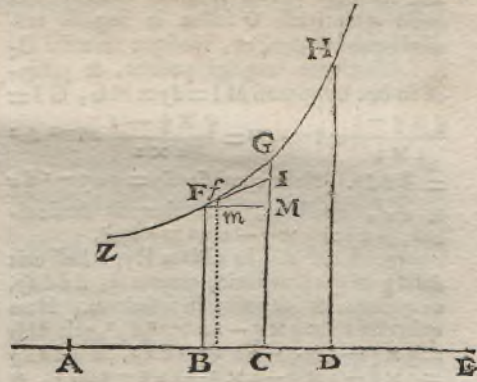
Nam sit Radix quaesita $\sqrt[p]{a+b}$ aequalis seriei infinitae $A+BZ+CZ^2+DZ^3$ &c. erit $\sqrt[p]{a+b}$ aequalis huic seriei ad dignitatem p evectae, sumatur ergo series potentiae $\sqrt[p]{a+b}$ quae erit $a^m + m a^{m-1} b + m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2} b^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3} b^3$ & conferantur cum terminis dignitatis infinitinomii $A+BZ+CZ^2+DZ^3$ &c. ad dignitatem p evecti, (n^o. 550) invenieturque $AP = a^m$; $pAP^{-1}BZ = ma^{m-1}b$; $pAP^{-1}CZ^2 + p \times \frac{p-1}{2} AP^{-2}B^2Z^2 = m \times \frac{m-1}{2} a^{m-2}b^2$; $pAP^{-1}DZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} AP^{-2}B^2CZ^3 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} AP^{-3}B^3Z^3 = m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} a^{m-3}b^3$ &c.

Unde invenietur $A = a^{\frac{m}{p}}$, $BZ = \frac{m}{p} \times \frac{a^{m-1}b}{a^{\frac{m}{p}}}$

$$= \frac{m}{p} a^{\frac{m-p}{p}} b; CZ^2 = \frac{m \times m-p}{1 \times 2 \times p^2} a^{\frac{m-2p}{p}} b^2$$

552. Lemma. Si in recta AE positio-
ne data, ad quam curva ZFH refertur,
capiatur abscissa quavis AB, sitque ordi-
nata correspondens FB aequalis dignitati
abscissae AB^q, in datam quantitatem 1
ductae, & deinde capiantur intervalla ae-
qualia BC, CD, & agantur ordinatae
CG, DH, ac per punctum F ducatur tan-
gens FI ordinatae CG occurrens in I, &
recta FM parallela lineae AE, eidem or-
Tom. I.

dinatae occurrens in M, ac tandem ordi-
nata CG, seu $AB + BC^q$, elevetur ad
dignitatem cujus est index q atque ita in
seriem infinitam convergentem resolvatur,
hujus seriei primus terminus erit semper



aequalis ordinatae FB, insistenti ad initium
quantitatis constantis BC; secundus ter-
minus aequalis erit differentiae inter FB &
CI, id est, lineae MI, & tertius termi-
nus una cum sequentibus in infinitum ae-
quabitur lineae CI quae jacet inter tan-
gentem & curvam... Dem. sit $AB = x$, $FB = y$, data $BC = 0$, ducta intelligatur ordi-
nata fb, alteri FB infinite propinqua
quae lineam FM secet in m, & punctis
F, f, coeuntibus erit $Fm = dx$, $fm = dy$,
ac triangula Fmf, FMI similia, ideo-
que $dx : dy = 0 : MI$, sed quoniam $y = x^q$
(ex hyp.) & proinde $dy = qx^{q-1} dx$,
est $dx : dy = 1 : qx^{q-1}$; ergo $MI = qx^{q-1} \times 0$
& $CI = FB + MI = x^q + qx^{q-1} \times 0$.
Praeterea (ex hyp.) est $GC = x + 0^q =$
 $x^q + qx^{q-1} \times 0 + \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^{q-2} \times 0^2 +$
 $\frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3} x^{q-3} \times 0^3 + \dots$ in inf-
nitum (548). Quare erit $GI = GC -$
 $CI = \frac{q \times q-1}{1 \times 2} x^{q-2} \times 0^2 + \frac{q \times q-1 \times q-2}{1 \times 2 \times 3} x^{q-3} \times 0^3$

DE MOTU
CORPO-
RUM.

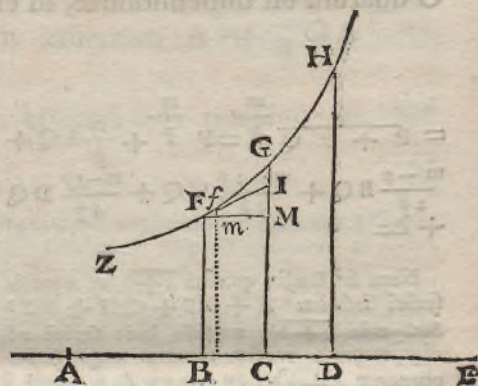
$x^q - 1 \cdot 0^3 + \&c.$ in infinitum. Ergo seriei in quam resolvitur $x + 0^q$, terminus primus x^q , æqualis est ordinatæ FB, secundus terminus $q x^{q-1} 0$, æqualis differentiæ inter FB & CI, & tertius terminus unâ cum sequentibus in infinitum æqualis lineæ GI. Eadem est demonstratio, si curva ZFH concavitatem lineæ AE obvertat. Q. E. D.

553. Cor. 1. Si quantitas O , seu BC, in infinitum minuat ut fiat $= dx$, termini omnes in seriæ subsequentes sunt infinite minores quovis termino antecedente, quod quantitatis O index in singulis terminis unitate crescat, ideoque termini illi subsequentes negligi possunt, & proinde in hac hypothesi $MI = dy = MG$, $GI = \frac{q \times q - 1}{1 \times 2} x^{q-2} O^2 = \frac{q \times q - 1}{1 \times 2} x^{q-2} dx^2$

$= \frac{1}{2} ddy$. Nam cum sit $dy = q x^{q-1} dx$ & dx , constans, erit sumptis fluxionibus, $ddy = q \times q - 1 x^{q-2} dx^2$.

