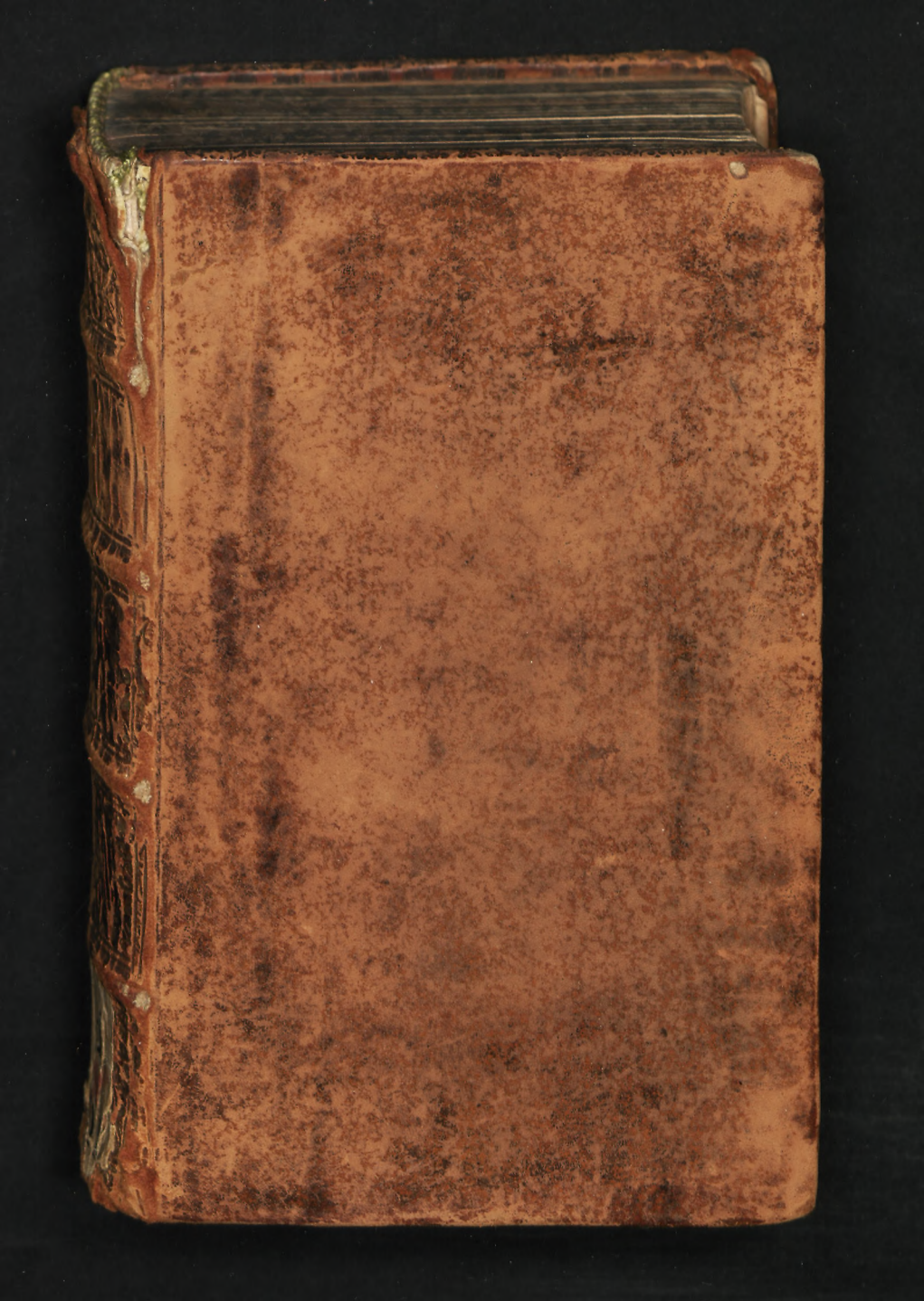


LAM
ELEMED
DE
MATHEMA

Bonhorst

Numerus Cubicus, cuius radix tres characteres exhibet, constat tribus Cubis et quatuor Solidis.

	C	B	A
	160	103	007.
Cub.	125	000	000.
	35	103	007.
Sol.	30	000	000
	5	103	007.
Sol.	2	400	000.
	2	703	007.
Cub.		64	000.
	2	639	007.
Sol.	2	624	400
		14	607
Sol.		14	580.
			27.
3 Cub.			27.
			0

$\{543 = \overset{c}{500} + \overset{b}{40} + \overset{a}{3}$

Subtrahit 1) Cubus numeri sub c

2). Solidum constans ex triplo quadrato numeri sub c per numerum sub b multiplicato.

3) Solidum constans ex triplo numeri sub c in quadratum numeri sub b. ducto.

4) Cubus numeri sub b

5) Solidum constans ex triplo quadrato numeri sub c+b per numerum sub a multiplicato.

6) Solidum constans ex triplo numeri sub c+b in quadratum numeri sub a ducto.

7) Cubus numeri sub a

Numerus cubicus, cuius radix tres characteres exhibet, constat tribus cubis et quatuor solidis.

	C	B	A	
	100	103	007.	$\{543 = \overset{c}{500} + \overset{b}{40} + \overset{a}{3}$
Cub.	125	000	000	Subtrahit 1) Cubus numeri sub c
	35	103	007.	2). Solidum constans ex triplo quadrato numeri sub c per numerum sub b multiplicato.
Sol.	30	000	000	
	5	103	007.	3) Solidum constans ex triplo numeri sub c in quadratum numeri sub b. ducto.
Sol.	2	400	000.	
	2	703	007.	4) Cubus numeri sub b
Cub.		64	000.	5) Solidum constans ex triplo quadrato numeri sub c+b per numerum sub a multiplicato.
	2	639	007.	
Sol.	2	624	400	
		14	607	6) Solidum constans ex triplo numeri sub c+b in quadratum numeri sub a ducto.
Sol.		14	580.	
			27.	
3 Cub.			27.	7) Cubus numeri sub a
			0	

W. Jenckman Schulp

ELEMENS
DES MATHEMATIQUES OU TRAITE' DE LA GRANDEUR EN GENERAL,

Qui comprend

L'ARITHMETIQUE, L'ALGEBRE, L'ANALYSE,

Et les Principes de toutes les Sciences qui ont la Grandeur pour objet.

Par le R.P. BERNARD LAMY, *Prêtre de l'Oratoire.*

Quatriéme Edition revuë & augmentée.

A AMSTERDAM,
Chez PAUL MARRÉT, Libraire dans le Beurstraat.
M. DCCX.

PREFACE.

LEs Peres de l'Eglise jugeoient l'étude des Lettres humaines si necessaire, qu'ils regarderent la défense que Julien l'Apostat fit aux Chrétiens de les étudier, comme un stratagême du démon, semblable à celuy dont se servirent les Philistins pour ôter aux Israëlites les moyens de se défendre, en les empêchant de faire aucun ouvrage de fer. Les Mathematiques tenant donc entre les Sciences humaines un des premiers rangs, l'on ne peut pas, sous prétexte de pieté, en défendre l'étude à la Jeunesse. Elles sont nommées Mathematiques, nom qui veut dire

Discipline, parce que l'on n'apprend rien de plus considerable dans les Ecoles, & qu'elles renferment tant de choses qu'il n'y a point de Profession à qui elles ne puissent être utiles. L'Arithmetique, l'Algebre, la Geometrie, l'Astronomie, la Chronologie, la Geographie, la Gnomonique, l'Arpentage, l'Architecture, les Fortifications, la Marine, la Musique, la Perspective, la Dioptrique, la Catoptrique, les Méchaniques, plusieurs Traitez de Physique, en sont les parties. Elles sont les Elemens de presque toutes les Sciences ; & les Arts ne se peuvent passer de leur secours. De sorte que puisqu'il faut reconnoître avec les Peres de l'Eglise la necessité d'appliquer les jeunes gens aux Lettres humaines, il n'y a que ceux qui ignorent les Mathematiques, qui puissent dire que ce seroit leur faire perdre le temps que de les leur faire étudier : Vû que l'Histoire

Ec-

Ecclesiastique donne de si grandes loüanges aux Peres de l'Eglise qui ne les ont pas ignorées. Mais ceux qui en jugent si mal, ne le font sans doute que par un bon zéle, parce qu'ils croyent qu'elles ne peuvent être utiles: Ainsi il est juste qu'on leur fasse voir dans la Préface de cet Ouvrage, par lequel on prétend ouvrir un Cours de Mathematiques, l'utilité qu'on peut retirer de l'étude qu'on conseille icy.

Tout le monde reconnoît que l'on ne remporte que très-peu de fruit des Colleges, & que l'on y passe le temps à apprendre des choses, particulierement dans la Philosophie, dont il n'est pas même permis de faire usage parmi les honnêtes gens, comme sont une infinité de Questions de chicane. Il est vray que l'on dit que ces choses ont leur utilité, en ce qu'elles font l'esprit, & qu'elles le rendent subtil, étendu, & capable de raisonner. Mais si c'est cette ouverture & cette éten-

duë d'esprit, & cette disposition à bien raisonner, que l'on regarde dans les premieres études des jeunes gens, comme on le doit faire, l'étude des Mathematiques devroit être plus ordinaire qu'elle ne l'est: quand il ne seroit pas vray d'ailleurs qu'il n'y a aucune Profession à laquelle elles ne soient utiles. Car enfin personne ne doute que la Philosophie comme on l'enseigne, ne soit pleine de Questions douteuses, de Sophismes, de mauvais raisonnemens, & qu'ainsi elle ne peut fournir que des modelles très-imparfaits de clarté, de netteté & d'exactitude. Ce que l'on ne peut pas dire des Mathematiques, qui n'admettent aucun principe dont la verité ne soit manifeste. Elles ne se contentent pas de probabilitez: elles démontrent toutes les propositions dont la verité est un peu cachée, ne se servant point de paroles ambiguës ni de vaines subtilitez, mais de paroles claires, de rai-

raiſonnemens ſolides & exempts de toute erreur ; ainſi elles ſont bien plus propres à exercer & à former l'eſprit que la Philoſophie. Ceux qui ont vû pluſieurs excellens Originaux, ſçavent bien mieux juger d'un tableau. Ceux auſſi qui ſont accoûtumez à des principes clairs & à des démonſtrations exactes, jugent bien mieux de la clarté & de l'exactitude d'un raiſonnement. Dans les Mathematiques l'on tire d'un principe connu mille choſes inconnuës par un enchaînement merveilleux de pluſieurs propoſitions, ce qui rend encore l'eſprit perçant ; & comme ſouvent on y trouve des démonſtrations qu'on ne peut entendre qu'en enviſageant la verité de cent autres démonſtrations dont elles dépendent, l'étude que l'on fait de cette Science étend l'eſprit, en l'habituant à comprendre d'une ſeule veuë pluſieurs choſes.

Ainſi, qu'on conſidere ſi on veut

les études de la jeuneſſe, ou comme de ſimples occupations dont il faut remplir le vuide de leurs premieres années, afin que le vice ne s'en empare pas; ou comme des préparations à des études plus ſerieuſes: il eſt conſtant que cette conſideration doit porter les perſonnes qui ont du zele pour l'éducation de la jeuneſſe, à faire qu'on enſeigne avec plus de ſoin les Mathematiques qu'on ne l'a pas fait depuis quelques ſiecles. Autrefois l'on y appliquoit d'abord les jeunes gens. Les Philoſophes ſuppoſoient que ceux qui entroient dans leurs Ecoles n'ignoroient pas ces Sciences, comme il paroît par cette inſcription qui étoit ſur la porte de leurs Academies: *Que ceux qui ne ſçavent pas de Geometrie n'entrent point icy.* Platon montre très-bien que non ſeulement elles ſont utiles pour acquerir les Sciences, mais qu'elles peuvent encore ſervir à former les mœurs. Un des grands principes

cipes de corruption de tous les hommes, eſt cette forte inclination qu'ils ont pour les choſes ſenſibles, qui fait que rien ne leur plaît que ce qui flate leurs ſens; qu'ils ne recherchent & qu'ils ne s'appliquent qu'à ce qui fait ſur eux des impreſſions agreables. Ainſi comme la Geometrie ſépare des corps, qu'elle conſidere, toutes les qualitez ſenſibles, & qu'elle ne leur laiſſe rien de ce qui peut plaire à la concupiſcence; quand on peut forcer un eſprit, & obtenir qu'il s'applique à l'étudier, on le détache des ſens & on luy fait connoître & aimer d'autres plaiſirs que ceux qui ſe goûtent par leur moyen, ce qui eſt de la derniere importance.

Il faut avoüer neanmoins que ceux qui ſont Mathematiciens, ne ſont pas toûjours exacts dans les raiſonnemens qu'ils font ſur d'autres matieres que les Mathematiques, & qu'ils n'ont pas moins d'amour pour les plaiſirs

ſenſibles, que ceux qui ignorent ces Sciences. C'eſt pour cela qu'on n'a preſque fait aucune attention à ce fruit que l'on peut retirer des Mathematiques, & qu'on ne les a regardées que comme des Sciences curieuſes, ou utiles ſeulement à ceux qui embraſſent de certaines Profeſſions; en un mot c'eſt ce qui a fait qu'on les a négligées. Mais il ne faut pas juger de leur utilité par le peu d'uſage qu'en ont fait ceux dont nous parlons, pour n'avoir pas aſſez conſideré que la fin de toutes nos études doit être de nous former l'eſprit & le cœur; & que l'eſprit de l'homme n'eſt pas fait pour les Mathematiques, mais que les Mathematiques ſont faites pour luy. C'eſt ſans doute un défaut trés-conſiderable, & pour l'éviter & tirer toute l'utilité que peut produire l'étude des Mathematiques, il faut que ceux qui enſeignent ces Sciences faſſent faire à leurs Diſciples toutes les réflexions néceſſaires. Ils doi-

doivent leur apprendre à bien diſcerner le vray d'avec le faux, à bien appercevoir ce que c'eſt qu'un raiſonnement juſte par la comparaiſon des choſes claires & des démonſtrations certaines qu'ils leur propoſent ; leur faire remarquer cette belle Methode que l'on ſuit dans les Mathematiques pour réſoudre une difficulté ; ce ſoin que l'on a de définir tous les termes obſcurs, afin d'éloigner toutes les diſputes de mots, & cette adreſſe à tirer de ce qui eſt connu des choſes ſi cachées & ſi difficiles. Il faut qu'en même-temps ils leur faſſent eſtimer & aimer toutes ces choſes, qui ſurprennent l'eſprit, & qui luy ſont agreables, quand il n'eſt pas rebuté par les difficultez. Enfin, pour me ſervir d'une expreſſion de S. Grégoire Thaumaturge, ils doivent former dans l'eſprit des jeunes gens comme une digue aſſurée contre l'erreur, les fortifiant & les accoûtumant à ne donner leur con-

ſentement qu'à ce qui eſt évident ; & détachant leur cœur des plaiſirs ſenſibles, leur en faiſant goûter de plus purs. Il n'y a perſonne qui ait quelque connoiſſance des Mathematiques qui n'en ſoit charmé. La verité y paroît ſans nuage, au lieu que dans les autres Sciences elle y eſt cachée ſous d'épaiſſes tenebres. Elles doivent donc plaire à nôtre eſprit ; car il n'eſt pas ſi fort corrompu par le menſonge, qu'il ne lui reſte une forte inclination pour la verité. Il n'y a rien qu'il aime davantage, comme dit S. Auguſtin : *Quid fortiùs deſirat anima quàm veritatem.*

Si les Mathematiques ne donnent pas tout le plaiſir dont elles ſont capables, & ſi elles n'attirent pas toutes les perſonnes ſtudieuſes, c'eſt que les épines dont elles ſont environnées rebutent, parce qu'on fuit la peine & le travail. Mais ce n'eſt pas un juſte ſujet de les négliger. Premierement

ces

ces épines, c'eſt-à-dire la difficulté qu'il y a à comprendre les veritez qu'elles propoſent, n'en eſt pas tellement inſéparable, qu'on ne puiſſe dire que ſi les Mathematiques ſont difficiles, c'eſt en partie la faute de ceux qui les ont traitées; car il ſemble que ceux qui ont écrit dans les ſiecles précedens, ne ſe ſoient mis en peine que de convaincre l'eſprit ſans penſer à l'éclairer. Ce n'eſt pas qu'on puiſſe rendre ces Sciences auſſi aiſées que l'Hiſtoire, que la Poëſie, & que la Rhetorique, où il n'eſt beſoin pour devenir ſçavans que d'avoir des yeux & des oreilles, dont les Mathematiques demandent en quelque façon qu'on ſe défaſſe & que l'on applique ſeulement ſon eſprit; ce qui eſt difficile, parce que comme nous ſommes faits aujourd'huy, nous ſentons plus volontiers que nous ne concevons; les operations des ſens étant accompagnées de quelque

plaiſir ſenſible qui ne ſe trouve point dans les conceptions ſpirituelles. Mais cela ne doit pas éloigner de l'étude des Mathematiques, il les faut même employer pour vaincre cette délicateſſe, qui fait que l'on ne ſe donne qu'à ce qui eſt facile & peut cauſer un plaiſir ſenſible. Car comme nous devons de bonne heure endurcir nôtre corps au travail, & le rendre capable de ſuporter de grandes fatigues, il faut auſſi faire nôtre eſprit aux travaux ſpirituels, l'accoûtumant à concevoir les choſes difficiles, à y donner une entiere attention, à ſuivre le fil d'un raiſonnement pour long qu'il ſoit, & à ne pas ſe rebuter de la multiplicité des choſes qu'il faut conſiderer pour appercevoir la verité ou la fauſſeté d'une propoſition. Ceux qui ne ſont accoûtumez qu'à des études ſenſibles, comme à la Poëſie, deviennent ſi tendres & ſi délicats qu'ils ne ſont pas capables de

de la moindre application. Ils ne ſçavent ce que c'eſt que faire uſage de leur eſprit, & un raiſonnement de cinq à ſix lignes un peu ſpirituel, leur caſſe la tête.

Il ne faut donc pas eſperer que l'on puiſſe traiter les Mathematiques d'une maniere agréable à ces perſonnes. On peut bien leur faire voir & toucher les figures ; mais il n'y a que le pur eſprit qui apperçoive leurs proprietez ; ce qui ne ſe peut faire ſans attention. Cependant ſi on ne peut pas rendre les Mathematiques aſſez aiſées pour qu'on les apprenne en joüant, on peut diminuer le travail de cette application qu'il leur faut donner ; & c'eſt à quoy l'on n'avoit pas travaillé. Je ne veux pas dire que les démonſtrations qu'on voit dans les Ouvrages des Anciens, manquent du côté de la verité, puis qu'elles ſont certaines ; mais elles pechent contre la netteté & la clarté, étant trop longues

gues & trop embaraſſées. Outre cela, ce qui empêche que les Ouvrages de ces grands Hommes, qui méritent d'ailleurs tant de loüanges, n'éclairent auſſi vivement l'eſprit, qu'ils le convainquent fortement; c'eſt qu'ils ſe contentent ſeulement de placer les propoſitions qu'ils font, de ſorte que celles qu'ils employent pour une démonſtration, ſe trouvent devant cette démonſtration. Ils ne ſe ſont point aſſujettis à un ordre qui pût conduire le Lecteur de ce qu'il connoît à ce qu'il ne connoiſſoit pas, ſans autre travail que celuy d'une attention médiocre. Ce qui arrive infailliblement lors que les Propoſitions ſont rangées naturellement ſelon qu'elles ſe doivent ſuivre les unes les autres: qu'on ne propoſe en chaque lieu que ce qui appartient à la matiere qui s'y traite, & qu'enfin on cherche les voyes les plus courtes; car on ſe laſſe dans les plus beaux chemins

quand

quand ils ſont trop longs. Outre qu'un ouvrage n'eſt pas propre à former l'eſprit, lorſqu'il n'y a point d'ordre, qui eſt ce qu'on cherche, & ce qu'on doit trouver dans les Mathematiques. S. Auguſtin nous donne une regle qui nous empêcheroit de tomber dans l'erreur auſſi ſouvent que nous le faiſons, ſi nous la ſuivions. Prenez garde, dit-il, de croire ſçavoir une choſe, ſi vous ne la connoiſſez auſſi clairement que vous ſçavez que ces nombres, un, deux, trois, quatre, ajoûtez dans une ſomme font dix. Un Ouvrage de Mathematique doit donc être ſi exact, & pour la clarté, & pour l'ordre, qu'il ſerve de modelle pour celuy que l'on doit ſuivre dans toutes les Sciences; de ſorte que l'eſprit s'accoûtume dans cette étude à s'appliquer aux choſes qu'il doit examiner, à diſcerner la verité & à la déduire des principes dont elle dépend, d'une maniere ſuivie. C'eſt une cho-

chose d'un prix infini, & le fruit le plus précieux que nous puissions recueillir de nos premieres études.

Toutes ces considerations sur l'utilité que la Jeunesse peut retirer de l'étude des Mathematiques, m'ont porté à travailler à cet Ouvrage, que j'ay tâché de rendre facile, afin qu'il pût donner une entrée dans ces Sciences, & qu'il fût propre à former l'esprit; ce qui a été mon principal dessein. Pour ce qui est de la facilité, je sçay par experience que pour peu qu'on s'y applique on le peut entendre, & que les jeunes gens avec le secours d'un Maître, n'y trouveront rien au-dessus de la capacité de leur esprit. Je ne propose d'abord que des proprietez de la Grandeur, si connuës que personne ne les peut ignorer. Je commence par les nombres, qui sont la chose que l'esprit connoît le plus clairement. Les Démonstrations sont courtes; & c'est à quoy j'ay travaillé,

vaillé, parce que je ſçay que l'eſprit des jeunes gens ne peut pas demeurer long-temps attentif, & par conſequent qu'il ne peut concevoir les démonſtrations les plus claires lors qu'elles ſont un peu longues. C'eſt auſſi ce qui m'a fait rechercher celles qui ſont generales, qui étant une fois conçûës répandent une grande lumiere dans ce qui ſuit; de ſorte qu'en un mot & ſans obſcurité on peut propoſer & prouver pluſieurs veritez importantes; ce qui abrege beaucoup. Dans chaque Livre, il n'y a que deux ou trois démonſtrations qui puiſſent arrêter: toutes les autres en ſont des conſéquences qui ſautent aux yeux.

Ce Traité a pour objet la Grandeur en general. *Grandeur* eſt tout ce que l'on conçoit capable du plus ou du moins, c'eſt à dire tout ce qui peut être augmenté par quelque addition, ou qui peut être diminué par quelque retranchement. Ainſi, non

ſeu-

ſeulement l'on renferme ſous le nom de Grandeur la longueur, la largeur, & la profondeur des corps, mais encore le temps, la peſanteur, la vîteſſe, le mouvement, les ſons, les autres qualitez dans leſquelles on peut diſtinguer pluſieurs degrez, & generalement touces les choſes finies, capables du plus ou du moins. Par conſequent ſous ce nom de Grandeur, on comprend même les ſpirituelles qui ſont finies, puis qu'on peut conſiderer dans leurs perfections des degrez differens: qu'on les peut concevoir plus ou moins parfaites en elles-mêmes, ou par rapport à d'autres. L'objet des Mathematiques en general eſt la grandeur priſe de la maniere que nous venons de le dire. On en explique les parties dans les Traitez particuliers; c'eſt pourquoy il eſt aſſez évident que c'eſt par un Traité de la Grandeur en general, que l'on doit ouvrir le Cours des Etudes

des des Mathematiques, & que ce Traité doit être consideré comme les Elemens de cette Science. J'ay crû que l'Ouvrage d'Euclide, qu'on appelle les Elemens de Geometrie, n'étoit point si propre à donner cette entrée, car outre qu'il n'y traite que d'un espece particuliere de la Grandeur, qui sont les corps, dont les proprietez sont plus composées & plus difficiles à connoître que celles de la Grandeur en general, comme il n'y parle que de la mesure des corps, son Ouvrage n'est pas si propre pour former l'esprit que celuy que je propose. Il est vray que les corps que l'on considere dans la Geometrie n'ont ny couleur, ny saveur, ny aucune autre qualité sensible qui puisse flatter les sens; mais enfin ils forment des images, & il arrive tous les jours, que ceux qui sont accoûtumez aux démonstrations où l'on fait considerer quelque figure, ne sont

pas

pas capables de concevoir un raiſonnement s'il n'eſt exprimé par des lignes, & qu'ils ne prennent pour de véritables démonſtrations que celles que l'on peut rendre ainſi ſenſibles par des figures. L'imagination auſſi bien que nos ſens, eſt une grande ſource d'erreurs. Ceux qui n'ont jamais fait uſage de leur eſprit pur, & qui ſont accoûtumez à ne concevoir que ce que l'imagination peut repréſenter, ſont peu diſpoſez à entrer dans la connoiſſance des choſes ſpirituelles. Auſſi ne voyons-nous que trop ſouvent que les plus grands Geometres ne ſont pas bons Metaphyſiciens; c'eſt-à-dire qu'ils ne conçoivent pas ce qui aopartient aux Etres ſpirituels, comſont Dieu, les Anges, & l'ame de l'homme. Cet inconvenient ne ſe trouve point icy. Dans tout ce Traité de la Grandeur en general, il n'eſt beſoin en aucune maniere de repréſenter des corps: il ne le faut pas même

faire;

faire; puis que ce qu'on dit de la Grandeur en general peut convenir à des choſes ſpirituelles, dans les perfections deſquelles l'on peut concevoir pluſieurs degrez, & qui par conſequent ſont capables d'augmentation ou de diminution, & de pluſieurs rapports & proportions. Ainſi l'étude de ce Traité détache davantage l'eſprit des choſes ſenſibles, que la Geometrie, & donne une plus grande diſpoſition pour concevoir les choſes ſpirituelles & abſtraites.

Les anciens Geometres, comme nous avons dit, ne ſe ſont point aſſujettis à garder un ordre naturel dans leurs Ouvrages, comme il paroît dans celui d'Euclide, qui ne ſemble propoſer les veritez qu'il enſeigne que comme elles ſe ſont préſentées fortuitement, puis que celles qui appartiennent à des matieres differentes s'y trouvent mêlées ſans diſtinction. Cette confuſion ne ſe trouve peint icy,

tout y étant traité avec ordre & dans ſon lieu. L'on donne même dansle VII. Livre, les Regles de la Methode. C'eſt pourquoy j'eſpere que cet Ouvrage pourra contribuer à former l'eſprit de ceux qui le liront; qu'il leur ſervira d'un modelle de clarté par la certitude des Démonſtrations qu'il contient, & de netteté par l'ordre qui y eſt gardé. L'on ne peut auſſi rien concevoir de plus propre pour rendre l'eſprit étendu; car comme cet Ouvrage traite de la Grandeur en general, ſous laquelle tous les êtres finis ſont compris, il donne de vaſtes connoiſſances. La maniere de démontrer que l'on employe eſt trés-feconde, comme on le reconnoîtra: elle ouvre des moyens pour trouver une infinité de démonſtrations. Je deſire que les jeunes gens prennent dans la lecture de cet Ouvrage l'habitude de concevoir & d'aimer les veritez qui ſont au deſſus des

ſens.

