PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA;

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO;

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER,

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheseos Professorum.

Editio altera longè accuratior & emendatior.

TOMUS SECUNDUS.

COLONIÆ ALLOBROGUM,

Sumptibus CL. & ANT. PHILIBERT Bibliop.

MDCCLX.

93

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII II.

FLORENTI,

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC
CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

Thomas LE SEUR & *Franciscus* JACQUIER.

MONITUM.

ALtera tandem PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Pars in lucem prodit. De motibus corporum in medio resistente agitur potissimùm in hoc secundo NEWTONI Libro. Rem difficultatis plenam norunt omnes; ita tamen nostra studuimus accommodare commentaria ut iis qui in primi Libri lectione eâ quâ par est diligentiâ & attentione fuerint versati, facilia planaque omnia futura esse speremus. Nec satis nobis fuit præclara Clariss. Autoris inventa explicare, nos ipsi quoque usu didicimus nonnulla interdùm invenire quæ hùc & illùc in nostris commentariis inserere ausi sumus. Sed quod maximum est hujusce operis decus & ornamentum, nova quamplurima doctissimi EULERI problemata, quæ in egregio Mechanices Opere leguntur, addidimus. Nostros etiam abundè locupletant commentarios pretiosa monumenta quibus *Acta Eruditorum* Lipsiensia exornarunt Clariss. Viri JOANNES & DANIEL BERNOULLIUS. Silentio tandem prætermittendus non est Illustriss. doctissimusque POLENUS, cujus elegans de Logarithmicæ constructione Epistola, nonnullaque de motu aquarum experimenta nobis plurimùm profuêre. Sed longè majora sunt quàm verbis exprimi possint, de hoc universo opere Clariss. Viri JOAN. LUDOVICI CALANDRINI merita, qui, eâdem quam primi Libri initio laudavimus, diligentiâ indefessâque curâ huic secundæ parti invigilavit.

Reprehendendum multis fortasse videbitur quod oblatam frequenter occasionem quasi è manibus dimittentes, celeberrimas Philosophorum controversias vel omninò omittamus vel leviter duntaxat perstringamus. Verùm sciant eum fuisse NEWTONI scopum à quo ne latum unguem maximè vellemus discedere, ut ingeniosa quoque Systematum commenta è physicâ eliminaret atque profligaret. Nos itaque à Philosophicis litibus maximè aversi, altercationes summo studio declinavimus. Tot insuper nova his de rebus scripta quotidiè circumferuntur ut justi operis molem excederet hic secundus Liber, si recentiora explicare aggrederemur Philosophorum placita.

Hanc secundam laboris nostri partem benignè excipiant mathematicarum disciplinarum Candidati, tertiamque tandem & ultimam anno proximè futuro expectent.

ROMÆ *in Regio Conventu SS*æ. *Trinitatis.*
Anno 1740.

IN-

INDEX SECTIONUM

DE MOTU CORPORUM,

TOMI II.

Index ſpecialis Propoſitionum hujuſce Tomi, ſeu Libri Secundi, ad calcem Tomi quarti reperietur.

ADMO-

ADMONITIO.

In initio ſingularum notarum quibus numerus præfixus non fuit, ejus loco aſteriſcus * depictus eſt : à pagina verò 130 alter aſteriſcus ſubinde reperietur, cujus alius non eſt uſus quàm ut diſtinguat ea quæ inſerta ſunt ab Editore (eo jure ſibi ab Autoribus Commentarii conceſſo); idem etiam deſignat ſignum (†) quibuſdam notis præfixum, ne ſcilicet turbaretur ordo litterarum ab Autoribus ipſis adhibitus.

Quid in novâ hac ſecundi, necnon prioris Tomi Editione præſtitum ſit, dicetur in limine tertii qui unà cum quarto, ſecundâ vice, Deo dante, lucem videbit anno proximo.

Datum GENEVÆ 30. *Aug.* 1759.

Le prix des 4. Volumes ſera de 36 Liv. de France, pour ceux qui payeront d'avance avant le mois de Novembre prochain, & enſuite 50 Liv.

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

(*) *De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.*

(*) LEMMA

generales resistentiæ notiones exponens.

1. Non potest corpus in medio fluido moveri atque in illud agere, quin ex fluidi reactione vim seu resistentiam aliquam patiatur. Vis illa resistentiæ, proportionalis est decremento motûs, quod dato tempore generat, & illius directio directioni mobilis semper opposita est (*per mot. Leg.* 2. & 3.) Quapropter datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum quod dato tempore producit; datâ enim mobilis massâ, motûs decrementum est ut decrementum velocitatis (*6. Lib.* 1.). 14

2. Vis resistentiæ quam momento quolibet temporis experitur corpus, est ut motûs decrementum directè & temporis momen-

mentum inversè. Nam resistentia dato temporis momento est ut motûs decrementum directè (1) & dato motûs decremento est inversè ut momentum temporis quo motûs decrementum generatur. Si enim subduplo vel subtriplo temporis momento, idem motûs incrementum vel decrementum generetur, vis generans dupla aut tripla est.

2. 3. Hinc datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè.

4. Quoniam directio vis resistentiæ, directioni mobilis contraria est (1), corpus solâ vi insitâ in medio resistente motum, per rectam lineam continuò fertur, quod etiam evenire debere manifestum est, si corpus vi quâlibet acceleratrice vel retardatrice, secundum vel contrà directionem motûs insiti urgeatur.

5. Resistentia considerari potest tanquam vis retardans, & cum vi gravitatis, quâ corporum ascendentium motus perpetuò minuitur, conferri. Vis enim resistentiæ sicut vis gravitatis infinitè parva est, si conferatur cum vi illâ quâ corpus motu finito cietur, seu quâ spatium finitum finito tempore describit. Nam si resistentiæ quam omni temporis momento patitur corpus, vis esset finita, sive ejusdem generis cum vi finitâ corporis motu finito acti, infinita multitudo resistentiarum momentanearum finito quovis tempore producta, totum corporis motum finito quolibet exiguo tempore extingueret, quod est contrà hyp., quâ supponimus corporis motum tempore aliquo finito in medio resistente perseverare.

6. Hinc corporis in medio resistente moti velocitas finita per spatium infinitè parvum, atque etiam tempore infinitè parvo æquabilis censeri potest, neglecto nimirum infinitè parvo velocitatis decremento.

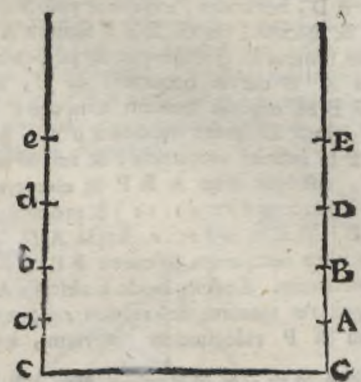
7. JAM verò resistentia corporum in fluidis, cæteris paribus, oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex reactione partium medii, tresque sunt celebriores circà hujus resistentiæ legem hypotheses, quarum Mathematicas consequentias NEWTONUS hoc libro exponit. 1°. Hypothesis resistentiam ponit velocitati corporis dati proportionalem, secunda velocitatis quadrato, & tertia partim velocitati, & partim velocitatis quadrato. Præterea cùm experimentis sit cognitum partem quamdam resistentiæ fluidorum uniformem esse, considerandæ sunt quatuor aliæ hypotheses, in quarum primâ resistentia fingatur uniformis; in secundâ partim uniformis & partim velocitati proportionalis; in tertiâ partim uniformis & partim ut quadratum velocitatis, & in quartâ denique partim uniformis, partim ut velocitas, & partim ut velocitatis quadratum. Prima ex his quatuor hypothesibus nihil habet difficultatis, cùm uniformis resistentia considerari possit tanquam gravitas constans cùm motum ascendentis corporis retardat; quâ de re satis actum est *lib.* 1. tres verò quæ sequuntur hypotheses non ægrè referri plerumque possunt ad determinationes motuum quas aliæ priores hypotheses (de quibus ab initio actum est) suppeditant, quod deinceps ostendemus.

8. Si medium in quo corpus movetur perfectè fluidum sit, hoc est, partibus constet optimè lævigatis nullâque tenacitate cohærentibus, quæ proindè vi cuicumque illatæ cedant, & cedendo facillimè moveantur inter se, sola ea consideranda est resistentia quæ ex medii reactione ortum ducit, estque illa ut densitas medii & quadratum velocitatis mobilis dati conjunctim. Hæc enim resistentia (*per motûs leg.* 2. *&* 3. *lib.* 1.) est ut quantitas motûs dato tempusculo communicati; sed datâ mobilis velocitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi tempusculo dato movenda, hoc est, ut densitas medii; datâ autem medii densitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda, & ut velocitas quâ quantitas illa fluidi movetur conjunctim, & quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda velocitati mobilis proportionalis est, corpus enim duplo velocius altero, duplo majus spatium in fluido percurret, sicque duplo pluribus particulis occurret. Quare datâ densitate medii, resistentia est ut quadratum celeritatis mobilis, atque adeò si neque fluidi densitas, neque mobilis celeritas data sit, erit resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, atque hæc est resistentia quæ ortum ducit ab inertiâ particularum fluidi quas corpus motum

è lo-è loco dimovet, & quæ in velocioribus motibus ſola ferè obſervatur.

9. Altera reſiſtentia quæ ex tenacitate partium fluidi uniformis naſcitur, conſtans eſt, aut quod idem eſt, temporis momento proportionalis, eamque in tardiſſimis motibus ſenſibilem faciunt experimenta. Si enim partium fluidi cohæſio ſit ubique eadem, vi quâdam determinatâ opus eſt ut partes illæ ſeparentur, corporique oppoſitum præbeant, quâcumque demum velocitate illud feratur, & ideò vis illa reſiſtentiæ cum vi gravitatis uniformi, quæ corporis aſcendentis motum retardat, conferri poteſt. Nam corpora duo ſimilia & æqualia cùm pari velocitate è locis C & c per lineas CE, ce, ad rectam Cc normales projiciantur, & in locis æque altis A & a, B & b, D & d &c. æqualem patiantur reſiſtentiam; corpus quidem C reſiſtentiam experiatur à vi gravitatis conſtante (quæ in locis A, B, D, E, &c. tantùm agat) oriundam, corpus verò c reſiſtentiam ex tenacitate datâ, vi illi gravitatis æquali, in locis tantùm a, b, d, &c. reagente ortam; in ſpatiis verò intermediis AB & ab, BD & bd, &c. nullum ſit motibus obſtaculum; dum corpora perveniunt in A & a, æqualem habent velocitatem, & deindè victis æqualibus in A & a obſtaculis, pari adhuc velocitate per ſpatia minime reſiſtentia AB & ab, feruntur, & ſimili modo, ob æquales reſiſtentias in locis B & b per ſpatia BD & bd ſimul moventur, & ità deinceps eandem ſemper velocitatem in locis æque altis habent. Minuantur jam æqualia illa ſpatia AB & ab, BD & bd, &c. & eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gravitatis & reſiſtentiæ actio vel reactio continua reddatur, & corpora duo eandem ubique reſiſtentiam patientur, & in locis æquè altis eandem velocitatem habebunt. Quarè reſiſtentia quæ ex fluidi tenacitate ortum ducit, poteſt cum vi gravitatis uniformis comparari, licet medii tenacitas in corpus quieſcens (quod quidem vi gravitatis ſemper urgeretur) agere nullo modo poſſit.

10. In fluidis igitur tenacitate aliquâ præditis, reſiſtentia eſt partim uniformis,



partim velocitatis quadrato proportionalis (8. 9.).

11. LEMMA. In quâcunque reſiſtentiæ hypotheſi, corporis tam in medio reſiſtente quàm in vacuo moti velocitas finita in ſingulis locis eſt ut elementum ſpatii deſcripti directè & momentum temporis quo deſcribitur inversè. Velocitas enim uniformis eſt ut ſpatium quodcunque deſcriptum directè & tempus quo id ſpatium deſcribitur inversè. In medio autem ſive reſiſtente ſive vacuo velocitas per ſpatium infinitè parvum æquabilis eſt (6.) 11.

12. *Coroll.* 1. Hinc temporis momentum eſt ut momentum ſeu elementum ſpatii directè & velocitas inversè; momentum verò ſpatii ut velocitas & momentum temporis conjunctìm.

13. *Coroll.* 2. Si igitur velocitas dicatur v, ſpatium deſcriptum s, tempus quo deſcriptum eſt t erit $v = \frac{ds}{dt}$, $v\,dt = ds$ & $dt = \frac{ds}{v}$, ſumptiſque fluentibus $S.\,v\,dt = s$ & $t = S.\,\frac{ds}{v}$.

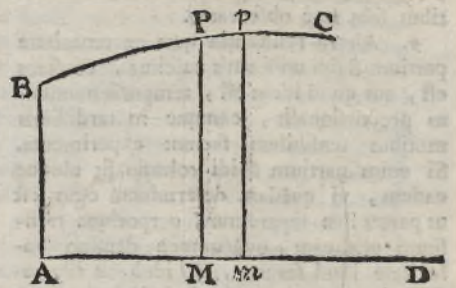
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECTIO I.

14. 14. *Coroll.* 3. Si ità descripta fuerit curva B P C ut ejus applicatæ M P, m p, axi A D, normales, exponant velocitatem v, & abscissæ à puncto fixo A sumptæ A M, A m tempus t, erectumque sit perpendiculum A B curvæ occurrens in B, area A B P M exponit spatium tempore t descriptum. Sit enim applicata p m, priori P M infinitè propinqua, & erit M m $= dt$, adeóque areæ A B P M elementum M P p m $= v\,dt = ds$ (11) & proindè area A B P M $=$ S. $v\,dt = s$. Recta A D dicatur linea temporum & curva B P C linea celeritatum. Eodem modo si abscissa A M exponeret spatium descriptum s & applicata M P velocitatem inversam, ità ut esset A M $= s$, & M P $= \frac{1}{v}$, area A B P M exponeret tempus quo spatium AM descriptum est; esset enim MP p m $= \frac{ds}{v} = dt$, & hinc area A B P M $=$ S. $\frac{ds}{v} = t$.

15. LEMMA. Si corpus datæ massæ solâ vi insitâ in medio resistente moveatur, *decrementum velocitatis*, erit ut *resistentia* & *momentum temporis* conjunctim. *Incrementum* verò *spatii* erit ut *velocitas & velocitatis decrementum* directè & *resistentia* inversè. Datâ enim corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè (2) ideóque decrementum velocitatis est ut resistentia & momentum temporis conjunctim. Quod erat 1um. Sed incrementum spatii est ut velocitas & momentum temporis conjunctim (12) momentum verò temporis est ut decrementum velocitatis directè & resistentia inversè (2); Quarè incrementum spatii est ut velocitas & illius decrementum directè & resistentia inversè. Quod erat 2um.

16. *Coroll.* 1. Hinc resistentia est ut velocitas & illius decrementum directè ac spatii incrementum inversè, & velocitas in suum decrementum ducta, est ut resistentia & incrementum spatii conjunctim.

17. *Coroll.* 2. Quare si spatium dicatur s, tempus t, velocitas v, resistentia r, erit $r\,dt = -dv$, & $r\,ds = -v\,dv$.



18. LEMMA. Si corpus datæ massæ in medio resistente urgeatur vi centripetâ in directione motûs corporis agente; corpore ascendente, erit *velocitatis decrementum* ut *momentum temporis* & *summa vis centripetæ & resistentiæ conjunctim*. Et *velocitas* in *suum decrementum* ducta erit ut *incrementum spatii* & *summa vis centripetæ & resistentiæ* conjunctim.

At corpore descendente, *velocitatis incrementum* erit ut *momentum temporis*, & *differentia inter vim centripetam & vim resistentiæ* conjunctim. Et *velocitas* in *suum incrementum* ducta, erit ut *incrementum* sive elementum *spatii* & *differentia inter vim centripetam ac resistentiam* conjunctim.

Resistentia enim considerari potest tanquam vis continuò retardans (5), & vis centripeta corporis ascendentis motum etiam retardat, ideóque vis tota retardatrix est summa ipsa vis centripetæ & resistentiæ, dum corpus ascendit; sed vis retardatrix in temporis momentum ducta est ut decrementum velocitatis quod producit (2); ergò corpore ascendente, decrementum velocitatis est ut temporis momentum & summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 1um.

Sed momentum temporis est ut incrementum sive elementum spatii directè & velocitas inversè (12). Quarè si corpus ascendat, decrementum velocitatis est ut elementum spatii & summa vis centripetæ ac resistentiæ directè, & velocitas inversè, adeóque velocitas in suum decrementum ducta est ut elementum spatii & summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 2um.

Descendente corpore vis centripeta motum

tum corporis accelerat dum resistentia retardat, & ideò si vis centripeta major sit vi resistentiæ, excessus vis centripetæ suprà resistentiam est vis tota accelerans; Si vis centripeta minor est vi resistentiæ, vis tota retardans erit excessus resistentiæ suprà vim centripetam. Quarè differentia inter resistentiam & vim centripetam, in temporis momentum ducta, erit in primo casu ut incrementum velocitatis, & in secundo casu, ut illius decrementum. Quod erat 3um. Sed momentum temporis est, ut elementum spatii directè & velocitas inversè (12), quarè velocitas in suum elementum (sive incrementum sit, sive decrementum) ducta, est ut elementum spatii, & differentia inter vim centripetam ac resistentiam conjunctim. Quod erat 4um.

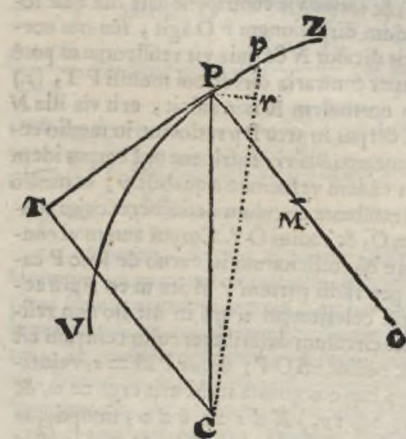
19. *Coroll.* 1. Undè si vis centripeta dicatur g, resistentia r, spatium s, tempus t, velocitas v erit pro corporis ascensu $g\,dt + r\,dt = -dv$, & $g\,ds + r\,ds = -v\,dv$; & pro corporis descensu, si vis centripeta vi resistentiæ sit major $g\,dt - r\,dt = dv$, & $g\,ds - r\,ds = v\,dv$; at si vis centripeta vi resistentiæ sit minor $r\,dt - g\,dt = -dv$, & $r\,ds - g\,ds = -v\,dv$.

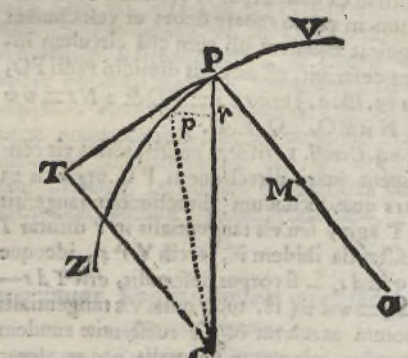
20. *Coroll.* 2. Si in his formulis ponatur $r = o$, mutabuntur illæ in formulas, quibus motus corporis in medio non resistente determinantur. Quâ ratione motus corporis in medio resistente conferri possunt cum ejusdem motibus in medio non resistente.

21. *Coroll.* 3. Si corpore descendente, resistentia vi centripetæ æqualis fuerit, corporis celeritas æquabilis manet; nam in formulis $g\,dt - r\,dt = dv$, & $r\,dt - gdt = -dv$, positâ $g = r$, fit $dv = o$, hoc est, velocitatis incrementum vel decrementum nullum.

22. *Coroll.* 4. Si corpus in lineâ rectâ A C vi centripetâ urgeatur ad punctum datum C, & de loco dato A sursum vel deorsum projiciatur cum velocitate datâ in medio resistente, & spatium A P quod ascendendo vel descendendo describit tempore t dicatur s, data A C dicatur b; & tam in ascensu quam in descensu scribatur $CP = x$, adeóque in ascensu $x - b = s$, & $dx = ds$, in descensu $b - x = s$, & $-dx = ds$; si loco ds substituatur ipsius valor in formulis coroll. 1. (19) erunt illæ pro ascensu $g\,dx + r\,dx = -v\,dv$, quarum una in alteram abit, mutato signo + vel −, quantitati r præfixo.

22.





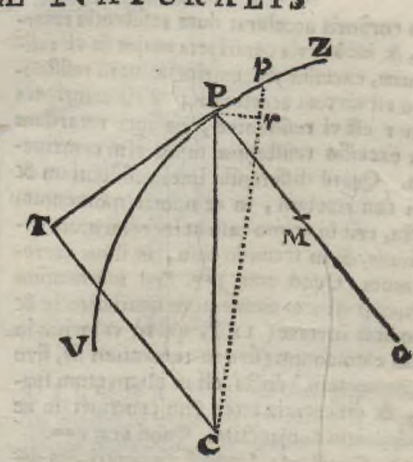
23. LEMMA. Si corpus vi quâlibet centripetâ sollicitatum curvam VPZ in medio resistente aut etiam in vacuo describat, visque centripeta in loco quovis P dividatur in vires duas, quarum altera directionem habeat P O tangenti P T per P ductæ normalem, altera directionem cum tangente congruentem, quadratum velocitatis corporis

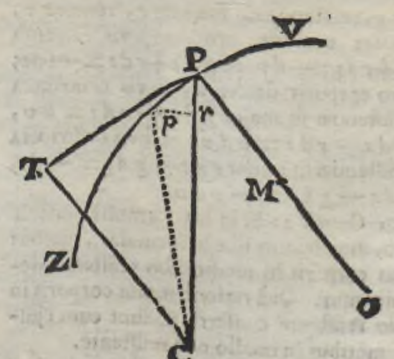
poris in loco P, exponi poterit per factum ex vi normali ductæ in radium circuli curvam V P Z osculantis in P.

Sit P C, totius vis centripetæ directio, P O radius osculi, P p arcus curvæ infinitè parvus qui usurpari potest pro arcu circuli centro O & radio O P descripti. Velocitas corporis in P dicatur v, quæ per arcum P p tam in medio resistente quam in vacuo æquabilis est,
23. (6) & totius vis centripetæ pars illa quæ secundum directionem P O agit, seu vis normalis dicatur N & quia vis resistentiæ ut potè semper contraria directioni mobili P T, (1) vim normalem N non afficit, erit vis illa N quâ corpus in arcu P p retinetur in medio resistente æqualis vi centripetæ quâ corpus idem cum eâdem velocitate æquabili v, in medio non resistente circulum describeret cujus centrum O, & radius O P. Corpus autem vi constante N, sollicitatum in vacuo de loco P cadat per radii partem P M ita ut eo lapsu acquirat celeritatem v quâ in medio non resistente circulum describeret cujus centrum est O & radius est O P; sitque P M $= s$, velocitas eo lapsu acquisita in M erit ergo $= v$, & erit (20. 19.) $N ds = v dv$, sumptisque fluentibus $Ns = \frac{1}{2} vv$, & $2 Ns = vv$. Sed altitudo ex quâ corpus vi constante N sollicitatum in vacuo cadere debet ut velocitatem acquirat æqualem illi cum quâ circulum ipsum describit, est æqualis dimidio radii PO, (119. *lib.* 1.) ergo $2 s =$ P O & $2 Ns = vv = N \times$ PO. Q. E. D.

24. *Coroll.* 1. Iisdem positis, totius vis centripetæ juxtà directionem P C urgentis ea pars quæ secundum directionem tangentis P T agit, seu vis tangentialis in P dicatur T resistentia ibidem r, arcus V P s, ideoque P q $= ds$, & si corpus descendit, erit $T ds - r ds = v dv$ (18. 19.) quia vis tangentialis motum accelerat & vis resistentiæ eundem retardat, vis autem normalis nec accelerat nec retardat. Sed si corpus ascendit, erit $T ds + r ds = - v dv$ (18. 19.) vi tangentiali & resistentiâ motum corporis simul retardantibus.

25. *Coroll.* 2. Sit C virium centrum, vis tota centripeta in directione P C urgens $= g$, C P $= y$, C T tangenti perpendicularis $= p$, ideoque P T $= \sqrt{yy - pp}$. Ex puncto p, alteri P infinitè propinquo demissum sit ad C P perpendiculum p r,





ut sit p r $= dy$, & triangulum P r p, simile triangulo P T C, & erit P p (ds) : p r (dy) $=$ P C : P T $= g : T = \frac{g\,dy}{ds}$, ubi observandum est dy, esse affirmativam, quando crescente arcu V P sive s, crescit etiam recta C P, seu y, id est, quando corpus ascendit, & contrà dy esse negativam, dum corpus descendit, adeóque in hoc casu fieri $T = - \frac{g\,dy}{ds}$. Hi valores vis tangentialis T, substituantur in formulis corollarii 1. & ambæ in hanc mutabuntur, $g dy + r ds = - v dv$.

26. *Coroll.* 3. Quia P p (ds) : p r ($\pm dy$) $=$ P C (y) : PT ($\sqrt{yy - pp}$) erit $ds = \pm \frac{y\,dy}{\sqrt{yy - pp}}$, (signo superiori pro ascensu & inferiori pro descensu usurpato):

pato). Quarè fiet $g\,dy + r\,ds = g\,dy \pm \frac{r\,y\,dy}{\sqrt{yy-pp}} = -v\,dv$.

27. *Coroll.* 4. Si radius osculi P O dicatur R, est (23) $R \times N = v^2$, & quia $y:p = g:N$, adeóque $\frac{pg}{y} = N$, fiet $\frac{Rpg}{y} = v^2$; sed radius osculi $R = \frac{y\,dy}{dp}$ (214. lib. 1.) quarè erit $\frac{gp\,dy}{dp} = v^2$, & $g = \frac{v^2\,dp}{p\,dy}$. Substituatur hic valor in formulâ corollarii 2¹. & fiet $g\,dy + r\,ds = \frac{v^2\,dp}{p} + r\,ds = -v\,dv$, & ideò $v\,dv + \frac{v^2\,dp}{p} = -r\,ds$.

28. *Coroll.* 5. Vis centripetæ directio PC, sibi semper parallela maneat, ut hic assumitur vis gravitatis, & per punctum V, in curvâ V P Z datum, ducatur recta V C directioni gravitatis P C perpendicularis, dicanturque ut suprà V P $= s$, P p $= ds$, C P $= y$, p r $= dy$, vis tota gravitatis in P $= g$, resistentia r, velocitas corporis ibidem $= v$, & erit ut in corollario 2° $g\,dy + r\,ds = -v\,dv$.

29. *Coroll.* 6. Si in Hypothesi corollarii 5¹. dicantur radius osculi in P = R, vis normalis $= N$, abscissa V C $= x$, & C c seu P r $= dx$, erit ob triangulorum P p r, C P T similitudinem, P p : P r = P C : T C $= g:N$, sive $ds : dx = g : N = \frac{g\,dx}{ds}$; sed (23) $N = \frac{v^2}{R}$, ergò $\frac{g\,dx}{ds} = \frac{v^2}{R}$, & hinc $v^2 = \frac{Rg\,dx}{ds}$.

30. *Coroll.* 7. Est autem (216. Lib. 1.) $R = \frac{ds^2\,dy}{ds\,ddx - dx\,dds} = -\frac{ds^2\,dy}{dx\,dds}$, si ponatur dx, constans, & ideò $ddx = 0$; Et quia $ds^2 = dy^2 + dx^2$, sumptisque fluxionibus, factâ dx, constante $ds\,dds = dy\,ddy$, & $dds = \frac{dy\,ddy}{ds}$, fiet $R = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$; quarè (29) $v^2 = \frac{Rg\,dx}{ds} = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$, ideòque $g = -\frac{v^2\,ddy}{ds^2}$, & hinc (28) $g\,dy + r\,ds = -\frac{v^2\,dy\,ddy}{ds^2} + r\,ds = -v\,dv$, hoc est, ob $dy\,ddy = ds\,dds$; $v\,dv = \frac{v^2\,dds}{ds} - r\,ds$. 31.

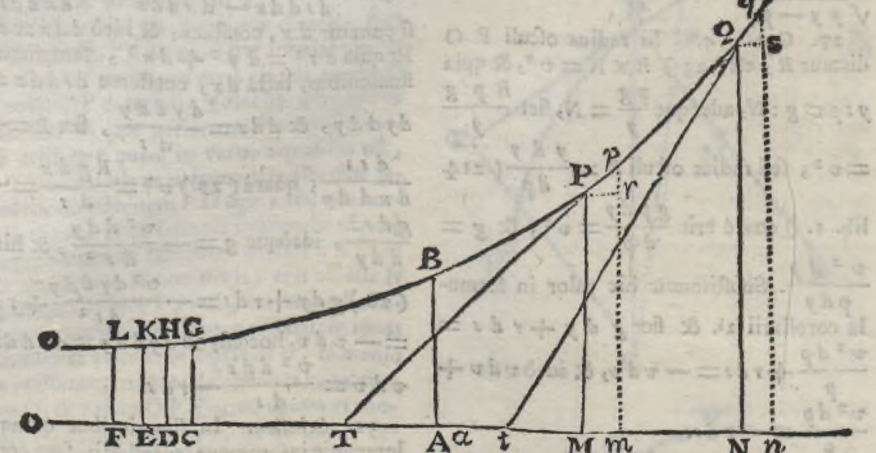
31. *Scholion.* In superioribus quinque lemmatis ipsorumque corollariis, fere complexi sumus principia omnia, quibus & ad inventionem & ad demonstrationem motuum in mediis resistentibus usi sunt Clariss. viri NEWT. in hoc Libro; *Varignonius* in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. Joannes *Bernoulli* ibid. an. 1711. & in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. & 1719. *Hermannus* Lib. 2. *Phoronomiæ* & in Commentariis Academiæ Petropolitanæ, ac *Eulerus* in opere exquisito quod de *Mechanicâ* scripsit analyticè. Nunc alia nonnulla de Logarithmicæ proprietatibus, & de methodo maximorum & minimorum quæ ad doctrinam motuum in mediis resistentibus explicandam spectant, subjungenda sunt.

LEMMA

præcipuas Logarithmicæ proprietates exponens.

III. *Hugenius* de hac ipsâ *Newtoniani* operis parte loquens, in quâ agitur de corporibus in mediis resistentibus motis, (quam summâ cum voluptate se vidisse testatur) ait se notasse lineam curvam quam Logarithmicam aut Logisticam nuncupat, summæ utilitatis esse in hoc negotio, & quædam de eâ Theoremata indicat quorum demonstrationem *Guido Grandus* postea evulgavit; Hujus ergo curvæ proprietates ab initio explicare à scopo nostro alienum non duximus.

32. De-



32. *Defin.* Sit linea recta N A O secundum quam feratur perpendicularis M P motu uniformi & sibi parallelo, dum in ea perpendiculari M P mobile P velocitate variabili movetur secundum hanc Legem, ut ejus velocitas sit semper proportionalis distantiæ ejus à rectâ N A O, curva ab illo puncto P descripta dicetur *Logarithmica* vel *Logistica*.

Linea N A O secundum quam perpendicularis P M motu uniformi & sibi parallelo fertur, dicitur *Axis Logarithmicæ*, & lineæ P M, Q N perpendiculares in Axem sunt ejus ordinatæ.

Si quædam ex ordinatis Logarithmicæ, ut A B, sit æqualis unitati, punctum axeos A cui insistit censetur abscissarum origo, & abscissæ à parte A M sumptæ, sunt positivæ, à parte A O negativæ & abscissa pertinens ad ordinatam A B sive ad unitatem est ipsum o.

Coroll. 1. *Differentiæ quamminimæ ordinatarum Logarithmicæ æqualibus tempusculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.*

In quovis enim puncto Logarithmicæ velocitas axi perpendicularis quâ ordinatæ crescunt vel decrescunt, est ordinatæ proportionalis (*ex Def.*), sed durante tempusculo infinitè parvo illa velocitas uniformis est censenda, & æqualibus tempusculis incrementa vel decrementa linearum sunt ut velocitates uniformes quibus generantur, ergo incrementa vel decrementa ordinatarum h. e. earum differentiæ æqualibus tempusculis genitæ sunt ut illæ ordinatæ.

Coroll. 2. *Sint ordinatæ quævis P M, Q N, ducantur duæ aliæ ordinatæ p m, q n ipsis quamproximæ & ab iis æqualiter distantes, p m & q n erunt prioribus ordinatis proportionales:* Velocitas enim quâ ordinata motu sibi parallelo fertur, est uniformis, ideoque eodem tempore ordinata P M ad p m perveniet ac Q N ad q n ob æquales distantias, ergo, per Cor. 1. differentiæ ordinatarum P M & Q N dum perveniunt ad p m & q n erunt iis ipsis ordinatis proportionales, sed adjectis vel detractis iis differentiis à lineis P M & Q N fiunt ordinatæ p m, q n, & adjectis vel detractis ex terminis rationis cujusvis, correspondentibus terminis rationis ipsi æqualis non mutatur prior ratio, ergo ordinatæ p m & q n erunt inter se ut P M ad Q N, & etiam alternando P M : p m = Q N : q n.

Coroll. 3. *Si sumantur in axe puncta C, D, E, F ad distantias æquales & quamminimas, in iisque punctis erigantur ordinatæ, illæ ordine constituent Progressionem Geometricam.* Nam quia ex Hyp. ordinatæ G C & H D, H D & K E sunt quamproximæ & æqualiter distantes, est per Corollarium præcedens G C : H D = H D : K E, eadem ratione est H D : K E = K E : L F, sicque deinceps, unde liquet ordi-

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentiâ amissus, est ut spatium movendo confectum.

NAM cùm motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc ([a]) est, ut itineris confecti particula, erit, componendo, motus toto tempore amissus, ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in ([b]) spatiis liberis solâ vi insitâ moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: ([c]) dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motûs illius partem amissam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continuè proportionales.

Sit A ad A — B ut B ad B — C & C ad C—D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q.E.D.*

PRO-

ta esset quantitas variabilis $a x^2 - x^3$ in quâ a data est, x indeterminata, poneretur $a x^2 - x^3 = b b y$, quæ est æquatio ad curvam cujus abscissa est x, & ordinata y, & hinc, sumptis fluxionibus, foret $2 a x d x - 3 x^2 d x = b b d y$, & $2 a x - 3 x^2 = \frac{b b d y}{d x} = 0$ adeòque $2 a x - 3 x x = 0$ & $x = \frac{2}{3} a$. Si itaque loco x substituatur $\frac{2}{3} a$ in quantitate propositâ, obtinebitur maximum ejus $\frac{4}{9} a^3 - \frac{8}{27} a^3 = \frac{4}{27} a^3$. Idem inventum fuisset brevius, si nullâ factâ suppositione, fluxio variabilis propositæ videlicet $2 a x d x - 3 x^2 d x$, nihilo fuisset æquata.

(a) * *Hoc est, ut itineris confecti particula* (12) ob datum temporis momentum (ex hyp.)

(b) * *In spatiis liberis*, id est, in quibus nullum aliud est obstaculum præter medii resistentiam velocitati proportionalem. 49.

(c) * *Dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest*, hoc est, usque ad motus exstinctionem. (Ostendetur autem infra, in nota f, infinitum tempus requiri ut motus omnis extinguatur, quando resistitur motui in ratione velocitatis). Cùm ergo motus ad exstinctionem usque amissus, sit ipse motus totus, & motus amissi sint ut spatia movendo confecta (*per Theor.*) erit motus totus ad motûs partem amissam post datum spatium descriptum, ut spatium ad exstinctionem usque motûs descriptum ad illud datum spatium. Unde liquet, spatium, quod corpus ad motûs usque exstinctionem describit, finitum esse, cùm datam habeat rationem ad spatium finitum.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. II. THEOR. I.

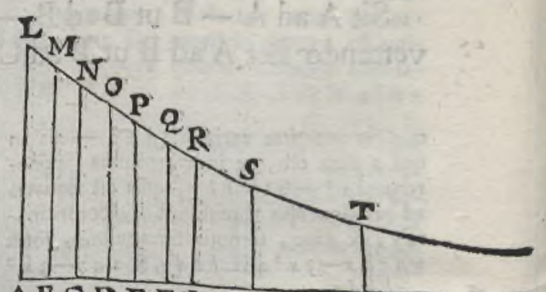
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometricâ, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas: ([d]) erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (*per lem.* 1. *lib.* 11.) continuè proportionales. ([e]) Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continuâ, qui per saltum capiuntur omisso passim æquali termino-

(d) * *Erit decrementum velocitatis.* (15) ut resistentia ob datum temporis momentum, ideoque (*per hyp.*) ut velocitas.

(e) 50. *Proinde si ex æquali* &c. Linea recta A Z in particulas æquales A B, B C, C D &c. divisà, exponat tempus, & perpendicula A L, B M, C N &c. exponant velocitates ipsis singulorum temporum A B, B C, C D &c. initiis; erunt (ex Dem.) velocitates illæ in continuâ progressione geometricâ decrescente. Proindè si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, ut A E, E H, H K &c. erunt velocitates AL, EP, HS &c., ipsis temporum initiis ut termini qui è progressione geometricâ per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum B M, CN &c. & F Q, G R &c. numero. Componuntur autem horum terminorum A L, E P, H S &c., rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis; nimirum ratio A L ad E P, componitur ex rationibus A L ad B M, B M ad C N &c., quæ tum magnitudine, tum numero æquales sunt rationibus E P ad F Q; F Q ad G R &c. ex quibus componitur ratio E P ad S H, & ità porrò. Quarè ratio A L ad E P æqualis est rationi E P ad H S, & hæc æqualis rationi H S ad K T. Manifestum autem est (33) curvam L M N S T, ad quam terminantur perpendicula omnia A L, B M, C N &c., esse Logarithmicam.

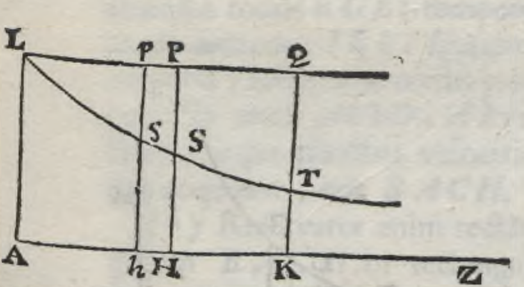


51.

norum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter se iisdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compositæ inter se eædem sunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ; & augeatur earum numerus in infinitum, eò ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continuè proportionales, erunt in hoc etiam casu continuè proportionales. *Q. E. D.*

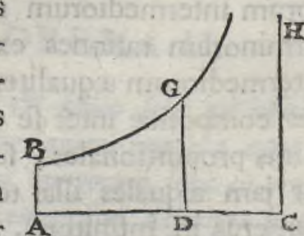
Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ (*per prop.* 1. *lib.* 11.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol.



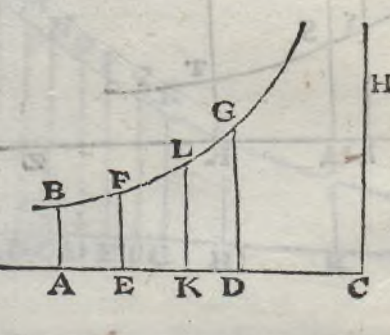
51. Si asymptoto A Z descripta sit Logarithmica quævis L S T, ad asymptotum versus Z accedens, & ordinata A L exponat velocitatem corporis initio motûs, abscissæque A H, A K, exponant tempora; erunt (50) ordinatæ H S, K T, ut velocitates residuæ elapsis temporibus A H, A K, & ideò ductâ per punctum L rectâ L Q, asymptoto A Z parallelâ, & ordinatas productas H S, K T secante in 50.
P, Q, erunt P S, Q T ut velocitates amissæ, atque etiam ut spatia descripta, temporibus A H, A K, vel L P, L Q. Ductâ ordinatâ, h s, alteri H S, infinitè propinquâ, spatium velocitate uniformi A L, tempusculo h H descriptum in vacuo, erit ad spatium eodem tempore cum velocitate H S, confectum in medio resistente, ut rectangulum H P × H h, ad rectangulum S H × H h, seu aream H S s h (12) & ideò si totum tempus A H in particulas innumeras ut h H divisum sit, erit spatium cum velocitate A L, in vacuo descriptum toto tempore A H, ad spatium eodem tempore percursum in medio resistente ut rectangulum A P ad aream Logarithmicam A L S H; sed area A L S H, æqualis est rectangulo subtangentis Logarithmicæ in P S, (39) & ideò si assumpta sit A L subtangenti æqualis, est area A L S H, æqualis rectangulo A L × P S; Quarè in hâc hypothesi, erit spatium prius ad posterius ut L P, ad P S.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. II. THEOR. II.



Corol. Hinc si asymptotis rectangulis *A C, C H* describatur hyperbola *B G*, sintque *A B*, *D G* ad asymptoton *A C* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam *A C*, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi potest tempus per aream *ABGD*, & spatium eo tempore descriptum per lineam *AD*. ([f]) Nam si area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta *D C* in ratione geometricâ ad modum velocitatis, & ([g]) partes rectæ *A C* æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione.

PRO-



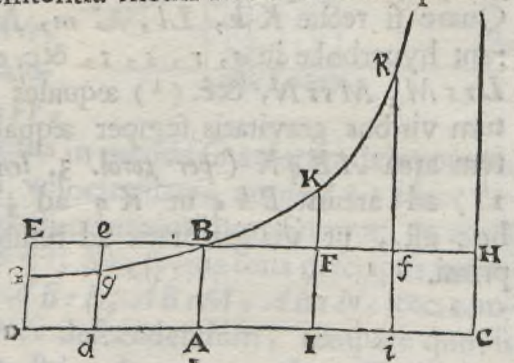
([f]) * *Nam si area illa per motum puncti D* sive ordinatæ D G *augeatur uniformiter ad modum temporis*, exhibeatque proindè tempus, *decrescet recta D C, in ratione geometricâ* (380. lib. 1.) *ad modum velocitatis*, & ideò velocitatem poterit exponere (*per Cas.* 1. *Dem.*) & quia recta A C exponit velocitatem ipso motûs initio, & D C, velocitatem residuam elapso tempore A B G D erit A D ut velocitas amissa, atque ideò ut spatium descriptum (*per prop.* 1. *hujus*). Quia verò coincidentibus punctis D & C, area ABGD infinita evadit, manifestum est tempore infinito finitum spatium A C describi.

([g]) * *Et partes rectæ A C æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione &c.* Nam si area A B G D ductis ordinatis F E, L K in partes æquales A B F E, E F L K, K L G D divisa sit, erunt lineæ CA, C E, C K, C D in progressione geometricâ decrescente (380. *lib.* 1.) hoc est CA : CE = CE : CK = CK : CD, & dividendo A E : E K = E K : K D = C A : C E. Decrescunt ergo partes rectæ A C in ratione velocitatis. Exponent igitur rectæ A E, E K, K D &c., spatia temporibus A B F E, E F L K, K L G D, descripta, & tota recta A D spatium toto tempore A B G D descriptum.

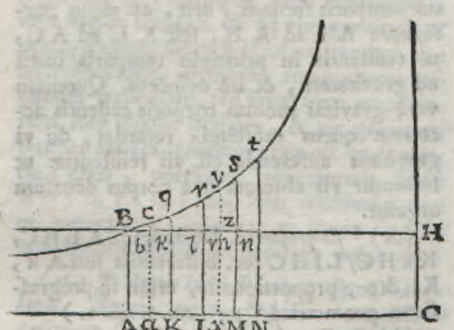
PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui, dum in medio similari rectà ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BACH*, & resistentia medii initio ascensus per rectangulum *BADE* sumptum ad contrarias partes rectæ *AB*. Asymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* describatur hyperbola secans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*, & corpus ascendendo tempore *DGgd* describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium ascensus totius *EGB*; tempore *ABKI* spatium descensus *BFK*, atque tempore *IKki* spatium descensus *KFfk*; & velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABFI*, *ABfi* respectivè; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit *BACH*.



(h) Resolvatur enim rectangulum *BACH* in rectangula innumera *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, *Ak*, *Al*, *Am*, *An*, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum



(h) * *Resolvatur enim &c.* Demonstratio quæ sequitur est pro corporis descensu.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. III. PROBL. I.

porum æqualium. (i) Fiat *AC* ad *AK* vel *ABHC* ad *ABkK* ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in principio temporis ſecundi, deque vi gravitatis ſubducantur reſiſtentiæ, & manebunt *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *MmHC*, &c. ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum urgetur, atque ideo (*per motûs legem* II.) ut incrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. & (k) propterea (*per lem.* 1. *lib.* II.) in progreſſione geometricâ. Quare ſi rectæ *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn*, &c. productæ occurrant hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t*, &c. erunt areæ *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN*, &c. (l) æquales, ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ. (m) Eſt autem area *ABqK* (*per corol.* 3. *lem.* VII. & *lem.* VIII. *lib.* I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad $\frac{1}{2}$ *kq* ſeu *AC* ad $\frac{1}{2}$ *AK*, hoc eſt, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam in medio temporis primi.

Et

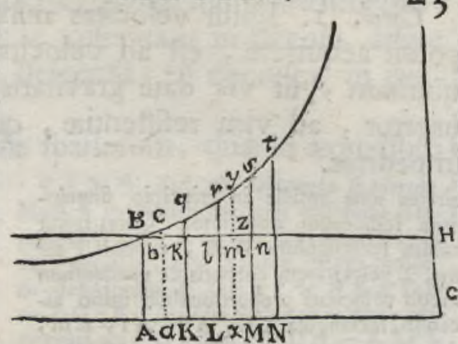
(i) * *Fiat AC ad AK &c.* Cùm enim ſit AKkB, proportionalis reſiſtentiæ principio temporis ſecundi, ſi fiat AKkB ad ABHC ſeu AK ad AC, ut reſiſtentia illa ad gravitatem, rectangulum AH exponet vim gravitatis datam; & ſimili modo, cum ſit Al, ad Ak, ut reſiſtentia initio temporis tertii ad reſiſtentiam initio temporis ſecundi, erit, ex æquo perturbare Al ad AH, ſeu AL ad AC, ut reſiſtentia in principio temporis tertii ad gravitatem, & ità deinceps. Quoniam verò gravitas motum corporis cadentis accelerat quem reſiſtentia retardat, de vi gravitatis auferenda eſt vis reſiſtentiæ ut habeatur vis abſoluta quâ corpus deorſum urgetur.

(k) * *Et propterea.* Rectangula ABHC, KkHC, LlHC &c. differentiis ſuis Ak, Kl &c., proportionalia, erunt in progreſſione geometricâ (*per Lem.* 1. *lib.* 2.)

(l) * *Æquales.* (380) lib. 1.)

(m) *Eſt autem area ABqK* (*per cor.* 3. *Lem. VII. & lem. VIII. lib.* 1.) *ad aream Bkq ut Kq ad* $\frac{1}{2}$ *kq ſeu ut AC ad* $\frac{1}{2}$ *AK.* Etenim per ea Lemmata has areas pro rectilineis ſumi poſſe conſtat, erigatur in medio partis AK perpendicularis ac ad Hyperbolam uſque, facile conſtabit ex Elementis trapezium ABqK fore ad Triangulum Bkq ut tota ea perpendicularis ac (pro quâ Kq ſumi poterit) ad portionem ejus bc intrà Triangulum comprehenſam, quæ erit (*ex conſt. & 2â. 6tà. Elem.*) $= \frac{1}{2}$ kq, eſt verò ex natura Hyperboles ea perpendicularis ac ad AB, ut AC ad Ca ſive AC $-\frac{1}{2}$ AK & dividendo, eſt ea perpendicularis ac ad ac $-$ ab ſive bc quæ eſt $\frac{1}{2}$ kq ut AC ad AC $-$ AC $+\frac{1}{2}$ AK ſive $\frac{1}{2}$ AK; Ergo area ABqK eſt ad aream Bqk ut AC ad $\frac{1}{2}$ AK, ſive ut Rectangulum ABCH ad Rect. $\frac{1}{2}$ ABkK, ſeu *ut vis gravitatis* quam exponit Rectang. AH ad *reſiſtentiam in medio temporis primi* quam exponit rectang. Ak. Cùm enim ſit AK ut velocitas toto primo tempore acquiſita, erit $\frac{1}{2}$ AK ut velocitas in medio temporis primi acquiſita; reſiſtentiæ autem ſunt velocitatibus analogæ.

Et ([n]) ſimili argumento areæ $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. ſunt ad areas $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proindè cùm areæ æquales $BAKq$, $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ Bkq, $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per hypotheſin) velocitatibus, atque ([o]) ideo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ Bkq, Blr, Bms, Bnt, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ $ABqK$, $ABrL$, $ABsM$, $ABtN$, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis $ABrL$, deſcribit ſpatium Blr, & tempore $LrtN$ ſpatium $rlnt$. *Q.E.D.*



Et ([p]) ſimilis eſt demonſtratio motûs expoſiti in aſcenſu, *Q. E. D.*

Co-

(n) *Et ſimili argumento areæ.* Sumptis enim iſtis areis pro Trapeziis rectilineis: ducantur perpendiculares x z y in medio partium A K, K L, L M, M N ad Hyperbolam uſque, & (*ex elementis*) facile conſtabit quod area tota ſinguli trapezii (v. gr. r L M s) eſt ad ejus areæ portionem ſupra B H poſitam (nempe r l m s) ut linea tota x y per medium trapezii ducta ad ejus partem z y ſupra B H, ſed ex naturâ Hyperbolæ eſt ea perpendicularis x y ad A B ſive x z, ut A C ad abſciſſam C x illi perpendiculari reſpondentem (quæ eſt C L — $\frac{1}{2}$ L M), & dividendo, eſt ea perpendicularis x y ad ejus partem z y ſupra B H, ut A C ad A x portionem abſciſſæ inter A & eam perpendicularem (hoc eſt, in exemplo aſſumpto, ut A C ad A L + $\frac{1}{2}$ L M). Ergo area tota ſinguli trapezii ad ejus areæ portionem ſupra B H, ut A C ad A x portionem abſciſſæ inter A & medium partis cujuſvis aſſumptæ, ſive (aſſumpta communi altitudine A B) ut Rectangulum A H, ad Rectangulum ſub A B & lineâ inter A & medium partis aſſumptæ comprehenſa; ſed illud eſt ut vis gravitatis, hoc ut velocitas ac proinde ut reſiſtentia in medio temporis cui reſpondet pars aſſumpta, ergo alternando, area ſinguli trapezii eſt ad vim gravitatis ut portio trapezii ſupra B H ad reſiſtentiam ſive ad velocitatem in medio temporis cui reſpondet trapezium, ſed areæ totæ trapeziorum ſunt ubique æquales, & vis gravitatis ſemper eadem, conſtans ergo eſt eorum ratio; ergo, portiones trapeziorum ſuper B H, ut r l m s ſunt ſicut reſiſtentiæ ſive ut velocitates, adeóque ut ſpatia ſingulis tempuſculis quibus reſpondent deſcripta. 50.

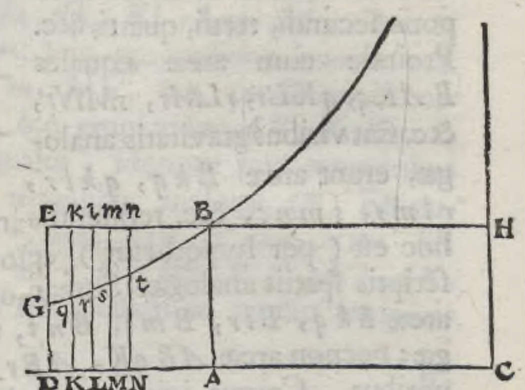
(o) * *Atque ideò deſcriptis ſpatiis analogæ.* Spatia enim ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates per Prop. II. hujuſce libri.

(p) *Et ſimilis eſt demonſtratio.* Reſolvatur enim rectangulum D B in rectangulà innumera D k, K l, L m, M n &c. quæ ſint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta, & erunt, nihil D k, D l, D m, D n &c., ut velo-

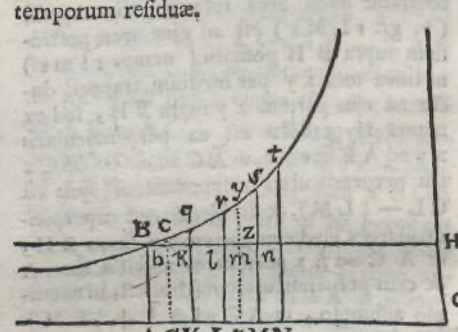
Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim resistentiæ, quâ (q) in fine temporis illius impeditur.

Co-

citates totæ amissæ in principio singulorum temporum æqualium. Quia igitur totum rectangulum D B, exponit (*per hyp.*) velocitatem corporis & resistentiam medii velocitati proportionalem initio ascensus, rectangula A E, A k, A l, A m, A n &c., exponent velocitates residuas, resistentiasque medii initio singulorum temporum æqualium. Fiat A C, ad A k, sive Rectang. A H ad Rectang. A k, ut vis gravitatis ad resistentiam principio temporis secundi, & vi gravitatis addatur resistentia (quod gravitas & resistentia corporis ascendentis motum retardent) & erunt D E H C, K k H C, L l H C, M m H C &c., ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum retardatur, atquè ideò (*per mot. leg.* 2.) vel *per not.* 18.) ut decrementa velocitatum, id est, ut rectangula D k, K l, L m, M n &c., & propterea (*per Lem.* 1. *Lib.* 2.) in progressione geometricâ. Quarè si rectæ K k, L l, M m, N n &c., occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ D G q k, k q r L, L r s M, M s t N &c. æquales, ideóque tum temporibus, tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ.



Erigatur in medio partis D K perpendicularis usque ad E B, erit area D G q K ad aream G E k q ut pars ejus perpendicularis ad Hyperbolam ordinata ad ejus partem reliquam usque ad E B, sed (*per Theor.* 4. *de Hyperbola*, ea ordinata ad Hyperbolam est ad A B sive ad totam perpendicularem, ut A C ad ejus ordinatæ abscissam, ideoque dividendo, est ea ordinata ad perpendicularis partem reliquam usque ad lineam E B, sive est area D G q K ad aream G E k q ut A C ad portionem abscissæ inter A & perpendicularem, & assumptâ communi altitudine A B, ut Rectangulum A H ad Rectangulum sub A B & portione abscissæ inter A & perpendicularem, ideoque area D G q K ad aream G E k q ut vis gravitatis ad resistentiam sive velocitatem residuam in medio temporis primi, cùmque vis gravitatis sit ubique eadem & areæ D G q K, q K L r, ubique æquales, areæ G E k q, k q r l, &c. erunt semper ut resistentiæ in singulis temporibus sive ut velocitates, ideoque ut spatia singulis tempusculis descripta, ac per consequens areæ totæ G E n t, erunt ut spatia toto tempore G D N t descripta, dum areæ A B N n erunt ut velocitates in fine eorum temporum residuæ.



(q) * *In fine temporis illius impeditur.* Est enim velocitas dato tempore, A B r L acquisita, ad velocitatem alio quovis tempore A B t N acquisitam, ut rectangulum A l ad re-

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu, atque etiam earundem differentia in descensu (r) decrescit in progressione geometricâ.

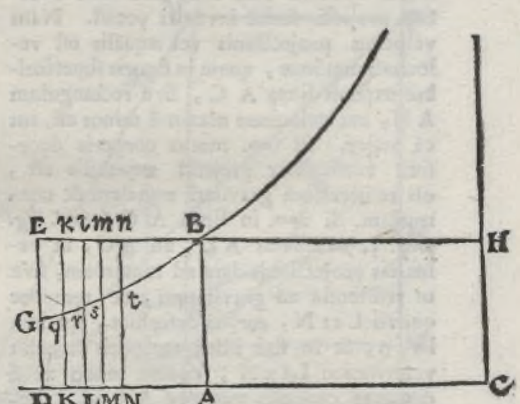
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. III. PROBL. I. 51.

Corol. 3. (s) Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus

rectangulum A n, sivè ut linea data A L, ad lineam A N, (ex dem.), & ideò velocitas corporis cadentis cum areâ A B t N, seu cum tempore continuò crescit. Sed coincidentibus puncto N cum puncto C & ordinatâ N t cum asymptoto C H, area A B t N infinita evadit, hoc est, tempus fit infinitum & velocitas maxima; Quarè velocitas maxima quæ etiam *terminalis* dicitur, est ad velocitatem dato quovis tempore A B r L, acquisitam ut A C ad A L, seu ut rectangulum A H, ad rectangulum A I, hoc est, (*ex dem.*) ut vis gravitatis ad vim resistentiæ in fine temporis A B r L.

(r) * *Decrescit in progressione geometricâ.* In ascensu corporis temporibus D G q k, D G r l, D G s M &c. in arithmeticâ progressione crescentibus, abscissæ C D, C K, C L, &c. in progressione geometricâ decrescunt (380. *lib.* 1.) sed singulæ abscissæ illæ sunt (*ex dem.*) ut summa velocitatis maximæ quam exponit linea C A, & velocitatis residuæ quam exponit linea A K vel A L, vel A M &c., in fine temporis D G q k, vel D G r L, vel D G s M &c. Quarè tempore aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis maximæ ac velocitatis in ascensu residuæ decrescit in progressione geometricâ. Simili modo in descensu corporis patet quod crescentibus temporibus (vid. fig. notæ super.) A B q k, A B r L, ABsM &c., in progressione arithmeticâ, abscissæ C A, C K, C L, C M &c., decrescunt in progressione geometricâ (380. *lib.* 1.), sed abscissæ illæ sunt ut differentiæ velocitatis maximæ quam exhibet linea A C & velocitatis acquisitæ quam exponit linea A K, vel A L, vel A M &c., crescente igitur tempore in progressione arithmeticâ, differentia velocitatis maximæ, & velocitatis dato quovis tempore in descensu acquisitæ, decrescit in progressione geometricâ. Hinc si summa illa in ascensu & differentia in descensu numeris exprimantur, erunt tempora ut eorum numerorum Logarithmi.

(s) * *Sed & differentiæ spatiorum.* Nam si in ascensu corporis capiantur tempora D G q K, K q r L, L r s M, M s t N &c. æqualia, erit spatium primo tempore descriptum ut G E k q = D K × D E — D G q K; spatium tempore secundo descriptum ut q k l r = K L × D E — K q r L (sive quia K q r L = D G q K) = KL×DE — D G q K, & ità de cæteris. Quarè differentia spatiorum primo & secundo tempore descriptorum est ut D K × D E — K L × D E, id est, ob datam D E, ut D K — K L; & simili argumento differentia spatiorum secundi & tertii temporis est ut



K L — L M; differentia spatiorum tertii & quarti temporis ut L M — M N. Erunt igitur differentiæ spatiorum quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur ut differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N &c., sed (*ex dem.*) termini D K, K L, L M, M N &c., decrescunt ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Ergò differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N &c., decrescunt ut D K, K L, L M, M N &c., seu ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Eadem est demonstratio pro descensu.

temporum differentiis defcribuntur, decrefcunt in eâdem progreffione geometricâ.

Corol. 4. Spatium verò à corpore defcriptum differentia eft duorum fpatiorum quorum alterum eft ut tempus fumptum ab initio defcenfus, & (t) alterum ut velocitas, quæ etiam ipfo (u) defcenfûs initio æquantur inter fe.

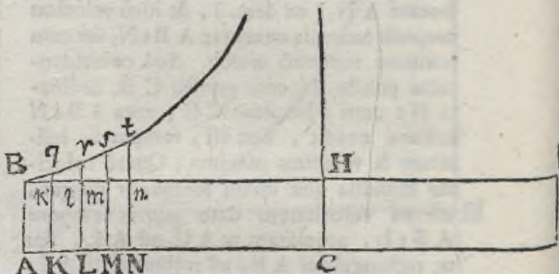
PRO-

(t) * *Alterum ut velocitas.* Nam fpatium tempore quovis A B t N, in defcenfu defcriptum, eft ut area B t n, eft autem area B t n = A B t N — A B n N, & eft A B n N ut velocitas tempore A B t N acquifita.

(u) * *Defcenfûs initio æquantur.* Defcenfûs initio eft area nafcens A B q K æqualis rectangulo A B K k.

52. *Scholium.* Ex demonftratis non folùm corporis afcendentis aut è quiete defcendentis motus determinatur, fed etiam motus ejufdem datâ cum velocitate deorfum projecti facilè inveniri poteft. Nam velocitas projectionis vel æqualis eft velocitati maximæ, quam in figuris fuperioribus exponit linea A C, five rectangulum A H, aut velocitate maximâ minor eft, aut eâ major. Si 1um. motus corporis deorfum verticaliter projecti æquabilis eft, ob refiftentiam gravitati æqualem & contrariam. Si 2um. in lineâ A C (*vid. fig. prop.* 3.) capiatur A L, ad A C, ut velocitas projectionis data ad maximam, five ut refiftentia ad gravitatem, & tempore quovis L r t N, corpus defcribet, fpatium l r t n, & in fine illius temporis habebit velocitatem L l n N, eodem modo ac fi è quiete cadendo tempore A B r L, acquififfet datam projectionis velocitatem A B l L, & deindè in motu perfeveraffet.

53. Verùm fi velocitas projectionis major fit velocitate maximâ quam corpus cadendo acquirere poteft, mutanda erit NEWTONI conftructio. Cæteris enim manentibus ut in conftructione pro corporum defcenfu, producantur rectæ A C, & B H, ad a & b, ut fit rectangulum A B b a ad rectangulum C H b a, ut refiftentia tota initio motus ad vim gravitatis: velocitas projectionis exponi poterit per rectangulum A B b a, cùm refiftentia fit ipfi femper proportionalis, & corpus defcendendo tempore quovis A B t N, defcribet fpatium

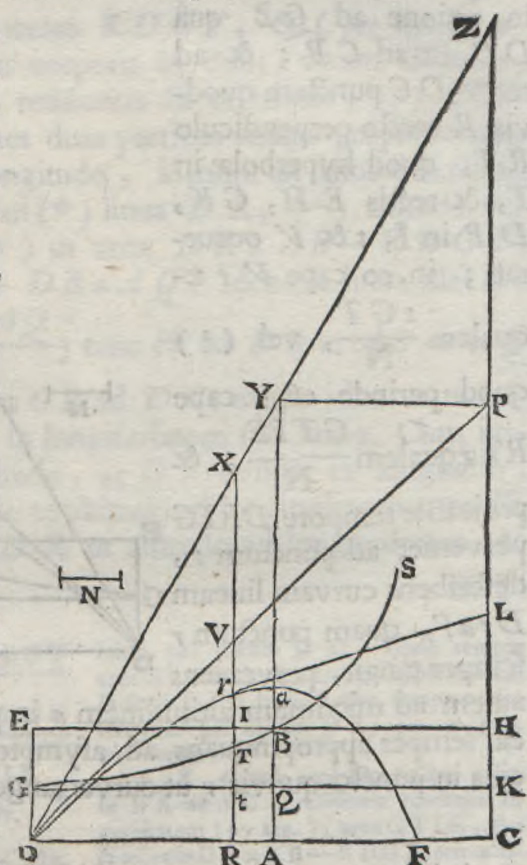


A B b a × A N + C a × B t n, & velocitatem habebit Nnba, & tempore infinito defcribet fpatium infinitum, velocitatemque habebit æqualem terminali five maximæ velocitati quam corpus è quiete cadendo acquirere poteft. Refolvatur enim rectangulum A H in rectangula innumera A k, K l, L m, M n, &c. quæ fint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta. (cùm enim refiftentia gravitatem fuperet, velocitas decrefcit) & erunt, nihil A k, A l, A m, A n, &c. ut velocitates amiffæ, & ideò rectangula a B, a k, a l, a m, a n, &c., ut velocitates refiduæ refiftentiis proportionales, principio fingulorum temporum æqualium. Quoniam verò gravitas motum accelerat quem refiftentia retardat, de vi refiftentiæ fubducatur gravitas C H b a, & manebunt rectangula ABHC, K k H C, L l H C, M m H C, &c. ut vires abfolutæ quibus corpus in principio fingulorum temporum æqualium retardatur, atque ideò ut decrementa velocitatum, id eft, ut rectangula A k, K l, L m, M n, & propterea per Lem. 1. Lib. 2. in progreffione geometricâ. Quarè (380. lib. 1.) erunt areæ A B q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. æquales, ideóque temporibus femper æqualibus analogæ. Elapfo igitur tempore quovis A B t N, corporis velocitas refidua erit ut rectangulum N n b a, five ut recta N a, fed fpatia funt ut velocitas & tempus conjunctim, ergo

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quòd vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitatis proportionalem patientis.

Et loco quovis D egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam DP, & per longitudinem DP exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto P ad lineam horizontalem DC (x) demittatur perpendiculum PC, & secetur DC in A, ut (y) sit DA ad AC ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (z) (quod perinde est) ut sit rectangulum sub DA & DP ad rectangulum sub AC & CP ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis DC, CP describatur hyperbola quævis $GTBS$ secans



ergo spatia singulis tempusculis descripta; sunt ut ea velocitas N a ducta in tempus MstN, id est ut N C × t N × M N + C a × t N × M N = A B H C × M N + C a × M s t N, (ob N C × t N = A B × C A, per theor. 4. de Hyp.) Quarè (componendo) spatium totum tempore A B t N descriptum, erit ut A B H C × A N + C a × A B t N = A B b a × A N + C a × B t n, ob A B t N = A B × A N + B t n. Q. E. D.

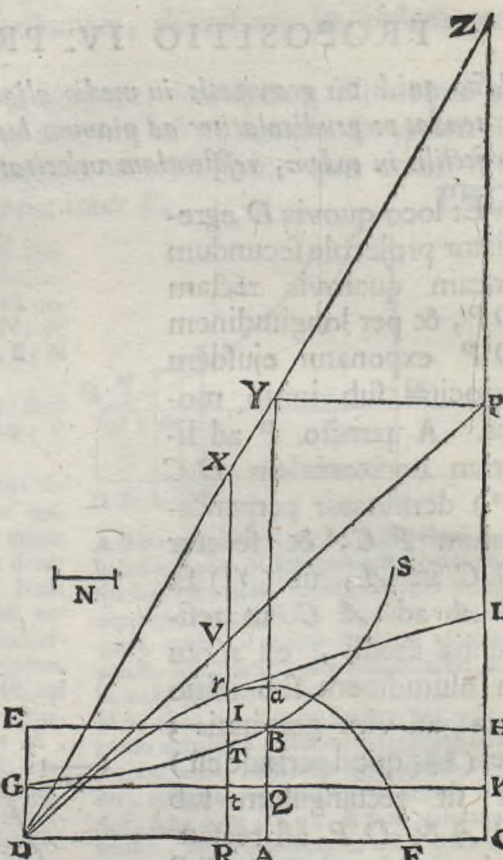
(x) * *Demittatur perpendiculm P C*, & quoniam D P exponit velocitatem projectionis, CP exponet velocitatem verticalem, & D C velocitatem horizontalem, *per leg. motûs cor.* 1. & 2.

(y) * *Ut sit D A ad A C ut resistentia &c.*, aut, quod idem est (*per cor.* 1. *prop.* 111.) ut sit D A ad A C ut velocitas verticalis C P ad velocitatem maximam seu terminalem.

(z) * *Vel (quod perinde est) ut sit rectangulum &c.* Nam cùm sit D P ad C P

 ut

perpendicula DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum $DGKC$ cujus latus GK secet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB quâ DC sit ad CP; & ad rectæ DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT, quod hyperbolæ in T, & rectis EH, GK, DP in I, t & V occurrat; in eo cape Vr æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel (a) quod perinde est, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, describens curvam lineam $DraF$, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & postea semper appropinquans ad asymptoton PC. Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens rL. *Q. E. I.*



Est

ut velocitas tota projectionis ad velocitatem verticalem, ac proinde ex lege resistentiæ ut resistentia tota sub initio ad resistentiam ex motu in altitudinem, & cùm sit D A ad A C ut resistentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis (*per hypothesim*), erit per compositionem rationum & ex æquo $DA \times DP$ ad $AC \times CP$ ut resistentia tota ex motu projectionis ad vim gravitatis.

(a) * *Vel quod perinde est], cape R r æqualem &c.* Cùm enim sit (per hyp.) $N : QB = DC : CP$, & $DC : CP = DR : RV$; ob triangula similia DRV, DCP; erit $N : QB = DR : RV$, & ideo $RV = \frac{DR \times QB}{N}$. Sed rectangulum $GEIt = Gt \times GE = DR \times QB = GTIE + tGT$; & ideo $\frac{GTIE}{N} = \frac{DR \times QB - tGT}{N} = RV - \frac{tGT}{N}$. Quare si capiatur $Vr = \frac{tGT}{N}$, erit $\frac{GTIE}{N} = RV - Vr = Rr$.

Eſt enim N ad QB ut DC ad CP ſeu DR ad RV, ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id eſt $RV - Vr$ ſeu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) (b) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (*per legum corol.* 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum aſcenſus, alterum ad latus. Et cùm reſiſtentia ſit ut motus, (c) diſtinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, à motu ad latus deſcripta, erit (*per prop.* 11. hujus) ut (d) linea DR, (e) altitudo verò (*per prop.* 111. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, (f) æqualis eſt rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (ſeu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc eſt ad DR ut $AB - AQ$ ſeu QB ad N, id eſt, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem ſub initio. Cùm igitur Rr ſemper ſit ut altitudo, ac DR ſemper ut longitudo, atque Rr ad DR ſub initio ut altitudo ad longitudinem: neceſſe eſt ut Rr ſemper ſit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & prop-

(b) * *Æqualis* $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$ &c. Eſt enim $\frac{DR \times AB - RDGT}{N} = \frac{DR \times RI - RDGT}{N} = \frac{GTIE}{N} = RV - Vr$.

(c) * *Diſtinguetur etiam hæc &c.* In eâ, quam tractamus, reſiſtentiæ hypotheſi motus componere ac dividere licet eodem modo quo componuntur & dividuntur in vacuo; quod in aliis reſiſtentiæ hypotheſibus fieri non poteſt. Cùm enim reſiſtentia velocitati proportionalis eſt, ſpatia velocitatibus ſeparatis & conjunctis eodem temporis momento deſcribenda vi reſiſtentiæ minuuntur in eâdem quam habent inter ſe ratione.

(d) * *Ut linea* D R. Exponitur enim corporis velocitas horizontalis ſub motûs initio per lineam D C. Unde tempus 53.
exponi poterit per aream hyperbolicam D R G T, & ſpatium hoc tempore deſcriptum per lineam D R, *per cor. prop.* 11. hujus.

(e) * *Altitudo verò* &c. Cùm enim ſit D A ad A C ut reſiſtentia verticalis ad gravitatem (*per hyp.*); area G T I E, ſeu ei æqualis D R × A B — R D G T, erit ut altitudo motu verticali deſcripta (*per prop.* 111. *hujus*); & quia) *per conſtruct.*) eſt $Rr = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$, ideoque ob datum N, R r ut D R × A B — R D G T, erit altitudo ut R r.

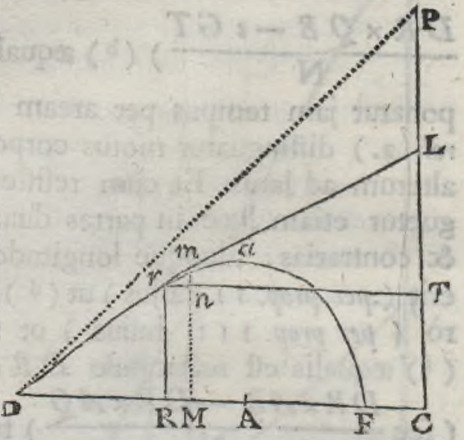
(f) * *Æqualis eſt rectangulo &c.* Nam coincidente puncto t cum G, evaneſcit T t reſpectu R t ſeu A Q, fitque area evaneſcens R D G T æqualis R D G t ſeu D R × A Q.

propterea ut corpus moveatur in linea $D\,r\,a\,F$, quam punctum r (g) perpetuò tangit. *Q.E.D.* *Co-*

(g) 54. *Perpetuo tangit.* Quoniam autem D A eſt ad A C ut reſiſtentia ex motu verticali ſub initio orta ad vim gravitatis, tempus totius aſcensûs corporis erit D A B G (*per Prop.* III. hujus), quo etiam tempore percurrit corpus longitudinem D A, & ideo ad maximam ſuam altitudinem a perveniet ubi erit in perpendiculo A B a, & poſtea ſemper appropinquat ad aſymptoton P C (*per* Cor. *Prop.* II). Per punctum quodvis trajectoriæ r agatur r T horizontali D C parallela & verticali C P occurrens in T, verticalis M m ipſi R r infinitè propinqua ſecet r T in n & tangentem r L ſeu curvam in m: & quoniam motus corporis in loco r per arcum r m dividi poteſt in motum horizontalem r n & verticalem n m, erit velocitas horizontalis ad verticalem ut r n ad n m, & ad obliquam ſecundùm tangentem curvæ ut r n ad r m. Sed ob ſimilitudinem triangulorum r n m, r T L, eſt r n : m n = r T vel R C : T L, & r n : r m = R C : r L. Quare cùm R C ſit ut velocitas horizontalis corpori in loco r reſidua ex velocitate D C quam ſub initio motus habebat in loco D (*per Cor. Prop.* II.); erit T L ut velocitas verticalis corpori reſidua ex velocitate initiali C P, & r L ut velocitas obliqua in arcu r m ex duabus r T, & T L compoſita. Eſt itaque velocitas & proinde reſiſtentia corporis in puncto quovis trajectoriæ r ut curvæ tangens r L.

55. Hinc per datum trajectoriæ punctum r duci poteſt tangens r L. Nam velocitas verticalis L T in loco r eſt ad velocitatem verticalem C P in loco D, ut rectangulum R B ad rectangulum D B (*vide figuram textûs*) ſive ut R A ad D A (*per Prop.* III.); ideoque $\mathrm{LT} = \frac{\mathrm{CP} \times \mathrm{RA}}{\mathrm{DA}}$.

56. Ex ſuperiori conſtructione facilè deducitur æquatio ad trajectoriam D r a F. Poſitis enim $\mathrm{DP} = b$, $\mathrm{DC} = e$, $\mathrm{CP} = f$, $\mathrm{AC} = g$, $\mathrm{AB} = h$, $\mathrm{Rr} = y$, & $\mathrm{DR} = x$, erit (*per theor.* 4um. *de hyperb. lib.* 1.) $\mathrm{DC}\,(e) : \mathrm{AC}\,(g) = \mathrm{AB}\,(h) : \mathrm{GD} = \frac{gh}{e}$, & RC



$(e-x) : \mathrm{AC}\,(g) = \mathrm{AB}\,(h) : \mathrm{RT} = \frac{gh}{e-x}$; ideoque $\mathrm{QB} = \mathrm{AB} - \mathrm{GD} = \frac{eh-gh}{e}$, & areæ hyperbolicæ R D G T elementum naſcens $\mathrm{RT} \times dx = \frac{gh\,dx}{e-x}$, ac proinde area $\mathrm{RDGT} = gh.\,\mathrm{S}.\frac{dx}{e-x}$, Præterea (per conſtr.) eſt $\mathrm{CP}\,(f) : \mathrm{DC}\,(e) = \mathrm{QB}\,\frac{(eh-gh)}{e} : \mathrm{N} = \frac{eh-gh}{f}$, & $\mathrm{Rr} = y = \frac{\mathrm{DR} \times \mathrm{AB} - \mathrm{RDGT}}{\mathrm{N}}$. Eſt & $\mathrm{DR} \times \mathrm{AB} = hx$. Quare erit $y = \frac{fx}{e-g} - \frac{fg}{e-g} \times \mathrm{S}.\frac{dx}{e-x}$: Eſt etiam (*per conſtr.*) D A ſeu $e-g$ ad A C ſeu g ut reſiſtentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis, & ideo per Cor. I. Prop. III. ut *velocitas verticalis*, quam exponit recta C P ſeu f, ad *velocitatem terminalem*; & ideo ſi velocitas terminalis exponatur per lineam a, habebitur $a = \frac{fg}{e-g}$. Unde fit $y = \frac{ax}{g} - a.\,\mathrm{S}.\frac{dx}{e-x}$ & ſumptis fluxionibus $dy = \frac{a\,dx}{g} - \frac{a\,dx}{e-x}$. Si ponatur R C ſive $e - x = z$;

erit

Corol. 1. Est igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque si producatur RT ad X ut (h) sit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id est, si compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY secans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X; erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Co-

erit $-dx = dz$, & $-\frac{a\,dx}{e-x} = \frac{a\,dz}{z}$, ideoque $-a.\,S.\frac{dx}{e-x} = a.\,S.\frac{dz}{z} = a.\,L.z = a.\,L.e-x$ (40). Quare erit $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.e-x + Q$ *const.* Et quia evanescente y, evanescit quoque x, invenitur constans $Q = -a.\,L.e$, & hinc $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.e-x - a.\,L.e = \frac{ax}{g} - a.\,L.\frac{e}{e-x}$. Est enim $L.e - L.e-x = L.\frac{e}{e-x}$, & signis mutatis $L.e-x - L.e = -L.\frac{e}{e-x}$.

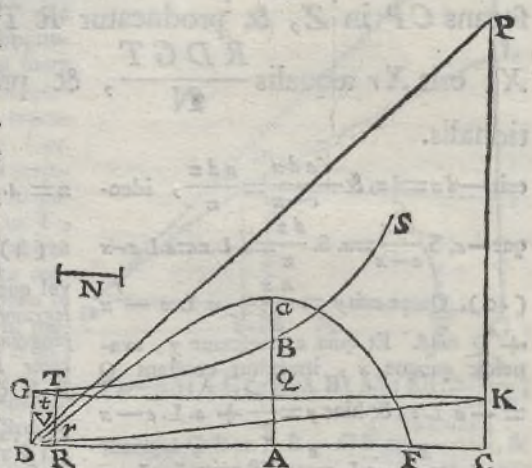
57. Ex hac æquatione alia deducitur inter DV & Vr. Si enim dicantur $DV = v$ & $Vr = z$, erit ob triangula DCP, DRV similia, $DP\,(b) : DV\,(v) = DC\,(e) : DR\,(x) = \frac{ev}{b}$, & ideo $e - x = \frac{eb - ev}{b}$ & $\frac{e}{e-x} = \frac{b}{b-v}$; similiter erit $DC\,(e) : CP\,(f) = DR\,\left(\frac{ev}{b}\right) : VR = \frac{fv}{b}$, ideoque $y = Rr = VR - Vr = \frac{fv}{b} - z$. Quare habebitur $\frac{fv}{b} - z = \frac{aev}{bg} - a.\,L.\frac{b}{b-v}$, & $z = \frac{fgv - aev}{bg} + a.\,L.\frac{b}{b-v}$. Sed (ex demonstr.) $a = \frac{fg}{e-g}$, atque ideo $ae - ag = fg$, & $fg - ae = -ag$; quare erit etiam $z = a.\,L.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. 57.

(h) * *Ut sit RX æqualis* $\frac{DR \times AB}{N}$ vel quod idem est, *si compleatur Parallelogrammum ACPY* erit $AY = CP$, *si jungatur DY secans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X* valor RX qui hoc modo reperitur idem erit cum valore $\frac{DR \times AB}{N}$ ipsi assignato (*vide fig. text. pag.* 28) erit enim $DA : AY\,(CP) = DR : RX = \frac{CP \times DR}{DA}$; jam verò $\frac{CP}{DA} = \frac{AB}{N}$, quippe per nat. Hyper. est $AB : DG\,(\text{sive } QA) = DC : AC$ & convertendo $AB : AB - AQ\,(\text{sive } QB) = DC : DA = \frac{DC \times QB}{AB}$, ergo $\frac{CP}{DA} = \frac{AB \times CP}{DC \times QB}$, sed $\frac{CP}{DC \times QB} = \frac{1}{N}$ ex constr. ergo $\frac{CP}{DA} = \frac{AB}{N}$, & $\frac{CP \times DR}{DA}$ qui est valor RX repertus per constructionem, idem est ac valor $\frac{AB \times DR}{N}$ ipsi assignatus per Hypothesim. Quoniam igitur $RX = \frac{DR \times AB}{N}$, & $Xr = RX - Rr = \frac{DR \times AB}{N} - \frac{DR \times AB}{N} + \frac{RDGT}{N}$; erit $Xr = \frac{RDGT}{N}$, & prop-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. IV. PROBL. II.

Corol. 2. Unde si capiantur innumeræ $C\,R$, vel, quod perinde est, innumeræ $Z\,X$ in progressione geometricâ; erunt totidem $X\,r$ in (i) progressione arithmeticâ. Et hinc curva $D\,r\,a\,F$ (k) per tabulam logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice D, diametro $D\,G$ deorsum productâ, & latere recto quod sit ad 2 $D\,P$ ut resistentia tota ipso motus initio ad vim gravitatis, parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D secundum rectam $D\,P$, ut in medio uniformi resistente describat curvam $D\,r\,a\,F$, ea ipsa erit quâcum exire debet de eodem loco D, secundum eandem rectam $D\,P$, ut in spatio non resisten-



propterea, ob datam N, X r est ut area R D G T, ideoque ut tempus quo corpus ex loco D pervenit in locum r.

(i) * *In progressione arithmeticâ.* Nam (380. lib. 1.) temporibus seu areis R D G T in progressione arithmeticâ crescentibus, abscissæ R C in progressione geometricâ decrescunt, & vice versâ. Quare verticalibus X r, quæ sunt ut areæ R D G T, in progressione arithmeticâ crescentibus, correspondentes abscissæ R D decrescent in progressione geometricâ, & contra. Sed ob triangulorum D R X, D C Z similitudinem, est D C ad D Z ut D R ad D X, & divisim ut R C ad Z X: quare ob datas D C & D Z, est Z X ad R C in datâ ratione, & ideo Z X crescit vel decrescit in eâdem ratione cum R C.

(k) 58. *Per tabulam Logarithmorum facilè delineatur.* Dicantur enim, ut suprà n. 56. $DC=e$, $CP=f$, $AC=g$, $a=\frac{fg}{e-g}$, $DR=x$, $Rr=y$; & erit (56) $y=\frac{ax}{g}-aL\frac{e}{e-x}$. Ob triangula D A Y, Y P Z similia, est D A seu $e-g$ ad A Y vel C P seu f, ut Y P vel A C seu g ad P Z, ideoque $PZ=\frac{fg}{e-g}=a$. Triangula similia DRX, YPZ dant etiam Y P seu g ad P Z seu a, ut D R seu x ad R X, & propterea $RX=\frac{ax}{g}$. Unde cùm sit $RC=e-x$, æquatio $y=\frac{ax}{g}-a\,L.\frac{e}{e-x}$ fiet $Rr=RX-PZ\times L.\frac{DC}{RC}$. Verùm cùm $PZ.\ L.\frac{DC}{RC}$ sit Logarithmus rationis D C ad R C in Logarithmica cujus subtangens est a sive P Z, dicendo ut subtangens tabularum ad P Z, ita $L.\frac{DC}{RC}$ è tabulis desumptus ad ejusdem quantitatis Logarithmum in Logarithmicâ cujus subtangens est P Z. Invenietur itaque $PZ\times L.\frac{DC}{RC}$ ope ſiſtente deſcribat parabolam. Nam (l) latus rectum parabolæ hujus, DE MOTU CORPORUM.

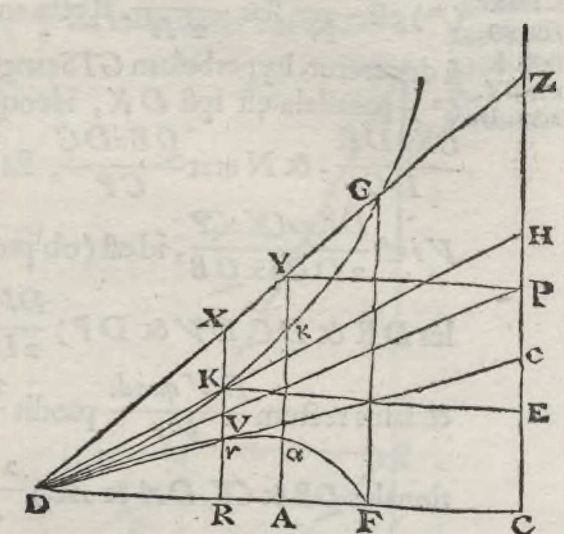
ope tabulæ vulgaris Logarithmorum, & inde obtinebitur R r ordinata ad trajectoriam D r a F, & ſic punctum quodlibet r in illa determinabitur.

59. Ex his ſimpliciſſima deducitur trajectoriæ D r a F per Logarithmicam conſtructio. Iiſdem enim poſitis quæ in corollario 1° hujus præſcripta ſunt, aſymptoto C Z & ſubtangente P Z deſcribatur per punctum D Logarithmica D K k G ſecans R X in K. Capiatur X r = R K, ſeu R r = X K, & punctum r erit in trajectoriâ quæſitâ D r a F. Nam ſi ex puncto K ducatur ad C Z perpendiculum K E, erit C E ſeu R K Logarithmus rationis D C ad K E vel R C (34), ideoque erit (58) R r = R X — R K = X K, & hinc R K = R X — R r = X r. Q. E. D.

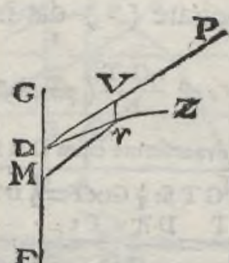
60. Hæc conſtructio hoc etiam commodi habet, quod ſtatim inveniantur altitudo maxima A a & horizontalis amplitudo D F. Eſt enim A a = Y k; & ſi ex puncto G interſectionis Logarithmicæ cum lineâ D Z demittatur ad D C perpendiculum G F, erit D F amplitudo Jactûs: nam coincidente X cum G fit X K ſeu R r = o, & ideo coincidit punctum r cum R in horizontali D C. Pariter punctum r, quo trajectoria D r a F rectam quamlibet D c ex puncto D ad C Z ductam ſecat, invenitur, ſi capiatur C H æqualis c Z, jungatur D H Logarithmicam ſecans in K, & ex puncto K demittatur ad D C perpendiculum K R, quod lineam D c ſecabit in puncto quæſito r; erit enim R K : C H ſeu Z c = D r : D c = X r : Z c, ideoque X r = R K.

61. Quoniam velocitas projectionis eſt ad velocitatem terminalem, quæ data eſt, ut D P ad P Z (58); ſi manet velocitas projectionis & linea D P, manebit quoque Logarithmicæ ſubtangens P Z; & ideo una eademque Logarithmicæ ſpecies deſcribendæ trajectoriæ D r a F ſufficiet, utcumque mutetur projectionis angulus P D C.

(l) 62. *Latus rectum parabolæ hujus &c.* Eſt enim V r ſpatium infinitè parvum quod corpus vi gravitatis deſcendendo deſcribit in medio reſiſtente, quodque eodem tem-



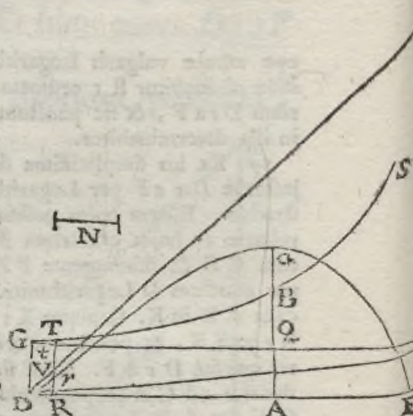
pusculo dato deſcriberet in medio non reſiſtente (6). Sed corpus in medio non reſiſtente projectum vi gravitatis deſcriberet arcum parabolæ D r, cujus tangens D P, diameter G D E, abſciſſa D M = 62.



V r, ordinata M r æqualis & parallela D V (40. *lib.* 1.), & (*per theor.* 1. *de parabola lib.* 1.) rectangulum ſub latere recto & abſciſsâ D M ſeu V r æquatur quadrato ordinatæ M r ſeu D V. Quare latus rectum parabolæ hujus ipſo motus initio eſt $\frac{DV^2}{Vr}$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. IV. PROBL. II.

hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV\,quad.}{Vr}$; & Vr (m) est $\frac{tGT}{N}$ seu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, si duceretur, hyperbolam GTS tangeret in G, (n) parallela est ipsi DK, ideoque Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id est (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$ & latus rectum $\frac{DV\,quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id (o) est (ob proportionales QB & CK, DA & AC) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad $2\,DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; (p) hoc est, ut resistentia ad gravitatem. *Q.E.D.*



Corol. 4. Unde si corpus de loco quovis D, datâ cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam DP projiciatur; & resistentia medii ipso motûs initio detur, inveniri potest curva $DraF$, quam corpus idem describet. Nam ex datâ velocitate (q) datur latus rectum parabolæ, ut notum est.

(m) * *Vr* est $\frac{tGT}{N}$ (*per constr.*) *seu* $\frac{DR \times Tt}{2N}$; evanescente enim DR seu Gt, triangulum tGT fit $\frac{1}{2}$ Gt×Tt$=\frac{1}{2}$ DR×Tt, & hinc $\frac{tGT}{N} = \frac{DR \times Tt}{2N}$.

(n) * *Parallela est ipsi DK*, ob KC $=$ DG, & subtangentem hyperbolæ æqualem abscissæ DC (*per theor.* 1. *de hyp. lib.* 1.). Cùm autem evanescit GTt, fit Tt ad tG seu DR ut ordinata GD seu CK ad subtangentem, sive ad DC, & ideo $Tt = \frac{CK \times DR}{DC}$. Et *N* erat $\frac{QB \times DC}{CP}$ (*per constr.*). Quare si loco *N* & Tt, hi valores substituantur in quantitate $\frac{DR \times Tt}{2N}$ $=$ Vr, invenietur $Vr = \frac{DR \times^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$

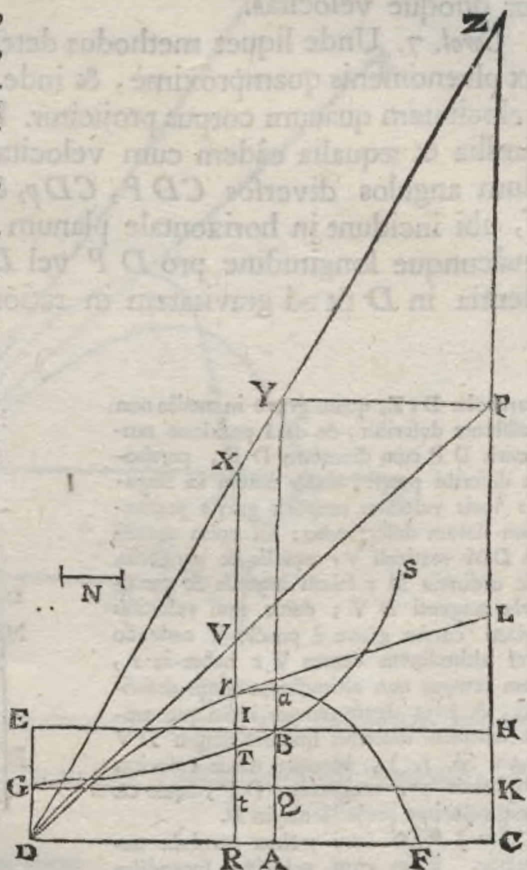
(o) * *Id est, ob proportionales QB & CK, DA & AC &c.* Nam (*per theor.* 4. *de hyp.*) AB est ad GD (sive AQ vel CK) ut DC ad AC, & divisim QB est ad CK ut DA ad AC, id est $\frac{QB}{CK} = \frac{DA}{AC}$.

(p) * *Hoc est, ut resistentia ad gravitatem*, per construct. Probl. II.

(q) * *Datur latus rectum parabolæ &c.* Datâ velocitate secundum directionem tangentis DP, datur tum spatium finitum in medio non resistente tempore dato æquabiliter descriptum, tum ex effectu cognito gravitatis in tempore dato, habetur

Et ſumendo 2 DP ad latus illud rectum, ut eſt vis gravitatis ad vim reſiſtentiæ, datur DP. Dein ſecando DC in A, ut ſit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eâdem illâ ratione gravitatis ad reſiſtentiam, dabitur punctum A. (r) Et inde datur curva $DraF$.

Corol. 5. Et contra, ſi datur curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & reſiſtentia medii in locis ſingulis r. (ſ) Nam ex datâ ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum reſiſtentia medii ſub initio motus, tum latus rectum parabolæ: (t) & inde datur etiam velocitas ſub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis reſiſtentia in loco quovis r.



Corol. 6. Cùm autem longitudo 2 DP ſit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad reſiſtentiam in D; & ex auctâ velocitate augeatur reſiſtentia

tur ſpatium verticale finitum V r eodem tempore vi gravitatis deſcriptum, id eſt, dantur ordinata & abſciſſa parabolæ, quibus datis datur illius latus rectum (per theor. 1. de parab.)

(r) * *Et inde datur curva* D r a F, non ſolum conſtructione per hyperbolam, ſed etiam conſtructione illâ quæ per Logarithmicam abſolvitur (59.) Nam inventâ D P, ſumenda eſt Logarithmicæ ſubtangens P Z ad D P in ratione gravitatis ad reſiſtentiam ſub initio motûs; & ideò Logarithmicæ ſubtangens P Z erit etiam ad D P ut 2 D P ad latus rectum parabolæ. 62

(ſ) * *Nam ex datâ ratione* C P × A C ad D P × D A, id eſt (per conſtr.) ratione gravitatis ad reſiſtentiam totam ſub motus initio, dabitur reſiſtentia, ob datam gravitatem (*per hyp.*); & quia C P × A C eſt ad D P × D A ut 2 D P ad latus rectum parabolæ (*per cor.* 3.), dabitur illud latus rectum.

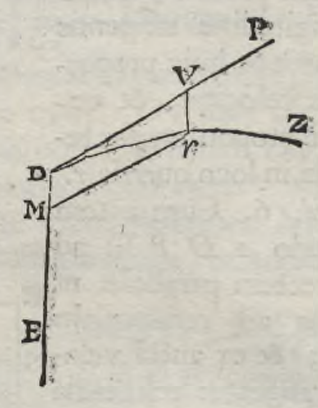
(t) * 63. *Et inde datur etiam velocitas ſub initio motûs.* Nam dato latere recto

 parain eâdem ratione, (u) at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: (x) patet longitudinem $2\,DP$ augeri in ratione illâ ſimplici, ideoque velocitati ſemper proportionalem eſſe, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, niſi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam $DraF$ ex phænomenis quamproximè, & inde colligendi reſiſtentiam & velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia eâdem cum velocitate, de loco D, ſecundum angulos diverſos CDP, CDp, & cognoſcantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, aſſumptâ quâcunque longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod reſiſtentia in D ſit ad gravitatem in ratione quâlibet, & exponatur

parabolæ DrZ, quam grave in medio non reſiſtente deſcribit, & datâ poſitione tangentis DP cum diametro DE, parabola deſcribi poteſt; datur autem in ſingulis locis velocitas corporis gravis parabolam datam deſcribentis: Sit enim abſciſſa DM verticali Vr æqualis & parallela, & ordinata Mr etiam æqualis & parallela tangenti DV; datur tum velocitas quam corpus grave è puncto V cadendo per altitudinem datam Vr habet in r, tum tempus quo altitudinem illam deſcribit, & hinc datur tempus idem quo motu uniformi deſcribit ſpatium datum DV (40. *lib.* 1.), ideoque datur velocitas uniformis per tangentem DP, quæ eſt ipſa velocitas projectionis in D.

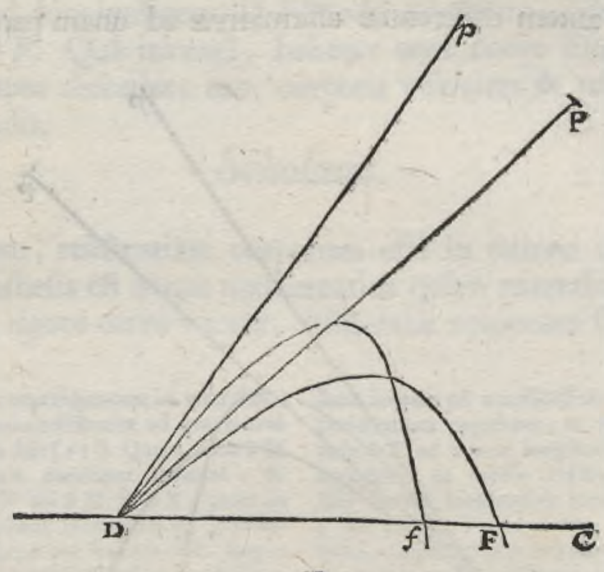
(u) * *At latus rectum parabolæ augeatur.* Nam cùm velocitas ſecundùm tangentem DV uniformis ſupponatur (40. *lib.* 1.); Si, dato tempore quo deſcribitur DV, velocitas illa creſcat, creſcet DV in eadem ratione, manente ſpatio verticali Vr hoc eodem tempore dato deſcripto; ſed latus rectum parabolæ DrZ eſt $\frac{DV^2}{Vr}$ (*per cor.* 3.) & quantitas $\frac{DV^2}{Vr}$ manente Vr, creſcit ut DV^2. Quare latus rectum parabolæ DrZ augetur in ratione duplicatâ velocitatis.

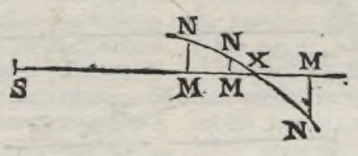


(x) * *Patet longitudinem 2 D P &c.* Gravitas dicatur G, reſiſtentia initio motûs R, latus rectum parabolæ, ut ſuprà, $\frac{DV^2}{Vr}$; & erit $2\,DP : \frac{DV^2}{Vr} = G : R$, ideoque $2\,DP = \frac{G \times DV^2}{R \times Vr}$, hoc eſt, datis Vr & G, $2\,DP$ eſt ut $\frac{DV^2}{R}$, & quia R eſt ut velocitas, ſeu ut DV, erit etiam $2\,DP$ ut DV, ſive ut velocitas (*per notam ſuperiorem*).

tur

tur ratio illa per longitudinem quamvis SM. (y) Deinde per computationem, ex longitudine illâ aſſumptâ DP, inveniantur





longitudines DF, Df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, (z) auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & expo-

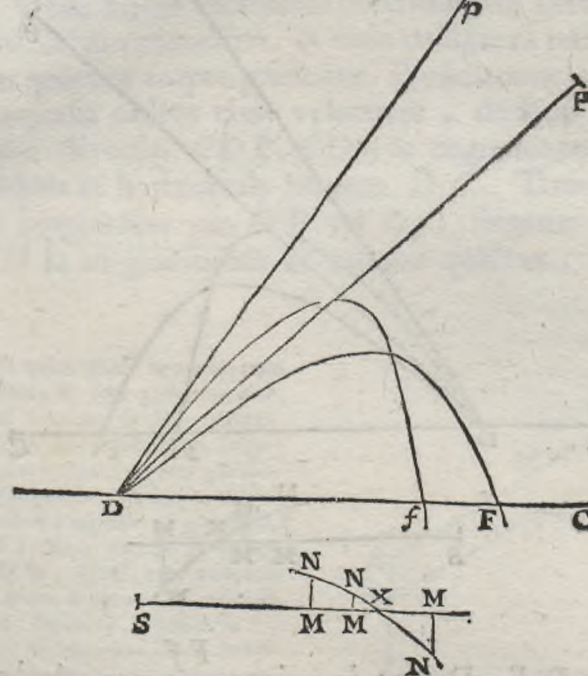
(y) 64. *Deinde per computationem.* Datâ enim D P longitudine & poſitione, dantur C P & D C, & datâ ratione reſiſtentiæ in D ad gravitatem dantur D A & A C per conſtructionem problematis iſtius: His autem datis, curva D r a F (vide figuras ſuperiores) deſcribi poteſt, & hinc invenitur amplitudo horizontalis D F conſtructione per hyperbolam vel per logarithmicam (59). Si autem rem voluerimus calculo tractare, uti poterimus æquatione $y = \frac{a \cdot x}{g} - a.\,L.\,\frac{e}{e-x}$ (63) in qua ut ſit $x = DF$, ponenda eſt $y = 0$, & æquatio fiet $\frac{a \cdot x}{g} = L.\frac{e}{e-x}$; ex quâ per regreſſum ſerierum, vel per alias approximationes invenietur x per g & e, ſeu D F per A C & D C. 64.

(z) 65. *Auferatur ratio eadem per experimentum inventa*; & ſi nihil eſt reſidui, rectè aſſumpta fuit ratio reſiſtentiæ ad gravitatem; ſi quid reſidui fuerit, *exponatur differentia per M N.* Nam ſi rectè aſſumpta fuit ratio reſiſtentiæ ad gravitatem, curva D r a F per conſtructionem vel per computationem deſcripta ſimilis eſt trajectoriæ quam corpus in medio reſiſten-

 te-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. IV. PROBL. II.

exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertiò, aſſumendo ſemper novam reſiſtentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ



SM, & negativæ ad alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *NNN* ſecans rectam *SMMM* in *X*, & ([a]) erit *SX* vera ratio reſiſtentiæ ad gravitatem, quam inve-

te reverâ deſcribit, & hinc homologarum in illis curvis linearum debet eſſe ratio data. Determinatur enim trajectoria vera ex velocitate & angulo projectionis æquali PDC vel pDC, atque ex ratione reſiſtentiæ ad gravitatem datam; & curva per conſtructionem delineata determinatur per longitudinem aſſumptam DP vel Dp, quæ velocitatem datam ſemper poteſt exhibere, per angulum PDC vel pDC, & per rationem linearum DA, AC, ſeu rationem reſiſtentiæ ad gravitatem, ſi recte aſſumpta fuit: quare differentia tota inter veram trajectoriam & curvam hoc modo per conſtructionem deſcriptam eſt in magnitudine linearum homologarum, quarum ratio eſt eadem in utrâque curvâ. Curvæ igitur illæ ſimiles ſunt.

(a) 66. *Et erit* SX *vera ratio reſiſtentiæ ad gravitatem.* Nam ubi MN ſeu differentia rationum $\frac{Ff}{DF}$, quæ per computatioinvenire oportuit. Ex (b) hac ratione colligenda eſt longitudo *D F* per calculum; & longitudo quæ ſit ad aſſumptam longitudinem *D P*, ut longitudo *D F* per experimentum cognita ad longitudinem *D F* modò inventam, erit vera longitudo *D P*. Quâ inventâ, habetur tum curva linea *D r a F* quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.

Scholium.

Cæterùm, reſiſtentiam corporum eſſe in ratione velocitatis; (†) hypotheſis eſt magis mathematica quàm naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, reſiſtentiæ corporum ſunt in dupli-

tionem & per experimentum inventæ ſunt, nulla eſt, ratio reſiſtentiæ ad gravitatem rectè aſſumpta fuit (65). Quare cùm S M aſſumptam illam rationem exponat, & evaneſcat M N ubi S M fit S X, patet in hoc caſu rationem reſiſtentiæ ad gravitatem rectè exponi per lineam S X. Itaque ſi innumeræ abſciſſæ S M aſſumptæ fuiſſent, & innumeræ ordinatæ N M per experimenta determinatæ, curva quam punctum N perpetuò tangit, rationem accuratam reſiſtentiæ ad gravitatem determinaret per ejus interſectionem X cum lineâ S M; ideoque ſi multa fiunt tentamina, ſicque plura obtineantur puncta N, & per ea ducatur curva regularis N N X N, illa quàm proxime punctum X quæſitum determinabit; methodum autem ducendi curvam regularem per plura puncta data mox in Scholio ſumus tradituri.

(b) *Ex hac ratione colligenda eſt &c.* Sit, exempli causâ, ratio aſſumpta reſiſtentiæ ad gravitatem 1 ad 10, ſeu $SM = \frac{1}{10}$; inventa autem ſit $SX = 2\,SM = \frac{2}{20} = \frac{1}{5}$; erit reſiſtentia ad gravitatem ut 1 ad 5. Ex hac ratione & aſſumptâ longitudine D P colligenda eſt longitudo D F ſeu amplitudo jactûs (64); & quoniam inventâ verâ ratione reſiſtentiæ ad gravitatem, trajectoria per calculum vel per conſtructionem inventa ſimilis eſt trajectoriæ quam corpus in medio reſiſtente, reverâ deſcribit (65), erit amplitudo D F per calculum inventa ad amplitudinem D F per experimentum cognitam, ut aſſumpta longitudo D P ad veram longitudinem D P pro trajectoriâ in medio reſiſtente deſcriptâ. Hâc autem longitudine inventâ, habetur (*per cor.* 4.) tum curva linea D r a F quam corpus reipsâ deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis (*per cor.* 5.) 66.

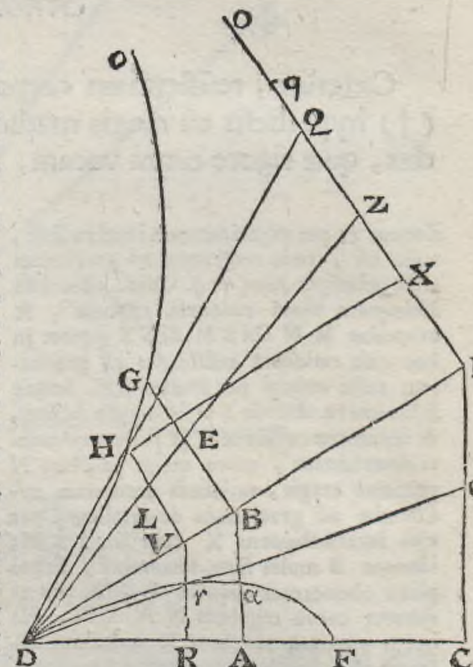
(†) 67. Ex ſupra demonſtratis determinari poſſent motus corporis in medio quod reſiſtit partim uniformiter, partim in ratione velocitatis. Et quidem ſi corpus ſolâ vi inſitâ in hoc medio feratur, pars illa reſiſtentiæ quæ eſt uniformis, tanquam vis conſtans gravitatis quâ corporis aſcendentis motus retardatur, conſideranda eſt, & in ſuperioribus conſtructionibus pro corporis aſcenſu, non gravitas, ſed ea reſiſtentia uniformis data per lineam A C, vel per rectangulum A H exponi debet. Si vero corpus in prædicto medio vi gravitatis etiam urgeatur, linea A C gravitatem & reſiſtentiæ partem uniformem ſimul junctas, ſi corpus aſcendit, & exceſſum gravitatis ſupra eam reſiſtentiæ partem uniformem, ſi corpus deſcendit, exponet. Quâ ratione cæteris manentibus, determinabuntur motus corporis tum ſolâ vi inſitâ moti, tum vi gravitatis urgente aſcendentis & deſcendentis in medio quod reſiſtit partim in ratione datâ, partim in ratione velocitatis, tum etiam corporis projecti.

Eteplicatâ ratione velocitatum. (c) Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; estque resistentia (*per motûs leg.* II. & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege resistentiæ.

(c) *Etenim actione &c.* Hæc patent per demonstrata (8).

68. *Scholium.* Ex æquatione ad curvam D r a F, quam (57) invenimus, deducitur hujus curvæ per Logarithmicam satis elegans constructio, quâ usi sunt *Varignonius* & *Hermannus*. Eam hîc exponemus breviter. Deinde cùm in superioris propositionis corollario ultimo & alibi postea describenda sit curva regularis quæ per data puncta transeat, hoc problema, quod NEWTONUS in Epistolâ ad *Oldenburgum* anno 1676. datâ unum fere ex pulcherrimis dicit quod solvere desideraverit, solvemus.

69. Iisdem positis quæ in superiori constructione NEWTONI, sit D P $= b$, D V $= v$, V r $= z$, & D P ad a ut velocitas projectionis ad velocitatem terminalem; & erit (57) $z = a.\mathrm{L}.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. Oportet curvam D r a F ex hac æquatione per Logarithmicam construere. In rectâ P O ad D P normali capiatur P Z $= a$, asymtoto P O & subtangente P Z describatur per punctum D Logarithmica D H O, cujus D Z erit tangens, & per punctum quodvis V in linea D P agatur V H parallela P O Logarithmicæ occurrens in H & tangenti D Z in L, capiaturque verticalis V R pars V r æqualis H L. Punctum r erit in trajectoriâ quæsitâ D r a F. Nam ducto ex H ad P O perpendiculo H X, erit (*per construct.*) V P $=$ H X $= b - v$, P Z $= a$, & hinc P X $=$ H V $=$ P Z $\times$ L. $\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{HX}} = a.\mathrm{L}.\frac{b}{b-v}$ (34). Et ob triangula D V L, D P Z similia, D P (b) : P Z (a) $=$ D V (v) : V L $= \frac{av}{b}$. Quare erit H V $-$ L V $= a.\mathrm{L}.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = z =$ V r. Q. E. D.

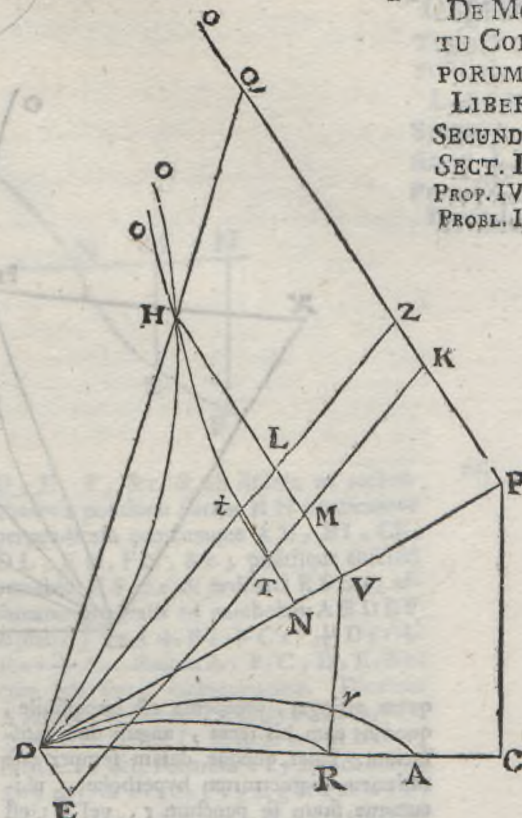


70. *Cor.* 1. Si per punctum A NEWTONI constructione determinatum erigatur verticalis A B secans D P in B, & per B erigatur ad D P perpendiculum B G secans D Z in E & Logarithmicam in G, capiaturque B a æqualis G E, erit A a maxima altitudo Jactûs.

71. *Cor.* 2. Punctum r quo trajectoria rectam D c ex D ductam ad P C, secat, invenitur, si in lineæ Z O capiatur Z Q æqualis P c, jungatur D Q logarithmicam secans in H, demittatur ex H ad D P, perpendiculum H V, & ex V ad

ad D C perpendiculum V R, quod rectam D c ſecabit in puncto quæſito r, atque hinc determinatur etiam horizontalis amplitudo D F, capiendo Z Q æqualem P C, & reliqua perficiendo ut modo diximus. Nam ob parallelas V r & P c, H V & Q P, eſt P c:V r=P D : DV=D Z : D L=Q Z : HL; ſed (*per conſtr.*) Q Z = P c: ergo V r = H L, ideoque punctum r eſt in trajectoria T r a F (*69*).

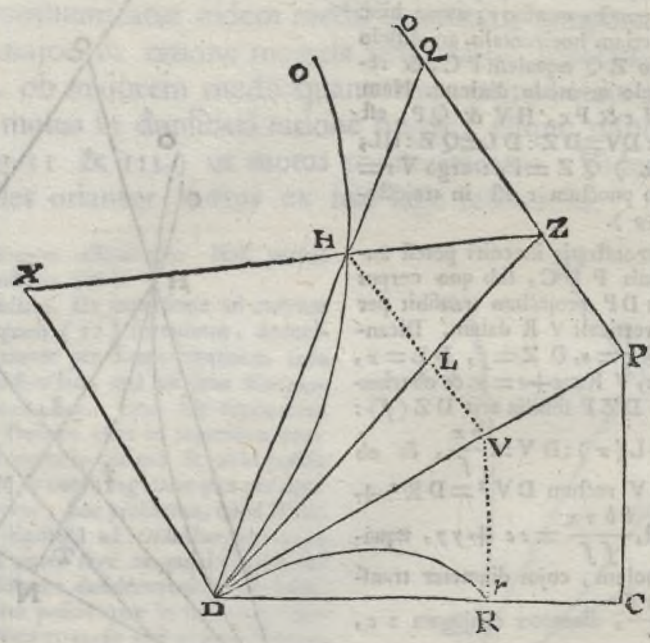
72. Ex demonſtratis inveniri poteſt angulus elevationis P D C, ſub quo corpus datâ velocitate D P projectum tranſibit per punctum r in verticali V R datum. Dicantur D R $= c$, R r $= e$, D Z $= f$, D L $= x$, H L = V r $= z$, V R $= z + e = y$; & ob triangula D L V, D Z P ſimilia erit D Z (f) : D P (b) = D L (x) : D V $= \frac{bx}{f}$, & ob angulum D R V rectum D V^2 = D R^2 + V R^2, hoc eſt, $\frac{bbxx}{ff} = cc + yy$, æquatio ad hyperbolam, cujus diameter tranſverſa eſt $\frac{2cf}{b}$, diameter conjugata $2c$; abſciſſa à centro ſumpta x, & ordinata y ſeu $z + e$, ut calculo inito liquet. Inde autem deducitur hæc conſtructio. Per punctum D ducatur infra lineam D P recta D E parallela P Z & æqualis R r, per E agatur E K parallela D Z ſecans H V in M; & erit L M = D E = R r $= e$, ideoque H M $= z + e = y$, atque E M = D L $= x$, & proinde centrum hyperbolæ eſt in E; cùmque ſemidiameter tranſverſa ſit $\frac{cf}{b} = \frac{\text{DR} \times \text{DZ}}{\text{DP}}$, ſi capiatur in linea D P pars D N æqualis D R, & per punctum N erigatur ad D P perpendiculum N T, ſecans E K in T & D Z in t, erit D P ad D Z ut D N ſeu D R ad D t ſeu E T, ideoque E T $= \frac{\text{DR} \times \text{DZ}}{\text{DP}}$, & propterea ET ſemidiameter tranſverſa, E M abſciſſa, & M H ordinata hyperbolæ T H o, cujus ſemidiameter conjugata æquatur D R. Hæc itaque hyperbola occurſu ſuo cum Logarithmicâ D H o determinabit punctum H, ex quo ſi demittatur ad D P perpendiculum H V ſecans D Z in L, dabuntur D V &



H L æqualis V r, ideoque dabitur etiam V R = V r + R r. His autem datis, datur angulus elevationis P D C, cujus ſinus eſt V R, poſito ſinu toto D V. 72.

73. Si verò quæratur angulus projectionis P D C, ut corpus per punctum R in horizontali D C datum tranſeat, fiet R r $=$ $e = 0$, & æquatio ad hyperbolam evadet $\frac{bbxx}{ff} = cc + zz$, ob $y = z + e = z$. In conſtructione verò coincidet punctum E cum puncto D, & T cum t, cæteris manentibus ut ſupra. Et quia ſi per hyperbolæ & Logarithmicæ interſectionem H ducatur recta D H ſecans P o in Q, eſt Q Z = P C (71.); liquet in eo caſu eſſe Q Z ſinum anguli elevationis P D C, exiſtente radio ſeu ſinu toto D P. Obſervandum porro eſt, quod ſi in his conſtructionibus hyperbola Logarithmicam nuſ-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. IV. PROBL. II.

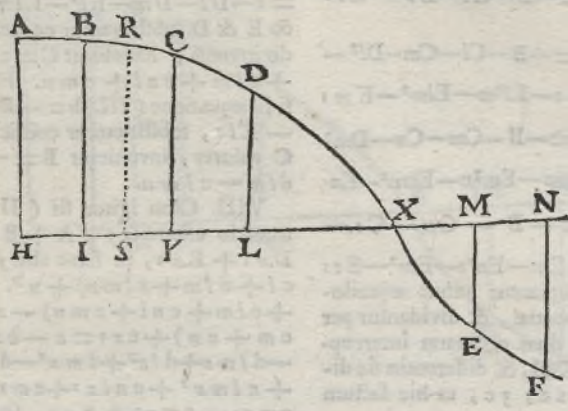


quam attingat, problema eſt impoſſibile; quod ſi eam bis ſecet, anguli duo ſatiſfaciunt. Patet quoque datam ſemper eſſe rationem diametrorum hyperbolæ, ubicumque ſitum ſit punctum r, vel R; eſt enim D R ad $\frac{DR \times DZ}{DP}$ in ratione datâ D P ad D Z.

74. Angulus elevationis P D C maximæ omnium amplitudini horizontali conveniens ita determinatur. Per punctum D ducatur D X ipſi D P perpendicularis quæ ſit ad D P ut eſt D P ad P Z: jungatur Z X Logarithmicam ſecans in H, & ex D per H ducatur recta D H ſecans P O in Q; erit Q Z ſinus anguli quæſiti, exiſtente ſinu toto D P. Sit enim D R amplitudo horizontalis maxima $= c$, D V $= v$, V R $=$ V r $= z$, & erit ob angulum D R V rectum $vv - zz = cc$, & ſumptis fluxionibus $2v\,dv - 2z\,dz = 2c\,dc = 0$ (48), ideoque $v\,dv = z\,dz$. Sed (69) $z = aL\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = aLb - aL\,b-v - \frac{av}{b}$, & ſumptis fluxionibus $dz = \frac{a\,dv}{b-v} - \frac{a\,dv}{b} = \frac{a\,v\,dv}{bb - bv}$. Quare erit $z\,dz = \frac{azv\,dv}{bb-bv} = v\,dv$, & ideo $az = bb - bv$, ac proinde D P (b) : P Z (a) $=$ H L (z) : P V ($b - v$); verùm ob triangulorum D V L, D P Z ſimilitudinem eſt D P : D Z $=$ P V : Z L; unde per compoſitionem rationum & ex æquo $DP^2 : PZ \times DZ = HL : ZL$, & quia $DP^2 = DX \times PZ$ (*per conſtr.*), erit D X : D Z $=$ H L : L Z. Quapropter punctum H per æquationem $az = bb - bv$ determinatum perpetuo tangit lineam rectam X Z; cùmque idem punctum in Logarithmica eſſe oporteat ut determinetur maxima amplitudo D R, ſi per interſectionem H rectæ X Z & Logarithmicæ D H o ducatur recta D Q ſecans P o in Q, habebitur Q Z ſinus anguli P D C (73) maximæ amplitudini D R convenientis. Q. E. D.

75. Jam ſi oporteat curvam regularem deſcribere, per data quotlibet puncta tranſeuntem, uti poſſumus generali methodo, quam NEWTONUS in Arithmeticâ univerſali tradidit, quamque deinde in Problematis 55,

58 &



58 & 61. adhibuit. Hæc ſunt ipſius verba: „Cùm curva non datur ſpecie, ſed determinanda proponitur, poſſiſque pro arbitrio „æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat, & hanc pro eâ deſignandâ tanquam ſi daretur aſſumere, ut ex „ejus aſſumptione quomodocumque perveniatur ad æquationes ex quibus aſſumpta tandem determinetur. Si itaque curva „generis dati per data puncta delineanda „ſit, aſſumatur generalis ad curvam illam „æquatio cum terminorum coëfficientibus „indeterminatis, & curvâ ad rectam aliquam poſitione datam relatâ, ex ſingulis „punctis datis in rectam illam demittantur „perpendiculares aut rectæ aliæ inter ſe parallelæ, quæ datæ erunt ut & earum abſciſſæ a dato in rectâ illâ puncto computatæ; deinde in aſſumptâ æquatione loco „abſciſſæ variabilis x & ordinatæ etiam variabilis y ſcribantur abſciſſæ & ordinatæ „per puncta data determinatæ, & tot inde „obtinebuntur æquationes quot ſunt puncta „data per quæ curva tranſire debet, atque ex „illis æquationibus, generalis æquationis „aſſumptæ coëfficientes determinabuntur. Hujus methodi exemplum ſit ſolutio Lemmatis 5. lib. 3. Principiorum, quod ita propoſitum eſt: invenire curvam generis parabolici quæ per data quotcumque puncta tranſibit; cujus Lemmatis ſolutionem dedit ibidem NEWTONUS, ſed ſine demonſtratione, quæ tamen ex ejuſdem auctoris differentiali methodo colligi poteſt.

76. I. Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iiſdem ad rectam 76.
quamvis poſitione datam HN demittantur perpendicula quotcumque AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c.; poſitiſque abſciſsâ variabili HS $=x$, & ordinatâ RS $=y$, aſſumatur generalis ad parabolam ABDEF æquatio $y=\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x^3+\mathrm{E}x^4+$ &c., ſintque A, B, C, D, E, &c. cum ſuis ſignis indeterminatæ. Dicantur AH $=a$, BI $=f$, CK $=g$, DL $=h$, ME $=-k$, & HI $=l$, HK $=m$, HL $=n$, HM $=t$, &c. Ponantur 1°. $y=a$ & $x=0$; 2°. $y=f$, & $x=l$; 3°. $y=g$ & $x=m$; 4°. $y=h$, & $x=n$; 5°. $y=-k$, & $x=t$ atque ita deinceps, & loco y & x ſeorſim ſubſtituantur hi valores in æquatione generali aſſumpta, quæ in has mutabitur:

II. $a=\mathrm{A}$

$f=\mathrm{A}+\mathrm{B}l+\mathrm{C}l^2+\mathrm{D}l^3+\mathrm{E}l^4+$ &c.

$g=\mathrm{A}+\mathrm{B}m+\mathrm{C}m^2+\mathrm{D}m^3+\mathrm{E}m^4+$ &c.

$h=\mathrm{A}+\mathrm{B}n+\mathrm{C}n^2+\mathrm{D}n^3+\mathrm{E}n^4+$ &c.

$-k=\mathrm{A}+\mathrm{B}t+\mathrm{C}t^2+\mathrm{D}t^3+\mathrm{E}t^4+$ &c.

Subducantur æquationes inferiores ex ſuperioribus, nimirum ſecunda ex primâ, tertia ex ſecundâ, & ita deinceps. Differentia verò primæ ac ſecundæ ordinatæ per primum intervallum HI diviſa dicatur b, id eſt, $\mathrm{b}=\frac{a-f}{l}$; ſecundæ ac tertiæ ordinatæ differentia per ſecundum intervallum IK diviſa dicatur 2 b, id eſt, $2\,\mathrm{b}=\frac{f-g}{m-l}$, & ita de cæteris. Prodibunt æquationes ſequentes.

 III.

$$\text{III. } b = \frac{a-f}{l} = -B - Cl - Dl^2 - El^3$$

$$2b = \frac{f-g}{m-l} = -B - Cl - Cm - Dl^2 - Dlm - Dm^2 - El^3 - El^2m - Elm^2 - Em^3$$

$$3b = \frac{g-h}{n-m} = -B - Cm - Cn - Dm^2 - Dmn - Dn^2 - Em^3 - Em^2n - Emn^2 - En$$

$$4b = \frac{h+k}{t-n} = -B - Cn - Ct - Dn^2 - Dnt - D^2 - En^3 - En^2t - Ent^2 - Et^3$$

Simili modo capiantur adhuc æquationum iſtarum differentiæ, & dividantur per intervallum inter duas ordinatas interceptum H K, I L, K M, & differentiæ ſic diviſæ dicantur c, 2 c, 3 c, ut hic factum videtur.

$$\text{IV. } c = \frac{b-2b}{m} = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2.$$

$$2c = \frac{2b-3b}{n-l} = C + Dl + Dm + Dn + El^2 + Elm + Em^2 + Eln + Emn + En^2.$$

$$3c = \frac{3b-4b}{t-m} = C + Dm + Dn + Dt + Em^2 + Emn + En^2 + Emt + Ent + Et^2.$$

Harum æquationum differentiæ per intervalla trium ordinatarum H L, I M, diviſæ dicantur d, 2 d, & erunt æquationes.

$$\text{V. } d = \frac{c-2c}{n} = -D - El - Em - En$$

$$2d = \frac{2c-3c}{t-l} = -D - El - Em - En - Et$$

Harum tandem æquationum differentia per intervallum quatuor ordinatarum H M diviſa dicatur e, & erit

$$\text{VI. } e = \frac{d-2d}{t} = E.$$

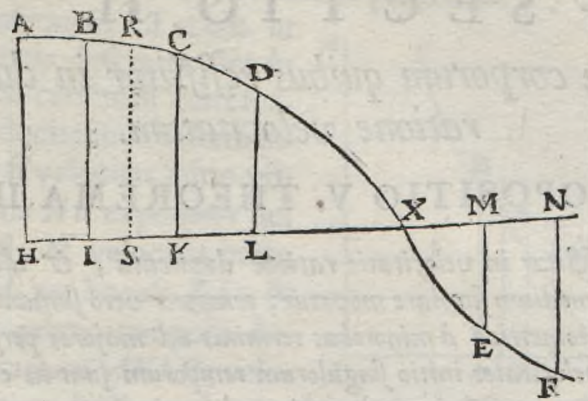
Si plura fuiſſent puncta data; pluresque ideo fuiſſent æquationes, eodem modo pergendum eſſet uſque ad differentiam ultimam: quæ hic eſt differentia quarta, & ſic tandem pervenitur ad valorem coëfficientis ultimi termini æquationis generalis aſſumptæ, & deinde retrogrediendo inveniuntur valores aliarum coëfficientium D, C, B, & A hoc modo.

VII. Quoniam $e = E$, & (V) $d = -D - El - Em - En$, erit $D = -d - el - em - en$; & quia (IV) eſt $c = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$ ideoque $C = c - Dl - Dm - El^2 - Elm - Em^2$ ſi loco E & D ſubſtituantur eorum valores modo inventi, habebitur $C = c + dl + dm + elm + enl + emn$. Et ſimili modo ſi in æquatione (III.) $b = -B - Cl - Dl^2 - El^3$, ſubſtituantur coëfficientium E, D, C valores, invenietur $B = -b - cl - dlm - elmn$.

VIII. Cùm igitur ſit (II.) $A = a$; æquatio aſſumpta $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, in hanc abit $y = a - x.(b\, cl + dlm + elmn) + x^2.(c + dl + dm + elm + enl + emn) - x^3.(d + el + em + en) + ex^4 = a - bx - clx + cx^2 - dlmx + dlx^2 + dmx^2 - dx^3 - elmnx + elmx^2 + enlx^2 + emnx^2 - elx^2 - emx^3 - enx^3 + ex^4$, ſeu $y = a + b.(\overline{-x}) + c.(\overline{-x} \times \overline{l-x}) + d.(\overline{-x} \times \overline{l-x} \times \overline{m-x}) + e.(\overline{-x} \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x})$ + &c. In quâ æquatione patet terminorum progreſſus, & quomodo datâ abſciſsâ H S ſeu x inveniri compendioſè poſſit correſpondens ordinata S R ſeu y. Nam ſi dicantur $\overline{-x}$ ſeu $-HS = p$; $-IS \times p$, ſeu $\overline{-x} \times \overline{l-x} = q$; $+SK \times q$, ſeu $\overline{-x} \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} = r$; $+SL \times r$, ſeu $\overline{-x} \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x} = s$, ita ſcilicet pergendo ad uſque perpendiculum penultimum, quod hic eſt D L; erit R S ſeu $y = a + bp + cq + dr + es$ + &c.

IX. Atque hæc ipſa eſt regula quam NEWTONUS caſu ſecundo Lemmatis V. lib. III. ſic tradit: collige perpendiculorum A H, B I, C K &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas b, 2 b, 3 b, 4 b &c; ſecundas per intervalla bina diviſas c, 2 c, 3 c, 4 c &c; tertias per intervalla terna diviſas d, 2 d, 3 d, &c.; quartas per intervalla quaterna diviſas e, 2 e, &c. Et ſic deinceps. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, pergendo ſcilicet ad uſque perpendiculum penultimum. Et erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es$ + &c. ubi obſervandum eſt, præponenda eſſe ſigna negativa terminis H S, I S &c. qui jacent ad partes puncti S verſus A, & ſigna affirmativa terminis S K, S L &c. qui jacent ad alteras partes puncti S.

X. Per hanc igitur regulam, aſſumptâ quâ-



quâlibet abſciſſâ HS, invenietur valor ordinatæ correſpondentis S R, ſingulaque parabolæ puncta determinabuntur. Si vero in æquatione ponatur $y=0$, & deinde quæratur valor abſciſſæ x, cognoſcetur punctum X quo parabola rectam H N interſecat.

77. XI. Si perpendiculorum HA, IB, KC, L D &c. æqualia ſunt intervalla HI, IK, K L &c.; cæteris ut ſupra (I) nominibus ſervatis, poſitoque intervallo HI $=l=1$, erunt HK $=m=2$, HL $=n=3$, HM $=t=4$, &c. & perpendiculorum differentiæ per intervalla, per intervalla bina, terna, quaterna, & diviſæ erunt (III, IV, V, VI) quæ ſequuntur.

Differentiæ primæ per intervalla diviſæ, $b=a-f$, $2b=f-g$, $3b=g-h$, $4b=h+k$.

Differentiæ ſecundæ per intervalla bina diviſæ, $c=\frac{a-2f+g}{2}$, $2c=\frac{f-2g+h}{2}$, $3c=\frac{g-2h-k}{2}$.

Differentiæ tertiæ per intervalla terna diviſæ, $d=\frac{a-3f+3g-h}{6}$, $2d=\frac{f-3g+3h+k}{6}$.

Differentiæ quartæ per intervalla quaterna diviſæ, $e=\frac{a-4f+6g-4h-k}{24}$.

XII. Ponantur $a-f=\beta$, $a-2f+g=\varkappa$, $a-3f+3g-h=\delta$, $a-4f+6g-4h-k=\varepsilon$; 77.
& erit $b=\beta$, $c=\frac{\varkappa}{2}$, $d=\frac{\delta}{6}$, & $=\frac{\varepsilon}{24}$. Quare ſi hi valores ſubſtituantur in æquatione ſupra (VIII.) inventa, $y=a+b.(-x)+c.(-x\times l-x)+d.(-x\times l-x\times m-x)+e.(-x\times l-x\times m-x\times n-x)+$ &c., illa in hanc mutabitur $y=a+\beta(-x)+\frac{\varkappa(-x\times 1-x)}{2}+\frac{\delta.(-x\times 1-x\times 2-x)}{2\times 3}+\frac{\varepsilon.(-x\times 1-x\times 2-x\times 3-x)}{2\times 3\times 4}+$ &c.

Quapropter ſi in hâc ultimâ æquatione dicantur $-$HS, ſeu $-x=p$; $\frac{1}{2}p$ in $-$I S, ſeu $\frac{-x\times 1-x}{2}=q$; $\frac{1}{3}q$ in $+$S K, ſeu $\frac{-x\times 1-x\times 2-x}{2\times 3}=r$; $\frac{1}{4}r$ in $+$S L, ſeu $\frac{-x\times 1-x\times 2-x\times 3-x}{2\times 3\times 4}=s$; & ita pergatur ad uſque perpendiculum penultimum, erit $y=a+\beta p+\varkappa q+\delta r+\varepsilon s+$ &c. ut NEWTONUS in caſu primo Lemmatis V. lib. III. determinavit. De hoc problemate Lector conſulat clariſſimos auctores, *Hermannum* in Appendice ad Phoronomiam, *Craigium* in Tractatu de Calculo fluentium, maximè verò *Stirling* in libro de Interpolatione ſerierum, in quo totam hanc materiam copioſè & ſagaciter explicat.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. V. THEOR. III.

SECTIO II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ per medium similare movetur; tempora verò sumantur in progressione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eâdem progressione geometricâ inversè; & quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.

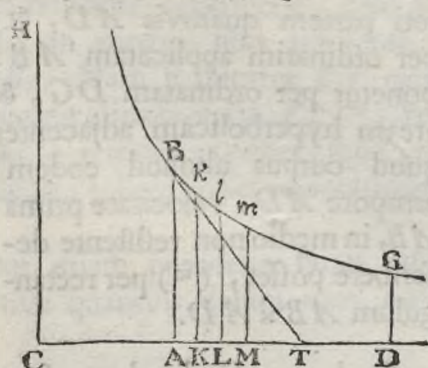
Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis & resistentia medii, & ([d]) resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in rectâ CD sumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. hyperbolæ $BklmG$, centro C asymptotis rectangulis CD, CH descriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. & ([e]) erit AB ad Kk ut CK ad CA, & divisim $AB - Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & vicissim $AB - Kk$ ad AK ut Kk ad CA, ideoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, ([f]) cùm AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut $AB\,q$. Et simili argumento erunt $Kk - Ll$, $Ll - Mm$, &c. ut Kk *quad.* Ll *quad.* &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata sunt ut earundem differentiæ (†); & idcirco cùm quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum diffe-

(d) * *Et resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis*; dato nempe temporis momento, (1. 15.)

(e) * *Et erit A B ad K k ut C K ad C A*, (per theor. 4. de hyp.)

(f) * *Undè cùm A K, & A B × C A dentur.* A K quidem (ex hyp. tempus enim in particulas innumeras æquales dividitur, quæ per lineas æquales A K, K L &c. exponuntur) & A B × C A (*per theor. 4. de hyp.*)

(†) * Scilicet ex naturâ Hyperbolæ inter suas Asymptotos, fluxiones ordinatarum sunt ut earum ipsarum ordinatarum qua-differentiæ, (g) ſimilis erit ambarum progreſſio. (h) Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis *AK* exponatur per lineam *AB*, & velocitas initio ſecundi *KL* per lineam *Kk*, & longitudo primo tempore deſcripta per aream *AKkB*; velo-



citates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes *Ll*, *Mm*, &c. & longitudines deſcriptæ per areas *Kl*, *Lm*, &c. Et compoſitè, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum *A M*, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum *A M m B*. Concipe jam tempus *A M* ita dividi in partes *A K*, *KL*, *LM*, &c. ut ſint *CA*, *CK*, *CL*, *CM*, &c. in progreſſione geometricâ; & (i) erunt partes illæ in eâdem progreſſione, & (k) velocitates *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. in progreſſione eâdem inverſâ, (l) atque ſpatia deſcripta *A k*, *Kl*, *L m*, &c. æqualia. *Q. E. D.*

Corol.

quadrata; Æquatio enim Hyperbolæ inter ſuas Aſymptotos eſt $xy = a^2$; Æquatio fluxionalis $xdy + ydx = 0$; & $dy = -\frac{ydx}{x}$, cùm verò ſit $\frac{y}{a^2} = \frac{1}{x}$, fit $dy = \frac{yydx}{a^2}$, cùm ergo dx ſit fluxio ſibi ſemper æqualis, & a^2 ſit quantitas conſtans, eſt dy ut $-yy$.

(g) * *Similis erit ambarum progreſſio*; & ideo velocitates ſingulis temporum æqualium A K, K L, L M &c. initiis exponi poſſunt per lineas A B, K k, L l &c.

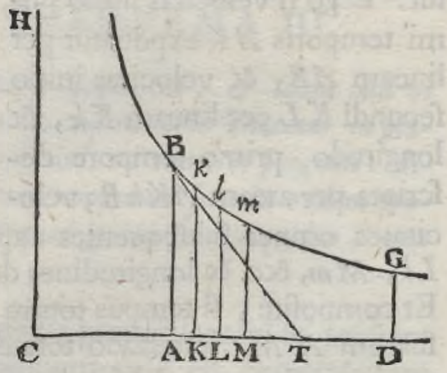
(h) * *Quo demonſtrato, conſequens eſt ut areæ* A B K k, K k l L, L l m M, &c. *ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus* A B, K k, L l &c., tempuſculis A K, K L, L M &c., *deſcribuntur* (14). 77.

(i) 78. * *Et erunt partes illæ* A K, K L, L N, &c. quæ ſunt differentiæ linearum CA, CK, CL, CM, &c. in eâdem progreſſione. Differentiæ enim cujuſvis progreſſionis geometricæ, ſunt in eâdem progreſſione geometricâ. Nam cùm ſit C A : C K = C K : C L = C L : C N &c., erit auferendo antecedentia ex antecedentibus & conſequentia ex conſequentibus C A : C K = A K : K L = K L : L M &c.

(k) * *Et velocitates A B, K k, L l, M m &c., in progreſſione eâdem inverſâ.* Siquidem (*per theor. 4. de hyp.*) eſt A B ut C A, inverſè, K k ut C K inverſè.

(l) * *Atque ſpatia deſcripta*, A B k K, K k l L, L l m M &c., æqualia (380. lib. 1.)

Corol. 1. Patet ergo quòd, si tempus exponatur per asymptoti partem quamvis *AD*, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam *AB*; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam *DG*, & spatium totum descriptum per aream hyperbolicam adjacentem *ABGD*; necnon spatium, quod corpus aliquod eodem tempore *AD*, velocitate primâ *AB*, in medio non resistente describere posset, (m) per rectangulum $AB \times AD$.



Corol. 2. Unde datur spatium in medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi *AB* in medio non resistente simul describi posset, ut est area hyperbolica *ABGD* ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol.

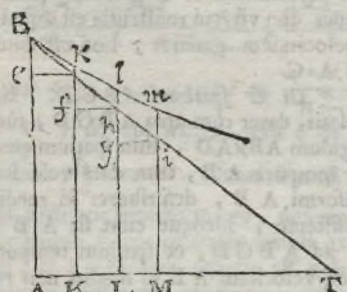
(m) 79. * *Per rectangulum* A B × A D. Si enim velocitas A B, manet eadem, tempore AK, describet corpus spatium AB×AK, dum in medio resistente describit spatium A B k K, tempore K L velocitate A B describet spatium A B × K L, dùm in medio resistente describit spatium K k l L, & ità deinceps (14. lib 1.); Quare tempore A M velocitate primâ A B in medio non resistente describet corpus spatium A B × (A K + K L + L M) = A B × A M; & tempore A D, spatium A B × A D. Et quoniam ipso motûs initio, est area ABkK, æqualis rectangulo A B × A K, atque spatia in medio resistente & in medio non resistente descripta temporis momento A K, sunt etiam æqualia, liquet spatium in medio resistente descriptum tempore quovis A D, esse ad spatium eodem tempore in medio non resistente descriptum velocitate A B, ut est area hyperbolica A C G D ad rectangulum A B × A D.

80. Ex corollario primo sequitur, tempore infinito spatium infinitum describi in medio quod resistit in ratione quadrati velocitatis. Non enim evanescet G D, hoc est, velocitas tota extincta non erit, nisi infinita evadat recta A D, hoc est nisi tempus motûs sit infinitum, tuncque infinita fit area A B G D, seu spatium descriptum est infinitum.

Corol. 3. Datur etiam reſiſtentia medii, ſtatuendo eam ipſo motûs initio æqualem eſſe vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore *A C*, in medio non reſiſtente, generare poſſet velocitatem *A B*. Nam ſi ducatur *B T* quæ tangat hyperbolam in *B*, & occurrat aſymptoto in *T*; (n) recta *A T* æqualis erit ipſi *A C*, & (o) tempus exponet, quo reſiſtentia prima uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem totam *A B*.

Corol. 4. (p) Et inde datur etiam proportio hujus reſiſtentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol.



(n) * *Recta A T æqualis erit ipſi A C.* (Per theor. 1. de Hyp.)

(o) * *Et tempus exponet.* Ordinatæ K k, L l, M m, &c. rectæ B T, occurrant in k, h, i, &c. ex punctis k, h, i, demiſſa ſint ad A B, K k, L l, &c. perpendicula K e, h f, i g, &c. & ſumptis temporibus quam minimis A k, k L, L M, æqualibus erunt B e, k f, h g æquales, ſed reſiſtentia prima temporis momento A K, tollit velocitatem A B — K k, ſeu B e, & eadem uniformiter continuata temporis momento K L, ſive A K, tolleret etiam velocitatem k f = B e, & temporis momento L M, ſeu A K, velocitatem g h = B e, atque ità deinceps; Quarè reſiſtentia prima uniformiter continuata tempore A T tolleret velocitatem totam A B, quia A B æqualis eſt omnibus differentiis B e, k f, g h, &c. uſque ad T; vis autem centripeta quæ tempore A K, producit velocitatem B e, æqualis eſt vi quæ eodem temporis momento eandem velocitatem B e extinguit, ſeu æqualis eſt reſiſtentiæ primæ, & illa vis centripeta uniformis manens toto tempore A T, totam velocitatem A B, produceret, quam reſiſtentia prima uniformis manens eodem tempore extingueret; ergò reſiſtentia prima æqualis eſt vi uniformi centripetæ quæ in cadente corpore, tempore A T ſive A C, in medio non reſiſtente generare poſſet velocitatem A B. 80.

(p) * *Et indè datur etiam proportio.* Sunt enim vires centripetæ uniformes ut velocitates quas dato tempore producunt (13. *lib.* 1.) & ideò erit reſiſtentia prima ad gravitatem ut velocitas quam producit vis centripeta uniformis cui reſiſtentia illa æqualis ſupponi poteſt, ad velocitatem quam vis gravitatis eodem tempore generat.

Corol. 5. Et vice versâ, ſi datur proportio reſiſtentiæ ad datam quamvis vim centripetam; (q) datur tempus AC, quo vis centripeta reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem quamvis AB: & inde datur punctum B per quod hyperbola aſymptotis CH, CD, deſcribi debet; ut (r) & ſpatium $ABGD$, quod corpus incipiendo motum ſuum cum velocitate illâ AB, tempore quovis AD, in medio ſimilari reſiſtente deſcribere poteſt.

(q) *Datur tempus A C quo vis reſiſtentiæ æqualis generare poſſit velocitatem A B.* Si enim detur vis quædam centripeta, dabitur tempus quo velocitatem A B generare poteſt. Tempora autem quibus diverſæ vires centripetæ eamdem velocitatem generare poſſunt, ſunt inversè ut illæ vires; Ergo ſi datur ratio vis centripetæ cui reſiſtentia eſt æqualis ad aliam vim datam, dabitur ratio temporis quo hæc vis velocitatem A B generare poteſt ad tempus quo vis, cui reſiſtentia eſt æqualis eam velocitatem generat, hoc eſt datur tempus A C.

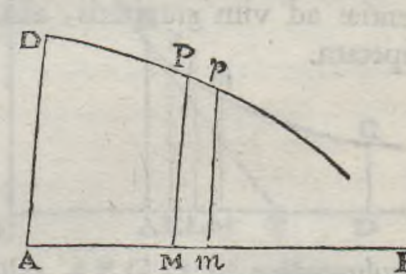
(r) * *Ut & ſpatium A B G D.* His enim datis, datur tùm area A B G D, tùm rectangulum AB×AD, tùm ſpatium quod corpus tempore A D, cum datâ velocitate uniformi A B, deſcriberet in medio non reſiſtente, ideóque cum ſit A B × A D, ad A B G D, ut ſpatium tempore A D & velocitate A B in medio non reſiſtente deſcriptum ad ſpatium eodem tempore deſcriptum in medio reſiſtente (*per cor.* 2.) hoc ſpatium dabitur.

81. *Scholium.* Hujus propoſitionis conſtructio ad Logarithmicam reduci facilè poſſet; ſed id relinquimus lectoris arbitrio, generalis problematis quod ſequitur, ſolutionem analyticam tradituri, ut inventionis fons ipſe aperiatur.

PROBLEMA.

82. Definire motum corporis ſolâ vi inſitâ lati in medio quod reſiſtit in ratione compoſitâ ex ſimplici ratione denſitatis medii, & quâvis ratione multiplicatâ celeritatis mobilis.

E loco A egrediatur corpus cum veloci-



tate datâ c & tempore t deſcribat rectam AM $= s$, ſitque ejus velocitas in M $= v$ denſitas medii in eodem loco $= k$, & reſiſtentia r erit (17.) $r\,ds = -v\,dv$. Ponatur reſiſtentia $r = \frac{kv^n}{a^n}$, ſitque a quantitas data, & habebitur $\frac{kv^n ds}{a^n} = -v\,dv$, & hinc $k\,ds = -a^n v^{1-n} dv$. Per punctum M, erigatur ad A M, perpendiculum M P quod exponat medii denſitatem k in loco M, ſitque DPp curva quam punctum P perpetuò tangit, & erecto altero perpendiculo m p priori M P infinitè propinquo ut ſit M m $= ds$, erit elementum M P p m $= k\,ds = -a^n v^{1-n} dv$, ſumptiſque fluentibus, area A D P M $= \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n}$; Quia verò evaneſcente areâ A D P M, evaneſcit quoque s, & ſit $v = c$, erit $0 = \frac{Q - a^n c^{2-n}}{2-n}$, & ideo conſtans $Q = a^n c^{2-n}$, atque ità A D P M $= \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$. Porrò ſi denſitas k, ſeu P M, eſt ut functio quævis ſpatii deſcriptis s ſive A M, poterit curva D P p deſcribi, ac proindè in hâc Hypo-

Hypotheſi dato ſpatio deſcripto, dabitur per quadraturam areæ A D P M, velocitas, & contrà datâ velocitate dabitur area A D P M, & hinc dabitur ſpatium deſcriptum A M, inde etiam (14. *lib.* 1.), datâ velocitate aut ſpatio dabitur tempus t, & contrà.

83. Si $n=2$, fit $2-n=0$, & ideò reſumenda eſt æquatio MPpm $=-a^n v^{1-n} dv = -\frac{a^2 dv}{v}$, quæ, ſumptis fluentibus, abit in hanc A D P M $= Q - a^2 L.v$, & quia poſitâ areâ A D P M $=0$, fit $v=c$, erit $Q=a^2 L.c$, ideoque A D P M $= a^2 L.c - a^2 L.v = a^2 L.\frac{c}{v}$. Sit A D P M $=b$, logarithmus numeri $h=1$, ſeu $L.h=1$, erit $b\,L.h = a^2 L.\frac{c}{v}$, & $\frac{b}{a^2}\times L.h = L.\frac{c}{v}$, ſeu $L.h^{\frac{b}{aa}} = L.\frac{c}{v}$, ac proindè $h^{\frac{b}{aa}} = \frac{c}{v}$, & $v = \frac{c}{h^{\frac{b}{aa}}}$. Quarè dato ſpatio, dabitur velocitas, & hinc dabitur tempus (14) & contrà.

84. Sit denſitas uniformis ſeu $k=1$, erit $k\,ds = ds = -a^n v^{1-n} dv$, ſumptiſque fluentibus $s = \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n} = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$.

Undè reperitur $v = \frac{[a^n c^{2-n} + (n-2)s]^{\frac{1}{2-n}}}{a^{\frac{n}{2-n}}}$.

Invenitur tempus per formulam $dt = \frac{ds}{v} = -\frac{a^n v^{1-n} du}{v} = -a^n v^{-n} dv$. Et ſumptis fluentibus, fit $t = \frac{Q - a^n v^{1-n}}{1-n} = \frac{a^n c^{1-n} - a^n v^{1-n}}{1-n}$, quia poſito $t=0$, fit $v=c$, & proindè $Q = a^n c^{1-n}$.

85. Si $k=1$, & $n=1$, hoc eſt, ſi denſitas eſt uniformis & reſiſtentia ut velocitas erit (84) $s = ac - av$; & quia (*ibid.*) $dt = -a^n v^{-n} dv = -\frac{a\,dv}{v}$, erit $t = Q - a L.v = a L.c - a L.v = a L.\frac{c}{v}$, quod poſito tempore $t=0$, fiat $v=c$ & proindè $Q = a L.c$.

86. Si $k=1$, & $n=2$, erit (84) $t = \frac{a^2 c - a^2 v}{cv}$, & quia (ibid.) $ds = -a^n v^{1-n} dv = -\frac{a^2 dv}{v}$, erit $s = Q - a^2 L.v = a^2 L.c - a^2 L.v = a^2 L.\frac{c}{v}$.