554. Cor. 2. In eadem Hypothesi erit ddy ut quartus seriei terminus, ddd ut quintus, & ita porro in infinitum. Nam quia est $ddy = q \times q - 1 x^{q-2} dx^2$, erit $ddd = q \times q - 1 \times q - 2 x^{q-3} dx^3$, & $ddd dy = q \times q - 1 \times q - 2 \times q - 3 x^{q-4} dx^4$, & ita deinceps. Quartus autem seriei terminus positâ $O = dx$, est $\frac{q \times q - 1 \times q - 2}{1 \times 2 \times 3} x^{q-3} dx^3$. Quintus $\frac{q \times q - 1 \times q - 2 \times q - 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4} x^{q-4} dx^4$; Ergo ob datos numeros $1 \times 2 \times 3$ & $1 \times 2 \times 3 \times 4$. &c. patet corollarium.

555. Cor. 3. Eadem omnia vera sunt, si fuerit ordinata BF seu y æqualis seriei cuivis potentiarum quarumlibet abscissæ AB in datas quantitates ductarum, hoc est $y = e x^n + f x^m + g x^p + \&c.$ Eadem enim demonstratio. Observandum tamen est in hoc casu primum seriei terminum dici in quo quantitas O , seu BC, non extat, secundum terminum in quo quantitas illa est unius dimensionis, tertium in quo extat duarum dimensionum & sic in infinitum, licet in singulis terminis ita definitis plures contineantur quantitates signis + vel - conjunctæ. Exempli causâ. Positâ $y = e x^n + f x^m = BF$, erit $GC = e(x+O)^n + f(x+O)^m = e x^n + f x^m + \frac{m}{1} e x^{n-1} O + \frac{n}{1} e x^{n-1} O + \&c.$ in infinitum. Primus seriei terminus est



$e x^n + f x^m$, secundus $\frac{n}{1} e x^{n-1} x O +$

$\frac{m}{1} e x^{m-1} x O$ & ita de cæteris.

556. Cor. 4. Hinc sequitur eadem omnia valere, si fuerit ordinata BF seu y æqualis cuilibet functioni ipsius abscissæ AB, seu x , hoc est $y = Q$, & Q quantitas, ex abscissâ x , ipsiusque potentis ac aliis quantitibus datis quomodolibet compositâ. Nam quantitas illa Q poterit semper vel (per Lemma 548.) ejusque corollaria vel per divisionem in seriem aliquam resolvi, cujus singuli termini erunt vel ipsius abscissæ x potentie in quantitates datas ductæ, vel quantitates omnino datæ, omnis verò quantitas data $e = e x^0$. Quare æquatio $y = Q$, semper reduci poterit in formam æquationis cor. 3. (555.) $y = e x^n + f x^m + g x^p + \&c.$ Exempli

causâ: Sit $y = g + \frac{e e}{b + x} + (ff + xx)^{\frac{1}{2}}$

Peractâ divisione in infinitum, erit

$$\frac{e e}{b + x} = \frac{e e}{b} - \frac{e e x}{b^2} + \frac{e e x^2}{b^3} - \frac{e e x^3}{b^4} + \frac{e e x^4}{b^5} \&c. \text{ in infinitum; } \& \frac{ff + xx}{2} =$$

$$f + \frac{x^2}{2f} - \frac{x^4}{8f^3} + \frac{x^6}{16f^5} \&c. \text{ in infinitum.}$$

Nam in hoc casu erit in formulâ P P

$$+ \frac{m}{p} A Q + \frac{m-p}{2p} B Q \&c. (551)$$

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XCIII.
THEOR.
XLVII.

vim proportionalem esse suppono. (c) Est igitur vis

quæsitâ ut $\frac{m m - n n}{n n} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut

$\frac{m m - n n}{n n} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata parabolam attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^0$, ideoque dabitur. Datâ igitur vi corpus movebitur in parabolâ, quemadmodum

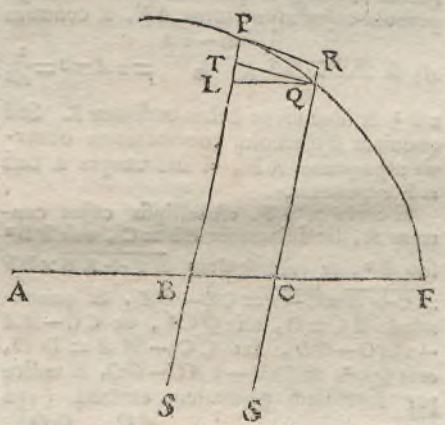
$m=1, p=2, P=ff, Q=\frac{x^2}{ff} A=P \frac{m}{p} =$
 $ff \frac{1}{2} = f, B=\frac{m}{p} \times AQ = \frac{x^2}{2f}$, & sic deinceps, ergo erit $y=g + \frac{ee}{b} + f - \frac{ee x}{b}$
 $+ (\frac{ee}{b^3} + \frac{1}{2} f) x^2 - \frac{ee x^3}{b^4} + (\frac{ee}{b^5} - \frac{1}{8f^3}) x^4,$
&c. in infinitum.

(c) 557. * Est igitur vis quæsitâ &c. Moveatur corpus in curvâ PQF, vi tendente ad planum seu basim AF, secundum lineas PB, QC cum basi AF angulum datum constituentes. Producatâ ordinata CQ ut tangenti per P ductæ occurrat in R, & ex puncto curvæ Q ad ordinatam PB agantur QL parallela AF, & QT ad PB perpendicularis. Jam si vis centripeta fingatur ad punctum S infinite distans tendere, coeuntibus punctis P & Q vis illa in puncto P erit (per cor. 1. prop. 6.) directe ut $\frac{QR}{SP^2 \times QT}$,

hoc est, ob constantem SP, ut $\frac{QR}{QT}$. Porro ob angulum QLT datum, & angulum QTL rectum, datur specie triangulum LQT, & ideo datâ QL, datur etiam QT, ergo datâ BC seu QL, vis erit ut QR. Sed si abscissa AB dicatur = A, ordinata BP=B, & BC=O; cum sit

(ex Hyp.) B , ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit ordinata CQ, ut $A + O^{\frac{m}{n}}$ & (553), QR, ut tertius

terminus seriei in quam resolvitur $A + O^{\frac{m}{n}}$, hoc est, (550) ut $\frac{m \times m - n}{1 \times 2 \times n^2} A^{\frac{m-2n}{n}} \times OO$
 $= \frac{mm - nn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}} \times OO$, seu ut $\frac{mm - nn}{n^2} \times A^{\frac{m-2n}{n}}$, ob datam quantitatem



$\frac{OO}{2}$. Est igitur vis quæsitâ ut $\frac{mm - nn}{1 \times 2 \times n^2}$
 $\times A^{\frac{m-2n}{n}}$ vel ut $\frac{mm - nn}{n n} B^{\frac{m-2n}{m}}$,
quia cum sit B, ut $A^{\frac{m}{n}}$, erit $B^{\frac{n}{m}}$ ut A, &

DE MOTU
CORPO-
RUM.

modum *Galileus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A-3$ seu $2B^3$: ideoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in hyperbolâ. Sed missis hujusmodi propositionibus, pergo ad alias quasdam de motu, quas nondum attingi.