ſens. Il y a des Problêmes curieux : s'ils y prennent plaiſir, ils reconnoîtront que l'on peut trouver du divertiſſement ailleurs que dans les choſes materielles & ſenſibles. C'eſt une réflexion que les Maîtres leur doivent faire faire. Ils auront occaſion de leur inſinuer pluſieurs autres veritez tres-importantes ; car en leur faiſant remarquer l'étenduë de l'eſprit humain, qui paroît dans cette Science plus que dans aucune autre ; & leur montrant que ce ne ſont point les ſens ny l'imagination qui nous ont fait découvrir tant de veritez, ils les convaincront qu'il n'y a point d'homme raiſonnable, qui puiſſe penſer qu'une ame materielle ſoit capable de tant de connoiſſances ſi certaines, ſi abſtraites, & ſéparées de toute matiere ; comme ſont particulierement celles que donne le ſixiéme Livre, où l'on traite des Grandeurs incommenſurables dont la valeur ne

peut être exprimée par aucun nombre, & de qui cependant l'esprit découvre plusieurs proprietez, perçant avec une subtilité merveilleuse au travers des tenebres qui les cachent. Autrefois le Philosophe Aristippe ayant apperçû sur le rivage de l'Isle de Rhode où la tempeste l'avoit jetté, des figures de Geometrie; Je vois, s'écria-t'il, qu'il y a des hommes dans ce lieu. *Vestigia hominum agnosco.* En lisant un Traité de la Grandeur en general, & en considerant les démonstrations étenduës & fecondes qu'on y trouve, les veritez cachées qui y sont expliquées; on a sujet de s'écrier que l'esprit de l'homme qui a trouvé toutes ces choses; qui les conçoit & qui les explique, est bien élevé au dessus de la matiere, & de la condition des brutes; reflexion utile pour connoître la dignité de l'ame, & pour se convaincre qu'elle est faite pour quelque chose de grand.

grand. Mais ſi ce Traité fait voir l'étenduë de l'eſprit, il fait auſſi connoître ſes bornes; car il y a des démonſtrations claires & convaincantes qu'une grandeur finie eſt diviſible juſqu'à l'infini. Cette infinité eſt incomprehenſible : cependant on en fait connoître les proprietez, les rapports: ce qui démontre qu'il y a des veritez qui ſont également certaines & incomprehenſibles; & que par conſequent les veritez que la Religion nous enſeigne ne doivent pas être ſuſpectes parce qu'on ne les comprend pas entierement. Ceux qui enſeigneront cet Ouvrage, pourront trouver occaſion de faire pluſieurs ſemblables réflexions, qui non ſeulement ſeront utiles pour donner de grandes ouvertures dans les Sciences, mais encore pour redreſſer l'eſprit & le cœur de leurs Diſciples, qui eſt le principal but que doivent ſe propoſer les Maîtres.

C'eſt

C'eſt pour la troiſiême fois que je retouche cet Ouvrage. Il n'eſt point neceſſaire que je marque en détail ce que cette derniere Edition peut avoir de particulier : il n'y a qu'à la comparer avec les précedentes. J'ay tâché de profiter des Livres qui ont paru depuis la ſeconde Edition ; des Ecrits de pluſieurs Profeſſeurs habiles qui enſeignent actuellement dans Paris, & dont on ne peut ignorer ni le nom ni le merite. Sur les avis qu'on m'a donné j'ay expliqué ce qui ne l'étoit pas aſſez. J'ay corrigé ce qui étoit défectueux. J'ay abregé, j'ay retranché ce qui étoit moins neceſſaire. J'ay ajoûté bien des choſes en differens endroits ; & j'ay augmenté tout l'Ouvrage d'un huitiéme Livre. Je ne prétens pas pour cela, qu'il ſoit parfait. Ce ſont des Elemens pour ceux qui commencent. Celui qui aprés les avoir lûs concevra le deſir d'en

ſçavoir

ſçavoir davantage, ſera capable d'entendre & de lire des ouvrages plus ſçavans.

JESUS-MARIA.

Permission du R. P. Superieur General de la Congregation de l'Oratoire de JESUS.

NOus ABEL LOUIS DE SAINTE MARTHE, Prêtre Superieur General de la Congregation de l'Oratoire de JESUS CHRIST Nôtre-Seigneur, suivant le Privilege à nous donné par Lettres Patentes du Roy en datte du 22 Decembre 1672 signé NOBLET, par lesquelles sont fait défenses à tous Imprimeurs & Libraires, & à tous autres, d'imprimer, ni mettre au jour aucun des Livres composez par ceux de nôtre Congregation, sans nôtre expresse licence par écrit, à peine de confiscation des Exemplaires, & de mille livres d'amende : Permettons au Sieur André Pralard, Libraire Imprimeur à Paris, de faire imprimer & exposer en vente, un Livre intitulé, *Elemens des Mathematiques ou Traité de la Grandeur, composés par le R. P.* LAMY, Prêtre de nôtre Congregation. DONNE' à Paris le premier Octobre 1687.

Signé, A. L. DE SAINTE-MARTHE.

TABLE
DES SECTIONS ET CHAPITRES.

LIVRE PREMIER.

LIVRE SECOND.

CHAP.

LIVRE TROISIE'ME.

Des Raisons ou Rapports que les Grandeurs ont entr'elles.

LIVRE QUATRIE'ME

Des Raisons composées que les Puissances & toutes les Grandeurs de plusieurs Dimensions peuvent avoir entr'elles.

DES CHAPITRES.

LIVRE CINQUIE'ME.

Des Fractions, & des operations Arithmetiques sur les Fractions & sur les les Raisons.

LIVRE SIXIE'ME.

Des Grandeurs incommensurables.

LIVRE SEPTIE'ME

De la methode de resoudre une Question ou Probleme.

LIVRE HUITIE'ME.

Supplement des Elemens des Mathematiques.

CHAP.

TABLE DES CHAPITRES.

ELEMENS

ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE PREMIER.

PREMIERE SECTION.

La science de la Grandeur en general doit être regardée comme les Elemens de toutes les Mathematiques.

CHAPITRE PREMIER.

Quel est le sujet de ce Traité de la Grandeur en general.

MA principale vûë dans cet Ouvrage est d'ouvrir l'esprit, & de rendre capable des Sciences. Je traite donc ces Elemens de Mathematiques de maniere, qu'ils ser- 1

vent de modelle pour toute autre étude : car on pourra regarder ce qu'ils contiennent comme des exemples, qui rendent ſenſibles les regles qu'il faut ſuivre dans la recherche de la Verité. Pour cela ceux qui liront mon Ouvrage, doivent ſe mettre en ma place ; ne conſiderant pas qu'ils ont un Livre entre les mains, mais ſe regardant comme Auteurs, & comme ayant à trouver ce que ce Livre propoſe d'enſeigner. Je ne leur ſervirai que de guide ; Je ne fais point le perſonnage de Maître ; je prépare l'eſprit de celuy qui lit mes Ecrits de maniere, que de luy-même il peut, avec une mediocre attention, découvrir la verité des principes que j'expoſe, & appercevoir les conſequences qui en ſont les ſuites naturelles.

Je me comporterai donc ici comme ſi je ne ſçavois pas moy-même ce que c'eſt que les Mathematiques, ſi ce n'eſt que ſelon qu'on parle de ce que les Mathematiciens peuvent faire, j'apperçois que l'objet general de toutes les Mathematiques, c'eſt tout ce qui eſt Grand, ou la Grandeur conſiderée en general. Grandeur, c'eſt tout ce qui peut être augmenté ou être diminué : ce qui a des parties. Les Mathematiciens conſiderent les corps, ils font des figures, ils meſurent la terre, le mouvement des cieux ; ils font des machines, ils ſont Architectes. En toutes ces choſes, la Grandeur eſt leur objet. Ce nom comprend preſque toutes les choſes materielles & ſpirituelles, non ſeulement les corps, mais encore les eſprits. Car les Anges peuvent faire une compagnie qui peut être augmentée ou diminuée. On conçoit qu'on y peut ajoûter d'autres Anges, ou les en retrancher. Chaque Ange fait partie de cette compagnie.

Ce mot de *Grandeur* ne convient donc pas ſeulement aux corps qui ſont étendus en longueur, lar-

largeur & profondeur, mais encore au temps, au mouvement, aux ſons. Le temps a des parties; il peut être augmenté ou diminué. Il eſt compoſé d'années, de mois, de ſemaines, de jours, d'heures, de minutes, &c. Le mouvement a auſſi des parties ou degrez, ſelon leſquels il s'augmente ou ſe diminuë. Un corps ſe meut ou plus vîte ou plus lentement qu'un autre, deux fois, trois fois, &c. Les oreilles apperçoivent des degrez dans les ſons: un ſon eſt plus fort ou plus foible, il s'augmente ou il ſe diminuë. Generalement tout ce qui a des degrez eſt renfermé dans l'idée de la Grandeur: ainſi les qualitez, les perfections, qui ont des degrez ſelon leſquels elles s'augmentent ou elles ſe diminuënt, ſont des Grandeurs: De ſorte que la ſcience de la Grandeur eſt une ſcience univerſelle, qui s'étend preſque à toutes choſes. Au moins elle comprend en general toutes les Mathematiques; C'eſt pourquoi on luy a donné le nom de *Mathematique Univerſelle*, & *de Clef des Mathematiques*. Certainement cette ſcience en eſt les élemens, c'eſt à dire l'entrée: elle en découvre les premiers principes: elle contient ce qu'il faut ſçavoir avant toute autre choſe, & ce qui étant bien connu donne une merveilleuſe facilité pour en apprendre toutes les parties. Selon qu'on prend ce mot *Element*, les principes d'une ſcience, & ce qui en donne une connoiſſance generale en ſont les Elemens. S'il n'y a donc aucune partie des Mathematiques qui n'ait pour objet quelque Grandeur, ſans doute que la ſcience de la Grandeur en general en doit être regardé comme les Elemens. C'eſt donc par un Traité de la Grandeur en general qu'il en faut commencer l'étude.

CHAPITRE II.

Ce que c'est que la Grandeur. Elle est successive ou permanente, continuë ou discrete. Les Nombres se peuvent appliquer à toute espece de Grandeur.

2 *GRandeur*, c'est tout ce qui peut être augmenté ou diminué, ce qui a des parties. Tout ce qui est grand a des parties unies ou separées. La grandeur des corps est continuë; leurs parties, de quelque maniere qu'on les considere, ou selon leur longueur, ou selon leur largeur, ou selon leur profondeur, sont unies. Toûtes les autres grandeurs ont leurs parties separées. Car une compagnie d'esprits est composée d'esprits qui sont distinguez. Les parties du temps, du mouvement, des sons, ne sont pas liées les unes avec les autres : ce qui fait qu'on distingue la grandeur, ou *la quantité* comme on parle dans les Ecoles, en *successive* & *permanente*. La successive est celle dont les parties se succedent les unes aux autres, ou existent les unes aprés les autres, comme le temps & le mouvement. La permanente est celle dont toutes les parties existent en même temps, qui se subdivise en *discrete* & *continuë*. Les corps ont une quantité continuë, leurs parties sont liées. La quantité discrete est celle de toutes les choses qui sont grandes, dont les parties sont separées; ce que marque ce mot, *discrete*.

La quantié discrete se nomme *Nombres*, & la science qui traite des nombres *Arithmetique* d'un mot grec *Arithmos*, qui signifie *nombre*. Les nombres ne sont proprement que des noms qui expriment les parties que l'on conçoit dans ce qui a de la grandeur. Or quoique la quantité continuë ait

ses

ses parties unies, on peut au moins par la pensée concevoir entr'elles de la distinction; & ainsi on peut dire que la quantité discrete ou les nombres, comprennent la quantité continuë, & que ce que l'on enseigne de la quantité discrete ou des nombres s'y peut appliquer. Les nombres sont composez de parties déterminées & indivisibles, c'est à dire que l'on conçoit comme indivisibles; ou à la divisibilité desquelles on ne fait point d'attention. Car, par exemple, lors qu'on veut mesurer une perche, & qu'on trouve qu'elle est égale à six pieds, on n'y considere que six parties, ne faisant point attention aux plus petites parties dans lesquelles chacune de ces six parties peut être divisée.

Les nombres ne sont donc que des noms, dont les hommes se servent pour exprimer la quantité déterminée des parties qu'ils conçoivent dans une grandeur. *Un*, est un nom que l'on donne à une grandeur qui est indivisible, ou que l'on considere sans avoir égard aux parties qu'elle peut contenir, mais seulement qu'on regarde comme pouvant faire partie de plusieurs autres grandeurs. Ainsi il n'est pas si difficile qu'on le veut faire croire, de donner une idée de l'*Unité*; parce que ce mot ne marque qu'une maniere de concevoir. *Deux*, est un nom qui signifie une partie d'une grandeur jointe à une autre partie égale; ainsi des autres nombres. On dit que l'*unité* n'est pas *nombre*; parce que l'on veut par ce mot marquer pluralité, ou multitude de deux ou plusieurs *unitez*; c'est à dire de plusieurs choses que l'on conçoit toutes comme parties égales & semblables d'un même tout; & entant que chacune s'appelle *une*, elle est regardée comme n'ayant point de parties. Les nombres limitent donc en quelque maniere

cette proprieté, de presque tout ce qui est grand, de pouvoir être divisé à l'infini; car un pied se divise en plusieurs pouces, un pouce en plusieurs lignes, une ligne en plusieurs points, & ainsi à l'infini. Mais les nombres semblent borner & terminer cette divisibilité; car on n'appelle une grandeur *une*, que lors qu'on la conçoit comme dans la derniere division dont elle est capable. Neanmoins, comme on le verra dans la suite, on peut exprimer même par des nombres sa divisibilité, en disant par exemple *la moitié* de cette grandeur, *le quart*, *le tiers*, &c. Les nombres qui expriment ces subdivisions se nomment *nombres rompus*, au lieu que ceux qui expriment les premieres divisions s'appellent *nombres entiers*. Comme les nombres conviennent à toutes sortes de Grandeurs, la Grandeur en general n'est proprement qu'un Traité d'Arithmetique.

CHAPITRE III.

Des signes ou notes avec lesquelles on peut exprimer les Nombres, & toute Grandeur. Explication des autres notes dont on se servira.

3 POur abreger l'expression d'un nombre & de toute sorte de grandeur, on se sert de *signes* ou *notes*. L'on appelle *chifres* ces caracteres que l'on dit que les Arabes nous ont donné. Les voila, avec le nom dont ils tiennent la place, ou qu'ils signifient. 1, *un*. 2, *deux*. 3, *trois*. 4, *quatre*. 5, *cinq*. 6, *six*. 7, *sept*. 8, *huit*. 9, *neuf*.

Ces chifres déterminent la maniere dont on considere une ou plusieurs grandeurs. Ils marquent qu'on y considere un certain nombre de parties. Par exemple ce caractere 3, marque que la grandeur

deur à laquelle on l'applique a trois parties, ou qu'elle eſt compoſée de trois grandeurs chacune plus petite qu'elle, & qui ſont égales entr'elles. Ainſi les chifres ne ſont d'uſage que lors que les grandeurs qu'il faut marquer ſont connues, & par conſequent qu'on voit qu'elles ont tant de parties, ou qu'on y peut concevoir tant de parties. C'eſt ce qui fait qu'il eſt bon d'avoir d'autres ſignes ou notes que ces chifres. On eſt accoûtumé aux lettres de l'Alphabet, on ſe les repreſente plus facilement. Or quelques grandeurs qu'on puiſſe propoſer, on les peut marquer avec des lettres, appeller l'une *a*, l'autre *b*, l'autre *c*, &c. quoy qu'on ne ſçache pas encore leur valeur; car pour appeller l'une *b* & l'autre *a*, il n'eſt pas neceſſaire qu'on ſçache la quantité de parties qu'elles peuvent avoir au regard l'une de l'autre, au lieu que je ne les puis marquer avec des chifres & appeller l'une, par exemple 2, & l'autre 3, ſi je ne connois leur valeur au regard l'une de l'autre, que l'une eſt par exemple les deux tiers de l'autre. Ainſi les lettres ſont des notes plus generales. On s'en peut ſervir pour marquer les nombres, au lieu qu'on ne ſe peut ſervir de nombres ou chifres que pour marquer les grandeurs qu'on connoiſt.

Il ſemble que les hommes ayent d'abord commencé à compter ſur leurs doigts. L'on voit que preſque toutes les Nations, aprés avoir compté juſques à dix, autant que nous avons de doigts, recommencent. Les Hebreux & les Grecs aprés avoir marqué les nombres juſques à dix par les dix premieres lettres de leur Alphabet, la onziéme lettre eſt la marque de vingt, la ſuivante de trente, & ainſi de ſuite; & pour marquer les nombres qui ſe trouvent entre dix & vingt,

entre vingt & trente, &c. comme quinze, ils joignent la cinquiéme lettre avec celle qui marque dix. Les Latins marquoient dix par un X, cinq par un V, l'unité par un I, deux par II. trois par III; & pour abreger ils se servoient du V & du X pour marquer de moindres quantitez, mettant devant autant de fois I que ces quantitez valent moins que V. ou X: ainsi IV vaut quatre, & IX vaut neuf. Pour les grands nombres ils les marquoient par la premiere lettre de leur mot Latin. Ainsi C, par où commence ce mot *centum*, marque *cent*; & M, premiere letre du mot *mille*, est la marque de *mille*. La lettre D, vaut *cinq cens*. On prétend que cette note étoit dans le commencement la moitié de cette note CIↃ, dont on se servoit pour marquer *mille*.

Je ne dis ceci qu'en passant, car cela se trouve expliqué ailleurs; & ce n'est que pour faire voir combien les chifres sont plus commodes. Les Arabes, de qui nous les avons reçus, ont suivi cette ancienne maniere de compter, en recommençant aprés qu'on est venu jusqu'à dix. Il est important de bien considerer que la valeur des chifres ne dépend pas seulement de leur figure, mais de leur disposition. Lors que plusieurs chifres sont rangez de suite dans une même ligne, ceux qui sont dans la premiere place, commençant à compter de droit à gauche, ne valent jamais plus qu'eux-mêmes. Ceux qui sont dans la seconde place, valent dix fois davantage que dans la premiere: 1, par exemple, dans la premiere ne vaut qu'une seule unité; dans la seconde il vaut une dixaine; dans la troisiéme, dix fois davantage, sçavoir dix dixaines, ou une centaine; dans la quatriéme, dix centaines, ou un mille; dans la cinquiéme; dix fois mille, ou dixaines de mille;

dans

dans la ſixiéme, dix dixaines de mille, c'eſt à dire cent mille; dans la ſeptiéme, une dixaine de centaine de mille, ou million; dans la huitiéme, une dixaine de millions; dans la neuviéme, une centaine de millions; dans la dixiéme, un milliard, ou billion; dans la onziéme, une dixaine de milliards; dans la douziéme, une centaine de milliards; ainſi de ſuite: en ſorte que la valeur d'un chifre eſt dix fois plus grande dans le rang ſuivant, que dans le precedent.

Pour augmenter ainſi la valeur de chaque chifre, on ſe ſert d'un ou de pluſieurs *zero*, ſelon que l'on veut faire valoir ce chifre. Les zero ſont faits ainſi, 0; en rempliſſant les premiers rangs, ils font voir que le chifre aprés lequel ils ſont placez eſt dans un rang plus reculé: comme ſi aprés 2 il y a deux zero en cette ſorte 200, ces deux zero feront voir que 2 eſt dans le troiſiéme rang, où il vaut deux cens: Ainſi quoique les zero ne ſignifient rien d'eux-mêmes, ils ne ſont pas inutiles, puiſqu'ils déterminent les rangs des chifres, ſelon leſquels leur valeur augmente ou diminuë par proportion décuple. Il a plû aux premiers Inventeurs de ces chifres d'établir cette proportion, ce qui étoit purement arbitraire.

Lors qu'il y a pluſieurs chifres ſur une même ligne, pour éviter la confuſion, on les coupe de trois en trois par tranches, ou ſeulement on laiſſe un petit eſpace vuide: & chaque tranche, ou chaque *ternaire*, a ſon nom. Le premier ternaire s'appelle unité; le ſecond, mille; le troiſiéme, millions; le quatriéme, milliards, ou billions; le cinquiéme, trillions; le ſixiéme, quatrillions Et comme dans le premier ternaire on compte 1°. nombres ou unitez, 2°. dixaine; 3°. centaine: dans chaque autre ternaire, on dit de même, nombre,

dixaine, centaine. Mais si c'est dans le troisiéme ternaire, cela voudra dire nombre de millions, dixaine de millions, centaine de millions; au lieu que dans le premier ternaire, quand on dit nombre, ou dixaine, ou centaine, on n'entend parler que d'unitez, tant d'unitez, tant de dixaines d'unitez, tant de centaines d'unitez.

Considerons avec soin la disposition de ces chifres qui est tres-simple, & qui fait qu'avec neuf caracteres & les zero on peut exprimer quelque nombre que ce soit pour grand qu'il puisse être.

de quinillions.			de quatrillions.			de trillions.			de billions.			de millions.			de mille.			d'unités.		
centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4 &c.																				

Pour donner à un chifre la valeur qu'il doit avoir, il n'y a qu'à augmenter le nombre des zero qui le précedent. Quand on passe les quintillions, cela s'appelle sextillions, septillions; ainsi de suite. Ce sont des mots que l'on invente, parce qu'on n'en a point d'autres.

Cette marque + signifie *plus*. $A + B$, c'est *A plus B*,

Celle cy — signifie *moins*. $A - B$, c'est *A moins B*.

= C'est la marque de l'*Egalité*. $C = D$, signifie

fie que C eſt égal à *D*. Au lieu de ce ſigne, on trouve en pluſieurs Livres celui-cy ⋗⋖ pour marque de l'Egalité.

× eſt le ſigne de la Multiplication. Il ſignifie proprement *par* Pour dire qu'il faut concevoir *A* multiplié par *B*, on écrit *A* × *B*.

s̃. ou *ſupra*, c'eſt *cy-deſſus*.

L. *Livre*.

n. *nombre*. On met des nombres dans les marges de cet Ouvrage, qui ſervent à trouver les endroits où l'on renvoie. L. 2. n. 6. c'eſt à dire, *Livre ſecond nombre ſix*.

Si ce qu'on allegue eſt du même Livre, on cite le nombre précedent qui eſt à la marge avec cette note s̃. Ainſi s̃ n. 5. c'eſt à dire, *ci-deſſus nombre cinquiéme*. Les autres notes qui ſont dans l'Ouvrage ſont expliquées dans les lieux où l'on commence de s'en ſervir.

CHAPITRE IV.

Des principes ou veritez connuës dont on peut tirer la connoiſſance des proprietez de la Grandeur.

AVANT que de paſſer outre je dois examiner 4
ſi je puis avoir quelque lumiere qui me guide dans les recherches que je ferai, & qui me faſſe diſtinguer la Verité, ſi je ſuis aſſez heureux pour la rencontrer, ou qui me redreſſe ſi je me trompe. Je ſuis déja convaincu par pluſieurs experiences qu'on ne ſe trompe point, lorſqu'on ne donne ſon conſentement qu'à des choſes claires; que les choſes ſont ce qu'il nous paroît clairement qu'elles ſont. Je ſçay auſſi qu'il y a de certaines verités connuës de tout le monde qui peuvent ſervir de flambeau, parce que toutes les choſes qui ont de la liaiſon avec elles & qui ſont une même

chose, doivent être également certaines.

Par exemple je sçai qu'il ne se peut pas faire qu'*une chose soit & qu'elle ne soit pas*; d'où je conclus qu'*une grandeur est égale à elle-même*; & de cette verité je conclus derechef, qu'il ne se peut pas faire que *le tout ne soit pas égal à toutes ses parties*; car le tout & toutes les parties prises ensemble ne sont qu'une même chose. Voilà un nombre de verités semblables qu'on nomme principes ou axiomes que je rangeray icy, & que je tâcheray de me rendre bien presentes. Et comme il est important de s'accoûtumer de bonne heure aux manieres de parler des Mathematiciens, & aux signes ou notes dont ils se servent pour rendre leur discours plus court & plus exact, j'exprimerai ces axiomes avec ces notes & à leur maniere.

PRINCIPES GENERAUX, ou verités claires & connues à qui on donne le nom d'Axiomes.

PREMIER AXIOME.

Le Tout est plus grand que sa partie.

Ainsi si A & B sont les parties de la Grandeur X, il faut que X soit plus grand que A & B pris séparement.

SECOND AXIOME.

Le Tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

Si A & B sont toutes les parties de la grandeur X, il est évident que $A + B$, c'est à dire A avec B est égal à X; ce qui s'exprime ainsi $A + B = X$.

TROISIE'ME AXIOME.

Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entr'elles.

Supposé que A soit égal à Z & que B soit aussi égal à Z, alors A & B sont deux grandeurs égales. On exprime ainsi ce raisonnement: si $A = Z$, &

$B = Z$, ou si $A = Z = B$, donc $A = B$. Je me servirai souvent de cette expression : qu'on y fasse donc attention. On peut joindre à cet axiome celui-ci qui n'est pas moins évident : Si A est égal à B, toute grandeur plus grande ou plus petite que B, sera plus grande ou plus petite que A.

QUATRIE'ME AXIOME.

Si à des grandeurs égales on en ajoûte d'égales, elles demeurent égales, ou les sommes sont égales.

Si $A = B$ ajoûtant à A & à B la même grandeur X, ils demeurent égaux ; $A + X = B + X$.

CINQUIE'ME AXIOME.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les restes seront égaux.

Si $A = B$, donc $A - X = B - X$; c'est à dire que si A & B sont deux grandeurs égales, A moins X est égal à B moins X.

SIXIE'ME AXIOME.

Si à des grandeurs inégales on en ajoute d'égales, elles resteront inégales, l'une plus grande, si elle étoit plus grande, ou plus petite si elle étoit plus petite.

Si X & Z sont des grandeurs inégales & que A & B soient des grandeurs égales, $X + A$ & $Z + B$ seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce qu'ils étoient auparavant.

SEPTIE'ME AXIOME.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les restes seront inégaux, l'un plus grand, si la grandeur étoit plus grande, l'autre plus petit, si la grandeur étoit plus petite.

C'est à dire, que si X & Z sont des grandeurs inégales, & A & B des grandeurs égales, $X - A$ & $Z - B$ seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce que X & Z étoient auparavant.

Huitie'me Axiome.

Une grandeur qui a le signe + *étant jointe avec elle-même ou avec son égale qui a le signe* —, *est égale à rien.*

C'est à dire, $+A - A$ n'est rien. On sçait qu'un zero n'a point de valeur : on exprime donc ainsi cet Axiome : $+A - A = 0$: ôtant ce qu'on a mis, il ne reste rien.

Neuvie'me Axiome.

Les choses qui sont moitié, ou tiers, &c. d'une même grandeur, ou de grandeurs égales, sont égales ; inégales, si les grandeurs entieres sont inégales ; plus grandes, si les grandeurs entieres sont plus grandes ; plus petites, si les grandeurs entieres sont plus petites.

On pourroit proposer plusieurs autres semblables Axiomes, c'est à dire plusieurs autres veritez qu'on ne peut ignorer, & dont on ne dispute point.

Chapitre V.

De la maniere de raisonner en Mathematique. Ce que c'est que Demonstration.

5 TOut ce qui est contraire à ces Axiomes, est faux. Il est vrai & certain, s'il a avec eux une liaison necessaire. Ce sont ainsi des sources de lumieres, comme je l'ay experimenté. Ce n'est pas neanmoins de ces seules veritez, qu'on peut tirer la connoissance entiere du sujet qu'on traite ; c'est de la notion claire qu'on a de ce sujet, c'est à dire de sa nature, ou de ce qu'on connoît qu'il est. La veritable methode pour connoître une chose, est de faire attention à ce qu'elle est. Sçavoir, c'est connoître ce que sont les choses. Toute connois-

noissance est une veritable science, lors qu'on ne prétend sçavoir que ce que l'on voit clairement dans l'idée de la chose qu'on étudie. C'est à quoy plusieurs n'ont pas assez pris garde. Ainsi je reconnois icy que pour avoir une veritable science de la Grandeur, il faut considerer avec attention l'idée qu'on en a. Tout ce qui se tirera de cette idée ne sera pas moins certain, que les consequences des principes que nous venons de proposer. Comme de l'idée qu'on a du corps de l'homme l'on conclut, sans erreur, que nôtre corps pour être parfait, doit avoir une tête, des pieds, des bras, & les autres parties.

Lors qu'on a supposé que les choses étoient faites de la maniere dont on convient, tout ce qui suit necessairement de cette supposition est une verité; comme si l'on convient que certaines regles sont bonnes, supposé qu'on les ait suivies, on ne peut rejetter les consequences qui en sont tirées. Nous verrons comme de la seule disposition des chifres, telle qu'on l'a supposée, on en déduit plusieurs consequences, qu'on voit clairement dans l'idée qu'on a de cette disposition.