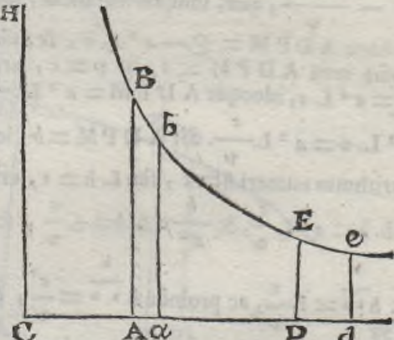
87. Si in æquatione ſpatii & velocitatis ſuprà inventâ, velocitas v, ſupponatur $=0$, erit $s = \frac{a^n c^{2-n}}{2-n}$, ſi n eſt numerus binario minor, at ſi n eſt numerus binario major, cum ſit $s = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n} = \frac{a^n}{2-n}\times c^{2-n} - v^{2-n}$ ut loco $2-n$, quæ eſt quantitas negativa, expreſſio $n-2$, quæ eſt poſitiva, ſubſtitui poſſit, fiet $s = -\frac{a^n}{n-2}\times\frac{1}{c^{n-2}} - \frac{1}{v^{n-2}} = -\frac{a^n}{n-2}\times\frac{v^{n-2} - c^{n-2}}{c^{n-2} v^{n-2}} = \frac{a^n}{n-2}\times\frac{c^{n-2} - v^{n-n}}{c^{n-2} v^{n-2}}$; ſi fiat ergo $v=o$ erit $s = \frac{a^n \times c^{n-2}}{n-2\times o} = \infty$; & ubi $n=2$, erit (86) $s = a^2 L.\frac{c}{o} = \infty$. Quarè ſi n eſt numerus poſitivus binario minor, deſcripto ſpatio aliquo finito velocitas omnis extinguitur; at ſi n binario æqualis eſt vel major, ſpatium infinitum conficitur, priuſquam velocitas evaneſcat. 87.

88. Si in æquationibus temporis & velocitatis, velocitas v evadat $=0$, erit (84) $t = \frac{a^n c^{1-n}}{1-n}$, ſi n eſt numerus unitate minor, at erit $t=\infty$, ſi n eſt unitate major, & (85) $t = a L.\frac{c}{0} = \infty$, ubi $n=1$. Quapropter ſi numerus poſitivus n eſt unitate minor, velocitas tempore finito extinguitur, ſpatio etiam finito deſcripto (87). Si n eſt unitati æqualis vel ipſâ major, velocitas nonniſi tempore infinito extingui poteſt, & ſpatium finitum eſt, ſi n eſt numerus binario minor, infinitum verò, ſi n binario æqualis vel major (87.).

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. VI. THEOR. IV.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora ſphærica homogenea & æqualia, reſiſtentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, & ſolis viribus inſitis incitata, temporibus quæ ſunt reciproce ut velocitates ſub initio, deſcribunt ſemper æqualia ſpatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Aſymptotis rectangulis *CD*, *CH* deſcriptâ hyperbolâ quâvis *B b E e* ſecante perpendicula *A B*, *a b*, *D E*, *d e*, in *B*, *b*, *E*, *e*, (s) exponantur velocitates initiales per perpendicula *A B*, *D E*, & tempora per lineas *A a*, *D d*. Eſt ergo ut *A a* ad *D d* ita (per hypotheſin) *D E* ad *A B*, & ita (ex (t) naturâ hyperbolæ) *C A* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. (u) Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc eſt, ſpatia deſcripta æquantur inter ſe, & velocitates primæ *A B*, *D E* ſunt ultimis *a b*, *de*, & propterea dividendo partibus etiam ſuis amiſſis *A B* — *a b*, *D E* — *d e* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora ſphærica quibus reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ ſunt ut motus primi directè & reſiſtentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, & ſpatia deſcribent temporibus iſtis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

(x) Namque motuum partes amiſſæ ſunt ut reſiſtentiæ & tem-

(s) * *Exponantur velocitates initiales &c.* Cùm enim corpora duo ſimilia homogenea & æqualia ſupponantur, eorum motus conſiderari poſſunt tanquam motus unius ejuſdemque corporis variis celeritatis gradibus acti (*ut in prop. 5.*) ideóque (*per coroll. 1. prop. 5.*) velocitates initiales exponi poſſunt per lineas A B, D E, tempora per lineas A a, D d, velocitates in fine illorum temporum reſiduæ per lineas a b, d e, & ſpatia his temporibus deſcripta per areas Hyperbolicas A B b a, D E e d.

(t) * *Ex naturâ Hyperbolæ.* (Per theor. 4. de Hyperb.)

(u) * *Ergò areæ A B b a, D E e d,* (378. Lib. 1.)

(x) * *Namque motuum partes amiſſæ &c.* (2).

tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directè & reſiſtentia inversè. Quare temporum particulis in eâ ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, (y) ideoque retinebunt velocitates velocitatibus ſuis primis ſemper proportionales. Et (z) ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia, quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

(a) *Corol.* 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportio-

(y) * *Ideoque retinebunt velocitates* in ratione primâ, ob datas corporum maſſas (6. lib. 1.)

(z) * *Et ob datam velocitatum rationem* (12.)

89. Tota propoſitionis hujus demonſtratio per Analyſim hoc modo exponitur. Sit globi cujuſvis maſſa m, velocitas data initio motûs c, in fine temporis t ſit v, reſiſtentia data initio motûs r, & quia ejuſdem corporis reſiſtentiæ in diverſis locis ſunt ut velocitatum quadrata (*per Hyp.*) erit cc, ad vv, ut r, ad reſiſtentiam elapſo tempore t, quæ proindè erit $\frac{rvv}{cc}$. Sed (2) reſiſtentia $\frac{rvv}{cc}$ eſt ut motûs decrementum $-m\,dv$ directè, & temporis momentum dt, inversè, hoc eſt, $\frac{rvv}{cc} = -\frac{m\,dv}{dt}$, & hinc $dt = -\frac{mccdv}{rvv}$, ſumptiſque fluentibus $t = Q + \frac{mcc}{rv}$. Ponatur $t = 0$, & fiet $v = c$, adeóque $Q = -\frac{mc}{r}$, quo valore ſubſtituto fit $t = \frac{mcc = mcv}{rv}$. Capiatur tempus t, ut motus primus mc, directè & reſiſtentia prima r, inversè, hoc eſt t ut $\frac{mc}{r}$, & erit $\frac{mc}{r}$ ut $\frac{mcc - mcv}{rv}$, ideóque mcv, ut $mcc - mcv$, & dividendo per c, mv ut $mc - mv$; & compoſitè fiet mc, ut $mc - mv$, id eſt, motus amiſſus $mc - mv$ ut motus primus mc; & hinc ob datam maſſam m, erit etiam c, ut $c - v$, id eſt, velocitas amiſſa $c - v$, ut velocitas prima c; indè etiam erit c, ad $c - c + v$, ſeu v, hoc eſt velocitas prima c, ad reſiduam v, in ratione datâ. Jam ſi ſpatium tempore t deſcriptum dicatur s, erit (13) $ds = v\,dt$, & quia v eſt ut data c, erit ds ut $c\,dt$, ſumptiſque fluentibus ob datam c, fiet s ut ct. Q. E. D. 89.

90. Quoniam ſpatium s eſt ut ct, & t ut $\frac{mc}{r}$, erit etiam s ut $\frac{mcc}{r}$; globi cujus maſſa m diameter ſit D, & datâ globi denſitate erit maſſa m, ut volumen (2. *lib.* 1.) hoc eſt, ut diametri cubus D^3; Quare erit s ut $\frac{D^3cc}{r}$. Si prætereà datâ velocitate c, reſiſtentia r eſt ut diametri D, dignitas cujus index n, hoc eſt r ut D^n, & proindè velocitate non datâ, reſiſtentia r, ut $D^n cc$, erit s ut $\frac{D^3cc}{D^n cc}$, ſeu ut D^{3-n}. Ex quibus patent corollaria quæ ſequuntur.

(a) * *Cor.* 1. Nam in Hypotheſi corollarii hujus eſt $n = 2$. adeóque s ut D.

tionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujusque erit ut ejus velocitas & massa conjunctim, id est, ut velocitas & cubus diametri; resistentia (*per hypothesin*) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (*per hanc propositionem*) est in ratione priore directè & ratione posteriore inversè, id est, ut diameter directè & velocitas inversè; ideoque spatium, tempori & velocitati proportionale, est ut diameter.

(b) *Corol.* 2. Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum: spatia quibus globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & si resistentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, sint ut D^n & E^n: spatia quibus globi, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei describendo spatia ipsis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac sub initio.

(c) *Corol.* 4. Quòd si globi non sint homogenei, spatium à globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim, sub pari velocitate, major est in ratione densitatis, & tempus (*per hanc propositionem*) augetur

(b) * *Cor.* 2. In hypothesi corollarii hujus est $n = \frac{3}{2}$, ideóque s ut $D^{3-\frac{3}{2}}$, seu ut $D^{\frac{3}{2}}$.

(c) * *Cor.* 4. Sit globi m densitas δ, adeóque (2 *lib.* 1.) massa m ut δD^3, & hinc (90) s ut $\frac{\delta D^3 cc}{r}$. Quarè si ponatur resistentia r, ut $D^n cc$, erit s ut δD^{3-n}, hoc est, spatium s, quod datâ densitate δ, erat ut D^{3-n}, augeri debet in ratione densitatis δ.

tur in ratione motus directè, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

(d) *Corol.* 5. Et ſi globi moveantur in mediis diverſis; ſpatium in medio, quod cæteris paribus magis reſiſtit, diminuendum erit in ratione majoris reſiſtentiæ. Tempus enim (*per hanc propoſitionem*) diminuetur in ratione reſiſtentiæ auctæ, & ſpatium in ratione temporis.

(e) LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum ſingulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coëfficientia continuè ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuſcunque in arithmeticâ per multiplicationem, diviſionem, & extractionem radicum; in geometriâ per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, ſine additione & ſubductione generatur. Ejuſmodi quantitates ſunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & ſimiles. Has quantitates, ut indeterminatas & inſtabiles, & quaſi motu fluxuve perpetuo creſcentes vel decreſcentes, hic conſidero; & earum incrementa vel decrementa momentanea ſub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis ſeu affirmativis, ac decrementa pro ſubductitiis ſeu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non ſunt momenta, ſed quantitates ipſæ ex momentis genitæ. Intelligenda ſunt principia jamjam naſcentia finitarum magnitudinum. Neque enim ſpectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum: ſed prima naſcentium proportio.

(d) * *Cor.* 5. Reſiſtentia r, quæ antè erat ut $D^{n}cc$, augeatur in ratione quâvis a, ſeu ſit r ut $aD^{n}cc$, & quia s eſt ut $\frac{\delta D^{3}cc}{r}$, (*cor.* 4.) fiet s ut $\frac{\delta D^{3}cc}{aD^{n}cc}$, ſeu ut $\frac{\delta D^{3-n}}{a}$, ſpatium igitur diminuendum eſt in ratione majoris reſiſtentiæ. 90.

(e) * *Lem.* 2. Totum iſtud Lemma num. 137. & ſequentibus Lib. 1. fusè expoſitum videat lector.

tio. Eodem recidit ſi loco momentorum uſurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hiſce proportionales. (f) Lateris autem cujuſque generantis coefficiens eſt quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur ſenſus (g) lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum quarumcunque perpetuo motu creſcentium vel decreſcentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB + bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuſcunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ ſive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & ſic in cæteris. Demonſtratur verò lemma in hunc modum.

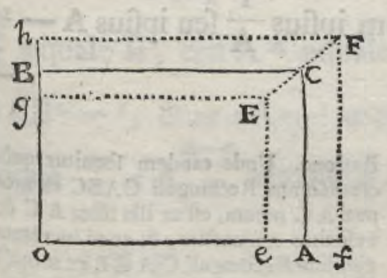
Caſ. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi

(f) *Lateris autem.* Sic lateris x, in quantitate genitâ $x^n y^m$ poſiti, coefficiens eſt $\frac{x^n y^m}{x}$, ſeu $x^{n-1} y^m$.

(g) * *Senſus Lemmatis eſt, ut, ſi quantitatum* A, B, C *momenta dicantur* a, b, c, ità ut dum A fit $A + a$, B evadat $B + b$, C evadat $C + c$ &c., *momentum vel mutatio geniti rectanguli* AB, *erit* $aB + bA$ &c., vel ſi loco litterarum A, B, C, &c. utamur litteris minuſculis x, y, z &c. quibus variabiles quantitates conſuevimus ſignificare, & loco a, b, c, &c. ſcribamus dx, dy, dz &c. ſenſus Lemmatis eſt momentum ſeu fluxionem rectanguli xy, eſſe $ydx + xdy$, fluxionem ſolidi xyz, eſſe $yzdx + xzdy + xydz$, & genitarum quantitatum x^2, x^3, x^4, $x^{\frac{1}{2}}$ &c. momenta eſſe $2xdx$, $3x^2dx$, $4x^3dx$, $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ &c. reſpectivè; & genitæ $x^n y^m$, momentum eſſe, $ny^m x^{n-1}dx + mx^n y^{m-1}dy$ &c.

ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit A $-\frac{1}{2}a$ in B$-\frac{1}{2}b$, seu AB$-\frac{1}{2}a$B$-\frac{1}{2}b$A$+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit A$+\frac{1}{2}a$ in B$+\frac{1}{2}b$ seu AB$+\frac{1}{2}a$B$+\frac{1}{2}b$A$+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & (h) manebit excessus aB$+b$A. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum aB$+b$A. *Q. E. D.*

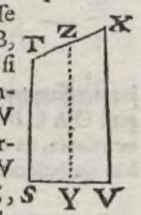
Cas. 2. Ponatur AB semper æquale G, & contenti ABC seu GC momentum (*per cas.* 1.) erit gC$+c$G, id est (si pro G & g scribantur AB & aB$+b$A) aBC$+b$AC $+c$



(h) * *Et manebit excessus a* B $+$ *b* A.

1us. *Casus.* Sit Rectangulum OABC sub duabus variabilibus OA, OB continuè crescentibus; sumantur hinc inde ab A partes æquales Ae, Af; & a B partes æquales Bg, Bh, ita ut, si a & b sint quantitates momentis linearum OA, OB proportionales sit ef$=a$, & gh$=b$: Compleantur Rectangula OgEe, OhFf, ducatur FE, quæ transibit per C punctum concursus linearum AC, BC (ob parallelas, & lineas ef & gh similiter, nempe bifariam, sectas in A & B). Dico quòd summa Trapeziorum EFef & EFgh æqualis erit momento Rectanguli OACB; obtinetur verò Trapeziorum summa, sumendo differentiam Rectangulorum OeEg, OfFh, quæ est Of$\times$Oh$-$Oe$\times$Og, sive $\overline{OA+Af}\times\overline{OB+Bh}-\overline{OA-Ae}\times\overline{OB-Bg}$, & vocando OA, A; OB, B; Af$=$Ae$=\frac{1}{2}a$, Bh$=$Bg$=\frac{1}{2}b$ differentia Rect. erit $\overline{A+\frac{1}{2}a}\times\overline{B+\frac{1}{2}b}-\overline{A-\frac{1}{2}a}\times\overline{A-\frac{1}{2}b}=AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab-AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA-\frac{1}{4}ab=aB+bA$. 90.

Ut verò probetur summam Trapeziorum EFef & EFgh æqualem esse momento Rectanguli OACB, observandum primò: Quòd si lineæ quævis ST, VX, utcumque inæquales, in lineam SV sint perpendiculares jungaturque TX, & in medio lineæ SV erigatur perpendicularis YZ,



erit Trapezium STXV æquale Rectangulo SV$\times$YZ: Itaque Trapezium EFef erit æquale Rectangulo AC$\times$ef, & Trapezium EFgh æquale Rectangulo BC$\times$gh. Præterea quoniam ef & gh sunt momentis linearum OA, OB proportionales, hoc est, proportionales velocitatibus quibus lineæ OA, OB crescunt, sive, quod idem est, celeritatibus quibus, dum Rectangulum OACB crescit, lineæ AC, BC antrorsum feruntur, Rectangula AC$\times$ef & BC$\times$gh, erunt ut lineæ illæ AC, BC & earum velocitates conjunctim.

Mutatio autem geniti Rectanguli CACB proportionalis est causæ quæ eam producit, ea autem causa est motus linearum variabilium AC, BC quo antrorsum feruntur dum lineæ OA, OB crescunt, & quamvis dum illæ lineæ AC, BC moventur, interim lineæ OA, OB crescant, incrementi hujus nulla habenda est ratio dum Rectanguli fluxionem sive incrementum nascens consideramus, etenim in ipso hujus incrementi nascentis ortu illæ productiones linearum OA, OB nihil planè sunt, & cùm primum sunt aliquid jam aliæ AC, BC prioribus majores

$+ c$ A B. Et par eſt ratio contenti ſub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

Caſ. 3. Ponantur latera A, B, C ſibi mutuo ſemper æqualia; & ipſius A^2, id eſt rectanguli A B, momentum $a\,B + b\,A$ erit $2\,a\,A$, ipſius autem A^3, id eſt contenti A B C, momentum $a\,BC + b\,AC + c\,AB$ erit $3\,a\,A^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuſcunque A^n eſt $n\,a\,A^{n-1}$. *Q. E. D.*

Caſ. 4. Unde cùm $\frac{1}{A}$ in A ſit 1, momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ductum in A, unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a, (i) erit momentum ipſius 1, id eſt, nihil. Proinde momentum ipſius $\frac{1}{A}$ ſeu ipſius A^{-1} eſt

$- a$

jores aſſumuntur, ergo momentum Rectanguli O A C B ſive ejus mutationis momentanea cauſa, ex lineis A C & BC & velocitatibus quibuſcum feruntur, determinanda eſt.

Sint verò Rectangula M N m n, P R p r, quorum lineæ M N, P R ſint æquales, concipiantur aliæ lineæ hiſce etiam æquales quæ ab M N & P R profectæ motu uniformi & parallelo ſecundum lineas M m & P p ferantur, ita ut eodem tempore ad m n & p r perveniant, manifeſtum eſt (*per* 1. 6i. *Elem.*) areas M n, P r fore ut lineæ M m P p, & pariter velocitates linearum ab M N & P R profectarum in eadem fore ratione, ideoque areas M n, Pr, fore in ratione earum velocitatum. Quòd ſi lineæ N M, P R ſint inæquales, areæ erunt ut lineæ illæ MN, PR & earum velocitates conjunctim, & quævis incrementa Rectangulorum NMmn, P R p r æquali tempore facta in eadem ratione erunt, ideoque & naſcentia incrementa erunt in eâ Ratione. Unde tandem ſequitur quòd incrementum Rectanguli OABC ex motu lineæ A C natum, eſt ut illa linea A C & ejus velocitas conjunctim, & quod incrementum ejuſdem Rectanguli O A C B ex motu lineæ B C natum, eſt ut illa linea B C & ejus velocitas conjunctim, ideoque totum momentum Rectanguli O A C B eſt ſumma factorum linearum AC & B C per velocitates quibus feruntur reſpectivè ductarum, ideoque ut ſumma Rectangulorum A C × e f & B C × g h, ſive denique ut ſumma Trapeziorum E F e f, E F g h. Q. E. D.

2us. *Caſus.* Facilè hæc applicantur ad eos caſus ubi vel ambæ lineæ O A, O B decreſcunt, vel unâ creſcente altera decreſcit, quippe varianda ſunt ſolummodo ſigna juxta has hypotheſes.

Vide aliam hujus caſûs demonſtrationem (num. 160. lib. 1.).

(i) * *Erit momentum ipſius* 1, *id eſt nihil.* Ponatur enim $\frac{1}{A} = B$ & erit $\frac{1}{A} \times A = AB = 1$, ſed momentum rectanguli AB eſt $a\,B + b\,A$ (*per caſ.* 1.) & momentum conſtantis 1 nullum eſt; Quarè erit $a\,B + b\,A = 0$, & hinc $b\,A = - a\,B = - \frac{a}{A}$, undè momentum b ipſius B ſeu $\frac{1}{A}$ eſt $b = \frac{-a}{A^2}$

$= - a$

$\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cùm $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n unâ cum $\frac{1}{A^n}$ in $n\,a\,A^{n-1}$ erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{n\,a}{A^{n+1}}$. *Q.E.D.*

Cas. 5. Et cùm $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2\,A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per cas. 3: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2\,A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2}\,a\,A^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque $m\,a\,A^{m-1}$ æquale $n\,b\,B^{n-1}$, & $m\,a\,A^{-1}$ æquale $n\,b\,B^{-1}$ seu $n\,b\,A^{-\frac{m}{n}}$, ideoque $\frac{m}{n}\,a\,A^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur genitæ cujuscunque $A^m\,B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, unà cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $m\,a\,A^{m-1}\,B^n + n\,b\,B^{n-1}\,A^m$; idque sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, si terminus unus datur, (k) momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem ter-

$= -a\,A^{-2}$. Similiter si ponatur $\frac{1}{A^n} = B$, & ideò $\frac{1}{A^n} \times A^n = A^n\,B = 1$, erit per cas. 3. & 1. $n\,a\,A^{n-1}\,B + b\,A^n = 0$ & $b\,A^n = -n\,a\,A^{n-1}\,B = \frac{-n\,a\,A^{n-1}}{A^n} = \frac{-na}{A}$, atquè adeò b, seu momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$, erit $\frac{-n\,a}{A^{n+1}}$. Simili modo patent casus 5. & 6. 90.

(k) * *Momenta terminorum reliquorum.* Quoniam enim A, B, C, D, E, F, sunt continuè proportionales, erit $D : C = C : B = \frac{C\,C}{D} = C\,C\,D^{-1}$ & similiter invenitur $A = \frac{C^3}{D^2} = C^3\,D^{-2}$, $E = \frac{D^2}{C}$, $F = \frac{D^3}{C\,C}$ &c.

 Qua-termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continuè proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut $-2A$, $-B$, D, 2 E, 3 F.

(l) *Corol.* 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

(m) *Corol.* 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciprocè ut latera.

Scholium.

In epistolâ quâdam ad D. *J. Collinium* nostratem 10. Decem. 1672. datâ, cùm descripsissem methodum tangentium quam suspicabar eandem esse cum methodo *Slusii* tum nondum communicatâ; subjunxi: *Hoc est unum particulare vel corollarium potius methodi generalis, quæ extendit se citra molestum ullum calculum, non modo* (n) *ad ducendum tangentes ad quasvis curvas sive geometricas sive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliasve curvas respicientes, verùm etiam ad resolvendum alia abstrusiora problematum genera de* (o) *curvitatibus*, (p) *areis, longitudinibus*,

Quarè ob datum C, cujus nullum est momentum, momenta reliquorum terminorum erunt (per cas. 3. & 4.) $-2dC^3D^{-3}$, $-dC^2D^{-2}$, d, $\frac{2dD}{C}$, $\frac{3dD^2}{CC}$, & multiplicando singulos terminos per $\frac{D}{d}$, manebit proportio terminorum $-2C^3D^{-2}$, $-C^2D^{-1}$, D, $\frac{2D^2}{C}$, $\frac{3D^3}{CC}$, hoc est $-2A$, $-B$, D, 2 E, 3 F. Est autem 2 numerus intervallorum inter terminum A, & terminum datum C, sicut & intervallorum inter E & C, 1 intervallum inter B & C, ac inter C & D, & 3, numerus intervallorum inter C & F. Quarè patet veritas corollarii.

(l) * *Cor.* 2. Sit $A:B = C:D$, seu $BC = AD$ & BC, rectangulum datum erit (per cas. 1.) $ad + dA = 0$, & hinc $aD = -dA$ ideóque $a : -d = A : D$.

(m) * *Cor.* 3. Sit $A^2 + B^2 = C^2$, & quadratum C^2 sit datum, erit (per cas. 3.) $2aA + 2bB = 0$, ideóque $Aa = -bB$, & proinde $a : -b = B : A$. In iis duobus corollariis necessum est ut variabili unâ crescente, decrescat altera, & idcircò dum momentum unius positivum est, alterius momentum est negativum.

(n) * *Ad ducendum tangentes* (150. 156. lib. 1.) vide Marchionis *Hospitalii* Analysim infinitè parvorum, ubi methodus illa tangentium fusè & perspicuè exponitur.

(o) *De curvitatibus* (216. lib. 1.).

(p) * *Areis, longitudinibus* &c. Hæc plurimis exemplis, tum 1°. tum 2°. libro contentis manifesta sunt. Vide tractatum NEWTONI de quadraturâ curvarum, *bus*, (q) *centris gravitatis curvarum &c. neque* (*quemadmodum* Huddenii *methodus de maximis & minimis*) *ad ſolas reſtringitur æquationes illas quæ quantitatibus ſurdis ſunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri iſti quâ æquationum exegeſin inſtituo reducendo eas ad ſeries infinitas.* Hactenus epiſtola. Et hæc ultima verba ſpectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus ſcripſeram. Methodi verò hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente. (r)

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ aſcendat vel deſcendat, & ſpatium totum deſcriptum diſtinguatur in partes æquales, inque principiis ſingularum partium (addendo reſiſtentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus aſcendit, vel ſubducendo ipſam quando corpus deſcendit) inveſtigentur vires abſolutæ; dico quòd vires illæ abſolutæ ſunt in progreſſione geometricâ.

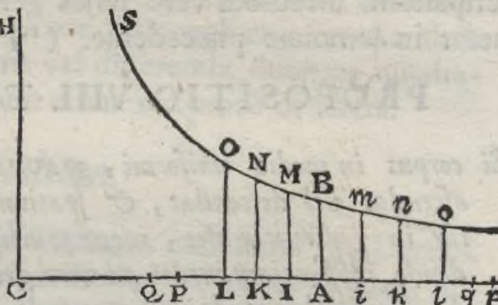
Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam *AC*; reſiſtentia per lineam indefinitam *AK*; vis abſoluta in deſcenſu corporis per differentiam *KC*; velocitas corporis per lineam *AP*, quæ ſit media proportionalis inter *AK* & *AC*,

(q) * *Centris gravitatis* (66. lib. 1.).

(r) In præcedentibus Editionibus iſtud ſcholium hoc modo ſe habebat.

In litteris quæ mihi cum Geometrâ peritiſſimo G. G. *Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cùm ſignificarem me compotem eſſe methodi determinandi maxima & minima, ducendi Tangentes, & ſimilia peragendi, quæ in terminis ſurdis æque ac in rationalibus procederet, & literis tranſpoſitis hanc ſententiam involventibus. (*Datâ æquatione quotcumque fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice verſâ*) eamdem celarem; Reſcripſit Vir Clariſſimus ſe quoque in ejuſmodi methodum incidiſſe, & methodum ſuam communicavit, à meâ vix abludentem, præterquàm in verborum & notarum formulis, & ideâ generationis quantitatum. Utriuſque fundamentum continetur in hoc Lemmate. 90.

AC, (ſ) ideoque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ; incrementum reſiſtentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam *KL*, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam *PQ*; & centro *C* aſymptotis rectangulis *CA*, *CH* deſcribatur hyperbola quævis *BNS*, erectis perpendiculis *AB*, *KN*, *LO* occurrens in *B*, *N*, *O*. Quoniam *AK* eſt ut *APq*, erit hujus momentum *KL* ut (t) illius momentum 2 *APQ*: id eſt, ut *AP* in *KC*, nam velocitatis incrementum *PQ* (*per motûs leg.* II.) proportionale eſt vi generanti *KC*. Componatur ratio ipſius *KL* cum ratione ipſius *KN*, & fiet



rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc eſt, ob (u) datum rectangulum $KC \times KN$, ut *AP*. Atqui areæ hyperbolicæ *KNOL* ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta *K* & *L*, eſt æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evaneſcens eſt ut *AP*. Componitur igitur area tota hyperbolica *ABOL* ex particulis *KNOL* velocitati *AP* ſemper proportionalibus, & (x) propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales *ABMI*, *IMNK*, *KNOL*, &c. & vires abſolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. (y) erunt in progreſſione geometricâ. *Q. E. D.* Et (z) ſimili argumento, in aſcenſu corporis, ſumen-

(ſ) * *Ideóque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ.* Ob datam AC.

(t) * *Ut illius momentum* 2 *APQ*. Cùm enim ſit $AK \times AC = AP^2$ (*per conſtr.*) erit $AC \times KL = 2\,AP \times PQ$ (*per caſ.* 1. *&* 3. *Lem.* 2.) id eſt, ob datam AC; KL eſt ut $AP \times PQ$, & quia velocitatis incrementum PQ, dato temporis momento genitum (*per mot. leg.* 2.) proportionale eſt vi generanti KC, erit KL, ut $AP \times KC$.

(u) * *Ob datum rectangulum* $KC \times KL$ (per theor. 4. de hyp.).

(x) * *Et propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt*; dato enim temporis momento, ſpatium deſcriptum eſt ut velocitas (12).

(y) * *Erunt in progreſſione geometricâ* (379. lib. 1.).

(z) * *Et ſimili argumento.* Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC, reſiſtentia per lineam indefinitam

Al,

mendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *A B m i*, *i m n k*, *k n o l*, &c. constabit quod vires absolutæ *A C*, *i C*, *k C*, *l C*, &c. sunt continuè proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *l C*, *k C*, *i C*, *A C*, *I C*, *K C*, *L C*, &c. erunt continuè proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream hyperbolicam *ABNK*; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas *AC*, *AP* & *AK* respectivè; & vice versâ. ([a])

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, ([b]) exponens est linea *A C*.

Corol. 3. Igitur si in datâ aliquâ velocitate cognoscatur resistentia medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem illam datam in subduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis ([c]) ad medii resistentiam illam cognitam.

PRO-

A l, vis absoluta velocitatem minuens in ascensu corporis per summam C l, velocitas corporis per lineam A p quæ sit media proportionalis inter A l & A C, ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ; decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam l k, & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam p q; & describatur ut suprà hyperbola S B o; Quoniam A l est ut A p^2 erit hujus momentum k l ut illius momentum 2 A p q, id est, ut A p in l C; nam velocitatis decrementum p q (*per mot. leg.* 2.) proportionale est vi generanti l C, componatur ratio ipsius k l cum ratione ipsius l o, & fiet rectangulum k l × l o ut A p × l C × l o, hoc est, ob datum rectangulum l C × l o, ut A p. Ergo, coeuntibus punctis k, l, area hyperbolica k n o l = k l × l o, est ut A p. Componitur igitur area tota hyperbolica 2 A B o l ex particulis k n o l velocitati A p semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B m i; i m n k, k n o l, &c. & vires absolutæ l C, k C, i C, A C, &c. erunt in progressione 90.
geometricâ. Q. E. D.

(a) * Simili modo si in ascensu corporis, spatium usque ad motûs extinctionem describendum exponatur per aream hyperbolicam A B n k exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas A C, A p, A k respectivè; & vice versâ.

(b) * *Exponens est linea A C.* Fiat enim A P = A C, & quia (*per constr.*) A P^2 = A K × A C, erit etiam A K = AC, ideóque coincidente ordinatâ K N, cum asymptoto C H, area hyperbolica ABNK, infinita evadet, & spatium descendendo descriptum huic proportionale erit quoque infinitum, gravitas verò, resistentia & velocitas corporis exponentur per lineam A C, eritque proinde resistentia gravitati æqualis, & propterea velocitas A C maxima.

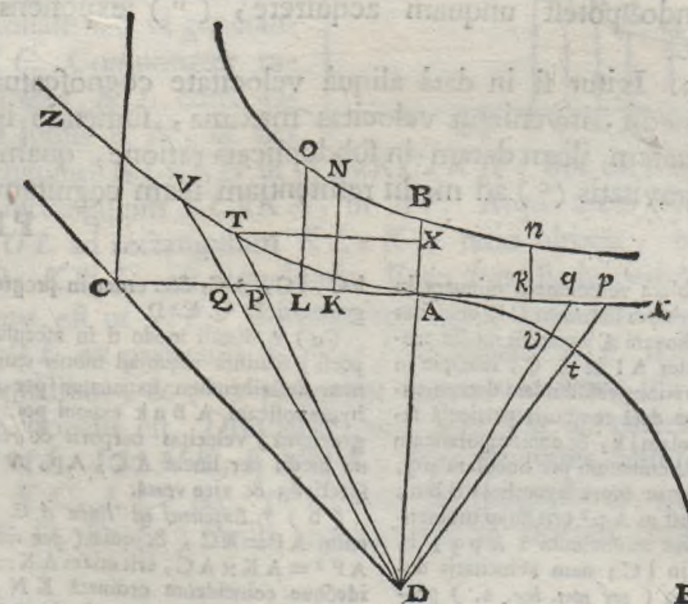
(c) * *Ad medii resistentiam illam cognitam.* Cùm enim velocitates sint in subduplicatâ ratione resistentiarum (*per hyp.*) & resistentia sit gravitati æqualis, ubi velocitas maxima est, (*per cor.* 2.)

ve-

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Positis jam demonstratis, dico quòd, si tangentes angulorum sectoris circularis & sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, & tempus omne descendendi à loco summo ut sector hyperbolæ.

Rectæ *AC*, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur *AD*. Centro *D* semidiametro *AD* describatur



tum circuli quadrans *AtE*; tum hyperbola rectangula *AVZ* axem habens *AX*, verticem principalem *A*, & asymptoton *DC*. Ducantur *Dp*, *DP*, & erit sector circularis *AtD* ut tempus omne ascendendi ad locum summum; &

velocitas maxima erit ad velocitatem datam in subduplicatâ ratione gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

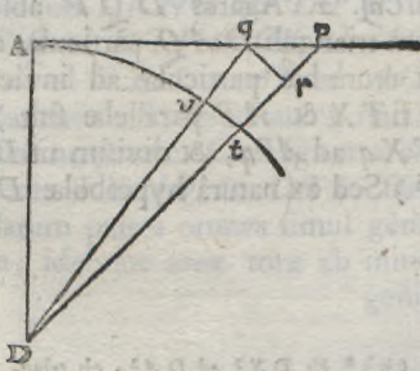
& ſector hyperbolicus ATD ut tempus omne deſcendendi à loco ſummo: Si modò ſectorum tangentes Ap, AP, ſint ut velocitates.

Caſ. 1. Agatur enim $D v q$ abſcindens ſectoris $A D t$ & trianguli $A D p$ momenta, ſeu particulas quàm minimas ſimul deſcriptas $t D v$ & $q D p$. Cùm particulæ illæ, ob angulum communem D, ſunt in (d) duplicatâ ratione laterum, erit particula $t D v$ ut $\frac{qDp \times tD \; quad.}{p \, D \; quad.}$, id eſt, ob datam $t \, D$, ut $\frac{qDp}{p \, D \; quad.}$. Sed $p \, D$ *quad.* eſt AD *quad.* $+ A \, p$ *quad.* id eſt, (e) $A \, D$ *quad.* $+ AD \times Ak$, ſeu $AD \times Ck$; & (f) qDp eſt $\frac{1}{2} \, AD \times pq$. Ergo ſectoris particula $t \, D \, v$ eſt ut $\frac{p \, q}{C \, k}$, id eſt, ut velocitatis decrementum quàm minimum $p \, q$ directè, & vis illa $C \, k$ quæ velocitatem diminuit inversè; (g) atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens. Et componendo fit ſumma particularum omnium $t \, D \, v$ in ſectore $A \, D \, t$, ut ſumma particularum temporis ſingulis velocitatis

(d) * *In duplicatâ ratione laterum.* Nam ſi ex puncto q ducatur ad D p lineola q r parallela ipſi v t, duo triangula evaneſcentia D q r, D v t ſimilia ſunt & in ratione duplicatâ laterum D q, D v, (*per prop. 19. lib. 6. Elem.*) & triangulum D q p æquale eſt triangulo D q r evaneſcente p r reſpectu D q; eſt igitur pD^2 ad tD^2, ſeu AD^2, ut triangulum q D p ad triangulum t D v, & ideo t D v $= \frac{AD^2 \times qDp}{pD^2}$, undè ob datum circuli radium A D, particula t D v eſt ut $\frac{qDp}{pD^2}$.

(e) * *Id eſt.* Nam $AC \times Ak$, ſeu $AD \times Ak = Ap^2$ (*per conſtruct. prop.* 8.) & $AD^2 + AD \times Ak = AD \times (AC + Ak) = AD \times Ck$.

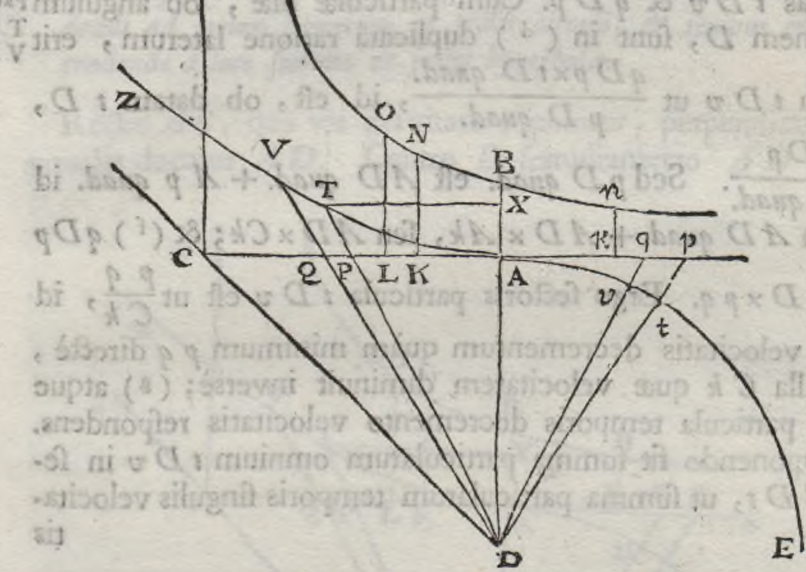
(f) * *Et q D p eſt* $\frac{1}{2}$ *A D* $\times$ *p q*, ob A D baſi p q productæ normalem.



90.

(g) * *Atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens* (18).

tis decrefcentis $A p$ particulis amiffis $p\,q$ refpondentium; ufque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc eft, fector totus $A D t$ eft ut tempus totum afcendendi ad locum fummum. *Q. E. D.*



Caf. 2. Agatur $D\,Q\,V$ abfcindens tum fectoris $D A V$, tum trianguli $D A Q$ particulas quàm minimas $T D V$ & $P D Q$, & erunt hæ particulæ ad invicem ut $D\,T\,q$ ad $D\,P\,q$, id eft (fi $T X$ & $A P$ parallelæ fint) ut (h) $D\,X q$ ad $D\,A q$ vel $T X q$ ad $A P q$, & divifim ut $D X q - T X q$ ad $D\,A q - A P q$. (i) Sed ex naturâ hyperbolæ $D X q - T X q$ eft $A D q$, & per hypo-

(h) * *Ut* DX^2 *ad* DA^2, ob triangula D T X, D P A fimilia (*per prop.* 2. *lib.* 6. *Elem.*)

(i) * *Sed ex natura hyperbolæ &c.* Quoniam (*per theor.* 2. *de hyperb.*) rectangulum $2\,\overline{AD + AX} \times AX$, eft ad quadratum ordinatæ T X, ut latus tranfverfum eft ad latus rectum, hæc verò Hyperbola eft æquilatera, erit (*per theor.* 5. *de hyperb.*) $TX^2 = 2\,\overline{AD + AX} \times AX$. Sed eft $2\,\overline{AD + AX} \times AX = DX^2 - DA^2$ (*per prop.* 6. *lib.* 2. *Elem.*) ergò $TX^2 = DX^2 - DA^2$, ac proinde $DX^2 - TX^2 = DA^2$.

(k) hypothesin APq est $AD \times AK$. Ergo particulæ sunt ad invicem ut ADq ad $ADq - AD \times AK$; id est, ut AD ad $AD - AK$ seu AC ad CK: ideoque sectoris particula TDV est $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; atque ideo (l) ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inversè; atque ideo ut particula temporis incremento respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ PQ generantur; ut summa particularum sectoris ATD, id est, tempus totum ut sector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si AB æquetur quartæ parti ipsius AC, spatium quod corpus tempore quovis cadendo describit, erit ad spatium, quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area $ABNK$, quâ spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream ATD, quâ tempus exponitur. Nam cùm sit AC ad AP ut AP ad AK, erit (*per corol.* 1. *lem.* 11. *hujus*) LK ad PQ ut $2\,AK$ ad AP, hoc est, ut $2\,AP$ ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}\,PQ$ ut AP ad $\frac{1}{4}\,AC$ vel AB; est & KN ad AC vel AD ut (m) AB ad CK; itaque ex æquo $LKNO$ ad DPQ ut AP ad CK. (n) Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rursus ex æquo $LKNO$ est ad DTV ut AP ad AC; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cùm igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta $LKNO$ & DTV sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ (†) ut spatia simul descripta, ideoque areæ totæ ab initio geni-

(k) * *Et per hypothesim* AP^2 *est* $AD \times Ak$, seu $AC \times Ak$ (*per construct. prop.* 8.)

(l) * *Ob datas* AC *&* AD. Est enim $PDQ = \frac{1}{2} AD \times PQ$, & ideò $TDV = \frac{\frac{1}{2} AD \times AC \times PQ}{CK}$.

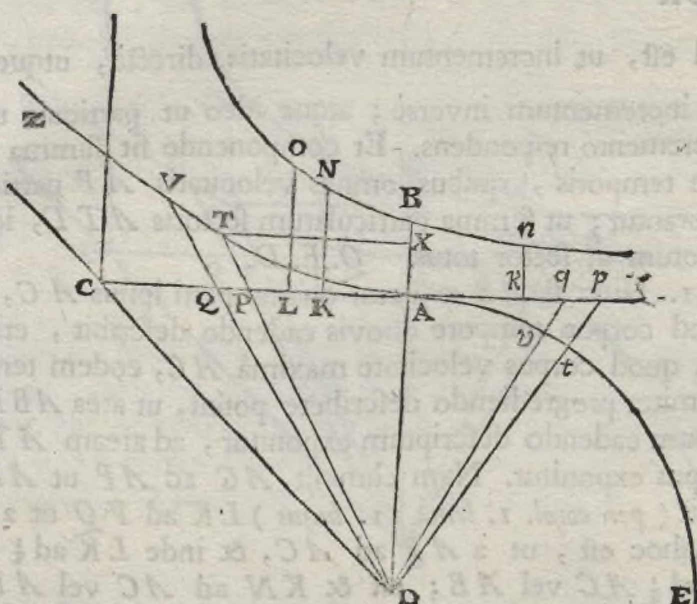
(m) * *Ut* AB *ad* CK (per theor. 90.
4. de hyperb.

(n) * *Sed erat* DPQ *ad* DTV *&c.* Suprà cas. 2.

(†) * *Ut spatia simul descripta* (11).

genitæ *ABNK* & *ATD* ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. (o) Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quòd ſpatium illud omne ſit ad



ſpatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore deſcriptum, ut eſt area *ABnk* ad ſectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum *APD* ad ſectorem hyperbolicum *ATD*.

(o) * *Idem conſequitur* &c. Eadem eſt prorſus demonſtratio, ſi loco A K & Q P ſubſtituantur A k & q p, & ad primum demonſtrationis caſum attendatur.

91. *Cor.* Velocitas A p corporis in medio reſiſtente aſcendentis ad maximam altitudinem A B n k, eſt ad velocitatem A P corporis in eodem medio è quiete deſcendentis per æquale ſpatium A B N K, ut ſecans anguli A D p ad radium, aut quod idem eſt, ut tangens A p anguli A D p, ad ejuſdem ſinum; Quoniam enim (*per hyp.*) area A B N K, æqualis eſt A B n k, erit (380. *Lib.* 1.) C k : A C = A C : C K, & dividendo A k : AC = A K : CK, & alternando, A k : A K = A C : C K = C k (ſive A C + A k) : A C, & ideò A k × AC : AK × A C = A C² + A k × A C : A C²; Sed (*per conſtruct. prop.* 8.) A C × A k = A p², & A C × A K = A P². Quare A p² : A P² = A C² + A p² ſeu D p² : A C², & hinc A p : A P = D p : A C, ſeu A D. Q. E. D.

ATD. Nam velocitas in medio non resistente (p) foret ut tempus *ATD*, & in medio resistente est ut *AP*, id est, ut triangulum *APD*. Et (q) velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. (r) Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum *ApD* ad sectorem circularem *AtD*; sive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Est igitur tempus, quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem *AP*, acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam *AC* in spatio non resistente cadendo acquirere posset, (s) ut sector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus,

(p) * *Foret ut tempus ATD.* Cresceret enim uniformiter, ideóque ut tempus (25. *lib.* 1.)

(q) * *Et velocitates illæ initio descensûs æquantur inter se* ob resistentiam respectu gravitatis nullam, ubi velocitas nascitur. Cùm igitur velocitates in medio non resistente sint semper inter se ut areæ ATD, & in medio resistente sint ut triangula APD, erit velocitas in medio resistente tempore finito ATD acquisita ad velocitatem initio descensûs in eo medio resistente ut triangulum finitum APD, ad triangulum nascens APD, & erit velocitas initio descensûs in medio non resistente ad velocitatem in eodem medio tempore finito ATD acquisitam, ut area nascens ATD (æqualis areæ nascenti APD) ad aream finitam ATD; Quare (ex æquo) velocitas corporis tempore finito ATD cadentis in medio resistente est ad velocitatem quam eodem tempore in medio non resistente cadendo acquireret ut triangulum APD ad sectorem hyperbolicum ATD.

(r) * *Eodem argumento.* Nam velocitas in medio non resistente foret ut tempus AtD, & in medio resistente est ut Ap, id est, ut triangulum apD ob datam AD, & velocitates illæ in fine ascensûs, ubi evanescunt, æquantur inter se, perindè ut areæ evanescentes AtD, ApD; est autem triangulum $ApD = \frac{1}{2} AD \times Ap$, & sector circularis $AtD, = \frac{1}{2} AD \times At$. Quarè ApD est ad AtD, ut Ap ad At. 91.

92. Hinc si velocitas ascensûs Ap in medio resistente velocitati maximæ AC æqualis fuerit, erit velocitas Ap seu AC, ad velocitatem quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum ACD, ad octantem circuli, sive ut radius ad octavam partem peripheriæ, aut quod idem est, ut quadratum circulo circumscriptum ad circuli aream. Dum enim fit $Ap = AC$, triangulum ApD æquatur triangulo ACD, & sector AtD, octanti circuli, ideóque arcus At est pars octava peripheriæ; & triangulum ACD est ad sectorem AtD, ut AC ad arcum At, ac prætereà triangulum ACD, ob $AC = AD$; est pars octava quadrati circulo circumscripti.

(s) * *Ut sector ADT ad triangulum ADC.* Cùm enim AP exponat velocitatem tempore ATD in medio resistente acquisitam, sumatur AY talis ut exponat velocitatem tempore eodem in medio non resistente productam, & erit per Coroll. 3. AP ad AY ut APD, ad ATD, cùmque etiam AC exponat velocitatem maximam, pus, quo velocitatem *A p* in medio reſiſtente aſcendendo poſſit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in ſpatio non reſiſtente aſcendendo poſſet amittere, ut (t) arcus *At* ad ejus tangentem *A p*.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum. Nam corporis in infinitum deſcendentis datur velocitas maxima (*per corol.* 2. *&* 3. *theor.* VI. *lib.* II.) inde-

ximam, erit A Y ad A C ut tempus quo prior celeritas A Y in medio non reſiſtente acquiri poteſt, ad tempus quo velocitas maxima A C in medio etiam non reſiſtente acquireretur, & cùm tempus quo celeritas A Y acquiritur, exprimatur per aream A T D, erit A Y ad A C ut A T D ad aream quæ exponet tempus quo velocitas maxima in medio non reſiſtente acquiritur, itaque cùm ſit A P : A Y = A P D : A T D & A Y : A C = A T D : ad hanc aream, erit ex æquo A P : A C = A P D, ad hanc aream, ſed ſumptâ communi altitudine D A eſt A P ad A C = Tri. A P D ad Tri. A D C; ergo area quæ exponet tempus quo maxima velocitas in medio non reſiſtente acquiritur, eſt area A D C. Undè ſequitur quòd corpus in medio reſiſtente, velocitatem maximam A C acquirere cadendo non poteſt niſi tempore infinito. Cùm enim ſit A P = A C, coincidit D T cum Hyperbolæ A T V aſimptoto D C, & ſector A D T fit infinitus.

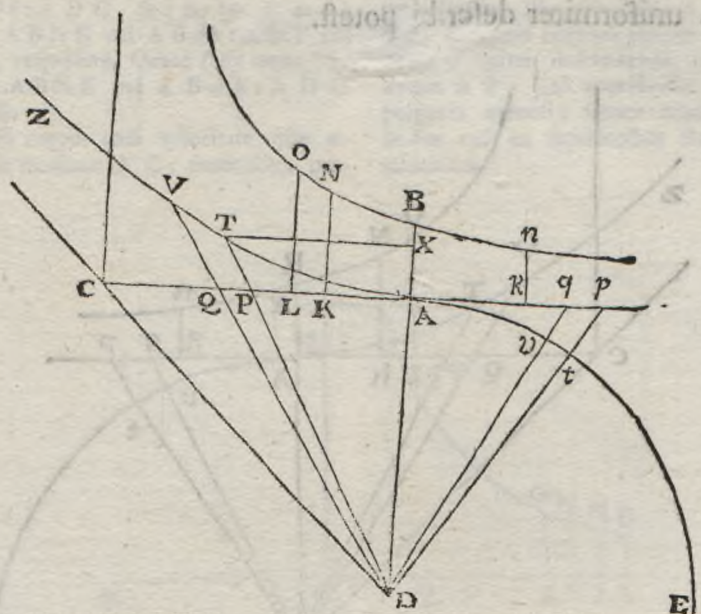
(t) * *Ut arcus At, ad ejus tangentem A p.* Siquidem (*per cor.* 4.) velocitas A p in medio reſiſtente tempore A t D extinguenda, eſt ad velocitatem eodem tempore in ſpatio non reſiſtente extinguendam ut triangulum A p D ad ſectorem A t D; & etiam ut tempus quo velocitas A p in ſpatio non reſiſtente extingueretur ad tempus A t D quo altera velocitas in ſpatio non reſiſtente extinguitur, quod idem eſt cum eo quo velocitas A p in ſpatio reſiſtente extinguitur. Quare tempus quo velocitas A p, in ſpatio non reſiſtente evaneſceret eſt ad tempus A t D quo in ſpatio reſiſtente extingueretur ut triangulum A p D, ad ſectorem A t D, ſive tangens A p ad ejus arcum A t. Patet ergò propoſitum.

93. Hinc tempus quo corpus velocitatem A p in medio reſiſtente aſcendendo amittere poteſt, eſt ad tempus quo velocitatem maximam A C in ſpatio non reſiſtente aſcendendo amitteret, vel deſcendendo acquireret, ut ſector circularis A t D, ad triangulum A D C, ſeu ut arcus A t ad radium A D. Nam in medio non reſiſtente velocitas A p eſt ad velocitatem A C, ut tempus A p D, quo generatur vel extinguitur velocitas A p, ad tempus quo generatur vel extinguitur velocitas A C, quod proindè erit $\frac{A\,C \times A\,p\,D}{A\,p}$, ſeu $\frac{1}{2}$ A D × A C, hoc eſt, triangulum A D C.

Cùm igitur tempus quo velocitas A p, in medio reſiſtente extinguitur, exponatur per ſectorem A t D, patet propoſitum.

94. Tempus quo corpus in medio reſiſtente deſcendendo acquirit velocitatem A P, vel aſcendendo amittit velocitatem A p, eſt ad tempus quo eandem velocitatem in medio non reſiſtente acquirit vel amittit, ut ſector A D T, vel A D t, ad triangulum A D P, vel A D p, reſpectivè. Etenim (*per cor.* 5. *&* *not.* 93.) tempus quo in medio reſiſtente generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, eſt ad tempus quo in ſpatio non reſiſtente generatur vel extinguitur velocitas maxima A C, ut A D T vel A D t, ad A D C; Et tempus quo in ſpatio non reſiſtente generatur vel extinguitur velocitas A C, eſt ad tempus quo generatur vel extinguitur in eodem ſpatio non reſiſtente, velocitas A P vel A p, ut A C ad A P vel A p, & ſumptâ communi altitudine D A ut A D C ad A P D vel A p D. Quare (ex æquo) tempus quo in medio reſiſtente ge-

(u) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in ſpatio non reſiſtente cadendo poſſet acquirere. Et ſumendo ſecto- DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. IX. THEOR. VII.



rem ADT vel ADt ad triangulum ADC in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; (x) dabitur tum velocitas

AP

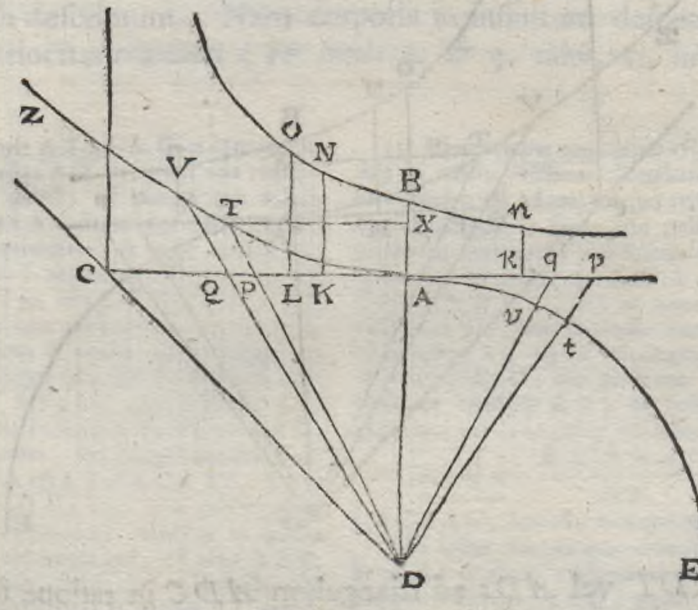
generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, eſt ad tempus quo velocitas eadem in ſpatio non reſiſtente producitur vel amittitur, ut A D T ad A D P, vel A D p. Q. E. D.

95. Si celeritas A p corporis in medio reſiſtente aſcendentis maximæ A C æqualis fuerit, erit A D p = A D C, & ſector A D t, circuli octans. Quare tempus quo corpus in medio reſiſtente aſcendendo amittere poteſt velocitatem maximam A C eſt ad tempus quo eandem in ſpatio non reſiſtente amitteret, ut circuli octans ad triangulum A D C, hoc eſt, ut area circuli ad quadratum circumſcriptum, ſeu etiam ut 8a. pars peripheriæ ad radium.

(u) 96. *Indèque datur tempus.* Cùm enim vires acceleratrices uniformes, ſint ut velocitates quas generant directè & tempora quibus illas generant inversè (13. *lib.* 1.) datâ vi acceleratrice uniformi quâ corpus in medio quovis ſollicitatur, ſeu datâ vis illius ratione ad notam quamlibet aliam vim v. gr. ad corporum terreſtrium gravitatem, datâque ſimul velocitate quam vis illa acceleratrix produxit, dabitur tempus quo velocitas illa data genita eſt. Sit enim vis acceleratrix data ad vim notam gravitatis, ut a ad b, velocitas datâ vi illâ acceleratrice tempore x genita c, & velocitas quam vis gravitatis tempore quovis dato t generat C, erit $a : b = \frac{c}{x} : \frac{C}{t}$. Undè invenitur tempus $x = \frac{bct}{aC}$. 96.

(x) * *Dabitur tum velocitas* A P, vel A p. (Per cor. 5. & not. 92).

AP vel *Ap*, (y) tum area *ABNK* vel *ABnk*, (z) quæ eſt ad ſectorem *ADT* vel *ADt* ut ſpatium quæſitum ad ſpatium, quod tempore dato, cum velocitate illâ maximâ jam ante inventâ, uniformiter deſcribi poteſt.



Corol. 7. (a) Et regrediendo, ex dato aſcensûs vel deſcensûs ſpatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

PRO-

(y) * *Tum area ABNK vel ABnk.* Eſt enim (*per conſtruct. prop.* 8.) AC : AP = AP : AK, & AC : Ap = Ap : Ak, & ideò datis AC & AP vel Ap dabuntur AK vel Ak, & areæ correſpondentes ABNK, ABnk, quæ per tabulas Logarithmorum inveniri poſſunt (384. *lib.* 1.).

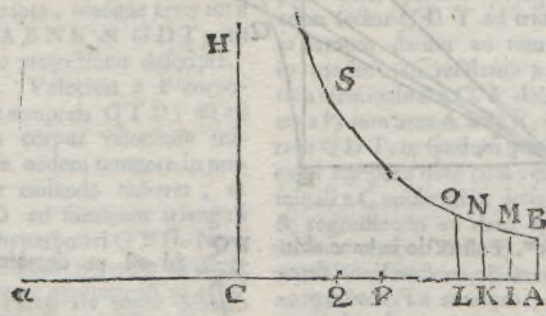
(z) * *Quæ eſt ad ſectorem ADT, vel ADt.* (per cor. 1. & 2.).

(a) 97. *Et regrediendo.* Nimirum capienda eſt area ABnk, vel ABNK ad triangulum ADC in datâ ratione ſpatii dati aſcensûs vel deſcensûs ad duplum ſpatii, quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit ut velocitatem maximam AC acquirat; atque ità dabitur Ak vel AK. Et hinc dabitur Ap vel AP, ſeu velocitas; ex his autem dabitur ſector ADt vel ADT, ſeu tempus (*per cor.* 5.). Nam ſpatium quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit, ut velocitatem maximam AC acquirat, dicatur *A*, tempus quo ſpatium illud deſcribitur *T*, ſpatium quod in medio reſiſtente deſcribit ut acquirat velocitatem AP, vel amittat velocitatem Ap dicatur *s*, tempus *t*, & ſpatium quod corpus tempore illo *t* & velocitate maximâ AC uniformiter progrediendo deſcribit ſit *S*, & quia (29. *lib.* 1.) corpus velocitate maximâ AC uniformiter

ter progrediendo, tempore T, describit spatium $2A$, erit (5. *lib.* 1.) $S : 2A = t : T$. Sed (*per cor.* 5. *& not.* 93.) $t : T =$ ADT vel ADt : ADC, ideóque $S : 2A =$ ADT vel ADt : ADC, & (*per cor.* 1. *ac* 2.) $s : S =$ ABNK vel ABnk : ADT vel ADt, respectivè. Quarè (ex æquo) $s : 2A =$ ABNK vel ABnk : ADC. Q. E. D.

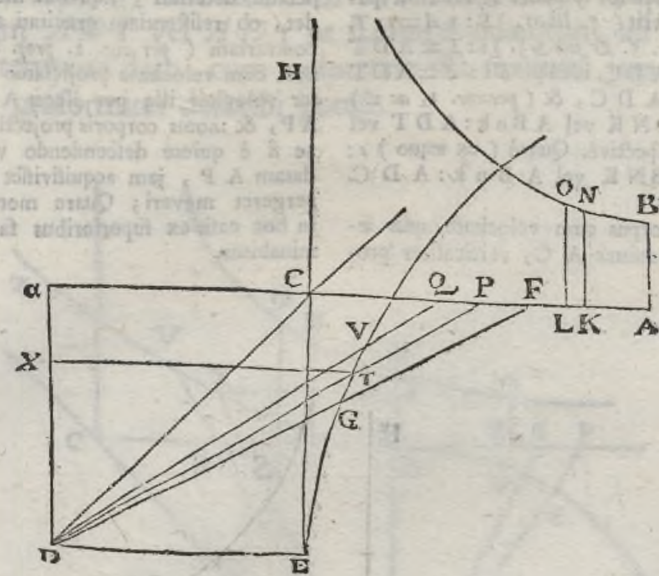
98. Si corpus cum velocitate quæ æqualis sit maximæ AC, verticaliter projiciatur deorsum, æquabili motu descendet, ob resistentiam gravitati æqualem & contrariam (*per cor.* 2. *prop.* 8.) si minori cum velocitate projiciatur, exponatur velocitas illa per lineæ AC partem AP, & motus corporis projecti idem erit ac si è quiete descendendo velocitatem datam AP, jam acquisivisset & deindè pergeret moveri; Quare motus projecti in hoc casu ex superioribus facile determinabitur.

98.



99. Verùm si projectionis velocitas terminali AC major est, constructiones propositionum 8 & 9 mutandæ erunt. Et quidem constructio propositionis 8ª. sic mutanda. Descripta inter asymptotos orthogonales AC, CH Hyperbolâ quâlibet SONB, producatur asymptotus AC in a, & exponatur vis gravitatis per datam lineam aC, resistentia initio motûs per lineam aA, resistentia elapso quovis tempore per lineam indefinitam aK. Velocitas corporis per lineam aP quæ sit media proportionalis inter aK & aC, ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ. Decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam KL & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam PQ. Quoniam aK est ut P^2, erit hujus momentum KL, ut illius momentum 2aPQ, id est, ut aP in KC. Nam velocitatis decrementum PQ, (*per mot. Leg.* 2.) proportionale est vi generanti KC, quæ est excessus resistentiæ aK, suprà vim gravitatis aC. Componatur ratio ipsius KL cum ratione ipsius KN, & fiet rectangulum KL × KN ut aP × KC × KN, hoc est, ob datum rectangulum KC × KN, ut aP, ergò rectangulum evanescens KN × KL, hoc est, area hyperbolica KNOL, est ut aP. Componitur igitur area tota hyperbolica ABOL, ex particulis KNOL, velocitati aP semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales ABMI, IMNK, KNOL, &c. & vires absolutæ AC, IC, KC, LC, &c. erunt in progressione geometricâ. Si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam ABNK, exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas aC, aP, aK.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. IX. Theor. VII.



Propoſitionis $9^{æ}$. conſtructio in hanc abit. Cæteris ut in figurâ & conſtructione ſuperiori manentbus, capiatur a F media proportionalis inter a C & a A, & ideò velocitatem projectionis initialem exponens, completo quadrato a C E D, centro D deſcribatur hyperbola rectangula E G T V, ſemiaxem tranſverſum habens D E, verticem principalem E, & aſymptotum D C. Jungantur D F, D P Hyperbolæ occurrentes in G & T, & erit ſector hyperbolicus G D T ut tempus deſcenſûs per ſpatium A B N K. Agatur enim D V Q abſcindens tum ſectoris G D V tum trianguli F D Q particulas quam minimas T D V, P D Q, & erunt hæ particulæ ad invicem ut DT^2 ad DP^2, id eſt, ſi T X & a P parallelæ ſint, ut DX^2 ad Da^2, vel TX^2 ad aP^2, & diviſim ut $TX^2 - DX^2$ ad $ap^2 - aD^2$, ſed (*ex naturâ Hyperb.*) $TX^2 - DX^2$ eſt aD^2, & (*per Hyp.*) ap^2 eſt $aD \times aK$; ergò particulæ T D V, P D Q, ſunt ad invicem ut aD^2, ad $aD \times aK - aD^2$, id eſt, ut a D ad a K — a D, ſeu ut a C ad C K, ideóque ſectoris particula T D V, eſt $\frac{PDQ \times aC}{CK}$, atque ideo ob datas a C & a D, ut $\frac{PQ}{CK}$, id eſt ut decrementum velocitatis directè utque vis generans decrementum inversè, atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis reſpondens, & componendo, fit ſumma particularum temporis quibus omnes velocitatis F P particulæ P Q extinguuntur, ut ſumma particularum ſectoris G D T, id eſt, tempus totum ut ſector totus. Q. E. D.

100. *Coroll.* 1. Quoniam coincidente puncto P cum C, coincidit etiam K cum C, & D T cum aſymptoto D C, liquet corporis projecti velocitatem a P nonniſi deſcripto ſpatio infinito, elapſoque infinito tempore, fieri poſſe velocitati terminali a C æqualem.

101. *Coroll.* 2. Si dignitas hyperbolæ BNO ſeu rectangulum $CA \times AB$, ſit $\frac{1}{4}\, aC^2$, ſpatium quod corpus tempore quovis deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus velocitate terminali a C eodem tempore uniformiter progrediendo deſcribere poteſt, ut area A B N K quâ ſpatium deſcriptum exponitur ad aream G D T quâ tempus exponitur. Nam cùm ſit a C ad a P, ut a P ad a K, erit (*per cor.* 1. *Lem.* 2. *lib.* 2.)

2.) L K ad P Q ut 2 a K ad a P, hoc eſt, ut 2 a P ad a C, & indè L K ad $\frac{1}{2}$ P Q, ut a P ad $\frac{1}{4}$ a C. (*ex naturâ hyperb. & per hyp*) K N × C K eſt C A × A B, ſeu $\frac{1}{4}$ a C², ideóque K N ad a C ſeu a D, ut $\frac{1}{4}$ a C ad C K. Itaque (ex æquo) L K N, ad D P Q, ut a P, ad C K; ſed erat D P Q, ad D T V, ut C K ad a C, ergò rurſus (ex æquo), L K N, eſt ad D T V, ut a P, ad a C, hoc eſt, ut velocitas corporis projecti eſt ad velocitatem maximam quam corpus è quiete cadendo poteſt acquirere. Cùm igitur arearum A B N K & G D T, momenta L K N & D T V ſint ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes ſimul genitæ ut ſpatia ſimul deſcripta, ideóque areæ totæ ab initio genitæ A B N K & G D T, ut ſpatia tota ab initio projectionis deſcripta.

102. *Coroll.* 3. Velocitas a P corporis projecti in fine temporis G T D, eſt ad velocitatem quam corpus velocitate initiali a F projectum eodem tempore in medio non reſiſtente cadendo haberet, ut triangulum a P D ad ſummam trianguli a F D & ſectoris hyperbolici G T D. Nam velocitatis incrementum tempore G T D in ſpatio non reſiſtente genitum eſt ut tempus G T D, & velocitas projectionis ut a F, ſive ut triangulum A F D, atque adeò velocitas tota in fine temporis G T D ut G T D + a F D, & velocitas in fine temporis ejuſdem G T D in medio reſiſtente eſt ut a P, id eſt, ut triangulum a P D, & velocitates illæ initio projectionis æquantur inter ſe, perindè ut areæ illæ G T D + a F D & a P D, ob ſectorem G T D evaneſcentem, & a P æqualem a F initio deſcenſûs.

103. *Coroll.* 4. Tempus quo corpus in medio reſiſtente projectum acquirit velocitatem a P, ſeu quo amittit velocitatem P F, eſt ad tempus quo velocitatem maximam a C, in ſpatio non reſiſtente è quiete cadendo acquirere poſſet, ut ſector G D T ad triangulum a D C. Sit a F + *V*, recta velocitatem exponens quam corpus in medio non reſiſtente cum velocitate initiali a F projectum elapſo tempore G D T haberet, & erit (102) a P ad a F + *V*, ſeu multiplicando per $\frac{1}{2}$ A D, a P D ad a F D + $\frac{1}{2}$ a D × *V*, ut a P D ad a F D + G T D, ideóque $\frac{1}{2}$ a D × *V* = G T D, & $V = \frac{\text{G T D}}{\frac{1}{2}\text{ a D}}$; ſed *V* eſt velocitas quam corpus è quiete cadendo in medio non reſiſtente acquireret tempore G T D, & velocitates in medio non reſiſtente acquiſitæ, ſunt ut tempora quibus acquiruntur, ideóque velocitas *V* ſeu $\frac{\text{G T D}}{\frac{1}{2}\text{ a D}}$, eſt ad velocitatem a C, in medio non reſiſtente acquiſitam ut tempus G T D ad tempus quo corpus velocitatem a C acquirit; Quarè hoc tempus erit $\frac{1}{2}$ a D × a C, ſeu per triangulum a D C exponetur. 103.

104. *Coroll.* 5. Hinc ex dato tempore datur ſpatium deſcriptum. Capiatur enim ſector G D T ad triangulum a D C, ut tempus datum ad tempus quo corpus in medio non reſiſtente acquirit velocitatem terminalem a C, & dabitur tum velocitas a P, tum area A B N K, quæ eſt ad ſectorem G D T, ut ſpatium quæſitum ad ſpatium quod tempore dato cum velocitate illâ terminali a C uniformiter deſcribi poteſt (101) & regrediendo ex dato ſpatio A B N K, dabitur tempus G D T, ſi capiatur area A B N K, ad triangulum a D C in ratione ſpatii dati ad duplum ſpatii quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit ut velocitatem terminalem a C acquirat. Id demonſtratur ex not. 103. & 101) eodem prorſus modo quo factum eſt (97).

105. *Scholium.* Superiores conſtructiones definiendis corporum motibus ſufficiunt, licet medii reſiſtentia partim conſtans partim velocitatis quadrato proportionalis. Nam ſi corpus ſolâ vi inſitâ moveatur, recta A C, quæ in conſtructionibus prop. 8. & 9. vim gravitatis uniformem exponebat, partem reſiſtentiæ conſtantem quæ vi alicui centripetæ uniformi æqualis cenſeri poteſt, cæteris manentibus, exponet. Sed ſi corpus in medio prædicto gravitate uniformiter agente ſollicitatum rectâ aſcendat vel deſcendat, linea A C, in conſtructionibus pro aſcenſu vim gravitatis & partem reſiſtentiæ datam ſimul exhibebit, in conſtructionibus verò pro deſcenſu exceſſum gravitatis ſuprà partem reſiſtentiæ datam repræſentabit; & linea illa A C, ità determinata vim gravitatis uniformem exponet, quâ corpus urge-

retur in medio cujus eſſet reſiſtentia ut velocitatis quadratum. Si verò pars illa reſiſtentiæ quæ uniformis manet vi gravitatis æqualis fuerit & corpus deorſum projiciatur, idem erit illius motus ac ſi ſolâ vi inſitâ ferretur in medio quod reſiſteret in ratione quadrati velocitatis, atquè ideò in hoc caſu uſurpanda erit conſtructio propoſitionis 5ᵉ. Jam verò omiſſis conſtructionibus per Logarithmicam quas (*ex demonſtr.* 44. 45:) facile deducere, aut in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1709. & etiam in Phoronomiâ *Hermanni* Lector videre poterit, duo quæ ſequuntur generalia problemata analyticè ſolvemus.

PROBLEMA.

Definire motum corporis, uniformi gravitate urgente, rectà deſcendentis vel aſcendentis in medio ſimilari, quod in ratione quâlibet multiplicatâ velocitatis reſiſtit.

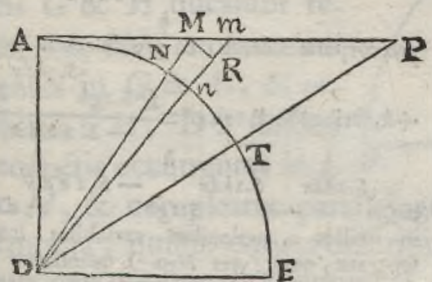
106. Sit vis gravitatis $= g$, velocitas corporis ſub initio metûs $= c$, ſpatium deſcriptum $= s$, tempus quo deſcriptum eſt $= t$, velocitas hoc tempore acquiſita vel reſidua $= v$, reſiſtentia medii $r = \frac{v^n}{a^{n-1}}$, & a quantitas data. Corpore deſcendente erit (19) $g\,ds - \frac{v^n\,ds}{a^{n-1}} = v\,dv$, ideoque $ds = \frac{a^{n-1}v\,dv}{ga^{n-1}-v^n}$, & quia (13) $dt = \frac{ds}{v}$, erit $dt = \frac{a^{n-1}dv}{ga^{n-1}-v^n}$. Simili modo pro corporis aſcenſu, invenitur $ds = \frac{-a^{n-1}v\,dv}{ga^{n-1}+v^n}$ & $dt = \frac{-a^{n-1}dv}{ga^{n-1}+v^n}$. Cùm igitur in his quatuor æquationibus variabiles ſeparatæ ſint, poterunt illæ, ſaltem conceſſis figurarum quadraturis, conſtrui.

107. Si reſiſtentia velocitati proportionalis fuerit, erit $n = 1$, & ideò corpore deſcendente $ds = \frac{v\,dv}{g-v}$ & diviſione numeratoris $v\,dv$ per $-v+g$ peractâ, eſt $ds = -dv + \frac{g\,dv}{g-v}$, & ſumptis fluentibus $s = Q - v - g \times L.\overline{g-v}$. Quia verò ubi evaneſcit ſpatium s, fit $v = c$ (*per hyp.*) erit conſtans $Q = c + g\,L.\overline{g-c}$, ac proindè $s = c - v + L.\frac{g-c}{g-v}$. Tempus habetur per æquationem $dt = \frac{dv}{g-v}$ cujus fluens $t = Q - L.\overline{g-v} = L.\frac{g-c}{g-v}$. Simili modo pro corporis aſcenſu invenitur $s = c - v + g\,L.\frac{g+v}{g+c}$, & $t = L.\frac{g+c}{g+v}$.

108. Si reſiſtentia ſit ut velocitatis quadratum, erit $n = 2$ & (106) $r = \frac{v^2}{a}$. Sit b velocitas terminalis, & quia reſiſtentia gravitati æqualis eſt ubi corpus velocitatem maximam habet, erit $g = \frac{bb}{a}$, & $bb = ag$. Sit e ſpatium quod corpus vi gravitatis conſtante g cadendo in medio non reſiſtente deſcribit ut acquirat velocitatem b, & erit $2ge = bb = ag$ (23) ideoque $a = 2e$. His poſitis, corpore deſcendente erit (106) $ds = \frac{av\,dv}{ag-vv} = \frac{2ev\,dv}{bb-vv}$. Ponatur $bb - vv = xx$, & proindè ſumptis fluxionibus $v\,dv = -x\,dx$, atquè ideo $ds = -\frac{2ex\,dx}{xx} = -\frac{2e\,dx}{x}$, & ſumptis fluentibus $s = Q - 2e\,L.x = Q - e\,L.x^2 = Q - e\,L.\overline{bb-vv}$. Ponatur $s = 0$, & ideò $v = c$, & indè habebitur $Q = e\,L.\overline{bb-cc}$, ac proptereà $s = e\,L.\frac{bb-cc}{bb-vv}$. Sit $L.h = 1$ & erit $s\,L.h = e\,L.\frac{bb-cc}{bb-vv}$; $\frac{s}{e} \times L.h = L.h^{\frac{s}{e}} = L.\frac{bb-cc}{bb-vv}$, ideóque $h^{\frac{s}{e}} = \frac{bb-cc}{bb-vv}$; undè eruitur $vv = \frac{bbh^{\frac{s}{e}} + cc - bb}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus obtinetur per æquationem (106) $dt = \frac{a\,dv}{ag-vv} = \frac{2e\,dv}{bb-vv} = \frac{\frac{e}{b}dv}{b+v} + \frac{\frac{e}{b}dv}{b-v}$; quod patet, ſi duæ poſtremæ fractiones ad communem denominatorem reducantur, &, ſumptis fluentibus $t = Q + \frac{e}{b}L.\overline{b+v} - \frac{e}{b}L.\overline{b-v}$

$-v = Q + \frac{e}{b} L. \frac{b+v}{b-v}$. Ponatur $t = o$, & ideò $v = c$, & invenietur $Q = -\frac{e}{b} L. \frac{b+c}{b-c}$. Quarè erit $t = \frac{e}{b} L. \frac{\overline{b+v} \times \overline{b-c}}{\overline{b-v} \times \overline{b+c}}$. Si corpus è quiete cadat, erit $c = o$, & ideò $s = e L. \frac{bb}{bb-vv}$; $vv = \frac{bbh^{\frac{s}{e}} - bb}{h^{\frac{s}{e}}}$ & $t = \frac{e}{b} L. \frac{b+v}{b-v}$.

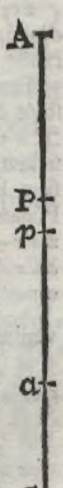
Si in hâc ultimâ æquatione loco $h^{\frac{s}{e}}$ scribatur m & loco v ipsius valor $b\sqrt{1 - \frac{1}{m}}$, habebitur $t = \frac{e}{b} \times \frac{L. 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{m}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{m}}}$.



Simili modo ascendente corpore invenietur $s = e L \frac{bb + cc}{bb + vv}$, & $vv = \frac{bb + cc - bbh^{\frac{s}{e}}}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus autem reperitur per æquationem $dt = -\frac{adv}{ag + vv} = -\frac{edv}{bb + vv}$. Centro D, radio D A $= b$, describatur circuli quadrans A N E, velocitas c, sub initio ascensûs exponatur per datam tangentem A P, velocitas residua v, per tangentis illius partem A M, & dv per M m, junganutur D P, D M, D m, circulo occurrentes in T, N, n, & ex punĉto M, demissum sit ad D n perpendiculum M R, triangula similia D N n, D M R, dant D M : D N vel D A $=$ M R : N n, & triangula similia m R M, M A D, dant D M : D A $=$ M m : M R, ideóque (ex æquo) D M^2 : D A^2 $=$ M m : N n, hoc est, $bb + vv : bb = dv$: N n $= \frac{bbdv}{bb + vv}$; undè fit $\frac{e \times \text{N n}}{bb} = \frac{edv}{bb + vv}$; & hinc habebitur $dt =$ 108.
$-\frac{e \times \text{N n}}{bb}$, sumptisque fluentibus $t = Q - \frac{e \times \text{A N}}{bb}$. Ponatur $t = o$, & fiet A M $=$ A P, & A N $=$ A T, ideóque Q $= \frac{e \times \text{A T}}{bb}$. Quarè erit $t = \frac{e \times \text{T N}}{bb} = \frac{\text{T N}}{2g}$, (ob $bb = 2ge$).

PROBLEMA.

Definire motum corporis in lineâ reĉtâ AC, vi quâlibet centripetâ ad punĉtum C tendente sollicitati in medio cujus resistentia est ut densitas medii & dignitas quævis velocitatis corporis conjunĉtim.



109. Corpus è loco dato A vel a, datâ cum velocitate projeĉtum ascendat per spatium a P vel descendat per spatium A P, dicanturque velocitas projeĉtionis in a vel A $= c$, spatium descriptum a P vel A P $= s$, tempus quo descriptum est $= t$, velocitas corporis in loco P $= v$, vis centripeta ibidem $= g$, densitas medii in eodem loco $= k$, resistentia $r = kv^n$, distantia C P $= x$, & data C a vel C A $= b$, erit (22) pro corporis ascensu, $gdx + kv^n dx = -vdv$, & pro descensu $gdx - kv^n dx = -vdv$, quarum æquationum alterutram resolvere satis est, cum altera in alteram abeat, mutato signo + vel − quantitati k præfixo. Quia verò corpore ascendente est a P $= s = x - b$, & proindè $ds = dx$; at eodem descendente A P $= s = b - x$, & ideo

$ds = -dx$, erit pro corporis aſcenſu (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx}{v}$, & pro deſcenſu $dt = -\frac{dx}{v}$. His poſitis breviter exponimus præcipuos caſus in quibus ſuperiorum æquationum variabiles ſeparari & æquationes proindè per curvarum quadraturas conſtrui poſſunt.

110. Si in æquatione generali $g\,dx \pm kv^n\,dx = -v\,dv$, quæ eſt pro aſcenſu & deſcenſu ſimul. Sit g quantitas conſtans, & denſitas k, ut diſtantiæ dignitas $x^{\frac{1}{2}n}$ reciprocè, hoc eſt, $k = \frac{1}{ax^{\frac{1}{2}n}}$, variabiles ſeparari poſſunt. Nam æquatio generalis in hanc mutabitur $g\,dx \pm \frac{v^n\,dx}{ax^{\frac{1}{2}n}} = -v\,dv$. Ponatur $v^2 = xz$, ideoque $v^n = x^{\frac{1}{2}n} z^{\frac{1}{2}n}$, & $v\,dv = \frac{x\,dz + z\,dx}{2}$, & æquatio evadet $g\,dx \pm \frac{z^{\frac{1}{2}n}\,dx}{a} = \frac{-x\,dz - z\,dx}{2}$, undè eruitur $\frac{dx}{x} = \frac{a\,dz}{2ag + az \pm 2z^{\frac{1}{2}n}}$. In quâ variabiles ſunt ſeparatæ.

111. Si denſitas k conſtans fuerit, vis centripeta g ut diſtantia x à centro & reſiſtentia ut velocitas, variabiles ſeparari poſſunt. Nam ſi ponatur $g = ax$, k conſtans & $n = 1$, æquatio generalis fiet $ax\,dx \pm kv\,dx = -v\,dv$, in quâ neglectis coefficientibus datis a & k, termini omnes ſunt homogenei ſeu ejuſdem dimenſionis. Ponatur itaque $v = zx$, & proindè $dv = z\,dx + x\,dz$, & æquatio evadet $ax\,dx \pm kzx\,dx = -z^2x\,dx - zx^2\,dz$, & terminis omnibus per x diviſis, iiſque ordinatis invenitur $\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{a \pm kz + z^2}$, quæ æquatio, conceſſâ Hyperbolæ vel circuli quadraturâ ſemper conſtrui poteſt.

112. Si, cæteris paribus, medii reſiſtentia ſit ut quadratum velocitatis, id eſt, $n = 2$, & denſitas medii k viſque centripeta g ſint ut functiones quælibet diſtantiæ x, variabiles in ſuperioribus æquationibus (109.) ſeparationem admittunt. In hâc Hypotheſi æquatio pro corporis aſcenſu ſit $g\,dx + kv^2\,dx = -v\,dv$, ſeu $v\,dv + kv^2\,dx = -g\,dx$. Ponatur $k\,dx = \frac{dz}{2z}$, ut ſit $2zv\,dv + v^2\,dz = -2gz\,dx$, & ſumptis fluentibus erit $zv^2 = Q - S.\,2gz\,dx$, & $v^2 = \frac{Q - S.\,2gz\,dx}{z}$. Quia verò $k\,dx = \frac{\frac{1}{2}dz}{z}$, erit $S.\,k\,dx = \frac{1}{2}L.\,z$ & $S.\,2k\,dx = L.\,z$. Atquè ideò ſi fuerit $L.\,h = 1$, $h^{S.\,2k\,dx} = z$ undè ſit $v^2 = \frac{Q - S.\,2gh^{S.\,2k\,dx}\,dx}{h^{S.\,2k\,dx}}$ pro corporis aſcenſu; & pro deſcenſu loco $+k$, ſcribendo $-k$, erit $v^2 = \frac{Q - S.\,2gh^{-S.\,2k\,dx}\,dx}{h^{-S.\,2k\,dx}} = Qh^{S.\,2k\,dx} - h^{S.\,2k\,dx}\,S.\,2gh^{-S.\,2k\,dx}\,dx$ in quibus æquationibus variabiles ſunt ſeparatæ, quia (*per Hyp.*) quantitates k & g, ſunt ut functiones variabilis x. Conſtans Q determinatur ex eo quod ubi $x = b$, ſit $v = c$, tempus verò definitur per æquationem $dt = \frac{dx}{v}$ pro corporis aſcenſu, & per æquationem $dt = -\frac{dx}{v}$ pro corporis deſcenſu, in quibus æquationibus, ſi loco v ſubſtituatur ipſius valor per x inventus, variabiles erunt ſeparatæ. Sed de his vide Mechanicam Clar. *Euleri.*

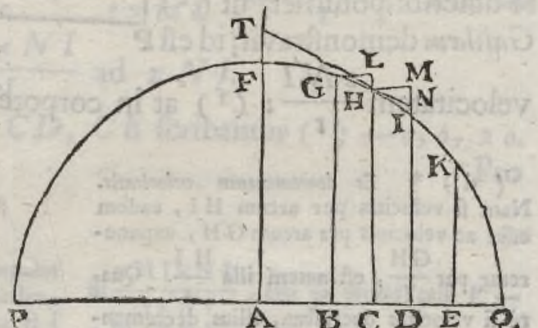
PRO-

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.

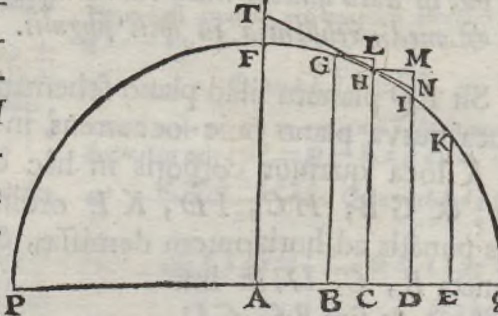
Sit PQ planum illud plano ſchematis perpendiculare; $PFHQ$ linea curva plano huic occurrens in punctis P & Q; G, H, I, K loca quatuor corporis in hâc curvâ ab F ad Q pergentis; & GB, HC, ID, KE ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demiſſæ, & lineæ horizontali PQ ad puncta B, C, D, E inſiſtentes; & ſint BC, CD, DE diſtantiæ ordinatarum inter ſe æquales. A punctis G & H ducantur rectæ GL, HN curvam tangentes in G & H, & ordinatis CH, DI ſurſum productis occurrentes in L & N, & compleatur parallelogrammum $HCDM$. Et (b) tempora, quibus corpus deſcribit arcus GH, HI, erunt in ſubduplicatâ ratione altitudinum LH, NI, quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, à tangentibus cadendo; & (c) velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ GH, HI directè & tempora



(b) 113. * *At tempora quibus corpus deſcribit arcus* evaneſcentes G H, H I, *erunt in ſubduplicatâ ratione altitudinum* L H, N I. Eodem enim temporis momento quo corpus vi motûs inſiti in G, deſcriberet tangentem G L, vi gravitatis uniformi caderet per altitudinem L H qualem in medio non reſiſtente percurreret eo ipſo tempore; reſiſtentiæ enim effectus altitudinem eam minuit quantitate ejus ipſius reſpectu infinitè parvâ, quæ itaque hic non eſt ſpectanda, itaque corpus arcum G H deſcribere cenſendum eſt vi compoſitâ ex vi motus inſiti & vi gravitatis. Et ſimili modo, tempore eodem quo deſcribit arcum H I, vi gravitatis caderet per altitudinem N I. Quare (per Lem. 10. Lib. 1.) tempora quibus corpus deſcribit arcus G H, H I, ſeu quibus cadit per altitudines L H, N I, ſunt in ſubduplicatâ ratione harum altitudinum. 113.

(c) * *Et velocitates erunt* (11).

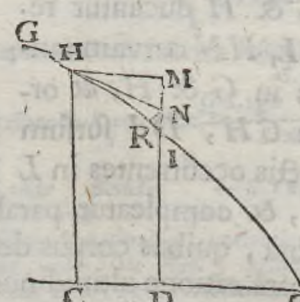
pora inversè. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$; & (d) decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à resistentiâ corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & spatium NI cadendo describente, generat velocitatem, quâ duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, ut (e) *Galilæus* demonstravit; id est



velocitatem $\frac{2NI}{t}$: (f) at in corpore arcum HI describente, au-

(d) * *Et decrementum velocitatis.* Nam si velocitas per arcum HI, eadem esset ac velocitas per arcum GH, exponeretur per $\frac{GH}{T}$, est autem illa $\frac{HI}{t}$. Quarè si velocitas decrescat, illius decrementum tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Si verò crescat, exponetur per $\frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$; hoc decrementum vel incrementum oritur à resistentia corpus retardante ejusque motui secundum directionem tangentis HN vel arcûs HI directè contraria (1) & à gravitate motum corporis descendentis accelerante, vis enim gravitatis in vires duas videlicet normalem & tangentialem divisa (24) corporis in curvâ descendentis motum per vim tangentialem accelerat, quem vis normalis nec accelerat, nec retardat. Quarè si resistentia vi gravitatis tangentiali major est, motus retardatur, si minor acceleratur, si æqualis nec acceleratur nec retardatur.

(e) * *Ut Galilæus demonstravit.* (Vid. dem. not. 29. lib. 1.).



(f) * *At in corpore &c.* Nam solâ vi insitâ, corpus tempore t describeret tangentem HN, & vi gravitatis solâ altitudinem NI, viribus verò conjunctis describit arcum HI. Quarè gravitas spatium à corpore secundùm directionem HN vel HI, describendum auget solâ longitudine HI $-$ HN. Est autem $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$. Si enim centro H & radio HN, describtus intelligatur arcus circularis NR, secans HI in R, duo triangula IRN, IMH similia erunt, ob angulum MIH utriauget arcum illum solâ longitudine $HI - HN$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, (a) & habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; (b) resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abscissis CB, CD, CE scribantur (c) $-o$, o, $2o$. Pro

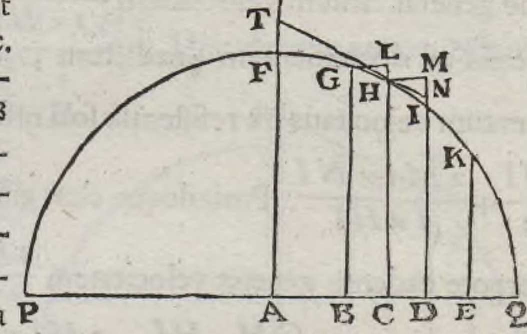
utrique triangulo communem, & angulos IRN, IMH rectos, ideoque æquales, undè erit $HI : MI = NI : RI$ seu $HI - HN$; & propterea $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$. Cùm igitur RI sit spatium tempore t vi gravitatis tangentiali descriptum (113) velocitas illa quam vis illa tempore t generat, exponetur (29. *lib.* 1.) per $\frac{2RI}{t} = \frac{2MI \times MI}{t \times HI}$.

(a) * *Et habebitur decrementum velocitatis ex solâ resistentiâ oriundum, nempe* $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, non solùm in eo casu quo resistentia vim gravitatis tangentialem superat, sed etiam in eo casu quo ab istâ superatur. Sit enim velocitatis decrementum ex solâ resistentiâ oriundum V, cùm incrementum velocitatis vi gravitatis tangentiali genitum sit $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, erit in primo casu $V - \frac{2MI \times NI}{t \times HI} = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$ (113), ideoque $V = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$; at in secundo casu erit (113) $\frac{2MI \times NI}{t \times HI} - V = \frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$, & proinde $V = \frac{2MI \times NI}{t \times HI} + \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$, quæ eadem est expressio ac prius. 113.

(b) * *Resistentia erit ad gravitatem &c.* Vires enim acceleratrices vel retardatrices sunt ut velocitatum elementa quæ dato temporis momento generant aut extinguunt, (13. *lib.* 1.).

(c) * *Scribantur* $-o$, o, $2o$. Si enim abscissæ CD, CE affirmativè capiantur, abscissæ CB, &c. in contrariam partem sumptæ negativè debent exprimi.

Pro ordinata CH ſcribatur P, & pro (d) MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. (e) erunt NI, & (f) ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c. & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, (g) habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c. & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, & $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinatâ DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK,



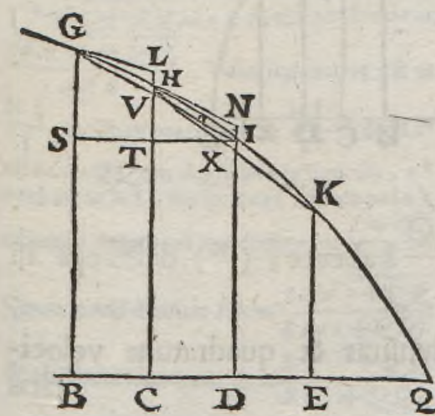
(d) * *Et pro M I ſcribatur ſeries quælibet.* Nam ordinatarum C H, D N differentia fluxionalis M I exprimi poteſt per ſeriem infinitam $Qo + Roo + So^3 +$ &c. in quâ Q, R, S, &c. ſunt quantitates finitæ hic generaliter ſumptæ & poſtea in ſingulis caſibus determinandæ, & o eſt incrementum naſcens & conſtans abſciſſæ (552, 556. *lib.* 1.).

(e) * *Erunt N I &c.* (552. *lib.* 1.)

(f) * *Et ordinatæ &c.* Eſt enim $DI = DM - MI = CH - MI = P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. (*per hyp.*); & quia $CE = 2o$, ſi in valore ordinatæ D I loco o ſcribatur $2o$, abibit D I in $EK = P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c; & ſimili modo quia $CB = -o$, ſi in valore ordinatæ D I loco $+o$ ſcribatur $-o$, fiet $DI = BG = P + Qo - Roo + So^3 -$ &c.

(g) * *Habebuntur arcuum G H, H I quadrata &c.* Eſt enim, ob angulum H M I rectum $HI^2 = HM^2 + MI^2$; & $HM = CD = o$, ac $MI = CH - DI = Qo + Roo + So^3 +$ &c. ideoque $HM^2 = oo$, $MI^2 = Q^2o^2 + 2QRo^3 + R^2o^4 + 2QSo^4 +$ &c.; unde $HI^2 = o^2 + QQo^2 + 2QRo^3 +$ &c. Negliguntur autem termini in quibus eſt o^4, o^5, &c. quod præ cæteris antecedentibus evaneſcant & ad rem nihil faciant. Quare extrahendo radicem quadratam fit $HI = o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, neglectis cæteris terminis negligendis: & ſimili modo invenitur $GH = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$.

EK, (h) manebunt arcuum GI & HK ſagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et (k) hæ ſunt lineolis LH & NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t: & (l) inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ ſeu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, (m) evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cùm $2NI$ ſit $2Roo$, reſiſtentia jam erit



(h) * *Manebunt arcuum G I & H K ſagittæ &c.* Jungatur chorda G I ſecans C H in V, & ex puncto I demittatur ad B G perpendiculum I S ſecans C H in T. Erit, ob triangulorum I T V, I S G ſimilitudinem I T ad I S, ſeu D C ad D B, id eſt, 1 ad 2, ut T V ad G S, & ideo G S $= 2VT$, & $GB = 2VT + SB = 2VT + DI$, & $GB + DI = 2VT + 2DI$, quare ſemiſumma ordinatarum G B ac D I eſt $VT + DI$, ſeu V C, quæ ſi ab ordinatâ C H ſubducatur, remanebit arcûs G I ſagitta V H. Et ſimili ratiocinio patet arcûs H K ſagittam I X æqualem eſſe differentiæ inter ordinatam D I & ſemiſummam ordinatarum C H & E K.

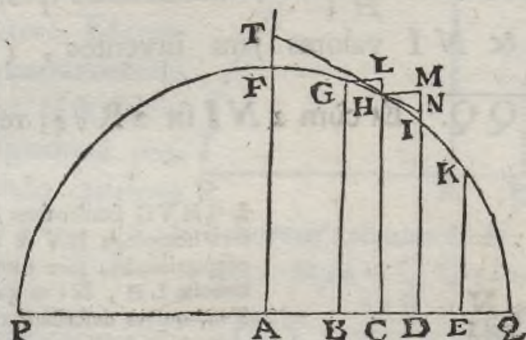
(k) * *Et hæ ſunt lineolis L H & N I proportionales.* Nam coeuntibus punctis B, C, D, E & G, H, I, K figuræ N H I X H, L G H V G ſimiles fiunt, & propterea latera homologa H V & I X, L H & N I proportionalia; ſunt autem (*ex demonſtr.*) lineolæ L H, N I ut quadrata temporum Tt, quibus deſcribuntur arcus GH, HI. 115.

(l) * *Et inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt &c.* Nam (*ex demonſt.*) $\frac{t^2}{T^2} = \frac{IX}{HV} = \frac{Roo+3So^3}{Roo} = \frac{R+3So}{R}$, & ideò $\frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R+3So}{R}} = \sqrt{\frac{RR+3SRo}{RR}} = \frac{\sqrt{RR+3SRo}}{R}$; ſed $\sqrt{RR+3SRo} = R + \frac{3SRo}{2R}$, neglectis terminis negligendis: quare erit $\frac{t}{T} = \frac{R+\frac{3}{2}So}{R} = 1 + \frac{3So}{2R}$.

(m) * *Evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$.* Eſt enim $\frac{t \times GH}{T} = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}} + \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$, neglecto termino in quo reperitur o^3, qui præ cœteris evaneſcit. Unde fit $\frac{t \times GH}{T} - HI = \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$

erit ad gravitatem ut $\frac{3\,Soo}{2\,R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2\,Roo$; id eſt, ut $3\,S\sqrt{1+QQ}$ ad $4\,RR$.

Velocitas autem ea eſt, quâcum corpus de loco quovis H, ſecundum tangentem HN egrediens, in parabolâ diametrum HC



& latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ ſeu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, (n) deinceps in vacuo moveri poteſt.

Et reſiſtentia eſt ut medii denſitas & quadratum velocitatis

$-\frac{2\,QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$; ſed $2\,MI = 2\,Qo$, & $NI = Roo$ neglectis cæteris ſeriei terminis evaneſcentibus, ideoque $2\,MI \times NI = 2\,QRo^3$, atque proinde $\frac{2\,MI \times NI}{HI} = \frac{2\,QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}$, neglecto in valore arcûs HI termino evaneſcente $\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$. Quare erit $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2\,MI \times NI}{HI} = \frac{3\,Soo\sqrt{1+QQ}}{2\,R}$.

(n) * *Deinceps in vacuo moveri poteſt.* Cùm enim velocitas per arcum HI, ſeu per tangentem naſcentem HN, æquabilis cenſeri poſſit (5), & corpus eodem temporis momento quo vi inſitâ deſcriberet HN, vi gravitatis uniformi, omiſſa reſiſtentia quæ hic ut nulla haberi debet (113), cadit per altitudinem NI; arcus naſcens HI, quem corpus viribus conjunctis deſcribit, uſurpari poteſt pro arcu parabolæ, cujus eſt diameter HC (40. lib. 1.), tangens HN ordinatis parallela, & NI parallela & æqualis abſciſſæ cui reſponderet ordinata æqualis HN. Quare hujus parabolæ latus rectum erit $\frac{HN^2}{NI}$ (*per Theor.* 1. *de parab.*), *ſeu* (*per Lemma* 7. *lib.* 1.) $\frac{HI^2}{HI} = \frac{oo+QQoo}{Roo} = \frac{1+QQ}{R}$, neglectis terminis negligendis. Si itaque corpus in vacuo deinceps moveretur, hanc parabolam deſcriberet (40. *lib.* 1.).

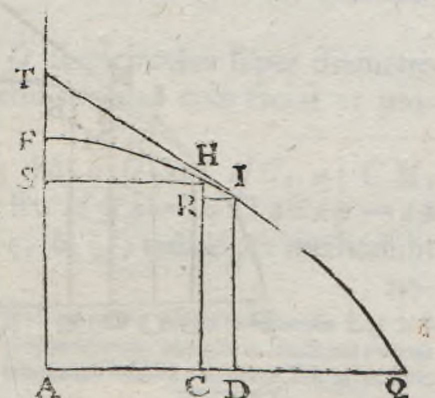
tatis conjunctim, & propterea medii densitas est ut resistentia directè & quadratum velocitatis inversè, id (o) est, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{1+QQ}{R}$ inversè, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q. E. I.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

Corol. 1. Si tangens HN producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet AF in T: (p) erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis

(o) * *Id est, ut &c.* Quia enim resistentia est ad gravitatem constantem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, erit resistentia ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Velocitas autem est ut $\frac{HI}{t}$, & illius quadratum ut $\frac{HI^2}{t^2}$; & HI^2 est $oo+QQoo$, neglectis negligendis, t^2 verò est ut NI, seu ut Roo (ex demonstr.); adeoque velocitatis quadratum ut $\frac{1+QQ}{R}$. Quare medii densitas erit ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4R(1+QQ)}$, & ob datum numerum $\frac{3}{4}$, ut $\frac{S.\sqrt{1+QQ}}{R(1+QQ)} = \frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$.

114. Si resistentia esset ut medii densitas & velocitatis V dignitas quælibet V^n conjunctim; cùm sit V^n ut $\frac{HI^n}{t^n}$, sive ut $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$, medii densitas foret ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$ inversè, id est, directè ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}}}{(1+QQ)^{\frac{n-1}{2}}}$.



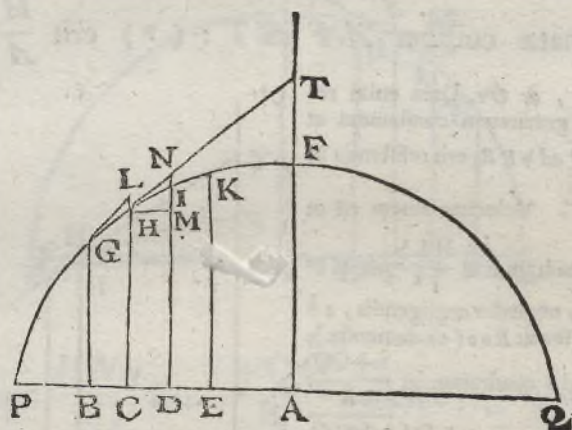
(p) * *Erit* $\frac{HT}{AC}$ *æqualis &c.* Ex pun- 114.
ctis H & I demittantur ad A F & C H perpendicula H S & I R; & ob triangula IRH, HST similia, erit H T ad H S seu A C ut H I ad I R vel C D, ideoque $\frac{HT}{AC} = \frac{HI}{CD} = \frac{o\sqrt{1+QQ}}{o} = \sqrt{1+QQ}$.

115. Hinc si resistentia sit ut medii densitas & velocitatis dignitas V^n conjunctim, erit resistentia ad gravitatem, ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitatis dignitas n, ut $\frac{HT^n}{AC^n \times R^{\frac{n}{2}}}$, & medii densitas ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}} \times AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, sive ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \left|\frac{AC}{HT}\right|^{n-1}$ (114).

116. Supe-

$\sqrt{1+QQ}$, ideoque in ſuperioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribi poteſt. Quâ ratione reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3\,S \times HT$ ad $4\,RR \times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii denſitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

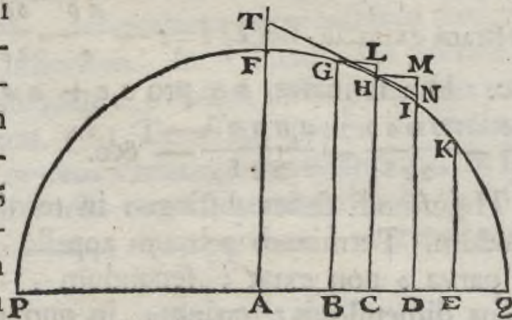
Co-



116. Superiores formulæ non ſolùm pro corporis deſcenſu per arcum F Q, ſed etiam pro ejuſdem aſcenſu per arcum P F uſurpari poſſunt. Corpore aſcendente per arcum P F à P ad F, eadem fiat quæ pro deſcenſu per arcum F Q conſtructio; & tempora quibus deſcribuntur arcus G H, H I exponantur per T & t. Decrementum velocitatis tempore t factum erit $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à reſiſtentiâ & gravitate corporis aſcendentis motum ſimul retardantibus. Gravitas in corpore cadente & ſpatium N I cadendo deſcribente, generat velocitatem $\frac{2\,NI}{t}$; at in corpore arcum H I deſcribente, minuit arcum illum ſolâ longitudine HN — HI ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque extinguit tantum velocitatem tangentialem $\frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$. Auferatur hæc velocitas à decremento prædicto, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentiâ ſolâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2\,MI \times NI}{t \times HL}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2\,NI}{t}$; reſiſtentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2\,MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2\,NI}{t}$, ſive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2\,MI \times NI}{HI}$ ad $2\,NI$.

Jam ſi pro abſciſſis B C, C D, C E ſcribantur $-o$, o, $2o$, & pro ordinata C H ſcribatur P; MI & NI erunt $Qo - Roo - So^3 -$ &c., & $Roo + So^3 +$ &c. Nam in arcu F Q (vide fig. *Newt.*) D I, ſeu

Corol. 2. Et hinc, ſi curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam AC & ordinatim applicatam CH, ut moris eſt; & valor ordinatim applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem: Problema per primos ſeriei terminos expeditè ſolvetur, ut in exemplis ſequentibus.



Exempl. 1. Sit linea $PFHQ$ ſemicirculus ſuper diametro PQ deſcriptus, & requiratur medii denſitas quæ faciat ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Biſecetur diameter PQ in A; dic AQ, n; AC, a; CH, e; & CD, o: & (q) erit DIq ſeu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, ſeu $ee - 2ao - oo$, & (r) radice per methodum no-

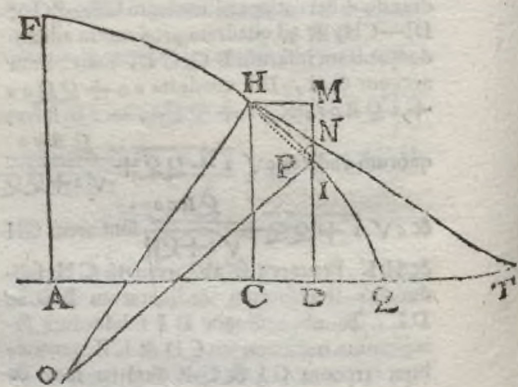
ſeu CH — MN — NI, erat $P - Qo - Roo - So^3$ &c., ideoque MN erat Qo (552. *lib.* 1.), & NI erat $Roo + So^3$; at in arcu PF eſt DI = CH + MN — NI, proindeque DI = $P + Qo - Roo - So^3$ &c., & hinc MI eſt $Qo - Roo - So^3$ &c. & NI eſt $Roo + So^3$. Et ſi in ſerie quæ valorem ordinatæ DI exprimit, loco o ſcribantur abſciſſæ CE, BC, ſive $2o$, $-o$, habebuntur ordinatæ EK & BG, nempe $P + 2Qo - 4Roo - 8So^3$ &c., & $P - Qo - Roo + So^3$ &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum CH—BG & DI—CH, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo + 2QRo^3$, & $oo + QQoo - 2QRo^3$; quorum radices $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ & $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinata DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK ſagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et hæ ſunt lineolis LH NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t, & inde ratio $\frac{t}{T}$ eſt, $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$, ſeu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2MI \times NI}{HI}$, ſubſtituendo ipſorum $\frac{t}{T}$, HI, GH, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cùm 2NI ſit $2Roo$, reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$. Quemadmodum pro deſcenſu inventum eſt; & corollaria eadem quoque manent. 116.

(q) * *Erit DI q ſeu &c.* Eſt enim radius AI = AQ, & ideo, ob angulum ADI rectum, $DI^2 = AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo = ee - 2ao - oo$, ob $CH^2 = ee = AQ^2 - AC^2 = nn - aa$.

(r) * *Et radice per methodum noſtram extractâ*, ſeu per formulam generalem (550. *lib.* 1.).

noſtram extractâ, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} -$ &c. Hic ſcribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} -$ &c.

Hujuſmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; ſecundum, in quo quantitas illa eſt unius dimenſionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium eſt; & ſic in infinitum. Et (ſ) primus terminus, qui hic eſt e, denotabit ſemper longitudinem ordinatæ CH inſiſtentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus (t) terminus, qui hic eſt $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id eſt, lineolam MN, quæ abſcinditur complendo parallelogrammum $HCDM$, (u) atque ideo poſitionem tangentis HN ſemper determinat; ut in hoc caſu capiendo MN ad HM ut eſt $\frac{ao}{e}$ ad o, ſeu a ad e. Terminus tertius, qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$ deſignabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & curvam, (x) ideoque determinat angulum contactus IHN ſeu cur-



(ſ) * *Et primus terminus* (552. lib. 1).

(t) * *Secundus terminus* (ibidem).

(u) 117. * *Atque ideo poſitionem tangentis H N ſemper determinat.* Producatur tangens H N ut diametro A Q occurrat in T; & propter triangulorum H M N, T C H ſimilitudinem, erit C T : H C = H M : MN. Eſt verò generatim H M = o, & M N = Qo, ac Q coefficiens ſecundi termini ſeriei generalis pro curvâ quâcumque (ex demonſtr. prop. X.): quare ſi capiatur C T ad H C ut eſt 1 ad Q habebitur ſubtangens C T.

(x) 118. * *Ideoque determinat angulum contactûs ſeu curvaturam &c.* Sit O cercurvaturam quam curva linea habet in *H*. Si (y) lineola illa *IN* finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium unà cum ſequentibus in infinitum. At ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinitè minores tertio, ideoque negligi poſſunt. (z) Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum in ſolutione problematum, quæ pendent à tangentibus & curvaturâ curvarum.

Conferatur jam ſeries $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c. cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3$ — &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ (a) ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$; hoc

centrum circuli curvam F H Q oſculantis in H; OH, OI radii, HPI chorda arcûs HI, NP arculus circularis centro H & radio HN deſcriptus. Duo triangula IPN, IMH ſimilia erunt, ob angulos ad P & M rectos & angulum ad I utrique triangulo communem, & ideo HI eſt ad HM ut NI ad NP, ac proinde $NP = \frac{HM \times NI}{HI}$. Anguli NHI, quem tangens HN cum ſubtenſa HPI conſtituit, menſura eſt dimidius arcus HI, & anguli ad centrum HOI menſura eſt arcus totus HI (ex natura circuli); unde NP ſeu $\frac{HM \times NI}{HI}$ eſt ad HN ſeu HI (*Lem.* 7. *lib.* 1.) ut $\frac{1}{2}$HI ad HO, & ideo radius oſculi $HO = \frac{HI^3}{2HM \times NI}$. Et quia (ex demonſt. prop. X.) $HI = o\sqrt{1+QQ}$, $HM = o$, ac $NI = Roo$; erit $HO = \frac{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}{2R}$. Sed angulus contactus & curvatura curvæ lineæ FHQ

118. in H eſt ut radius oſculi HO inverſe (121. *lib.* 1.), id eſt, ut $\frac{2R}{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}$. Quare angulus ille, ſeu curvatura in H, datis ſecundo & tertio termino ſeriei in quam valor ordinatim applicatæ reſolvitur, determinabitur.

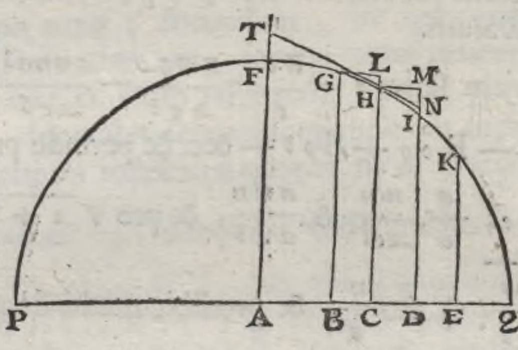
(y) * *Si lineola illa I N &c.* (552. 553. *lib.* 1.).

(z) * *Terminus quartus determinat variationem curvaturæ.* Quoniam differentia lineolarum LH & NI quarto ſeriei termino proportionalis eſt (554) & per lineolam NI determinatur angulus contactus ſeu curvatura curvæ in puncto H (118) & per lineolam LH curvatura in puncto G; per harum linearum differentiam ſeu per quartum ſeriei terminum determinabitur differentia ſeu variatio curvaturæ, ductâque aliâ tangente ſimiliter determinabitur variatio variationis, & ſic deinceps.

(a) * *Seu* $\frac{n}{e}$. Eſt enim $1 + \frac{aa}{ee} = \frac{ee+aa}{ee} = \frac{nn}{ee}$.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. X. Probl. III.

hoc eſt (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, ſeu $\frac{AC}{CH}$, id eſt, ([b]) ut tangentis longitudo illa HT, quæ ad ſemidiametrum AF ipſi PQ normaliter inſiſtentem terminatur : & reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3\,a$ ad $2\,n$, id eſt, ut $3\,AC$ ad circuli diametrum PQ : ([c]) velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare ſi cor-



pus juſtâ cum velocitate ſecundùm lineam ipſi PQ parallelàm exeat de loco F, & medii denſitas in ſingulis locis H ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut $3\,AC$ ad PQ, corpus illud deſcribet circuli quadrantem FHQ. *Q.E.I.*

At

(b) * *Id eſt, ut tangentis longitudo illa HT &c.* Jungatur radius AH, & ob angulum rectum quem tangens TH cum radio AH conſtituit, parallelaſque AT, CH, triangulum AHC ſimile erit triangulo ATH, & inde eſt TH ad HA, ut AC ad HC, id eſt, $\frac{AC}{HC}$ eſt ut $\frac{HT}{AH}$, ſeu ut HT ob datum radium AH.

(c) * *Velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$.* Nam (ex demonſtr. prop. X.) velocitas eſt ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, id eſt, ut $\sqrt{2e}$, vel $\sqrt{2CH}$ ideoque ut $\sqrt{CH}$.

119. Quoniam igitur velocitas eſt ut $\sqrt{CH}$, medii denſitas ut tangens HT, & reſiſtentia ut AC, (quia gravitas & circuli diameter PQ data ſunt) corpore perveniente ad punctum Q lineæ horizontalis, velocitas ejus nulla erit, medii denſitas infinita, reſiſtentia finita. Si verò ponatur CH negativa, ut corpus infra horizontalem PQ pergat ; fiet velocitas ut $\sqrt{-CH}$, quantitas imaginaria ; & ideo corpus non poteſt infra horizontalem PQ deſcendere. At dum corpus eſt in F, velocitas ejus eſt ut $\sqrt{AF}$, medii denſitas nulla, & reſiſtentia nulla.

At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi $P\,Q$ perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi $P\,F\,Q$ moveri inciperet, ſumenda eſſet $A\,C$ ſeu a ad contrarias partes centri A, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet & (d) ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus aſcendendo à P deſcribat circuli quadrantem $P\,F$. Ad hunc effectum deberet corpus à medio impellente accelerari, non à reſiſtente impediri.

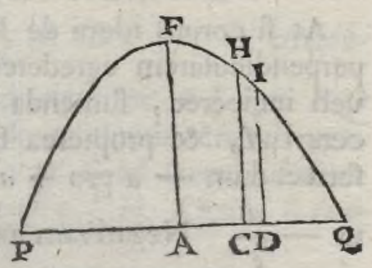
Exempl. 2. Sit linea $P\,F\,Q$ parabola, axem habens $A\,F$ horizonti $P\,Q$ perpendicularem, & requiratur medii denſitas, quæ faciat ut projectile in ipsâ moveatur.

Ex

(d) * *Scribendum* $-a$ *pro* $+a$. Nam formula quæ denſitatem medii exponit, corporis aſcenſui, & deſcenſui communis eſt, ſicut & aliæ formulæ quæ reſiſtentiam & velocitatem exponunt (116); & idcirco ut quantitas quæ denſitatem medii corpore deſcendente exponit eamdem exponat pro corporis aſcenſu per eumdem vel ſimilem & æqualem arcum, ſubſtituendus eſt in illâ quantitate valor abſciſſæ, quæ corpore deſcendente hic poſitiva eſt, aſcendente negativa.

120. Atque hinc generatim colligitur eumdem curvæ arcum, vel ſimiles & æquales utrinque ab axe arcus, non poſſe aſcenſu & deſcenſu deſcribi in uno medio denſitatis utcumque variabilis, id eſt, ſi arcus unus aſcenſu deſcribi poteſt, deſcenſu deſcribi non poſſe, & contra. Nam ſi in ſolutione problematis hujuſce pro corporis deſcenſu per arcum F Q, origo abſciſſæ poſitivæ A C ſtatuatur in A, & pro C B, C D, C E ſcribantur $-o$, o, $2\,o$, erit reſiſtentia ut $\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$. Pro aſcenſu per eumdem arcum à Q ad F, abſciſſa eadem A C ſumenda erit negativè, cùmque ſit o abſciſſæ fluxio, loco C B, C D, C E ſcribendum erit $o - o - 2\,o$ in valoribus linearum M I, N I, D I, E K & B G; & abſoluto calculo, ut in eâdem pro deſcenſu ſolutione, reſiſtentia pro aſcenſu invenietur proportionalis quantitati $-\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ negativa eſt, ſi prior $+\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ pro deſcenſu erat, poſitiva ſit; & contra. 120.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.



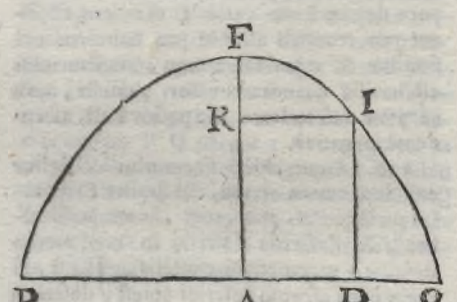
(e) Ex naturâ parabolæ, rectangulum PDQ æquale est rectangulo sub ordinatâ DI & rectâ aliquâ datâ: hoc est, si dicantur recta illa b; PC, a; PQ, c; CH, e; & CD, o; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale est rectangulo b in DI, ideoque DI æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum verò plures non sint termini, debebit quarti coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cui medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nullâ igitur medii densitate movebitur projectile in parabolâ, (f) uti olim demonstravit *Galilæus*. *Q. E. I.*

Exempl. 3. Sit linea AGK hyperbola, asymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur medii densitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hâc lineâ.

Sit MX asymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V; & ex naturâ hyperbolæ, (g) rectan-

tan-

(e) * *Ex natura parabolæ, rectangulum &c.* Ex puncto I ad axem parabolæ F A demissum sit perpendiculum I R, sitque axis latus rectum $= b$; erit (*per theor.* 1. *de parab.*) $b \times FR = RI^2 = AD^2$, & $b \times FA = AQ^2$. Quare $b \times FA - b \times FR$, seu $b \times RA$, vel $b \times DI = AQ^2 - AD^2 = \overline{AQ+AD} \times \overline{AQ-AD} = PD \times DQ$. Q. E. D.

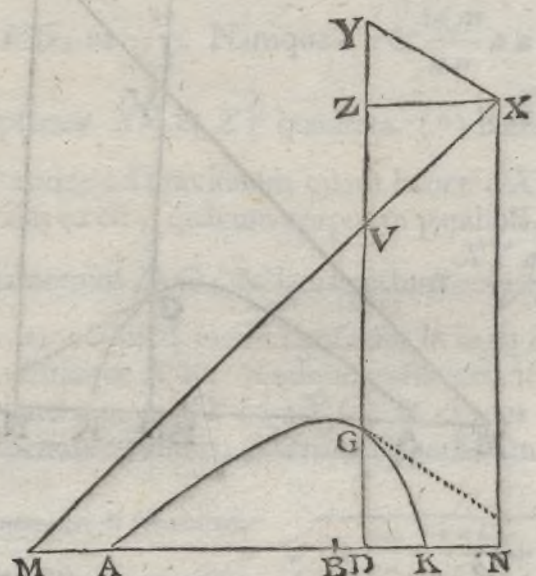


(f) * *Uti olim demonstravit Galilæus.* Vide demonstrationem n. 40. lib. 1.

(g) * *Rectangulum X V in V G dabitur*, per theor. 4. de hyp.

tangulum XV in VG dabitur. (h) Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb: & completo parallelogrammo $DNXZ$; dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX vel DN ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a - o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD seu $NX - VZ - VG$

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.



æqualis $c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ (i) in seriem convergentem $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c - \frac{m}{a}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. (k) Hujus se-

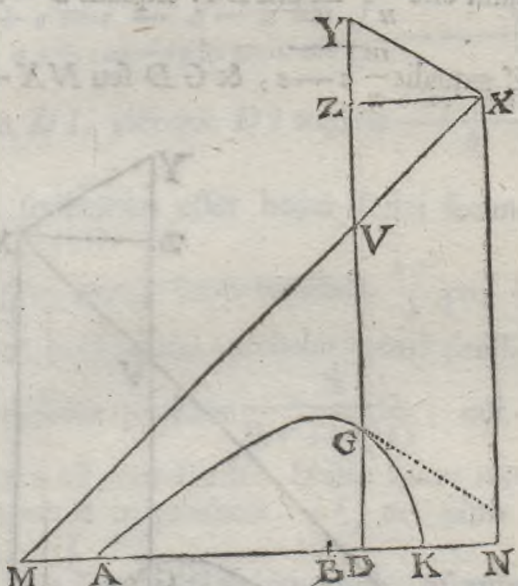
(h) * *Datur autem ratio* DN *ad* VX; quæ eadem est cum ratione data MN ad MX, ob parallelas DV, NX. 120.

(i) * *In seriem convergentem*, divisione in infinitum producta.

(k) * *Hujus seriei &c.* Est enim hæc series æqualis seriei $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c., & singuli illius termini singulis terminis hujus

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

ſeriei terminus ſecundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ uſurpandus eſt pro Q o, tertius cum ſigno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro R o^2, & quartus cum ſigno



etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro S o^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ ſcribendæ ſunt in regula ſuperiore pro Q, R & S.

Quo

hujus æquantur; id eſt, $e - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a}$ eſt P, ſeu ordinata quæ per punctum B ad hyperbolam duceretur; $+\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ eſt $-Qo$, & ideo $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa} = -Q$; ſed quia in expreſſionibus reſiſtentiæ, denſitatis, & velocitatis ſemper reperitur quadratum QQ, quod idem manet, ſeu radix illius Q affirmativè ſumatur, ſeu negativè, nihili intereſt ſcribere $\frac{bb}{aa} - \frac{m}{n}$, aut $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$ pro Q. Secundus autem ſeriei terminus $\frac{-bb}{a^3}o^2$ eſt $-Ro^2$, & ideo, mutatis ſignis, fit $\frac{bb}{a^3} = R$; tertius terminus $\frac{-bb}{a^4}o^3$ eſt $-So^3$, atque proinde $\frac{bb}{a^4} = S$.

Quo facto prodit medii densitas ut $\dfrac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ seu (l) $\dfrac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id (m) est si in VZ sumatur VY æqualis VG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum XZ & ZY quadrata. (n) Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3\,XY$ ad $2\,YG$; & (o) velocitas ea est, quâcum corpus in parabolâ pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii densitates in locis singulis G sint reciprocè ut distantiæ XY, quodque resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut $3\,XY$ ad $2\,YG$; & corpus de loco A, justâ cum velocitate emissum, describet hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exempl.

(l) * *Seu*, numeratore & denominatore in $\frac{a^4}{bb}$ ductis.

(m) * *Id est, si in VZ sumatur &c.* Est enim $VG = \frac{bb}{a-o} = \frac{bb}{a}$, & $VZ = \frac{m}{n}\overline{a-o} = \frac{m}{n}a$, ubi evanescit BD, seu o. Quare $VY - VZ = ZY = \frac{bb}{a} - \frac{m}{n}a$; & quia $ZX = DN = a$, & $YX^2 = YZ^2 + ZX^2$ erit $YX^2 = aa + \frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$; ideoque medii densitas ut $\frac{1}{XY}$.

(n) * *Resistentia autem &c.* Resistentia est ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, id est, ut $\frac{3bb}{a^4} \times \sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mb^2}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}$ ad $\frac{4b^4}{a^6}$, sive 120.
dividendo per $\frac{bb}{a^5}$, ut $3\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}$ ad $\frac{4bb}{a}$, seu ut $3\,XY$ ad $4\,VG = 2\,YG$.

(o) * *Et velocitas &c.* Hujus parabolæ latus rectum est $\frac{1+QQ}{R} = \dfrac{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}} = \dfrac{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}{\frac{bb}{a}} = \frac{YX^2}{VG}$. Velocitas autem est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$ adeoque ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

Exempl. 4. Ponatur indefinitè, quod linea AGK hyperbola ſit, centro X, aſymptotis MX, NX eâ lege deſcripta, ut conſtructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD ſecet hyperbolam in G & aſymptoton ejus in V, fuerit VG reciprocè ut ipſius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, (p) cujus index eſt numerus n: & quæratur medii denſitas, quâ projectile progrediatur in hâc curvâ.

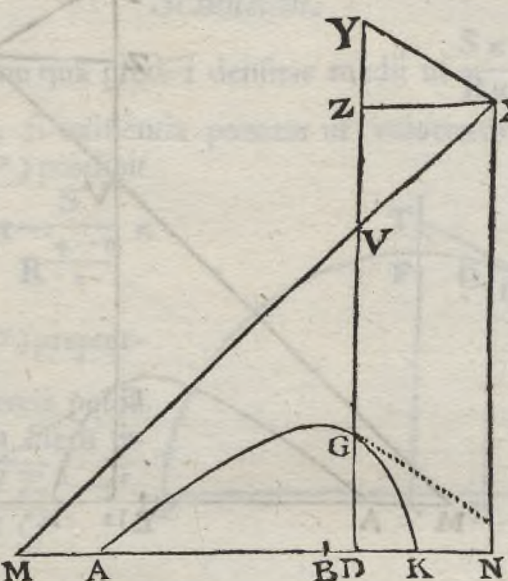
Pro BN, BD, NX ſcribantur A, O, C reſpective, ſitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis $A-O$, $VG=\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, $VZ=\frac{d}{e}\overline{A-O}$, & GD ſeu $NX-VZ-VG$ æqualis $C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$. (q) Reſolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$ in ſeriem infinitam $\frac{bb}{A^n}+\frac{nbb}{A^{n+1}}O+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2+\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet GD æqualis $C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O-\frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$

$+n^3$

(p) * *Cujus index eſt numerus n*, poſitivus. Hanc autem hyperbolam, dum producitur, ad lineas X M, X N etiam productas continuo accedere, eaſque non niſi in diſtantiâ infinitâ contingere poſſe manifeſtum eſt. Cùm enim ſit V G ut $\frac{1}{DN^n}$, ubi D N $=0$, hyperbola rectam XN attingit, & diſtantia V G infinita evadit; & ubi D N infinita fit, V G eſt nihil, & ideo hyperbola alteram aſymptoton X M tangit, in diſtantia infinita ab Aſymptoto X N.

(q) * *Reſolvatur terminus ille* $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, ſeu $bb\times\overline{A-O}^{-n}$, in ſeriem infinitam per formulam generalem (548. *lib.* 1.), & invenietur $bb\times\overline{A-O}^{-n}=bbA^{-n}+\frac{n}{1}bbA^{-n-1}O+\frac{n\times\overline{n+1}}{1.2}\times bbA^{-n-2}O^2+\frac{n\times\overline{n+1}\times\overline{n+2}}{1.2.3}bbA^{-n-3}O^3+$ &c. $=\frac{bb}{A^n}+\frac{nbbo}{A^{n+1}}+\frac{\overline{nn+n}\times bbO^2}{2A^{n+2}}+\frac{\overline{n^3+3n^2+2n}}{6A^{n+3}}\times bbO^3+$ &c.; Quo enim modo quo in n. 551. demonſtravimus formulam ad potentias, quorum exponentes ſunt fracti, applicari poſſe, eodem ferè modo eam ad potentias quorum exponens negativus eſt, applicari debere conſtabit.

$-\frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus ſeriei terminus ſecundus $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ uſurpandus eſt pro $Q\,o$, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$



pro $R\,o^2$, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro $S\,o^3$. Et inde medii denſitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in (r) loco quovis G, fit

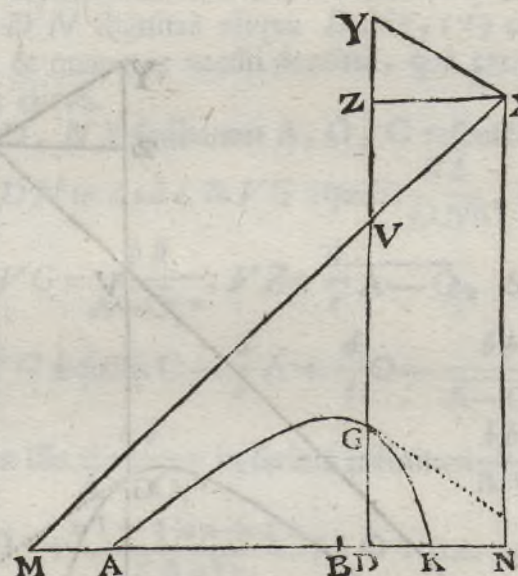
$$\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}},$$

ideoque ſi in VZ capiatur VY æqualis $n\times VG$, denſitas illa eſt reciprocè ut XY.

(r) * *In loco quovis G fit &c.* Invenitur enim $\frac{S}{R}=\frac{n+2}{3A}$, & $\sqrt{1+QQ}=\sqrt{1+\frac{dd}{ee}-\frac{2dnbb}{Ae^{n+1}}+\frac{nnb^4}{A^{2n+2}}}$; & ideo, ob datum numerum $\frac{n+2}{3}$, $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ eſt ut 120.

$$\frac{1}{\sqrt{AA+\frac{dd}{ee}AA-\frac{2dnbbA}{eA^n}+\frac{n^2b^4}{A^{2n}}}}$$

XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ (f) ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem in eodem loco G (t) fit ad gravitatem ut $3\,S$ in $\frac{XY}{A}$ ad $4\,RR$, id est, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est, quâcum corpus projectum in parabolâ pergeret, verticem

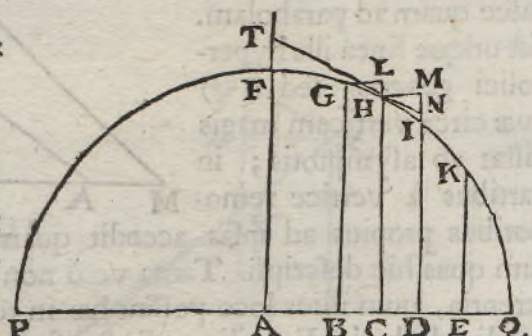


(f) * *Ipsarum XZ & ZY quadrata.* Nam $XZ = DN = A$ (hyp.), & $ZY = VY - VZ = n \times VG - \frac{d}{e}A = \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$; aut $ZY = VZ - VY = \frac{d}{e}A - \frac{nbb}{A^n}$, prout YV major vel minor est quam VZ. Quare cùm sit $XY^2 = XZ^2 + ZY^2$, densitas erit ut $\frac{1}{XY}$.

(t) * *Fit ad gravitatem ut &c.* Quoniam (ex dem.) $\frac{XY}{A} = \sqrt{1+QQ}$, erit $3S\sqrt{1+QQ} = \frac{3S \times XY}{A}$, & inde resistentia ad gravitatem ut $\frac{3S \times XY}{A}$ ad $4RR$, vel ut XY ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; sed $4RR \times A = \frac{\overline{nn+n^2} \times b^4}{A^{2n+3}}$, & $3S = \frac{\overline{nn+n} \times \overline{n+2}\,bb}{2A^{n+3}}$, ideoque $\frac{4RRA}{3S} = \frac{\overline{2nn+2n} \times bb}{\overline{n+2} \times A^n} = \frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$, cem G, diametrum GD & (u) latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2\,XY\ quad.}{nn+n \text{ in } \sqrt{VG}}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Eâdem ratione quâ prodiit densitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n, (x) prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}$. Et (y) propterea si curva inveniri potest eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}\Big|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}\,\Big|^{n-1}$: corpus movebitur in hâc curvâ in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad curvas simpliciores. Quo-



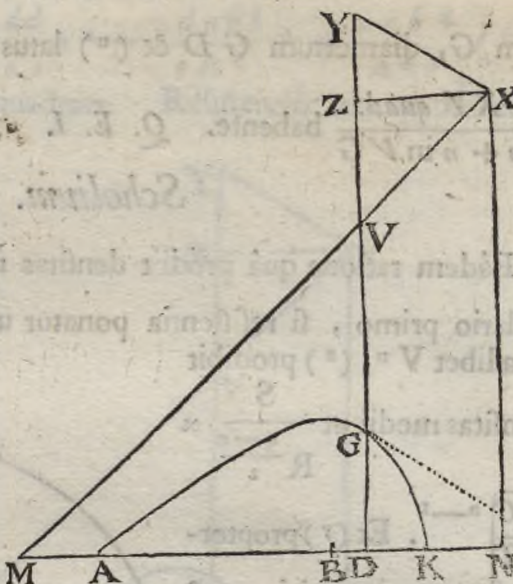
ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Quare resistentia est ad gravitatem ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$.

(u) * *Et latus rectum &c.* Est enim $\frac{XY^2}{A^2} = 1 + QQ$, & hinc $\frac{1+QQ}{R} = \frac{2\,XY^2 \times A^n}{\overline{nn+n} \times bb} = \frac{2\,XY^2}{\overline{nn+n} \times VG}$, ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Unde velocitas quæ est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, erit ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$, ob datam numerum $\frac{2}{nn+n}$. 120.

(x) * *Prodibit densitas ut medii ut &c.* (115).

(y) * *Et propterea &c.* Si enim fuerit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$ in ratione a ad b, erit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} = \frac{a}{b} \times \frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, & $\frac{S \times AC^{n-1}}{R^{\frac{4-n}{2}} \times HT^{n-1}} = \frac{a}{b}$, id est densi-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.



Quoniam motus non fit in parabolâ nisi in medio non resistente, in hyperbolis verò hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam projectile in medio uniformiter resistente describit, propius (z) accedit ad hyperbolas hasce quàm ad parabolam. Est utique linea illa hyperbolici generis, sed (a) quæ circa verticem magis distat ab asymptotis; in partibus à vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quàm pro ratione hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta verò non est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommodè adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quàm hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ verò in usum sic deducentur.

Com-

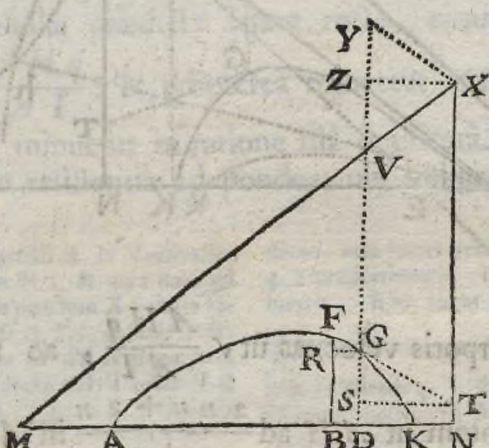
tas medii ut quantitas data $\frac{a}{b}$, & proinde uniformis. Est autem (*per cor.* 1. *prop.* X.) $\frac{HT}{AC} = \sqrt{1 + QQ}$: quare si data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, data quoque erit ratio quadratorum $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$, & contra.

(z) * *Accedit ad hyperbolas hasce*, cum iis tamen perfectè convenire nunquam potest, quod in hisce hyperbolis densitas medii reciprocè proportionalis sit rectæ variabili X Y, & præterea non satis manifestum sit curvam, quam projectile in medio uniformi describit in hypothesi resistentiæ velocitatis quadrato proportionalis, habere asymptotum verticalem ut X N: cùm præsertim in hâc resistentiæ hypothesi spatium motu horizontali insito descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (*per cor.* 1. *prop.* V). Verum tamen inveniri possunt hyperbolæ in quibus pro parte illâ exiguâ curvæ A G K, quæ in rebus practicis necessaria est, recta X Y sit quam proximè constans, & proindè medii densitas quam proxime uniformis; quo fit ut curvæ illæ in rebus practicis non incommodè adhiberi possint.

(a) * *Sed quæ circa verticem &c.* Hæc demonstrabuntur infra in notâ *h*.

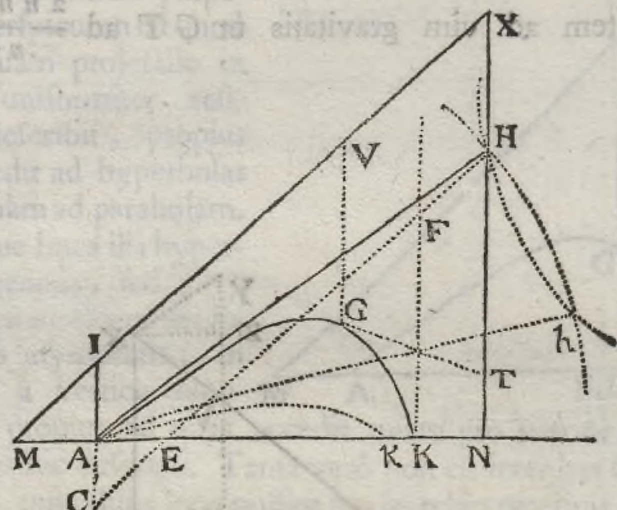
Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & (b) recta GT tanget hyperbolam in G, ideoque densitas medii in G, est reciprocè ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in GV.

Proin-



(b) * *Et recta G T tanget hyperbolam in G.* Ex puncto G ad ordinatam B F per B ductam, & ex puncto T ad ordinatam D G demissa sint perpendicula G R & T S, sitque G T tangens in G. Erit F R ad R G seu B D, ut G S ad S T, ob triangula similia F R G, G S T. Sed F R est $Q\,o$ seu $\frac{nbbO}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}O$, B D est O, & S T $=$ Z X $= A$. Quare erit $\frac{nbb}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}$ ad 1, seu $\frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$ ad A, ut G S ad Z X seu A. Supra invenimus Z Y $= \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$. Ergo Z Y $=$ G S; & ideo tangens G T æqualis est & parallela rectæ Y X. Est autem (*ex demonstr.*) densitas medii in G reciprocè ut Y X: quare densitas medii in G est reciprocè ut tangens G T, velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$, & resistentia ad gravitatem ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ G V. 120.

Proinde si corpus de loco *A* secundùm rectam *AH* projectum describat hyperbolam *AGK*, & *AH* producta occurrat asymptoto *NX* in *H*, actaque *AI* eidem parallela occurrat alteri asymptoto *MX* in *I*: erit (c) medii densitas in *A* reciprocè



ut *AH*, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad gravitatem ut *AH* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in *AI*. Unde prodeunt sequentes regulæ.

Reg. (d) 1. Si servetur tum medii densitas in *A*, tum velocitas quâ-

(c) * *Erit medii densitas &c.* Coincidente puncto G cum A, tangens GT cum tangente AH congruit, & recta VG cum AI, proindeque *medii densitas in A est reciprocè ut AH, & corporis &c.*

(d) * *Reg.* 1. Manentibus indice hyperbolæ n & densitate medii in A, manet tangentis longitudo AH quæ densitati reciprocè proportionalis est. Manente velocitate quâcum corpus è loco A projicitur, manet linea $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$ quæ est ut velocitas; & ideo cùm data sit AH, datur & AI. Ob parallelas GT, YX, est $TX = GY = GV + VY = GV + n \times GV$ (*Exemp.* 4.), & quia coincidente puncto G cum A, fit $GV = AI$, & $TX = HX$; erit $HX = AI + n \times AI$. Quare ob datas quantitates AI & *n*, datur & HX. Unde si longitudines illæ AH, AI, & HX in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expedite determinari potest. His enim datis, dantur puncta A, H & I. Per H ducatur

XHN

quâcum corpus projicitur, & mutetur angulus *NAH*; manebunt longitudines *AH*, *AI*, *HX*. Ideoque si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo *NAH* expeditè determinari potest.

Reg. (e) 2. Si servetur tum angulus *NAH*, tum medii densitas in *A*, & mutetur velocitas quâcum corpus projicitur; servabitur longitudo *AH*, & mutabitur *AI* in duplicatâ ratione velocitatis reciprocè.

Reg. (f) 3. Si tam angulus *NAH*, quàm corporis velocitas in *A*, gravitasque acceleratrix servetur, & proportio resistentiæ in *A* ad gravitatem motricem augeatur in ratione quâcunque; augebitur proportio *AH* ad *AI* in eâdem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$: & propterea minuetur *AH* in eâdem ratione, & *AI* minuetur in ratione illâ duplicatâ. (g) Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub

XHN recta horizontali AN Verticalis, & dabitur punctum N; & quia data est HX, dabitur etiam punctum X; datis verò punctis duobus X & I, dabitur recta XIM cum puncto M ubi horizontalem MN secat. Unde ductâ quâvis rectâ VD ad horizontalem AN normali, si in ea capiatur VG ad AI, ut est AN^n ad DN^n, vel ut XI^n ad XV^n, dabitur punctum G in trajectoria AGK. Est enim (*Exemplo* 4.) ordinata quævis VG ad alteram ordinatam IA, ut AN^n ad DN^n, seu ut XI^n ad XV^n.

(e) * *Reg.* 2. Servatâ medii densitate in A, servabitur tangentis longitudo AH, quæ est ut densitas inversè. Et quia velocitas in A est ut $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & velocitatis quadratum ut $\frac{AH^2}{AI}$, id est, ut $\frac{1}{AI}$ ob datam AH; erit AI velocitatis quadrato reciprocè proportionalis.

(f) * *Reg.* 3. Datâ corporis velocitate & gravitate acceleratrice in A, datur longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ tum velocitatis quadrato, tum lateri recto parabolæ (*Exemp.* 4.) proportionalis. Est autem resistentia 120.
motrix, si ita loqui fas est, ad gravitatem motricem, ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times AI$ (*Exemp.* 4.). Quare si proportio resistentiæ motricis in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacumque, augebitur proportio AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ AI, seu, ob datum numerum $\frac{2nn+2n}{n+2}$ augebitur proportio AH ad AI in eâdem ratione; & quia longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ constans est, ac proinde $\frac{AH}{AI}$ est ut $\frac{1}{AH}$, & AI ut AH^2, necessum est ut AH minuatur in ratione quâ augetur $\frac{AH}{AI}$, & ut AI minuatur in ratione illâ duplicatâ.

(g) 121. * *Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus &c.* Corpus specificè gravius vel levius dicitur, quod sub æquali ſub æquali magnitudine ſit minor, vel medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminutâ diminuitur in minore ratione quàm pondus.

Reg. (h) 4. Quoniam denſitas medii prope verticem hyperbolæ major eſt quàm in loco A; ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium HT ad tangentem AH inveniri, & denſitas in A augeri in ratione paulo ma-

li volumine majus vel minus pondus habet quàm alterum corpus quocum comparatur; & ideo gravitas ſpecifica corporis, volumine dato, eſt ut ipſius pondus abſolutum, id eſt, datâ gravitate acceleratrice, ut corporis maſſa (*per defin.* 7. *& not.* 3. *lib.* 1.). At, dato volumine, maſſa eſt ut denſitas (2. *lib.* 1.); quare gravitas ſpecifica corporis eſt ipſius denſitati proportionalis. Augetur itaque proportio reſiſtentiæ ad gravitatem motricem ſeu ad corporis pondus, tum ubi manentibus corporis volumine, figurâ & velocitate ac medii denſitate, manenteque proinde reſiſtentiâ, gravitas ſpecifica fit minor; tum ubi, cœteris paribus, medii denſitas augetur, quo caſu medii reſiſtentia creſcit cum denſitate, & corporis pondus in fluido denſiori & ſpecificè graviori magis ſublevati minuitur; tum ubi reſiſtentia ex magnitudine corporis diminutâ, diminuitur in minori ratione quàm pondus. Ex quibus liquet tertiam regulam determinandis motibus corporum variæ magnitudinis & denſitatis accommodatam eſſe.

122. *Lemma.* Datâ curvâ A G K, invenire minimam tangentium G T. Quoniam (ex dem. in Exemp. 4.) $XY^2 = GT^2 = A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eB^{n-1}} + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$; hujus quantitatis, in quâ ſi detur curva A G K, ſola eſt variabilis A, fluxio ponenda eſt nihilo æqualis (48). Brevitatis causâ dicantur $1 + \frac{dd}{ee} = f$, $\frac{2dnbb}{e} = 2g$, $nnb^4 = h$, & $A = x$; erit $GT^2 = fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}$; & ſumptis fluxionibus, $0 = 2fxdx + \overline{n-1} \times 2gx^{-n}dx - 2nhx^{-2n-1}dx$. Dividatur æquatio tota per $2xdx$, & fiet $0 = f + \overline{n-1}gx^{-n-1} - nhx^{-2n-2}$; & multiplicando per x^{2n+2}, $fx^{2n+2} + \overline{n-1}gx^{n+1} = nh$, unde eruitur, ut fit in reſolutione æquationum ſecundi gradus,

$$x^{n+1} = \frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f},$$

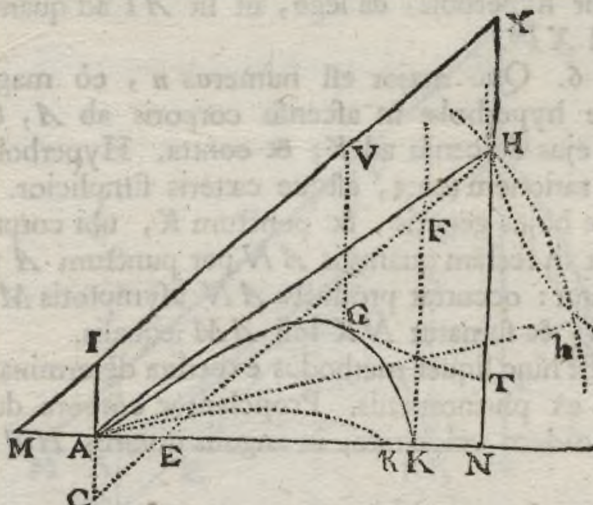
& hinc habetur

$$x = \left(\frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Quare ſi loco x ſubſtituatur, hic ipſius valor in æquatione $GT = \sqrt{fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}}$, obtinebitur minima tangentium. Q. E. I.

123. *Cor.* Si curva A G K ſit hyperbola conica, erit index $n = 1$, & ideo $n - 1 = 0$, & $x = \sqrt[4]{\frac{h}{f}}$. Unde invenitur $GT^2 = f\sqrt[2]{\frac{h}{f}} - 2g + \frac{h}{\sqrt{\frac{h}{f}}} = 2\sqrt[2]{hf} - 2g = \frac{2bb}{e}\sqrt{ee+dd} - \frac{2dbb}{e} = 2bb \times \frac{[\sqrt{ee+dd} - d]}{e}$. Quia vero (*Exemp.* 4.) $d : e = VZ : XZ = XN : MN$, ac proinde $dd : ee = XN^2 : MN^2$, & componendo $dd + ee : ee = XN^2 + MN^2$, ſeu $MX^2 : MN^2$, atque adeo $\frac{\sqrt{ee+dd}}{e} = \frac{MX}{MN}$, & $\frac{d}{e} = \frac{XN}{MN}$; erit $\frac{\sqrt{ee+dd} - d}{e} = \frac{MX - XN}{MN}$. Præterea (*Exemp.* 4.) eſt $VG = \frac{bb}{DN}$, $AI = \frac{bb}{AN}$, & hinc $2AI \times AN = 2bb$. Erit igitur minimæ tangentium quadratum $GT^2 = \frac{2AI \times AN}{MN} \times \overline{MX - XN}$.

(h) * *Reg.* 4. Quoniam denſitas in loco quovis G eſt reciprocè ut tangens G T, quæ prope verticem hyperbolæ minor eſt quàm in loco A; manifeſtum eſt denſitatem medii prope verticem hyperbolæ majorem eſſe quàm in loco A. Denſitas jore quàm ſemiſummæ harum tangentium ad minimam tangentium GT.



(i) *Reg.* 5. Si dantur longitudines AH, AI, & deſcribenda

ſitas in loco A dicatur K, in loco G per quem ducitur tangentium minima G T, dicatur B; & erit $K : B = GT : AH$, & hinc $K+B : K = GT+AH : GT$, & $\frac{K+B}{2} : K = \frac{GT+AH}{2} : GT$. Eſſet autem $\frac{K+B}{2}$ denſitas mediocris, ſi tangens A H foret omnium maxima, ſicuti G T (hyp.) eſt omnium minima; & ideo, ut medii denſitas ferè tanquam uniformis haberi poſſet, augenda eſſet denſitas in A in ratione ſemiſummæ tangentium $\frac{GT+AH}{2}$ ad minimam tangentium G T. Verùm quia tangens A H non eſt omnium maxima, ſed tangentes aliæ ad partes curvæ verſus K ductæ majores ſunt; denſitas in A augenda eſt in ratione paulo majore quàm ſemiſummæ $\frac{GT+AH}{2}$ ad G T, ut medium tanquàm uniforme ferè cenſeatur. Atque hoc pacto errores oriundi ex eo quod medium in loco A denſius ſupponatur, corrigentur ferè aliis erroribus qui naſcuntur ex eo quod in G medium rarius fingatur quam pro ratione curvæ A G K. 123.

Interim liquet veram trajectoriam quam corpus in medio uniformi deſcribit, circa verticem magis diſtare ab aſymptotis, & in partibus à vertice remotioribus propius ad ipſas accedere quàm pro ratione hyperbolarum in medio non uniformi deſcriptarum. Nam ſi e loco A, cum velocitate $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & directione A H projiciatur corpus in medio cujus denſitas uniformis æqualis ſit denſitati mediocri medii in quo deſcribitur hyperbola A G K; ob majorem medii uniformis denſitatem in A, qua corporis velocitas impreſſa magis minuitur, trajectoria intra hyperbolam continebitur, adeoque prope verticem ab aſymptotis magis diſtabit; & quia prope verticem eſt magis depreſſa, in partibus verſus K à vertice remotioribus ad aſymptotum N X propius accedet quàm hyperbola A G K; cum præſertim in medio uniformi ſpatium motu horizontali deſcriptum, ſemotâ gravitate, infinitum evadat (*per cor.* 1. *prop. V.*

(i) * *Reg.* 5. Si dentur longitudines AH, da ſit figura AGK: produc HN ad X, ut ſit HX ad AI ut $n+1$ ad 1, centroque X & aſymptotis MX, NX per punctum A deſcribatur hyperbola, eâ lege, ut ſit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n.