S E C

$B \frac{n}{m} \times \frac{m-2n}{n}$, seu $B \frac{m-2n}{m}$, ut $A \frac{m-2n}{n}$.
Itaque si ponatur $m=2$, $n=1$, erit B ,
ut A^2 , & curva PF parabola, & $\frac{mm-mn}{nn}$

$B \frac{m-2n}{m} = 2B^0$, adeoque vis ut data
 $2B^0=2$. Quod si ponatur $m=-1$, &

$n=1$, erit B , ut $\frac{1}{A}$ hoc est $B \times A$ rectan-
gulum datum, & proinde curva PF hy-
perbola cujus asymptotus AF , & centrum

A ; & $\frac{mm-mn}{nn} A \frac{m-2n}{n} = 2A^{-3} = \frac{2}{A^3}$

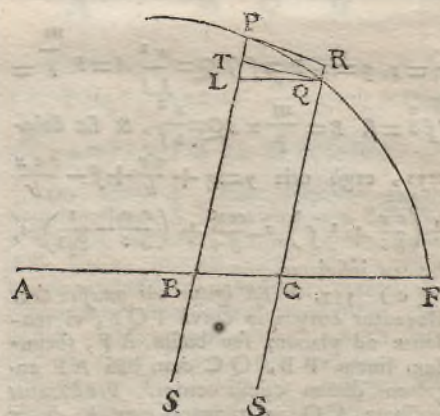
$2B^3$, & ideo vis ut cubus ordinatæ B . Sed
quoniam hyperbola convexitatem obvertit
asymptoto AF , vi illâ corpus à basi
 AF repellitur.

Si curva POF , est ellipsis cujus cen-
trum A , semidiameter $AF=C$, erit PB^2
seu B^2 , ut rectangulum $AF+AB \times BE$
 $=C+A \times C-A=CC-AA$, & ponen-
nendo $BC=O$, erit QC^2 , ut $CC-AA$
 $=2AO-OO$, fiat $CC-AA=DD$,
erit QC^2 , ut $DD-2AO-OO$, & radice
per formulam generalem extractâ (550

551) erit QC , ut $D - \frac{AO}{D} - \frac{OO}{2D} -$
 $\frac{AAOO}{2D^3} - \frac{AO^3}{2D^3} - \frac{A^3OO}{2D^5}$, &c. tertius

seriei terminus est $\frac{OO}{2D} + \frac{AAOO}{2D^3} =$

$\frac{DD+AA \times OO}{2D^3} = \frac{CCOO}{2D^3}$, erit igitur



erit QR (552, 556) seu vis ut $\frac{CC}{2D^3}$, hoc

est, ob datam quantitatem $\frac{CC}{2}$, ut $\frac{1}{D^3}$

ac proinde quoniam BB est ut $CC-AA$

seu DD , vis erit ut $\frac{1}{B^3}$, hoc est,

ut cubus ordinatim applicatæ reciprocè,

quod convenit cum solutione Problematis

III. Eodem modo demonstratur vim à plano

AF repellentem decrescere in ratione
triplicatâ ordinatim applicatæ PB si cor-
pus moveatur in hyperbolâ, cujus diame-
ter una sit in plano AF , altera conjugata
in lineâ parallelâ ordinatis PB , QC , &
convexitas plano AF obversa.

SECTIO XIV.

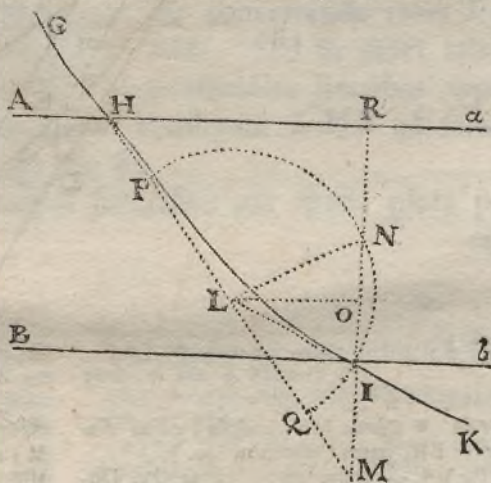
LIBER
PRIMUS.
PROP.
XCIV.
THEOR.
XLVIII.

De motu corporum minimorum, quæ viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si media duo similaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ.

Cas. I. Sunt Aa , Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa (d) secundum lineam GH , ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ, eâque actione describat lineam curvam HI , & emergat (e) secundum lineam IK . Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendicularum IM , occurrens tum lineæ incidentiæ GH productæ in M , tum plano incidentiæ Aa in R ; & linea emergentiæ KI producta occurrat HM in



L.

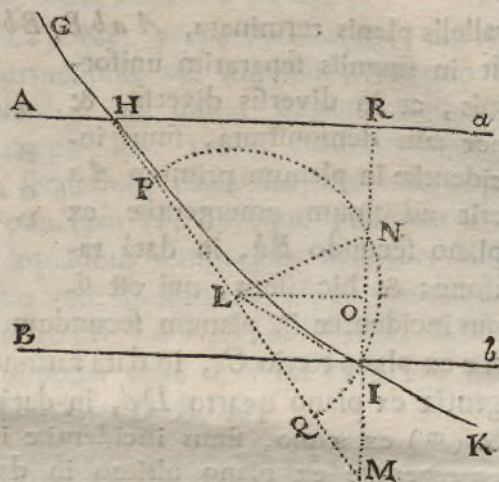
(d) 558. * Secundum lineam GH . Angulus incidentiæ hic dicitur complementum anguli GHA ad rectum, seu angulus quem linea GH constituit cum rectâ ad planum incidentiæ Aa perpendiculariter erectâ in H . Angulus emergentiæ est etiam angulus KIM , quem linea directio-

nis corporis emergentis, efficit cum rectâ IM ad planum emergentiæ Bb , perpendiculari in I .

(e) * Et emergat secundum lineam. Patet rectas GH , IK seu corporis in H & I directiones, curvam HI in punctis H , I conjungere. X x x 3.