Voila donc la methode qu'il me faut suivre, pour trouver la Verité. Premierement je dois considerer, avec attention, l'idée des choses que je voudrai connoître, c'est à dire considerer ce qu'elles sont, ou quelle est leur nature, que je dois bien définir, en marquant precisément la notion que j'en ay. La définition d'une chose, c'est une proposition qui explique sa nature, ou ce qu'elle est. Il y a des définitions de mots, c'est à dire des propositions qui déterminent l'idée d'un mot, & qui en ôtent la confusion. Il est necessaire de définir les termes dont on se doit servir, car souvent ils sont équivoques; & comme c'est, pour ainsi dire, au

tra-

travers des noms que nous voyons les choses dont on nous parle, si les termes sont obscurs, on ne voit les choses que confusément. Lors qu'une définition est bonne, si c'est une définition de mot, elle marque precisément ce que ce mot signifie; & si elle définit une chose, elle en doit donner une idée où l'on apperçoive ce qu'elle est; de sorte qu'en étudiant cette idée, on y découvre toutes les proprietez essentielles de cette chose.

Il y a des choses si claires & si faciles à faire, que personne ne les conteste, & qu'ainsi on accordera volontiers, comme par exemple, *Qu'un nombre peut être ajoûté à un autre nombre*, ou *qu'il en peut être retranché, s'il est plus petit*. C'est ce que les Mathematiciens appellent *Demandes*; c'est à dire des choses qu'on accorde, parce qu'on ne peut pas les contester. Comme la Verité naît de la Verité & qu'il y a peu de veritez steriles, il faut faire attention à tout ce qui est incontestable, & que tout le monde accorde, afin de voir ce qui s'en peut déduire.

Il faut sur toutes choses avoir presens à l'esprit ces principes generaux, ces veritez connuës dignes qu'on les croye, qu'on appelle pour cela *Axiomes*; c'est ce que ce mot grec signifie. Elles servent comme de flambeau, & c'est par leur moyen qu'on reconnoît, presque en toute occasion, si on a trouvé la verité, ou si l'on s'est trompé. Nous avons proposé cy-dessus, ceux qui avoient plus de rapport au sujet que nous devons traiter. Ensuite on s'applique à resoudre les questions ou propositions que l'on peut faire sur le sujet qui se traite. S'il s'agit de connoître & de démontrer une verité de speculation, la proposition s'appelle *Theoréme*: c'est un mot grec qui dit cela. S'il s'agit de faire quelque chose, & de prouver qu'on a

fait

fait ce qu'on avoit proposé de faire, cela s'apapelle *Problême*; ce mot grec ne signifie que proposition.

Pour démontrer un Theorême, il faut quelquefois faire preceder une proposition qui serve à la démonstration qu'on veut faire, qui soit comme une *anse* par laquelle on peut attraper, & prendre la verité dont il s'agit. Dans toutes les Sciences, lors qu'on cherche une verité importante, il faut examiner par quel endroit on la peut attaquer; ce qu'il faudroit sçavoir, ce qu'il faudroit avoir démontré pour la bien connoître, ou la faire connoître. Or lors qu'on propose une verité dont on ne parle que pour faire connoître une autre verité, la proposition que l'on fait s'appelle *Lemme*. C'est un mot grec, qui signifie proprement le titre ou l'argument qu'on met à la teste d'un Livre ou d'un Chapitre, qui fait connoître dequoy on doit traiter. On ne met un Lemme là où il est, que pour donner une entrée dans la proposition qui suit.

On nomme *Corollaire* une proposition, qui n'étant qu'une suite d'une proposition precedente, contient une verité qui s'apperçoit aussi-tôt qu'on a reconnu la verité de cette proposition precedente.

Selon ce que je viens de dire, lors que la verité d'une proposition est évidente, je dois me contenter de l'énoncer par des termes clairs; car la Verité n'a besoin pour preuve que d'elle-même, la clarté est son caractere. Si une proposition a besoin de preuves, je ne puis la prouver qu'en faisant voir qu'elle est une suite ou d'un Axiome, ou de la définition, c'est à dire de la notion claire de la chose, ou des suppositions qu'on a faites qui sont incontestables, que tout le monde accorde, & qui

ont

ont esté reçuës pour veritables, ou de ce qui a esté démontré auparavant dans un *Lemme*, dans un *Theorême*, dans un *Problême*, dans un *Corollaire*. Un raisonnement fait avec cette exactitude, s'appelle *Demonstration*.

CHAPITRE VI.

Des proprietez de la Grandeur, qui sont les plus simples & les plus faciles à connoître.

6 CE que je viens de faire n'est que pour me disposer à examiner ce que c'est que la Grandeur. Comme la methode avec laquelle je ferai cet examen doit servir de modelle pour toutes les autres études, je considererai premierement ce que moy-même je dois faire ici, qui est de faire une grande attention à ce que l'idée de la grandeur me presente; car il est évident que dans ce que l'esprit voit, aussi bien que dans ce que voyent les yeux du corps, on ne découvre ce que sont les choses qu'en les regardant de prés, & avec soin. Je ne connois ce que c'est qu'une fleur, qu'elle est sa figure & sa couleur, qu'en la regardant attentivement; quelle est son odeur, qu'en flairant; quelle est sa saveur, qu'en la goûtant. Aussi pour connoître ce que c'est que la Grandeur, il faut que je sois attentif à ce que me presente son idée. Connoître, c'est voir ce que sont les choses. Quand j'étudie la Grandeur, c'est pour voir ce qu'elle est; elle est ce que me represente son idée. Mais comme je sçay que mon esprit est fini, qu'il s'égare, qu'il se trompe; je dois considerer les choses peu à peu & comme par parties, afin de donner une attention entiere à tout ce que j'examineray, n'examinant d'abord que ce qui est de plus simple.

J'ay

J'ay vû que la Grandeur c'eſt ce qui peut s'augmenter ou être diminué; d'où j'apperçois que c'eſt une proprieté de tout ce qui eſt grand, qu'on luy peut ajoûter une autre grandeur, & retrancher celle-là, ou une autre qui luy eſt égale ou plus petite: ce qui convient generalement à tout ce qui eſt grand. Une compagnie d'eſprits peut s'augmenter par addition, & ſe diminuer par un retranchement ou ſouſtraction. On peut concevoir un Ange avec un autre Ange, ce qui eſt une addition; & que d'une compagnie d'Anges on en retranche deux, trois, quatre Anges. p. 4.

Multiplier une grandeur, c'eſt l'ajoûter à elle-même un certain nombre de fois. Multiplier cinq par ſix, c'eſt ajôuter cinq à ſoy-même ſix fois. Ainſi c'eſt une proprieté de tout ce qui eſt grand, de pouvoir être multiplié. La diviſion n'eſt pareillement qu'un retranchement, ou ſouſtraction. Diviſer une Grandeur par une autre, c'eſt retrancher celle-cy de la premiere autant de fois qu'elle y eſt contenuë. Diviſer une compagnie de ſoixante eſprits par vingt, c'eſt voir combien dans ſoixante il y a de fois vingt, & retrancher vingt de ſoixante autant qu'il y eſt de fois, c'eſt à dire trois.

Ces proprietez ſont faciles à connoître. L'idée de la Grandeur les preſente d'abord, ſans qu'on les recherche. Elles ſont extrémement ſimples; mais pour cela on ne doit pas en faire peu de cas: car j'ay reconnu que les principes de toutes les choſes naturelles ſont tres-ſimples, & que lors qu'on a une fois le principe, on a tout.

Il eſt manifeſte que toutes les choſes materielles ſont faites par des additions, & de multiplications; que les changemens qui leur arrivent, ſe font par des retranchemens & des diviſions: ainſi je vois qu'il ſera utile, avant que de paſſer outre,

&

& de vouloir considerer en chaque grandeur comme elle est composée de parties ajoûtées & multipliées, & comme elle se peut resoudre ou decomposer par la soustraction & par la division ; je dois, dis je, examiner comment on peut faire ces quatre operations, *ajoûter*, *soustraire*, *multiplier*, *diviser*.

Lors que les Grandeurs sont petites, ou qu'on les peut exprimer avec un ou deux caracteres, ces quatre operations sont faciles : on voit tout d'un coup que 4 & 6 font 10, que de 10 ôtant 6 reste 4, que si on multiplie 2 par 4, cela fait 8 : combien de fois 2 est en 4 : qu'il y est deux fois : il n'y a rien de plus évident, & par consequent rien de plus facile. Mais il n'en est pas de même lors que des nombres sont grands, je n'apperçois pas tout d'un coup, comme je le faisois dans les exemples proposez, ce que fait 678 ajoûté avec 593, ni ce que produiroient ces deux nombres, si on les multiplioit l'un par l'autre ; ni ce qu'il resteroit de 678, aprés en avoir retranché 593, ni combien de fois ce dernier nombre 593, est dans 678.

Voila en quoy consiste tout le secret *de l'Arithmetique*, ou *de l'Art de nombrer* ; C'est qu'on peut faire par parties, ce qu'on ne peut faire tout d'un coup, & c'est à quoy il faut faire une attention particuliere, non seulement pour entendre ce que l'on traite icy ; mais generalement pour toutes ses autres études : car ce qui fait qu'on trouve de la difficulté, qu'on n'avance pas, & qu'on tombe dans l'erreur ; c'est qu'on veut trop entreprendre. L'esprit est borné. Quand il ne s'applique qu'à des choses simples, il les comprend facilement ; mais quand il y a plusieurs choses à voir, & qu'il ne les sçait pas prendre les unes aprés les autres, il n'en prend aucune comme il faut.

Or

Or ce qu'on fait dans l'Arithmetique, donne un exemple de la methode qu'il faut suivre. Dans les quatre operations dont il est icy question, l'on n'ajoûte jamais que deux grandeurs, dont chacune ne s'exprime que par un des neuf premiers nombres. On ne multiplie à la fois que deux chifres l'un par l'autre, dont chacun ne peut valoir plus de neuf. Il en est de même de la soustraction, & de la division, comme on le verra dans la suite.

Cela se fait par le moyen de cette disposition des chifres, de laquelle j'ay parlé; car on range les grandeurs ou leurs signes, qui sont des chifres, de maniere que les unitez soient sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, & ensuite on opere separément sur chaque chifre: de sorte que l'on menage la capacité de l'esprit, on ne l'accable point, & on luy fait faire les choses les unes aprés les autres; ce que je repete afin qu'on y fasse attention, & qu'on suive cet exemple dans toutes les recherches d'esprit que l'on fera jamais.

Tout ce que l'on va donc dire touchant les quatre operations dont on a parlé, est extrémement facile. J'ai dit qu'on marque les grandeurs avec deux sortes de signes, qui sont les letres & les chifres. Je considererai premierement comment on opere avec les chifres; car il n'y a rien dont les idées soient plus claires, que celles des nombres que les chifres marquent. Vous verrez qu'il ne s'agira que d'exprimer sur le papier l'addition de deux chifres; par exemple de 6 & de 7, qui fait *treize*, qu'il est facile de marquer sur le papier; car *treize*, c'est une dixaine & trois unitez; ainsi il faut mettre 3 dans le premier rang, qui est celuy des unitez, & 1 dans le second rang, qui est celuy des dixaines. Il en est de même des autres operations, dont je vais parler. Ensuite j'examinerai com-

comment on peut faire les mêmes operations avec les lettres de l'Alphabet, qui marquant les choses d'une maniere fort generale, ne font pas tant d'impression: elles ne déterminent pas l'esprit, qui ne conçoit point facilement les choses quand elles sont abstraites.+ Quand je nomme *x* une certaine grandeur, je la represente d'une maniere generale, où un esprit qui n'est pas accoûtumé à ces manieres abstraites, ne conçoit rien: il ne se peut rien imaginer qui l'arrête, qui le détermine; au lieu que si je la désigne par ce chifre 7, aussi tôt, selon la matiere dont il s'agit, il conçoit une grandeur qui a ou 7 pieds, ou 7 pouces. Si c'est d'une somme d'argent dont on parle, il s'imagine un nombre ou de pistoles, ou d'écus, ou de livres, &c. Les choses particulieres & individuelles se conçoivent plus aisément; parce qu'il n'y a qu'elles qu'on puisse sentir ou imaginer. Ce n'est que par la pointe de l'esprit, pour ainsi dire, qu'on atteint & qu'on conçoit les choses generales. Comme il y a des choses qui ne peuvent être sensibles, il est important de s'accoûtumer à concevoir ce qui est abstrait, c'est à dire ce qui est separé de toute matiere. Mais aussi puisqu'il faut commencer par ce qui est de plus facile, & que les chifres se conçoivent plus facilement, voyons premierement comme, avec les chifres, on fait ces quatre premieres operations de l'Arithmetique sur les Grandeurs.

+ h.e. quando non ad certum aliquod objum determinatur.

SEC-

SECTION SECONDE.

DES QUATRE OPERATIONS DE L'ARITHMETIQUE, AJOUTER, SOUSTRAIRE, MULTIPLIER, ET DIVISER

Sur des Grandeurs marquées avec des Chifres.

CHAPITRE PREMIER.

PREMIERE OPERATION.

ADDITION.

Définition de l'Addition.

L'Addition est une operation par laquelle, ayant ajoûté plusieurs nombres connus dans une somme, on connoît la valeur de cette somme, qui étoit inconnuë. 7

PROPOSITION PREMIERE.

Premier Problême.

Ajoûter plusieurs nombres donnez dans une somme, & connoître quelle est cette somme. 8

1°. *Il faut disposer les nombres donnez de telle sorte,*

sorte, que les premiers chifres des uns soient sous les premiers chifres des autres, les unitez sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c. aprés cela il faut ajouter ces deux sommes par parties, commençant cette addition par le premier rang de droit à gauche, afin que la somme s'augmentant on rejette les chifres dans les rangs suivans, où ils valent davantage.

EXEMPLE. Ces deux sommes 432 & 245 sont données; on veut sçavoir quelle est la valeur de ces deux nombres.

p. 21. Je dispose, comme il a été enseigné, ces deux sommes. Je mets sous 2 qui vaut deux unitez, 5 qui vaut cinq unitez, sous 3 qui vaut trois dixaines, 4 qui vaut des dixaines, & 2 qui vaut des centaines, sous 4 qui vaut des centaines: ensuite commençant de droit à gauche, je dis 2 & 5 font 7 unitez que j'écris sous le rang des unitez. Venant au second rang je dis, 3 & 4 font 7 dixaines, que je mets sous le rang des dixaines. Enfin dans le troisiéme rang je dis, 4 & 2 font 6 centaines, lequel chifre je pose sous ce rang des centaines; ainsi j'ay 677 qui est la somme cherchée, égale aux deux qu'on avoit proposée pour être ajoûtées en une seule.

```
 432
 245
 ---
 677
```

2°. *Si l'addition des chifres d'un rang fait un plus grand nombre que celuy qui se peut mettre dans ce rang, il ne faut placer sous ce rang-là que ce qui luy appartient, & reserver le reste pour le rang suivant. Par exemple, si l'addition des chifres du premier rang fait* quatorze, *comme ce nombre vaut une dixaine & quatre unitez, & qu'on ne peut placer dans ce rang que des unitez, j'écris seulement*

lement 4 ſous ce rang, & je reſerve une dixaine pour le rang ſuivant.

EXEMPLE. Ces deux ſommes 459 & 665, ſont données; on veut ſçavoir le nombre qu'elles ſont étant ajoûtées dans une ſomme. Je diſpoſe ces deux ſommes comme elles doivent être diſpoſées, dans la maniere que vous le voyez.

```
 459
 665
```

Je dis premierement, 9 & 5 ſont 14, j'écris donc 4 dans le premier rang, & je retiens une dixaine pour le ſecond. Aprés je dis, une dixaine que j'ay retenuë avec ces deux chifres 5 & 6, qui ſont dans le ſecond rang, fait douze dixaines; j'écris donc deux dixaines, poſant 2 dans le rang des dixaines, & je reſerve dix dixaines ou une centaine pour le troiſiéme rang. Venant à ce troiſiéme rang je dis, une centaine que j'ay retenuë avec 4 & 6, fait onze centaines, ce qui vaut un mille plus un cent; ce que j'exprime, poſant 1 dans le rang des centaines, & 1 mille dans le rang des mille: Et cela me donne cette ſomme.

```
 459
 665
----
1124
```

3°. *Si l'addition des nombres, de quelque rang que ce ſoit, produit un nombre juſte de dixaines; par exemple, ou une, ou deux, ou trois, &c. on met ſeulement un zero ſous ce rang, & le chiffre dans le rang ſuivant. Cette regle eſt une ſuite de la precedente.*

EXEMPLE. Il faut ajoûter ces deux nombres 575 & 425: je les diſpoſe ſelon la premiere regle, aprés je dis, 5 & 5 font 10, je ne marque ſelon cette troiſiéme regle, qu'un zero ſous ce premier rang, & je reſerve 1 pour le ſuivant. Enſuite je dis, 1 avec 7, & 2 qui ſont dans le ſecond rang fait 10; je ne dois donc marquer

encore par la mesme regle qu'un zero sous ce rang, & reserver 1, qui avec 5, & 4 du rang suivant fait encore 10; ainsi je n'écris que zero sous ce rang, & je place 1 dans le rang suivant, qui est celuy des mille. La somme de ces deux nombres est donc un mille.

575
425
1000

4°. *Une addition de plusieurs zero ne produit qu'un zero, puisque plusieurs fois rien ne fait rien; ainsi ces additions se font fort vîte. Il ne faut qu'ajoûter les autres chifres & mettre ensuite autant de zero qu'il est necessaire afin que ces chifres se trouvent dans le rang qui leur convient.*

EXEMPLE. Ces trois nombres 2000, 3000, 4000, sont donnés pour estre ajoûtés. Il est facile de le faire; car puisque les zero ne servent qu'à occuper les premiers rangs, & faire paroître que les autres chifres qui sont placez ensuite des zero sont dans un rang plus reculé; aprés avoir disposé ces sommes comme il a été dit, il ne faut qu'ajoûter 2 avec 3. & avec 4, ce qui fait neuf, & aprés 9 marquer trois zero, ce qui fera neuf mille, somme que l'on cherchoit.

p. 9.

2000
3000
4000
9000

Autre Exemple. Soient ces 2 nombres 5678, & 4625, donnés pour estre ajoûtés. 1°. Je les dispose comme il a esté enseigné. 2°. J'ajoûte les unitez qui sont 13, j'écris donc seulement 3 dans le rang des unitez, & je reserve une dixaine pour le rang suivant.

5678
4625
10303

3°. Je viens à ajoûter les dixaines, & je trouve neuf dixaines, qui avec celle que j'avois reservée font dix dixaines, c'est à dire une centaine que je ne puis placer dans ce 2e rang, où je marque un zero pour faire voir seulement que le nombre suivant est le troisiéme rang.

4°. Je

4°. Je fais l'addition du 3e rang, où je trouve 12 centaines, qui avec celle que j'avois reservée font 13 centaines. Je n'en puis placer que trois dans ce troisiéme rang ; je reserve donc les dix autres ou un mille pour le quatriéme rang, qui est celuy des mille.

5°. Je trouve dans le quatriéme rang neuf mille, ce qui fait avec celuy que j'ay reservé une dixaine de mille que je marque dans le cinquiéme rang, aprés avoir mis un zero pour remplir la place du quatriéme, ce qui estant fait, je sçay que 5678 avec 4625. fait 10303.

Autre Exemple. Ces cinq nombres sont donnés 4567, 7919, 3488, 5896, 7685 : aprés les avoir disposés selon la coûtume.

1°. J'ajoûte les unitez qui sont dans le premier rang où j'en trouve trente-cinq, qui valent trois dixaines plus 5 unitez ; je marque donc seulement sous le rang des unitez 5.

2°. Dans le deuxiéme rang je trouve 32 dixaines, qui valent avec les trois dixaines que j'avois reservées, trois centaines, plus cinq dixaines ; je reserve pour le rang suivant 3 centaines, & je pose dans celuy-cy cinq dixaines.

4567
7919
3488
5896
7685
29555

3°. Dans le troisiéme rang il y a 32 centaines, qui avec les trois que j'avois reservées valent trois mille plus cinq cens ; j'écris dans ce rang des centaines cinq cens, & je reserve trois mille pour le rang des mille.

4°. Dans le rang des mille il y a 26 mille qui avec les trois mille reservez font deux dixaines de mille plus neuf mille ; je pose les neuf mille dans ce rang, & dans le suivant deux dixaines de mille : si bien que ces cinq sommes valent 29555.

9 Quand on a plusieurs nombres à ajoûter dans une somme, il est à propos pour ne se pas broüiller de partager l'operation, & de ne pas ajoûter ces nombres tous à la fois. Par exemple, s'il y avoit 30 sommes, on doit les partager en trois par une barre, ou par un espace vuide; & ne nombrer à la fois que dix sommes, aprés on ajoûte ces additions dans une somme qui comprendra les trente sommes: ou bien à côté de chaque rang aussitost qu'on a compté jusqu'à dix on met un point comme vous le voyez dans cet Exemple; où aprés avoir disposé les sommes comme à l'ordinaire, ajoûtant les nombres du premier rang, comme 9 & 8 font dix sept, je mets à côté de huit un point, & je dis 7 & 3 font 10. Je marque donc un point à côté du 3. Ensuite je dis 6 & 7 font treize. Je marque donc encore un point à côté de 7, & je dis 3 & 8 font onze. Je marque un point à côté du 8, & 1 sous le premier rang. Je compte ces points qui sont quatre, qui me font connoître qu'il y a quatre dixaines de reservées pour le rang suivant. Je laisse le reste de cette question à resoudre pour vous exercer. Vous voyez qu'on ne se peut pas broüiller, parce que l'on ne fait que de tres-petites additions.

4 5 3 8.	9
6. 7. 5. 3 8.	
2 4 6 5. 3.	
1 8. 7. 9 6	
5. 6. 4 6. 7.	
7 5 9. 4 8.	
2 8 8 7 9 1	

L'artifice de cette premiere operation ne consiste, ainsi que je l'ay dit, qu'en ces deux choses, à faire les additions par parties, & à exprimer sur le papier les additions partiales qu'on fait dans son esprit. Il en sera de mesme des trois autres operations suivantes. Je commence de haut en bas faisant l'addition de chaque rang, ajoûtant le nombre qui est dessus avec celuy qui est dessous. On peut si on veut monter de bas en haut, ajoûtant le nombre qui

est

est dessous avec celuy qui est dessus. C'est une mesme chose. La preuve de l'addition se fait par la soustraction, comme nous le verrons. Elle en a une autre qu'on nomme la preuve de 9: *voila en quoy elle consiste. Sans avoir égard au rang des chifres, dans les nombres proposés, on les ajoûte les uns aux autres, & on en rejette* 9 *autant qu'il se peut. On fait la mesme chose dans la somme generale de tous ces nombres; & si aprés en avoir rejetté* 9 *il y a un mesme reste, c'est une marque (équivoque comme on le verra) qu'on ne s'est pas trompé; ce qu'un Exemple fera comprendre. On veut sçavoir si* D *est veritablement la somme des trois nombres* A. B. C. *Commençant par* A, *je dis. Ces quatre chifres* 3. 5. 8. 1. *font* 17, *d'où ayant rejetté* 9 *le reste est* 8. *Ce reste avec ces trois chifres*, 2. 3. 5. *au nombre* B *font* 18, *d'où ayant rejetté* 9 *autant qu'on le peut, il ne reste rien: on n'a point d'égard aux zero dans cette operation. Venant à* C, *ces trois chifres* 6. 1. 3. *font* 10. *d'où ayant rejetté* 9 *il reste* 1. *Or assemblant de mesme les chifres de* D 1. 1. 9. 4 4. *on fait* 19. *d'où ayant rejetté* 9 *autant qu'on le peut, il reste encore* 1. *ainsi selon cette preuve* D *est effectivement l'addition des nombres* A. B. C. *Le fondement de cette preuve, c'est que les chiffres de tout nombre dans lequel* 9 *est contenu exactement un certain nombre de fois, sans avoir égard à leur ordre, joints ensemble font* 9, *ainsi les chifres de ces nombres* 18. 27. 36. 45. 54. *&c. dans lesquels* 9 *est contenu exactement tant de fois, font tous* 9. *Il en est de mesme des grans nombres. Par exemple*, 108. 216. *où neuf est contenu tant de fois exactement. On n'a point d'égard aux zero. Dans* 108. *vous voyez que* 1 *&* 8 *font* 9, *comme dans* 216. *ces trois chifres* 2. 1. 6. *font aussi*

A	3581
B	2350
C	6013
D	11944

9. *Mais cette preuve n'est pas infaillible; car la mesme chose arriveroit soit que* D *fut* 11944 *ou* 19144: *il y a pourtant bien de la difference. Ainsi ce n'est que pour satisfaire la curiosité que je la propose.*

CHAPITRE II.

SECONDE OPERATION.

SOUSTRACTION.

Definition de la Soustraction.

11 *LA Soustraction est une operation par laquelle on oste d'un plus grand nombre un plus petit, & l'on marque ce qui reste aprés cette Soustraction, lequel reste est la difference de ces nombres, comme il est évident: ayant osté* 8 *de* 12, *le reste qui est* 4. *est la difference de* 8 *&* 12.

PROPOSITION SECONDE.

PROBLEME SECOND.

Deux nombres estant donnez, soustraire du plus grand le plus petit, & connoistre ce qui reste, ou la difference de ces deux nombres.

12 1°. *Il faut placer le nombre qui est le plus petit sous le plus grand; les unitez sous les unitez; les dixaines sous les dixaines, &c. Aprés commençant cette operation par le premier rang de droit à gauche, il faut retrancher du plus grand le plus petit, & marquer ce qui reste; si ce sont des unitez qui restent, marquer ces unitez sous les uni-*

tez,

tez, &c. & ce reste sera la difference qu'il y a entre les deux nombres donnez.

EXEMPLE. Les deux nombres donnés sont 869, & 234. Il faut retrancher le second du premier. Je les dispose comme il a été dit, 234 sous 869. De 9 j'oste 4, il reste 5, que je marque sous le premier rang; ensuite je dis de 6 ostez 3, il reste 3, que j'écris sous le deuxiéme rang. Enfin de 8 j'oste deux: le reste est 6, que j'écris sous le troisiéme rang. Ainsi aprés avoir osté 234 de 869, il reste 635, qui est la difference de 869 avec 234.

869
234
635

2°. *Lors qu'un chifre que l'on veut retrancher, est plus grand que celuy de qui on veut le retrancher, il faut emprunter une dixaine dans le rang suivant.*

EXEMPLE. Les nombres 678 & 489 sont donnés, il faut retrancher le plus petit du plus grand, je ne puis pas oster 9 de 8, c'est pourquoi, selon la regle, j'emprunte une dixaine du rang suivant, au lieu de 7 écrivant un 6, & aprés je dis, de 18 ostant 9, il reste 9, que je place dans son rang. Ensuite je viens au deuxiéme rang où est 6, duquel ne pouvant encore soustraire 8, j'emprunte comme cy-dessus une dixaine du chifre suivant, & je dis de 16 ostant 8, il reste 8. Enfin venant au dernier chifre, qui ne vaut plus que 5, je retranche 4, & il reste 1: ainsi de 678 retranchant 489, il reste 189, qui est la difference de ces deux sommes.

56
~~6~~78
489
189

Au lieu de changer les chifres du nombre superieur, il n'y a qu'à augmenter celuy qui suit; comme ayant icy emprunté une dixaine de 7 nombre precedent, pour l'ajoûter à 8, au lieu d'effacer 7 & d'écrire 6 en sa place, il n'y a qu'à aug- 13

menter d'autant le nombre qui est dessous 7, disant de 7 j'oste 9, ce que ne pouvant faire sans emprunter encore du nombre suivant une dixaine, je dis de mesme de 17 ostant 9 reste 8, & ensuite au lieu de dire de 6 ostant 4, je dis, de 6 ostant 5 reste 1, ce qui produit toûjours la mesme chose: l'avantage de cette methode c'est qu'on n'efface pas les chifres. Elle est plus facile dans la pratique; & je ne propose la premiere que parce qu'elle est plus facile à entendre pour ceux qui commencent.