Reg. (k) *6.* Quò major eſt numerus n, eò magis accuratæ ſunt hæ hyperbolæ in aſcenſu corporis ab A, & minus accuratæ in ejus deſcenſu ad K; & contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, eſtque cæteris ſimplicior. Igitur ſi hyperbola ſit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A tranſeuntem, quæratur: occurrat producta AN aſymptotis MX, NX in M & N, & ſumatur NK ipſi AM æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo ſimilia & æqualia, eâdem velocitate, in angulis diverſis HAK, hAk, inci-

AH, AI cum angulo HAN, & deſcribenda ſit figura AGK: ex puncto H ad horizontalem AN demitte perpendiculum HN; produc HN ad X, ut ſit HX æqualis facto ſub $n+1$ & AI (demonſtravimus enim in notâ ad reg. 1. eſſe HX æqualem facto $\overline{n+1} \times AI$) centroque X & aſymptotis MX, NX per punctum A deſcribatur hyperbola, eâ lege, ut ſit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n: eſt enim (*per hyp. Exemp.* 4.) VG ad AI, ut AN^n ad DN^n, ſeu ut XI^n ad XV^n.

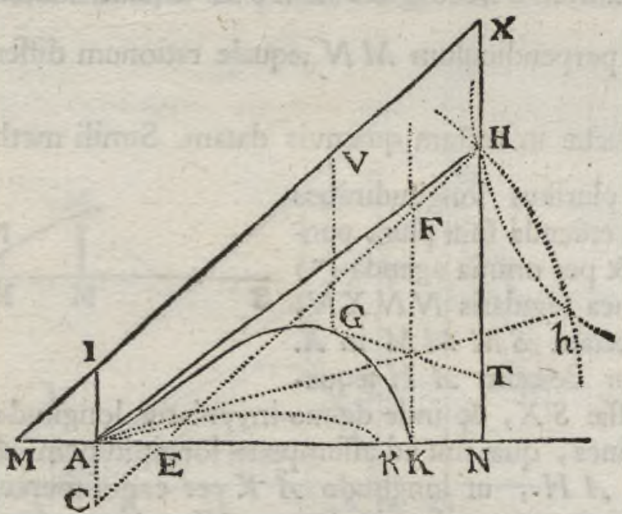
(k) * *Reg. 6.* Quo major eſt numerus n, eo magis hæ hyperbolæ in aſcenſu corporis ab A accedunt ad trajectorias in medio uniformi deſcriptas, & eo minus in deſcenſu ad K accuratæ ſunt; & contrà. Nam quò major eſt numerus n, eò minus tangens GT, quæ denſitati reciprocè proportionalis eſt, in aſcenſu corporis ab A variatur; & eo magis in deſcenſu ad K mutatur, quippe data ſit medii denſitas in A cum angulo projectionis HAN, & quantitas $\frac{n+2}{AH}$ denſitati in A (*Exemp.* 4.) proportionalis, data erit, ideoque tangens AH eo longior erit quò major fuerit numerus n; & quia dato angulo HAN, datur ſpecie triangulum rectangulum HNA, ratioque proinde laterum AH, AN, HN etiam datur, liquet quod creſcente AH aut numero n, creſcant quoque latera AN & HN. Ex demonſtratis in Exemplo 4°. corpore aſcendente tangentis GT quadratum $GT^2 = DN^2 + [ZV - nVG]^2$, & corpore deſcendente eſt $GT^2 = DN^2 + [nVG - ZV]^2$. Ex natura hyperbolæ AGK, eſt $DN^n : AN^n = AI : VG$, ideoque $nVG = \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}$. Ex demonſtratione regulæ $1^{æ}$, $HX = \overline{n+1} \times AI$, & proinde $NX = HN + \overline{n+1} \times AI$, & $NX - AI = HN + nAI$. Sed ob triangula XZV, MNX; MAI ſimilia, ZX ſeu DN eſt ad ZV, ut MN ad NX, & ut MA ad AI, & diviſim DN eſt ad ZV, ut AN ad NX − AI ſeu HN + nAI; unde fit $ZV = \frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN}$.

Quarè in corporis aſcenſu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN} \; \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}\right)^2$

&

ncidantque in planum horizontis in *K* & *k*; & notetur proportio *AK* ad *Ak*. Sit ea *d* ad *e*. Tum erecto cujusvis lon-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

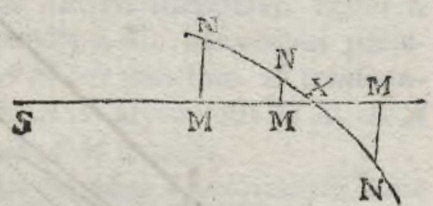


gitudinis perpendiculo *AI*, assume utcunque longitudinem *AH* vel *Ah*, & (1) inde collige graphicè longitudines *AK*; *Ak*,

& in descensu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{n AI \times AN^n}{DN^n} \frac{DN \times HN + n AI \times DN}{AN}\right)^2$. Jam verò si numerus *n* satis magnus fuerit, lineæ AH, AN, HN tam in ascensu quam in descensu corporis longiores sunt, & in ascensu ab A est fere DN æqualis AN, in descensu verò DN quantum libet minor ipsâ AN. Unde in ascensu ab A est fere $\frac{n AI \times DN}{AN} = n AI$ & ideo $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN \times HN}{AN}\right)^2 = DN^2 + HN^2$ ferè. Est autem $AH^2 = AN^2 + HN^2$: quare ratio GT ad AH in ascensu corporis ab A est fere æqualitatis, dum numerus *n* satis magnus supponitur, ac proinde non multum variatur densitas: In descensu verò ad K, fit DN quantumlibet exigua respectu datæ AN, & ideo quantitas $\frac{n AI \times AN^n}{DN^n}$ vehementer crescit, & hinc tangens GT multum variatur ubi numerus *n* magnus est. Contra fit, si numerus ille sit admodum exiguus. Porro cùm numerus *n* possit esse quilibet integer vel fractus, & in hyperbola conica sit *n* æqualis unitati, quæ veluti medium locum tenet inter numeros omnes integros & fractos, satis manifestum est hyperbolam conicam inter superiores omnes & inferiores hyperbolas mediocrem rationem tenere, & quia etiam cæteris simplicior est, posse loco veræ trajectoriæ in medio uniformiter denso adhiberi. Si igitur hyperbola AGK sit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN, horizontalem vel horizonti obliquam, per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta AN asymptotis MX, NX, in M & N, & sumatur NK ipsi AM æqualis, & habebitur punctum K (per theor. 1. de conicis). 123.

(1) * *Et inde collige graphicè &c.* Datâ enim tangente AH, tum magnitudine tum positione, datur verticalis HN

Ak; per reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* ſit eadem cum ratione *d* ad *e*, (m) longitudo *AH* rectè aſſumpta fuit. Sin minus cape in rectâ infinitâ *SM* longitudinem *SM* æqualem aſſumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex aſſumptis pluribus longitudinibus *AH* invenienda ſunt plura puncta *N*, & per omnia agenda (n) curva linea regularis *NNXN*, ſecans rectam *SMMM* in *X*. Aſſumatur demum *AH* æqualis abſciſſæ *SX*, & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ ſint ad aſſumptam longitudinem *AI* & hanc ultimam *AH*, ut longitudo *AK* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *AK*, erunt veræ illæ longitudi-

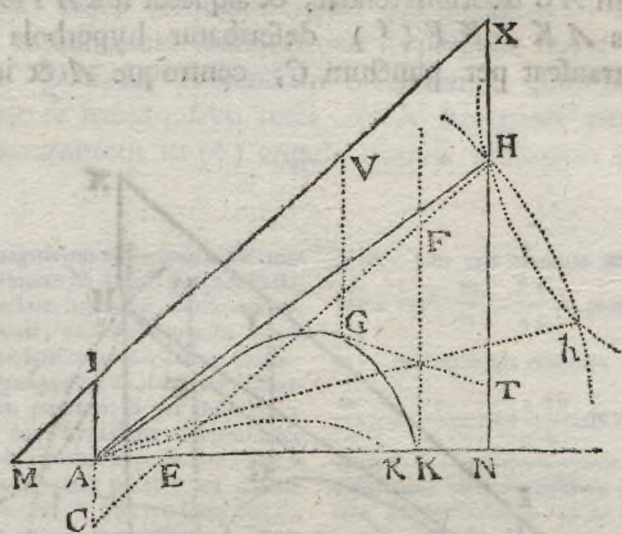


cum puncto N; & quia aſſumitur etiam A I, & eſt H X = 2 A I (per dem. reg. 1^{æ}.) ob $n = 1$; dabitur hyperbolæ centrum X, & inde ob datum punctum I dabitur aſymptotus altera X I M cum puncto M in horizontali M N; & capiendo N K æqualem datæ M A, dabitur punctum K, & hinc longitudo A K obtinebitur. Eodemque modo invenietur altera longitudo A k.

(m) * *Longitudo A H rectè aſſumpta fuit.* Datâ medii denſitate in A cum velocitate corporis ſub diverſis angulis H A K, h A k projecti, manet perpendiculum A I, & tangens A H æqualis eſt tangenti A h (*per regulam* 1^{am}). Datis tangente A H, angulo H A K & perpendiculo A I, hyperbola A G K deſcribi poteſt (*per reg.* 6^{am}. *& notam præced.*) & ideo data eſt tum ſpecie, tum magnitudine. Unde ſi dentur tantum angulus H A K & ratio tangentis H A ad A I, hyperbola A G K ſpecie tantum dabitur, id eſt, omnes hyperbolæ, quæ ex his duobus datis deſcribentur, ſimiles erunt. Quare ſi in hyperbolâ A G K, quæ in chartâ deſcripta ſupponitur, tangens aſſumpta A H ſit ad perpendiculum A I, ut tangens hyperbolæ quam corpus ſub angulo æquali H A K projectum in medio reſiſtente deſcribit, eſt ad ſuum perpendiculum A I; hyperbola A G K in charta deſcripta ſimilis erit hyperbolæ quæ in medio reſiſtente deſcribitur. Et eodem argumento altera hyperbola, cujus eſt amplitudo A k, & tangens A h, manente perpendiculo A I, ſimilis erit hyperbolæ illi quam corpus ſub angulo æquali h A k, projectum in ſecundo experimento deſcribit. Quâ propter, ob figurarum in chartâ & in medio reſiſtente deſcriptarum ſimilitudinem, amplitudines A K, A k erunt inter ſe ut homologæ amplitudines hyperbolarum quæ in experimentis deſcriptæ ſunt, id eſt, A K : A k = d : e.

(n) * *Curva regularis.* Vide notam 75. lib. hujus.

tudines *AI* & *AH*, (°) quas invenite oportuit. Hifce verò datis dabitur & refiftentia medii in loco *A*, (p) quippe quæ fit ad vim gravitatis ut *AH* ad $\frac{4}{3}$ *AI*. Augenda eft autem den-



fitas medii per reg. 4. & refiftentia modo inventa, fi (q) in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.

Reg. 8. Inventis (r) longitudinibus *AH*, *HX*; fi jam defide-

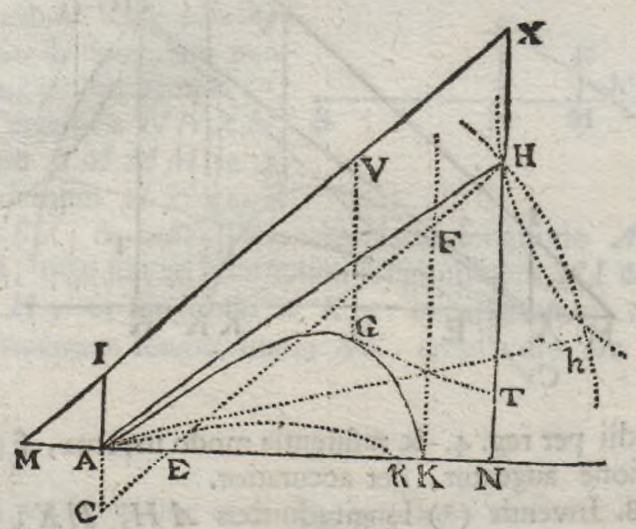
(o) * *Quas invenire oportuit.* Cùm enim abfciffa S M longitudini affumptæ A H æqualis fit, & rationum differentia $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ exponatur per ordinatam M N; ubi fit S M = S X & proinde M N = o, eft etiam $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e} = o$, & ideo $\frac{AK}{Ak} = \frac{d}{e}$, atque S X æqualis veræ longitudini affumendæ A H (*per not. præced.*). Si itaque ex datis perpendiculo A I & verâ longitudine inventâ A H cum angulo H A N quæratur, ut fupra, longitudo A K; ob fimilitudinem figurarum in medio refiftente & in charta defcriptarum, erit longitudo A K experimento cognita ad longitudinem A K ultimo inventam in charta, ut longitudo A H in medio refiftente ad longitudinem A H in chartâ ductam, atque etiam ut perpendiculum A I in medio refiftente ad perpendiculum A I in charta affumptum. Quibus inventis, defcribi poterit hyperbola fimilis & æqualis hyperbolæ, quam corpus in medio refiftente defcripfit.

(p) * *Quippe quæ fit ad vim gravitatis &c.* Ex demonftratis in hoc fcholio ante regulam 1am. refiftentia eft ad gravitatem ut A H ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ A I, hoc eft, ut A H ad $\frac{4}{3}$ A I, ob $n = 1$ (per hyp.).

(q) * *Si in eadem ratione augeatur.* Nam datâ velocitate, refiftentia eft ut medii denfitas.

(r) * *Inventis longitudinibus AH, HX &c.* Inventis enim (*per reg.* 7.) lineis A I & A H, datur linea H X, ut pote quæ æqualis eft 2 A I, ob $n = 1$, (*reg.* 5.).

ſideretur poſitio rectæ AH, ſecundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emiſſum incidit in punctum quodvis K: ad puncta A & K erigantur rectæ AC, KF horizonti perpendiculares, quarum AC deorſum tendat, & æquetur ipſi AI ſeu $\frac{1}{2}HX$. Aſymptotis AK, KF (ſ) deſcribatur hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum C, centroque A & intervallo



AH deſcribatur circulus ſecans hyperbolam illam in puncto H; & projectile ſecundum rectam AH emiſſum incidet in punctum K. *Q. E. I.* Nam punctum H, (t) ob datam longitudinem AH, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur CH occurrens ipſis AK & KF, illi in E, huic in F; & (u) ob parallelas CH, MX & æquales AC, AI, erit AE æqualis

(ſ)* *Deſcribatur hyperbola* (346. lib. 1.)

(t) * *Ob datam longitudinem AH*, per reg. 1am.

(u)* *Et ob parallelas CH, MX &c.* Nam ſi ſupponamus H eſſe punctum quæſitum, per quod ducenda eſt recta A H, erit (*per conſtr.*) H X æqualis & parallela I C, & ideo C H parallela I X ſeu M X, ac triangula C A E, I A M ſimilia proindeque cum ſit C A = A I (*per conſtr.*) erit etiam A E = M A = K N, (*per theor. 1. de Conicis*). Sed ob triangula ſimilia C A E, H N E, & ob parallelas K F, N H, eſt C E : A E = E H : E N = F H : K N. Cum igitur ſit A E = K N, erit quoque C E = F H; ac proinde incidit punctum H in hyperbolam (*per theor. 1. de hyp.*)

lis AM, & propterea etiam æqualis KN. Sed CE eſt ad AE ut FH ad KN, & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam aſymptotis AK, KF deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum C, atque ideo reperitur in communi interſectione hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem, quòd hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta AKN horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in (x) angulo quovis inclinata: (y) quodque

(x) * *In angulo quovis inclinata.* Demonſtratio enim lineam M A K N per puncta data A & K ductam horizonti parallelam eſſe minime ſupponit, eademque prorſus manet ſi linea illa ad horizontem inclinata fuerit.

(y) * *Quodque ex duabus interſectionibus.* Quoniam punctum H per interſectionem circuli cum hyperbola determinatur (*ex dem.*), & circulus hyperbolam in duobus punctis interſecare poteſt, ex duabus interſectionibus H, h duo prodeunt anguli, ſeu duæ ſunt poſitiones tangentis A H ſecundum quam projectile datâ velocitate emiſſum incidit in punctum K.

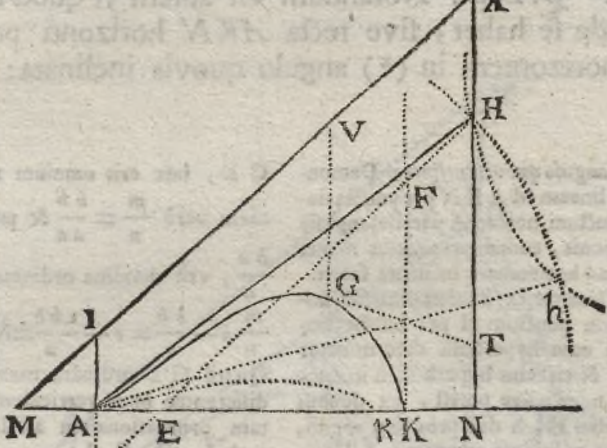
124. *Problema.* Inventis longitudinibus A I & A H, maximam altitudinem G D, ad quam corpus ſub angulo dato H A N projectum pertingere poteſt, definire.

Sit, ut in exemplo 3°. (*vid. fig. pag.* 93.) $BN = a$, $BD = o$, $NX = c$, ratio data VZ ad ZX, ſeu A I ad A M $= \frac{m}{n}$, $VG = \frac{bb}{a}$, ideoque $AI = \frac{bb}{AN}$, & $bb = AI \times AN$. Et erit (*Exemp.* 3°.) $GD = c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ &c.; & $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{a}o = Qo$. Eſt autem Qo ut ordinatæ G D fluxio, quæ, ut habeatur ordinata omnium maxima, nihilo æquanda eſt (48): quare erit $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$, & $aa = \frac{nbb}{m}$, ſive $DN^2 = \frac{AM \times AI \times AN}{AI} = AN \times AM$. Si ergo capiatur D N media proportionalis inter A N & A M, ducaturque per D ordinata G D, hæc erit omnium maxima. Quoniam verò $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$ & proinde $\frac{m}{n}a = \frac{bb}{a}$, erit maxima ordinata G D ſeu $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} = c - \frac{2bb}{a} = NX - \frac{2AI \times NA}{DN}$. Quare G D ordinata maxima æqualis eſt differentiæ inter verticalem N X & quartam proportionalem ad D N, A N & 2 A I. Q. E. I. 124.

125. *Problema.* Datis longitudinibus A I & A H, angulum projectionis H A N maximæ omnium amplitudini A K convenientem invenire. Dicantur $AH = a$, $AI = b$, $HX = 2AI = 2b$, $AK = e$, $AN = x$, $HN = y$, & erit $x - e = KN = MA = AE$, ac $b = AI = AC$ (*per reg.* 8), proindeque $EN = AK = e$. Triangula ſimilia E A C, E N H hanc proportionem ſuppeditant, $AE(x-e) : EN(e) = AC(b) : HN(y)$, & componendo $x : e = b+y : y$, unde habetur $e = \frac{xy}{b+y}$, $x = \frac{be+ey}{y}$, & $xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$. Eſt etiam, ob angulum A N H rectum, $aa - yy = xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$, & hinc $aayy - y^4 = ee[b+y]^2$. Capiatur hujus æquationis fluxio, & amplitudinis maximæ e fluxione nihilo æquatâ (48), erit illa $2a^2ydy - 4y^3dy = 2ee[b+y]dy$, &, dividendo per $2dy$, $aay - 2y^3 = ee[b+y]$. Erat autem $e = \frac{xy}{b+y}$, & ideo $ee = \frac{xxyy}{[b+y]^2}$

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

que ex duabus interſectionibus H, h duo prodeunt anguli NAH, NAh; & quod in praxi mechanicâ ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad



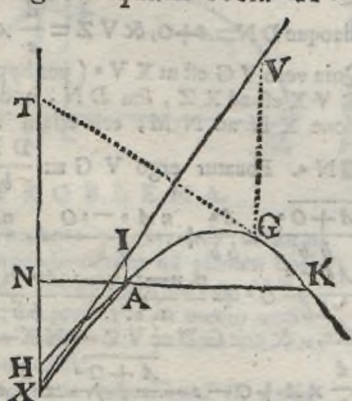
punctum C, ut ejus pars FH, circulo & rectæ FK interjecta, æqualis ſit ejus parti CE inter punctum C & rectam AK ſitæ.

Quæ

$= \frac{aayy - y^4}{[b+y]^2}$, ac proinde $ee(b+y) = \frac{aayy - y^4}{b+y}$. Quare erit $aay - 2y^3 = \frac{aayy - y^4}{b+y}$, ſive $aaby + aay^2 - 2by^3 - 2y^4 = aay^2 - y^4$, unde, reductione factâ & diviſis terminis per y, eruitur $aab = 2byy + y^3$. Hâc igitur æquatione reſolutâ, invenitur y ſeu HN ſinus anguli HAN, exiſtente ſinu toto AH. Q. E. D.

126. *Cor.* Manifeſtum eſt in æquatione $aab = 2byy + y^3$, quantitatem $2byy$ minorem eſſe quantitate aab, & proinde quadratum yy, ſeu HM^2, minus dimidio quadrato $\frac{1}{2}aa$ vel $\frac{1}{2}AH^2$; unde ſequitur angulum quæſitum HAN ſemirecto minorem eſſe, qui, ſi medium non reſiſteret, foret ſemirectus. *Sit* medii denſitas, adeoque & reſiſtentia, admodum parva, & erit ferè $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, atque $aab = 2byy + ayy\sqrt{\frac{1}{2}}$, & hinc $yy = \frac{aab}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}$, ac $y = a\sqrt{\frac{b}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}}$, quàm proximè.

Quæ de hyperbolis dicta sunt facilè applicantur ad parabolas. Nam si $XAGK$ parabolam designet quam recta XV tangat in vertice X, sintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abscissarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH; quarum XT parallela sit VG & GT, AH parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, secundum rectam AH productam, justâ cum velocitate projectum, describet hanc parabolam, si modò densitas medii, in locis singulis G, sit reciprocè ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quâcum projectile pergeret, in spatio non resistente in parabolâ conicâ verticem G, diametrum VG deorsum productam, & latus rectum $\frac{2\,GTq}{nn - n \times VG}$ habente. Et resistentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn - 2n}{n-2} VG$. Unde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur parabolæ vertex X, & positio rectæ XI, & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia parabolæ puncta G, (z) per quæ projectile transibit.

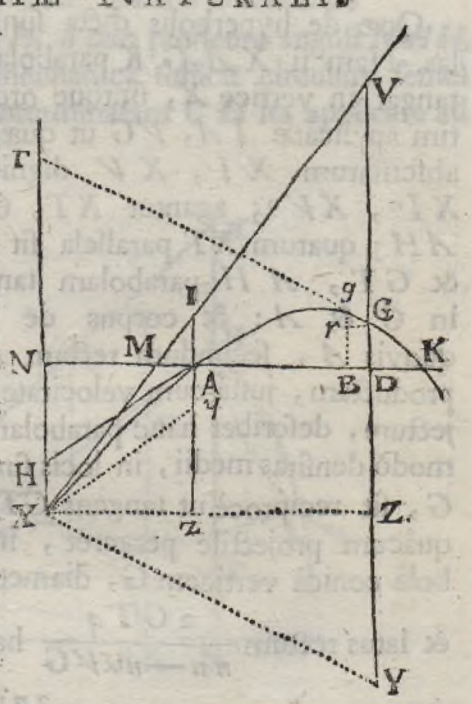


(z) *Per quæ projectile transibit.* Producatur VG ut horizontalem NK secet in D, & rectam XZ horizonti parallelam in Z. Pro BN, BD, NX scribantur A, O, e, respectivè; sitque M intersectio linearum XV, NK; & XN ad NM, sive 126.

ob

ob triangulorum X N M, V Z X similitudinem, V Z ad Z X vel D N ut d ad e; ideoque D N $= A + O$, & V Z $= \frac{d}{e} \times \overline{A+O}$.

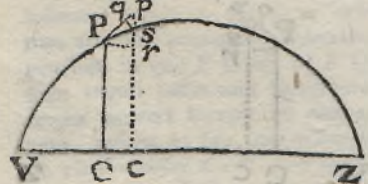
Quia vero V G est ut X V^{n} (per hypoth.), & V X est ad X Z, seu D N, in datâ ratione X N ad N M; erit etiam V G ut D N^{n}. Ponatur ergo V G $= \frac{DN^{n}}{bb} = \frac{\overline{A+O}^{n}}{bb} = \frac{A^{n}}{bb} + \frac{nA^{n-1}O}{bb} + \frac{n.\overline{n-1}}{1.\,2}\frac{A^{n-2}}{bb}O^{2} + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\,2.\,3.}\frac{A^{n-3}}{bb}O^{3} +$ &c., & erit G D $=$ V Z $-$ N X $-$ V G $= \frac{d}{e} \times \overline{A+O} - c - \frac{\overline{A+O}^{n}}{bb} = \frac{d}{e}A - c - \frac{A^{n}}{bb} + \frac{d}{e}O - \frac{nA^{n-1}}{bb}O - \frac{(nn-n)A^{n-2}}{2bb}O^{2} - \frac{(n^{3}-3nn+2n)A^{n-3}}{6bb}O^{3} -$ &c. Quare erit $Q = \frac{nA^{n-1}}{bb} - \frac{d}{e}$; $R = \frac{\overline{nn-n}A^{n-2}}{2bb}$, & $S = \frac{\overline{n^{3}-3nn+2n}A^{n-3}}{6bb}$. Per punctum B ducatur ordinata B g, ad quam demittatur ex G perpendiculum G r, sitque X Y æqualis & parallela tangenti G T; & ob triangula G r g, X Z Y similia, erit Gr^{2} ad Gg^{2} ut XZ^{2} seu DN^{2} ad XY^{2} vel GT^{2}; est autem $Gr^{2} = O^{2}$, $rg^{2} = QQOO$, & ideo $Gg^{2} = OO \times \overline{1+QQ}$: quare cum sit etiam B N seu D N $= A$, erit $GT^{2} = AA \times \overline{1+QQ}$, $GT = A\sqrt{1+QQ}$, & $\frac{GT}{A} = \sqrt{1+QQ}$. Per coroll. 1. prop. X. medii densitas in loco G est ut $\frac{S \times A}{R \times GT}$, & (*ex demonstratis*) $\frac{S}{R} = \frac{n-2}{3A}$, ideoque $\frac{S \times A}{R \times GT}$ est ut $\frac{n-2}{3GT}$; quare, ob datum numerum $\frac{n-2}{3}$, densitas est reciprocè ut tangens G T. Velocitas in G (*per prop.* X.) ea est, quâ cum projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabolâ conicâ verticem G,



diametrum G D, & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ habente; & ideò cum sit $\frac{1+QQ}{R} = \frac{GT^{2}}{A^{2}R} = \frac{2GT^{2}}{\overline{nn-n} \times \frac{A^{n}}{bb}} = \frac{2GT^{2}}{\overline{nn-n} \times VG}$ (*ex dem.*), parabolæ latus rectum erit $\frac{2GT^{2}}{\overline{nn-n}.\,VG}$. Resistentia in G (*per cor.* 1. *prop.* X.) est ad vim gravitatis, ut $3S \times GT$ ad $4RR \times DN$, id est, ut G T ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; sed $4RR \times A = \frac{\overline{nn-n}^{2} \times A^{2n-3}}{b^{4}}$, & $3S = \frac{\overline{nn-n} \times \overline{n-2}}{2} \times \frac{A^{n-3}}{bb}$, atque ideo $\frac{4RR \times A}{3S} = \frac{2nn-2n}{n-2} \times \frac{A^{n}}{bb} = \frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. Erit igitur resistentia ad gravitatem, ut G T ad ad $\frac{2nn-2n}{n-1} \times VG$. Velocitas in loco G (*per prop.* X.) eſt ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}} = \sqrt{\frac{2GT^2}{nn-n \times VG}}$, ideoque ob datum numerum $\frac{2}{nn-n}$, ut $\frac{GT}{\sqrt{VG}}$.

Quando igitur corpus eſt in A, medii denſitas eſt ut $\frac{1}{AH}$, & velocitas ut $\frac{AH}{\sqrt{AI}}$; unde manente tum denſitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, & mutato utcumque angulo NAH, manebunt AH, & $\frac{AH}{\sqrt{AI}}$, ac proinde AI. Quia porro $ZY^2 = XY^2 - XZ^2 = GT^2 - DN^2 = AA \times \overline{1+QQ} - AA = AAQQ$, & ideo $ZY = Q \times A = \frac{nA^n}{bb} - \frac{d}{e}A = nVG - VZ$, atque $ZY + VZ = VY = nVG$; erit in loco A, $Iy = n \times AI$, & hinc $Ay = XH = nAI - AI$. Quare manente AI, manebit etiam HX, ob datum numerum $n-1$. Inveniantur, uti regulâ 7â. pro hyperbolâ factum eſt, longitudines AH, AI & proinde HX; & inde dabitur punctum H, per quod ſi ducatur THX ad horizontem perpendicularis, datâ XH, dabitur poſitio rectæ XI, & ſumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dabuntur omnia parabolæ puncta G, per quæ projectile tranſibit.

Problema elegantiſſimum de inveniendâ trajectoriâ quam corpus in medio juxta duplicatam velocitatum rationem reſiſtente deſcribit, in ſuis Principiis prætermiſit NEWTONUS. Rem generaliter poſtea confecerunt Clariſſimi Mathematici *Joannes Bernoullius, Hermannus, & Eulerus*, qui trajectoriam a projectili deſcriptam in medio quod in quâlibet multiplicatâ velocitatum ratione reſiſtit, analyticè invenerunt. Horum veſtigiis inſiſtentes, tam elegans problema in noſtris commentariis deſiderari nolumus.



DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

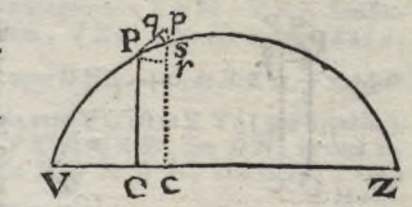
PROBLEMA.

127. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis VZ, determinare curvam VPp, quam deſcribit projectile in medio uniformi quod in multiplicatâ quâlibet velocitatum ratione reſiſtit.

Ductis ordinatis verticalibus PC, pc infinitè propinquis, & ex puncto P ad pc perpendiculo Pr; dicantur vis gravitatis $= g$, velocitas projectilis in loco P $= v$, reſiſtentia ibidem $= r = \frac{v^{2n}}{2a}$, ita ut ſit a quantitas conſtans quæ determinabitur ex determinatione reſiſtentiæ, ſit Tangens Pp, arcus Ps $= ds$, VC $= x$, PC $= y$, & ideo pr $= dy$, ac Cc ſeu Pr $= dx$; fluxio hæc dx conſtans ſupponatur. * Reſolvatur actio gravitatis quæ exprimitur per ps in actionem sq curvæ perpendicularem; & actionem pq, curvæ parallelam quæ in aſcenſu corporis illud retardat in deſcenſu accelerat, erit actio tota gravitatis ad ejus actionem quâ motum in curva retardat in aſcenſu & accelerat in deſcenſu ut eſt ps ad pq, & ob ſimilia triangula pqs, Ppr, eſt ps ad pq ſicut Pp ſive Ps ad pr, ideoque Ps (ds) ad pr (dy) ſicut gravitas tota g, ad $\frac{g\,dy}{ds}$ quæ eſt actio gravitatis ad retardandum corpus in aſcenſu, & quia in deſcenſu eſt pr $= -dy$, eſt $\frac{-g\,dy}{ds}$ actio gravitatis ad accelerandum corpus in deſcenſu; Unde tota retardatio corporis tam ex gravitate quam ex reſiſtentia orta, eſt $r + \frac{g\,dy}{ds}$ tam in aſcenſu quam in deſcenſu.

Decrementum autem velocitatis $-dv$; eſt ſemper ut vis retardans & tempus quo durante ea vis agit conjunctim, idque tempus eſt ſemper æquale arcui deſcripto Ps

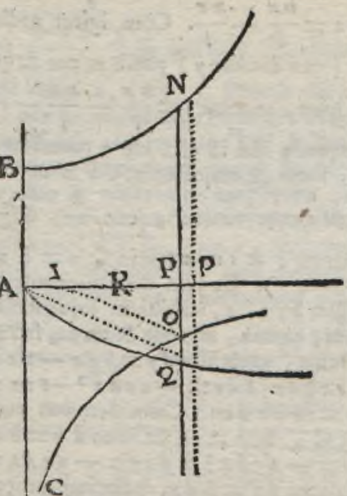
 ad



ad velocitatem v applicato; hoc eſt, temporis incrementum $dt = \frac{ds}{v}$ unde velocitatis decrementum $-dv = \overline{r + \frac{gdy}{ds}} \times \frac{ds}{v} = -\frac{rds + gdy}{v}$, & quia ex Hypotheſi $r = \frac{v^{2n}}{2a}$, eſt $-vdv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - gdy$; Ut autem obtineatur valor v, & dv expreſſione quæ ad curvam referatur, notandum quòd lineola ps ſive $-ddy$ eſt ſpatiolum urgente gravitate tempore dt percurſum, ideoque eſt ut vis gravitatis g per temporis quadratum multiplicata, ideoque eſt $-ddy = gdt^2 = \frac{gds^2}{v^2}$ (cum ſit $dt = \frac{ds}{v}$) unde eſt $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ ſive $-v^2 ddy = gds^2$, & fluxionem utrinque ſumendo eſt $-v^2 d3y - 2vddydv = 2gdsdds$, & cum lineolâ p q deſignet dds ſitque P p ſive Ps (ds) ad P r (dy) ſicut p s ($-ddy$) ad p q (dds) eſt $dsdds = -dyddy$ unde hæc ultima æquatio fit $-v^2 d3y - 2vddydv = -2gdyddy$ & $-2vddydv = v^2 d3y - 2gdyddy$ & $-vdv = \frac{v^2 d3y}{2ddy} - gdy$, unde cùm inventum etiam fuerit $-vdv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - gdy$, eſt $\frac{v^2 d3y}{ddy} = \frac{v^{2n}ds}{a}$, & valorem inventum $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ ſubſtituendo, fit tandem $\frac{gds^2 d3y}{-ddy^2} = \frac{g^n ds^{2n+1}}{-addy^n}$ ſive reductione factâ $ad3y = \frac{g^{n-1}ds^{2n-1}}{ddy^{n-2}}$.

Ut autem ex hac æquatione eruatur æquatio inter dx, & dy, & inter x & y, deſignet p variabiles quaſcumque quæ in æquatione quæſita ita multiplicant fluxionem dx ut ea ſit æqualis dy, ſitque $dy = pdx$ & $dy^2 = p^2 dx^2$, cum ſit $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erit $ds^2 = dx^2 + p^2 dx^2 = \overline{1 + p^2} \times dx^2$, & $ds = dx\sqrt{1 + pp}$ unde $ds^{2n-1} = dx^{2n-1} \times \overline{1 - pp}^{\frac{2n-1}{2}}$.

Præterea cùm dx conſtans ſupponatur erit $dy = pdx$, $ddy = dxdp$, & ſumpta fluxione erit & $d3y = dxddp$. Et ſi tandem q deſignet variabiles quæ ita multiplicant fluxionem dx, ut ea fiat æqualis dp, ſitque $qdx = dp$ erit $dxdq = ddp$ & $dx^2dq = dxddp = d3y$, & æquatio propoſita in hanc vertetur $adx^2dq = \frac{g^{n-1}dx^{n-1} \times \overline{1 - pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dxdp^{n-2}} = \frac{g^{n-1}dx^{n+1} \times \overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$, & diviſo utroque termino per dx^2, erit $adq = \frac{g^{n-1}dx^{n-1} \times \overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$. Denique loco dx poſito ejus valore $\frac{dp}{q}$ erit $adq = \frac{g^{n-1}dp^{n-1} \times \overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}dp^{n-2}}$ ſive $adq = \frac{g^{n-1} \times \overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}} \times dp$, hoc eſt $aq^{n-1}dq = g^{n-1}\overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, quæ eſt æquatio fluxionalis inter dp & dq, ex quâ per curvarum quadraturam obtinebitur æquatio inter p & q & inde inter x & y, ut id ipſum nunc exponemus, ſummando enim terminos æquationis $aq^{n-1}dq = g^{n-1} \times \overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$ habetur $\frac{aq^n}{n} = g^{n-1} \times S\,\overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, hoc eſt $q = \sqrt[n]{\frac{ng^{n-1}}{a} \times S\,\overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp}$, unde ſit curva cujus



jus abſciſſa qualiſcumque A P ſit $= p$, ſitque ejus ordinata P N ſemper æqualis $\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}$, erit area A B P N $= S\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}\,dp$, ducatur ergo ab altera parte P ordinata P O talis ut ſit ſemper æqualis $\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{n g^{n-1}}{a}} \times \text{ABPN}}$ erit ea PO æqualis $\frac{1}{q}$, cùmque ſit $dx = \frac{dp}{q} = \frac{1}{q} \times dp$, erit (ſummando) $x = S\,\frac{1}{q} \times dp$ ſive æqualis area A C P O.

Denique cùm ſit $dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{q} = \frac{p}{q} \times dp$ & ſummando $y = S.\frac{p}{q} \times dp$ ideo ſi è puncto P verſus originem A ſumatur P I æqualis unitati, ductaque I O, ducatur ipſi parallela A Q ab origine curvæ quæ ſecet P O productam in Q, erit $1 : \text{P O}$ (ſive $\frac{1}{q}$) $=$ A P (ſive p) : P Q $= \frac{p}{q}$, itaque area curvæ A P Q erit $S.\frac{p}{q}\,d\,p$ ac per conſequens æqualis y, ergo datis curvarum A C P O, & A P Q quadraturis datur ratio x ad y, & ex earum ordinatis ratio dx ad dy: ſed ut habeatur origo a quâ ſumi debent illarum arearum portiones, ſumendum eſt id punctum in quo P O eſt ad P Q ut Coſinus anguli jactus cum Horizonte ſub quo corpus moveri incepit ad ejus anguli ſinum, quippe ea fuit ipſo motus initio ratio elementorum dx & dy; ſique ille coſinus dicatur c, & ſinus s, erit in ea origine

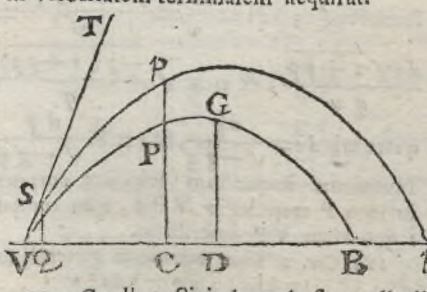
$c : s = \frac{1}{q} : \frac{p}{q}$, unde ſi ſumatur A R ſive $p = \frac{s}{c}$ erit ejus extremitas R origo arearum quarum valor rationem quæſitarum x & y exhibebit. † 127.

128. *Cor.* 1. Quoniam invenimus $v^2 = \frac{-g\,ds^2}{ddy}$, $ds^2 = dx^2(1+pp)$, & $ddy = dx\,dp$; erit $v^2 = \frac{-g\,dx(1+pp)}{dp}$; ſed $dp = q\,dx$; quare erit $v^2 = \frac{-g(1+pp)}{q}$. Præterea (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx\sqrt{1+pp}}{v} = \frac{dp\sqrt{1+pp}}{q\,v}$, & $v = \sqrt{\frac{-g(1+pp)}{q}}$; quare erit $dt = \frac{dp}{\sqrt{-gq}}$, & $t = S.\frac{dp}{\sqrt{-gq}}$. Invenietur itaque tum velocitas corporis in loco P trajectoriæ V P p, tum tempus quo arcus V P deſcribitur.

129. *Cor.* 2. Si in æquatione generali ſupra reperta, $a\,d^3y = \frac{g^{n-1}\,ds^{2n-1}}{ddy^{n-2}}$, ponatur $n = 1$, ſeu reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis; æquatio in hanc migrabit $a\,d^3y = ds\,ddy$; & ponendo $dy = p\,dx$, ac $dx = \frac{dp}{q}$, invenietur $aq = S.\,dp\sqrt{1+pp}$, $x = S.\frac{dp}{q} = S.\frac{a\,dp}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, $y = S.\frac{p\,dp}{q} = S.\frac{a\,p\,dp}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, $vv = \frac{-ag(1+pp)}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, & $t = S.\frac{a^{\frac{1}{2}}\,dp}{\sqrt{-gS.\,dp\sqrt{1+pp}}}$. Eſt autem $S.\,dp\sqrt{1+pp}$ area hyperbolæ æquilateræ, cujus abſciſſa eſt p & ordinata ducta perpendiculariter ad axem con-

conjugatum $\sqrt{1+pp}$, semiaxis verò unitas. Unde invenietur q in p per hujus hyperbolæ aream; at abscissa x obtinebitur per aream curvæ cujus est abscissa p & ordinata $\frac{1}{q}$; & correspondens ordinata y definietur per aream curvæ, cujus abscissa est p & ordinata $\frac{p}{q}$. Ex quibus manifestum fit veræ trajectoriæ V P Z descriptionem adeo perplexam esse, ut ex illa vix quidquam ad usus philosophicos aut mechanicos accommodatum possit deduci.

130. *Coroll.* 3. Quoniam posito $n=1$, resistentia medii est $\frac{v^2}{2a}$ (127), & ubi resistentia sit gravitati æqualis, id est, ubi v æqualis est velocitati terminali, habetur $\frac{v^2}{2a}=g$, & $u^2=2ag$, ideò (30. *lib.* 1.) a est altitudo ex quâ corpus in medio non resistente vi constante g sollicitatum caderet ut velocitatem terminalem acquirat.



131. *Coroll.* 4. Si in hypothesi corollarii secundi resistentia parva fuerit qualem ferè experitur globus ferreus non parvus magnâ satis velocitate per aera projectus, trajectoria V P B, quam globus ille in medio resistente describit, non multùm aberrat a Parabolâ conicâ V p b, quam eâdem urgente vi gravitatis uniformi g seu 1 describeret. Quia tamen resistentia velocitatem projectionis minuit, ordinata C P, ad trajectoriam V P B, in medio resistente paulò minor erit quam ordinata C p ad parabolam conicam V p b. Porrò si abscissa V C dicatur x ordinata C p dicatur z, amplitudo V b, h & proindè C b, $h-x$, erit (ex naturâ parabolæ) rectangulum sub abscissis V C $\times$ C b, seu $hx-xx$, æquale rectangulo ordinatæ C p, vel z in datam quantitatem l, & ideò æquatio erit $z=\frac{hx}{l}-\frac{xx}{l}$. Cùm igitur ordinata C P (quæ dicatur y) paulò minor sit quam C p, seu z, ponatur $y=\frac{hx}{l}-\frac{xx}{l}-ex^3$, & æquatio ista in quâ est e quantitas exigua, naturam trajectoriæ V P B exponere poterit quam proximè; loco $\frac{h}{l}$, & $\frac{1}{l}$, scribantur b & c ut æquatio sit $y=bx-cx^2-ex^3$. Ut jam determinentur coëfficientes b, c, e, capiantur æquationis fluxiones, prima, secunda & tertia, factâ dx constante, erunt illæ $dy=bdx-2cxdx-3ex^2dx$; $ddy=-2cdx^2-6exdx^2$, $d^3y=-6edx^3$. Coincidentibus punctis V & C, fit $x=o$, & ideo $dy=bdx$, $ddy=-2cdx^2$ & $d^3y=-6edx^3$. Ex æquatione $dy=bdx$, deducitur proportio $dx:dy=1:b$; & coincidente C cum V, dx est ad dy ut sinus totus V Q ad tangentem Q S, anguli projectionis T V Q; Quare si sinus totus dicatur 1, erit b tangens anguli projectionis, & ideò dato hoc angulo datur b. Si velocitas cum quâ corpus è loco V projicitur sit v, & f, altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g, in spatio non resistente cadendo acquirit velocitateur illam v, erit $2gf=vv$ (18.19.20. *hujusce lib.*) sed (30) $vv=-\frac{gds^2}{ddy}$, ideoque $2gf=-\frac{gds^2}{ddy}$, & $2f=-\frac{ds^2}{ddy}$; Est autem $ds^2=dx^2+dy^2=dx^2+bbdx^2$, & $ddy=-2cdx^2$ in loco V, (ex dem.). Quarè erit $2f=\frac{1+bb}{2c}$, & hinc $c=\frac{1+bb}{4f}$. Cùm igitur quantitates b, & f, datæ sint, data erit c. Invenietur quantitas tertia e, per æquationem $ad^3y=ds\,ddy$ (129) & per æquationes suprà repertas $ds=dx\sqrt{1+bb}$, $ddy=-2cdx^2$, & $d^3y=-6edx^3$; ex quibus eruitur $-6aedx^3=-2cdx^3\sqrt{1+bb}$, & hinc $e=\frac{c\sqrt{1+bb}}{3a}=\frac{\overline{1+bb}\times\sqrt{1+bb}}{12af}$. Tota igitur æquatio assumpta $y=bx-cx^2-ex^3$ fit $y=bx-x^2\times\left(\frac{1+bb}{4f}\right)=$

$x^3\times$

$x^3 \times \left(\frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}\right)$ in quâ datâ velocitate terminali datur a, (130). Poterit etiam linea a, per experimentum reperiri; Nam ſi e loco V ſub angulo dato T V B datâ cum velocitate projiciatur corpus in medio ſuppoſito & obſervetur amplitudo jactûs V B, quæ dicatur A, in æquatione ad trajectoriam V P B, loco x, ſcribatur A, & loco y, ſcribatur o, quia ordinata CP, ſeu y evaneſcit in B invenietur $o =$

$$bA - AA \times \frac{(1+bb)}{4f} - A^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af};$$

undè deducitur $a = AA \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12fb - 3A \times (1+bb)}$.

132. *Coroll.* 5. Jactûs amplitudo V B, invenitur, factâ $y = o$, undè eruitur $xx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} + x \times \frac{(1+bb)}{4f} = b$, & $VB = x = -\frac{3a}{2\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\left(\frac{9a^2}{4+4bb} + \frac{12afb}{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}\right)}$.

133. *Coroll.* 6. Maxima jactûs altitudo D G reperitur, ſumptâ æquationis ad trajectoriam V P B, fluxione & factâ $dy = o$ (48); fit enim $o = bdx - 2xdx \times \frac{1+bb}{4f} - 3x^2 dx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$ undè deducitur $VD = x = -\frac{a}{\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\frac{aa}{1+bb} + \frac{4afb^{\frac{3}{2}}}{1+bb}}$. Quo valore loco x, in æquatione ad trajectoriam ſubſtituto, obtinebitur y, ſeu maxima altitudo D G.

134. *Coroll.* 7. Ut determinetur tangens anguli T V B, ſub quo corpus datâ celeritate projectum, per datum punctum P tranſibit, loco x & y in æquatione ad trajectoriam ſcribantur datæ V C & V P, atque hinc eruatur valor tangentis b; dicatur $VC = p$, $CP = q$, & erit $q = bp - pp \times \frac{\sqrt{1+bb}}{af} - p^3 \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Si medii denſitas infinitè parva eſſet, altitudo a foret infinita (130), & idcircò $q = bp - pp \times \frac{1+bb}{4f}$. Inveniatur per hanc æquationem valor tangentis b qui dicatur k, & in æquatione ſuperiori loco $(1+bb)^{\frac{3}{2}}$, ſcribatur $(1+bb) \times \sqrt{1+kk}$ & illa in hanc abibit $q = bp - pp \times \frac{(1+bb)}{af} - p^3 \times \overline{1+bb} \times$

$\frac{\sqrt{1+kk}}{12af}$, quæ cum ſit duarum dimen- 134.
ſionum facilè ſuppeditabit valorem ipſius b, quamproximè.

135. *Coroll.* 8. Datâ celeritate jactûs, invenitur angulus maximæ omnium amplitudini conveniens, ſi in æquatione corollarii 5. in quâ x exponit quamlibet amplitudinem V B, ſumatur tangens b variabilis & ſumptis fluxionibus ponatur $dx = o$ (48). Calculo enim inito invenietur $4f \times (1 - 2bb)^2 = 3ab \times (1 - bb) \times \sqrt{1+bb}$. Quoniam verò tangens anguli projectionis eſt b, ſinus totus 1, & proindè ſecans $\sqrt{1+bb}$; ſi ejuſdem anguli ſinus dicatur s, erit $\sqrt{1+bb} : b = 1 : s$, adeóque $1+bb : bb = 1 : ss$, & dividendo $1 : bb = 1 - ss : ss$, atquè ità $bb = \frac{ss}{1-ss}$, & $b = \frac{s}{\sqrt{1-ss}}$. Loco b ſubſtituatur $\frac{s}{\sqrt{1-ss}}$ in æquatione modo inventâ & illa in hanc mutabitur, $4f \times \frac{(1-3ss)^2}{(1-ss)^2} = 3as \times \frac{(1-2ss)}{(1-ss)^2}$, hoc eſt, $4f \times (1-3ss)^2 = 3as \times (1-2ss)$. Ex quâ æquatione, ſi eruatur valor ſinûs s dabitur angulus quæſitus. Per approximationem ità poteſt obtineri. Scribatur in æquatione $3as = 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; Nam ſi trajectoria in medio non reſiſtente deſcriberetur, angulus T V B foret ſemirectus, & proindè ſinus ejus $\sqrt{\frac{1}{2}}$, cum ſit ſinus totus $= 1$; & ideò in medio valdè raro eſt ferè $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$; æquatio igitur erit $4f \times (1-3ss)^2 = (1-2ss) \times 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; quæ facillimè reſolvetur ad inſtar æquationis duarum dimenſionum. Hinc autem invenitur s paulò minor quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$; adeòque angulus projectionis ſemirecto paulò minor.

136. *Coroll.* 9. Si medium eſſet paulò denſius, aſſumenda foret æquatio ad tra-

trajectoriam, $y = bx - xx \times \frac{(1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bbb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af} - hx^4$; aut etiam alia plurium terminorum. In illâ autem ità determinatur valor coefficientis h. Pro coefficientibus datis $\frac{1+bb}{4f}$, $\frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af}$. ſcribantur c, e, ut ſit æquatio $y = bx - cx^2 - ex^3 - hx^4$, & ſumptis ut ſuprà (131) fluxionibus primis, ſecundis & tertiis, factâ dx, conſtante, invenietur (129)

$$\frac{ad^3y}{ds\,ddy} = 1 = \frac{6ae + 24ahx}{(2c + 6ex + 12hx^2)} \times \frac{1}{\sqrt{1+bb-4bcx+4ccx^2-6bex^2 \&c.}}$$

$$= \frac{6ae + 24ahx}{2c + 6ex \times \sqrt{1+bb} - \frac{2bcx}{\sqrt{1+bb}}}$$

neglectis terminis ubi x^2 occurrit & extracta Radice per formulam *Newtonianam*. Ut autem hæc quantitas conſtans ſit & æqualis unitati, termini homologi in numeratore $6ae + 24ahx$, & denominatore $2c\sqrt{1+bb} + 6ex\sqrt{1+bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1+bb}}$ ponendi ſunt æquales, id eſt, $6ae = 2c\sqrt{1+bb}$, & $24ahx = 6ex\sqrt{1+bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1+bb}}$. Ex his ſuppoſitionibus eruitur $e = \frac{c\sqrt{1+bb}}{3a} = \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af}$, & $h = e\frac{\sqrt{1+bb}}{4f} - \frac{bcc}{6a\sqrt{1+bb}} = \frac{(1+bb)^2}{48\,a^2f} - \frac{b \times (1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96\,aff}$. Quarè æquatio aſſumpta erit $y = bx - x^2 \times \frac{(1+bb)}{af} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af} - x^4 \times \frac{(1+bb)^2}{48\,a^2f} + x^4 b \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96\,aff}$. Et eodem modo determinarentur coefficientes in æquationibus plurium terminorum ſeu ad parabolas ſuperiorum generum.

137. *Coroll.* 10. Si reſiſtentia medii uniformis, partim conſtans ſupponeretur & partim velocitatis quadrato proportionalis, poſſet etiam trajectoria V P B quamproximè definiri. Sit enim reſiſtentiæ pars uniformis $= \frac{1}{2}kg$, & reſiſtentia tota $r = \frac{kg}{2} + \frac{v^2}{2a}$, & erit (28) $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} + \frac{v^2ds}{2a} = -v\,dv$ & (30) $v^2 = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$ adeóque (127) $v\,dv = -g\,dy + \frac{g\,ds^2d^3y}{2\,ddy^2}$, his valoribus loco v^2 & $v\,dv$, in priori æquatione ſubſtitutis ſit $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} - \frac{g\,ds^3}{2a\,ddy} = g\,dy - \frac{g\,ds^2d^3y}{2\,ddy^2}$, ideóque $k = \frac{ds^2}{a\,ddy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Jam ſi reſiſtentia tota r, exigua fuerit, ponatur æquatio ad trajectoriam V P B, $y = bx - cx^2 - ex^3$, & factâ dx, conſtante, capiantur fluxiones primæ, ſecundæ & tertiæ quæ coincidente puncto C, cum V, erunt $dy = b\,dx$, $ddy = -2c\,dx^2$, & $d^3y = -6e\,dx^3$ (131); undè invenitur ut (in coroll. 4. 131.) b, tangens anguli projectionis, exiſtente ſinu toto 1, & $c = \frac{1+bb}{4f}$, ubi f eſt altitudo ex quâ corpus urgente vi conſtante g cadendo in ſpatio non reſiſtente acquirit jactûs velocitatem. Quantitas e determinabitur per æquationem $k = \frac{ds^2}{a\,ddy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Nam ſi in illâ loco ds, ddy, d^3y, ſubſtituantur ipſorum valores $dx \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}$ $-2c\,dx$, & $-6e\,dx^3$, erit $k = -\frac{(1+bb)}{2ac} + \frac{3e \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{2cc}$; undè eruitur $e = \frac{2hcc}{3 \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{3a} = \frac{k \times (1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24\,ff} + \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af}$. Quapropter æquatio aſſumpta in hanc abit $y = bx - \frac{xx \times (1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12\,af}$,

$- x^3k$

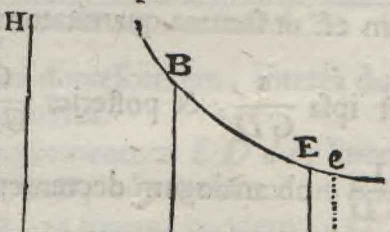
SECTIO III.

De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ in medio similari movetur: sumantur autem tempora in progressione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progressione geometricâ.

Centro C, asymptotis rectangulis $CADd$ & CH, describatur hyperbola BEe, & asymptoto CH parallelæ sint AB, DE, de. In asymptoto CD dentur puncta A, G: Et si tempus exponatur per aream hyperbolicam $ABED$ uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem DF, cujus reciproca GD unâ cum datâ CG componat longitudinem CD in progressione geometricâ crescentem.



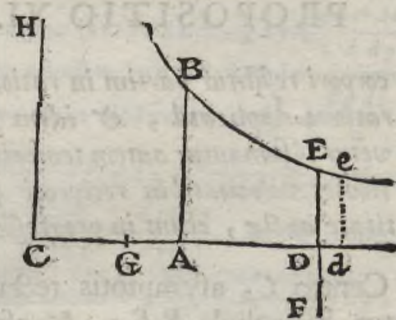
Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quàm minimum, & (a) erit Dd reciprocè ut DE, ideoque directè ut CD. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (b) per hujus

— $x : k \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff}$, & quantitates a & k, ex phænomenis poterunt determinari ut suprà (131.).

(a) * *Et erit* D d *reciprocè ut* D E. Est enim areola evanescens D E e d æqualis rectangulo D E × D d, quod, ob datum temporis incrementum, erit ut quantitas data, & ideò D d, est ut quantitas data divisa per D E, id est, reciprocè ut D E; sed (*per theor. 4. de hyperb.*) datum est rectangulum C D × D E, proindè C D, est reciprocè ut D E; quarè erit D d directè ut C D. 137.

(b) * *Per hujus Lemma* 2, Cas. 4.

hujus lem. 11.) eſt $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ ſeu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id eſt, ut $\frac{1}{GD} + \frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$ uniformiter creſcente, decreſcit $\frac{1}{GD}$ in eâdem ratione cum velocitate. Nam (c) decrementum velocitatis eſt ut reſiſtentia, hoc eſt (per hypotheſin) ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipſius $\frac{1}{GD}$ decrementum eſt ut ſumma quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior eſt ipſa $\frac{1}{GD}$, & poſterior $\frac{CG}{GDq}$ eſt ut $\frac{1}{GDq}$: (d) proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, eſt ut velocitas. Et ſi quantitas GD, ipſi $\frac{1}{GD}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ CG augeatur; ſumma CD, tempore $ABED$ uniformiter creſcente, (e) creſcet in progreſſione geometricâ. *Q.E.D.*



Corol. 1. Igitur ſi, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam $ABED$, exponi poteſt velocitas per ipſius GD (f) reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Co-

(c) *Nam decrementum velocitatis*, dato temporis momento, *eſt ut reſiſtentia* (15).

(d) * $\frac{1}{GD}$. *Ob analogum decrementum eſt ut velocitas.* Si enim duarum quantitatum fluentium incrementa vel decrementa dato tempuſculo producta analoga ſint, eorum incrementorum vel decrementorum ſummæ ſeu fluentes ipſæ ab eodem initio ſumptæ, ſunt analogæ (*per* Cor. Lem. 4. *lib.* 1.).

(e) * *Creſcet in progreſſione geometricâ* (380. lib. 1.).

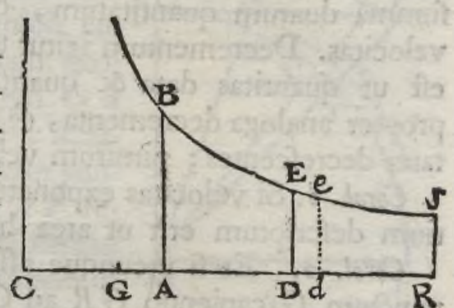
(f) * *Exponi poteſt velocitas per ipſius* G D

(g) *Corol.* 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca ſub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis $ABED$, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri poteſt.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iiſdem poſitis, dico quòd ſi ſpatia deſcripta ſumantur in progreſſione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progreſſione geometricâ.

In aſymptoto CD detur punctum R, & erecto perpendiculo RS; quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur deſcriptum ſpatium per aream hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ cum datâ CG componit longitudinem CD in progreſſione geometricâ decreſcentem, interea dum ſpatium $RSED$ augetur in arithmeticâ.



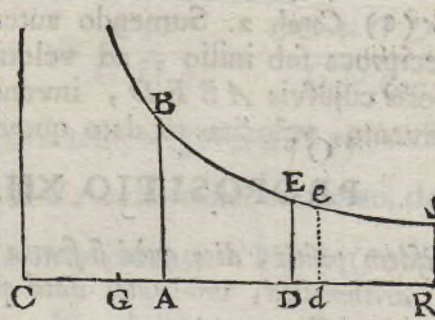
(h) Etenim ob datum ſpatii incrementum $EDde$, lineola Dd, quæ decrementum eſt ipſius GD, erit reciprocè ut ED, ideoque directè ut CD, hoc eſt, ut ſumma ejuſdem GD & lon-

GD *reciprocam* $\frac{1}{GD}$. Undè patet velocitatem nonniſi tempore infinito extingui poſſe, * erit enim $\frac{1}{GD} = 0$, ſive velocitas nulla ubi GD erit infinita, tunc autem area BADE quæ tempus exprimit infinita etiam eſt, ex naturâ Hyperbolæ.

(g) * *Coroll.* 2. Punctum A ad arbitrium aſſumitur in aſymptoto CR & aſſumpto etiam quovis puncto D ut area ABED tempus datum exponat, itâ determinandum eſt punctum G, ut ſit GA ad GD, ut velocitatis reciproca ſub initio ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujuſvis ABED, quod per coroll. 1. liquet. 137.
Invento autem puncto G, ex dato quovis alio tempore quod v. gr. ſit ad tempus primò datum ut area ABSR, ad aream ABED, dabitur velocitas quæ erit reciprocè ut GR, ſeu quæ erit ad velocitatem ſub initio in A, ut GA ad GR datam.

(h) * *Etenim ob datum ſpatii incrementum*, per hypotheſim quâ ſpatia ſupponuntur in arithmeticâ progreſſione creſcere.

longitudinis datæ CG. Sed velocitatis decrementum, tempore ſibi reciprocè proportionali, quo data ſpatii particula $DdeE$ deſcribitur, eſt (i) ut reſiſtentia & tempus conjunctim, id eſt directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inversè ut velocitas; ideoque directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ GD, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim, & propter analoga decrementa, (k) analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes; nimirum velocitas & linea GD. *Q. E. D.*



Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem GD, ſpatium deſcriptum erit ut area hyperbolica $DESR$.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum R, invenietur punctum G capiendo GR ad GD, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis $RSED$ deſcriptum. (l) Invento autem puncto G, datur ſpatium ex datâ velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cùm (*per prop.* XI.) detur velocitas ex dato tempore, & per hanc propoſitionem detur ſpatium ex datâ velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contra.

PRO-

(i) * *Eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim.* Velocitatis decrementum eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim (15), tempus verò eſt ut incrementum ſpatii directè & velocitas inversè, adeóque dato ſpatii incremento ut velocitas inversè. Quarè dato ſpatii incremento, velocitatis decrementum eſt ut reſiſtentia directè & velocitas inversè, id eſt, directè ut ſumma duarum quantitatum &c.

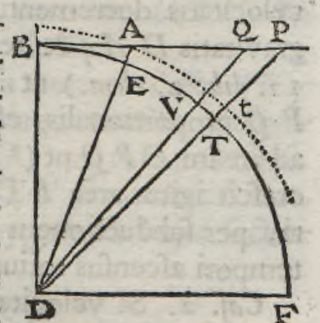
(k) * *Analogæ ſemper erunt* &c. (Per cor. lem. 4. lib. 1.).

(l) * *Invento autem puncto* G; *&c.* Si enim velocitas data, ſit ad velocitatem ſub initio ut G A ad G R, dabitur punctum A, & hinc dabitur area A B S R, ſeu ſpatium deſcriptum. Et contrà dato ſpatio, ſive datâ areâ A B S R, dabitur punctum A, & indè velocitas G A. Ex his autem patet ſpatium finitum infinito tempore deſcribi; ubi enim punctum D coincidit cum puncto G, velocitas omnis extinguitur, & ſpatium deſcriptum exponitur per aream finitam quam ordinata

R S

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

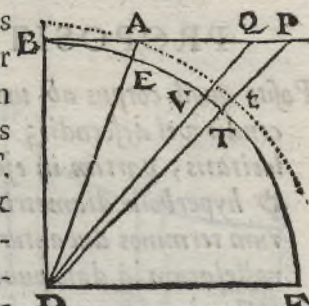
Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum rectâ ascendit vel descendit; & quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quod, si circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis à centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.



Cas. 1. Ponamus primò quòd corpus ascendit, centroque D & semidiametro quovis DB describatur circuli quadrans $BETF$, & per semidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, semidiametro DF parallela. In eâ detur punctum A, & capiatur segmentum AP velocitati proportionale. Et cùm resistentiæ pars altera sit ut velocitas, & pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia tota ut AP *quad.* $+ 2BAP$. Jun-

RS abscindit cum alterâ ordinatâ per G ductâ; velocitas verò nonnisi infinito tempore potest evanescere (*per cor.* 1. *prop. XI.*).

138. *Schol.* Eadem per analysim facilè inveniuntur. Dicantur resistentia r celeritas initialis c, spatium descriptum s, tempus t, velocitas residua v, ponaturque $r = \frac{av+vv}{b}$, erit (16, 17) $r\,ds = -v\,dv$, seu $avds + vvds = -bvdv$, & hinc $ds = -\frac{b\,dv}{a+v}$, atque adeò $s = Q - b \times L.\overline{a+v}$; quia verò ubi $s = 0$ fit $v = c$, invenitur constans $Q = b \times L.\overline{a+c}$, & ideò $s = b \times L.\frac{a+c}{a+v}$. Sit $L.h = 1$, & erit $\frac{s \times L.h}{b} = L.\frac{a+c}{a+v}$, ac $h^{\frac{s}{b}} = \frac{a+c}{a+v}$; undè eruitur $v = \frac{a+c}{h^{\frac{s}{b}}} - a$; Quarè dato spatio datur velocitas & contrà. Cùm autem sit 138.
(13) $dt = \frac{ds}{v} = -\frac{b\,dv}{av+vv} = \frac{b}{a} \times \frac{dv}{a+v} - \frac{b}{a} \times \frac{dv}{v}$, erit $t = Q + \frac{b}{a} \times L.\overline{a+v} - \frac{b}{a} \times L.v = Q + \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v}$, & posito $t = 0$ & $v = c$, fit $Q = -\frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, adeóque $t = \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v} - \frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, & hinc $t = \frac{b}{a} L.\frac{ac+cv}{av+cv}$, & $h^{\frac{at}{b}} = \frac{ac+cv}{av+cv}$; unde eruitur $v = \frac{ac}{ah^{\frac{at}{b}} + ch^{\frac{at}{b}} - c}$. Dato igitur tempore dabitur velocitas & spatium ac contrà.

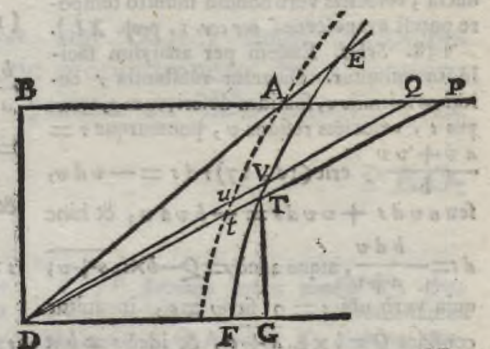


DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XIII. THEOR. X.

Jungantur $D\,A$, $D\,P$ circulum ſecantes in E ac T, & (m) exponatur gravitas per $D\,A$ *quad.* ita ut ſit gravitas ad reſiſtentiam in P ut DAq ad $APq + 1\,BAP$: & tempus aſcenſus totius erit ut circuli ſector $E\,D\,T$.

Agatur enim $D\,V\,Q$, abſcindens & velocitatis $A\,P$ momentum $P\,Q$, & ſectoris $D\,E\,T$ momentum $D\,T\,V$ dato temporis momento reſpondens; & velocitatis decrementum illud $P\,Q$ erit ut (n) ſumma virium gravitatis $D\,A\,q$ & reſiſtentiæ $A\,P\,q + 2\,B\,A\,P$, id eſt (*per prop.* 12. *lib.* 2. *elem.*) ut $D\,P$ *quad.* Proinde area $D\,P\,Q$, (o) ipſi $P\,Q$ proportionalis, eſt ut $D\,P$ *quad.* & area $D\,T\,V$, quæ eſt ad aream $D\,P\,Q$ ut (p) $D\,T\,q$ ad $D\,P\,q$, eſt ut datum $D\,T\,q$. Decreſcit igitur area $E\,D\,T$ uniformiter ad modum temporis futuri, per ſubductionem datarum particularum $D\,T\,V$, & propterea tempori aſcenſus totius proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Si velocitas in aſcenſu corporis exponatur per longitudinem $A\,P$ ut prius, & reſiſtentia ponatur eſſe ut $A\,P\,q + 2\,B\,A\,P$, & ſi vis gravitatis minor ſit quam quæ per $D\,A\,q$ exponi poſſit; capiatur $B\,D$ ejus longitudinis, ut ſit $A\,B\,q - B\,D\,q$ gravitati proportionale, ſitque $D\,F$ ipſi $D\,B$ perpendicularis & æqualis, & per verticem F deſcribatur hyperbola $F\,T\,V\,E$, cujus ſemidiametri conjugatæ ſint $D\,B$ & $D\,F$, quæque ſecet $D\,A$ in E, & $D\,P$, $D\,Q$ in T & V; & erit tempus aſcenſus totius ut hyperbolæ ſector $T\,D\,E$.



Nam

(m) * *Et exponatur gravitas per* D A *q.* Corpore aſcendente ratio gravitatis uniformis ad reſiſtentiam vel major eſt ratione quadrati dati A B² ad quantitatem A P² + 2 B A P, vel minor vel æqualis. In 1°. caſu gravitas exponi ſemper poterit per quadratum ſecantis AD quæ quantumvis magna aſſumi poteſt; In 2°. caſu per differentiam A B² — BD² quæ quantumvis parva eſſe poteſt; & in 3°. caſu per quadratum A B².

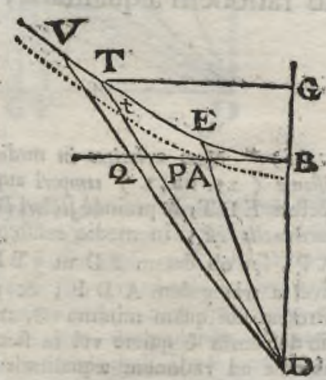
(n) * *Ut ſumma virium* (18).

(o) * *Ipſi* P Q *proportionalis.* Nam area D P Q eſt $\frac{1}{2}$ B D × P Q, & ideò ob datam $\frac{1}{2}$ B D eſt ut P Q.

(p) * *Ut* D T *q ad* D P *q.* Triangulum

Nam velocitatis decrementum PQ, in datâ temporis particulâ factum, est ut summa resistentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, (q) id est, ut $BPq - BDq$. Est autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq; ideoque, si ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq seu $GDq - DFq$ ad BDq, utque GDq ad BPq, & divisim ut DFq ad $BPq - BDq$. Quare cùm area DPq sit ut PQ, id est, ut $BPq - BDq$; erit area DTV ut datum DFQ. Decrescit igitur area EDT uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per subductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis est. *Q. E. D.*

Cas. 3. Sit AP velocitas in descensu corporis, & $APq + 2BAP$ resistentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, existente angulo DBA recto. Et si centro D, vertice principali B, describatur hyperbola rectangula $BETV$ secans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit hyperbolæ hujus sector DET ut tempus totum descensûs.

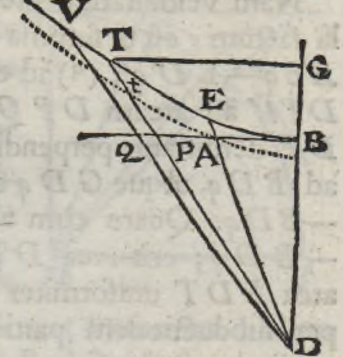


Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, est ut excessus gravitatis supra resistentiam, id est, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ seu $BDq - BPq$. Et area DTV est ad aream DPQ ut DTq ad DPq, ideoque ut (r) GTq seu $GDq - BDq$ ad BPq, utque GDq ad BDq, & divisim ut BDq ad $BDq - BPq$. Quare cùm area DPQ sit ut $BDq - BPq$, erit area DTV ut datum BDq. Crescit igitur area EDT

lum evanescens D P Q, non differt a sectore circuli centro D & radio D Q descripti, inter lineas D Q & D P; hic verò sector est ad similem sectorem D T V, ut DP^2 ad DT^2, quarè area D T V, est ad aream D P Q, ut DT^2 ad DP^2, & permutando, area D T V est ad DT^2, ut area D P Q ad DP^2. Cùm igitur (*ex dem.*) area D P Q sit ut DP^2, erit etiam area D T V ut DT^2, seu ut datum quadratum DB^2; ergo, tempore dato, data est area D T V, & ideò temporibus æqualibus *æqualiter decrescit area* E D T, *ad modum temporis futuri &c.* 138.

(q) * *Id est ut* $BPq - BDb$. Est enim $APq + 2BAP + ABq = BPq$.

(r) *Ut* GTq. Nam ob similitudinem triangulorum D G T, P B D est D T q ad D P q ut $GTq = GDq - BDq$ (ex conic. vid. not. in cas. 2. prop. 9.) ad B D q, *utque* G D q *ad* B D q, *& divisim &c.*



E D T uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum *D T V*, & propterea tempori deſcenſus proportionalis eſt. *Q. E. D.*

Corol. Si centro *D* ſemidiametro *D A* per verticem *A* ducatur arcus *A t* ſimilis arcui *E T*, & ſimiliter ſubtendens angulum *A D T*: velocitas *A P* erit ad velocitatem, quam corpus tempore *E D T*, in ſpatio non reſiſtente, aſcendendo amittere vel deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli *D A P* ad aream ſectoris *D A t*; ideoque ex dato tempore datur. (f) Nam velocitas, in medio non reſiſtente, tempori, atque ideo ſectori huic proportionalis eſt; in medio reſiſtente eſt ut triangulum; & in medio utroque, ubi quàm minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis, pro more ſectoris & trianguli.

Scho-

(f) * *Nam velocitas in medio non reſiſtente* (25. lib. I.) *tempori* atque adeò ſectori E D T, & proindè *ſectori D A t, proportionalis eſt*; in medio reſiſtente eſt ut A P, ſeu ob datam B D ut $\frac{1}{2}$ B D × A P; ſivè ut triangulum A D P; & in medio utroque ubi quàm minima eſt, nempe initio deſcenſûs è quiete vel in fine aſcenſûs accedit ad rationem æqualitatis ob reſiſtentiam evaneſcentem, evaneſcente velocitate, pro more, ſectoris D A t & trianguli D A P coeuntibus punctis t & P cum puncto A.

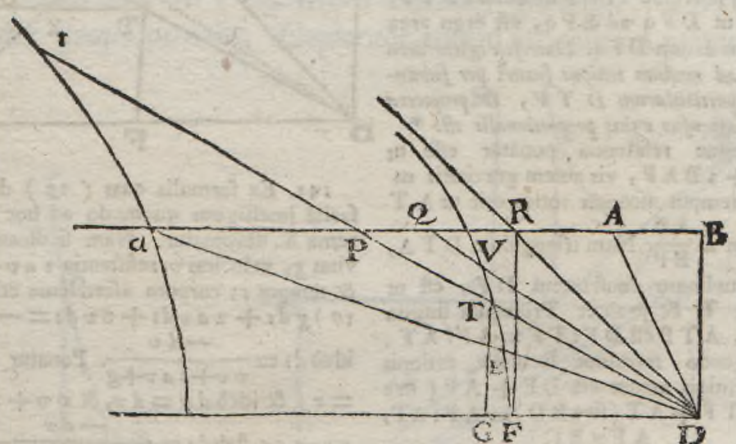
139. Quoniam ubi in corporis deſcenſu B P fit = B D, angulus B D P ſemirectus evadit, & recta D P aſymptotus hyperbolæ æquilateræ B E T; manifeſtum eſt quod corpus è quiete cadendo nonniſi finitam velocitatem infinito tempore poſſit acquirere. Erit enim velocitas tempore infinito acquiſita B D — A B. Si verò corpus verticaliter deorſum datâ cum velocitate projiciatur, vel illa velocitas maximæ ſeu terminali B D — A B æqualis eſt, & in hoc caſu corpus motu uniformi deſcendit ob reſiſtentiam gravitati æqualem; vel terminali minor eſt, & corporis cadentis motus perpetuò acceleratur, donec infinito tempore velocitatem maximam acquirat; vel tandem terminali major eſt, tumque corporis motus perpetuò retardatur, donec infinito tempore elapſo ad velocitatem terminalem reducatur; hoc autem caſu ſic abſolvitur conſtructio.

Sit A a velocitas datæ projectionis terminali major, A P velocitas perpetuò decreſcens, $AP^2 + 2\,BAP$ reſiſtentia, & BD^2 AB^2 vis gravitatis; exiſtente angulo D B A recto; & ſi capiatur B R = BD, compleaturque quadratum D B R F, ac centro D & vertice principali F deſcribatur hyperbola rectangula F E T V, ſecans rectas D a, D P & D Q, in E, T, V; tempus deſcenſûs ab initio uſquequò reſidua corpori velocitas ſit A P, erit ut ſector hyperbolicus D E T; nam velocitatis decrementum P Q, in datâ temporis particulâ factum eique proportionalis area

D P Q

Scholium.

Demonſtrari (†) etiam poſſet caſus in aſcenſu corporis, ubi vis gravitatis minor eſt quàm quæ exponi poſſit per DAq ſeu $ABq + BDq$, & major quàm quæ exponi poſſit per $ABq - BDq$, & exponi debet per ABq. Sed propero ad alia.



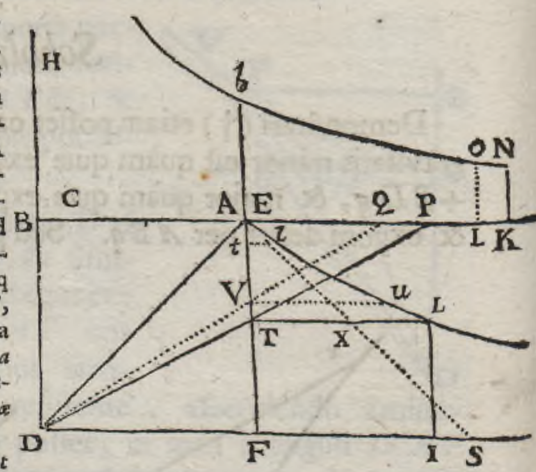
DPQ eſt ut exceſſus reſiſtentiæ ſuprà gravitatem (18), id eſt, ut $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, ſeu $BP^2 - BD^2$; & area DTV eſt ad aream DPQ, ut DT^2 ad Dp^2, ideoque ut GT^2, (ſeu $GD^2 - BD^2$) ad BD^2, & ut GD^2 ad BP^2, & diviſim, ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$. Quarè cum area DPQ, ſit ut $BP^2 - BD^2$, erit area DTV ut datum BD^2. Creſcit igitur area EDT, uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori deſcenſûs proportionalis eſt. Coincidente verò puncto P, cum R, & ideò rectâ DP, cum aſymptoto DR, velocitas AP terminali AR ſeu BD — AB æqualis evadit, & ſector DET infinitus, proindeque tempus etiam infinitum fit. Q. E. D.

140. Hinc etiam ſi centro D, ſemidiametro Da, per verticem a, ducatur arcus Hyperbolicus at ſimilis arcui ET, & ſimiliter ſubtendens angulum aDT; velocitas aP, in medio reſiſtente tempore EDT, extincta, erit ad velocitatem quam corpus eodem tempore in ſpatio non reſiſtente è quiete deſcendendo acquirere poſſet, ut area trianguli DaP, ad aream ſectoris Dat, ideòque ex dato tempore datur, & hinc datur quoque velocitas reſidua AP. Nam velocitas in medio non reſiſtente acquiſita tempori, atquè ideò ſectori DET, & proindè ſectori ſimili Dat proportionalis eſt; velocitas in medio reſiſtente extincta, eſt ut triangulum DaP, & in medio utroque ubi quàm minima eſt, accedit ad rationem æqualitatis pro more ſectoris Dat, & trianguli DaP. 140.

(†) 141. *Demonſtrari poſſet caſus in aſcenſu corporis, ubi vis gravitatis..... exponi debet per A B q.* * Velocitas in aſcenſu exponatur per AP ut prius, ſit reſiſtentia ut A P q + 2 B A P, exponatur vis gravitatis per A B q capiatur B D & D F = B A erectoque perpendiculo F T A erit tempus ascensus totius ut sector sive Triangulum DTA, agatur enim DVQ abscindens & velocitatis momentum P Q & sectoris D T A momentum D T V, velocitatis decrementum P Q est ut summa resistentiæ & gravitatis sive ut A P q + 2 B A P + A B q id est (per 4. 2i. Elem.) ut B P q; est autem area D T V ad aream D P Q ut D T q ad D P q, sive ob Triangula similia D T F, D P B, ut D F q ad B P q, est ergo area D T V ut datum D F q. *Decrescit igitur area D T A ad modum tempus futuri per subductionem particularum D T V, & propterea tempori ascensus totius proportionalis est.* *

Si itaque resistentia ponatur esse ut $AP^2 + 2BAP$, vis autem gravitatis ut AB^2; tempus ascensûs totius erit ut A T & etiam ut $\frac{AP}{BP}$. Nam triangulum D T A, ob altitudinem constantem D F, est ut basis A T & propter Triangula similia D T F, A T P est D F : T F = A P : A T; & jungendo terminos secundæ rationis cum terminis primæ est D F + A P (sive B P) : T F + A T (sive B D) = A P : AT, est ergo $AT = \frac{AP \times BC}{BP}$ sive ob datum BD, A T est ut $\frac{AP}{BP}$.

142. In isto casu velocitas A P est ad velocitatem quam corpus tempore D A T sive $\frac{AP}{BP}$, in spatio non resistente ascendendo amittere posset, ut B P ad AB. Nam velocitas in medio non resistente tempori atquè ideò areæ D A T sive rectæ A T proportionalis est; in medio resistente est ut A P, & in medio utroque ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis; nam cum capiatur B D = A B, ratio linearum A P, A T, in puncto A ubi quàm minima est, accedit ad rationem linearum A F, F D quæ est æqualitatis. Quare velocitas A P, in medio resistente erit ad velocitatem in medio non resistente eodem tempore D A T amissam vel acquisitam ut A P ad A T; hoc est ob Triangula similia A P T, B F D ut B P ad B D vel A B. Q. E. D.

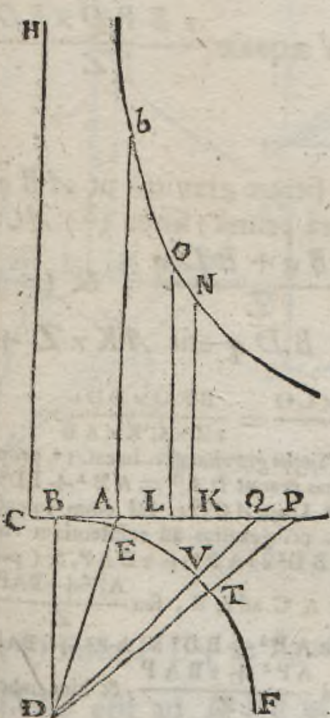


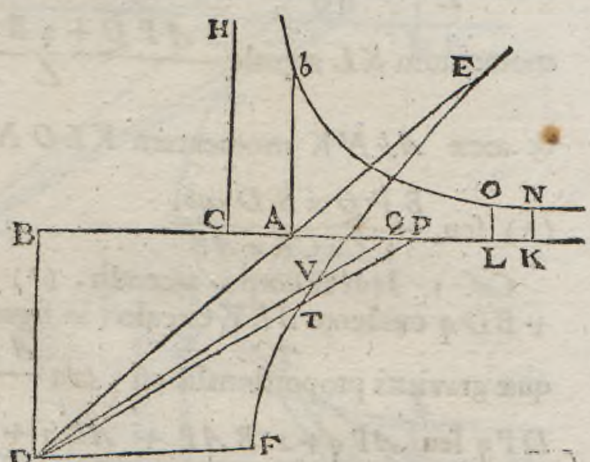
143. Ex formulis quas (19) dedimus facilè intelligitur quomodo ad hoc Theorema X. deveniatur. Nam si dicatur gravitas g, velocitas v, resistentia $2av + vv$, & tempus t; corpore ascendente erit (16. 17) $gdt + 2avdt + vvdt = -dv$, & ideò $dt = \frac{-dv}{vv + 2av + g}$. Ponatur $v + a = x$, & ideò $dv = dx$, & $vv + 2av = xx - aa$, fiet $dt = \frac{-dx}{xx + g - aa}$. Undè si fuerit $g = aa$, erit $dt = \frac{-dx}{xx}$; si $g - aa = bb$, erit $dt = \frac{-dx}{xx + bb}$. Si $g - aa = -bb$ erit $dt = \frac{-dx}{xx - bb}$. Fluens quantitatis $-\frac{dx}{xx}$, est $\frac{1}{x}$, fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx + bb}$, pendet a quadraturâ sectoris circularis (107), fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx - bb}$, à quadraturâ sectoris hyperbolici; atquè hi sunt tres casûs pro corporis ascensu; pro descensu verò est (19) $gdt - 2avdt - vvdt = dv$, & ideò $dt = \frac{dv}{g - 2av - vv} = \frac{dx}{g + aa - xx} = \frac{dx}{bb - xx}$, ponendo $v + a = x$ & $g + aa = bb$, fluens autem quantitatis $\frac{dx}{bb - xx}$, pendet a quadraturâ hyperbolæ.

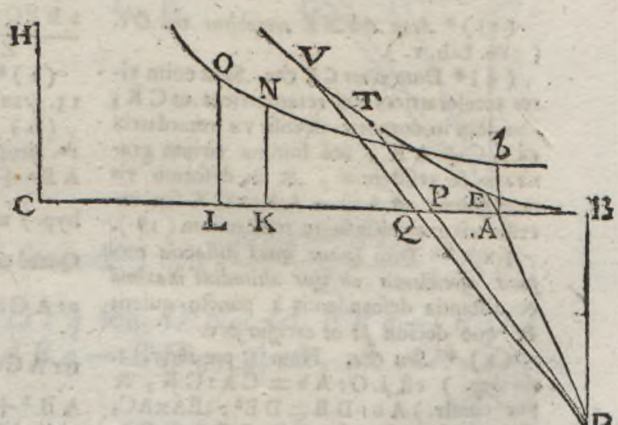
PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iiſdem poſitis, dico quod ſpatium aſcenſu vel deſcenſu deſcriptum, eſt ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujuſdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progreſſione arithmeticâ; ſi vires ex reſiſtentiâ & gravitate compoſitæ ſumantur in progreſſione geometricâ.

Capiatur AC in (fig. tribus ultimis) gravitati, & AK reſiſtentiæ proportionalis. Capiantur autem ad eaſdem partes pun-







cti A ſi corpus deſcendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab, quæ ſit ad DB ut DBq ad $4\,BAC$: & deſcriptâ ad aſymptotos rectangulas CK, CH hyperbolâ bN, erectaque KN ad CK perpendiculari, (t) area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione arithmeticâ, (u) dum vires CK in progressione geometricâ sumuntur. (x) Dico igitur quòd distantia corporis ab ejus altitudine maximâ sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET.

Nam cùm AK sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (*per hujus lemma* 11.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ (z) seu $\frac{BPQ \times BD\ cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, (a) sitque gravitas ut $ABq + BDq$ existente BET circulo (in figurâ primâ) linea (b) AC, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & (c) DPq seu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z +$

(t) * *Area AbNK augebitur vel &c.* (380. Lib. 1.).

(u) * *Dum vires CK &c.* Sunt enim vires acceleratrices vel retardatrices ut CK, siquidem in corporis ascensu vis retardatrix est $AC + AK$, seu summa virium gravitatis & resistentiæ, & in descensu vis acceleratrix est $AC - AK = CK$ seu excessus vis gravitatis supra resistentiam (18).

(x) * *Dico igitur quod distantia corporis ascendentis ab ejus altitudine maximâ* & distantia descendentis à puncto quietis & quo decidit *sit ut excessus* &c.

(z) * *Seu &c.* Nam (*per theor.* 4. *de hyp.*) est $LO : Ab = CA : CK$, & per constr.) $Ab : DB = DB^2 : 4BA \times AC$, ideoque (ex æquo) $LO : DB = DB^2 : 4BA \times CK$, & hinc $LO = \frac{DB^3}{4CK \times BA}$. Quarè momentum $KLON = LO \times KL = \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$.

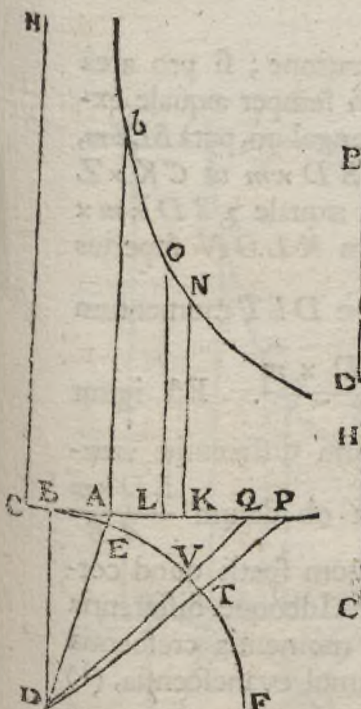
(a) * *Sitque gravitas &c.* In cas. 1°. prop. 13. gravitas erat ut $DA^2 = AB^2 + BD^2$.

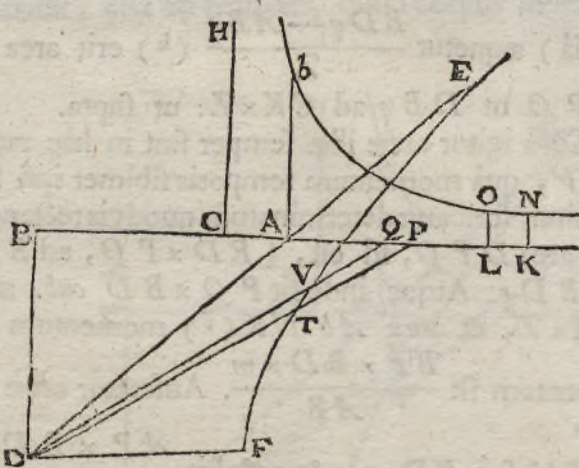
(b) * *Linea AC &c.* Est enim in cas. 1°. prop. 13. gravitas ad resistentiam ut $AB^2 + BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$, & (per hyp.) ut AC ad AK, seu $\frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$. Quarè erit $AB^2 + BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$ ut AC ad $\frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, & hinc habetur $AC = \frac{AB^2 + BD^2}{Z}$, & $AC \times Z = AB^2 + BD^2$.

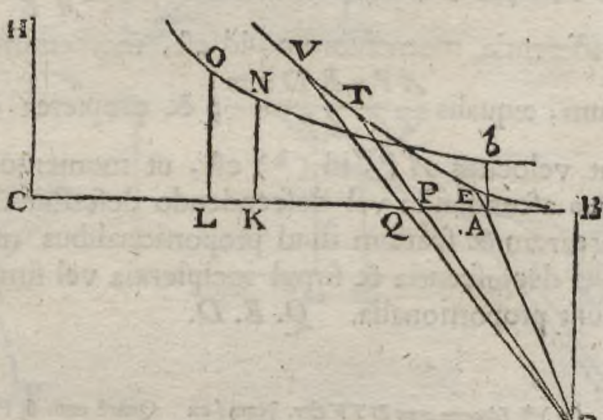
(c) * *Et DPq &c.* Ob angulum DBP rectum, & quia $AK \times Z = AP^2 + 2BAP$, atque $AC \times Z = AB^2 + BD^2$, ut ex superioribus patet.

$AC \times Z$ seu $CK \times Z$; (d) ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 2. Sic corpus ascendit, & gravitas sit ut $ABq - BDq$,







(e) linea AC (in figurâ secundâ) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & (f) DTq erit ad DPq ut DFq seu DBq ad $BPq - BDq$ seu $APq + 2\,BAP + ABq - BDq$, id est, ad $AK \times Z + AC \times$

(d) * *Ideòque area* D T V *&c.* Nam (ex dem.) in 1°. casu (prop. 13.) area D T V est ad aream D P Q, ut DT^2 vel DB^2 ad DP^2, & est $DP^2 = CK \times Z$.

(e) * *Linea* AC *&c.* Patet ut in primo casu hujus. 143.

(f) *Et* D T q *erit ad* D P q. Patet (ex dem. in cas. 2°. prop. 13.)

$AC \times Z$ seu $CK \times Z$. (g) Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut $BDq - ABq$, & linea AC (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ (h) erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut supra.

Cum igitur areæ illæ semper sint in hâc ratione; si pro areâ DTV, quâ momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, putà $BD \times m$, erit area DPQ, id est, $\frac{1}{2} BD \times PQ$, ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2 BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ (i) momentum $KLON$ superius inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV seu $BD \times m$, & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$ ut velocitas AP, id (k) est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia & simul incipientia vel simul evanescentia, (l) sunt proportionalia. *Q. E. D.*

Co-

(g) * *Ideoque area* DTV *&c.* Nam (ex dem. in 2°. cas. prop. 13.) area DTV, est ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

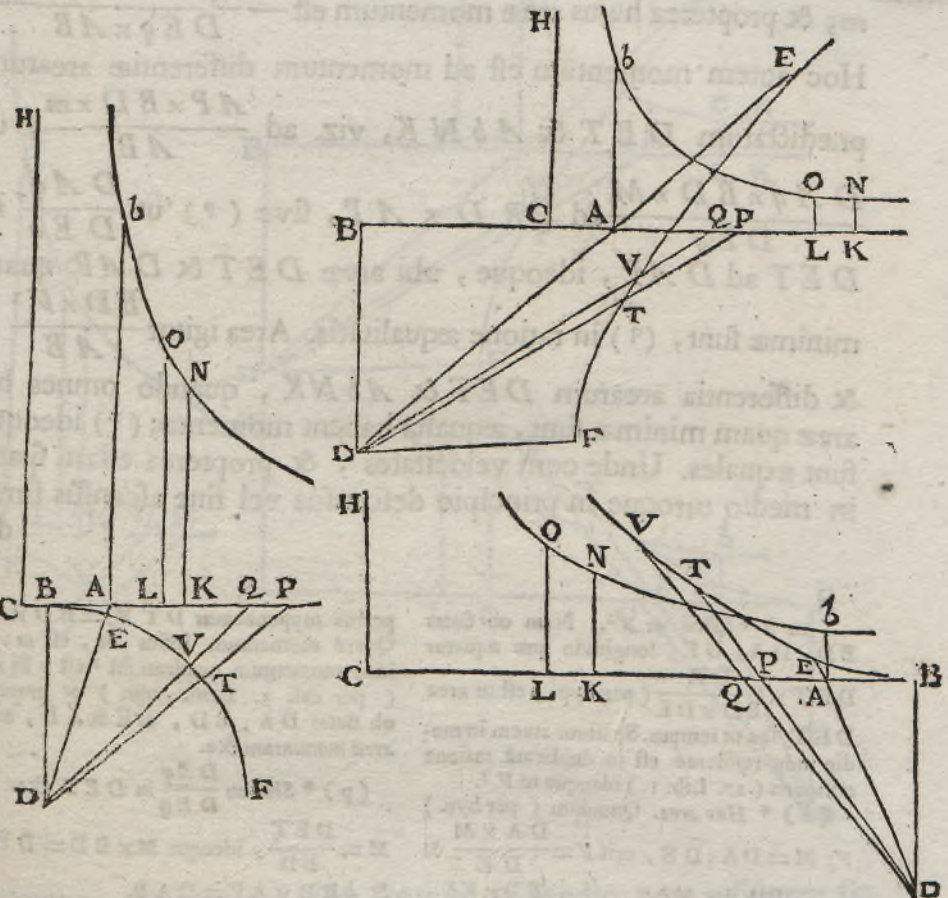
(h) * *Erit area* DTV. (Ex demonstratis in 3°. cas. prop. 13.) area DTV est ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

(i) * *Momentum* KLON *superius inventum* est $\frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB} = \frac{BP \times PQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$. Quarè cum sit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, erit $KLON = \frac{BP \times BD \times m}{AB}$.

(k) * *Id est ut momentum spatii.* Nam dato temporis momento, momentum spatii est ut velocitas (11.).

(l) * *Sunt proportionalia.* (Per coroll. Lem. 4. Lib. 1.) Dum autem evanescit AP, seu velocitas, evanescit quoque resistentia AK, cum areâ AbNK, & tempore DTE.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream DET ad lineam BD, dicatur M; & longitudo alia V ſumatur in eâ ratione ad longitudinem M, quam habet linea DA ad lineam DE: ſpatium, quod corpus aſcenſu vel deſcenſu toto in medio reſiſtente deſcribit, erit ad ſpatium, quod corpus in medio



non reſiſtente è quiete cadendo eodem tempore deſcribere poteſt, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD\times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam ſpatium in medio non reſiſtenſtente eſt in duplicatâ ratione temporis, ſive (m) ut V^2; & ob datas BD & AB ut $\frac{AD \times V^2}{AB}$. (n) Hæc area æqualis eſt areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, & (o) ipſius M momentum eſt m; & propterea hujus areæ momentum eſt $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum eſt ad momentum differentiæ arearum prædictarum DET & $AbNK$, viz. ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2} BD \times AP$, ſive (p) ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP, ideoque, ubi areæ DET & DAP quam minimæ ſunt, (q) in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum DET & $AbNK$, quando omnes hæ areæ quam minimæ ſunt, æqualia habent momenta; (r) ideoque ſunt æquales. Unde cum velocitates, & propterea etiam ſpatia in medio utroque in principio deſcenſûs vel fine aſcenſûs ſimul de-

(m) * *Sivè ut V^2.* Nam ob datas BD, DA, DE, longitudo quæ æquatur $DET \times \frac{DA}{BD \times DE}$ (per hyp.) eſt ut area DET, ſeu ut tempus. Spatium autem in medio non reſiſtente eſt in duplicatâ ratione temporis (27. Lib. 1.) ideoque ut V^2.

(n) * *Hæc area.* Quoniam (per hyp.) $V : M = DA : DE$, erit $V = \frac{DA \times M}{DE}$ & $V^2 = \frac{DA^2 \times M^2}{DE^2}$, adeoque $\frac{BD \times V^2}{AB} = \frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$.

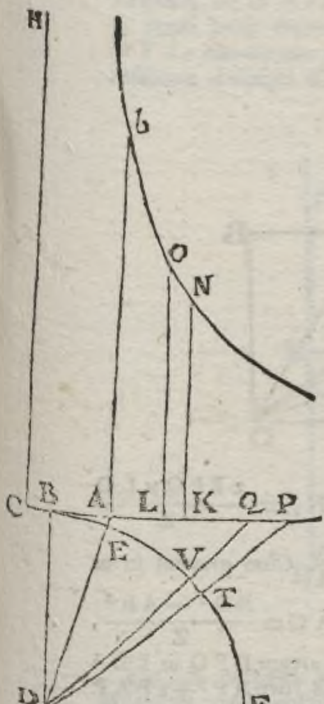
(o) * *Et ipſius M momentum eſt m.* Cùm enim ſit (per hyp.) $M = \frac{DET}{BD}$, momentum ipſius M, erit $\frac{DTV}{BD}$, ſed ſuperiùs ſupponebatur $DTV = BD \times m$; Quarè momentum ipſius M, eſt m; Et ideò momentum quadrati M^2 eſt $2M \times m$ (per caſ. 3. Lem. hujus) & *propterea* ob datas DA, BD, DE & AB, *hujus areæ momentum* &c.

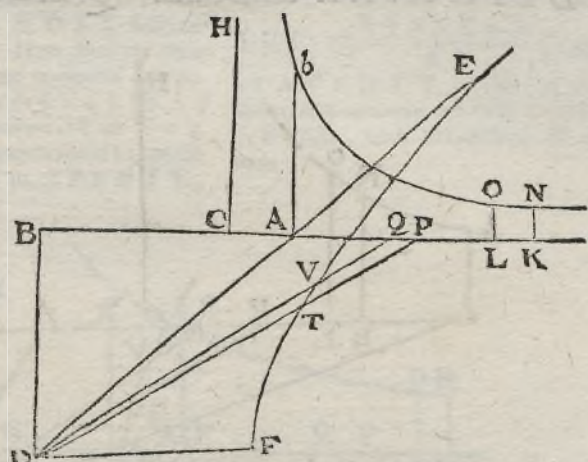
(p) * *Sivè ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET &c.* Ob $M = \frac{DET}{BD}$, ideoque $M \times BD = DET$, & $\frac{1}{2} BD \times AP = DAP$.

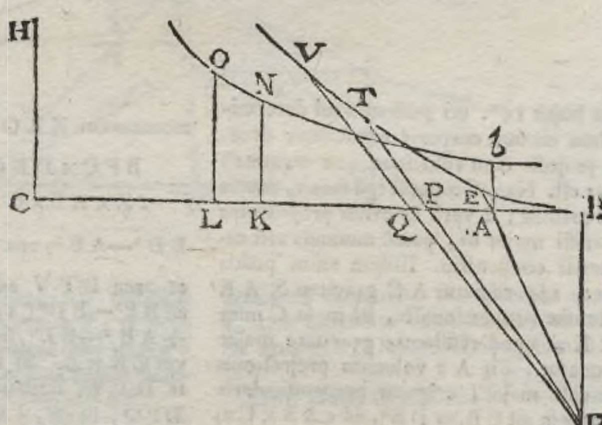
(q) * *In ratione æqualitatis.* Ubi enim areæ DET & DAP quam minimæ ſunt, fit $DET : DAP = DE^2 : DA^2$, ideóque $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET = DAP$.

(r) *Ideóque ſunt æquales.* Quandò ſunt quam minimæ.

descripta accedant ([f]) ad æqualitatem; ideoque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ dif-





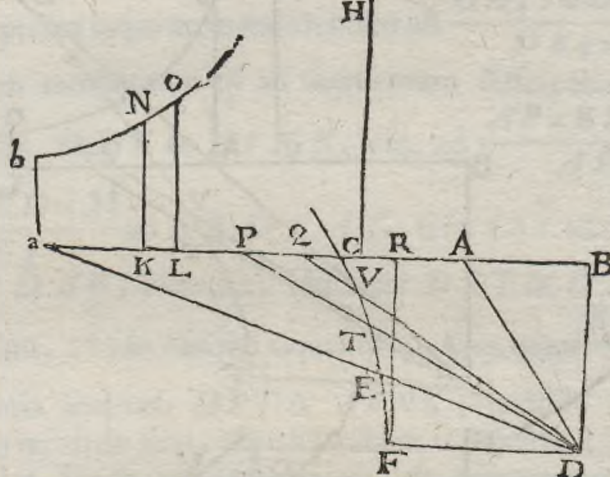


ferentia; & præterea cùm spatium in medio non resistente sit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & spatium in medio resistente sit perpetuò ut arearum DET & $AbNK$ differentia: necesse est, ut spa-

([f]) *Accedant ad æqualitatem.* Ob resistentiam cum velocitate nascentem vel evanescentem, manente gravitate.

144. Constructione casûs 3[i]. propositio-

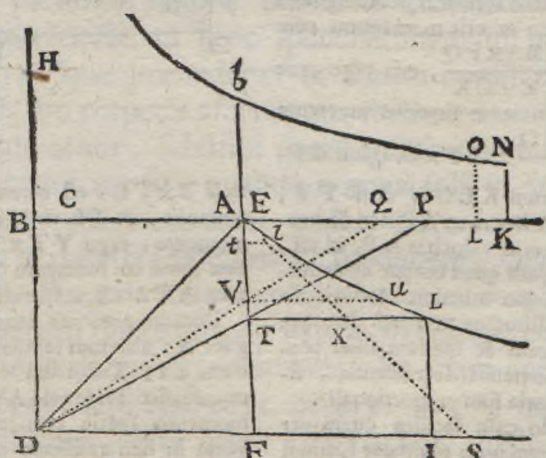
ſpatia in medio utroque, in æqualibus quibuſcunque temporibus deſcripta, ſint ad invicem ut area illa $\frac{CD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*



tionis hujus 14æ. uti poſſumus ad determinandum motum corporis verticaliter deorſum projecti cum velocitate quæ terminali minor eſt. Nam ſi æqualis ipſi fuerit, motus eſt æquabilis; ſi verò celeritas projectionis terminali major ſit, paulò mutanda erit caſûs tertii conſtructio. Iiſdem enim poſitis in not. 139. capiatur A C gravitati & A K reſiſtentiæ proportionalis, ità ut ſit C inter A & K, quod reſiſtentia gravitate major ſupponatur. Sit A a velocitas projectionis terminali major; erigatur perpendicularis a b, quæ ſit ad D B, ut DB^2, ad $4\,AB \times Ca$, & deſcriptâ ad aſymptotos rectangulas C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K, perpendiculari, area a b N K augebitur in progreſſione arithmeticâ, dum vires C K in progreſſione geometrica minuuntur. Spatium autem tempore D E T deſcriptum erit ut exceſſus areæ a b N K, ſuprà aream D E T; nam ponatur, (*ut in demonſtratione prop.* 14.) $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, & ideò $KL = \frac{2BPQ}{Z}$ atque areæ ab N K momentum K L O N, $= \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times DB^3}{2Z \times AB \times CK}$. Cùm gravitas ſit ut $BD^2 - AB^2$, erit $AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z}$, & area D T V ad aream D P Q ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$ (136) ſive $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, ſive $AK \times Z - AC \times Z$, vel $CK \times Z$. Si itaque pro areâ conſtante D T V, ſcribatur $BD \times m$, erit area D P Q, id eſt, $\frac{1}{2} BD \times PQ$ ad $BD \times m$, ut $CK \times Z$ ad BD^2, atquè indè fit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ a b N K momentum K L O N ſuperiùs inventum ſit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$ auferatur areæ D E T momentum D T V ſeu $BD \times m$ & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum ut velocitas A P, id eſt,

est, ut momentum spatii quod corpus describit, ideòque differentia arearum ut spatium descriptum.

145. Hinc spatium tempore D E T, velocitate uniformi A a descriptum est ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente ut factum $A\,a \times D\,E\,T$ ad arearum a b N K & D E T differentiam in A B ductam. Nam spatium tempore D E T, velocitate uniformi A a descriptum, est ut $A\,a \times D\,E\,T$ (5. lib. 1.) & spatii hujus momentum est ut $A\,a \times D\,T\,V$; momentum autem spatii in medio resistente descripti est ut $A\,P \times D\,T\,V$, seu ut velocitas in momentum temporis ducta (12) & quia evanescente D E T, fit $A\,P = A\,a$, hæc momenta $A\,a \times D\,T\,V$, $A\,P \times D\,T\,V$, initio temporis æqualia sunt, sicut & spatia initio descripta. Sed $A\,P \times D\,T\,V = A\,P \times B\,D \times m$ & momentum differentiæ arearum a b N K & D E T; est $\frac{A\,P \times B\,D \times m}{A\,B}$ (144). Ergo $A\,P \times D\,T\,V$ æquale est momento differentiæ arearum a b N K & D E T per A B ducto, unde manifestum est propositum. 145.



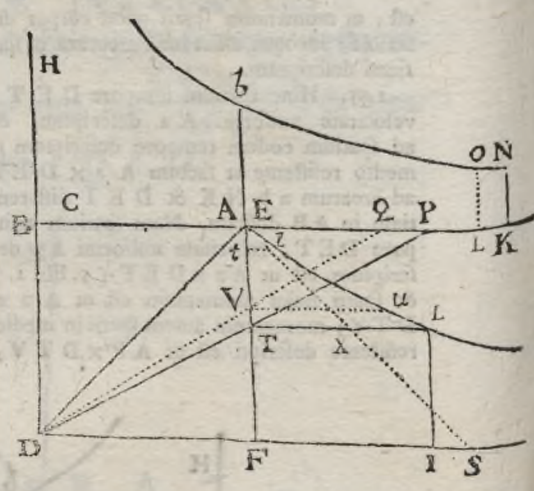
146. Si corporis ascendentis velocitas exponatur per longitudinem A P, & resistentia per A K quæ ponatur esse ut $A\,P^2 + 2\,B\,A\,P$, ita ut assumptâ datâ quâvis quantitate Z, sit $A\,K = \frac{A\,P^2 + 2\,B\,A\,P}{Z}$; vis autem gravitatis exponatur per A C, quæ sit semper ut $A\,B^2$, ita ut sit $A\,C = \frac{A\,B^2}{Z}$ eademque constructio fiat quæ (not. 141.) * & in A erigatur perpendiculum $A\,b = \frac{A\,B^2}{4\,C\,A}$. Denique erecto perpendiculo in C describatur ad Asymptotos Rectangulos C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K perpendiculari, area A b N K diminuetur in progressione Arithmeticâ dum vires C K in progressione Geometricâ decrescente sumuntur. Et distantia corporis ab ejus altitudine maximâ erit ut excessus areæ A b N K supra Triangulum D E T.

Cùm enim sit $A\,K = \frac{A\,P^2 + 2\,B\,A\,P}{Z}$ erit ipsius A K momentum K L (*per lib. 2. Lem. II.*) $= \frac{2\,A\,P\,Q + 2\,B\,A \times P\,Q}{Z} = \frac{2\,B\,P\,Q}{Z}$ & areæ A b N K momentum $K\,L\,O\,N = \frac{2\,B\,P\,Q \times L\,O}{Z}$, & quia, per naturam hyp. est $C\,K : C\,A = A\,b \left(\text{sive } \frac{A\,B^2}{4\,C\,A}\right) : L\,O$, est $L\,O = \frac{A\,D^2}{4\,C\,K}$, ideoque $K\,L\,O\,N =$

 BP

$\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$. Est verò area DTV ad aream DPQ ut DT^2 ad DP^2, sive etiam ob Triangula similia TDF, BDP, ut DF^2 sive AB^2 ad BP^2, seu $AP^2 + 2BAP + AB^2$ (*per* 4. 2. *El.*) hoc est (quia ex hypothesi est, $AP + 2BAP = AK \times Z$, & $AB^2 = CA \times Z$) ad $CK \times Z$. Hinc si pro area DPQ scribatur ejus valor $\frac{1}{2} BD \times PQ = \frac{1}{2} AB \times PQ$, erit area $DTV = \frac{AB \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, quæ valorem constantem exprimere debet, quia momentum temporis sibi semper æquale exponit, ejus itaque loco scribatur Rectangulum $AB \times m$ in quo m erit momentum constans, est $m = \frac{AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, erit ergo areæ AbNK momentum superius inventum $\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK} = BP \times m$, igitur differentia momentorum KLON & DTV, est $BP \times m - AB \times m = AP \times m$ & propterea ob datum m ut velocitas AP, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo describit, & quo minuitur corporis distantia ab ejus altitudine maximâ. Ideoque differentia arearum & spatium illud proportionalibus momentis decrescentia, simulque evanescentia sunt proportionalia.

Verùm in isto casu facilius quam per methodum *Newtonianam* obtinetur spatium à corpore ascendente usque ad quietem in medio resistente descriptum, & ejus relatio ad spatium in medio non resistente eodem tempore percurrendum: Etenim per punctum A asymptotis DB, DF describatur hyperbola, & ex puncto T ducatur perpendiculum T*L* ad Hyperbolam usque, Trilineum AT*L* erit ut spatium quæsitum. Ducatur *L*I ad asymptotum perpendicularis, erit $FI = TL$ & $TF = LI$, sed ex natura Hyperbolæ est $DF : DI = LI$ (sive TF) $: AF$, & dividendo $DF : FI$ (sive TL) $= TF : AT$, hoc est alternando $DF : TF = TL : AT$ (sed per 141) est $DF : TF = AP : AT$, ergo est $AP = TL$, itaque ducta ex V paralela Vu, erit VT*L*u, momentum areæ AT*L*



$= VT \times TL$, est autem VT momentum temporis, & $TL = AP$ ipsa velocitas eo momento, ergo $VT \times T$ est ut momentum spatii eo momento descripti, ergo tota area AT*L* est ut spatium descriptum.

Ducatur præterea tangens AS & designet At ultimum temporis momentum, & ducta tl, Trilineum evanescens AT*L* æquale fiet Triangulo Atl, & eo ultimo momento spatia tam in medio resistente quam in non resistente descripta erunt æqualia, ideoque per idem triangulum Atl exprimentur; spatia verò in medio non resistente descripta sunt ut Quadrata temporum, ideoque spatium tempore At in medio non resistente descriptum erit ad spatium tempore AT in eodem medio descriptum sicut $\overline{At}^2$ ad $\overline{AT}^2$, sive ut area trianguli Atl ad aream ATX; spatium verò in medio resistente descriptum tempore At erit ad spatium tempore AT in eodem medio descriptum ut Atl ad trilineum AT*L*, unde liquet quod spatium in medio non resistente descriptum, ascendendo ad quietem usque, erit ad spatium in medio resistente descriptum, ut ATX ad AT*L*, existente velocitate, in medio non resistente, ut TX, & in medio resistente, ut TL.

Scho-

Scholium.

([t]) Reſiſtentia corporum ſphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex denſitate medii. Et reſiſtentiæ partem illam, quæ oritur ex denſitate fluidi, diximus eſſe in duplicata ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, eſt uniformis, ſive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim vi uniformi ſeu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed ſufficit aditum pateſeciſſe ad hanc ſpeculationem in propoſitionibus VIII. & IX. quæ præcedunt, & eorum corollariis. In ([u]) iiſdem utique pro corporis aſcendentis reſiſtentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, ſubſtitui poteſt reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus ſolâ vi inſitâ movetur; & corpore rectâ aſcendente addere licet hanc uniformem reſiſtentiam vi gravitatis; eandemque ſubducere, quando corpus rectâ deſcendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus reſiſtitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in propoſitionibus præcedentibus XIII. & XIV. in ([x]) quibus etiam reſiſtentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis, ſubſtitui poteſt, vel cum eâdem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

SEC-

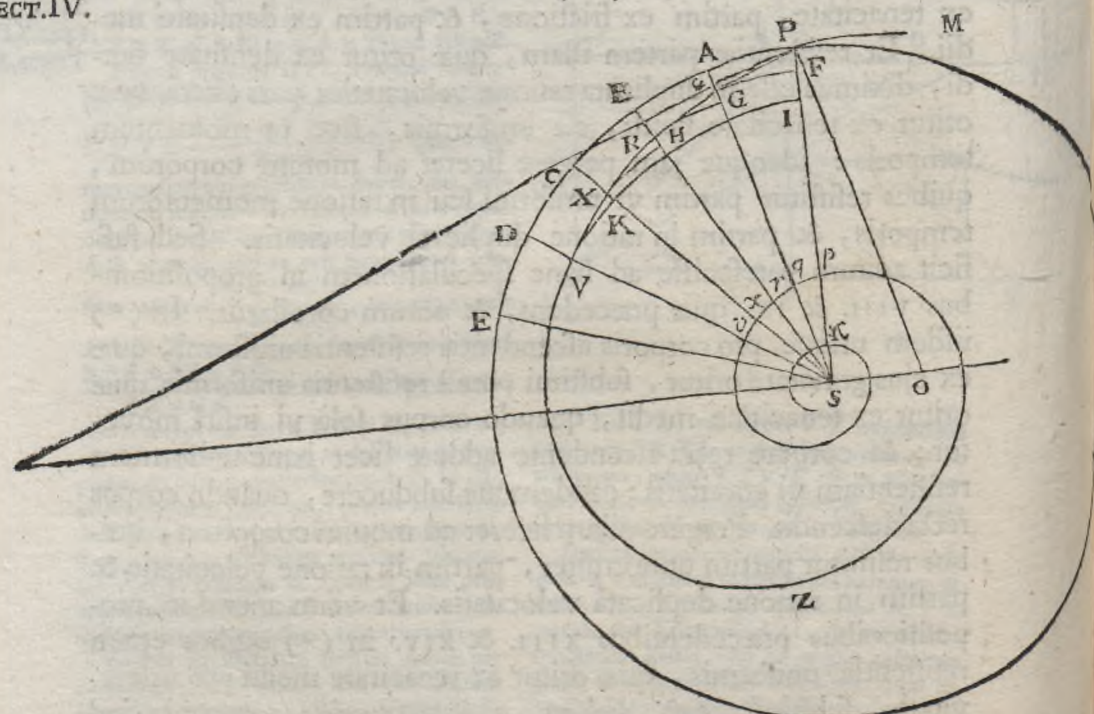
(t) (*) *Reſiſtentia corporum* (Vid. Lemnum. 1.)

(u) (*) *In iiſdem utique* (105).

(x) * *In quibus etiam reſiſtentia uniformis*, hoc eſt, ſi corpus ſolâ vi inſitâ feratur, in conſtructionibus prop. 13. & 14., quæ ſunt pro corporis aſcenſu, loco gravitatis ſubſtituenda eſt reſiſtentia uniformis quæ oritur ex tenacitate medii; ſi corpus aſcendens vi gravitatis etiam ur-
geatur, quantitas illa quæ ſolam gravita- 146.
tem exponebat, ſummam gravitatis & reſiſtentiæ uniformis in prædictis conſtructionibus exponet. Tandem ſi corpus vi gravitatis deſcendat, eadem quantitas quæ ſolam gravitatem exponebat, exceſſum gravitatis ſuprà reſiſtentiam uniformem in conſtructionibus quæ ſunt pro deſcenſu repræſentabit (cæteris manentibus.)

SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis resistentibus (*).



(*) NEWTONUS in hâc sectione præcipuas supponit Logarithmicæ spiralis proprietates, postulat igitur instituti nostri ratio ut de illâ curvâ aliquid præmittamus.

147. Circulus P A E L, centro S, & radio quovis S P descriptus divisus sit in arcus quotlibet æquales P A, A B, B C, C D &c., sintque radiorum P S, A S, B S, C S &c., partes P S, Q S, R S, X S &c. in continuâ progressione geometricâ, puncta P, Q, R, X &c., erunt in *Spirali Logarithmicâ* in quâ proindè si radii Q S, R S, X S &c., sint numeri, arcus circuli P A, P B, P C &c., sicut & anguli P S Q, P S R, P S X &c., erunt ut illorum numerorum Logarithmi, prorsùs ut in vulgari Logarithmicâ axis partes sunt ut Logarithmi ordinatarum correspondentium.

148. Quoniam autem progressio geometrica in infinitum decrescere & crescere potest, manifestum est spiralem Logarithmicam utrinquè tam ad centrum S accedendo quàm ab eodem versùs M recedendo per gyros infinitos continuari posse, continuatâ progressione radiorum decrescentium vel crescentium circà centrum S, ad quod idcircò curva decrescentibus radiis proportionalibus, magis magisque accedit, licet numquam illud possit attingere, sive ut loqui amant, licet illud centrum non attingat nisi post infinitas revolutiones.

149. Angulus S Q R, quem radius quilibet S Q, cum curvâ ad easdem partes constituit constans est; si quidem evanescentibus arcubus æqualibus P A, A B, B C &c., triangula evanescentia P S Q, Q S R, R S X &c., similia fiunt propter latera circà æquales ad centrum angulos proportionalia (147) & ideò alii anguli homologi

gi SPQ, SQR, SRX &c., & PQS, QRS, RXS, æquales ſunt.

150. Quoniam itaque ſpira quælibet PQRZp, pqrzπ &c., totidem triangulis PQS & qqS, QRS & qrS &c. ſimilibus ſimiliterque poſitis diviſa eſt, ſpiræ omnes quæ à radio poſitione dato SP, ad eundem radium ductæ ſunt, inter ſe ſimiles radiiſque correſpondentibus proportionales erunt, id eſt PS : pS = PQRZp : pqrzπ &c. Atquè hinc ſequitur (147) tam ſpiras omnes quàm radios ipſis correſpondentes ad centrum uſque in progreſſione geometricâ decreſcere, ſunt enim PS, pS, πS, &c. progreſſionis geometricæ termini æquidiſtantes ob æqualem angulorum æqualium PSQ, QSR, pSq, qSr, &c. numerum in ſingulis ſpiris comprehenſum undè radiorum quoque differentiæ Pp, pπ &c. in eâdem geometricâ progreſſione decreſcunt.

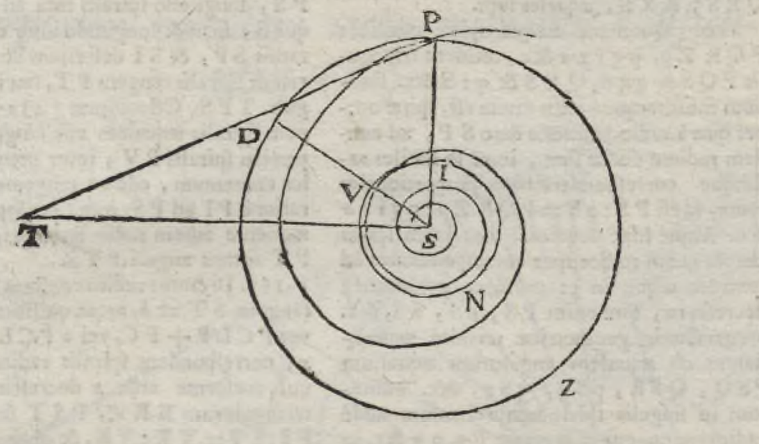
151. Ductâ rectâ PT ſpiralem tangente in P, & rectâ PO ad eandem perpendiculari, per centrum S erigatur ad radium SP perpendiculum TSO rectis PT & PO occurrens in T & O, longitudo ſpiralis PZpzπS, ad cêntrum uſque S, æquabitur tangenti PT, eritque proindè ad radium SP in datâ ratione PT ad SP, vel OP ad OS. Nam centro S, radiis SQ, SR, SX, SV &c. infinitè propinquis deſcripti ſint arcus circulares QF, RG, XH, VK &c., & ob angulos QFP, RGQ, XHR rectos, anguloſque QPF, RQG, XRH &c. æquales (149), triangula evaneſcentia PFQ, QGR, RHX &c. ſimilia ſunt triangulo PST, eſt igitur PT : PS = PQ : PF = QR : QG = RX : RH &c. & compoſite PT : PS = PQ + QR + RX &c. : PF + QG + RH &c. id eſt, ut longitudo ſpiralis ad totum radium PS. Quarè longitudo ſpiralis æquatur tangenti PT. Eſt autem ubique tangens PT ad radium correſpondentem PS, in ratione datâ, ob triangulum PTS ſpecie datum (149) & ob triangula TPS, POS, (*per conſtr.*) ſimilia, eſt etiam OP : OS = PT : PS, ſeu ut longitudo ſpiralis ad radium.

152. Hinc quoque patet quòd ſi centro S & radio quovis VS deſcribatur circulus ſecans ſpiralem in V & radium PS, in I, pars ſpiralis PV erit ad partem PI, radii PS, ut tangens PT ad totum radium PS. Quarè ſi, manentibus circulorum radiis SP, SI, mutetur utcumque angulus TPS, quem ſpiralis ſeu ipſius tangens continet cum radio PS, longitudo ſpiralis tota ad centrum uſquè S, ſicut & longitudo inter duos circulos radiis SP, & SI deſcriptos comprehenſa, erit ut ſpiralis tangens PT, ſeu ut ſecans anguli TPS. Oſtendimus (151) longitudinem ſpiralis æqualem eſſe tangenti PT, & partem ſpiralis PV, inter prædictos circulos contentam, eſſe ad tangentem PT, in ratione PI ad PS, quæ (*per hyp.*) data eſt; manente autem radio ſeu ſinu toto PS, eſt PT ſecans anguli PTS. 152.

153. Dicantur radius conſtans PS = a, ſubtangens ST = b, arcus quilibet circuli PC vel PCLP + PC, vel 2 PCLP + PC = x, correſpondens ſpiralis radius SX = y, qui creſcente arcu x decreſcit, erit ob triangulorum XKV, PST ſimilitudinem PS : ST = XK : VK, & ob ſectores SVK, SDC ſimiles, SK ſive SX : SC ſeu PS = VK : DC, ideoque ex æquo SX : ST = XK : DC; id eſt, $y : b = - dy : dx = -\frac{b\,dy}{y}$, hinc ſumptis fluentibus $x = Q - b\,L.y$, & quia ubi $x = 0$, fit $y = a$, erit $Q = bL.a$, & ideo $x = b\,L.a - b\,L.y = b\,L.\frac{a}{y}$; ſi itaque datus fuerit radius y cum arcu circulari x, ſeu angulo PSC dabitur b ſubtangens anguli ſpiralis, eſt enim $b = \frac{x}{L.\frac{a}{y}}$.

Si verò datus ſit tum arcus x tum ſubtangens b dabitur radius y; Ponatur enim $L.h = 1$ & erit $\frac{x}{b} \times L.h = L.\frac{a}{y}$, adeòque $h^{\frac{x}{b}} = \frac{a}{y}$; $y = \frac{a}{h^{\frac{x}{b}}}$, & hinc etiam $a = y \times h^{\frac{x}{b}}$.

154. Hinc ſi manentibus radiis SP ſeu a, & SV vel SI ſeu y, adeòque & $L.\frac{a}{y}$, mutetur utcumque angulus TPS, quem ſpiralis cum radio continet, arcus circularis PD vel x, comprehenſus inter radios SP & SVD, erit ſemper ut ſubtangens ſpiralis ST, ſeu b, quæ, manente radio ſeu ſinu toto PS, eſt ut anguli TPS tangens.



155. Iisdem positis; hoc est, manentibus radiis S P sive a, & S I sive y, & utcumque mutato angulo T P S, numerus revolutionum spiralis inter circulos PDZP, & IVNI centro S & radiis datis SPSV vel S I descriptos est ut tangens S T anguli T P S, quem spiralis cum medio continet.. Sit enim c circumferentia circuli PTZP, & n numerus integer vel fractus revolutionum spiralis a puncto P ad punctum V inter circulos P D Z P, & I V N I, erit (153) $nc = x = b\,L.\frac{a}{y}$; & hinc $n = \frac{b}{c} \times L.\frac{a}{y}$. Quarè ob datas c, a & y, (per hyp.) erit n ut b, id est numerus revolutionum inter circulos datos ut subtangens spiralis S T, seu ut tangens anguli T P S, quem spiralis cum radio continet.

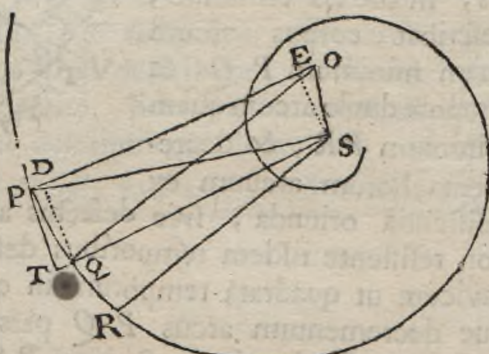
156. Spiralis post infinitos sibi super impositos gyros comprehendit cum radio P S spatium duplum trianguli P S T. Iisdem enim positis quæ num. 153. cum sit (fig. pag. 142.) $PS(a) : ST(b) = XK(-dy) : VK = -\frac{b\,dy}{a}$, erit sector SVK seu SVX $= -\frac{yb\,dy}{2a}$, & sumptis fluentibus, sector $SPV = Q - \frac{by^2}{4a}$; quia verò evanescente sectore S P V, fit $y = a$, erit $Q = \frac{ba^2}{4a}$, & hinc $SPV = \frac{baa - byy}{4a}$. Quarè ubi radius $y = o$, fiet area $SPV = \frac{ba}{4} = \frac{PS \times ST}{4} = \frac{1}{2}$ Triang. P S T.

LEM-

LEMMA III.

Sit P Q R *ſpiralis quæ ſecet radios omnes* SP, SQ, S R, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* P T *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *ſecetque radium* S Q *in* T; *& ad ſpiralem erectis perpendiculis* P O, Q O *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico quod ſi puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* P S O *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* T Q × 2 P S *ad* P Q *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *O P Q*, *O Q R* ſubducantur anguli æquales *S P Q*, *S Q R*, & manebunt anguli æquales *O P S*, *O Q S*. Ergo circulus qui tranſit per puncta O, S, P tranſibit (y) etiam per punctum *Q*. Coëant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitûs *P Q* tanget ſpiralem, (z) ideoque perpendiculariter ſecabit rectam *O P*. Fiet igitur *O P* diameter circuli hujus, & angulus *O S P* in ſemicirculo rectus. *Q. E. D.*



Ad *O P* demittantur perpendicula *Q D*, *S E*, & (a) linearum rationes ultimæ erunt hujuſmodi: *T Q* ad *P D* ut *T S* vel *P S* ad *P E*, ſeu 2 *P O* ad 2 *P S*; item *P D* ad *P Q* ut *P Q* ad 2 *P O*; & ex æquo perturbatè *T Q* ad *P Q* ut *P Q* ad 2 *P S*. Unde fit *P Q q* æquale *T Q* × 2 *P S*. *Q. E. D.*

PRO-

(y) * *Tranſibit etiam per punctum Q.* (per prop. 21. lib. 3. Elem.)

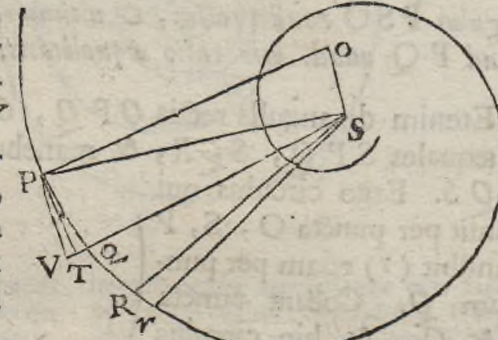
(z) *Ideòque perpendiculariter ſecabit rectam* O P, quæ (*per hyp.*) perpendicularis eſt ad arcum Q P, fiet igitur O P diameter circuli hujus (*per prop.* 19. *lib.* 3. *Elem.*) & angulus O S P in ſemicirculo rectus (*per prop.* 31. *lib.* 3. *Elem.*).

(a) * *Et linearum rationes ultimæ.* Quoniam lineæ P T, D Q, E S ad P O normales, ſunt parallelæ, erit (*per prop.* 10. *lib.* 6. *Elem.*) T Q : P D = T S vel P S : P E, & ob ſimilitudinem triangulorum PSO, P E S, P S : P E = P O : P S, ſeu 2 P O : 2 P S, ideoque T Q : P D = 2 P O : 2 P S. Quia verò radii O P, O Q ſunt ad arcum 156.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

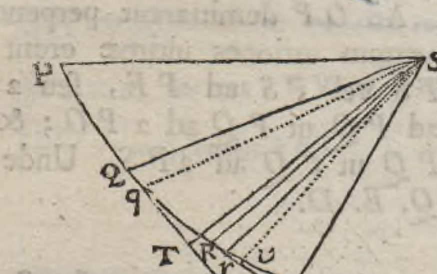
Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta in duplicatâ ratione denſitatis; dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali, quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.



Ponantur quæ in ſuperiore lemmate, & producatur $S\,Q$ ad V, ut ſit $S\,V$ æqualis SP. Tempore quovis, in medio reſiſtente, deſcribat corpus arcum quàm minimum $P\,Q$, & tempore duplo arcum quàm minimum PR; & decrementa horum arcuum ex reſiſtentiâ oriunda, ſive defectus ab arcubus, qui in medio non reſiſtente iiſdem temporibus deſcriberentur, (b) erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Eſt itaque decrementum arcûs $P\,Q$ pars quarta decrementi arcûs $P\,R$. (c) Unde etiam, ſi areæ $P\,S\,Q$ æqualis capiatur area $Q\,S\,r$,

evaneſcentem P Q perpendiculares, punctum O eſt centrum, P O radius & 2 P O diameter circuli ſpiralem oſculantis in P (121. *lib.* 1.) & (*per lem.* 7. *lib.* 1.) P Q hujus circuli arcus vel chordæ; atque adeo (ex naturâ circuli) abſciſſa P D eſt ad chordam P Q ut P Q ad diametrum 2 P O. Quare *ex æquo perturbatè* &c.

(b) * *Erunt ad invicem.* Cùm enim reſiſtentia per arcum P R conſiderari poſſit tanquam vis retardatrix (4), decrementa arcuum minimorum P Q, P R ex reſiſtentiâ oriunda ſunt ut ſpatia quæ urgente vi acceleratrice reſiſtentiæ æquali corpus deſcriberet iiſdem temporibus quibus deſcribit arcus illos P Q, P R; Quarè decrementa illa ſunt ut quadrata temporum quibus generantur (*per Lem. X. lib.* 1.).



(c) * *Undè etiam ſi areæ.* Corpus eâ velocitate quam habet in loco P, temporibus æqualibus deſcribat arcus quàm minimos P q, q v, in medio non reſiſtente,

$Q\,S\,r$, erit decrementum arcûs $P\,Q$ æquale dimidio lineolæ $R\,r$; ideoque vis resistentiæ & vis centripeta sunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}R\,r$ & $T\,Q$ quas simul generant. Quoniam vis centripeta, quâ corpus urgetur in P, (d) est reciprocè ut $S\,P\,q$, & (*per* (e) *lem.* x. *lib.* I.) lineola $T\,Q$, quæ vi illâ generatur, est in ratione compositâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus $P\,Q$ describitur (nam resistentiam in hoc casu, ut infinitè minorem quàm vis centripeta, negligo) erit $T\,Q \times S\,P\,q$, id est (per lemma novissimum) $\frac{1}{2}P\,Q\,q \times S\,P$, in ratione duplicatâ temporis, (g) ideoque tempus est ut $P\,Q \times \surd S\,P$; & (h) corporis velocitas, quâ arcus $P\,Q$ illo tempore describitur, ut $\dfrac{P\,Q}{P\,Q \times \surd S\,P}$ seu $\dfrac{1}{\surd S\,P}$, hoc est, in subduplicatâ ratione ipsius $S\,P$ reciprocè. Et simili argumento, velocitas quâ arcus $Q\,R$ describitur, est in subduplicatâ ratione ipsius $S\,Q$ reciprocè. Sunt autem arcus illi $P\,Q$ & $Q\,R$ ut (i) velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicatâ ratione $S\,Q$ ad $S\,P$, sive ut $S\,Q$ ad $\sqrt{S\,P \times S\,Q}$;
&

te, & arcus P Q, Q R in medio resistente, & erit (*ex dem.*) $4\,Q\,q = R\,v$, sunt autem areæ P S q & q S v æquales (*per prop.* I. *Lib.* I.) ideóque ob areas P S Q, & Q S r, etiam æquales (*per hyp.*) erit P S q — P S Q seu area Q S q æqualis q S v — Q S r, seu r S v — Q S q, & hinc area r S v æqualis est 2 Q S q; sed demissis ex centro S ad tangentes Q T & r t per puncta Q & r ductas perpendiculis S T & s t, area evanescens Q S q est $\frac{1}{2}$ S T × Q q, & area r S v, est $\frac{1}{2}$ S t × r v. Quarè S T × Q q æquatur $\frac{1}{2}$ S t × r v, & coeuntibus punctis P & v, fit S t = S T atquè adeo Q q = $\frac{1}{2}$ r v, & 2 Q q = r v. Cùm igitur suprà invenerimus 4 Q q = R v, erit 4 Q q — 2 Q q, seu 2 Q q = R v — r v = R r, & ideò Q q = $\frac{1}{2}$ R r. Itaque eodem tempore quo resistentia generat decrementum Q q, seu $\frac{1}{2}$ R r, vis centripeta quâ corpus 156.
à tangente P T (*vid. fig. text.*) ad punctum Q arcûs P Q retrahitur, generat decrementum T Q, & ideò vis resistentiæ est ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ R r ad T Q, (*per cor.* 4. *Lem. X.*) atque hæc omnia generaliter obtinent, quæcumque fuerit tum curva P Q R, cujus proprietates nondum adhibuimus, tum vis centripeta, tum resistentia, tum velocitas corporis.

(d) * *Est reciprocè ut S P q* (per hyp.).

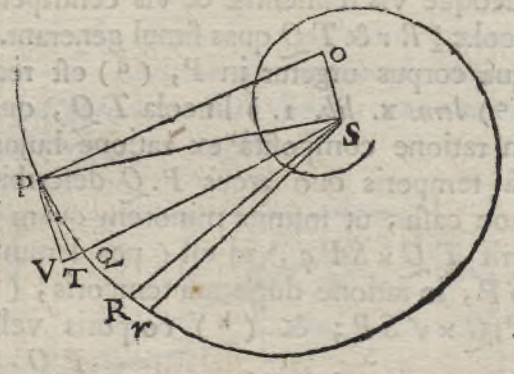
(e) * *Per Lem. X.* (cor. 3.).

(g) * *Ideoque tempus.* (Neglectâ fractione datâ $\frac{1}{2}$ *est ut* &c.

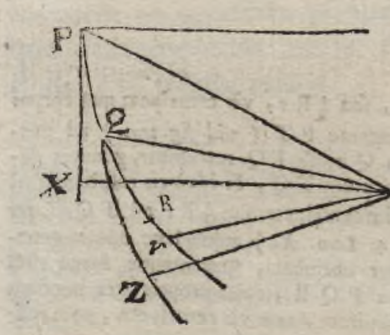
(h) * *Et corporis velocitas.* (14).

(i) * *Ut velocitates descriptrices ad invicem* (11), quia arcus illi P Q, & Q R, æqualibus temporibus describuntur (*per Hyp.*).

& (k) ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, eſt arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. (l) Sumantur proportionalium conſequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ſeu $\frac{1}{2} VQ$. Nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ad $\frac{1}{2} VQ$ eſt (m) æqualitatis. Quoniam decrementum arcûs PQ, ex reſiſtentiâ oriundum, ſive hujus duplum Rr, (n) eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim; (o) erit reſiſtentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ



ad



(k) * *Et ob æquales angulos.* Ex centro S ad tangentes PX, QZ demiſſa ſint perpendicula SX, SZ, & areæ æquales PSQ & QSr, erunt $\frac{1}{2}$ SX × PQ, & $\frac{1}{2}$ SZ × Qr, ideóque SX ad SZ ut Qr ad PQ; ſed ob angulos rectos ad X & Z, & angulos æquales XPS & ZQS (*per lem.* 3.) ſimilia ſunt triangula SXP & SZQ, & ideò $SX : SZ = SP : SQ$, quare ſit $Qr : PQ = SP : SQ$.

(l) * *Sumantur proportionalium &c.* Cùm enim ſit (*per dem.*) $PQ : SQ = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, & $PQ : SQ = Qr : SP$, erit etiam $Qr : SP = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, unde erit $PQ : SQ = Qr - QR$ ſeu $Rr : SP - \sqrt{SP \times SQ}$, & hinc $PQ : Rr = SQ$:

(m) * *Eſt æqualitatis.* Eſt enim $SQ = SP - VQ$, & proindè $SP \times SQ = SP^2 - SP \times VQ$, ideoque extrahendo radicem quadratam (per formulam lib. 1. 551.) fit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ - \frac{VQ^2}{8 SP}$ — &c., in infinitum; cæteri verò termini poſt ſecundum negligi poſſunt, quia coeuntibus P & Q, evaneſcunt reſpectu VQ, & ideò erit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ$, ac proindè $\frac{1}{2} VQ = SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(n) * *Eſt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim.* (Per cor. 3. Lem. X. lib. 1.)

(o) *Erit reſiſtentia &c.* Nam tempus eſt ut $PQ \times \sqrt{SP}$ (*ex Dem.*).

ad $\frac{1}{2} VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2} VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ five ut $\frac{\frac{1}{2} OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & (p) ob similia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2} VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2} OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, (q) id est, in ratione densitatis medii in P & ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur spiralis; & (r) ob datam rationem OS ad OP, densitas medii in in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciprocè ut distantia à centro SP, corpus gyrari potest in hâc spirali. *Q. E. D.*

Corol.

(p) * *Et ob similia triangula PVQ; PSO*, angulus PSO (*per Lemma novissimum*) rectus est & ideò æqualis angulo etiam recto PVQ, & prætereà si ex angulis rectis QPO & VPS subducatur communis angulus QPS, remanent æquales VPQ & SPO; Quarè triangula PVQ & PSO sunt similia.

(q) * *Id est in ratione &c.* (per Hyp.) 156.

(r) * *Ob datam rationem OS ad OP.* Datâ spirali datur angulus QPS & hinc in Triangulo SPO datur angulus SPO cum isto QPS rectum faciens, datur etiam rectus PSO (*per Lem.* 3.) atquè ideò trianguli POS anguli omnes dantur, *&* proindè datur ratio OS ad OP.

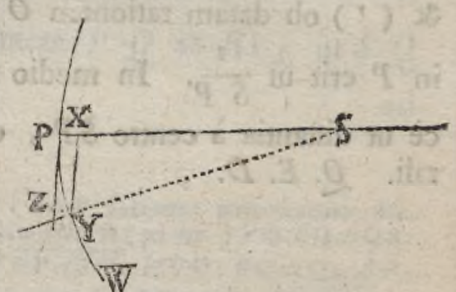
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

Corol. 1. (f) Velocitas in loco quovis P ea ſemper eſt, quâcum corpus in medio non reſiſtente eâdem vi centripetâ gyrari poteſt in circulo, ad eandem à centro diſtantiam SP.

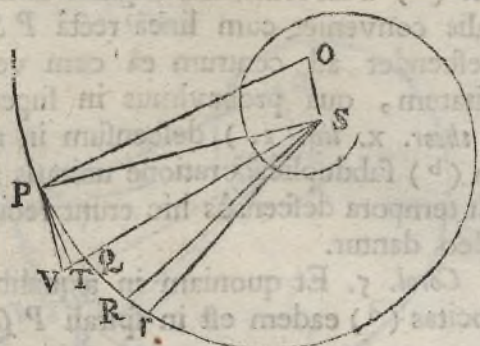
Corol. 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{OS}{OP}$, ſin diſtantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et (t) inde ſpiralis ad quamlibet medii denſitatem aptari poteſt.

Corol. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}\, OS$ ad OP. Nam vires illæ ſunt

(f) * *Velocitas in loco quovis P &c.* * Gyretur corpus in medio non reſiſtente in circulo P W radio P S deſcripto, in eoque retineatur vi centripetâ quæ ſit eadem cum illâ qua corpus urgetur in puncto P ſpiralis (*vide fig. textûs*). Sumatur in radio P S particula P X æqualis T Q, ſive ſpatio quod generatur per vim centripetam quâ corpus retinetur in ſpirali in P, ductâque tangente P Z, è puncto Y ducatur per centrum linea S Y y ad Tangentem uſque, Y y erit ſpatium quod generatur per vim centripetam quâ corpus in circulo retinetur, ſed coëuntibus punctis P & Y, linea y Y fit ultimò parallela lineæ P S, ideoque y Y fit æqualis particulæ P X, ſive T Q. Cùm ergo eadem ſit vis centripeta tam in Circulo quàm in ſpirali, & ſpatia æqualia y Y & T Q ab illâ vi centripeta generentur, æquali tempore utrinque generabuntur, unde eodem tempore quo corpus in ſpirali in Q pervenerit, eo ipſo tempore perveniet in Y in circulo, velocitas ergo in ſpirali erit ad velocitatem in hoc circulo ut eſt arcus P Q ad arcum P Y, ſed ex naturâ ſpiralis per Lemma III. eſt $PQ = \sqrt{TQ \times 2PS}$, & ex naturâ circuli eſt $PY = \sqrt{PX \times 2PS}$ & ex conſtructione cùm ſit $PX = TQ$ erit $PY = \sqrt{TQ \times 2PS}$ ergo $PQ = PY$, ergo velocitas in loco quovis ſpiralis ea eſt quâcum corpus eâdem vi centripetâ in medio non reſiſtente ad eandem à centro diſtantiam gyrari poteſt.



(t) * *Et inde ſpiralis &c.* * Fingantur duo media diverſæ denſitatis, talia tamen ut in ſingulo medio denſitas in locis diverſis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro. Sumptâ verò in utroque æquali à centro diſtantiâ S P, ſit ratio denſitatis prioris medii ad denſitatem poſterioris in eo loco ut a ad b, ea ratio eadem erit in aliâ quâcumque diſtantiâ à centro, putà in diſtantiâ S X. Nam in utroque medio denſitas in P erit ad denſitatem in X ut $\frac{1}{SP}$ ad $\frac{1}{SX}$; Itaque ſi in priore medio denſitas in P fuerit ut a, denſitas in X erit ut $\frac{a \times SP}{SX}$, & ſi in ſecundo medio denſitas in P fuerit ut ſunt ad invicem ut $\frac{1}{2}$ $R r$ & $T Q$ ſive ([u]) ut $\frac{\frac{1}{4} V Q \times P Q}{S Q}$ & $\frac{\frac{1}{2} P Q q}{S P}$ hoc eſt, ut $\frac{1}{2}$ $V Q$ & $P Q$, ſeu ([x]) $\frac{1}{2}$ $O S$ & $O P$. ([y]) Datâ igitur ſpirali datur proportio reſiſtentiæ ad vim centripetam, & vice versâ ex datâ illâ proportione datur ſpiralis.



Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hâc ſpirali, ([z]) niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt quàm dimidium vis centripetæ.

ut b denſitas in X erit ut $\frac{b \times SP}{SX}$, eſt verò $\frac{a SP}{SX}$ ad $\frac{b \times SP}{SX}$ ut a ad b, ergo in his duobus mediis denſitates erunt ubique in datâ ratione a ad b, in æqualibus à centro diſtantiis.

Si itaque data ſit ſpiralis quæ in medio priore deſcribitur, inveniri poterit illa quæ in poſteriore medio deſcribi poſſet; nam ſumpta diſtantia quâvis S P, fiat a ad b ut $\frac{OS}{OP}$ ad $\frac{b \times OS}{a \times OP}$ hæc erit ratio quæ in hâc novâ ſpirali intercedet inter lineas, lineis O S & O P correſpondentes, ſive quia angulus S in Triangulo O S P eſt rectus, hæc erit ratio inter ſinum anguli quem facit linea P S cum perpendiculari ad curvam, & Radium; quo ſinu dato ejuſque angulo, ſpiralis obtinetur ad hanc medii denſitatem aptata.

Ex quibus illuſtratur quod præcedit in hoc ipſo Corollario, ſi duæ ſpirales in diverſis mediis deſcribantur, mediorum denſitates in eadem diſtantia erunt ut $\frac{OS}{OP}$, ſed ſi diſtantiæ à Centro diverſæ ſumantur, Ratio inverſa diſtantiarum eſt huic conjungenda, eruntque ideo mediorum denſitates ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

(u) * *Sive ut &c.* Nam (per Dem.) 156.
$PQ : Rr = SQ : \frac{1}{2} VQ$, & (per Lem. 3.) $TQ = \frac{PQ^2}{2 PS}$, & punctis Q & P coeuntibus, eſt $SQ = SP$.

(x) * *Seu $\frac{1}{2}$ O S & O P.* Quia triangula P V Q, P S O ſimilia ſunt (ex Dem.) eſt $\frac{1}{2} VQ : PQ = \frac{1}{2} OS : OP$.

(y) * *Datâ igitur ſpirali.* Nam datâ ſpirali datur ſpecie triangulum P S O (ex Dem.) & indè datur ratio O S ad O P, & viceversâ datâ hâc ratione, datur ſpecie triangulum rectangulum P S O, & hinc datur angulus P O S æqualis angulo Q P S quem ſpiralis cum radio continet, ideóque datur ſpiralis. Iis enim datis & aſſumpto ut libet radio S P, dabitur ſubtangens ſpiralis Logarithmicæ, ſeu tangens anguli Q P S, & hinc dato angulo quovis P S R, dabitur radius S R cum puncto R in ſpirali (153).

(z) * *Niſi ubi vis reſiſtentiæ minor eſt &c.* Cùm enim vis reſiſtentiæ ſit ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP, & ad dimidium vis centripetæ ut $\frac{1}{2}$ O S ad $\frac{1}{2}$ O P, ſeu ut O S ad O P, ſitque trianguli rectanguli P S O (Lem. 3.) crus O S minus hypothenuſâ O P, manifeſtum eſt vim reſiſtentiæ minorem eſſe dimidiâ vi centripetâ.

tæ. ([a]) Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ, & ſpiralis conveniet cum lineâ rectâ *P S*, inque hac rectâ corpus deſcendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ ſit ad velocitatem, quâ probavimus in ſuperioribus in caſu parabolæ (*theor.* x. *lib.* I.) deſcenſum in medio non reſiſtente fieri, in ([b]) ſubduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium. ([c]) Et tempora deſcenſûs hic erunt reciprocè ut velocitates, atque ideo dantur.

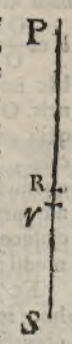
Corol. 5. Et quoniam in æqualibus à centro diſtantiis velocitas ([d]) eadem eſt in ſpirali *P Q R* atque in rectâ *SP*, & lon-

(a) * *Fiat reſiſtentia æqualis dimidio vis centripetæ &c.* Ideóque O S æqualis O P, & puncto O in infinitum abeunte, fiet O P perpendicularis ad S P, & angulus P O S ipſique æqualis angulus Q P S quem ſpiralis continet, cum radio P S evaneſcet, convenietque proindè ſpiralis cum lineâ rectâ P S.

(b) * *In ſubduplicatâ ratione unitatis*, Nam (*in theor. X. lib.* I.) corporis in medio non reſiſtente rectâ cadentis velocitas in loco quovis P æqualis eſt velocitati quâ corpus ad diſtantiam dimidiam à centro, ſeu ad diſtantiam $\frac{1}{2}$ S P circulum deſcribere poteſt, & (*per cor.* I. *hujus*) corporis in medio reſiſtente ſpiralem ſeu rectam P S cum quâ ſpiralis convenire ſupponitur deſcribentis velocitas in eodem loco P æqualis eſt velocitati quâcum corpus in medio non reſiſtento gyrari poteſt in circulo ad integram diſtantiam S P. Sed velocitates corporum diverſos circulos deſcribentium) in hypotheſi quòd vires centripetæ ſunt reciprocè ut quadrata radiorum) ſunt inter ſe reciprocè in Radiorum ratione ſubduplicatâ (*pro converſ. cor.* 6. *prop.* 4. *lib.* I.) adeóque velocitas in circulo cujus radius S P eſt ad velocitatem in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ S P, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad $\sqrt{1}$, ſive ut I. ad $\sqrt{2}$, erit ergo velocitas corporis in medio reſiſtente per rectam P S deſcendentis ad velocitatem deſcendentis in medio non reſiſtente per rectam eandem & in eodem loco P exiſtentis, ut I ad $\sqrt{2}$. Q. E. D.