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XCIV.
THEOR.
XLVIII.

ad MI demittatur perpendicularum LO , (^h) æquales erunt MO , OR ; & additis (ⁱ) æqualibus ON , OI , fiet totæ æquales MN , IR . Proinde cum IR datur, datur etiam MN ; estque rectangulum NMI ad rectangulum sub latere recto & IM , hoc est, ad HMq , in datâ ratione. (^k) Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo PMQ , id est, differentiæ



quadratorum MLq , & PLq seu LIq ; & HMq datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem MLq : ergo datur ratio $MLq - LIq$ ad MLq , (^l) & convertendo ratio LIq ad MLq , & ratio dimidiata LI ad ML . Sed in omni triangulo LMi , sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ LMR ad sinum anguli emergentiæ LIR . Q. E. D.

Cas. 2. Transcat jam corpus successivè per spatia plura paral-

tro HT datum, agatur ordinatim applicata XE parabolæ occurrens in E , & per E ducatur ED parallela XH & tangenti HM occurrens in D , ac proinde æqualis datæ XH . Jam verò HX seu DE , est spatium quod corpus vi attractrice describit eodem tempore dato quo motu uniformi projectionis percurrit HD , ideòque datis vi attractrice & velocitate projectionis, data quoque erit linea HD in quovis incidentiæ angulo GHT . Est autem latus rectum diametri HT tertia proportionalis ad abscissam HX , & ordinatam XE seu HD . Ergo datis vi attractrice & velocitate projectionis, datum seu constans est latus rectum diametri HT . Q. E. D.

(h) * *Æquales erunt MO , OR* (per prop. 2. lib. 6. Elem.)

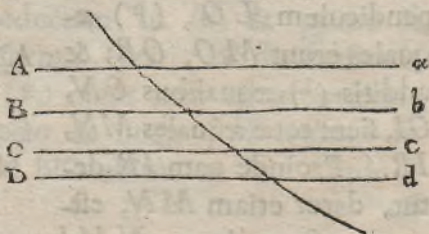
(i) * *Æqualibus ON , OI* . Per prop. 3. lib. 3. Elem.

(k) * *Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo PMQ* , (per cor. 1. prop. 36. lib. 3. Elem.) id est, differentiæ quadratorum ML^2 & PL^2 , est enim $PM = ML + PL$, & $QM = ML - LQ = ML - PL$; Quare $PM \times QM = ML^2 - PL^2$. (Per Corol. 6. 2^a. Elem.)

(l) * *Et convertendo.* Sint enim A & B , quantitates datæ, & $ML^2 - LI^2 : ML^2 = A^2 : B^2$, erit $ML^2 : LI^2 = B^2 : B^2 - A^2$, quæ est ratio data.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

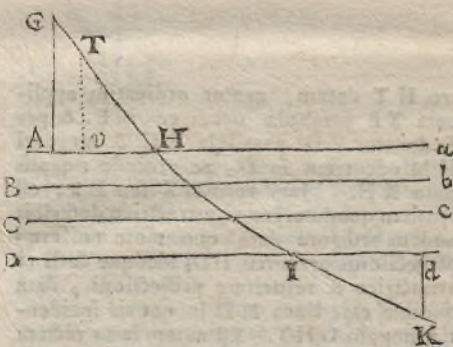
rallelis planis terminata, $AabB, BbcC, \&c.$ & agitetur vi quæ fit in singulis separatim uniformis, at in diversis diversa; & per jam demonstrata, sinus incidentiæ in planum primum Aa erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo Bb , in datâ ratione; & hic sinus, qui est sinus incidentiæ in planum secundum Bb , erit ad sinum emergentiæ ex plano tertio Cc , in datâ ratione; & hic sinus ad sinum emergentiæ ex plano quarto Dd , in datâ ratione; & sic in infinitum: & ^(m) ex æquo, sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo in datâ ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eò ut attractionis vel impulsus actio, secundum legem quamcunque assignatam, continua reddatur; & ratio sinus incidentiæ in planum primum ad sinum emergentiæ ex plano ultimo, semper data existens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*



PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.

Capiantur AH , Id æquales, & erigantur perpendicularia AG, dK occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH, IK , in G & K . In GH capiatur TH æqualis IK , & ad planum Aa demittatur normaliter Tv . Et (per legum corol 2.) distinguatur motus corporis in duos,



(m) * *Et ex æquo.* Sint quantitates datæ $A, B, C, D, \&c.$ Sinus incidentiæ in planum primum S , sinus emergentiæ ex secundo plano, idem qui sinus inciden-

tiæ in secundum planum T , & ita porro sinus sint $S, T, V, X, \&c.$ ponaturque $S: T = A: B, T: V = B: C, V: X = C: D,$ & erit, ex æquo, $S: X = A: D.$

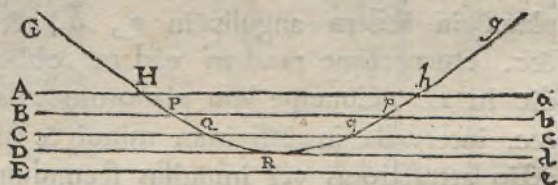
unum planis $Aa, Bb, Cc, \&c.$ perpendicularem, alterum iisdem parallelum. Vis attractionis vel impulsus, agendo secundum lineas perpendiculares, nil mutat motum secundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa secundum parallelas intervalla, quæ sunt inter lineam AG & punctum H , interque punctum I & lineam dK ; (n) hoc est, æqualibus temporibus describet lineas GH, IK . Proinde velocitas ante incidentiam est ad velocitatem post emergentiam, ut GH ad IK vel TH , id (o) est, ut AH vel Id ad vH , hoc est (respectu radii TH vel IK) (p) sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ. *Q E. D.*

LIBER
PRIMUS.
PROP.
XCVI.
THEOR. L.

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis, & (q) quod motus ante incidentiam; velocior sit quam postea, dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter parallela plana $Aa, Bb, Cc, \&c.$ describere arcus parabolicos, ut supra; sintque arcus illi $HP, PQ, QR, \&c.$



Et fit ea lineæ incidentiæ GH obliquitas ad planum primum Aa , ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in eâ ratione quam habet idem sinus

(n) * Hoc est, æqualibus temporibus. Quoniam motu composito corpus fertur per lineas GH & IK , eodem tempore describit GH quo AH , & IK quo ID , sed (ex Dem.) tempora quibus conficiuntur intervalla parallela & æqualia AH, ID æquantur, ergo corpus æqualibus temporibus describit lineas GH & IK .