3°. *Quand il se trouve dans le nombre qui est dessous, un zero, on met entre les nombres restants celuy sous lequel le zero est placé, puisque d'un tel nombre n'ostant rien, ce nombre doit rester tout entier.*

Exemple. Soient donnés ces deux nombres 842, & 405, pour retrancher le plus petit du plus grand: aprés avoir placé 405 sous 842, je considere qu'on ne peut oster 5 de 2, le plus grand nombre du plus petit; j'emprunte donc du deuxiéme rang une dixaine, écrivant 3 au lieu de 4. & puis je dis de 12 ostez 5, reste 7, ensuite de 3 ostez zero, c'est à dire rien, reste le nombre entier, sous lequel zero est placé. Je marque donc 3 au deuxiéme rang. Enfin de 8 je retranche 4, le reste est 4. De cette soustraction vient 437, qui est le reste de 842, dont on a retranché 405, ainsi 437 est la difference de ces deux nombres.

3
842
405
437

4°. *Quand le nombre qui doit estre retranché, est égal à celui de qui on le retranche, on met un zero, puisqu'il ne reste rien, dont zero est la marque.*

Exemple. S'il falloit oster 246 de 346: puisque 46 est égal à 46, selon la regle je mets deux

deux zero, & retranchant 2 de 3, dont le reste est 1, l'operation me donne 100, qui est le nombre que je cherchois.

346
246
100

5°. *Quand sous un zero il y a un zero, il faut mettre un zero pour conserver la valeur des caracteres qui suivent, & qui precedent.*

EXEMPLE. Ces deux nombres sont donnés 800, & 200; je retranche simplement du chifre 8 le chifre 2, il reste 6, aprés lequel chifre je mets deux zero pour faire voir que ce 6 est le reste de 8 cens, dont on a retranché deux cens.

800
200
600

6°. *Lorsque dans le nombre dont on retranche un autre nombre, il y a plusieurs zero de suite; de sorte qu'on ne peut emprunter une dixaine du rang suivant pour faire la soustraction des nombres qui doivent estre retranchez; il faut exprimer le nombre d'une autre maniere, en sorte qu'il y ait d'autres caracteres que des zero, comme si ce nombre étoit* 10000; *il faut ainsi exprimer ce nombre* 9990 *plus* 10, *ce qui est la mesme chose, car neuf mille neuf cens quatre vingts dix, plus dix, font dix mille.*

EXEMPLE. Soient donnés ces deux nombres 900, & 432; Pour retrancher ce petit nombre 432 du plus grand 900, ne pouvant rien soustraire de deux zero, au lieu de 900 j'écris huit cens nonante, & je conserve dix en ma memoire pour le premier rang. Je retranche 2 de ce nombre 10 que j'ay retenu, il reste 8, que je mets sous le premier rang; de 9 je retranche 3, & je pose le reste qui est 6, sous le deuxiéme rang; de 8 je retranche 4, reste 4, que j'écris sous le troisiéme, ainsi le reste de 900 aprés en avoir osté 432, est 468, ce que l'on cherchoit.

890
~~900~~
432
468

Selon la methode que l'on a enseignée, §, n. 13, il ne faut point changer les chifres: il faut supposer que ces zero valent 10, ostant ainsi 2 du premier zero, reste 8. Ensuite j'augmente de l'unité, les nombres de dessous. Partant au lieu d'oster 3 j'oste 4, & reste 6; au lieu d'oster 4. de 9, j'oste 5 & reste 4. C'est ce qu'l faut toûjours pratiquer, comme plus aisé.

Autre Exemple. Les deux nombres 5782 & 3456. sont donnés pour estre retranchés de ce troisiéme 68386, il faut ajoûter par la premiere proposition les deux premiers dans une somme qui sera 9238. Aprés qu'on s'est beaucoup exercé à faire ces operations, on peut faire cette addition en son esprit, mais dans les commencemens il est bon de la faire avec la plume.

Je place 9238 fait de l'addition de 5782 avec 3456, sous la somme 68386 comme dans les autres exemples. Ensuite commençant par les unitez du premier rang, je dis de 6 on ne peut oster 8, j'emprunte donc une dixaine du rang suivant, qui avec les 6 unitez font 16, de 16 ostant 8, reste 8, que je marque sous ce premier rang des unitez. Aprés venant au deuxiéme rang, je dis de 7 dixaines, ostez 3 reste 4; je dis de 7, car vous sçavez que nous avons déja osté une dixaine de ce rang; Au troisiéme rang je dis de 3, ôtez 2, reste 1. Au quatriéme rang de 8 je ne puis ôter 9, j'emprunte du rang suivant, qui est celuy des dixaines de mille une dixaine de mille, qui avec les 8 mille de ce quatriéme rang, fait 18 mille; je dis donc de 18 mille ôtez 9 mille, reste 9 mille.

5 7
~~6~~8386
9238
59148

Enfin venant au cinquiéme rang, puisqu'il n'y a rien qui en doive être retranché je marque avec

avec les autres ce que je trouve dans ce rang, ſçavoir 5, car des 6 dixaines de mille qui reſtoient, j'en avois déja retranché une dixaine.

Le reſte donc de 68386, aprés en avoir retranché les deux ſommes 5782, & 3456, le reſte, dis-je, eſt 59148.

Voila encore un Exemple de la maniere de faire la ſouſtraction que nous avons propoſée s̃ n. 13. Soit.

Somme	493025
à ſouſtraire.	257532
Reſte.	235493

829
4~~9~~3~~0~~25
257532
235493

Je dis ainſi : Qui de 5 ôte 2, ou ſimplement 2 de 5 reſte 3.

Enſuite : Qui de 12 paye 3, reſte 9.

Et je retiens 1 par memoire que j'ajoûte à 5, ce qui fait 6. Je dis : Qui de 10 paye 6, reſte 4 : & je retiens 1 que j'ay emprunté que je joins à 7, ce qui fait 8 que j'ôte de 13, reſte 5 ; & je retiens par memoire 1 que j'ay emprunté, lequel avec 5 fait 6, que j'ôte de 9, & reſte 3, & puis 2 de 4, reſte 2. Cette maniere eſt plus prompte & charge moins de chifres que la ſeconde, dans laquelle on écrit les reſtes aprés avoir emprunté, comme vous le voyez dans la maniere ordinaire.

PROPOSITION TROISIE'ME.

THEOREME PREMIER.

La ſouſtraction & l'addition ſe ſervent reciproquement de preuve l'une à l'autre. 14

La ſouſtraction & l'addition ſont oppoſées l'une à l'autre ; l'une défait ce que l'autre a fait ; ainſi

elles se servent reciproquement de preuve. Car le tout étant égal à ses parties, si on oste toutes les parties du tout, il ne doit rien rester; par consequent on est assuré que 432 ajoûté avec 245 fait effectivement 677, c'est à dire que ces deux nombres sont les parties du tout 677; & si retranchant ces deux nombres de 677 il ne reste rien, c'est une marque qu'ils sont veritablement les parties de ce tout, & par consequent que l'addition a été bien faite.

De même pour être assuré qu'en retranchant de 677, ce nombre 432, le reste est 245, c'est à dire que 432 & 245 sont les parties du tout 677, j'ajoûte ces deux nombres 432 & 245; & s'ils font 677, je conclus qu'ils sont veritablement les parties de 677, & par consequent que mon operation est bonne.

Ces operations sont si simples qu'on ne concevroit pas comment l'on s'y peut tromper, si l'experience ne nous en convainquoit. L'on n'ajoûte à la fois ensemble que deux nombres dont chacun ne peut être plus grand que neuf, & chacun des nombres qu'on retranche l'un de l'autre, n'excede pas la même valeur. Cependant on est quelquefois obligé de recommencer, parce qu'on voit que ce que l'on a fait ne quadre pas; sans s'appercevoir d'abord en quoy on s'est pû tromper. La cause de l'erreur c'est qu'on va trop vîte; & que sans bien prendre garde à ce qu'on fait, en calculant on dira, par exemple, 5 & 6 font treize. On compte sur cela comme si cela n'étoit pas faux. Toutes nos erreurs en quelque matiere que ce soit ont la mesme cause. Nous supposons sans délibération que les choses les plus fausses sont certaines, & aprés nous en tirons des conclusions comme de principes infaillibles. Puisque ce petit ouvrage est fait pour servir de modelle de la maniere de bien con-

duire

duire son esprit dans les Sciences, il faut faire attention à cette remarque.

CHAPITRE III.

OPERATION TROISIE'ME.

MULTIPLICATION.

Definition de la Multiplication.

LA Multiplication est une espece d'addition, par laquelle on ajoûte un certain nombre donné autant de fois à luy-même qu'il y a d'unitez dans un autre nombre donné. 15

Multiplier 5 par 6, ce qui fait 30, c'est ajoûter autant de fois 5 à luy-même qu'il y a d'unitez dans 6. On appelle *multiplicateur* le nombre qui multiplie, & on appelle *produit* le nombre que l'on cherche, & que la multiplication produit. Dans cet exemple 5 étant donné pour être multiplié par 6, ce deuxiéme nombre 6 est le multiplicateur, & 30 qui est fait par cette multiplication est le produit.

PROPOSITION QUATRIE'ME.

PROBLEME TROISIEME.

Multiplier un nombre par un autre nombre, & connoître ce que produit leur multiplication. 16

1°. *Il faut placer le multiplicateur sous le nombre à multiplier, comme dans l'addition; ensuite commençant de droit à gauche multiplier le nombre à multiplier par le premier chifre du multiplicateur,*

&

& écrire leur produit comme on fait le produit d'une addition.

EXEMPLE. Soit proposé 24 pour être multiplié par 3, je place le multiplicateur 3 sous 4; Et je dis 3 fois 4 font 12, je pose 2 au premier rang, & je retiens dans ma memoire une dixaine pour le rang suivant; je dis 3 fois 2 font 6, & 1 que j'avois retenu font 7; le produit de 24 multiplié par 3 est donc 72.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{3} \\ 72 \end{array}$$

2°. *Lorsque le multiplicateur est composé de plusieurs caracteres, on multiplie premierement par le premier de ces caracteres le nombre à multiplier: ensuite par le second, & ainsi des autres; mettant le premier produit de chacune de ces multiplications partiales sous le caractere qui a multiplié. Aprés cela, l'on ajoûte dans une somme ces multiplications partiales, dont l'addition donne le nombre qu'on cherchoit.*

Nous l'avons déja dit, l'artifice de ces quatre premieres operations dont nous parlons dans cette section, consiste à faire par parties ce qu'on ne pourroit faire tout à la fois. La multiplication n'a rien de plus difficile que l'addition. Il ne s'agit que d'exprimer sur le papier une certaine somme ou produit, plaçant bien les chifres dans le rang qui leur convient.

EXEMPLE. 84 est le nombre à multiplier par le multiplicateur 26; on demande quel est le produit de cette multiplication. Je place 26 sous 84, après je multiplie premierement 84 par 6, disant 6 fois 4 fait 24, je pose 4 & retiens 2 dixaines; 6 fois 8 fait 48, lequel produit avec 2 que j'avois retenu fait 50; j'écris donc 50 aprés 4. Ensuite je multiplie le même nombre 84 par le deuxiéme chifre du multiplicateur 26, qui est 2; & je dis

2 fois

2 fois 4 fait 8. Or il faut remarquer que ce 2 valant deux dixaines, c'est la même chose que si je disois 20 fois 4 fait 8 dixaines ; j'écris donc 8 sous le deuxiéme rang, qui est celuy des dixaines ; aprés je dis 2 fois 8 font 16, je pose 6 dans le troisiéme rang, & 1 dans le quatriéme, car 20 fois 8 dixaines valent 16 centaines ou cent soixante dixaines, c'est à dire seize cens unitez ; ainsi ces rangs conviennent à 1 & à 6. Ces deux multiplications étant faites, j'ajoûte les deux produits dans une somme, qui est 2184 produit de 84, multiplié par 26.

84
26
504
168
2184

3°. *Dans une multiplication, lorsque les zero se trouvent au commencement, soit du multiplicateur, soit du nombre à multiplier, on multiplie les nombres par les nombres : & on place aprés les produits, les zero, tant du multiplicateur que du nombre à multiplier.*

Exemple. Que 80 soit à multiplier par 60, je place 60 sous le nombre à multiplier 80 ; aprés cela je multiplie 80 par le premier caractere du multiplicateur 60, qui est un zero, ce qui ne produisant rien, je marque un zero sous le rang des unitez.

Ensuite multipliant 80 par 6, & premierement zero par 6, cette multiplication n'ayant aucun produit, puisque 6 fois rien ne vaut pas plus qu'un rien, je place un zero sous le rang des dixaines ; enfin je multiplie 8 par 6, dont le produit est 48 ; je place 8 dans le rang des centaines, & 4 dans le rang des mille : & je trouve que 80 par 60 fait 4800. Ainsi vous voyez que dans de semblables exemples il suffit selon la regle precedente, de multiplier les chifres par les chifres, 8 par 6 ; & de placer ensuite les zero de la somme qui doit être multipliée,

80
60
4800

&

& ceux du multiplicateur. Ces zero servent seulement à faire connoître que ce nombre 4800, est fait de la multiplication de 8 dixaines par 6 dixaines, ce qui fait 48 centaines.

4°. *Quand le multiplicateur est 1, avec un ou plusieurs zero, il faut seulement placer aprés le nombre qui doit être multiplié, les zero de ce multiplicateur.*

EXEMPLE. Je veux multiplier 342 par 100; pour faire cette operation, j'écris seulement aprés le nombre à multiplier 342, les deux zero du multiplicateur 100, ce qui fait 34200, lequel nombre est le produit de cette multiplication. La certitude de cette operation est manifeste: en multipliant 342 par 100, je cherche un nombre qui vale cent fois 342. Or pour augmenter la valeur de 342 de cent fois plus que ces caracteres ne valent; il n'y a qu'à les reculer de deux rangs, ce qui se fait en mettant deux zero aprés 342 de cette sorte, 34200; car 2 pour lors vaudra cent fois plus qu'il ne valoit, 4 qui est le deuxiéme chifre cent fois plus qu'il ne valoit; sçavoir 4 mille & 3 vaudra 30 mille, ce qui est cent fois plus qu'il ne valoit auparavant.

```
  342
  100
-----
34200
```

5°. *Les zero ne multiplient point, puisque cent riens ne valent pas plus qu'un rien: cependant il faut marquer ces zero pour remplir la place où ils se trouvent, & pour conserver la valeur des nombres qui suivent & qui precedent.*

EXEMPLE. Soit donné le nombre de 670 pour être multiplié; le multiplicateur est 305; je dispose ces nombres comme il a été enseigné. Je commence l'operation par 5, premier caractere du multiplicateur, & je dis 5 fois zero, ou 5 fois rien ne produit rien;

```
  670
  305
-----
 3350
```

je

je marque cependant un zero pour remplir ce premier rang, afin de conſerver la valeur des chifres ſuivans, enſuite je dis 5 fois 7 font 35, je poſe 5, qui vaut 5 dixaines dans le rang des dixaines, & je retiens 3 centaines : Aprés je dis 5 fois 6 font 30, qui avec les trois centaines que j'ay reſervées, fait 3 mille, plus 3 centaines; je place ces mille & ces centaines dans leur propre rang.

Je viens au deuxiéme caractere du multiplicateur 305, qui eſt un zero, & parce que ce zero ne peut multiplier 670, je marque ſeulement un zero ſous ce deuxiéme rang pour conſerver, comme j'ay déja dit, la valeur des caracteres ſuivans.

```
   670
   305
 ------
  3350
     0
  2010
 ------
204350
```

Je viens au troiſiéme chifre, qui eſt 3, par lequel je multiplie 670, diſant 3 fois zero ne produiſent rien, je marque cependant un zero dans le troiſiéme rang : 3 fois 7 font 21, je place 1 dans le quatriéme rang, reſervant 2 pour le cinquiéme. Enfin je dis 3 fois 6 font 18, qui avec les 2 que j'avois reſervé, font 20 que je marque dans le rang qui convient.

Aprés j'ajoûte ces trois multiplications partialles dans une ſomme qui eſt 204350 produit de 670, multiplié par 305.

CHAPITRE IV.

QUATRIE'ME OPERATION.

DIVISION.

Définition de la Diviſion.

LA diviſion eſt une eſpece de ſouſtraction, par laquelle on retranche d'un grand nombre un autre 17

tre nombre plus petit ou égal, autant de fois qu'on le peut, c'est à dire autant de fois qu'il y est contenu.

Le premier nombre s'apelle *le dividende* ou *nombre à diviser*, & le deuxiéme *le diviseur*. Le nombre qui exprime combien le *diviseur* est contenu dans celuy qui est à diviser, s'appelle le *quotient* de la division.

Ce quotient est contenu dans le nombre à diviser autant de fois qu'il y a d'unitez dans le diviseur; c'est pourquoy on se sert de cette regle, lorsqu'on veut partager un grand nombre donné. Diviser 24 par 6, c'est chercher combien 6 est contenu de fois dans 24. Il y est contenu quatre fois, ainsi ce nombre 4 est le quotient de cette division, lequel quotient est contenu autant de fois dans 24, qui est le nombre à diviser, qu'il y a d'unitez dans 6, qui est le diviseur.

PROPOSITION CINQUIE'ME.

PROBLEME QUATRIE'ME.

Diviser un nombre donné par un autre donné.

18 1°. *Il faut écrire le diviseur sous les premiers chifres du nombre à diviser, commençant de gauche à droit, faisant le contraire de ce qui a été fait dans les Operations precedentes, aprés cela l'on doit voir combien le diviseur est contenu dans le nombre à diviser, & écrire le quotient de cette division à part.*

EXEMPLE. Que ce nombre 64 soit donné à diviser par le diviseur 2. 1°. Je place le diviseur 2 sous 6, premier caractere du dividende 64, commençant de gauche à droit. 2°. Je vois combien 2 est contenu de fois dans 6: il y est contenu 3 fois, lequel 3 je pose à part comme vous voyez.

3°, Je

3°. Je multiplie 3 par 2, le produit est 6, que j'ôte du nombre à diviser 6, pour m'assurer que la division de 6 par 2 est bien faite : car si ôtant 3 fois 2 de 6, il ne reste rien, c'est une preuve que 3 fois 2 sont les parties de 6, & par consequent que 2 est veritablement 3 fois en 6. Je fais la même chose dans toutes les operations de la division.

$$\left.\begin{array}{r}64\\2\end{array}\right\}3$$

Il me reste encore à diviser 4 par 2, je fais avancer le diviseur 2 ; le plaçant sous 4. Je trouve que 2 est contenu 2 fois en 4, ce que je marque aprés le premier quotient trouvé. Je multiplie ce dernier quotient 2 par le diviseur 2 ; le produit est 4, que je retranche de 4, il ne reste rien ; ainsi 2 est veritablement contenu 2 fois dans 4, & le veritable quotient de 64 divisé par 2 est 32, ce que je voulois sçavoir.

$$\left.\begin{array}{r}64\\22\end{array}\right\}32$$

2°. *Si le diviseur a plusieurs caracteres, on considere seulement combien son premier caractere de gauche à droit est contenu dans le nombre sous lequel il est placé ; aprés on multiplie tout le diviseur par le quotient, & on retranche le produit de cette multiplication du nombre divisé, laquelle soustraction fait connoître si on a bien divisé.*

Exemple. Soit le nombre donné 84, pour être divisé par le diviseur 42 : je dispose ces nombres comme il a été enseigné ; je ne cherche pas d'abord combien tout le diviseur 42 est contenu dans le nombre 84, je vois simplement combien 4 est contenu dans 8 : il y est 2 fois, ce que je marque ; mais aussi pour m'assurer, si tout le diviseur 42 est veritablement deux fois dans le nombre à diviser 84 ; & si par consequent 2 est le quotient de cette division, je multiplie ce diviseur entier par le quotient

$$\left.\begin{array}{r}84\\42\end{array}\right\}2$$

tient 2, & trouvant que 2 fois 42 font 84, je ne puis plus douter que l'operation que j'ay faite, ne soit certaine.

Tout l'artifice de cette operation comme des trois precedentes, ne consiste qu'en cela seul, qu'on fait par partie avec facilité ce qu'on ne pourroit faire tout d'un coup sans peine, & sans danger de se tromper.

3°. *Lorsque le nombre à diviser a aprés luy plusieurs zero, si ce nombre peut être divisé exactement par le diviseur qui est au dessous, cette division étant faite, on place aprés le quotient les zero de ce nombre à diviser, & la division est achevée.*

Exemple. 800 est à diviser par 4, je divise seulement 8 par 4, le quotient est 2, aprés lequel je pose les deux zero qui sont aprés 8, & la division est achevée; car ce quotient 2 valant le quart de 8, puisque 8 vaut 800, ce 2 doit valoir 200; Or pour marquer que 2 est dans le même rang que 8, il faut mettre aprés luy un égal nombre de zero.

$$\left.\begin{array}{c}800\\ \hline 4\,..\end{array}\right\}\ 200$$

4°. *Lorsque le diviseur est 1 avec plusieurs zero, & qu'il y a des zero aprés le nombre à diviser, il faut retrancher autant de zero du nombre à diviser qu'il y en a dans le diviseur, & la division sera achevée.*

Exemple. Le nombre donné pour être divisé, est 5000, le diviseur 10, pour faire cette division je retranche du nombre à diviser 5000, autant de zero qu'il y en a au diviseur, sçavoir un zero; ainsi le quotient sera 500. En divisant 5000 par 10, on cherche un nombre contenu 10 fois dans 5000, qui soit par consequent 10 fois plus petit que 5000; or pour faire valoir 5000 dix

$$\left.\begin{array}{c}5000\\ \hline 10\,..\end{array}\right\}\ 503$$

fois

fois moins, il ne faut que faire venir 5 dans un rang plus avancé vers la droite; il est dans le quatriéme rang où il vaut mille, il faut le faire venir dans le rang des centaines, ce qui se fait en retranchant un zero, aprés lequel retranchement il n'est plus que dans le troisiéme rang.

5°. *Si le diviseur n'est point contenu dans le nombre à diviser, sous lequel on l'a placé, il faut le faire avancer sous les caracteres qui precedent vers la droite.*

Exemple. Soit le nombre donné pour être divisé 248, le diviseur est 62. Ce diviseur n'est contenu aucune fois dans 24, premiers chifres du nombre à diviser de la gauche à la droite. Je place donc suivant cette Regle 62 sous 46, & faisant comme cy-dessus, je trouve que 6 est 4 fois dans 24, ce que je marque. Je multiplie le diviseur 62 par ce quotient, disant 4 fois 6 font 24, que j'ôte de 24, & il ne reste rien; aprés cela, je dis 4 fois 2 font 8, que j'ôte de 8, il ne reste rien, ainsi je sçay que 62 est veritablement contenu 4 fois dans 248.

$$\frac{248}{62}\Big\} \; 4$$

6°. *Si ayant multiplié le diviseur par le quotient, il se trouve que le produit est plus grand que le nombre à diviser; c'est une marque que ce quotient est trop grand, & qu'il en faut prendre un plus petit.*

7°. *Si le diviseur n'est pas contenu exactement, c'est à dire un certain nombre de fois dans le nombre à diviser, il faut marquer à part ce reste.*

Exemple. 82 est le nombre donné pour être divisé; le diviseur est 24, le premier chifre du diviseur 24, qui est 2, est 4 fois dans 8, premier chifre du nombre à diviser; mais parce qu'ayant multiplié par ce quotient 4 le diviseur 24; le produit est 96, qui est plus grand que le nombre à di-

diviser 82, je reconnois que ce quotient est trop grand; j'en prends donc un plus petit; sçavoir 3. Je multiplie 24 par ce quotient 3, que j'ôte du nombre à diviser 82, disant 3 fois 2 font 6, que j'ôte de 8, reste 2; aprés 3 fois 4 font 12, que j'ôte de 22 & reste 10, ainsi 24

$$\left.\begin{array}{r} 1 \\ \not{2}0 \\ 82 \\ \hline 24 \end{array}\right\} \quad 3\frac{10}{24}$$

est contenu 3 fois dans 82 avec ce reste 10. Lorsqu'on parlera des nombres rompus, on enseignera les moyens de diviser exactement ces restes qu'on écrit comme vous le voyez, aprés le quotient sur une ligne, & sous cette ligne le diviseur : C'est un nombre rompu que ce nombre $\frac{10}{24}$

8°. *Aprés que l'on a divisé les premiers caracteres du nombre à diviser, il faut avancer le diviseur de la gauche à la droite, jusqu'à ce qu'on ait divisé tout le nombre donné.*

EXEMPLE. Soit le nombre à diviser 8678 par 34, aprés avoir mis ces nombres dans leur place, je dis 3 est contenu deux fois dans 8, ce que je marque au quotient. Je multiplie 3 par 2, le produit est 6, que j'ôte de 8, le reste est 2, ce que je marque comme vous le voyez. Je multiplie 4 le second chifre du diviseur par le quotient 2, disant 2 fois 4 font 8, que j'ôte de 26, le reste est 18.

$$\left.\begin{array}{r} \not{2} \\ \not{1}\not{3} \\ \not{2}\not{8}\not{2} \\ 8678 \\ \hline 34\cdot\cdot \\ 34 \\ 34 \end{array}\right\} \quad 255\frac{8}{34}$$

Je fais avancer le diviseur, & je dis 3 est contenu 6 fois dans 18, mais ce quotient étant trop grand, j'en prends un plus petit, sçavoir 5, & je dis 5 fois 3 font 15, que j'ôte de 18, il reste 3. Je multiplie 4, second chifre du diviseur, par ce quotient 5, disant cinq fois 4 font 20, que j'ôte de 37, & il reste 17.

Je

Je fais avancer une seconde fois le diviseur, & je dis 3 est 5 fois dans 17, je pose donc 5 au quotient; 3 fois 5 font 15, qui étant ôtez de 17, le reste est 2; je multiplie par le quotient 5, l'autre chifre du diviseur, disant 5 fois 4 font 20, de 28 ôtant 20, il reste 8.

Ainsi ayant divisé 8678 par le diviseur 34, le quotient est 255, avec 8 de reste, lequel reste s'écrit de la maniere que nous avons dit qu'on le devoit faire.

Ce qui rend la division plus difficile que les trois premieres Operations, c'est que considerant combien le premier chifre du diviseur est dans le nombre à diviser sous lequel il est placé, il faut avoir égard aux chifres qui suivent; car, comme on l'a bien compris, les regles de la division ne se donnent que pour faire par parties l'Operation. Si on le pouvoit tout d'un coup on auroit dit que 24 est 255 fois avec 8 de reste dans 8678, mais cela étoit impossible. On fait donc peu à peu ce qu'on ne peut faire tout d'un coup. D'abord on examine seulement combien de fois le premier chifre du diviseur est dans celuy du nombre à diviser sous lequel il est placé; mais en même-temps on fait attention aux chifres de tout le diviseur: lorsqu'on est venu à diviser 187 *par* 34 *considerant que* 34 *ne peut pas être* 6 *fois dans* 187, *comme* 3 *est* 6 *fois dans* 18, *on a vû qu'il falloit prendre un quotient plus petit que* 6. *Quand on n'a pas choisi le quotient qu'il falloit; & qu'on a par consequent écrit des chifres qu'il faut effacer, pour ne se pas broüiller, il faut récrire les nombres sur lesquels on opere.*

9°. *Quand le diviseur n'est pas contenu dans le nombre à diviser, sous lequel on l'avoit fait avancer, il faut mettre un zero au quotient.*

EXEMPLE. Le nombre à diviser est 24095, le

le diviſeur eſt 48 : je diſpoſe ces nombres comme il a été dit.