* Obſervandum verò quòd velocitates initiales utrinque debent eſſe ſecundùm Legem quæ in reliquo motu obtinet, hoc eſt velocitas initialis in medio reſiſtente eſſe debet æqualis celeritati quâ corpus ad eamdem à centro diſtantiam in medio non reſiſtente circulum deſcriberet, & velocitas initialis in medio non reſiſtente æqualis eſſe debet velocitati quâ corpus ad dimidiam à centro diſtantiam in medio non reſiſtente in circulo revolveretur.

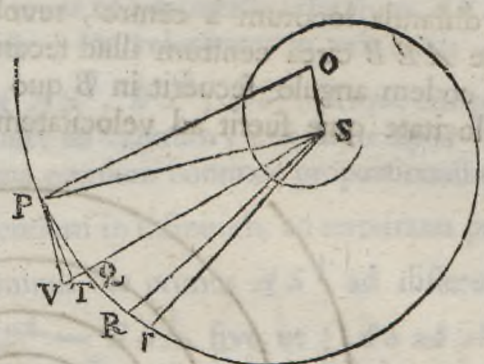
Quoniam itaque velocitas corporis in medio non reſiſtente deſcendentis datur (*per theor.* X. *lib.* I.) dabitur etiam velocitas in medio reſiſtente deſcendentis.



(c) * *Et tempora deſcenſûs, hic erunt reciprocè ut velocitates, atquè ideò dantur.* Nam momenta temporis quibus corpora duo in medio reſiſtente & in eodem non reſiſtente deſcribunt ſpatium idem quam minimum R r, ſunt ut corporum velocitates reciprocè (12) id eſt ut $\sqrt{2}$ & I directè (per modò demonſtrata) adeóque in datâ ratione. Quarè (*per cor. Lem.* 4. *lib.* I.) tempora tota quibus corpora illa idem ſpatium quodvis P R deſcribunt, ſunt etiam in eâdem datâ ratione $\sqrt{2}$ ad I, ſeu ut velocitates reciprocè. Cùm igitur (*per prop.* 36. & 37. *lib.* I.) detur tempus quo corpus in medio non reſiſtente cadendo ſpatium quodlibet deſcribit, dabitur quoque tempus quo corpus in medio reſiſtente ſpatium quodvis datum cadendo percurrit.

(d) *Eadem eſt in ſpirali.* (Per cor. I. hujus.

longitudo spiralis ad longitudinem rectæ PS est in datâ ratione, (e) nempe in ratione OP ad OS; tempus descensûs in spirali erit ad tempus descensûs in rectâ SP in (f) eâdem illâ datâ ratione, proindeque datur.



Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuscunque datis describantur duo circuli; & manentibus hisce circulis, mutetur utcunque angulus quem spiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in spirali à circumferentiâ ad circumferentiam, complere potest, est ut (g) $\frac{PS}{OS}$, sive ut tangens anguli illius quem spiralis continet cum radio PS; (h) tempus verò revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id est, ut secans anguli ejusdem, vel etiam reciprocè ut medii densitas. Co-

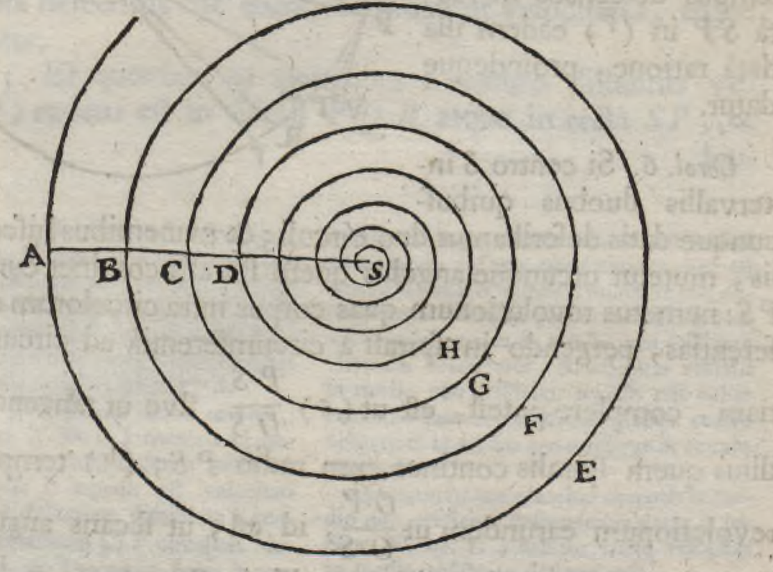
(e) * *Nempè in ratione O P ad O S* (151).

(f) * 157. *Id eâdem illâ ratione.* Spatia enim velocitatibus æqualibus & uniformibus descripta sunt ut tempora quibus describuntur; undè si spiralis P Q R & recta P S, divisæ intelligantur in partes quam minimas totis proportionales, quod fit dum puncta divisionum in spirali & in radio P S à centro S æquidistant (152) tempora quibus partes illæ quam minimæ in spirali & in rectâ P S homologæ describuntur, erunt ut eædem partes, seu in datâ ratione, siquidem velocitas in spirali & in recta P S in iis punctis à centro æquidistantibus sunt æquales eidem, nempe celeritati corporis circa idem centrum ad eandem distantiam in circulo revolventis; ideóque (*per cor. lem.* 4. *lib.* 1.) totum tempus descensûs in spirali erit ad totum tempus descensûs in rectâ P S per spatia homologa in datâ illâ ratione longitudinis 157.
nempe spiralis ad longitudinem P S, seu in ratione O P ad O S.

(g) * *Est ut* $\frac{PS}{OS}$ *sivè ut tangens anguli &c.* (155). Si autem sinus totus sit 1, cum sit O S, ad P S, ut sinus totus ad tangentem anguli P O S, seu anguli æqualis Q P S, erit tangens illa $\frac{PS}{OS}$.

(h) * *Tempus verò revolutionum earundem ut* $\frac{OP}{OS}$, *id est, ut secans &c.* Est enim tempus illud revolutionum inter circulos duos datos, ad tempus descensûs per partem datam rectæ P S inter circulos contentam ut longitudo revolutionum illarum ad partem hanc rectæ P S, circulis duobus interceptam (157); sed mutato utcumque angulo, quem spiralis continet cum

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus denſitas eſt reciprocè ut diſtantia locorum à centro, revolutionem in curvâ quâcunque AEB circa centrum illud fecerit, & radium primum AS in eodem angulo ſecuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem ſuam primam in A reci-



procè in ſubduplicatâ ratione diſtantiarum à centro (id eſt, ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS) (i) corpus illud perget innumeras conſimiles revolutiones BFC, CGD, &c. facere, & interſectionibus diſtinguet radium AS in partes

cum radio P S longitudo revolutionum inter duos circulos datos comprehenſa eſt ut ſecans anguli illius (152). Quarè cùm datum ſit tempus deſcenſûs per partem datam rectæ P S inter circulos datos contentam, erit tempus revolutionum inter circulos ut ſecans anguli quem ſpiralis continet cum radio P S ſeu ut $\frac{OP}{OS}$; Si enim ſinus totus ſit 1, erit O S ad O P ut 1 ad ſecantem anguli P O S ſeu Q P S, & ideò ſecans eſt $\frac{OP}{OS}$. Porrò datâ rectâ P S, denſitas eſt ut $\frac{OP}{OS}$ reciprocè (*per cor.* 2. *hujus*). Ergò &c.

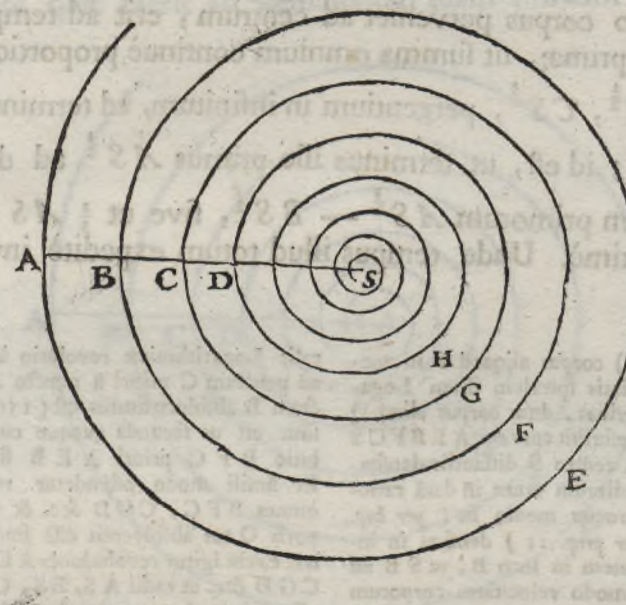
(i) * *Corpus illud perget &c.* Centro S & radio dato S A deſcripta intelligatur ſpiralis Logarithmica quæ primâ revolutione abſolutâ, tranſeat per punctum B datum in radio S A (153.) & ſpiralis illa ſuis ſemper ſimilibus revolutionibus diſtinguet radium A S in partes A S, B S, C S, D S &c. continuè proportionales (150). Fingamus etiam quòd iiſdem poſitis quæ (*in* tes AS, BS, CS, DS, &c. continuè proportionales. Revolutionum verò tempora erunt ut perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directè, & velocitates in principiis A, B, C, inversè; id est, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{2}{3}\ AS$ ad AB quam proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.

Co-

(*in prop.* 15.) corpus aliquod P in medio justæ densitatis spiralem illam Logarithmicam describat, dum corpus aliud Q in alio medio describit curvam A E B F C S & in iisdem à centro S distantiis densitates duorum mediorum erunt in datâ ratione, cum in utroque medio sit (*per hyp. cor. hujus* & *per prop.* 15) densitas in loco A ad densitatem in loco B, ut S B ad S A. Simili modo velocitates corporum P & Q in loco B, erunt ut eorumdem velocitates in loco A, *per prop.* 15. *& hyp. coroll. hujus*) ideóque in datâ ratione; vires autem centripetæ quibus corporâ P & Q urgentur, sunt in utroque medio iisdem in locis eædem (*per hyp.*), & tandem ob angulos datos quos tam spiralis Logarithmica, quàm curva A E B continet cum radio A S, directiones motuum in utrâque curvâ pares sunt in locis A & B; Quarè postquam corpus Q primâ revolutione A E B absolutâ, pervenit in B, per quod punctum transit etiam spiralis Logarithmica, eodem modo determinatur ad æmulandum motum corporis P secundam suam revolutionem absolventis, quo determinatum fuerat in loco A ut æmularetur motum corporis ejusdem P primam suam revolutionem perficientis; cùm (*per dem.*) omnia paria sint in locis B & A videlicet mediorum densitates, corporum velocitates, directiones, viresque centripetæ Quoniam igitur secunda spiralis Logarithmicæ revolutio à puncto B ad punctum C priori à puncto A ad punctum B absolutæ similis est (150), necessum est ut secunda quoque curvæ revolutio B F C priori A E B sit similis; Et simili modo ostendetur revolutiones omnes B F C, C G D &c. & motus corporis Q eas absolventis esse inter se similes. Erunt igitur revolutiones A E B, B F C, C G D &c. ut radii A S, B S, C S &c. id est, continuè proportionales, & ob similitudinem motuum in similibus revolutionibus A E B, B F C &c. si ex centro S ductus intelligatur radius revolutiones illas secans in F, E, G &c. quæ erunt in revolutionibus A E B, B F C &c. loca homologa, erit velocitas corporis Q in loco E ad velocitatem ejus in loco A ut velocitas in F ad velocitatem in B, & proinde velocitas in E ad velocitatem in B, ut velocitas in A ad velocitatem in B, id est, (*per hyp. cor. hujus*) ut $BS^{\frac{1}{2}}$ ad $AS^{\frac{1}{2}}$; sed tempora quibus spatia homologa quam minima in locis E & F describuntur sunt ut spatia illa directè & velocitates inversè (12); Quare cùm spatia homologa in locis E & F sint ut radii A S & B S, & velocitates ibidem ut $AS^{\frac{1}{2}}$ & $BS^{\frac{1}{2}}$ inversè (*ex dem.*) tempus quo spatium minimum revolutionis A E B describitur est ad tempus quo describitur spatium homo- 157.

lo-

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum denſitas aut uniformis eſt, aut aliam quamcunque legem aſſignatam obſervat. Centro S, in-



tervallis continuè proportionalibus SA, SB, SC, &c. deſcribe circulos quotcunque, & ſtatue tempus revolutionum inter peri-

logum revolutionis ſimilis B F C ut $AS \times AS^{\frac{1}{2}}$ ad $BS \times BS^{\frac{1}{2}}$, id eſt, ut $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$, ideóque in datâ ratione. Undè (*per cor. lem.* 4. *lib.* 1.) tempus totum quo corpus Q primam ſuam revolutionem A E B abſolvit eſt ad tempus quo ſecundam revolutionem B F C, perficit in eâdem ratione $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$. Et ſimili argumento liquet tempora revolutionum B F C, C G D &c. eſſe inter ſe ut ſunt $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ &c. Cùm igitur revolutionum tempora ſicut quantitates $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$, &c. progreſſionem geometricam in infinitum decreſcentem conſtituant, tempus totum quo corpus Q, perveniet ad centrum S erit ad tempus revolutionis primæ A E B ut ſumma omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$ &c. pergentium, in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; porrò ſumma illa eſt ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$ ut hic terminus primus ad differentiam duorum priorum, nempè $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$. Nam ſcribatur ſic terminorum ſeries, $AS^{\frac{3}{2}} : BS^{\frac{3}{2}} = BS^{\frac{3}{2}} : CS^{\frac{3}{2}}$ $= CS$

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio (k) de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio proposito, ut (l) medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quàm proximè: Sed & in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium *A S*, ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: (m) Atque etiam ut sunt eorumdem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proximè. Si (n) hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possumus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus ad (o) formam ovalium accedentibus peragantur; tamen conci-

$= CS^{\frac{3}{2}} : DS^{\frac{3}{2}}$, &c. in infinitum, & ultimo progressionis termino evanescente, erit summa antecedentium, id est, summa omnium terminorum quæ dicatur S ad summam consequentium, seu summam omnium terminorum dempto primo, ut primus ad secundum, hoc est $S : S - AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : BS^{\frac{3}{2}}$; undè habetur dividendo $S : AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$; Est autem $BS = AS - AB$, & ideò $BS^{\frac{3}{2}} = (AS - AB)^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB + \frac{3}{8} \times \frac{AB^2}{AS^{\frac{1}{2}}} -$ &c. in infinitum (551. *lib.* 1.). Quapropter si distantia A B minima fuerit, respectu radii A S, fiet $BS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB$, quàm proximè, neglectis nimirum cæteris terminis ferè evanescentibus; erit igitur $S : AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB = \frac{2}{3} AS : AB$ quam proximè; Et hinc dato tempore revolutionis primæ A E B, tempus totum quo corpus pervenit ad centrum expeditè invenitur. Sit, exempli causâ, A S ad A B ut 300000 ad 1, & tempus primæ revolutionis $= 1$, erit tempus totum $= 200000$, quàm proximè. 157.

(k) * *In medio de quo egimus.* (In prop. 15. & cor. ejus), cujus nimirum densitas est reciprocè ut distantia locorum à centro.

(l) * *Ut medii propositi densitas* (per cor. 6. hujus) supponendo spirales Logarithmicas, per puncta A, B, C, D, in utroque medio descriptas.

(m) * *Atquè etiam ut sunt &c.* Per cor. 6. hujus.

(n) * *Si hæc fiant passim inter circulos binos*, invenietur in medio regulari lex quâ motus continuabitur per circulos omnes, seu, inter circulos omnes, quemadmodum inventis prioribus seriei regularis terminis, cognoscitur lex quâ illa progreditur, *atquè hoc pacto &c.*

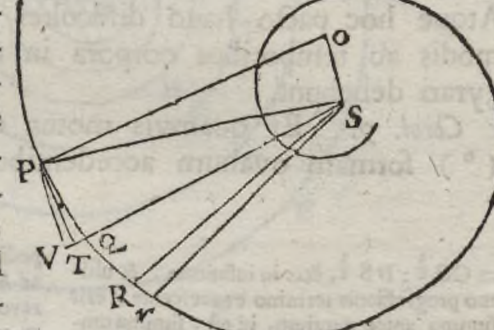
(o) * *Ad formam ovalium accedentibus &c.* Sunt enim spirales quarum revolutiones singulæ ferè concentricæ sunt & ad formam circulorum accedunt; aliarum revolutiones accedunt ad formam ova-

lium

cipiendo ſpiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum ſpirali ſuperius deſcriptâ, (p) intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi ſpiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.



Demonſtratur eâdem methodo cum propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciprocè ut diſtantiæ SP, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index eſt $n+1$: (q) colligetur ut ſupra, quòd tempus, quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ; erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & reſiſtentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^n}$, ſive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$, ideoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc eſt, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciprocè ut SP^{n+1}. Et propterea, cùm velocitas ſit reciprocè ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in P erit reciprocè ut SP.

Co-

lium centro ſpiralis pro ellipſeos vel ovalis foco accepto.

(p) * *Intelligemus etiam* (ut in cor. 8. 1.) *quomodò &c.*

(q) * *Colligetur ut ſuprà &c.* Quæcumque enim ſit vis centripeta, illa eſt ad vim reſiſtentiæ ut T Q ad $\frac{1}{2}$ R r (*per dem. prop.* 15.). Quoniam igitur vis centripeta quâ corpus urgetur in P, eſt reciprocè ut SP^{n+1}, & (*per cor. Lem. X. lib.* 1.) lineola T Q quæ vi illâ generatur, eſt in ratione compoſitâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus P Q deſcribitur; erit $TQ \times SP^{n+1}$, id eſt, (*per Lem.* 3.) $\frac{1}{2} PQ^2 \times SP^n$, in ratione duplicatâ temporis, ideóque tem-

Corol. 1. ([r]) Resistentia est ad vim centripetam ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP.

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciprocè ut SP *cub.* ([s]) erit $1-\frac{1}{2}n=0$; ideoque resistentia & densitas medii nulla erit, ut in propositione nonâ libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciprocè ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa ([t]) in negativam mutabitur.

Scho-

tempus est ut $PQ \times SP^{\frac{n}{2}}$, & corporis velocitas quâ arcus P Q illo tempore describitur ut $\frac{PQ}{PQ \times SP^{\frac{n}{2}}}$, seu $\frac{1}{SP^{\frac{n}{2}}}$; & simili argumento velocitas quâ arcus Q R describitur est ut $\frac{1}{SQ^{\frac{n}{2}}}$; sunt autem arcus illi P Q & Q R ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in ratione $SQ^{\frac{n}{2}}$ ad $SP^{\frac{n}{2}}$, & (*per dem. prop.* 15.) arcus Q r, est ad arcum P Q ut S P ad S Q; Quarè (per compositionem rationum & ex æquo) $Qr : QR = SP \times SQ^{\frac{n}{2}} : SQ \times SP^{\frac{n}{2}} = SQ^{\frac{1}{2}n-1} : SP^{\frac{1}{2}n-1}$, & sumptis terminorum differentiis $Qr : Rr = SQ^{\frac{1}{2}n-1} : SQ^{\frac{1}{2}n-1} - SP^{\frac{n}{2}-1}$. Quia verò $SP = SQ + VQ$, ideóque (549. *lib.* 1.) $SP^{\frac{1}{2}n-1} = SQ^{\frac{1}{2}n-1} + \frac{1}{2}\overline{n-1} \times VQ \times SQ^{\frac{1}{2}n-2}$ + &c., neglectis reliquis terminis respectu priorum evanescentibus, erit $SQ^{\frac{1}{2}n-1} - SP^{\frac{1}{2}n-1} = (1-\frac{1}{2}n) \times VQ \times SQ^{\frac{1}{2}n-2}$, atque adeò $Qr : Rr = SQ : (1-\frac{1}{2}n)VQ$. Erat autem $PQ : Qr = SQ : SP$; undè (ex æquo) fit $PQ : Rr = SQ^2 : (1-\frac{1}{2}n) VQ \times SP$, & hinc $Rr = \frac{(1-\frac{1}{2}n) VQ \times SP \times PQ}{SQ^2} = \frac{(1-\frac{1}{2}n) \times VQ \times PQ}{SQ}$, ob $SP = SQ$, ubi puncta Q & P coeunt.

Quoniam decrementum arcûs P Q ex re- 157.
sistentiâ oriundum, sivè hujus duplum R r, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim, erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$, id est, ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n) VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$. Sivè ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n) OS}{OP \times SP^{n+1}}$ (quia $VQ : PQ = OS : OP$ ex dem. prop. 15.) hoc est, ob datum $\frac{(1-\frac{1}{2}n) OS}{OP}$ ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$. Et propterea cùm velocitas (*ex dem.*) sit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$, si ex resistentiâ auferatur duplicata velocitatis ratio $\frac{1}{SP^n}$, manebit medii densitas in P, ut $\frac{1}{SP}$, seu reciprocè ut S P.

(r) * *Resistentia est ad vim centripetam.* Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & T Q, sivè ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n) VQ \times PQ}{2SQ}$ & $\frac{PQ^2}{2SP}$, hoc est, ut $(1-\frac{1}{2}n) VQ$ & P Q, seu $(1-\frac{1}{2}n) OS$ & O P.

(s) * *Erit* $1-\frac{1}{2}n=0$. Cùm enim (*per hyp.*) sit $n+1=3$; erit $n=2$, $\frac{1}{2}n=1$ & $1-\frac{1}{2}n=0$.

(t) * *In negativam mutabitur.* Tum enim $n+1$, erit numerus ternario major, & ideò n binario major, & hinc $1-\frac{1}{2}n$, numerus negativus.

Co-

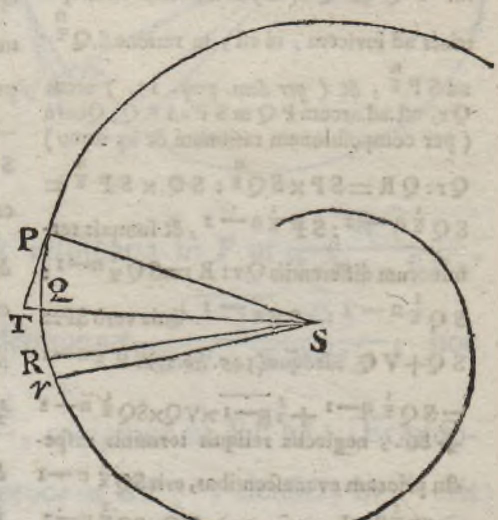
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XVI. Theor. XIII.

Scholium.

Cæterum hæc propoſitio & ſuperiores, quæ ad media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, ut medii ex uno corporis latere major denſitas quàm ex altero non conſideranda veniat. Reſiſtentiam quoque cæteris paribus denſitati proportionalem eſſe ſuppono. Unde in mediis, quorum vis reſiſtendi non eſt ut denſitas, debet denſitas eo uſque augeri vel diminui, ut reſiſtentiæ vel tollatur exceſſus vel defectus ſuppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA VI.

Invenire & vim centripetam & medii reſiſtentiam, quâ corpus in datâ ſpirali, datâ velocitatis lege, revolvi poteſt.



Sit ſpiralis illa PQR. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quàm minimum PQ, dabitur tempus, & ex altitudine TQ, quæ eſt ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR, differentia

Coroll. 4. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)OS}{OP}$; ſin diſtantia illa non datur ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)OS}{OP\times SP}$, ſeu ob datum numerum $\overline{1-\frac{1}{2}n}$, ut $\frac{OS}{OP}$, vel $\frac{OS}{OP\times SP}$.

Coroll. 5. Quoniam (*per cor.* 1. *prop.* 15.) mutato utcumque ſpiralis angulo, ità ut

RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac (u) densitas medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet.

Ex vi centripetâ invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; ut (x) in propositione superiore.

Methodum verò tractandi hæc problemata aperui in hujus propositione decimâ, & lemmate secundo; & lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentiâ mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

ut etiam evanescat, & spiralis cum radio conveniat, velocitas corporis in loco quovis P ea semper est quâcum corpus in medio non resistente eâdem vi centripetâ gyrari potest in circulo ad eandem à centro distantiam SP (*per Const.* 1. *Cor.* 7. *Prop.* IV. *lib.* 1.) liquet (*per cor.* 6. *prop.* 15. & 152.) tempora descensûs à puncto dato P ad centrum usque S, fore etiam (*in hyp. prop.* 16.) ut spiralium variarum longitudines; quod observavit *Joannes Bernoullius* in Actis Eruditorum Lipf. an. 1713. ubi hanc materiam eleganter tractat.

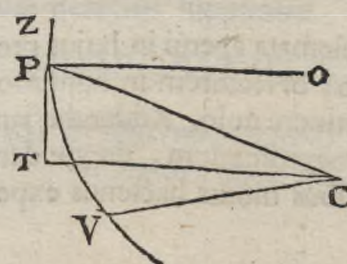
(u) * *Ac densitas medii.* Sit, exempli causâ, curva PQR spiralis Logarithmica & velocitas in loco quovis P ut $\frac{1}{SP^m}$, erit tempus quo describitur arcus PQ, ut $PQ \times SP^m$ (12); vis autem centripeta quæ (*per cor.* 4. *Lem. X. lib.* 1.) est ut Lineola TQ directè & quadratum temporis inversè erit ut $\frac{TQ}{SP^2 \times SP^{2m}}$, id est, (*per Lem.* 3. *hujus*) ut $\frac{1}{SP^{2m+1}}$. Inventis tempore & velocitate, invenietur (*ut in not. ad prop.* 16.) resistentia ut $\frac{(1-m)VQ}{SQ \times PQ \times SP^{2m}}$, sivè ut $\frac{(1-m)OS}{OP \times SP^{2m+1}}$, & auferendo duplicatam velocitatis rationem $\frac{1}{SP^{2m}}$ erit densitas ut $\frac{(1-m)OS}{OP \times SP}$, sive ut $\frac{1}{SP}$. 157.

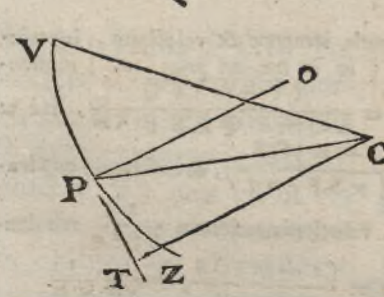
(x) * *Ut in propositione superiore.* Sit vis centripeta in P ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$ & quoniam TQ est ut vis centripeta & quadratum temporis quo describitur arcus PQ, erit $TQ \times SP^{n+1}$, id est, (*per Lem.* 3.) $PQ^2 \times SP^n$ ut quadratum temporis, ideoque tempus ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & corporis velocitas quâ arcum PQ illo tempore describit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$ (11); determinatis autem tempore & velocitate, invenietur resistentia & densitas ut in notâ superiore.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XVIII. Probl. V.

PROBLEMA.

Vis centripeta tendens ad datum punctum C sit in loco quovis P ut distantiæ CP dignitas CP^n reciprocè, & medii resistentia sit ut medii densitas & velocitatis dignitas quælibet conjunctim; requiritur tum medii densitas in locis singulis quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ V P Z moveatur, tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.





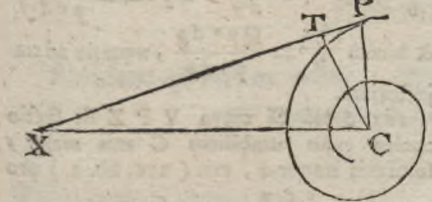
158. Dicantur vis centripeta in loco P, g, resistentia r, medii densitas k, velocitas corporis v, distantia P C, y, radius P O circuli curvam osculantis in P, R, arcus V P s; perpendiculum C T in tangentem P T ductum p, & a, b, n, m, quantitates datæ, erit (*per hyp.*) $g = \frac{a}{y^n}$, & $r = \frac{kv^m}{b}$, sed est semper (27) $vv = \frac{Rpg}{y} = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$. Velocitas igitur per alterutram ex his æquationibus dabitur. Porrò (26,) $r = \frac{-vdv - gdy}{ds} = \frac{-vdv}{ds} - \frac{ady}{y^n ds}$, vel etiam (*ibid.*) $\pm r = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp} - gdy \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} - \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}}$. Quarè si in alterutrâ harum æquationum loco $v\,dv$ scribatur ipsius valor, qui reperitur capiendo fluxionem æquationis $vv = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$, obtinebitur resistentia r, seu $\frac{kv^m}{b}$, ejusque valore diviso per $\frac{v^m}{b}$ quod datum est inventâ velocitate v, dabitur medii densitas k. Q. E. I.

159. Exemplo sit spiralis Logarithmica. In illâ ob datum angulum T P C datur ratio P C ad C T seu y ad p; sit ergò $c : a = y : p$, & ideò $p = \frac{ay}{c}$; atque $dp = \frac{ady}{c}$, & erit $vv = \frac{apdy}{y^n dp} = \frac{pc}{y^n} = \frac{a}{y^{n-1}}$. Et his verò habetur $\sqrt{yy-pp} = \frac{y\sqrt{cc-aa}}{c}$, & $vdv = \frac{(1-n)ady}{2y^n}$, undè pro corporis descensu invenitur $r = \frac{(3-n)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$; & pro ascensu $r = \frac{(n-3)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$, ideoque resistentia est reciprocè ut y^n. Cùm autem) *per hyp.*) sit $r = \frac{kv^m}{b} = \frac{ka^{\frac{m}{2}}}{by^{\frac{mn-m}{2}}}$, erit densitas k ut $ry^{\frac{mn-m}{2}}$, seu ut $\frac{y^{\frac{mn-m}{2}}}{y^n} = y^{\frac{mn-m-2n}{2}}$, & hinc si ponatur $m = 2$, erit densitas k, ut y^{-1}, seu ut $\frac{1}{y}$, prorsus ut (*in prop.* 16.) demonstratum est.

160. *Coroll.* 1. Per superiores æquationes (158). ex datâ corporis velocitate

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XVIII. PROBL. V.

invenitur tum vis centripeta, tum resistentia & medii densitas. Est enim $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{vvdp}{pdy}$; undè habetur vis centripeta g; datis autem vi centripetâ & celeritate, invenitur tum resistentia r, tum medii densitas k, ut supra (158).



161. Exemplum sit in spirali hyperbolicâ cujus hæc est proprietas ut si per centrum C erigatur ad radium CP, perpendicularis CX tangenti PX per P ductæ occurrens in X sit subtangens illa CX constans. Velocitas sit ut tangens PX, & resistentia r ut densitas medii & quadratum velocitatis conjunctim, hoc est $r = \frac{kv^2}{b}$, dicaturque CX, c, & ideò PX $= \sqrt{yy+cc}$, atque (*per hyp.*) $v = \frac{e\sqrt{yy+cc}}{c}$, & e, quantitas data. Erit ob triangula CPT, XPC similia, PX $(\sqrt{yy+cc})$: CX (c) = PC (y) : CT (p), & ideò $p = \frac{cy}{\sqrt{yy+cc}}$, $dp = \frac{c^3dy}{\overline{yy+cc}^{\frac{3}{2}}}$, & $\sqrt{yy-pp} = \frac{yy}{\sqrt{yy+cc}}$. Quarè fiet (160) $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{e^2}{y}$; id est, vis centripeta ut distantia PC reciprocè. Quia verò $vv = \frac{ee}{cc} \times (yy+cc)$ erit $vdv = \frac{eeydy}{cc}$ & propterea pro corporis descensu $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{g\sqrt{yy-pp}}{y} = \frac{eeyy}{cc\sqrt{yy+cc}} + \frac{e^2}{\sqrt{yy+cc}} = \frac{e^2 \times \overline{yy+cc}}{cc\sqrt{yy+cc}} = \frac{e^2}{c^2} \times \sqrt{yy+cc}$, adeóque resistentia ut tangens PX, seu ut velocitas. Cùm igitur sit $r = kv^2 = \frac{ke^2}{cc} \times (yy+cc) = \frac{e^2}{cc} \times \sqrt{yy+cc}$, erit densitas medii $k = \frac{1}{\sqrt{yy+cc}}$, seu reciprocè ut tangens PX
sivè reciprocè ut velocitas. 161.

162. *Coroll.* 2. Datâ medii densitate & concessis figurarum quadraturis, dabitur vis centripeta & corporis velocitas. Est enim (27. & 160.) $vdv + \frac{vvdp}{p} = -rds = -\frac{kv^m ds}{b}$ (158) & dividendo per v^m, & multiplicando per p^{2-m}, fit $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = \frac{kp^{2-m}ds}{b}$, & sumptis utrinque fluentibus habetur, $\frac{1}{2-m} \times p^{2-m} \times v^{2-m} = -S.\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, ideòque $v^{2-m} = (m-2)\frac{S.kp^{2-m}ds}{b \times p^{2-m}}$. Quare si densitas medii k, sit ut functio quævis distantiæ PC à centro C, inveniri poterit fluens $S.kp^{2-m}ds$ aut algebraicè aut per figurarum quadraturas, & loco ds, scribi potest $\pm\frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$ (26). Inventâ autem velocitate v, obtinetur vis centripeta g per æquationem $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{vvy}{Rp}$ (160).

163. *Corol.* 3. Si in superiori corollario sit $m = 2$, id est, resistentia ut densitas & quadratum velocitatis conjunctim, erit $2 - m = 0$, & æquatio $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = -\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, in hanc mutabitur $\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = -\frac{kds}{b}$, undè sumptis fluentibus, habetur $L.v + L.p = -S.\frac{kds}{b}$, & $L.v = -S.\frac{kds}{b} - L.p$; ex

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT.IV. PROP. XVIII. PROBL. V.

ex quâ æquatione invenitur v, & hinc habetur g ut suprà.

164. *Cor.* 4. Sit in Hypothesi coroll. 3. densitas medii k uniformis, velocitas corporis in loco dato $v = c$, & perpendiculum p in eodem loco $= q$ datæ, erit $L.\,v = -\frac{ks}{b} L.\,p + Q$, & quia in loco V, fit $s = o$, $v = c$, $p = q$, erit $Q = L.\,c + L.\,q = L.\,cq$. Et hinc $L.\,v = L\frac{cq}{p} - \frac{ks}{p}$. Ponatur $L.\,h = 1$, ut sit $L.\,v = L.\,\frac{cq}{p} - \frac{ks}{b} \times L.\,h = L.\,\frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$. Undè deducitur $v = \frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$, $vv = \frac{c^2q^2}{p^2h^{\frac{2ks}{b}}}$, & hinc $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{c^2q^2y}{Rp^3h^{\frac{2ks}{b}}}$, vel $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$.

165. *Cor.* 5. In his autem omnibus inveniri potest tempus per æquationem $dt = \frac{ds}{v}$, seu $t = S.\,\frac{ds}{v}$ (13.).

166. *Cor.* 6. Dàtâ vi centripetâ & resistentiâ ac densitate medii, inveniri potest æquatio ad trajectoriam Z P V quam corpus projectile circà centrum virium C describit. Sit, exempli gratiâ, medium uniforme, resistentia ut quadratum velocitatis & vis centripeta $= \frac{a}{y^n}$ & (164.) erit $\frac{a}{y^n} = \frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$, ideoque $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$, & $L.\,h^{\frac{2ks}{s}} = \frac{2ks}{b} = L.\,\frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$; capiantur utrinque fluxiones, factâ dy constante, & fiet (26) $\frac{2kds}{b}\left(= \pm\frac{2kydy}{b\sqrt{yy-pp}}\right) = \frac{ndy}{y} + \frac{ddp}{dp} - \frac{3dp}{p}$ (Notum supponimus (40) quantitatis cujusvis Logarithmicæ $L.\,z$ fluxionem esse $\frac{dz}{z}$). Hinc verò habetur $\frac{2ks}{b} = L.\,y + L.\,dp - 3\,L.\,p - \frac{L.\,dy.}{Q}$, ubi $\frac{dy}{Q}$, est quantitas constans, ideoque fit $\frac{2ks}{b} = L.\,y^n + L.\,\frac{Qdp}{dy} - L.\,p^3 = L.\,\frac{Qy^ndp}{p^3dy}$, & hinc $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{Qy^ndp}{p^3dy}$, æquatio ad trajectoriam.

167. *Schol.* Si curva V P Z sit sectio conica cujus umbilicus C axis major c somiaxis minor e, erit (276. lib. 1.) pro ellipsi $pp = \frac{cey}{c-y}$, pro hyperbolâ $pp = \frac{eey}{c+y}$, & pro parabolâ, si latus rectum axis dicatur $4e$, erit (per *Lem.* 14. *lib.* 1.) $pp = ey$. Undè facile est super oris problematis solutiones ad sectiones conicas transferre. Sit V P Z parabola, vis centripeta $g = \frac{a}{y^n}$, resistentia $r = \frac{kv^2}{b}$, & quæratur tum corporis velocitas tum resistentia & medii densitas in loco quovis P. Quoniam $pp = ey$, erit $2pdp = edy$, $dp = \frac{edy}{2p}$, $\frac{p}{dp} = \frac{2pp}{edy} = \frac{2y}{dy}$; undè fit (158) $vv = \frac{apdy}{y^ndp} = \frac{2a}{y^{n-1}}$; Hinc verò habetur $vdv = \frac{(1-n)ady}{y^n}$, atque ideò pro corporis descensu (158) $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}} = \frac{(2a-na)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; & pro ascensu $r = \frac{(na-2a)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; resistentia igitur est semper ut $\frac{PT}{PC^{n+1}}$; porrò est (per hyp.) $r = \frac{kv^2}{b} = \frac{2ak}{by^{n+1}} = (2a-na)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$, vel $= (na-2a)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$;

Quarè

SECTIO V.

De densitate & compressione fluidorum, deque hydrostaticâ. (*)

Definitio Fluidi.

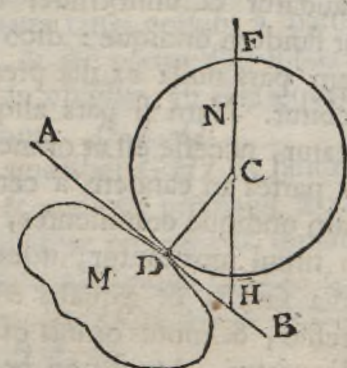
Fluidum est corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ; & cedendo facilè moventur inter se.

Quarè erit medii densitas k, ut $\frac{\sqrt{yy - ey}}{y^2}$, seu ut $\frac{PT}{PC^2}$. Et simili modo in ellipsi & hyperbolâ invenitur medii densitas ut $\frac{PT}{PC^2}$. At in circulo fit $PT = 0$, ideóque medii densitas & resistentia nulla. Evanescit quoque resistentia, si $n = 2$, id est, si vis centripeta sit ut quadratum distantiæ reciprocè, quo casu sectiones conicæ, ut lib. 1°. demonstratum est, in medio non resistente describuntur. Si n est numerus binario minor, sectiones conicæ per descensum describi possunt; per ascensum verò si n, binario major. Tandem ubi est $n = 1$, hoc est, vis centripeta distantiæ PC, reciprocè proportionalis, velocitas in parabolâ sicut & in spirali Logarithmicâ uniformis est.

(*) 168. *Hydrostatica* est scientia pressionum quas fluida vel ipsorum partes in se mutuò vel in corpora solida exercent.

169. *Fluidum homogeneum* dicitur, cujus densitas est uniformis, adeò ut nimirum æqualis materiæ quantitas sub voluminibus æqualibus ubique per totam fluidi massam contineatur, *fluidum heterogeneum* appellatur cujus densitas uniformis non est.

170. *Gravitas specifica* corporis est ratio ponderis ejusdem ad volumen; ità ut corpora ejusdem gravitatis specificæ dicantur quæ sub æqualibus voluminibus æquale pondus habent; specificè graviora vel leviora quæ sub æqualibus voluminibus majus vel minus pondus continet; Quarè cum



densitas sit ratio massæ ad volumen corporis (2. *lib.* 1.) ubi pondera sunt ut massæ, gravitates specificæ sunt ut densitates. 170.

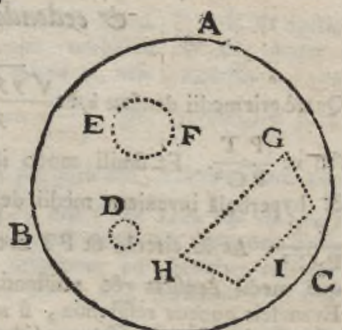
171. Lemma. *Pressiones quas corpora quævis in se mutuò exercent, fiunt juxtà directiones communi plano contingenti perpendiculares, & per punctum contingentiæ eorumdem corporum transeunt.*

Corpus N vi quâlibet secundum directionem F C urgeatur, tangaturque in D à corpore M; producatur F C ut plano A B quod utrumque corpus contingit in D occurrat in H, ductâ per D rectâ D C ad planum A B perpendiculari, vis quâ corpus N urgetur, exponatur per lineam C H, & hæc (*per leg. mot. cor.* 2.) resolvi poterit in vires æquipollentes C D & D H. Sed corpus M minimè premitur vi D H secundùm directionem plani contactûs agente; quarè solâ vi C D ad planum A B normali & per punctum contactûs D transeunte premitur. Q. E. D.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vaſe quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſitâ condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione) æqualiter premuntur undique, & ſine omni motu à preſſione illâ orto permanent in locis ſuis.

Caſ. 1. In vaſe ſphærico *A B C* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejuſdem pars nulla ex illâ preſſione movebitur. Nam ſi pars aliqua *D* moveatur, neceſſe eſt ut omnes hujuſmodi partes ad eandem à centro diſtantiam undique conſiſtentes, ſimili motu ſimul moveantur; atque hoc ideo quia ſimilis & æqualis eſt omnium



preſſio, & motus omnis excluſus ſupponitur, niſi qui à preſſione illâ oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur; contra hypotheſin. Non poſſunt longiùs ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur; etiam contra hypotheſin. Non poſſunt ſervatâ ſuâ à centro diſtantiâ moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non poteſt pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco ſuo movebitur. *Q. E. D.*

Caſ. 2. Dico jam, quòd fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *E F* pars ſphærica fluidi, & ſi hæc undique non premitur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per caſum primum, permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebant in locis ſuis, per caſum eundem primum, & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis,

per

per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falsò dicebatur quòd sphæra *E F* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Cas. 3. Dico præterea quòd diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motûs legem III. Sed &, per casum secundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, [a] quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eâdem vi. *Q. E. D.*

Cas. 4. Dico jam quòd fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt à partibus sphæricis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas sphæricas æqualiter premunt, per casum 3. & vicissim ab illis æqualiter premuntur, per motûs legem tertiam. *Q. E. D.*

Cas. 5. Cùm igitur fluidi pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuò æqualiter premant & quiescant inter se; manifestum est quòd fluidi cujuscunque *GHI*, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuò premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur si fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem pressioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quàm ex alio, sed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quàm primum à parte magis pressâ recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; redu-

(a) * *Quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque.* Nam pars illa intermedia duas alias partes sphæricas in punctis contactûs premet; atque ab illis premetur æqualiter, (*ex dem.*)

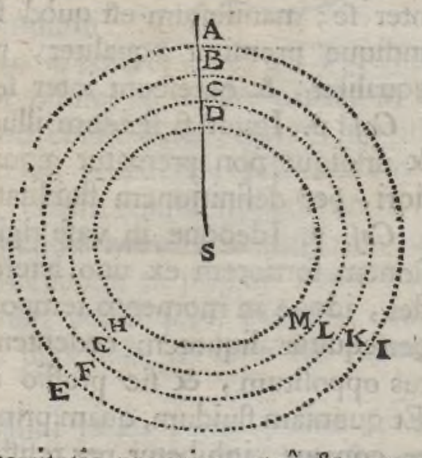
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XIX. THEOR. XIV.

reducetur preſſio undique ad æqualitatem, in momento temporis, ſine motu locali: & ſubinde partes fluidi, per caſum quintum, ſe mutuò prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter ſe, per preſſionem fluido ubivis in externâ ſuperficie illatam, mutari poſſunt, niſi quâtenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſiùs vel remiſſiùs ſeſe premendo difficiliùs vel faciliùs labuntur inter ſe.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si (b) *fluidi ſphærici, & in æqualibus à centro diſtantiis homogenei, fundo ſphærico concentrico incumbentis partes ſingulæ verſus centrum totius gravitent; ſuſtinet fundum pondus cylindri, cujus baſis æqualis eſt ſuperficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.*



Sit *D H M* ſuperficies fundi, & *A E I* ſuperficies ſuperior fluidi. Superficiebus ſphæricis innumeris *B F K*, *C G L* diſtinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter craſſos; & concipe vim gravitatis agere ſolummodo in ſuperficiem ſuperiorem orbis cujuſque, & æquales eſſe actiones in æquales partes ſuperficierum omnium. Premitur ergo ſuperficies ſuprema *A E* vi ſimplici gravitatis propriæ, quâ & omnes

(b) 172. *Si fluidi ſphærici &c.* Fluidi quieſcentis ſuperficies ad gravitatis directionem perpendicularis eſt ubique, & ideo ſi vis gravitatis ad centrum unum dirigatur, ſphærica eſt. Si enim ſuperficiei fluidi pars aliqua ad gravitatis directionem inclinata ſit, reſolvatur vis gravitatis in duas vires quarum una directionem habeat ſuperficiei fluidi perpendicularem, altera parallelam; & (*ex definitione*) fluidum ſecundùm hanc directionem movebitur, contra hyp. Erit igitur pars quælibet nes orbis supremi partes & superficies secunda *B F K* (*per prop.* XIX.) pro (c) mensurâ suâ æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda *B F K* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, & insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione triplâ urgetur superficies tertia *C G L*. Et similiter pressione quadruplâ urgetur superficies quarta, quintuplâ quinta, & sic deinceps. Pressio igitur quâ superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (si modo orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis à superficie infimâ ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* (d) Et simili argumentatione patet propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quâvis assignatâ distantiæ à centro, ut & ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in propositione describitur; pondere reliquo à fluidi figurâ fornicatâ sustentato.

Co-

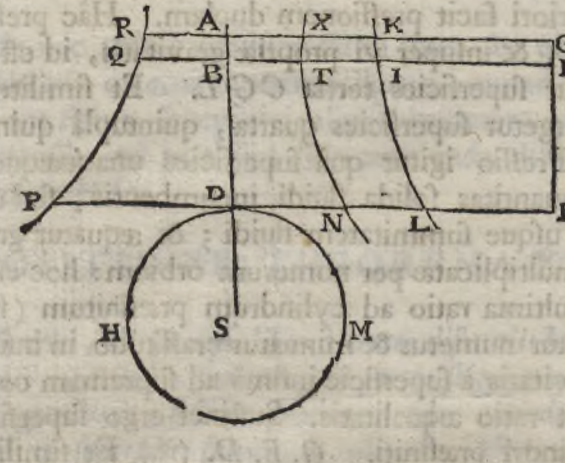
libet superficiei ad gravitatis directionem perpendicularis: & quoniam nulla est alia superficies, præter sphæricam, quæ hanc habeat proprietatem, ut lineæ omnes ipsi perpendiculares ad centrum unum concurrant, superficies illa fluidi sphærica erit. Q. E. D.

(c) * *Pro mensurâ suâ æqualiter premuntur.* Singulæ, nimirum, superficiei secundæ partes, semotâ partium illarum propriâ gravitate, æque premuntur ac partes æquales superficiei supremæ; quod per Prop. XIX. manifestum fit, si spatium, quod illas superficies continet, tanquam vas aliquod consideretur quod fluidum æqualiter undique compressum complectitur.

(d) * *Et simili argumentatione &c.* Patet ut in superiori demonstratione, quod pondus partium omnium æqualium D, C, B, A in totâ rectâ D A existentium sustineatur à parte D correspondente fundi sphærici D H M. Hoc igitur fundum sustinet pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis D A; modò tamen in locis à fundo sphærico D H M & à basi planâ cylindri æquidistantibus, eadem servetur fluidi densitas, eademque vis gravitatis quæ in basim cylindri perpendiculariter tendat ubique. 172.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XX. THEOR. XV.

Corol. 2. In æqualibus autem à centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive (e) ſuperficies preſſa ſit horizonti



173. Deſignet D A G E prædictum cylindrum, cujus baſis D E æqualis ſit fundo ſphærico D H M. Per punctum D, & per puncta B & A infinitè propinqua ductæ ſint rectæ D E, B F & A G perpendiculares ad A S; in illis perpendicularibus capiantur D L, B I, A K denſitatibus fluidi & D N, B T, A X viribus gravitatis acceleratricibus in locis D, B, A proportionales, ſintque curvæ L I K & N T X loca punctorum L, I, K, & N, T, X. Producatur K A in R, ut ſit ſemper A R rectangulo A X × A K proportionalis, & R Q P curva quam punctum R perpetuo tangit: & preſſio fluidi in fundum ſphæricum D H M erit ut fundum D H M & area D A R P conjunctim. Nam preſſio fluidi cylindrulo B A G F contenti in baſim D E eſt ut quantitas materiæ in vim gravitatis ſingularum particularum ducta (*per definit. VIII. lib.* 1.). Quantitas materiæ cylindro B A G F contenta eſt ut cylindrus B A G F & denſitas conjunctim (2. *lib.* 1.), id eſt, ut baſis cylindri D E & rectangulum A B × A K. Quare preſſio fluidi cylindro B A G F contenti eſt ut baſis D E & ſolidum A B × A K × A X, ſeu ut baſis D E & rectangulum A B × A R conjunctim. Dividatur tota fluidi altitudo D A in partes innumeras ut A B, & erit preſſio fluidi totius in baſim cylindri D E vel in fundum ſphæricum D H M, ut baſis D E vel fundum D H M & area D A R P conjunctim. Q. E. D.

Si vis acceleratrix gravitatis conſtans ſit, curva X T N in rectam lineam mutabitur axi A D parallelam, eritque proinde preſſio fluidi in fundum D H M, ut fundum hoc & area D A K L conjunctim; in hâc enim hypotheſi, ob datam A K, area D A R P proportionalis eſt areæ D A K L.

Si vis gravitatis & denſitas fluidi conſtantes ſint, curvæ X T N, K I L & R Q P in rectas lineas axi A D parallelas migrant; & ideo preſſio fluidi in fundum ſphæricum D H M, vel in baſim cylindri D E, eſt ut fundum illud D H M, vel baſis D E, & altitudo fluidi A D conjunctim. Si verò conferantur liquores in ſe homogenei, ſed diverſæ inter ſe denſitatis, preſſiones erunt in ratione compoſitâ baſium, altitudinum & denſitatum, modò gravitas acceleratrix conſtans, ſit in utroque liquore æqualis; nam ſi inæqualis eſſet, preſſiones forent in ratione compoſitâ baſium, altitudinum, denſitatum & virium gravitatis.

(e) * *Sive ſuperficies preſſa ſit horizonti &c.* * Sumatur quævis particula inter duos orbes concentricos B F K, C G L, illa zonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive ([f]) fluidum, à superficie pressâ sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit obliquè per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maximè irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem theorematis hujus ad casus singulos fluidorum.

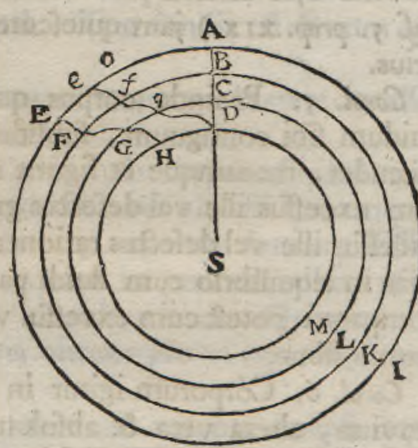
Corol. 3. Eâdem demonstratione colligetur etiam (*per prop.* XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se; si modò excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ cor-

illa particula per casum 5. Prop. XIX. undique æqualiter premitur, ergo per motûs Leg. III. undique æqualiter premit, substituatur itaque loco particulæ cujusvis hanc contingentis superficies quævis, sive horizontalis, sive perpendicularis, sive obliqua, æqualis erit in eam pressionis quantitas: *Ergo in æqualibus à centro distantiis &c.*

(f) * *Sive fluidum à superficie pressâ &c.* Si fluidum vase utlibet irregulari E F G H d g f e contineatur, vasis fundum H d sustinebit pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi H d, & altitudo D A eadem quæ fluidi in vase contenti. Iisdem enim positis, quæ in demonstratione propositionis hujus, premitur superficies suprema E e vi simplici gravitatis propriæ, quâ & superficies secunda F f pro mensura sua æqualiter premitur. Premitur præterea superficies secunda F f vi propriâ gravitatis, quæ addenda est vi priori. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, & insuper vi propriæ gravitatis, urgetur superficies tertia G g; & sic deinceps. Quare patet, ut supra, pressionem quam superficies infima H d subit, æqualem esse ponderi cylindri cujus est altitudo D A & basis fundo H d æqualis.

Manente igitur tum basi H d, tum fluidi altitudine perpendiculari D A, manet fluidi in basim pressio, utcumque mutetur vasis fluidum continentis figura. Atque hinc in vasis communicantibus æqui-



173.

librium est, ubi perpendiculares fluidi altitudines supra fundum commune in utroque vase æquantur, dummodo in paribus à centro virium gravitatis S distantiis tam fluidi densitas quàm vis gravitatis servetur eadem. Nam si, manente vi gravitatis acceleratrice, conferantur fluida in se homogenea, sed diversæ inter se densitatis, erit in vasis communicantibus æquilibrium, ubi fluidorum in utroque vase altitudines perpendiculares erunt in ratione densitatum reciprocâ, quia in eo casu fluidorum in basim communem pressiones æquales sunt (173).

corpus, quod ſit condenſationis expers, ſubmergatur in hoc fluido, id ex preſſione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non deſcendet, non aſcendet, non cogetur figuram ſuam mutare. Si ſphæricum eſt, manebit ſphæricum, non obſtante preſſione; ſi quadratum eſt, manebit quadratum: idque ſive molle ſit, ſive fluidiſſimum; ſive fluido liberè innatet, ſive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis ſubmerſi, & par eſt ratio omnium ejuſdem magnitudinis, figuræ & gravitatis ſpecificæ ſubmerſorum corporum. Si corpus ſubmerſum ſervato pondere liqueſceret & indueret formam fluidi; hoc, ſi prius aſcenderet, vel deſcenderet, vel ex preſſione figuram novam indueret, etiam nunc aſcenderet, vel deſcenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum cauſæ permanent. Atqui (*per caſ. 5. prop.* XIX.) jam quieſceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod ſpecificè gravius eſt quàm fluidum ſibi contiguum, ſubſidebit, & quod ſpecificè levius eſt aſcendet, motumque & figuræ mutationem conſequetur, quantum exceſſus ille vel defectus gravitatis efficere poſſit. Namque exceſſus ille vel defectus rationem habet impulſus, quo corpus, aliàs in æquilibrio cum fluidi partibus conſtitutum, urgetur; & comparari poteſt cum exceſſu vel defectu ponderis in lance alterutrâ libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis conſtitutorum duplex eſt gravitas, altera vera & abſoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas abſoluta eſt vis tota quâ corpus deorſum tendit: relativa & vulgaris eſt exceſſus gravitatis quo corpus magis tendit deorſum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis ſuis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave eſt, ut in vaſis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale eſt ponderibus omnium partium, ideoque ex iiſdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis ſuis, id eſt, inter ſe collata non prægravant, ſed mutuos ad deſcendendum conatus impedientia permanent in locis ſuis, perinde ac ſi gravia

non

non essent. Quæ in aëre sunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quâtenus aëris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quàm excessus verorum ponderum supra pondus aëris. Unde & vulgò dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparativè levia sunt, non verè, quia descendunt in vacuo. Sic & in aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparativè & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ, vel ab eâ superatur. Quæ verò nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen & in sensu vulgi non gravitant in aquâ. Nam similis est horum casuum demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel à gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, & corpus ab eâdem vi urgeatur fortius; differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus à vi illâ urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

Corol. 9. Cùm autem fluida premendo corpora inclusa non mutent eorum figuras externas, patet insuper (*per corollarium prop.* XIX.) quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si animalia immergantur, & sensatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quâtenus hæc corpora à compressione condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum systematis fluido comprimente circundati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solàm retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quâtenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXI. THEOR. XVI.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

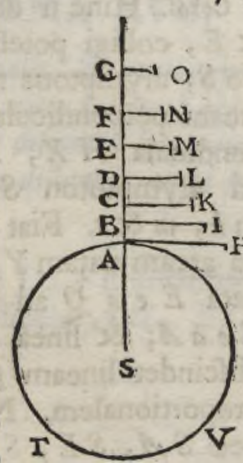
Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ distantiis suis à centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continuè proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continuè proportionales.

Designet ATV fundum sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c. distantias continuè proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. quæ sint ut densitates medii in locis A, B, C, D, E, F; & (g) specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, (h) quod perinde est, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primùm has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, à B ad C, à C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. (i) Et hæ gra-

(g) 174. *Et specificæ gravitates &c.* Fluidi enim cujus singulæ particulæ vi gravitatis urgentur gravitas specifica est ut densitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Est enim gravitas specifica ut pondus directè & volumen inversè (170); Sed pondus (*per defin. VIII. lib. 1.*) est ut quantitas materiæ & vis gravitatis acceleratrix conjunctim; quantitas verò materiæ (2. *lib.* 1.) est ut densitas & volumen conjunctim. Quare, conjunctis his rationibus, gravitas specifica est ut densitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Q. E. D.

(h) * *Vel, quod perinde est, ut &c.* Cùm enim (*per hyp.*) distantiæ SA, SB, SC, SD &c. sint continuè proportionales, earum differentiæ AB, BC, CD &c. ipsis proportionales erunt.

(i) * *Et hæ gravitates ductæ &c.* Nam si pondus quod fundum sphæricum ATV sustinet, exponatur per cylindrum cujus basis æqualis sit superficiei ATV & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis, volumen fluidi cylindrici pro altitudine AB erit $ATV \times AB$, ideoque ob datam superficiem ATV, erit volumen illud ut AB, multiplicetur illud per gravitatem specificam & factum erit ut pondus seu pressio; quare cùm (*ex demonst.*) gravitas specifica sit ut $\frac{AH}{AB}$, pressio flui- di gravitates ductæ in altitudines AB, EC, CD, &c. conficient pressiones AH, BI, CK, &c. quibus fundum ATV (juxta theorema xv.) urgetur. Sustinet ergo particula A pressiones omnes AH, BI, CK, DL, ([k]) pergendo in infinitum; & particula B pressiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & sic deinceps: ideoque particulæ primæ A densitas AH, est ad particulæ secundæ B densitatem BI ut summa omnium $AH + BI + CK + DL$, in infinitum, ad summam omnium $BI + CK + DL$, &c. Et BI densitas secundæ B est ad CK densitatem tertiæ C, ut summa omnium $BI + CK + DL$, &c. ad summam omnium $CK + DL$, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis AH, BI, CK, &c. proportionales, atque ideo continuè proportionales (*per hujus lem.* 1.) proindeque differentiæ AH, BI, CK, &c. summis proportionales, sunt etiam continuè proportionales. Quare cùm densitates in locis A, B, C, &c. sint ut AH, BI, CK, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per saltum, & ex æquo in distantiis SA, SC, SE continuè proportionalibus, erunt densitates AH, CK, EM continuè proportionales. Et eodem argumento, in distantiis quibusvis continuè proportionalibus SA, SD, SG, densitates AH, DL, GO erunt continuè proportionales. Coeant jam puncta A, B, C, D, E, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum à fundo A ad summitatem fluidi continua reddatur, & in distantiis quibusvis continuè proportionalibus SA, SD, SG, densitates AH, DL, GO, semper existentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. *Q. E. D.*



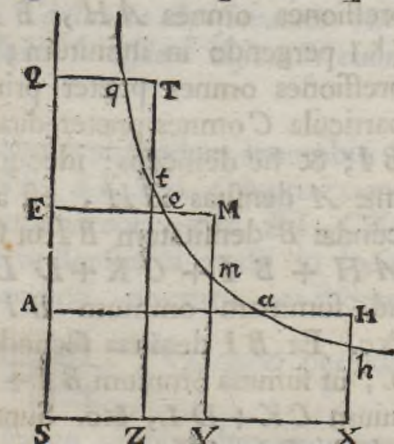
Co-

di cylindrici, cujus est altitudo AB, erit ut AH, & ita de cæteris.

(k) 175. * *Pergendo in infinitum.* Quoniam enim (*per hyp.*) densitas compressioni proportionalis est, ubi compressio nulla evadit, evanescit quoque densitas, seu, fluidum fit infinitè rarum, ac proinde in infinitum expanditur; cùm ratio voluminis ad materiæ quantitatem infinita evadat (2. *lib.* 1.). 175

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXI. THEOR. XVI.

Corol. Hinc si detur densitas fluidi in duobus locis, putà A & E, colligi potest ejus densitas in alio quovis loco Q. Centro S, asymptotis rectangulis SQ, SX describatur hyperbola secans perpendicula AH, EM, QT in a, e, q, ut & perpendicula HX, MY, TZ, ad asymptoton SX demissa, in h, m & t. Fiat area $YmtZ$ ad aream datam $YmhX$ ut area data $EeqQ$ ad aream datam $EeaA$; & linea Zt producta abscindet lineam QT densitati proportionalem. Namque si lineæ SA, SE, SQ sunt continuè proportionales, (l) erunt areæ $EeqQ$, $EeaA$ æquales, & inde areæ his proportionales $YmtZ$, $XhmY$ etiam æquales, & lineæ SX, SY, SZ, id est, AH, EM, QT (m) continuè proportionales, ut oportet. Et si lineæ SA, SE, SQ obtinent alium quemvis ordinem in serie continuè proportionalium, lineæ AH, EM, QT, ob proportionales areas hyperbolicas, (n) obtinebunt eundem ordinem in aliâ serie quantitatum continuè proportionalium.



PRO-

(l) * *Erunt areæ EeqQ, EeaA æquales*, per not. 379. lib. 1.

(m) * *Continuè proportionales*,) 379. lib. 1.)

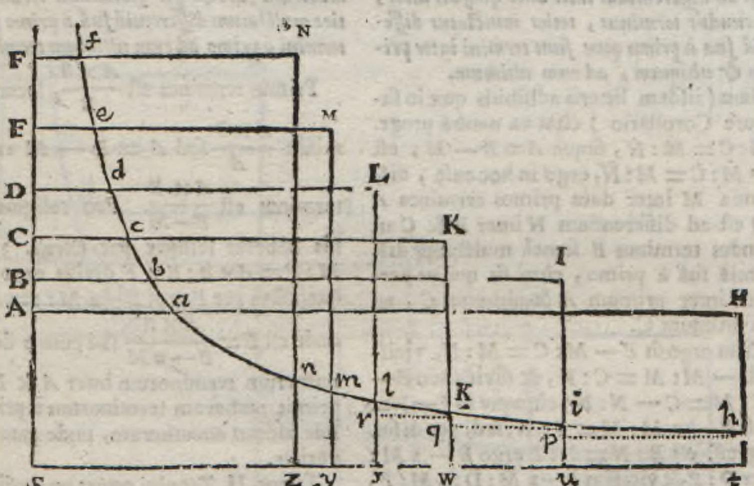
(n) * *Obtinebunt eumdem ordinem &c.* * Etenim areæ Hyperbolicæ EeaA, QqaA sunt Logarithmi linearum SE, SQ, & pariter areæ YmtZ, XhtZ sunt Logarithmi linearum SY, SX, (*379, 389, lib.* 1.) sed cùm areæ YmtZ, XhtZ sint per constructionem proportionales areis EeaA, QqaA, illæ areæ YmtZ, XhtZ per Doctrinam Logarithmorum (n. 38) poterunt esse Logarithmi linearum SE, SQ; cùm ergo eædem quantitates possint esse Logarithmi tam quantitatum SE, SQ, quàm quantitatum SY, SX, oportet ut istæ quantitates SE, SY & SQ, SX correspondentia loca occupent in Progressionibus Geometricis ad quas pertinent.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

PROP. XXII. THEOR. XVII.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis distantiarum suarum à centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quod, (°) *si distantiæ sumantur in progressione musicâ, densitates fluidi in his distantiis erunt in progressione geometricâ.*

Designet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula AH, BI,



CK, &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis A, B, C, D, E,

(o) * *Quòd si distantiæ sumantur in progressione musicâ*, aut, quod idem est, si tales sumantur distantiæ ut earum reciprocæ sint in progressione arithmeticâ.

* Scilicet tres quantitates dicuntur esse in continuâ proportione Musicâ sive Harmonicâ, si prima sit ad tertiam ut differentia primæ & secundæ ad differentiam secundæ & tertiæ. Et si sit series plurium quantitatum talium ut terminus quivis sit ad subsequentem, ut differentia prioris à termino intermedio, ad differentiam hujus intermedii à posteriore termino, ea series dicitur *Progressio Musica*. 175

Cor. 1. *In progressione Musicâ factum duorum priorum terminorum est ad factum duorum quorumvis immediatè sibi succedentium ut differentia inter duos primos terminos ad differentiam inter hos ultimos.* Nam sunto termini progressionis Musicæ A, B, C, D, E, F &c. & differentiæ inter singulos M, N, P, Q, R &c. erit per definitionem hujus progressionis

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVII.

E, &c. & ipsius gravitates (p) specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, secundam à B ad C, tertiam à C ad

$A:C=M:N$
$B:D=N:P$
$C:E=P:Q$
$D:F=Q:R$, unde ex compositione rationum patet quod est
$A\times B:E\times F=M:R$.

Cor. 2. *Differentia inter duos primos terminos est ad differentiam inter duos quosvis alios, ut secundus terminus, toties mulctatus differentiâ sua à primo quot sunt termini inter primum & ultimum, ad eum ultimum.*

Nam (iisdem litteris adhibitis quæ in superiore Corollario) cùm ex naturâ progr. sit $A:C=M:N$, sitque $A=B-M$; est $B-M:C=M:N$, ergo in hoc casu, differentia M inter duos primos terminos A & B est ad differentiam N inter B & C ut secundus terminus B semel mulctatus differentiâ suâ à primo, cùm sit unicus terminus inter primum A & ultimum C, ad eum ultimum C.

Cùm ergo sit $B-M:C=M:N$, vicissim $B-M:M=C:N$, & dividendo $B-2M:M=C-N:N$; cùmque sit $C-N=B$, est $B-2M:M=B:N$, sed, per defin. progress. est $B:N=D:P$ ergo $B-2M:M=D:P$ & vicissim $B-2M:D=M:P$, sunt verò duo termini inter A & D, unde rursus in hoc casu constat Corollarii veritas.

Item cùm sit $B-2M:D=M:P$ & vicissim $B-2M:M=D:P$, erit dividendo $B-3M:M=D-P:P$, cùmque sit $D-P=C$ erit $B-3M:M=C:P$ cùmque per defin. progr. sit $C:P=E:Q$ erit $B-3M:M=E:Q$ & vicissim $B-3M:E=M:Q$, sunt verò inter A & E tres termini: Cùmque eadem recurrat semper demonstratio si numerus terminorum progressionis inter primum & ultimum sit n; si secundus terminus dicatur B, differentia à primo M, ultimus terminus sit F, differentiâ à præcedente R erit, $M:R=B-nM:F$. Q. E. Dem.

Cor. 3. *In Progressione Musicâ secundus terminus toties mulctatus suâ differentiâ à primo quot sunt termini inter eum & ultimum est ad ultimum ut factum duorum primorum terminorum progressionis ad factum duorum postremorum.*

Liquet utique ex collatione duorum præcedentium Corollariorum; unde est semper, $B-nM:F=A\times B:E\times F$.

Theor. I. *Quilibet terminus progressionis Musicæ est æqualis facto duorum primorum terminorum diviso per secundum terminum toties mulctatum differentiâ suâ à primo quot sunt termini à primo ad eum ultimum terminum.*

Primus terminus est $\frac{A\times B}{B}$, secundus terminus $\frac{A\times B}{A}$ sed $A=B-M$ ergo 2us terminus est $\frac{A\times B}{B-M}$. Pro reliquis terminis habetur semper per *Coroll.* 3. $B-nM:F=A\times B:E\times F$ divisis ergo Consequentibus per F, erit $B-nM:1=A\times B:E$ unde est $E=\frac{A\times B}{B-nM}$ sed cum n designaret numerum terminorum inter A & F hic exprimit numerum terminorum a primo ad E hoc ultimo annumerato, unde patet Theor. veritas.

Theor. II. *Termini omnes progressionis Musicæ sunt inter se sicut quantitates quarum reciprocæ constituunt progressionem Arithmeticam.*

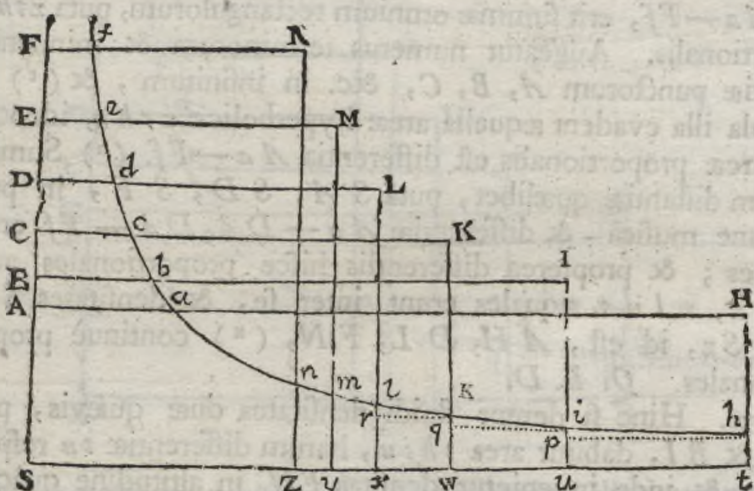
Nam per Theor. prius termini $A:B$. C. D. E &c. prog. Musicæ sunt $\frac{A\times B}{B}$, $\frac{A\times B}{B-M}$, $\frac{A\times B}{B-2M}$, $\frac{A\times B}{B-3M}$, &c. $\frac{A\times B}{B-nM}$. $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B-M}$ $\frac{1}{B-2M}$, $\frac{1}{B-3M}$ $\frac{B}{B-2M}$. Sed hæ sunt reciprocæ quantitatum B, $B-M$, $B-2M$, $B-3M$, $B-nM$ quæ sunt in progressione arithmeticâ; Ergo &c.

Scholium. Progressio musica potest esse decrescens & omnia ut prius procedent, mutatis signis negativis in positiva.

(p) * *Gravitates specificæ in iisdem locis erunt &c.* (174).

C ad D &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde est, in distantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, (q) conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cùm densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum $AH - BI$, $BI - CK$, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S, asymptotis SA, Sx describatur

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVII.



hyperbola quævis, quæ secet perpendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c, &c. ut & perpendicula ad asymptoton Sx demissa Ht, Iu, Kw in h, i, k, & densitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu tp, uq, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id

Z 2 est;

(q) * *Conficient exponentes pressionum*, &c. Quod patet ut in demonstratione 175. seu quantitates pressionibus proportionales, prop. XXI.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVII.

eſt, ut Aa, Bb, &c. Eſt enim, (r) ex naturâ hyperbolæ, SA ad AH vel St, ut th ad Aa, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et ſimili argumento eſt $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale Bb, &c. (ſ) Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continuè proportionales, & propterea differentiis ſuis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hiſce proportionalia ſunt rectangula tp, uq, &c. ut & ſummis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ ſummæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejuſmodi termini quàm plurimi, & ſumma omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit ſummæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur diſtantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & (t) rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ $zthn$, ideoque huic areæ proportionalis eſt differentia $Aa - Ff$. (u) Sumantur jam diſtantiæ quælibet, puta SA, SD, SF, in progreſſione muſicâ, & differentiæ $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hiſce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter ſe, & denſitates St, Sx, Sz, id eſt, AH, DL, FN, (x) continuè proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ſi dentur fluidi denſitates duæ quævis, puta AH & BI, dabitur area $thiu$, harum differentiæ tu reſpondens; & inde invenietur denſitas FN, in altitudine quâcunque SF, ſumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thiu$ ut eſt differentia $Aa - Ff$ (y) ad differentiam $Aa - Bb$.

Scho-

(r) * *Ex natura hyperbolæ*, per theor. 4. de hyperbola.

(ſ) *Sunt autem A a, B b, C c, &c. continuè proportionales.* Nam (*per hyp.*) S A, S B, S C ſunt continuè proportionales, & (*per theor. 4. de hyp.*) A a, B b, C c ſunt reciprocè ut S A, S B, S C, ideoque etiam continuè proportionales.

(t) * *Et rectangula evadent æqualia areæ hyperbolicæ z t h n a*, per Lemma III. lib. 1.

(u) * *Sumantur jam* diſtantiæ quælibet, puta S A, S D, S F in progreſſione muſicâ, & earum reciprocæ A a, D d, F f erunt in progreſſione arithmetica, ideoque differentiæ A a — D d, D d — F f æquales.

(x) * *Continuè proportionales.* (379 lib. 1.)

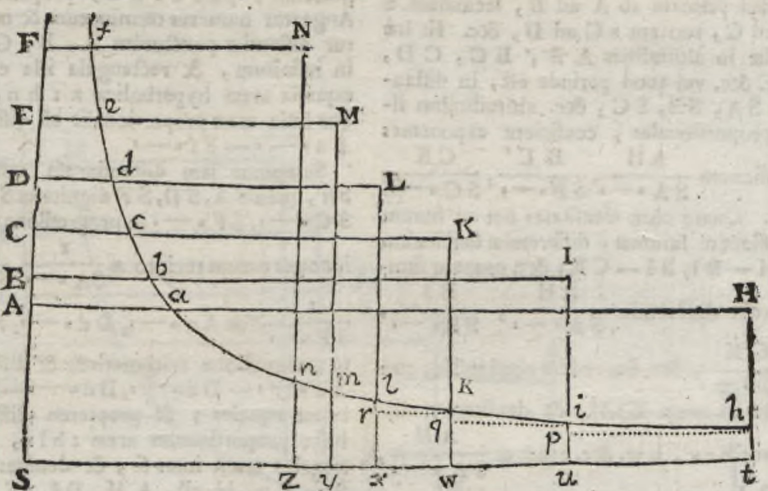
(y) 176. * *Ad differentiam A a — B b.* Quoniam verò area t h i u eſt ad aream

t h n z

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVII.

Scholium.

(z) Simili argumentatione probari poteſt, quòd ſi gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicatâ ratione diſtantiarum à centro, & quadratorum diſtantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\ cub.}{SAq}$, $\frac{SA\ cub.}{SBq}$, $\frac{SA\ cub.}{SCq}$) ſumantur in progreſſione arithmeticâ; denſitates AH, BI, CK, &c. erunt



in progreſſione geometricâ. Et ſi gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione diſtantiarum, & cuborum diſtantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\ cub.}$, &c.) ſumantur in

t h n z ut Logarithmus lineæ S t vel A H ad Logarithmum lineæ S z ſeu F N (379 & 380 *lib.* 1.), denſitas F N per tabulas logarithmorum inveniri poterit. Et vice versâ, datâ denſitate F N invenietur altitudo S F: nam per prop. ſuperiorem dabitur A a — F f, & inde dabitur F f, unde invenietur $FS = \frac{SA \times Aa}{Ff}$ (*per theor.* 4. *de hyp.*) Quia verò fluidi elaſticitas, 176.
cæteris paribus, vi comprimenti, ideoque denſitati (*per hyp.*) proportionalis eſt, patet per hoc corollarium ex datis altitudinibus inveniri poſſe elaſticitates, & vice versâ.

(z) 177. * *Simili argumentatione probari poteſt &c.* Sit vis centripeta particularum fluidi reciprocè ut diſtantiæ di-

 gni-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. V. Prop. XXII. Theor. XVII.

in progressione arithmeticâ; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione geometricâ. Et sic in infinitum. Rursus

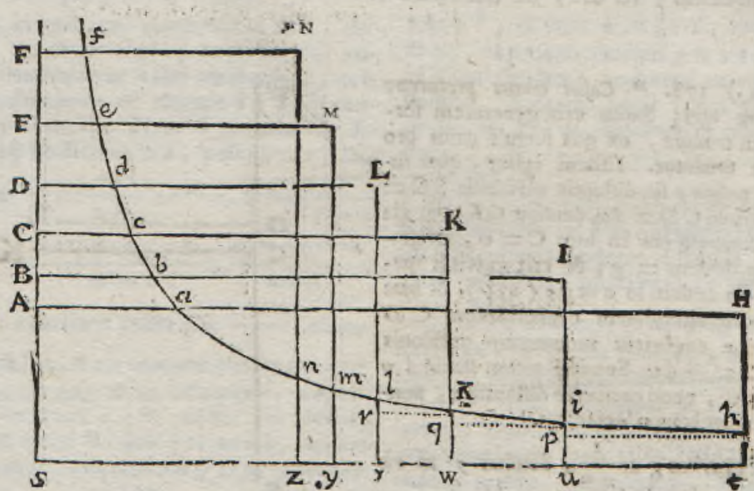
gnitas, cujus index est n; designet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula AH, BI, CK &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis A, B, C, D, E &c. Et ipsius gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SA^n}$, $\frac{BI}{SB^n}$, $\frac{CK}{SC^n}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE &c. vel quod perinde est, in distantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. Quare cùm densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum $AH-BI$, $BI-CK$; &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. fiat eadem constructio, quæ supra in prop. XXII, & densitatum differentiæ tv, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, &c. & rectangula $tv \times th$, $uw \times ui$, &c., seu tp, uq &c. ut $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$, &c. id est, ut Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, &c. Est enim (*per theor.* 4. *de hyp.*) $AH \times th$ æquale $SA \times Aa$, & Aa reciprocè ut SA, seu directè ut $\frac{1}{SA}$, ideoque $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$ ut $SA \times Aa \times Aa^{n-1}$, sive ut Aa^{n-1} cum sit $SA \times Aa = 1$, & simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$ ut Bb^{n-1}, &c. sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. ideoque Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, Cc^{n-1} &c. continuè proportionales, & propterea differentiis suis $Aa^{n-1} - Bb^{n-1}$, $Bb^{n-1} - Cc^{n-1}$, &c. proportionales, ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum $Aa^{n-1} - Cc^{n-1}$, vel $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$ summæ rectangulorum $tp + uq$, vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quàm plurimi, & summa omnium differentiarum; puta $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ $zthn$, ideoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$.

Sumantur jam distantiarum quarumlibet, puta SA, SD, SF dignitates SA^{n-1} SC^{n-1}, SF^{n-1} in progressione musicâ, ideoque earum reciprocæ $\frac{1}{SA^{n-1}}$, $\frac{1}{SD^{n-1}}$, $\frac{1}{SF^{n-1}}$, seu Aa^{n-1}, Dd^{n-1}, Ff^{n-1} in progressione arithmeticâ, & differentiæ $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$, $Dd^{n-1} - Ff^{n-1}$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter se, & densitates St, Sx, Sz, id est, AH, DL, FN continuè proportionales. Quare si gravitas particularum fluidi diminuatur in ratione quâcumque multiplicatâ distantiarum, cujus exponens sit n, & dignitatum SA^{n-1}, SB^{n-1}, SC^{n-1}, &c. reciproca (nempe $\frac{SA^n}{SA^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SC^{n-1}}$, &c. in quibus SA data est) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione geometricâ.

Si itaque loco n scribantur numeri 3, 4, 5, 6 &c. in infinitum; & rursus scribantur o, -1, -2, -3 &c. in infinitum, patet veritas scholii in hypothesi densitatis vi comprimenti proportionalis. Quando autem $n = o$, seu quando gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem est, est $\frac{SA^n}{SA^{n-1}} = SA$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}} = SB$;

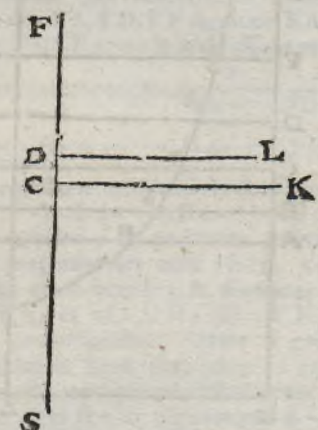
ſus ſi gravitas particularum fluidi in omnibus diſtantiis eadem ſit, & diſtantiæ ſint in progreſſione arithmeticâ denſitates erunt in progreſſione geometricâ, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas ſit ut diſtantia, & quadrata diſtantiarum ſint in progreſſione arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione geometricâ. Et ſic in infinitum. Hæc ita ſe habent ubi fluidi compreſſione condenſati denſitas eſt ut vis compreſſionis, vel, quod perinde eſt, ſpatium à fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi poſſunt aliæ condenſationis leges, ut quòd cubus vis comprimentis ſit ut quadrato-quadratum denſitatis, ſeu triplica-

ta



S B, ideoque ſi diſtantiæ ſumantur in progreſſione arithmeticâ, denſitates erunt in progreſſione geometricâ, ideoque diſtantiæ ſunt ut denſitatum logarithmi, quia creſcentibus diſtantiis in progreſſione arithmeticâ, decreſcunt denſitates in progreſſione geometricâ. Quia verò *per experimenta conſtat, quod denſitas aëris*, cæteris paribus ac potiſſimum manente eodem caloris gradu, *ſit ut vis comprimens vel accuratè vel ſaltem quam proximè* in aëre quem experimentis poſſumus ſubjicere, vis autem aërem inferiorem comprimens, cæteris etiam paribus; æqualis ſit ponderi 177. aëris totius incumbentis, ideoque proportionalis altitudini mercurii in barometro; & præterea particularum aëris gravitas, in minoribus ſaltem à telluris ſuperficie diſtantiis, conſtans cenſeri poſſit, patet; quod, cæteris paribus, aëris denſitatem, ad hujuſmodi diſtantias minores, metiri poſſimus per logarithmos. Sed de his plura videre eſt in Elementis Aërometriæ Clar. *Wolfii*, in libro 2°. *Phoronomiæ*, & in ſectione 10ª. *Hydrodynamicæ* Clar. *Danielis Bernoulli*.

ta ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ à centro, densitas erit reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quòd cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, densitas erit reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ. Fingatur quòd vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis, & gravitas reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ, & densitas erit reciprocè ut distantia. ([a]) Casus omnes percurrere longum esset. Cæterùm per experimenta constat quòd densitas aëris sit ut vis comprimens vel accuratè, vel saltem quàm proximè: & propterea densitas aëris in atmosphærâ terræ est ut pondus aëris totius incumbentis, id est, ut altitudo mercurii in barometro.



(a) 178. * *Casus omnes percurrere longum esset*; Satius erit generalem formulam tradere, ex quâ singuli casus pro lubitu eruantur. Iisdem igitur, quæ supra, positis, sit distantia variabilis $SC = x$, altitudo $CD = dx$, densitas $CK = y$, vis tota comprimens in loco $C = v$, vis gravitatis ibidem $= g$; & erit gravitas specifica in eodem lo o ut gy (174), & hæc ducta in altitudinem evanescentem CD seu dx conficient momentum pressionis $g y dx = - dv$. Sumitur autem fluxio dv negativè, quod crescente distantia x, pondus incumbens v decrescat.

Sit gravitas g ut $\frac{1}{x^m}$, densitas y ut vis comprimentis dignitas v^{n}, ideoque $y^{\frac{1}{n}}$ ut v, & sumptis fluxionibus $\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ ut dv. Loco g & dv substituantur hi valores in æquatione $g y dx = - dv$, & fiet $\frac{y dx}{x^m} = - \frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ seu $- \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} dy$. His verò æquationibus non æqualitates, sed proportiones tantum exponimus, & ideo coefficientes datas negligimus.

Si in ultimâ æquatione ponatur $n = 1$, id est, densitas vi comprimenti proportionalis, erit $\frac{dy}{y} = - \frac{dx}{x^m}$. Sumantur quantitates $\frac{1}{x^{m-1}}$ in progressione arithmeticâ; & earum fluxiones, seu differentiæ nascentes $- \frac{(m-1)dx}{x^m}$, ideoque & $\frac{-dx}{x^m}$ constantes erunt, & propterea quantitates $\frac{dy}{y}$ etiam datæ; ac proinde densitates y suis differentiis dy proportionales, erunt con-

continuè proportionales, (*per lem. II. lib. II.*). Si in eadem hypothesi ponatur $m=1$, fit $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$; unde si capiantur quantitates $\frac{dx}{x}$ constantes, seu distantiæ x in progressione geometricâ, erunt etiam quantitates $\frac{dy}{y}$ constantes, & ideo densitates y in progressione geometricâ. Prorsus ut in prop. XXII, XXI. & initio scholii hujus demonstratum est. Sumptis fluentibus, æquatio $\frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} dy = -\frac{dx}{x^m}$ in hanc abit $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m} + Q.$ *const.* in quâ non potest esse $m=1$, nec $n=1$, neque $n=0$, ut patet. Ut autem determinetur valor constantis Q, primum definienda est altitudo S F, ubi densitas y evanescit. Nam si altitudo illa finita est & dicatur $=a$, positâ $y=0$, habebitur $Q = \frac{-1}{m-1} a^{1-m}$, & hinc $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{x^{1-m}-a^{1-m}}{m-1} = \frac{a^{1-m}-x^{1-m}}{m-1}$, in qua æquatione debet esse $\frac{1-n}{n}$ numerus positivus, seu n numerus positivus unitate minor, ut crescentibus distantiis x, decrescant densitates y, & contra. Si altitudo S F ad quam densitas y evanescit, infinita supponatur, erit constans $Q=0$, ac proinde æquatio $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$. Nam si in æquatione $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{x^{1-m}-a^{1-m}}{m-1}$, ponatur y nulla & x infinita, quantitas constans a erit infinita, contra hypothesim. DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND.

Jam vero si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, id est si $m=2$, æquatio $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$ in hanc migrat $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{x}$, unde est y ut $x^{\frac{1}{1-n}}$ reciprocè. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu y^4 ut v^3, ideoque y ut $v^{\frac{3}{4}}$, & hinc $n=\frac{3}{4}$; & erit $x^{\frac{1}{1-n}} = x^4$, ac proinde densitas y ut x^3 reciprocè, seu densitas, reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, hoc est, y^5 ut v^3, adeoque y ut $v^{\frac{3}{5}}$, & hinc $n=\frac{3}{5}$; & erit y ut $x^{\frac{3}{2}}$ reciprocè, id est, densitas reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis; seu y ut $v^{\frac{1}{2}}$; & hinc erit $n=\frac{1}{2}$, ac proinde y ut x reciprocè, sive densitas est reciprocè ut distantia. Quæ Newtonus in scholio dixerat. Vide monumenta Academiæ Regiæ scientiarum anni 1716, ubi hanc materiam tractat Varignonius, quem hic sumus sequuti. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVI.

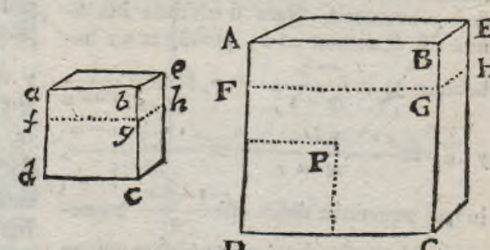
178.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXIII. THEOR. XVIII.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si fluidi ex particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, vires centrifugæ particularum ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ ſunt reciprocè proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt fluidum elaſticum, cujus denſitas eſt compreſſioni proportionalis.

Includi intelligatur fluidum in ſpatio cubico *A C E*, dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *a c e*; & particularum, ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio obtinentium, (b) diſtantiæ erunt ut cuborum latera *A B*, *a b*; & (c) mediorum denſitates reciprocè ut ſpatia continentia *A B cub.* & *a b cub.* In cubi majoris latere plano *A B C D* capiatur quadratum *D P* æquale lateri plano cubi minoris *d b*; & ex hypotheſi, preſſio, quâ quadratum *D P* urget fluidum incluſum, erit ad preſſionem, quâ illud quadratum *d b* urget fluidum incluſum, ut medii denſitates ad invicem, hoc eſt, ut *a b cub.* ad *A B cub.* Sed preſſio, quâ quadratum *D B* urget fluidum incluſum, eſt ad preſſionem, quâ quadratum *D P* urget idem fluidum, ut quadratum *D B* ad quadratum *D P*, hoc eſt, ut *A B quad.* ad *a b quad.* Ergo, ex æquo, preſſio quâ quadratum *D B* urget fluidum, eſt ad preſſionem quâ quadratum *d b* urget fluidum, ut *a b* ad *A B*. Planis *F G H*, *f g h*, per media cuborum ductis, diſtinguatur fluidum in duas partes, & hæ (d) ſe mutuo prement iiſdem viri-



(b) * *Diſtantiæ erunt ut cuborum latera A B, a b*, per lemma V. lib. I.

(c) * *Et mediorum denſitates, ut &c.* ob datam in utroque ſpatio fluidi maſſam (2. lib. 1.).

(d) * *Et hæ ſe mutuo prement iiſdem viribus &c.* Preſſiones enim in unoquoque ſpatio ſunt ubique æquales; nam cùm fluidum uniforme ſupponatur, ſi preſſio minor eſſet in uno loco quàm in alio, ſtaviribus, quibus premuntur à planis AC, ac, hoc eſt, in proportione ab ad AB: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones ſuſtinentur, ſunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemque ſitum in utroque cubo, vires quas particulæ omnes ſecundum plana FGH, fgh exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires, quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum FGH in cubo majore, ſunt ad vires, quas ſingulæ exercent, in ſingulas ſecundum planum fgh in cubo minore, ut ab ad AB, hoc eſt, reciprocè ut diſtantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versâ, ſi vires particularum ſingularum ſunt reciprocè ut diſtantiæ, id eſt, reciprocè ut cuborum latera AB, ab; ſummæ virium erunt in eâdem ratione, & preſſiones laterum DB, db ut ſummæ virium; & preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris DB ut ab *quad.* ad AB *quad.* Et, ex æquo, preſſio quadrati DP ad preſſionem lateris db ut ab *cub.* ad AB *cub.* id eſt, vis compreſſionis ad vim compreſſionis ut denſitas ad denſitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

(e) [Simili argumento, ſi particularum vires centrifugæ ſint reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata denſitatum. Si

ſtatim cederet fluidum magis preſſum, atque ita preſſio ad æqualitatem reſtitueretur, ut in caſu 6°. prop. XIX.

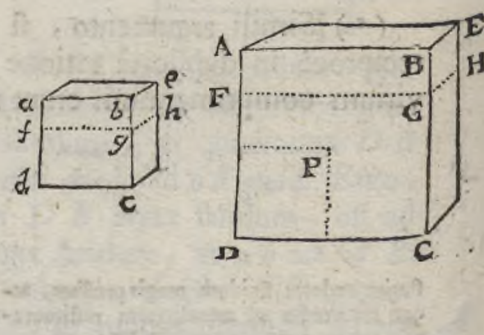
(e) * *Simili argumento &c.* Sunto D & d particularum diſtantiæ in ſpatiis cubicis ACE & ace quæ ſunt ut AB & ab, earumdem vires centrifugæ ut D^n & d^n reciprocè, fluidi denſitates E & e, & vires comprimentes erunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ & $e^{\frac{n+2}{3}}$.

Nam cùm ſummæ virium quas omnes ſimul particulæ exercent in latera DB, db, ſint ut ſingularum particularum vires erunt iſtæ ſummæ virium ut D^n & d^n reciprocè, ſeu ut ab^n & AB^n directè; & preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati DB ut ab^2 ad AB^2; unde ex æquo preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati db, hoc eſt, vis comprimens in ſpatio ACE ad vim comprimentem in ſpatio ace, ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}. Sunt autem denſitates, ſive eſt E ad e, ut ab^3 ad AB^3, & 178.

Si vires centrifugæ ſint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione diſtantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi denſitatum. Et univerſaliter, ſi D ponatur pro diſtantiâ, & E pro denſitate fluidi compreſſi, & vires centrifugæ ſint reciprocè ut diſtantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index eſt numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index eſt numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero ſunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longè ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in ſui generis corporibus ſibi proximis. Magnetis virtus per interpoſitam laminam ferri contrahitur, & in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à magnete quam à laminâ trahuntur. Ad eundem modum ſi particulæ fugant alias ſuis generis particulas ſibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujuſmodi particulis componentur fluida de quibus actum eſt in hâc propoſitione. Quod ſi particulæ cujuſque virtus in infinitum propagetur, (f) opus erit vi majori ad æqualem condenſationem majoris

ideo $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$ ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}. Quare vires comprimentes ſunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ & $e^{\frac{n+2}{3}}$. Q. E. D.

Et vice versâ, ſi vires comprimentes ſunt ut denſitatum dignitates $E^{\frac{n+2}{3}}$, $e^{\frac{n+2}{3}}$, ſeu ut ab^{n+2}, AB^{n+2}; erit preſſio quadrati DP ad preſſionem quadrati d b in eâdem ratione, & preſſio quadrati D B eſt ad preſſionem quadrati D P, ut AB^2 ad ab^2; &, ex æquo, preſſio quadrati D B ad preſſionem quadrati d b, ut ab^n ad AB^n, ſeu ut d^n ad D^n. Sunt autem vires particularum ſingularum ut ſummæ virium, hoc eſt, ut preſſiones laterum D B, d b; quare vires particularum centrifugæ ſunt reciprocè ut diſtantiarum dignitates D^n, d^n. Q. E. D.



Jam ſi loco n ſcribantur numeri 2, 3, &c., patet veritas eorum quæ initio ſcholii dixit Newtonus.

(f) * *Opus erit vi majori &c.* Non enim ſolum vincenda erit per compreſſionem vis centrifuga particularum proximarum, ſed & remotiorum vis erit ſuperanda quæ (ex hyp.) in infinitum propagatur.

joris quantitatis fluidi. An vero fluida elaſtica ex particulis ſe mutuo fugantibus conſtent, quæſtio phyſica eſt. Nos proprietatem fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium mathematicè demonſtravimus, ut philoſophis anſam præbeamus quæſtionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De motu & reſiſtentiâ corporum funependulorum.

(g) PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XVIII.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oſcillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directè, & materia inversè. Quo major eſt vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem

(g) * *Propoſitio XXIV.* In hâc propoſitione & ejus corollariis ſupponitur corpora funependula, quæ comparantur, in cycloidibus aut ſaltem in exiguis magni circuli arcubus oſcillari. * Pondera autem corporum hic duplici de causâ à materiâ ipſorum diſtinguuntur; primo, quod nondum aſſumi poſſit gravitatem agere ſecundùm rationem maſſarum; cum id ipſum ex iſto Theoremate poſtea deducatur, cor. 7.; & ſecundo, in diverſis locis gravitas diverſa eſſe poteſt (ut quidem ex experimentis conſtat) ideoque corporum duorum in diverſis iis locis ſpectatorum ratio materiæ eadem manebit, non verò ratio ponderum. 178

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

gem ſecundam manifeſtum eſt. ([h]) Jam verò ſi pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut pondera: ideoque ſi corpora duo oſcillando deſcribant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cùm ([i]) tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes correſpondentes ſint ut tempora oſcillatio-

(h) *Jam verò ſi pendula ejuſdem ſint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter diſtantibus ſunt ut Pondera.*

* Nam ſi Pendula ejuſdem ſint longitudinis, Cycloides plane ſimiles & æquales deſcribent: In unaquâque autem Cycloide, vires quibus corpora in locis quibuſvis D, vel d accelerantur, ſunt ad totum ſinguli corporis pondus in locis altiſſimis, ut arcus Cycloidis inter loca propoſita D, d & puncta infima C, c, ad totas ſemi-Cycloides (Cor. Prop. LII. Lib. 1.) Ergo ſi ſemicycloides ſint æquales & loca D & d à perpendiculo æqualiter diſtent, arcus D C & d c erunt æquales, ideoque vis quâ corpus acceleratur in primâ Cycloide in puncto D, erit ad totum ejus corporis pondus, ut vis quâ corpus acceleratur in alterâ Cycloide in puncto d, ad totum ejus corporis pondus. Unde viciſſim, vis quâ acceleratur primum corpus in puncto D, eſt ad vim quâ alterum acceleratur in puncto d, ut totum prioris corporis pondus, ad pondus alterius corporis, ideoque *ſi pendula ſint ejuſdem longitudinis vires motrices &c.* Q. E. D.

(i) *Cum tempora quibus corpora deſcribant ſingulas arcuum partes* (æquales) *correſpondentes ſint ut tempora oſcillationum totarum.*

* Sint arcus D C, d c æquales, ſecenturque in partes æquales infinitè parvas D E, E F &c.; d e, e f &c., ex punctis D, E, F & d, e, f, ducantur perpendiculares ad axem, D M, E N, F R; D m, e n, f r; liquet lineolas M N & m n, M R & m r ex hypotheſi fore æquales; Ex naturâ autem gravitatis, velocitas acquiſita in E erit ad velocitatem acquiſitam in F ut Radix altitudinis M N ad Radicem M R, & pariter velocitas acquiſita in e, erit ad velocitatem acquiſitam in f ut $\sqrt{mn}$ ad $\sqrt{mr}$, cùm ergo $\sqrt{MN} = \sqrt{mn}$ & $\sqrt{MR} = \sqrt{mr}$ velocitas acquiſita in E eſt ad velocitatem acquiſitam in F, ut velocitas acquiſita in e eſt ad velocitatem acquiſitam in f, & viciſ-

lationum totarum, (†) erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè: ideoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directè & velocitates reciprocè. (§) Sed velocitates reciprocè sunt ut tempora, atque ideo tempora directè & velocitates reciprocè sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est, ut pondera & quadrata temporum. (††) *Q. E. D.*

Co-

viciffim velocitas acquifita in E, eft ad velocitatem acquifitam in e; ut velocitas acquifita in F eft ad velocitatem acquifitam in f. Sed quoniam arcus E F & e f F G & f g funt infinite parvi & æquales, uniformiter defcribi cenfendi funt, & tempora quibus defcribuntur erunt in ratione reciprocâ velocitatum, ideoque tempus quo defcribitur E F eft ad tempus quo defcribitur e f, ut velocitas in e ad velocitatem in E, & tempus quo defcribitur F G eft ad tempus quo defcribitur f g, ut velocitas in f ad velocitatem in F &c. fed rationes velocitatum in E & e, in F & f &c. funt femper æquales inter fe, ergo & rationes temporum quæ iftarum funt inverfæ funt æquales inter fe; ergo tempora quibus fingulæ partes arcus D C defcribuntur, funt ad tempora quibus correfpondentes partes arcus d c defcribuntur, in eâdem ratione, ergo omnes antecedentes & omnes confequentes fummando, omnia fimul tempora quibus percurruntur omnes partes arcus D C, hoc eft, totum tempus ofcillationis per D C, eft ad omnia tempora quibus partes arcus d c percurruntur, hoc eft ad totum tempus ofcillationis per d c ut tempus unum quo quædam pars arcus D C percurritur, eft ad tempus quo pars correfpondens arcus d c percurritur. Q. E. D.

(†) *Erunt velocitates ad invicem in correfpondentibus ofcillationum partibus, ut vires motrices & tota ofcillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè.* * Ex demonftratione notæ fuperioris liquet velocitates in correfpondentibus partibus effe omnes in eâdem ratione, ideoque ut velocitas acquifita in E ad velocitatem acquifitam in e, fed cùm arcus D E & d c infinitè parvi fupponantur, cenfendum eft, vires motrices uniformiter agere, dum illi arcus percurruntur; motus ergo per eas productus crefcet tam pro ratione virium ipfarum quàm pro ratione temporis quo arcus illi defcribuntur five (ex demonftratis) pro ratione temporum ofcillationum integrarum, motus verò ex Def. 2. lib. 1. æftimatur à Newtono ex velocitate & materiâ conjunctim, ergo velocitates productæ in *correfpondentibus ofcillationum partibus erunt ut vires motrices & tota ofcillationum tempora directè & quantitates materiæ inversè.* 178.

(§) *Sed velocitates funt reciprocè ut tempora.* * Ex demonftratis (ad notam fuperiorem i) liquet velocitatem acquifitam in E effe ad velocitatem acquifitam in e ut velocitas acquifita in puncto quovis arcus D C ad velocitatem acquifitam in puncto correfpondenti arcus d c; Ex eâdem demonftratione liquet velocitatem acquifitam in E effe ad velocitatem acquifitam in e, in ratione reciprocâ temporum quibus defcribuntur arcus E F, & e f; hæc verò tempora effe ut tempora ofcillationum integrarum, unde velocitas acquifita in puncto quovis arcus D C, eft ad velocitatem acquifitam in puncto correfpondenti arcus d e, in ratione reciprocâ temporum ofcillationum totarum. Q. E. D.

(††) *Quod Erat Demonftrandum.* * In demonftratione probatum eft quod fi defcribantur arcus æquales D C, d c quantitates materiæ funt ut pondera & quadra-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXIV. THEOR. XVIII.

Corol. 1. Ideoque ſi tempora ſunt æqualia, quantitates materiæ in ſingulis corporibus erunt ut pondera.

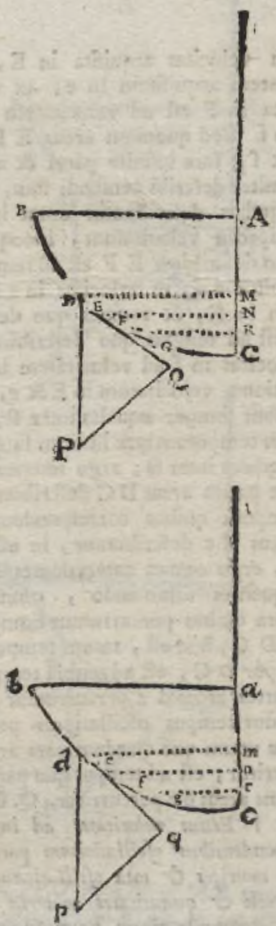
Corol. 2. Si pondera ſunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde (k) cum quadrara temporum, cæteris paribus, ſint ut longitudines pendulorum; ſi & tempora & quantita-

drata temporum, ſumatur jam arcus b c major vel minor arcu d c ſed quantitates materiæ & pondera utrinque maneant eadem quæ prius, & pariter ob Iſochroneitatem curvæ b d c, tempus oſcillationis per b c, æquale erit tempori oſcillationis per d c, ideoque quicumque ſint arcus deſcripti ſi modo maneat penduli longitudo, eademque ſit utrinque cyclois, pariter verum erit quod quantitates materiæ ſunt ut pondera & quadrata temporum oſcillationum.

(k) *Unde cum quadrata temporum cæteris paribus ſint ut longitudines pendulorum.* * Fingatur L C, l c inæqualia eſſe, & arcus D C, d c non ſumi æquales ut prius, ſed ſimiles, ſive proportionales longitudinibus L C, l c, ſecetur D C in partes æquales inter ſe, & d c in partes ſimiles, ita ut ſit D E ad d e ut L C ad l c ductiſque perpendiculis D M, E N, d m, e n &c. liquet ex ſimilitudine figurarum altitudines M N & m n, M R & m r &c. eſſe etiam inter ſe in ratione L C ad l c, velocitates verò quibus deſcribuntur arcus E F, F G ſunt ut √ M N ad √ M R, & velocitates quibus deſcribuntur arcus e f, f g ſunt ut √ m n ad √ m r, ſed quia M N & m n, M R & m r, ſunt in eâdem ratione ideoque & earum radices, viciſſim, velocitas quâ deſcribitur E F eſt ad velocitatem quâ deſcribitur e f, ut velocitas quâ deſcribitur F G ad velocitatem quâ deſcribitur f g; & ſic ordine perpetuo demonſtrabitur velocitates quibus ſucceſſivæ partes correſpondentes utriuſque curvæ percurruntur fore ſemper in eâdem ratione; tempora verò quibus arcus ſimiles deſcribuntur ſunt directè ut illi arcus & inversè ut velocitates; ergo cum ra-



tio

titates materiæ æqualia sunt, ([l]) pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et ([m]) universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directè, & longitudo penduli inversè.

Corol. 6. Sed & in medio non resistente quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inversè. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in medio quovis gravi, ut ([n]) supra explicui; ideoque idem præstat in tali medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo. *Co-*

tio arcuum correspondentium sit semper eadem, nempe ratio L C ad l c, ut & ratio velocitatum quibus percurruntur illi arcus, singula tempuscula quibus describuntur particulæ arcus D C eamdem rationem habebunt ad tempuscula quibus correspondentes particulæ arcus d c percurruntur; ideoque tempora tota oscillationum per D C & d c erunt directè ut longitudines L C & l c, & inversè ut velocitates in punctis quibusvis correspondentibus arcuum D C & d c, putà in punctis infimis C & c, sed quia ex hypothesi quod pondera sunt æqualia & quod quantitates materiæ sunt æquales, velocitates sunt proportionales Radicibus quadratis altitudinum, velocitates in punctis C & c erunt ut $\sqrt{MC}$ ad $\sqrt{mc}$: sed ex similitudine curvarum & arcuum est m c ad M C sicut l c ad L C, ergo velocitates in punctis C & c sunt ut $\sqrt{LC}$ ad $\sqrt{lc}$, ideoque tempora oscillationum integrarum in arcubus D C, d c erunt ut $\frac{LC}{\sqrt{LC}}$ ad $\frac{lc}{\sqrt{lc}}$, unde quadrata temporum erunt ut $\frac{LC^2}{LC}$ ad $\frac{lc^2}{lc}$ sive ut L C ad l c, hoc est ut longitudines pendulorum. Q. E. D.

(l) * *Pondera erunt ut longitudines pendulorum, & universaliter quantitas materiæ Pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directè & longitudo Penduli inversè.* * Sint duo pendula A & B, quæ materiâ, pondere & oscillationum temporibus discrepent, sed æqualis sint longitudinis; ex Theoremate, erit quantitas materiæ pendulæ in A ad quantitatem materiæ pendulæ in B, ut pondus & quadratum temporis oscillationum penduli A conjunctim ad pondus & quadratum temporis oscillationum penduli B conjunctim; sit tertium pendulum C, cujus materia & pondus eadem sint cum materiâ & pondere penduli B, diversa verò sit utriusque longitudo, longitudo penduli C erit ad longitudinem penduli B (sive penduli A, perinde enim est ex hypothesi (ut quadratum temporis in Pendulo C ad quadratum temporis in pendulo B, quod itaque æquale erit quadrato temporis in pendulo C, per longitudinem penduli multiplicato & per longitudinem penduli C diviso; Unde quantitas materiæ in A erit ad quantitatem materiæ in B sive in C, ut pondus & quadratum temporis in A conjunctim ad pondus in B, sive in C, cum quadrato temporis in C & longitudine penduli A directè & longitudine penduli C inversè: unde liquet quantitatem materiæ in A esse ad quantitatem materiæ in C, ut pondus & quadratum temporis in pendulo A directè & ejus longitudo inversè ad pondus & quadratum temporis penduli C directè & ejus longitudinem inversè. Q. E. D. 178.

universaliter.

Unde si & tempora & quantitates materiæ eadem sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum directè.

(m) * *Et universaliter.* Vide Notam superiorem.

(n) * *Ut supra explicui*, in cor. VI. & VIII. prop. XX.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXIV. THEOR. XIX.

Corol. 7. Et (°) hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, (p) ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora funependula quibus, in medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit AB cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C, ita ut C sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix quâ corpus urgetur in loco quovis D vel d vel E ut (q) longitudo

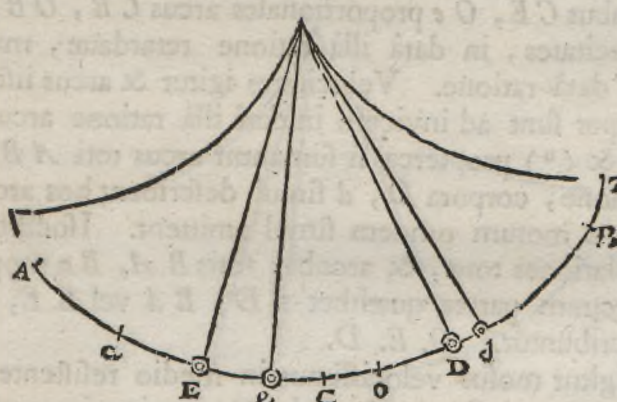
(o) * *Et hinc liquet ratio &c.* Nam ex datis pendulorum longitudinibus, oscillationum temporibus, & ponderibus corporum, datur ratio quantitatum materiæ in illis corporibus (*per cor. V.*); & contra.

(p) * *Ad cognoscendam variationem gravitatis.* Ubi enim ejusdem penduli oscillationes tardiores sunt, gravitatis actio, cæteris paribus, minor est, cum in eodem pendulo pondera sint reciprocè ut quadrata temporum (*per cor.* III.). Sed de his plura ad prop. XX. lib. III. dicentur. Quanta autem in illis experimentis adhibenda sit diligentia, Clariss. D. *de Mairan* eâ quâ solet perspicuitate & elegantiâ exponit in monumentis Acad. Reg. Scient. an. 1735.

179. Quia numeri oscillationum æqualibus temporibus à diversis pendulis absolvendarum sunt reciprocè ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt (473. *lib.* 1.), numeri oscillationum æqualibus temporibus peractarum erunt (*per cor.* V. *prop. hujus*) in compositâ ratione ex ratione subduplicata directa ponderum & subduplicatis rationibus inversis massarum & longitudinum pendulorum; sive, quoniam pondus est ut factum ex massâ in vim gravitatis acceleratricem, erunt prædicti oscillationum numeri in ratione subduplicata directa virium gravitatis acceleratricium & ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversâ; ac proinde pendulorum inæqualium, sed eâdem vi gravitatis agitatorum, numeri oscillationum eodem tempore absolvendarum sunt in reciprocâ subduplicatâ ratione longitudinum pendulorum, & numeri oscillationum in duobus pendulis æqualibus erunt in subduplicatâ ratione virium gravitatis. Hæc est regula quam ad comparandas corporum gravitates tradit *Joh. Bernoulli* in Actis Erudit. Lipf. an. 1713.

(q) *Ut longitudo arcus &c.* Per demonstr. Prop. LI. & cor. II. Prop. LII. Lib. I.

do arcus CD vel Cd vel CE. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, ideoque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem CO, & ſumatur arcus Od in ratione ad arcum CD quam habet arcus OB ad arcum CB: & vis quâ corpus in d urgetur in medio reſiſtente, cum ſit exceſſus vis Cd ſupra reſiſtentiam CO, exponetur per arcum Od, ideoque erit ad vim, quâ corpus D urgetur in medio non reſiſtente in loco D, ut arcus Od ad arcum CD; & propterea etiam in loco B ut ar-



cus OB ad arcum CB. Proinde ſi corpora duo, D, d exeant de loco B, & his viribus urgeantur: cum vires ſub initio ſint ut arcus CB & OB; (r) erunt velocitates primæ & arcus primo deſcripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi BD, & Bd, arcus reliqui CD, Od erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipſis CD, Od proportionales manebunt in eâdem ratione ac ſub initio, & propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione ſimul deſcribere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD, Od ſemper erunt ut arcus toti CB, OB; &

(r) * *Erunt velocitates primæ &c.* Nam, dato temporis momento, velocitates genitæ ſunt ut vires (13. *lib.* 1.) & ut ſpatia deſcripta (*per cor.* 4. *lem.* X. *lib.* 1.)

175.

& propterea arcus illi reliqui ([s]) ſimul deſcribentur. Quare corpora duo D, d ſimul pervenient ad loca C & O, alterum quidem in medio non reſiſtente ad locum C, & alterum in medio reſiſtente ad locum O. Cum autem velocitates in C & O ſint ut arcus CB, OB; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in ([t]) eâdem ratione. Sunto illi CE & Oe. Vis quâ corpus D in medio non reſiſtente retardatur in E eſt ut CE, & vis quâ corpus d in medio reſiſtente retardatur in e eſt ut ſumma vis Ce & reſiſtentiæ CO, id eſt ut Oe; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus CE, Oe proportionales arcus CB, OB; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum CB & OB; & ([u]) propterca ſi ſumantur arcus toti AB, aB in eâdem ratione, corpora D, d ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & a motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis BA, Ba proportionales ſunt arcuum partes quælibet BD, Bd vel BE, Be quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velociſſimus in medio reſiſtente non incidit in punctum infimum C, ſed ([x]) reperitur in puncto illo O, quo arcus totus deſcriptus aB biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad a, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo à B ad O.

PRO-

(s) * *Simul deſcribentur.* Quia enim eſt ſemper C B ad O B, ut C D ad O d; evaneſcente arcu O d, evaneſcet etiam arcus C D, ſeu punctum d cum O, & D cum C ſimul coincident.

(t) * *In eâdem ratione.* Sunt enim velocitates, ut ſpatia dato temporis momento deſcripta, tam in medio reſiſtente quam in medio non reſiſtente (11.)

(u) * *Et propterea.* Si ſumatur arcus A C æqualis C B, & deinde arcus a B ad arcum A B in datâ ratione O B ad C B; corpora D & d ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & a motum omnem ſimul amittent. Nam cum ſit ſemper arcus C E ad O e ut C B ad O B, ſeu ut C A ad O a, ubi arcus C E æqualis evadet arcui C A, fiet quoque arcus O e æqualis arcui C a; & quia motus in medio non reſiſtente extinguitur in A, ob C A = C B; in medio reſiſtente extinguetur quoque in a, eo quod velocitates in locis E, e & A, a ſint in datâ ratione.

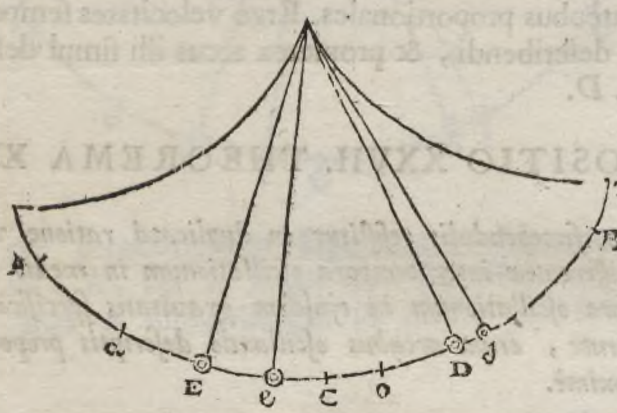
(x) * *Sed reperitur in puncto illo O, quo &c.* Nam ratio velocitatum in mediis reſiſtente & non reſiſtente eſt ſemper

eadem

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum funependulorum, quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in cycloide sunt Isochronæ.

(y) Nam si corpora duo, à centris suspensionum æqualiter distantia oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus



eadem in punctis correspondentibus ut in d & D, in O & C, in e & E; sed corporis in medio non resistente oscillantis velocitas maxima est in loco infimo C, & iisdem gradibus retardatur in ascensu, quibus antea accelerabatur in descensu; quare motus velocissimus in medio resistente reperitur in O, & iisdem deinde gradibus retardatur in ascensu, quibus ante accelerabatur in descensu.

(y) * *Nam si corpora duo*, exempli causâ B & D, *à centro suspensionis æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales* B a, D e, *& velocitates in arcuum partibus correspondentibus*, seu in arcuum B a, D e quadrantibus, partibus tertiis &c., *sint ad invicem ut arcus toti* B a, D e: *resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus à gravitate oriundis* (secundum tangentes cycloidis agentibus) *quæ sint ut iidem arcus* B a, D e, *auferantur* dum corpus descendit, *vel addantur* dum corpus ascendit, *hæ resistentiæ; erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa*, dato temporis momento genita, *sint ut hæ differentiæ vel summæ* (18), *velocitates semper erunt ut arcus toti* B a, D e: *igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eâdem ratione. Sed in principio motûs, ubi corpora incipiunt* è locis B, D *descendere & arcus illos* B a, D e *describere*, ideoque ubi resistentia nulla est, *vires sunt arcubus illi proportionales.* Vires igitur, & velocitates, & arcus descripti, ac proinde & arcus describendi, manent semper in datâ ratione. Quare corpora duo 179.

 simul

arcus toti; reſiſtentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde ſi viribus motricibus à gravitate oriundis, quæ ſint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ reſiſtentiæ, erunt differentiæ vel ſummæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa ſint ut hæ differentiæ vel ſummæ, velocitates ſemper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, ſi ſint in aliquo caſu ut arcus toti, manebunt ſemper in eâdem ratione. Sed in principio motus, ut corpora incipiunt deſcendere & arcus illos deſcribere, vires, cum ſint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates ſemper erunt ut arcus toti deſcribendi, & propterea arcus illi ſimul deſcribentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus funependulis reſiſtitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oſcillationum in medio reſiſtente ac tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ medio non reſiſtente, erunt arcubus oſcillando deſcriptis proportionales quam proximè.

(z) Nam pendulis æqualibus in medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A, B; & reſiſtentia corporis in arcu A, erit ad

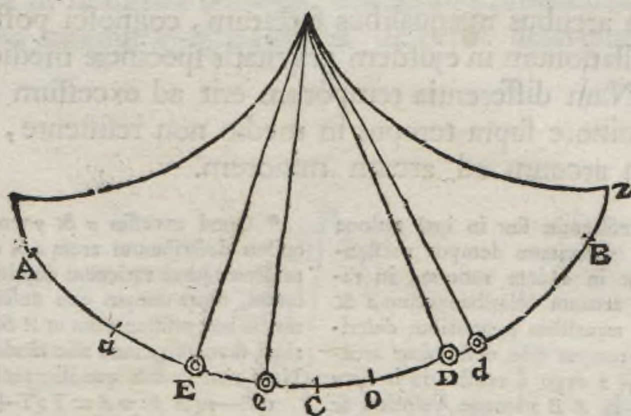
ſimul perveniunt ad punctum infimum C; & eodem modo probatur quod arcus C a, C e ſimul deſcribant.

Scholium. Newtonus in duabus propoſitionibus præcedentibus oſtendit cycloidem eſſe curvam iſochronam, (quam alii tautochronam appellant,) non tantùm in medio non reſiſtente, ſed etiam in medio quod in ratione momentorum temporis, & in medio quod ratione ſimplici velocitatis reſiſtit; Verum quænam ſit curva illa tautochrona in hypotheſi reſiſtentiæ velocitatum quadrato proportionalis non indicat. Elegantiſſimas hujuſce problematis ſolutiones dedere celeberrimi mathematici Eulerus tom. 4. Acad. Petrop. & tom. 2. Mechanicæ; necnon Clariſſ. Bernoullius in monumentis Acad. Reg. Scientiarum Pariſ. an. 1730. Novam viam quâ curvæ tautochronæ in medio quolibet reſiſtente poſſint inveniri aperuit D. Fontaine in iiſdem monumentis anni 1734.

(z) * *Nam pendulis æqualibus in medio reſiſtente deſcribantur arcus inæquales A & B,* * ad pleniorem hujus demonſtrationis evidentiam, fingatur illos arcus in totidem partes quam minimas inter ſe æquales dividi, ſingulæ in utroque arcu erunt totis arcubus proportionales dicanturque *a* & *b*, ſi medium aut non reſiſteret aut reſiſteret in ratione velocitatum, velocitates initio particularum quarum-

SECT. VI. PROP. XXVII. THEOR. XXII.

ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus B, in duplicatâ ratione velocitatum, id eſt, ut AA ad BB, quam proximè. Si reſiſtentia in arcu B eſſet ad reſiſtentiam in arcu A ut A B ad A A, tempora in arcubus A & B forent æ-



qualia; per propoſitionem ſuperiorem. Ideoque reſiſtentia A A in arcu A, vel A B in arcu B, efficit exceſſum temporis in arcu A ſupra tempus in medio non reſiſtente; & reſiſten-

rumvis correſpondentium *a* & *b*; forent ut arcus ipſi *A* & *B*; At in medio reſiſtente in ratione duplicatâ velocitatis paulo diverſa erit hæc velocitatum ratio, ſed propter exiguam rationem reſiſtentiæ ad velocitatem, negligi poterit hæc differentia, & ſupponi poteſt velocitates manere in ratione arcuum quam proximè; quod ſi ita ſupponatur *reſiſtentia corporis in* quovis *puncto arcus A erit ad reſiſtentiam corporis in parte correſpondente arcus B*, ſicut quadrata velocitatum in punctis illis correſpondentibus eorum arcuum, id eſt ut *quadrata ipſorum arcuum A A & B B quam proximè.* Deſignetur vero velocitas initio arcus *a* per $v A$, & initio arcus *b* per $v B$. Deſignetur porro reſiſtentia initio arcus *a* per $m\,A\,A$, & reſiſtentia initio arcus *b* per $m\,B\,B$; In medio non reſiſtente tempuſcula quibus ſingulæ particulæ *a* & *b* deſcribentur erunt æqualia, (per Prop. II. lib. 1.) deſignentur verò per *T*; Cum ergo in medio reſiſtente propter velocitatem imminutam longius fiat tempus in inversâ ratione velocitatum ut *x* exceſſus ille tempuſculi quo arcus *a* deſcribitur in medio reſiſtente ſupra tempuſculum quo idem arcus in medio non reſiſtente percurritur habebiturque ex hypotheſibus $v A - m\,A\,A : v A = T : T + x$. 179.

Ut inveniatur ratio hujus exceſſus *x* ad exceſſum tempuſculi quo arcus deſcribitur in medio reſiſtente ſecundum Legem duplicatam velocitatis, ſupra tempuſculum *T*, quo idem arcus in medio non reſiſtente percurritur; ſupponatur arcum B in tali medio deſcribi ut reſiſtentia in punctis *a* arcûs *A*, ſit ad reſiſtentiam in punctis correſpondentibus *b* arcûs *B*, ſicut *A* eſt ad *B*, ideoque ſicut velocitates initio arcuum illorum, ſive cum reſiſtentia in *a* ſit $m\,A\,A$ reſiſtentia in *b* fingatur eſſe $m\,A\,B$, cùm

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT.VI. PROP. XXVII. THEOR. XXII.

refiftentia B B efficit exceffum temporis in arcu B fupra tempus in medio non refiftente. Sunt autem exceffus illi ut vires efficientes A B & B B quam proximè, id eft, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex ofcillationum temporibus, in medio refiftente, in arcubus inæqualibus factarum, cognofci poffunt tempora ofcillationum in ejufdem gravitatis fpecificæ medio non refiftente. Nam differentia temporum erit ad exceffum temporis in arcu minore fupra tempus in medio non refiftente, ut (b) differentia arcuum ad arcum minorem. *Co-*

cùm ergo refiftentiæ fint in ipsâ ratione velocitatum, velocitates demptis refiftentiis manebunt in eâdem ratione, in ratione nempe arcuum defcribendorum a & b, qui ergo æqualibus temporibus defcribentur, fed tempus quo defcribitur arculus a eft $T + x$ ergo fi refiftentia in arcu B, five b fit $m\,A\,B$ ideoque velocitas fit $v\,B - m\,A\,B$ tempus quo defcribetur arcus b erit etiàm $T + x$.

Cum autem reverâ refiftentia initio arcus b non fit $m\,A\,B$ fed $m\,B\,B$, fi y fit exceffus tempufculi in quo b defcribitur in medio refiftente juxta quadrata velocitatum fupra tempus quo idem arcus in medio non refiftente percurritur, erit tempus $T + x$ ad tempus $T + y$ reciproce ficut velocitas $v\,B - m\,A\,B$ quæ fupponebatur, ad velocitatem $v\,B - m\,B\,B$, eritque ideo $v\,B - m\,B\,B$ ad $v\,B - m\,A\,B = T + x$, ad $T + y$, cum ergo fubftractio quantitatum $m\,B\,B$, $m\,A\,B$ ex velocitate $v\,B$ producat exceffus x & y fupra tempus T, oportet ut illæ quantitates $m\,B\,B$, $m\,A\,B$, fint reciprocè ut x & y, fed $m\,A\,B$ & $m\,B\,B$ funt ut A ad B, ergo A eft ad B, ficut x eft ad y, ideoque exceffus x temporis arcus A in medio refiftente in duplicatâ ratione velocitatis fupra tempus in eodem arcu A in medio non refiftente, eft ad exceffum y temporis arcus B in eodem medio fupra tempus in eodem arcu B in medio non refiftente, ut arcus A ad arcum B, cumque idem ratiocinium in omnibus arcubus quamminimis a & b inftitui poffit, fummæ omnium exceffuum tempufculorum in arcu A, erit ad fummam omnium exceffuum tempufculorum in arcu B ut A ad B. Q. E. D.

* Quod exceffus x & y tempufculorum quibus defcribuntur arcus a & b, in medio refiftente juxta rationem duplicatam velocitatum, fupra tempus quo defcriberentur in medio non refiftente fint ut A & B, ex fuperiori demonftratione alio modo erui poteft. Nam manentibus quæ illic pofueramus eft.

$v\,A - m\,A\,A : v\,A = T : T + x$ eft etiam fimili ratione $v\,B - m\,B\,B : v\,B = T : T + y$ & dividendo in utraque proportione fit

$$v\,A - m\,A\,A : m\,A\,A = T : x$$
$$v\,B - m\,B\,B : m\,B\,B = T : y.$$

Sed ob exiguitatem refiftentiæ velocitatis refpectu affumi poteft $v\,A - m\,A\,A$ pro $v\,A$, & $v\,B - m\,B\,B$ pro $v\,B$, unde eft quam proximè.

$$v\,A : m\,A\,A = T : x$$

$v\,B : m\,B\,B = T : y$ & reducendo priores rationes utriufque proportionis ad minores terminos.

$$v : m\,A = T : x$$

$v : m\,B = T : y$ & viciffim

$$v : T = m\,A : x$$

$v : T = m\,B : y$, unde eft

$m\,A : x = m\,B : y$, ideo viciffim

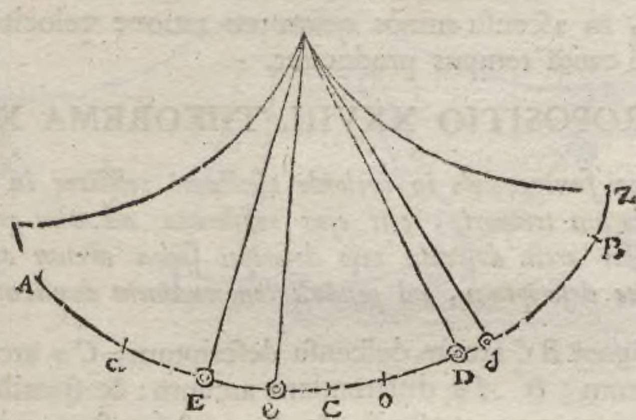
$m\,A : m\,B = x : y$, fed $m\,A : m\,B = A : B$, ideoque $A : B = x : y$. Ideoque exceffus temporum in medio refiftente in duplicatâ ratione velocitatum, fupra tempora in medio non refiftente in arcubus inæqualibus funt ut illi arcus.

(b) * *Differentia temporum erit ad exceffum temporis in arcu minore fupra tempus in medio non refiftente ut differentia arcuum ad arcum minorem* †.

* Tempus per arcum A eft $T + x$, tempus per arcum minorem B, eft $T + y$, ergo differentia temporum $T + x - T - y = x - y$,

Corol. 2. (c) Oscillationes breviores sunt magis isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente, quàm proximè. Earum verò quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulò majora, (d) propterea quòd resistentia in descensu corporis quâ tempus producitur, (e) major sit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quàm resi-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVII. THEOR. XXII.



$x - y$, & excessus temporis in minore arcu supra tempus in medio non resistente est y juxta denominationes notæ superioris, sed ex Theoremate est $x : y = A : B$ ergo dividendo $x - y : y = A - B : B$, hoc est *differentia temporum est ad excessum &c.*

(c) * *Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quam proximè.* * Brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quàm proximè; sit A arcus major, B minimus, inventum est (in nota a) quod erat $vA - mAA : vA = T : T + x$, & etiam quod erat $vB - mBB : vB - mAB = T + x : T + y$, unde per compositionem rationum invenitur $v^2AB - mvAAB - mvABB + m^2AABB$ (sive $\overline{v^2AB - mv\overline{A^2B}} \times \overline{1 - \frac{mB}{v}}$) ad $v^2AB - mvA^2B = T : T + y$, itaque in primo termino neglecto $- \frac{mB}{v}$ (quod infinitè parvum supponitur ob exiguitatem arcus B ut & quantitatis m respectu v) fiet $v^2AB - mvAAB : v^2AB - mvAAB = T : T + y$; est ergo $T = T + y$, sive tempus in medio non resistente idem ac in medio resistente quàm proxime. 179.

Sed oscillationes in medio non resistente sunt Isochronæ, hinc ergo Oscillationes breviores in medio resistente ad has quàm proxime accedentes cæteris sunt magis Isochronæ. Q. E. D.

(d) * *Propterea quod resistentia in descensu* &c. Quo major est resistentia, eò minor fit, cœteris paribus, corporis descendentis velocitas, & ideo, manente descensûs longitudine, tempus per resistentiam producitur; & contra, quò major est resistentia, eò citius extinguitur velocitas corpori insita in ascensu.

(e) * *Major sit pro ratione longitudinis.*

resistentia in ascensu subsequente quâ tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quàm longarum nonnihil produci videtur per motum medii. (f) Nam corporibus tardescentibus paulò minus resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulò magis quàm iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem à corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minns cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

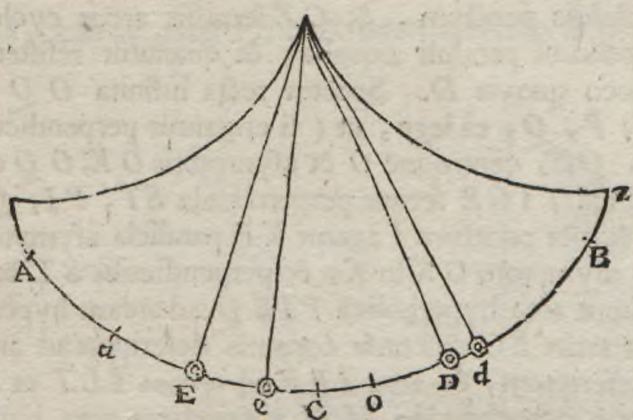
Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcûs descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

Designet BC arcum descensu descriptum, Ca arcum ascensu descriptum; & Aa differentiam arcuum: & stantibus quæ in propositione XXV. constructa & demonstrata sunt, erit vis, quâ corpus oscillans urgetur in loco quovis D, ad vim resistentiæ ut

nit. Longitudo in descensu descripta semper major est quàm longitudo descripta in ascensu subsequente, si medium resistit; cùm longitudines illæ in medio non resistente sint æquales (92. lib. I.).

(f) * *Nam corporibus tardescentibus*, seu quorum velocitas continuo decrescit, ut fit in corporum ascensu, paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis; & corporibus acceleratis, seu descendentibus, paulò magis resistitur quàm iis quæ uniformiter progrediuntur. In priore enim casu, medium eo quem à corporibus accepit motu, quemque aliquandiu ob inertiam materiæ conservat, in eamdem plagam pergit cum corporibus, & ob validiorem ab initio motûs continue decrescentis acceptam impressionem magis agitatur, ac proinde magis conspirat cum corporibus motis, minoremque iis resistentiam objicit. At in secundo casu cùm motus perpetuo acceleretur, medium ex prioribus ictibus non satis velocem motum accepit, & ideo ejus celeritas novis impulsibus continuo augenda est ut possit cum corporibus motis conspirare; hincque corporibus acceleratis resistit magis quàm uniformiter progredientibus. Pendulis igitur in descensu magis resistit medium, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur. Nam quò major est resistentia in descensu, & minor in ascensu, eo magis producitur tempus, ut supra dictum est.

ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui (g) semissis est differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis, quâ corpus oscillans urgetur in cycloidis principio seu puncto altissimo, id (h) est, vis gravitatis, DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVIII. THEOR. XXIII.



erit ad resistentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id est (si arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, seu (i) dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

PRO-

(g) * *Qui semissis est differentiæ illius Aa.* Nam (*per hyp.*) arcus CA æqualis est arcui CB, & (*per cor. prop.* XXV.) arcus Oa æqualis est arcui OB; quare CA — Oa, seu Aa — CO = CB — OB = CO, & hinc Aa = 2 CO, ac CO = ½ Aa.

(h) * *Id est vis gravitatis.* In cycloidis principio sive puncto altissimo tangens cycloidis est in directione gravitatis, & idcirco vis in cycloide æqualis est vi gravitatis in illo puncto, ut patet ex *cor. prop.* LI. *lib.* 1. 179.

(i) * *Seu dupla penduli longitudo* (462. lib. 1.).

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXIX. Probl. VI.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit $B\,a$ arcus oscillatione integrâ descriptus, sitque C infimum cycloidis punctum, & CZ semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis D. Secetur recta infinita $O\,Q$ in punctis O, S, P, Q, eâ lege, ut (si erigantur perpendicula OK, ST, PI, QE, centroque O & asymptotis $O\,K$, $O\,Q$ describatur hyperbola $TIGE$ secans perpendicula ST, PI, QE in T, I & E, & per punctum I agatur KF parallela asymptoto $O\,Q$ occurrens asymptoto $O\,K$ in K, & perpendiculis $S\,T$ & QE in L & F) fuerit area hyperbolica $PIEQ$ ad aream hyperbolicam $PITS$ ut arcus BC descensu corporis descriptus ad arcum $C\,a$ ascensu descriptum, & area IEF ad aream ILT ut $O\,Q$ ad $O\,S$. Dein perpendiculo $M\,N$ abscindatur area hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus CZ ad arcum BC descensu descriptum. Et si perpendiculo $R\,G$ abscindatur area hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto descriptum; erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}\,IEF - IGH$ ad aream $PINM$.

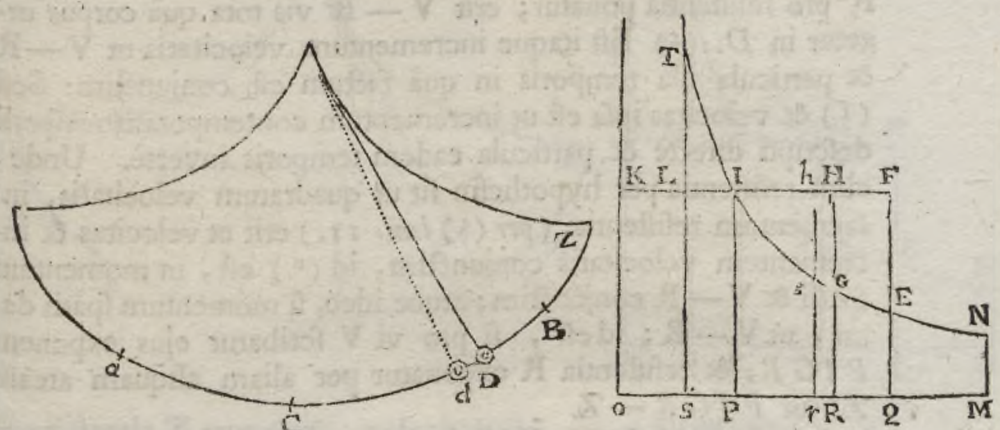
Nam cùm vires à gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D, a urgetur, (k) sint ut arcus $C\,Z$, $C\,B$, CD, $C\,a$, & (l) arcus illi sint ut areæ $PINM$, $PIEQ$, $PIGR$, $PITS$; exponantur tum arcus tum vires per has areas respectivè. Sit insuper $D\,d$ spatium quàm minimum à corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam $R\,G\,g\,r$ parallelis $R\,G$, $r\,g$ comprehensam; & producatur

$r\,g$

(k) * *Sint ut arcus &c.*, per demonstrata in prop. LI. & Cor. 2. prop. LII. lib. I.

(l) * *Et arcus illi sint ut areæ*, per constructionem.

rg ad h, ut sint $GHhg$, & $RGgr$, contemporanea (m) arearum IGH, $PIGR$ decrementa. Et (n) areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, seu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$, seu



$Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad RG; ideoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR \times GR$ seu (o) $OP \times PI$, hoc est (ob (p) æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$

(m) * *Arearum IGH, PIGR decrementa.* Cum enim corpus è loco D descendit in arcu DC, decrescit area PIGR huic arcui proportionalis, & cum eâ decrescit quoque area IGH.

(n) * *Et areæ &c.* Nam, ob datas OQ, & IEF, decrementum areæ $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$, sumptis duorum terminorum fluxionibus, invenitur æquale $\frac{Rr}{OQ}IEF - GHhg$; & ideo, mutatis signis, ejusdem areæ incrementum est $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, seu &c. 179.

(o) * *Seu $OP \times PI$.* Per theor. 4. de hyperbolâ.

(p) * *Ob æqualia &c.* Cùm sit $HG = HR - GR$, erit $OR \times HG = OR \times HR - OR \times GR$; sed $OR \times HR$ æquale est rectangulo $ORHK$, & (*per theor. 4. de hyp.*) $OR \times GR$ æquale est rectangulo $OPIK$. Quare $OR \times HG = ORHK - OPIK = PIHR = PIGR + IGH$.

$PIHR$ & $PIGR+IGH$) ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ dicatur Y, atque areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ detur, (q) erit incrementum areæ Y ut $PIGR-$Y.

Quod si V designet vim à gravitate oriundam, arcui describendo CD proportionalem, quâ corpus urgetur in D, & R pro resistentia ponatur; erit V — R vis tota quâ corpus urgetur in D. (r) Est itaque incrementum velocitatis ut V — R & particula illa temporis in quâ factum est conjunctim: Sed (s) & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directè & particula eadem temporis inversè. Unde, cùm resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (*per* (t) *lem.* 11.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id (u) est, ut momentum spatii & V — R conjunctim; atque ideo, si momentum spatii detur, ut V — R; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $PIGR$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut $PIGR-$Z.

Igitur areâ $PIGR$ per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione $PIGR-$ Y,

(q) * *Erit incrementum areæ Y ut PIGR — Y.* Quoniam enim (hyp.) est $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH=Y$, & (ex demonstratis) incrementum areæ $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ est ad decrementum (*ex hyp.*) datum $RGgr$, ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$, seu $PIGR-Y$, ad datum rectangulum $OPIK$; manifestum est quod incrementum areæ Y sit ad $PIGR-Y$ in datâ ratione, nimirum in ratione decrementi dati $RGgr$ ad rectangulum datum $OPIK$.

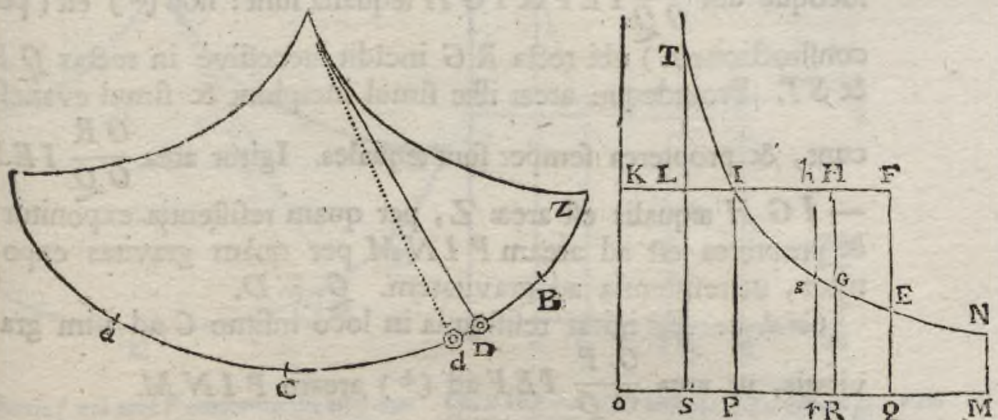
(r) * *Est itaque incrementum velocitatis, ut &c.* (18.).

(s) * *Sed & velocitas ipsa est &c.* (11).

(t) * *Per Lemma* II. casu 5°. idque statim apparet: nam si velocitas dicatur v, cum sit R ut vv, erit dR ut $2vdv$, seu ut vdv.

(u) * *Id est, ut momentum spatii &c.* Quia (ex dem.) velocitatis incrementum est ut $V-R$ & momentum temporis conjunctim, velocitas autem ipsa ut incrementum spatii directe & momentum temporis inversè; erit ex æquo, velocitas in suum incrementum ducta, ut $V-R$ & incrementum spatii conjunctim, in quâ ratione est etiam incrementum resistentiæ (*ex dem.*).

Y, & area Z in ratione $PIGR - Z$. Et propterea ſi areæ Y & Z ſimul incipiant & ſub initio æquales ſint, hæ (x) per additionem æqualium momentorum pergent eſſe æquales, & æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcentes ſimul evaneſcent. Et viciſſim, ſi ſimul incipiunt & ſimul evaneſcunt, æqualia habebunt momenta & ſemper erunt æquales: id adeo quia



ſi reſiſtentia Z augeatur, velocitas unà cum arcu illo Ca, qui in aſcenſu corporis deſcribitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis unà cum reſiſtentià ceſſat propius accedente ad punctum C, (y) reſiſtentia citius evaneſcet quàm area Y. Et contrarium eveniet ubi reſiſtentia diminuitur. Jam

(x) * *Hæ per additionem æqualium momentorum pergent eſſe æquales*, &c. Cùm enim ſemper creſcat area *Y* in ratione $PIGR - Y$, & area Z in ratione $PIGR - Z$; ſi areæ illæ *Y* & *Z* ſimul incipiant & initio æquales ſint, erunt etiam areæ $PIGR - Y$ & $PIGR - Z$ ſub initio æquales; &, ob datam incrementorum areæ *Y* & areæ *Z* ad $PIGR - Y$ & $PIGR - Z$ rationem, incrementa illa ſicut & $PIGR - Y$ ac $PIGR - Z$ manebunt ſemper æqualia, uti ſub initio. Quare etiam areæ *Y* & *Z* æqualibus itidem momentis ſubinde decreſcent & ſimul evaneſcent.

(y) * *Reſiſtentia citius evaneſcet quam area* Y, *& contrarium, &c.* Nam ſi area Z ſemper æqualis ſit areæ *Y*, ſimul incipient ſimulque evaneſcent. 179.
Incipit autem area *Y* (ut infra oſtendetur) ubi recta R G incidit in rectam Q E, & deſinit ubi recta R G incidit in rectam S T, ſuntque Q & S puncta fixa per arcuum C B, C a longitudines determinata (*per conſtr.*). Quare ſi reſiſtentia *Z* augeatur vel minuatur ita ut ceſſet in puncto arcûs C a infra vel ſupra a poſitum, citius vel tardius evaneſcet area *Z* quàm area *Y*, quia hæc non deſinit niſi ubi corpus pervenit ad locum a. Reſiſtentia igitur, ſeu area *Z* nec major nec minor eſſe poteſt quàm area *Y*, ſi ſimul incipiant & ſimul evaneſcant.

Jam verò area Z incipit definitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio motûs ubi arcus CD arcui CB æquatur & recta RG incidit in rectam QE, & in fine motus ubi arcus CD arcui Ca æquatur & RG (z) incidit in rectam ST. Et area Y seu $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ incipit definitque ubi nulla est, ideoque ubi $\frac{OR}{OQ}IEF$ & IGH æqualia sunt: hoc (a) est (per constructionem) ubi recta RG incidit successivè in rectas QE & ST. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH$ æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ}IEF$ ad (b) aream $PINM$.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum $PIGR - Y$) (c) evadit nullum.

Corol.

(z) * *Incidit in rectam S T.* Hæc patent per constructionem, quâ areæ P I E Q, P I G R, P I T S factæ sunt arcubus C B, C D, C a proportionales.

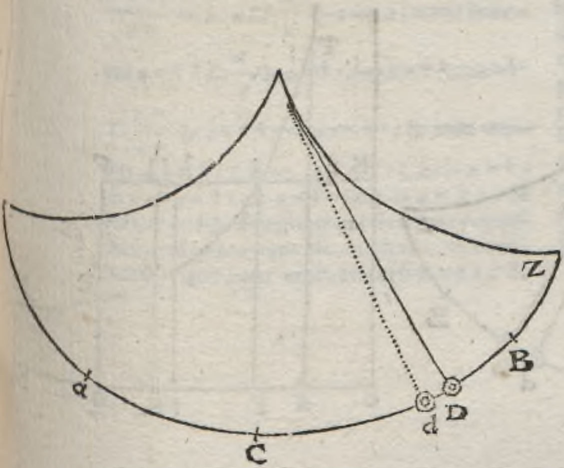
(a) * *Hoc est (per constructionem) ubi &c.* Ubi enim *Y* evanescit, fit quoque $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH = 0$, & ideo $\frac{OR}{OQ}IEF = IGH$; hoc autem contingit ubi fit $IEF : IGH = OQ : OR$, quod evenit primo ubi recta R G incidit in rectam Q E & incipit area *Y*. Tunc enim $IEF = IGH$ & $OQ = OR$ ideoque $IEF : IGH = OQ : OR$. Est enim $\frac{OR}{OQ}IEF = IGH$, quando fit $OR = OS$ & $IGH = ILT$: nam cùm (*per constr.*) fit area I E F ad aream I L T ut O Q ad O S, si ponatur $OR = OS$, fiet $ILT = IGH$, eritque area I E F ad aream I G H ut O Q ad O R, & hinc $\frac{OR}{OQ}IEF = IGH$. Est autem $OR = OS$, ubi recta R G incidit in rectam S T, & area *Y* definit ibidem.

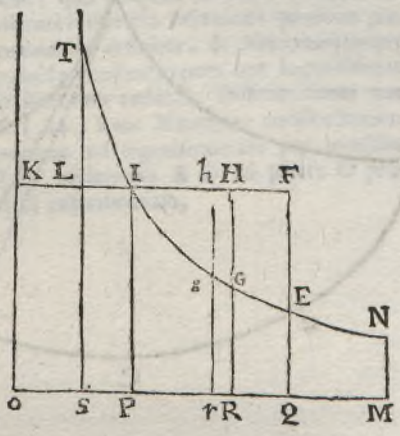
(b) * *Ad aream PINM.* Nam evanescente arcu C D, evanescit ipsi proportionalis area P I G R, & hinc evanescit etiam area I G H, fitque $OR = OP$, atque proinde $\frac{OR}{OQ}IEF - IGH = \frac{OP}{OQ}IEF$.

(c) * *Evadit nullum.* Momentum areæ *Y* est ut $PIGR - Y$ (*ex dem.*), id est, ut $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ}IEF = PIHR = \frac{OR}{OQ}IEF$. Quâ propter momentum areæ *Y* nullum fit; & ideo resisten-

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicatâ ratione resistentiæ, & ipso motûs initio æquatur velocitati corporis in eâdem cycloide sine (d) omni resistentiâ oscillantis.

Cæ-





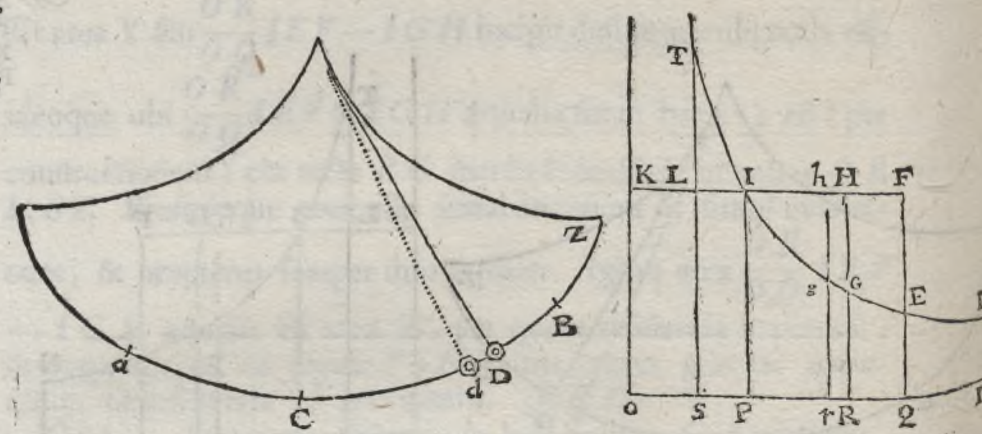
stentia (cui area Y proportionalis est) maxima evadit (48), ubi est $PIHR - \frac{OR}{OQ} IEF = 0$, seu ubi $PIHR = \frac{OR}{OQ} IEF$, ac proinde ubi area PIHR est ad aream IEF ut OR ad OQ.