(o) * Id est ut AH vel Id ad vH . Per prop. 2. lib. 6. Elem.

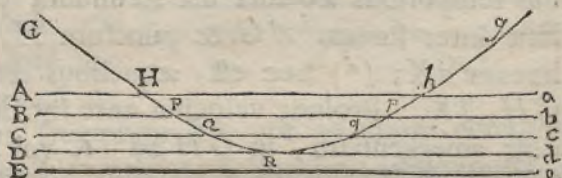
(p) * Ut sinus emergentiæ. Est enim

angulus vTH anguli THv , & angulus IKd anguli KId , complementum ad rectum, & proinde (558) prior est æqualis angulo incidentiæ, posterior est æqualis angulo emergentiæ.

(q) * Et quod motus ante incidentiam &c. Ut angulus emergentiæ semper crescat (prop. 95.) & ipsius proinde complementum ad rectum semper decrescat in transitu corporis per diversa media.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano Dd , in spatum $DdeE$: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, ideoque linea emergentiæ coincidet cum plano Dd . Perveniat corpus ad hoc planum in puncto R ; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum Ee .



Sed nec potest idem pergere in lineâ emergentiæ Rd , propterea quod perpetuò attrahitur vel impellitur ^(r) versus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana Cc , Dd , describendo arcum parabolæ QRq , ^(f) cujus vertex principalis (juxta demonstrata Galilæi) est in R ; secabit planum Cc in eodem angulo in q , ac prius in Q ; dein pergendo in arcubus parabolicis qp , ph , &c. arcubus prioribus QP , PH similibus & æqualibus, secabit reliqua plana in iisdem angulis in p , h , &c. ac prius in P , H , &c. emergetque tandem eâdem obliquitate in h , quâ incidit in H . Concipe jam planorum Aa , Bb , Cc , Dd , Ee , &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*

Scho.

(r) * Versus medium incidentiæ v. gr. Cc .

(f) * Cujus vertex principalis. Quoniam enim (ut patet ex not. 40.) omnes diametri parabolæ QRq sunt ad basim Qq perpendiculares, erit Qq ad axem ordinatim applicata, cumque recta DRd ipsi Qq parallela parabolam tangat in R , (40) erit R vertex principalis (per lem. 2. de conic.) & propterea velocitates cor-

poris in locis Q & q à vertice R æquè remotis æquales erunt, & directiones illius ad lineam Qq æquè inclinatæ: Insuper velocitas perpendicularis quâ corpus ex solâ vi attractrice ad planum Pp urgetur, iisdem gradibus crescit per totum spatium qp , quibus antè decreverat per spatium æquale PQ . Quare corpus pergendo in arcubus parabolicis &c.

Scholium.

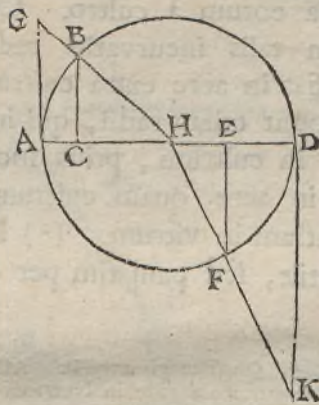
LIBER
PRIMUS.
PROP.
XCVI.
THEOR. I.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam secantium rationem, ut invenit *Snellius*, (t) & per consequens secundum datam sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namque lucem successivè propagari & spatio quasi septem vel octo minorum primorum à sole ad terram venire, (u) jam constat per phænomena satellitum *Jovis*, observationibus diversorum astronomorum confirmata. Radii autem in aëre existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admisâ, invenit, & ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope cor-

po.

(t) * *Et per consequens.* Lucis radius GH incidat in planum refringens AD , fitque radius refractus HK . Centro H & radio quovis HA , circulus describatur planum secans in A & D radiosque lucis in B & F . Erigantur ad planum perpendiculara AG , CB , EF , DK . *Villebrordus Snellius*, referente *Isaaco Vossio* in suâ dissertatione de lucis naturâ & proprietate, invenerat secantes GH , HK angulorum GHA , KHD , esse in datâ ratione. Verùm inde sequitur quod *Cartesius* postea vulgavit, datam quoque esse rationem linearum CH , HE quæ sunt sinuum angulorum incidentiæ CBH , & emergentiæ HFE (558). Nam $BH:GH = CH:AH$ (seu BH) & $KH:FH$ (seu BH) = HD (seu BH): HE , & ex æquo, $KH:GH = CH:HE$. Quare datâ ratione GH ad KH , datur quoque ratio HE ad CH .

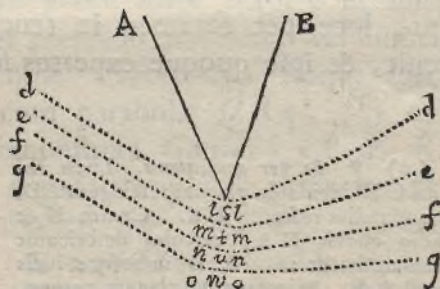
(u) * *Jam constat per phænomena.* *Jupiter* cum suis quatuor satellitibus circâ solem ceû centrum revolvitur in trajectoriâ quæ tellurem ambitu suo complectitur, undè fit ut perpetuò mutetur *Jovis* à tellure distantia, quæ, cæteris paribus, minima est, tellure solem inter & *Jovem* positâ, maxima verò, sole inter *Jovem* & tellurem locato, atque harum distantiarum differentia orbis magni diametro, seu duplæ distantie solis à terrâ æqualis est. Si igitur lucis propagatio instantanea non est, sed successiva, & per orbis magni diame-



trum sensibili aliquo tempore diffundatur, necesse est ut satellitis *Ecclipsis*, quæ contingit dum *Jovis* umbram subit, tardius à nobis videatur in majori illâ *Jovis* distantia, citius in minori, atque ita rem se habere *Roemerus* alique deinde plures astronomi observarunt. Cæterum alii causæ præter successivam lucis propagationem inæqualitatem illam satellitum tribuendam esse contendit *Clariss. Maraldus* in comm. Paris. 1707. quod etiam jam antea *Magno Cassino* visum fuerat. Sed *Clarissimus Granjean* ejus argumentis respondet in comm. Paris. 1732. horum dissertationes videbis.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

porum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & ære cusorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem; & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, (x) quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. Et qui transeunt ad majores distantias minus incurvantur; & ad distantias adhuc majores incurvantur aliquantulum ad partes contrarias, & tres colorum fascias efformant. In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *g o w o g*, *f n u n f*, *e m t m e*, *d l s l d* sunt radii, arcubus *o w o*, *m t m*, *l s l* versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum à cultro. Cum autem talis incurvatio radorum fiat in aere extra cultrum, debent etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. (z) Fit igitur refraçtio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radorum, factam