1°, 48 n'étant aucune fois dans 24, je fais avancer ce diviſeur, & je conſidere combien 4 eſt dans 24, il y eſt 6 fois ; mais parce que j'apperçois que 48 ne peut être 6 fois dans 240, & que par conſequent ce quotient 6 eſt trop grand, j'en prends un plus petit, ſçavoir 5. Je multiplie le diviſeur 48 par ce quotient 5, le produit de cette multiplication eſt 240, qui étant ôté de 240, il ne reſte rien. Juſqu'à preſent la diviſion eſt bien faite, & je ſçay que 48 eſt contenu 5 fois dans le trois premiers caracteres du nombre à diviſer 24096.

$$\left.\begin{array}{c}24096\\ \hline 48\end{array}\right\} 5$$

2°, Je fais avancer le diviſeur 48 en le plaçant ſous 09, & parce qu'il n'eſt pas contenu dans ces caracteres, je place un zero aprés le premier quotient 5, pour conſerver la valeur de ce premier quotient, & de celuy qu'on trouve enſuite.

$$\left.\begin{array}{c}24096\\ \hline 488\\ 4\end{array}\right\} 50$$

3°, Je fais avancer le diviſeur 48 ſous les caracteres 96 qui reſtent à diviſer, & je dis 4 eſt en 9 deux fois ; je marque ce 2 au quotient. Enſuite multipliant le diviſeur 48 par ce nombre, je trouve que le produit 96 de cette multiplication eſt égal au nombre à diviſer, par conſequent la diviſion en a été bien faite. Ainſi 502 eſt le quotient de 24096 diviſé par 48.

$$\left.\begin{array}{c}24096\\ \hline 4888\\ 44\end{array}\right\} 502$$

Autre Exemple. Soit ce nombre 2142178 donné pour être diviſé par cet autre nombre 352.

1°, Je place 3, dernier chifre du diviſeur 352, non ſous 2, dernier chifre du nombre à diviſer, mais

mais ſous 1 qui le precede, puiſque 352 n'eſt pas contenu une fois dans 214.

2e. Je vois combien 3 eſt contenu dans 21, il y eſt contenu 7 fois: mais parce que j'apperçois que tout le diviſeur 352 n'eſt pas contenu 7 fois dans 2142, je ne prends que 6 pour quotient; & afin de verifier ma diviſion, je multiplie le diviſeur entier par ce quotient, diſans 6 fois 3 font 18; de 21 ôtant 18, il reſte 3, ce que je marque: 6 fois 5 font 30, de 34 ôtant 30, il reſte 4: 6 fois 2 font 12, de 42 ôtant 12, il reſte 30; ainſi il me reſte 30178 à diviſer par 352.

330
~~2142~~178 } 6
352

On peut dans les commencemens, pour éviter la confuſion, récrire à part ce reſte 30178, *ſuppoſant toûjours qu'il y a déja un chifre au quotient.*

3°. Je fais avancer mon diviſeur, comme il a été enſeigné. Or 352 eſt un nombre plus grand que 301, qui eſt le nombre de deſſus: Donc, ſelon ce qui a été dit cy-deſſus, je poſe un zero au quotient.

30178 } 60
352

4°. Je fais avancer mon diviſeur. Or 3 eſt contenu dix fois dans 30, cependant je ne prends que 8 pour quotient, parce que 10 ſeroit trop grand. Je verifie mon operation, multipliant le diviſeur par ce quotient 8, & diſant 8 fois 3 font 24, que j'ôte de 30; il reſte 6, que je marque: 8 fois 5 font 40: de 61 ôtant 40, il reſte 21, & multipliant 2 par 8, le produit eſt 16, lequel je retranche de 217, il reſte 201, & tout le reſte du nombre à diviſer eſt 2018.

2
~~301~~
~~30178~~ } 608
352

Ceux qui commencent ne peuvent voir tout d'un 19

coup le juste quotient qu'il faut prendre; comme icy, où il reste à diviser 30178 *par le diviseur donné* 352. *Aprés qu'on a écrit ce diviseur sous le dividende, on ne voit pas tout d'un coup pourquoy* 3 *étant* 10 *fois dans* 30, *on ne doit pas prendre* 9 *pour quotient. On conseille donc à ceux qui commencent de prendre d'abord le plus haut quotient, comme icy* 9, *& ensuite multiplier à part par ce nombre* 9 *le diviseur* 352; *ce qui produit* 3168, *lequel nombre étant plus grand que* 3017 *sous lequel est* 352, *on voit que* 352 *n'y est pas* 9 *fois. On prend donc un plus petit quotient, sçavoir* 8. *Et pour sçavoir si l'on ne se trompe point encore, il faut multiplier* 352 *par* 8; *ce qui fait* 2816. *Ce nombre est plus petit que* 3017, *L'on voit donc que* 352 *y est* 8 *fois, mais avec reste. En faisant de la sorte ces operations à part, on ne broüille point les chifres. Cette pratique est bonne pour ceux qui commencent. Elle est même utile & presque necessaire à tout le monde, lors que le diviseur & le dividende ont plusieurs chifres; & on ne perd pas grand temps : car de quelque maniere qu'on fasse, il faut faire les mêmes multiplications : puisque pour verifier si le quotient est juste, il le faut multiplier par le diviseur. Aprés cet Avertissement, qui ne sera pas inutile, reprenons la question presente, pour la terminer.*

30178
352
352
9
3168
352
8
2816

5°. Je fais avancer mon diviseur. Or 3 est contenu 6 fois dans 20, cependant je ne marque que 5 au quotient, 5 fois 3 font 15: de 20 ôtant 15, il reste 5: 5 fois 5 font 25: de 51 ôtant 25, il reste 26: 5 fois 2 font 10: de 268 ôtant 10, il reste 258.

25
86
~~268~~ 258 } 6085
352

Ainsi

Ainsi je connois que 352 est contenu 6085 fois dans 2142178 avec reste, sçavoir 258; ce qui se marque ainsi 6085 $\frac{258}{352}$, comme il a été dit.

Autre Exemple, dans lequel on fait la soustraction comme cy-dessus n. 13.

Il faut diviser 855270 par 3978. Ayant disposé les chifres à l'ordinaire, ce que je fais icy de particulier, c'est qu'aprés avoir connu que le diviseur est 2 fois dans le dividende, je commence à le multiplier par le côté droit, & je soustrais le produit à la maniere qui a été enseignée ñ n. 13.

0
1 9 8 0
~~8~~ ~~9~~ ~~8~~ 9 0
~~8~~ ~~8~~ ~~8~~ ~~2~~ ~~7~~ ~~0~~ ~~5~~ 2 1 5
~~3~~ ~~9~~ ~~7~~ ~~8~~
~~3~~ ~~9~~ ~~7~~ ~~8~~
~~3~~ ~~9~~ ~~7~~ ~~8~~

Ainsi commençant de droit à gauche, je dis deux fois 8 font 16, que j'ôte des nombres de dessus 52; j'emprunte deux dixaines & je dis, qui de 22 paye 16 reste 6, que j'écris sur 2, & je retiens en ma memoire 2 que j'ay emprunté; car je ne change point le chifre 5, & je dis, 2 fois 7 font 14, qui avec deux que j'ay conservé en ma memoire font 16. J'emprunte encore 2 du rang suivant, & je dis, qui de 25 ôte 16 reste 9 que j'écris sur 5, & je retiens en ma memoire 2; puis je dis, 2 fois 9 font 18, & 2 que j'ay emprunté font 20. J'emprunte encore 2, & je dis qui de 25 paye 20 reste 5, & je retiens 2. J'écris 5 dessus, & je dis 2 fois 3 font 6, & 2 que j'ay retenu font 8 que je soustrais de 8, & ne reste rien. J'avance mon diviseur à l'ordinaire, & je poursuis la division selon la même methode, dans laquelle il n'y a pas

un si grand nombre de chifres à changer, que dans la premiere.

La division du même nombre 855270 par 3978, faite selon la premiere methode, se reduit à cette forme que vous voyez. Il y a bien plus de changement, que lors qu'on fait la même operation selon la seconde methode.

```
 14
 203
 3080
 30004
 271000
 853270
 3978888
 3977
  38
```

AUTRE MANIERE DE FAIRE LA DIVISION.

20 1°. *Le diviseur se met à côté du dividende, au dessus d'une petite ligne, en la maniere que vous le voyez. Si on vouloit par exemple diviser 24 par 2, on écrit*

```
24 | 2
   ---
```

2°. *On met un point sous le premier chifre du dividende, en commençant de la gauche à la droite, c'est à dire sous 2 dans l'exemple proposé, ainsi*

```
24 | 2
   ---
```

3°. *S'il y avoit plusieurs chifres dans le diviseur, il faudroit mettre autant de points sous le dividende. Si par exemple je divisois 24 par 12, je metrois un point sous 2, & un second sous 4; parce qu'il y a deux chifres dans le diviseur.*

```
24 | 12
   ----
```

4°. *Je regarde combien de fois le diviseur est contenu dans les chifres sous lesquels j'ay marqué des points, comme dans le premier exemple combien de fois 2, qui est le diviseur, est contenu de fois dans 2 premier chifre du dividende, sous lequel j'ay marqué un point. Je trouve qu'il y est une fois: Je marque 1 pour quotient sous le diviseur. En même-temps je multiplie le quotient par le diviseur, disant*

```
24 | 2
   ---
   | 1
```

sant : 1 fois 2 fait 2 que j'ôte du premier chifre du dividende, & il ne reste rien. J'écris un zero au dessous du point, qui étoit sous le premier chifre du dividende.

24 | 2
0 | 1

5°. *Je viens au second chifre du dividende, en commençant de la gauche à la droite, & je mets un point dessous ce nombre qui est icy 4, & sous ce point j'écris encore 4, & dessous ce 4 encore un point, comme vous voyez. Ensuite je considere combien de fois le diviseur 2 est en 4 : il y est 2 fois. J'écris 2 au quotient, puis multipliant le diviseur par ce quotient 2, je dis : 2 fois 2 font 4. J'ôte ce produit 4 du chifre du dividende, sous lequel j'ay mis le dernier point, disant : de 4 ôtant 4, il ne reste rien ; j'écris donc un zero. Je trouve ainsi que 2 est 12 fois dans 24.*

24 | 2
04 | 12
0

6°. *S'il y avoit plusieurs chifres dans le dividende, il faudroit proceder de la même maniere. Par exemple, si au lieu de 24 pour dividende, il y avoit 242, il faudroit mettre un troisiéme point sous le troisiéme chifre qui est 2, & écrire ce 2 à côté du zero, qui est au dessous de 4, & mettre encore un point au dessous de 4, & mettre encore un point au dessous. Ensuite il faut voir combien le diviseur 2 est contenu dans ce dernier chifre du dividende ; il y est une fois : J'écris donc 1 au quotient à côté des chifres déja trouvez ; aprés je multiplie le diviseur 2 par 1, j'ôte le produit de cette multiplication du dernier chifre du dividende, il ne reste rien ; ainsi j'écris sous ce même chifre un zero.*

242 | 2
04 | 121
02
0

7°. *La multiplication & la soustraction se font de la droite à la gauche : Il n'y a pas eu occasion de le faire dans l'exemple proposé, parce que le diviseur étoit simple. C'est particulierement lors*

que les diviseurs sont composez, que la facilité de cette methode paroît. Elle ne charge point la memoire; parce que dans la soustraction du produit du dividende, multiplié par le diviseur, on emprunte autant de dixaines que l'on en a besoin. Par exemple, soient 358 *à diviser par* 39, *je trouve pour quotient* 9, *par lequel je multiplie le diviseur de la droite à la gauche, & je le soustrais de même, disant:* 9 *fois* 9 *font* 81. *Il n'y a au dividende que* 8, *& ensuite un* 5, *qui ne font que* 58. *Sans m'embarasser de cela, j'emprunte* 8 *dixaines dont j'ay besoin, & je dis:* 81 *de* 88 *reste* 7, *que j'écris au dessous de* 8 *du dividende, & je retiens* 8. *Ensuite j'acheve la multiplication du dividende par le quotient* 9, *disant:* 9 *fois* 3 *font* 27, *&* 8 *que j'ay retenu font* 35, *qui ôtez du dividende reste zero; & ainsi je trouve que* 358 *divisé par* 39, *le quotient est* 9 *plus* $\frac{7}{9}$.

358	39
07	$9\frac{7}{9}$

3°. *Cette operation tient moins de place. Comme on n'est point obligé d'effacer les caracteres; quand il y a quelque erreur, on la remarque facilement. Si c'est dans la premiere division qu'on s'est trompé, on trouve son erreur dans le rang des chifres qui est immediatement au dessous du dividende. Si c'est dans la seconde division partialle, on la trouve dans le rang suivant.*

PROPOSITION SIXIE'ME.

THEOREME SECOND.

21 *Le quotient d'une division étant multiplié par le diviseur, il fait une somme égale au nombre qui a été divisé.*

Soit 24 divisé par 6: le quotient de cette division

ſion eſt 4, qui eſt une ſixiéme partie de 24, étant donc pris autant de fois qu'il y a d'unitez dans le diviſeur 6, c'eſt à dire ſix fois, il doit être égal à ſon tout 24, les parties priſes enſemble égalant leur tout; donc le quotient d'une diviſion étant multiplié par le diviſeur, fait une ſomme égale au nombre qui a été diviſé; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

La multiplication & la diviſion ſe ſervent de preuves reciproquement. 22 La diviſion de fait ce qu'avoit fait la multiplication

Car je ſuis aſſuré que 6 produit 24 étant multiplié par 4, ſi 6 eſt contenu 4 fois dans 24, ce que je puis ſçavoir en diviſant 24 par 6; & au contraire, je ſuis aſſuré qu'ayant diviſé 24 par 6, le quotient eſt certainement 4: ſi 4 eſt une ſixiéme partie de 24, ce que je puis ſçavoir en multipliant le quotient 4 par 6; car ſi 4 multiplié par 6 fait 24, certainement 4 eſt une ſixiéme partie de 24.

Suivant cette Regle, ſi je veux m'aſſurer que le quotient de la diviſion de 24096 diviſé par 48 eſt 502, je multiplie le diviſeur 48 par le quotient 502, ſi le produit de cette multiplication eſt égal à 24096, je ſuis aſſuré que l'operation eſt bien faite: au contraire, ſi je voulois ſçavoir certainement ſi 48 multipliant 502 fait veritablement 24096, je diviſerois ce nombre 24096 par 48, ſi le quotient de cette diviſion ſe trouvoit être 502, je ne pourrois plus douter de la certitude de cette operation.

AVERTISSEMENT.

23 *POur multiplier & diviser avec facilité, il faut apprendre par memoire le produit des multiplications des neuf premiers caracteres: Par exemple, combien fait 5 fois 7; combien fait 6, multiplié par 6; & en mesme-temps combien de fois un des neuf premiers élemens est contenu dans un nombre donné d'un ou de deux chifres, par exemple combien 6 est dans 36, combien 5 dans 40.*

On dresse pour cela une Table, qui peut aider ceux qui commencent. Dans les deux rangs des cellules AB, & AC, sont les neuf premiers élemens.

Lors qu'on veut sçavoir quel est le produit d'un chifre, par exemple de 6 multiplié par 7, il faut chercher dans l'un des deux rangs l'un de ces deux chifres; par exemple, dans le rang AC, le nombre 6, & l'autre nombre 7 dans le rang AB; aprés cela prenant en cette Table une troisiéme cellule, qui réponde à celle où est 6 dans le rang AC, & à celle où est 7 dans le rang AB, on y trouve 42, qui est le produit de 6 multiplié par 7.

Si je veux sçavoir combien 6 est dans 42, je cherche 6 dans le rang AC, & une cellule qui réponde à 6, où sont 42, aprés je cherche dans le rang AB, la cellule qui réponde à celle où est 42, où je trouve 7, ainsi je sçay que 6 est sept fois dans 42. Et ainsi des autres nombres.

TABLE

de Multiplication & de Division.

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

C.

On donne des regles pour faire ces multiplications & ces divisions, mais elles sont plus curieuses qu'utiles. Ces operations se peuvent faire sans 24

elles ; car, comme nous l'avons remarqué, l'art n'est necessaire que pour les grandes operations. Neanmoins voila une de ces regles. Pour trouver les multiplications des nombres depuis 5 jusqu'à 10, il faut baisser les dix doigts, puis relever d'une main autant de doigts qu'il s'en faut que l'un des nombres qu'on veut multiplier n'aille jusqu'à dix. Comme si ce nombre est 8 en relever deux, & de l'autre main autant qu'il s'en faut que l'autre nomrbe n'aille jusqu'à dix ; comme si ce nombre est 7, en relever trois. Cela fait, il faut compter autant de dixaines qu'il y a de doigts baissez, & multiplier les doigts levez d'une main par ceux de l'autre, en ne les prenant que pour des unitez, & on aura le nombre qu'il faut. Dans l'exemple il y a deux doigts levez dans une main, & trois dans l'autre. Deux fois trois sont six ; il y a en tout cinq doigts baissez, qui font cinq dixaines : ainsi on connoit que 7 multiplié par 8, le produit est 56.

SECTION TROISIE'ME.
DES QUATRE OPERATIONS DE L'ARITHMETIQUE;
AJOUTER, SOUSTRAIRE, MULTIPLIER ET DIVISER

Sur des Grandeurs marquées avec les Lettres de l'Alphabet.

CHAPITRE PREMIER.

L'Arithmetique avec des Lettres, est ce qu'on appelle l'Algebre. Elle s'applique aux Grandeurs positives & negatives. Ce que c'est que ces Grandeurs.

NOus avons dit qu'on pouvoit marquer des Grandeurs avec d'autres signes qu'avec des chifres, sçavoir avec les Lettres de l'Alphabet. Il faut donc voir comment on peut faire les quatre operations de l'Arithmetique, en se servant de Lettres. Il dépend des hommes d'établir, pour signe d'une chose, tout caractere qu'ils voudront choisir. Celui-cy 7 signifie 7, parce qu'on est convenu qu'il signifieroit sept; ce qu'on auroit pû marquer par tout autre caractere. J'apperçois donc que l'on peut marquer les operations de l'Arithmetique de la maniere qu'on le voudra. 25

On a établi que ce signe +, qui est une ligne coupée par une autre ligne, signifieroit *plus*, & qu'une simple ligne couchée comme celle-cy, — signifieroit *moins*. Ajoûter une Grandeur à une autre, c'est prendre l'une avec l'autre, ou dire *l'une plus l'autre*. Ainsi on est convenu que pour ajoûter ensemble deux grandeurs marquées avec des lettres, on joindroit avec + qui signifie *plus*, les lettres qui marquent ces grandeurs. Que par exemple pour ajoûter la grandeur a avec la grandeur b, on écriroit $a + b$.

Soustraire une grandeur d'une autre, c'est prendre celle-cy *moins* la premiere. Quand on dit *six pieds moins quatre pieds*, on dit qu'on a soustrait quatre pieds de six pieds. Il n'est donc question pour marquer la soustraction d'une grandeur marquée par lettres, d'une autre grandeur aussi marquée par lettres, que de joindre leurs lettres avec — qui signifie *moins*. Si la premiere est a, dont on veut retrancher b, en écrivant $a - b$, on marque qu'on a retranché b de a, car cela veut dire a moins b.

Cela ne doit faire aucune difficulté. Les signes, comme on vient de le dire, sont des choses arbitraires, il n'est question que de prendre garde à ce qu'on veut qu'ils signifient. Ainsi étant convenu une fois que pour marque qu'on conçoit une grandeur multipliée par une autre, on joindra sans autre signe les deux lettres qui marquent ces grandeurs, pour multiplier b une grandeur par d une autre grandeur, je ne fais que les unir de cette sorte, bd sans autre signe, ou je mets entre deux une petite croix de S. André. Ainsi $A \times B$ marque que A est multiplié par B, que c'est le produit de ces deux grandeurs multipliées l'une par l'autre.

Pour marque de la division on met sous la lettre

tre, qui eſt le ſigne d'une grandeur, la lettre de la ſeconde grandeur, par laquelle on conçoit que la premiere eſt diviſée. Ainſi quand on voit $\frac{b}{a}$ il faut concevoir que la grandeur *b* eſt diviſée par *a*.

Cette maniere de faire les operations de l'Arithmetique eſt ce qu'on appelle l'*Algebre*, c'eſt à dire une Arithmetique plus parfaite; ce qu'on prétend que ſignifie ce nom dans la Langue des Arabes. On employe l'Algebre pour trouver des grandeurs inconnuës, qu'on ne peut pas exprimer par des nombres, pendant qu'on ignore leur valeur. Auſſi il faut que de tous temps ceux qui ont travaillé ſur les Mathematiques, ayent eu une eſpece d'Algebre, c'eſt à dire des notes pour marquer les grandeurs qu'ils tâchoient de découvrir. Nous ne ſçavons pas quelles étoient ces notes dans les premiers temps. Depuis que l'Algebre a été plus connuë, qu'on en a fait des Livres, il paroiſt que d'abord on n'a eu des ſignes que pour les grandeurs inconnuës; pour les autres, on les marquoit avec les chifres ou nombres ordinaires. On appelloit *Nombres coſſiques*, ceux de l'Algebre. Ce mot vient de l'Italien *coſa*, c'eſt à dire *choſe*; parce que c'étoit la choſe même qu'on prétendoit faire conſiderer par le moyen de ces notes. Et c'eſt dans ce même ſens que l'Algebre ſe nomme aujourd'huy *Specieuſe*; parce que ce ſont les *eſpeces* ou formes des choſes mêmes qu'on déſigne par lettres.

Nous parlerons des anciennes notes dans la ſuite. Elles étoient embaraſſantes, meſlées & confuſes avec les chifres; C'eſt ce qui avoit donné cette prévention, que l'Algebre étoit extrémement difficile. Depuis qu'on s'y ſert des lettres de l'Alphabet, elle n'a rien que d'aiſé. J'avouë que d'abord

on a peine à se faire à ce calcul. Les lettres sont des signes fort generaux, qui n'ont point d'idées particulieres qui appliquent. Elles marquent les grandeurs dont elles sont les signes d'une maniere abstraite, au lieu que les chifres ont des idées particulieres & distinctes; car aussi tôt que je vois par exemple ces deux chifres 12, *je me represente douze choses égales, ou douze parties égales de la grandeur dont il est question. Ceux qui ne sont pas accoûtumez au calcul par lettres, quand ils ne voyent que des letres, il leur semble qu'ils ne voyent rien.*

Cependant l'utilité du calcul par des lettres est manifeste. On ne peut appliquer des chifres qu'à des grandeurs connuës. Je ne puis point nommer des grandeurs données l'une par exemple 7 *l'autre* 8, *que je ne sçache précisément leur rapport ou leur valeur. Lors qu'il s'agit donc de connoître des grandeurs inconnuës, & que de la maniere qu'on en propose une question, on apperçoit qu'en les ajoûtant ou retranchant l'une de l'autre, les multipliant l'une par l'autre ou les divisant, on découvrira quelque rapport qui fera connoître le reste, il est necessaire de faire sur elles les quatre operations; ce que je ne puis faire avec les chifres, sans connoître leur juste valeur, que je cherche encore; au lieu que je puis désigner une grandeur en la marquant avec une lettre, quoy que je ne connoisse point sa valeur, parce que les lettres ne déterminent rien. Si j'appelle* x *une certaine grandeur que je me propose de trouver, ce signe dont je me sers pour la marquer ne dit point qu'elle ait* 10, *ou* 20, *ou* 30 *pieds; Je puis indifferemment marquer par cette lettre* x *toute sorte de grandeurs. Il est vray qu'ayant déja employé cette lettre pour marquer une telle grandeur, je ne puis pas, dans une même question, me servir de cette même lettre pour signifier des gran-*

grandeurs que je sçay ne lui estre pas égales, à moins que je n'y ajoûte ou que je n'en retranche quelqu'autre grandeur qui en fait la difference.

Un des avantages de ce calcul c'est que les mêmes signes, c'est à dire les mesmes lettres, demeurent. Quand j'ajoûte b *avec* d, *écrivant* b + d, *ou que je multiplie* b *par* d, *écrivant* bd, *ces mesmes lettres* b *&* d *demeurent toûjours. L'operation que je fais sur elles ne les change point; ainsi dans l'examen d'une question où il y a une longue suite d'operations, je vois toûjours le chemin que j'ay fait, & tous les rapports des grandeurs sur lesquelles j'opere; parce qu'elles conservent leurs signes. Cela n'arrive pas dans les chifres; car si j'ajoûte* 5 *avec* 6 *il vient* 11, *où* 5 *&* 6 *ne paroissent plus. Si je multiplie* 3 *par* 9, *je fais* 27, *où* 3 *&* 9 *ne paroissent plus.*

C'est ce qui doit encourager à surmonter la difficulté qui paroît dans ce calcul. Je dis qui paroit, car dans le fond le calcul par lettres est plus facile que celuy des chifres. Ce que j'en ay dit, est plus facile que tout ce qu'on en peut dire. Ce que je vais ajoûter n'est que pour faire faire attention aux suites de cette maniere, que j'ay proposée, de marquer les quatre operations avec des lettres. Vous allez voir combien cela est facile; ce qui vous surprendra, aprés l'idée que vous aviez conceuë de l'Algebre. Cette science étoit autrefois inaccessible. L'obstacle venoit des signes embarrassans dont on se servoit. Les signes qu'on employe aujourd'huy ne sont que les lettres de l'Alphabet, ausquelles on est accoûtumé; & ces signes + *&* — *&* =, *par le moyen desquels on s'exprime d'une maniere vive, courte & claire, sans presque employer de paroles. Dans l'espace de deux lignes on dit ce qu'on ne feroit pas, sans ce secours, dans une page entiere,*

em-

employant des paroles à l'ordinaire. On le verra dans la suite.

26 Un des avantages de l'Arithmetique par lettres, ou de l'Algebre, c'est qu'elle s'applique à ce qu'on appelle les grandeurs negatives, comme à celles qui sont positives. *Positif* & *réel* est une même chose. Cent pistoles qu'un homme possede, c'est une grandeur réelle, ou positive. Mais on peut dire de celuy qui n'a rien, & qui doit cent pistoles, qu'il a un bien negatif; c'est à dire qu'il s'en faut cent pistoles qu'il soit dans la condition d'un homme qui n'a rien, mais qui ne doit rien. Ainsi si on nomme x son état, on l'exprimera ainsi $x = 0 - 100$, ou $x + 100 = 0$; c'est à dire qu'afin que son bien fût égal à rien, il faudroit qu'il acquît 100 pistoles.

Comme ce qui est au dessus du zero est une grandeur positive, ce qui descend au dessous est une grandeur negative; ce qu'on peut concevoir dans cet autre exemple. Si M est le commencement d'un chemin vers X, tout ce que fait un Voyageur vers X est comme une grandeur positive. Mais si A est diametralement opposé à X, tout ce que fait ce Voyageur de M vers A, en s'éloignant de X est une negation: cela s'appelle *moins*; comme ce qu'il fait au delà de M vers X se doit nommer *plus*. Ce moins est une negation ou une grandeur negative, dont $-$ est le signe; comme $+$ est celui d'une grandeur positive. Par tout où l'on ne voit aucun de ces deux signes, il faut y supposer le signe $+$; car ce n'est presque que de ce qui est positif qu'on parle.

On peut donc regarder le zero comme un milieu entre la grandeur negative, & une grandeur positive. Toute grandeur positive se fait par une addition au neant. Une ligne commence par un point

point, qui dans ſon premier commencement eſt comme rien; car par ce commencement on entend une choſe indiviſible, & qui ſe peut conſiderer comme un neant, tant elle eſt petite. Ainſi ayant nommé x une grandeur telle qu'elle ſoit, on peut dire que ſon premier degré c'eſt zero, ou x^0. C'eſt ainſi qu'on marque l'état où elle ſe peut ſuppoſer égale à rien x^0. Mais proprement ſon premier degré c'eſt x^1, quand elles s'éleve, & qu'elle commence d'eſtre quelque choſe. Ces conſiderations donnent lieu de parler des grandeurs d'une maniere fort étenduë, qui comprend l'infini auſſi bien en deſcendant qu'en montant. Car comme une grandeur peut s'augmenter à l'infini poſitivement, auſſi par la ſouſtraction on peut la diminuer à l'infini, non ſeulement en la ſubdiviſant & faiſant que de plus en plus elle approche du neant ou de zero; mais encore deſcendant au deſſous du zero infiniment. Les ſignes + & — donnent le moyen d'exprimer tout cela. On peut avec le ſigne — retrancher d'un plus petit terme un autre terme, quoy que plus grand, ce qu'on ne peut pas autrement, ôter par exemple 8 de 5; car on peut écrire 5 — 8: comme ſi un homme qui n'a que cinq piſtoles en devoit 8; ainſi ſon bien ſeroit 5 — 8. Ces ſignes ſont d'un uſage fort étendu.