(d) * *Sine omni resistentiâ oscillantis.* Quoniam velocitatis quadratum in loco quovis D est ut resistentia, seu ut area Y in medio resistente; & ut $CB^2 - CD^2$ (*per prop. LII. lib. I.*) seu ut $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2$ in medio non resistente; si velocitates illæ dicantur v, V, sintque C & E quantitates constantes, erit $vv = C \times Y$, & $VV = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$. Et quia initio motûs, dum corpus est in B, velocitates illæ æquales sunt, ob resistentiam respectu vis à gravitate oriundæ evanescentem; erit initio motûs $C \times Y = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$; sed initio motûs est Y, seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = \frac{OR}{OQ} IEF - IEF + QR \times FE = $ 179.

$\frac{OR \times IEF - OQ \times IEF + OQ \times QR \times FE}{OQ} = \frac{QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF}$, coincidente nimirum GH cum EF, & QR seu HF evanescente. Et similiter initio motus est $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2 = \overline{PIEQ + PIGR} \times \overline{PIEQ - PIGR} = \overline{2PIEQ - QR \times QE} \times \overline{QR \times QE} = 2PIEQ \times QR \times QE$, neglecto termino evanescente $QR^2 \times QE^2$. Quare erit initio motus $\frac{C \times QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF} = E \times QR \times QE \times 2PIEQ$, & ideo $C : E = 2PIEQ \times QE : \frac{\overline{OQ \times FE - IEF}}{OQ}$; unde, cum sit semper $vv : VV = C \times Y : E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$, erit quoque $vv : VV = 2PIEQ \times QE \times \frac{OR}{OQ} \overline{IEF - IGH} : \frac{\overline{OQ \times FE - IEF}}{OQ} \times \overline{\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2}$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXIX. PROBL. VI.

Cæterùm (e) ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc propositionem inveniendæ sunt, visum est propositionem sequentem subjungere.



Innotescet igitur velocitas in medio resistente per inventam ipsius rationem ad velocitatem in medio non resistente in singulis locis.

(e) * *Cæterùm ob difficilem calculum &c.* Sit $OP = a$, $PI = FQ = b$, $OS = x$, & ideo $ST = \frac{ba}{x}$, $SP = LI = a - x$, & $LT = \frac{ba}{x} - b$. Deinde $OQ = z$, & hinc $QE = \frac{ba}{z}$, $PQ = FI = z - a$, & FE $b - \frac{ba}{z}$. Et erit areæ PIEQ elementum $= \frac{badz}{z}$, areæ PITS elementum $= -\frac{badx}{x}$; & inde area $PIEQ = baL.z + Q$ *const.*; & quia area illa evanescit ubi est $PQ = z - a = o$, seu ubi $z = a$, invenitur constans $Q = -baL.a$, atque adeo area $PIEQ = baL.z - baL.a = baL.\frac{z}{a}$. Simili modo reperitur area $PITS = baL.\frac{a}{x}$. Sit jam arcus BC ad arcum Ca, ut m ad 1; & erit (*per constr.*) $m : 1 = baL.\frac{z}{a} : baL.\frac{a}{x} = L.\frac{z}{a} : L.\frac{a}{x}$, ac proinde $L.\frac{z}{a} = mL.\frac{a}{x} = L.\frac{a^m}{x^m}$, atque $\frac{z}{a} = \frac{a^m}{x^m}$, & $z = \frac{a^{m+1}}{x^m}$.

Porro ex superioribus denominationibus invenitur areæ IEF elementum $= bdz - \frac{badz}{z}$, & inde area ipsa $IEF = bz - baLz + Q$ *const.* quæ cùm sit o ubi $FI = z - a$ evanescit fitque $z = a$, est $Q = -ba + baL.a$, ideoque $IEF = baL.\frac{a}{z} + bz - ba$; & similiter habetur area $ILT = baL.\frac{a}{x} + bx - ba$. Sed (*per constr.*) area IEF est ad aream ILT ut OQ ad OS; seu ut z ad x: quare $z : x = baL.\frac{a}{z} + bz - ba$

$-ba : baL\frac{a}{x} + bx - ba$, & dividendo per b, ac loco z ſcribendo ipſius valorem $\frac{a^{m+1}}{x^m}$, fit $a^{m+1} : x^{m+1} = a\,L.\frac{x^m}{a^m} + \frac{a^{m+1}}{x^m} - a : aL.\frac{a}{x} + x - a$; unde habetur $a^{m+2}\,L.\frac{a}{x} + a^{m+1}x - a^{m+2} = ax^{m+2}\,L.\frac{x^m}{a^m} + a^{m+1}x - ax^{m+1}$; & inde eruitur $mx^{m+1}Lx - mx^{m+1}La + a^{m+1}Lx - x^{m+1} = a^{m+1}L.a - a^{m+1}$. Si itaque ex hâc æquatione per ſerierum regreſſum, vel quâcumque alia methodo, determinetur valor x per arbitrariam lineam a, & deinde per æquationem $z = \frac{a^{m+1}}{x^m}$ inveniatur valor ipſius z; *Newtoniana* conſtructio ad calculum logarithmorum revocabitur.

Scholion. *Hermannus* prop. 73. & 74. lib. 2. *Phoronomiæ* geminam conſtructionem dedit, quâ corporis in curvâ qualibet oſcillantis reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis definitur, & *Newtonianam* pro cycloide conſtructionem ope logarithmicæ ſimpliciorem reddidit. Difficile autem non eſt (44) hanc NEWTONI conſtructionem revocare ad logarithmicam per punctum N & aſymptoto K O ad partes O productâ deſcribendam. 179.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXX. THEOR. XXIV.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta a B *æqualis fit cycloidis arcui quem corpus oſcillando deſcribit, & ad ſingula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* D K, *quæ ſint ad longitudinem penduli ut reſiſtentia corporis in arcus punctis correſpondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum deſcenſu toto deſcriptum & arcum aſcenſu toto ſubſequente deſcriptum ducta in arcuum eorundem ſemiſummam, æqualis erit areæ* B K a *à perpendiculis omnibus* D K *occupatæ.*

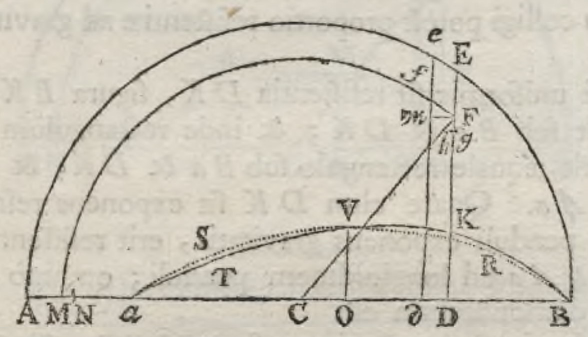
Exponatur enim tum cycloidis arcus, oſcillatione integrâ deſcriptus, per rectam illam ſibi æqualem $a\,B$, tum arcus qui deſcriberetur in vacuo per longitudinem $A\,B$. Biſecetur $A\,B$ in C, & (f) punctum C repræſentabit infimum cycloidis punctum, & (g) erit $C\,D$ ut vis à gravitate oriundâ, quâ corpus in D ſecundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli quam (h) habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem $C\,D$, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & ſi in $D\,E$ capiatur $D\,K$ in eâ ratione ad longitudinem penduli quam habet reſiſtentia ad gravitatem, erit $D\,K$ exponens reſiſtentiæ. Centro C & intervallo $C\,A$ vel $C\,B$ conſtruatur ſemicirculus $B\,E\,e\,A$. Deſcribat autem corpus tempore quàm minimo ſpatium $D\,d$, & erectis perpendiculis $D\,E$, $d\,e$ circumferentiæ occurrentibus in E & e, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, deſcendendo à puncto B, acquireret in locis D & d. Patet hoc (*per prop.* LII. *lib.* 1.). Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa $D\,E$, $d\,e$; ſitque $D\,F$ velocitas quam acquirit in D cadendo de B in medio reſiſtente. Et ſi cen-

(f) * *Et punctum C repræſentabit infimum cycloidis punctum.* Nam cycloidis punctum infimum arcum quem corpus in medio non reſiſtento oſcillando deſcribit in duas partes æquales dividit.

(g) * *Et erit C D ut vis à gravitate oriunda &c.* patet per demonſtr. prop. LI. lib. I.

(h) * *Quam habet vis in D ad vim gravitatis*, per cor. 1. prop. LI. & not. 462. lib. I.

centro C & intervallo CF deſcribatur circulus FfM occurrens rectis de & AB in f & M, (i) erit M locus ad quem deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet, & df velocitas quam acquireret in d. Unde etiam ſi Fg deſignet velocitatis momentum quod corpus D deſcribendo ſpatium quam minimum Dd, ex reſiſtentiâ medii amittit; & ſumatur CN æqualis Cg: erit N locus ad quem corpus deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet, & MN erit decrementum aſcenſûs ex velocitatis il-



lius amiſſione oriundum. Ad df demittatur perpendiculum Fm, & velocitatis DF decrementum Fg à reſiſtentiâ DK genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum fm à vi CD genitum, ut vis generans DK (k) ad vim generantem CD. Sed & (l) ob ſimilia triangula Fmf, Fgh, FDC, eſt fm ad Fm ſeu Dd ut CD ad DF: & ex æquo Fg ad Dd ut DK ad DF. Item Fh ad Fg ut DF ad CF; & ex æquo perturbatè Fh (m) ſeu MN ad Dd ut DK ad CF ſeu CM; ideò-

(i) * *Erit M locus ad quem &c.* Eamdem enim velocitatem haberet corpus in D, ac ſi ſeclusâ omni reſiſtentiâ percurriſſet ſpatium C F — C D, & ideo (per modo demonſtrata) in loco d haberet velocitatem d f, & in loco M nullam.

(k) * *Ad vim generantem C D.* Sunt enim velocitatum elementa dato temporis momento genita, ut vires generantes (13. lib. 1.)

(l) * *Ob ſimilia triangula &c.* Sunt enim anguli ad m, h, & D recti, angulus C F D duobus triangulis F D C, F h g communis, & angulus f F m æqualis angulo C F D, quia ſi ex angulis rectis m F D, f F C ſubducatur communis angulus m F C, remanebunt anguli æquales f F m, C F D. Tria igitur triangula F m f, F h g & F D C æquales angulos habent, ſuntque proinde ſimilia. 179.

(m) * *F h ſeu M N.* Cùm ſit C M æqualis C F, & C N æqualis C g ſeu C h, angulo h C g evaneſcente, eſt M N = C M — C N = C F — C h = F h.

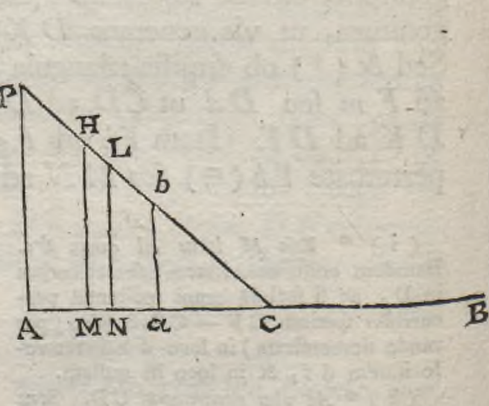
(n) ideoque ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis erit ſummæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile M erigi ſemper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu deſcriptum ſive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ (o) æquabitur ſummæ omnium $MN \times CM$, ideoque ſummæ omnium $Dd \times DK$, id eſt, areæ $BKVTa$. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege reſiſtentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa colligi poteſt proportio reſiſtentiæ ad gravitatem quam proximè.

Nam ſi uniformis ſit reſiſtentia DK, figura $BKTa$ rectangulum erit ſub Ba & DK; & inde rectangulum ſub $\frac{1}{2} Ba$ & Aa erit æquale rectangulo ſub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2} Aa$. Quare cùm DK ſit exponens reſiſtentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit reſiſtentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2} Aa$ ad longitudinem penduli; omninò ut in prop. XXVIII. demonſtratum eſt.

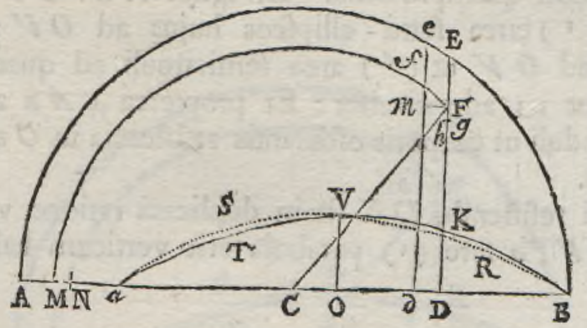
Si reſiſtentia ſit ut velocitas, figura $BKTa$ ellipſis erit quàm proximè. Nam ſi corpus, in medio non reſiſtente, oſcillatione in-

(n) * *Ideoque ſumma omnium* $MN \times CM$ *&c.* Quoniam (per modo demonſtrata) $MN \times CM = Dd \times DK$, erit ſumma omnium $MN \times CM$ æqualis ſummæ omnium $Dd \times DK$, modò ſimul incipiant ſimulque deſinant. Incipit autem ſumma omnium $Dd \times DK$ in B & deſinit in a, & ſumma omnium $MN \times CM$ incipit in A, & ideo ſi deſinat in a, erunt ſummæ illæ æquales.



(o) * *Æquabitur ſummæ &c.* Erigatur ad punctum A perpendiculum $AP = AC$, jungatur PC, & ductis per M & N ac a perpendiculis MH, NL, ab; erit ſemper $MN \times CM = MN \times HM$; ideoque ſi ordinata variabilis HM ducatur in totam longitudinem Aa, erit trapezium APba æquale ſummæ omnium $MN \times CM$ ab A ad a; ſed trapezium illud eſt $CAP - Cab = \frac{1}{2} CA^2 - \frac{1}{2} Ca^2 = \frac{1}{2}(CA + Ca) \times (CA - Ca) = \frac{1}{2} aB \times Aa$, ob $CB = CA$. Ergo &c.

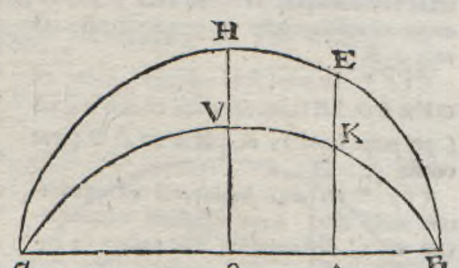
integrâ deſcriberet longitudinem *B A*, velocitas in loco quovis *D* foret ut circuli diametro *A B* deſcripti ordinatim applicata *D E*. Proinde cùm *B a* in medio reſiſtente, & *B A* in medio non reſiſtente, (p) æqualibus circiter temporibus deſcri-



bantur; ideoque velocitates in ſingulis ipſius *B a* punctis, ſint quam proximè ad velocitates in punctis correſpondentibus longitudinis *B A*, ut eſt *B a* ad *B A*; erit velocitas in puncto *D* in medio reſiſtente ut circuli vel ellipſeos ſuper diametro

B a

(p) * 180. *Æqualibus circiter temporibus deſcribantur.* Quia reſiſtentia minuendo corporis velocitatem tempus producit in deſcenſu à B ad C, illudque contrahit in aſcenſu à C ad a, longitudines B A in medio non reſiſtente & B a in medio reſiſtente, earumque longitudinum partes proportionales, æqualibus circiter temporibus deſcribuntur. Sunt autem velocitates ut ſpatia eodem temporis momento deſcripta (11); quare velocitates in partibus longitudinum B A, B a correſpondentibus ſunt quam proximè ut longitudines B A, B a, id eſt, in ratione datâ. Centro O & diametro A B deſcribatur circulus B E H a, ſitque B △ in hac figurâ ad B D in figurâ textûs, ut B a ad B A, hoc eſt, ut velocitas in loco △ in medio reſiſtente ad velocitatem in loco D in medio non reſiſtente; & ductâ



ordinatâ △ E; erit etiam; ob figurarum ſimilitudinem △ E ad D E ut B a 180.
ab B A, ideoque ut velocitas in medio reſiſtente ad velocitatem in medio non reſiſtente. Velocitas igitur in medio reſiſtente erit ſemper ut ordinata variabilis △ E,

$B\,a$ deſcripti ordinatim applicata; (q) ideoque figura $BKVTa$ ellipſis erit quàm proximè. Cùm reſiſtentia velocitati proportionalis ſupponatur, ſit $O\,V$ exponens reſiſtentiæ in puncto medio O; & ellipſis $B\,R\,V\,S\,a$, centro O, ſemiaxibus $O\,B$, $O\,V$ deſcripta, figuram $BKVTa$, eique æquale rectangulum $A\,a \times B\,O$, æquabit quamproximè. Eſt igitur $A\,a \times B\,O$ ad $O\,V \times B\,O$ ut (r) area ſemi-ellipſeos hujus ad $O\,V \times B\,O$: id eſt, $A\,a$ ad $O\,V$ ut (ſ) area ſemicirculi ad quadratum radii, ſive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11}\,A\,a$ ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ejuſdem gravitatem.

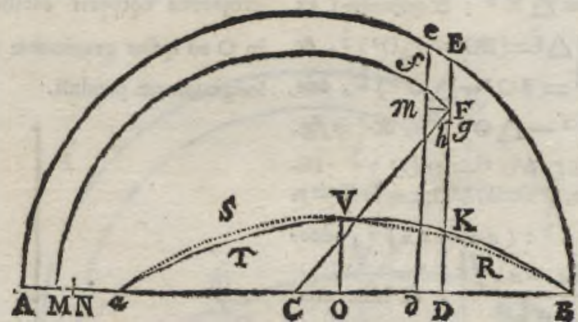
Quod ſi reſiſtentia $D\,K$ ſit in duplicatâ ratione velocitatis; figura $BKVTa$ ferè (t) parabola erit verticem habens V & axem

(q) * *Ideoque figura $BKVTa$ ellipſis erit quàm proximè.* Cùm enim (ex modò demonſtratis) velocitas in loco quovis $\triangle$ ſit ſemper ut ordinata $\triangle E$ ad circulum, & (*per hyp.*) reſiſtentia $\triangle K$ in hac figurâ, vel $D\,K$ in figura textus, ſit ſemper ut velocitas $\triangle E$, erit $\triangle K$ ut $\triangle E$; & quia $\triangle E^2 = a\triangle \times \triangle B$) ex naturâ circuli), erit etiam $\triangle K^2$ ut $a\triangle \times \triangle B$, & ideo figura $B\,K\,V\,T\,a$ ellipſis, cujus centrum O, ſemiaxes $a\,O$, & $O\,V$, ſi $O\,V$ exponat reſiſtentiam in puncto medio O axis $a\,B$.

(r) * *Ut area ſemi-ellipſeos hujus ad $O\,V \times B\,O$.* Eſt enim area illa $= A\,a \times \frac{1}{2}\,a\,B$ (*per prop. hanc*), & $\frac{1}{2}\,a\,B = B\,O$ (per conſtr.).

(ſ) * *Ut area ſemicirculi ad quadratum radii &c.* Area ellipſeos cujuſcumque eſt ad rectangulum ſub axibus in ratione datâ, nimirum in ratione areæ circuli ad quadratum diametri (250. *lib.* 1. (; circulus enim eſt ellipſis cujus ſunt axes æquales; unde area ſemi-ellipſeos $B\,K\,V\,T\,a$ eſt ad quartam partem rectanguli ſub axibus, ſeu ad rectangulum ſub ſemiaxibus $O\,V \times B\,O$, ut area ſemicirculi ad quadratum radii. Sed ſi circuli radius ſit 7, erit ſemiperipheria 22 circiter, & area ſemicirculi 7×11, ideoque area ſemicirculi ad quadratum radii ut 11 ad 7 circiter. Eſt igitur $A\,a$ ad $O\,V$ ut 11 ad 7, & proinde $O\,V = \frac{7}{11}\,A\,a$. Et propterea (*per prop. hanc*) $\frac{7}{11}\,A\,a$ eſt ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ejuſdem pondus.

(t) * *Ferè parabola erit.* Ordinata $\triangle E$ ad ſemicirculum $B\,E\,H\,a$ (*vide fig. not.* 180.) eſt ſemper ut velocitas in loco $\triangle$ in medio reſiſtente, & (ex naturâ circuli) $\triangle E^2 = a\triangle \times \triangle B$, & (*ex hyp.*) reſiſtentia $\triangle K$ eſt ut velocitatis quadratum, ſeu ut $\triangle E^2$, adeoque $\triangle K$ eſt ut rectangulum $a\triangle \times \triangle B$ ſive ut $\overline{OB + O\triangle} \times \overline{OB - O\triangle}$ hoc eſt ut $\overline{OB}^2 - \overline{O\triangle}^2$. * Sed in Parabolâ cujus vertex foret V & axis $V\,O$ differentia abſciſſarum foret ſemper ad differentiam quadratorum ordinatarum in utriuſque abſciſſæ extremo ductarum, in datâ ratione. Jam verò ſi ex K ducatur in axem perpendicularis $K\,P$, eſt $K\triangle = P\,O$ & $P\,O$ eſt differentia abſciſſarum $V\,P$ & $V\,O$, eſt $O\triangle = P\,K$ ordinatæ in P, ideoque eſt $\overline{OB}^2 - \overline{O\triangle}^2$ differentia quadratorum ordinatarum in punctis P & O, cum ergo $K\,D$ & $\overline{OB}^2 - \overline{O\triangle}^2$ ſint in datâ axem OV, (u) ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ Ba & OV quam proximè. Eſt igitur rectangulum ſub $\frac{1}{2}$ Ba & Aa æquale rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ Ba & OV, ideoque OV æqualis $\frac{3}{4}$ Aa: & propterea corporis oſcillantis reſiſtentia in O ad ipſius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ Aa ad longitudinem penduli.



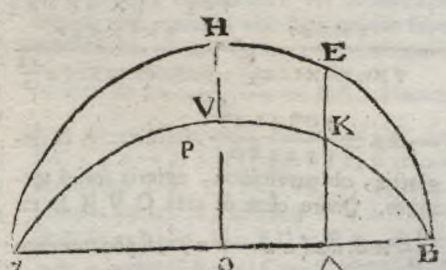
Atque has concluſiones in rebus practicis abundè ſatis accuratas eſſe cenſeo. Nam cùm ellipſis vel parabola $BRVSa$ congruat cum figura $BKVTa$ in (x) puncto medio V, hæc ſi ad partem alterutram BRV vel VSa excedit figuram illam, (y) deficiet ab eâdem ad partem alteram, & ſic eidem æqua-

datâ ratione figura B K V T a parabola erit verticem habens V & axem O V (per theor. 1. de parab.)

(u) * *Ideoque æqualis erit rectangulo ſub $\frac{2}{3}$ B a & O V quam proximè.* Nam area parabolica B K V O eſt $\frac{2}{3}$ B O × V O (*Theor.* 4. *de parab.*) & ipſius duplum, ſeu area tota B K V a eſt $\frac{2}{3}$ a B × O V.

(x) * *In puncto medio V.* Supponitur enim qnòd O V accuratè exhibeat reſiſtentiam in puncto medio O, quodque parabola vel ellipſis per punctum V deſcripta ſit.

(y) * *Deficiet ab eâdem ad partem alteram.* Quia duæ ellipſeos vel parabolæ



180.

partes B R V & a S V ſimiles ſunt & æquales, ſi reſiſtentiæ in deſcenſu à B ad O majores ſint quàm pro ratione ordinatarum D R ad ellipſim vel parabolam, ad

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXX. THEOR. XXIV.

quabitur quàm proximè (z).

PRO-

ad alteram partem minores erunt; & contra.

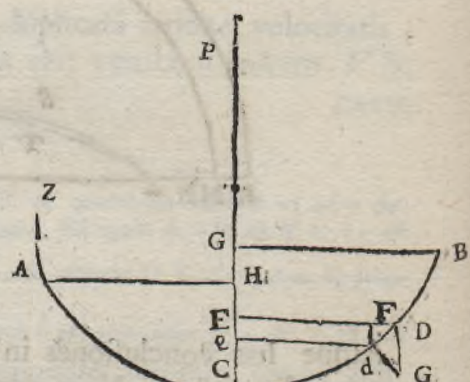
181. Sit resistentia in ratione sesquiplicatâ velocitatis, id est, (*vide fig. not.* 180.) $\triangle K$ ut $\triangle E^{\frac{3}{2}}$; & quoniam (ex naturâ circuli) $\triangle E = (BO^2 - \triangle O^2)^{\frac{1}{2}}$, & proinde $\triangle E^{\frac{3}{2}} = (BO^2 - \triangle O^2)^{\frac{3}{4}}$, erit $\triangle K$ ut $(BO^2 - \triangle O^2)^{\frac{3}{4}}$, & (*in fig. textûs*) DK ut $(BO^2 - DO^2)^{\frac{3}{4}}$. Dicantur $BO = a$, $VO = b$, $DO = x$, $DK = y$, & erit $b : y = a^{\frac{3}{2}} : (aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, ideoque $y = \frac{b(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$; & hinc areæ $OVKD$ momentum $ydx = bdx \frac{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$. Quantitas $(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$ in seriem infinitam resolvatur (551. *lib.* I.), & invenietur

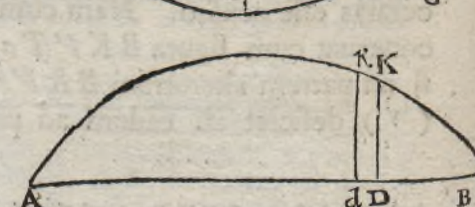
$$dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}dx - \frac{3x^2dx}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^4dx}{4 \times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3 \times 5x^6dx}{4 \times 8 \times 12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3 \times 5 \times 9x^8dx}{4 \times 8 \times 12 \times 16a^{\frac{13}{2}}} - \&c.$$

Et sumptis fluentibus

$$S.dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}x - \frac{x^3}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^5}{5 \times 4 \times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3 \times 5x^7}{7 \times 4 \times 8 \times 12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3 \times 5 \times 9x^9}{9 \times 4 \times 8 \times 12 \times 16a^{\frac{13}{2}}} - \&c. = \frac{50841a^{\frac{5}{2}}}{71680},$$

factâ $x = a$, & neglectis, ob parvitatem, cæteris seriei terminis. Quare cùm sit area $OVKD = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} \times S.dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, si ponatur $x = a$ erit area $OVKB = \frac{50841}{71680}ba$, & $2OVKB$ seu area tota $BKVTa = \frac{50841}{35840}ba = \frac{10}{7}ba$, circiter. Est itaque $\frac{10}{7}VO \times BO = Aa \times BO$, & hinc $VO = \frac{7}{10}Aa$; ac propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{7}{10}Aa$ ad longitudinem penduli.





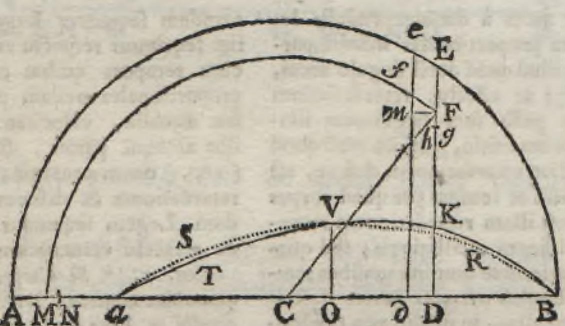
(z) * 182. *Quam proximè.* Propositionem 72. lib. 2. Phor. quæ 30$^{\text{æ}}$. hujus libri fere similis est, sed generalis, & demonstratu facilis, hic adjungemus.

Si curvæ cujusvis B C Z arcus totus A B, quem grave descensu per B C & subsequente ascensu per C A in medio resistente describit, extendatur in lineam rectam B A, & ad singula hujus rectæ puncta D erigantur perpendicula D K proportionalia medii resistentiis quas mobile in homologis curvæ B C A punctis D subit, sitque B K A curva quam punctum K perpetuo tan-

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

Oritur enim differentia illa ([a]) ex retardatione penduli per resistentiam medii, ideoque est ut retardatio tota eique proportionalis



resistentia retardans. In superiore propositione rectangulum sub rectâ $\frac{1}{2} aB$ & arcuum illorum CB, Ca differentia Aa æqualis

tangit: area curvilinea B K A B æquabitur rectangulo P C × G H ex rectâ P C, quæ gravitatem constantem exponit, in differentiam G H abscissarum G C, H C arcuum B C, C A descensu & subsequente ascensu descriptorum.

Ex punctis D, d infinitè propinquis demittantur ad P C perpendicula D E, d e, & ex puncto d ad E D perpendiculum d F; & vis gravitatis P C erit ad vim tangentialem in loco D, quâ motus corporis in curvâ acceleratur, ut D d ad F d.

* Nam ductâ D G parallela P C & G d in curvam perpendiculari, exprimat D G gravitatis actionem, exprimet D d vim Tangentialem, sed ob similitudinem Triangulorum D d G, D d F est $DG : Dd = Dd : FD$, erit ergo D d ad F d ut vis gravitatis ad vim Tangentialem, quâpropter cum D d sumatur ubique æqualis ut est actio gravitatis, ubique F d exprimet vim Tangentialem; est $Fd = Ee$, si itaque P C repræsentet vim gravitatis erit $Dd : Ee = PC$ ad vim Tangentialem, 182.

† ideoque vis illa tangentialis $= \frac{PC \times Ee}{Dd}$.

Sed corporis descendentis vis acceleratrix æqualis est excessui vis tangentialis supra resistentiam; erit igitur vis acceleratrix in loco $D = \frac{PC \times Ee}{Dd} - DK$. Ducatur hæc vis in elementum spatii D d, & fiet $PC \times Ee - DK \times Dd = v\,dv$, si velocitas in loco D sit v (18, 19); & hinc, sumptis fluentibus, habetur $PC \times GE - BKD = \frac{1}{2} vv$. Fiat $ED = BA$, & ideo $v = 0$, atque $GE = GC - CH = GH$, & erit $PC \times GH - BKAB = 0$, ac proinde $PC \times GH = BKAB$. Q. E. D.

(a) * *Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam medii.*

 * Di-

erat areæ $BKTa$. Et area illa, ſi maneat longitudo aB, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK; hoc eſt, in ratione reſiſtentiæ, (b) ideoque eſt ut longitudo aB & reſiſtentia conjunctim. Proindeque rectangulum ſub Aa & $\frac{1}{2}\,aB$ eſt ut aB & reſiſtentia conjunctim, & propterea Aa ut reſiſtentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, differentia ar-

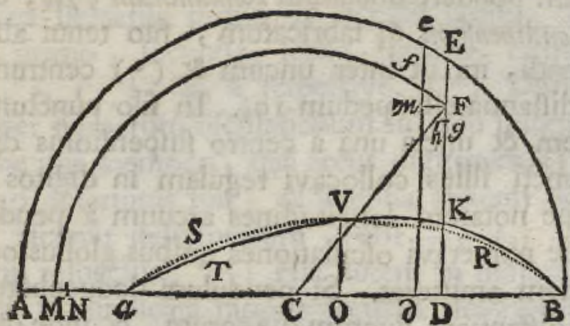
* Dividantur arcus à duobus pendulis deſcripti in partes proportionales infinitè parvas, & totum illud quod deeſt ſingulo arcui, poterit concipi ut effectus retardationum quas corpora paſſa ſunt ſingularum illarum particularum initio, ſpatium verò quod propter ſingulam retardationem deficit, eſt ut illa retardatio & tempus per quod corpus motum fuit poſt illam retardationem receptam uſque ad finem oſcillationis; ſed quoniam in oſcillationibus utut inæqualibus tempora quibus ſimiles arcuum partes deſcribuntur ſunt æqualia, in medio non reſiſtente, & in medio reſiſtente ſaltem quam proximè, (180) ſpatia quæ deficiunt propter retardationes in proportionalibus arcuum partibus receptas, ſunt ut illæ retardationes.

* *Ideo differentia arcuum eſt ut retardatio tota, eique proportionalis reſiſtentia retardans*, ſi quantitates materiæ corporum pendulorum ſint æquales, retardatio in ſingulis arcuum deſcriptorum partibus eſt ut reſiſtentia in iiſdem locis, ſed ut reſiſtentiæ ſunt in datâ quâdam Lege velocitatem ex Hypotheſi & velocitates in arcuum partibus proportionalibus ſunt in Ratione datâ, ideo reſiſtentiæ in ſingulis arcuum partibus proportionalibus ſunt in ratione datâ, ac per conſequens omnes retardationes, ſunt in eâdem ratione, ſummæ ergo retardationum erunt in eâdem ratione datâ, Ergo tota ſpatia deficientia illis retardationibus proportionalia erunt in eâdem ratione, *Differentiæ ergo inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum* in variis arcubus ab eodem corpore deſcriptis, *ſunt in Datâ Lege Reſiſtentiæ.*

183. * *Cor.* 1. Differentiæ arcuum, reſpectu arcuum deſcenſu deſcriptorum eamdem ſequuntur Legem quam reſiſtentiæ ſequuntur reſpectu velocitatum. Nam cùm tempora quibus correſpondentes & proportionales arcuum partes deſcribuntur ſint æqualia, velocitates erunt ſemper ut illæ arcuum partes, ſive ut arcus toti, (180.) quam proximè, ergo reſiſtentiæ, retardationes & differentiæ arcuum eamdem Legem ſequuntur reſpectu arcuum ac reſpectu velocitatum.

Cor. 2. * *Si Corpora pendula differant quantitate materiæ, Differentiæ arcuum ſunt directè in Lege datâ arcuum & inversè ut quantitates materiæ*: Nam eo in caſu retardationes in ſingulis arcuum partibus ſunt directè ut reſiſtentiæ & inversè ut quantitates materiæ; nam reſiſtentia motus jacturam producit, quæ motus jactura eſt factum ex retardatione & maſsâ retardatâ, (per Def. 2. lib. I.).

(b) * *Ideoque eſt ut longitudo a B & reſiſtentia conjunctim.* Area illa ſi maneat longitudo a B, augetur vel diminuitur in ratione reſiſtentiæ D K; ſi verò conſtans maneat reſiſtentia ſeu ordinata D K, ſed augeatur a B omneſque ejus partes d D in ratione totius a B augeantur, area illa augetur vel diminuitur in ratione longitudinis a B; unde ſi longitudo a B variabilis ſit & reſiſtentia ſeu ordinata D K in ſingulis longitudinum a B locis correſpondentibus augeatur vel diminuatur in datâ ratione, area B K T a augebitur vel diminuetur in ratione compoſitâ ex ratione longitudinis a B & ratione reſiſtentiæ auctæ vel diminutæ, proindeque rectangulum ſub A a & $\frac{1}{2}$ a B erit ut a B & reſiſtentia conjunctim, & propterea A a ut reſiſtentia.



arcuum in eodem medio erit ut arcus totus deſcriptus: & contra.

Corol. 2. Si reſiſtentia ſit in duplicatâ ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicatâ ratione arcûs totius: & contra.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi reſiſtentia ſit in triplicatâ vel aliâ quâvis ratione velocitatis, differentia erit in eâdem ratione arcûs totius: & contra.

Corol. 4. Et ſi reſiſtentia ſit partim in ratione ſimplici velocitatis, partim in ejuſdem ratione duplicatâ, differentia erit partim in ratione arcûs totius & partim in ejus ratione duplicatâ: & contra. Eadem erit lex & ratio reſiſtentiæ pro velocitate, quæ eſt differentiæ illius pro longitudine arcûs.

Corol. 5. Ideoque ſi, pendulo inæquales arcus ſucceſſivè deſcribente, inveniri poteſt ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcûs deſcripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi reſiſtentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his propoſitionibus, per oſcillationes pendulorum in mediis quibuſcunque, invenire licet reſiſtentiam mediorum. Aeris verò reſiſtentiam inveſtigavi per experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & (c) centrum oſcillationis globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & unciâ unâ à centro ſuſpenſionis diſtans; & è regione puncti illius collocavi regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum à pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur à perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totâque oſcillatione primâ, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſitâ, arcum digitorum fere quatuor: (d) idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motûs ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motûs partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motûs partem oſcil-

(c) * *Et centrum oſcillationis globi.* Quid ſi centrum oſcillationis & quomodo inveniri poſſit, indicavimus in ſcholio poſt notam 478. lib. I. Et ex his quæ ibi dicta ſunt, ſatis liquet in longioribus pendulis graviori globo inſtructis & filo tenui, centrum oſcillationis cum centro globi coincidere quàm proximè.

(d) * *Idem oſcillationibus 164. amiſit octavam motûs ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti* $1\frac{3}{4}$.

* Liquet (ex notâ *a* præcedente) quod differentia inter arcum deſcenſu deſcriptum & arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum ſit toti retardationi quam corpus paſſum eſt proportionalis, ideoque motui deſtructo per reſiſtentiæ actionem; aſcendat itaque corpus in fine primæ oſcillationis ad altitudinem qualemcunque, ſumaturque differentia arcûs aſcenſu deſcripti ab arcu deſcenſu primo percurſi: Secundâ oſcillatione corpus aſcendere deberet in vacuo ad eam altitudinem ad quam in fine primæ oſcillationis aſſurrexerat, & ſumatur quod deeſt in ſecundo aſcenſu ab illâ altitudine, duæ illæ differentiæ ſunt ut motus in ſingulâ oſcillatione amiſſi, earum ſumma eſt ergo ut ſumma motûs amiſſi in utraque oſcillatione, ſed duæ illæ differentiæ ſunt differentia inter altitudinem è quâ corpus primò deſcendit, & altitudinem ad quam ultimò aſſurrexit; Ergo ratiocinio ad 164. oſcillationes continuato differentia inter altitudinem è quâ corpus primò deſcendit, & altitudinem ad quam ultimò aſſurrexit, eſt ut ſumma motûs quem reſiſtentia durantibus illis 164. oſcillationibus deſtruere valuit.

oscillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, respectivè. Igitur differentia inter arcus descensu primo & ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respective. (e) Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respectivè. (f) Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum quàm proximè, in minoribus verò paulò majores quàm in eâ ratione; & propterea (*per corol. 2. prop.* XXXI. *libri hujus*) resisten-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

(e) * *Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum &c.* Exempli causâ, si in primo casu dividatur differentia $\frac{1}{4}$ per numerum oscillationum 164, habebitur $\frac{1}{656}$ differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum in una mediocri oscillatione; quia differentia $\frac{1}{4}$ ex omnibus differentiis quæ per oscillationes 164 producuntur, composita est; & quia arcus totus unâ mediocri oscillatione descriptus medius est arithmeticè inter arcum maximum fere digitorum 4. primâ oscillatione descriptum, & arcum minimum digitorum $2\frac{3}{4}$ ultimâ oscillatione descriptum, ideo arcus ille mediocris invenitur capiendo dimidium summæ arcuum $4 + 2\frac{3}{4}$, quod est $3\frac{3}{4}$, aut etiam capiendo summam arcuum dimidiorum, videlicet $2 + 1\frac{3}{4}$. Atque eodem modo de cæteris ratiocinandum est.

(f) * *Hæ autem in majoribus oscillationibus &c.* * Dividantur omnes arcuum differentiæ in oscillatione mediocri per primam, omnes illæ differentiæ erunt ut 1.; 2. 7107.; 9. 5072.; 36. 9577.; 141. 8378.; 54?. 8965.

Quadrata verò arcuum sunt ut 1, 4, 16, 64, 256, 1024, unde ex eorum numerorum inspectione liquet differentias quæ in minoribus oscillationibus observatæ sunt esse ad eas quæ in majoribus arcubus observantur in majore ratione quàm duplicatâ arcuum; In majoribus verò oscillationibus rationes illarum differentiarum ad rationem duplicatam arcuum magis accedunt, ut enim arcus in Progressione duplâ fuere sumpti, ratio duplicata arcuum proximorum est ratio 1 ad 4. jam verò 9. 5072. est non multo major 4ª. parte numeri 36. 9577., iste autem ad 4. partem numeri 141. 8378., magis accedit, propius adhuc iste accedit ad quartam partem numeri 542. 8965. Unde inter arcus magnos, motus amissos in duplicatâ fere ratione arcuum sive velocitatum sumi posse deducitur. 183.

Idem manifestius patebit si dividantur hi numeri qui arcuum differentias exprimunt per ipsorum arcuum rationes, habebuntur enim 1.; 1. 3553; 2. 3788; 4. 6197; 8. 8648; 16. 9655, qui si resistentiæ forent ut quadrata velocitatum, deberent esse ut ipsi arcus $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Sed ex ipsâ inspectione liquet minores differentias majoribus numeris exprimi quam ipsi arcus, majores verò ferè iisdem. Si verò supponeretur resistentiam non tantùm esse in ratione duplicatâ velocitatum, sed etiam partem aliquam aliun-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

ſtentia globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè; ubi tardiùs, paulò major quàm in eâ ratione.

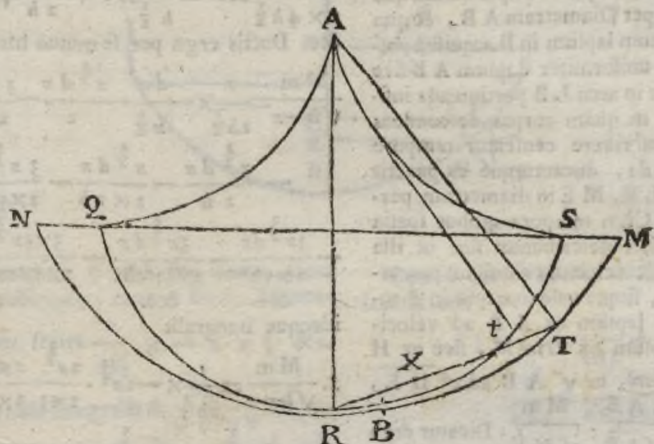
(g) Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quâvis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. (h) Cùm velocitates maximæ ſint in cycloide ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcrip-

aliunde quàm ex merâ inertiâ materiæ oriundam, eſſe ut velocitas, ideoque cùm hæ quantitates mox inventæ ſint quotientes differentiarum arcuum per velocitates diviſarum, hæ quantitates conſtarent parte conſtante & aliâ parte velocitati ſive arcui proportionatâ.

Sumatur itaque prima quantitas 1, & ordine conferatur cum 2â, tum cùm tertiâ, cum quartâ &c. ſupponaturque illas conſtare duabus partibus altera velocitati proportionata altera conſtanti, v. gr. ſit prima quantitas $1 = a + x$ ſecunda $1.3553 = 2a + x$, iis ita binatim calculatis ut eruatur valor a & x, quantitas conſtans x, in ſingulo calculo eadem non invenietur, ſed varii iſti obtinebuntur valores hoc ordine .6447; .5404; .4829; .4757; .4849, qui decreſcunt ordine quodam regulari (ultimo excepto ob aliqualem exiguum errorem), unde liquet, rationem differentiarum arcuum, non eſſe partim in ratione duplicatâ ipſorum arcuum, & partim in eorum arcuum ratione ſimplici, ſed his adjungi debere rationem aliquam intermediam quàm ſeſquiplicatam arcuum aſſumit *Newtonus*, quod cum experimentis propiùs conſentit.

(g) * *Deſignet jam V velocitatem maximam*, ſive quantitatem velocitati maximæ proportionalem, *in oſcillatione quavis, ſintque A, B, C quantitates* conſtantes, quarum valores per experimenta determinabuntur; & fingamus quòd reſiſtentia, ſeu differentia arcuum ipſi proportionalis (*prop.* XXXI.), ſit partim ut velocitas, partim ut velocitatis quadratum, & partim ut velocitatis dignitas cujus index $\frac{3}{2}$, & proinde *ſupponamus quod arcuum differentia ſit* $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$ *&c.*

(h) * *Cùm velocitates maximæ &c.* Corpus pendulum in medio non reſiſtente oſcilletur in cycloide SBRQ, ſitque A punctum ſuſpenſionis, & R punctum infimum ac medium arcûs totius SRQ. Centro A & radio AR deſcribatur arcus circuli MTRN, in quo corpus idem, vel aliud ſimile & æquale oſcilletur in eodem medio non reſiſtente. Sit TR arcus circularis æqualis arcui cycloidis tR, & RB arcus quàm minimus cycloidi & circulo communis (465. *lib.* I.). Jam ſi corpus è locis T & B ſucceſſivè cadat in circulo, erit ipſius velocitas maxima in R deſcenſu per arcum TR acquiſita, ad velocitatem deſcenſu per arcum BR acquiſitam, ut chorda TXR ad chordam arcûs RB (88. lib. I.), aut, quod idem eſt (*per lemma VII. lib.* I.), ut chorda TXR ad arcum cycloidis BR; & velocitas deſcenſu per arcum BR acquiſita in R eſt ad velocitatem maximam deſcenſu per arcum cycloidis tBR acquiſitam, ut arcus BR ad arcum tBR ſeu arcum circuli æqualem TBR (*per demonſtr. prop. LI. lib.* I.). Quare, ex æquo, velocitas maxima in R deſcenſu per arcum circularem TBR acquiſita eſt ad velocitatem maximam in R deſcenſu per cycloidis arcum tBR acquiſitam, ut chorda RT ad arcum tBR vel TBR. Sunt autem velocitates maximæ in medio reſiſtente velocitatibus maximis in medio non reſiſtente proportionales quàm proximè, & in puncto medio arcuum qui oſcillatione integrâ deſcribuntur, ferè contingunt (180). Paribus igitur arcubus, velocitates maximæ in cycloide ſunt ad velocitates maximas in circulo, ut ſemiſſes criptorum, in circulo verò ut semissium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores sint in cycloide quam in circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; (i) tempora autem in circulo sint majora quàm in cycloide



misse arcuum oscillando descriptorum ad eorumdem arcuum circularium chordas, quam proximè; & ideo, paribus arcubus majores sunt in cycloide quàm in circulo in ratione semissium arcuum ad eorumdem chordas in circulo ductas.

(i) * *Tempora autem in circulo sunt majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciprocâ.* * Id est, tempora in circulo sunt ad tempus in arcu quovis Cycloidis, ut semissis arcus circuli oscillando descripti ad ejusdem semissis chordam, sive invertendo & temporum dimidia sumendo, tempus semioscillationis in Cycloide est ad tempus semioscillationis in circulo (pendulis existentibus ejusdem longitudinis) ut chorda arcus descripti ad ipsum arcum, quæ quidem proportio proximè tantùm obtinet.

* Est enim tempus oscillationis integræ cujusvis in Cycloide ad tempus descensûs per dimidiam penduli longitudinem ut semiperipheria ad radium (*vide not.* 470. *ad Prop. LII. lib. I.*) ideoque etiam tempus semioscillationis in cycloide ad tempus illud descensûs per dimidiam penduli longitudinem ut quadrans circuli ad radium, sed tempus descensûs per quadruplum dimidiæ longitudinis penduli, sive tempus descensûs per Diametrum circuli cujus pendulum est radius, est duplum temporis descensûs per dimidiam penduli longitudinem, ideoque tempus semioscillationis in Cycloide est ad tempus descensûs per Diametrum circuli cujus longitudo penduli est radius, ut circuli quadrans ad Diametrum. Sed, ratio temporis lapsûs per Diametrum circuli ad tempus semioscillationis in arcu ejusdem circuli est (ut mox liquebit) composita ex ratione Diametri ad quadrantem circuli & chordæ ad arcum, quàm proximè, unde ex æquo erit tempus in Cycloide ad tempus in circulo ut chorda circuli ad ejus arcum oscillando descriptum. Rationem autem temporis descensûs per Diametrum circuli ad tempus semioscillationis in arcu ejus circuli esse compositam ex ratione Diametri ad qua- 185.

de in velocitatis ratione reciprocâ; patet arcuum differentias (quæ

quadrantem circuli & ex ratione chordæ ad arcum oscillando descriptum, saltem quam proximè, sequenti calculo constabit.

Descendat itaque corpus per arcum L B centro C descriptum & Diametro A B, sit t tempus quæsitum quo corpus descendit per eum arcum L B, sitque b tempus datum quo corpus labitur per Diametrum A B, & quo velocitate per eum lapsum in B acquisitâ posset describere uniformiter duplum A B sive 2 A B, sumatur in arcu L B portiuncula infinitè parva M m quam corpus descendens uniformiter describere censeatur tempore infinitè parvò dt, ducanturque ex punctis L & M lineæ L H, M E in diametrum perpendiculares; Cùm tempora quibus spatia data uniformiter describuntur sint ut illa spatia directè & velocitates quibus percurruntur inversè, sitque velocitas quæ in B acquisita est per lapsum ex A B ad velocitatem per lapsum ex L in M, sive ex H in E acquisitam, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{HE}$, erit $b : dt = \frac{2\,AB}{\sqrt{AB}} : \frac{Mm}{\sqrt{HE}}$; Dicatur ergo $AB = 1$; $HB = h$, $BE = x$, $EM = y$; $HE = h - x$ erit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, est autem $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ & ex naturâ circuli (cùm sit $yy = x - xx$, & $2y\,dy = dx - 2x\,dx$, sive $dy = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-xx}})\,dx$ invenietur $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}$, & quoniam dum crescit B E decrescit L M est $Mm = \frac{-dx}{2\sqrt{x-xx}}$, resolvatur ergo $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}$ in seriem per formulam *Newtonianam* invenietur $\frac{1}{\sqrt{x-xx}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2\times4}$ &c. ideoque M m sive $\frac{-dx}{2\sqrt{x-xn}} = \frac{1}{2} \times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times4}$ &c. Pariter resolvatur $\frac{1}{\sqrt{h-x}}$ in seriem per eamdem formulam erit $\frac{1}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{2\,h^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{2\times4h^{\frac{5}{2}}}$ &c. $= \frac{1}{h^{\frac{1}{1}}} \times 1 + \frac{x}{2h} + \frac{3x^2}{2\times4h^2}$ &c. Ductis ergo per se mutuo his seriebus

$$\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times4} \text{ \&c}$$

$$- \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2h} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times2h} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times4\times2h} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times4h^2} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times2\times4h2} - \frac{3\times3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times4\times2\times4h^2} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

ideoque integralis

$$S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times3} \frac{2\times3x^{\frac{5}{2}}}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times3h^1} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{2\times2\times5h} - \frac{2\times3x^{\frac{7}{2}}}{2\times4\times2\times7h} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{2\times3x^{\frac{5}{2}}}{2\times4\times5h^2} \frac{2\times3x^{\frac{7}{2}}}{2\times2\times4\times7h^2} \frac{2\times3\times3x^{\frac{9}{2}}}{2\times4\times2\times4\times9h^2} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Cùm ergo sit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$ erit $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, sed quando t fit o, tunc est $h = x$ ideoque Integralis quæsita in hanc mutatur, (posito ubique h pro x)

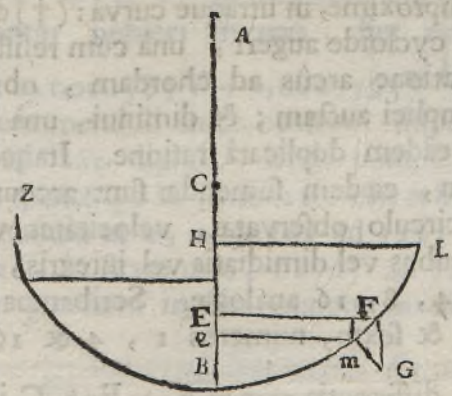
$$S.\frac{Mm}{h-x} = -1 - \frac{h}{2\times3} - \frac{3h2}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{1}{2\times3} - \frac{h}{2\times2\times5} - \frac{3h^2}{2\times4\times2\times7} \text{ \&c.}$$

$$- \frac{3}{2\times4\times5} - \frac{3h}{2\times2\times4\times7} - \frac{2\times3\times3h^2}{2\times4\times2\times4\times9} \text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Ideoque hæc est quantitas illa constans quæ debet tolli ex valore integralis quæ in proportione $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ pro $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ adhibetur, quæcumque assumatur valor in-



indeterminatæ x; ſed ubi totus arcus L B eſt deſcriptus, tunc x fit o, & evaneſcit prior ſeries $\frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times - 2\, x^{\frac{1}{2}}$ &c. ergo in eo caſu integralis $S. \frac{\mathrm{M\,m}}{\sqrt{h - n}}$ eſt æqualis ſoli quantitati illi conſtanti adſumptæ cum ſignis mutatis, ideoque eſt,

$$b : t = 2 : \quad 1 + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5}\ \&c.$$
$$+ \frac{1}{2\times 3} + \frac{h}{2\times 2\times 5}\ \&c.$$
$$+ \frac{3}{2\times 4\times 5}\ \&c.$$
$$\&c.$$

Jam autem cùm M m, ſit æqualis ſeriei $\frac{1}{2} \times \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} + \frac{dx^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}$ &c. ejus integralis eſt $\frac{1}{2} \times 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3} + \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5}$ &c. $= \sqrt{x} \times 1 + \frac{1}{2\times 3} + \frac{3x^2}{2\times 4\times 5}$ &c. in quâ ſi fiat $x = 1$ habebitur ſemiperipheria circuli, & ſi fiat $x = h$ habebitur arcus L B, tumque illæ duæ ſeries in has abibunt

$$1 + \frac{1}{2\times 3} + \frac{3}{2\times 4\times 5}\ \&c.$$
$$\&\ \sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5}\ \&c.$$

Quæ ſi per ſe mutuo ducantur; earum factum erit 183.

$$\sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2\times 3} + \frac{3h^2}{2\times 4\times 5}\ \&c.$$
$$\frac{1}{2\times 3} + \frac{h}{2\times 3\times 2\times 3}\ \&c.$$
$$\frac{3}{2\times 4\times 5}\ \&c.$$
$$\&c.$$

Sed termini hujus ſeriei ſaltem primi; iidem ſunt cum terminis ſeriei ſuperius inventæ pro valore $S. \frac{\mathrm{M\,m}}{\sqrt{h-n}}$, ſit ergo arcus L B $= a$, Peripheria circuli cujus Diameter eſt 1 ſit p, erit $\sqrt{h} \times S. \frac{\mathrm{M\,m}}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2}$, ſive $S. \frac{\mathrm{M\,m}}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2\sqrt{h}}$, ſed $\sqrt{h}$ eſt æqualis chordæ L B, ex naturâ circuli, quæ ſi dicatur c, erit $S. \frac{\mathrm{M\,m}}{\sqrt{h-x}} = \frac{ap}{2c}$. Unde tandem eſt $b : t = 2 : \frac{ap}{2c} = 1 : \frac{ap}{4c} = 1 \times c : a \times \frac{p}{4}$ ſive eſt b tempus deſcenſus per Diametrum vel per chordam quamlibet ad t tempus deſcenſus per arcum in ratione compoſitâ ex ratione Diametri 1 ad $\frac{p}{4}$ ſive quadrantem peripheriæ, & ex ratione chordæ c ad arcum a. Q. E. D.

(quæ (k) ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim) eaſdem fore, quamproximè, in utrâque curvâ: (†) deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, unà cum reſiſtentia, in duplicatâ circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ ſimplici auctam; & diminui, unà cum quadrato temporis, in eâdem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eædem ſumendæ ſunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo obſervatæ, velocitates verò maximæ ponendæ ſunt arcubus vel dimidiatis vel integris, hoc eſt, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in caſu ſecundo, quarto & ſexto, numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in caſu ſecundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in caſu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in caſu ſexto. Et ex his æquationibus, (l) per debitam collationem & reductionem analyticam, fit $A = 0{,}0000916$, $B = 0{,}0010847$, & $C = 0{,}0029558$. Eſt igitur differentia arcuum ut $0{,}0000916\,V + 0{,}0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0029558\,V^2$: & propterea cum (per corollarium propoſitionis XXX. applicatum ad hunc caſum) reſiſtentia globi in medio arcus oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, (m) ſit ad ipſius pondus A

$\frac{7}{11}$ A

(k) * *Quæ ſunt ut reſiſtentia & quadratum temporis conjunctim.* (per cor. 3. lem. X). Reſiſtentia enim conſiderari poteſt ut vis quæ retardationem producit, & differentia arcuum ut ſpatium quod corpus vi illâ mediocri ac conſtante ſollicitatum deſcriberet. Hinc arcuum differentiæ erunt quam proxime ut *reſiſtentia directè & quadratum temporis conjunctim.*

(†) * *Deberent differentiæ in Cycloide augeri unà cum reſiſtentia in duplicatâ circiter ratione, arcus ad chordam ob velocitatem in ratione illa ſimplici auctam*, quia ſcilicet pars maxima reſiſtentiæ eſt ut quadrata velocitatum.

(l) * *Per debitam collationem.* Prima æquatio eſt $\frac{\frac{1}{2}}{121} = \frac{1}{2 \times 121} = A + B + C$. 2ª. diviſa per 4. eſt $\frac{1}{71} = A + 2B + 4C$, & tertia diviſa per 16. eſt $\frac{3}{58} = A + 4B + 16C$. Ex his autem æquationibus facile eruuntur valores litterarum A, B, C, ſi fractiones $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{71}$, & $\frac{3}{58}$ ad decimales reducantur.

(m) * *Sit ad ipſius pondus.* AV eſt pars differentiæ arcuum genita per reſiſtentiæ partem illam quæ eſt ut velocitas

: BV

$_{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; ſi pro A, B & B ſcribantur numeri inventi, fiet reſiſtentia globi ad ejus pondus, ut $0,0000583 V + 0,0007593 V^{\frac{3}{2}} + 0,0022169 V^2$ ad longitudinem penduli inter centrum ſuſpenſionis & regulam, id eſt, ad 121 digitos. Unde cùm V in caſu ſecundo deſignet 1, in quarto 4, in ſexto 16: erit reſiſtentia ad pondus globi in caſu ſecundo ut 0, 0030345 ad 121, in quarto ut 0, 041748 ad 121, in ſexto ut 0, 61705 ad 121.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

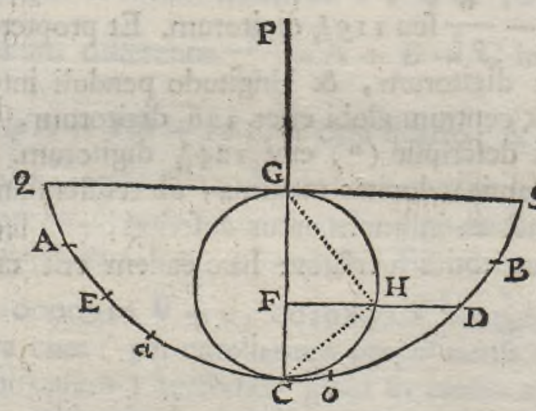
Arcus quem punctum in filo notatum in caſu ſexto deſcripſit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ſeu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cùm radius eſſet 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum globi eſſet 126 digitorum, arcus quem centrum globi deſcripſit (n) erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oſcillantis velocitas maxima, ob reſiſtentiam aeris, non incidit in punctum infimum arcus deſcripti, (o) ſed in medio ferè loco arcus totius verſatur: hæc eadem erit circiter ac ſi glo-

$BV^{\frac{3}{2}}$, pars differentiæ arcuum genita per reſiſtentiæ partem quæ eſt in ſeſquiplicatâ ratione velocitatis; & CV^2 pars differentiæ arcuum producta per reſiſtentiæ totius partem quadrato velocitatis proportionalem (*per cor.* 4. *prop.* 31). Sed (*per cor. prop.* 30.) ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, eſt $\frac{7}{11} AV$ ad longitudinem penduli ut corporis oſcillantis reſiſtentia in puncto medio arcûs deſcripti ad ejuſdem pondus; ſi reſiſtentia ſit ut velocitatis quadratum, reſiſtentia illa in puncto medio arcûs deſcripti eſt ad corporis pondus ut $\frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli, & (181) ſi reſiſtentia ſit in ratione ſeſquiplicatâ velocitatis, eſt illa ad corporis pondus ut $\frac{7}{10} BV^{\frac{3}{2}}$ ad longitudinem penduli. Quarè cum hic ſupponatur reſiſtentia partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione ſeſquiplicatâ & partim in duplicatâ, reſiſtentia globi in medio arcûs oſcillando deſcripti, ubi velocitas eſt V, erit ad ipſius pondus ut $\frac{7}{11} AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$, ad longitudinem penduli. 183.

(n) * *Erat* $124\frac{3}{31}$ *digit.* Sunt enim radii ut ſimiles circulorum arcus, & ideò radius 121, eſt ad ſuum arcum $119\frac{5}{29}$ ut radius 126, ad arcum correſpondentem $124\frac{3}{31}$ quamproximè.

(o) * *Sed in medio ferè loco.* Patet per not. 180.

globus deſcenſu ſuo toto in medio non reſiſtente (p) deſcriberet arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli ſupra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam globus, perpendiculariter cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem arcus illius ſinui verſo æqualem, acquirere poſſet. Eſt autem ſinus ille verſus in cycloide ad arcum iſtum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis



(p) * *Deſcriberet arcûs illius partem dimidiam.* Corpus oſcillando deſcribat arcum B a in medio reſiſtente & arcum B A in medio non reſiſtente; ſit C punctum cycloidis infimum; O, punctum medium arcûs B a, & arcûs CD ſit æqualis arcui BO, velocitas maxima deſcenſu corporis per arcum B O acquiſita in medio reſiſtente eſt ad velocitatem maximam per arcum B C acquiſitam in medio reſiſtente ut arcus B O, ad arcum B C (180). Sed ſi corpus è loco D in medio non reſiſtente cadendo deſcribat arcum D C, erit etiam velocitas ipſius in C deſcenſu per arcum D C acquiſita ad velocitatem acquiſitam ibidem deſcenſu per arcum B C ut arcus C D, vel æqualis B O ad arcum B C, (*prop.* 51. *lib.* 1). Ergò velocitas in medio reſiſtente per arcum B O acquiſita in O æqualis eſt velocitati quam corpus in medio non reſiſtente cadendo per arcum D C = B O haberet in C; & propterea (85. *lib.* 1. velocitas illa æqualis eſt velocitati quam corpus perpendiculariter cadendo in medio non reſiſtente, & caſu ſuo deſcribendo altitudinem F C æqualem ſinui verſo arcûs CD, acquirere poſſet. Sit jam P punctum ſuſpenſionis, P C longitudo penduli S D C ſemicyclois, S G & D F ad P C normales, & C H G C circulus diametro G C deſcriptus ſecans D F in H. Jungatur chorda C H, & erit arcus cycloidis S D = 2 G C—2 C H, & arcus S E = 2 G C (462. *lib.* 1.) ideóque arcus D C = 2 C H. Eſt autem (ex naturâ circuli) C F ad C H ut C H ad C G, & hinc C F ad 2 C H ſeu D C, ut 2 C H ad 4 C G, ſivè ut D C ad 2 P C; Hoc eſt, ſinus verſus C F, ad arcum C D, ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam.

lis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipſa eſt quam corpus cadendo & caſu ſuo ſpatium 15, 278 digitorum deſcribendo acquirere poſſet. Tali igitur cum velocitate globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad ejus pondus ut 0, 61705 ad 121, vel (ſi (q) reſiſtentiæ pars illa ſola ſpectetur quæ eſt in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0, 56752 ad 121.

(r) Experimento autem hydroſtatico inveni quod pondus globi hujus lignei eſſet ad pondus globi aquei magnitudinis ejuſdem ut 55 ad 97: & propterea cum 121 ſit ad 213, 4 in eâdem ratione, erit reſiſtentia globi aquei præfatâ cum velocitate progredientis (ſ) ad ipſius pondus ut 0, 56752 ad 213, 4, id eſt, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cùm pondus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuatâ (t) deſcribat longitudinem digitorum 30, 556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare poſſet; (u) manifeſtum eſt quod vis reſiſtentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc eſt, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$.

Et

(q) * *Si reſiſtentiæ pars illa ſola &c.* Si enim in quantitate, 0, 0022169 V^2 quæ eſt ad longitudinem penduli ut reſiſtentiæ pars velocitatis quadrato proportionalis ad corporis pondus loco V ſcribatur 16, & loco V^2 ſcribatur 256, fiet 0, 0022169 V^2 = 0, 56752, quamproximè.

(r) * *Experimento autem hydroſtatico.* Experimentum facile eſt. Cùm enim corpus fluido immerſum, eâdem vi ſurſum urgeatur quâ par fluidi volumen ſuſtinetur, id eſt, vi quæ æqualis eſt ponderi fluidi ejuſdem magnitudinis (*cor.* 5. *&* 6. *prop.* 20. *lib. hujus*) corpus fluido ſpecificè leviori immerſum ponderis ſui partem amittet æqualem ponderi fluidi ejuſdem voluminis; & propterea ſi corpus illud fluido immerſum ponderetur, cognoſcetur pondus fluidi ejuſdem magnitudinis cum corpore. Si fluidum corpore immergendo ſpecificè gravius ſit, corpori illi adjungi poteſt aliud corpus majoris gravitatis ſpecificæ ut eorum ſumma fluido ſpecificè gravior fiat.

(ſ) *Ad ipſius pondus.* Reſiſtentia globi ſolidi æqualis eſt reſiſtentiæ globi aquei ejuſdem magnitudinis & cum eâdem velocitate in eodem medio progredientis, ſed reſiſtentia globi ſolidi eſt ad ejuſdem pondus ut 0, 56752 ad 121, & pondus globi ſolidi ad pondus globi aquei ut 121 ad 213.4, ſeu ut 1 ad $376\frac{1}{50}$ quamproximè. 183.

(t) * *Deſcribat longitudinem digit.* 30, 556, duplam nimirum longitudinis digitorum 15. 278, quæ velocitatem illam omnem in globo cadente generare poſſet (29. lib. 1.).

(u) * *Manifeſtum eſt.* Sunt enim velocitates dato tempore genitæ vel extinctæ, ut vires quibus generantur vel extinguuntur (13. *lib.* 1.).

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Et propterea quo tempore globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem femidiametri fuæ, feu digitorum $3\frac{7}{16}$, defcribere poffet, (x) eodem amitteret motûs fui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam ofcillationes quibus pendulum quartam motûs fui partem amifit. In fequente tabulâ numeri fupremi denotant longitudinem arcûs defcenfu primo defcripti, in digitis & partibus digiti expreffam: numeri medii fignificant longitudinem arcûs afcenfu ultimo defcripti; & loco infimo ftant numeri ofcillationum. Experimentum defcripfi tanquam magis accuratum quàm cùm motûs pars tantùm octava amitteretur. (y) Calculum tentet qui volet.

Def-

(x) * *Eodem amitteret motûs fui partem.* Nam velocitates eâdem vi conftante vel extinctæ funt ut tempora quibus generantur vel extinguuntur (13. *lib.* 1.), fed tempora quibus corpora duo eâdem velocitate uniformi percurrunt longitudines digit. 30, 556, & digit. $3\frac{7}{16}$, funt ut hæ longitudines (5 *lib.* 1.). Quarè velocitates amiffæ funt ut eædem longitudines, & ideò 30, 556 ad $3\frac{7}{16}$, ut $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ ad velocitatem amiffam eo tempore quo globus longitudinem femidiametri fuæ feu digit. $3\frac{7}{16}$, percurrit; undè invenitur velocitas illa amiffa $= \frac{1}{3342}$, quamproximè.

(y) * *Calculum tentet.* Quoniam experimentum magis accuratum eft, calculum tentabimus. Erunt igitur differentiæ arcuum primo defcenfu & ultimo afcenfu defcriptorum.

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16.

Arcus in unâ mediocri ofcillatione decripti, funt

$3\frac{1}{2}$, 7, 14, 28, 56, 112.

Differentiæ arcuum defcenfu & fubfequente afcenfu in unâ mediocri ofcillatione defcriptorum, funt

$$\frac{\frac{1}{2}}{374},\ \frac{1}{272},\ \frac{2}{162\frac{1}{2}},\ \frac{4}{83\frac{1}{3}},\ \frac{8}{41\frac{2}{3}},\ \frac{16}{22\frac{2}{3}}$$

five ut 1. 2. 7500; 9. 2061; 35. 5040; 143. 7760; 528. 5882

Hæ autem differentiæ in majoribus ofcillationibus funt in duplicatâ ratione arcuum defcriptorum fatis proximè; Nam $\frac{8}{41\frac{2}{3}} : \frac{16}{22\frac{2}{3}} = 34 : 125$, & $34 : 126 = 1 : 4$; hoc eft, in duplicatâ ratione arcuum defcriptorum. Et fimiliter $\frac{4}{83\frac{1}{3}} : \frac{8}{41\frac{2}{3}} = 1 : 4$, accuratè; in minoribus verò ofcillationibus, differentiæ illæ funt in ratione paulò majore quam duplicatâ arcuum defcriptorum. Eft enim $\frac{1}{272} : \frac{1}{162\frac{1}{2}} = 325 : 1088$ & hæc ratio major eft ratione 1 ad 4. Defignet jam V, ut fupra, velocitatem maximam in ofcillatione quâvis, & $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$, differentiam arcuum; & quoniam velocitates ponendæ funt arcubus defcriptis fcil. numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, analogæ, fcribamus in caf. 2°. 4°. & 6°. numeros 1, 4, 16, pro V, & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{272} = A + B + C$ in caf. 2°. $\frac{4}{83\frac{1}{3}} = 4A + 8B + 16C$ in caf.

Descensus primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{2}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea globum plumbeum diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ suspendi filo eodem, sic ut inter centrum globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motûs pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motûs totius cessavit: secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Des-

cas. 4°. & $\frac{16}{22\frac{1}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in cas. 6°. Ex his æquationibus habetur $A = 0{,}0005096$, $B = 0{,}0005884$, & $C = 0{,}0025784$. Est igitur differentia arcuum ut $0{,}0005096\,V + 0{,}0005884\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0025784\,V^2$, & propterea cùm resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli, fiet resistentia globi ad ejus pondus ut $0{,}0003243\,V + 0{,}0004119\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0019338\,V^2$, ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis & regulam, id est, ad 121 digit. Unde cùm V in cas. 2°. designet 1; in 4°. 4, in 6°. 16; erit resistentia ad pondus globi in cas. 2°. ut 0,0267 ad 121; in 4°. ut 0,0355332 ad 121; in 6°, ut 0,5266032 ad 121.

Ponatur resistentia in tardioribus motibus partim uniformis & partim velocitati, partim velocitatis quadrato proportio-

nalis, ideòque arcuum differentia sit $A + BV + CV^2$, & scribamus in cas. 1°. 2°. & 3°. numeros 1, 2, 4, pro V, prodibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{748}$, $A + 2B + 4C = \frac{1}{272}$, & $A + 4B + 16C = \frac{4}{323}$, ex quibus eruitur $A = 0{,}00034$; $B = 0{,}0003255$, & $C = 0{,}0006714$; & propterea cùm (*per cor. prop. 30.*) resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{1}{2}A + \frac{7}{11}BV + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; si pro A, B, & C, scribantur numeri inventi, sint resistentia globi ad ejus pondus ut $0{,}00017 + 0{,}0002071\,V + 0{,}0005035\,V^2$ ad 121, id est, in 1°. cas. ut 0,0008806 ad 121; in 2°. cas. ut 0,0025982 ad 121; in 3°. cas. ut 0,0090544, ad 121; resistentia verò uniformis erit ad pondus globi ut 0,00017 ad 121, seu ut 1, ad 735294. 183.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In tabulâ priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respectivè, & generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione tertiâ $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4\,A + 8\,B + 16\,C$, in septimâ $\frac{8}{30} = 16\,A + 64\,B + 256\,C$. Hæ verò æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Et inde prodit resistentia globi cum velocitate V moti in eâ ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009\,V + 0{,}000208\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659\,V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659\,V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217\,V^2$ ad 121: (z) & inde fit resistentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in $0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4}$ in

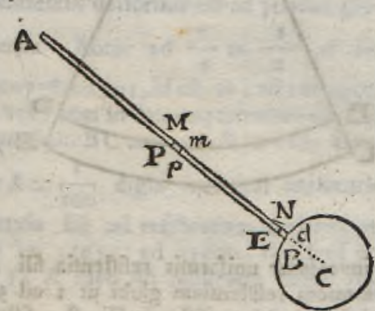
(z) *Et indè fit resistentia.* Est enim (*ex dem.*) resistentia globi lignei $57\frac{7}{22} \times \frac{0{,}002217}{121}$; & resistentia globi plumbei $26\frac{1}{4} \times \frac{0{,}000659}{121}$, ideóque resistentia globi lignei ad resistentiam globi plumbei ut $57\frac{7}{22} \times 0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4} \times 0{,}000659$ id est, $7\frac{1}{3}$ ad 1.

in o, 000659, id est, ut $7\frac{1}{3}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, seu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproximè. Ergo resistentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quàm duplicatâ diametrorum. (a) At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certè permagna erat, ac de pendulorum inventâ resistentiâ subduci debet. Hanc accuratè definire non potui, sed majorem tamen inveni quàm partem tertiam resistentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod resistentiæ

(a) 184. *At nondum consideravimus* &c.

PROBLEMA.

Fili tensi oscillantis resistentiam invenire in medio cujus resistentia est ut velocitatis & diametri globi quadrata conjunctim.



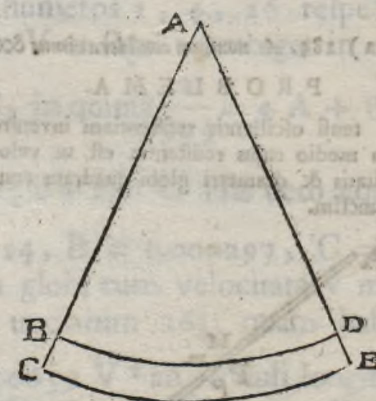
Filum cylindricum homogeneum A B, circà punctum A, oscillatur, sitque ejus longitudo $AB = a$, diameter $EN = 2b$, globi C, diameter $= 2r$, longitudo variabilis $AP = x$, $Pp = dx$; & cylindruli evanescentis P M, velocitas erit ut distantia A P, ejusque proindè resistentia ut $xxdx$, sive ut altitudo cylindruli P p & quadratum velocitatis conjunctim; & hinc, sumptâ fluente, resistentia fili A P, fit ut $\frac{1}{3}x^3$, & totius fili A B resistentia ut $\frac{1}{3}a^3$. Capiatur in B, cylindrulus B N, cujus altitudo B E sit æqualis diametro fili E N, seu $2b$, & resistentia fili A E, erit ut $\frac{1}{3}(a-2b)^3$, ideoque cylindri B N resistentia ut $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}(a-2b)^3$. Est igitur resistentia fili totius A B, ad resistentiam cylindri B N, ut a^3 ad $a^3 - (a-2b)^3$; sed ut infra prop. 34. demonstrabitur, cylindri B N resistentia est ad resistentiam globuli huic cylindro inscripti ut 2 ad 1, & resistentia globuli hujus est ad resistentiam globi C, in ratione quamproxime compositâ ex ratione quadrati diametri E N, ad quadratum diametri 2 B C, & ratione quadrati velocitatis globuli ad quadratum velocitatis globi C hoc est, ut $bb(a-b)^2$ ad $rr(a+r)^2$. Quarè (per compositionem rationum & ex æquo) resistentia fili A B, est ad resistentiam globi C, ut $2a^3bb(a-b)^2$, ad $a^3rr(a+r)^2 - rr(a+r)^2 \times (a-2b)^3$, seu ponendo $a+r=c$, ut $a^3b(a-b)^2$ ad $3a^2rrcc - 6abrrcc + 4bbrrcc$, & hinc resistentia fili ad resistentiam totius penduli ut $a^3b(a-b)^2$, ad $a^3b(a-b)^2 + rrcc(3aa - 6ab + 4bb)$ Q. E. I.

185. *Coroll.* Si fili semidiameter b, sit admodum exigua respectu longitudinis ejusdem a, erit ferè $3aa - 6ab + 4bb = 3aa - 6ab + 3bb = 3(a-b)^2$. Quare fili resistentia erit ad resistentiam globi ut a^3b ad $3rrcc$, & ad resistentiam totius penduli ut a^3b ad $a^3b + 3rrcc$. Exempli causâ. Sit $c = 126$. digit. $r = 1$ digit. $a = 125$ digit $b = \frac{1}{00}$ digit. & resistentia fili erit ad resistentiam totius penduli ut 1953125 ad 4762800, seu ut 1 ad 2,438 quamproximè. 184.

 186. In-

tiæ globorum, demptâ fili reſiſtentiâ, ſunt quam proxime in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abeſt à diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cùm reſiſtentia fili in globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum ſuſpen-



186. Inveniri etiam poteſt pars illa reſiſtentiæ fili quæ uniformis eſt, quæque in tardioribus motibus obſervatur; poſito quod uniformis illa reſiſtentia fili ſit ad uniformem reſiſtentiam globi, ut ſpatium ſolidum quod filum oſcillando deſcribit ad ſpatium ſolidum quod deſcribit globus. Filum cylindricum A B oſcillatione unâ deſcribat ſpatium ſolidum ſeu priſma cujus baſis eſt ſector circularis A B D, & altitudo diameter fili, interea dum globi centrum C, deſcribit arcum C E, diameter fili dicatur $2\,R$, & ſpatium à filo deſcriptum erit $R \times AB \times BD$; ſpatium verò a globo deſcriptum eſt factum ex area circuli cujus radius B C, in arcuum C E quem centrum C deſcribit; ſeu eſt $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$. Quarè uniformis reſiſtentia fili eſt ad uniformem reſiſtentiam globi ut $R \times AB \times BD$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$, hoc eſt, ob rectas A B, A C arcubus B D, C E proportionales, ut $R \times {}^2 AB^2$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$, totaque uniformis reſiſtentia penduli ad uniformem reſiſtentiam globi ut $R \times AB^2 + \frac{22}{7} BC^2 \times AC$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$.

Exempli causâ. Sit $R = \frac{1}{100}$ digit. $AC = 126$ digit. $BC = 3\frac{7}{16}$, $AB = 122\frac{9}{16}$ ut in experimentis primo ac ſecundo, & invenietur uniformis reſiſtentia fili ad uniformem reſiſtentiam globi ut 1 ad 31. circiter, & ideo reſiſtentia fili eſt reſiſtentiæ totius penduli pars $\frac{1}{32}$. Cùm igitur ſupra inventa ſit reſiſtentia uniformis ad pondus globi lignei ut 1 ad 735294, ſubductâ reſiſtentiâ fili, erit uniformis reſiſtentia globi lignei ad ejuſdem pondus unciar. Rom. $57\frac{7}{22}$ ut 1 ad 760000 circiter. Quæramus nunc reſiſtentiam uniformem globi plumbei in ultimo experimento. Mediocres arcuum differentiæ in primâ tabulâ ſumptæ ſunt in caſ. 1°. 2°. & 3°. $\frac{1}{1808}$, $\frac{1}{912}$, & $\frac{1}{386}$, reſpectivè. Loco V, in quantitate $A + BV + CV^2$, ſcribantur ſucceſſivè numeri 1, 2, & 4, & prodipensionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli descensu à nodo descriptus 32 dig. Arcus ascensu ultimo post oscillationes quinque ab eodem nodo descriptus 28 dig. Summa arcuum seu arcus totus oscillatione mediocri descriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. (b) Ejus pars decima seu differentia inter descensum & ascensum in oscillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oscillatione mediocri à nodo descriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oscillatione mediocri à centro globi descriptum; & ita dif-

dibunt æquationes $A+B+C=\frac{1}{1808}$; $A+2B+4C=\frac{1}{912}$, & $1A+4B+16C=\frac{1}{386}$, ex quibus habetur $A=0{,}0001455$ $B=0{,}0004076$, & $C=0{,}0000679$. Unde resistentia uniformis est ad pondus globi unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut $\frac{1}{2}A$ seu $0{,}0000728$ ad 121, id est, ut 1 ad 1662088. Jam verò cùm in hoc experimento sit $AC=126$ digit. $BC=1$, $AB=125$, si ponatur $R=\frac{1}{100}$ digit. invenitur uniformis resistentia fili ad resistentiam uniformem globi ut 15625 ad 39600, sivè ferè ut 2 ad 5; & ideo fili resistentia totius resistentiæ uniformis partes continet $\frac{2}{7}$. Quarè uniformis resistentia globi plumbei est ad ejus pondus unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut 1 ad 2326923 circiter; & hinc uniformis resistentia globi plumbei cujus diameter est digit. 2, est ad ad resistentiam globi lignei uniformem cujus diameter est digit. $6\frac{7}{8}$ ut $26\frac{1}{4}\times 760000$ ad $57\frac{7}{22}\times 2326923$, hoc est, ut 19950000 ad 133374995 sivè ut 1 ad 6,685.

Verùm si ponatur resistentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, resistentia globi lignei invenitur esse ad ejusdem pondus $57\frac{7}{22}$ unciar. Rom. in ratione 1 ad 450000 circiter, & resistentia uniformis globi plumbei ad ejus pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. in ratione 1, ad 910900 per tabulam primam; & in ratione 1, ad 1021097 per tabulam secundam ultimi experimenti; undè sumptâ mediocri ratione, resistentia uniformis globi plumbei est ad pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. ut 1 ad 966000 circiter. Et ideò, in hâc resistentiæ Hypothesi, uniformis resistentia globi plumbei cujus est diameter digit. 2, est ad resistentiam uniformem globi lignei cujus diameter est digit. $6\frac{1}{8}$, ut $26\frac{1}{4}\times 450000$ ad $57\frac{7}{22}\times 966000$ seu ut 1, ad 4,687, circiter.

186. (b) * *Ejus pars decima.* Si oscillatio ex itu & reditu penduli, seu ex bino descensu binoque ascensu componatur, quinque oscillationes sic acceptæ æquivalent oscillationibus decem quarum singulæ ex uno tantùm descensu unoque ascensu constant. Priore significatione NEWTONUS oscillationes quinque, de quibus hic loquitur, accepisse videtur, ut potè qui differentiam 4 digit. Per N. 10 dividit ut differentiam inveniat inter arcus descensu uno & subsequente ascensu descriptos in unâ mediocri oscillatione ex descensu uno unoque ascensu compositâ.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0, 4475. (c) Si longitudo penduli, manente longitudine arcûs descripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oscillationis augeretur, & velocitas penduli diminueretur in ratione illâ subduplicatâ, maneret verò arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia 0, 4475. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia ista 0, 4475 (d) augeretur in duplicatâ illa ratione, ideoque evaderet 1, 5295. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia penduli esset in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1, 5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rursus ubi pendulum superius ex globo ligneo constructum centro oscillationis, quod à puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptum (e) fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta

(c) * *Si longitudo penduli*, in medio non resistente *augeretur in ratione* 126 *ad* 122 $\frac{1}{2}$, *tempus oscillationis*, ob datam globi fune penduli massam & pondus, *augeretur in ratione illâ subduplicatâ* (*per cor. 6. prop.* 24.) quod etiam in medio resistente verum est quam proximè (180).

* Mutatâ longitudine penduli & manente longitudine arcûs descripti, velocitas penduli diminuetur in ratione subduplicatâ longitudinis penduli, (ideoque inversè ut tempus); Nam velocitates descensu per arcus quosvis acquisitæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum illis arcubus correspondentium; Chordæ verò pro quibus arcus sumere hic liceat, sunt mediæ proportionales inter abscissas suas & circulorum Diametros, si ergo sumantur arcus æquales in circulis inæqualibus, abscissæ eorum arcuum erunt inversè ut Diametri circulorum sive inversè ut eorum Radii, hoc est inversè ut longitudines pendulorum, ergo velocitates quæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum, erunt in ratione subduplicatâ inversâ longitudinum pendulorum; Cùm ergo arcuum differentiæ sint ut resistentia & quadratum temporis conjunctim, resistentiaque sit ut quadratum velocitatis, sitque quadratum velocitatis inversè ut longitudo pendulorum; & quadratum temporis directè ut longitudo pendulorum, compensatis rationibus manebunt eædem arcuum differentiæ, si mutatâ pendulorum longitudine arcus æquales describantur.

(d) * *Augeretur in duplicatâ illâ ratione.* (Per cor. 2. prop. 31.).

(e) * *Fuit* $\frac{126}{121}$ *in* $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$. Cùm enim in cas. 6°. experimenti primi penduli seu fili,

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXXI. Theor. XXV.

ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49, 396. Duxi autem differentias hasce in pondera globorum, ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, (f) suntque ut resistentiæ directè & pondera inversè. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 318, 136 & 49, 396. Pars autem resistentiæ globi minoris, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675, id est, ut 45,453 ad 49,396; & pars resistentiæ globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti; ideoque partes illæ sunt ut 318, 136 & 45,453 quamproximè, id est, ut 7 & 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ sunt ut 7,438 & 1, id est, ut globorum resistentiæ 7 & 1 quamproximè. Differentia rationum haud major est, quam quæ ex fili resistentiâ oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum, sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

Cæterum globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfectè sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratiâ neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minimè sollicitus. Optarim itaque, (g) cùm demonstratio vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis & pluribus & majoribus & magis accu-

fili ad nodum usquè longitudo esset 121 digit. arcus descriptus erat $119\frac{5}{29}$ digit. & arcuum differentia $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit. Et mutatâ penduli longitudine in ratione 126 ad 121, arcus descriptus & differentia mutantur in eâdem ratione, fiebatque proindè arcus $\frac{126}{121} \times 119\frac{5}{29}$, seu $124\frac{3}{31}$ digit. & differentia $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit.

(f) * *Suntque ut resistentiæ directè & pondera inversè.* Nam (*per cor. prop.* 30.) differentiæ illæ in datos numeros ductæ sunt ad penduli longitudinem, ut resistentia ad gravitatem seu pondus globi penduli; data igitur penduli longitudine, differentiæ illæ sunt ut resistentiæ directè & pondera inversè. 186.

(g) 187. * *Cùm demonstratio vacui &c.* Utrum resistentia quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an verò partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, experimentis globorum in medio resistente oscillantium inveniri potest. Nam si, exempli causâ, globorum in dato medio paribus velocitatibus motorum resistentiæ semper essent in

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

accuratis tentarentur. Si globi ſumantur in proportione geometricâ, putà quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam verò conferendo reſiſtentias diverſorum fluidorum inter ſe, tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ, fecique ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in tabulâ ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli à puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Ar-

in duplicatâ diametrorum ratione, inſenſibilis foret in partibus internis reſiſtentia; cum enim reſiſtentia illa interna à numero, magnitudine, figurâ & texturâ internarum partium penderet, non poſſet eadem conſtanter manere in globis æqualibus & heterogeneis, ligneis v. g. & plumbeis, nec in globis inæqualibus externarum ſuperficierum, ſed potiùs ſolidorum rationem ſequeretur. Porrò ſuperioribus experimentis jam probatum eſt in velocioribus globorum motibus, reſiſtentias quadratis diametrorum proportionales eſſe quam proxime, concludendum igitur eſt nullam eſſe notabilem in partibus corporum internis reſiſtentiam, quod tamen deinceps pluribus aliis argumentis demonſtrabit NEWTONUS. Verum ſi medium quoddam æthereum vel longe ſubtiliſſimum omnes omnium corporum poros & meatus repleret, propter medii illiusætherei ſummam denſitatem atque inertiam omni materiæ propriam, partes internæ corporum per magnam reſiſtentiam ſentirent. At qui *Carteſianum* mundi pleni ſyſtema emendarunt noviſque inventis ornarunt eruditiſſimi ſagaciſſimique Mathematici, ii, repudiatis veteribus effugiis, quibus *Carteſianorum* vulgus utitur, ex ſubtilitate ac mobilitate ætheris & pororum quibus corpora omnia pertuſa ſunt diſpoſitione petitis, hoc unum reſponſum proferunt, æthereAm materiam corporum gravium motibus minime reſiſtere, quod ſit omni gravitate deſtituta. Duplicis itaque generis materiam in univerſo diſtinguunt, gravem alteram cujus partes in vorticulos diviſæ non ſunt, alteram non gravem, omnis tamen gravitatis cauſam, cujus partes ex tenuiſſimis variorum ordinum vorticulis elaſticis conſtant. Cùm autem vis motrix ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibenda, decreſcente corporis hujus gravitate, in eâdem ratione decreſcat, nullaque ſit ætheris gravitas, conſequens eſſe aiunt ut corpus grave quod in æthere datâ celeritate fertur, nonniſi infiniteſimam motûs ſui partem ex reſiſtentia ætheris finito quovis tempore deperdat. Verùm prætérquam quod totum hoc ſiſtema, ut ut elegans ac venuſtum, fictis fere ad arbitrium hypotheſibus, quas NEWTONUS è Phyſicâ experimentali vellet eliminari, nititur, plurimiſque & graviſſimis aliis ex Mechanica atque Aſtronomiâ difficultatibus premitur, adductum modò reſponſum his etiam laborat incommodis. Primum quidem evidens eſt, vim illam quæ ad corpus grave contrà gravitatis directionem ſuſtinen-

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oscillationum in aere		$85\frac{1}{2}$	287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aquâ amissi sunt. Erant quidem oscilla-

nendum necessaria est, cum corporis pondere decrescere debere; sed non ità manifestum est vim motricem ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibendam, in ratione ponderis decrescere oportere, ubi vis illius motricis directio gravitatis directioni opposita non est, sed illi perpendicularis aut cum illâ conspirans. Præterea materia omnis ætherea circa solem, stellas, atque planetas singulos pernicissimo motu in orbem acta vi centrifugâ pollet quâ à centris magnorum vorticum, atque etiam à centris singulorum vorticulorum propriis recedere nititur, undè cæterorum corporum gravitas ortum habet; at vis illa centrifuga quæ cum vi centripetâ seu gravitate conferri potest, idem præstare in æthere debet ratione motûs in datâ materiæ quantitate datâ vi motrice imprimendi, quod in cæteris corporibus gravitas præstat. Nulla igitur esse ratio videtur cur corpus grave datâ celeritate motum nonnisi infinitesimam suæ celeritatis particulam ex ætheris non gravis resistentiâ amittat, siquidem illud vi centrifugâ pollet: Et, si materia ætherea suâ vi centrifugâ vel certè vi indè ortâ corporum gravitatem producat, eorumque motum finitum acceleret & extinguat finito tempore, multò magis eadem materia corpus grave movere, aut motum ejus finito tempore extinguere debet, si finitâ velocitate in illud incurrat ac continuò urgeat, cum vis centrifuga infinitesima sit, si cum vi quâ corpus spatium finitum tempore infinito describit, conferatur. 187.

* Et quidem resistentia ex gravitate materiæ occurrentis non pendet, sed ex ejus inertiâ, quâ fit ut nullum corpus ab alio motum suscipiat quin tantumdem motus in eo destruat, idque Mechanici communiter statuunt tam ex consensu omnium quorumcumque Phænomenorum, ubi (semotâ gravitatis consideratione) nullus motus motum producendo non consumitur, quam ex Principiis Metaphysicis quâ liquet quod si res ita se non haberet, vel minimus motus infinitum motum produceret, totaque Universi moles ex Atomi progressione dimoveretur, quod absurdum. Unde si Æther non resisteret, hoc est vi inertiæ careret, fingendæ forent duæ materiæ species, quarum altera vi inertiæ prædita foret, altera vero non, ita ut quamvis ab occurrente materia dimoveatur, nihil tollat de ejus motu; simul autem statuitur quod id æther corporum motum sistere potest aut mutare quomodocumque, nam si æther sit gravitatis causa oportet ut illa ipsa materia ætherea quæ corporis moti actione movetur, dum tamen nihil quicquam de illius motu tollit, possit illud idem corpus si sursum feratur sistere, in adversum ejus directionem mutare &c. Quæ Metaphysicè etiam inter se repugnare videntur, nec satis fuisse perpensa ab ingeniosissimis Cartesianismi restauratoribus.

oscillationes in aere paulo celeriores quàm in aquâ. At si oscillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus (h) motus idem ac prius amitteretur; ob resistentiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aquâ oscillationibos $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; (i) ideoque resistentia penduli in aquâ est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in descensu & subsequente ascensu descriptorum à globo in aere cum velocitate maximâ V moto; & cum velocitas maxima in casu columnæ quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in casu columnæ quartæ ad differentiam in casu columnæ primæ (k) ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 & 8 pro

(h) * *Motus idem ac prius amitteretur.* Differentia arcuum motui amisso proportionalis, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim (*per cor.* 5. *Lem.* X); sed auctâ paululum velocitate, resistentia quamproximè augetur in ejus ratione duplicatâ (per hyp.) & simul quadratum temporis minuitur in eâdem ratione illâ duplicatâ, quia totus arcus descriptus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem quam proximè manet. Quarè motus amissus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem manet, si oscillationes in aquâ accelerentur ut dictum est (vid. not. sup. c).

(i) * *Ideoque resistentia penduli.* Nam motus in aëre amissus unâ mediocri oscillatione, quâ arcus digit. 14 describitur, est pars $\frac{1}{535}$ motûs totius oscillationibus 535, amissi; Et similiter motus in aquâ amissus æquali oscillatione quâ arcus digit. 14 pari velocitate describeretur est quam proximè pars $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ejusdem motûs totius amissi oscillationibus $1\frac{1}{5}$ in aquâ & oscillationibus 535 in aëre. Quarè cùm resistentiæ totæ unâ oscillatione mediocri sint ut partes illæ motûs amissæ, est resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam in aëre ut $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ad $\frac{1}{535}$, id est, ut 535 ad $1\frac{1}{5}$.

(k) * *Ut* $\frac{2}{535}$ *ad* $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$. Dividendo nimirum arcuum differentias per numerum os-

8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{3}{14}$ & $A = 21\frac{2}{7}$: atque ideo resistentia, (l) cùm sit ut $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ seu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, (m) ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aquâ oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aquâ oscillantis resistentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate in aere oscillantis, (n) ut 850 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aquâ, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicatâ. Ejus rei causam investigan-

oscillationum ut differentia in unâ mediocri oscillatione habeatur, quemadmodum suprà factum est.

(l) * *Cùm sit ut* $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$. (per cor. prop. 30.).

(m) * *Ut* $61\frac{12}{17}$ *ad* &c. Est enim, ex suprà dictis, resistentia in aquâ ad resistentiam totam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$ & resistentia tota in aere ad resistentiæ partem illam in aere quæ velocitatis quadrato proportionalis est ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$, & idcircò (ex æquo) & per compositionem rationum) *resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aere, &c.*

(n) * *Ut* 850. *ad* 1 circiter. Si enim resistentia fili ponatur ut suprà factum est, æqualis tertiæ parti resistentiæ totius in aere, erit fere resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam totam in aere ut $535 - \frac{6}{15}$ ad $1\frac{1}{5} - \frac{6}{15}$, seu ut 2673 ad 4, & $2673 \times 61\frac{12}{17}$ ad $4 \times 48\frac{9}{56}$, ut 850 ad 1 circiter.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

gando, in hanc incidi, quod arca nimis angusta esset pro magnitudine globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustiâ suâ nimis impediebat. Nam si globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur, in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè. Id tentabam construendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aquâ, superior & major proximè supra aquam filo affixus esset, & in aere oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut (°) in tabulâ sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amisso proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo resistentias mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè supra mercurium affixus erat globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aquâ communi, ut pendulo in fluido utroque successivè oscillante, invenirem proportionem resistentiarum; & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, putà cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argen-

(o) * *In tabulâ sequente.* Arcuum differentiæ dividantur per numerum oscillationum in casu unoquoque, & prodibunt differentiæ in oscillatione unâ mediocri 1. 1851; 0. 3076; .0827; .0235; .0073; .0023 .0010 quæ sunt quam proximè ut quadrata velocitatum, sive ut 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{256}$ in majoribus oscillationibus. priores enim termini sunt proximè sequentium fere quadrupli, in minoribus verò oscillationibus præcedentes termini sunt in minore ratione ad sequentes.

argenti vivi in eâ ratione ad resistentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine globi immersi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proximè. Non dico accuratè. Nam fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio magis resistunt quàm liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quàm aqua pluvialis, aqua quàm spiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in aere, in aquâ seu dulci seu salsâ, in spiritibus vini, terebinthi & salium, in oleo à fæcibus per destillationem liberato & calefacto, oleoque vitrioli & mercurio, ac metallis liquefactis, & si qui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrimè in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accuratè obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

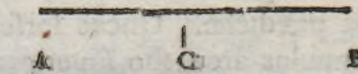
Denique cùm nonnullorum opinio sit, medium quoddam æthereum & longè subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrimè permeet; à tali autem medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concavâ, ut annulus arcu suo superiore aciei annixus liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam à perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare,

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissimè invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, unà cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tensum (p) dimidio ponderis sui pendulum à perpendiculo digressum semper urget. Huic ponderi addebam pondus aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resisten-

tiam

(p) * *Dimidio ponderis sui.* Fili tensi A B homogenei & æqualis ubique crassitiei centrum gravitatis est in loco medio C, (59. *lib.* 1.) idcóque vis quâ filum pondere suo toto P, ad rotandum circà A, urgetur, est ut $AC \times P$, seu ut $\frac{1}{2} P \times AB$.) 63. *lib.* 1.) jam si inveniendum sit pondus Q in B locandum ut momentum $Q \times AB$ æquivaleat momento seu vi fili totius; erit $Q \times AB = \frac{1}{2} P \times AB$, ideóque $Q = \frac{1}{2} P$. Quarè filum tensum dimidio ponderis sui P pendulum à perpendiculo digressum semper urget.

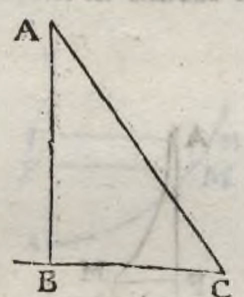


tiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam ſi æquales eſſent ambarum reſiſtentiæ, pyxis plena ob vim ſuam inſitam ſeptuagies & octies majorem vi inſitâ pyxidis vacuæ, motum ſuum oſcillatorium tanto diutius conſervare deberet, atque ideo completis ſemper oſcillationibus 78 (q) ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oſcillationibus 77.

Deſignet igitur A reſiſtentiam pyxidis in ipſius ſuperficie externâ, & B reſiſtentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & ſi reſiſtentiæ corporum æquivelocium in partibus internis ſint ut ma-

(q) * *Ad loca illa notata redire.* Si reſiſtentiæ in ſingulis oſcillationibus eſſent æquales, motus amiſſi, ut potè reſiſtentiis proportionales, eſſent quoque æquales; ſed motus amiſſi, paribus oſcillationum temporibus, ſunt ut maſſæ ſeu pondera corporum & ſpatia motibus amiſſis deſcribenda conjunctim; ideoque ſpatia illa eſſent ut pondera inversè; hoc eſt, ſpatium motu pixidis vacuæ amiſſo in unâ oſcillatione deſcribendum, eſſet ad ſpatium motu pixidis plenæ oſcillatione unâ amiſſo percurrendum ut 78 ad 1, & propterea ſpatia illa, completâ unicâ pixidis vacuæ oſcillatione, & pixidis plenæ oſcillationibus 78 abſolutis, forent æqualia quamproximè, atquè ideò pixis plena, completis ſemper oſcillationibus 78, ad loca notata rediret.

Cùm in hâc Sectione 6â. NEWTONUS de ſolo corporum in cycloide oſcillantium motu egerit, multa verò à recentioribus authoribus inventa ſint, quibus generalis motuum in curvis quibuſlibet theoria longe promota eſt, principia quibus uſi ſunt ſequenti problemate breviter exponemus.



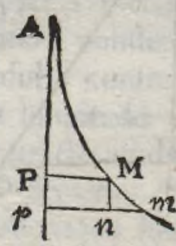
PROBLEMA.

188. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum corporis per curvam quamlibet aſcendentis vel deſcendentis in medio uniformi cujus reſiſtentia eſt ut velocitatis functio quælibet.

De corporum aſcenſu ac deſcenſu in lineis rectis ad horizontem quomodocumque inclinatis agere hic neceſſum non eſt; 188.
ſi enim corpus in lineâ rectâ A C ad horizontem B C utcumque inclinatâ aſcendat vel deſcendat, reſiſtentia & celeritas in quibuſcumque locis & ſpatium deſcriptum ac tempus quo deſcriptum eſt, definiuntur per Prop. 3. Sect. 1; 8am. & 9am. Sect. 2; 13am. & 14am. Sect. 3. ac per notas iiſdem locis adjunctas. Cum enim vis gravitatis ſecundum directionem A B urgentis ſit ad ipſius partem quæ agit juxtà directionem A C, in datâ ratione lineæ A C ad A B, ſeu in datâ ratione ſinûs totius ad ſinum anguli inclinationis A C B; ſi loco vis gravitatis horizonti perpendicularis adhibeatur in calculis & constructionibus pars illius data quæ ſecundum directionem A C agit, conſtructiones calculique in citatis locis non mutantur. Supereſt igitur ut corporis in curvâ lineâ aſcendentis aut deſcendentis motum definiamus.

Deſ-materia, ſeu numerus particularum quibus reſiſtitur: erit 78 B reſiſtentia pyxidis plenæ in ipſius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ reſiſtentia tota A + B erit ad pyxidis plenæ reſiſtentiam totam A + 78 B ut 77 ad 78, & diviſim A + B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A + B ad B ut 77 × 77 ad 1, & diviſim A ad B ut 5928 ad 1. Eſt igitur reſiſtentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejuſdem reſiſtentia in externâ ſuperficie, & amplius. Sic verò diſputamus ex hypotheſi quod major illa reſiſtentia pyxidis plenæ, non ab aliâ aliquâ causâ latente oriatur, ſed ab actione ſolâ fluidi alicujus ſubtilis in metallum incluſum.

Hoc



Deſcendat primùm corpus è loco dato A per curvam A M, ducatur verticalis A P, ad quam ex punctis M, & m, infinitè propinquis demittantur perpendicula M P, m p, & ex M ad p m perpendiculum M n. Gravitas conſtans ſecundùm directionem verticali A P parallelam ſemper agens ſit $= g$, reſiſtentia in loco M $= r$, velocitas corporis ibidem $= v$; tempus quo deſcribitur A M $= t$, A P $= x$, A M $= s$, P p $=$ M n $= dx$, & M m $= ds$. Jam verò M m, eſt ad M n, ſeu ds ad dx, ut vis gravitatis g ad ipſius partem in directioue M m agentem quæ ideo erit $= \frac{g\,dx}{ds}$; ſubducatur vis reſiſtentiæ r, & vis reſidua quâ corpus in loco M, juxtà directionem, M m urgetur erit $= \frac{g\,dx}{ds} - r$. Undè (18) fit $g\,dx - r\,ds = v\,dv$. Hujus autem æquationis fluens ità ſumi debet ut evaneſcentibus x & s evaneſcat quoque v ſi velocitas corporis in loco A nulla ſit, & fiat $v = c$, ſi velocitas corporis in A, ſit $= c$. Simili modo ſi corpus è loco dato A per arcum A M aſcendat, & omnia ut modò ſuppoſuimus maneant, erit (18) $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, cujus æquationis fluentem ità ſumi oportet ut poſitis x & $s = 0$, fiat v, æqualis velocitati in loco A datæ.

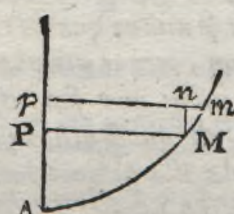
Si abſciſſa x in verticali B C per curvæ A C D punctum infimum C ducta capiatur, ſitque B P $= x$, & cætera maneant ut ſupra, erit adhuc pro corporis deſcenſu $g\,dx - r\,ds = v\,dv$; at pro aſcenſu per arcum C μ ſi data ſint puncta A & B, dicaturque C μ vel A C $\mu = s$, erit $-g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, ſeu adhuc $g\,dx - r\,ds = v\,dv$, quia creſcente s decreſcit x & contrà. Si vero dicatur C P $= x$ & C M $= s$, quia hæ quantitates reſpectu aliarum B P, & A M negativæ ſunt, fiet pro deſcenſu $-g\,dx + r\,ds = v\,dv$, ſeu $g\,dx - r\,ds = -v\,dv$, & pro aſcenſu ſi dicatur C $\mu = s$ erit $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$ quarum æquationum altera in alteram abit, mutato ſigno quantitati r, præfixo. Ex datâ igitur lege reſiſtentiæ, loco r ſcribatur ipſius valor per v & datas quantitates, & ex datâ æquatione ad curvam A M, loco dx ſcribatur valor ejus per ds, s & datas quantitates in ſuperioribus formulis ſeu æquationibus; & deinde per curvarum quadraturas vel per ſeries, capiantur, ut oportet, formularum fluentes, obtinebitur

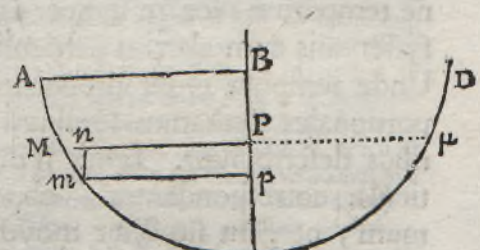
Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in quâ illud aliquando deſcripſeram, intercidit. Unde fractas quaſdam numerorum partes, quæ memoriâ exciderunt, omittere compulſus ſum.

Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cùm unco infirmo uſus eſſem, pyxis plena citius retardabatur. Cauſam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oſcillationibus obſequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum ſuſpenſionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti ſupra deſcripſimus. SEC-

tur v per s & contrà, atque etiam r per s, & quia tempus t, quo arcus s deſcribitur eſt S. $\frac{ds}{v}$, dabitur quoque tempus. Q. E. I.

Exempli causâ. Sit reſiſtentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, quæ eſt Hypotheſis naturæ, ſeu ſit $r = \frac{aa + vv}{b}$, dicanturque BP $= x$, AM $= s$ & æquatio $g\,dx - r\,ds = v\,dv$ in hanc migrabit $g\,dx - \frac{aa\,ds}{b} = v\,dv + \frac{vv\,ds}{b}$; ut hoc ſecundum æquationis membrum debitam formam acquirat, ponatur $ds = \frac{\frac{1}{2}b\,dz}{z}$, ſeu $s = \frac{1}{2}b$ L. z, æquatio evadet $gz\,dx - \frac{1}{2}aa\,dz = zv\,dv + \frac{1}{2}vv\,dz$, ſumptis fluentibus, fit g S. $z\,dx - \frac{1}{2}aaz = \frac{1}{2}zvv$. Undè invenietur $vv = \frac{2g\,\text{S.}\,z\,dx}{z} - aa$. Eſt autem S. $z\,dx$, area curvæ cujus abſciſſa x & ordinata z; & z datur per s, ope logarithmicæ, & x per s ope æquationis ad curvam AM. Sit h numerus cujus logarithmus eſt unitas, ſeu L. $h = 1$, erit s L. $h = \frac{1}{2}b$ L. z, & $\frac{2s}{b}$ L. $h =$ L. $h^{\frac{2s}{b}} =$ L. z. atquè $h^{\frac{2s}{b}} = z$, undè habetur $vv = \frac{2g\,\text{S.}\,h^{\frac{2s}{b}}\,dx}{h^{\frac{2s}{b}}} - aa$.





Si in his æquationibus ponatur $a = 0$, definietur motus corporis in lineâ qualibet curvâ deſcendentis & aſcendentis in medio uniformi, cujus reſiſtentia velocitatis quadrato proportionalis eſt. Cæterum totam hanc materiam copioſiſſimè & accuratiſſimè tractavit Clariſſ. *Eulerus* Tom. 2. Mechan. 188.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXII. THEOR. XXVI.

SECTIO VII.

De motu fluidorum & resistentiâ projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent se mutuò, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri. (r).

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: putà si particulæ unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes à particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem incœptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuo occur-

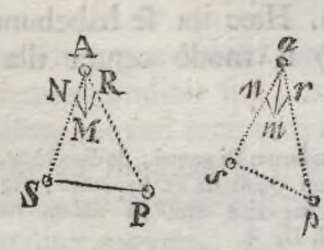
(r) * *Similiter moveri.* Sunto A & a, P & p, S & s, &c. particulæ in duobus systematibus sibi mutuò correspondentes. Particula A in suo systemate tempore T, describat spatium quam minimum A B, & particula correspondens a, in altero systemate tempore t, describat spatium a b, priori A B, simile similiterque situm, ità ut sit A B, ad a b, ut diameter particulæ A, ad diametrum particulæ a, sivè ut A S ad a s, vel P S ad p s, & angulus A S B æqualis angulo a s b, atque S A B æqualis s a b. Et aliæ sibi mutuò correspondentes particulæ quiescant vel simili modo moveantur. His positis, demonstrandum est, quod si sumantur tempora alia quæ sint ut T & t, particulæ correspondentes, erunt utrinque similiter positæ.

currant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter (f) in lineis rectis per motûs leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, (t) vires totæ quibus particulæ correspondentes

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXII. THEOR. XXVI.

(f) * *In lineis rectis per mot. leg. 1.* Ideóque ob velocitates uniformes & similes motuum directiones pergent similiter moveri temporibus proportionalibus, usque ad occursus suos primos.

(t) * *Vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur similes habebunt determinationes, & erunt ad invicem ut correspondentium particularum Diametri inversè & quadrata velocitatum directè.*



* Particula *A* inter duas *S* & *P*, & particula *a* inter duas *s* & *p* sint similiter sitæ, & quâcumque celeritate in directione similiter positâ particulæ illæ *A* & *a* ferantur, trahanturque vel fugentur illæ particulæ *A* & *a* à particulis *S* & *P*, *s* & *p* per vires quæ sint ut Diametri particularum correspondentium inversè sive ut lineæ homologæ inversè, & quadrata velocitatum directè, dico 1°. quod directio vis compositæ trahentis particulas *A* & *a* similiter posita erit in utroque systemate, nam anguli S A P & s a p, quos faciunt vires agentes, ex hypothesi æquales sunt, vis autem composita sequetur Diagonalem quæ faciat angulos cum directione utriusque vis componentis quorum sinus sint reciprocè ut vires agentes, per nat. virium compositarum, sit ea Diagonalis hic A M, illic a m, erit ergo sinus anguli S A M, ad sinum anguli P A M, inversè ut vis particulæ S ad vim particulæ P sive directè ut lineæ homologæ S A & P A (nam quoniam de unico corpore A nunc agitur ratio quadratorum velocitatum hic nihil mutat) pariter sinus anguli s a m est ad sinum Anguli p a m ut s a ad p a; sed est S A ad P A sicut s a ad p a ex hypothesi, ergo anguli æquales S A P & s a p in eadem ratione secantur per lineas A M, a m, ideoque anguli S A M & s a m, M A P & m a p sunt æquales, ergo directio vis compositæ trahentis particulas *A* & *a* in singulo systemate similiter est posita. Q. erat 1um. 188.

2°. Vires illæ compositæ erunt ut particularum Diametri inversè & quadrata velocitatum directè.

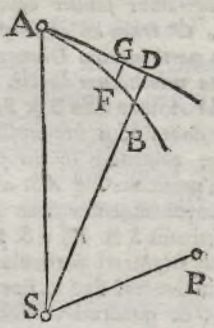
Secetur utcumque in directione AS lineola AN quæ vim particulæ S exprimat, ducaturque N M, parallela AP, & ex M ducatur M R parallela A S, fiet parallelogrammum A N M R, in quo M R = A N, & angulus A M R = ang. M A N, ideoque A N ad A R ut sinus anguli M A R ad sinum ang. M A N, sive ut P A ad S A, hoc est ut vires particularum *S* & *P*, ideoque A R exprimet vim particulæ *P*, & A M exprimet vim compositam ex viribus *S* & *P*. Sumatur in a s lineola a n, quæ sit ad A N, ut a s ad A S inversè, & ut quadratum velocitatis in *a* ad quadratum velocitatis in *A* directè, ductisque n m & m r parallelis lineis a p, a s erunt a n & a r ut vires particularum s & p, & a m exprimet vim ex iis compositam.

Sed ob similitudinem triangulorum ANM, a n m est AN ad AM sicut a n ad a m, sive vis particulæ *A*, ad vim compositam ex particulis *S* & *P*, ut vis particulæ *a* ad vim compositam ex particulis *s* & *p*, ideoque vicissim, vis particulæ *A* ad vim particulæ *a* ut, vis composita ex vi particularum *S* & *P*, ad vim compositam ex viribus particularum *s* & *p*; Sed vis particulæ *A* est ad vim particulæ *a*, inversè ut partes agitantur, ex viribus ſingulis agitantibus (per legum corollarium ſecundum) compoſitæ, ſimiles habebunt determinationes, perinde ac ſi centra inter particulas ſimiliter ſita reſpicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires ſingulæ componentes, hoc eſt, ut correſpondentium particularum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: & propterea efficient ut correſpondentes particulæ figuras ſimiles deſcribere pergant. (u). Hæc ita ſe habebunt (*per corol.* 1. *&* 8. *prop.* IV. *lib.* 1.) ſi modò centra illa quieſcant. Sin moveantur, quoniam

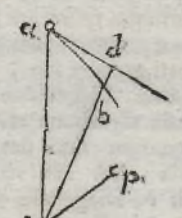
particularum Diametri, & directè ut velocitatum Quadrata ex hypotheſi, ergo vires compoſitæ ſunt in eàdem ratione. Q. E. D.

Idem ratiocinium ad vires compoſitas ex pluribus particulis extendetur. Unde *vires totæ &c.*

(u) * *Hæc ità ſe habebunt.* (*Per cor.* 1. *&* 8. *prop.* 4. *lib.* 1.) Aut quod idem eſt per hoc Lemma.



189. *Lemma.* Si corpora duo A, a, circà centra immota S, s, projiciantur ſecundum directiones AD, ad, quæ cum diſtantiis AS & as æquales angulos DAS, das conſtituunt, & urgeantur viribus acceleratricibus centra illa S, s reſpicientibus, quæ ſemper ſint inter ſe ut quadrata velocitatum corporum directè & diſtantiæ à centris inversè, corpora illa figuras ſimiles circà centra S & s deſcribent, ſimileſque & proportionales figurarum illarum partes temporibus proportionalibus percurrent.



In projectilium directionibus capiantur partes quam minimæ AD, ad diſtantiis AS, as proportionales. Jungantur SD, sd & corpora A, a temporibus quibuſvis T, t deſcribant arcus AB, ab qui lineas SD, sd attingunt. Sumantur arcus AF, ab qui eodem tempuſculo deſcripti ſint, & ductâ FG parallelâ SD, erit (4. *lib.* 1.) FG ad bd ut vis centralis quâ corpus A urgetur ad vim centralem quâ urgetur corpus a; & quia vires illæ (*per hyp.*) ſunt ut quadratum velocitatum directè & diſtantiæ AS, as, inversè, velocitates autem ſunt ut ſpatia quæ ſimul deſcripta fuiſſent in Tangente AG, ad, erit FG ad bd, ut $AG^2 \times as$ ad $ad^2 \times AS$. Sed (*per cor.* 1. *Lem. XI.*) $BD : FG = AD^2 : AG^2$; quarè (per compoſitionem rationum & ex æquo) $Bd : bd = AD^2 \times as : ad^2 \times AS$. Cùm igitur ob triangulorum ASD, asd, ſimilitudinem (*ex hyp.*) ſit $AD : ad = AS : as$ & ideò $AD^2 \times as : ad^2 \times AS = AS : as$; erit $BD : bd = AS : as$, & ob ſimilitudinem niam (x) ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque (y) ad occursus suos primos, & propterea similes occursus, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et similes & similiter positæ systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcumque moveri incipiant: hæ similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque ideo spatia diametris suis proportionalia describere.

PRO-

nem figurarum, ut A D ad a d, ideoque ob æquales angulos D & d, triangula A D B, a d b erunt similia, & propterea arcus A B, a b, similes & similiter siti. Simili modo demonstrabitur quod corpora è locis B & b progressa similes arcus a c similiter positos describant, atque ità deinceps. Describent ergò figuras similes circà centra S & s. His verò demonstratis patet (*196. lib.* 1.) quod describent similes & proportionales figurarum similium partes temporibus proportionalibus, seu quæ semper sint ut tempora T & t.

(x) * *Ob translationum similitudinem.* Oriuntur enim centrorum illorum translationes ex causis proportionalibus & similiter agentibus, videlicet ex similibus particularum similium & correspondentium motibus, adeò ut quemadmodum initio motûs centra similiter moveri cœperunt, similiter quoque deinceps moveri pergant. 189.

(y) * *Usque ad occursus suos primos &c.* Nam cùm particularum correspondentium distantiæ, post quævis tempora proportionalia, sint semper in datâ diametrorum ratione in duobus systematibus (*ex dem.*), necesse est ut distantiæ temporibus proportionalibus evanescant, & proindè ut particularum occursus primi

 con-

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum suarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis partium systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices à quibus oriuntur, (z) id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (*per hypothesin*) ut quadrata velocitatum directè & distantiæ particularum correspondentium inversè & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directè: ideoque cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, (a) & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum; resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium systematum. *Q. E. D.* (b) Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires

contingant, ubi particulæ illæ figurarum similium partes similes descripserunt. Ex quo sequitur particularum illarum occursus primos similes fore, tum ratione directionum, quod jam demonstratnm est, tum etiam ratione velocitatum & quantitatum motûs. Siquidem spatia percursa temporibus proportionalibus sunt semper in datâ ratione, ideoque velocitates in locis similibus sunt semper in datâ ratione, & indè ob particularum correspondentium similitudinem & datam densitatum rationem, quantitates motûs quæ sunt ut velocitates & densitates & volumina conjunctim, in locis similibus manent in datâ ratione. Reflexiones igitur quæ ex ejusmodi motibus atque occursibus similibus nascuntur, similes erunt.

(z) * *Id est ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ* (per def. 8. lib. 1.)

(a) * *Et quantitates materiæ sint &c.* Quantitates materiæ sunt ut densitates & volumina partium conjunctim (2. *lib.* 1.), & ob partium similitudinem, volumina sunt ut cubi laterum homologorum, seu diametrorum, ideóque quantitates materiæ sunt ut densitates partium & cubi diametrorum.

(b) * *Posterioris generis resistentiæ &c.* Si enim vires reflexionum supponantur æquavires conjunctim. Numeri autem reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè, & ſpatia inter earum reflexiones inversè. Et vires reflexionum ſunt ut velocitates & magnitudines & denſitates partium correſpondentium conjunctim; id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, reſiſtentiæ partium correſpondentium ſunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & denſitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi ſyſtemata illa ſint fluida duo elaſtica ad modum aeris, & partes eorum quieſcant inter ſe: corpora autem duo ſimilia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & denſitatem proportionalia, & inter partes illas ſimiliter poſita, ſecundum lineas ſimiliter poſitas, utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum ſe mutuo agitant, ſint ut corporum projectorum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus ſimiles excitabunt motus in fluidis, & ſpatia ſimilia ac diametris ſuis (c) proportionalia deſcribent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox reſiſtentiam patitur, quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Nam ſi vires, quibus particulæ diſtantes ſe mutuo agitant,

quales, reſiſtentiæ ſunt ut numeri reflexionum ſeu occurſuum; & ſi numeri reflexionum æquentur, reſiſtentiæ ſunt ut vires reflexionum correſpondentium; undè, cunjunctis his rationibus, reſiſtentiæ quæ ex particularum & partium majorum occurſibus & reflexionibus oriuntur, ſunt ſemper ut reflexionum correſpondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum, cæteris paribus, ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè, &, cæteris paribus, ſunt inversè ut ſpatia inter particularum & partium correſpondentium occurſus ſeu reflexiones intercepta, id eſt, inversè ut partium correſpondentium diametri, ideóque *numeri reflexionum ſunt ad invicem ut velocitates partium correſpondentium directè* & earumdem diametri inversè. *Et vires reflexionum ſunt ut* motûs quantitates in occurſibus *id eſt, ut velocitates & diametrorum cubi & denſitates partium correſpondentium. Et conjunctis his omnibus rationibus &c.* 189.

(c) * *Proportionalia deſcribent.* Probatur enim ut in dem. prop. 32. lemmate (189) ſimiles ſimilium figurarum partes temporibus proportionalibus à corporibus illis ſemper deſcribi. Undè corollarium hoc patet (*per cor.* 1. *&* 2. *prop.* 32.).

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXIII. Theor. XXVII.

tant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, (d) resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; (e) ideoque in medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunto igitur media tria A, B, C ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes mediorum A & B fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut T & V, illæ medii C ejusmodi viribus omninò destituantur. Et si corpora quatuor æqualia D, E, F, G in his mediis moveantur, priora duo D & E in prioribus duobus A & B, & altera duo F & G in tertio C; sitque velocitas corporis D ad velocitatem corporis E, & velocitas corporis F ad velocitatem corporis G in subduplicatâ ratione virium T ad vires V: resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis E, & resistentia corporis F ad resistentiam corporis G, (f) in velocitatum ratione duplicatâ; & propterea resistentia corporis D erit ad resistentiam corporis F ut resistentia corporis E ad resistentiam corporis G. Sunto corpora D & F æquivelocia ut & corpora E & G; & augendo velocitates corporum D & F in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum medii B in eâdem ratione duplicatâ, (g) accedet medium B ad formam & conditionem medii C pro lubitu,

(d) * *Resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè.* Nam si idem corpus variâ cum velocitate in uno eodemque fluido similiter projiciatur, eædem sunt resistentiæ, ac si corpora duo similia & æqualia similiter projicerentur in duobus fluidis priori omnino paribus; sed in hoc casu, ob æquales inter se partium correspondentium diametros & densitates, resistentiæ sunt in duplicatâ ratione velocitatum accuratè (*per prop.* 33. *&* *ejus coroll.* 1.). Ergò &c.

(e) * *Ideòque in medio &c.* In medio cujus partes ab invicem distantes sese viribus quibuscumque in ratione velocitatis duplicatâ crescentibus agitant, resistentia (ex modò dem.) est semper in eâdem ratione duplicatâ; Quarè si vires illæ quibus particulæ sese agitant, supponantur quàm minimæ, manebit semper resistentia in ratione velocitatis duplicatâ accuratè; evanescant tandem illæ vires, manet resistentia in ratione velocitatis duplicata; sed idem melius patet per secundam partem demonstrationis propositionis hujus 33.

(f) * *In velocitatum ratione duplicatâ.* (Ex demonstratis initio coroll. hujus.).

(g) * *Accedet medium B* &c. Si enim velocitates corporum D & F, quam maximè augerentur vires particularum medii B, manentibus viribus medii A & velocitate corporis E quam maximè decrescerent, quia est semper vis medii A ad vim medii B ut quadratum velocitatis corporis D ad quadratum velocitatis corporis E.

bitu, & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium E & G in his mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cùm resistentiæ corporum D & F sint ad invicem ut resistentiæ corporum E & G, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D & F, ubi velocissimè moventur, resistentiæ sunt æquales quam proximè: & propterea cùm resistentia corporis F sit in duplicatâ ratione velocitatis, erit resistentia corporis D in eâdem ratione quàm proximè.

([h]) *Corol.* 3. Corporis in fluido quovis elastico velocissimè moti eadem ferè est resistentia ac si partes fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo fluidi vis elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cùm resistentiæ similium & æquivelocium corporum, in medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, ([i]) sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium & celerrimè motorum corporum resistentiæ in fluido elastico ut quadrata diametrorum quàm proximè.

Corol. 5. Et cùm corpora similia, æqualia & æquivelocia, in mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vicissim (per motûs legem tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifes-

(h) * *Corollarium* 3. Patet per cor. 2. in quo vis T quâ particulæ medii A in quo corpus D movetur se fugiunt, qualiscumque supponitur; corporum D & F ubi velocissimè moventur, resistentiis manentibus æqualibus quam proxime, licet medii C in quo corpus F movetur, particulæ viribus centrifugis prorsus destituantur. Patet etiam ex eo quod supponatur vires non habere satis temporis ad agendum, unde casus redit ad eum in quo vires illæ nullæ sunt. 189.

(i) * *Sint ut quadrata diametrorum.* Per 2am. partem dem. prop. hujus, ob datas corporum velocitates & medii densitatem datam.

nifestum est etiam quod in ejusdem densitatis fluidis elasticis, ubi velocissimè moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proximè; sive fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex medii subtilitate resistentia projectilium celerrimè motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita se habent in fluidis, quorum vis elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis causâ, quâ motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quàm in superioribus corollariis.

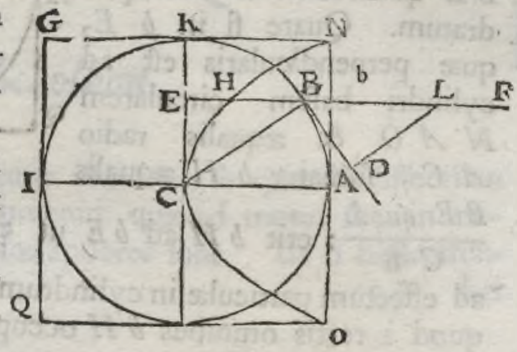
PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si globus & cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constante, secundùm plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplo minor quàm resistentia cylindri.

Nam quoniam actio medii in corpus eadem est (per legum corol. 5.) sive corpus in medio quiescente moveatur, sive medii particulæ eâdem cum velocitate (k) impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, & videamus quo impetu urgebitur à medio movente. Designet igitur $ABKI$ corpus sphæricum centro C semidiametro CA descriptum, & incidant particulæ medii datâ cum velocitate in corpus illud sphæricum, secundum rectas ipsi AC parallelas: sitque FB ejusmodi recta. In eâ capiatur LB semidiametro CB æqualis, & ducatur BD quæ sphæram tangat in B. In KC &

(k) * *Impingant in corpus quiescens.* Eadem enim est in utroque casu velocitas respectiva, eademque proindè vis percussionis (*per dem. in cor.* 5. *leg. mot.*) idem quoque manifestum est per motûs Leg. 3. quia fluidum & corpus ob reactionem actioni æqualem & contrariam, in utroque casu in se mutuò agunt.

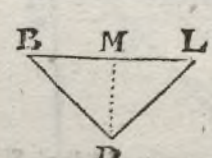
& BD demittantur perpendiculares BE, LD, & vis quâ particula medii, secundùm rectam FB obliquè incidendo, globum ferit in B, erit ad vim quâ particula eadem cylindrum $ONGQ$ axe ACI circa globum descriptum perpendiculariter feriret in b, (l) ut LD ad LB vel BE ad BC. Rursus efficacia hujus vis ad movendum globum secundum incidentiæ suæ plagam FB vel AC, est ad ejusdem efficaciam ad movendum globum secundùm plagam determinationis suæ, id est, secundùm plagam rectæ BC quâ globum directè urget (m) ut BE ad BC. Et (n) conjunjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum secundum rectam FB obliquè incidentis,



ad movendum eundem secundùm plagam incidentiæ suæ, est ad

(l) * *Ut L D ad LB vel B E ad B C.* Si enim recta data L B exponat vim quâ particula medii circularem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, & vis illa (*per leg. cor.* 2.) resolvatur in vires B D, L D, vis B D juxtà directionem tangentis in B agens nullam efficaciam habet ad globum promovendum & recta L D vim exponet quâ particula medii globulum perpendiculariter ferit in B. Quia verò radius C B, tangenti perpendicularis est, & ideo (*per constr.*) D L parallela C B, triangula rectangula C E B, B D L, similia sunt, imo ob B L = C B (*per constr.*) æqualia; Est igitur L D ad L B ut B E ad B C.

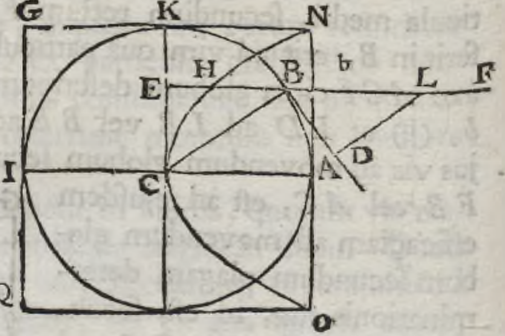
(m) 190. * *Ut B E ad B C.* Vis L D ductâ ex puncto D ad L B perpendiculari D M, iterum resolvatur in vires L M & M D, & ob triangulorum L M D L D B, similitudinem, erit vis L M ad vim L D, ut L D ad L B, seu ut B E ad B C; nulla verò ratio habenda est vis M D, cujus directio perpendicularis est ad axem A I, quia simili constructione factâ ad alteram hujus axis partem in puncto sphæræ



quod puncto B directè oppositum est, vis M D, vi æquali & directè oppositâ eliditur. Unde sola consideranda est vis L M, quæ secundùm directionem axi A I parallelam agit. Est autem vis L M ad vim L B quâ particula medii circularem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, ut L D² ad L B², ob continuè proportionales L M, L D, L B. 190.

(n) * *Conjunctis rationibus.* Et ex æquo.

ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut BE quadratum ad BC quadratum. Quare si in bE, quæ perpendicularis est ad cylindri basem circularem NAO & æqualis radio AC, sumatur bH æqualis $\frac{BE \text{ quad.}}{CB}$: erit bH ad bE ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. (°) Et propterea solidum quod à rectis omnibus bH occupatur erit ad solidum quod à rectis omnibus bE occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. (p) Sed solidum prius est parabolois vertice C, axe CA & latere recto CA descriptum, & solidum posterius est cylindrus para-



(o) * *Et propterea solidum.* Si in omnibus rectæ N A punctis erigantur perpendicula ut b H & b E, sitque N H C curva quam punctum H perpetuò tangit, & recta K C locus omnium punctorum E; solidum quod perpendiculis omnibus b H, per totam basim cylindri ductis occupatur, æquale erit conoidi seu figuræ solidæ quæ ex rotatione figuræ planæ N H CA circà axem C A factâ generatur, & solidum quod à rectis omnibus b E occupatur erit cylindrus ex rotatione rectanguli A K circà eundem axem C A factâ descriptus.

(p) * *Sed solidum prius.* Cùm (*per constr.*) sit $bH = \frac{BE^2}{CB}$ ideoque $bH \times CB = \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$ & (ex naturâ circuli) $BC = CA = KC$, ideoque $BE^2 = KC^2 - CE^2$ & $bH \times CB$, seu $\overline{KC - EH} \times KC$, seu $KC^2 - KC \times EH = KC^2 - CE^2$, ideoque $KC \times EH = CE^2$; sed si ex puncto H duceretur ad C A, ordinata perpendicularis, hæc esset æqualis C E, & abscinderet à C A, partem æqualem E H. Quarè rectangulum sub abscissâ & datâ lineâ K C sive C A, æquale est quadrato ordinatæ ad C A perpendicularis; unde curva C H N, (*per theor.* I. *de Parab.*) est Parabola cujus vertex C, axis C A, & latus rectum C A.

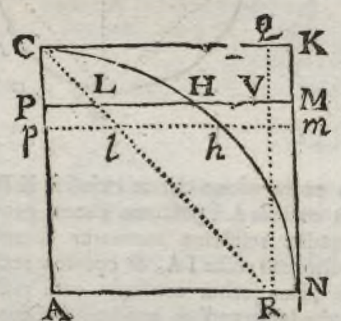
paraboloidi circumſcriptus, & notum eſt (†) quod paraboloïs ſit ſemiſſis cylindri circumſcripti. Ergo vis tota medii in globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in cylindrum. Et propterea ſi particulæ medii quieſcerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia globi duplo minor quàm reſiſtentia cylindri. *Q. E. D.*

Scholium.

(q) Eâdem methodo figuræ illæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari

(†)* *Et notum eſt quòd &c.*

191. *Lemma.* Parabolois ſeu ſolidum ex rotatione Parabolæ C H N, circà axem C A genitum eſt ſemiſſis cylindri circumſcripti, qui producitur ex rotatione rectanguli A K circà latus C A. Per punctum mobile P, erigatur ad axem C A normalis P M, parabolam ſecans in H, & rectam K N in M; & in rotatione figuræ totius circà axem C A, lineæ P H & P M circulos deſcribent, qui erunt inter ſe ut radiorum P H, P M quadrata, ſeu (*ex naturâ Parabolæ*) & ob P M = A N, ut abſciſſæ C P, C A. Ducatur jam punctum P cum verticali P H M per totam altitudinem C A, & ſolidum ex rotatione figuræ C H N genitum erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K N A ortum, ut ſumma omnium circulorum quos recta mobilis P H rotando deſcribit, ad ſummam omnium circulorum quos deſcribit recta P M, hoc eſt, ut ſumma omnium C P, ad ſummam omnium C A. In lineâ A N; capiatur A R æqualis A C, jungatur C R ſecans P H in L, & erigatur ad A R, perpendicularis R Q, ſecans P M in V; cum ſit ſemper P L = C P, & P V = C A, ſumma omnium C P, ſeu P L, per totam altitudinem C A, eſt triangulum iſoſcele C R A, & ſumma omnium

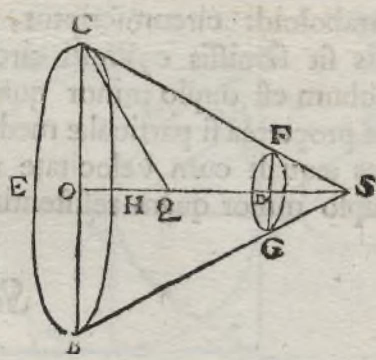


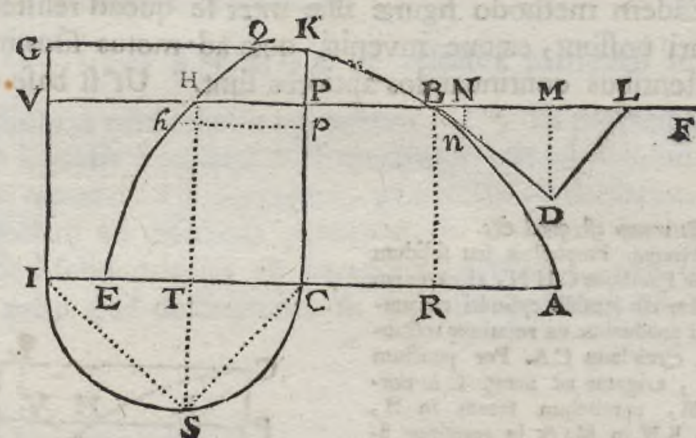
C A, ſeu P V, per eandem altitudinem C A, eſt quadratum C A R Q; cum igitur triangulum C R A, ſit ſemiſſis quadrati C A R Q, Parabolois eſt etiam ſemiſſis cylindri circumſcripti. Q. E. D. 191.

(q) 192. *Eâdem methodo &c.* Solidum

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXIV. Theor. XXVIII.

lari $CEBH$, quæ centro O, radio OC deſcribitur, & altitudine OD, conſtruendum ſit fruſtum coni $CBGF$, quod omnium eâdem baſi & altitudine conſtructorum & ſecundùm plagam axis ſui verſus D progredientium fruſtorum minimè reſiſtatur:





dum ex rotatione curvæ cujuſvis K B A, circà rectam A I poſitione datam genitum in medio reſiſtente moveatur ſecundùm directionem rectæ I A, & oporteat reſiſtentiam quam patitur conferre cum reſiſtentiâ cylindri ſecundùm eandem directionem moti & cujus baſis eſt circulus radio K C ad A C normali deſcriptus. Diametro C I ad arbitrium aſſumptâ deſcribatur ſemicirculus C S I, agatur per punctum I chorda I S, parallela B D curvam tangenti in puncto quovis B; ducatur per B recta B V parallela A I, & per S recta S H parallela C K, ambæ concurrentes in H, ſitque Q H E curva quam punctum H perpetuò tangit; & completo rectangulo CKGI, reſiſtentia ſolidi rotundi per converſionem curvæ K B A circà C A geniti erit ad reſiſtentiam baſis ipſius, ſeu circuli centro C & radio C K deſcripti, ut ſolidum ex rotatione figuræ K Q H E circà C I genitum, ad cylindrum rotatione rectanguli C K G I circà eandem C I factâ deſcriptum. Producatur enim H B ad L, ut ſit $BL = CI$; ex puncto L demittatur ad B D perpendicularis L D, & ex D ad B L perpendicularis D M; & eodem modo quo ſuprà (190) patet efficaciam particulæ medii ad movendum ſolidum totum K B A ſecundùm plagam incidentiæ ſuæ L B eſſe ad efficaciam particulæ ejuſdem ſecundum eandem rectam in baſim circularem K C, perpendiculariter in P ad cylindrum qui rotatione rectanguli C K G I deſcribitur movendum in plagam eandem, ut eſt LD^2 ad LB^2, ſeu etiam ut eſt L M ad L B; ſed (per conſtr.) $CI = LB$, & ob angulum $SIC = DBL$ & angulum $ISC = BDI$, eſt etiam C T ſeu $PH = LM$; Quarè ſolidum quod à rectis omnibus P H, occupatur,

patur, erit ad solidum quod à rectis omnibus P $V=C\,I$, occupatur, aut quod idem est, solidum ex rotatione figuræ C K Q H E circà C I, erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I genitum, ut resistentia solidi quod figura C K B A circà C A, rotata describit, ad resistentiam baseos circularis quam describit recta C K quæ eadem est cum resistentiâ cylindri cujuslibet ejusdem basis, quia superficies cylindri quam recta K G rotando circà A I describit, nullam resistentiam patitur, secundùm directionem motûs ipsi K G parallelam. Q. E. D.

193. Ex constructione liquet, si recta quæ curvam K B A tangit in A sit ad axem C A normalis, punctum E coincidere cum puncto I, & si recta tangens curvam K B A, in K perpendicularis sit ad K C, punctum Q in quo curva E H secat latus K G coincidere cum puncto K.

194. Ex puncto B demittatur ad C A perpendicularis B R, dicaturque $CI=a$, $AR=x$, $BR=HT=CP=y$, $HP=CT=z$, $BM=dx$, N n perpendicularis ad B L curvæque occurrens in $n=dy$, ac proindè $Bn^2=dx^2+dy^2$. Et quoniam triangula B n N, I C S, similia sunt (*per constr.*) erit $Bn^2:Nn^2=CI^2:CS^2=CI:CT$, hoc est, $dx^2+dy^2:dy^2=a\,z$. Et propterea $a\,dy^2=z\,dx^2+z\,dy^2$, formula per quam ex datâ æquatione ad curvam K B A, inveniri potest æquatio ad curvam alteram E H Q & contrà; nam quoniam $CP=y$, si loco dx eruatur ex æquatione curvæ K B A ejus valor in y & dy habebitur æquatio quæ continebit z, y & dy sive C P, P H & fluxionem P C, cum constantibus.

195. Ducta sit ordinata p h alteri P H infinitè propinqua, & si radius sit ad peripheriam circuli ut unitas ad numerum p, erit py peripheria circuli quem linea P C circà axem C I, rotando describit, ideòque annulus cylindricus quem arcus P H h p in eâdem convolutione describit, erit $pzy\,dy$, & inde solidum ex rotatione figuræ C P H E, genitum, erit $S.\,p\,zy\,dy$, fluente hâc ità sumptâ ut factâ $y=0$ ea evanescat. Quare cùm cylindrus convolutione rectanguli C P V I, descriptus sit $\frac{1}{2}payy$, resistentia solidi ex revolutione figuræ A B R geniti, erit ad resistentiam baseos ipsius circuli radio B R descripti ut $S.\,pzy\,dy$ ad $\frac{1}{2}payy$, seu ut $S.\,zy\,dy$ ad $\frac{1}{2}ayy$.

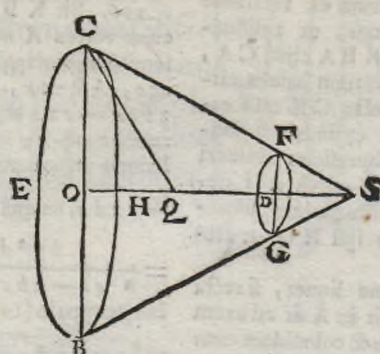
196. Sit K B A ellipsis vel hyperbola cujus vertex A axis principalis A I. Sit semiaxis principalis $=b$, semilatus rectum $=c$, $AR=x$, $RB=y$, & erit $byy=2bcx-cxx$ æquatio ad ellipsim; & $byy=2bcx+cxx$, æquatio ad hyperbolam. Prioris æquationis fluxio $by\,dy=bc\,dx-cx\,dx$, ex quâ habetur $dx^2=\frac{b^2y^2dy^2}{(bc-cx)^2}$

$$=\frac{by^2dy^2}{b^2cc-2bccx+ccxx}=\frac{by^2dy^2}{bcc-cyy}.$$ 196.

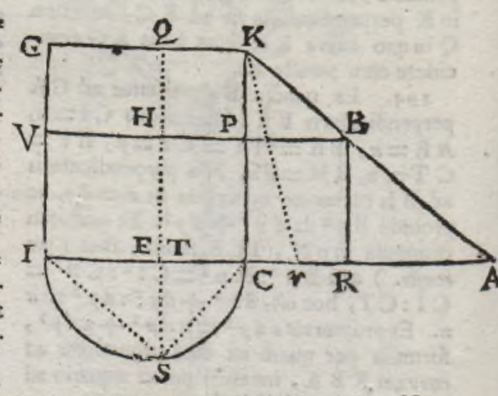
Hinc æquatio (194) $a\,dy^2=z\,dx^2+z\,dy^2$, in hanc abit * $a\,dy^2=\frac{zby^2dy^2}{-cy^2+bcc}+z\,dy^2$ sive dividendo per dy^2 & ad communem denominatorem revocando utrumque æquationis membrum fit $-acy^2+abcc=by^2z-cy^2z+bccz$ ergo est $z=\frac{-acy^2+abcc}{\overline{b-c}\times y^2+bcc}$ & factâ divisione $z=\frac{-ac}{b-c}+\frac{ab^2c^2}{(b-c)\times(\overline{b-c}\times y^2+bcc)}$ unde erit $zydy=\frac{-acydy}{b-c}+\frac{ab^2c^2ydy}{(b-c)\times(\overline{b-c}\times y^2+bcc)}$ sumptisque fluentibus est $S.\,zy\,dy=\frac{-acy^2}{2(b-c)}+\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}L.\,\overline{\overline{b-c}\times y^2+bcc}+Q\,\mathit{const.}$ (ut patebit si hujus quantitatis fluxio sumatur): Facta autem $y=0$ erit $0=\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}L.\,bcc+Q\,\mathit{const.}$ ideoque $Q.\,\mathit{const.}=-\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}L.\,bcc$, unde tandem habetur $S.\,zy\,dy=-\frac{acy^2}{2(b-c)}+\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}(L.\,\overline{\overline{b-c}\times y^2+bcc}-L.\,bcc)$ sive $S.\,zydy=-\frac{acy^2}{2(b-c)}+\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}L.\,\frac{\overline{b-c}\times y^2+bcc}{bcc}$, Est ergo resistentia conoidis Elliptici A B R ad resistentiam suæ baseos, seu circuli radio B R descripti ut $-\frac{cy^2}{2(b-c)}+\frac{b^2c^2}{2(b-c)^2}L.\,\frac{\overline{b-c}\times y^2+bcc}{bcc}$ ad yy. Pro conoide

Hy-

(r) biſeca altitudinem $O\ D$ in Q & produc $O\ Q$ ad S ut ſit $Q\ S$ æqualis $Q\ C$, & erit S vertex coni cujus fruſtum quæritur.



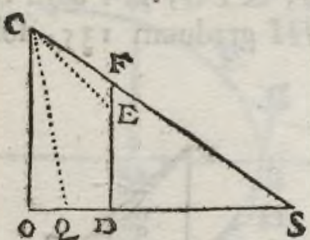
Hyperbolico, invenietur $a\,d\,y^2 = \frac{z\,b\,y^2\,d\,y^2}{c\,y^2 + b\,c\,c} + z\,d\,y^2$ unde eodem iteratò calculo prodibit ratio ejus reſiſtentiæ ad reſiſtentiam baſeos ut $+ \frac{c\,y^2}{2(b+c)} + \frac{b^2\,c^2}{2(b+c)^2} \times$ L. $\frac{\overline{b+c} \times y^2 + b\,c\,c}{b\,c\,c}$ ad y^2. Pro conoide Parabolico, fiat in formulâ reſiſtentiæ Conoidis Elliptici axis b Infinitus, cæteriſque terminis in quibus b non occurrit deletis, erit Conoidis Parabolici reſiſtentia ad reſiſtentiam ſuæ Baſeos ut $\frac{b^2\,c^2}{2\,b^2} \times$ L. $\frac{b\,y^2 + b\,c\,c}{b\,c\,c}$ ad y^2, ſive ut c^2 L. $\frac{y^2 + c\,c}{c\,c}$



197. Sit K B A linea recta, & quia chorda I S parallela eſt rectæ K A, (192) punctum H eſt ſemper in lineâ rectâ T H Q, ideóque reſiſtentia coni revolutione trianguli K A C circà A C geniti erit ad reſiſtentiam circuli radio C K deſcripti, ut cylindrus ex rotatione rectanguli C K Q L ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKGI circà C I, id eſt, ob communem utriuſque cylindri baſim, ut altitudo C T ad altitudinem C I; & eſt C T ad C I, in ratione duplicatâ C S ad C I vel K C ad K A, ſeu in ratione duplicatâ ſinûs anguli K A C ad ſinum totum. Simili modo reſiſtentia coni quem recta B A rotata deſcribit eſt ad reſiſtentiam circuli radio B R deſcripti in eâdem ratione duplicatâ K C ad K A; & (dividendo) reſiſtentia annuli conici quem recta K B, circà C A rotata deſcribit eſt ad reſiſtentiam annuli circularis quem in eâdem convolutione deſcribit recta K P in eâdem duplicatâ ratione K C ad K A. Reſiſtentia verò coni truncati convolutione figuræ K B R circà C R, geniti, eſt ad reſiſtentiam baſeos ipſius ſive circuli radio C K, deſcripti ut ſolidum quod figura CKQHVI, circà C I rotando deſcribit, ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I ortum. Eſt autem ſolidum prius ſumma duorum cylindrorum, revolutione rectangulorum C K Q T & T H V I circa C I productorum, hoc eſt, (ob areas circulorum radiorum quadratis proportionales) ut ſumma $C\,K^2 \times C\,T + C\,P^2 \times T\,I$.

(r) 198.* *Biſeca altitudinem &c.* Datis C K & C R invenienda ſit poſitio rectæ K B ut

(f) Unde obiter, cùm angulus CSB semper sit acutus, con-

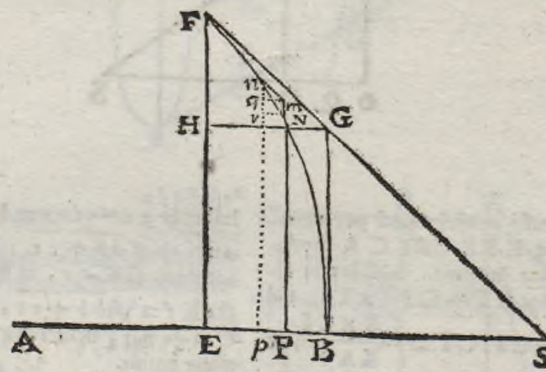


ut resistentia frusti conici quod per revolutionem figuræ K B R circà C A producitur sit omnium minima. Resistentia illa est ut $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$; sed $KA^2 : CK^2 = CI : CT = \frac{CK \times CI}{KA^2}$; & similiter $KA^2 : CA^2 = CI : TI = \frac{CA^2 \times CI}{KA^2}$. Quarè ob datam C I, resistentia coni truncati erit ut $\frac{CK^4 + CP^2 \times CA^2}{KA^2}$. Dicantur $KC = b$, $CR = 2c$, $CA = x$, ideóque $KA^2 = bb + xx$, & quia $CA\,(x) : KC\,(b) = RA\,(x - 2c) : BR$, seu CP, erit $CP = \frac{bx - 2cb}{x}$, & indè resistentia coni truncati erit ut $\frac{b^4 + (bx - 2cb)^2}{bb + xx}$ $= \frac{b^4 + b^2x^2 - 4b^2cx + 4c^2b^2}{bb + xx} =$ $bb + \frac{4bbcc - 4bbcx}{bb + xx}$. Capiatur hujus quantitatis fluxio & (40) ponatur nihilo æqualis, fiet $-\frac{4bbcdx}{bb + xx} - 2xdx\frac{(4bbcc - 4bbcx)}{(bb + xx)^2}$ $= 0$, sive $\frac{1}{bb + xx} - \frac{2cx - 2xx}{(bb + xx)^2} = 0$, ideoque $-bb - xx - 2cx + 2xx = 0$, undè

habetur $xx - 2cx = bb$, & indè eruitur 198
$x = c + \sqrt{bb + cc}$. Biseca igitur altitudinem C R in r, ut sit $Cr = c$, & juncta $Kr = \sqrt{bb + cc}$, erit x, seu $CA = Cr + Kr$, sicut NEWTONUS in constructione posuit.