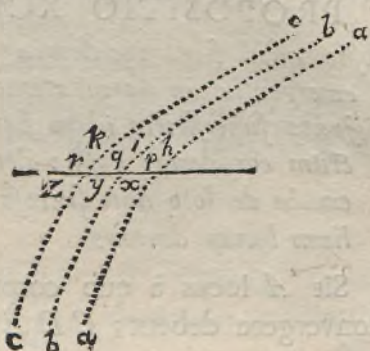


(x) * *Quasi magis attracti.* Alia egregia experimenta vide in Newtoni optica initio lib. 3. & quæst. 29.

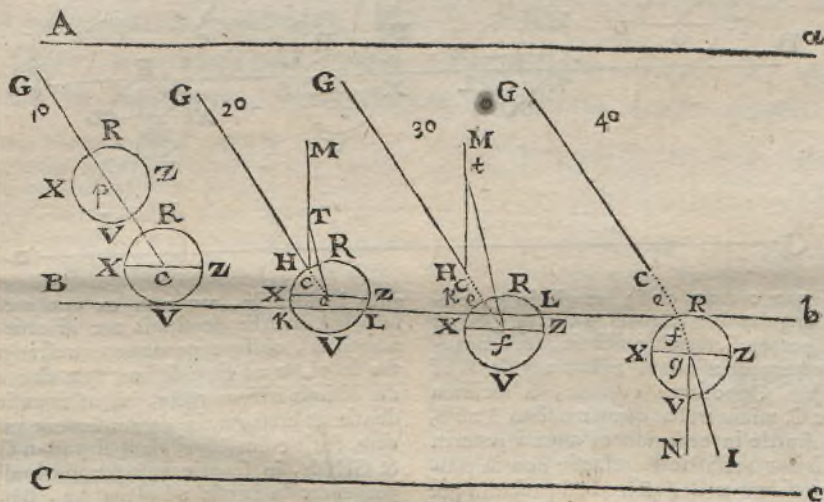
(z) * *Fit igitur refraçtio & reflexio.* Vide Prop. 8. & 9. Partis 3^æ. Lib. optices Newtoni. Sed ut res clariùs intelligatur, sint media duo contigua, *A a b B*, *B b c C*, planis parallelis terminata, & quorum talis sit attractionis lex ut ultra distantiam *p R* à medio alterutro evanescat ejus medi attrahitio. Itaque centro *p* & radio *p R* (fig. 1.) describatur circulus vel potius sphaera *RZVX* quæ planum *B b* non attingat, corpus *p* versus omnia hujus sphaeræ puncta æqualiter attractum, nullam in partem inflectetur, sed manebit in lineâ rectâ *G C*, secundum quam moveri supponitur. Si in eadem rectâ *G C*, capia-

tur punctum *C*, à plano *B b* remotum distantia *CV = PR*, sitque vis attractiva versus medium *B b c C*, major vi attractiva medi *A a b B*, in eo ipso loco *c* corpus a rectâ viâ *G c* deflectere curvamque lineam describere incipiet. Perveniat (29.) corpus ex *C* in *e*, per curvam *c e*, & ductâ *H M* ad plana *A a*, *B b* perpendiculari, ac per punctum *e*, rectâ *e T*, quæ curvam *c e* tangat in *e*, & perpendiculari *H M* occurrat in *T*, erit angulus *e T c* minor angulo incidentiæ *G H M*; nam cum segmentum *K V L*, in hemisphaerio *XVZ* magis trahat versus planum *B b*, quam segmentum ipsi æquale in hemisphaerio *XRZ*, (ex hyp.) versus planum *A a*, manifestum est curvam deorsum inflecti, ideoque tangentem *e T* à radio incidenti-

factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis $ckzc$, $biyb$, $ahxa$ incidentibus ad r , q , p , & inter k & z , i & y , h & x , incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est propositiones sequentes in usus opticos subjungere; interea de naturâ radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed trajectorys corporum trajectorys radiorum persimiles solummodo determinans.



P R O.



te GC, versus superiora M recedere. Similiter ubi corpusculum C est in f (3^o) intrâ medium Bbc C, magis trahitur versus planum Cc, ab hemispherio XVZ, quam retrahitur versus planum Bb, ab altero hemispherio XRZ, cujus segmentum kRl, minus trahit, quam æquale segmentum in hemispherio XVZ; quare angulus

Ht f, quem tangens ft cum perpendicularo HM efficit, adhuc minor est quam angulus HTe (2^o). Sed cum tandem corpusculum c pervenit in g (4^o), locum à plano Bb remotum distantia maximâ $gR = pR$, tum corpus p, æqualiter undique attractum (ex hypothesi) semitam non amplius mutat, sed rectâ moxetur per gI .

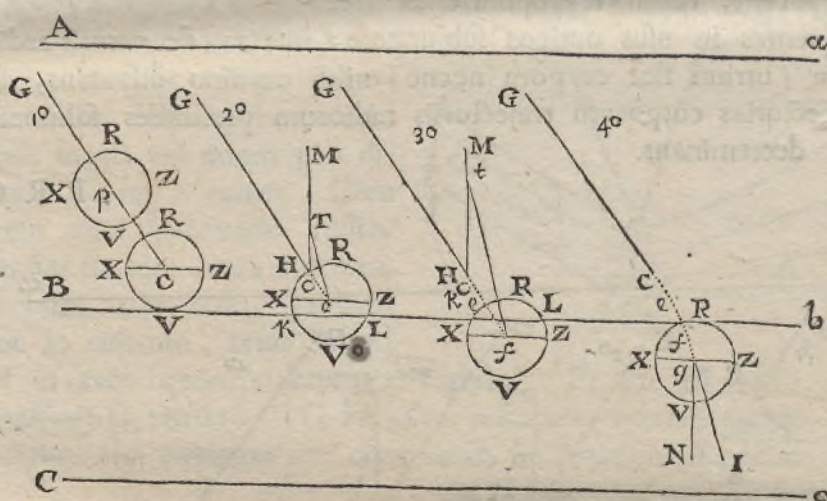
Y Y Y 3

g I

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinus emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit A locus à quo corpuscula divergunt; B locus in quem convergere debent; CDE curva linea quæ circa axem AB