Il faut encore conſiderer ici que les grandeurs poſitives & negatives étant oppoſées, en augmentant les unes on diminuë les autres; & qu'ainſi pour ſouſtraire d'une grandeur negative ou la diminuer, il n'y a qu'à augmenter la grandeur poſitive oppoſée, comme nous l'allons voir,

CHAPITRE II.

Moyen de faire les quatre premieres operations de l'Arithmetique sur les grandeurs qu'on marque avec une seule lettre, qu'on appelle pour cette raison Grandeurs incomplexes, *ou* simples.

DE L'ADDITION.

27 ON peut concevoir une grandeur comme faite ou composée de deux grandeurs; ainsi si l'on veut marquer cette composition, il faut employer deux lettres: comme par exemple concevoir qu'une certaine grandeur a deux parties b & d, j'appelle cette grandeur $b + d$, ce qui me la fait nommer *Grandeur complexe* ou *composée*; au lieu que j'appelle une grandeur que je marque avec une seule lettre, *Grandeur incomplexe* ou *simple*. Ce sont des termes qu'on invente pour éviter les circonlocutions.

Ajoûter, comme on l'a dit, c'est joindre deux grandeurs ensemble, ou exprimer par un signe qu'on a joint ces deux grandeurs. Ainsi il n'est question, pour ajoûter la grandeur b avec la grandeur d, que de les joindre par le signe de cette jonction qui est $+$, écrivant $b + d$ ce qui vaut autant que b plus d. Il n'est donc question que de se servir des signes des quatre operations qu'on a expliquées, les exprimant comme on en est convenu. Il ne faut pas confondre ces signes ou expressions; car si pour ajoûter b avec d on joignoit de prés ces deux lettres sans autres signes, ainsi bd, puisqu'on est convenu que cette maniere bd est le signe de la multiplication, on ne marqueroit pas que b est joint avec d, mais qu'on a multiplié b par d, ce

d, ce qui est bien different : car deux ajoûtez à six font 8 ; mais deux fois six font douze.

On peut abreger ces signes ; & il le faut, quand on le peut : car il en est des signes comme des expressions, qui donnent des idées plus nettes lors qu'elles sont simples. Ainsi $+b+b+b+b$ signifians que *b* est ajoûté quatre fois, au lieu de cette longue expression j'écris $4b$; ce qui est la même chose.

Souvenez-vous qu'on est convenu, (car les signes ne signifient que ce qu'on convient qu'ils signifieront) que lors que le chifre est devant la lettre il marque une addition : icy par exemple dans $4b$, que *b* est ajoûté quatre fois à luy même ; mais b^4 marque, comme on le dira, que *b* est multiplié quatre fois par luy même. Afin qu'on ne s'y trompe pas, on fait en sorte que le chifre qui est aprés la lettre, ne se trouve pas exactement dans la même ligne, comme vous voyez icy b^4. On peut mettre le signe $+$ devant une lettre qui n'a point de signe, quand on sçait d'ailleurs que la grandeur qu'elle marque est positive. Ainsi dans cette expression $b+d$, je puis mettre $+$ devant b ; $+b+d$.

EXEMPLES D'ADDITIONS.

à ajoûter	a	$3f$	$4d$	a	$3c$	xb	$2b$
	b	$2f$	x	$2b$	$4d$	zc	b
	c		$8d$			zc	$3b$
Sommes	$a+b+c$	$5f$	$12d+x$	$a+2b$	$3c+4d$	$xb+2zc$	$6b$

DE LA SOUSTRACTION.

COmme le signe $+$ convient à une grandeur positive ; aussi le signe $-$ marque une grandeur negative, ou qui est moindre que rien. Ce signe $-$ est celuy de la Soustraction. Pour soustraire *g* de *f*

on

on joint ces deux grandeurs par ce signe de *moins*; en cette maniere $f - g$. Ainsi la soustraction dans l'Algebre ou l'Arithmetique par lettres, change en grandeur negative celles qui étoient positives. On sous-entend le signe $+$, quand il n'y a aucun signe. Ainsi quand on propose d'ôter g de f; c'est comme si on proposoit d'ôter $+g$ de $+f$. Or en changeant le signe de la grandeur qu'on veut ôter, vient $+f - g$; où la grandeur positive $+g$ devient negative: de sorte que si ces lettres marquent l'état d'un homme qui a ou qui n'a pas des pistoles, $+f$ marquera le nombre des pistoles qu'il a positivement; & $-g$ le nombre de celles qui luy manquent ou qu'il doit. Plus une grandeur, moins la même grandeur, ce n'est rien. Ces deux signes $+$ & $-$ se détruisent; c'est pourquoi on peut abreger une operation, & en rendre l'expression plus nette, effaçant autant de fois les lettres qui marquent la grandeur dont on veut retrancher, que ces lettres se trouvent de fois dans celle qu'on veut retrancher: ainsi pour retrancher $2b$ de $5b$, il faut ôter de $5b$ deux fois b, le reste $3b$ est ce que l'on cherche. Car $+2b - 2b$ ce n'est rien.

EXEMPLES DE SOUSTRACTIONS.

D'où il faut soustraire	$5b$ / $2b$	$4d$ / d	f / f	b / d	$3c$ / $2b$	ab / cd
Reste	$3b$	$3d$	0	$b - d$	$3c - 2b$	$ab - cd$

Remarquez que la soustraction d'une grandeur negative, d'une autre grandeur negative se fait par une addition. Nous avons vû que les grandeurs negatives & positives étant opposées; en diminuant les unes, on augmente les autres. En diminuant les dettes d'un homme, on augmente son bien.

DE

DE LA MULTIPLICATION.

POur la Multiplication on joint ſimplement les 29
grandeurs que l'on veut multiplier l'une par l'autre. Pour multiplier *b* par *d*, on écrit *bd*. Pour multiplier *b* par 3, on écrit 3*b*. S'il y a des chifres joints avec les lettres, on les multiplie comme il a été enſeigné; ainſi pour multiplier 3*b* par 2*b*, on multiplie 3 par 2, ce qui fait 6, & on joint *b* avec *b*, le produit de cette multiplication eſt 6*bb*. Il ne faut point chercher de démonſtration de toutes ces choſes-là. Ces manieres d'ajoûter, ſouſtraire, multiplier & diviſer toutes ſortes grandeurs, ne ſont que des ſignes de ce que l'on ſuppoſe être fait: ainſi ſi j'écris *bb* je témoigne par cette marque que je ſuppoſe, que la grandeur deſignée par la lettre *b* a été multipliée par *b*, c'eſt à dire par elle-même. On a dit qu'on ſe ſervoit quelquefois d'une petite croix de S. André pour ſigne de la multiplication: que $A \times B$ eſt une note qui marque que *A* & *B* ſont multipliez l'un par l'autre.

Pour abreger lors qu'on multiplie une grandeur par elle-même, on met aprés la lettre qui la marque, un chifre, qui ſignifie combien de fois elle a été multipliée: ainſi multipliant *b* par *b*, cela fait *bb*, & derechef par *b* cela fait *bbb*; pour abreger on écrit b^3. Remarquez donc encore une fois, que 3*b* n'eſt pas la même choſe que b^3; car ſi *b* vaut 2, en diſant 3 fois *b* on dit 3 fois 2, ce qui fait 6. Mais puiſque b^3 eſt la même choſe que *bbb*, vous voyez que *bbb* doit valoir 8; car 2 par 2 fait 4, & 4 par 2 fait 8. Quand on écrit 2*b*, c'eſt une marque que l'on ſuppoſe que *b* eſt ajouté à *b*, mais quand on écrit *bb* ou b^2, c'eſt une marque qu'on ſuppoſe que *b* eſt multiplié par *b*. 3 ajoûté à 3 ne fait que 6; mais 3 multiplié par 3, fait 9.

EXEM-

EXEMPLES DE MULTIPLICATIONS

A multiplier.	a	a	b	ab	aa
Multiplicateur.	b	a	$2b$	cd	ab
Produit.	ab	aa ou a^2	$2bb$	$abcd$	a^3b ou $aaab$

A multiplier.	$2a$	$2b$	$3ab$	$6a^3$
Multiplicateur.	$3b$	c	$2cd$	$2a^3$
Produit.	$6ab$	$2bc$	$6abcd$	$12a^6$

Dans le dernier exemple $6a^3$, multiplié par $2a^3$, on sera surpris comment le produit en est $12a^6$ Nous avons dit que a^3 est la même chose que aaa; or en multipliant $6aaa$ par $2aaa$, le produit est $12aaaaaa$; partant pour abreger, comme il a été dit, au lieu de $aaaaaa$, on doit mettre un 6 aprés a, qui marque combien on doit concevoir que cette lettre est repetée.

DE LA DIVISION.

30 LA marque de la division est une petite ligne, au dessous de laquelle on place le diviseur, & au dessus la grandeur donnée pour estre divisée: ainsi $\frac{b}{c}$ est une marque qu'on suppose que b est divisé par c.

Nous avons déja remarqué qu'il étoit utile de rendre les expressions les plus simples qu'on le pouvoit; parce qu'elles donnent des idées plus simples, & par consequent plus nettes. Or il est facile d'abreger l'operation, dont il est ici question.

Avant

Avant que d'en proposer le moyen, il faut relire ou rappeller dans sa memoire la Proposition sixiéme, § n. 21 On y a démontré que le quotient d'une division multipliant le diviseur, produit la somme qui avoit été divisée; ainsi le quotient doit être une grandeur, qui multipliée par le diviseur, produise la grandeur qu'il faut diviser; par consequent *bc* étant proposé pour être divisé par *c*, il est manifeste que le quotient sera *b*; car *b* multipliant le diviseur *c*, fait la somme *bc*, qui avoit été divisée. La division défait ce qu'avoit fait la multiplication. On donne donc cette Regle generale, pour faire les divisions qu'il faut retrancher des grandeurs à diviser les lettres qui se trouvent dans le diviseur. Suivant cette Regle, pour diviser *bcd*, par *cd*, il faut retrancher de *bcd* les lettres *c* & *d* qui se trouvent dans le diviseur *cd*, & dans la grandeur à diviser *bcd*. Le quotient sera donc *b*, comme il est évident, puisque multipliant par ce quotient *b* le diviseur *cd*, cela fait *bcd*, qui est la grandeur qui a été proposée pour être divisée.

Lors qu'il y a des chifres on les divise, comme il a été enseigné dans la division des nombres. Pour diviser *6bb* par *3b*, on divise *bb* par *b*; le quotient est *b*, & *6* par *3*, le quotient est *2*; ainsi le quotient de *6bb*, divisé par *3b*, est *2b*. Car *2b* multipliant *3b*, produit *6bb*.

EXEMPLES DE DIVISIONS.

Il faut diviser par	b	b quot.	aa	a	a^3	a^2	abc	bc	a^3b	a	$6ab$	$2a$
	a		a		a		a		a^2b		$3b$	

Dans toutes ces divisions, pour être assuré que l'operation est bonne, il ne faut que multiplier le quotient par le diviseur, si le produit est égal au dividende, selon ce qu'on a dit touchant la preuve

des

des divisions avec les chifres, cette division par lettres sera bonne.

Il est évident qu'en divisant une grandeur par elle-même, le quotient est 1, divisant b par b le quotient est 1; car une grandeur est contenuë une fois en elle-même.

CHAPITRE III.

Operation de l'Arithmetique sur les Grandeurs complexes, ou composées.

L'ADDITION.

31 L'Addition des Grandeurs complexes ou composées, n'a pas plus de difficulté que celle des Grandeurs incomplexes; il faut seulement joindre par le signe $+$ les Grandeurs que l'on veut ajoûter les unes aux autres. Par exemple, pour ajoûter $b+c$ avec $f+g$, il faut joindre ces deux Grandeurs complexes par le signe $+$ en cette maniere, $b+c+f+g$. Pour ajoûter $b+c$ avec $d-f$, il faut écrire $b+c+d-f$.

Pour abreger, lors qu'à une grandeur on ajoûte la même grandeur, on met un chifre qui marque combien de fois on suppose que cette grandeur est ajoûtée à elle-même, comme on a fait cy-dessus: ainsi ayant à ajoûter $c+d$ avec $c+d$, au lieu de $c+d+c+d$, on fait cette addition en cette sorte, $2c+2d$. Si les Grandeurs données sont $c-d$ & $c-d$, on fait l'addition de la même maniere $2c-2d$.

Lors que les Grandeurs qu'on doit ajoûter sont les mêmes†, & qu'elles ont des signes contraires, il faut retrancher les lettres qui se trouvent d'une part avec le signe $+$, & de l'autre part avec le signe

† h. e. ūsdem literis constant

signe —, comme s'il falloit ajoûter $3b + 2d$, à $2b - 2d$, puisque dans la premiere grandeur il se trouve $+ 2d$, & dans l'autre $- 2d$, je retranche $2d$, qui se trouve d'une part avec $+$, & de l'autre avec —; ainsi la somme de cette addition est $5b$. La raison pourquoy on supprime entierement $2d$ est manifeste, car le signe — détruit ce que fait le signe $+$, ainsi il ne reste rien. Plus $2d$ & moins $2d$, ne sont rien. En ôtant tout ce qu'on avoit mis, il ne reste rien.

Nous en avons fait un Axiome qu'il faut avoir present à l'esprit, pour abreger ces operations, en rendre les expressions plus nettes, & pour juger des operations que d'autres ont fait. Car il arrive souvent qu'on ne conçoit pas la verité d'une operation; parce qu'on n'y voit point de certaines lettres qu'on juge y devoir paroître, lors qu'on n'apperçoit pas que se trouvant avec des signes contraires on a dû les supprimer.

Par exemple, ajoûtant $4f + 6g$ à $3f - 4g$, l'addition sera $7f + 2g$; car $+ 6g$ est égal à $+ 4g + 2g$: or selon ce qu'on vient de dire, ajoûtant $+ 4g + 2g$ avec $- 4g$, il faut entierement supprimer $4g$; ainsi il ne reste que $+ 2g$.

EXEMPLES D'ADDITIONS.

A ajoûter.	$a + 3b$ $a + 2b$	$2a - b$ $3a - 3b$	$aa - 5a + 6$ $aa + a - 6$
Somme	$2a + 5b$	$5a - 4b$	$2aa - 4a$

A ajoûter.	$a - d$ $a + 4d$	$aa + 2a - 3$ $aa + a - 6$	$2a^3 + b^2 + 3$ $a^3 + b^2 - 2$
Somme	$2a + 3d$	$2aa + 3a - 9$	$3a^3 + 2b^2 + 1$

A ajoûter	$3a + 4b - 6c$ $4a - 2b - 3c$ $7a + 12b + 2c$	$20m + 10n + 40x$ $1m - 3on - 20x$ $40m + 9n + 50x$
Somme	$14a + 14b - 7c$	$61m - 11n + 70x$

De la Soustraction.

32 IL faut ici, comme dans la Soustraction des Grandeurs incomplexes, se servir du signe de la Soustraction, joignant par le signe — la grandeur qu'on veut soustraire, avec celle de laquelle on la veut soustraire. Pour ôter $b + d$ de $c + f$, il faut premierement écrire $c + f - b$: & parce que ce n'est pas seulement b qu'il faut retrancher, mais encore $+ d$, on doit n arquer ces deux soustractions par deux signes de soustraction, en cette maniere $c + f - b - d$.

On a remarqué que par la soustraction on change les grandeurs qu'on retranche, & que de positives qu'elles étoient, on fait qu'elles deviennent negatives. C'est pourquoy on donne cette Regle generale, qu'il faut changer les signes de la grandeur qu'on veut soustraire. Vous vous souvenez que nous avons dit, que devant une grandeur qui n'est precedée d'aucun signe, celui-ci + y peut être sous-entendu. Suivant cette Regle, pour soustraire $b + d$, ou $+ b + d$ de $c + f$, il faut changer les deux signes de $+ b + d$ en cette maniere $c + f - b - d$, comme il a été dit.

Cette Regle se trouve toûjours veritable; car lors que le signe — se rencontre dans la grandeur qu'on veut soustraire: comme ici on veut soustraire $b - d$ ou $+ b - d$ de $c + f$, il faut changer ces signes $+ b - d$ en des signes contraires, de cette sorte $c + f - b + d$. Quand on soustrait

$b - d$

$b - d$ de $c + f$, on ne veut pas ôter entierement la grandeur b, il s'en faut la grandeur d; ainsi ayant mis $c + f - b$, on retranche de $c + f$ plus qu'il ne faut retrancher, sçavoir la grandeur d; c'est pourquoi on l'ajoûte luy donnant le signe $+$ en cette maniere $c + f - b + d$. Selon cette Regle, ayant soustrait $b - d$ de $c - f$, le reste est $c - f - b + d$.

On peut abreger les expressions d'une soustraction, en observant deux choses dont nous avons déja parlé. 1°. Lors qu'il faut ajoûter des grandeurs exprimées par les mêmes lettres, il suffit de mettre devant une de ces lettres un chifre qui marque combien elle est ajoûtée de fois à elle-même, comme au lieu de $b + b + b + 2b$ on peut mettre $5b$. 2°. Puisque $+$ une grandeur $-$ la même grandeur, cela ne fait rien : $+b - b$ égal à zero, on peut sans diminuer la valeur d'une expression, supprimer les lettres qui se trouvent avec le signe $+$ & avec le signe $-$; par consequent ôtant $+c + f$ de $c + d + f$, comme cela fait $c + d + f - c - f$, en retranchant les lettres c & f qui ont des signes contraires, le reste de cette soustraction est d.

Si l'on soustrait $a - b$ de $3a + b$, selon la Regle generale aprés la soustraction, il reste $3a + b - a + b$. Or on peut abreger cette expression; car $3a - a$ ne font que $2a$, & $+b + b$ valent $2b$; ainsi $2a + 2b$ valent autant que $3a + b - a + b$.

En retranchant $a + 3b$ de $3a + 2b$ selon la Regle, le reste sera $3a + 2b - a - 3b$. Mais puisque $3a - a$ est égal à $2a$, & que $+2b - 3b$ est égal à $-b$; il est évident que $3a + 2b - a - 3b$ font $2a - b$.

Pour soustraire $3a - 3b$ de $5a - 4b$, selon la

Regle generale, le reste sera $5a - 4b - 3a + 3b$. Or 1°, $5a - 3a$ égal à $2a$; 2°, d'une part on ôte $4b$, & de l'autre on ajoûte $3b$, comme vous le voyez dans l'operation $5a - 4b - 3a + 3b$: ainsi il faut supprimer $3b$, & n'en marquer qu'un avec le signe — pour abreger cette expression, qui sera réduite à celle-cy $2a - b$. Soit donné $5a + 2b$ dont il faut soustraire $4a + 6b$, je retranche premierement $4a$ de $5a$, & il reste a: Ensuite pour retrancher $6b$ de $2b$, comme on ne peut pas ôter d'une grandeur ce qu'elle n'a pas, aprés avoir supprimé $2b$ pour retrancher les $4b$ qui restent, je les retranche de la grandeur a en les liant avec cette lettre en cette maniere $a - 4b$.

EXEMPLES DE SOUSTRACTIONS.

D'où il faut soustraire	$2a + 5b$ $a + b$	$5a - 4b$ $3a - 3b$	$3a + 2b$ $a + 3b$
Reste	$a + 4b$	$2a - b$	$2a - b$

D'où il faut soustraire	$2a + b$ $a - b$	$3a + d$ $2a + 5d$	$2aa + 3a + 9$ $aa + 2a + 3$
Reste	$a + 2b$	$a - 4d$	$aa + a + 6$

D'où il faut soustraire	$25a + 12b - 14d$ $12a - 8b + 10d$	$30m - 19n + 50x + 10y$ $20m - 12n + 14x + 20y$
Reste	$13a - 4b - 4d$	$10m - 7n + 36x - 10y$

Si dans ces dernieres operations vous n'appercevez pas comment ces soustractions donnent de tels restes, faites les operations tout au long, & vous découvrirez, sans peine, comment en abregeant une expression selon qu'il a été enseigné, ces soustractions ont les restes qui sont marquez dans les Exemples proposez.

L'Ad-

L'Addition & la Soustraction se servent de preuves. Pour m'assurer qu'ayant retranché $a + 6b$ de $5a + 2b$, le reste est $4a - 4b$; j'ajoûte $4a - 4b$ avec $a + 6b$, & trouvant que la somme est $5a + 2b$, je suis assuré que l'operation est bonne. Au contraire, pour m'assurer que $5a + 2b$ est la somme de $4a - 4b$, & $a + 6b$, je retranche l'une de $5a + 2b$; si le reste de la soustraction donne l'autre somme, l'addition a été bien faite, comme on l'a enseigné cy-dessus.

Disons encore que pour ajoûter ensemble deux grandeurs complexes, il n'y a qu'à les écrire l'une aprés l'autre avec leurs mêmes signes; & que pour soustraire une grandeur complexe d'une grandeur aussi complexe, il faut écrire la grandeur à soustraire aprés l'autre, en changeant tous les signes de celle que l'on soustrait, & reduire le tout dans l'une & l'autre operation à la plus simple expression. Par exemple, si l'on veut ajoûter $3a + 4c - 5b + 8$ *avec* $4a - 2c - 2b + 4$, *l'on écrira* $3a + 4c - 5b + 8 + 4a - 2c - 2b + 4$: *ce qui se reduit à* $7a + 2c - 7b + 12$.

De même si l'on veut soustraire $3a + 4c - 5b + 8$ *de* $4a - 2c - 2b + 4$, *l'on écrira tout de suite* $4a - 2c - 2b + 4 - 3a - 4c + 5b - 8$: *ce qui se reduit à* $a - 6c + 3b - 4$. *Il n'est point necessaire en ces operations d'écrire les termes semblables sous les semblables: si nous l'avons fait, ce n'étoit que pour representer aux yeux ces operations.*

De la Multiplication.

LA multiplication des grandeurs complexes se 33
fait presque de la même maniere que la multiplication des nombres qui ont plusieurs chifres. Comme dans les nombres on multiplie tous les

chifres du nombre à multiplier par chaque chifre du multipliant, en ſorte qu'il y a autant de multiplications partiales qu'il y a de chifres dans le multipliant; auſſi dans les grandeurs compoſées on multiplie toutes les parties de la grandeur à multiplier par chaque partie de la grandeur qui eſt la multipliante.

Soit donné $b + d$ pour eſtre multiplié par x; il faut multiplier b & d, qui ſont les parties de la grandeur donnée, par x; ce qui produit $xb + xd$.

Soit donné $b + d$ pour eſtre multiplié par $x + z$, il faut faire quatre multiplications partiales, qui ſeront $xb + xd + zb + zd$. On peut comprendre dans trois Regles tous les differens cas de cette operation.

Premiere Regle.

34 Lors que les deux grandeurs données ont le ſigne $+$, leur produit doit avoir ce même ſigne: ainſi multipliant $b + d$ par $x + z$, le produit eſt, comme nous avons vû, $xb + xd + zb + zd$.

Seconde Regle.

35 Plus en moins, ou moins en plus, donne un produit qui doit avoir le ſigne $-$.

C'eſt à dire que ſi l'une des deux grandeurs a le ſigne $-$, par exemple, ſi l'on avoit donné $+a$ pour être multiplié par $b - c$, le produit de leur multiplication doit être $ab - ac$, dont la raiſon eſt évidente. Quand on multiplie $b - c$ par a, on ne veut multiplier qu'une partie de b. Ainſi ayant multiplié tout b par a, comme on a trop fait, ayant multiplié c qui devoit être retranché de b, pour y remedier on ôte autant de fois c qu'on

qu'on l'avoit trop pris de fois. Le produit ab eſt plus grand que celui qui eſt le veritable de toute la grandeur ac: on en retranche donc cette grandeur, en la joignant avec ab par le ſigne de la ſouſtraction qui eſt $-$, en cette maniere $ab - ac$.

Soit donné $b + d$ pour être multiplié par $x - z$, le produit ſera $xb + xd - zb - zd$. Quand on multiplie $b + d$ par $x - z$, on ne multiplie pas cette grandeur par toute la grandeur x, il s'en faut la partie z; ainſi ayant multiplié la grandeur $b + d$ par toute la grandeur de x, le produit $xb + xd$ eſt plus grand que le veritable produit qu'on cherche de la grandeur b multipliée par z, & de d multipliée par z, c'eſt à dire de $zb + zd$: ainſi il faut retrancher ce produit $zb + zd$, de la maniere qu'il a été enſeigné dans la ſouſtraction, écrivant $xb + xd - zb - zd$.

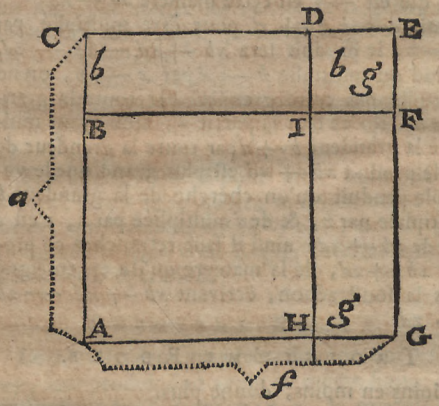
TROISIE'ME REGLE.

Moins en moins, donne plus. 36

C'eſt à dire, que ſi les deux grandeurs données ont le ſigne $-$, le produit de la multiplication de l'une par l'autre aura le ſigne $+$ dans ſa derniere partie. Par exemple, $b - d$ étant multiplié par $x - z$, le produit ſera $xb - xd - zb + zd$. Dans cette multiplication, puiſqu'on ne multiplie pas $b - d$ par toute la grandeur x, qu'il s'en faut la partie z, le produit $xb - xd$ eſt trop grand, il en faut retrancher quelque choſe; mais auſſi il n'en faut pas retrancher tout le produit de b par z, il s'en faut le produit de d par z; car vous n'aviez pas multiplié toute la grandeur b par x, il s'en falloit la grandeur d; c'eſt pourquoy ayant écrit $xb - xd - zb$, on ajoûte avec le ſigne $+$ le produit zd qu'on retranchoit de trop; ainſi le

veritable produit est $xb - xd - zb + zd$.

37 *Il ne faut point chercher ici d'autre mystere. On ajoûte avec ce signe* plus, *ce qu'on avoit oté de trop. Cela se voit sensiblement dans cette figure.*



Soit a = AC, *&* b = BC: *ainsi* a — b = AB. *Soit aussi* f = AG, *&* g = HG: *ainsi* f — g = AH; *par conséquent il faut que le produit de* a — b *par* f — g *soit égal à* ABIH, *auquel est égal* ACEG *ou* af, *pourvû qu'on en retranche* DEGH *ou* ag *&* BCEF *égal à* bf, *mais aussi qu'on lui ajoûte* DEFI *ou* bg *qu'on luy ôte de trop : car, qu'on y fasse attention, en ôtant* DEGH *&* BCEF, *on ôte deux fois* DEFI *ou* bg: *ainsi le produit de* a — b *par* f — g *est* af — bf — ag + gb; *où à la fin* bg *est avec le signe* +, *c'est à dire qu'on le rajoûte une fois, parce qu'on l'avoit ôté deux fois, c'est à dire une fois de trop.*

Voici une autre preuve que + *par* — *donne* —, *& que* — *par* — *donne plus. On la peut passer.*

ser dans la premiere lecture de cet Ouvrage ; elle s'entendra plus facilement, quand on sera exercé à ce calcul.

Soit à multiplier a — b *par* + c, *je dis que le produit sera* ac — bc ; *car soit* a — b = d : *donc* a = d + b. *Ce qui étant multiplié par* + c *donne* ac = dc + bc : *Donc* ac — bc = dc ; *ce qu'il faloit démontrer.*

Soit encore a — b *à multiplier par* — c. *L'on fait* a — b = d, *ou* a = d + b ; *puisque par la démonstration precedente* + *par* — *donne* — *en multipliant* a = d + b *par* — c, *on aura* — ac = — dc — bc, *ou* — ac + bc = — dc : *ce qu'il falloit démontrer.*

En general, moins *en* moins, *doit donner* plus. — a *multiplié par* — b, *le produit doit être* + ab. *La raison se tire de l'idée de la multiplication ; sçavoir, qu'en multipliant la grandeur negative* — a *par* — b, *on ôte la premiere* — a *autant de fois qu'il y a d'unitez dans la seconde* — b. *Or nous avons vû que la soustraction des grandeurs negatives, se fait par une addition. Grandeur positive, c'est une grandeur affirmée, comme la negative une grandeur niée : Donc en ôtant la negation, l'on rétablit l'affirmation ; ainsi le produit doit avoir le signe de l'affirmation, qui est* +.