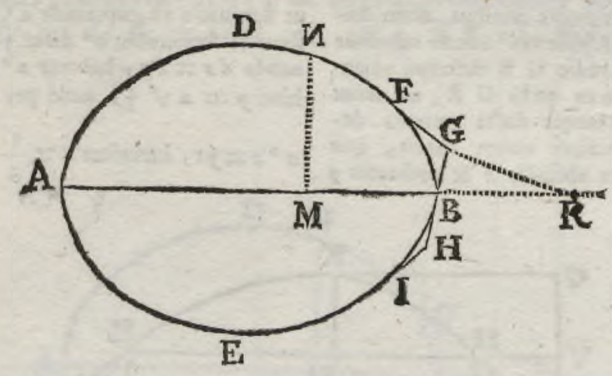
(f) 199. * *Undè obiter.* Angulus externus (*vid. fig. textûs*) æqualis est summæ angulorum æqualium Q C S & Q S C, id est, angulo C S B; & quia C O Q rectus est, angulus C Q O ideoque & æqualis C S B, est semper acutus. Altitudo O D quamminima evadat tandemque evanescat; & quoniam (*in hâc hypoth.*) rectæ O C, O S, Q S, C Q æquales fiunt, angulus C S O, & æqualis D F S fit semirectus, ejusque complementum ad duos rectos D F C grad. 135. Ducatur ad F D recta quælibet C E & evanescente O D resistentia coni truncati quem figura C F D circà O S rotata describit, erit in suo genere minima (198), ideóque minor quam resistentia coni truncati ex revolutione figuræ C E D circà O S geniti; subducatur utrinquè resistentia circuli quem recta D E rotando describit; & resistentia superficiei ex rotatione figuræ C F E circà O S, minor erit quam resistentia annuli conici quem in eâdem revolutione describit recta C E.

(t) consequens est, quod si solidum *ADBE*, convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis *ADBE* circa axem *AB* factâ generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus *FG*, *GH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, eâ lege ut *GH* sit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eâdem *GH* contineant angulos *FGB*, *BHI* graduum 135, solidum, quod convolutione



(t) 200. *Consequens est.* Ut hæc consequentia pateat, demonstrandum est resistentiam superficiei quæ per rotationem figuræ F G B circà axem A B gignitur, minorem esse resistentiâ superficiei quam in eâdem revolutione arcus F B, describit. Ductis itaquè ad curvam ordinatis verticalibus & infinitè propinquis P N, p n, & ex puncto n ad P N productam rectâ n m, parallelâ F G, atquè ex m & N in p n perpendicularibus m q, N r; dicantur F E ad axem A B normalis $= b$, G B $= c$, B P $= x$, P N $= y$, & quia productâ F G ut axi occurrat in s, est ob angulos E F S, B G S semirectos (*per hyp.*) E S $=$ F E $= b$, & B S $=$ G B $=$ c, erit E B $= b - c$. Est quoquè P p $=$ m q $=$ q n $= dx$, r n $= dy$, & hinc q r $= dy - dx$, ac proindè P m $= y + dy - dx$, & p n $= y + dy$. Vis particulæ fluidi in G B perpendiculariter incidentis sit $= a$, & radius circuli ad peripheriam ut 1 ad p; his positis, resistentia circuli radio P N descripti exponi poterit (195) per $\frac{1}{2}payy$; resistentia circuli radio P m descripti per $\frac{1}{2}pa(y + dy - dx)^2 = \frac{1}{2}payy + paydy - paydx$, neglectis scilicet terminis qui respectu $paydy$ & $paydx$, evanescunt. Hinc resistentia annuli circularis quem recta N m, rotando describit, exponetur per differentiam $paydy - paydx$. Resistentia circuli radio p n descripti erit ut $\frac{1}{2}pa(y + dy)^2 = \frac{1}{2}payy + paydy$, ex quâ si auferatur resistentia circuli radio P m descripti, remanebit resistentia annuli circularis ex rotatione rectæ q n geniti $= paydx$ & cum sit (197), n m^2 ad n q^2, seu F S^2 ad F E^2, sive 2 ad 1, ut illius annuli resistentia ad resistentiam superficiei ex revolutione rectæ n m genitæ, hæc resistentia erit ut $\frac{1}{2}paydx$. Quare resistentia superficiei quam figura n m N circà E B rotata describit, exponatur per quantitatem $paydy - \frac{1}{2}paydx$, &, sumptis fluentibus, harum resistentiarum summa per totum arcum B N exponetur per $\frac{1}{2}payy - \frac{1}{2}pa \times$ B N P aream, cui nihil addendum est nec subducendum; cum factâ $y = 0$, hæc fluens evanescat, ut oportet. Si verò loco y scribatur b, seu F E, resistentia omtione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *AB* generatur, minus reſiſtitur quam ſolidum prius, ſi modo utrumque ſecundum plagam axis ſui *AB* progrediatur, & utriuſque termi-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.



nus *B* præcedat. Quam quidem propoſitionem in conſtruendis navibus non inutilem futuram eſſe cenſeo.

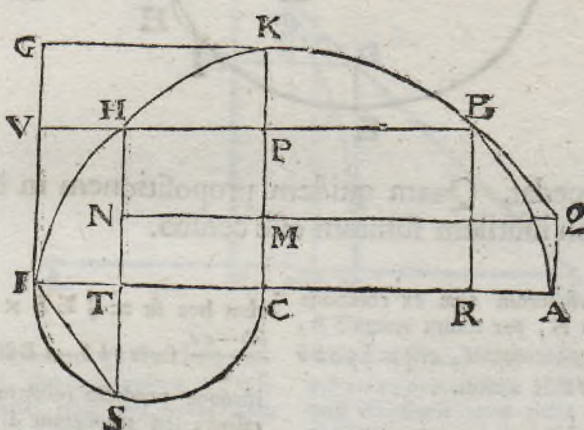
omnium ſuperficierum quæ ex rotatione figurarum n m N, per totum arcum F B, deſcriptarum generarentur, erit ut $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pa \times$ B N F E aream.

Porrò reſiſtentia circuli radio G B deſcripti exponenda eſt per $\frac{1}{2}pacc$, & reſiſtentia circuli radio F E deſcripti per $\frac{1}{2}pabb$; ideóque ductâ G H ad F E normali, reſiſtentia annali circularis ex rotatione rectæ F H, per $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pacc$; undè cum ſit FS^2 ad FE^2, ſeu 2 ad 1 ut annuli illius reſiſtentia ad reſiſtentiam ſuperficiei ex rotatione rectæ F G, hæc reſiſtentia erit ut $\frac{1}{4}pabb - \frac{1}{4}pacc$, totaque proindè reſiſtentia coni truncati ex rotatione figuræ F G B geniti exponetur per $\frac{1}{4}pabb + \frac{1}{4}pacc$. Quarè reſiſtentia omnium ſuperficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F diſtributæ rotando deſcribunt, eſt ad reſiſtentiam fruſti conici ex revolutione figuræ F G B orti ut $\frac{1}{2}pabb - \frac{1}{2}pa \times$ B N F E, ad $\frac{1}{4}pabb + \frac{1}{4}pacc$; ſive dividendo per $\frac{1}{4}pa$, ut $2bb - 2$ B N F E ad $bb + cc$. Si area B N F E æqualis eſſet trapezio B G F E, cùm hoc ſit $= \frac{1}{2}EB \times \overline{FE + BG} = \frac{bb - cc}{2}$, foret $2bb - 2$ B N F E $= bb + cc$; ideóque prædictæ reſiſtentiæ duæ æquales eſſent; ſed trapezium B G F E majus eſt areâ B N F E, quæ (per hyp.) tota in trapezio continetur, & propterea quantitas $2bb - 2$ B N F E, major eſt quantitate $bb + cc$; reſiſtentia igitur omnium ſuperficierum ex rotatione figurarum n m M, ſuperat reſiſtentiam coni truncati ex revolutione figuræ F G B producti. Verùm (199) reſiſtentia ſuperficiei quam figura n m N circà E B rotando deſcribit, minor eſt reſiſtentiâ ſuperficiei quam in eadem rotatione deſcribit n N; ideòque reſiſtentia omnium ſuperficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F diſtributæ rotando deſcribunt, minor eſt reſiſtentiâ totius ſuperficiei ex rotatione arcûs B N F genitæ. Ergò reſiſtentia coni truncati per rotationem figuræ F G B deſcripti minor quoque eſt quam reſiſtentia ſuperficiei ex rotatione arcûs B N F productæ. Q. E. D.

200. 201. Quæcumque igitur ſit figura (in textu) A N B, regularis vel irregularis, modò

modò arcus F B concavitatem axi A B obvertat, & totus intrà lineas F G, B G contineatur, per hanc NEWTONI propoſitionem inveniri ſemper poteſt alia figura majoris capacitatis & minoris reſiſtentiæ; Quod in conſtruendis navibus uſum habere poteſt. Reſiſtentia adhuc minuitur ſi loco circuli radio G B deſcripti adjungatur conus quem recta G R, ad axem productum utcumque ducta rotando deſcribit. In omnibus autem curvis, quæ æquatione inter abſciſſas x & ordinatas y definiuntur, facillimè invenitur punctum B per quod ducta tangens angulum ſemirectum cum ordinatâ perpendiculari conſtituit. Quia in illo puncto B, ordinatæ fluxio dy æqualis eſt fluxioni abſciſſæ dx ut ſi æquatio ad curvam ſit $a^2x = y^3$, & ſumptis fluxionibus $a^2dx = 3y^2dy$, ponendo $dx = dy$, habetur $a^2 = 3y^2$, & hinc $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, undè per æquationem

$$a^2x = y^3, \text{ invenitur } x = \frac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$



PROBLEMA.

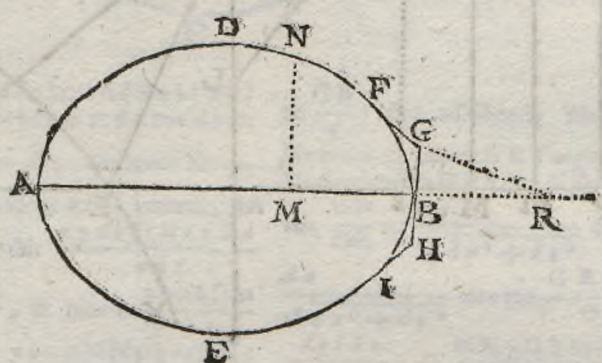
202. Datâ curvâ K B A quam recta Q A ad axem C A perpendicularis tangit in A, invenire punctum B per quod ſi ducatur tangens altera B Q priori Q A occurrens in Q, reſiſtentia ſolidi per convolutionem figuræ K B Q A, circà axem C A deſcripti ſit in ſuo genere minima.

Eâdem conſtructione quâ ſuprà (192) factâ; ex puncto Q ducatur ad H T perpendicularis Q N ſecans K C in M dicanturque C I $= a$, A R $= x$, B R ſeu P C $= y$, P H ſeu T C $= z$, Q A $= v$, & peripheria circuli radio 1 deſcripti $= p$. His poſitis reſiſtentia ſolidi ex revolutione arcûs B A circà axem C A geniti exponi poteſt per $S.\,pzydy$, (195); reſiſtentia verò coni truncati ex rotatione figuræ B Q A circà C A, per $\frac{1}{2}pavv + \frac{1}{2}pyyz - \frac{1}{2}pvvz$ Sit R reſiſtentia data ſolidi ex rotatione arcûs totius K B A geniti, & reſiſtentia ſuperficiei quam in eâdem rotatione deſcribit arcus K B, erit $R - S.\,pzydy$, ideòque reſiſtentia ſolidi per rotationem figuræ K B Q A, erit $R - S.\,pzydy + \frac{1}{2}pavv + \frac{1}{2}pyyz - \frac{1}{2}pvvz$. Hujus quantitatis fluxio nihilo æqualis fiat (40) & ob datam R, habebitur $-pzydy + pavdv + pzydy + \frac{1}{2}pyydz - pzvdv - \frac{1}{2}pvvdz = 0$; undè invenitur $(z-a)\,2vdv = (yy - vv)\,dz$. Cùm igitur ſit etiam (194) $ady^2 = zdx^2 + zdy$; ex his æquationibus & ex æquatione ad curvam K B A, invenientur valores litterarum x, y, v, ſeu R A, R B, & A Q. Q. E. I.

Exempli causâ. Sit K B A parabola; cujus vertex A, axis A C, latus rectum $= 4c$, & ideò $4cx = yy$, erit A Q $= v = \frac{1}{2}y$, ex naturâ Tangentis Parabolæ, $\frac{1}{4}yy = cx = vv$, $cdx = 2vdv$, $yy - vv = 3cx$. $ydy = 2cdx$, $dy^2 = \frac{cdx^2}{x}$. Undè æqua-

tio

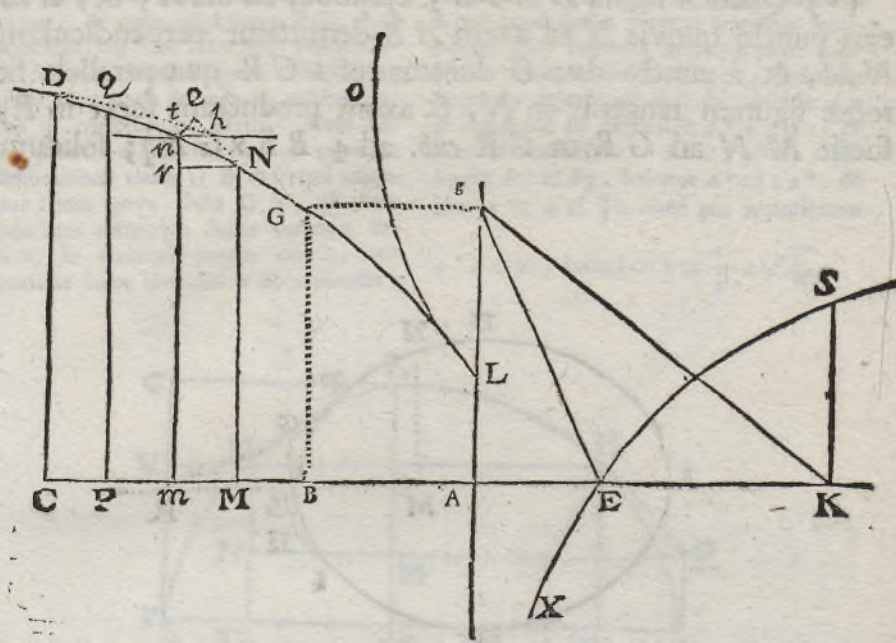
(u) Quòd si figura $DNFG$, ejusmodi sit curva, ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & à puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum secet in R, fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad $4\ BR \times GBq$; solidum



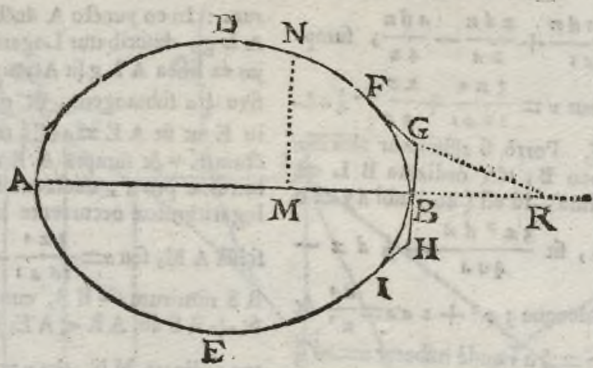
quod figuræ hujus revolutione circa axem AB factâ describitur, in medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eâdem longitudine & latitudine descriptum solidum circulare.

tio $a\,dy^2 = z\,dx^2 + z\,dy^2$, in hanc mutatur $\frac{ac\,dx^2}{x} = z\,dx^2 + \frac{cz\,dx^2}{x}$, ex quâ habetur $z = \frac{ac}{c+x}$, & $dz = \frac{-ac\,dx}{(c+x)^2}$. Ex his verò omnibus æquatio $(z-a)\,2v\,dv = (yy-vv)\,dz$, in hanc migrat $-\frac{acx\,dx}{c+x} = -\frac{3acc\,x\,dx}{(c+x)^2}$, sive $1 = \frac{3c}{c+x}$ ex quâ eruitur $x = 2c$, & hinc $y = 2c\sqrt{2}$; & 202 $z = \frac{1}{3}a$. Quarè cùm sit a ad z, in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum anguli B Q M, erit $\sqrt{3}$ ad 1 ut sinus totus ad sinum anguli B Q M, qui proindè est 35° 16′, angulus Q B R, 54°. 44′ & angulus B Q A 125°. 46′.

(u) 203. *Quòd si figura &c.* Invenienda sit



ſit curva L D, quæ circà axem C B rotata deſcribat ſuperficiem ſolidi quod in fluido motum ſecundùm axis directionem à C verſus B, minorem patiatur reſiſtentiam quàm ſolidum quodvis aliud per puncta L & D pari ratione deſcriptum & ſimiliter motum. Ex punctis curvæ infinitè propinquis N, n, Q, demittantur ad axem C B ordinatæ N M, n m, P Q & ad n m, Q P, perpendicula N r, n s. Sit p peripheria circuli cujus radius eſt unitas, & data a vim exponat quâ ſingulæ fluidi particulæ in rectam N M perpendiculariter incurrunt. His poſitis reſiſtentia annuli circularis quem recta n r, circà axem C B rotata deſcribit, exponi poteſt, ut ſuprà, per $\frac{1}{2}pa(\mathrm{nm}^2 - \mathrm{NM})^2$ ſeu per $pa\,\overline{\mathrm{NM}\times\mathrm{nr}}$, ob $\mathrm{nm}^2 - \mathrm{NM}^2 = \mathrm{nm}\times\overline{\mathrm{NM}}\times\mathrm{nm} - \mathrm{NM} = 2\,\mathrm{MN}\times\mathrm{nr}$. Et quia nN^2 eſt ad nr^2 ut reſiſtentia illa ad reſiſtentiam ſuperficiei quam linea n N circà C B rotata deſcribit (196) hæc reſiſtentia erit ut $\frac{pa\times\mathrm{MN}\times\mathrm{nr}^3}{\mathrm{nN}^2}$; eodemque modo patet reſiſtentiam ſuperficiei ex rotatione lineæ Q n genitæ exponi poſſe per $\frac{pa\times\mathrm{mn}\times\mathrm{QS}^3}{\mathrm{Qn}^2}$. Fingatur curvam hanc in aliam mutari Q h N inter puncta N, Q ductam & Q S, n r tanquam magnitudine datas aſſumi variantibus N r, & n s, dicanturque conſtantes $\mathrm{MN}=b$, $\mathrm{mn}=c$, $\mathrm{nr}=f$, $\mathrm{Qs}=g$ & variabiles $\mathrm{Nn}=v$, $\mathrm{nQ}=z$, $\mathrm{Nr}=m$, $\mathrm{ns}=n$, & reſiſtentia ſuperficiei quam arculus Q n N circà C B rotando deſcribit, exponetur per $\frac{pabf^3}{vv}+\frac{pacg^3}{zz}$, ſi curva Q n N ſit ea quæ minimam reſiſtentiam patitur, hujus quantitatis fluxio (40 & per hyp.) nihilo æquanda eſt, & indè habetur $-\frac{2pabf^3vdv}{v^4}-\frac{2pacg^3zdz}{z^4}=0$. Productâ ergo lineâ s n, uſque ad novum punctum h, ad quod ducuntur lineæ N h, Q h, in has cadant perpendicula n e, n t, & evaneſcente n h, erit $\mathrm{th}=dz$ & $\mathrm{eh}=-dv$. Quia verò, evaneſcente n h triangula n e h, n r N, & n t h, Q s n, ſimilia ſunt; erit $\mathrm{Nn}(v):\mathrm{Nr}(m)=\mathrm{nh}:\mathrm{eh}(-dv)$, &



& $sn(nv):Qn(z)=th(dz):nh$; ideòque ex æquo, $nv:mz=dz:-dv=\frac{mzdz}{nv}$. Loco $-dv$, scribatur hic ipsius valor in æquatione modò inventâ, & illa in hanc migrabit $\frac{2pabf^3mzvdz}{nv^5}=\frac{2pacg^3zdz}{z^4}$, & hinc fit $\frac{2pabf^3m}{v^4}=\frac{2pacg^3n}{z^4}$ seu $\frac{2pa\times MN\times nr^3\times Nr}{Nn^4}=\frac{2pa\times mn\times Qs^3\times ns}{Qn^4}$. Undè manifestum est quantitatem $\frac{MN\times nr^3\times Nr}{Nn^4}$ pro quolibet curvæ puncto N, datam seu constantem esse.

* Quæ quidem curva DNFG (*vide figuram textus*) talis esse debet, ut angulus quem facit in G cum lineâ BG sit semirecti complementum per notam 200. illic ergo linea BG data, est ipsa ordinata MN & Triangulum nRN est Rectangulum æquicrurum, ideoque $Nr=nr$ & $Nn^2=2nr^2$ ergo quantitas constans $\frac{MN\times nr^3\times Nr}{Nn^4}$ in hanc abit $\frac{GB\times nr^4}{4nr^4}=\frac{GB}{4}$. Talis ergo est hujus curvæ natura ut quovis in puncto ducatur ordinata MN fit semper $\frac{MN\times nr^3\times Nr}{Nn^4}=\frac{GB}{4}$, sive ponendo pro MN, y; pro nr, dy; pro Nr, dx; pro Nn^2, dx^2+dy^2, erit $\frac{ydy^3dx}{dx^2+dy^2}=\frac{GB}{4}$: sive adhibendo constructionem Newtoni, si ducatur GR Tangenti Parrallela, ob triangula GBR, nrN ubique similia, erit $\frac{GB}{GR}=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ & $\frac{BR}{GR}=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ideoque $\frac{GB^3\times BR}{GR^4}=\frac{dy^3dx}{dx^2+dy^2}$ & $\frac{MN\times GB^3\times BR}{GR4}=\frac{GB}{4}$ sive $MN\times GB^2\times 4BR=GR4$ unde est $MN:GR=GR^3:GB^2\times 4BR$. Q. E. D. 203.

Dicatur $GB=a$, fiet $\frac{y^3dy^3dx}{(dx^2+dy)^2}=\frac{a}{4}$ ideoque « $4ydxdy^3=a(dx^2+dy)^2$; ex quâ curvæ LND per Logarithmicam constructio eruitur. Ponatur $dx=\frac{zdy}{a}$, & hoc valore loco dx in æquatione ad curvam substituto, habetur $\frac{4yzdy^4}{a}=\frac{a(zz+aa)^2dy^4}{a^4}$, undè invenitur $y=\frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}=\frac{z^3}{4aa}+\frac{1}{2}z+\frac{aa}{4z}$, & (sumptis fluxionibus) $dy=\frac{3z^2dz}{4aa}+\frac{1}{2}dz-\frac{aadz}{4zz}$; loco dy scribatur hic ipsius valor in æquatione assumptâ $dx=\frac{zdy}{a}$, &

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.

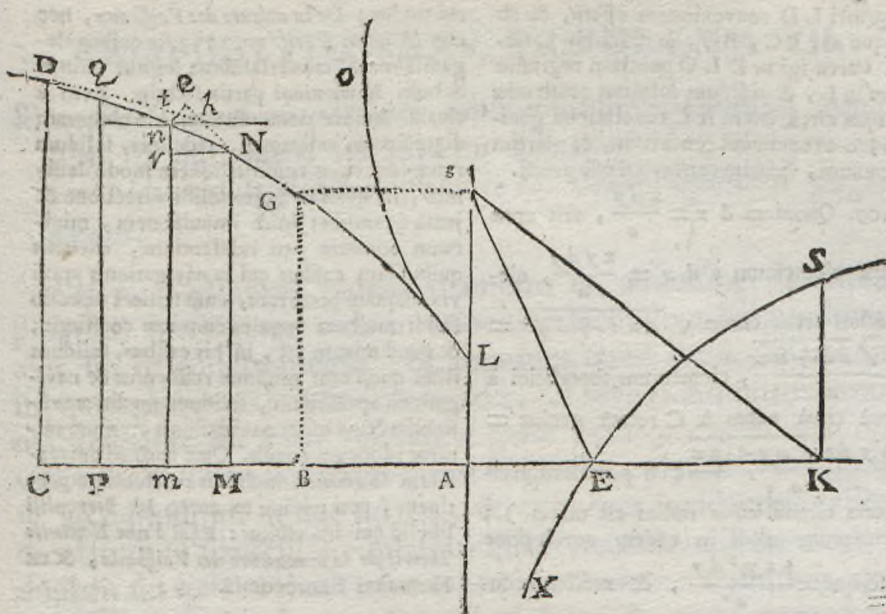
fit $dx = \frac{3z^3dz}{4a^3} + \frac{zdz}{2a} - \frac{adz}{4z}$, sumptisque fluentibus $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{1}{4}aL.z + Q$ *conſt.* Porrò ſi aſſumatur abſciſſæ initium in loco B, ubi ordinata B L eſt omnium minima, id eſt (40) ubi $dy = 0$ quo ſuppoſito, fit $\frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz} = 0$, ideoque $3z^2 + 2aa = \frac{a^4}{z^2}$ & $z^4 + \frac{2}{3}a^2z^2 = \frac{1}{3}a^4$ undè habetur $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ ($\&\ y = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$), ſubſtituto hoc valore loco z, in æquatione quæ dat abſciſſæ x valorem, hababitur ex Hypotheſi initium axeos eritque $x = 0 = \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}} + Q$.*conſt.* & ideo $Q = -\frac{5a}{48} + \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

* Erit igitur abſciſſa $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a \times \overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$ & ut habeatur origo abſciſſarum, notandum quod ordinata in B ſive G B æqualis ſit a, ex ſuprà demonſtratis; cùm itaque ſit ubique $y = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ erit in eo puncto $a = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ ex quâ æquatione ſi eruatur valor z invenietur $z = a$, ac per conſequens erit $x = \frac{3a^4}{16a^3} + \frac{aa}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.\frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}aL.\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}a \times L.\sqrt{3}$. Deſcribatur ergo Logarithmica X V, Aſymptoto Y Z & ſubtangente æquali $\frac{1}{4}$ G B, ſive $\frac{1}{4}a$, in quâ ſumatur ubivis ordinata p m, quæ producatur in r donec p r $= 3$ p m, ducatur ad Logarithmicam r t quæ ſit Aſymptoto parallela, erit $\frac{1}{2}$ r t æqualis Logarithmo $\sqrt{3}$ in Logarithmica cujus ſubtangens $\frac{1}{4}a$, itaque $\frac{GB}{3} - \frac{1}{2}$ r t $= x$, quo valore tranſlato ex B ad A in axe producto habetur A origo abſciſſarum: In eo puncto A ductâ perpendiculari A L g, deſcribatur Logarithmica S X cujus ea linea A L g ſit Aſymptotus, & $\frac{1}{4}$ G B ſive $\frac{1}{4}a$ ſubtangens, & quæ producto axe in E ut ſit A E $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$ tranſeat per punctum E « & ſumptâ A R magnitudinis arbitrariæ pro z, ductâque R S parallelâ B L logarithmicæ occurrente in S capiatur abſciſſa A M, ſeu $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} \mp$ R S nimirum $-$ R S, cum eſt A R $>$ A E, & $+$ R S ubi A R $<$ A E; ac denique capiatur ordinata M N, ſeu $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$; punctum N erit in curvâ quæſitâ L D. Quod ut pateat, demonſtrandum ſupereſt, eſſe $\mp$ R S $= -\frac{1}{4}aL.\overline{z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Hoc autem manifeſtum eſt; nam RS, eſt differentia logarithmorum correſpondentium quantitatibus A R & A E, ſive z & $a\sqrt{\frac{1}{3}}$) ſumptorum in Logiſticâ cujus ſubtangens eſt $\frac{1}{4}a$, & hæc differentia poſitiva eſt, ubi A R (z) $>$ A E ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$) negativa ubi A R (z) $<$ A E ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$), & nulla, cùm fit A R $=$ A E, ſeu $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, ut oportet. Quarè cùm A R ſuperat A E, eſt $-$ R S $= -\frac{1}{4}a \times \overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$, & ubi A E ſuperat A R, fit $+$ R S $= -\frac{1}{4}a\,\overline{L.z - La\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Eſt igitur ſemper $\mp$ R S $= -\frac{1}{4}aLz - La\sqrt{\frac{1}{3}}$.

204. Datâ minimâ ordinatâ A L, curva L N D, deſcribi poteſt. Nam cùm ſit (*ex dem.*) A L $= \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$ A E, & G B ſive A g $= a$, datâ A L dantur A g, A E, & ſubtangens Logarithmicæ quæ proindè poterit deſcribi.

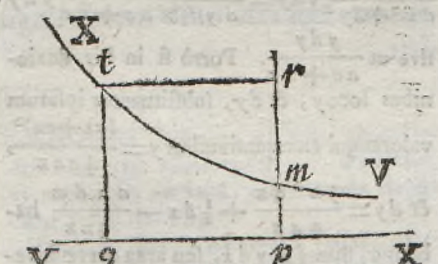
205. Datis duabus ordinatis M N & C D magnitudine, curva deſcribi poteſt. Si enim in æquatione $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$ loco y ſcribantur ſeorſim datæ M N, & C D dabuntur z & a undè dabitur minima ordinata A L $= \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

206. Datâ ordinatâ quâlibet C D cum abſciſſa correſpondente C A, curva deſcribi poteſt. Si enim in æquatione $y =$ (zz



$\frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, loco y scribatur data C D, habebitur z per a & datas quantitates; deindè si in æquatione alterâ $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a\overline{L.z - La\sqrt{\tfrac{1}{3}}}$, loco x substituatur data C A & loco z, ejus valor per a & datas inventus, dabitur æquatio inter a & datas quantitates, & ex hâc æquatione invenietur linea a, quâ datâ, datur ordinata minima A L.

207. Recta g R, parallela est tangenti per punctum N ductæ. Est enim (per constr.) $dx = \frac{z\,dy}{a}$, ideoque n r (dy) : r N (dx) = g A (a) : A R (z) ex quâ proportione & propter angulum rectum in r, & in A, patet triangula n r N, g A R, similia esse, & propterea g R parallelam n N, seu tangenti per N ductæ. Hinc cum A E sit æqualis $a\sqrt{\tfrac{1}{3}} = z$ ubi $z = 0$ (103) erit g E tangenti per L ductæ parallela, sitque A g = a est g E$^2 = \frac{a^2}{3} +$



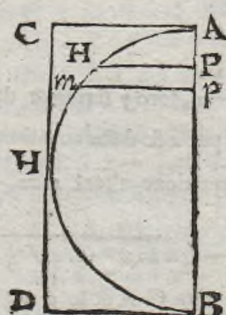
$a^2 = \frac{4a^2}{3}$ atquè adeo g E $= 2a\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 2$ A E erit g E ad A E ut 2, ad 1, & ità sinus totus ad sinum anguli A g E, sivè ad sinum anguli quem curva constituit cum minimâ ordinatâ A L, qui proindè est 30°. 207.

208. Quoniam A R, in infinitum crescere ac decrescere potest si capiatur semper A R > B E, describetur curvæ ramus L N D, qui concavitatem axi B C obvertit, & ab utroque axe A C, A g, in infinitum recedit; at si semper sumatur B R < B E, describetur alter curvæ ramus LO, qui

qui priori L D convexitatem offert, & ab utroque axe B C, B G, in infinitum abſcedit; curva igitur D L O punctum regreſſûs habet in L, & ſolidum minimæ reſiſtentiæ ex ejus circà axem A C revolutione genitum, convexum vel concavum, & partim convexum, partim concavum eſſe poteſt.

209. Quoniam $d\,x = \frac{z\,d\,y}{a}$, erit areæ curvæ elementum $y\,d\,x = \frac{z\,y\,d\,y}{a}$, elementum arcus curvæ $\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2} = \frac{d\,y\sqrt{a\,a + z\,z}}{a}$, elementum ſuperficiei à curvâ circà axem A C rotatâ genitæ $= \frac{2\,p\,y\,d\,y\sqrt{a\,a + z\,z}}{a}$ (ſi p ſit ſemiperipheria circuli cujus radius eſt unitas); elementum ſolidi in eâdem revolutione deſcripti $= \frac{p\,z\,y^2\,d\,y}{a}$; & reſiſtentia ſuperficiei $\frac{2\,p\,y\,d\,y\sqrt{a\,a + z\,z}}{a}$, erit $\frac{a\,d\,y^2}{d\,x^2 + d\,y^2}\,y\,d\,y = \frac{a\,d\,y^2}{d\,y^2 \times a\,a + z\,z}\,y\,d\,y$, ſive ut $\frac{y\,d\,y}{a\,a + z\,z}$. Porrò ſi in his fluxionibus loco y, & $d\,y$, ſubſtituantur ipſarum valores qui ex æquationibus $y = \frac{(zz + aa)^2}{4\,a\,a\,z}$, & $d\,y = \frac{3\,z^2\,d\,z}{4\,a\,a} + \frac{1}{2}\,d\,z - \frac{a\,a\,d\,z}{4\,z\,z}$ habentur, fluens $S.\ y\,d\,x$, ſeu area curvæ inveniri poterit algebraicè, aliæ verò fluentes ab hyperbolæ quadraturâ pendent.

Schol. Quæ ad ſolidum minimæ reſiſtentiæ ſpectant, ea ferè omnia mutuati ſumus ex Ill^mo. Marchione *Hoſpitalio*, tum in Act. Lipſienſ. an. 1699, tum in Monum. Pariſ. ejuſdem anni. De eodem ſolido plurima etiam dederunt celeb. viri *Joh. Bernoull.* in Act. Lipſ. an. 1699. 1700. *Hermannus* in Phoronomiâ, & *Facio* ad calcem libri de murorum inclinatione &c. Sed qui totam hanc NEWTONI propoſitionem maximâ univerſalitate pertractatam habere volunt, legant tractatum à Clariſſ. *Bouguero* editum, & ab Academiâ Regiâ Pariſienſi an. 1727. præmio condecoratum, cui titulus; *De la mâture des Vaiſſeaux*, nec non *Monum. Pariſ.* an. 1733. in quibus elegantiſſima & univerſaliſſima legitur ultimæ Scholii *Newtoniani* partis ſolutio. Rem à clariſſ. Autore demonſtratam hic obſervatu digniſſimam judicamus, videlicet, ſolidum rotundum cujus conſtructionem modò dedimus, in quâlibet hujus ſolidi directione & juxtà quamlibet fluidi impulſionem, minimam omnium pati reſiſtentiam, exceptis quibuſdam caſibus qui in navigationis praxi vix unquam occurrunt, cum ſcilicet directio ſolidi majores angulos cum axe conſtituit; & quod mirum eſt, in his caſibus, ſolidum illud quod erat minimæ reſiſtentiæ & navigationi aptiſſimum, ſolidum maximæ reſiſtentiæ & ad uſum navigationis omnium minime idoneum evadit. Quæ verò ad univerſalem ſolidorum in fluidis reſiſtentiam pertinent, peti poſſunt ex aureo *Joh. Bernoullii* libello qui inſcribitur: *Eſſai d'une Nouvelle Theorie de la manœuvre des Vaiſſeaux*, & ex *Hermanni* Phoronomiâ.



210. Lemma. *Sphæra eſt ad cylindrum circumſcriptum ut duo ad tria.* Sphæra generatur per revolutionem ſemicirculi A H B circà diametrum A B, & cylindrus ſphæræ circumſcriptus per revolutionem rectanguli A C B D, cujus latera A C, B D circuli radio ſunt æqualia. Ductis ordinatis infinitè propinquis P M, p m, dicantur A C $= r$, ſemiperipheria A H B $= p$, A P $= x$, P p $= d\,x$, & quia circulorum areæ ſunt in ratione duplicatâ radiorum, erit quadratum radii C A, ſeu $r\,r$, ad aream circuli A H B, nempè $r\,p$, ut M P², ſeu $2\,r\,x - x\,x$ ad aream circuli radio P M deſcripti, quæ ideò erit $2\,p\,x - \frac{p\,x\,x}{r}$; & hinc ſo-

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eâdem diametro & altitudine descriptus progredi intelligatur eâdem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem medio. Et ponamus quòd particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maximâ resiliant. Et cùm resistentia globi (per propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia cylindri, & globus sit ad cylindrum ut duo ad tria, & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipsasque quàm maximè reflectendo, (x) duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, (y) qui sit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri; & globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ unifor-mi-

solidùm ex rotatione elementi P M m p, circà A B genitum, erit $2pxdx - \frac{pxxdx}{r}$, sumptisque fluentibus, solidum ex rotatione segmenti circularis A M P ortum, erit $pxx - \frac{px^3}{3r}$, & factâ $AP = AB$, seu $x = 2r$, sphæra tota habetur $= 4prr - \frac{8}{3}prr = \frac{4}{3}prr$. Sed cylindrus sphæræ circumscriptus est factum ex areâ circuli radio A C descripti in cylindri altitudinem A B, seu est $2prr$. Quarè sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{4}{3}prr$ ad $2prr$, id est, ut 4 ad 6, sivè ut 2 ad 3. Q. E. D.

(x) * *Duplam sui ipsius velocitatem* &c. Cùm singulæ particulæ, cylindri respectu, minimæ sint, si nulla esset particularum medii reflexio, eâdem cum cylindro velocitate moverentur; ac accedente vi reflexionis perfectâ, velocitas illa duplicatur (53. lib. 1.). 210.

(y) * *Qui sit ad totum cylindri motum* &c. Quantitates motûs sunt ut velocitates & massæ conjunctim; massæ verò sunt ut volumina & densitates; ideòque quantitates motûs ut velocitates & volumina & densitates conjunctim. Cùm igitur cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, medii volumen dimidio volumini cylindri æquale duplâ cum velocitate moveat, fitque proindè factum ex volumine cylindri in ipsius velocitatem æquale facto ex volumine medii moto in ejus velocitatem, motus particulis medii communicatus, erit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri.

miter progrediendo deſcribit, (z) communicabit motum eundem particulis; (a) & quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ deſcribit, communicabit motum particulis, qui ſit ad totum globi motum ut denſitas medii ad denſitatem globi. Et propterea globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri ſuæ uniformiter progrediendo deſcribit, ut denſitas medii ad denſitatem globi.

Caſ. 2. Ponamus quòd particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ſimplicem ſuam velocitatem ipſis communicabit, ideoque reſiſtentiam patitur duplo minorem quam in priore caſu, & reſiſtentia globi erit etiam duplo minor quàm prius.

Caſ. 3. Ponamus quòd particulæ medii vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, ſed mediocri aliquâ reſiliant à globo; & reſiſtentia globi erit in eâdem ratione mediocri inter reſiſtentiam in primo caſu & reſiſtentiam in ſecundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc ſi globus & particulæ ſint infinitè dura, & vi omni elaſticâ, & propterea etiam vi omni reflexionis destituta: reſiſtentia globi erit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri poſſit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri ſuæ deſcribit, ut denſitas medii ad denſitatem globi.

Co-

(z) * *Communicabit motum eundem particulis*, ob reſiſtentiam globi reſiſtentiâ cylindri duplo minorem (prop. 34. lib. 2.)

(a) *Et quo tempore duas tertias partes &c.* * Huc redit compoſitio rationum à NEWTONO indicata: Totus Globi motus eſt ad Cylindri motum, ut 2 ad 3, hæc enim eſt utriuſque maſſæ ratio; Totus Cylindri motus eſt ad motum à cylindro communicatum quo tempore dimidiam ſuam longitudinem deſcribit ut denſitas Cylindri (ſive Globi) ad denſitatem medii, motus ille à cylindro communicatus idem eſt cum motu à Globo communicato dum totam ſuam Diametrum percurrit; Denique motus ille a Globo communicatus dum totam ſuam Diametrum percurrit eſt ad motum ab eo Globo communicatum dum percurrit duas Diametri ſuæ tertias partes ut 3 ad 2, Ideoque totus Globi motus eſt ad motum ab eo communicatum dum percurrit duas Diametri ſuæ partes conjunctim ut 2 ad 3, ut denſitas Globi ad denſitatem medii, & ut 3 ad 2, ſive primâ ratione & hâc ultimâ ſeſe compenſantibus ut denſitas Globi ad denſitatem medii. Q. E. D.

Corol. 2. (b) Refiftentia globi, cæteris paribus, eft in duplicatâ ratione velocitatis.

Corol. 3. (†) Refiftentia globi, cæteris paribus, eft in duplicatâ ratione diametri.

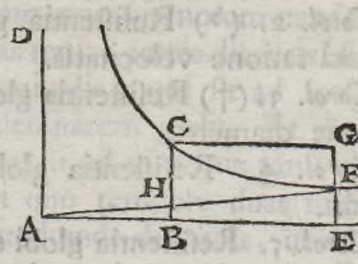
Corol. 4. Refiftentia globi, cæteris paribus, eft ut denfitas medii.

Corol. 5. Refiftentia globi eft in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis & duplicatâ ratione diametri & ratione denfitatis medii.

Corol. 6. Et motus globi cum ejus refiftentia fic exponi poteft. Sit *AB* tempus quo globus per refiftentiam fuam uniformiter continuatam totum fuum motum amittere poteft. Ad *AB*

(b) * *Refiftentia globi cæteris paribus eft in duplicata ratione velocitatis.* * Sint globi æquales in eodem medio moti diversâ cum velocitate; motus totus uniuscujufque eft ad motum ab ipfo communicatum tempore quo duas tertias fuæ Diametri percurrit, ut Denfitates globorum ad denfitates mediorum, ideoque ex hypothefi in eâdem ratione, ergo etiam velocitas unius eft ad velocitatem alterius ut motus ab illis communicati temporibus quibus duas tertias fuarum Diametrorum (æquales quippe longitudines) percurrunt. Dividantur illa tempora in partes minimas utrinque æquales, & quia Refiftentia fingulis momentis, ejufdem Globi refpectu, uniformis cenfetur, Refiftentiæ momentaneæ erunt directè ut motus amiffi & inversè ut tempora quibus amittuntur, fed motus amiffi funt ut velocitates directè & tempora funt inversè ut velocitates, quia æquales longitudines percurruntur motibus qui uniformes, faltem quam proximè, cenfentur, ergo refiftentiæ momentaneæ funt bis ut velocitates, hoc eft in 2101
ratione duplicatâ velocitatis.

(†) * *Refiftentia globi cæteris paribus eft in duplicatâ ratione Diametri.* * Sint globi æquiveloces, æque denfi, in eodem medio moti, fed diverfæ fint earum Diametri, fingantur duo Cylindri ejufdem cum iis Diametri, & etiam æquiveloces & æque denfi, refiftentiæ quas patientur Cylindri fingulis momentis erunt ut numerus partium in quas incurrunt, illi verò numeri partium funt ut Quadrata Diametrorum: Sed facile liquet refiftentias Cylindrorum & globorum æquivelocium, ejufdem Diametri, in eodem medio effe in datâ ratione, ergo ut refiftentia unius Cylindri ad refiftentiam alterius, ita refiftentia unius Globi ad refiftentiam alterius, funt ergo Globorum refiftentiæ ut Quadrata Diametrorum.



AB erigantur perpendicula AD, BC. Sitque BC motus ille totus, & per punctum C asymptotis AD, AB describatur hyperbola CF. Producatur AB ad punctum quodvis E. Erigatur perpendiculum EF hyperbolæ occurrens in F. Compleatur parallelogrammum $CBEG$, & agatur AF ipsi BC occurrens in H. Et si globus tempore quovis BE, motu suo primo BC uniformiter continuato, in medio non resistente describat spatium $CBEG$ per aream parallelogrammi expositum, idem in medio resistente describet spatium $CBEF$ per aream hyperbolæ expositum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam EF, amissâ motus ejus parte FG. (c) Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem BH, amissâ resistentiæ parte CH. Patent hæc omnia *per corol.* 1. *&* 3. *prop.* v. *lib. II.*

Corol. 7. Hinc si globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M : idem globus tempore t in medio resistente per resistentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decrescentem, (d) amittet motus sui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$; & describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore t de-

scrip-

(c) *Et resistentia ejus in fine &c.* Resistentia sub initio ubi velocitas est B C, exponatur per eandem lineam B C, & quia resistentiæ sunt ut velocitatum quadrata, atque B C ad F E, ut velocitas sub initio ad velocitatem in fine temporis B E ad FE^2 ut B C ad lineam quæ resistentiam exponit in fine temporis B E, ideòque linea hæc $= \frac{FE^2}{BC}$. Sed (*per theor.* 4. *de hyp.*) & ob similitudinem triangulorum A B H, A E F, est $BC : FE = AE : AB = FE : HB$, & hinc $HB = \frac{FE^2}{BC}$. Quare recta H B exponet resistentiam in fine temporis B E, & proindè recta C H partem amissam resistentiæ illius quæ sub initio exponebatur per lineam B C.

(d)* *Amittet motûs sui partem &c.* Pars motûs M in fine temporis t residua dicatur m, & quia (ex dem.) $T : t = AB : BE$, & hinc $T \times t : T = AE : AB$, & prætereà $M : m = CB : FE = AE : AB$; erit $T \times t : T = M : m$, unde habetur $m = \frac{MT}{T+t}$, & inde motûs M pars amissa est $M - \frac{MT}{T+t} = \frac{tM}{T+t}$.

ſcriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2, 302585092994 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, (e) propterea quod area hyperbolica $BCFE$ eſt ad rectangulum $BCGE$ in hâc proportione.

Scholium.

In hâc propoſitione expoſui reſiſtentiam & retardationem projectilium ſphæricorum in mediis non continuis, & oſtendi quod hæc reſiſtentia ſit ad vim quâ totus globi motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri ſuæ partes velocitate uniformiter continuata deſcribat, ut denſitas medii

(e) * *Propterea quod area hyperbolica.* Dicantur A B $= a$, B C $= b$, B E $= x$, A E $= a + x$; & quia (*theor.* 4. *de hyp.*) F E $= \frac{ab}{a+x}$, elementum areæ C F E B, erit $\frac{abdx}{a+x}$, & area ipſa C F E B $= ab\,S.\frac{dx}{a+x}$, quæ fluens ità ſumenda eſt ut evaneſcat ubi fit $x = 0$, ſed fluens S. $\frac{dx}{a+x}$ ità ſumpta eſt logarithmus numeri $\frac{a+x}{a}$, deſumptus ex logiſticâ cujus ſubtangens eſt unitas, aut quod idem eſt, ex hyperbolâ cujus dignitas unitati æqualis eſt (382. *lib.* 1. & 40. *lib.* 2.); Si enim ponatur $x = 0$, numerus $\frac{a+x}{a}$, evadit $= 1$, & ideò L. $\frac{a+x}{a} = 0$. Quarè area B C F E $= ab$ L. $\frac{a+x}{a}$; rectangulum verò B C G E $= bx$. Eſt ergò area hyperbolica B C F E ad rectangulum B C G E, ut ab L. $\frac{a+x}{a}$ ad bx, hoc eſt, dividendo per ab, ut L. $\frac{a+x}{a}$ ad $\frac{x}{a}$. Verum (ex dem. & hyp.) $\frac{a+x}{a} = \frac{T+t}{T}$, & $\frac{x}{a} = \frac{t}{T}$; Quare area Hyperbolica B C F E, eſt ad rectangulum B C G E, ut L. $\frac{T+t}{T}$ ad $\frac{t}{T}$. Supereſt igitur inveniendus logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$; per logarithmicam cujus ſubtangens eſt unitas. Porrò ejuſdem numeri logarithmi diverſæ ſpeciei ſunt inter ſe in datâ ratione (38) & numerus 2, 302585092994 eſt logarithmus numeri denarii ſumptus in logarithmicâ cujus ſubtangens eſt unitas, & ejuſdem numeri denarii logarithmus in tabulis ſumptus eſt 1, 0000000 $= 1$; Quarè ut 1, ad 2, 302585092994, ità logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ in tabulis ſumptus ad logarithmum ejuſdem numeri ſumptum in logarithmicâ cujus ſubtangens eſt unitas, vel in Hyperbolâ cujus dignitas eſt 1; habetur ergò logarithmus quæſitus, ſi logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ ex tabulis ſumptus multiplicetur per numerum 2, 302585092994.

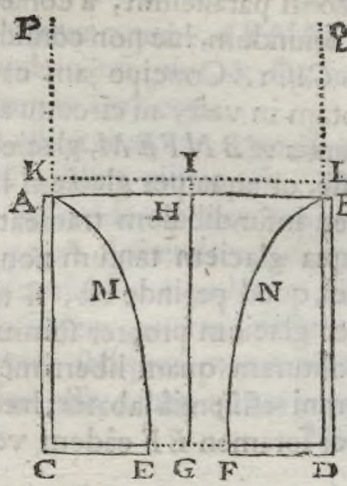
medii ad denſitatem globi, ſi modo globus & particulæ medii ſint ſummè elaſtica & vi maximâ reflectendi polleant: quodque hæc vis ſit duplo minor ubi globus & particulæ medii ſunt infinitè dura & vi reflectendi prorſus deſtituta. In mediis autem continuis qualia ſunt aqua, oleum calidum, & argentum vivum, in quibus globus non incidit immediatè in omnes fluidi particulas reſiſtentiam generantes, ſed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, reſiſtentia eſt adhuc duplò minor. Globus utique in hujuſmodi mediis fluidiſſimis reſiſtentiam patitur quæ eſt ad vim quâ totus ejus motus vel tolli poſſit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri ſuæ deſcribat, ut denſitas medii ad denſitatem globi. Id quod in ſequentibus conabimur oſtendere.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vaſe cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit $ACDB$ vas cylindricum, AB ejus orificium ſuperius, CD fundum horizonti parallelum, EF foramen circulare in medio fundi, G centrum foraminis, & GH axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei $APQB$ ejuſdem eſſe latitudinis cum cavitate vaſis, & axem eumdem habere, & uniformi cum motu perpetuo deſcendere, & partes ejus quam primum attingunt ſuperficiem AB liqueſcere, & in aquam converſas gravitate ſuâ defluere in vas; & cataractam vel columnam aquæ $ABNFEM$ cadendo formare, & per foramen EF tranſire, idemque adæquatè implere. Ea verò ſit uniformis velocitas glaciei deſcendentis ut & aquæ contiguæ in circulo AB, quam aqua cadendo (f) & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IH acqui-

(f) * *Et caſu ſuo deſcribendo altitudinem IH.* Hâc igitur Hypotheſi idem præſtatur ac ſi in loco A B nova ſuperficies aquæ continuò crearetur, cum motu initiali qualem cadendo ex altitudine I H ſingula ejus ſuperficiei particula acquirere potuiſſet, & deinde particulæ aquæ è loco A B vi propriæ gravitatis cadendo ſeſe mutuò attrahequirere poteſt; & jaceant IH & HG in directum, & per punctum I ducatur recta KL horizonti parallela & lateribus glaciei occurrens in K & L. Et velocitas aquæ effluentis per foramen EF (g) ea erit quam aqua cadendo ab I & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt. (h) Ideoque per theoremata *Galilæi* erit IG ad IH in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo AB, hoc eſt,



in duplicatâ ratione circuli AB ad circulum EF; (i) nam hi circuli ſunt reciprocè ut velocitates aquarum quæ per ipſos eodem tempore & æquali quantitate, adæquatè tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem versùs hîc agitur. Et motus horizonti parallelus, quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cùm non oriatur à gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hic non conſideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæſionem ſuam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur; ſed motum horizon-

herent horizontaliter ad cataractam vel columnam A B N F E M formandam.

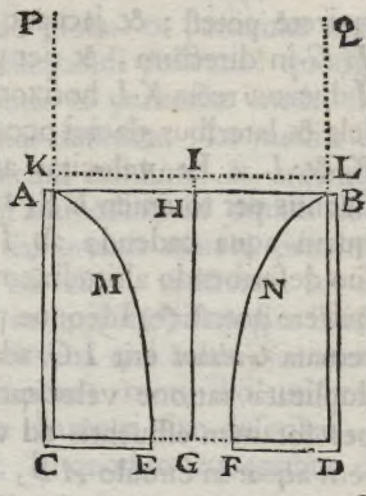
(g) * *Ea erit quam aqua* (per hyp).

(h) * *Ideoque per theoremata Galilæi.* 28. lib. 1.

(i) 271. *Nam hi circuli* &c. Quoniam aqua per totam cataractam A B N F E M, eodem ſemper tenore fluere ſupponitur, neceſſe eſt ut eadem aquæ quantitas per ſingulas cataractæ ſectiones axi I G perpendiculares, ſeu per ſingulos circulos A B, M N, E F horizonti parallelos eodem tempore tranſeat. Nam ſi dato tempore major vel minor aquæ copia per circulum 271
A B quàm per circulum M N tranſiret; aqua inter illos circulos vel intumeſceret vel decreſceret, & cataractæ figuram mutaret (contrà Hyp.). Quantitas aquæ per circulum quemlibet M N, dato tempore fluentis æquatur cylindro aqueo, cujus baſis eſt circulus M N, & altitudo eſt æqualis longitudini quam ſuperficies aquæ M N, cum velocitate acquiſitâ uniformiter progrediendo eodem tempore dato deſcriberet; & longitudo illa eſt ut aquæ per circulum M N fluentis velocitas (5. *lib.* 1.) & ideo quantitas aquæ per

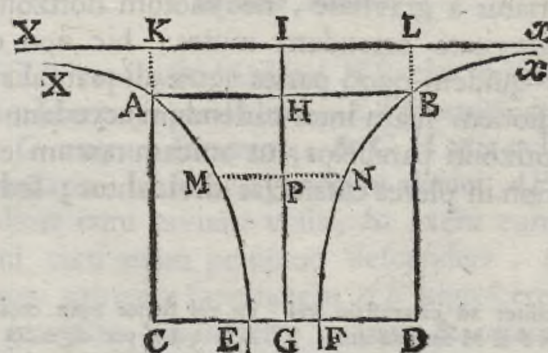
rizonti parallelum, à cohæsione illâ oriundum, hic non consideramus.

Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis *ABNFEM*, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantùm non tangat, vel, quod perinde est, si tangat & per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrimè & sine omni resistentiâ labatur; hæc defluet per foramen *EF* eâdem velocitate



ac

per circulum M N dato tempore fluentis; est ut circulus M N & velocitas conjunctim. Quarè cùm data sit quantitas aquæ per singulos circulos dato tempore transeuntis; circulus M N est reciprocè ut velocitas aquæ quæ per ipsum transit. Q. E. D.



272. His ità constitutis; facile est cataractæ figuram geometricè definire. Secet M N axem I G in P; & quia altitudo I P est in duplicatâ ratione velocitatis aquæ in P, hæc vero velocitas est inversè ut circulus M N, & denique circulus M N est in ratione duplicatâ radii M P, & ideo I P seu abscissa in ratione quadruplicatâ inversâ radii seu ordinatæ M P, sive I P ut $\frac{1}{MP^4}$, & ideo $MP^4 \times IP$, quantitas data. Est igitur curva E M A, Hyperbola quarti gradûs, asymptotos habens I G, I K, quibus convexitatem obvertit. Producantur arcus E M A, & asymptotus I K

ad

ac prius, (k) & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vaſis ſuſtinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liqueſcat jam glacies in vaſe; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. (l) Non minor erit, quia glacies in aquam reſoluta conabitur deſcendere: non major, quia glacies in aquam reſoluta non poteſt deſcendere niſi impediendo deſcenſum aquæ alterius deſcenſui ſuo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vaſis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus eſſe debet quàm prius. Nam

ad partes X in infinitum, & figura EAXXIG circà aſymptotum ſeu axem I G, rotata cataractam deſcribet in infinitum ad partes X, x, productam; figura verò EMAHG, hanc cataractæ partem quæ intra vas ABDC, continetur, generabit.

273. Tota cataracta E A X x B F, æquatur cylindro cujus baſis eſt circulus E F, & altitudo 2 I G. Sint enim altitudo I G $= x$, ordinata E G $= y$, a linea data, & (272) $x = \frac{a^5}{y^4} x$, ideoque $y^4 = a^5$ æquatio ad Hyperbolam E M A X. Et ſi ſemiperipheria circuli cujus radius eſt unitas, dicatur p, erit circuli E F area $= pyy$, & cylindrus $EG \times 2\,IG = 2pyyx = \frac{2pa^5}{yy}$. Cùm verò ſit $x = \frac{a^5}{y^4}$, ac proindè $dx = -\frac{4a^5dy}{y^5}$, cataractæ elementum $pyy\,dx = -\frac{4pa^5dy}{y^3} = -4pa^5y^{-3}dy$, & ſumptis fluentibus, tota cataracta ad aſymptotum uſque X x producta, erit $= \frac{2pa^5}{yy} = 2\,EF \times IG$. Q. E. D.

(k) 274. *Et pondus totum &c.* Pondus quidem totum columnæ aquæ A B N F E M in defluxum ejus generandum impenditur; attamen totum aquæ motum non generat, cùm motûs illius pars pendeat à motu ſuperficiei A B, quæ (per hyp.) eam habet velocitatem quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem I H acquirere poteſt. Sed totum aquæ defluxum mathematicè conſiderare poſſumus tanquam genitum pondere aquæ totius, quæ in cataractâ E A X x B F, uſque ad aſymptotum X x producta continetur, quæque æqualis eſt cylindro aqueo baſi E F & altitudine 2 I G, deſcripto (273). 274.

(l) * *Non minor erit quia glacies in aquam reſoluta conabitur deſcendere*, atquè ità aquæ deſcenſum accelerare; *non* tamen *major erit, quia glacies in aquam reſoluta*, ob reactionem actioni æqualem & contrariam, *non poteſt deſcendere, niſi impediendo deſcenſum aquæ alterius deſcenſui ſuo æqualem.* Idem igitur manet in aquâ totâ ad deſcendendum & per foramen E F effluendum conatus. At *eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.*

(m) Nam particulæ aquæ jam non tranſeunt omnes per foramen perpendiculariter; ſed à lateribus vaſis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis tranſeunt motibus; & curſum ſuum deorſum flectentes in venam aquæ exilientis conſpirant, quæ exilior eſt paulo infra foramen quàm in ipſo foramine, exiſtente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proximè, ſi modò diametros rectè dimenſus ſum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, exiſtente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis, cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur anguſtior, hanc laminam non fundo ſed lateri vaſis effixi ſic, ut vena illa egrederetur ſecundùm lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquâ plenum eſſet, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad diſtantiam quaſi dimidii digiti à foramine quàm accuratiſſimè menſurata, prodiit partium viginti & unius quadrageſimarum digiti. (n) Erat igitur diameter foraminis hujus cir-

(m) * *Nam particulæ aquæ &c.* Clariſſ. *Daniel Bernoullius* paragr. 3. Sect. 4æ. *Hydrodynamicæ* obſervavit particulas ceræ hiſpanicæ aquis innatantes ità cum aquâ in vaſe moveri, ut quæ foraminis centro C imminent, per lineam verticalem H G, deſcendant, aliæ verò omnes utrinque poſitæ motu fere verticali deſcendant primùm per lineas m p, n q, fere ad fundum uſque C D, tumque curſum ſuum verſus foramen E F per lineas P E, q F ſenſim inflectant. Itaque vena aquæ exilientis E F f e duplici de causâ contrahitur uſque in e f paulo infra foramen E F. Prima contractionis illius cauſa eſt acceleratio motûs, quæ omnibus gravibus cadentibus communis eſt, & quâ fit ut major ſit volocitas aquæ in loco inferiori e f quàm in ſuperiore E F; quia enim aquam eſſe in ſtatu manente, eandemque proindè (271) illius quantitatem per ſectiones E F & e f, eodem tempore effluere ſupponimus, ſectio e f eſt ad ſectionem E F in ratione velocitatis aquæ in loco E F, ad ejus velocitatem in loco e f (271) & ideo ſectio e f, cæteris paribus, minor eſſe debet ſectione E F. Secunda contractionis venæ cauſa, quam ſolam hic conſiderat NEWTONUS, eſt obliquitas motûs particularum aquæ per lineas P E, q F, ad foramen E F tendentium; hinc enim fit, ut ſeclusâ etiam omni acceleratione motûs à gravitate ortâ, particulæ aquæ convergant, venamque contrahant, atque ideo motum ſuum accelerent.

(n) * *Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad* circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quàmproxime. Aqua igitur tranſeundo per foramen, convergit undique, & poſtquam effluxit ex vaſe, tenuior redditur convergendo, & per attenuationem acceleratur donec ad diſtantiam ſemiſſis digiti à foramine pervenerit, & ad diſtantiam illam tenuior (o) & celerior fit quàm in ipſo foramine in ratione 25×25 ad 21×21 ſeu 17 ad 12 quamproximè, id eſt in ſubduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. (p) Per experimenta verò conſtat quòd quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vaſis

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

ſis

274

ad 21 quamproximè. Hæc ratio in experimentis conſtans ferè manet, ſi aqua è vaſe ſatis amplo per exiguum foramen laminæ tenuiſſimæ inſculptum effluat, licet in vaſe mutetur aquæ foramini incumbentis altitudo. Experimenta illa iterarunt celeberrimi Mathematici, Marchio *Polenus* lib. de Caſtellis & *Daniel Bernoullius* ſect. 4ª. Hydrodynamicæ. Hæc ſunt Illuſtr. Marchionis verba pag. 38. 39. « Proclive autem erit intelligere, confirmari ex allatis experimentis rationem inter diametros foraminum & aquæ contractæ diametros à viro ſummo *Iſaaco* NEWTONO, ut antè diximus, conſtitutam. Non tamen inficias iverim perexiguam aliquam differentiam intereſſe inter contractiones aquæ effluentis ex minoribus foraminibus, & aquæ contractiones ex majoribus effluentis. Anteà deſcripti foraminis in laminâ ferreâ diameter ad diametrum aquæ contractæ fuit in eâ ratione quam habet numerus 52 ad 41; cùm *Newtoniana* ſit ratio numeri 50 ad 42. ſic omninò eâdem lege, non ſemper contrahi aquæ venas oſtendunt variæ contractiones in aquæ à variis fruſtis conicis effluxu obſervatæ; quin etiam huc debebunt referri illæ quas animadverti differentiæ inter diametros ad perpendiculum ſumptas, & diametros ſecundum lineam horizonti parallelam menſas. At quanta ſit differentia inter aquæ contractiones non auſim definire; neque verò illa *Newtoniana* ratio inter diametrum foraminis & contractæ aquæ diametrum ſumi debet ceu præciſa, cùm ipſe vir ſummus in citato opere hæc habeat; exiſtente ejus (nempè aquæ contractæ (diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad *6*, vel 5 & ½ ad *6* & ½, quamproximè, ſi modò diametros rectè dimenſus ſum. » *Bernoullius* verò Sect. 4. parag. 7°. hæc habet; Interim aſſumptis laminâ tenui, vaſe ampliſſimo, foramine ad 4 vel *6* lineas in diametro aſſurgente, ſolet ratio inter foramen & Sectionem venæ contractæ non multum recedere ab illâ quam NEWTONUS ſtatuit. » Verùm utriuſque authoris experimenta demonſtrant, rationem illam diametri venæ contractæ ad diametrum foraminis multum variari, ſi per oblongos variæque figuræ canales, non verò ex ſimplici foramine in tenuiſſimâ laminâ inſculpto è vaſe effluat aqua.

(o) * *Et celerior fit quàm in ipſo foramine.* Nam velocitates ſunt reciprocè ut circuli per quos aqua eodem tempore tranſit (171), circuli verò ſunt in ratione duplicatâ diametrorum; & ideo velocitas aquæ per ſectionem circularem venæ contractæ tranſeuntis eſt ad velocitatem aquæ per foramen effluentis ut 25×25 ad 21×21 hoc eſt, 625 ad 441; quod utrumque diviſum per 37 dat rationem 17 ad 12, vel utrumque diviſum per 441, dat rationem 1.41 &c. ad 1, eſt verò Radix binarii numeri 1.41 &c., eſt ergo velocitas aquæ per venam contractam ad velocitatem per foramen in ratione radicis binarii numeri ad unitatem.

(p) *Per experimenta verò conſtat.* Datâ quantitate aquæ per datum foramen ſeu per datam venæ contractæ Sectionem dato tempore effluentis, ſic illius velocitas

tas

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVI. Probl. VIII.

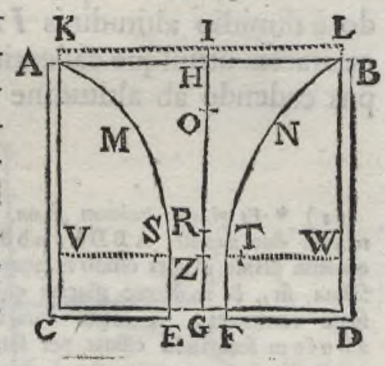
ſis factum, dato tempore effluit, ea ſit quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, ſed per foramen circulare, cujus diameter eſt ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideoque aqua illa effluens velocitatem habet deorſum in ipſo foramine quam grave cadendo & caſu ſuo (q) deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirere poteſt quamproximè. Sed poſtquam exivit ex vaſe, acceleratur convergendo donec ad diſtantiam à forami-

tas inquiritur. Quoniam data aquæ quantitas æquatur cylindro vel priſmati cujus baſis eſt foramen datum aut venæ contractæ ſectio, & altitudo ſpatium quod aqua tempore dato cum illâ velocitate quam in foramine aut venæ Sectione habet, uniformiter progrediendo deſcriberet, dividitur quantitas aquæ data per foraminis aut Sectionis venæ aream, & quotiens erit ſpatium quod aqua dato tempore uniformiter progrediendo deſcriberet, atquè ità nota fit aquæ velocitas cujus dimidium eſt altitudo ex quâ cadere debuit ut eam velocitatem acquireret. Sit jam a altitudo quam corpus grave tempore minuti unius ſecundi ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit, v velocitas hoc caſu acquiſita, & ideò $2a$ ſpatium quod velocitate uniformi v tempore minuti unius ſecundi deſcribi poteſt (30. *lib.* 1.) ſit b altitudo aquæ in vaſe ſtagnantis, c celeritas quam grave per altitudinem b ſine reſiſtentiâ cadendo acquirit, & s ſpatium quod cum celeritate c uniformiter progrediendo tempore minuti unius ſecundi deſcriberet, erit $a:b = vv:cc$ (28. lib. 1.) & $2a:s = v:c$ (5. lib. 1.) ideóque $a:b = 4aa:ss$; undè habetur $ss = 4ab$, & $s = \sqrt{4ab}$. Si igitur aqua è vaſe per venæ contractæ Sectionem effluat cum velocitate c quam grave cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem b aquæ in vaſe ſtagnantis acquirit, ſpatium s quod ex quantitate aquæ tempore minuti unius ſecundi è vaſe effluentis, ut ſuprà dictum eſt, habetur, debet eſſe æquale $\sqrt{4ab}$. Hinc ſi altitudo a, ſit pedum Pariſ. $14\frac{1}{6}$, erit $ss = 56b$, quæ eſt ipſa regula quam D. *Pitot* in Monum. Acad. Pariſ. an. 1730. tradidit. At ſi altitudo a ponatur eſſe pedum Pariſ. $15\frac{1}{12}$ ſeu $\frac{181}{12}$ (471. lib. 1.) erit $ss = \frac{181}{3}b$. Verùm ut aquæ in vaſe ſtagnantis altitudo & velocitas per foramen effluentis quo tempore experimentum capitur, eadem ad ſenſum maneant, ut oportet, uſurpari poteſt vas ſatis amplum exiguo pertuſum foramine, vel ſi vas paulò anguſtius adhibeatur, tantum aquæ affundi supernè debet quantum per inferius lumen effluit, & cavendum eſt ne affuſa aqua cum aliquo impetu cadendi extimam aquæ in vaſe ſtagnantis ſuperficiem attingat. Quibus autem artibus id poſſit effici fusè exponunt locis ſuprà citatis Marchio *Polenus* & *Daniel Bernoullius* quos lector conſulere poteſt. Attamen his adhibitis cautelis, velocitas aquæ per venæ contractæ Sectionem effluentis paulò minor per experimenta quàm per theoriam invenitur, quod variis reſiſtentiis tribuendum eſſe videtur, & certè Illuſtr. Marchio *Polenus*, cùm in libro de Caſtellis pag. 64. opinatus fuiſſet velocitatem illam in experimentis valde eſſe minorem quàm in theoriâ, pluribus deinde experimentis ad calculos revocatis priorem ſententiam mutavit in Epiſtolâ ad *Marinonium*.

(q) *Deſcribendo dimidiam altitudinem.* Velocitas quam corpus quodlibet grave, ſine reſiſtentiâ cadendo & caſu ſuo deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirit, eſt ad velocitatem ejus per totam altitudinem aquæ cadendo acquiſitam ut 1 ad $\sqrt{2}$ (28. lib. 1.)

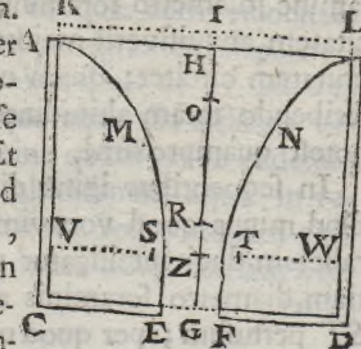
ramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, & velocitatem acquisiverit majorem in ratione subduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & casu suo describendo totam altitudinem aquæ in vase stagnantis, acquirere potest quàmproximè.

In sequentibus igitur diameter venæ designetur per foramen illud minus quod vocavimus *E F*. Et plano foraminis *E F* parallelum duci intelligatur planum aliud superius VW ad distantiam diametro foraminis æqualem circiter & foramine majore *ST* pertusum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius *E F*, atque ideo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio problematis postulat quamproximè. Spatium verò, quod planis duobus & venâ cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio problematis simplicior sit & magis mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & è vase per foramen *E F* in plano inferiore factum egrediebatur, motum suum perpetuo



(1.) Sed, ex suprà ostensis, velocitas aquæ per vasis foramen transeuntis est ad velocitatem per venæ contractæ Sectionem fluentis, id est, ad velocitatem quam grave cadendo per totam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, in eâdem ratione 1, ad $\sqrt{2}$; Quarè velocitas quam grave per dimidiam altitudinem aquæ stagnantis cadendo acquirit, æqualis est velocitati aquæ per foramen effluentis, modò tamen aqua per simplex foramen in tenuissimâ laminâ factum, ut suprà expositum est, effluat è vase. 274.

petuo servet, & (r) glacies quietem suam. In sequentibus igitur sit ST diameter foraminis circularis centro Z descripti per quod cataracta effluit ex vase ubi aqua tota in vase fluida est. Et sit EF diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquatè transit, sive aqua exeat ex vase per foramen illud superius ST, sive cadat per medium glaciei in vase tanquam per infundibulum.



Et sit diameter foraminis superioris ST ad diametrum inferioris EF ut 25 ad 21 circiter, & distantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis sit diametro foraminis minoris EF. Et velocitas aquæ è vase per foramen ST exeuntis ea erit in ipso foramine deorsum quam corpus cadendo à dimidio altitudinis IZ acquirere potest: velocitas autem cataractæ utriusque cadentis ea erit in foramine EF, quam corpus cadendo ab altitudine totâ IG (f) acquiret.

Cas.

(r) * *Et glacies quietem suam.* Sunto vasa duo æqualia ABDC, abdc, in quorum primo glacies omnis in aquam resoluta sit, & in altero glacies quietem suam conservet, ut aqua cataractam abnfem formando effluat per foramen ef Sectioni venæ contractæ è foramine EF exilientis æquale; & loco vasis ABDC, in problematis solutione substitui poterit vas alterum abdc, in quo aquæ per lumen ef effluentis eadem est velocitas quam aqua è vase ABDC exiliens habet in Sectione venæ contractæ, eademque proindè aquæ quantitas in defluxum impenditur, & propterea idem aquæ pondus fundo incumbit in utroque vase. Quoniam enim cataractæ abnfem figura & lex secundùm quam aqua cataractâ illâ movetur notæ sunt, problematis solutio & facilior & magis mathematica fiet, si loco vasis ABDC mente substituatur vas abdc.

(f) * *Acquiret.* Hæc ex suprà demonstratis patent.

Cas. 2. Si foramen *E F* non sit in medio fundi vasis, sed fundum alibi perforetur: aqua effluet eâdem cum velocitate ac priùs, si modò eadem sit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore descendit ad eandem profunditatem (t) per lineam obliquam quàm per lineam perpendicularem, sed descendendo eandem velocitatem acquirit in utroque casu, (u) ut *Galilæus* demonstravit.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

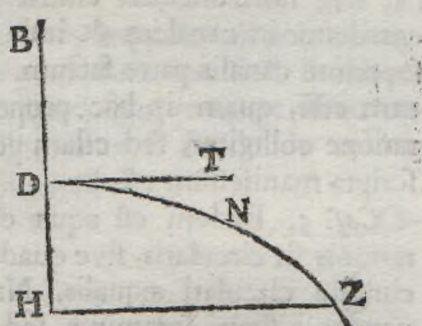
Cas. 3. Eadem est aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vasis. Nam si foramen parvum sit, (x) ut intervallum inter superficies *A B* & *K L* quoad sensum evanescat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: ex (y) latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea sit quam corpus ab aquæ in vase stagnantis altitudine *H G* vel *I G* cadendo acquirere potuisset. Facto

(t) * *Per lineam obliquam.* In hoc secundo casu pars aquæ per lineas ad foramen obliquas descendit.

(u) * *Ut Galilæus demonstravit.* (81. & 85. lib. 1.).

(x) 275. * *Ut intervallum inter superficies A B & K L.* I H est ad I G in ratione quadruplicatâ diametri E F ad diametrum A B (272), aut quod idem est, in ratione duplicatâ areæ circuli E F ad aream circuli A B, ideòque si ratio E F ad A B parva sit, minor adhuc erit ratio I H ad I G, & H G, I G erunt ad sensum æquales.

(y) * *Ex latere recto hujus Parabolæ.* Aquæ gutta è loco D, secundùm directionem quamlibet D T exiliat cum eâ velocitate quam per altitudinem B D cadendo acquirere potest, & sublatâ medii resistentiâ, describat parabolam D N Z, cujus vertex D, tangens D T, & diameter D H seu verticalis B D producta (40. lib. 1.); capiatur abscissa D H æqualis altitudini B D, ducaturque ordinata H Z, quæ tangenti D T parallela erit; & quo tempore gutta aquæ vi gravitatis cadendo altitudinem B D vel D H describit uniformi illâ velocitate quam casu per B D acquisivit, describit longitudinem H Z ipsius B D vel D H duplam, (30. lib. 1.). Latus rectum



Parabolæ D N Z, pertinens ad diametrum 275.
D H est $\frac{HZ^2}{DH}$ (*theor.* 1. *de parab.*) ideòque cùm sit H Z = 2 D H = 2 B D, latus rectum est 4 B D. Igitur altitudo B D quam aqua cadendo describere debet ut velocitatem acquirat cum quâ è loco D exilit, est quarta pars lateris recti ad diametrum D H parabolæ D N Z pertinentis.

ℭto utique experimento inveni quod, ſi altitudo aquæ ſtagnantis ſupra foramen eſſet viginti digitorum & altitudo foraminis ſupra planum horizonti parallelum eſſet quoque viginti digitorum, vena aquæ proſilientis incideret in planum illud ad diſtantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo quod in planum illud à foramine demittebatur captam. Nam ſine reſiſtentiâ, vena (z) incidere debuiſſet in planum illud ad diſtantiam digitorum 40, exiſtente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Caſ. 4. Quin etiam aqua effluens, ſi ſurſum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Aſcendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vaſe ſtagnantis altitudinem GH vel GI, niſi quâtenus aſcenſus ejus ab aeris reſiſtentiâ aliquantulum impediatur; (a) ac proinde eâ effluit cum velocitate quam ab altitudine illâ cadendo acquirere potuiſſet. Aquæ ſtagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (*per prop.* XIX. *lib.* 2.) & preſſioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, ſive deſcendat per foramen in fundo vaſis, ſive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, ſive egrediatur in canalem & inde aſcendat per foramen parvum in ſuperiore canalis parte factum. Et velocitatem quâ aqua effluit. eam eſſe, quam in hâc propoſitione aſſignavimus, non ſolùm ratione colligitur, ſed etiam per experimenta notiſſima jam deſcripta manifeſtum eſt.

Caſ. 5. Eadem eſt aquæ effluentis velocitas, ſive figura foraminis ſit circularis, ſive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figurâ foraminis, ſed oritur ab ejus altitudine infra planum K L.

Caſ. 6. Si vaſis $AB\,DC$ pars inferior in aquam ſtagnantem im-

(z) * *Incidere debuiſſet in planum illud.* Sit enim (*in fig. notæ ſuperioris*) altitudo B D = D H digit. 20, & quia B D eſt pars quarta lateris recti parabolæ D N Z, quam aqua ſine reſiſtentiâ deſcriberet, latus illud rectum eſt digit. 80, & ordinata H Z æqualis 2 D H eſt digit. 40. differentia 3. digit. inter diſtantias 40. & 37. digit. reſiſtentiis tribuenda eſt.

(a) * *Ac proinè eâ effluit cum velocitate.* (25. 26. lib. 1.)

immergatur & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit *GR*: velocitas quâcum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen *EF* in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IR* acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſubſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minimè accelerabit. Patebit etiam & hic caſus per experimenta, (b) menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

(c) *Corol.* 1. Hinc ſi aquæ altitudo *CA* producatur ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicatâ ratione areæ foraminis in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli *AB*: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *KC* acquirere poteſt.

(d) *Corol.* 2. Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen *EF*, & altitudo 2 *GI* vel 2 *CK*. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine *GI* cadendo velocitatem ſuam, quâ exilit, acquirere poteſt.

Co-

(b) * *Menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit*, & quantitates aquæ iiſdem temporibus effluentis.

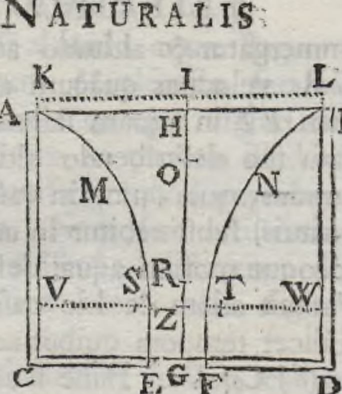
(c) * *Cor.* 1. Patet per not. 275. & caſ. 2um. ac 5um.

(d) * *Cor.* 2. De hujus corollarii veritate diù multumque diſputatum eſt inter Comitem *Riccatum*, Danielem *Bernoullium*, Petrum Antonium *Michelottum*, Jacobum *Jurinum*, alioſque eruditiſſimos viros. Cùm enim in primâ principiorum editione, NEWTONUS, nondum obſervatâ contractione venæ, ſtatuiſſet, vim quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualem eſſe ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen E F, & altitudo G I, & in ſecundâ editione, habitâ ratione venæ contractæ, vim illam duplam feciſſet, priorem vis illius menſuram adverſus Comitem *Riccatum* & *Jurinum* tuebatur cum *Michelotto* Daniel *Bernoullius*, quorum Diſſertationes videre eſt in Exercitationibus Mathematicis quæ an. 1724. *Venetiis* editæ ſunt. Verùm *Daniel Bernoullius* paragr. 9. ſect. 13. *Hydrodynamicæ* poſteriori ſententiæ NEWTONI ità ſuffragatur: «iſta ſententia a me olim «& ab aliis fuit impugnata, ab aliis ruſ-

275.

«ſus

DE MOTU CORPORUM: LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.



Corol. 3. Pondus aquæ totius in vase *ABDC* est ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut summa circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum *EF*. Sit enim *IO* media proportionalis inter *IH* & *IG*; & aqua per foramen *EF* egrediens, quo tempore gutta cadendo ab *I* describere posset altitudinem *IG*, æqualis erit cylindro cujus basis est circulus *EF* & altitudo est 2 *IG*, id est, cylindro cujus basis est circulus *AB* & altitudo est 2 *IO*, (e) nam circulus *EF* est ad circulum *AB* in subduplicatâ ratione altitudinis *IH* ad alti-

«sus confirmata. Nunc autem postquam «hanc aquarum motarum theoriam medi«tatus sum, lis ità dirimenda mihi vide«tur ut cum aquæ ad motum uniformem «pervenerint, quæ quidem Hypothesis est «NEWTONI, tunc rectè altitudine 2 G I, vis «illa definiatur, sed ab initio fluxûs, ubi «velocitas adhuc nulla est, vis simplici al«titudini G I respondeat, moxque cres«cente velocitate, simul vis aquam ad ef«fluxum animans crescat, & tandem ad «eam magnitudinem exsurgat quam NEW«TONUS assignavit..... Rectè etiam Ill. «*Riccatus*, cum quo mihi de hoc argumen«to res erat, interrogatus, undè vis illa «duplæ aquarum altitudini conveniens ori«ri possit, cum obturato orificio, gutta «eidem imminens vi simplicis altitudinis «urgeri manifestè appareat, respondit dis«tinguendum esse statum quietis à statu mo«tûs. » Jam verò hujus cor. 2. demonstrationem dedimus (274.); aliam, quam NEWTONUS indicat, exposuerunt Comes *Riccatus* in citatis Exercitationibus, & *Eustachius Manfredius* in adnotationibus ad cap. 1. tractatûs *Guilelmini* de natura fluminum (quod præclarum opus post fata summi viri, Clariss. Fratres *Gabriel* & *Heraclitus Manfredi*. an. 1739. Bononiæ edi curarunt.) Demonstratio sic potest exponi. Quo tempore cylindrus aquæ, cujus basis æqualis est foramini E F, & altitudo G I vi ponderis sui cadendo describeret altitudinem I G, & velocitatem aquæ exilientis acquireret; eodem tempore è foramine E F efflueret aquæ quantitas æqualis alteri cylindro aqueo, cujus basis est foramen E F, & longitudo 2 G I (30. *lib.* 1.), id est, cylindro prioris duplo; & ideò ob velocitatem quam cylindrus per altitudinem I G, cadendo acquirit, æqualem velocitati aquæ exilientis, quantitas motûs in illo cylindro vi ponderis ejusdem cylindri genita, est ad quantitatem motûs eodem tempore in aquâ exiliente productam ut 1 ad 2. Sed vires uniformes quibus cylindri cadentis & aquæ exilientis motus generantur, sunt ut motûs quantitates eodem tempore à viribus illis genitæ (15. *lib.* 1). Quare pondus cylindri aquæ, cujus basis est foramen E F, & altitudo G I, est ad vim quâ totus aquæ exilientis motus generari potest ut 1 ad 2, & proinde hæc vis æqualis est ponderi cylindricæ columnæ aquæ cujus basis & foramen E F & altitudo 2 G I. Q. E. D.

(e) * *Nam circulus E F est ad circulum A B, in subduplicatâ ratione altitudinis I H, ad altitudinem I G* (per cor. 1.) *id est, in simplici ratione mediæ proportionalis I O, ad altitudinem I G*, ideoque factum ex circulo A B in altitudinem 2 I O æquale est facto titudinem IG, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poteſt altitudinem IH, aqua egrediens (f) æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo eſt $2\,IH$: & quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G deſcribit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, (g) id eſt, aqua tota in ſolido $ABNFEM$ æqualis erit differentiæ cylindrorum, id eſt, cylindro cujus baſis eſt AB & altitudo $2\,HO$. Et propterea aqua tota in vaſe $ABDC$ eſt ad aquam totam cadentem in ſolido $ABNFEM$ ut (h) HG ad $2\,HO$, id eſt, ut $HO+OG$ ad HO, ſeu $IH+IO$ ad $2\,IH$. Sed pondus aquæ totius in ſolido $ABNFEM$ in aquæ defluxum (i) impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vaſe eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2\,IH$, (k) atque ideo ut ſumma circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

(l) *Corol.* 4. Et hinc pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$ eſt

facto ex circulo EF in altitudinem 2 IG, aut, quod idem eſt, cylindrus cujus baſis eſt circulus EF & altitudo 2 IG, æquatur cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo 2 IO.

(f) * *Æqualis erit cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo* 2 IH. Eadem enim aquæ quantitas eodem tempore tranſit per circulos AB, & EF (271) & quantitas aquæ per circulum AB, tranſeuntis eo tempore quo gutta cadendo deſcribere poteſt altitudinem IH, æqualis erit cylindro aqueo cujus baſis eſt circulus AB & altitudo 2 IH. (30. lib. 1.).

(g) * *Id eſt aqua tota.* Nam ex iis quæ ante caſ. 1. dicta ſunt, manifeſtum eſt aquam totam prædicto ſolido contentam, per foramen EF eodem tempore effluere, quo aquæ gutta vi gravitatis ſuæ è loco I per H ad G cadendo deſcribit altitudinem HG.

(h) * *Ut HG ad 2 HO &c.* Volumen aquæ in vaſe ABDC contentæ æquatur capacitati vaſis ſeu cylindro cujus baſis eſt circulus AB, & altitudo HG; & propterea aqua tota in vaſe ABDC, eſt ad aquam totam cadentem in ſolido ABNFEM, 275.
ut HG ad 2 HO (ex dem.), id eſt, ut HO + OG ad 2 HO, & quia (per hyp.) $IH:IO = IO:IG = IO - IH : IG - IO = HO:OG$, erit $HO + OG : 2\,HO = IH + IO : 2\,IH$.

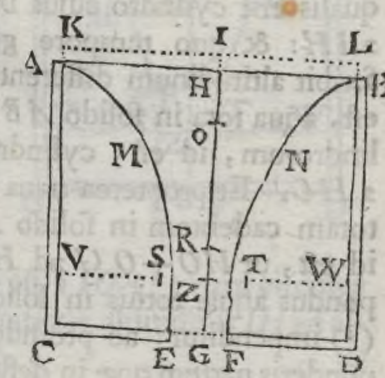
(i) *Impenditur*, ut probatum eſt initio caſ. 1.

(k) * *Atquè ideò ut ſumma circulorum.* Quoniam enim (*per hyp.*) eſt IH ad IO ut IO ad IG, erit etiam IH + IO ad 2 IH ut IG + IO ad 2 IO, ſed (ex modò dem.) circulus AB eſt ad circulum EF ut IG ad IO, ideóque ſumma circulorum AB & EF ad duplum circulum EF ut IG + IO ad 2 IO ſeu ut IH + IO ad 2 IH. Quarè patet propoſitum.

(l) * *Cor.* 4. Pondus aquæ totius in vaſe ABDC ſit P ponderis illius pars quæ in defluxum impenditur ſit p & hinc $P-p$, pars ponderis totius quæ fundo vaſis ſeu plano æquali differentiæ circulorum CD & EF ſuſtinetur & in defluxum non impenditur. Et (*per cor.* 3.) erit $P:p = AB + EF : 2\,EF$, ac proindè $P : P - p = AB + EF : AB - EF$.

eſt ad ponderis partem alteram quam fundum vaſis ſuſtinet, ut ſumma circulorum *AB* & *EF* ad differentiam eorundem circulorum.

(m) *Corol.* 5. Et ponderis pars, quam fundum vaſis ſuſtinet, eſt ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum minorem *EF*, ſive ut area fundi ad duplum foramen.



(n) *Corol.* 6. Ponderis autem pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad ſumma circulorum *AB* & *EF*, ſive ut circulus *AB* ad exceſſum dupli circuli *AB* ſupra fundum. Nam ponderis pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius in vaſe, ut differentia circulorum *AB* & *EF* ad ſummam eorundem circulorum, per cor. 4.: & pondus aquæ totius in vaſe eſt ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad differentiam circulorum *AB* & *EF*. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ ſolâ fundum urgetur, eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *AB* ad ſummam circulorum *AB* & *EF* (o) vel exceſſum dupli circuli *AB* ſupra fundum.

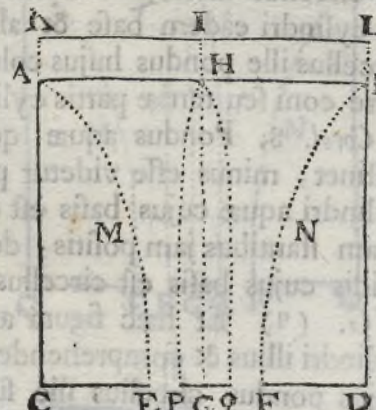
Corol. 7. Si in medio foraminis *EF* locetur circellus *PQ* cen-

(m) * *Cor.* 5. Cùm ſit $P:p = AB + EF : 2\,EF$, erit quoque $P - p : p = AB - EF : 2\,EF$. Eſt autem area fundi æqualis differentiæ circulorum AB & EF.

(n) * *Cor.* 6. *Ponderis autem pars quâ ſolâ fundum urgetur*, ſive pondus aquæ quæ in ſpatio ſolido CEMA DFNB continetur, *eſt ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit* & quæ æquatur ſolido aqueo cujus baſis eſt differentia circulorum AB & EF, & altitudo GH, *ut circulus &c.*

(o) * *Vel exceſſum dupli circuli AB ſuprà fundum.* Cùm fundum æquale ſit differentiæ circulorum AB & EF, exceſſus dupli circuli AB, ſuprà fundum eſt $2\,AB - AB + EF$, ſeu $AB + EF$.

centro *G* descriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille sustinet, majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *G H*. Sit enim *ABNFEM* cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens *G H* ut supra, & congelari intelligatur aqua omnis in vase, (p) tam in circuitu cataractæ quàm supra circellum, cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ descensum non requiritur. Et sit *P H Q* columna aquæ supra circellum congelata, verticem habens *H* & altitudinem *G H*. Et finge cataractam hancce pondere suo toto cadere & non incumbere in *P H Q*, nec eandem premere, sed liberè & sine frictione præterlabi, nisi forte in ipso glaciei vertice quo cataracta ipso cadendi initio incipiat esse cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata *A M E C*, *B N F D*



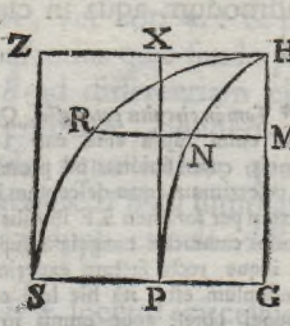
(p) * *Tam in circuitu cataractæ.* Quemadmodum enim suprà antè cas. 1um., aqua omnis cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ descensum illiusque effluxum per foramen E F inutilis erat, in circuitu cataractæ congelata supponebatur, idque rectè factum experimentis posteà ostensum est, ità hic loci congelata supponi potest aqua omnis in vase tam in circuitu cataractæ quàm suprà circellum, cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ effluxum per spatium annulare E P, Q F, non requiritur; Et quemadmodum glacies in circuitu cataractæ constituta, C E M A, D F N B pertingebat ad superficiem A B seu terminum glaciei continuò liquescentis K A B L, ità aqua suprà circellum congelata producitur ad punctum H, in eâdem superficie A B positum; & uti glacies *in circuitu cataractæ convexa est versùs cataractam cadentem* (272), *sic etiam columna aquæ suprà circellum congelatæ PHQ convexa erit versus cataractam cadentem AHPEM, BHQFN*; 275.
* Considerari enim potest axis H G ut paries vasis cujus sectio sit H G C A, & foramen in fundo factum sit E P, qualiscumque autem sit Lex quâ effluit aqua ex vase, eodem modo quo factum est à NEWTONO in hujus demonstrationis casu primo, concipi potest cataracta trans glaciem effluens, adhibitis cautionibus illic notatis, ut hæc Hypothesis Mathematica congruat cum verâ effluxus aquæ Lege, quâtenus ad copiam aquæ effluentis dato tempore, quo posito evidens est lineam H P convexam sumi debere. Quâpropter si ex punctis P & Q ad punctum H ducantur lineæ rectæ, quæ cum diametro P Q triangulum constituant, conus ex revolutione hujus trianguli circà axem H G genitus, totus continebitur in solido quod per rotationem figuræ convexæ P H Q circâ eundem axem H G generatur. Hoc igitur solidum, seu columna P H Q suprà circellum congelata, magnitudine superat conum illum

B N F D convexa eſt in ſuperficie internâ *A M E*, *B N F* verſus cataractam cadentem, ſic etiam hæc columna *P H Q* convexa erit verſus cataractam, & propterea major cono cujus baſis eſt circellus ille *P Q* & altitudo *G H*, id eſt, major tertiâ parte cylindri eâdem baſe & altitudine deſcripti. Suſtinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id eſt, pondus quod pondere coni ſeu tertiæ partis cylindri illius majus eſt.

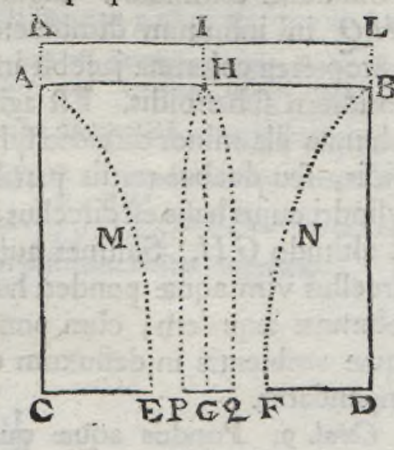
Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *P Q* ſuſtinet, minus eſſe videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt *H G*. Nam ſtantibus jam poſitis, deſcribi intelligatur dimidium ſphæroidis cujus baſis eſt circellus ille & ſemiaxis ſive altitudo eſt *H G*. (q) Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ *P H Q* cujus pondus circellus ille ſuſtinet. Nam ut motus aquæ ſit maximè directus, columnæ illius ſuperficies externa concurret cum baſi *P Q* (r) in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua

illum cujus baſis eſt circellus P Q & altitudo H G. Quarè (*per prop. X. lib.* 12. *Elem.*) columna congelata P H Q, major eſt tertiâ parte cylindri aquæ, cujus baſis eſt circellus P Q & altitudo G H. Sed ſicut fundum E C, F D ſuſtinet pondus aquæ in ſpatio ſolido C E M A, D F N B contentæ, ità circellus P Q ſuſtinet pondus columnæ aquæ P H Q, id eſt, pondus quod majus eſt pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus baſis eſt circellus P Q & altitudo G H.

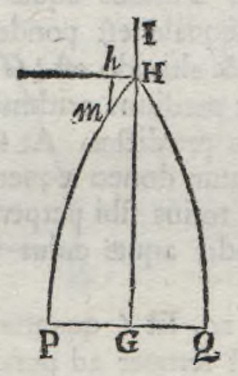
(q) * *Et hæc figura æqualis erit &c.* Centro G, & ſemiaxibus conjugatis G H & G P, deſcribatur ellipſeos quadrans H N P, & centro eodem G ac radio G H circuli quadrans H R S, compleanturque rectangula H G P X & H G S Z. Ducatur in circulo ordinata quævis R M, ellipſi occurrens in N, erit R M ad N M, in datâ ratione S G ad P G (247. *lib.* 1.) & propterea ſi figuræ illæ circà axem H G revolvantur, circulus quem radius M R in hâc revolutione deſcribet, erit ad circulum radio M N deſcriptum in datâ ratione SG^2 ad PG^2, ſeu in datâ ratione cylindri quem rectangulum H G S Z rotando deſcribit ad cylindrum ex rotatione rectanguli H G P X genitum; undè (*per cor. Lem. IV. lib.* 1.) hæmiſphærium ex revolutione quadrantis circuli H R S G genitum, eſt ad hemiſphæroidem ex rotatione quadrantis ellipſeos H N P G in eâdem ratione. Cum igitur hemiſphærium ſit ad cylindrum circumſcriptum ut 2 ad 3 (170. *lib.* 2.) erit etiam hemiſphærois ad cylindrum circumſcriptum qui per rotationem rectanguli H G P X generatur, in eâdem ratione 2 ad 3. Q. E. D.



(r) * *In angulo nonnihil acuto.* Nam quemadmodum angulus quem cataractæ ABNFEM aqua cadendo perpetuò acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cùm angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes (s) jacebit intra dimidium sphæroidis. (t) Eadem verò sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem sphæroidis sit infinitè velocior quàm ejus motus horizontem versus. (u) Et quò minor est circellus PQ, eò acutior erit vertex columnæ; & circello in



De Motu Corporum.
Liber Secund.
Sect. VII.
Prop. XXXVI.
Probl. VIII.

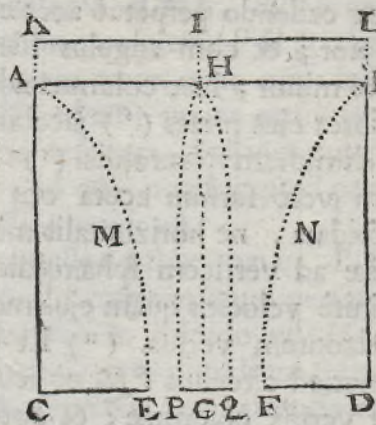


ABNFEM superficies externa AME, BNF cum basi CE, DF constituit, est semper acutus, quia aqua cadendo semper acceleratur (272.) Sic etiam, ob eandem rationem, columnæ PHQ superficies externa concurret cum basi PQ in angulo acuto HPQ, HQP. Quia verò circulo PQ evanescente, seu coincidente HP cum axe HG, angulus ille HPG rectus evadit; si circulus est valdè parvus; angulus HPG erit fere rectus seu nonnihil acutus.

(s) *Jacebit intrà dimidium sphæroidis.* Quia (ex naturâ ellipseos) in quâ tangentes per axium vertices ductæ angulos rectos cum axibus constituunt, sphæroidis superficies cum circello PQ, concurrit in angulo recto.

(t) * *Eadem verò sursum acuta erit.* Cùm enim partes aquæ duplici motu cieantur in H, alio verticali qui lapsu per altitudinem IH acquiritur, alio horizontali quo partes aquæ ad cataractam formandam ad se mutuò accedunt, uti suprà antè cas. 1um. dictum est, atquè ideò guttula aquæ in H, lineam curvam HP motu composito describat, necessum est ut angulus PHG sit acutus, & proindè columna PHQ cuspidata in H. Describat enim guttula aquæ lineam quam minimam Hh, motu horizontali, & eodem temporis momento lineam hm, motu verticali, atquè arcum Hm motu composito; & velocitas horizontalis erit ad velocitatem verticalem ut Hh ad hm, id est, ut sinus hmH seu mHG ad sinum anguli hHm. Sed evanescente angulo hHm, seu angulo mHG recto existente, sinus anguli mHG, infinitè major est sinu anguli hHm. Quare si angulus mHG rectus sit, horizontalis motus aquæ erit infinitè major quàm motus ejus verticalis. Quod absurdum est; angulus igitur mHG acutus est. 276.

(u) * *Et quò minor est circellus PQ.* Nam si circellus PQ ità augeatur, ut adæquet foramen EF illudque occludat, columna PHQ evadet cylindrica, & rectâ mh coincidente cum Hh angulus mHG rectus erit; & contrà circello in infinitum diminuto, coincidet HmP, cum axe HG, angulusque mHG evanescet. Columna igitur tam ad superiores partes versùs H, quàm ad inferiores partes versùs P & Q, jacebit intrà dimidium sphæroidis.



in infinitum diminuto, angulus, PHQ in infinitum diminuetur & propterea columna jacebit intra dimidium sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio sphæroidis, seu duabus tertiis partibus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo GH. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cùm pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, æquale est ponderi cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} GH$ quamproximè. (x) Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera coni & hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen EF; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est GH.

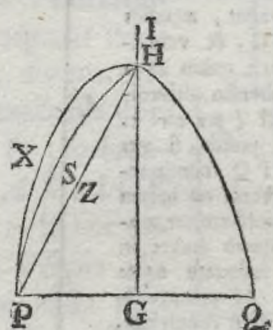
Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} GH$, (y) ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$, sive ut circulus EF ad excessum circuli hujus supra semissem circelli PQ quamproximè.

(x) * *Nam pondus hocce est medium arithmeticum.* Cùm enim columna illa aquæ, quam circellus valde parvus sustinet, major sit tertiâ parte cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo HG (*cor.* 7.), & minor duabus tertiis partibus ejusdem cylindri (*cor.* 8.), erit ferè æqualis medio arithmetico inter cylindros $\frac{1}{3} PQ \times HG$; & $\frac{2}{3} PQ \times HG$. Est autem medium illud arithmeticum æquale dimidiæ summæ illorum cylindrorum, id est, cylindro $\frac{1}{2} PQ \times HG$, cujus basis est circellus PQ, & altitudo $\frac{1}{2} HG$.

(y) * *Ut* EFq *ad* $EFq - \frac{1}{2} PQq$. Hæc enim suppositio superioribus determinationibus satisfacit. Nam sit p pondus aquæ quam circellus sustinet; P pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo GH; & si (juxtà cor. hoc 10.) ponatur $p : \frac{1}{2} P = EF^2 : EF^2 -$

$\frac{1}{2}$P.

$\frac{1}{2}PQ^2$, erit $p = \frac{\frac{1}{2}P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2}$. Sed quantitas $\frac{\frac{1}{2}P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2} = \frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$ ſemper major eſt quantitate $\frac{1}{3}$ P, quod cor. 7. ſatisfacit. Et contrà quantitas illa $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$, minor eſt quàm $\frac{2}{3}$ P, ubi circellus eſt, ſatis parvus ſeu quamdiu $\overline{2PQ}^2 < EF^2$ (cùm enim ſit $\overline{PQ}^2 = \frac{EF^2}{2}$, tunc illa quantitas p eſt $\frac{2P \times \overline{EF}^2}{3EF^2} = \frac{2}{3}P$, (quæ eſt determinatio cor. 8.). Tandem ubi circellus infinitè minor eſt quàm foramen EF, fit $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = \frac{1}{2}P$, & ubi circellus adæquat foramen EF, eſt $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = P$, quæ duo cum cor. 9. determinationibus congruunt.



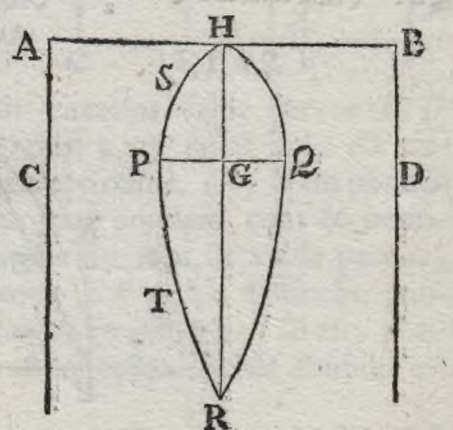
277. Si circellus P Q ſit valdè parvus, & vertice P axe P G deſcribatur per punctum H, parabolæ arcus P S H, & figura P S H G circà H G convolvatur, ſolidum inde genitum columnam aquæ quam circellus ſuſtinet exhibebit quam proximè. Nam angulus S P G quem parabola cum axe P G, continet, rectus eſt, & ideò quam proximè æqualis angulo quem prædictæ columnæ ſuperficies cum circello valdè parvo P Q efficit (*cor.* 8.) ; & evaneſcente P G, angulus S H G arcu parabolæ S H & rectâ H G comprehenſus fit infinitè parvus, ut oportet (*per idem cor.* 8.). Præterea ſi jungatur recta P Z H, & centro G, ac ſemiaxibus conjugatis G H, & G P deſcribatur ellipſeos quadrans P X H, & figuræ P Z H G, P S H G, P X H G circà axem H G convolvantur, ſolidum quod per revolutionem figuræ parabolicæ P S H G generatur, majus erit cono ex rotatione trianguli P Z H G genito, & minus hemiſphæroide quam figura P X H G rotata deſcribit, quod cor. 7°. & 8°. ſatisfacit. Tandem, calculo inito, facile patet ſolidum quod per convolutionem figuræ PSHG, gignitur, eſſe ad cylindrum cujus baſis eſt circellus P Q, & altitudo G H, ut 8 ad 15, quæ ratio non multùm aberrat à ratione 1 ad 2 quam NEWTONUS in cor. 9. invenit. 277.

LEMMA IV.

Cylindri, qui ſecundum longitudinem ſuam uniformiter progreditur; reſiſtentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem eſt cum reſiſtentia circuli eâdem diametro deſcripti & eâdem velocitate ſecundùm lineam rectam plano ipſius perpendicularem progredientis.

(z) Nam latera cylindri motui ejus minimè opponuntur: & cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in circulum vertitur.

PRO-



278. Si circulus P Q valdè parvus maneat reſpectu foraminis E F, foramen verò E F quantumvis augeatur finitum ſit, & vas A B D C infinitum evadat, æquales erunt altitudines I G & H G, & velocitas aquæ in loco P Q, ea erit quàm aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem H G, acquirere poteſt (*per cor. 1. Prop. hujus 36.*). Iiſdem poſitis, ſi vas A B D C infrà circulum P Q continuetur, & aqua poſtquam pervenit ad locum P Q, ſolâ vi inſitâ pergat uniformiter moveri cum illâ velocitate quam habet in loco P Q, ſitque P Q R columna aquæ congelatæ, cujus fluiditas ad promptiſſimum alterius aquæ motum non requiritur, ut ſuprà de columnâ P H Q dictum eſt; erit G R = 2 G H & P T R ferè arcus parabolæ cujus vertex P axis P G, & ordinata G R. Nam * fingatur conſiderari lapſum ejus aquæ quæ per conoeidem HPQ moveretur ſeorſim à lapſu reliquæ aquæ Vaſis, liquet quod eo tempore quo aquæ gutta motu verticali uniformiter accelerato cadit ex H in G effluet bis ea aquæ copia quæ in conoeide H P Q continetur; ea ergo aquæ copia erit æqualis cylindro cujus altitudo erit H G, & Baſis circulus P Q, particula verò G celeritate ex lapſu per H acquiſita deſcribet 2 H G ſive G R, tota ergo aqua quæ per Conoidem H P Q movebitur occupabit figuram cujus Baſis eſt circulus P Q, cujus altitudo eſt 2 H G, & ſoliditas dimidium cylindri cujus P Q foret Baſis & altitudo 2 H G, ſed per præcedentem Paraboloeides eſt ferè dimidium cylindri circumſcripti: ergo aqua quæ per Conoidem effluit eum Paraboloeidem occuparet: eſt ergo columna P Q R columna aquæ congelatæ quæ ad promptiſſimum aquæ reliquæ circumpoſitæ motum non requiritur. Hæc ad demonſtrationem Scholii proximi hic adnectenda viſa ſunt; utrum ſatis rectè NEWTONIANÆ demonſtrationis indolem ſimus aſſecuti, videat B. Lector,

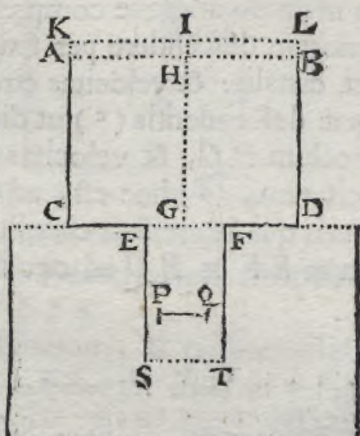
Si quid noviſti rectiùs iſtis
Candidus imperti; ſi non, his utere mecum.

(z) * *Nam latera cylindri &c.* Hic enim latera cylindri eſſe politiſſima, & medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam ſupponitur.

279. Lemma. *Vires uniformes ſunt directè ut quantitates motus quas generant, & inversè ut tempora quibus illas generant,* (13. & 15. lib. 1.); & quia motûs quantitates ſunt ut maſſæ & velocitates conjunctim, ſive ut volumina & denſitates & velocitates, *vires uniformes ſunt etiam in ratione compoſitâ ex rationibus directis voluminum, denſitatum & velocitatum & ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant*; cùmque tempora illa ſint

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, est ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè.



Nam si vas *ABDC* fundo suo *CD* superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem cylindricum *EFTS* horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus *PQ* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *CA* ad *K*, ut sit *AK* ad *CK* in duplicatâ ratione quam habet excessus orificii canalis *EF* supra circellum *PQ* ad circellum *AB*: manifestum est (*per cas.* 5. *cas.* 6. *& cor.* 1. *prop.* XXXVI.) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *KC* vel *IG* acquirere potest.

Et

ut spatia descripta directè & velocitates inversè (31. lib. 1.); *vires uniformes sunt quoque in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum & quadratorum velocitatis & ratione inversâ spatiorum descriptorum*, & quia velocitates sunt ut spatia descripta directè & tempora inversè, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex ratione voluminum, densitatum & spatiorum descriptorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.*

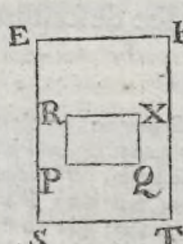
280. *Cor.* Quoniam cylindrorum volumina sunt ut eorum altitudines & diametrorum quadrata conjunctim; *vires uniformes quibus urgentur cylindri, sunt in ratione quæ componitur ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum & velocitatum à viribus illis genitarum, & ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant*; sunt etiam in ratione quæ componitur ex *rationibus directis altitudinum, quadratorum diametrorum, densitatum & quadratorum velocitatum, & ratione inversâ spatiorum descriptorum*; Sunt quoque vires illæ in ratione compositâ *ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum & spatiorum descriptorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.* Ubi prædictarum quantitatum, ex quibus virium ratio composita est, aliquæ datæ sunt, iis deletis habetur virium ratio. 280.

Et (*per corol.* x. *prop.* XXXVI.) si vasis latitudo sit infinita; (a) ut lineola HI evanescat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$ quam proximè. Nam vis aquæ, (b) uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ in quâcunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & ascendat circellus in fluido undique compresso, & ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis (c) ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ, & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, (d) hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis quâ præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, sive ut $EFq - PQq$ ad EFq.

(a) * *Ut lineola HI evanescat.* Per cor. 1. prop. 37. aut (per not. 275.).

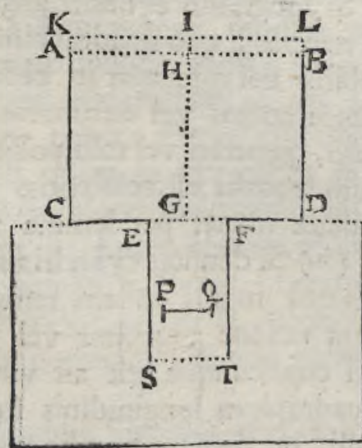
(b) * *Uniformi motu defluentis.* (Per cas. 6. prop. 36.).



(c) * *Ut differentia circulorum.* Velocitates uniformes sunt ut spatia eodem tempore descripta; sed inter eadum circulus PQ spatium solidum, seu cylindrum PQXR describit, descendit aquæ quantitas huic cylindro æqualis, & propterea altitudo verticalis per quam aqua descendit, æquatur longitudini quæ habetur dividendo valorem cylindri PQXR per valorem sectionis annularis inter circulum PQ & vasis latera ES, FT comprehensam, ideóque si $\overline{EF}^2$ & $\overline{PQ}^2$, circulos, & RP, lineam rectam significent, altitudo illa per quam aqua descendit est $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$. Quarè velocitas circuli ascendentis est ad velocitatem aquæ descendentis ut altitudo RP, ad altitudinem $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$, id est, ut $\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2$ ad $\overline{PQ}^2$, sivè ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ.

(d) * *Hoc est ad velocitatem relativam.* Cùm circulus ascendat & aqua descendat, velocitas relativa æqualis est summæ velocitatum oppositarum circuli & aquæ. Velocitas absoluta circuli ascendentis dicatur V, velocitas absoluta aquæ descendentis v, & quia circuli sunt ut diametrorum quadrata, si EF, & PQ, pro circulorum diametris sumantur; erit (*ex dem.*) $V : v = EF^2 - PQ^2 : \overline{PQ}^2$, & ideo $V : V + v = EF^2 - PQ^2 : EF^2$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.



EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest: & vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius (*per legum corol.* V.) id est, resistentia circelli ascendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq - \frac{1}{2}PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest, resistentia verò ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo dimidium est altitudinis IG, à quâ cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; ([e]) & hâc velocitate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem cylindri, hâc velocitate secundum longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentiâ circelli (*per lemma* IV.) ideoque æqualis est vi quâ motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, ([f]) generari potest quamproximè.

Sii

(e) * *Et hâc velocitate*, cylindrus tempore cadendi duplum longitudinis I G, seu quadruplum longitudinis suæ $\frac{1}{2}$ I G, describet (30. *lib.* 1.).

(f) * *Generari potest quamproximè.* Quo enim tempore cylindrus cum prædictâ velocitate uniformiter progrediendo, describit spatium 2 I G, proprio pondere cadendo describeret altitudinem I G, & velocitatem illam acquireret (30. *lib.* 1.). Cùm igitur resistentia æqualis sit ponderi cylindri, patet propositum. 2869.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit ([g]), augebitur vel minuetur in eâdem ratione, ideoque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per lemma IV.

([h]) Si denſitas cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque cylindri cujuſcunque erit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri quamproximè. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, ([i]) continuum verò eſſe debet & non elaſticum, ut preſſio omnis, quæ ab ejus compreſſione oritur, propagetur in inſtanti, & in omnes moti corporis partes æqualiter agendo reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique, quæ à motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & reſiſtentiam creat.

(g) * *Augebitur vel minuetur.* Quantitas motûs in cylindro cujus baſis, denſitas & velocitas datæ ſunt, augetur vel minuitur in ratione longitudinis cylindri ſeu voluminis, & tempus quo cylindrus datâ illâ velocitate uniformiter progrediendo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augetur vel minuitur in eâdem longitudinis auctæ vel diminutæ ratione (5. lib. 1.) ideoque (179) vis *illa quâ motus auctus &c.*

(h) * *Si denſitas cylindri* cæteris manentibus, *augeatur vel minuatur, motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur* (279). Cùm igitur cylindri cujuſcunque reſiſtentia æqualis ſit vi quâ motus cylindri aquæ ejuſdem baſis, altitudinis & velocitatis, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari vel tolli poſſit, & vis hæc ſit ad vim quâ totus prioris cylindri motus eodem tempore generari poſſit vel tolli, ut denſitas aquæ ad denſitatem cylindri, conſequens eſt ut reſiſtentia cylindri cujuſcumque ſit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari vel tolli poteſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem cylindri quamproxime.

(i) * *Continuum verò eſſe debet & non elaſticum.* Nam ſi fluidum eſſet elaſticum, ipſius partes per compreſſionem condenſarentur, & deinde rarefierent, atque ità preſſio per motum progreſſivum, qui inſtantaneus eſſe non poteſt, propagaretur. At ſi fluidum continuum ſit & denſari compreſſione nequeat, preſſio propagabitur in inſtanti. Experimentis verò conſtat aquam in ſtatu naturali conſtitutam vix poſſe condenſari, ſeu in ſpatium minus compreſſione redigi; cùm è contrà aër maximæ condenſationis & rarefactionis ſit capax.

creat. Pressio autem quæ oritur à compressione fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motûm in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque resistentiam nec auget nec minuit. Certè actio fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quàm in ejus partes anticas, ideoque resistentiam in hac propositione descriptam minuere non potest: & fortior non erit in partes anticas quàm in posticas, si modo propagatio ejus infinitè velocior sit quàm motus corporis pressi. Infinitè autem velocior erit & propagabitur in instanti, si modo fluidum sit continuum & non elasticum.

([k]) *Corol.* 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis mediorum.

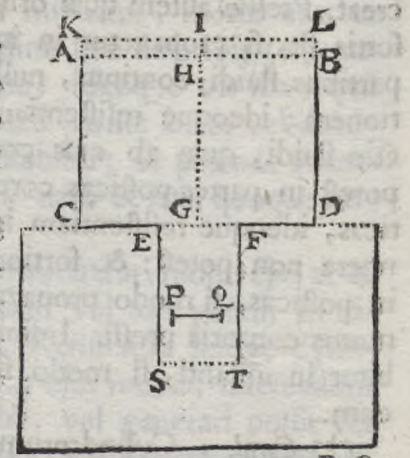
([l]) *Corol.* 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, sed cylindrus in medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: resistentia ejus erit ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit vel

(k) *Cor.* 1. Sic demonstratur. Resistentia cylindri cujusque est directè ut densitas medii & vis uniformis quâ totus cylindri motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit vel generari vel tolli possit, & inversè ut densitas cylindri (ex dem.); Sed vis illa uniformis est in ratione compositâ ex rationibus directis longitudinis cylindri, quadrati diametri, densitatis & quadrati velocitatis & ex ratione inversâ spatii descripti, seu ex ratione inversâ longitudinis cylindri (280.) Quarè (per compositionem rationum & ex æquo), resistentia cylindri cujuscumque, 280.
si conferatur cum resistentiâ alterius cylindri, est in ratione quæ componitur ex ratione densitatis medii, & ratione duplicatâ diametri & duplicatâ ratione velocitatis.

(l) * *Cor.* 2. Sic demonstratur. * Si Canalis non sit infinitus respectu baseos cylindri inclusi, resumantur ea quæ sub initium Theor. istius 37. dicebantur; Primo nempe quod ascendente circello in canali clauso, velocitas relativa aquæ semper sit ad ejus velocitatem ut basis cana-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ semel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione densitatis medii ad densitatem cylindri.



Corol. 3. Iisdem positis, & quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad EFq semel, & ratione EFq $- PQq$

lis E F ad annulum E P sive ad differentiam circulorum E F & P Q sive ut E F 2 ad $EF^2 - PQ^2$; Quæratur igitur altitudo I G talis ut velocitas lapsu per eam acquisita sit ad velocitatem circelli, ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$, & si fingatur circellus immotus in medio foraminis E F & aqua cadens ex altitudine I G ex vase amplissimo A B D B per illud foramen, cùm velocitas aquæ juxta circellum transiens eadem sit ac velocitas respectiva aquæ juxta cylindrum in canali clauso motum, actio aquæ in circellum utrinque æqualis censenda est, sed actio aquæ sive ejus pondus in circellum per Cor. 10. Prop. 36. est ad cylindrum cujus basis est circellus altitudo $\frac{1}{2}$ I G sicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, hæc itaque erit ratio Resistentiæ ad pondus cylindri aquei cujus basis est circellus & altitudo $\frac{1}{2}$ I G; Sed gravitas est vis quæ tempore quo percurritur uniformiter quadruplum longitudinis $\frac{1}{2}$ I G sive 2 I G velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest eam ipsam velocitatem, & pondus cylindri est ipsa gravitas per massam cylindri multiplicata, ergo pondus cylindri, est vis quæ dum percurritur quadruplum longitudinis cylindri velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest motum ejus cylindri eâ velocitate moti.

Cùm verò celeritas quæ lapsu per I G acquiritur sit ad eam cum quâ cylindrus movetur ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$. Quadruplum longitudinis cylindri propriâ suâ celeritate alio tempore percurret quàm si moveatur celeritate lapsu per I G acquisitâ. Gravitas ergo cylindri, erit ad eam vim quâ cylindri velocitas acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur, directè ut celeritates quæ iis viribus acquiruntur & inversè ut tempora quibus acquiruntur, quæ tempora (cum agatur de describendo uniformiter eodem spatio quadruplo nempe longitudinis cylindri) sunt inversè ut velocitates, ideoque Pondus cylindri est ad vim quâ ejus cylindri motus acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur bis directe ut celeritas lapsu per I G acquisita, ad celeritatem Cylindri, sive bis ut EF^2, ad $EF^2 - PQ^2$.

Ergo ex æquo Resistentia est ad eam vim sicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ & bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ$. At, nec resistentia nec ea vis mutantur longitudine cylindri mutata, sed tantum densitate mutatâ ut ex ipsa propositionis demonstratione liquet, est autem vis quâ motus in Cylindro aqueo generatur, dato tempore quo quadruplum suæ longitudinis suâ cum velocitate percurrit, ad eam vim qua motus in æquali cylindro, sed diversæ densitatis æquali cum velocitate moto, eodem tempore generatur, ut densitas

$-PQq$ ad EFq bis: (m) resistentia cylindri erit ad vim quâ totus ejus motus, interera dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

Scholium.

In hâc propositione resistentiam investigavimus quæ oritur à solâ magnitudine transversæ sectionis cylindri, neglectâ resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo propositionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen *E F*, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hâc propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino pressæ, cedunt pressioni & (n) undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur & resistentiam auget, (o) idque in eâ ferè ratione quâ effluxum aquæ è vase diminuit, id est in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maximâ copiâ transirent per foramen *E F*, ponendo quod aqua omnis in vase

sitas aquæ sive medii, ad densitatem Cylindri, ergo tandem Resistentia est ad vim quâ motus in Cylindro generari vel tolli potest quo tempore quadruplum suæ longitudinis propriâ cum velocitate describit, ut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ & bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$ & ut densitas medii ad densitatem Cylindri. Q. E. D.

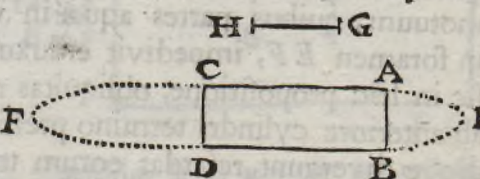
(m) * *Resistentia cylindri erit ad vim* Nam (per cor. 2. & hyp.) resistentia cylindri est ad vim quâ totus eius motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ uniformiter describit vel generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione quadruplæ longitudinis cylindri ad longitudinem L & ratione densitatis medii ad densitatem cylindri, & (279) vis quâ totus cylindri motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli possit, est ad vim quâ idem ejusdem cylindri motus quo tempore longitudinem 280.
L uniformiter describit vel tolli possit vel generari, in ratione inversâ temporum, sive ob eamdem utrinque celeritatem in ratione inversâ spatiorum, hoc est, in ratione longitudinis *L* ad quadruplum longitudinis cylindri. Quare (ex æquo) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, intereadum longitudinem L uniformiter describit tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

(n) * *Et undiquè divergunt.* Vid. Prop. 41. & 42. lib. hujus.

(o) * *Idque in eâ ferè ratione.* Eodem enim ferè modo motus obliqui in aquæ partibus excitantur, sive aqua in planum circuli immotum impingat, sive circulus eâdem cum velocitate in aquâ quiescente feratur.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII. THEOR. XXIX.

ſe quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret ſine motu: ſic in hâc propoſitione, ut obliquitas motuum tollatur & partes aquæ motu maximè directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum cylindro, & ſola maneat reſiſtentia, quæ oritur à magnitudine ſectionis tranſverſæ, quæque diminui non poteſt niſi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum eſt quod partes fluidi, quarum motus ſunt obliqui & inutiles & reſiſtentiam creant, quieſcant inter ſe ad utrumque cylindri terminum, & cohæreant & (p) cylindro jungantur. Sit *ABCD* rectangulum, & ſint *AE* & *BE* arcus duo parabolici axe *AB* deſcripti, latere autem recto quod ſit ad ſpatium *HG*, deſcribendum à cylindro cadente dum veloci-



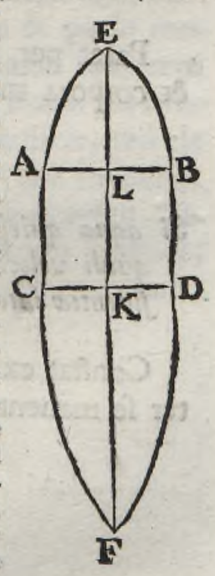
(p) * *Et Cylindro jungantur.* Ut num. 277. 278. factum eſt, ubi circulo P Q in quem aqua influebat cum eâ velocitate quam cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem H G acquirit & deinde movebatur uniformiter junctæ ſunt glaciei columnæ duæ parabolicæ P H Q & P R Q, quæ aquas exhibent, quarum fluiditas ac motus ſunt inutiles, & parabolarum PSH, PTS erat vertex principalis P, axis PG, & ordinatæ GH, ac GR, ideòque parabolæ PSH, latus rectum $\frac{GH^2}{PG}$, & parabolæ PTR latus rectum $\frac{GR^2}{PG}$ ſeu $\frac{4\,GH^2}{PG}$ prioris $\frac{GH^2}{PG}$, quadruplum (per theor. 1. de parab.). Hinc ſi aqua quieſcat & circulus P Q in aquâ moveatur cum eâdem velocitate quam grave cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem H G acquirit, columnæ illæ P H Q & P R Q aquas fere exponent quarum fluiditas ac motus inutiles ſunt ut partes aquæ motu maximè directo & breviſſimo cedentes facillimum præbeant tranſitum circulo. Sed (per Lem. IV.) loco circuli PQ ſubſtitui poteſt cylindrus ABDC eâdem velocitate motus, & cujus baſes A B, CD circulo PQ æquales ſint, quibus proinde baſibus adjungendæ ſunt columnæ duæ A E B, C F D columnis PHQ, P R Q æquales reſpectivè, atque idipſum eſt quod NEWTONUS in hoc ſcholio fecit. Siquidem junctâ E F, mediis baſibus A B, CD, occurrente in L & K, & poſitis

locitatem suam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}AB$. Sint etiam CF & DF arcus alii duo parabolici, axe CD & latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem EF generetur solidum cujus media pars $ABDC$ sit cylindrus de quo agimus, & partes extremæ ABE & CDF contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et solidi $EACFDB$, secundum longitudinem axis sui FE in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hâc propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim quâ totus cylindri motus, interea dum longitudo 4 AC motu illo uniformiter continuato describatur vel tolli possit vel generari, quam densitas fluidi habet ad densitatem cylindri quamproximè. (q) Et hâc vi resistentia minor esse non potest quàm in ratione 2 ad 3. *per corol.* 7, *prop.* XXXVI. LEM-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXVIII. THEOR. XXIX.

A B & C D ipsi P Q æqualibus; est (*per Newt. constr.*) Parabolæ A E latus rectum $\frac{HG^2}{AL} = \frac{HG^2}{PG} = \frac{EL^2}{AL}$, & ideò $EL = HG$. Et simili modo parabolæ C F, *Newtonianâ* constructione descriptæ, latus rectum est $\frac{4HG^2}{PG} = \frac{KF^2}{CK} = \frac{KF^2}{PG}$, ac proindè $KF = 2HG = GR$. Columnæ igitur A E B & C F D, non differunt à columnis P H Q & P R Q.

(q) * *Et hâc vi resistentia minor esse non potest* &c. Resistentia (per cor. 7. prop. 36.) minor esse non potest pondere cylindri aquæ, cujus basis est circellus P Q (sive A B) & altitudo $\frac{1}{3}$ E L seu $\frac{1}{3}$ H G. (vid. figuras superiores.) Velocitas quam hic cylindrus aquæ, vi ponderis sui cadendo & casu suo describendo altitudinem E L acquirit, æqualis est velocitati cum quâ cylindrus A C D B, in aquâ movetur (ex dem.) & ideò cùm basis A B sit etiam utrique cylindro communis, pondus cylindri aquæ erit ad vim quâ totus cylindri A B D C motus, quo tempore longitudinem 4 A C uniformiter describit, generari possit vel tolli, in ratione composità ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri A B D C, & ratione altitudinis $\frac{1}{3}$ E L ad altitudinem A C, & ratione spatii 4 A C ad spatium 2 E L (280), 280.
id est, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri ABDC & ratione 2 ad 3. Si itaque vis quâ totus cylindri A B D C motus, intereadum longitudinem 4 A C, uniformiter describit, generari vel tolli possit, sit ad vim aliquam P, ut densitas cylindri A B D C ad densitatem aquæ, erit (ex æquo) pondus prædicti cylindri aquæ ad vim P ut 2 ad 3, atquè ideò pondus cylindri aquæ, quo resistentia minor esse non potest; quam in ratione 2 ad 3.



DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVII.

LEMMA V.

Si cylindrus, sphæra & sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis cylindrici ita locentur successivè ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

([r]) Nam spatia inter canalem & cylindrum, sphæram, & sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quòd aqua omnis supra cylindrum sphæram vel sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum aquæ transitum non requiritur, ut in *corol.* VII. *prop.* XXXVI. explicui.

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aquâ per canalem fluente.

Patet per lemma V. & motus legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quiescat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum resistentiæ inter se.

Constat ex lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scho-

(r) * *Nam spatia inter canalem & transversas sectiones, seu latitudines maximas cylindri, sphæræ & sphæroidis per quæ aqua ransit, sunt æqualia.* Vid. Schol. sequens.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus ſuis obliquis & ſuperfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in ſcholio propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentiâ omnium minimâ quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figura ſint obtuſa; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quàm ſi capite & caudâ ſint acutis. Et corpora in fluidis elaſticis mota, ſi ante & poſt obtuſa ſint, fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & caudâ ſint acutis. Sed nos in his lemmatis & propoſitionibus non agimus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de altè immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis; qualis eſt aer, quàm in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproximè.

(f) Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem cylindri interea dum cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem cylindri est ad hanc vim quamproximè ut densitas fluidi ad densitatem cylindri vel globi per prop. XXXVII. & resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri per lem. V, VI, VII. *Q.E.D.*

(t) *Corol.* 1. Globorum, in mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, & duplicatâ ratione diametri, & ratione densitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest globus idem, eodem pondere, sine resistentiâ cadendo & casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas globi ad densitatem

(f) * *Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria* (170. lib. I.) & propterea, cum eadem sit globi & cylindri densitas eademque velocitas (ex hyp.) quantitas motûs globi est ad quantitatem motûs cylindri ut duo ad tria, & tempus quo globus octo tertias partes diametri propriæ uniformiter describit, est ad tempus quo cylindrus eâdem uniformi velocitate quadruplum longitudinis suæ, seu duodecim tertias diametrorum globi describit, etiam ut duo ad tria. Quare (178) vis uniformis quâ totus globi motus intereadum octo tertias partes diametri propriæ describit tolli possit vel generari, est ad vim uniformem quâ totus cylindri motus, quo tempore longitudinem quatuor diametrorum globi describit vel tolli vel generari possit ut duo ad tria directè & duo ad tria inversè, id est, in ratione æqualitatis. *Resistentia autem cylindri &c.*

(t) * *Cor.* 1. Patet per cor. 1. prop. 37., quiâ resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri circumscripti.

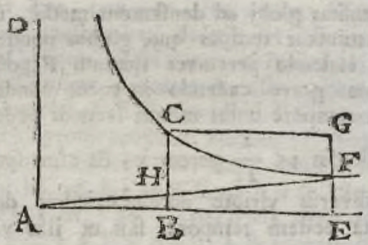
tatem fluidi. Nam globus tempore caſus ſui, cum velocitate cadendo acquiſitâ, (u) deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias diametri ſuæ, ut denſitas globi ad denſitatem fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare poſſit, quo tempore globus octo tertias diametri ſuæ eâdem velocitate deſcribit, ut (x) denſitas fluidi ad denſitatem globi: ideoque per hanc propoſitionem, vis ponderis æqualis erit vi reſiſtentiæ, & propterea globum accelerare non poteſt.

(y) *Corol.* 3. Datâ & denſitate globi & velocitate ejus ſub initio motus, ut & denſitate fluidi compreſſi quieſcentis in quo globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas globi & ejus reſiſtentia & ſpatium ab eo deſcriptum, per *corol.* VII. *prop.* XXXV.

(u) * *Deſcribet ſpatium quod erit ad octo tertias partes diametri ſuæ &c.* Deſcribet enim ſpatium duplum illius quod vi ponderis ſui comparativi ſine reſiſtentia cadendo deſcripſit (30. lib. 2.), id eſt, *ſpatium quod erit ad octo tertias partes &c.*

(x) * *Ut denſitas fluidi ad denſitatem globi.* Sit D diameter globi, 2 F ſpatium quod ſit ad $\frac{8}{3}$ D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi; & tempus quo globus uniformiter deſcribit ſpatium $\frac{8}{3}$ D, erit ad tempus quo eâdem uniformi velocitate deſcribit ſpatium 2 F, ut $\frac{8}{3}$ D ad 2 F (5. *lib.* 1.), id eſt, ut denſitas fluidi ad denſitatem globi. Cùm igitur vires uniformes ſint reciprocè ut tempora quibus motus æquales generant (279), patet propoſitum.

(y) 282. Cor. 3. *Datâ & denſitate globi & velocitate ejus ſub initio motus & denſitate fluidi datur ad omne tempus & velocitas globi, & ejus reſiſtentia & ſpatium ab eo deſcriptum.* * Primum, ex datâ denſitate globi, & denſitate fluidi, invenietur, per Cor. 2, vis æqualis reſiſtentiæ cùm velocitas ea eſt quam

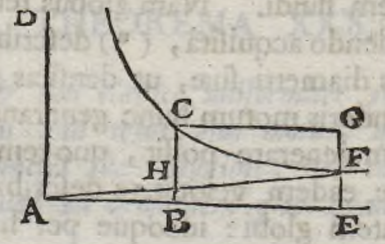


acquirere poteſt is globus, cadendo in vacuo per vim ſui ponderis comparativi & deſcribendo ſpatium quod ſit ad quatuor tertias Diametri ſuæ ut denſitas globi ad denſitatem fluidi. 282.

Secundò, ex datâ hac reſiſtentiâ invenietur reſiſtentia quæ competit velocitati globi de quo agitur ſub initio ejus motus, quia reſiſtentiæ hic ſupponuntur eſſe ut quadrata velocitatum; iſtâ autem reſiſtentiâ cognitâ dabitur tempus quo ſi hæc reſiſtentia uniformiter ageret, totam velocitatem quam habet globus ſub initio motus deſtruere poſſet, ſicque ſi B C deſignet eam velocitatem initio motus ſimulque reſiſtentiam ipſi competentem, deſigneturque per A B illud tempus quo ea velocitas per reſiſtentiam uniformem deſtrui poteſt, & erecto perpendiculo A D, aſymptotis A D, A B per punctum C deſcribatur Hyperbo-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVIII. THEOR. XXX.

lâ, ex ejus Hyperbolæ conſtructione dabitur ad quodlibet tempus (quod deſignabitur per BE) velocitas reſidua EF, reſiſtentia BH, & ſpatium deſcriptum CBEF; Quâ autem ratione hæc ſingula ad calculum revocentur, dicendum.



I. Vis illa quæ reſiſtentiæ æqualis eſſe debet cùm Corpus habet velocitatem maximam quam lapſu ſuo in fluido dato acquirere poteſt, eſt ipſum pondus comparativum corporis, ſit ergo A ejus pondus, Denſitas data corporis eſt ad denſitatem fluidi, ut A ad pondus æqualis voluminis fluidi, quo invento, detrahatur illud ex pondere A, relinquitur pondus comparativum globi in fluido quod dicatur B.

Ut præterea determinetur tempus quo eo pondere B corpus percurret cadendo ſpatium quod ſit ad quatuor tertias Diametri ſuæ ut ejus denſitas ad denſitatem fluidi, ſive, ſi dicatur D Diameter & dicatur F ſpatium quod ſit ad $\frac{4}{3}D$ ut denſitas globi ad denſitatem medii, ut determinetur tempus quo globus pondere B cadendo percurret ſpatium F poſito quod grave cadendo in vacuo pondere A tempore unius minuti ſecundi pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$ percurrit, & cùm ſpatia diverſis viribus acceleratricibus deſcripta eodem tempore ſint ut illæ vires, ſpatium $15\frac{1}{12}$ pedum pondere A uno minuto ſecundo percurſum eſt ad ſpatium eodem tempore pondere B percurſum ut A ad B. Ut autem eſt illud ſpatium, ad ſpatium F, ita quadratum minuti unius ſecundi ad quadratum temporis quo eo pondere B ſpatium F percurretur, quod tempus dicatur G, cumque velocitate per lapſum acquiſitâ duplum ſpatii lapſu percurſi uniformiter deſcribatur ipſo lapſus tempore, ideo velocitate pondere B tempore G acquiſitâ, eodem tempore G deſcriberetur $2F$, cùmque velocitas omnis exprimatur per ſpatium diviſum per tempus, erit ea velocitas maxima $\frac{2F}{G}$ quæ in poſterum dicatur H.

II. Datâ autem quâvis aliâ ejuſdem globi velocitate in eodem fluido eaque dicatur M, reſiſtentia ipſi competens ita obtinetur, ut quadratum velocitatis H ad quadratum velocitatis hujuſce M, ita eſt reſiſtentia adverſus velocitatem H cui pondus B æquiponet, ad reſiſtentiam adverſus velocitatem M, quam vocabo R; cum ergo prius data ſit ratio A ad B dabitur etiam ratio A ad R ideoque dabitur ſpatium quod actione vi R uniformi ſuppoſitâ per unum minutum ſecundum deſcriberetur, ſiquidem ſpatia per diverſas vires uniformes acceleratrices deſcripta iiſdem temporibus ſunt ut illæ vires, ideoque A ad R ut $15\frac{1}{12}$ ped. ad ſpatium uno minuto ſecundo deſcriptum, cujus ſpatii duplum per unum minutum ſecundum diviſum exprimit velocitatem vi R per unum minutum ſecundum productam. Unde invenietur tempus quo per eam vim R uniformiter agentem velocitas M produci vel etiam deſtrui poſſet, velocitates enim per eamdem vim acquiſitæ ſunt ut tempora quibus acquiruntur; Ergo velocitas tempore unius minuti ſecundi acquiſita eſt ad velocitatem M, ut unum minutum ſecundum ad tempus quo vis R velocitatem M generare vel tollere poſſet. Unde tandem in Hyperbolæ conſtructione datur valor temporis per lineam A B deſignati.

Sumatur ergo B E quod ſit ad A B ut tempus quod aſſumere lubet ad tempus illud quo vis R velocitatem M quæ per BC exprimitur generare vel tollere poteſt uniformiter agendo, & ducatur ordinata EF, ea deſignabit velocitatem globi eo tempore ſuperſtitem quæ ex naturâ Hyperbolæ habebitur, eſt enim A E, ad A B, ſicut B C ſive M ad B E F, unde cum ſit A E = A B + B E; ſitque A B tempus mox inventum, B E tempus

([z]) *Corol.* 4. Globus in fluido compreſſo quieſcente ejuſdem ſecum denſitatis movendo, dimidiam motus ſui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipſius diametrorum deſcripſerit, per idem *corol.* VII.

PRO-

tempus aſſumptum, B C ſive *M* velocitas data, datur etiam E F.

Datur pariter reſiſtentia B H, eſt enim BC^2 ad EF^2 ut R ad hancce novam reſiſtentiam, quæ, prioribus datis, etiam dabitur.

Denique datur ſpatium à corpore deſcriptum, datur enim ſpatium quod velocitate conſtanti *M* tempore B E percurritur; Eſt verò area B C G E ad ſpatium Hyperbolicum B C F E, ut ſpatium velocitate conſtanti *M* tempore B E percurſum, ad ſpatium percurſum cum velocitate per reſiſtentiam decreſcente, at ex naturâ Logarithmorum Hyperbolicorum ſpatium Hyperbolicum B C F E eſt Logarithmus quantitatis $\frac{AE}{AB}$, & quia Logarithmi earumdem quantitatum in diverſis Logarithmorum ſeriebus ſumpti ſunt proportionales, ſumatur Logarithmus illius quantitatis $\frac{AE}{AB}$ in Tabulis vulgaribus, fiatque ut Logarithmus denarii numeri in Tabulis (ſive unitas) ad 2.30258509 qui eſt Logarithmus Hyperbolicus ejuſdem denarii numeri, ita Logarith. quantitatis $\frac{AE}{AB}$ ex Tabulis deſumptus ad Logarithmum Hyperbolicum ejus quantitatis, habebitur area B C F E, ſit ergo dignitas Hyperbolæ $=1$, erit $BC = \frac{1}{AB}$ & area $BCGE = \frac{1}{AB} \times BE$, ideoque ut $\frac{BE}{AB}$, ad Logarithmum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ è Tabulis deſumptum & multiplicatum per 2.30258509. Ita ſpatium velocitate conſtanti B C tempore B E percurſum, ad ſpatium percurſum cum velocitate per reſiſtentiam decreſcente. Q. E. I. 282.

(z) * *Cor.* 4.; * Cum globus & fluidum ejuſdem denſitatis ſupponantur, reſiſtentia iſto in caſu erit æqualis vi quâ totus motus globi generari vel tolli poſſet quo tempore octo tertias Diametri ſuæ uniformiter deſcriberet; itaque ſit B C motus globi, erit A B tempus quo uniformiter percurreret octo tertias ſuæ Diametri, ſit E F, dimidium B C, quoniam EF exprimit reſiduum motum, PE erit tempus quo dimidia pars motus amiſſa fuerit, ſed BC ad E F ut A E ad A B & eſt B C ad E F ut 2 ad 1, per conſt. ergo etiam $AE = 2\,AB$ & $BE = AB$, ideoque dimidium motum amittet quo tempore percurreret uniformiter octo tertias Diametri ſuæ; Sed illud ſpatium uniformiter percurſum eſt ad ſpatium percurſum velocitate per reſiſtentiam decreſcente ut $\frac{BE}{AB}$ (ſive $\frac{1}{1}$) ad Logarithmum è Tabulis deſumptum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ (ſive $\frac{2}{1}$) multiplicatum per 2.30258509, & ille Logarithmus eſt .3010300, productum ergo erit .6931 &c. ideo 1. ad .6931 &c. ut $\frac{8}{3}$ *D*, ad 1.84832 *D*, quod quidem paulo minus eſt quam 2 D, ideo Globus in fluido ejuſdem denſitatis dimidiam ſui motus partem prius deſcribet *quam longitudinem duarum ipſius Diametrorum deſcripſerit.* Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum & compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, & ratione densitatis fluidi ad densitatem globi quamproximè.

Patet *per corol.* 2. *prop.* XXXVII. procedit verò demonstratio ([a]) quemadmodum in propositione præcedente.

Scholium.

In propositionibus duabus novissimis (perinde ut in lem. v.) suppono quòd aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, & cujus fluiditas auget resistentiam globi. Si aqua illa omnis liquescat, augebitur resistentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his propositionibus parvum erit & negligi potest, propterea quòd convexa superficies globi totum ferè officium glaciei faciat.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per phænomena.

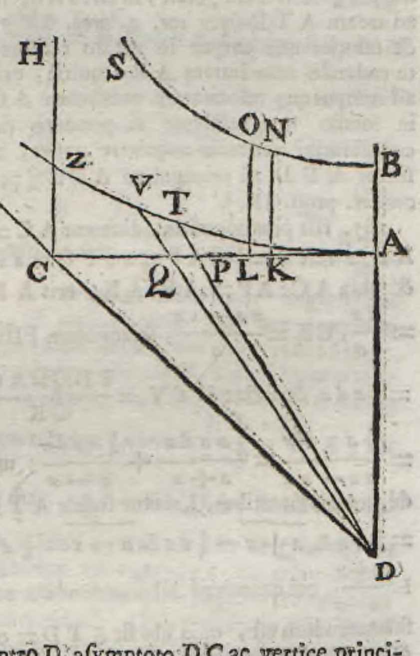
Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio resisten-

(a) * *Quemadmodum in propositione præcedente.* Demonstratio eadem manet, quæ in nota 281. adjungenda tantum hæc sunt: resistentia autem cylindri est ad hanc vim quam proximè in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicata orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, & ratione densitatis fluidi ad densitatem globi (*per cor.* 2. *prop.* XXXVII.); & resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri, per Lem. V, VI, VII. Q. E. D.

ſiſtente, D diameter globi, F ſpatium quod ſit ad $\frac{4}{3}$ D ut denſitas globi ad denſitatem medii, id eſt, ([b]) ut A ad A — B, G tempus quo globus pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit ſpatium F, & H velocitas quam globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima quâcum globus, pondere ſuo B, in medio reſiſtente poteſt deſcendere, *per corol.* 2. *prop.* XXXVIII. & reſiſtentia, quam globus eâ cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: reſiſtentia verò, quam patitur in aliâ quâcunque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, *per corol.* 1. *prop.* XXXVIII.

Hæc eſt reſiſtentia quæ oritur ad inertiâ materiæ fluidi. Ea verò quæ oritur ab elaſticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, ([c]) ſic inveſtigabitur.

De-



(b) 283. * *Id eſt, ut A ad A — B.* Denſitates corporum ejuſdem voluminis ſunt eorumdem pondera in vacuo (2. & 3. *lib.* 1.); Sed A eſt pondus globi in vacuo, & A — B pondus æqualis globi aquæ etiam in vacuo; nam globus A aquæ immerſum ponderis ſui partem amittit æqualem ponderi paris voluminis æquæ (*per cor.* 6. *prop.* XX.). Ergo &c.

(c) 284. * *Sic inveſtigabitur.* Ut eorum quæ hic NEWTONUS profert, demonſtratio facilius intelligatur, non nulla revocanda ſunt, quæ in propoſitionibus VIII. & IX. demonſtravit. Sunto C H & A B rectæ ad datam A C perpendiculares, C H quidem infinita, & B A æqualis $\frac{1}{4}$ A C. Centro C aſymptotis G H, C A deſcribatur per punctum B hyperbola B N S capiantur A C, A P, A K continuè proportionales, & per punctum K ducatur ad hyperbolam recta K N parallela A B. Et ſi corpus grave è quiete cadat in medio quod in duplicatâ velocitatis ratione reſiſtit, exponatque area A B N K ſpatium à corpore cadente deſcriptum; velocitas corporis hocce caſu acquiſita exponi poterit per lineam A P, & ipſius velocitas maxima per datam A C (*per cor.* 1. & 2 *prop.* VIII). Producatur jam B A ad D ut ſit A D æqualis A C, jungatur D C, & centro D, aſymptoto D C ac vertice principali A deſcribatur altera hyperbola A T Z, quæ lineam D P productam ſecet in T, & lineam D Q ipſi D P infinitè propinquam in V; & ſector evaneſcens DTV erit æqua- 284.

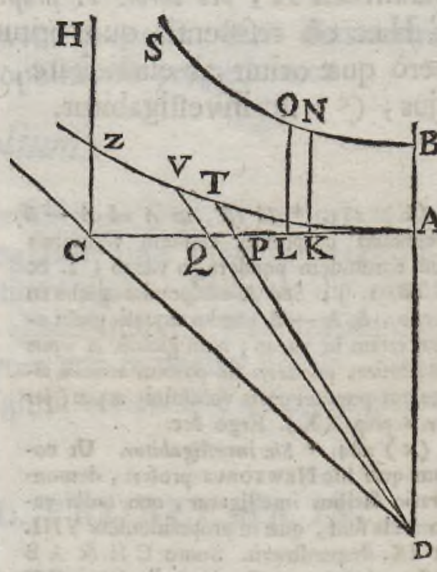
 lis

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

Demittatur globus ut pondere ſuo B in fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus N qui congruit logarithmo $0,4342944819 \frac{2P}{G}$, ſitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita

lis $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, & ſector ATD tempus exponet quo corpus cadendo deſcribit ſpatium A B N K & quo velocitatem AP acquirit (per caſum 7. prop. IX.). Spatium verò quod corpus tempore quovis A T D cadendo deſcribit, erit ad ſpatium quod corpus velocitate maximâ A C, eodem tempore uniformiter progrediendo, deſcribere poteſt, ut area ABNK ad aream A T D (*per cor.* 1. *prop.* IX), & tempus quo corpus in medio reſiſtente cadendo velocitatem A P acquirit, erit ad tempus quo velocitatem maximam A C in medio non reſiſtente vi ponderis ſui comparativi cadendo acquirere poſſet, ut ſector A T D ad triangulum A D C (per cor. 5. prop. IX.).