gI , quæ curvam $cefg$ tangit in g , estque angulus NgI , quem gI cum gN ad Bb perpendiculari constituit, seu angulus emergentiæ minor adhuc angulo Htf (3°). Oppositum eveniet, si medium $BbcC$, minus trahat quam medium $AabB$, & refraçtio in reflexionem mutari poterit. Fit igitur refraçtio & reflexio non in puncto incidentiæ R (4°). Sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, ut Newtonus docet. Quod si itaque certissimis experimentis constet radios lucis à corporibus quasi attrahi in minimis distantiiis, Newtonus veram hic demonstravit causam illarum lucis affectionum, quibus contingit ut radii incidentes in superficiem corporis resiliant in plano ad eam verticali, sub angulis reflexionis æqualibus an-

gulis incidentiæ, atque ut ex uno medio in aliud diversæ densitatis aut diversæ vis trahentis, obliquè penetrantes refrangantur in plano ad superficiem, quæ duo media dirimit itidem recto, ita ut sinus incidentiæ & emergentiæ datam servent rationem. Satis enim liquet plana linearum GHI & $GHRh$, in superioribus propositionibus, perpendicularia esse ad plana Aa , Bb , ut planum parabolæ quam gravia in hypothesi Galilæi describunt perpendicularare est ad horizontem. Quænam verò causa sit attractionis aut tendentiæ vel impulsus radiorum lucis in corpora: alia quæstio est quam hic agitare minimè necesse est, quæque sepositâ, interim ex certis experimentis mathematicâ demonstratione, ostensa est reflexionis & refraçtionis lex & causas

quæ-

DE MOTU
CORPO-
RUM.

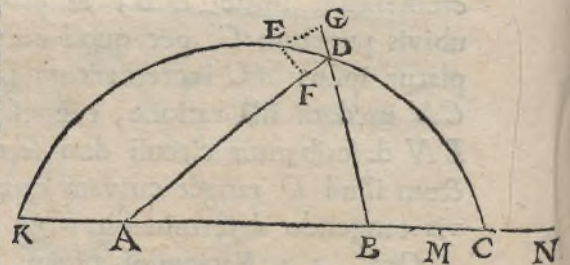
(b) habebuntur figuræ illæ omnes, quas *Cartesius* in optica & geometria ad refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* celaverit, visum fuit hâc propositione exponere.

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis *CD*, secundum lineam rectam *AD*, lege quâvis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam *DK*, & à puncto *C* duci intel-

in *N*, & inde convolutione superficiem *CEN*, circa axem *CN* solidum corpus conficiatur, corpusculum ex *D*, per lineam *DB* ad centrum *B* circuli descripti tendens, non refrangetur, dum ex superficie circulari concavâ *EN* egreditur, quod corpusculi directio *DB*, sit ad illam superficiem perpendicularis, atque ita corpusculum semper perveniet ad punctum *B*.

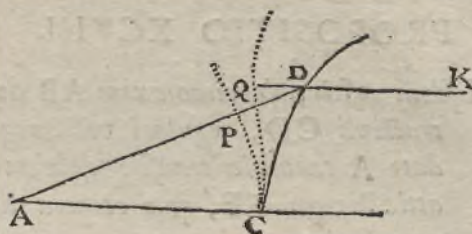
(b) * Habebuntur figuræ illæ omnes. Quas enim lineas *Cartesius* *Geometriæ* lib. 2^o. Pag. 50. & seq. dicit *A 5*, *A 6*, vel *A 7*, *A 8*, eas *Newtonus* hic vocat *CM*, *CN*, & de cætero eadem est utriusque authoris constructio. Unde manifestum est, si punctum *C*, inter puncta *A* & *B*, & punctum *N* inter *C* & *M*, sita sint, primam *Cartesii* ovalem *Newtonianâ* constructione describi; si manentibus punctis *A*, *C*, *B*, *M*. punctum *N*, inter *C* & *A* locetur, 2^{am}. ovalem *Cartesianam* obtineri; si vero punctum *B* ad alteras partes puncti *C* migret ultra *A*, & punctum *C* sit inter *A* & *N*, atque *M*, 3^{am}. *Cartesii* ovalem haberi, iisdemque positis, si punctum *N* sit inter *C*, & *A*, 4^{am}. ovalem *Cartesii* delineari. Porro, si punctum *A* vel *B* in infinitum abeat ut radii incidant vel refringantur paralleli, tum per punctum *M* vel *N* erigendum erit perpendicularum, quod circulus centro *B* vel *A*, & radio *BN*, vel *AM*, descriptus secabit in puncto quaesito *D*, curvæ *CDE*, quæ erit ellipsis vel hyperbola, ut calculo inito facile patet, atque hæc sunt figuræ quibus *Cartesius* cap. 50. dioptrices ulus est.

Eadem est demonstratio, si superficies *CDE* incidentes radios reflectit, quo casu fit $CN = CM$, ob angulum incidentiæ æqualem angulo emergentiæ (per prop. 96.)

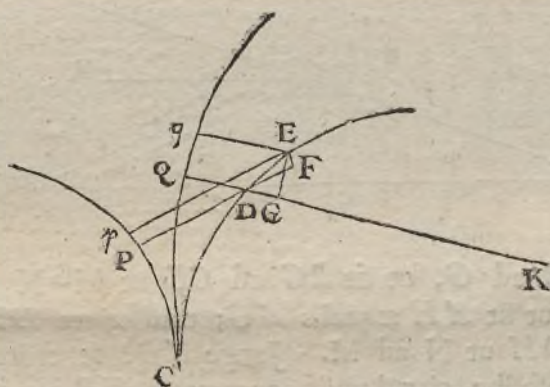


& curva *CDE* erit sectio conica, videlicet hyperbola, si punctum *C* inter *A* & *B* situm; ellipsis, si extra positum sit; Parabola, si ellipseos focus *B* in infinitum abeat, & circulus, si puncta *A* & *B* coeant. Nam si punctum *C* inter *A* & *B* situm sit, & *N* inter *A* & *C*, cum sit $AD = AM$, & $BD = BN$ (per constr.) rectarum *AD*, *BD* differentia data erit, ut potè æqualis $AM - BN = AC + CM - BC - CN = AC - BC$, ob $CM = CN$, ideòque curva *CDE* erit hyperbola cujus foci *A* & *B*, (per theor. 3. de hyperbolâ). Si punctum *C* inter puncta *A* & *B* positum non est, ut in hâc figurâ, rectarum *AD*, *BD* summa data erit, in hoc enim casu punctum *C*, est inter *N*, & *M*, atque $AD + BD = AC - CM + BC + CN = AC + BC$. Est igitur *CDE* ellipsis cujus foci *A* & *B*, (Theor. 3. de Ellipsi) quæque foco alterutro in infinitum abeunte mutatur in parabolam & foci coeuntibus mutatur in circulum.