EXEMPLES POUR LA MULTIPLICATION.

Premier.

	$4a$	$+12b$	$+8f$	
par	$5a$	$-3b$	$+4f$	
	$20aa$	$+60ab$	$+40af$	$-36bb$ $-24bf$ $+32ff$
		$-12ab$	$+16af$	$+48bf$
	$20aa$	$+48ab$	$+56af$	$-36bb$ $+24bf$ $+32ff$

AUTRE EXEMPLE.

	$8m$	$-4n$	$-20x$			
par	$4m$	$-2n$	$-40x$			
	$32mm$	$-16mn$	$-80mx$	$+8nn$	$+40nx$	$+800xx$
		$-16mn$	$-320mx$		$+160nx$	
	$32mm$	$-32mn$	$-400mx$	$+8nn$	$+200nx$	$+800xx$

Comment on peut rendre les expressions de ces multiplications plus nettes.

38 Lors que les grandeurs qu'on multiplie les unes par les autres ont les mesmes lettres, on peut abreger l'expression de leur produit. Le produit de $a+b$ par $a-b$, est selon la regle $aa+ab-ab-bb$: or puisque $+ab-ab$ ne fait rien, donc $aa-bb$ est égal à $aa+ab-ab-bb$. Le produit de $a-b$ par $a-b$ est $aa-ab-ab+bb$, puisque $-ab-ab$ est la même chose que $-2ab$, je mets donc $aa-2ab+bb$ pour $aa-ab-ab+bb$.

Le produit de $3d+e$ par $3d+e$ est $9dd+6de+ee$. Celuy de $3d+e$ par $3d-e$, est $9dd-ee$. Celuy-cy de $3d-e$ par $3d-e$, est $9dd-6de+ee$. Lors que les grandeurs sont fort composées, & que leurs produits seroient trop étendus, pour marquer seulement qu'il faut multiplier ces grandeurs composées l'une par l'autre, on les joint, mettant entre deux cette petite croix de S. André $\times$, comme on l'a dit. $4a^3+3aa-2a+1 \times aa-5a+6. = 4a^5-17a^4+7a^3+29a^2-17a+6.$

DE LA DIVISION.

39 LA Division, comme nous avons déja remarqué, défait ce que la multiplication avoit composé; ainsi pour diviser, il faut se ressouvenir

nir des Regles precedentes de la multiplication.

Nous avons vû que la diviſion & la multiplication ſe ſervent de preuves. On ne ſe peut pas tromper dans la diviſion, pourveu qu'on obſerve ſi le quotient en multipliant le diviſeur fait un produit égal à la grandeur qu'on a diviſée; car comme on l'a vû s n. 21. ſi cela arrive, ce quotient eſt le veritable : ainſi $x + z$ multiplié par $b + d$, faiſant le produit $xb + xd + zb + zd$, il eſt certain que $b + d$ eſt le quotient de $xb + xd + zb + zd$ diviſé par $x + z$. Il ne faut donc que ſuivre les trois Regles que nous venons de donner pour la multiplication.

1°. Puiſque plus en plus donne plus, ſi la grandeur qui doit être diviſée a le ſigne $+$, & que le diviſeur ait le ſigne $+$ par tout, c'eſt une marque que le quotient doit avoir $+$; ainſi la grandeur $xb + xd + zb + zd$ étant donnée pour être diviſée par $x + z$, il eſt manifeſte que le quotient eſt $b + d$.

2°. Si la grandeur à diviſer a le ſigne $-$ dans ſa derniere partie, & que le diviſeur ait le ſigne $+$, le quotient aura le ſigne $-$; & ſi le diviſeur a le ſigne $-$, le quotient aura le ſigne $+$. Ainſi diviſant $xb + xd - zb - zd$ par $x - z$, le quotient ſera $b + d$, car $b + d$ multipliant $x - z$, fait la grandeur donnée $xb + xd - zb - zd$.

3°. Si la grandeur donnée à diviſer a le ſigne $+$ à la fin, & le diviſeur le ſigne $-$, le quotient aura ce même ſigne $-$. Diviſant $xb - xd - zb + zd$ par $x - z$, le quotient ſera $b - d$.

Lors que l'expreſſion d'une operation a été abregée pour en appercevoir le quotient, ou quels ſont les termes ſupprimez dans les produits à diviſer, & les rétablir; voici ce que l'on fait.

Soit $mm - nn$ à diviſer par $m - n$, il faut

écrire le diviſeur à la gauche du dividende, comme vous le voyez.

Produit à diviſer.

Diviſeur, $m - n$.	$mm - nn$ / $- mm + mn$	*Quotient*, $m + n$.
	$0 + mn - nn$ / $- mn + nn$	

Je dis mm diviſé par $+ m$ donne $+ m$, que j'écris au quotient. Or $m - n$ multiplié par m donne $+ mm - mn$, j'écris au deſſous du produit à diviſer, avec des ſignes contraires $- mm + mn$, comme vous voyez; & reduiſant, l'on a $0 + mn - nn$ qu'il faut encore diviſer par $m - n$. Je dis donc encore $+ mn$ diviſé par m donne $+ n$, que j'écris au quotient; & $m - n$ multiplié par n donne $mn - nn$, qui détruit entierement le produit à diviſer $0 + mn - nn$: Ainſi je ſuis aſſuré que $m + n$ eſt le quotient de $mm - nn$, diviſé par $- mm - nn$. Lors que dans la grandeur à diviſer on ne trouve aucune des lettres du diviſeur; c'eſt une marque qu'on ne peut faire cette diviſion qu'en plaçant au deſſus d'une petite ligne la grandeur à diviſer, & le diviſeur au deſſous: ainſi diviſant $bd + pq$ par $r + s$ le quotient ſera $\frac{bd + pq}{r + s}$.

Je ne donne pas plus d'exemples de toutes ces operations, parce que je veux que mon Ouvrage ſoit court. Je ne mets que des exemples faciles, écrivant pour ceux qui commencent, & qui peut-eſtre n'auront point de Maîtres pour les aider. S'ils entendent mon Livre, ils ſeront capables d'entendre

ſans

sans peine les Livres où l'on trouve des exemples de calculs par lettres qui soient plus longs, & plus difficiles que ceux que je propose. Pour les Maîtres qui voudront bien se servir de cet Ouvrage, ils doivent exercer leurs Disciples, en leur donnant plusieurs exemples.

Il n'est pas necessaire que j'avertisse que dans le calcul par lettres il n'en est pas comme des chifres, dont la valeur dépend du rang où ils sont placez. Dans ce nombre 26, *le premier de la droite à gauche ne vaut que* 6 *unitez, & le second vaut* 2 *dixaines. Si je les changeois de place, alors dans* 62, *le premier chifre* 2 *ne vaudroit que* 2 *unitez. Mais* ab *&* ba, *valent également;* a *vaut autant dans la derniere, que dans la premiere place. Il est évident que lors qu'on ajoûte deux grandeurs l'une à l'autre, ou qu'on les multiplie l'une par l'autre, par quelque ordre que se fassent ces operations, la somme ou le produit doit être le même, vingt sols & un écu, ou un écu avec vingt sols font une même somme. Trois par six font* 18, *comme six par trois font encore* 18 *Ainsi* a + b *est la même chose que* b + a, *&* ab *la mesme chose que* ba. *Cela est évident, pour peu d'attention qu'on ait à ce qu'on lit ici. Si on l'a bien compris, on concevra tout l'artifice de ces operations; & de soi-même, on appercevra ce qu'il faudroit faire lors que les grandeurs sont encore plus composées.*

C'est à Descartes que nous devons cette Arithmetique par lettres, comme on la pratique aujourd'hui, & que je viens de l'enseigner. François Schooten l'ayant expliqué à Erasme Bartholin, celui-ci l'a mise par écrit, & a composé un Livre, qui porte pour titre Marhematique Universelle, ou Introduction à la Geometrie de

Des-

Descartes. *Je renvoye à ce Livre comme à la source, en ce qui regarde le calcul par lettres; on y trouvera grand nombre d'exemples qui donneront lieu de s'exercer, & de se perfectionner dans ce calcul.*

ELEMENS DES MATHEMATIQUES OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE SECOND.

SECTION PREMIERE.

Des differentes Puissances ausquelles on peut élever une Grandeur, selon qu'on l'augmente par l'Addition, ou par la Multiplication.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que Puissance *d'une Grandeur.*

NOus avons vû que les premieres proprietez de la Grandeur, c'est qu'à une Grandeur on en peut ajoûter une autre, ou en retrancher les Grandeurs qui sont plus petites; *p. 19.*

qu'on

qu'on la peut multiplier par une autre Grandeur ; & qu'enfin elle peut être divisée dans les parties qu'elle contient.

Lors qu'on traite un sujet, il ne s'agit pas toûjours de rechercher des proprietez fort cachées. Il faut considerer celles qui sont les plus simples, & que l'idée ou notion naturelle du sujet presente à l'esprit. Il y a une merveilleuse simplicité dans toute la nature : les premiers principes de toutes choses sont simples ; & ce qui rend la recherche des Sciences difficile, c'est qu'on ne commence pas par les premiers principes ; qu'on ne les suit pas : ou qu'on ne tire pas des premieres connoissances tout ce qu'on en peut déduire. La simplicité des premieres connoissances fait qu'on les méprise.

Evitons ce défaut ; & avant que de rechercher d'autres proprietez de la Grandeur que celles que nous avons déja considerées, voyons si celles dont nous avons parlé ne peuvent point encore suffire pour nous faire comprendre bien des choses qui paroissent de grands mysteres. Tout ce qu'il y a au monde ne se fait que par addition, & multiplication de parties. Selon que les élemens sont ajoûtez, sont multipliez & sont combinez ou joints les uns avec les autres, ils composent differens êtres. Selon aussi qu'on ajoûte les grandeurs, qu'on les multiplie, qu'on les combine, on produit differentes especes de grandeurs.

L'usage autorisé par ceux qui écrivent sur les Mathematiques, nomme *Puissance* ce qu'une grandeur peut devenir, selon qu'elle est multipliée ; & ce sont particulierement les differentes manieres de multiplier une grandeur qui en font les differentes especes, qu'on appelle Puissances. Ainsi il est évident, que puisque nous devons encore nous arrêter ici à considerer les premieres proprietez de

la

la grandeur, la methode veut que nous parlions ici des Puissances, & en même temps de leur resolution; c'est à dire, que nous examinions comment on peut élever une grandeur à un certain degré de puissance, en la multipliant de telle & telle maniere; & comment, lors qu'une grandeur d'une telle puissance est donnée, on peut par la division la décomposer, pour ainsi dire, & la resoudre dans les premieres parties dont elle a été composée.

CHAPITRE II.

Explication ou définition des termes dont on se doit servir, & des differentes Puissances ausquelles une Grandeur peut être élevée.

I.

UNe grandeur qui est faite par la multiplication de deux ou de plusieurs grandeurs, s'appelle une Grandeur de plusieurs dimensions. I.

Ainsi la grandeur qui est marquée par ce signe *bc*, est une grandeur de deux dimensions; car ce signe veut dire que *b* a été multiplié par *c*. La grandeur *bcd* est de trois dimensions; car elle est faite de la multiplication de ces trois grandeurs *b*, *c*, *d*.

II.

On appelle proprement Puissance *ce qu'une grandeur devient, lors qu'on la multiplie une, ou plusieurs fois par elle-même.*

Quoy qu'une grandeur, selon qu'elle est multipliée non seulement par elle-même mais encore par toute autre grandeur, fasse differentes especes de grandeurs, neanmoins parce que celles qui se font par une même multiplication reïterée, sont

plus

plus considerables, on n'appelle *Puissance* d'une Grandeur, que ce qu'elle peut devenir quand elle est multipliée une ou plusieurs fois par elle-même: & parce que, comme je le viens de dire, ces grandeurs sont les plus considerables; c'est pour cette raison que ce second Livre porte pour titre *Des Puissances*, quoy qu'on y traite encore des autres Grandeurs qui reçoivent differens noms, selon qu'elles sont ajoûtées ou multipliées.

III.

3 *On appelle premiere Puissance, deuxiéme Puissance, troisiéme Puissance, &c. un certain nombre de multiplications réiterées de la même Grandeur. Ces Puissances se nomment aussi Degrez.*

Ainsi, la premiere Puissance de b, ou le premier Degré de b; c'est b même. La deuxiéme Puissance ou second Degré, c'est bb; c'est à dire b, multiplié par b. Nous avons vû que pour abreger, au lieu de repeter plusieurs fois une même lettre pour marque qu'elle a été multipliée par elle-même, on ne la marque qu'une fois, mais on y joint ensuite un petit chifre, qui marque combien de fois elle a été multipliée par elle-même. Au lieu de bb, on peut donc mettre b^2. La troisiéme Puissance ou le troisiéme Degré de b sera bbb, ou b^3; la quatriéme $bbbb$, ou b^4; la cinquiéme b^5, la sixiéme b^6; ainsi de suite à l'infini.

4 Nous avons vû Liv. I. n. 26. que le zero ou le neant pouvoit se considerer comme le commencement de toute grandeur: son premier degré, c'est quand elle est quelque chose.

Soit x une grandeur, quand elle n'a que le neant, ou qu'elle n'est multipliée que par zero, on peut dire que $x^0 = zero$. Son premier degré ou premiere puissance, c'est donc x^1; son second degré, ou seconde puissance, c'est x^2; son troisiéme degré,

x^3,

x^3. Si x est une ligne, & qu'on la considere dans son premier point, lors qu'elle n'a rien ou presque rien, c'est à dire qu'elle n'a rien de sensible, on peut la nommer x^0. Quand elle est quelque chose, que c'est une simple ligne, ce sera x^1. Si on la conçoit disposée avec elle-même, de sorte qu'elle fasse une figure qui soit un quarré, alors c'est x^2. Si on la conçoit s'élevant sur ce même quarré, & formant comme un dez à joüer, c'est x^3.

Euclide avec les anciens Mathematiciens, comparoient le point des Geometres (c'est à dire une grandeur qni n'a aucune dimension) avec l'unité: ce qu'ils ne devoient pas faire. C'est le *zero* de l'Arithmetique, qui répond au *point* de la Geometrie; c'est cette erreur qui leur a fait appeller *premiere Puissance*, ce que nous appellons *seconde Puissance*. Ainsi bb est, selon eux, une premiere puissance, qui dans une maniere de parler plus juste, & qui aujourd'huy est la plus usitée, s'appelle une seconde Puissance. b^1 est la premiere, & bb ou b^2 est la seconde; ce qu'il faut observer pour distinguer l'ancien langage d'avec le nouveau.

I V.

Les Grandeurs, par la multiplication desquelles une grandeur de plusieurs dimensions a été produite, sont nommées les Racines de cette grandeur. 5

La grandeur bxz ayant été faite par la multiplication de ces trois grandeurs b, x, z, ces trois grandeurs sont appellées les Racines de bxz. Ce nombre 24 est fait de 6, multiplié par 4. Ces deux nombres 6 & 4 sont les racines de ce nombre 24.

V.

On appelle Plane ou de deux Dimensions une grandeur 6

deur qui est faite de deux grandeurs, multipliées l'une par l'autre.

La grandeur *bx* est une grandeur *plane* ou de deux dimensions. Ce nombre 12 sera un nombre plan ou de deux dimensions, si on conçoit qu'il est fait de ces deux nombres 2 & 6 multipliez l'un par l'autre.

VI.

7 *Une grandeur plane ou de deux dimensions est dite quarrée, lors que ses deux racines ou ses deux dimensions sont égales; ou ce qui est la même chose, lors qu'elle est faite d'une grandeur multipliée par soy même.*

Ainsi *bb* est une grandeur *quarrée*, ou un *quarré*; ses deux racines *b* & *b* étant égales. 16 est un nombre quarré, parce que ce nombre est fait de deux nombres égaux multipliez l'un par l'autre, sçavoir de 4 multiplié par 4, ou du même nombre 4 multiplié par lui-même, lequel nombre 4 est appellé la racine quarrée du nombre quarré 16.

VII.

8 *Le quarré est le second degré ou la seconde puissance.*

Nous venons de dire que *bb* ou b^2 est la seconde puissance de *b*; or *bb* est fait de *b* par *b*, ainsi *bb* est une grandeur quarrée.

VIII.

9 *Une grandeur de trois dimensions, ou qui est faite de la multiplication de trois racines est appellée Solide.*

Ainsi *bcd*, qui a trois dimensions, & qui est fait par la multiplication des trois racines *b*, *c*, *d* est une grandeur solide. Ce nombre 36 sera appellé nombre Solide, si on conçoit qu'il est fait de ces trois nombres 2, 6, 3, qui étant multipliez l'un par l'autre font 36.

IX.

IX.

Cube ou grandeur cubique, est une grandeur solide dont les trois racines ou dimensions sont égales; ou ce qui est la même chose, une grandeur cubique est celle qui est faite premierement a'une même grandeur multipliée par elle-mesme; & en second lieu, de ce produit multiplié par cette mesme grandeur. 10

Ainsi *bbb* est une grandeur cubique, ses trois dimensions ou racines *b*, *b*, *b* étant égales. Ce nombre 27 se peut nommer cube, si on considere que 27 est fait de ces trois nombres égaux 3, 3, 3; ou de ce seul nombre 3 multiplié premierement par luy même, ce qui fait le nombre quarré 9, & ensuite de ce quarré multiplié par 3. On appelle ce nombre 3, Racine cubique de 27.

X.

Le cube est la troisiéme puissance. 11

Ainsi b^3 qui est la troisiéme puissance de *b* est un cube, puisque b^3 qui est la même chose que *bbb*, est fait de trois racines égales.

XI.

Un quarré de quarré est une grandeur qui a pour sa racine une grandeur quarrée, ou ce qui est la mesme chose, une grandeur qui est faite d'un quarré multiplié par un quarré. 12

Ainsi *bbbb* est une grandeur quarrée de quarré, car elle est faite de *bb* quarré, multiplié par le quarré *bb*. Ainsi comme un quarré a deux dimensions, une grandeur quarrée de quarré a quatre dimensions.

Ce nombre 16 peut être consideré comme un nombre quarré de quarré; car la racine quarrée de 16 est 4, qui est un nombre quarré, dont la racine est 2; ainsi ce nombre 16 est fait d'un quarré, multiplié par un quarré, sçavoir de 4 par 4.

Secundum varias multiplicationes, & quas numeros facitis concipit, varie denominatur.

XII.

XII.

13 *Le quarré de quarré est la quatriéme puissance.*

b^4 est la quatriéme puissance. Or b^4 ou *bbbb* est fait de quatre racines égales, ou de *bb* quarré multiplié par *bb*; ce qui fait *bbbb*; par consequent b^4, selon la définition precedente, est un quarré de quarré.

XIII.

14 *Un quarré-cube est une grandeur quarrée, qui a pour sa racine un cube.*

Ainsi ce nombre 64 sera un quarré cube, si on conçoit ce nombre 64 comme un quarré dont la racine est 8; car 8 par 8 fait 64. Or 8 sera aussi un cube, en le considerant fait de 2 multiplié par luy-même, ce qui fait 4: & derechef 4 par 2, ce qui fait 8. Ainsi 64 ayant pour racine quarrée un cube, c'est un quarré cube.

XIV.

15 *Le quarré cube a six dimensions; ainsi c'est la sixiéme puissance, ou sixiéme degré.*

Car b^6 on *bbbbbb* est un quarré fait de *bbb* par *bbb*, laquelle grandeur *bbb* est un cube.

Une grandeur est reconnuë pour quarrée, non seulement quand elle est exprimée par deux mesmes lettres, comme bb, *mais aussi quand on peut partager en deux parties égales les lettres qui composent cette grandeur, en sorte que les mesmes lettres se trouvent en l'une & l'autre partie: ainsi* bbccdd *est une grandeur quarrée, parce qu'elle peut se diviser en* bcd, *&* bcd *qui se multipliant font* bbccdd. *Il en est de mesme des grandeurs cubes.*

Le mesme nombre peut recevoir differens noms, selon que l'on veut concevoir qu'il est fait par telles & telles multiplications. 64 sera appellé Plan, si on le considere fait de 32 multiplié par 2; quarré, si on le veut concevoir fait de 8 multiplié par

luy

luy mesme. Il peut aussi estre appellé Cube ; car ce nombre 64 peut estre fait de 4 multiplié par 4, ce qui fait 16, & de 16 multiplié par 4 : ainsi il est cube par la définition des nombres cubes.

Quoi qu'une Grandeur ne soit exprimée que par une seule lettre, on peut la concevoir de tant de dimensions qu'on voudra ; mais pour marquer ces dimensions il faut joindre à cette lettre le chifre 1, autant qu'il le faudra ; ce qu'il est necessaire de faire quand on veut comparer deux grandeurs, qui n'ont pas autant de lettres les unes que les autres : ainsi voulant comparer x *avec* bb, *pour concevoir dans* x *deux dimensions, comme* bb *en a deux, je place* 1 *devant* x *en cette sorte* 1x. *Pour lors* 1x *&* bb *sont deux grandeurs planes : cependant* 1x *ne vaut pas davantage que* x, *car l'unité n'augmente point la grandeur qu'elle a multipliée.*

Prenez bien garde que toute grandeur quarrée n'est pas un nombre quarré. On appelle nombre quarré, celui qui est fait de la multiplication d'un nombre par soi mesme, comme 9 est un nombre quarré qui est fait de 3 multiplié par 3. C'est pourquoi 20 n'est pas un nombre quarré ; parce qu'aucun nombre, multiplié par lui-mesme ne peut faire 20. Ainsi si je suppose que 20 est égal à bb, *je pourrai bien appeller* bb *une grandeur quarrée, mais non pas un nombre quarré. Il en est de mesme des nombres cubes.*

CHAPITRE III.

Maniere ancienne d'exprimer les Puissances. La nouvelle maniere est plus nette & plus aisée.

C'Est particulierement dans l'expression des puissances, que consiste ce qu'on appelle l'*Algebre* : 16

gebre: ainſi ce ſont ces expreſſions qui font l'obſcurité ou la clarté de cette Science, ſelon qu'elles ſont plus embaraſſées ou plus ſimples. Voyons quelles étoient autrefois les expreſſions de l'Algebre.

Les anciens Mathematiciens ſe ſont ſervis de quelque eſpece d'Algebre, comme nous l'avons vû. On ne peut point exprimer avec les nombres une grandeur inconnuë; cependant pour la trouver, il la faut marquer. Il n'eſt donc pas poſſible que ces Mathematiciens, qui ont découvert tant de choſes, n'ayent eu des ſymboles ou certains ſignes pour exprimer celles qu'ils cherchoient avant qu'ils les connuſſent. Nous ne ſçavons pas quels étoient ces ſymboles. C'eſt la maniere de ſe ſervir de ces ſymboles ou ſignes, pour marquer une choſe qu'on ne connoît point, qu'on appelle *Algebre*, qui pour cela eſt nommée *Symbolique* ou *Specieuſe*; parce que le ſigne dont elle ſe ſert preſente l'eſpece ou la ſorte de choſe dont il eſt queſtion. Les Italiens nomment *Coſa*, ce que nous appellons *Choſe*: ainſi ils appellent nombres *Coſſiques* les ſignes Algebraïques, qui repreſentent les choſes, comme nous l'avons déja remarqué. Or on ne ſe ſervoit autrefois de ces ſignes, que pour marquer les racines & les puiſſances.

Les Italiens regardoient la racine d'une grandeur comme la choſe même: ainſi *coſa* & *racine* ont la même ſignification chez eux. Ils ont nommé *Cenſo* ou *Zenzo*, c'eſt à dire *Revenu*, *Rente*, la puiſſance quarrée qui vient de ſa racine multipliée par elle-même. Pour marquer la *coſa* ou la *racine*, ils ſe ſervoient de la lettre *N*, ou de la lettre *R*. Pour marquer le quarré, ils employoient la lettre *Q*, par où commence ce mot *Quarré*, ou ils ſe ſervoient de la lettre *Z*, parce qu'ils nommoient *Zenzo* cette puiſſance. Ils ont ainſi marqué le cube

avec

avec un *C*, & avec *S* le sursolide. On voit dans leurs Livres d'Algebre d'autres caracteres fort bizarres, qui sont faits des lettres italiques *r*, *z*, *c*, *s*, par où commencent ces noms, *racines*, *zenzo*, *cube*, *sursolide*.

On ne se sert plus de ces signes, depuis qu'on a trouvé l'Arithmetique par lettres. On marque également avec elles les grandeurs connuës & inconnuës; ainsi il n'y a plus cette confusion de differens signes, de chifres, & de ces nombres qu'on nommoit *Cossiques*. Seulement on distingue les grandeurs inconnuës en se servant pour les exprimer, des derniers caracteres de l'Alphabet *x*, *y*, *z*. Pour les puissances, elles se marquent fort simplement, ajoutant à la lettre qui est le signe d'une grandeur, un petit chifre qui indique le degré de la puissance. Ainsi x^1 est une racine, x^2 un quarré, x^3 un cube, x^4 une quatriéme puissance, x^5 une cinquiéme, x^6 une sixiéme. Ce qu'on marquoit autrefois ainsi *AR*, *AQ* ou *AZ*, *AC*, *AQQ*, *AS*, *AQC*, ce qui veut dire racine *A*, son quarré, son cube, son quarré de quarré, le sursolide, le quarré cube Nous n'avons pas besoin de ces termes, non plus que de ces signes. Ceux dont nous nous servons sont simples, & font un langage clair & abregé, comme on le voit dans cet exemple,

$$xx = bb + 2bd + dd,$$

ou

$$x^2 = b^2 + 2bd + d^2.$$

Cette expression tient lieu des paroles suivantes *Le quarré de la grandeur inconnuë* x *est égal aux deux quarrez des grandeurs connuës* b *&* d; *& outre cela, il est égal à deux fois un plan fait des racines* b *&* d *de ces deux quarrez* bb *&* dd. Cette expression si courte est vive : les choses y

 sont

ſont marquées clairement : on voit ce qu'elles ſont; que xx eſt un quarré, que bd eſt un plan, & la marque de l'égalité = montre qu'on ſuppoſe que xx eſt égal à $bb + 2bd + dd$.

CHAPITRE IV.

De quelques autres eſpeces de Grandeurs que les differentes manieres d'ajoûter & de multiplier produiſent.

17 COmme on peut multiplier en differentes manieres une grandeur, & l'ajoûter à elle-même ou avec d'autres, les differentes eſpeces de grandeur que produiſent ces differences ſont infinies. Il ſuffit d'indiquer les plus conſiderables de ces eſpeces; car je ne prétends pas épuiſer cette matiere, cela n'eſt pas poſſible.

On diſtingue les grandeurs numeriques, c'eſt à dire les grandeurs qui s'expriment avec des nombres en pluſieurs ordres. Voila les définitions qu'en donne Paſchal dans ſon Traité de l'uſage du Triangle Arithmetique, où il explique leurs proprietez.

Il appelle nombres du premier ordre les ſimples unitez. 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

Nombres du ſecond ordre, les naturels qui ſe forment par les additions des unitez.

1, 2, 3, 4, 5, &c.

Il appelle nombres du troiſiéme ordre, ceux qui ſe forment par l'addition des naturels. On nomme ceux-là Nombres Triangulaires.

1, 3, 6, 10, &c.

Dans cet ordre le ſecond terme, ſçavoir 3, égale la ſomme des deux premiers naturels, qui ſont 1 & 2, le troiſiéme qui eſt 6, égale la ſomme des trois premiers naturels 1, 2, 3, &c.