285. His præſuppoſitis, dicantur $AC = AD = a$, $AB = \frac{1}{4}a$, $AP = x$, $PQ = dx$, & quia $AC : AP = AP : AK$, erit $AK = \frac{xx}{a}$, $CK = \frac{aa - xx}{a}$, triangulum PDQ $= \frac{1}{2} a\, dx$, & ſector $DTV = \frac{PDQ \times AC}{CK} = \frac{\frac{1}{2} a^3 dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{4} aa\,dx}{a + x} + \frac{\frac{1}{4} aa\,dx}{a - x}$; undè, ſumtis fluentibus, habetur ſector ATD $= \frac{1}{4} aa\,L.\overline{a+x} - \frac{1}{4} aa\,L.\overline{a-x} = \frac{1}{4} aa\,L.\frac{a+x}{a-x}$, cui quantitati nihil addendum vel ſubducendum eſt, quia ubi ſit $ATD = 0$, & $x = 0$, evaneſcit, ut oportet. Ducatur L O parallela K N ipſique infinitè propinqua; & cum ſit $AK = \frac{xx}{a}$ & (*per theor.*



4. *de hyp.*) $KN = \frac{CA \times AB}{CK} = \frac{\frac{1}{4}a^3}{aa - xx}$ ac $KL = \frac{2x\,dx}{a}$, erit areæ A B N K fluxio $KNOL = \frac{\frac{1}{2} a^2 x\,dx}{aa - xx}$, ſumptiſque fluentibus, area $ABKN = Q$ *conſt.* $- \frac{1}{4} aa\,L.\overline{aa - xx}$; quia verò area A B N K evaneſcit ubi ſit $x = 0$, erit conſtans $Q = \frac{1}{4} aa\,L.\,aa$, & area accurata $ABNK = \frac{1}{4} aa\,L.\,aa - \frac{1}{4} aa\,L.\overline{aa - xx} = \frac{1}{4} aa\,L.\frac{aa}{aa - xx}$. Porro

sita erit $\frac{N-1}{N+1}$ H, altitudo autem descripta erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611$

ro (284) tempus P quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem acquirit lineæ AP seu x proportionalem, est ad tempus G quo velocitatem maximam H vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadendo acquirere potest, ut sector ATD ad triangulum ADC, id est, $P : G = \frac{1}{4}aa\, L.\frac{a+x}{a-x} : \frac{1}{2}aa = L.\frac{a+x}{a-x} : 2$. Quare erit $\frac{2P}{G} = L.\frac{a+x}{a-x}$, hoc logarithmo sumto in logistica cujus subtangens est unitas (38. *lib.* 11.). Quapropter si logarithmus numeri $\frac{a+x}{a-x}$ sumatur in tabulis, multiplicandus erit per numerum 2,302585093, ut in *cor.* 7. *prop.* XXXV. factum est, & habebitur $\frac{2P}{G} = 2,302585093\ L.\frac{a+x}{a-x}$, ideoque dividendo 1. per 2. 3025 &c. numerus $0,4342944819.\frac{2P}{G}$ est logarithmus tabularis numeri $\frac{a+x}{a-x}$. Itaque si per tabulas quæratur numerus absolutus N qui congruat Logarithmo $0,4342944819.\frac{2P}{G}$, erit $N = \frac{a+x}{a-x}$, ideoque $x = \frac{a[N-1]}{N+1}$. Est autem (284) AC ad AP seu a ad x, ut velocitas maxima H ad velocitatem cadendo acquisitam. Quare hæc velocitas erit $\frac{xH}{a} = \frac{N-1}{N+1}\times H$, sicuti NEWTONUS invenit. Spatium quod globus velocitate maximâ H uniformiter progrediendo tempore P describit, est ad spatium $2F$ quod eadem velocitate H uniformiter percurrit tempore G, ut tempus P ad tempus G (5. *lib* 1.), & propterea spatium illud est $\frac{2PF}{G}$. Altitudo S quam globus tempore P cadendo in medio resistente describit, est ad spatium $\frac{2PF}{G}$, ut area ABNK ad sectorem ATD (284), id est, ut $\frac{1}{4}aa\, L.\frac{aa}{aa-xx}$ ad $\frac{1}{4}aa\, L.\frac{a+x}{a-x}$, sive ut $L.\frac{aa-xx}{aa}$ ad $L.\frac{a+x}{a-x}$; Sed (ex dem.) $\frac{a+x}{a-x} = N$, & $x = \frac{a[N-1]}{N+1}$, ac proinde $\frac{aa}{aa-xx}$ 285.
$= \frac{[N+1]^2}{4N} = \frac{N\times[N+1]^2}{4NN}$, & si logarithmi sumantur in logistica cujus subtangens est unitas, est $\frac{2P}{G} = L.\frac{a+x}{a-x} = L.N$, & $L.\frac{aa}{aa-xx} = L.\frac{N\times[N+1]^2}{4NN} = L.N + 2L.\frac{N+1}{N} - L.4$; ideoque $L.\frac{aa}{aa-xx} : L.\frac{a+x}{a-x} = L.N + 2L.\frac{N+1}{N} - L.4 : L.N$

$$= 1 + \frac{2L.\frac{N+1}{N} - L.4}{L.N} : 1 = 1 + \frac{G}{P}L.\frac{N+1}{N} - \frac{G}{2P}L.4 : 1 = S : \frac{2PF}{G}.$$

Quare altitudo $S = \frac{2PF}{G} - FL.4 + 2FL.\frac{N+1}{N}$.

At si velimus tabularum logarithmis uti, ii multiplicandi sunt per numerum 2,302585092994, seu per 2,302585093. Hic numerus dicatur M, logarithmus numeri 4 in tabulis sumptus Q, & logarithmus etiam tabularis numeri $\frac{N+1}{N}$ sit L; & erit $S = \frac{2PF}{G} - MQF + 2MLF$. Est autem $2M = 4,605170186$, & Q in tabulis vulgaribus est 0,60206; seu accuratius 0,6020599913, ideoque $MQ = 1,3862943611$ quamproximè. Quare altitudo S, quam globus in medio resistente cadendo tempore P describit, est $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611\,F + 4,605170186\ LF$, uti NEWTONUS definivit.

1, 3862943611 F + 4, 605170186 L F. (d) Si fluidum ſatis profundum ſit negligi poteſt terminus 4, 605170186 L F; & erit $\frac{2\,P\,F}{G}$ — 1, 3862943611 F altitudo deſcripta quamproximè. Patent hæc per libri ſecundi propoſitionem nonam & ejus corollaria, ex hypotheſi quod globus nullam aliam patiatur reſiſtentiam niſi quæ oritur ab inertiâ materiæ. Si verò aliam inſuper reſiſtentiam patiatur, deſcenſus erit tardior, & ex retardatione innoteſcet quantitas hujus reſiſtentiæ.

Ut corporis in fluido cadentis velocitas & deſcenſus facilius innoteſcant, compoſui tabulam ſequentem, cujus columna prima denotat tempora deſcenſus, ſecunda exhibet velocitates cadendo acquiſitas exiſtente velocitate maximâ 100000000, tertia exhibet ſpatia temporibus illis cadendo deſcripta exiſtente 2 F ſpatio quod corpus tempore G cum velocitate maximâ deſcribit, & quarta exhibet ſpatia iiſdem temporibus cum velocitate maximâ deſcripta. Numeri in quartâ columnâ ſunt $\frac{2\,P}{G}$, & ſubducendo numerum 1, 3862944 — 4, 6051702 L, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ, & multiplicandi ſunt hi numeri per ſpatium F ut habeantur ſpatia cadendo deſcripta. Quinta his inſuper adjecta eſt columna, quæ continet ſpatia deſcripta iiſdem temporibus à corpore, vi ponderis ſui comparativi B, in (e) vacuo cadente. *Tem-*

(d) * *Si fluidum ſatis profundum ſit*; id eſt, ſi altitudo S quam globus tempore P cadendo deſcribit, ſatis magna fuerit, negligi poteſt terminus 4,605170186 $L\,F$. Cum enim ſit L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$, ubi N eſt numerus ſatis magnus, ſeu ubi numerus $\frac{N+1}{N}$ eſt fere æqualis unitati, Logarithmus L evaneſcit quam proximè. Sed, ſi velocitas maxima dicatur H, & velocitas tempore P caſu globi acquiſita V, eſt $H:V=a:x$ (285), & ideo $\frac{H+V}{H-V} = \frac{a+x}{a+x} = N$, & quando ſpatium deſcriptum S ſatis magnum eſt, fit $V=H$ quam proximè, ac proinde $\frac{H+V}{H-V}$ ſeu N numerus ſatis magnus, ut ex ſequenti tabula manifeſtum eſt. Patet ergo propoſitum.

(e) * *In vacuo cadente.* Hujus tabulæ conſtructio paulo fuſius exponenda videtur. Numeri ſinguli columnæ primæ, quibus exprimitur ratio temporis P ad tempus G, aſſumuntur pro lubitu; numeri verò in columna quarta correſpondentes faciliimè reperiuntur. Cum enim ſpatium tempore G velocitate maximâ H uniformiter deſcrip-

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido.*	*Spatia cadendo descripta in fluido.*	*Spatia motu maximo descripta.*	*Spatia cadendo descripta in vacuo.*
0,001G	$99999\frac{29}{30}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,2F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16 6137057F	18F	81F
10G	$99999999\frac{3}{5}$	18,6137056F	20F	100F

Scho-

scriptum sit 2 F, & spatia eâdem uniformi velocitate descripta temporibus, quibus describuntur, proportionalia sint; numeri columnæ quartæ, duplicatis numeris columnæ primæ correspondentibus, habentur. Quia verò spatia, à corpore vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadente, descripta, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur, & tempore G describitur spatium F; numeri columnæ quintæ sunt quadrata numerorum correspondentium in columna prima. Numeri columnæ secundæ velocitatem acquisitam cadendo in fluido tempore P indicant quæ est $\frac{N-1}{N+1} \times H$, sicque inveniuntur: assumpto in columna prima termino quovis, Exempli causâ, 2 G pro P, 285.
fit $\frac{2P}{G} = \frac{4G}{G} = 4$, & hinc $0,4342944819 \frac{2P}{G} = 1,7371779276$. Huic logarithmo in tabulis congruit numerus absolutus 54,59815 $= N$; unde fit $\frac{N-1}{N+1} = \frac{5359815}{5559815}$, & quia $H = 100000000$ (*per hyp.*), velocitas tempore P, sive 2 G, acquisita $\frac{N-1}{N+1} H$, est 96402758, uti NEWTONUS in tabula posuit. Inventis hoc modo numeris columnæ secundæ, inveniuntur quoque numeri colum-

Scholium.

Ut resistentias fluidorum investigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine internâ digitorum novem (f) pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aquâ pluviali; & globis ex cerâ & plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus *Londinensis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus seu (g) grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132,645 in medio aeris, vel (h) grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet

næ tertiæ, videlicet $\frac{2P}{G} - 1,3862943611 + 4,6051702\,L$. Quoniam enim datus est numerus $\frac{2P}{G}$, & jam inventus fuit numerus N, cognoscetur numerus $\frac{N+1}{N}$ cum ipsius Logarithmo L; atque ita obtinebitur numerus columnæ tertiæ.

286. Ex hâc porro tabulâ patet verum esse posse, quod non nulli se observasse testantur, nimirum gravia in mediis resistentibus cadentia brevi satis tempore ad maximam quam acquirere possint velocitatem pervenire & postea moveri uniformiter; licet per theoriam non nisi tempore infinito, seu nunquam, possint maximam illam velocitatem reverâ acquirere. Nam si tempus *P* quo globus in fluido quocumque cadit, sit æquale tempori 5 G; globi velocitas acquisita erit ad velocitatem maximam ut *9999092* ad 10000000, seu ut 1. ad 1,0000908, quamproximè, & spatium hoc tempore 5 G descriptum erit 8,6137964 F, & deinde spatia descripta crescent fere in progressione arithmetica ad modum temporum. Elapso igitur tempore 4G. vel 5 G globus uniformiter descendere videbitur, licet ejus velocitas reverâ perpetuò crescat. Si verò assumatur tempus *P* æquale 10 G, tum velocitas acquisita est ad velocitatem maximam ut *99999999* $\frac{3}{5}$ ad 100000000, & tantorum numerorum differentia $\frac{2}{5}$ prorsus insensibilis est oculis humanis.

(f) * *Pedis Londinensis*. Pes Londinensis est ad pedem Parisiensem ut 15 ad 16; uterque in digitos 12, & digitus in 12 lineas dividitur.

(g) * *Seu grana*. Libra Romana uncias 12, uncia 480. grana continet.

(h) 287. * *Vel grana* 132, 8 *in vacuo*. Corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris; corporum vero pondera absoluta sub paribus voluminibus sunt ut eorum densitates, & densitas aquæ, juxta NEWTONUM, est ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Quare, cum globi aquei pondus in aëre parum differat ab ejusdem pondere in vacuo, dicendum est, ut 860 ad 1, ita pondus globi aquei granorum 132, 645 ad pondus æqualis globi aëris, quod proinde erit granorum 0,1543 quam proxime. Addatur pondus hoc ponderi granorum 132, 645, & summa gran. 132,7993, seu gran. 132,8 erit pondus prædicti globi aquæ in vacuo quam proxime. Dato igitur pondere globi cujuslibet aquei in aëre, invenitur ejus pondus in vacuo, si ponderi dato addatur

id

libet (i) alius est ut excessus ponderis ejus in vacuo supra pondus ejus in aquâ. De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XL. Probl. IX.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aquâ, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor secundorum.

(k) Pondus globi in vacuo est $156\frac{13}{38}$ *gran.* & excessus hujus ponderis supra pondus globi in aquâ est $79\frac{13}{38}$ *gran.* (l) Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi in vacuo, ita (m) densitas aquæ ad densitatem globi, (n) & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad spatium 2 F, (o) quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, (p) cadendo in vacuo de-

id quod ex divisione ejusdem ponderis per numerum 860 habetur.

(i) 288. * *Et globus quilibet &c.* Globus quilibet *E* est ad globum aqueum *C* diametro digiti unius descriptum, ut excessus ponderis globi *E* in vacuo supra pondus ejus in aqua, ad pondus granorum 132,8. Nam excessus ponderis globi *E* in vacuo supra pondus ejus in aquâ est pondus globi aquæ ejusdem cum globo *E* diametri; Sed globi aquæ homogenei sunt ut eorumdem pondera: est igitur globus *E* ad globum *C* ut excessus ponderis globi *E* in vacuo supra pondus ejus in aqua, ad pondus 132,8 granorum.

(k) * *Pondus globi in vacuo est* $156\frac{13}{38}$ *gran.* Si enim ex pondere globi in aere gran. $156\frac{1}{4}$ subducatur pondus ejus in aqua, quod est gran. 77, residuum erit pondus globi aquæ ejusdem voluminis gran. $79\frac{1}{4}$; & propterea (287) ut habeatur pondus globi in vacuo, ponderi gran. $156\frac{1}{4}$ addendum est pondus gran. $\frac{79\frac{1}{4}}{860}$, & prodit pondus globi in vacuo gran. $156\frac{13}{38}$ quam proximè.

(l) * *Unde prodit globi diameter &c.* Est enim (288) pondus gran. 132,8 ad excessum $79\frac{13}{38}$, ut globus diametro digiti unius descriptus ad globum quæsitum; ideoque ut diametri 1 digiti cubus 1 ad diametri globi quæsiti cubum, qui proinde erit $\frac{79\frac{13}{38}}{132,8}$ partium digiti cubici. Hujus fractionis radix cubica, seu globi diameter, est 0,84224 partium digiti quam proximè. 288.

(m) * *Ita densitas aquæ ad &c.* (283).

(n) * *Et ita partes octo tertiæ diametri globi &c.* Per Prop. XL. lib. II.

(o) * *Quod proinde erit 4,4256 dig.* Nam $79\frac{13}{38} : 156\frac{13}{38} = 3015 : 5941 = 2,24597 : 4,4256$, quam proxime.

(p) 289. * *Cadendo in vacuo describet digitos* $193\frac{1}{3}$. Quoniam corporis, præsertim gravioris, oscillationes quæ in minoribus arcubus fiunt, iisdem quam proximè temporibus peraguntur in aere & in vacuo (*per cor.* 2. *prop.* XXVII. *lib.* II.); spatium quod grave cadendo in vacuo tempore minuti unius secundi describit, est pedum Parisiensium $15\frac{1}{12}$, seu ac-describet digitos $193\frac{1}{3}$, & pondere granorum 77, eodem tempore sine resistentiâ cadendo in aquâ (q) describet digitos 95,219; (r) & tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* describet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quâcum potest in aquâ descendere. (s) Est igitur tempus G 0″, 15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus describet spatium 2 F digitorum 4,4256; (t) ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116,1245. (u) Subducatur spatium 1,3862944 F seu 3,0676 *dig.* & manebit spatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aquâ, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, (x) minui debet in ratione quæ com-

accuratius digitorum $181\frac{1}{6}$ quam proximè (471. *lib.* 1.); & quia pes Londinensis pede Parisiensi minor est in ratione 15 ad 16, erit spatium illud digitorum Londinensium $193\frac{11}{45}$, seu fere $193\frac{1}{4}$. Hoc spatium augeri paululum debet ob pondus in aëre oscillantis diminutum, & ideo poni potest digit. Lond. $193\frac{1}{3}$ quam proximè.

(q) * *Describet digitos 95, 219.* Nam vires uniformes sunt ut spatia quæ corpus viribus illis agitatum dato tempore describit (179); & propterea $156\frac{13}{38}$ est ad 77 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus vi ponderis granorum 77 tempore minuti unius secundi sine resistentia cadendo describit; unde spatium hoc prodet 95,219 digit. quam proximè.

(r) * *Et tempore G, quod sit &c.* Spatia quæ corpus vi ponderis sui comparativi 77 gran. sine resistentiâ cadendo describit, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur (27. lib. 1.). Ergo tempus G, quo corpus vi ponderis sui comparativi sine resistentiâ cadendo describit spatium F (*per prop.* XL.), est ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2,2128 dig. ad 95,219 digit.

(s) 290. * *Est igitur tempus G 0″, 15244.* Si juxta notam 286, multiplicetur hæc fractio per numerum 5, productum erit 0″,7622 seu 46‴ ferè. Quare globus, cujus diameter est 0,84224 partium digiti & pondus in aëre $156\frac{1}{4}$ gran., in aqua cadendo tempore 46‴ describet spatium 19 dig. circiter & maximam suam velocitatem acquirere atque postea uniformi velocitate descendere videbitur (286).

(t) * *Ideoque tempore minutorum quatuor secundorum &c.* Sunt enim tempora ut spatia velocitate uniformi H descripta, & 0″,15244 est ad 4″ ut 4,4256 ad 116,1245 ferè.

(u) * *Subducatur spatium &c.* Tempus P est minutorum secundorum quatuor, & ut G ad P ita est 2 F ad digitos 116,1245 $= \frac{2PF}{G}$, Sed (*per prop.* XL) spatium quod globus in aqua cadendo tempore P describit, est $\frac{2PF}{G} - 1,3862944\ F$, neglecto, scilicet, termino 4,60517016 L F, qui ob parvitatem hic potest tutò contemni.

(x) 291. * *Minus debet in ratione &c.* Globi datâ velocitate moti resistentia in vase amplissimo sit *r*, in vase angustiore *R*, hujus vasis orificium æquale sit circulo *c*, circomponitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aquâ in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per theoriam deſcribere debuit quamproximè. Deſcripſit verò digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aquâ, ſucceſſivè demittebantur, & unuſquiſque cecidit in aquâ tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Com-

circulus globi maximus ſit m, denſitas globi δ, denſitas fluidi d; vis uniformis quâ totus globi motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ uniformiter deſcriberet tolli poſſit vel generari, ſit p. Et (*per prop.* XXXVIII.) erit $p : r = \delta : d$; & (*per prop.* XXXIX.) $R : p = dc^3 : \delta\, [c - \frac{1}{2}m] \times [c-m]^2$; & propterea, conjunctis his rationibus, $R : r = c^3 : [c - \frac{1}{2}m] \times [c-m]^2$. Datâ igitur velocitate globi, reſiſtentia in vaſe ampliſſimo eſt ad reſiſtentiam in vaſe anguſtiore in datâ ratione $[c - \frac{1}{2}m] \times [c-m]^2$ ad c^3. Brevitatis causâ ponatur r ad R ut 1 ad n. Quando velocitas in vaſe ampliſſimo maxima eſt, ſeu H, reſiſtentia æqualis eſt ponderi B globi in aqua, & F eſt ſpatium quod globus tempore G vi ponderis B ſine reſiſtentia cadendo deſcribit ut velocitatem illam H acquirat. Sit h velocitas maxima globi in vaſe anguſtiore, quam cum acquiſivit, reſiſtentia ejus æqualis eſt ponderi B; & cum reſiſtentia globi in vaſe anguſtiore æqualis ſit nB ubi velocitas ejus eſt H (ex demonſtratis), & reſiſtentiæ ſint ut quadrata velocitatum, erit $HH : hh = nB : B = n : 1$, ideoque $H : h = \sqrt{n} : 1$. Sit g tempus quo globus pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo acquirit velocitatem h, & f ſpatium quod eodem tempore deſcribit; & erit $H : h = \frac{F}{g} : \frac{f}{g}$, 291.
ac proinde $\frac{F}{G} : \frac{f}{g} \sqrt{n} : 1$. Porro ſpatia in vaſe ampliſſimo tempore P, quod ſatis magnam habet rationem ad tempus G, cadendo deſcripta, ſunt quam proximè ut $\frac{2PF}{G}$, ſeu ut ſpatia eodem tempore motu maximo deſcripta, ut ex prop. XL. & ex tabulâ huic ſcholio præfixâ patet; & ſimiliter ſpatium eodem tempore P in vaſe anguſtiore deſcriptum erit etiam ut $\frac{2Pf}{g}$ ferè. Quare cum ſit $\frac{2PF}{G}$ ad $\frac{2Pf}{g}$ ut $\frac{F}{G}$ ad $\frac{f}{g}$, id eſt (ex demonſtr.) ut $\sqrt{n}$ ad 1; ſpatium tempore P in vaſe ampliſſimo deſcriptum erit ad ſpatium eodem tempore in vaſe anguſtiore deſcriptum, ut $\sqrt{n}$ ad 1, id eſt, ut $c^{\frac{3}{2}}$ ad $[c-m] \times [c - \frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}$, aut quod idem eſt, in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis c ad exceſſum $c - \frac{1}{2}m$ orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi, & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem c ad exceſſum ejus $c - m$, ſupra circulum maximum globi.

Computum (y) ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* exceſſus hujus ponderis ſupra pondus in aquâ $71\frac{17}{48}$ *gran.* diameter globi 0,81296 *dig.* octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* ſpatium 2 F 2,3217 *dig.* ſpatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore 1″ ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribat 12,808 *dig.* & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum poteſt in aquâ vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* deſcendere, tempore 0″,301056 deſcribet ſpatium 2,3217. *dig.* & tempore 15″ ſpatium 115,678 *dig.* Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,609 *dig.* & manebit ſpatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vaſe latiſſimo cadendo deſcribere debet. Propter anguſtiam vaſis noſtri detrahi debet ſpatium 0,895 *dig.* circiter. Et ſic manebit ſpatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vaſe, tempore 15″ deſcribere debuit per theoriam quamproximè. Deſcripſit veros digitos 112 per experimentum. Differentia eſt inſenſibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera ſeorſim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aquâ, ſucceſſive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, deſcribentes altitudinem digitorum 112.

Per theoriam (z) hi globi cadere debuerunt tempore 40″ cir-

Sed vaſis orificium c eſt 81 digitorum (ex dictis initio ſcholii hujus), & circuli m diameter inventa eſt 0,84224 partium digiti, ideoque ſi dicatur ut 7 ad 11 ita 0,84224 digit. ad ſemiperipheriam circuli m, hæc invenietur digit. 1,32352, & hinc circulus m prodit 0,5573 partium digiti quadrati circiter; ex quibus habetur $\frac{c}{c-m} = 1{,}0069$, & $\frac{c^{\frac{1}{2}}}{[c-\frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}} = 1{,}0017$, ac proinde $\frac{c^{\frac{3}{2}}}{[c-m]\times[c-\frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}} = 1{,}00861$. Quare ſpatium in vaſe ampliſſimo deſcriptum digit. 113,0569 eſt ad ſpatium in vaſe anguſtiore eodem tempore minutorum quatuor ſecundorum deſcriptum, ut 1,00861 ad 1, ſeu ut 1 ad 0,9914 ferè; unde hoc ſpatium prodit 111,08 digit.

(y) * *Computum ineundo &c.* Calculo experimenti primi fuſè expoſito, nulla ſupereſt difficultas in computo ſimili experimenti hujus.

(z) * *Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter.* Cum pondus globi ſit 121 granorum in aëre, & 1 grani in aqua, erit pondus æqualis globi aquæ granorum 120; & ideo pondus globi in vacuo gran. $121\frac{120}{860}$ ſeu $121\frac{6}{43}$ (287). Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni reſiſtentiæ quæ à vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad reſiſtentiam quæ oritur ab aliis cauſis tribuendum ſit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempeſtatis vel manus globum demittentis, vel etiam erroribus inſenſibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum eſſe puto. Ideoque pondus globi in aquâ debet eſſe plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus deſcripta cœpi, ut inveſtigarem reſiſtentias fluidorum, antequam theoria in propoſitionibus proximè præcedentibus expoſita mihi innoteſceret. Poſtea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cerâ & plumbo incluſo globos quatuor formavi, ſingulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aquâ. Et hos demiſi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad ſemi-minuta ſecunda oſcillans, menſurarem. Globi, ubi ponderabantur & poſtea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manſerant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua. & cera rarefacta non ſtatim ad denſitatem priſtinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aquâ extantis deſcenſus eorum ſub initio acceleraretur. Et ubi penitùs immerſi quieſcebant, demittebantur quam cautiſſimè, ne impulſum aliquem à manu demittente acci-

bi in aqua eſt gran. $120\frac{6}{43}$. Unde prodeunt globi diameter 0,9671 partium digiti, ſpatium 2 F 2,6004 digitorum, ſpatium quod globus pondere 1 grani ſine reſiſtentia cadendo tempore minuti unius ſecundi deſcribit digit. 1,5959, & tempus G 0″,9026. Hoc tempore globus cum velocitate maximâ *H* uniformiter progrediendo deſcribet ſpatium 2 *F* ſeu 2,6004 dig. & tempore 40″ deſcribet ſpatium 115,2404 dig. Subducatur ſpatium 1,3862944 F ſeu 1,8024 dig., & manebit ſpatium 113,438 dig. quod globus cadendo in aqua in vaſe ampliſſimo tempore 40″ deſcriberet; & hoc ſpatium, propter anguſtiam vaſis aliquantulum minui debet, nimirum in ratione 10049 ad 10025 circiter. Globi igitur per theoriam ſpatium 112 digitorum cadendo deſcribere debuerunt tempore 40″ circiter. 291.

acciperent. Ceciderunt autem succeſſivè temporibus oſcillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempeſtas jam paulò frigidior erat quàm cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oſcillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Experimento ſæpius capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, ſuſpicor eoſdem retardatos fuiſſe impingendo in latera vaſis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aquâ $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi, ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit 9,88164 *dig.* Et tempus G $0'',376843$. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum poteſt in aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum deſcendere, tempore $0'',376843$ deſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore $1''$ ſpatium 7,44766 digitorum, & tempore $25''$ ſeu oſcillationum 50 ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum maximum globi, & ſimplici ratione eiuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe tempore oſcillationum 50 deſcribere debuit per theoriam quamproximè. Deſcripſit verò ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aquâ ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 &

33,

33, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$ 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum semisse.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproximè.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oscillarent circum centra, latere illo quod forte gravius esset primum descendente, & motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas globus majorem motum communicat aquæ, quam si sine oscillationibus descenderet; & communicando, amittit partem motûs proprii quo descendere deberet: & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recidit semper à latere suo quod per oscillationem descendit, & recedendo appropinquat lateribus vasis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, in majoribus aquam magis agitat. Quâpropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; & globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo mi-

 nores

nores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aquâ, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maximâ ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{3}{4}$ in aquâ, sæpius demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{3}$ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aquâ, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, describentes altitudinem digitorum $181\frac{3}{4}$ Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audivi impulsum eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam verò cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{5}{9}$ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{29}{32}$ in aquâ sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maximâ ex parte 44 & 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{8}$ in aquâ, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64, & 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $64\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per

Per hæc experimenta manifeſtum eſt quod, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis ſecundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per theoriam, at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis ſextis, nonis ac decimis, (a) reſiſtentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oſcillant aliquantulum: & hæc oſcillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motûs languorem citò ceſſat; in gravioribus autem & majoribus, ob motûs fortitudinem diutius durat, & non niſi poſt plures oſcillationes ab aquâ ambiente cohiberi poteſt. Quinetiam globi, quo velociores ſunt, eo minus premuntur à fluido ad poſticas ſuas partes; & ſi velocitas perpetuo augeatur, ſpatium vacuum tandem à tergo relinquent, (b) niſi compreſſio fluidi ſimul augeatur. Debet autem compreſſio fluidi (*per prop.* XXXII. & XXXIII.) (c) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut reſiſtentia ſit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulò minus premuntur à tergo, & defectu preſſionis hujus, reſiſtentia eorum fit paulo major quàm in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aquâ, reliquum eſt ut examinemus phænomena cadentium in aere.

Exper. 13. A culmine eccleſiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, menſe Junio 1710 globi duo vitrei ſimul demittebantur, unus

(a) * *Reſiſtentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis.* Si enim reſiſtentia accuratè eſſet in duplicatâ velocitatis ratione, tempora cadendi tam per experimenta quam per theoriam definita, æquarentur; At ſi reſiſtentia major quam in duplicatâ ratione velocitatis, tempora quibus corpus cadendo datum ſpatium deſcribit, majora eſſe debent in experimentis quam in theoriâ, quæ minorem reſiſtentiam ſupponit.

(b) * *Niſi compreſſio fluidi ſimul augeatur.* Tanta enim eſſe poteſt globi velocitas, ut fluidum ad poſticas illius partes ſatis citò recurrere & locum à globo relictum ſtatim occupare nequeat, niſi fluidi compreſſio augeatur, ut per fluidum preſſio & motus celerius propagentur. 291.

(c) * *Augeri in duplicatâ ratione velocitatis &c.* Nam partes fluidi per compreſſionem in ſe mutuo agunt & reagunt; & ſi vires quibus fluidi particulæ ſe mutuò agitant, augeantur in duplicatâ ratione velocitatis, reſiſtentia eſt in eâdem ratione duplicatâ, *per cor.* 2. *prop.* XXXIII.

Tt 3

unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo defcribebant altitudinem pedum *Londinenfium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis fufpendebatur, ad alterum peffulo ligneo incumbebat; & globi duo huic tabulæ impofiti fimul demittebantur, fubtrahendo peffulum ope fili ferrei ad terram ufque demiffi ut tabula polis ferreis folummodo innixa fuper iifdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta fecunda ofcillans, per filum illud ferreum tractum demitteretur & ofcillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in (d) tabulâ fequente.

Globorum mercurio plenorum			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	$4''$	510 *gran.*	5,1 *digit.*	$8''\frac{1}{2}$
983	0,8	4—	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	$8\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	$8\frac{1}{2}$
784	0,75	4+	641	5,2	8

Cæterum tempora obfervata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam *Galilæi*) minutis quatuer fecundis (e) defcribent pedes *Londinenfes* 257, & pedes 220 minutis tantum

$3''$

(d) * *In tabulâ* fequente 4 — fignificat tempus cadendi minutis quatuor fecundis paulo minus fuiffe, & 4 + tempus minutis quatuor fecundis paulo majus indicat,

(e) * *Defcribent pedes Londinenfes &c.* Quoniam denfitas mercurii eft ad denfitatem aëris ut 11890 ad 1 circiter, parùm admodum minuitur mercurii pondus in aere, & ideo globi mercurio pleni eâdem ferè celeritate in aëre & in vacuo per breve tempus defcendunt; fed gravia omnia in vacuo cadentia tempore minuti unius fecundi defcribunt pedis Londinenfis digitos $193\frac{1}{3}$ (289), & fpatia defcripta funt in duplicatâ ratione temporum (27. *lib.* 1. Quare ut 1 ad 16 ita $193\frac{1}{3}$ dig. ad fpatium quod globus mercurio plenus tempore $4''$ cadendo defcribit, quod proinde erit 3093 dig. feu 257 pedum Londinenfium circiter. Simili modo, cum fit

$3''$,

$3''.42'''$. Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tardâ suâ devolutione impediebat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbebant tabulæ prope medium ejus, & paulò quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi sex majores cecidêre, evadent $8''\ 12'''$, $7''\ 42'''$, $7''\ 42'''$, $7''\ 57'''$, $8''\ 12'''$, & $7''\ 42'''$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus, cecidit tempore $8''\ 12'''$, describendo altitudinem pedum 220. (f) Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ *gran.* seu $19\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in vacuo est $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus est ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita sunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$ ut supra, & pondere 483 *gran.* describit digitos 185,905,

&

$3''.42''' - 3''.7$, erit 1 ad 13. 69 ut $19\frac{1}{3}$ dig. ad spatium tempore $3''.42'''$ descriptum quod prodit ped. Lond. 220 circiter. Sed globi mercurio pleni spatium hoc 220 ped. tempore $4''$ describunt in experimentis, & differentia temporum $4''$ & $3''.42'''$. est $18'''$. Tempora igitur prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter.

(f) * *Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum.* Globus aqueus, cujus diameter est unius digiti continet grana 132,8 (287), & globorum homogeneorum, pondera sunt ut diametrorum cubi, & propterea ut 1 ad 125 ita sunt 132,8 grana ad pondus globi aquei cujus diameter est digitorum 5, quod proinde pondus est gran. 16600. Globorum æqualium pondera sunt ut illorum densitates, & densitas aquæ est ad densitatem aeris ut 860 ad 1. Quare pondus globi aëris diametro digitorum 5 descripti est $\frac{16600}{860}$ seu $19\frac{3}{10}$ gran. quam proximè. Hinc pondus globi vitrei aëre pleni in vacuo est gran. $483 + 19\frac{3}{10}$ seu gran. $502\frac{3}{10}$, & hoc pondus est ad pondus aëris globo æqualis, id est, densitas globi, si homogeneus fingatur, ad densitatem aëris, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$ *& ita sunt 2 F &c.*, cætera patent, ut in superioribus calculis. 291.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

& eodem pondere 483 *gran.* etiam in vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* (g) tempore $57'''$ $58''''$, & velocitatem maximam acquirit quâcum poſſit in aere deſcendere. Hâc velocitate globus, tempore $8''$ $12'''$, deſcribet ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863 F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus tempore $8''$ $12'''$, cadendo deſcribere debuit per theoriam. Deſcripſit verò ſpatium 202 pedum per experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci tabulam ſequentem.

Globorum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum* 220.		*Spatia deſcribenda per theoriam.*		*Exceſſus.*	
510 *gran.*	5,1 *dig.*	$8''$	$12'''$	226 *ped.*	11 *dig.*	6 *ped.*	11 *dig.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Exper. 14. Anno 1719. menſe Julio, D. *Deſaguliers* hujuſmodi experimenta iterum cepit, formando veſicas porcorum in orbem ſphæricum ope ſphæræ ligneæ concavæ ambientis, quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & haſce arefactas & exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejuſdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; & eodem temporis momento demittendo etiam glo-

(g) 292. * *Tempore* $57'''$ $58''''$. Hoc tempus, quod ante dictum eſt G, ducatur in numerum 5, & productum erit fere $5''$; & propterea (186) globus cujus diameter eſt 5 digit. & pondus in aëre gran. 483, tempore minutorum ſecundorum quinque deſcribet ſpatium 124 pedum circiter, & deinde videbitur uniformiter deſcendere.]

globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui ſtantes in ſupremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii ſtantes in terrâ notabant differentiam temporum inter caſum globi plumbei & caſum veſicæ. Tempora autem menſurabantur pendulis ad dimidia minuta ſecunda oſcillantibus. Et eorum qui in terrâ ſtabant unus habebat horologium cum elatere ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabrè conſtructam cum pendulo etiam ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante. Et ſimilem machinam habebat unus eorum qui ſtabant in ſummitate templi. Et hæc inſtrumenta ita formabantur, ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}'''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & ſecundâ vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$ & $16\frac{3}{3}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$, & $21\frac{1}{8}''$; & ſecundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & ſecundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterum veſicæ non ſemper rectâ cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectius veſica ſecunda & quarta primâ vice; & prima ac tertia ſecundâ vice. Veſica quinta rugoſa erat & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuiſſimo bis circundato menſuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabulâ ſequente, aſſumendo denſitatem

tem aeris esse ad densitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, & computando spatia quæ globi per theoriam describere (h) debuerunt cadendo.

Vesicarum pondera	Diametri.	Tempora cadendi ab altitudine pedum 272.	Spatia iisdem temporibus describenda per theoriam.		Differentia inter theor. & exper.	
128 gran.	5,28 dig.	19″	271 ped.	11 dig	— 0 ped.	1 dig.
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+ 0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272	7	+ 0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+ 5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+ 10	0

Globorum igitur tam in aere quàm in aquâ motorum resistentia prope omnis per theoriam nostram recte exhibetur, ac densitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis est.

In scholio, quod sectioni sextæ subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in aere, aquâ, & argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. (i) Idem hic ostendimus magis ac-

(h) * *Describere debuerunt cadendo.* Exempli causâ calculum tentabimus experimenti cum tertia vesica facti. Hujus vesicæ diameter erat 5,3 digitorum & pondus in aëre granorum 137, 5. Globus aëris diametro digitorum 5.3 descriptus continet 23 grana quam proxime; unde vesicæ pondus in vacuo erat gran. 160,5, & ut 23 ad 160, 5 ita sunt octo tertiæ partes diametri vesicæ seu digiti $14\frac{2}{15}$ ad spatium 2 *F*, quod ita prodit digit. 98,626. Vesica cadendo in vacuo toto suo pondere 160,5 gran. tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$, & pondere 137,5 gran. describit digitos 165,628, & eodem pondere 137,5 gran. etiam in vacuo describit spatium *F* digitorum 49,313 tempore 0″,5456 & velocitatem maximam acquirit cum quâ possit in aëre descendere. Hâc velocitate vesica tempore minutorum secundorum $18\frac{1}{2}$ describet spatium 277 ped. & 8. digit. circiter. Subducatur spatium 1,3863 *F* seu 5. ped. & 8 digit., & manebunt 272 pedes; cùm in tabula accuratiore calculo confecta spatium per theoriam describendum sit 272 ped. & 7 digit., & in experimento sit 272 ped.

(i) * *Idem hic ostendimus &c.* Nam theoria experimentis confirmata, cui superiore computationes nituntur, supponit resistentiam, cæteris paribus, esse in ratione compositâ ex ratione duplicatâ velocitatis mobilis & ratione simplici densitatis fluidi.

accuratè per experimenta corporum cadentium in aëre & aquâ. Nam pendula singulis oscillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis semper contrarium, & resistentia ab hoc motu oriunda, ut & resistentia fili quo pendulum suspendebatur, totam penduli resistentiam majorem reddiderunt quàm resistentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in scholio illo exposita, globus ejusdem densitatis cum aquâ, describendo longitudinem semidiametri suæ in aëre, amittere deberet motûs sui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hac septimâ sectione expositam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem describendo longitudinem eandem, (k) amittere deberet motûs sui partem tantum $\frac{1}{4586}$, posito quod densitas aquæ sit ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob causas jam descriptas) quàm per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cùm pendulorum in aëre, aquâ & argento vivo oscillantium resistentiæ à causis similibus similiter augeantur, proportio resistentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quàm per experimenta corporum cadentium, satis rectè exhibebitur. Et inde concludi potest quod corporum in fluidis quibuscunque fluidissimis motorum resistentiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates fluidorum.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

His

(k) * *Amittere deberet motûs sui partem tantùm* $\frac{1}{4586}$. Sit D diameter globi V ejus velocitas sub initio motus in fluido, $2F$ spatium quod sit ad $\frac{8}{3}D$ ut densitas globi ad densitatem aëris, hoc est, ut 860 ad 1, ideoque $2F = \frac{6880}{3}D$; sit T tempus quo globus cum velocitate V uniformiter progrediendo describit spatium $2F$, & t tempus quo eâdem uniformi velocitate describit spatium $\frac{1}{2}D$; & erit $t : T = \frac{1}{2}D : \frac{6880}{3}D = 3 : 13760$, & inde $t : T + t = 3 : 13763$, ideoque $\frac{t}{T+t} =$ 292
$\frac{3}{13763} = \frac{1}{4586}$ quam proximè. Est autem $\frac{tV}{T+t}$ velocitatis V pars amissa tempore t (*per cor.* 3 *prop.* 38). Globus igitur describendo longitudinem semidiametri suæ in aëre, per theoriam in hac septimâ sectione expositam amittere debet motûs sui partem $\frac{1}{4586}$.

(l) His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motûs ſui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus ſub initio motus, & T tempus, quo globus velocitate V in vacuo deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium $\frac{8}{3}$ D ut denſitas globi ad denſitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t amittet velocitatis ſuæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & deſcribet ſpatium, quod ſit ad ſpatium uniformi velocitate V eodem tempore deſcriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 eſt ad numerum $\frac{t}{T}$, *per corol.* VII. *prop.* XXXV. In motibus tardis reſiſtentia poteſt eſſe paulò minor, (m) propterea quod figura globi paulò aptior ſit ad motum quàm figura cylindri eâdem diametro deſcripti. In motibus velocibus reſiſtentia poteſt eſſe paulò major, propterea quod elaſticitas & compreſſio fluidi non (n) augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujuſmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum & ſimilia fluida, per diviſionem partium in infinitum, ſubtiliarentur & fierent media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minus reſiſterent. Nam reſiſtentia, de quâ agitur in propoſitionibus præcedentibus, oritur ab inertiâ materiæ; & inertia materiæ cor-

(l) * *His ita ſtabilitis, dicere jam licet quamnam motûs ſui partem globus quilibet, in fluido quocumque projectus* & ſolâ vi inſitâ motus, *dato tempore amittet quam proximè*; theoriam enim cum experimentis conſentire vidimus tum in fluidis elaſticis, quale eſt aër, tum in fluidis non elaſticis, quale eſt aqua. Quæ ſequuntur, manifeſta ſunt per notam ad cor. 3. prop. XXXVIII. (282).

(m) * *Propterea quod figura globi paulo aptior ſit ad motum &c.* Nam in Lemmate VII. lib. II. & in ſequentibus propoſitionibus ſuppoſitum eſt, globi & cylindri, quorum eadem eſt diameter, æqualem eſſe reſiſtentiam.

(n) * *Non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis*, in quâ tamen augeri deberent, uti expoſitum eſt in experimento 12.

corporibus essentialis est & quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium fluidi, resistentia quæ oritur à tenacitate & frictione partium diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui resistentia, de quâ hic agitur, semper proportionalis est. Ut hæc resistentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea spatia cœlestia, per quæ globi planetarum & cometarum in omnes partes liberrimè & sine omni motus diminutione sensibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo destituuntur, si forte vapores longe tenuissimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes anticas supra pressionem ad ejus partes posticas, & non minor esse potest in mediis infinite fluidis quam in aere, aquâ & argento vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis excessus, pro quantitate suâ, non tantum motum ciet in fluido, sed (o) etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea resistentia in omni fluido est ut motus in fluido à projectili excitatus, nec minor esse potest in æthere subtilissimo pro densitate ætheris, quam in aëre, aquâ & argento vivo pro densitatibus horum fluidorum.

(o) * *Sed etiam agit in projectile*, per motûs legem III. 291.

SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

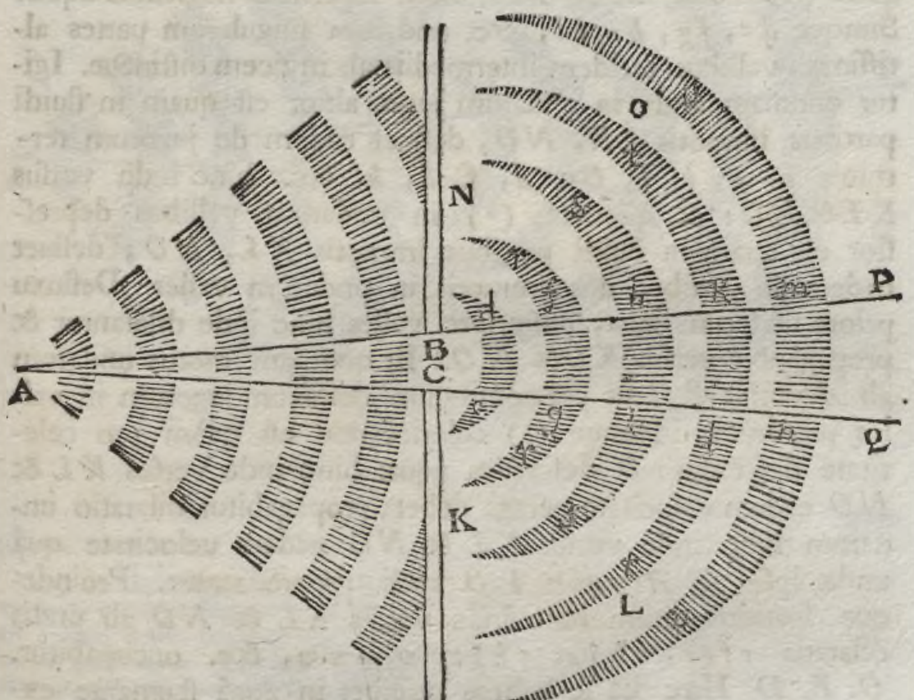
PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in lineâ rectâ, potest quidem pressio directè propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas obliquè positas *f* & *g* obliquè, & particulæ illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur à particulis ulterioribus *h* & *k*; quâtenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & obliquè propagabitur in infinitum; & postquam incipit obliquè propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*

Corol. Si pressionis, à dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quâquâversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* transit. Planis transversis *de*, *fg*, *hi* distinguatur conus *APQ* in frusta; & interea dum conus *ABC*, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius *degf* in superficie *de*, & hoc frustum urget frustum proximum *fgih* in superficie

cie fg, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus legem tertiam) quod fruſtum primum $defg$, reactione fruſti ſecundi $fghi$, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie fg, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur $defg$ inter conum Ade & fruſtum $fhig$ comprimitur utrinque, & propterea (*per corol.* VI, *prop.* XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eâdem comprimatur undique. Eodem igitur impetu



quo premitur in ſuperficiebus de, fg, conabitur cedere ad latera df, eg; ubi que (cùm rigidum non ſit, ſed omnimodo fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera df, eg quam fruſtum $fghi$ eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur à lateribus df, eg in ſpatia NO, KL hinc inde, quam propagatur à ſuperficie fg verſus PQ. *Q. E. D.*

Vv 3 PRO-

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per fluidum propagatus divergit à recto tramite in ſpatia immota.

Caſ. 1. Propagetur motus à puncto *A* per foramen *BC*, pergatque, ſi fieri poteſt, in ſpatio conico *BCQP*, ſecundum lineas rectas divergentes à puncto *A*. Et ponamus primo quod (a) motus iſte ſit undarum in ſuperficie ſtagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum ſingularum partes altiſſimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem diſtinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior eſt quam in fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde verſus *KL* & *NO*: & quoniam (b) in undarum vallibus depreſſior eſt quam in fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, poſteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur verſus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* verſus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque (c) celerior non eſt quàm pro celeritate deſcenſus; & deſcenſus aquæ hinc inde verſus *KL* & *NO* eâdem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde verſus *KL* & *NO* eâdem velocitate quâ undæ ipſæ ab *A* verſus *PQ* rectà progrediuntur. Proindeque ſpatium totum hinc inde verſus *KL* & *NO* ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, &c. occupabitur. *Q. E. D* Hæc ita ſe habere quilibet in aquâ ſtagnante experiri poteſt.

Caſ.

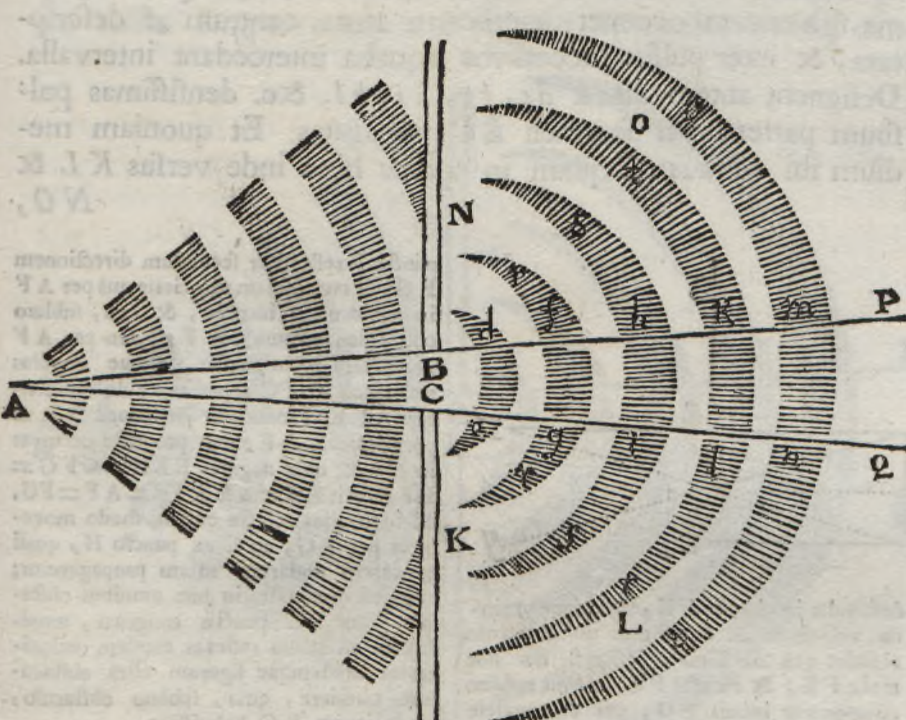
(a) *Motus iſte ſit undarum &c.* Vis quælibet deorſum directa in ſuperficiem ſtagnantis aquæ agat in A, & cavitate factâ, cogat aquam circumquaque aſcendere, aqua elevata vi propriæ gravitatis deſcendendo partim refluet in A, ad cavitatem replendam, partim in plagam oppoſitam feretur, & celeritate cadendo acquiſitâ novam cavitatem formabit, atque ità deinceps undæ motus per ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum propagabitur in orbem.

(b) * *In undarum vallibus depreſſior eſt &c.* Aqua enim ab altioribus undarum partibus cadendo celeritatem acquirit, quâ infrà quieſcentis aquæ ſuperficiem deſcendit.

(c) * *Celerior non eſt* quàm pro celeritate deſcenſûs ab eâdem undarum altitudine, undè aqua in plagas P Q, K L, N O æquè defluit.

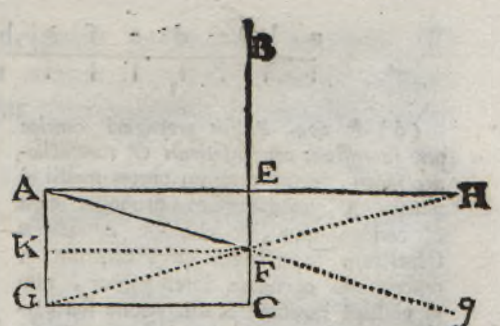
Cas. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* designent pulsus à puncto *A* per medium elasticum successive

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.



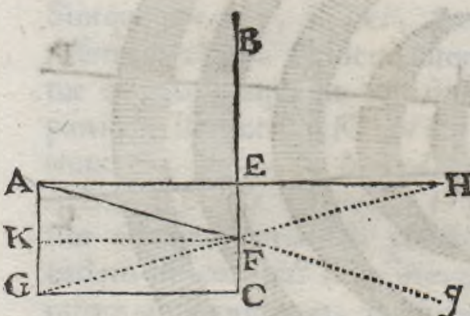
pro-

293. Ex demonstratis in hoc casu, motus undæ in obstaculum planum incurrentis definiri potest. Undarum motus è loco A quasi centro propagetur. Incurrat unda in obstaculi immoti B C punctum F, cum velocitate & directione A F. Ductâ ex A in B C perpendiculari A E, completoque rectangulo A E F K, resolvatur motus A F, in duos alios motus A E, A K, seu factâ F C æquali A K, in motus K F, F C; & quia particulæ aquæ motu F C in obstaculum non agunt, post impactum pergent eâdem quâ antè impactum velocitate ac directione F C moveri. At motu K F, in obstaculum directè incurrentes motum illum omnem, juxtà leges conflictûs corporum non elasticorum, amittent. Cùm autem aqua in F ab aliâ insequente urgeatur, & obstaculum (per hyp.) cedere nequeat, elevabitur illa in F; & deindè vi ponderis sui, id est, vi æquali illi quâ per obstaculi longitudinem elevata fuit, des- 293.

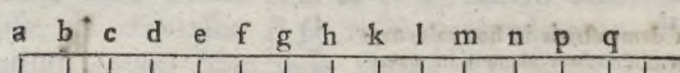


DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII PROP. XLII. THEOR. XXXIII.

propagatos. (d) Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii, ſicut pulſus cujuſque pars denſiſſima ſphæricam occupet ſuperficiem circa centrum A deſcriptam, & inter pulſus ſucceſſivos æqualia intercedant intervalla. Deſignent autem lineæ de, fg, hi, kl, &c. denſiſſimas pulſuum partes, per foramen BC propagatas. Et quoniam medium ibi denſius eſt quam in ſpatiis hinc inde verſus KL & NO,



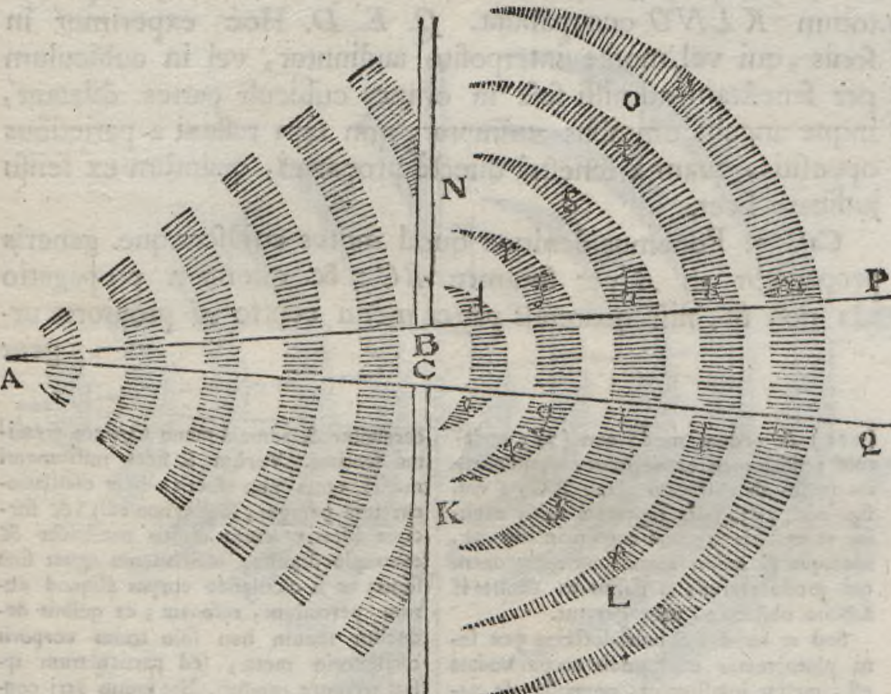
deſcendet in plagam F K, eâdemque proinde velocitate ac directione ab obſtaculo recedet quâ ad illud acceſſerat. Ex hoc motu F K, & ex alio F C in aquâ reſiduo componetur motus F G, per diagonalem parallelogrammi K F C G; unda igitur à puncto F reflectitur ſecundum directionem F G, & cum eâdem velocitate quâ per A F in obſtaculum incurrit, & quâ, ſublato obſtaculo, motum per F g, ſeu per A F productam continuaſſet, eſtque angulus reflexionis G F C æqualis angulo incidentiæ A F E. Producatur jam linea G F ut perpendiculo A E etiam producto occurrat in H; & quia angulus $EFH = CFG = EFA$, erit $EH = AE$ & $FH = AF = FG$, & ideò aqua reflexa eodem modo movebitur per F G, ac ſi ex puncto H, quaſi ex centro undarum motus propagaretur; cùmque demonſtratio hæc omnibus obſtaculi plani B C punctis congruat, manifeſtum eſt undas reflexas eandem velocitatem eandemque figuram citrà obſtaculum obtinere, quas, ſublato obſtaculo, ultrà lineam B C habuiſſent.



(d) * 294. *Pulſus propagari concipe per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii*, ità ut primum partes medii è puncto A quaquaverſum propulſæ eant & condenſentur, & ubi ſunt denſiſſimæ ſphæricam ſuperficiem circà centrum A deſcriptam occupare intelligantur, tum vi elaſticâ rarefiant & dilatatione ſuâ partim verſus centrum A redeant, partim à centro illo quaquaverſum recedant & partes vicinas propulſent; ita ut condenſentur, atque ità ſucceſſivis condenſationibus & dilatationibus agitetur totum medium. Quæ ut clarius intelligantur, motum particularum aëris in uno prædictæ ſphæræ radio contemplemur. Sint a, b, c, d &c. puncta phyſica medii quieſcentis in rectâ a q, ad æquales ab invicem diſtantias ſita. Punctum a, vi quâlibet acceleratrice urgeatur, ſecundùm directionem a q, & deinde ceſſante vis illius actione, per celeritatem acquiſitam moveatur. Non poterit ità moveri particula a, quin ſucceſſive moveantur particulæ aliæ b, c, d, e, &c. & quia medium elaſticum in intervallis b c, c d. d e, &c. gradatim condenſatur & vim elaſticam majorem acquirit quâ celeritas particulæ a, ſibi relictæ continuò minuitur ac tandem prorſus extinguitur; tum verò medium condenſatum vi ſuâ elaſticâ utrinque tam verſus a, quam verſus q dilatatur, & particulas a, b, c, &c.

NO, (e) dilatabit ſeſe tam verſus ſpatia illa *KL*, *NO* utrinque ſita, quam verſus pulſuum rariora intervalla; eoque pacto rarius ſemper evadens è regione intervallorum ac den-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.



ſius è regione pulſuum; participabit eorundem motum. Et quoniam pulſuum progreſſivus motus oritur à perpetuâ relaxatione partium denſiorum verſus antecedentia intervalla rariora;

&c. in priſtina loca ſucceſſivè repellit, dum intereà aliæ particulæ ut g, h, &c. verſus q progrediuntur; quo motu medium rurſus condenſatur verſus q, & deinde utrinquè dilatatur, atquè ità deinceps pulſus per ſucceſſivas condenſationes & rarefactiones medii propagantur. * Hæc pulſuum in medio Elaſtico genitorum naturâ, ad Propoſ. XLVII. fuſius expendetur, ſed icto in loco hæc ſufficere videntur.

(e) * *Dilatabit ſe tam verſus &c.* Per vim elaſticam quæ vi comprimenti quâ partes medii condenſantur, æqualis eſt, & in omnem loci circumferentiam agit. 294.

295. Motus pulſuum in medio elaſtico ſpectari poteſt ut analogus cum motu undarum in ſuperficie aquæ ſtagnantis; nam condenſatio partium medii elaſtici locum tenet elevationis aquarum, vis elaſtica medii locum gravitatis aquæ, & pars pulſuum denſiſſima parti undarum altiſſimæ correſpondet. Undè in utroque motu, medii particulæ per brevia ſpatia eunt & redeunt, intereadum pulſus vel unda propagatur

ra; & pulſus eâdem ferè celeritate ſeſe in medii partes quieſcentes KL, NO hinc inde relaxare debent; pulſus illi eâdem ferè celeritate ſeſe dilatabunt undique in ſpatia immota KL, NO, quâ propagantur directè à centro A; ideoque ſpatium totum $KLNO$ occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in ſonis, qui vel monte interpoſito audiuntur, vel in cubiculum per feneſtram admiſſi ſeſe in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi à parietibus oppoſitis, quam à feneſtrâ directè propagati, quantùm ex ſenſu judicare licet.

Caſ. 3. Ponamus denique quod motus cujuſcunque generis propagetur ab A per foramen BC: & quoniam propagatio iſta non fit, niſi quâtenus partes medii centro A propiores urgenr

(294) & eodem modo quo (293 undarum reflexionem expoſuimus, demonſtratur pulſus ab obſtaculo plano B C, (vid. fig. not. 293.) ità repercuti ut ſit angulus reflexionis æqualis angulo incidentiæ, idemque ſit medii motus poſt reflexionem qui produceretur, ſi pulſus ex centro H ſublato obſtaculo, propagaretur.

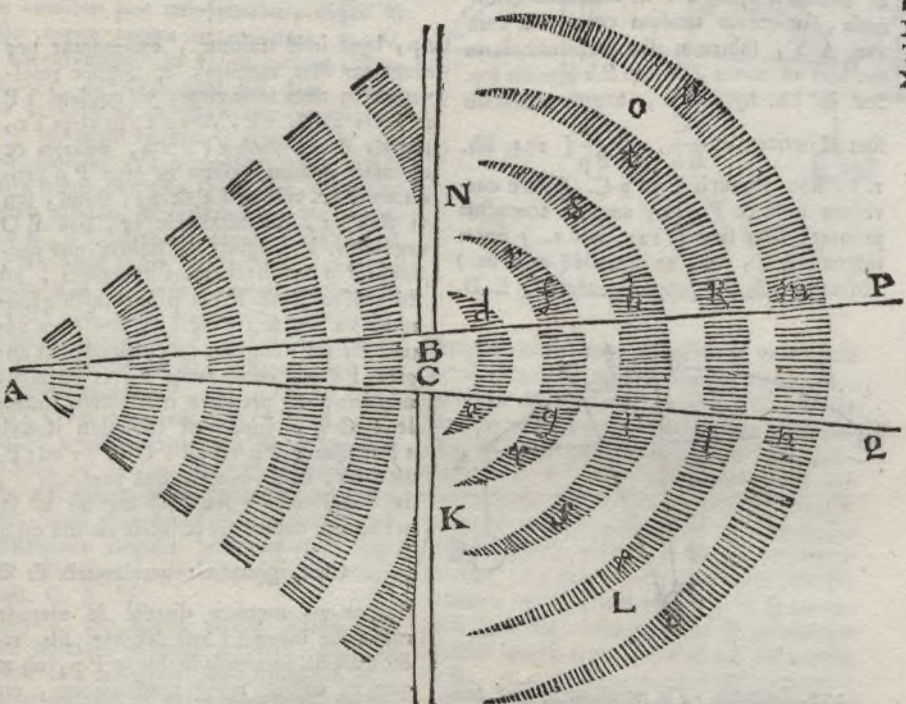
Sed ut hujus ſectionis doctrina quæ ſoni phænomenis explicandis accommodata eſt, melius intelligatur, nonnulla de naturâ ſoni & de motu corporum reſonantium præmittenda ſunt.

296. *Definitio. Sonus directus eſt*, qui à corpore ſonoro ad organum auditûs rectâ lineâ fertur. *Sonus reflexus qui* à corpore ſonoro in alia corpora fertur, & inde ad aurem reflectitur.

297. *Propoſitio. Sonus eſt particularum corporis reſonantis motus tremulus ac vibratorius aeri communicatus & ad aures delatus.* Hæc propoſitio notiſſimis experimentis certa eſt. Nam corpora non reſonant niſi percutiantur, & maximè omnium reſonant corpora dura atquè elaſtica quorum partes ictu flectuntur, & deinde vi ſuâ elaſticâ reſiliunt, atquè ità tremulo ac vibratorio motu agitantur. Particularum corporis reſonantis ſubſultus viſu & tactu percipitur; chartæ fruſtula corpori reſonanti inſidentia ſubſultare oculis cernuntur & admotâ manu partium fremitus ſentitur. Verùm ſi fides inſtrumenti muſici tenſa non fuerit, licet oſcillationes tota peragat, ſonum non edit; & forcipis focariæ crura digitis conſtricta & extemplò dimiſſa, oſcillationes agunt ſine ſono; at ſi oſcillando corpus aliquod durum percutiunt, reſonant; ex quibus deducitur ſonum non ſolo totius corporis oſcillatorio motu, ſed particularum ipſius tremore produci. Hic motus aeri contiguo communicatur & pulſus excitat (294). Cùm propè aquam ſtagnantem tympanum quatitur, ſubſultus obſervantur in aquæ ſuperficie. Dum inſtrumentorum muſicorum pulſantur nervi, pulviſculi qui aëri innatant & radio ſolis fiunt conſpicui, conformiter ad fremitum nervorum ſubſultare videntur. Si ex duabus chordis muſicis, homogeneis, æqualibus & æque tenſis una pulſetur ut ſonum edat, altera prioris vicina concutitur & ſimiliter reſonat. Tandem corpora ſonora ſub campanâ antliæ pneumaticæ poſita atque percuſſa, dum educitur aër, ſonum languidiorem reddunt & exhauſto aëre, nullum qui poſſit percipi. Eſt igitur aër vehiculum ſoni: attamen totius aereæ molis motus qui in vento cernitur, per ſe ad producendum ſonum non valet, ſed vibratorius particularum motus ſatis validus neceſſarius eſt.

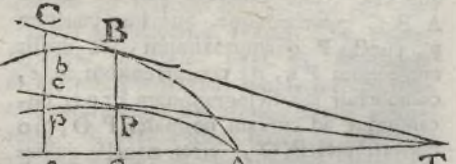
298.

gent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideoque recedunt quâquâversum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem versus medii partes omnes quiescentes, tam laterales KL & NO, quàm anteriores PQ,



eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen BC transiit, dilatari incipiet & inde tanquam à principio & centro, in partes omnes directè propagari. *Q. E. D.*

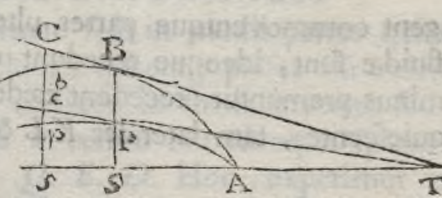
298. Lemma. *Si curvarum duarum AB, AP abscissam communem AS habentium, ordinatæ SB, SP sint semper ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum ut curvæ tandem coincidant cum axe AS, erit ultima ratio curvaturæ eadem quæ ordinatarum.* Duc novam ordinatam $s\,p$ curvis occurrentem in p & b, & ad puncta B & P duc tangentes occurrentes ordinatæ novæ [in] C & c. [Tum ob datam ordina- 298.

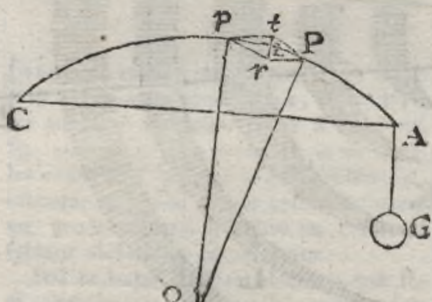


tarum rationem, tangentes productæ ad idem axis punctum T concurrent (256.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.

lib. 1.) & ideò ob parallelas S B, s C, erit $sC : sc = SB : SP$ & (per hyp.) $SB : SP = sb : sp$; unde $sC : sc = sb : p = sC - sb : sc - sp = bC : pc = SB : SP$, coincidant jam ordinatæ s b, S B, & lineolæ evanescentes b C, p c, erunt subtensæ angulorum contactûs b B C, p P c, & ordinatis S B, S P in infinitum diminutis, ut curvæ tandem coincidant cum axe A S, subtensæ illæ perpendiculares evadent ad curvas, fietque B b æqualis P p. Sed in hâc hypothesi, anguli contactûs sunt ad invicem ut $\frac{bC}{Bb}$, ad $\frac{pc}{Pp}$ (154. lib. 1.), hoc est, ut b C ad p C. Quarè curvaturæ in B & P, quæ angulis contactûs proportionales sunt (121. *lib.* 1.) erunt subtensis b C, p c, ac proindè (ex dem.) ordinatis S B, S P proportionales. Q. E. D.



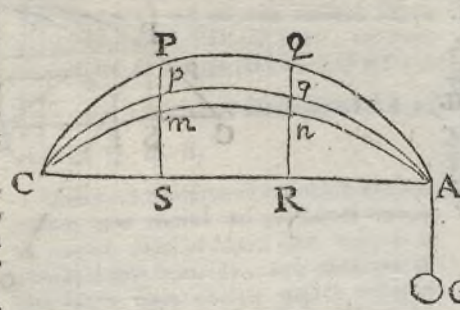


299. Lemma. *Vis acceleratrix quâ punctum quodlibet P nervi tensi & uniformiter crassi urgetur, dum per brevissimum spatium oscillatur, est ut nervi curvatura in eodem loco.* Nervus A C pondere G tensus oscillando pervenerit ad positionem curvæ A P C, cum axe A C ferè coincidentis, & quia linea recta C A pondere G tenditur ubique æqualiter, æqualis quoque erit tensio omnium partium curvæ A P C quamproximè. Sumatur punctum p, puncto P quamproximum, & ductis tangentibus P t, p t concurrentibus in t, compleatur parallelogrammum P t p r, ducanturque ad curvam normales P O, p o concurrentes in O, vires æquales quibus arcus evanescens P p, (qui sumi potest pro arcu circuli radio P O descripti (121. *lib.* 1.) in directionibus tangentium t P, t p, hinc indè trahitur, exponantur per tangentes illas æquales, & singulæ resolvantur in duas alias vires, vis quidem t P in vires t z & z P, & vis t p in vires t z, seu z r & z p vires z P, z p, æquales & oppositæ nullum motum in arcu P p producent, at viribus t z & z r, simul, seu vi totâ t r, in directione t r, sivè P O urgebitur. Erit igitur vis motrix quâ particula P p in directione t r urgetur, ad fili tensionem in P vel p per quam generatur vis illa ut t r ad t P. Sed (ex naturâ circuli) angulus t P r, æqualis est angulo P O p, cum arcus P p sit utriusque mensura, & propterà triangulum isosceles P O p, simile est triangulo isosceli t P r. Quarè P p est ad P O ut t r ad t P, hoc est, ut vis motrix quâ particula P p in directione t r seu P O urgetur ad fili tensionem datam G, & ideò vis illa est ut $\frac{Pp}{PO}$. Cum igitur vis acceleratrix sit in ratione vis motricis directè & materiæ movendæ inversè (per def. 8am. lib. 1.) & materia movenda sit hic ut P p, ob æqualem ubique nervi crassitudinem, erit vis acceleratrix ut $\frac{1}{PO}$, id est, in ratione inversâ radii circuli curvam osculantis in P, ideóque in ratione curvaturæ in P (121. *lib.* 1.). Q. E. D.

300. PROPOSITIO. *Si chorda musica A C uniformiter crassa & pondere G tensa, ità inflectatur dum resonat, ut ejus elongatio maxima ab axe motûs A C sit ferè insensibilis & ideò vis tensionis non mutetur per auctam chordæ longitudinem in majoribus suis ab axe distantiis & inclinatio radiorum curvaturæ ad axem negligi possit, ea erit natura curvæ A Q P C in quam chorda oscillando inflectitur, in quovis articulo motûs ejusdem chordæ ut ductis pro libitu ordinatis ad axem normalibus Q R, P S sit curvatura in Q, ad curvaturam in*

P,

P, ut QR, ad PS, ac puncta omnia Q, P simul ab axem pervenientia & simul redeuntia oscillationes suas omnes eodem tempore peragant ad instar penduli oscillantis in cycloide.



DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.

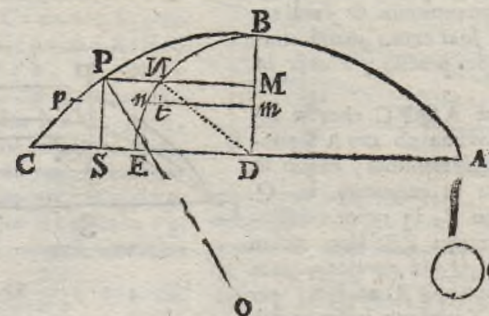
Cas. 1. Sit curva A Q P C chordæ oscillantis distantia maxima ab axe A S punctis omnibus jam quiescentibus, eaque sit hujus curvæ natura ut curvatura in Q sit ad curvaturam in P, in ratione distantiæ Q R ad distantiam P S. Hoc posito erit acceleratio in Q ad accelerationem in P in eâdem ratione Q R ad P S (*per Lem. superius* 299.) ideóque initio motûs spatia simul percursa Q q, P p, erunt in eâdem ratione, & divisim spatia percurrenda q R, p S, erunt in eâdem ratione Q R ad P S; undè etiam accelerationes novæ in punctis q & p, erunt in eâdem ratione Q R ad P S (299, 298.) atque erunt ad accelerationes priores in Q & P, ut distantiæ q R & p S ad distantias Q R & P S (299. 298.). Ergò puncti cujusvis P, vel in eâdem curvâ A Q P C vel in diversis A Q P C & A q p c, spectati acceleratio semper est ut ejusdem distantia ac axe motûs A C. Quarè (*per prop.* 51. *lib.* 1.) puncta omnia nervi ad axem simul perveniunt, simul redeunt & oscillationes singulas peragunt dato tempore ad instar corporis in cycloide oscillantis. Q. E. D.

Cas. 2. Si chorda plectro modò percussa nondum induerit formam curvæ in primo casu descriptæ, erit curvatura in P ad curvaturam in Q in majori vel minori ratione quàm distantiæ P S ad distantiam Q R. Sit in majori ratione, & erit velocitas in P, ad velocitatem in Q, in ratione majore quam P S ad Q R, (299) & spatium P p tempore minimo descriptum ad spatium Q q, eodem tempore descriptum in ratione majore quam P S ad Q R, ideòque divisim erit p s minor respectu P S, quàm q R, respectu Q R; & quia curvatura cum distantiis ab axe minuitur ac coincidente curvâ cum axe nulla evadit, erit etiam curvatura in p, minor respectu curvaturæ in P, quam curvatura in q, respectu curvaturæ in Q, & inde (299) acceleratio in p, minor respectu accelerationis in P, quam acceleratio in q, respectu accelerationis in Q. Majoris igitur velocitatis acceleratione semper decrescente & minoris velocitatis acceleratione è contrà semper crescente, respectu distantiarum ab axe A C, motus inter se tandem ità temperabuntur, ut punctis P & Q pervenientibus in loca quædam m & n, tum velocitates, tum accelerationes futuræ sint distantiis m S, n R proportionales, ideóque curvâ A n m C, jam existente eâdem quam descripsimus in casu 1°, motus dehinc omnes conspirabunt, atquè idem eveniet, si sit curvatura in P ad curvaturam in Q in minore ratione quam distantiæ P S ad distantiam Q R. Quarè quocumque modo percutiatur chorda musica, quam citissimè induet formam curvæ in casu primo descriptæ, atquè perget moveri more ibidem descripto. Q. E. D. 300.

Cæterùm inflexiones seu distantias admodum parvas ab axe motûs tam in chordis musicis quam in laminis elasticis ex quibus corpora sonora compacta esse fingi poteſt, viribus acceleratricibus proportionales & proindè oscillationes esse isochronas experimentis ostendit Clar. *s'Gravesandius* in Elem. phys. & *Mersennus* in harmoniâ universali longiorum chordarum vibrationes isochronas oculis observavit. Si verò chorda nimiâ vi pulsetur, vis acceleratrix in experimentis crescit in majori ratione quam distantiæ ab axe motûs & oscillationes breviori tempore absolvuntur.

 301.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLII. Theor. XXXIII.



301. *Cor.* 1. Datis axibus A C & B D curva musica sic potest describi. Centro D & radio D B describatur circuli quadrans B N E; ducatur ad B D, perpendicularis M N circulo occurrens in N, & producatur ad P, ut sit M P ad D C, in ratione arcûs B N, ad arcum quadrantalem B N E, dico punctum P esse in curvâ musicâ A B C.

Sit enim P puuctum curvæ musicæ ABC, & dicantur $BD = a$, $AC = L$, $DC = \frac{1}{2}L$, $BM = x$, $PM = y$, arcus $BP = s$, $PS = MD = z = a - x$, radius curvaturæ in $B = r$: & si fluxio ds sive P p constans sumatur, erit (126. *lib.* 1.) radius curvaturæ in P, seu $PO = \frac{ds\,dz}{ddy} = -\frac{ds\,dx}{ddy}$. Sed (ex dem.) B D est ad P S ut curvatura in B ad curvaturam in P, id est, ut radius curvaturæ in P ad radium curvaturæ in B, seu $a : a - x = -\frac{ds\,dx}{ddy} : r$. Quarè $r\,a\,ddy = x\,dx\,ds - a\,dx\,ds$, & sumptis fluentibus, additâ constante $Q\,ds$, fit $r\,a\,dy = \frac{1}{2}xx\,ds - ax\,ds + Q\,ds$. Evanescente B M seu x, fit $dy = ds$, seu $BP = PM$ (*per cor.* 1. *Lem.* 7. *lib.* 1.) & æquatio in hanc abit $r\,a\,ds = Q\,ds$, ideòque constans $Q = r\,a$. Quare in quovis curvæ puncto P erit $r\,a\,dy\,[ra + \frac{1}{2}xx - ax]\,ds$. Ponatur $ax - \frac{1}{2}xx = bb$, ut sit $r\,a\,dy = [ra - bb]\,ds$, & $rr\,aa\,dy^2 = [ra - bb]^2 ds^2 = [ra - bb]^2 dy^2 + [ra - bb]^2 dx^2$; undè deducitur $[2\,r\,a\,b\,b - b^4]\,dy^2 = [ra - bb]^2 dx^2$; & quia curva A B C ferè coincidit cum axe A C (per hyp.) ac ideò quantitas bb minima est respectu quantitatis $r\,a$ in quâ radius curvaturæ] r maximus est, si conferatur cum a vel x æquatio in hanc abibit $2\,r\,a\,b\,b\,dy^2 = rr\,a\,dx^2$, ex quâ eruitur $dy = \frac{r^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ducatur in circulo altera ordinata m n priori M N proxima; & ex puncto N demittatur ad m n perpendiculum N t; evanescente M m, erit (ex naturâ circuli) N M : N D = N t : N n, sivè $\sqrt{2ax - xx} : a = dx : N = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Est igitur $dy = Mn \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, & sumptis fluentibus $y = BN \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, cui æquationi nihil addendum vel subducendum est, cum arcus B N, evanescente P M seu y evanescat. Verum ubi P M coincidit cum C D, seu ubi fit $y = \frac{1}{2}L$, est $BN = BNE$, & propterea $\frac{1}{2}L = BNE \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, atquè adeò $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$. Quarè in quolibet curvæ puncto P, est $y = \frac{BN \times \frac{1}{2}L}{BNE}$, & proindè $y : \frac{1}{2}L = BN : BNE$, hoc est, PM est ad C D ut arcus B N ad quadrantem B N E. Q. E. D.

502.

302. *Cor.* 2. Quia P S est ad B D seu ad a, ut radius r ad radium P O, erit $PO \times PS = ar$. Sit diameter circuli ad circumferentiam ut 1 ad c & ideò a ad B N E ut 1 ad $\frac{1}{2}c$, seu $BNE = \frac{1}{2}ac$, & cum sit (301) $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$, erit $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{L}{ac}$ & $\frac{r}{a} = \frac{LL}{a^2c^2}$, & $r = \frac{LL}{ac^2}$; atquè $PO \times PS = ar = \frac{LL}{cc}$.

303. PROPOSITIO. *Si diameter circuli sit ad circumferentiam ut* 1, *ad* c, *& chorda musicæ uniformiter crassæ longitudo sit* L, *pondus* P, *pondus quo tenditur* G *& penduli in cycloide oscillantis longitudo* D; *tempus quo chorda illa oscillationem unam perficit, erit ad tempus unius oscillationis penduli in ratione subduplicatâ* P L *ad* c c D G; *numerus verò oscillationum chordæ tempore unius oscillationis penduli erit* $c\sqrt{\frac{DG}{LP}}$.

Nam vis quâ particula P p in loco P, existens urgetur dicatur A, ejusdem pondus B & (*per dem.* 199) erit A ad G, ut P p ad P O, & ob uniformem chordæ crassitudinem est P ad B, ut L ad P p, & his rationibus conjunctis, $P \times A$ ad $B \times G$ ut L, ad P O; undè fit A ad B ut $G \times L$ ad $PO \times P$. Jam si particula P p vi motrice seu pondere A sollicitata oscillaretur in cycloide cujus perimeter tota æquaret duplam distantiam P S, tempus unius vibrationis in cycloide æquale esset tempori vibrationis unius chordæ musicæ seu particulæ P p; quia vis particulæ P p, in cycloide oscillantis semper decrescit in ratione distantiæ ejus à puncto infimo seu medio cycloidis, quemadmodum vis illa decrescit in ratione distantiæ a puncto S cum particula P p vibrationes suas agit in rectâ P S, & vis motrix particulæ in puncto cycloidis altissimo æqualis est vi motrici A, (*per cor. prop.* 51. *lib.* 1.). Si verò particula P p pondere suo absoluto B oscilletur in cycloide cujus perimeter tota sit 2 D, erit hujus penduli longitudo D (*per cor. prop.* 50. *lib.* 1.), & tempus unius vibrationis chordæ musicæ erit ad tempus unius oscillationis penduli in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione longitudinis P S ad longitudinem D, & subduplicatâ ratione ponderis B ad vim A (*cor.* 5. *prop.* 24. *lib.* 2.); id est, in ratione subduplicatâ quantitatis $PO \times PS \times P$, ad quantitatem GLD, atque ideò ob $PO \times PS = \frac{LL}{cc}$ (302.) in ratione subduplicatâ PL ad $ccGD$. Q. D. E.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.

Quia verò numerus vibrationum isochronarum quas chorda vel pendulum tempore quovis dato peragunt sunt inversè ut 303.
oscillationum tempora, erit numerus vibrationum quas chorda musica tempore unius oscillationis penduli prædicti peragit ad unitatem ut tempus unius oscillationis penduli ad tempus unius vibrationis chordæ, ideoque in ratione subduplicatâ $ccGD$, ad PL, & proinde numerus vibrationum quas chorda musica peragit eo tempore quo pendulum cujus longitudo est D semel oscillatur est $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$. Q. E. D.

304. *Cor.* 1. Si longitudo chordæ L digitis pedis Parisiensis exprimatur, numerus vibrationum quas chorda tempore minuti unius secundi peragit, erit $19{,}0341 \sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè. Nam pendulum cujus longitudo D est pedum Parisiensium 3 & linearum 8 $\frac{1}{2}$, seu digit. $\frac{881}{24}$, singulas oscillationes tempore minuti unius secundi absolvit (471. *lib.* 1.) & præterea ut 113 ad 355; ità diameter 1 ad circuli circumferentiam c, quæ proinde erit $\frac{355}{113}$. Quarè si loco D & c scribantur ipsorum valores in formulâ, erit $c\sqrt{\frac{GD}{PL}} = \frac{355}{113} \sqrt{\frac{881\,G}{24\,LP}} = 19{,}0341 \sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè.

305. *Cor.* 2. Si conferantur variarum chordarum oscillationes, quia quantitates c & D in formulâ $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$ datæ sunt; numeri vibrationum dato tempore peractarum erunt ut $\sqrt{\frac{G}{PL}}$, & ideò tempora qui-

bus

bus singulæ vibrationes fiunt ut $\sqrt{\frac{PL}{G}}$ (473 *lib.* 1.).

306. *Cor.* 3. Iisdem positis, si præterea chordæ sint homogeneæ, æquè crassæ & æquè tensæ, cum in eo casu pondus G datum sit & pondus P sit ut chordæ longitudo L, tempora quibus singulæ vibrationes fiunt, erunt ut $\sqrt{LL}$, seu ut chordarum longitudines; Quod experimentis confirmavit Clariss. *s'Gravesande* in Elem. Physices.

Scholion. Quæ de chordis vibrantibus huc usque diximus, ea ferè omnia, nonnullis tamen immutatis, mutuati sumus ex tractatu de methodo incrementorum Clariss. *Taylor.* Formulas nostris similes dedêre Celeberrimi Viri, *Sauveur* in Monumentis Acad. Paris. an. 1713. & *Daniel Bernoulli* tum in Actis Petropol. tum in Dissertatione de Propagatione Lucis, ab Academiâ regiâ Paris. præmio condecoratâ an. 1736.

307. PROPOSITIO. *Si numeri vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, sint inter se ut numeri* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, chordæ illæ tonos edent qui his notissimis vocibus significantur, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, *ut*, initio sumpto à tono graviori. Hæc propositio experimentis demonstrata est; nam nervi musici homogenei, æquè crassi eodemque pondere tensi, quorum longitudines sunt inversè ut numeri illi, tonos quos diximus edunt, & horum nervorum longitudines sunt inversè ut numeri vibrationum quas dato tempore absolvunt & directè ut singularum vibrationum tempora ideoque ut 180, 160, 144, 135, 120, 108, 96, 90: (306).

308. *Cor.* Sonorum differentia secundùm *grave* & *acutum*, à minori vel majori numero vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, pendet, & eò graviores sunt soni quò tardiores sunt singulæ chordarum vibrationes & contrà.

309. PROPOSITIO. *Corpora sonora homogenea & similia quorum latera homologa rationem habent inversam numerorum* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, *tonos edunt*, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, *ut*. Hanc propositionem probant experimenta quæ in campanis, cylindris & prismatibus homogeneis & similibus habuerunt Mersennus in harmoniâ universali & D. Carré in monum. Acad. Reg. an. 1709.

310. PROPOSITIO. *Dum corpus sonorum percutitur, tremulus particularum motus ex ictu & vi elasticâ creatus, remotis obstaculis, per superficiem corporis propagatur*: quod quidem leviora chartæ frustula superficiei corporis resonantis imposita, tremore suo indicant.

311. PROPOSITIO. *Campanæ figura ictu clavæ ità mutari oculis cernitur ut cum rotunda esset, fiat ovata & quandiù auditur sonus, alternis mutatur oscillationibus.*

312. *Cor.* Ex tribus ultimis propositionibus concludere licet, ut in chordis ita & in aliis corporibus resonantibus, tonos pendere à numero vibrationum seu undulationum quæ dato tempore peraguntur.

PRO-

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in medio verò non elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu suo urgebunt & propellent partes medii sibi proximas, & urgendo comprimient easdem & condensabunt; dein reditu suo sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & quâ ratione partes corporis hujus agitabant hasce medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, (f) aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condensatæ, ob motum suum progressivum, quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi à corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, (g) ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per medium propagati sese dilatabunt ad latera, per propositionem præcedentem;

(f) *Aliquæ earum ibunt* (294).

(g) * *Ob æqualia temporis intervalla.* 312. (300).

tem; & à corpore illo tremulo tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum supplet locum vis elasticæ.

Cas. 2. ([h]) Quod si medium non sit elasticum: quoniam ejus partes à corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi medium facillimè cedit, hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas à tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed in circulum eundo, pergit ad spatia quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut medium, recedendo à partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q. E. D.*

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad pressionem, per medium ambiens, secundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione solâ partium flammæ, sed à totius dilatatione derivari.

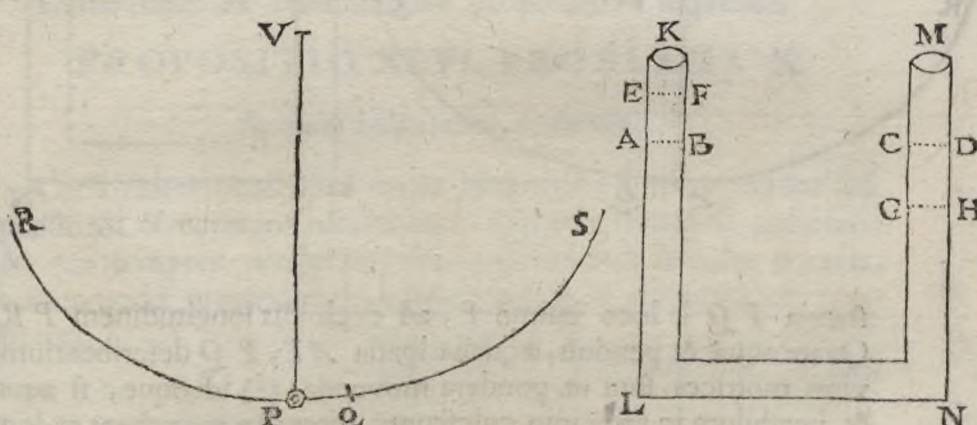
(h) * *Quod si medium* continuum sit & *non elasticum*, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

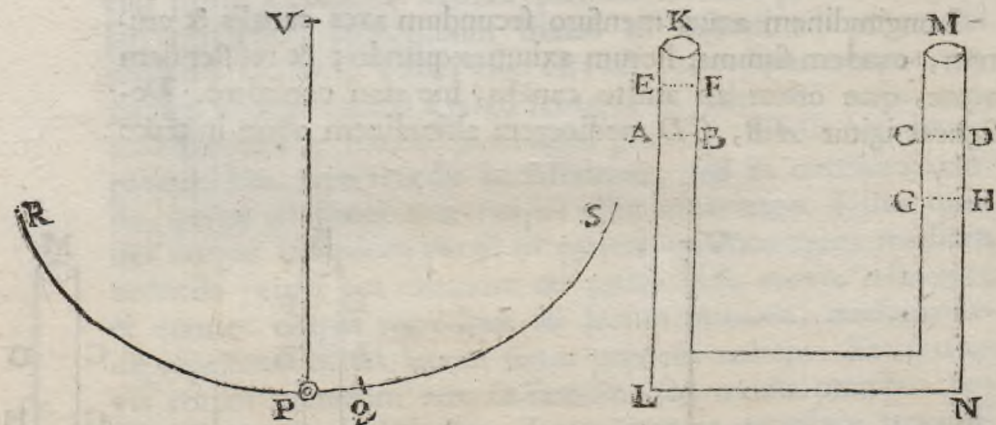
Si aqua in canalis cruribus erectis K L, M N *vicibus alternis ascendat & descendat; construatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.*

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando; & resistentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hic non considero. Designent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aquæ in crure



utroque; & ubi aqua in crure KL ascendit ad altitudinem EF, descenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH. Sit autem P corpus pendulum, VP filum, V punctum suspensionis, $RPQS$ cylois quam pendulum describat, P ejus punctum infimum, PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, est ex-

excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure KL ascendit ad EF, & in crure altero descendit ad GH, (i) vis illa est pondus duplicatum aquæ $EABF$, & propterea est ad pondus aquæ totius ut AE seu PQ ad (k) VP seu PR. Vis etiam, quâ pondus P in loco quovis Q acceleratur & retardatur in cycloide (*per corol. prop.* LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia PQ à loco infimo P, ad cycloidis longitudinem PR. Quare aquæ & penduli, æqualia spatia AE, PQ describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; (l) ideoque, si aqua & pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q. E. D.*



Co-

(i) * *Vis illa est pondus duplicatum &c.* Est enim vis illa pondus tam aquæ EABF, quam aquæ æqualis CGHD.

(k) * *Ad VP seu PR.* Semicycloïs PR, æqualis est longitudini penduli, (*per cor. prop.* 50. *lib.* 1.).

(l) 313. * *Ideoque si aqua & pendulum &c.* Id evidentissimum fit si pondus P quod, manente oscillationis unius tempore potest ad arbitrium assumi, capiatur æquale ponderi aquæ totius in canali; tùm enim vires motrices, massæ movendæ, & spatia describenda, ideòque & tempora quibus spatia illa describuntur, in canali

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſum* $6\frac{1}{9}$. aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. (m) Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicatâ.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.

Conſequitur ex conſtructione propoſitionis ſequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

Conſtituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

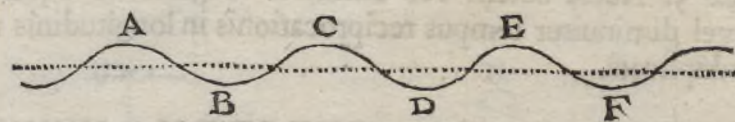
Un-

nali & in cycloide æquantur reſpectivè. Sed obſervandum eſt ſuperficiem A B, eſſe locum æquilibrii, ad quem cum aqua pervenit, nullâ amplius vi acceleratrice urgetur, ſed velocitate tantum acquiſitâ ulteriùs deſcendit vel aſcendit; ſicuti corpus pendulum *P* dum pervenit in locum cycloidis infimum *P* ſolâ velocitate acquiſitâ movetur. Undè quo tempore aqua deſcenſum unum abſolvit in crure alterutro canalis, eodem tempore pendulum oſcillationem unam ex deſcenſu & aſcenſu compoſitam perficit, duas verò oſcillationes abſolvit intereadum aqua è loco E deſcendit & ad eundem redit.

(m) * *Nam pendulum ped.* $3\frac{1}{18}$, ſeu ped. 3. & lin. 8. quamproximè (471. *lib.* 1). Clariſſ. *Hermanus* tom. 3. Comm. Acad. Petrop. motum aquæ in tubis crura quomodolibet ad baſim inclinata habentibus definivit. Rem generaliùs pertractavit Celeb. D. *Bernoullius* in Hydrodynamicâ. Hos authores, ſi lubet, adeat lector.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVI. PROBL. X.

Undarum latitudinem voco menſuram tranſverſam, quæ vel vallibus imis, vel ſummis culminibus interjacet. Deſignet *ABCDEF* ſuperficiem aquæ ſtagnantis, undis ſucceſſivis aſcendentem ac deſcendentem; ſintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ ſucceſſivum aſcenſum & deſcenſum, ſic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc al-



tiſſimæ ſunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, quâ partes altiſſimæ deſcendunt & infimæ aſcendunt, eſt pondus aquæ elevatæ; alternus ille aſcenſus & deſcenſus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, eaſdemque temporis leges obſervabit: & propterea (*per prop.* XLIV.) ſi diſtantiæ inter undarum loca altiſſima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F*, (n) æquentur duplæ penduli longitudini; partes altiſſimæ *A*, *C*, *E*, tempore oſcillationis unius evadent infimæ, & tempore oſcillationis alterius denuo aſcendent. Igitur inter tranſitum undarum ſingularum tempus erit oſcillationum duarum; hoc eſt, unda deſcribet latitudinem ſuam, quo tempore pendulum illud bis oſcillatur; ſed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla eſt, ideoque æquat undarum latitudinem, oſcillabitur ſemel. *Q. E. I.*

Co-

(n) * *Æquentur duplæ penduli longitudini.* Quoniam, ex dictis, unda percurrit latitudinem ſuam A C vel B D intereadum altitudo A transfertur in C, vel cavitas B in D, quod fieri non poteſt niſi aqua ab altitudine undarum deſcendat, & deindè ad eandem altitudinem aſcendat, & quia cavitas quæ eſt infrà aquæ quieſcentis ſuperficiem quam in figurâ exhibet linea punctis diſtincta, eſt circiter æqualis elevationi aquæ ſuprà eandem ſuperficiem quæ eſt æquilibrii locus, patet (313) totius aquæ movendæ longitudinem æqualem eſſe longitudini cavitatis vel elevationis aquæ infrà vel ſuprà locum illum æquilibrii, ac proinde cum longitudo cavitatis vel elevationis illius æqualis ſit diſtantiæ A B, vel B C, pendulum cujus longitulo eſt $\frac{1}{2}$ A B vel $\frac{1}{2}$ B C, ſemel

Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, (o) tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; ideoque tempore (p) minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ spatio pedes 11000 quamproximè.

(q) *Corol.* 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod partes aquæ rectà ascendunt vel rectà descendunt; sed ascensus & descensus ille (r) verius fit per circulum, ideoque tempus hâc propositione non nisi quamproximè definitum esse affirmo.

PROP.

semel oscillabitur eo tempore quo aqua ascendit, & iterum oscillabitur, intereadum aqua descendit (313.) atque ità oscillabitur bis quo tempore unda describit latitudinem suam. Quoniam igitur numeri oscillationum quas pendula eodem tempore peragunt, sunt in ratione subduplicatâ longitudinis pendulorum inversè (474. *lib.* 1.) pendulum cujus longitudo est A B C D, quadrupla longitudinis $\frac{1}{2}$ A B semel oscillabitur quo tempore unda latitudinem suam percurrit. In undis verò latioribus quæ altiùs non elevantur, linea curva A B C, vix differt à rectâ A C, quæ est undæ latitudo, & propterea in eo casu unda latitudinem suam describit, intereadum pendulum cujus longitudo est recta A C, semel oscillatur.

(o) * *Tempore minuti unius secundi* (471. *lib.* 1.)

(p) * *Tempore minuti unius primi.* Quia undarum datæ latitudinis velocitas æquabilis est (ex dem.) Si undæ latitudo data ped. $3\frac{1}{18}$, ducatur in tempus $60''$, factum $183\frac{1}{3}$ ped. erit spatium quod unda tempore minuti unius primi seu minutorum secundorum 60, describit & ducto rursus hoc numero $183\frac{1}{3}$ in $60'$, producetur spatium 11000 ped. quod unda tempore horæ unius conficit. 313.

(q) * *Cor.* 2. Undarum velocitates sunt ut earumdem latitudines directè & tempora quibus latitudines illas percurrunt inversè (5. *lib.* 1.) Sed tempora illa sunt in subduplicatâ ratione latitudinum undarum seu longitudinum pendulorum quæ eo tempore quo undæ latitudines suas describunt, semel oscillantur (472. *lib.* 1.). Undarum igitur velocitates sunt in ratione compositâ ex ratione latitudinum directè & ratione subduplicatâ earumdem latitudinum inversè, ideòque sunt in ratione subduplicatâ latitudinum directè.

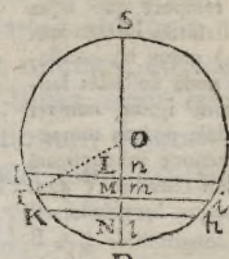
(r) * *Veriùs fit per circulum*, seu per arcum curvilineum qui magis accedit ad figuram arcûs circularis quàm ad figuram canalis rectilinei in quo aqua, rectà ascendit & descendit.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulſibus per fluidum propagatis, ſingulæ fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis penduli.

Deſignent AB, BC, CD, pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias; ABC plagam motus pulſuum ab A verſus B propagati; E, F, G puncta tria phyſica ([f]), medii quieſcentis in rectâ AC ad æquales ab invicem diſtantias ſita; Ee, Ff, Gg ſpatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco ([t]) ſingulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & EF, FG lineolas phyſicas ſeu medii partes lineares punctis illis interjectas, & ſucceſſivè tranſlatas in loca $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ & ef, fg. Rectæ Ee æqualis ducatur recta PS. Biſecetur eadem in O, centroque O & intervallo OP deſcribatur circulus $SIPi$. Per hujus circumferentiam totam cum partibus ſuis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipſius partibus pro-



por-

([f]) * *Medii quieſcentis*, id eſt, nondum agitati vibrationibus corporis tremuli, aut indè productis aëris pulſibus.

([t]) 314. * *Singulis vibrationibus eunt & redeunt.* Si corporis tremuli aut chordæ muſicæ oſcillantis particula incipiat moveri in E, & eundo ſecum transferat medii punctum E, in locum e, & deindè particula illa chordæ muſicæ vi propriâ & punctum e, medii inter e, & C compreſſi ac condenſati dilatatione redeant in locum E, unicus in medio elaſtico pulſus ſecundum directionem B C. producetur, & ſingulis aliis vibrationibus corporis tremuli vel chordæ muſicæ ex itu & reditu compoſitis, ſinguli excitabuntur pulſus (*prop.* 43.) atquè adeò pulſus latitudinem ſuam deſcribit intereadum punctum E, vibrationem unam ex itu & reditu per breviſſimum ſpatium E e, compoſitam, abſolvit.

portionalibus; sic ut completo tempore quovis PH vel $PHSh$, si demittatur ad PS perpendiculum HL vel hl, & capiatur $E\epsilon$ æqualis PL vel Pl, punctum physicum E reperiatur in ϵ. Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per ϵ ad e, & inde redeundo per ϵ ad E, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget (u) cum oscillante pendulo. Probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à causâ quâcunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentiâ $PHSh$ capiantur æquales arcus HI, IK vel hi, ik, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulsuum intervallum totum BC. Et demissis perpendiculis IM, KN vel im, kn; quoniam puncta E, F, G motibus similibus successivè agitantur, & vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur à B ad C; si PH vel $PHSh$ sit tempus ab initio motûs puncti E, (x) erit PI vel $PHSi$ tempus ab initio motûs puncti F, & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motûs puncti G; & propterea $E\epsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ erunt ipsis PL, PM, PN in itu punctorum vel ipsis Pl, Pm, Pn in punctorum reditu, (y) æquales respectivè. Unde $\epsilon\gamma$ seu $EG+G\gamma-E\epsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG-LN$, in reditu autem æqualis $EG+ln$. (z) Sed $\epsilon\gamma$ latitudo est seu ex-

(u) * *Cum oscillante pendulo.* (prop. 52. lib. 1.).

(x) * *Erit* P I *vel* P H S I. Quoniam puncta E, F, G, & alia deinceps, motibus similibus per medii compressionem & dilatationem communicatis successivè agitantur, pulsus per æqualia spatia E F, F G &c. æqualibus temporibus propagatur, ideòque tempus quo transfertur ab E ad F, vel ab F ad G, est ad tempus totum quo transfertur à B ad C, & quo singula puncta E, F, G vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas perficiunt, ut spatium E F vel F G ad spatium B C, in quâ ratione etiam est arcus H I, vel I K, ad totam circumferentiam P H S P, (*per hyp.*) quæ tempus totum quo pulsus à B ad C transfertur, exponit, & differentia inter tempus sumptum ab initio motûs puncti E & tempus sumptum ab initio motûs puncti F, est tempus illud quod pulsus transfertur ab E ad F. Quare *si* P H *vel* P H S h *exponat tempus ab initio motûs puncti* E, P I *vel* P H S I, *exponet tempus ab initio motûs puncti* F, cum H I vel h i exponat differentiam inter tempus ab initio motûs puncti E, & tempus ab initio similis motûs puncti E, &c. 314.

(y) * *Æquales respectivè.* (per prop. 52. vel 38. lib. 1.)

(z) * *Sed* $\epsilon\gamma$ *est latitudo seu expansio partis medii* E G, *in loco* $\epsilon\gamma$, quia punctum E translatum est in locum ϵ, & punctum G in locum γ.

expanſio partis medii EG in loco $\epsilon\gamma$; & propterea expanſio partis illius in itu eſt ad ejus expanſionem mediocrem, ut $EG - LN$ (a) ad EG; in reditu autem ut $EG + ln$ ſeu $EG + LN$ ad EG. Quare (b) cùm ſit LN ad KH ut IM ad radium OP, & (c) KH ad EG ut circumferentia $PHShP$ ad BC, id eſt, ſi ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulſuum BC, (d) ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG ut IM ad V: erit expanſio partis EG punctive phyſici F in loco $\epsilon\gamma$ ad expanſionem mediocrem, quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, (e) ut $V - IM$ ad V in itu, utque $V + im$ ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco $\epsilon\gamma$ (f) eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V + im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elaſticæ punctorum phyſicorum E & G in itu, ſunt ut $\frac{1}{V - HL}$ & $\frac{1}{V - KN}$ ad $\frac{1}{V}$; (g) & virium differentia ad medii vim elaſticam mediocrem, ut

$$\frac{HL - KN}{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN} \text{ ad } \frac{1}{V}.$$

Hoc eſt, ut

(a) * *Ad E G.* Nam cùm E, F, G ſint puncta tria medii quieſcentis ſeu motu impreſſo nondum condenſati vel rarefacti, expanſio medii in loco E G, mediocris ſeu quaſi media eſt inter minimam ipſius expanſionem in locis pulſuum denſiſſimis, & maximam in locis rariſſimis.

(b) 315. * *Cùm ſit L N ad K H.* Anguli ad centrum I O P menſura eſt arcus I P æqualis dimidio arcui I P i, ſeu K P k, & anguli ad circumferentiam K H k, menſura eſt etiam dimidius arcus K P k, & ideò anguli I O P & K H L, æquales ſunt. Hinc ſi ex puncto K, demiſſum intelligatur ad H L, perpendiculum æquale L N, hoc perpendiculum cum ordinatarum H L & K N differentiâ & cum arcu minimo K H triangulum conſtituet ſimile triangulo I O M. Eſt igitur L N ad K H, ut I M ad I O ſeu O P.

(c) * *Et K H ad E G.* (per hyp. ſuprà).

(d) * *Ut O P ad V.* Sunt enim circulorum peripheriæ P H S P & B C radiis ſuis O P & V proportionales.

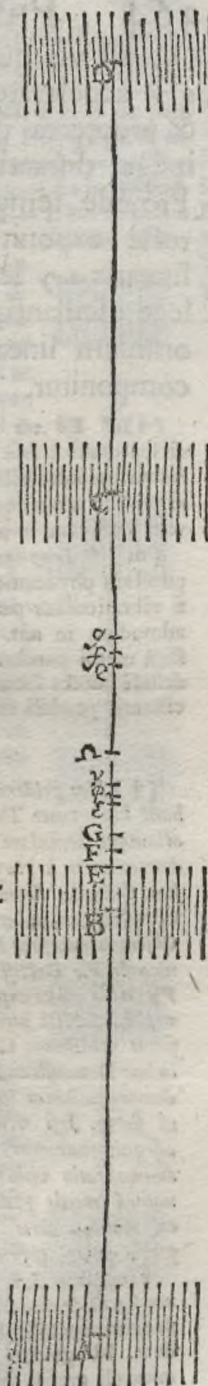
(e) * *Ut V — I M ad V.* Quia enim (*ex dem.*)) $LN = \frac{EG \times IM}{V}$, erit $EG - LN = \frac{V \times EG - IM \times EG}{V}$, & hinc $EG - LN$ ad EG ut $V - IM$ ad V. Et ſimiliter ob $LN = ln$, & $IM = im$, erit $EG + ln$ ad EG ut $V + im$ ad V.

(f) * *Eſt ad vim ejus elaſticam &c.* Hic ſupponit NEWTONUS vim elaſticam medii denſitati proportionalem, quam quidem hypotheſim in aëre noſtro, cæteris paribus, quamproximè veram eſſe experimentis conſtat. At, datâ medii maſsâ, denſitas eſt ut expanſio ſeu volumen inversè; Quarè cùm hic data ſit maſſa medii in volumine E G vel $\epsilon\gamma$, contenti, vis elaſtica eſt ut expanſio reciprocè & *ideò vis elaſtica puncti F, in loco $\epsilon\gamma$, &c.*

(g) * *Et virium differentia,* id eſt, ex-

$\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, sive ut $HL-KN$ ad V, si modo (ob ([h]) angustos limites vibrationum) supponamus HL & KN indefinitè minores esse quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium est ut $HL-KN$, hoc est (ob ([i]) proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, datasque HK & OP) ut OM; id est, si Ff bisecetur in Ω ut $\Omega\,\varphi$. ([k]) Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum physicorum ε & γ, in reditu lineolæ physicæ $\varepsilon\,\gamma$ est ut $\Omega\,\varphi$. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ)

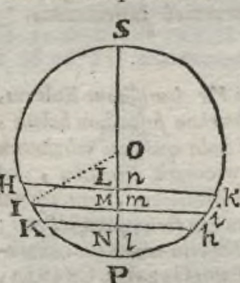
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.



315.

excessus vis elasticæ puncti E, suprà vim elasticam puncti G erit ad medii vim elasticam mediocrem &c.

(h) * *Ob angustos limites vibrationum.* Quoniam eo tempore quo punctum G vibrationem unam ex itu & reditu per brevissimum spatium E e compositam absolvit & quo pulsus transfertur à B ad C, innumeræ ferè medii particulæ per medii compressionem & dilatationem successivè agitantur, spatium illud E e, seu æquale P S, perbreve erit, si conferatur cum pulsuum intervallo B C, aut etiam cum radio V circuli qui circumferentiam habet æqualem B C. Rectè igitur supponitur, quantitate H L & K N, longè minores esse quantitates V.



(i) * *Ob proportionales.* Liquet (*per not.* 215.) esse H L — K N ad H K, ut est O M ad O I vel O P, undè H L — K N — $\frac{HK \times OM}{OP}$, & ideò ob datum radium OP, datumque arcum H K, qui est ad datam F G ut peripheria data PHSP ad datam BC, erit H L — K N ut variabilis O M. Sed F f = P S, F φ = P M, & proptereà si F f bisecetur in Ω, ut sit O P = F Ω, erit O M = $\varphi\,\Omega$. Est igitur H L — K N ut $\varphi\,\Omega$.

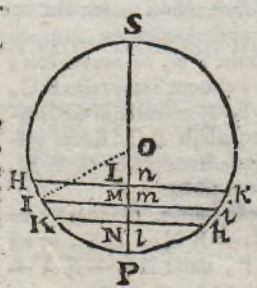
(k) * *Et eodem argumento.* Nam in reditu, vis elastica puncti F in loco $\varepsilon\,\gamma$ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco E G, ut $\frac{1}{V+\mathrm{im}}$, ad $\frac{1}{V}$, & vires elasticæ punctorum physicorum G & E, in loco $\varepsilon\,\gamma$, sunt ut $\frac{1}{V+\mathrm{hl}}$, & $\frac{1}{V+\mathrm{kn}}$, ad $\frac{1}{V}$, & virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem ut $\frac{\mathrm{kn}-\mathrm{hl}}{VV+V\times\mathrm{hl}+V\times\mathrm{kn}+\mathrm{hl}\times\mathrm{kn}}$, ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{\mathrm{kn}-\mathrm{hl}}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$ sivè ut k n — h l ad V, &c.

Zz 2

(l) eſt vis quâ interjecta medii lineola phyſica $\epsilon\,\gamma$ acceleratur in itu & retardatur in reditu ; & propterea vis acceleratrix phyſica $\epsilon\,\gamma$, eſt ut ipſius diſtantia à medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (*per prop.* XXXVIII. *lib.* I.) rectè exponitur per arcum PI; & medii pars linearis $\epsilon\,\gamma$ lege (m) præſcriptâ movetur, id eſt, lege oſcillantis penduli : eſtque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. *Q. E. D.* (†)

(l) * *Eſt vis quâ interjecta lineola.* Medium in ϵ & in γ vi ſuâ elaſticâ ſeſe dilatare in plagas oppoſitas C & B nititur, his viribus interjecta lineola phyſica $\epsilon\,\gamma$, ſeu punctum phyſicum ϕ, urgetur in utramque plagam, & exceſſu vis elaſticæ in ϵ, ſuprà vim elaſticam in γ, acceleratur in itu & retardatur in reditu.

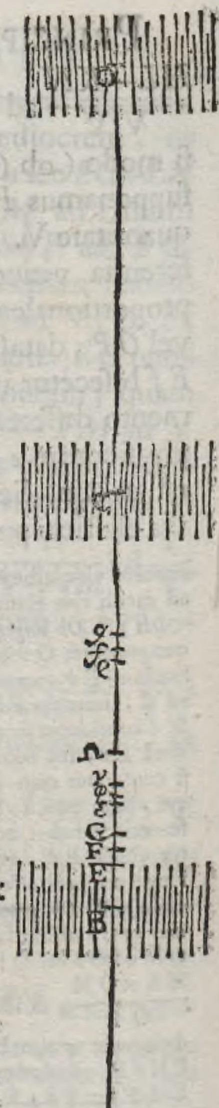
(m) * *Lege præſcriptâ movetur.* Demonſtratum eſt quod ſi punctum phyſicum E ad legem oſcillantis penduli moveatur, uti ſi vibrationibus partium corporis tremuli aut nervi muſici (quemadmodum in not. 314. expoſuimus) agitetur, tùm ſolâ vi elaſticâ medii punctum phyſicum F, & alia deindè puncta ſecundum eandem legem oſcillantis penduli ſucceſſivè movebuntur.



(†) *Jam pridem Vir Acutiſſimus* Eulerus, *hanc* NEWTONI *Theoriam ſuſpectam habuit, aliamque formulam dedit quâ ſoni celeritatem determinaret à* Newtonianâ *diverſam, ſed ſuæ formulæ demonſtrationem, aut vitium* Newtonianæ, *palam non fecit, quod ſciamus; Obſervationes ſuas hanc in rem nobis communicavit Vir Doctiſſimus* GABRIEL CRAMER, *Vir in his rebus expertiſſimus, ſagaciſſimique ingenii, quas ſuâ cum veniâ, publici juris facimus, quaſque Doctorum attentione digniſſimas credimus; Certè planiſſimè oſtendit aliquod ſubreptionis vitium in hac Demonſtrandi formâ, quam* NEWTONUS *adhibet, latere; ſcilicet demonſtrationem ipſam non ex rei naturâ, ſed ex Hypotheſi aſſumptâ fluere. Ipſi verò motus aëris ſecundùm methodum* Newtonianam *aſſequi conabimur, nam ipſam ejus propoſitionem veram eſſe, etſi ejus demonſtratio vitio quodam laboret, perſuaſum habemus, ſed eam ex naturâ motûs puncti Elaſtici ſonori eſſe deducendam, potius quàm ex motibus aëris, qui variis modis pro ratione agitationis ipſi impreſſæ peragi poſſent. Hæc autem ſunt Viri Illuſtriſſimi verba.*

Propoſitio XLVII. Lib. II. Princip. Philoſ. NEWTONI, minus firmâ demonſtratione nititur, ut ex eo patet, quod ſi diverſæ prorſus concluſioni demonſtrandæ applicetur, eodem ſucceſſu gaudeat. Id ego cùm pluribus diverſis tentaſſem modis, lubet unum, exempli gratiâ, apponere. Sit, verbi cauſâ, hoc Theorema à *Newtoniano* omnino diverſum, eâdem tamen Demonſtratione munitum.

Pulſi-



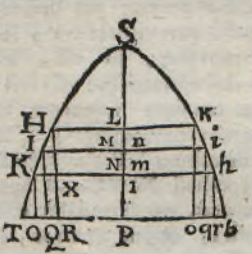
Pulſibus per Fluidum elaſticum propagatis, ſingulæ Fluidi particulæ, motu uniformiter retardato & accelerato euntes & redeuntes, oſcillantur pro lege Gravis aſcendentis & deſcendentis.

Deſignent AB, BC, CD, &c. pulſuum ſucceſſivorum æquales diſtantias, ABC plagam motus pulſuum ab A verſus B propagati, E, F, G, puncta tria Phyſica medii quieſcentis in recta BC ad æquales diſtantias ſita, Ee, Ff, Gg, ſpatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu uniformiter retardato moventur; ε, φ, γ, loca quævis intermedia illorum punctorum, & EF, FG lineolas phyſicas ſeu partes medii lineares punctis illis interjectas & ſucceſſivè tranſlatas in loca εφ, φγ, & ef, fg. Rectæ Ee æqualis ducatur recta PS, quâ tanquam axe deſcribatur parabola SHIK. Per baſim Tt exprimatur totum tempus unius vibrationis, & per ejus partes, partes temporis proportionales exprimantur, ſic ut completo tempore quovis TR, vel Tr, ſi erigatur normalis RH aut rh, & capiatur Eε æqualis RH vel PL, aut rh vel Pl, punctum Phyſicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E eundo ab E per ε ad e, & inde redeundo per ε ad E, iiſdem retardationis & accelerationis gradibus vibrationem unam peraget cum aſcendente & deſcendente Corpore gravi. Probandum eſt quod ſingula medii puncta phyſica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à cauſa quâcunque cieri, & videamus quid inde ſequatur.

In rectâ Tt, ſumantur æquales partes OQ, QR, vel oq, qr, eam habentes rationem ad rectam totam Tt, quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulſuum intervallum BC; Et erectis OK, QI, RH, vel ok, qi, rh: demiſſis etiam ſi placet KN, IM, HL; Rn, im, hl; quoniam puncta E, F, G, motibus ſimilibus ſucceſſive agitantur, & vibrationes ſuas integras itu & reditu compoſitas interea peragunt dum pulſus transfertur ex B ad C, ſi TR vel Tr ſit tempus ab initio motûs puncti E, erit TQ vel Tq tempus ab initio motûs puncti F, & TO vel To, tempus ab initio motûs puncti G; & propterea Eε, Fφ, Gγ, erunt ipſis RH, vel PL, QI vel PM, & OK vel PN in itu punctorum, vel ipſis rh aut Pl, qi aut Pm, & ok vel Pn in reditu æquales reſpective: Unde εγ ſeu EG + Gγ — Eε in itu punctorum æqualis erit EG — LN: in reditu autem æqualis EG + ln. Sed εγ latitudo eſt ſeu expanſio partis medii EG in loco εγ, & propterea expanſio partis illius in itu, eſt ad ejus expanſionem mediocrem ut EG—LN ad EG; in reditu autem ut EG + ln ſeu EG + LN ad EG. Quare cum ſit LN ſeu HX ad KX ſeu OR, ut LM ad ſemiparametrum Parabolæ, & OR ad EG ut Tt ad BC, id eſt (ſi ponatur V ad ſemiparametrum ut BC ad Tt, vel ſi ſit Tt æqualis ſemiparametro & V æqualis BC) ut ſemiparameter ad V, & ex æquo LN ad EG ut LM ad V; erit expanſio

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

315.



partis EG punctive Phyſici F in loco εγ ad expanſionem mediocrem quam pars illa habet in loco ſuo primo EG, ut V — IM ad V in itu, utque V + im ad V in reditu. Unde vis elaſtica puncti F in loco εγ eſt ad vim ejus elaſticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in

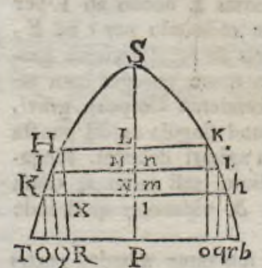
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

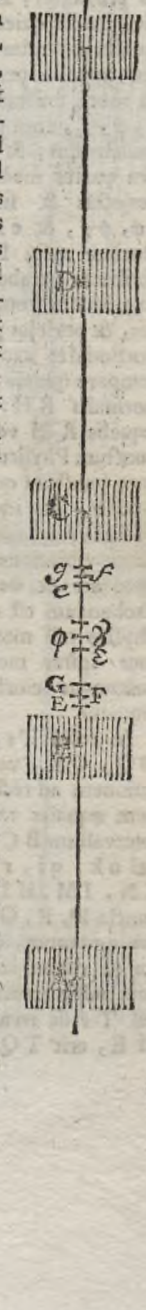
itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento itus punctorum physicorum E & G in itu sunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$, & virium differentia ad vim elasticam mediocrem, ut $\frac{KN-HL}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{KN-HL}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$ sive ut KN − HL ad V, si modo (ob angustos limites Vibrationum) supponamus HL & KN indefinite minores esse quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium est ut KN − HL seu KX, seu OR, hoc est, ob proportionales OR, EF, & Tt, BC, (dataſque EF, Tt & BC) constans. Et eodem argumento, differentia virium punctorum physicorum ε & γ in reditu lineolæ physicæ $\varepsilon\gamma$ est etiam constans. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ) est vis qua interjecta medii lineola physica acceleratur aut retardatur, & propterea vis acceleratrix lineolæ physicæ $\varepsilon\gamma$ est constans. Propterea tempus rectè exponetur per ordinatam IM & medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege præscripta movetur, id est, lege ascendentis descendentisque Gravis, estque par ratio omnium linearum ex quibus medium totum componitur. Q. E. D.

Sed (quod sanè mirum) Prop. XLIX. in quâ ex sua hypothesi NEWTONUS Soni velocitatem computat, eandem dabit conclusionem in nostra, &, ut arbitror, in aliâ quâcunque. Sic

Fingamus medium ab incumbente pondere, pro more aëris nostri, comprimi, sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens & cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi in quo pulsus propagatur. Et quo tempore corpus cadet ex altitudine æquali dimidio ipsius A eodem tempore pulsus percurret spatium æquale toti altitudini A. (Id quod congruit cum Corol. 1. dictæ Prop. XLIX.)

Nam stantibus quæ in Propos. XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica singulis vibrationibus describendo spatium PS urgeatur in itu & reditu à vi Elastica quæ ipsius ponderi, æquetur, peraget semivibrationem quo tempore corpus cadet ex altitudine PS, adeoque vibrationem, quo tempore corpus grave caderet ex altitudine 4 PS. Quare, cùm tempora descensus sint in subduplicata ratione longitudinum percursarum, fiet tempus vibrationis unius ad tempus descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$A, in subduplicatâ ratione longitudinis 4 PS ad $\frac{1}{2}$A, seu 8 PS ad A. Sed vis quâ in singulis punctis urgetur particula EG erat ad ejus vim mediocrem elasticam, ut KN − HL seu KX vel OR ad V, & vis illa mediocris, hoc est pondus incumbens quo lineola EG comprimitur, est ad pondus lineolæ EG, ut A ad EG, adeoque ex æquo, vis quâ lineola EG in singulis punctis urgetur, est ad ejus pondus, ut OR × A ad EG × V, seu ut semiparameter in A, ad VV (est enim OR ad EG ut Tt ad BC, atque ideo ut semiparameter ad V) vel ut 8 PS × A ad BC², ob Vq ad BCq ut semiparametri





quadratum ad Tt quad. (atque ideo ut 8 PS ad semiparametrum.) Quare cùm tempora quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa Elastica, ad tempus unius vibrationis urgente vi vi ponderis, in subduplicatâ ratione BC^2 ad $8PS+A$. Atque adeo ad tempus descensûs ex altitudine $\frac{1}{2}A$, in subduplicatâ ratione BC^2 ad $8PS+A$ & subduplicata ratione $8PS$ ad A, hoc est in ratione integra BC ad A. Sed tempore unius vibrationis pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium BC est ad tempus descensûs ex altitudine $\frac{1}{2}A$, ut BC ad A. Tempus autem quo pulsus percurrit spatium A est ad tempus quo percurrit spatium BC, ut A ad BC, adeoque æquale tempori descensus ex altitudinè $\frac{1}{2}A$.

Hîc notandum, quod absurda sit, & facilè refutanda hypothesis hîc assumpta, quod nempe pulsus propagetur, particulis euntibus & redeuntibus pro lege gravis ascendentis & descendentis. Verùm id ipsum est quod Demonstrationem NEWTONIANAM evertit, ostendendo nimirum eam ipsam absurdæ hypothesi probandæ æque inservire.

Hactenus Vir Doctissimus; sequuntur ea quibus restitui posse Newtonianam *demonstrationem credimus.*

De Motibus in fluido Elastico genitis.

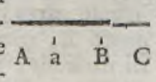
1. *Hypothesis.* Suppono medium Elasticum constare punctis, quantitate exiguâ sed finitâ à se dissitis, & vi repulsivâ donatis quæ distantiæ illorum punctorum sit reciproce proportionalis; nec ad alia puncta præter ea quæ immediatè proxima sunt sese extendit: Hoc enim modo quæcumque sit, partium medii Elastici natura, satis feliciter repræsentantur effectus qui ex eorum Elaterio pendent.

2. *Cor.* 1. Medii Elastici status naturalis est ut puncta ejus Elastica à se mutuò æqualiter distent.

3. *Cor.* 2. Puncta elastica velocitatem finitam suscipere possunt vel per immediatum contactum corporis moti, velocitate suâ finitâ punctum elasticum urgentis vel per actionem continuatam vis repulsivæ punctorum elasticorum si ab unâ parte fortior sit quàm ab aliâ. Reliquas causas motus, ut gravitatem, vires centrales &c. hic non consideramus. DE MOTU CORPORUM.

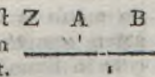
4. *Theor.* 1. Si velocitas finita quomodocumque excitetur in puncto Elastico, distantiæ ejus à proximo puncto versus quod movetur minuetur finitâ quantitate antequam in reliquo medio factus sit ullus motus ullaque compressio: Sint A, B, C, tria puncta medii Elastici æquidistantia moveatur A versus B velocitate finitâ, & tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum primi ordinis Aa, Vis motrix puncti B erit differentia virium repulsivarum puncti A & C, est autem vis repulsiva puncti A ubi pervenit in a, ad vim puncti C (si immotum supponatur) ut BC ad Ba, & dividendo vis motrix puncti B, ad vim repulsivam puncti C, ut $BC - Ba$ $(=Aa)$ ad Ba. Sed Aa, est infinite parvum ex Hypothesi & Ba est finita quantitas, ergo vis motrix puncti B, est infinite parva vis respectu vis repulsivæ puncti C, quæ vis repulsiva pro ipsa vi naturali elaterii assumi potest; Vis autem Elasticitatis est ex genere pressionum, tempore infinitè parvo velocitatem infinitè parvam generaret, quæ velocitas infinite parva durante tempore infinitè parvo, spatium infinitè parvum secundi ordinis describere faceret: Ergo siquidem vis motrix puncti B hujus vis respectu est infinitè parva, tempore infinitè parvo spatium infinitè parvum duntaxat tertii ordinis describere faceret; nullus ergo motus in puncto B generabitur nisi spatium descriptum Aa sit finita quantitas, nulla ergo erit compressio inter puncta B & C. Q. E. D.

LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII. 315.

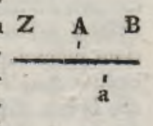


5. *Cor.* 1. Nullus ergo motus ex puncto medii Elastici in punctum proximum transfertur nisi post tempus finitum, nam spatium finitum Aa, nonnisi tempore finito percurri potest per velocitatem finitam.

6. *Cor.* 2. Et velocitas finita in puncto Elastico excitata non mutabitur nisi post tempus finitum & postquam quantitate finitâ processerit. Sint enim medii particulæ Z, A, B, procedat punctum A velocitate finitâ utcumque in id punctum



ctum producta, & tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum A a, vis quâ sistetur ea velocitas orietur ex differentia virium Elasticarum puncti Z & puncti B, estque vis puncti B ad vim puncti Z ut A B + A a ad A B — A a, & dividendo. Vis sistens punctum A ad vim puncti Z, ut 2 A a ad A B — A a, sed A a est infinitè parvum respectu quantitatis A B — A a, ergo, vis sistens punctum A est infinitè parva, respectu vis puncti Z, quæ est vis elaterii naturalis, ideo (eodem modo ac in Theorematis demonstratum fuit) probabitur, vim illam tempore infinitè parvo spatium infinitè



parvum tertii ordinis producturam: Quare etiamsi singula puncta à parte B posita æquali vi agerent eorumque numerus infinitus foret, vires illæ omnes non nisi spatium infinitè parvum secundi ordinis infinitè parvo tempore ex spatio A a eodem tempore descripto detraherent, maneret itaque idem, velocitates ergo puncti A non mutabitur ex actione omnium punctorum medii Elastici, nisi post tempus finitum & postquam finita quantitate processerit.

7. *Cor.* 3. Si considerentur innumera puncta Elastica ordine in lineâ rectâ posita,

A B C D E &c.

nec attendatur ad alia quæ circumquâque solidum spatium constituunt, si unum velocitate finitâ quâcumque ex causâ urgeatur, quæ constans in eo maneat, quoddam tempus finitum requiretur ut eadem velocitas in proximo puncto excitetur, paulo longius tempus ut in tertio producatur, sicque deinceps, nam per Cor. 1. nullus motus ex puncto medii Elastici in punctum proximum transfertur nisi elapso finito tempore, velocitas ergo primi puncti ad secundum non transit nisi post finitum tempus ab initio motus primi puncti & velocitas secundi puncti ad tertium non transit nisi post finitum tempus ab initio motûs secundi ejus puncti. Breviori autem tempore excitari debet data velocitas in secundo puncto per actionem continuatam ab initio motûs primi puncti, quàm in tertio per actionem continuatam ab initio motûs puncti secundi: cùm enim velocitas primi puncti sit finita & æquabilis, compressio exinde orta ab initio ejus motûs est major quàm compressio quæ per motum secundi puncti ab initio ejus motus acquiritur, siquidem ad celeritatem primi puncti nonnisi per gradus pervenit, ergo vis motrix quæ urget secundum punctum ab initio, fortior est quam ea qua urgetur tertium punctum ab initio, ergò tertium punctum datam illam celeritatem tardius acquiret, & pari ratiocinio, cum vis motrix secundi puncti sub initio fortior sit quam vis motrix tertii, compressio inter secundum & tertium punctum major erit sub initio quàm inter tertium & quartum; unde vis motrix quæ urget tertium punctum sub initio, fortior est quàm ea quâ urgetur quartum punctum; Ergo cùm punctum sequens aliqualem velocitatem suscipere non possit nisi postquam punctum præcedens spatium finitum descripserit, & longiori tempore ab initio motûs suscepti datam velocitatem possit suscipere, liquet quod ea data velocitas nonnisi successivè ad successiva medii Elastici puncta pertingit.

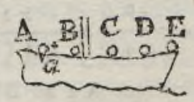
8. *Schol.* Hinc patet discrimen inter motum in medio Elastico excitatum & motum qui excitatur in medio non Elastico cujus partes contiguæ sunt, in tali enim medio, pressio cuidam particulæ applicata ad omnes partes in directum positas, aut divaricantes, puncto temporis extendi debet; Motus verò instanti in circulum propagari debet; At in medio Elastico, Pressio ab uno puncto ad alterum non continuatur nisi per accessum punctorum medii, sive per realem motum, qui antrorsum propagetur, & post tempus finitum à puncto primum moto ad reliquas partes fluidi successivè perveniat.

9. PROB. Si punctum medii Elastici finitâ velocitate moveatur quæ constans maneat, definire motum punctorum sequentium in lineâ rectâ positorum, omissis aliis sphæricè circumquaque positis.

Primus Casus. Sint ordine puncta A, B, C, D, &c. fingatur ea omnia ad æquales distantias in navi posita, & punctum B ita adhærere malo ut ex ejus motu, navis motum suscipiat & reliqua puncta vehat; Recipiat verò punctum A velocitatem finitam

quæ

quæ constans maneat relatè ad navis punctum in quo versabatur, & ponatur primo eam versus B tendere; ex accessu puncti

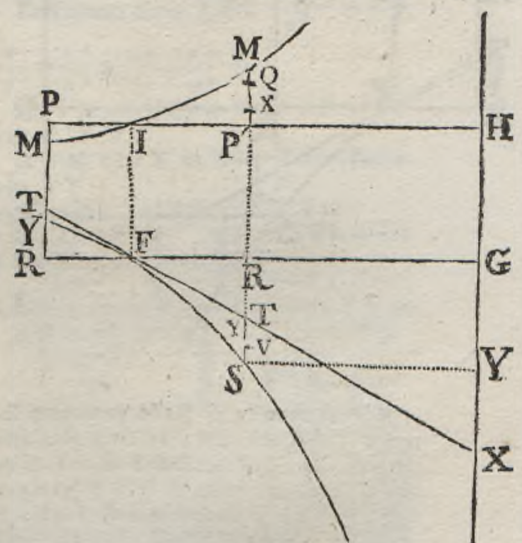


A versus B vis repulsiva particulæ A fortior fiet vi repulsivâ particulæ C, quare ex differentia virium nascetur vix motrix particulæ B; Procedat enim A ad B quantitate A a, erit vis particulæ C in B, ad vim particulæ A in B, ut a B ad B C sive A B (quia particularum intervalla A B, B C initio erant æqualia) & dividendo, vis particulæ C, ad differentiam virium quæ est vis motrix puncti B ut a B ad A B — a B sive A a, sed vis particulæ C est vis ipsa elaterii in statu naturali, ex Hypot. Ergo Vis elaterii est ad vim moventem punctum B, ut a B ad A a. Repræsentet itaque I H tempus quo distantia A B punctorum elasticorum per velocitatem datam puncti A percurritur, dicaturque illud tempus a, ducatur deorsum ad angulos rectos linea H G quæ vim elasticam singulæ particulæ medii in statu naturali designet, ductaque F G parallela I H, asymptotis F G & G H & dignitate æquali $a \times$ H G describatur Hyperbola, transibit per punctum I, (siquidem I F $=$ H G & F G $=$ I H $= a$; ideoque I F $\times$ F G $=$ H G $\times a$) & si I P repræsentet tempus quo durante A motum est, dicaturque x, Dico quod P M repræsentabit vim motricem puncti B eo temporis momento. Erit enim ex naturâ Hyperbolæ, G R : G F $=$ F I (H G) : R M & dividendo G R (H P) : F R (I P) $=$ H G : P M; spatia verò uniformiter descripta sunt ut tempora; ergo A B : A a $=$ I H : I P & dividendo a B : A a $=$ H P : I P, sed a B ad A a ut vis elaterii ad vim motricem puncti B; ergo HP : IP $=$ HG : PM $=$ vis elaterii ad vim motricem puncti B, sed H G repræsentat vim elaterii, ergo P M ubique repræsentat vim motricem puncti B.

Repræsentabit ergo etiam linea P M velocitatem momento P genitam, & area I P M totam velocitatem à puncto B acquisitam tempore I P sive tempore quo percurritur A a à puncto A.

Describatur verò ex puncto F Logarithmica cujus axis sit linea H G producta, subtangens linea quævis G X quæ dicatur s, ductâque ex puncto P lineâ P T S dico quod linea T S repræsentabit velocitatem tempore I P acquisitam & area F T S spatium à puncto B descriptum. DE MOTU CORPORUM.

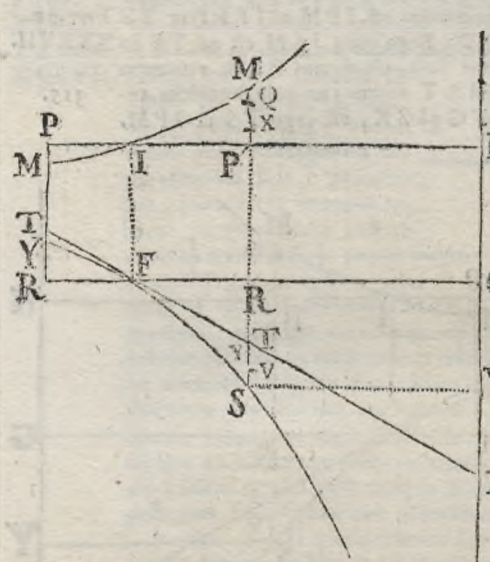
Est enim (*per nat. Logarith.*) area IFRM, ad Rect. I F G H ut R S ad G X, & Rect. I F G H ad Rect. I F R P ut F G ad F R ut G X ad R T, ideoque ex æquo area I F R M ad Rect. I F R P ut R S ad R T, & dividendo, est I P M ad I F R P ut T S ad R T; Ergo area I P M est ad T S in Ratione datâ, ob datum P R & rationem F R ad R T datam, ut pote æqualem rationi F G ad G X, est ergo T S ut I P M, LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII. 315.



sive ut velocitas puncti B, & cùm perpendicula inter ordinatas T S sint æqualia momentis temporis in linea I P sumptis, area F T S erit ut spatium à puncto B percursum.

Eodem modo constabit, quod si vis elastica ageret more gravitatis tempore a, velocitas quam eo tempore generaret, designaretur per subtangentem s, & spatium descriptum foret $\frac{a\,s}{z}$, dicatur verò m velocitas data puncti A, data erit ratio s ad m, intervallum particularum A B erit $m\,a$, & spatium A a velocitate datâ percursum est $m\,x$, notandum verò est quod ea velo-

velocitas s fit plusquam dupla velocitatis globi tormentarii, unde liquet quod in casibus sequentibus ubi velocitas puncti A longe minor velocitate globi tormentarii est intelligenda; quantitas $\frac{m}{s}$ est fractio satis parva.



Ad calculum verò facile revocatur linea F T S & area T S; 1°. enim cùm subtangens sit s, ordinatarum F G, S Y differentia sit x, area tota F G S Y (*ex nat. Log.*) est $s\,x$, intervallum R S est $s \times \overline{\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$ &c. Rectang. R G × R S $= \overline{a - x} \times s \times \overline{\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$ &c. & quoniam est F G (a) : G X (s) = F R (x) : RT est R T $= \frac{sx}{a}$ & Triang. F R T $= \frac{sx^2}{2a}$. Detrahantur ergo Rectang. RG×RS & Tr. FRT ex area F G S Y remanet area F T S $= s\,x - \overline{sa - sx} \times \overline{\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$ &c. $- \frac{sx^2}{2a} = sx \times \overline{1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}}$ &c. $- sx \times \overline{1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}}$ &c. $- \frac{sx^2}{2a} = \frac{sx^2}{a} \times \overline{\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}}$ + &c. erit itaque A a ad B b, ut $m\,x$, ad $\frac{sx^2}{a} \times \overline{\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}}$ &c. vel ut m ad $\frac{sx}{a} \times \overline{\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}}$ &c. erit verò recta T S = R S − R T $= \frac{sx}{a} \times \overline{1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}}$ &c. $- \frac{sx}{a} = \frac{sx}{a} \times \overline{\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}}$ &c. ideoque velocitas data puncti A erit ad velocitatem puncti B ut m ad $\frac{sx}{a} \times \overline{\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}}$.

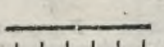
Coroll. Si quæratur in hac Hypothesi quo tempore & spatio descripto punctum B velocitatem puncti A obtineat, fiat $m = \frac{sx}{a} \times \overline{\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}}$ &c. sed cum spatium A a sit ad B b ut m ad $\frac{sx}{a} \times \overline{\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}}$ &c. erit A a ad B b ut $\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$ &c. ad $\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$ &c. cumque primus terminus, primæ seriei sit accuratè triplus primi termini alterius seriei, reliqui verò plusquam tripli; Punctum A totam suam celeritatem puncto B communicat antequam id punctum B tertiam partem ejus spatii descripserit quod descripsit punctum A.

Tempus verò x exprimetur per Radices hujus æquationis $0 = \frac{ma}{s} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3}$ &c. Ubi liquet quod quando $\frac{m}{s}$ est fractio, tunc x est minus quam a, & series est Convergens, ideoque ex primo termino & proximo assumptis erit $x = a\sqrt{\frac{2m}{s}}$; rem accuratius expendere isto in casu, qui merè fictitius est, nihil est necesse.

Casus secundus. Si A moveatur uniformiter & acceleret punctum B quod etiam acceleret punctum C (nullâ habitâ ratio-

ne

nel motûs puncti D) erit in hoc Casu vis repulsiva A ad vim repulsivam C ut A B — B b + C c ad A B — A a + B b & differentia virium sive vis motrix puncti B ad vim repulsivam puncti C, ut A a — 2 Bb + Cc ad AB — Aa + Bb; est præterea vis repulsiva puncti C ad vim Elaterii ut AB ad AB — Bb + Cc; & denique vis Elastica est ad vim moventem punctum B in primo casu ut A B — A a ad A a; ideoque ex æquo vis vera motrix puncti B ad ejus vim in primo casu ut


A a B b C c D &c.

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{Aa-2Bb+Cc}\\ \mathrm{AB}\\ \mathrm{AB-Aa}\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}\mathrm{AB-Aa+Bb}\\ \mathrm{AB-Bb+Cc}\\ \mathrm{Aa}\end{matrix}\right\}$$

In eâdem autem Hypothesi vis motrix puncti C, hoc modo determinatur, est vis repulsiva puncti B ad vim repulsivam puncti D ut D c ad b c sive ut A B — C c, ad A B — B b + C c, ergo vis motrix puncti C ad vim repulsivam puncti D, ut B b — 2 C c ad A B — B b + C c.

Hæc vis repulsiva puncti D est ad vim Elasticam ut A B ad A B — C c, denique vis Elastica ad vim moventem punctum B in primo Casu, ut A B — A a, ad A a, ideoque ex æquo vis motrix puncti C, ad vim moventem punctum B in primo Casu ut

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{Bb-2Cc}\\ \mathrm{AB}\\ \mathrm{AB-Aa}\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}\mathrm{AB-Bb+Cc}\\ \mathrm{AB-Cc}\\ \mathrm{Aa}\end{matrix}\right.$$

Ut verò determinetur motus puncti B in isto casu (qui pro vero haberi potest ob exiguitatem motûs puncti D qui negligitur) concipiatur P M ad P Q ut

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AB-Aa+Bb}\\ \mathrm{AB-Bb+Cc}\\ \mathrm{Aa}\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}\mathrm{Aa-2Bb+Cc}\\ \mathrm{AB}\\ \mathrm{AB-Aa}\end{matrix}\right.$$

& idem P M ad P X ut

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AB-Bb+Cc}\\ \mathrm{AB-Cc}\\ \mathrm{Aa}\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}\mathrm{Ab-2Cc}\\ \mathrm{AB}\\ \mathrm{AB-Aa}\end{matrix}\right.$$

curvæ quæ transibunt per Q & X erunt loci virium motricium puncti B & puncti C, areæ I P Q, I P X erunt ut velocitates per illas vires dato tempore I P genitæ, & si sumantur ordinatæ T V & T Y, tales ut T S, T V, T Y sint ut areæ I P M, I P Q, I P X, areæ F T V, F T Y erunt ut spatia B b & C c: sit ergo

$\mathrm{TV} = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5$ &c.

& $\mathrm{TY} = Ox^4 + Pa^5 + Ra^6$ &c.

erit $\mathrm{TV}\,dx = Ax^2dx + Bx^3dx + Cx^4dx + Dx^5dx$ &c.

$\mathrm{TY}\,dx = Ox^4dx + Px^5dx$

Unde integrando, est area $\mathrm{FTV} = \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$ &c. $= \mathrm{Bb}$

& $\mathrm{FTY} = \frac{Ox^5}{5} + \frac{Px^6}{6}$ &c. $= \mathrm{Cc}$

fluxio autem $\mathrm{TV} = 2Axdx + 3Bx^2dx + 4Cx^3dx + 5Dx^4dx$ &c. 315.

& fluxio $\mathrm{TY} = 4Ox^3dx + 5Px^4dx$ &c.

Erat autem fluxio $\mathrm{TS} = \frac{sxdx}{a^2} \times 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4}$ &c.

Sed P M ad P Q, ut fluxio T S ad fluxionem T V

& P M ad P X ut fluxio T S ad fluxionem T Y

ergo fluxio T S ad fluxionem T V ut

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AB-Aa+Bb}\\ \mathrm{AB-Bb+Cc}\\ \mathrm{Aa}\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}\mathrm{Aa-2Bb+Cc}\\ \mathrm{AB}\\ \mathrm{AB-Aa}\end{matrix}\right.$$

& eadem fluxio T S ad fluxionem T Y ut

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{AB-Bb+Cc}\\ \mathrm{AB-Cc}\\ \mathrm{Aa}\end{matrix}\right\}\text{ ad }\left\{\begin{matrix}\mathrm{Bb-2Cc}\\ \mathrm{AB}\\ \mathrm{AB-Aa}\end{matrix}\right.$$

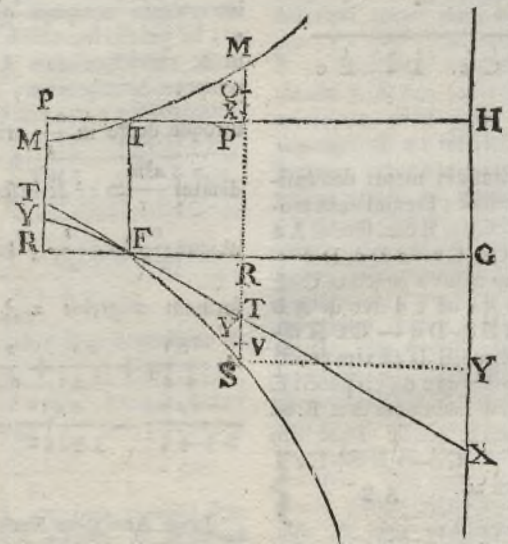
In his proportionibus multiplicatis extremis & mediis & terminorum collatione factâ, invenientur lineæ T V & T Y & areæ F T V & F T Y, sicque tempora quibus acquiruntur velocitates T V, T Y & spatia descripta dum acquiruntur, obtineri poterunt, Calculum istum prolixissimum in compendio exhibebo; primò invenitur quod fluxio $\mathrm{TS} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AB - Aa} = sm^2xdx$, est præterea $\mathrm{Aa - 2Bb + Cc}$ æquale $mx + * - \frac{2A}{3}x^3 - \frac{2B}{4}x^4 - \frac{2C-O}{5}x^5 - \frac{2D-P}{6}x^6$ &c. estque $\mathrm{Bb - 2Cc} = \frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{4}x^4 + \frac{C-2O}{5}x^5 + \frac{D-2P}{6}x^6$ &c. quæ series multiplicatæ per sm^2xdx dant facta extremorum in utrâque proportione.

 Ut

Ut habeantur facta mediorum, in primâ proportione est $\overline{AB - Bb + Cc} \times Aa =$
$$mx \times ma + * + * - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} - \frac{C-O}{5}x^5 - \frac{D-P}{6}x^6;$$ ducatur in $AB - Aa + Bb =$
$$ma - mx + * + \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$$ fit
$$mx \times m^2a^2 - m^2ax + * + * + \frac{mAx^4}{3} + \frac{mBx^5}{4} + \frac{C-O}{5}mx^6 \text{ \&c.}$$
$$\frac{Omax^5}{5} + \frac{Pmax^6}{6}$$
$$- \frac{A^2x^6}{3 \times 3}$$

Quod ducatur in fluxionem $TV =$
$$dx \times 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + 5Dx^4 + 6Ex^5 + 7Fx^6$$ factum erit
$$mxdx \times 2m^2a^2Ax - 2m^2aAx^2 - 3m^2aBx^3 + 4m^2aCx^4 + \frac{2mA^2x^5}{3} + \frac{18mBAx^6}{3 \times 4}$$
$$+ 3m^2a^2Bx^2 + 4m^2a^2Cx^3 + 5m^2a^2Dx^4 - 5m^2aDx^5 + \frac{2maAOx^6}{5} \text{ \&c.}$$
$$+ 6m^2a^2Ex^5 - 6m^2aEx^6$$
$$+ 7m^2a^2Fx^6$$
termini omnes hujus seriei dividantur per sm, & conferantur cum correspondentibus terminis seriei quam exhibet factum extremorum primæ proportionis & habebitur $m = \frac{2ma^2A}{s}$, ideoque $A = \frac{s}{2a^2}$, tum $\frac{-2maA}{s} + \frac{3ma^2B}{s} = 0$, ideoque $B = \frac{s}{3a^3}$, 3°. $-\frac{2A}{3} = -\frac{3maB}{s} + \frac{4ma^2C}{s}$, unde invenitur $C = \frac{s}{4a^4} - \frac{s}{3 \times 4ma^4}$, 4° $-\frac{2B}{4} = -\frac{4maC}{s} + \frac{5ma^2D}{s}$ est ergo $D = \frac{s}{5a^5} - \frac{6s^2}{3 \times 4 \times 5ma^5}$; 5°. $\frac{O-2C}{5} = + \frac{2mA^2}{3s} - \frac{5maD}{s} + \frac{6ma^2E}{s}$ est ergo $E = \frac{s}{6a^6} - \frac{46s^2}{3 \times 4 \times 5 \times 6ma^6} + \frac{2s^3}{3 \times 4 \times 5 \times 6m^2a^6} + \frac{sO}{5 \times 6 \times ma^2}$ & denique invenitur $F = \frac{s}{7a^7} - \frac{252s^2}{3.4.5.6.7ma^7} + \frac{24s^3}{3.4.5.6.7m^2a^7} + \frac{sP}{6.7ma^2}$.