telligantur lineæ curvæ CP ,
 CQ ipsiſ AD , DK ſem-
per perpendicularæ: (c) erunt
incrementa linearum PD ,
 QD , atque ideo lineæ ipſæ
 PD , QD , incremen-
tis iſtis genitæ, ut ſinus inci-
dentia & emergentia ad invicem: & contra.



PRO-



(c) 561. * Erunt incrementa &c.
Nam ſi capiatur arcus quam minimus DE ,
atque ex puncto E in curvas CP , CQ ,
& in rectas PD , QK , demittantur per-
pendiculara Ep , Eq & EF , EG , coeunti-
bus punctis E & D , erunt EF , Pp &
 EG , Qq ſibi mutuò parallelæ, & proin-
de PF , pE & QG , qE , æquales, ideo-
que DF & DG erunt rectorum PD ,
 QD incrementa naſcentia. Sed, (ex
demonſtratiſ ſuprà) DF eſt ad DG , ut
ſinus incidentia ad ſinum emergentia,

Tom, 1,

quarè incrementa linearum PD , QD ,
atque adeò (cor. Lem. 4.) lineæ ipſæ PD ,
 QD , (quæ ſimul naſcuntur in puncto C)
incrementis iſtis genitæ, erunt ut ſinus
incidentia & emergentia ad invicem, & con-
trà, ſi lineæ PD , QD curvis CP , CQ
perpendicularæ ſint ut ſinus incidentia &
emergentia, erunt earum incrementa naſ-
centia in eadem ſemper ratione, ac proin-
de ſi corpus in ſuperficiem CD ſecundum
lineam PD incidat, emerget ſecundum li-
neam QD ſeu DK .

Z z z

Nam concipe Lineas CP , CQ ipsis AD , DF respectivè, & Lineas ER , ES ipsis FB , FD ubique perpendiculares esse, (e) ideoque QS ipsi CE semper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. xcvii.) PD ad QD ut M ad N , (f) ideoque ut DL ad DK vel (g) FB ad FK ; & (h) divisim ut $DL - FB$ seu $PH - PD - FB$ ad FD seu $FQ - QD$; & compositè ut $PH - FB$ ad FQ , id est (ob (i) æquales PH & CG , QS & CE) $CE + BG - FR$ ad $CE - FS$. Verum (ob proportionales BG ad CE & $M - N$ ad N) est etiam $CE + BG$ ad CE ut M ad N : (k) ideoque divisim FR ad FS ut M ad N , & propterea per Corol. 2. Prop. xcvi, superficies EF cogit corpus, in ipsam secundum lineam DF incidens, pergere in linea FR ad locum B . $Q.E.D.$

Scholium. Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perspicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus Sphæricè figuratis & Aquam inter se cludentibus conflentur; fieri potest ut à refractionibus Aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accuratè corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod Penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verum tamen diver-

LIBER
PRIMUS.
PROP.
xcviii.
PROBL.
xlviii.

(e) * Ideoque QS ipsi CE semper æqualem. Cum enim linea QS , sit semper perpendicularis utrique lineæ CQ , ES (ex Hyp.) ea nec crescit, nec decrescit, ob partes curvarum in Q & S semper parallelas, ut patet.

(f) * Ideoque ut DL ad DK . Est enim (per constr.) DK ad DH , ut N ad M , & $DL = DH$, per const.

(g) * Vel FB ad FK . Ob parallelas DL , FB (per constr.)

(h) * Et divisim. Cum sit $PD : QD = DH : DK = FB : FK$, erit divisim $DH : DK$, seu $PD : QD = DH - FB : DK - FK = PH - PD - FB : DF$, seu

$QF - QD$, & compositè $PD : QD = PH - PD + PD - FB$, seu $PH - FB : QF - QD + QD$, seu $QF = M : N$.

(i) * Ob æquales PH & CG . Nam (per constr.) $AH = AG$, & quoniam punctum A datum est, estque AP semper perpendicularis ad curvam CP , liquet eam curvam esse circulum cujus centrum A , undè $AP = AC$, & hinc $PH = CG$; & simili modo patet esse $BR = BE$, ob datum punctum B .

(k) * Ideoque divisim &c. Nam cum sit (ex demonstratis) $M : N = CE + BG - FR : CE - FS = CE + BG : CE$, erit divisim $M : N = FR : FS$.

DE MOTU
CORPO-
RUM.

diversa diversorum radiorum Refrangibilitas impedimento est, quò minus Optica per figuras vel Sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis ⁽¹⁾ imperitè collocabitur.

(1) * *Imperitè collocabitur.* Vide primam partem Lib. 1. Optices Newtonianæ ubi egregiis experimentis auctor demonstravit radios diversi coloris esse etiam diversè refrangibiles; unde fit ut focus Lentis objectivæ Telescopiorum (in quo fit objectorum imago quæ trans vitrum oculare spectatur) non sit unicus, sed focus radiorum violaceorum remotissimus sit ab oculari, focus radiorum rubrorum sit proximus, radii ergo ex illis variis imaginibus procedentes inæqualiter colliguntur à vitro oculari, nisi ejus focus adeo remotus sit ut intervallum inter diversas illas ima-

gines ejus respectu evanescat, sed manente Lente objectivâ, aucto foco Lentis ocularis diminuitur in eadem ratione amplificatio objecti; sic ergo quantumvis accuratè colligerentur radii per objectivæ Lentis figuram, hæc focorum multiplicitas neutiquam corrigeretur nisi dispendio amplificationis objecti: Hæc Theoria Newtonum ad inventionem Telescopiorum Catoptriorum deduxit, quæ Prop. 7. & 8. Lib. 1. Optices ab ipso explicantur, & quæ cum levi mutatione in usum communissimum venere.

FINIS TOMI PRIMI.