In alterâ Proportione resumatur factum $\overline{AB - Bb + Cc} \times Aa$ quod est
$$mx \times ma + * + * - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} - \frac{C-O}{5}x^5 - \frac{D-Px^6}{6}$$ ducatur in $AB - Cc$ quod est
$$ma + * + * + * + * - \frac{Ox^5}{5} - \frac{Px^6}{6} \text{ \&c.}$$ fit
$$mx \times m^2a^2 + * + * - \frac{maAx^3}{3} - \frac{maBx^4}{3} - \frac{maCx^5}{5} - \frac{maDx^6}{6}$$ &c. Multiplicetur per fluxionem TX quæ est $dx \times, 4Ox^3 + 5Px^4 + 6Qx^5 + 7Rx^6$ &c.
habetur $mxdx \times 4m^2a^2Ox^3 + 5m^2a^2Px^4 + 6m^2a^2Qx^5 + 7m^2a^2Rx^6 + 8m^2a^2Sx^7$
$$\frac{-4maAOx^6}{3} - \frac{4maBOx^7}{4}$$
$$- \frac{5maAOx^7}{3}$$
termini omnes hujus seriei dividantur per sm & conferantur cum terminis correspondentibus seriei quam exhibet factum extremorum secundæ proportionis, & habebitur



tur $\frac{A}{3} = \frac{4ma^2O}{5}$ ideoque $O = \frac{s^2}{2\times3\times4ma^4}$: 2^o. $\frac{B}{4} = \frac{5ma^2P}{s}$ hinc $P = \frac{s^1}{3\times4\times5ma^5}$ 315.
3^o. $\frac{C}{5} - \frac{2O}{5} = \frac{6ma^2Q}{s}$, hinc $Q = \frac{s^2}{4\times5\times6ma^6} \frac{2s^3}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$ &c. unde tandem obtinentur hæ ſeries, quibus velocitates & ſpatia deſcripta exprimuntur: exprimitur ergo velocitas puncti B,

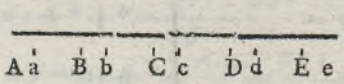
$$\text{per } TV = \frac{sx^2}{2a^2} + \frac{sx^3}{3a^3} + \frac{sx^4}{4a^4} + \frac{sx^5}{5a^5} + \frac{sx^6}{6a^6} + \frac{sx^7}{7a^7} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{2s^2x^4}{2.3\times4ma^4} - \frac{6s^2x^5}{3\times4\times5ma^5} - \frac{46s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^6} - \frac{390s^2x^7}{3.4.5.6.7ma^7} \text{ \&c.}$$
$$\frac{+5s^3x^6}{2\times3\times4\times5\times6m^2a^6} + \frac{50s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^7} \text{ \&c.}$$

$$\text{area } FTV = \frac{sx^3}{2\times3a^2} + \frac{sx^4}{3\times4a^3} + \frac{sx^5}{4\times5a^4} + \frac{sx^6}{5\times6a^5} + \frac{sx^7}{6\times7a^6} + \frac{sx^8}{7\times8a^7} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^4} - \frac{6s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^5} - \frac{46s^2x^7}{3\times4\times5\times6\times7ma^6} - \frac{390s^2x^8}{3.4.5.6.7.8ma^7}$$
$$+ \frac{5s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^6} + \frac{50s^3x^8}{2.3.4.5.6.7.8m^2a^7}$$

$$\text{velocitas puncti C exprimitur per } TX = \frac{+s^2x^4}{2\times3\times4ma^4} + \frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^5} + \frac{s^2x^6}{4\times5\times6ma^6} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{2s^3x^5}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$$

$$\text{area denique } FTX = \frac{s^2x^5}{2\times3\times4\times5ma^4} + \frac{s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^7} + \frac{s^2x^7}{4\times5\times6\times7ma^6} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{2s^3x^7}{3\times4\times5\times6\times7m^2a^6}$$

 Pun-



Punctorum sequentium motus determinari possent simili ratione; Etenim vires motrices punctorum B, C, D, E &c. sunt ut $Aa - 2Bb$, $Bb - 2Cc$, $Cc - 2Dd$, $Dd - 2Ee$, &c. Vis enim cujusvis puncti ut C est ad vim puncti E ut de ad cd sive ut $AB + Ee - Dd$ ad $AB + Dd - Cc$ & dividendo vis motrix puncti D ad vim puncti E ut $Cc - 2Dd + Ee$ ad cd; vis puncti E est ad vim Elasticam naturalem ut AB ad ed, ergo vis motrix puncti D ad vim Elasticam naturalem ut $\left.\frac{Cc - 2Dd + Ee}{AB}\right\}$ ad $\left\{\begin{matrix} cd \\ ed \end{matrix}\right.$ sive ut $Cc - 2Dd + Ee$ ad $\frac{cd \times de}{AB}$, ergo alternando est vis motrix puncti D ad $Cc - 2Dd + Ee$ ut vis Elastica naturalis ad $\frac{cd \times de}{AB}$, ideóque in paulò majori ratione quàm vis elastica ad AB quia tam cd quàm de paulò minores sunt quàm AB, sed vis motrix puncti D est ad $Cc - 2Dd$ in majori ratione quam eadem vis motrix ad $Cc - 2Dd + Ee$, ergo vis motrix puncti D est semper ad $Cc - 2Dd$ in majori ratione quam vis elastica ad AB, cùmque id verum sit in omnibus punctis & hæc ultima ratio sit constans, Ratio vis motricis puncti cujusvis ad spatium à præcedenti puncto descriptum dempto duplo spatii ab ipso hoc puncto descripti, erit semper major ratione constante, non tamen multo, ideo Physicè pro constante assumi potest, hinc alternando vires illæ motrices, punctorum successivorum, sunt in ratione indicatâ.

Sed calculum pro illis punctis instituere necesse non est, per Analogiam enim ex motu duorum priorum punctorum B & C reliquorum motum statuere, sufficiens videtur.

10. Si, missis cæteris casibus, quæratur intervallum temporis quo velocitas data m, in punctis successivis B, C, generetur, ut & ratio spatiorum Aa, Bc, Cc eo tempore descriptorum; Fiat $TV = m$, & utroque ducto in $\frac{a^2}{s}$, erit $\frac{a^2 TV}{s} = \frac{a^2 m}{s}$, dicatur $\frac{a^2 m}{s} = z^2$ & in serie $\frac{a^2 TV}{s}$, ponatur ubique $\frac{m}{z^2}$ loco $\frac{s}{a^2}$, hæc series in hanc formam migrabit

$$z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^6}{6a^4} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{2x^4}{2.3.4z^2} - \frac{6x^5}{3.4.5az^2} - \frac{46x^6}{3.4.5.6a^2z^2} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4} - \text{\&c.}$$

Juxta Analyseos *Newtonianæ* Methodum sumantur omnes termini in quibus differentiæ exponentium x & z minimum efficiunt valorem, fiantque æquales z^2 reliqui termini seriei $\frac{a^2 TV}{s}$ negligi possunt, quia per dignitates quantitatis $\frac{x}{a}$ respectu eorum qui assumpti fuerunt multiplicantur; (in Hypothesi quæ velocitatem m alicujus momenti assumeret hi termini negligendi non forent, sed in casu præsenti velocitatem m minimam supponere nobis licet cùm de tali tantum in futurum simus acturi) erit ergo

$$z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{2.3.4z^2} + \frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4} - \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8z^6} + \frac{41x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10z^8} - \frac{122x^{12}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12z^{10}} \text{ \&c.}$$

(qui termini continuatâ serie TV inveniuntur) & æquatione per approximationem soluta invenietur $x^2 = 3.57z^2 = \frac{3.57a^2m}{s}$.

Jam verò in areâ FTV quæ spatium Bb exprimit, loco $\frac{s}{a^2}$ ponatur ut prius $\frac{m}{z^2}$, & assumantur termini in quibus differentia exponentium quantitatum x & z minima eva-

evadit, ii sunt $\frac{m x^3}{2 \times 3 z^2} - \frac{2 m x^5}{2.3.4.5 z^4} + \frac{5 m x^7}{2.3.4.5.6.7 z^6} - \frac{14 x^9}{2.3.4.5.6.7.8.9 z^7}$ in quibus si valor $x^2 = 3.57 z^2$ substituatur, fiet hæc series $m x \times \frac{3.57}{2 \times 3} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57}{2.3.4.5} + \frac{5 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{2.3.4.5.6.7} - \frac{14 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{2.3.4.5.6.7.8.9}$ &c. sive $Bb = m x \times .428$.

Eodem modo valor C c invenietur ex hac serie $\frac{m x^5}{2 \times 3.4.5 z^4} - \frac{2 m x^7}{3 \times 4.5.6.7 z^6}$ sive substituto valore x^2, erit $C c = m x \times \frac{3.57 \times 3.57}{2.3.4.5.} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57}{3.4.5.6.7}$ &c. sive $C c = m x \times .07$ sive circiter sexta pars intervalli à puncto B descripti eodem tempore quo acquirit celeritatem m.

Et Celeritas à puncto C tunc temporis acquisita erit iisdem substitutionibus factis $m \times \frac{3.57 \times 3.57}{2.3.4.} - \frac{2 \times 3.57 \times 3.57 \times 3.57}{3.4.5.6}$ &c. $= m \times .279$ &c. circiter $\frac{1}{4}$ celeritatis m.

11. Quod si eventus quæratur in hypothesi velocitatem m non esse quamminimam; supponatur illa æqualis ipsi s; si quæratur spatium descriptum à puncto B, dum ejus velocitas fit m, fiat series $TV = m$, & utroque ducto in x, erit $x\,TV = m x$, ergo collatâ serie $x\,TV$, & FTV habebitur ratio spatiorum percursorum A a & B b, sed illæ series posito $\frac{s}{m} = 1$. sunt

$$x TV = \frac{s x^3}{2 a^2} + \frac{s x^4}{3 a^3} + \frac{s x^5}{6 a^4} + \frac{s x^6}{10 a^5} + \frac{s x^7}{30 a^6}$$ &c.

$$\& \; FTV = \frac{s x^3}{6 a^2} + \frac{s x^4}{12 a^3} + \frac{s x^5}{30 a^4} + \frac{s x^6}{60 a^5} + \frac{11 s x^7}{2160 a^6} \&c.$$

Ubi liquet quod primus terminus primæ seriei sit triplus primi termini secundæ, reliqui verò termini primæ seriei reliquorum terminorum secundæ seriei plusquam tripli, unde liquet quod A a est magis quam triplum spatii per punctum B descripti usque dum celeritatem m reci- DE MO-
piat; Ex quo consequitur, quod siquidem TU COR-
B eo momento non est in medio inter PORUM.
puncta A & C, sed vicinius puncto A ad LIBER
minimum sextâ parte spatii à puncto A SECUND.
descripti ab eo ulterius urgetur & acce- SECT. VIII.
leratur, celeritatemque majorem quam m PROP.
recipit donec ad medium inter A & C XLVII.
perveniat, ibique cum celeritate majore THEOR.
quàm A feratur, versus C magis accedet, XXXVII.
sicque vim repulsivam puncti C sentiet,
dumque ultra medium inter A & C pro-
movebitur sensim tardabitur, tandem de- 315.
structo ejus excessu celeritatis supra celeritatem m, cùm sit vicinius puncto C quam puncto A diminuetur ulterius ejus celeritas m, ideoque puncto A vicinius gradatim fiet, in medio inter A & C iterum occurret, sed cum velocitate diminutâ, quare perget vicinius fieri puncto A, sicque ab ipso velocitatis incrementum de novo accipiet, sicque perpetuò oscillabitur punctum B circa medium inter punctum A & punctum C ad morem fibræ sonantis; Eâque ratione fit ut Particulæ aeris magnâ velocitate pulsæ sonum edant sponte, ut in tonitru, pulvere fulminante, flagellis, taperibus aut lodicibus fortiter excussis &c.

Sed ubi m minima sit, punctum B eam celeritatem m acquisivit eo tempore quo parùm abest a medio inter puncta A & C, (per hujus n. 10.) una circiter vicesima spatii à puncto A descripti, ideoque agitationes supra dictas exiguas suscipit quas pro nullis habere Physicis licere debet, quamvis Mathematicè non omninò nullæ sint.

12. Supposito ut prius velocitatem datam m esse minimam, ut obtineatur intervallum temporis quo punctum C celeritatem eam datam m acquiret sumpto ut prius $z^2 = \frac{a^3 m}{s}$ fiat $TX = m$ & $\frac{a^4 m^2}{s^2} TX = m z^4$ & ponatur ubique in serie TX, $\frac{m}{z^2}$ pro $\frac{s}{a^2}$ fiet $m z^4 = \frac{m x^4}{2.3.4} + \frac{m x^5}{3.4.5}$ &c. sive sumptis terminis in quibus exponentes quantitatum x & z differentiam minimam habent, erit $m z^4 = \frac{m x^4}{2.3.4} - \frac{4 m x^6}{2.3.4.5.6 z^2}$

+

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

$$+ \frac{13\,m\,x^{8}}{2.3.4.5.6.7.8\,z^{4}} - \frac{40\,m\,x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10\,z^{6}}$$

&c. & æquatione per approximationem ſolutâ, invenitur $x^2 = 9\frac{2}{5}\,x^2$. Et ſeriem FTX ulterius continuando & calculum inſtituendo ut pro ſerie F T V factum eſt, invenitur quod vis à puncto A emenſa, dum punctum C velocitatem m acquirit, eſt ad viam quam ipſum punctum C emetitur, ut 100 ad 32. ſive fere ut 3 ad 1. Quod quidem paulo majus eſt vero, quia omiſſa eſt conſideratio motus puncti D, quod cum diſcedat à puncto C efficit ut vis B in ipſum C ſit fortior, breviorique tempore motum m ipſi impertiatur.

13. Hinc, cùm tempus quo punctum B celeritatem datam m acquiſivit ſit $z\sqrt{3.57}$ & tempus quo punctum C eam celeritatem acquiſivit ſit $z\sqrt{9\frac{2}{5}}$, illa tempora ſunt ut $\sqrt{3.57}$ ad $\sqrt{9\frac{2}{5}}$ ſive ut 19 ad 30 fere ut 2 ad 3; cùm ergo punctum A uniformiter moveatur, ſpatium quod punctum A deſcribit dum C acquirit velocitatem m, eſt ad ſpatium quod idem punctum A deſcripſerat dum B eamdem velocitatem m acquiſiverat, ſicut 3 ad 2; ſpatium verò quod C deſcripſit dum eam celeritatem acquiſivit, eſt proximè tertia pars ſpatii eodem tempore ab A deſcripti, & ſpatium quod B deſcribit dum eamdem celeritatem m acquirit eſt fere dimidia pars ſpatii eo tempore ab A deſcripti, ergo illa ſpatia à punctis C & B deſcripta, donec velocitatem m ſingula acquirant ſunt æqualia.

14. Ex analogiâ verò deducetur quòd ſpatium quod punctum quartum D deſcribit, dum velocitatem m attingit, erit 4ª. pars ſpatii ab A deſcripti, ſiquidem ſpatium a 2do. puncto deſcriptum eſt dimidia pars ſpatii ab A deſcripti, ſpatium à 3º. puncto deſcriptum tertia pars ſpatii deſcripti ab A &c. Imo eum ordinem accuratius obſervari in punctis remotioribus ſtatuere licet quod punctum C tertiam partem ſpatii ab A deſcripti dum velocitatem m acquirit, accuratius deſcribat quàm B dimidiam partem ſpatii ab A deſcripti dum velocitatem m ſuſcipit. Calculum tentare poteſt qui hac Analogiâ rem ſufficienter demonſtrari non cenſebit, & B. L. ignoſcere rogamus quod talem laborem ſubire piguerit.

Et eadem Analogiâ (art. 13.) deducetur, ſpatia quæ percurrunt ſucceſſiva puncta D, E dum velocitatem m acquirunt, æqualia eſſe iis quæ puncta ſingula B & C deſcripſerunt.

15. Quibus admiſſis ſequitur diminutionem intervalli inter particulas medii, cùm motu communi cum puncto A feruntur, eſſe ubicumque eamdem, & æqualem dimidio ſpatio ab A deſcripto dum B celeritatem m acquirit.

Nam cùm A bis id dimidium ſpatium deſcripſerit & B ſemel dum B communem cum A motum ſuſcipit, contrahitur ſpatium inter A & B dimidio illo ſpatio; A proceſſit ter illo dimidio ſpatio & C ſemel dum C communem cum B & A motum ſuſcipit, ergo intervallum inter A & C duplo ejus dimidii ſpatii diminutum eſt, ſed inter A & C duo ſunt particularum intervalla A & B, B & C, & primum intervallum eſt contractum dimidio illo ſpatio, ergo intervallum inter B & C eodem dimidio intervallo diminutum eſſe debet, ſicque de cæteris.

16. Ideo ſi quolibet tempore elapſo ſumatur via tota puncti A, ea via æqualis erit ſummæ diminutionum intervallorum inter omnes particulas ad quas celeritas m communicata fuit; cùm ergo motus puncti A ſit uniformis, uniformiter etiam creſcit numerus particularum ad quas celeritas m communicatur; & numerus earum particularum æqualis erit viæ à puncto A percurſæ diviſæ per diminutionis intervalli unius quantitatem.

17. Manente autem fluido eodem, ſed mutatâ celeritate puncti A, tempora quibus puncta ſucceſſiva medii celeritatem ejus puncti A ſuſcipiunt eadem tamen manent: Nam ſi in formula $x^2 = \frac{3.57\,a^2 m}{s}$ quâ determinatur quadratum temporis quo punctum B recipit celeritatem puncti A ſubſtituantur loco m & s quantitates ipſis æquipollentes, formula hæc fiet quantitas conſtans (manente Elaterio medii & intervallo particularum) quæcumque ſit velocitas puncti A; Etenim dicatur f vis elaſtica medii, quoniam, ex Hypotheſi Problematis hujuſce, uniformiter agere cenſetur tempore quod exprimitur per a ut celeritatem s generet, erit $s = af$; præterea quoniam particularum intervallum

B A

$$\frac{\frac{3.57a^2m}{s}}{} = \frac{3.57a^2\frac{AB}{a}}{af} = \frac{3.57AB}{f}$$ quæ quantitas, conſtantes tantùm continet à celeritate m independentes; Hinc, tempus quo punctum B celeritatem puncti A recipit idem eſt quæcumque ſit velocitas puncti A; Idem demonſtrabitur de tempore quo punctum C eam celeritatem recipit, nam habet (*not.* 13.) rationem conſtantem ad tempus quo punctum B eam celeritatem acquirit, eſt nempe ad id tempus ut 3 ad 2, & ſic de cæteris punctis. Q. E. D.

18. Diminutiones intervallorum inter partes medii Elaſtici (manente eodem fluido) ſunt ut celeritas puncti A; Nam ſpatium A a percurſum à puncto A tempore quo certa quædam particula medii Elaſtici celeritatem m recipit eſt ſemper mx, (x deſignante tempus quo illa particula medii celeritatem m ſuſcipit) ſed illud tempus eſt conſtans (n. 17. hujuſce) quæcumque ſit celeritas puncti A, ergo ſpatium A a eſt ſemper ut velocitas m; ſed illud ſpatium A a eſt ſumma diminutionum intervallorum inter partes ad quas celeritas m pervenit (n. 16.), ſingulæ autem diminutiones ſunt æquales (n. 15.) ergo ſingulæ diminutiones ſunt ut illud ſpatium A a, ſive ut velocitates.

19. Et vice verſâ, numerus partium compreſſarum quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt eſt ſemper idem quæcumque ſit puncti A velocitas; Nam ille numerus eſt ut ſpatium A a diviſum per unius partis diminutionem, ſpatium A a dato tempore eſt ut celeritas puncti A, diminutio unius partis eſt etiam ut ea celeritas; ergo numerus partium quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt, eſt ut celeritas per celeritatem diviſa, hoc eſt, in ratione conſtanti; Unde, in diverſis temporibus numerus particularum ad quas celeritas m pervenerit, erit directè ut tempus.

20. Quod ſi Particulæ datâ celeritate jam ſint dimotæ, & certum gradum compreſſionis ſuſceperint, poſtea verò nova velocitas addatur (vel detrahatur) puncto *A*, novus ille celeritatis gradus eodem tempore ab unâ particulâ ad aliam propagabitur quo prima celeritas propagata fuit, (in Hypotheſi quod tam velocitas m quàm hæc nova velocitas addititia exiguæ ſunt) idque hoc modo demonſtrari poteſt.

Fingatur, omnes particulas primâ celeritate motas & compreſſas in navi poſitas eſſe quæ ipsâ particularum earum celeritate feratur, ita ut illæ particulæ in eâ nave reſpectivè quieſcant, urgeatur verò prima pars per exceſſum novæ celeritatis ſuper primam, communicatio iſtius exceſſus celeritatis ad omnes partes in navi poſitas ut & nova compreſſio particularum determinabitur ut in præcedenti Problemate, mutatis celeritate, intervallo particularum medii, & ejus elaſticitate; Si ergo prima celeritas fuerit ut prius m; a tempus quo intervallum particularum 315.
A B eâ celeritate percurrebatur, ideoque ſit $AB = ma$, ſit ut prius s velocitas genita tempore a per vim elaſticam medii in ſtatu naturali conſiderati & uniformiter agentis, inventum eſt quod tempus quo punctum B celeritatem m acquiſiverat erat $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ (n. 10.) quod ſpatium A a interea à puncto A deſcriptum erat $ma\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ & ſpatium B b erat. $428\, ma\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, ita ut compreſſio particularum ſit A a — B b $= .572\, ma\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, ideoque novum intervallum inter particulas in nave poſitas erit $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$; Eſt autem Vis Elaſtica prior ad vim Elaſticam novam inversè ut partium intervalla, ſive ut $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ ad ma, ſive ut $1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ ad 1. Et, ſi exceſſus novæ velocitatis ſuper priorem dicatur n, tempus quo novum intervallum inter particulas deſcriberetur per hanc celeritatem n, erit $\frac{am}{n} \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, nam tempus a quo prius intervallum ma deſcribebatur velocitate m debet eſſe ad illud tempus directè ut intervalla ma & $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ & inversè ut velocitates m & n. Denique, ſubtangens Logarithmicæ quæ deſignabatur per s in caſu priore, eſt in iſto $\frac{ms}{n}$, cùm enim deſignet velocitatem uni-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

uniformiter genitam ab Elaterio, tempore quo intervallum particularum deſcribitur, eſt directè ut vis elaſtica & ut tempus, habetur ergo hæc proportio, eſt

$$\left.\begin{array}{l} 1-.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}} \\ a \end{array}\right\} \text{ad} \left\{\begin{array}{l} 1 \\ \frac{am}{n}.1-\sqrt{.572}\,\frac{3.57m}{s} \end{array}\right.$$

ut s ad $\frac{ms}{n}$.

In ſeriebus ergo ſupra inventis loco m ponatur n; loco a ponatur $\frac{am}{n} \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$; loco s ponatur $\frac{ms}{n}$, & tempus quo punctum B celeritatem n acquirit, invenietur (ſubſtituendo hos valores in formula $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$)

$$\frac{am}{n} \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}} \times \sqrt{\frac{3.57n}{\frac{ms}{n}}} = \frac{am}{n} \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}} \times \sqrt{\frac{3.57\,nnm}{mms}} = a \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}} \times \sqrt{\frac{3.57m}{s}}.$$

Ideoque tempus $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ quo in præcedenti caſu punctum B acquirebat celeritatem m, eſt ad tempus quo in hoc caſu acquirit celeritatem n, ut 1 ad $1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, ſed hæc ratio, exiſtente m quantitate minimâ ut ſuppoſitio fert, eſt fere æqualitatis. Quare nova celeritas, ſive exceſſus novæ celeritatis ſupra præcedentem, propagabitur ad punctum proximum medii elaſtici eodem temporis intervallo quo præcedens celeritatis gradus in eo puncto genitus fuerat, ideoque etiam ad puncta ſucceſſiva iiſdem temporibus perveniet.

21. Si per datum aliquod tempus primum punctum A medii Elaſtici conſtanti celeritate m fuerit motum, poſtea urgeatur majori celeritate $m + n$ durante æquali tempore, omnes particulæ quæ primam celeritatem m ſuſceperant, altero iſto tempore celeritatem novam $m + n$ ſuſcipient, & interea totidem particulæ ulteriores priorem celeritatem m accipient; Nam incrementum celeritatis n ad eas omnes particulas à primâ propagari poteſt dato tempore, ad quas eo ipſo tempore celeritas m propagata fuerat (hujuſce 20). Interea verò uniformiter propagata fuiſſet velocitas priſtina m ab ultimis particulis quæ eam ſuſceperant ad totidem ulteriores. Si itaque ſucceſſive poſt æqualia tempora velocitas creſcat, totidem formabuntur portiones medii Elaſtici, æquali numero partium conſtantes, quæ ſucceſſivas illas celeritates habebunt, portio proxima puncto A ultimam celeritatem habebit, ſecunda penultimam, & ſic deinceps.

22. Hinc, ſi medium Elaſticum urgeatur per ſucceſſivos velocitatis gradus, imprimi poteſt ejus partibus velocitas ſatis magna ut ſenſibiliter in aures agat nec tamen excitetur in medii Elaſtici partibus ſenſibilis ea vibratio quæ juxta n. 11. naſceretur ſi ſimul & ſemel tota illa velocitas ipſi imprimeretur; & hinc intelligitur differentia inter aërem ſonum generantem, aërem ſonum propagantem, & aërem ventum deferentem; ſi magna velocitas particulæ aëreæ imprimatur, particula ipſi proxima tremores ſuſcipit, fitque punctum ſonorum; ſi velocitas minor excitetur quæ conſtans maneat nec per gradus augeatur aër uniformiter transfertur & fit ventus; ſed ſi ab exiguâ velocitate ad magnam aſſurgatur, aëris particulæ ſucceſſivos illos gradus recipiunt, & quia ſingula velocitas accepta eſt exigua tremores ſenſibiles non excitantur in particulis aëreis, quæ velocitatem illam magnam ſuſcipientes & ad aurem deferentes ſenſationem ſoni producunt.

23. Si autem velocitas nova minor ſit velocitate præcedente, eodem modo conſtabit quod decrementum illud velocitatis eodem tempore ad proximum punctum tranſibit quo præcedens velocitatis gradus ab eo acquiſitus fuerat, & ad ſucceſſiva puncta iiſdem etiam temporibus perveniet quibus priorem celeritatem acquiſiverant, imo ſolutio per conſtructionem Problematis ipſius productâ Logarithmica ultra punctum F quæri poteſt, eademque obtinebuntur ac prius.

24. Quibus poſitis intelligitur effectus vibrationis fibræ flexæ & redeuntis in aërem. 1us. *Caſus*. Dividatur tempus ejus reditus in partes æquales quam minimas, & durante ſin-

singulâ temporis parte, fibræ velocitas uniformis manere censeatur. Prima velocitas, ad certum numerum partium dato eo tempore communicabitur qui partium numerus dicatur N; altero instanti secunda velocitas eidem partium numero N communicabitur dum prima velocitas ad totidem particulas ulteriores N perveniet, tertio instanti primus partium numerus tertiam velocitatem habebit, ulterior numerus N secundam velocitatem, numerus N adhuc ulterior primam; hinc ergo si fibra dimidiam vibrationem absolverit, hoc est ultra statum suum naturalem discesserit quantum potest, erunt in aëre totidem successivæ portiones, quæ particulas numero N continebunt, quot successivæ velocitates erunt genitæ, & particulæ remotissimæ à fibrâ primum celeritatis gradum habebunt, proximæ fibræ ultimum, mediæ verò medium, qui maximus est; diminutiones intervallorum correspondebunt illis celeritatum gradibus, ut sint minimæ tam in particulis à fibrâ remotissimis, quam in particulis ipsi proximis, maximæ in mediis.

Regrediente fibrâ, eadem omnino Lex observabitur, nisi quod partes aëris fibræ proximæ retrò movebuntur & compressiones in dilatationes mutabuntur, dum in portiones ulteriores medii celeritates primo receptæ propagantur, ideoque tota vibratione absolutâ numerus particularum agitatarum duplus erit ejus quem in dimidia vibratione notaveramus, pars dimidia remotior est planè æqualis illi de quâ primo actum est & similiter constituta, pars citerior verò negativam celeritatem obtinebit & dilatationem; ejus citerioris partis portio remotissima à fibrâ primum celeritatis fibræ regredientis gradum habebit, & portio fibræ proxima ultimum (quietem nempe), media portio medium, hoc est retrocedet eâ ipsâ celeritate quâ medium ulterioris partis procedit & dilatationes illis celeritatibus negativis correspondebunt, ideoque in medio illius proximæ portionis maxima erit dilatatio ut & maximus regressus.

2dus. *Casus.* Quod si singula tempuscula, quibus durantibus velocitas fibræ uniformis fingitur, æqualia non sint, eâdem ratione intelligentur effectus fibræ in partes medii, nisi quod portiones medii quæ singulis successivis velocitatis gradibus gaudent non sint æquales, sed (per not. 19.) sint sicut tempora quibus durantibus singulæ illæ velocitates in fibrâ permanserunt.

3us. *Casus.* Quamvis autem fibræ velocitas nullo tempusculo uniformis maneat sed continuo acceleretur, eodem tamen modo fibra aget in medium ac si reverâ velocitas ejus cresceret per intervalla temporis, & durante tempusculo quam minimo (sed finito) uniformis maneret; idque propterea quod Intervalla inter particulas medii sunt finitæ quantitates non verò infinitè parvæ; nam per not. 4. & 5. nullus motus ex puncto *A* in punctum *B* transire potest, 315. nisi punctum *A* processerit finitâ quantulâcumque quantitate, ideoque, nisi fibra quæ urget punctum *A* velocitatem finitam in eo generaverit (ut fert Hypothesis Problematis not. 9.); Pari ratiocinio punctum B non sentiet incrementa velocitatis puncti A, nisi postquam incrementum finitum velocitatis in eo genitum fuerit (*not.* 5. & 20.). Ergo fibra agit in medium quasi singulo tempusculo (æquali vel inæquali) ejus velocitas uniformis perstitisset; Intelligitur ergo effectus vibrationis fibræ in aërem per primum & secundum casum hujusce demonstrationis. Q. E. I.

25. Totum autem spatium cujus particulæ commotæ fuerunt durante integrâ fibræ vibratione à NEWTONO pulsus vocatur, & si vibratione absolutâ fibra quiesceret, semper ulterius propagaretur ille pulsus; Nam totus ille pulsus (momento quo absolvitur vibratio) divisus intelligatur in portiones totidem quot temporis intervalla in vibrationis duratione fuerunt assumpta, quæ temporis intervalla facilitatis ergo æqualia supponantur, singula portio medii eam velocitatem habebit quam habuit chorda in momento ipsi respondenti, ultima portio sive remotissima à fibra eam habebit celeritatem quam fibra habuerat primo instanti, penultima portio eam celeritatem habet quam fibra habuit secundo instanti &c.; Sequenti verò tempusculo ultima portio pulsus ad novam portionem sibi æqualem & ulteriorem suam velocitatem propagabit (hujus 21.) dum ipsa suscipiet penultimæ portionis celeritatem, penultima verò portio celeritatem antepenultimæ &c., postea altero temporis intervallo ad alteram novam portionem ulteriorem prima celeritas propagabitur, & secunda celeritas in primâ portione, novi istius pulsus gene-

 ra-

rabitur, ſicque deinceps: novus ergo pulſus formabitur plane ſimilis priori æqualiter extenſus, æquali celeritate in ſingulis partibus donatus (remotâ ut dixi conſideratione partium circumquâque poſitarum remque conſiderando quaſi de partibus in linea rectâ poſitis unicè ageretur).

26. Ipſe autem primus pulſus penitus quieſcit quando in ſecundum totus tranſiit ſi nulla nova chordæ agitatio ſuccedat, nam celeritas portionis pulſus quæ fibræ proxima eſt ſucceſſivè ad ſequentes portiones tranſit dum novus pulſus formatur, ſed celeritas ejus portionis fibræ proximæ eſt ultima fibræ celeritas quæ in hac Hyp. eſt quies, ſed ubi pulſus ſecundus totus formatus eſt, celeritas portionis pulſus quæ fibræ proxima erat ad initium ſecundi pulſus eſt tranſlata & per omnes partes pulſus primi ſucceſſivè tranſiit, ideoque in quiete eas conſtituit in quâ permanſerunt nullâ ſuccedente novâ agitatione.

27. Quòd ſi chorda novam vibrationem faciat, ut evenit, Reſtituetur primus pulſus æqualis præcedenti qualiſcumque ſit ejus vibrationis velocitas initialis, nam dividatur totius vibrationis hujuſce tempus in totidem partes æquales partibus in quas tempus primæ vibrationis diviſum fuerat, quod fieri poteſt cum vibrationes ſint iſochronæ, iſtæ partes temporis æquales erunt iis quæ in præcedenti vibratione aſſumptæ fuerunt; Dato autem tempore numerus particularum compreſſarum eſt ſemper idem qualiſcumque ſit velocitas (n. 19. hujuſce). Ergo ſiquidem ſingulo inſtanti dato totidem partes comprimuntur, totidemque ſunt inſtantia data in vibrationibus Iſochronis, pulſûs ad totidem particulas in quâvis vibratione Iſochronâ extendetur.

28. Si per velocitatem pulsûs intelligatur (cum NEWTONO) diſtantia ad quam pulſus extenditur diviſa per tempus quo pulſus ad eam diſtantiam pervenit, dico Pulſus in eodem medio eſſe omnes æquiveloces quæcumque ſit fibræ pulſum producentis vibratio: Id jam liquet de vibrationibus Iſochronis in quibus tempore unius vibrationis ad totidem partes pulſus propagatur, ideoque æquale ſpatium æquali tempore percurrit, poſtea verò idem pulſus ſimiliter propagatur, ſed id pariter verum eſt de Vibrationibus Eterochronis; Dividantur enim inæqualia vibrationum tempora in totidem utrinque tempuſcula minima quæ totis temporibus ſint proportionalia, numerus partium compreſſarum ſingulis tempuſculis diverſis ſunt illis tempuſculis proportionales (n. 19. hujuſce) ideoque totis vibrationum temporibus proportionales, ſed in ſingulâ vibratione totidem tempuſcula aſſumpta ſunt, ergo totus numerus partium quæ ſingulum pulſum conſtituunt eſt proportionalis tempori vibrationis. Sed diſtantia ad quam pervenit pulſus eſt ſemper numero partium proportionalis. Ideoque diſtantia ad quam pervenit pulſus eſt tempori vibrationis proportionalis, ſed velocitas pulſus eſt diſtantia ad quam pervenit diviſa per tempus quo ad eam diſtantiam pervenit, ergo ea velocitas eſt conſtans. Ergo in eodem medio omnes pulſus ſunt æquiveloces; Quod de ſono per experimenta verum eſſe demonſtravit *Derhamus*.

29. Quòd ſi medium diverſum ſit, velocitates pulſuum erunt inversè in ratione ſubduplicatâ denſitatis & directè in ratione ſubduplicatâ vis Elaſticæ, quippe (n. 17. hujuſce) deprehendimus quadratum temporis quo celeritas puncti A tranſit in punctum B eſſe $\frac{3.57\,AB}{f}$ deſignante AB particularum intervallo & f vi elaſticâ, & uniformiter procedere motum in pulſu ab unâ particulâ ad ſequentem, ſumantur ergo totidem partes in utroque medio, tempora quibus motus pulſus à primâ ad ultimam perveniet erit ut $\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{f}}$ (neglectâ quantitate conſtanti 3.57.) Velocitas verò pulſus eſt directè ut ſpatium quod occupant illæ omnes particulæ & inversè ut tempus quibus motus à primâ ad ultimam tranſit, ſpatium verò quod occupant illæ particulæ cum ſint totidem eſt ut intervallum AB ſingulæ particulæ, ideoque eſt velocitas pulſus ut $\frac{AB}{\sqrt{\frac{AB}{f}}} = \sqrt{AB} \times \sqrt{f}$. Intervallum particularum eſt inversè ut denſitas medii (rem conſiderando ut in n. 25. hujuſce) ergo velocitas pulſus eſt inversè in ratione ſubduplicatâ denſitatis medii, & directè in ratione ſubduplicatâ vis Elaſticæ (quod Prop. XLVIII. ſtatuit NEWTONUS).

30. His de toto pulſu dictis, nunc de motu ſingulæ particulæ pulsûs obſervandum eſt, in ſingulâ particulâ omnes velocitatis ſucceſſivos gradus quos habuit prima particula A pro-

produci, & tantùmdem temporis in eâ particulâ durare, quantùm in ea particula A, hoc cum diſcrimine quod tardius eos velocitatis gradus ſuſcipiat quam particula A, & quidem eò tardius quò ab ea remotior eſt; 2^us. *Caſus*. Dividatur, ut prius, vibrationis tempus in tempuſcula, & durante uno tempuſculo æquabilis manere cenſeatur velocitas impreſſa particulæ A, fingamus ſingulo tempuſculo velocitatem ad viginti particulas pervenire, & ſpectemus ſpeciatim motum quem 10^a. particula à puncto A ſuſcipiet, quæ particula dicatur X, illa particula X motum puncti A non ſuſcipit niſi poſt novem particulas antecedentes, tum ipſa particula X motum puncti *A* ſuſpicit & uniformiter cum eo movetur durante reliquo tempuſculo, tunc ex Hypotheſi mutatur celeritas puncti A, interea tamen uniformis manet celeritas puncti X donec nova ea celeritas ad ipſam pervenire potuerit, hoc eſt poſtquam ſucceſſivè pervenit ad particulas novem antecedentes, ſed nova hæc celeritas per novem particulas antecedentes particulam X propagatur eodem tempore quo prima celeritas per eaſdem novem particulas propagata fuerat; ergo prima celeritas tantò diutius permanet in particulâ X quantò tardius eam receperat, ergo ea prima celeritas tamdiù durat in particulâ X quamdiù duraverat in particulâ *A*; cumque idem de ſingulis ſucceſſivis motibus puncti A dici poſſit, hinc quælibet particula X ipſiſſimum habet motum a particula A, niſi quod tardius in eâ incipiat & deſinat. Ideoque etiam manifeſtum eſt in hoc caſu, ſpatia à particulis *A* & X deſcripta æqualia fore & ſimiliter deſcripta.

2^us. *Caſus*. Ponatur nunc quod motus puncti *A* æquabilis non maneat durante ſingulo tempuſculo, velocitates tamen ſucceſſivæ puncti X erunt illæ quas in fine ſinguli tempuſculi quam minimi punctum *A* acquiſiverit, ut liquet ex tertio caſu notæ 24, ideoque punctum X ſuſcipiet velocitates correſpondentes velocitatibus puncti A ſumptis per ſaltus, ſed quoniam cùm primùm punctum A ſpatium finitum deſcripſit, agere incipit in punctum proximum, ſaltus illi quamminimi intelligi debent, ideoque Phyſicè nulli, hinc Phyſicè particula X & particula A eoſdem motus habebunt.

Pariter deſcribent ſpatia æqualia & ſimilia; Quippe abſciſſæ curvæ cujuſvis repræſentent tempus quo durante punctum *A* movetur, & ejus ordinatæ repræſentent correſpondentes velocitates, & dividatur axis curvæ in partes quamminimas ſed finitas, erigantur que ordinatæ, illæ repræſentabunt velocitates æquabiles puncti *X* initio ſinguli tempuſculi, & Parallelogrammata contenta ſub ordinata & portione axis reſpondente repræſentabunt ſpatia à puncto *X* deſcripta, areæ verò mixtilineæ inter eaſdem ordinatas eaſdem axis portiones & arcus curvæ comprehenſæ repræſentabunt ſpatia correſpondentia à puncto *A* deſcripta, ſed quando portiones axis ſunt quamminimæ, ſummæ omnium eorum Parallelogrammatum & arearum mixtilinearum correſpondentium pro æqualibus habentur. Ergo ſpatia à particulis A & X deſcripta ſunt æqualia & ſimiliter deſcripta ſaltem quàm proximè. 315.

31. Ideo uniformiter motus fibræ propagatur trans particulas medii; ſingulæ verò ejus particulæ ſucceſſivè motum fibræ ſuſcipiunt & ejus ad inſtar moventur, ſed in fibrâ Elaſticâ vires ſunt ſemper proportionales diſtantiæ fibræ à puncto medio motus ſui, ut per experimenta conſtat, & illarum virium actio ſenſibiliter non turbatur per reſiſtentiam aëris, propter ejus raritatem, nec per ejus elaterium quia hinc inde à fibrâ aër datur qui ferè æqualiter premit, ideo fibra elaſtica ac per conſequens particulæ ipſæ medii moventur ſecundum Legem Prop. XXXVIII. Lib. I. Sed eadem eſt Lex motus Penduli in Cycloide oſcillantis Prop. LI. lib. I. Ergo *Pulſibus per fluidum propagatis ſingulæ particulæ motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes accelerantur ſemper & retardantur pro Lege oſcillantis Penduli* Q.E.D.

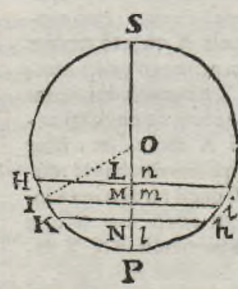
32. Sumatur tempus quodvis, ſimulque illud intervallum inter particulas pulſus, quod tale eſt ut eo tempore aſſumpto motus fibræ à primâ particulâ ejus intervalli ad ultimam perveniat. Dico, quod tempus illud erit ad totum vibrationis tempus ut illud intervallum ad totius pulſus longitudinem; Res eſt evidentiſſima ex præcedentibus; nam cùm motus propagetur in pulſu uniformiter qualiſcumque ſit celeritas, hoc eſt, cum ad totidem particulas dato tempore perveniat, manifeſtum eſt quod ſi ut eſt totum vibrationis tempus, ſive totum tempus quo pulſus formatur ad omnes particulas quæ pulſum conſtituunt, ita portio quævis ejus temporis ad numerum particularum quæ eâ temporis portione motum receperunt.

33. Ut

33. Ut melius horum cum *Newtonianis* nexus pateat, hic adjungere lubet Propositionis X L I X. demonstrationem ex XLVII. desumptam, quamvis vix diversa sit ab iis quæ in ipso Textu leguntur, & 1°. quidem, sit P S spatium quod fibra unâ vibratione eundo percurrit, ex ejus medio O ut centro describatur circulus P K S k ejus circumferentia repræsentet totum vibrationis ex itu & reditu compositæ tempus, partes ejus circumferentiæ ut K H repræsentabunt tempora quibus fibra per spatium correspondens N L movebitur; H L, K N repræsentabunt velocitates fibræ in punctis N & L, & H L — K N velocitatum incrementa vel decrementa, actioni elaterii fibræ proportionalia, hæc omnia patent ex Propos. XXXVIII. & LI. Lib. I.

2°. Sit B C longitudo pulsus, & dicatur V radius circuli cujus circumferentiæ illa longitudo B C æqualis foret, dico quod vis naturalis elaterii medii erit ad vim acceleratricem fibræ ut V — K N ad H L — K N.

Sint enim duo puncta E & G in suo naturali situ in medio elastico, quæ post aliquod tempus in locis ϵ & γ occurrant, suscepto nempe motu fibræ secundum Leges à nobis expositas, singula seorsim eumdem motum ac fibra habebunt, ideoque si sumptum fuerit E ϵ = P L erit P H tempus elapsum à momento quo punctum E motum fibræ suscepit & erit H L ejus velocitas in ϵ, pariter sit G γ = P N erit P K tempus elapsum à momento quo G motum fibræ suscepit, & erit K N ejus velocitas in γ, sint verò E & G puncta proxima; compressio spatii E G ubi in $\epsilon\gamma$ pervenit oritur ex eo quod plus processit ϵ quam γ, itaque diminutio ejus spatii erit æqualis spatio LN, ideoque $\epsilon\gamma$ erit æqualis E G — L N, utque vires quibus urgentur puncta medii, eorum densitati est proportionalis, vis tota quâ urgetur punctum γ est ad eam quâ urgebatur punctum G (quæ erat vis naturalis elaterii) inversè ut spatium $\epsilon\gamma$ ad E G seu ut $\frac{1}{EG - LN}$ ad $\frac{1}{EG}$. Sed est L N ad K H ut I M ad radium P O, & cum K H designet intervallum temporis quo pulsus à puncto E ad punctum G pervenit, est (per n. 32.) K H ad E G ut tota circumferentia P K S k ad B C, sive ut P O ad V; Ergo ex æquo est L N ad E G ut I M ad V & convertendo E G — L N ad E G ut V — I M ad V ideoque $\frac{1}{EG - LN} : \frac{1}{EG} = \frac{1}{V - IM} : \frac{1}{V}$, ac per consequens vis tota quâ urgetur punctum γ est ad vim naturalem elaterii ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$.



Vis illa tota quâ urgetur punctum γ est vis naturalis Elaterii medii cui superaddita est tota vis motrix fibræ quæ ad id punctum pervenit, ergo dividendo & reducendo ad communem denominatorem, Vis motrix fibræ in puncto N, est ad vim naturalem elaterii ut I M ad V — I M, sive invertendo, Vis naturalis elaterii, ad vim totam motricem fibræ in puncto N ut V — I M ad

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola physica $\epsilon\gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, (n) quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui à corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus à corpore tremulo propagari desinunt.

PRO-

ad I M, vel quia I M & K N pro se mutuo sumi possunt ubi puncta N & L sunt proxima est vis naturalis elaterii ad vim totam motricem fibræ ut V — K N ad K N; sed vis tota motrix fibræ est ad vim ejus acceleratricem durante tempusculo K H ut K N ad H L — K N, ergo ex æquo, est vis naturalis elaterii ad vim acceleratricem fibræ ut V — K N ad H L — K N: Q. E. D.

3°. In ipso motûs fibræ initio, vis elaterii fluidi in statu suo naturali est ad vim acceleratricem fibræ ut V ad H K; Nam ipso motus initio si P H sit infinitè parvum, ac per consequens etiam E ϵ infinitè parvum nullus adhuc motus ad particulam proximam G communicatur (*per n* 4.) ergo omninò evanescit K N ideoque V — K N = V, & H L — K N = H L sed arcus infinitè parvus & ejus sinus æquantur ergo H L = H K; Ergo vis elaterii fluidi in statu naturali est ad vim acceleratricem fibræ ipso ejus motus initio ut V ad H K.

Ex quibus fluit demonstratio Propositionis XLIX. Q. E. I.

(n) * *Quiescet, neque deinceps movebitur.* Quamprimùm lineola physica $\epsilon\gamma$ ad locum suum primum redierit, ipsius velocitas quam ordinata, m i, semper exponit (*prop.* 38. *lib.* 1.) extinguetur; & ejusdem lineolæ densitas visque elastica eadem erit cum densitate & vi elasticâ partis E G medii quiescentis; ideóque quiescet &c. * Id liquet ex n. 20. additionis nostræ de Motibus in fluido Elastico genitis.

316. Ex his intelligitur quomodò per vibrationes isochronas corporis resonantis producantur in aëre pulsus quibus ad aurem appulsis, fit in nobis perceptio soni, & cur soni, cessante motu tremulo corporis sonori, statim cessent. Liquet etiam tonos à numero pulsuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendere, cùm (per cor. prop. hujus) numerus pulsuum æqualis sit numero vibrationum ex itu & reditu compositarum quas chorda musica peragit, & ab isto numero tonorum diversitas oriatur (308). 316.

317. Patet etiam quomodo aëris pulsus sonum & tremores in aliis corporibus unisonis aut consonantibus creare possint. Nam cùm aëris pulsus in nervum musicum incurrit qui vibrationem unam ex itu & reditu compositam absolvere aptus sit, eo tempore quo pulsus suam percurrit latitudinem, commovetur nervus & oscillatur per exiguum licet spatium, & recurrentibus novis atque conspirantibus aëris pulsibus celeriùs agitatur sonumque reddit. At si nervus vibrationes suas integras seu ex itu & reditu compositas perficere nequeat quo tempore pulsus aëris latitudinem suam describit, possit tamen in partes aliquotas hujusmodi vibrationibus peragendis aptas dividi; partes illæ, quiescentibus divisionum punctis, congruenter ad pulsuum recursum sensim agitabuntur, vibrationesque suas cum pulsibus unisonas singulæ perficient. Si verò nervi duo proximi in eas partes aliquotas dividi possint quæ sint inter se ad unisonum, aut quod idem est, quæ vibrationes isochronas peragant, & horum nervorum unus pulsetur sonumque edat, nervi duo sese in partes suas aliquotas veluti divident ut ad unisonum reducantur. Ut si

ejus-

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulſuum in fluido elaſtico propagatorum velocitates ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè & ſubduplicatâ ratione denſitatis inversè; ſi modo fluidi vis elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.

Caſ. 1. Si media ſint homogenea, & pulſuum diſtantiæ in his mediis æquentur inter ſe, ſed motus in uno medio intenſior ſit: contractiones & dilatationes partium analogarum (o) erunt ut iidem motus. Accurata quidem non eſt hæc proportio. Verumtamen niſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, non errabit ſenſibiliter, ideoque pro phyſicè accuratâ haberi poteſt. (p) Sunt autem vires elaſticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires. Ideoque æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos per ſpa-

ejuſdem nervi capiantur partes duæ quarum ſit ratio 2 ad 3 & æqualiter tendantur, alteraque pars pulſetur, dividetur minor nervus in partes duas, & major in partes tres æquales quæ ſingulæ ſeorſim oſcillabuntur. Nam brevior nervus duarum nempe partium, ter oſcillando dum nervus longior partium trium, duas oſcillationes abſolvit (306) frequentiores in aëre pulſus excitat quorum recurſu nervus longior citiùs quàm par eſt agitatur; & cum utriuſque nervi aeriſque motus congruere non poſſint niſi ſingulæ nervorum partes aliquotæ & æquales ſeorſim oſcillentur, motus ille conſpirans tam in nervis quàm in aëre tandem producitur. Et hæc quidem in experimentis muſicis ità contingere obſervarunt *Joan. Wallis* Operum in fol. tom. 2. pag. 466. Et deinde Acuſticæ inſtaurator D. *Sauveur* in Monum. Acad. Pariſ. an. 1701. ubi alia experimenta refert quæ ex prædictis facile poſſunt explicari; * & inde ingenioſiſſimi ſyſtematis de tonorum productione & Harmoniâ fundamenta derivavit Ill. *De Mairan* omni laude ſuperior, quod ad Praxim feliciſſimè revocavit vir inter eruditos Orpheos Illuſtriſſimus D. *Rameau.*

(o) * *Erunt ut iidem motus.* Motus enim illi ſunt vel cauſæ vel effectus contractionis & dilatationis partium in pulſibus correſpondentium. Hæc tamen proportio accurata non eſt, ſi contractiones & dilatationes ſint valde intenſæ, quemadmodum ſi chorda muſica nimiâ vi pulſetur, vis motrix particularum ejus non eſt amplius proportionalis ſpatiis per quæ debet moveri, & aëris denſitas vi ipſius elaſticæ proportionalis non manet, ſi nimiâ vi comprimatur vel dilatetur aer. * Singulæ diminutiones intervallorum ſunt ut velocitates (n. 19.) non tamen ex eo ſequitur contractiones eſſe ut velocitates, (hunc verò caſum & reliquos demonſtravimus n. 29. additionis de mot. fluid. el.)

(p) * *Sunt autem vires elaſticæ motrices.* Nam vires elaſticæ motrices ſunt ut partium analogarum denſitates, hoc eſt, datâ materiæ quantitate, ut contractiones; & contractiones ſunt ut dilatationes quæ viribus elaſticis medii contracti producuntur;

ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itûs & reditûs unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno medio quàm in altero; (q) ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & (r) æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda eſt ut pulſuum latitudo; & in eâdem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. (ſ) Eſtque tempus itûs & reditûs unius in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ materiæ & ratione ſubduplicatâ ſpatii, atque ideo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itûs & reditûs unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

Caſ.

tur; *& velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires* (13. lib. 1.), hoc eſt, ut contractiones & dilatationes, *ideòque* cum ſpatia ſimul deſcripta ſint ut velocitates ſimul genitæ, *æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos*, ſeu motus ſuos *per ſpatia contractionibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia ſimul peragent*; *& propterea pulſus qui tempore itûs & reditûs latitudinem ſuam progrediendo conficiunt* (314.) *& in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum* æqualibus temporibus *deſcriptarum æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.*

(q) *Ponamus quod partes correſpondentes.* Quoniam (*per caſ.* 1.) in eodem medio homogeneo & datâ pulſuum latitudine ſpatium quod partes medii oſcillando deſcribunt, manente tempore oſcillationis, minui poteſt in datâ ratione; nihil obſtat quominùs in hoc ſecundo caſu ſupponatur quod partes mediorum correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia, iiſdem manentibus oſcillationum in unoquoque medio temporibus, eundo & redeundo percurrant. 317.

(r) * *Æquales erunt.* Si media ſint homogenea, uti in hoc 2°. caſu ſupponitur, vires elaſticæ motrices ſunt ut partium correſpondentium contractiones & dilatationes quas producunt, ſed quia quantitates materiæ in partibus correſpondentibus ſunt ut pulſuum latitudines, ſeu ut partium analogarum volumina, & partes illæ analogæ eundo & redeundo dilatantur & contrahuntur per ſpatia quantitatibus materiæ proportionalia (*per hyp.*) contractiones & dilatationes ideòque vires elaſticæ motrices æquales erunt.

(ſ) * *Eſtque tempus itûs & reditûs.* Nam tempus quo materia viribus æqualibus ad legem oſcillantis penduli agitatur, eſt in ra-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII

Caſ. 3. In mediis igitur denſitate & vi elaſticâ paribus, pulſus omnes ſunt æquiveloces. Quod ſi medii vel denſitas vel vis elaſtica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elaſticæ, & materia movenda in ratione denſitatis augetur; (t) tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in ſubduplicatâ ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ. Et propterea velocitas pulſuum erit in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ denſitatis medii inversè & ratione ſubduplicatâ vis elaſticæ directè. *Q. E. D.*

Hæc propoſitio ulterius patebit ex conſtructione ſequenti.

PRO-

ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione materiæ & ſubduplicatâ ratione ſpatii (*per cor.* 5. *prop.* 24. *lib.* 2.).

(t) *Tempus quo motus iidem peragantur &c.* Tempus quo motus per æqualia ſpatia peraguntur eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione materiæ movendæ directè & ſubduplicatâ ratione vis motricis inversè (*per cor.* 5. *prop.* 24.) ideóque in hoc tertio caſu, tempus, manente ſpatio deſcripto, augebitur in ſubduplicatâ ratione denſitatis, ac diminuetur in ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ, & propterea velocitas quæ eſt ut ſpatium directè & tempus inversè, (ob datum ſpatium per hyp.) erit in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ denſitatis medii inversè, & ratione ſubduplicatâ vis elaſticæ directè; ſed datis medii denſitate & vi elaſticâ, velocitas pulſuum, utcumque varietur ſpatium, data eſt, (*per caſ.* 1. & 2.) ergò velocitas pulſuum erit ſemper in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ denſitatis medii inversè & ratione ſubduplicatâ vis elaſticæ directè.

318. Ex hâc propoſitione patet cur ſoni omnis generis, gravis & acutus, intenſus & remiſſus, pari velocitate in eodem aëre propagentur. Nam ſonorum diverſitas, quoad *grave* & *acutum*, à numero pulſuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendet (316); at (per hanc prop.) pulſus aëris, ſeu plures ſeu pauciores dato tempore producantur, eâdem ſemper velocitate diffunduntur & dato tempore datum ſpatium conficiunt: Soni verò in eodem aëre producti eo intenſiores ſunt, manente tono, quo majus eſt ſpatium quod aëris particulæ eundo & redeundo deſcribunt dato tempore; ut ſi chorda muſica validius pulſetur, majores vibrationes dato tempore peragit, majoreſque oſcillationes particularum aëris excitat, & ſonus intenſior percipitur, licet tonus idem maneat & proinde pulſuum latitudo ac velocitas non mutentur. Cùm ergo tanta ſit velocitas lucis ut per atmoſphæram in inſtanti quoad ſenſum propagetur (*per ſchol. ad prop. XCVI. lib.* 1.); Si ſonus & lux eodem puncto temporis excitentur, uti in machinis bellicis flamma & fragor producuntur ſimul, & ſpectator ſpatium quo à corpore reſonante diſtat, tempuſque quod inter luminis & ſoni perceptiones intercedit, dimediatur, ſoni velocitas innoteſcet. Atque eo modo in variis regionibus varia obſervata eſt velocitas ſoni, & in Angliâ eâ celeritate ferri, *Flamſtedio* & *Halleyo* viſum eſt, quâ pedes Londinenſes plus minus 1142, Pariſienſes verò 1070, tempore minuti unius ſecundi percurreret. Quia verò denſitas & vis elaſtica aëris in variis terrarum locis, diverſiſque anni tempeſtatibus in eodem loco mutantur, inde quoque mutari oportet ſoni velocitatem. Diu creditum eſt, obſervantibus *Merſenno*, *Gaſſendo*, & Academicis Florentinis, ſonum neque conſpirante vento accelerari, neque adverſo retardari; Sed D. *Derham* experimentis accuratè inſtitutis, falſum id eſſe aſſerit.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii denſitate & vi elaſticâ, invenire velocitatem pulſuum.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLIX. PROBL. XI.

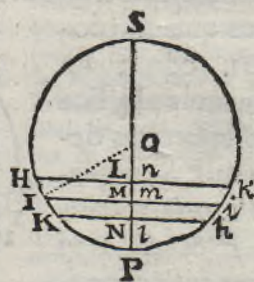
Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris noſtri comprimi; ſitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis ſit A: & quo tempore pendulum illud oſcillationem integram ex itu & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiæ circuli radio A deſcripti æquale.

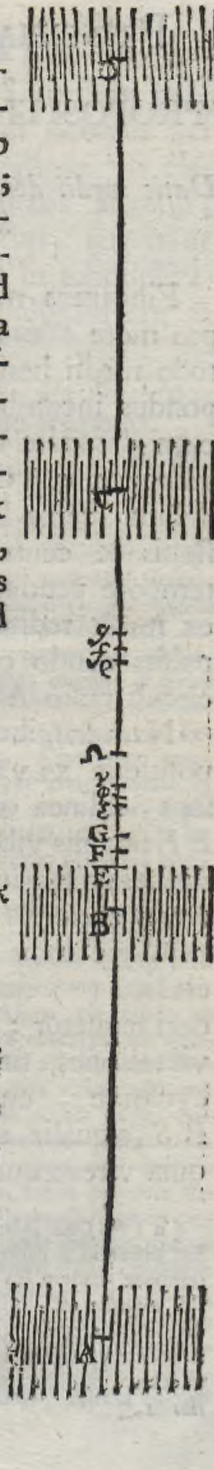
Nam ſtantibus quæ in propoſitione XLVII. conſtructa ſunt, ſi linea quævis phyſica *E F*, ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium *P S*, urgeatur in extremis itus & reditus cujuſque locis *P* & *S*, à vi elaſticâ (u) quæ ipſius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini *P S* æqualis eſt, oſcillari poſſet: id adeo quia vires æquales æqualia corpuſcula per æqua- 318.

(u) * *Quæ ipſius ponderi æquetur*, & quæ decreſcat ut ipſius diſtantia à centro O; peraget hæc vibrationes ſingulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis eſt, oſcillari poſſet; quia particulæ E F in hujuſmodi cycloide oſcillantis vis motrix eſt ſemper ut diſtantia ipſius à puncto cycloidis infimo ſeu medio, & in altiſſimis ſeu extremis punctis cycloidis ponderi ipſius æquatur, *per Cor. Prop. LI. lib.* 1.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLIX. PROBL. XI.

lia ſpatia ſimul impellent. Quare cùm oſcillationum tempora [x] ſint in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum, [y] & longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ *P S* ſeu *P O* ad longitudinem A. Sed vis elaſticâ, quâ lineola phyſica *E G*, in locis ſuis extremis *P*, *S* exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione propoſitionis XLVII.) ad [z] ejus vim totam elaſticam ut $HL - KN$ ad V, hoc eſt (cum punctum *K* jam incidat in *P*) ut [a] *HK* ad V: & [b] vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola *E G* comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad [c] lineolæ longitudinem *EG*; ideoque ex æquo, vis quâ lineola *E G* in locis ſuis *P* & *S* urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$, ſive ut $PO \times A$ ad VV, [d] nam *HK* erat ad *E G* ut *P O* ad V. Quare cùm tempora, quibus æqualia corpo-





[x] * *Sint in ſubduplicata ratione longitudinis pendulorum* (472, lib. 1.).

[y] * *Et longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius*; per cor. Prop. L. & Cor. 2. Prop. LII. lib. 1.

[z] * *Ad ejus vim totam elaſticam* in loco E G ubi medium quieſcit, ut &c.

[a] * *Ut H K ad V.* Cùm punctum K incidit in P, evaneſcit KN & fit $HL - KN = HL = HK$, per cor. 1. lem. VII. lib. 1.

[b] * *Et vis illa tota, hoc eſt, pondus incumbens, quo &c.* Vis elaſtica tota partis E G eſt in æquilibrio cum pondere comprimente, ubi medium quieſcit.

[c] * *Ad lineolæ longitudinem* E G. Cùm enim medium homogeneum, cujus altitudo eſt A, ſit (*per hyp.*) ejuſdem denſitatis cum medii parte E G, pondera ſunt ut volumina, hoc eſt, ut lineæ A & E G.

[d] * *Nam H K erat ad E G ut P O ad V*, in Dem. Prop. XLVII.

ra per æqualia ſpatia impelluntur, ſint (e) reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elaſticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in ſubduplicata ratione V V ad $PO \times$ A, atque (f) ideo ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A in ſubduplicatâ ratione V V ad $PO \times$ A, & ſubduplicatâ ratione PO ad A conjunctim; id eſt, in ratione integrâ V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium BC, (g) eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id (h) eſt, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium BC, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in (k) eâdem ratione; ideòque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLIX. PROBL. XI.

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſitâ, pulſus percurret ſpatium (l) quod erit æqua-

(e) * *Sint reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium.* Patet per cor. 3. prop. XXIV. libri hujus. 318.

(f) * *Atque ideo ad tempus &c.* Patet per compoſitionem rationum & ex æquo; quia (*ex demonſtratis*) tempus unius vibrationis particulæ E F, urgente vi ponderis ipſius, eſt ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione P O ad A.

(g) * *Eſt ad tempus oſcillationis unius & itu & reditu compoſitæ*, penduli cujus longitudo eſt A.

(h) * *Id eſt, ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A.* Nam (in demonſtr. prop. XLVII.) erat V radius circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo B C; unde eſt V ad A ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A.

(k) * *In eâdem ratione.* Quoniam tempus quo pulſus percurrit ſpatium B C; eſt ad tempus datum oſcillationis integræ penduli cujus longitudo A, datis medii denſitate & vi elaſticâ datâ, eſt ut ſpatium B C ad datam peripheriam circuli radio A deſcripti; liquet, quod tempus, quo pulſus percurrit ſpatium B C, aut eadem celeritate percurreret datam peripheriam circuli radio A deſcripti, fore eis ſpatiis proportionalem. Quare tempus quo pulſus percurrit ſpatium B C, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ penduli cujus longitudo eſt A, ut tempus quo pulſus percurrit idem ſpatium B C, ad tempus quo percurrit longitudinem æqualem circumferentiæ circuli cujus radius eſt A; Ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem.

(l) * *Quod erit æquale toti altitudini A* (30. lib. 1.)

æquale toti altitudini A; ideoque tempore oscillationis unius ex itu & reditu compositæ percurret spatium æquale circumferentiæ circuli radio A descripti: est (m) enim tempus casûs ad tempus oscillationis ut radius circuli ad ejusdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A sit ut fluidi vis elastica directè & densitas ejusdem inversè; (n) velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè & subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa (o) erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scho-

(m) * *Est enim tempus casûs*, per dimidiam altitudinem A ad tempus oscillationis unius ex solo itu, vel solo reditu constantis, ut diameter circuli ad ejus circumferentiam (470. lib. 1.), ideóque ad tempus duplum oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut radius circuli ad ejus circumferentiam. Quare cùm velocitates uniformes sint ut spatia eodem tempore descripta, pulsus verò propriâ velocitate æquabili peripheriam circuli radio A descripti tempore oscillationis unius ex itu & reditu compositæ percurrat, & grave cum uniformi velocitate, quam acquirere potest cadendo per dimidiam altitudinem A, eodem tempore idem spatium describat; patet velocitates illas pulsus & gravis esse æquales.

(n) * *Velocitas pulsuum erit &c.* Velocitas pulsuum, ut pote æqualis (*per cor.* 1.) velocitati quam gravia per dimidiam altitudinem A cadendo acquirunt, est in ratione subduplicatâ altitudinis illius A (28. lib. 1.); Sed altitudo A medii homogenei, cujus densitas eadem est cum densitate medii E G & pondus in æquilibrio cum ejusdem medii E G vi elasticâ, manente densitate est ut pondus seu ut vis elastica directè, & manente vi elasticâ seu pondere est ut densitas inversè, quia densitas est semper ut pondus directè & volumen seu altitudo A inversè; & propterea conjunctis his rationibus altitudo A est semper in ratione compositâ ex ratione vis elasticæ directè & ratione densitatis inversè. Quare velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè & subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

(o) * *Erit pulsus unius latitudo.* Quoniam pulsus omnes uniformi cum velocitate propagantur (*ex dem. Prop.* XLVIII. & XLIX.) & tot pulsus æquales producuntur in aëre, quot sunt corporis tremuli vibrationes isochronæ ex itu & reditu compositæ (*per cor. Prop.* XLVII.); Si spatium quod pulsus seu sonus dato tempore percurrere possit, per numerum vibrationum, quas corpus sonorum eodem tempore perficit, dividatur, quotus erit pulsûs unius latitudo. Sed dato sono, numerus vibrationum quas corpus sonorum dato tempore

Scholium.

Spectant propositiones novissimæ ad motum lucis & sonorum. (p) Lux enim cùm propagetur secundum lineas rectas, in actione solà (*per prop.* XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni verò propterea quod à corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aëris pulsus propagati *per prop.* XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni tympanorum. (q) Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cùm pondera specifica aquæ pluvia-

re peragit, invenitur (per formulas 303, 304); Si nimirum chorda musica ad unisonum vel ad notam consonantiam cum sono dato reducatur. Cùm enim tonorum differentia à numero vibrationum quas corpus resonum dato tempore absolvit, pendeat (308 & 312); iidem toni eodem vibrationum isochronarum numero producuntur. Notum verò est spatium quod sonus dato tempore describit (318).

Exempli causâ, si sonus omnium acutissimus, quem possimus distinguere, vibrationibus integris 6400 tempore minuti unius secundi absolutis producatur, & omnium gravissimus vibrationibus 12 $\frac{1}{2}$ excitetur, uti D. *Sauveur* in Historia Acad. Scient. Paris. an. 1700. arbitratus est; divide spatium 1142. pedum Londinensium, quod sonus tempore minuti unius secundi conficit, per numeros 6400. & 12 $\frac{1}{2}$ successivè, & quoti, videlicet digiti 2, 14, & pedes 91, 36, erunt latitudines pulsuum, quibus soni acutissimus & gravissimus producuntur.

(p) * *Lux enim cùm propagetur secundùm lineas rectas*, & interpositis corporibus opacis intercipiatur, in actione solâ, seu pressione, motuve per medium quodlibet fluidum propagato, consistere nequit; quia pressio & motus per medium omne fluidum propagata divergunt à recto tramite in spatia immota & pone obstacula circumquaque diffunduntur, per prop. citatas. Cùm igitur lumen sit corpus, ut pote motu progressivo præditum, ab obstaculis reflexum & refractum, motumque in corporibus quæ inflammat excitans, necesse esse videtur ut à corporibus luminosis tenuissima corpuscula incredibili fere velocitate quaquaversum emittantur. Spatia igitur cœlestia, quæ astrorum omnium Lux immensâ illâ celeritate permeat, materiâ quâdam æthereâ densissimâ, quæ radiorum lucis motum interciperet, plena esse non possunt. 318.

(q) 319. * *Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur.* Corpora enim majora & minus elastica majoribus soni gravioris, cum quo consonare possunt, vibrationibus facilius concutiuntur & congruenter ad pulsuum motum agitantur; nam debet esse proportio quædam inter pulsuum aëris latitudinem & corporum circumjectorum magnitudinem, densitatem & vim elasticam, ut sonus iis communicetur; & quo fibræ breviores sunt, tenuiores & magis tensæ, eo facilius acuto sono seu brevioribus aëris pulsibus agitantur & contremunt. Quæ omnia patent per notam 317.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. L. PROBL. XII.

vialis & argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad 13$\frac{2}{3}$ circiter, & ubi mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum aëris & aquæ pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: (r) erunt pondera ſpecifica aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa quam in conſtructione ſuperioris problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti (ſ) circumferentia eſt pedum 186768. Et cùm pendulum digitos 39$\frac{1}{5}$ longum oſcillationem ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, (t) abſolvat; pendulum pedes 29725 ſeu digitos 356700 longum (u) oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum 190$\frac{3}{4}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore ſonus progrediendo (x) conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius ſecundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio craſſitudinis ſolidarum particularum aëris, per quam ſonus utique (y) propagatur in inſtanti. Cùm pondus aëris ſit ad pondus aquæ ut 1 ad

(r) * *Erunt*; ex æquo & per compoſitionem rationum, pondera ſpecifica ſive denſitates aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Sed fluidorum in ſe homogeneorum, eidem baſi incumbentium, & in æquilibrio conſiſtentium altitudines ſunt inversè ut denſitates (173. *lib.* 2.): eſt igitur 1 ad 11890 ut 30 digit. ad altitudinem aëris uniformis qui cum 30 digitis argenti vivi æquiponderat; & ideo altitudo hæc eſt digitorum 356700, ſeu, dividendo per 12, pedum Anglicorum 29725.

(ſ) * *Circumferentia eſt pedum* 186768. Eſt enim radius ad circumferentiam ut 113 ad 710, ſive ut 29725 ad 186768 quàm proximè.

(t) * *Abſolvat.* Pendulum cujus longitudo eſt pedum Pariſienſium 3 & linearum 8 $\frac{1}{2}$, oſcillationem unam ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum abſolvit (471. lib. 1.); & pes Londinenſis eſt ad pedem Pariſienſem ut 15 ad 16 quam proximè, & ita ſunt pedes 3 cum lineis 8 $\frac{1}{2}$ ad digitos 39 $\frac{1}{6}$, vel 39 $\frac{1}{5}$ quam proximè.

(u) * *Oſcillationem conſimilem tempore &c.* Oſcillationum tempora ſunt in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum (472. lib. 1.), & propterea ut 39 $\frac{1}{5}$ ad 356700, ita 4 ad quadratum numeri minutorum ſecundorum, qui quæritur, & peracto calculo invenitur eſſe 190 $\frac{3}{4}$ quam proximè.

(x) * *Conficiet pedes &c.* Per Prop. XLIX.

(y) * *Propagatur in inſtanti.* Nam corpus ſolidum quod condenſari non poteſt, dum movetur, totum ſimul movetur, & ideo motus ab uno corporis illius extremo ad 870, & ſales ſint fere duplo denſiores quàm aqua; ſi particulæ aëris ponantur eſſe ejuſdem circiter denſitatis cum particulis vel aquæ vel ſalium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: (z) diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi juxta calculum ſuperiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$. ſeu 109 circiter, ob craſſitudinem particularum aëris: & ſic ſonus tempore minuti unius ſecundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aëre latentes, cùm ſint alterius ela-

mo ad alterum extremum propagatur in inſtanti.

(z) * *Diameter particulæ aëris erit &c.* Fingantur cubi duo æquales, quorum alter aëre plenus ſit, alter medio continuo ejuſdem circiter denſitatis cum aquâ vel ſalibus. Hoc medium continuum diviſum ſit in particulas æquales, tenuiſſimas & ſeſe mutuo contingentes; aër verò ex hujuſmodi particulis, quæ æqualibus intervallis diſtinctæ ſint, conſtet. Harum particularum diameter dicatur D, ſpatium inter illas in aëre interceptum S, & ideo intervallum inter centra particularum aëris $S+D$, numerus particularum aëris in uno cubi latere N, & proinde earum numerus in cubo toto aëreo N^3, & latus cubi $NS+ND$. Sit M numerus particularum alterius medii continui in uno latere cubi, & propterea M^3 earum numerus in cubo toto, ac MD cubi latus. Quia duo cubi æquales ſupponuntur, erit $NS+ND=MD$. Si denſitas aëris ſit ad denſitatem alterius medii continui ut 1 ad A; quia paribus voluminibus, denſitates ſunt ut quantitates materiæ, quæ ſunt ut numeri particularum magnitudine & denſitate æqualium, erit $1 : A = N^3 : M^3$, & hinc $1 : A^{\frac{1}{3}} = N : M$, ideoque $M = NA^{\frac{1}{3}}$. Quare cùm ſit $NS+ND=MD=NDA^{\frac{1}{3}}$, erit $S+D=DA^{\frac{1}{3}}$, & $S=D\times[A^{\frac{1}{3}}-1]$, ideoque $D:S=1:A^{\frac{1}{3}}-1$ ac $D:S+D=$ 319
$1:A^{\frac{1}{3}}$. Jam ſi ponatur A fere æqualis numero 870, erit fere $A^{\frac{1}{3}}=9$; ſi verò ponatur $A=1000$, vel $A=1100$, vel $A=1200$, erit fere $A^{\frac{1}{3}}=10$; unde diameter D ſolidæ particulæ aëris erit ad intervallum $S+D$ inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum S inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ſpatium totum quod particulæ ſolidæ in lineâ rectâ datâ poſitæ occupant, erit ad ſpatium reliquum quod intervalla particularum in eâdem lineâ tenent, ut 1 ad 8 vel 9 circiter, & ad totam lineam ut 1 ad 9 vel 10. Sed ſi nulla habeatur ratio craſſitudinis ſolidarum particularum aëris, ſonus lineam rectam pedes 979 longam tempore minuti unius ſecundi deſcribit: quare cùm ſonus per ſpatium totum quod ſolidæ particulæ aëris occupant, in inſtanti propagetur, & ſit 9 ad 1 ut linea pedes 979 longa ad ipſius partem quam particulæ ſolidæ aëris occupant; partem illam, quæ eſt $\frac{979}{9}$, ſeu 109 pedum circiter, addere licet ſpatio 979 pedum.

elateris & alterius toni, ([a]) vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo ſoni propagantur. His autem quieſcentibus, motus ille celerius propagabitur per ſolum aërem verum, idque in ſubduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut ſi atmoſphæra conſtet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, motus ſonorum celerior erit in ſubduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quam ſi propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus ſonorum ſupra inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto ſonus, tempore minuti unius ſecundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita ſe habere debent tempore verno & autumnali, ubi aër per calorem temperatum rareſcit, & ejus vis elaſtica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condenſatur, & ejus vis elaſtica remittitur, motus ſonorum tardior eſſe debet in ſubduplicatâ ratione denſitatis; & viciſſim æſtivo tempore debet eſſe velocior.

Conſtat autem per experimenta quod ſoni tempore minuti unius ſecundi eundo conficiunt pedes *Londinenſes* plus minus 1142, *Pariſienſes* vero 1070.

Cognitâ ſonorum velocitate innoteſcunt etiam intervalla pulſuum. ([b]) Invenit utique *D. Sauveur*, factis à ſe experimentis, quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum *Pariſienſium* plus minus quinque, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chor-

dæ

(a) * *Vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo ſoni propagantur.* Nam vibratorius particularum aëris motus, quo ſonus producitur, corporibus ejuſdem toni facile, at corporibus alterius elateris & alterius toni ægrè aut nullo modo communicari poteſt (317). Unde ſi atmoſphæra conſtet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, ſitque proinde totum pondus atmoſphæræ ad pondus vaporum ut 11 ad 1, & ad pondus aëris veri, ſubducto pondere vaporum, ut 11 ad 10, minuenda eſt quantitas materiæ movendæ in ratione 11 ad 10. Sed ſi denſitas medii, ſive quantitas materiæ ſub dato volumine contentæ, cæteris paribus, minuatur, velocitas ſoni augetur in eâdem ratione ſubduplicatâ (*per prop.* XLVIII). Quare (*in hyp. Newt.*) velocitas ſoni augenda eſt in ratione ſubduplicatâ 10 ad 11, vel in integrâ circiter ratione 20 ad 21; & ideo ſpatium dato tempore minuti unius ſecundi deſcriptum, quod erat 1088 pedum, augendum in ratione 20 ad 21. Eſt autem fere 20 ad 21 ut 1088 ad 1142.

(b) * *Invenit utique D. Sauveur* in Hiſtoriâ Acad. Scient. Pariſ. an. 1700.

dæ quæ tempore minuti unius ſecundi (c) centies recurrit. Sunt igitur pulſus plus minus centum in ſpatio pedum *Pariſienſium* 1070, quos ſonus tempore minuti unius ſecundi percurrit; ideoque pulſus unus occupat ſpatium pedum *Pariſienſium* quaſi $10\frac{7}{10}$, id eſt, duplam circiter longitudinem fiſtulæ. (d) Unde veroſimile eſt quod latitudines pulſuum, in omnium apertarum fiſtularum ſonis, æquentur duplis longitudinibus fiſtularum.

Por-

(c) * *Centies recurrit*, hoc eſt centum oſcillationes ex itu & reditu compoſitas tempore minuti unius ſecundi abſolvit. Idem D. *Sauveur* in Monumentis Acad. Pariſ. an. 1713. oſcillationes 101 vel 102 pro ejuſdem fiſtulæ ſono poſuit.

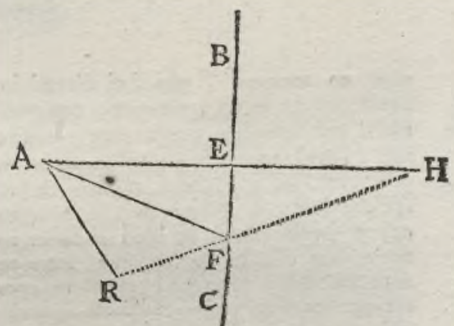
(d) * *Unde veroſimile eſt &c.* Idem confirmatur alio experimento ejuſdem D. *Sauveur*, qui loco mox citato invenit quod fiſtula aperta, cujus longitudo eſt pedum Pariſienſium plus minus 2, ſonum edit ejuſdem toni cum ſono chordæ quæ 243 oſcillationes integras tempore minuti unius ſecundi perficit. Unde ſi dividatur numerus 1070 per 243, prodit pulſus unius latitudo ped. Pariſ. $4\frac{2}{5}$ circiter, id eſt, dupla circiter longitudo fiſtulæ. Eſt autem in organis pneumaticis fiſtula aperta, quæ patet in ſuperiori & latiori extremo, alteri quo aër fiſtulam ingreditur, oppoſito. Si occludatur fiſtula, octavâ gravius ſonat.

Huc uſque de ſono directo plura diximus, de reflexo pauca adjungenda ſunt.

320. *Prop.* Sonus percipitur tanquam ex eo loco procedens ex quo quaſi centro pulſus aëris propagantur. Conſtat experientiâ.

321. *Cor.* 1. Hinc ſi ſonus è centro quovis A directe propagatus in obſtaculum planum ſatis magnum B C incurrat, & ex A ducatur ad B C perpendicularis A E, producaturque ad H ut ſit E H æqualis A E; ſonus reflexus eodem fere modo percipietur ac ſi ex loco H tanquam centro directè propagaretur (194).

322. *Cor.* 2. Similiter ſi ſonus à centro quovis propagatus in obſtaculum quod-



libet impingat, à quo ita reflectatur ut 322.
poſt reflexionem radii ſoni in centrum aliud convergant; ſonus reflexus tanquam ex hoc ſecundo centro propagatus audietur.

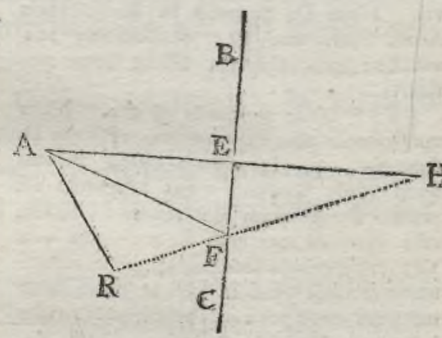
323. *Cor.* 3. Unde ſi radii ſonori ſatis denſi ad aurem appellentes & ſoni unius ſenſationem producentes, ab aure in diverſa centra convergant; locus ex quo ſonus propagatur, non bene diſtinguetur.

324. Si ſonus producatur in A, & deinde ab obſtaculo quovis B C (*vide fig. ſup.*) reflectatur tanquam ex centro H propagatus; auditor in loco R ſonum directum per A R propagatum percipiet primùm; deinde ſonum reflexum quaſi ex centro H procedentem, poſtquam motu directo ſpatium A F, & motu reflexo ſpatium F R deſcripſit, audiet. Idem igitur ſonus audietur bis, modò tamen diſtantiarum A R & A F R differentia tanta ſit ut ſonus directus & ſonus reflexus eodem ſenſibili momento organum auditûs non afficiant; nam ſi ſonus reflexus ad aurem perve-

nire

Porro cur ſoni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutius audiuntur ubi longiſſimè diſtamus à corporibus ſonoris, quàm cùm proximè abſumus, patet ex corollario propoſitionis XLVII. libri hujus. Sed & cur ſoni in tubis ſtentorophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus à causâ generante augeri ſolet. Motus autem in tubis dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo ſingulis recurſibus impreſſo magis augetur. Et hæc ſunt præcipua phænomena ſonorum.

SEC-



niret eo tempore, quo ſoni directi impreſſio adhuc in eâ perſeverat, non geminus, ſed intenſior tantùm ſonus audiretur. Porrò experientiâ conſtat ſonos vix poſſe diſtingui; ſi plures quàm 9 circiter ſyllabæ tempore minuti unius ſecundi ſucceſſivè producantur; & ideo ne ſonus reflexus cum directo confundatur, inter eorum ad aurem appulſus intercedere oportet partem nonam minuti unius ſecundi, quo tempore ſonus deſcribit ſpatium 127 pedum Londinenſium circiter. Hoc igitur ſpatio minor eſſe non debet diſtantiarum AR & AFR differentia, ut ſonus reflexus diſtinctè percipi poſſit in R. Quod ſi auditor in A locetur, ubi ſonus directus producitur, & ſpatium 2 AE quod ſonus deſcribit ut ad centrum A poſt reflexionem in E redeat, ſit 127 pedum Londinenſium, ideoque AE 63 vel 64 pedum circiter, diſtingui poterit ſonus reflexus à directo. Si plura ſint obſtacula juſtis intervallis diſſita, in quæ ſonus directe offendat, is quaſi ex variis locis pluries repetitus audietur; ut cum machinarum bellicarum fragorem vel tonitru boatum circumjecta ædificia vel craſſiores nubes pluries referunt. Sæpe etiam obſtacula ſonum directum mutant, dum vehementiori aëris tremore concuſſa variè contremunt & aerem repercutiendo detonant.

325. Ex iiſdem principiis explicari poteſt tubæ vocalis ſeu ſtentorophonicæ efficacia ad vocem articulatam in loca maxime diſſita propagandam. Sunt hujuſmodi tubæ variarum figurarum, ſed omnes ſatis anguſtæ, oblongæ & intus perpolitæ; quo ſonus in arctum coactus in latius ſpatium ſeſe diffundere & virium detrimentum pati prohibeatur, ac radii ſonori in determinatam plagam confertiores dirigantur. Fabrefiunt ex materiâ ad concipiendum motum tremulum, quo ſonus producitur, aptâ, ut ſonus hoc partium tubæ & aëris ab ipſis agitati tremulo motu multiplicatus impetum majorem acquirat & longius progrediendi vim habeat. Optima tubarum vocalium figura, Auctore Clar. *Joh. Matthia Haſio*, illa cenſetur, quæ fit ex converſione parabolæ circa ipſius axem, orificio exiguo tubæ, quod os loquentis ſuſcipit, in ipſo foco parabolæ conſtituto. Hâc enim tubâ radii ſonori, ſaltem magnam partem, reflectuntur ad axem tubæ paralleli (194. *lib.* 2. & *Theor.* 3. *de parabola* lib. 1.). Idem *Haſius*,

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

HYPOTHESIS.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, quâ partes fluidi separantur (e) *ab invicem.*

fius, quo tubam longiorem, non nimium auctâ amplitudine, reddat, tubum ellipticum oblongum parabolico ita jungit, ut elliptici focus unus concidat cum foco parabolici, & os loquentis in altero elliptici foco constituatur; quâ ratione fit ut radii soni ab ore in tubo elliptico ad focum parabolici partim directi, partim reflexi dirigantur (*per theor. 4. de ellipsi*), & deinde in tubo parabolico, ut modò dictum est, progrediantur. Limbus tubæ, qua parte amplissima est, quâque sonus emittitur, ad formam labiorum recurvandus est, quo minus effectum tubæ turbare possit aëris externi in tubam irruentis motus. Hæc omnia fusè & accuratè exposita vides, in ipsa laudati Auctoris Dissertatione Physico-Mathematicâ de tubis stentoreis.

* Tubis stentoreis annumerandæ sunt omnes tubæ militares aut venatoriæ sive rectæ sive incurvæ, exiguus enim sibilus quem edit tubicen constricto aëre inter labium & tubæ oram, in prodigiosum erumpit sonum, & observabile videtur ea instrumenta ita à Parabolâ discrepare ut axis suæ respectu convexa potius sit tuba quàm concava. Incrementum itaque soni non tam pendere videtur ex eo quod sonus secundùm axis tubæ directionem parallelus exeat, quàm ex eo ipso quod indicat NEWTONUS, nempe ex motus reciprocatione, ita ut forma tubæ ea esse debeat ut sonus ab uno pariete ad alterum repellatur, extrinsecus sonum derivando, ita tamen ut nonnisi per innumeras reflexiones sive reciprocationes foras emittatur. 325.

(e) * *Ab invicem.* Resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, est semper eadem in spatiis æqualibus, quæcumque fuerit mobilis velocitas; cùm in omnibus spatiis æqualibus idem defectus lubricitatis superandus sit. Est igitur hæc resistentia, cæteris paribus, ut spatium quod mobile describit, hoc est, dato tempore, ut velocitas. Quia verò partes contiguæ quæ simul pari velocitate moventur, sese mutuo non atterunt; capienda hic est velocitas partium relativa, quâ partes separantur ab invicem. Sed de hâc hypothesi vide Scholium sequens.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LI. THEOR. XXXIX.

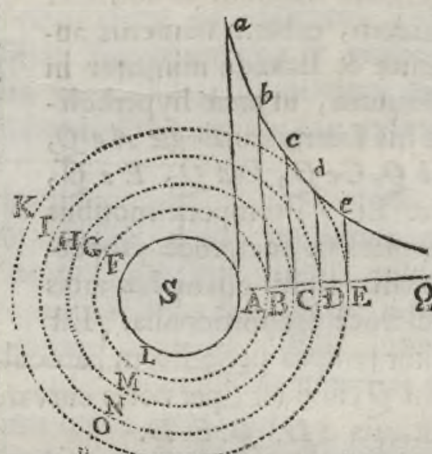
PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si cylindrus ſolidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem, perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; dico quod tempora periodica partium fluidi ſunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri.

Sit AFL cylindrus uniformiter circa axem S in orbem actus, & circulis concentricis BGM, CHN, DIO, EKP, &c. diſtinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos ſolidos ejuſdem craſſitudinis. Et quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ erunt (per hypotheſin) ut ([a]) eorum tranſlationes ab invicem, & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concavâ quam ex parte convexâ; prævalebit impreſſio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, debent impreſſiones ex parte utrâque ſibi invicem æquari & fieri in regiones

(a) 326. * *Ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ &c.* Si ſuperficies contiguæ nullâ velocitate relativâ inter ſe moverentur, aut ſi eſſent perfectè lubricæ, nulla foret earum frictio: at ſi ſuperficies ſint aſperæ & alia ſuper aliam incedat, naſcetur ex partium attritu reſiſtentia, quæ, dato tempore & cæteris paribus, velocitati ſuperficierum relativæ proportionalis eſt (*per hyp.*). Unde ſi ſuperficies contiguæ, homogeneæ & æqualis ubique aſperitatis ſe ſe viribus æqualibus premant, & præterea ſuperficies quæ ſuper alias ſibi contiguas incedunt, æquales ſint; reſiſtentiæ ex attritu dato tempore genitæ proportionales erunt tranſlationibus ſuperficierum contiguarum ab invicem, cùm hujuſmodi tranſlationes ſint ſpatia velocitatibus relativis dato tempore deſcripta. Si verò tranſlationes illæ ſeu velocitates relativæ ſuperficierum contiguarum ponantur æquales; reſiſtentiæ, cæteris paribus, erunt ut ſuperficies contiguæ quæ ſeſe mutuo atterunt. Quare ſi nec ſuperficies contiguæ, nec earum velocitates relativæ ſeu tranſlationes ab invicem æquantur; reſiſtentiæ, cæteris paribus, erunt in ratione compoſitâ ex ratione ſuperficierum contiguarum & ratione tranſlationum ab invicem dato tempore factarum. Impreſſiones verò contiguorum orbium in ſe mutuo factæ, ſunt ut reſiſtentiæ quibus producuntur.

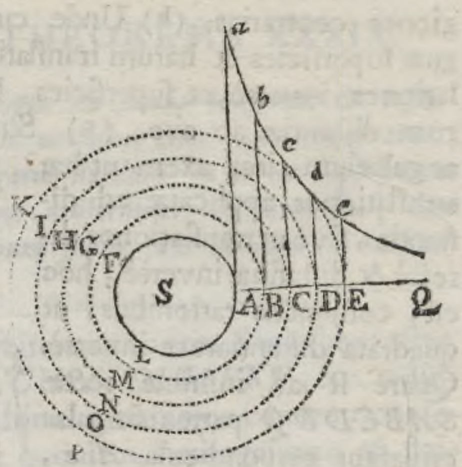
giones contrarias. (b) Unde cum impreſſiones ſunt ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem, erunt tranſlationes inversè ut ſuperficies, hoc eſt, inversè ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe. (c) Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inversè; hoc eſt, conjunctis rationibus, ut quadrata diſtantiarum inversè. Quarè ſi ad infinitæ rectæ $SABCDEQ$ partes ſingulas erigantur perpendicula Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. ipſarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur (d) linea curva hyperbolica; erunt ſummæ differentiarum,



(b) * *Unde cùm* (per hyp.) orbis unuſquiſque in motu ſuo uniformiter perſeveret, & proinde impreſſiones ex utraque parte cujuſque orbis in plagas contrarias factæ æquales ſint; impreſſiones illæ, dato tempore, datæ ſunt, & ideo ratio compoſita ex rationibus tranſlationum & ſuperficierum contiguarum, quæ eſt ut impreſſio, data eſt. Tranſlationes igitur dato tempore factæ, ſunt inversè ut ſuperficies, hoc eſt, inversè ut ſuperficierum diſtantiæ ab axe: nam cylindrorum ejuſdem longitudinis ſuperficies ſunt ut diſtantiæ ab axe cylindri, & hic omnes ſuperficies cylindricæ; quæ circa axem infinitum revolvuntur, ſunt ejuſdem longitudinis infinitæ (*per hyp.*).

(c) * 327. *Sunt autem differentiæ motuum angularium &c.* Motus angulares dicuntur ii, quibus ſingula puncta A, B, C, D, E &c. radiis ad axem cylindri perpendiculariter ductis angulos deſcribunt. Sunt igitur anguli illi quaſi ſpatia uniformi motu deſcripta, & ideo motus angula- 327.
res ſunt ut anguli deſcripti directe & tempora quibus deſcribuntur inversè, & dato tempore ſunt ut anguli deſcripti. Hinc, dato tempore, motuum angularium differentiæ ſunt ut differentiæ angulorum deſcriptorum, hoc eſt (154. *lib.* 1.) ut tranſlationes punctorum ſeu ſuperficierum ab invicem directè & diſtantiæ ab axe inversè: nam tranſlationes illæ ſunt arcus circulares quos ſingula puncta per ſuam velocitatem relativam deſcribunt, & diſtantiæ ab axe ſunt illorum arcuum radii. Sed tranſlationes dato tempore factæ, ſunt (*ex demonſtr.*) ut diſtantiæ ab axe inversè. Quarè differentiæ motuum angularium, dato tempore, ſunt ut quadrata diſtantiarum inversè.

(d) * *Linea curva hyperbolica.* Quoniam ordinatæ A a, B b, &c. ſunt inversè ut abſciſſarum S A, S B, &c. quadrata; creſcente abſciſſâ ac ſine fine productâ, correſpondens ordinata decreſcit & numtiarum, (e) hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, id eſt, ſi ad conſtituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ, &c. Et (f) tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt



igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis D reciprocè ut area DdQ, hoc eſt (per notas curvarum quadraturas) (g) directè ut diſtantia SD. *Q.E.D.*

(h) *Corol.* 1. Hinc motus angulares particularum fluidi ſunt reci-

numquam evaneſcit, & ideo recta S Q eſt curvæ aſymptotus; & ſimili ratione patet rectam per S ductam normaliter ad S Q eſſe alteram curvæ aſymptotum.

(e) * *Hoc eſt, motus toti angulares.* Quoniam ſolo cylindri A F L impulſu agitur fluidum in orbem (*per hyp.*), neceſſe eſt ut motus angularis partium fluidi, creſcente earum diſtantia ab axe cylindri, continuo decreſcat, ac tandem ad diſtantiam infinitam evaneſcat. Unde motus totus angularis puncti A ſeu orbis A F L eſt omnium maximus, & motus totus angularis puncti cujuſlibet C æqualis eſt ſummæ omnium differentiarum motuum angularium punctorum D, E & ſequentium in infinitum (106. *lib.* 1.); ideoque motus toti angulares ſunt ut reſpondentes ſummæ linearum A a, B b, C c, D d, E e &c. in infinitum.

(f) * 328. *Tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia.* Motus angulares ſunt ut anguli deſcripti directè & tempora quibus deſcribuntur inversè (326); & propterea ſi anguli deſcripti capiantur æquales quatuor rectis, ut totus circulus deſcribatur & tempora fiant temporibus periodicis æqualia, motus angulares erunt ut tempora periodica inversè.

(g) * *Directè ut diſtantia S D.* Areæ D d Q momentum eſt $Dd \times DE$; & ideo, ob ordinatam D d quadrato abſciſſæ S D reciprocè proportionalem, momentum illud eſt ut $\frac{DE}{SD^2}$, & (*per caſ.* 4. *Lemm.* 2. *libri hujus*) area D d Q eſt ut $\frac{1}{SD}$; quæ quantitas negativa prodit, quia area D d Q abſciſſæ D S non adjacet, ſed ad partes contrarias vergit in infinitum. Eſt igitur tempus periodicum particulæ cujuſvis D reciprocè ut $\frac{1}{SD}$, hoc eſt, directè ut S D.

(h) * *Cor.* 1. Ex demonſtratis, motus angulares partium fluidi ſunt reciprocè ut tempora periodica, hoc eſt, reciprocè ut illa-reciprocè ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri, & velocitates abſolutæ ſunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vaſe cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, ſintque revolutionum tempora ut ipſorum ſemidiametri, & perſeveret fluidi pars unaquæque in motu ſuo: (i) erunt partium ſingularum tempora periodica ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde ſi toti cylindrorum & fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, (k) habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.

Co-

illarum diſtantiæ ab axe cylindri. Velocitates verò abſolutæ, ut pote uniformes, ſunt ut circumferentiæ deſcriptæ, ſeu ut diſtantiæ ab axe cylindri directè & tempora periodica inversè, hoc eſt, ut diſtantiæ directè & diſtantiæ inversè, ideoque ſunt in ratione æqualitatis. Hinc verò (*per cor.* 5. *prop.* 4. *lib.* 1.) vires centrifugæ particularum æqualium fluidi ſunt reciprocè ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri; & propterea vis quâ tota ſuperficies cylindrica nititur ab axe cylindri recedere, eſt ut eadem ſuperficies directè & diſtantia ejus ab axe inversè, & ideo data eſt.

(i) * *Erunt partium ſingularum tempora periodica ut &c.* Patet, quia cylindrus exterior uniformi velocitate motus locum tenet ſuperficiei cylindricæ, quæ in demonſtratione adhibita eſt.

(k) * *Habebitur motus fluidi in cylindro quieſcente.* Sit EKP cylindrus exterior, cujus tempus periodicum in hypotheſi Corollarii 2i. dicatur t E; & quoniam in eadem hypotheſi velocitates particularum abſolutæ ſunt æquales (*per cor.* 1.), ſingulæ illæ particulæ ſpatia æqualia eodem tempore t E deſcribent, hoc eſt, ſpatia æqualia peripheriæ E K P, quam punctum E tempore t E percurrit. Jam ſi toti cylindrorum & fluidi ſyſtemati auferatur motus omnis angularis. Cylindri exterioris; Ex ſpatio E K P, quod ſingulæ particulæ tempore t E deſcribunt, auferenda erit integra circuli peripheria, quam particula quælibet ſeorſim deſcribit, ut habeatur ſpatium quod eadem particula eodem tempore t E percurrit in cylindro quieſcente. Erit igitur E K P — D I O ſpatium quod particula quævis D tempore t E deſcribit, poſtquam motus omnis angularis cylindri exterioris ablatus eſt. Quia verò particulæ ſingulæ revolvuntur æquabiliter (*per hyp.*), erit ſpatium EKP—DIO ad D I O, ſive SE—SD ad S D, ut tempus t E ad tempus pe- 327.

rio-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IX. Prop. LI. Theor. XXXIX.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus; revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum corollario quarto definitum (l) acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus (m) quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliquâ extrinsecus impressâ motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aquâ profundâ stagnante experiri licet.

riodicum particulæ D in cylindro quiescente; & ideo si hoc tempus dicatur T D, erit $TD = \frac{SD \times tE}{DE}$; & simili modo tempus periodicum particulæ A in eâdem hypothesi (quod dicatur T A) $= \frac{SA \times tE}{AE}$; unde habetur $tE = \frac{AE \times TA}{SA}$, & ideo $TD = \frac{SD \times AE \times TA}{SA \times DE}$. Dato igitur tempore periodico cylindri interioris, dabitur tempus periodicum particulæ cujusvis fluidi in cylindro quiescente. Quia verò A E, S A & T A datæ sunt, erit T D ut $\frac{SD}{DE}$, hoc est, particularum fluidi tempora periodica sunt ut distantiæ ipsarum ab axe cylindri interioris directè & distantiæ earumdem à superficie cilindri quiescentis inversè.

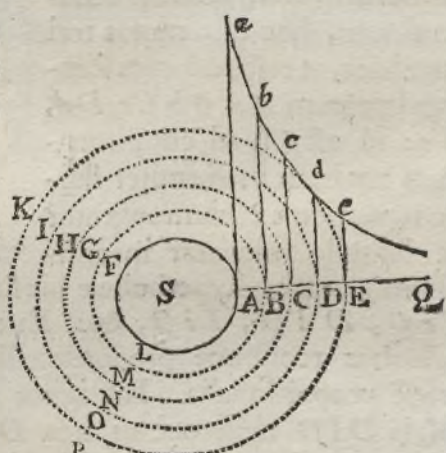
(l) * *Acquirant.* Patet per cor. 3.

(m) * *Quoadusque tempora periodica cylindri utriusque æquentur.* Tamdiu enim cylindrus interior atterit & urget fluidi partes, motumque ipsis eâ actione communicat qui ad cylindrum exteriorem transit, quamdiu omnium partium contiguarum motus angulares inæquales sunt, seu quamdiu tempora periodica non æquantur inter se.

PRO-

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si ſphæra ſolida, in fluido uniformi & infinito, circa axem poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro ſphæræ.

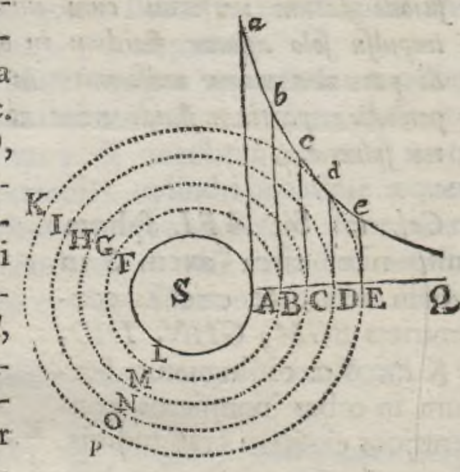


Caſ. 1. Sit *AFL* ſphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *GHN*, *DIO*, *EKP*, &c. diſtinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis. Finge autem orbes illos eſſe ſolidos; & quoniam homogeneum eſt fluidum, impreſſiones contiguorum orbium in ſe mutuo factæ, erunt (per hypotheſin) ut eorum tranſlationes ab invicem & ſuperficies contiguæ in quibus impreſſiones fiunt. Si impreſſio in orbem aliquem major eſt vel minor ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impreſſio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipſius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unuſquiſque in motu ſuo perſeveret uniformiter, debebunt impreſſiones ex parte utrâque ſibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cùm impreſſiones ſint ut contiguæ ſuperficies & harum tranſlationes ab invicem; erunt tranſlationes inverſè ut ſuperficies, hoc (n) eſt, inverſè ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum à centro. Sunt autem differen-

(n) * *Hoc eſt, inverſè ut quadrata diſtantiarum ſuperficierum à centro.* Nam ſuperficies ſphæricæ, ut pote ſimiles, ſunt ut quadrata radiorum ſeu diſtantiarum à centro.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

rentiæ motuum angularium circa axem ut hæ tranſlationes applicatæ ad diſtantias, ſive ut tranſlationes directè & diſtantiæ inversè; hoc eſt, conjunctis rationibus ut cubi diſtantiarum inverſe. Quare ſi ad rectæ infinitæ *SABCDEQ* partes ſingulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipſarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt ſummæ differentiarum, hoc eſt, motus toti angulares, ut reſpondentes ſummæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id eſt (ſi ad conſtituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his ſummis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Eſt igitur tempus periodicum orbis cujuſvis *DIO* reciprocè ut area *DdQ*, hoc eſt, per notas curvarum quadraturas, (o) directè ut quadratum diſtantiæ *SD*. (p) Id quod volui primò demonſtrare.

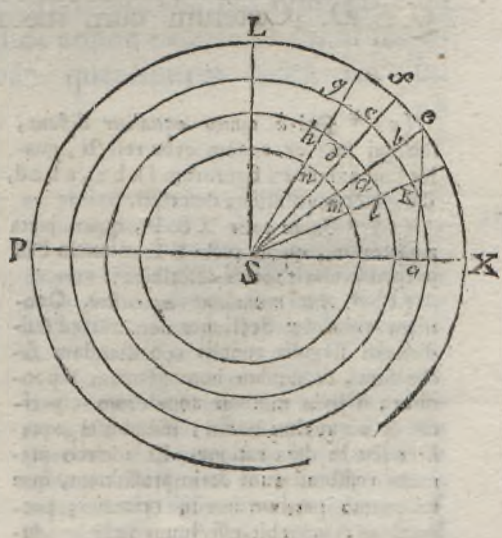


Caſ.

(o) * *Directè ut quadratum diſtantiæ S D.* Areæ D d Q momentum eſt D d × D E, ideoque, ob ordinatam D d cubo abſciſſæ S D reciprocè proportionalem, momentum illud eſt ut $\frac{DE}{SD^3}$, & propterea (*per caſ. 4. Lem. 2. libri hujus*) area fluens D d Q eſt ut $\frac{1}{SD^2}$, quæ negativa prodit, quia non adjacet abſciſſæ D S, ſed in plagam contrariam D Q vergit. Eſt igitur tempus periodicum orbis cujuſvis DIO reciprocè ut $\frac{1}{SD^2}$; hoc eſt; directè ut quadratum diſtantiæ S D.

(p) * *Id quod volui primò demonſtrare.* Caſûs primi demonſtratio valet, ſi medium ſphæræ circumfuſum ex innumeris orbibus ſolidis, tenuiſſimis ac concentricis conſtare fingatur. In caſibus ſecundo & tertio ſinguli illi orbes ſphærici in innumeros annulos, & annuli ſinguli in tenuiſſimas particulas, ad conſtituendum medium fluidum, dividuntur.

(q) *Caſ.* 2. A centro ſphæræ ducantur infinitæ rectæ quàm plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis ſe mutuo ſuperantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros ſecari; & annulus unuſquiſque habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque, niſi in motu juxta legem caſus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonſtratione caſus primi. Et propterea annulorum ſeries quælibet à globo in infinitum rectà pergens, movebitur pro lege caſus primi, niſi quâtenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus eſt; neque ideo motum, quo minus hâc lege fiat, impediet. Si annuli qui à cen-



(q) * *Caſus* 2. A centro ſphæræ S ducantur rectæ quam plurimæ, longitudine infinitæ S k, S b, S c, S g &c., quæ æquales angulos k S b, b S c, c S g &c. complectantur; & his rectis circa axem P X revolutis & ſuperficies conicas deſcribentibus, concipe orbes in annulos innumeros ſecari. Nam cùm ſuperficies P f e X circa axem P X revolvitur, ſinguli arcus k b, b c, c g, e f, a l, &c. portiones ſuperficierum ſphæricarum annulares deſcribunt, & particula quælibet ut b c d a, deſcribit annulum ſolidum. Annulus unuſquiſque, ut ille qui revolutione ſuperficiei a b c d deſcribitur, habebit annulos quatuor ſibi contiguos, unum interiorem ex revolutione figuræ m a d n, alterum exteriorem ex revolutione figuræ b e f c, & duos laterales ex revolutione figurarum k b a l & c g h d. Attritu interioris & exterioris non poteſt annulus unuſquiſque niſi in motu juxta legem Caſûs primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Alioquin partes fluidi non perſeverarent in motu ſuo uniformiter, ſed intermedius iſte annulus (contra hyp.) in motu ſuo accelararetur vel retardaretur, ut de orbibus integris oſtenſum eſt in Caſu primo. *Et propterea annulorum ſeries quælibet à globo in infinitum recta per*
gens & inter duas proximas ſuperficies conicas comprehenſa, qualis eſt ſeries annulorum quos figuræ m a d n, a b c d, b e f c &c. circa axem P X rotatæ deſcribunt, *movebitur pro lege Caſûs primi, niſi &c.* 327.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

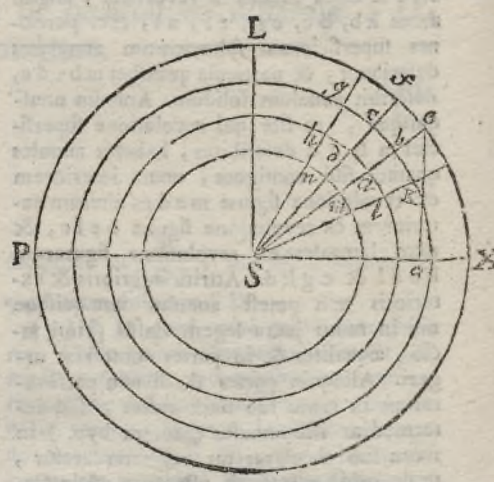
(r) centro æqualiter diſtant, vel citius revolverentur vel tardius (ſ) juxta polos quàm juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & ſic vergerent ſemper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege caſûs primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat ſecundum legem caſus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc eſt, annulorum ſingulorum tempora periodica erunt ut quadrata diſtantiarum ipſorum à centro globi. Quod volui ſecundò demonſtrare.

Caſ. 3. Dividatur jam annulus unuſquiſque ſectionibus tranſverſis in particulas innumeras conſtituentes ſubſtantiam abſolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ ſectiones non ſpectant ad legem motûs circularis, ſed ad conſtitutionem fluidi ſolummodo conducunt, perſeverabit motus circularis ut prius. His ſectionibus annuli omnes quam minimi aſperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt, (t) aut mutabunt æqualiter. Et manente cauſarum proportione manebit effectuum proportio, hoc eſt, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q.E.D.* Cæterum cùm motus circularis, & inde orta vis cen-

(r) * *Qui à centro æqualiter diſtant*; ſeu qui ſunt ex eodem orbe reſecti, quales ſunt annuli ex figurarum l k b a, a b c d, d c g h & revolutione deſcripti.

(ſ) * *Juxta polos* X & P, quam juxta æquatorem, quem recta S E ad axem P X perpendicularis rotata deſcribit.

(t) * *Aut mutabunt æqualiter.* Quoniam enim hæ Sectiones non niſi ad fluiditatem ſingulis annulis conciliandam factæ ſunt, & fluidum homogeneum ſupponitur; ſi inde mutetur annulorum aſperitas & vis attritus mutui, mutabitur æqualiter ſeu in data ratione. Et idcirco manente reſiſtentiarum & impreſſionum, quæ ex mutuo partium attritu oriuntur, proportione, manebit effe[illegible]n inde productorum proportio, hoc e[illegible], proportio motuum & periodico[illegible]m temporum; & propterea partium ſingularum tempora periodica erunt, ut in ſuperioribus caſibus, proportionalia quadratis diſtantiarum ipſarum à centro globi.



centrifuga, major (u) fit ad eclipticam quàm ad polos; debebit caufa aliqua adeffe quâ particulæ fingulæ in circulis fuis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam eft, recedat femper à centro & per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetuâ revertatur.

(x) *Corol.* 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, funt reciprocè ut quadrata diftantiarum à centro globi, & velocitates abfolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diftantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiefcente fimilari & infinito circa axem pofitione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, & motus ifte paulatim propagabitur in infinitum; neque prius ceffabit in fingulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica fingularum partium fint ut quadrata diftantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores ob (y) majorem fuam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipfis eâ actione perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores fimul transferunt, eâque actione (z) fervant quantitatem motûs fui planè

(u) * *Major fit ad eclipticam quàm ad polos.* Quoniam particularum E & e in eodem orbe conftitutarum tempora periodica æquantur, ipfarum vires centrifugæ funt inter fe ut radii circulorum quos defcribunt (*per cor.* 3. *prop.* 4. *lib.* 1.), hoc eft, ut perpendiculares ad axem E S & e q. Vis igitur centrifuga eo major eft, quo magis particula accedit ad æquatorem feu eclipticam S E, & in æquatore maxima eft, in polo nulla.

(x) 328. * *Cor.* 1. Motus angulares funt reciproce ut tempora periodica (327), ideoque (ex demonftratis) reciprocè ut quadrata diftantiarum à centro globi. Velocitates abfolutæ particularum funt ut peripheriæ circulorum quas defcribunt, feu ut ipfarum diftantiæ ab axe directè, & tempora periodica inversè; & propterea funt ut diftantiæ ab axe directè & quadrata diftantiarum à centro globi inversè, ac proinde funt reciprocè ut eadem quadrata applicata ad diftantias ab axe. Unde velocitates abfolutæ particularum in æquatore funt reciprocè ut ipfarum diftantiæ à centro globi, & earum vires centrifugæ reciproce ut cubi diftantiarum à centro globi (*per cor.* 1. *prop. IV. lib.* 1.). 328.

(y) * *Ob majorem fuam velocitatem &c.* Velocitates angulares orbium à centro globi minus diftantium majores funt (*per cor.* 1.) quàm velocitates angulares orbium exteriorum & à centro vorticis remotiorum; fed orbes interiores exceffu velocitatis angularis, quo relative ad orbes exteriores moventur, hos atterunt & urgent, *motumque ipfis &c.*

(z) * *Servant quantitatem motûs fui planè invariatam.* Quia (*per hyp.*) ea eft vorticis conditio, ut unaquæque fluidi pars perfeveret in fuo motu uniformiter, & in eâdem à centro diftantia eodem nè invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur à centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quòd motum omnem à materiâ interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem semper quantitatem motûs accipiat, quam imprimit in materiam vorticis. Sine tali principio necesse est ut globus & vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus unà cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione

dem semper tenore moveatur; & tamen, propter orbium interiorum majorem velocitatem angularem attritumque continuum, orbes exteriores perpetuò urgentur & ad motum accelerandum incitantur; necesse est ut motus perpetuo transferatur à centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem extimæ circumferentiæ absorbeatur. Quâ ratione fit ut orbium singulorum, qui eamdem motûs quantitatem in alios exteriores simul & semper transferunt, idem sit perpetuò motus.

ne datos certis cum velocitatibus conſtanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi ſinguli eâdem ratione quâ unus aliquis motum ſuum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus ſuos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus reſultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, ſed in ſe mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in ſe mutuo, perpetuo movebuntur de locis ſuis, uti in corollario ſuperiore expoſitum eſt; neque certam quamvis inter ſe poſitionem ſervabunt, niſi per vim aliquam retenti. Ceſſantibus autem viribus illis quæ in globos conſtanter impreſſæ conſervant hoſce motus, materia ob rationem in corollario tertio & quarto aſſignatam, paulatim requieſcet & in vortices agi deſinet.

Corol. 7. Si fluidum ſimilare claudatur in vaſe ſphærico, ac globi in centro conſiſtentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eamdem partem circa axem eundem revolvantur, ſintque eorum tempora periodica ut quadrata ſemidiametrorum: partes fluidi non prius perſeverabunt in motibus ſuis ſine acceleratione & retardatione, quàm ſint eorum tempora periodica ut quadrata diſtantiarum à centro vorticis. Alia (a) nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum incluſum, & globus ſervent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in ſe invicem, non mutabuntur motus partium inter ſe. Nam tranſlationes partium inter ſe pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perſeverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. (b) Unde ſi vas quieſcat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum tranſire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone ſummam temporis revo-

(a) * *Alia nulla vorticis conſtitutio poteſt eſſe permanens.* Nam (ex demonſtr.) ea debet eſſe vorticis conſtitutio, ut pars quælibet fluidi poſſit in ſuo motu uniformiter perſeverare, & ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleratur attritu ex altero latere.

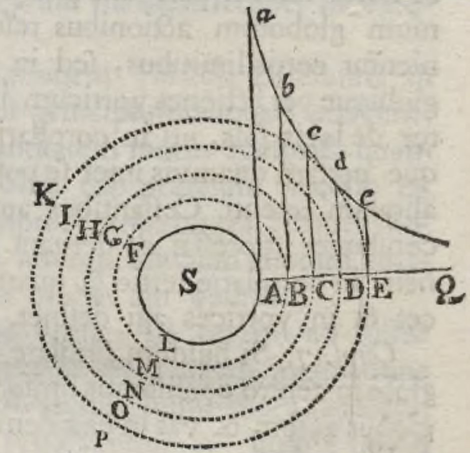
(b) * *Cor.* 9. Fluidum ſimilare in vaſe ſphærico E K P clauſum ita agatur in vorticem, ut tandem partes fluidi in motibus

328.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

volutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi, respectu plani hujus, erunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi.

tibus suis sine acceleratione & retardatione perseverent, quemadmodum in corollario 7. expositum est. In hâc hypothesi velocitates particularum in æquatore existentium sunt ut distantiæ à centro S inversè (328), & ideo ut S D ad S E, sive, ut peripheria D I O ad peripheriam E K P ita est peripheria E K P (quam particula E tempore suo periodico t E describit) ad spatium quod alia quævis particula D eodem tempore conficit, quod proinde spatium erit $\frac{EKP^2}{DIO}$. Quiescat jam vas sphæricum, hoc est, toti systemati vorticis auferatur vasis motus angularis, & particula D tempore t E describet spatium $\frac{EKP^2}{DIO} - DIO$. Sed hoc spatium est ad circumferentiam D I O, aut quod idem est, $SE^2 - SD^2$ est ad SD^2, ut tempus t E ad tempus periodicum (TD) particulæ D in vase quiescente, quod proinde tempus erit $\frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2}$. Et simili modo tempus periodicum particulæ A, quod dicatur T A, erit in vase quiescente $\frac{SA \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Si itaque detur motus globi, seu tempus periodicum T A, dabitur tempus $tE = \frac{TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2}$, & inde dabitur tempus periodicum $TD = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2} = \frac{SD^2 \times TA \times [SE^2\, SA^2]}{SA^2 \times [SE^2 - SD^2]}$. Si igitur vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi ad quamlibet datam à centro distantiam. Concipe nunc planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone summam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi; sive pone SA^2 ad SE^2 ut T A ad quartum, quod erit $\frac{SE^2 \times TA}{SA^2} = \frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$; & tempus periodicum plani erit $\frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} - \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$



$= tE$, quia $TA = \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Quare planum, quo hic utitur NEWTONUS, ita movetur ut revolutionem suam absolvat eodem tempore t E, quo vas suam revolutionem perficit in hyp. cor. 7. Sit X tempus periodicum particulæ D respectu plani in vase quiescente; & quia planum & vortex in regiones contrarias moventur, erit T D ad X ut circumferentia DIO, quam particula D tempore periodico T D describit, ad ejusdem circumferentiæ partem quam eadem particula tempore X percurrit; & ideo pars illa erit $\frac{X \times DIO}{TD} = \frac{X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$, & pars residua circumferentiæ D I O, quam planum eodem tempore X conficit, erit $DIO - \frac{DIO \times X}{TD} = \frac{SD^2 \times DIO \times tE - X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$. Quia verò planum tempore t E uniformi motu revolutionem suam D I O absolvit,

est

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem datâ cum velocitate quâcumque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per corol. VIII. Et (c) motus isti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum & vas accelerari, quàm sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod

est t E ad X ut D I O ad spatium modo inventum, seu ut $SD^2 \times tE$ ad $SD^2 \times tE - X \times [SE^2 - SD^2]$; unde habetur $SD^2 \times X \times tE = SD^2 \times tE^2 - X \times tE \times [SE^2 - SD^2]$, & ideo $SE^2 \times X = SD^2 \times tE$, ac proinde tempus $X = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2}$. Cùm ergo t E & S E sint quantitates datæ, tempus periodicum X particulæ fluidi D respectu plani prædicti est ut SD^2, sive ut quadratum distantiæ à centro globi. Et quia omnium particularum in eodem orbe constitutarum tempora periodica æquantur inter se; earum omnium tempora periodica respectu plani sunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi. Q. E. D.

(c) * *Et motus isti per cor. 9. dabuntur*, proindeque si cum iis motibus datis componatur vasis motus angularis datus, dabitur motus fluidi in vase data cum velocitate moto.

PROBLEMA.

329. Sphæra solida in fluido infinito & in eâdem à centro distantiâ similari, sed in diversis distantiis in datâ quâvis distantiarum ratione inæqualiter denso circà axem positione datum uniformi cum motu revolvatur & à sphæræ impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo, sitque resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæte-
ris paribus, in ratione compositâ ex ratione quâlibet densitatis & ratione etiam quâcumque velocitatis relativæ, oportet invenire tempora periodica partium fluidi. 329.

Distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis ut in demonstratione prop. 52. factum est; dicanturque A D $= x$, fluidi densitas in loco D $= z$, translatio orbium ab invicem tempore dato $= v$, densitas z sit proportionalis dignitati x^n, & resistentia, cæteris paribus, sit ut $z^m v^p$, seu ut $x^{mn} v^p$. Quia superficies sphærica D I O, est ut x^2, erit impressio orbis D I O, in orbem contiguum, ut $x^{2+mn} v^p$; sed ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias, ac proindè quantitas $x^{2+mn} v^p$, debet esse constans. Quarè erit v^p ut $\frac{1}{x^{2+mn}}$, & v ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$. Sunt autem differentiæ motuum angularium circà axem ut translationes orbium applicatæ ad distantias; hoc est, ut $\frac{v}{x}$, sive ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$. Sit jam D E $= dx$, & ordinata D d, ad curvam a b d e, sit ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$ erit sum-

Quod si vas vi aliquâ detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad statum motûs in corollariis VIII. IX. & X. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde verò si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur systema totum legibus mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neque motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt, quàm eorum tempora periodica æquentur inter se, & systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scho-

ma differentiarum, hoc est, motus totus angularis ut area D d Q, quæ est ut $S. \frac{dx}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}} = -\frac{p}{2+mn} \times \frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$; & tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia, sunt ut $x^{\frac{2+mn}{p}}$, neglectâ quantitate constante $\frac{p}{2+mn}$. Q. E. I.

330. *Cor.* 1. Si resistentia, cæteris paribus, sit ut velocitas, & tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, erit $p=1$, & $\frac{2+mn}{p} = \frac{1}{2}$, ideóque $n = -\frac{1}{2m}$. Sed cùm resistentia proportionalis supponatur densitatis dignitati cujus index est m, & crescente densitate crescat, necesse est ut m sit numerus positivus, ac proindè n numerus negativus. Quarè densitas, ut pote proportionalis dignitati x^n, crescente distantiâ in hypothesi corollarii hujus decrescet. Hoc autem repugnat. Nam materia vorticis eò densior esse debet quò longius distat à centro. Conatur enim materia per motum suum circularem recedere ab axe vorticis & propter eà premit materiam omnem ulteriorem, eamque condensat, si condensari possit. Præterea velocitas absoluta partium fluidi in æquatore vorticis est ut earum distantia à centro globi directè & tempus periodicum inversè, hoc est, in hypothesi cor. hujus ut $\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, ideóque vis centrifuga partium (*per cor.* 1. *prop.* 4. *lib.* 1.) cæteris paribus est ut $\frac{1}{xx}$, & proindè decrescit in ratione duplicatâ distantiæ auctæ. Ut igitur vortex ad statum permanentem reducatur, oportet ut partes densiores à centro recedant & rariores ad illud accedant, quo vis centrifuga partium centro propiorum, quæ ob majorem velocitatem & minorem distantiam nimia est, per minorem densitatem minuatur.

331. *Cor.* 2. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, hoc est, si $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, erit $p = \frac{4+2mn}{3}$, & ideò resistentia, cæteris paribus, ut velocitatis dignitas cujus exponens est $\frac{4+2mn}{3}$. Sed (*ex dem. cor.* 1.) m & n sunt numeri positivi. Quarè tempora periodica non possunt esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, quin index $\frac{4+2mn}{3}$ sit unitate major, & quin proindè resistentia, cæteris paribus, in majori ratione crescat quàm in ratione velocitatis auctæ.

332. *Cor.* 3. Si spatium quo vortex continetur sit ubique plenum & propterea medii densitas uniformis supponatur, littera

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materiâ quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Et hâc preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, ideoque motum tardius recipiet & longius (d) propagabit quàm pro ratione ſuperius aſſignatâ. Si

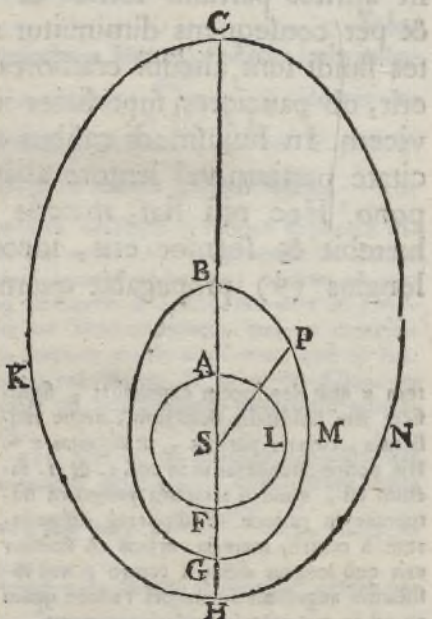
tera z quæ denſitatem exponebat; ſignificet jam fluiditatis defectum, ſitque reſiſtentia, cæteris paribus, ut dignitas z^m. His poſitis oſtendetur ut in cor. 1. & 2. factum eſt, quod ſi tempora periodica ſtatuantur in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro, materia vorticis eò fluidior erit quò longius diſtat à centro, vel reſiſtentia augebitur in majori ratione quàm ea eſt in quâ velocitas relativa augetur.

333. *Cor.* 4. Si reſiſtentia, cæteris paribus, augeatur in ratione minore quàm in ratione velocitatis, hoc eſt, ſi index p, ſit unitate minor, erit $\frac{2+mn}{p}$ binario major, & proindè tempora periodica partium vorticis erunt in majori ratione quàm duplicatâ ratione diſtantiarum à centro. Nam vel eſt $mn=0$, quod contingit dùm eadem eſt ubique fluidi denſitas ac fluiditas, vel mn, eſt numerus poſitivus, quia defectus fluiditatis vel denſitas; auctis diſtantiis à centro augetur (*per cor.* 1.) 333.

(d) * *Et longius propagabit quàm pro ratione ſuperiùs aſſignatâ.* In ſuperioribus demonſtrationibus NEWTONUS ſuppoſuit fluidum homogeneum eſſe & preſſionem ubique æqualem; ſi verò in diverſis à vorticis centro diſtantiis aliqua ſit partium fluidi aut preſſionis inæqualitas, minorem vel majorem fluiditatem inde ortam, vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione ad æqualitatem reſtitui ſupponit, ut vortex in eodem ſtatu juxtà leges præſcriptas, permaneat. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt, magis cohærebit & ſegnior erit, ideóque motum à globo centrali communicatum difficiliùs ac tardiùs, cæteris paribus, recipiet; ſed illum longius propagabit. Nam ſi vorticis partes ità inter ſe & cum globo cohærerent, ut nullâ vi poſſent ſeparari, non poſſet globus centralis circumvolvi, quin materia tota vorticis, tan-

Si figura (e) vasis non sit sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum à centro quam proximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores, (f) neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velo-

quam vectis rigidus, simul circumvolveretur. Undè quò magis partes illæ cohærent, eò longiùs motum à globo centrali acceptum propagant. Et ideò etiamsi materia vorticis homogenea non sit, & pressio inæqualis supponatur, vim suam obtinent difficultates, quas contrà vorticum in naturâ possibilitatem NEWTONUS proposuit in cor. 2. 4. 5. & 6. prop. 52.



(e) * *Si figura vasis non sit sphærica.* Sit C N H K, figura vasis in quo fluidum solo sphæræ A L F impulsu agatur in orbem, & particulæ fluidi quæ vasis superficiem C N H K, contingunt, movebuntur in lineis non circularibus, sed conformibus eidem vasis figuræ, particulæ verò quæ sphæræ A L F proximæ sunt, circulos describent. Undè quò magis particulæ fluidi à sphærâ centrali distant, eò magis orbitarum quas describunt, figura à circulari differt & ad vasis figuram accedit. Quia verò particularum circulos describentium tempora periodica erant (*prop.* 52.) ut quadrata distantiarum à centro S; erunt in hoc vase ut quadrata mediocrium distantiarum quam proximè. Sic particulæ P orbitam B P G B describentis tempus periodicum erit quam proximè ut quadratum distantiæ P S, quæ est media arithmetica inter distantiam maximam B S, & minimam S G, sivè erit ut tempus periodicum particulæ P, circulum describentis, cujus radius P S. Nam tempus periodicum, cæteris paribus, crescit ut velocitas absoluta decrescit; sed cùm vortex supponatur esse in statu permanenti, & eadem proindè materiæ quantitas per latiora spatia ut C A, & per angustiora ut F H, simul transeat; oportet ut materiæ velocitas in spatiis latioribus minuatur, & in angustioribus augeatur. Quo fit ut particula P, eodem ferè tempore describat orbitam B P G B, quo velocitate mediocri describeret circulum cujus esset radius P S.

(f) * *Neque tamen particulæ velociores.* Nam vortex non potest esse in statu permanenti quin particula P, in spatiis angustioribus L N, F H, ad centrum S accevelocitatis. Pergendo à ſpatiis anguſtioribus in latiora recedent paulo longius à centro, ſed iſto receſſu tardeſcent; & accedendo poſtea de latioribus ad anguſtiora accelerabuntur, & ſic per vices tardeſcent & accelerabuntur particulæ ſingulæ in perpetuum. (g) Hæc ita ſe habebunt in vaſe rigido. Nam in fluido infinito conſtitutio vorticum innoteſcit per propoſitionis hujus corollarium ſextum.

Proprietates autem vorticum hâc propoſitione inveſtigare conatus ſum, ut pertentarem ſi quâ ratione phænomena cœleſtia per vortices explicari poſſint. Nam phænomenon eſt, quod planetarum circa jovem revolventium tempora periodica ſunt in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro jovis; & eadem regula obtinet in planetis qui circa ſolem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in planetis utriſque quam accuratiſſimè, quâtenus obſervationes aſtronomicæ hactenus prodidêre. Ideoque ſi planetæ illi à vorticibus circa jovem & ſolem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revolvi. Verùm tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicatâ diſtantiarum à centro motus: neque poteſt ratio illa diminui & ad rationem ſeſquiplicatam reduci, (h) niſi vel materia vorticis eo fluidior ſit quo longius diſtat à centro, vel reſi-

recedat; & ideò neceſſe eſt ut in iiſdem ſpatiis conatus recedendi à centro minùs augeatur per incrementum velocitatis, quàm diminuitur per decrementum curvaturæ. Eſt enim vis quâ particula P, in loco G, nititur à circumferentiâ M G recedere, ut quadratum velocitatis particulæ directè & radius circuli curvam oſculantis in G, inversè (*cor.* 1. *prop.* 4. & *not.* 121. *lib.* 1.)

(g) * *Hæc ità ſe habebunt*, in vaſe rigido aut in ſpatio aliis vorticibus circumdato, quo tanquam vaſe, juxtà *Carteſii* opinionem materia vorticis continetur. Ex his autem NEWTONI obſervationibus ſequitur. 1°. Planetarum qui circà *Carteſiani* vorticis centrum eâdem lege cum vorticis partibus moventur, orbitas eò magis ad circuli figuram accedere debere quo centro vorticis propiores ſunt; & propterea excentricitatem orbitæ Mercurii longè minorem eſſe excentricitate orbitæ Saturni & omnium ſuperiorum planetarum, contrà obſervationes aſtronomicas. Sequitur 2°. in *Carteſianâ* hypotheſi explicari non poſſe cur planetæ ellipſes accuratas, non verò circulos aut irregulares figuras deſcribant. Sequitur 3°. omnium orbitarum aphelia & perihelia à ſole ſpectata in iiſdem inter fixas locis eſſe poſita atquè immota manere; cùm tamen ex obſervationibus aſtronomicis certum ſit, planetarum aphelia à ſe invicem longe diſtare & lento motu agi. 333.

(h) * *Niſi vel materia vorticis eò fluidior ſit.* (Per not. 332.)

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi ; ex auctâ velocitate quâ partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majore ratione quàm ea est in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, (i) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi demonstrationum gratiâ hypothesin talem initio sectionis hujus proposuerim, ut resistentia velocitati proportionalis esset, tamen (k) resistentia in minori sit ratione quàm ea velocitatis est. Quo (l) concesso, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quàm duplicatâ ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam ; certe nec ratio sesquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. (m) Viderint itaque philosophi quo pacto phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per vortices explicari possit.

(i) * *Circumferentiam petent.* Id experientiâ constat ; nam si aqua in vase contenta in vorticem agatur, paleæ & alia corpuscula minùs fluida petunt circumferentiam.

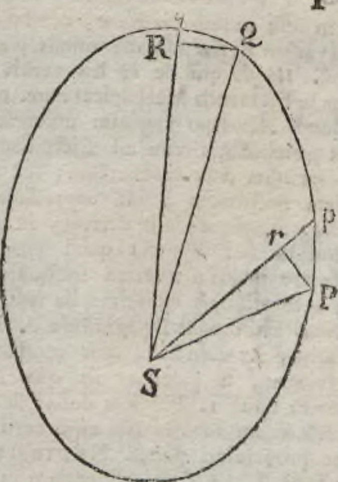
(k) * *Tamen resistentia in minori sit ratione.* (Vid. ultimam not. in hoc schol.).

(l) * *Quo concesso.* (per not. 333.)

(m) * *Viderint itaque Philosophi.* Difficultas crescit, si tria simul conjungantur, quæ primus omnium *Keplerus* mirâ sagacitate ex observationibus Astronomicis deduxit. Primum est, planetas in ellipsibus, quarum umbilicum sol occupat, revolutiones suas peragere. Secundum est planetas singulos radiis ad solem ductis, & satellites radiis ad suum primarium ductis, areas describere temporibus proportionales. Tertium est, tempora periodica planetarum circà solem & satellitum circà primarium suum, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro sui motûs. Ex hâc proportione colligitur planetarum velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi esse reciprocè in ratione subduplicatâ distantiarum illarum. Sint enim D, & d, mediocres planetarum distantiæ T & t, eorum tempora periodica, & quoniam in singulis planetarum orbitis parva est distantiæ maximæ & minimæ differentia, si conferatur cum differentiâ quæ inter distantias duorum planetarum intercedit, spatia temporibus T & t, descripta erunt quam proximè ut distantiæ D & d; unde velocitates erunt ut $\frac{D}{T}$ & $\frac{d}{t}$, hoc est, ut $\frac{D}{D^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{d}{d^{\frac{3}{2}}}$, sivè ut $\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}}$ & $\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$, seu in subduplicatâ ratione mediocrium distantiarum inversè, in quà etiam ratione sunt velocitates partium vorticis circularis in distantiis D & d, à sole (*per prop.* 53.). Verùm per alteram analogiam, arearum scilicet & temporum, velocitates partium vorticis circularis sunt in ratione simplici distantiarum à sole reciprocè. Nam si planeta P, orbitam ellipticam P Q q p describat & radiis ad umbilicum S ductis areas æquales S P p, S Q q, tempusculo dato verrat,

rat, centro S & radiis SP, SQ describantur arcus circulares quam minimi Pr, QR, qui radiis SP, Sq, occurrant in r, & R, erit area SPp = SP × Pr = SQq = SQ × QR, & hinc Pr : QR = SQ : SP. Sed Pr & QR sunt ut spatia circularia eodem tempore descripta ideóque ut velocitates circulares partium vorticis in P, & Q; Quarè velocitates illæ sunt in ratione inversâ distantiarum. Porrò quàm difficile sit ab his aliisque contradictionibus hypothesim vorticum liberare, ex variis hâc de re eruditorum Dissertationibus satis manifestum est. Vid. *Leibnitii* tentamen de motuum cælestium causis, *Villemotii* opus de vorticibus; Illustrissimi Marchionis *Poleni* dialogum de eâdem materiâ; Dissertationes Celeber. Virorum *Saurini* in Comm. Acad. Reg. Scient. an. 1709., *Bulffingeri* de causâ gravitatis, *Joan. Bernoulli* Cogitationes novas de Systemate Cartesii, ejusdem Physicam Cœlestem inter Academiæ Præmia, Domini *De Molieres* Lectiones Physicas.

Illustrium Authorum qui vorticum hypothesim strenuè vindicarunt, varias hâc de re Dissertationes hic percurrere nimis longum foret, nec tantas componere lites nostrum est. Eam enim NEWTONUS sibi vel maximè impugnandam assumit vorticum hypothesim quam *Cartesius* ipse constituerat, natasque post primi autoris mortem hujus systematis emendationes quam plurimas saltem directè non petit. At silentio prætermittere non licet Dissertationem Doctissimi Viri *Joan. Bernoullii* ab Academiâ Regiâ Paris. præmio condecoratam, cui titulus est: *Cogitationes novæ de Systemate Cartesii*. Existimat Clariss. Autor superiorum propositionum demonstrationes mero sophismate laborare, eò quod NEWTONUS orbium contiguorum & sese mutuo atterentium impressionem solùm definierit ex superficierum magnitudine & velocitate relativâ quâ ab invicem separantur; earum verò superficierum pressionem minimè consideraverit, vimque vectis neglexerit quæ, cæteris paribus, major est in majoribus rotis & minor in minoribus. Verùm licet in suis demonstrationibus pressionem ubique æqualem supposuerit NEWTONUS, hujus tamen pressionis inæqualitatem in scholio



consideravit, & quid ex illâ sequatur, generatim ostendit. Vim quidem vectis prorsùs neglexit, & meritò quidem, quantum intelligere possumus. 335. Quamvis enim in vecte rigido cujus partes simul eodem motu angulari circà hypomoclion revolvuntur, eò major sit efficacia quo cæteris paribus longior est vectis; quod videlicet vectis partes eò celeriùs moveantur, quò major est earum ab hypomoclio distantia, id tamen ad partes medii fluidi quæ circà centrum aliquod revolvuntur, non videtur transferendum. Et licèt NEWTONUS orbes solidos, demonstrationis gratiâ, primùm fingat, eos tamen divisos supponit ac deindè in particulas innumeras subdividit ut demonstratio ad naturam medii fluidi accommodetur. Quod si ob qualemcumque partium fluidi cohæsionum, aliqua habenda sit ratio vis vectis, certè ea non videtur assumenda distantiæ à vorticis centro proportionalis, quemadmodùm fit in vecte perfectè rigido, seu cujus partes vi quasi infinitâ connexæ supponuntur & eodem motu angulari revolvuntur.

Cæterùm Celeber. *Joan. Bernoulli* aliam usurpat hypothesim quæ Mechanicis perspecta nondùm est certòque explorata. Supponit enim cum D. *Amontons* in Monum. Paris. an. 1699. resistentiam quæ oritur ex frictione superficierum contiguarum utcumque inæqualium, manente earumdem uem in ſeſe mutuò preſſione, conſtantem eſſe; verùm hypotheſis illa minùs placuit Clariſſ. *Wolfio* qui de eâ his verbis loquitur in Elementis Mechanices num. 965.: Equidem *Amontons* regulam univerſalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet caſu ſuperandam; ſed cùm omnem frictionem à ſolâ appreſſione ex pondere ſuperincedentis derivet, ex antecedentibus ſatis apparet quod propoſito ſatisfacere nequeat: veram frictionis legem accuratiſſimis experimentis tentarunt Celeber. Philoſophi *Deſaguilliers* & *Muſchenbroek*; At eam haud ſatis conſtantem obſervarunt, ut patet ex iis quas *Muſchenbroek* tom. 1. Phyſices deſcripſit experimentorum tabulis. Nil ergò certi hâc de re pronuntiari poteſt. NEWTONUS tamen conjecturam fecit reſiſtentiam in minori eſſe ratione quàm ea velocitatis eſt, eo forſan ductus argumento quod in Hiſtoriâ Acad. Reg. an. 1709. hoc ferè modo exponitur: ſi concipiantur ſuperficies innumeris eminentiis aſperæ, dum alia ſuper aliam incedit, ſuperficiei ſuperioris eminentiæ intrà cavitates inferioris, dato tempore, preſſionis vi penetrant, fitque reſiſtentia major, ſi intrà ſuperficiei inferioris cavitates altiùs ingrediantur ſuperficiei ſuperioris eminentiæ, at verò ſi major ſit velocitas, ſuperior ſuperficies intrà inferiorem eodem dato tempore minùs penetrat. Hinc ſi Clariſſ. *Parentii* ratio valeat, ſatis patet reſiſtentiam in minori eſſe ratione quàm ea velocitatis eſt. Attamen Clariſſ. *Muſchenbroek*, factis experimentis, reſiſtentiam velocitati proportionalem in motibus tardioribus invenit, in celerioribus verò eam in majori quàm velocitatis ratione obſervavit.

Aſſumit D. *Bernoullius* impreſſiones orbium contiguorum in ſe mutuò factas, eſſe in ratione compoſitâ ex ratione ſummæ virium centrifugarum orbium omnium inferiorum ad centrum uſquè vorticis, ex ratione velocitatis quâ orbes contigui ab invicem ſeparantur, & ex ratione diſtantiæ orbium illorum à centro; undè per analyſim deducit tempora periodica partium vorticis ſphærici homogenei eſſe in ratione radicum cubicarum dignitatis quintæ diſtantiarum à centro; earum verò celeritatem ſub æquatore eſſe reciprocè in ratione radicis cubicæ quadrati diſtantiarum à centro. Si in hypotheſi *Bernoullii* negligatur vis vectis, eodem calculo quo uſus eſt, tempora periodica inveniuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis quartæ diſtantiarum à centro; Si verò ſupponamus impreſſiones orbium in ſe mutuò factas, eſſe in ratione compoſitâ ex ratione preſſionum, ratione velocitatum relativarum & ratione ſuperficierum, tempora periodica *Bernoulliano* calculo inveniuntur quadratis diſtantiarum proportionalia, uti NEWTONUS per ſuam hypotheſim invenerat; & ſi cum his tribus rationibus componatur ratio diſtantiæ à centro ut vis vectis exprimatur, tempora periodica reperiuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis ſeptimæ diſtantiarum à centro. Hæ verò analogiæ omnes à regulâ illâ *Keplerianâ*, quâ tempora periodica ſtatuuntur eſſe in ratione ſeſquiplicata diſtantiarum, diſſentiunt. Ut ergò vorticis ſphærici leges cum *Kepleri* ſancitis conciliet *Bernoullius*, ſupponit denſitatem vorticis eſſe in ratione ſubduplicatâ diſtantiæ centro reciprocè, planetas verò non eſſe ejuſdem prorſùs denſitatis cum medio fluido in quo primùm collocati ſunt, ideòque ob majorem vel minorem ſuam denſitatem in eo medio ſucceſſivè deſcendere & aſcendere, intereadùm circulari motu vorticis abripiuntur, ex quibus motibus ſimul compoſitis naſcuntur ellipticæ planetarum trajectoriæ & apheliorum lentiſſimi motus. Sed medium illud in quo planeta, cùm denſior eſt, deſcendit, & ubi rarior eſt, aſcendit, vel grave eſt in centrum vorticis vel non. Si grave non ſit, planeta in medio rariori poſitus, eodemque cum medio illo gyrationis motu actus, majori vi à centro recedere & ſpiralem trajectoriam deſcribendo in infinitum abire debet; & contrà, planeta in medio denſiori primùm collocatus, ad centrum per ſpiralem lineam perpetuò accederet, quod medii denſioris major eſſe debeat vis centrifuga quàm planetæ rarioris. Si medium grave ſit in centrum vorticis, ipſiuſque denſitas, decreſcentibus diſtantiis à centro, creſcat, cæleſtis materiæ denſitas, ob parvam orbitarum quas planetæ deſcribunt, excentricitatem, æqualis aſſumi poteſt den-

ſitati

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, & eâdem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem & cursus determinationem moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: & contra, si vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum, movebitur hæc eâdem lege ac prius, nisi quâtenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium à centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in fluidum resolutum fit pars vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materiâ vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quiescens. Sin densius sit, (n) jam magis conabitur recedere à centro vorticis quàm prius; ideoque vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ suâ tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet à centro & revol-

sitati cujusque planetæ huic materiæ innatantis; atque adeò densitas cælestis materiæ ad distantiam saturni æqualis erit densitati saturni, ad distantiam Jovis, Martis &c. æqualis erit densitati horum planetarum, & omnes illæ densitates erunt inter se in ratione subduplicatâ distantiarum à sole reciprocè. Si itaque telluris densitas mediocris supponatur æqualis densitati aquæ, materia cælestis inter solem & tellurem constituta aquâ densior erit & corporum motui maximè resistet. Sed ut ex Cometarum motibus, aliisque observationibus constat, materia cælestis inter solem & tellurem motui corporum minimè resistit. Nam Cometarum motus sunt summè regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant, & in omnes cæli plagas liberrime feruntur, atque ad solem usque ferè penetrant sine resistentiâ. 333.

(n) * *Jam magis conabitur.* Nam vis centrifuga motrix, cæteris paribus, augetur vel minuitur in ratione quantitatis materiæ (*per def.* 8. *lib.* 1.) & materiæ quantitas, dato corporis volumine, augetur vel minuitur in ratione densitatis (2. *lib.* 1.).

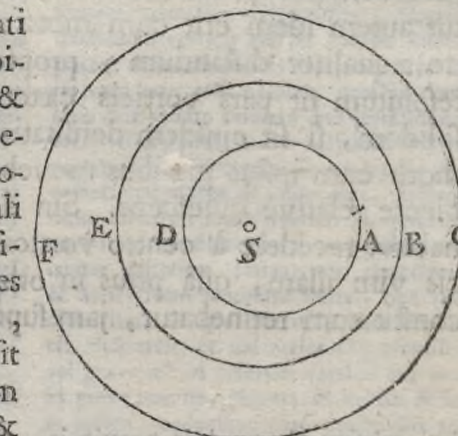
volvendo describet spiralem, non amplius in eundem orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eâdem lege cum partibus fluidi à centro vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo solidum quod in vortice revolvitur & in eundem orbem semper redit, relativè quiescit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet planetas à vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ secundum hypothesin *Copernicæam* circa solem delati revolvuntur in ellipsibus umbilicum habentibus in sole, & radiis ad solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent AD, BE, CF, orbes tres circa solem S descriptos, quorum extimus CF circulus sit soli concentricus, & interiorum duorum aphelia sint A, B & perihelia D, E. Ergo corpus quod revolvitur in orbe CF, radio ad solem ducto areas temporibus proportionales describendo, (°) movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe BE, tardius



(o) * *Movebitur uniformi cum motu.* Æqualibus enim temporibus æquales areæ, & proinde æquales arcus, hoc est, æqualia spatia describuntur.

dius movebitur in Aphelio B & velocius in Perihelio E, (p) ſecundum leges Aſtronomicas; cùm tamen (q) ſecundum leges Mechanicas materia Vorticis in ſpatio anguſtiore inter A & C velocius moveri debeat quàm in ſpatio latiore inter D & F; id eſt, in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter ſe. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quàm in principio Virginis in (r) ratione trium ad duo. Nam quò anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hâc Materiâ cœleſti relativè quieſcens ab eâ deferretur, & unà circa Solem revolveretur, (ſ) foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialterâ. (t) Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quàm minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio

(p) * *Secundùm leges Aſtronomicas.* Quoniam axis ellipſeos per aphelium B & perihelium E tranſit, eſtque ellipſi normalis, area quam radius vector S B tempore quam minimo deſcribit, erit æqualis rectangulo ex diſtantiâ S B in arcum quam minimum à corpore in B deſcriptum; & ſimiliter area æqualis quam radius vector S E eodem tempore quam minimo deſcribit, æquatur rectangulo ex diſtantiâ S E ductâ in arcum à corpore in E deſcriptum, & ideò prior arcus eſt ad poſteriorem, hoc eſt, velocitas in B, eſt ad velocitatem in E, ut diſtantia S E, ad diſtantiam majorem S B.

(q) * *Secundùm leges mechanicas.* Nam cùm vortex ſupponatur eſſe in ſtatu permanenti, æquales materiæ quantitates per ſpatium anguſtius A C, & per ſpatium latius D F, ut fit in fluviis, eodem tempore tranſeunt, & propterea materia vorticis in ſpatio anguſtiore inter A & C, velociùs movetur quàm in ſpatio latiore inter D & F. Quantitas autem materiæ, quæ dato tempore tranſit per ſpatium A C, vel D F, eſt ut ſpatium hoc directè & materiæ velocitas mediocris inversè, & ideò mediocris velocitas materiæ inter A & C, eſt ad mediocrem velocitatem materiæ inter D & F, ut F D ad A C.

(r) * *In ratione trium ad duo.* (per not. præced.).

(ſ) * *Foret hujus velocitas.* Ex obſervationibus Aſtronomicis conſtat terram inter Veneris & Martis orbes poſitam eſſe.

(t) * *Undè ſolis motus diurnus apparens.* Hic motus eſt angulus quem ſol, radiis ad terram ductis, proprio motu ab occidente in orientem unoquoque die deſcribere nobis videtur, quem quidem angulum terra, radiis ad ſolem ductis, in hypotheſi *Copernicæâ*, conficit. Porrò notiſſimum eſt, circulum illum quem ſol inter fixas motu annuo deſcribere videtur, ab

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LIII. THEOR. XLI.

cipio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta octo: & cùm tamen (experientiâ teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in Principio Virginis quàm in Principio Piſcium. (u) Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo verò motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur, intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate plenius docebitur.

ab Aſtronomis dividi in partes duodecim æquales, ſeu ſigna quorum hæc duo virgo & piſces ſunt directè oppoſita, ità ut dum terra in hypotheſi *Copernici*, eſt in principio Piſcium, ſol appareat in principio Virginis & contrà. Cùm igitur angularis velocitas terræ in principio Piſcium ſit ad ejus velocitatem angularem in principio Virginis ut 3 ad 2, ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis eſt ad ejus motum apparentem in principio Piſcium in eâdem ratione 3 ad 2. Solis motus diurnus apparens medius eſt minutorum primorum 59 & ſecundorum 8, ſeu ſecundorum 3548, qui numerus dicatur M; Quarè ſi ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis, ponatur $= M + X$, & in principio Piſcium $= M - X$, erit $M + X : M - X = 3:2$, unde invenitur $X = \frac{1}{5} M = 707''$ quam proximè, ac proindè erit $M + X = 4255'' = 70' + 55''$, & $M - X = 2841'' = 47' + 21''$. Ergò ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quàm minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta octo; cùm tamen ex obſervationibus Aſtronomicis ſol in principio Virginis è tellure viſus motu diurno conficere videatur minuta prima 58 tantùm in principio piſcium minuta prima 60 ſeu gradum unum.

(u) * *Itaque hypotheſis vorticum.* Quoniam verticis materia circulos deſcribit æquatori vorticis parallelos, neceſſe eſt (*per hanc prop.* 53.) ut planetæ omnes ferantur in orbitis æquatori parallelis, ſed obſervatum eſt nullum planetam in orbitâ æquatori parallela revolutiones ſuas abſolvere, & cometas variis directionibus in omnes cœli plagas ferri. Eadem eſt difficultas ſi per vim centrifugam partium vorticis explicetur vis centripeta ſeu gravitas corporum quæ ad axem vorticis perpendiculariter tendere deberent, non verò ad vorticis centrum dirigi. Sed de his vid. Acta Erudit. Lipſ. an. 1686. & 1695; Diaria Erudit. 1703. 1707. Monumenta Acad. Pariſ. 1709. Diſſertationes Clar. *Hugenii* & *Bulffingeri* de causâ gravitatis.

FINIS TOMI II.