Nombres du quatriéme ordre ſont ceux qui ſe for-

forment par l'addition des triangulaires, qu'on appelle Pyramidaux.

1, 4, 10, 20, &c.

C'est à dire, que le troisiéme des pyramidaux, qui est 10, égale la somme des trois premiers triangulaires, sçavoir de 1, 3, 6.

Les nombres du cinquiéme ordre sont ceux qui se forment par l'addition des pyramidaux, ausquels on a donné le nom de Triangulo-triangulaires.

1, 5, 15, 35, &c.

Les nombres du sixiéme ordre sont ceux qui se forment par l'addition des precedens.

1, 6, 21, 56, 126, 252, &c.

Et ainsi à l'infini.

Selon que les nombres continus se multiplient les uns les autres, ils ont differens noms. Les nombres continus sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, & les autres qui suivent. Or on distingue en differentes classes ces produits; par exemple, ceux qui seront produits de deux nombres qui se suivent, font la premiere classe; ainsi 20, qui est fait de 4 multiplié par 5, & 72 qui est fait de 8 multiplié par 9, sont de la premiere classe ou premiere espece.

Les nombres qui sont faits de la multiplication de trois nombres de suite qui se multiplient, sont de la seconde espece; ainsi 120 qui est fait de la multiplication de ces trois nombres 4, 5, & 6 qui se suivent, & 720 qui est fait de ces trois nombres 8, 9, & 10 sont de la seconde espece; ainsi de suite à l'infini: ce qui fait voir qu'on peut inventer une infinité de differentes especes de nombres. Les premiers élemens d'une Science doivent être courts & faciles; il ne m'est donc pas permis de renfermer ici tout ce que je pourrois y faire entrer. Je rendrois ces élemens trop difficiles & trop longs, si j'entreprenois de parler de toutes ces especes de grandeurs,

SECTION SECONDE.

DE LA COMPOSITION ET DE LA NATURE DES PUISSANCES.

CHAPITRE PREMIER.

Axiomes ou Demandes touchant la composition & la nature des Puissances.

AXIOME PREMIER OU DEMANDE PREMIERE.

18 *LE tout & toutes ses parties étant multipliées par un mesme multiplicateur, les produits de ces multiplications sont égaux.*

$b + d$ sont les parties de z, cette proposition dit que si $b + d$ & z sont multipliez par une même grandeur, comme par x, les produits seront égaux $bx + dx = zx$. Ce qui est évident; car puisque le tout & toutes les parties prises ensemble ne sont qu'une même chose, en multipliant le tout ou toutes les parties, on doit faire un même produit.

AXIOME SECOND OU DEMANDE SECONDE.

19 *Multipliant deux grandeurs l'une par l'autre, dans quelque ordre qu'on le fasse, elles feront un mesme produit.*

Multipliant a par b, soit que l'on commence par a ou par b, on fait le même produit : ab est la même chose que ba. 5 fois 6, & 6 fois 5 sont toûjours

30

30. Cette proposition ne peut pas s'accommoder à tous les chifres; car comme c'est leur disposition qui fait leur valeur, 52 & 25 ne sont pas une même chose, comme *ab* & *ba*. Cet Axiome ne s'entend donc que des Grandeurs en elles-mêmes, ou de leurs expressions par lettres. Cinq écus multipliez par six écus, ou six écus multipliez par cinq écus, ne feront que trente écus.

AXIOME III. ou DEMANDE TROISIE'ME.

Multipliant trois grandeurs l'une par l'autre dans quelque ordre qu'on le fasse, elles feront un même produit. 20

Que l'on multiplie les trois grandeurs *a*, *b*, *c*, les unes par les autres, les produits *abc*, *bac*, *cba*, *acb*, *bca*, *cab*, ne sont qu'une même chose. Par quelque ordre qu'on multiplie ces trois nombres 3, 5, 6, ils feront toûjours 90. Ainsi si l'on multiplie quatre, cinq grandeurs, par quelque ordre qu'on le fasse, elles font un même produit.

AXIOME IV. ou DEMANDE QUATRIE'ME.

Les produits de differentes multiplications sont égaux, s'ils sont faits de grandeurs égales & de multiplicateurs égaux. 21

Il est évident que des grandeurs égales multipliées également, c'est à dire prises également tant de fois, doivent faire des produits égaux.

On suppose que les Regles qu'on a données pour multiplier sont bonnes, & qu'ainsi lors qu'on les a suivies, on n'a point fait d'erreur. Pour entendre les démonstrations des Theorêmes qu'on va proposer, il n'y a qu'à faire les multiplications qu'il faut faire, & ensuite ouvrir les yeux pour voir ce que les produits de ces multiplications contiennent.

Pour composer les Puissances, c'est à dire pour éle-

ver une Grandeur à quelque Puissance qu'on veuille, il n'est question que de la multiplier selon qu'elle le doit estre par sa définition Par exemple, pour élever b + d *au second dégré, il faut multiplier* b + d *par* b + d. *Selon la regle, le produit de cette multiplication sera* bb + 2bd + dd, *le quarré de* b + d. *Ainsi pour avoir le cube de* b + d, *il faut multiplier le quarré de* b + d; *qui est* bb + 2bd + dd *par* b + d; *le produit* $b^3 + 3bbd + 3bdd + d^3$, *sera le cube de* b + d.

Soit donné cette Grandeur b — d *pour avoir son cube, je multiplie* b — d *par lui-mesme pour avoir son quarré, qui est* b^2 — 2bd + dd, *que je multiplie par la mesme Grandeur* b — d. *Je ferai l'operation au long, afin de m'exercer. Je multiplie donc* 1°, b^2, *ou* bb *par* b, *ce qui me donne* bbb *ou* b^3. 2°. *Je multiplie* — 2bd *par* b. *Or comme il faut suppléer le signe* + *devant une grandeur qui n'a aucun signe exprimé, c'est comme si je multipliois* — 2bd *par* + b; *partant puisque* — *en* + *donne* —, *le produit est* — 2bbd. 3°. *Je multiplie* + dd *par* b; *le produit est* ddb.

Ensuite je multiplie le mesme quarré b_2 — 2bd + dd *par* — d. 1°. b^2. *ou* + bb *par* — d, *ainsi comme* — *en* + *donne* —, *le produit est* — bbd. 2°. — 2bd *par* — d; *& puisque* — *en* — *donne* +, *ce produit sera* + 2bdd. 3°. *Je multiplie* + dd *par* — d; *&* — *en* + *donnant* —, *ce produit est* — d^3. *Ainsi le cube de* b — d *est* b^3 — 3bbd + 3bdd — d^3. *Il n'est point necessaire que je parle de la Composition des autres Puissances, il n'y a qu'à les multiplier selon leurs définitions.*

CHAPITRE II.

Propositions touchant la Composition des Puissances.

PREMIERE PROPOSITION. 1. L. 11. Eucl.

LEs parties b *&* d *de la grandeur* x, *ayant été* 22
multipliées par z, *elles font un plan ou produit égal à celui de la grandeur entiere* x, *multipliée par le mesme multiplicateur* z; *où le plan fait de la grandeur entiere* x *par* z, *est égal au plan fait des parties* b *&* d *par* z.

Il faut démontrer que $zb + zd = xz$. Les parties $b + d$ sont égales à la grandeur entiere x: Donc, *par le quatriéme Axiome cy dessus*, les produits $zb + zd$ & xz étant faits de grandeurs égales, doivent être égaux.

SECONDE PROPOSITION.

Le plan ou le produit de deux grandeurs entieres x *&* z, *multipliées l'une par l'autre, est égal au plan ou produit fait de* b + d *parties de* x, *multipliées par* f + g *parties de* z. 23

C'est à dire, que $xz = fb + fd + gb + gd$. On suppose que $d + b = x$, & $f + g = z$: Donc *par le quatriéme Axiome cy-dessus*, le produit de $b + d$ par $f + g$, doit être égal à celui de x par z.

TROISIE'ME PROPOSITION. 12. L. 11. Eucl.

La grandeur z *ayant été divisée en ses parties* 24
b *&* d, *le quarré de la toute* z *est égal aux plans faits de la toute* z, *multipliée par chacune de ses parties* b *&* d.

Le quarré de la toute z est zz, les plans de z par b & par d sont $zb + zd$. Or *par le premier*

Axiome, la toute z, & ses parties $b + d$, ayant été multipliées par le multiplicateur commun z, doivent faire des produits égaux : Donc $zz = zb + zd$; ce qu'il falloit démontrer.

Quatrie'me Proposition.

25 *Deux plans égaux ajoûtez dans une somme, sont égaux à un plan fait du double de l'une de leurs racines, multipliée par l'autre.*

Soient ces deux plans égaux by & by, la grandeur m est le double de b ; ainsi $b + b$ sont les parties de m : Donc, *par le premier Axiome*, le plan my est égal aux plans $by + by$; ce qu'il falloit démontrer.

3. L. II. Eucl.

Cinquie'me Proposition.

26 *La grandeur* z, *& ses parties* b *& d étant multipliées par* b *l'une des parties, le produit de* z *par* b *est égal au quarré de* b, *plus le plan de* b *par l'autre partie* d.

Il faut démontrer que $zb = bb + bd$. Les parties de la grandeur z, sont $b + d$: Donc, *par le premier Axiome*, en multipliant z & $b + d$ par le même multiplicateur b, les produits seront égaux. $zb = bb + bd$, qui est ce qu'il falloit prouver : car, comme vous le voyez, le plan zb est égal au quarré de b, qui est bb ; plus le plan de b multiplié par l'autre partie d.

4. L. II. Eucl.

Sixie'me Proposition.

27 *Le quarré de la grandeur* z *est égal aux quarrez de chacune des parties de* z, *plus* 2 *fois le plan de ces parties.*

Les parties de z sont $b + d$. En multipliant ces deux grandeurs z & $b + d$ par des multiplicateurs égaux, les produits seront égaux *par le qua-*

quatriéme Axiome. Ainsi puisque z est égal à $b + d$, le produit de z par z, qui est zz, sera égal au produit de $b + d$ par $b + d$, qui est $bb + 2bd + dd$; ainsi $zz = bb + 2bd + dd$. Or vous voyez que $bb + 2bd + dd$ contient les quarrez de b & de d parties de z, & deux fois le plan bd fait de ces deux parties b & d.

Je retranche de cette Edition plusieurs Theorêmes qui sont du second Livre d'Euclide, que j'avois démontré dans l'Edition precedente. On les trouvera dans mes Elemens de Geometrie dans leur place. Ici ils sont inutiles. Ceux qui ont fait attention à ce qu'ils viennent de lire, ont un chemin ouvert pour trouver une infinité de nouveaux Theorêmes. Car, par exemple, si $z = 3b$, *le quarré de* z *étant égal au quarré de* $3b$; $zz = 9bb$. *on peut proposer ce Theorême*: Le quarré de la grandeur entiere est égal à neuf fois le quarré de sa troisiéme partie. *La démonstration est évidente. On pourroit faire une infinité de nouveaux Theorêmes semblables; ce qui fait voir la fecondité de cette methode.*

PROBLEME PREMIER.

Connoissant un nombre plan avec l'une de ses racines, connoître son autre racine. 28

Je propose ce Problême sur les nombres; car ce n'est pas une question, dans le calcul par lettres: on voit d'abord que les racines de bd sont b & d.

Soit proposé ce nombre plan 48, avec l'une de ses racines 24; pour trouver la seconde racine, c'est à dire pour trouver un nombre qui multipliant 24 fasse 48, & qui soit ainsi la seconde racine du nombre plan 48; pour trouver, dis-je, cette racine, je divise 48 par 24, & le quotient 2 de cette di-

vision sera la racine que je cherche, puisque ce quotient 2 multipliant 24, doit faire 48. Liv. I. n. 21.

PROBLEME SECOND.

29 *Connoissant un nombre solide avec deux de ses racines, ou le plan de ses deux racines, connoître la troisiéme racine.*

Le solide donné est 36, les deux premieres racines sont 3 & 4, dont le plan ou produit est 12; il faut diviser 36 par 12, le quotient de cette division qui est 3 sera la racine que l'on cherche; car cette racine doit être un nombre qui multipliant 12, fasse 36. Or Liv. I. n. 21. ce quotient multipliant 12, doit produire 36: il est donc la troisiéme racine de ce solide.

SECTION TROISIE'ME.

DE LA RESOLUTION DES PUISSANCES, OU DE L'EXTRACTION DE LEURS RACINES.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'eſt que Reſolution d'une Puiſſance, ou Extraction de ſa Racine. Ce que c'eſt que Racine.

RESOUDRE une Puiſſance, c'eſt trouver la Grandeur qui l'a compoſée en ſe multipliant. L'on ne conſidere ici que les Puiſſances qui ſont faites par la multiplication d'une certaine grandeur qui eſt multipliée tant de fois, ſelon le degré de la Puiſſance où l'on veut l'élever. La Grandeur qui produit cette Puiſſance en eſt la racine. C'eſt dans l'extraction de ces racines que conſiſte la reſolution des Puiſſances. Elles ſont dites quarrées, cubiques, &c. ſelon qu'elles ſont racines de quarrez, de cubes. Ainſi extraire la racine quarrée de *bb*, c'eſt trouver une grandeur qui multipliée par elle-même, faſſe le quarré *bb*. Extraire la racine cube de *bbb*, c'eſt trouver une Grandeur qui, multipliée cubiquement, faſſe le cube *bbb*.

Il eſt évident que quand les Grandeurs ſont petites, ou qu'elles s'expriment avec peu de lettres

comme *bb*, *bbb*, on voit tout d'un coup que la racine quarrée de *bb* est *b*; que la racine cube de *bbb* est *b*. Il en est de même des nombres quarrez, cubes; on voit tout d'un coup quelles sont leurs racines, quand ils sont petits. Il est facile de voir que la racine quarrée de 4 est 2, que celle de 9 est 3; car on apperçoit que 2 multiplié par 2 fait 4, & que 3 multiplié par 3 fait 9. Il en est de même des nombres cubes. 8 est un nombre cube, dont la racine est 2. On apperçoit aisément que ce nombre multiplié deux fois par lui-même fait 8.

Par consequent il ne seroit pas necessaire de chercher des regles pour l'extraction des racines, si tous les nombres étoient petits. Quand les nombres sont grands, comme est celui-ci 293764, on ne voit pas tout d'un coup quelle est sa racine quarrée, c'est à dire quel peut être le nombre qui, multiplié par lui-même, produise 293764. Or on le peut connoître en le cherchant par parties, comme on le va voir. L'artifice dont on se sert pour l'extraction des racines quarrées, cubiques, & de quelque puissance que ce soit, est tres-ingenieux. Je l'expliquerai avec soin. Ce qu'on va voir sera un parfait modelle de la maniere de bien ménager la capacité de son esprit, faisant en sorte qu'il ne soit pas obligé de voir trop de choses à la fois; les partageant, afin qu'il les considere par parties.

Pour ce qui est des Grandeurs de plusieurs dimensions, qui ne sont pas des quarrez, des cubes, &c il n'est pas possible d'en extraire les racines, quand leur valeur est exprimée par nombre, à moins que de connoître une de leurs racines. Quand je vois *bd*, d'abord je connois que c'est un plan fait de *b* multiplié par *d*. Quand je vois *bbd*, je connois que c'est un solide fait du quarré *bb* multiplié par *d*; mais il n'en est pas de même des nom-

nombres. On considere ce nombre 24 comme un nombre plan ; & l'on propose d'en extraire les racines. Il est évident que comme il s'agit de trouver deux nombres qui, multipliez l'un par l'autre, fassent 24, cette question se peut resoudre en differentes manieres ; c'est à dire qu'on peut assigner à 24, consideré comme un nombre plan, plusieurs racines ; car il peut être fait de 2 par 12, de 3 par 8, de 4 par 6. On peut même considerer 24 comme un nombre solide, c'est à dire fait d'un nombre plan multiplié par un autre nombre ; car 2 & 12, 3 & 8, 4 & 6 pouvant être les racines de 24, on peut concevoir que 12 est un plan dont les racines sont, ou 3 & 4, ou 2 & 6. De même 8 sera un plan, si on considere qu'il est fait de 2 & de 4 ; comme parcillement que 6 est un plan, dont les racines sont 2 & 3. Par consequent pour connoître les racines dont on conçoit déterminément qu'un plan, qu'un solide est fait, il en faut connoître une des racines, laquelle étant connuë on connoîtra facilement la seconde, comme on l'a vû ci-dessus. Lors qu'une puissance n'est pas parfaite, c'est à dire qu'elle n'a point de racine qu'on puisse exprimer, ou que si elle en a on ne la connoît point, on met devant ce signe $\sqrt{}$ qu'on appelle Signe Radical. On y ajoûte un petit chifre, qui marque de quelle puissance la grandeur qui a ce signe est la racine ; si c'est d'un quarré, d'un cube :

Ainsi $\sqrt[2]{bc}$ marque la racine d'une seconde puissance ; $\sqrt[3]{bcd}$, la racine de la troisiéme puissance, ou d'un cube ; $\sqrt[4]{}$, celle d'une quatriéme puissance. Quand il n'y a point de chifre dans le signe radical, il y faut sousentendre ce chifre 2, c'est à dire,

dire, que c'est une marque que la grandeur qui est après le signe √ est une seconde puissance, ou un quarré.

CHAPITRE II.

De l'Extraction des Racines quarrées.

31 UNe grandeur n'est proprement dite quarrée, que lors qu'elle est produite par une grandeur multipliée par elle-même. 9 est un nombre quarré, parce qu'il peut être fait par 3 multiplié par lui-même. 10 n'est pas un nombre quarré, car on ne trouve point de nombre qui, multiplié par lui-même, fasse 10. On dit de même d'une grandeur exprimée par lettres, que c'est un quarré lors qu'il est fait par les mêmes lettres multipliées l'une par l'autre. *bd* n'est pas un quarré; car on voit bien que *bd* n'est pas fait par une même lettre multipliée par elle-même, comme est *bb*, *dd*. Quand le nombre des lettres est ainsi petit, on apperçoit aisément la racine de la puissance exprimée par des lettres. Il en est de même des puissances qui sont exprimées avec des chifres. On voit d'abord que la racine quarrée de 4 est 2, que celle de 9 est 3. Or pour extraire les racines des grandes sommes, il faut connoître ces racines simples, c'est à dire celles des nombres quarrez les plus simples, comme sont les quarrez de chaque caractere. Par exemple, que le quarré de 5 est 25, & que la racine de ce nombre quarré 25 est 5. Vous voyez devant vos yeux ces racines, & ces quarrez. Sous chaque caractere simple est son quarré. Sous 6 est 36, dont 6 est la racine.

Racines;

Racines,	1	2	3	4	5
Quarrez,	1	4	9	16	25
Racines,	6	7	8	9	10
Quarrez,	36	49	64	81	100

PREMIER THEOREME.

Tout nombre quarré comme celui-ci 293764, 32.
fait de 542 *multiplié par* 542, *contient* 1°. *les quarrez de chacune de ses parties* 5, 4, 2.

2°. *Deux fois le plan de* 5 *multiplié par* 4, *ou ce qui est la même chose, un plan fait du double de* 5, *qui est* 10, *multiplié par* 4.

3°. *Deux fois le plan de* 54 *par* 2, *ou un plan fait de* 108 *double de* 54 *par* 2.

Cela s'apperçoit clairement en multipliant 542, racine du nombre proposé par 542. On le voit d'une maniere generale, en se servant de lettres. Car le produit de $b+d$ par $b+d$ est $bb+2bd+dd$. Vous voyez dans ce produit les deux quarrez de b & de d, & deux fois un plan fait de b multiplié par d.

Si on marque les trois chifres de 542 par ces trois lettres $b+c+d$, & qu'on en prenne le quarré les multipliant par elles-mêmes, on verra à l'œil ce qu'il faut prouver. Faisons l'operation entiere. Je multiplie 1°, $b+c+d$ par b, le produit est $bb+bc+bd$. 2°. $b+c+d$ par c. Le produit est $bc+cc+cd$. 3°. $b+c+d$ par d, le produit est $bd+cd+dd$. Ce qui fait $bb+2bc+cc+2bd+2cd+dd$. Vous voïez que ce produit contient 1°. Les trois quarrez des trois lettres b, c, d. 2°. Deux fois le plan de b

par

par *c*. 30. Les plans 2*cd* & 2*bd* qui sont égaux ſ̃ n. 25. au double du plan fait de $b + c$ multiplié par *d*, c'est à dire, de 54 par 2. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SECOND THEOREME.

33 *Ayant partagé un nombre quarré, tel que* 293764 *de deux en deux caracteres,*

29	37	64
C	B	A

1°. *Le quarré du premier caractere de sa racine, s'il peut être exprimé par un seul chifre, est dans la premiere place de la premiere tranche* A, *commençant de droit à gauche.*

2°. *Le quarré du second chifre est dans la premiere place de la seconde tranche* B, *s'il peut être exprimé par un seul chifre.*

3°. *Le quarré du troisiéme chifre de la racine est dans la premiere place de la troisiéme tranche* C: *Ainsi de suite.*

Pour reconnoître la verité de cette proposition, il n'y a qu'à produire un nombre quarré comme est celui-ci 293764, en multipliant 542 par 542; car vous verrez que les quarrez de 5, de 4 & de 2 sont placez où on les a marquez. Faites l'operation en suivant les regles, le quarré de 2 qui est 4 se trouvera dans la premiere place de la premiere tranche. Le quarré de 4 ne sera qu'en partie dans la premiere place de la seconde tranche, car son quarré est 16, qui demande deux chifres. Le quarré de 5 est 25, qui par la même raison ne pourra pas être marqué tout entier sous la premiere place de la troisiéme tranche.

COROLLAIRE.

34 *Un nombre quarré ayant été tranché, le nombre*

bre des tranches est égal à celui des chifres de la racine de ce quarré. Sub quolibet numero intersecto continetur □

Car le quarré du troisiéme chifre est dans la premiere place de la troisiéme tranche, lequel quarré pour grand qu'il soit, peut être contenu dans cette tranche; car 9 est le plus grand des chifres, dont le quarré 81 s'exprime par deux seuls chifres. Quand le quarré du dernier chifre est petit, la derniere tranche n'a qu'un chifre.

Troisie'me Theoreme.

Un nombre quarré tel que 29 764, ayant été partagé par tranches, comme on le vient de dire, 35
1°. le plan fait du double de 5 multiplié par 4, est entre la premiere place de la tranche C, *& de la premiere place de la tranche* B. *2°. Le plan fait du double de 54 multiplié par 2, est entre la premiere place de la tranche* B, *& la premiere place de la tranche* A.

Par la premiere proposition le nombre quarré proposé contient ces deux plans: & si on fait attention à l'operation par laquelle on produit le nombre quarré, on verra que la valeur de ces plans est placée où la proposition presente l'assigne.

Quatrie'me Theoreme.

S'il y avoit 4 caracteres dans la racine entre le premier quarré & le second quarré, commençant 36
de droit à gauche, il y auroit un plan fait du double des trois racines des trois quarrez suivans, multipliez par la racine du premier quarré.

Ce qu'on vient de dire fait appercevoir la verité de cette proposition, & en même-temps de toutes les autres qu'on peut faire quand la racine d'un nombre quarré a cinq, six, sept chifres.

PROBLEME PREMIER.

37 *Trouver la racine quarrée d'une grandeur exprimée par lettres.*

Si cette grandeur est incomplexe, comme dd, on voit d'abord que d est sa racine.

Soit cette grandeur complexe $bb + 2bd + dd$ proposée pour en extraire la racine quarrée, suivant ce qu'on vient de remarquer $\bar{s}$ n. 32. 1°. Je prens la racine quarrée de bb, qui est b, je multiplie b par b; ce qui fait bb, que j'ôte de bb, & il ne reste rien. 2°. Je divise le plan $2bd$ par $2b$, qui est le double de la racine b qu'on vient de trouver. Le quotient de cette division est d, qui est la racine du quarré dd. Ainsi je connois que la racine quarrée de $bb + 2bd + dd$ est $b + d$.

Soit cette grandeur complexe $bb - 2bd + dd$, je fais la mesme chose. Je prens la racine de bb, qui est b, par laquelle je divise le plan $-2bd$, le quotient est $-d$ qui est la seconde racine; ainsi on trouve que la racine qu'on cherche est $b - d$.

Remarquez bien que aa + ab — ab — bb, *ou* aa — bb *n'est pas une grandeur quarrée; car elle est faite de deux grandeurs inégales;* de a + b, *multiplié par* a — b. *Ainsi on n'en peut tirer la racine, qu'en mettant devant elle le signe radical* $\sqrt{}$ aa — bb.

PROBLEME SECOND.

38 *Trouver la racine d'un nombre quarré donné.*

1°. *Un nombre quarré étant proposé pour en extraire la racine, il faut le couper par tranches de deux en deux caracteres, commençant de la droite à la gauche.*

Cette premiere operation vous fera déja connoitre combien la racine du nombre proposé a de caracteres

racteres par le Corollaire de la seconde Proposition. S'il y a trois tranches, il y a trois caracteres dans la racine cherchée.

Soit donc ce nombre quarré 293764, pour en trouver la racine, 1°. Je le partage de deux caracteres en deux caracteres par tranches, ainsi

29 | 37 | 64

2°. *Il faut extraire la racine quarrée du nombre qui est contenu dans la derniere tranche, si ce nombre est quarré; & s'il ne l'est pas, du quarré qui est le plus proche.*

Cette racine sera le dernier chifre de la racine cherchée, puisque son quarré est contenu dans cette tranche, par la seconde proposition. J'extrais donc la racine quarrée de la derniere tranche 29. Ce nombre n'étant pas quarré, je prens la racine du nombre quarré qui approche le plus de 29, sçavoir 25, dont 5 est la racine. Ce caractere 5 est le dernier caractere de la racine cherchée, que je marque dans un demi cercle, comme le quotient d'une division, ainsi que vous le voyez.

29 | 37 | 64 | (5

3°. *Il faut retrancher le quarré du caractere trouvé de la premiere tranche où il est contenu; ce qui est une des preuves de l'operation.*

J'ôte ainsi le quarré de 5, qui est 25 de 29, & il reste 4.

4°. *Il faut doubler le caractere trouvé de la racine cherchée, & aprés avoir placé ce double, de sorte que le premier caractere soit placé sous le dernier chifre de la tranche precedente, il faut diviser les nombres de dessus par ce double; le quotient de cette division sera le chifre penultiéme de la racine que l'on cherche.*

Je

Je prens donc le double du caractere trouvé 5 : ce double est 10, que je place sous 43 : de sorte que le zero est sous le dernier caractere de la tranche precedente. Je divise 43 par 10; le quotient est 4, que je marque aprés 5 dans le demi cercle. Je pose aussi le même chifre 4 sous la premiere place de la même tranche, aprés 10.

4 ~~78~~ 1	37 04	64 (4

Je suis assuré que 4 est veritablement le second chifre de la racine que je cherche ; car par la troisiéme proposition, entre les quarrez des deux derniers chifres de la racine quarrée du nombre proposé, est un plan qui a pour une de ses racines le double du dernier caractere, par exemple, dans cette question, le double de 5 qui est 10, & pour l'autre racine, celle du quarré qui est contenu dans la tranche precedente. Or par le premier Probleme s̃ n. 28. en divisant le plan dont nous parlons par l'une de ses racines connuës, sçavoir 10 qui est le double de 5, le quotient de la division qui est 4, montre que la seconde racine de ce plan est 4, qui est aussi le second caractere de la racine quarrée du nombre proposé par la troisiéme proposition ci-dessus.

5°. *Il faut retrancher ce plan dont on vient de parler, des nombres où il est contenu.*

6°. *Il faut de plus ôter le quarré du caractere de la racine que l'on a trouvée.*

Prenez garde d'ôter ce quarré des nombres où il est contenu. S'il n'est exprimé que par un chifre, selon la seconde Proposition ci dessus, il est contenu dans le premier chifre de cette seconde tranche : & s'il est exprimé par deux chifres, il sera con-

contenu dans les deux chifres de cette tranche, au moins en partie.

Dans le même exemple j'ôte des nombres de dessus, le plan fait de 10, multiplié par 4 que nous venons de trouver, & le quarré de 4; disant, 4 fois 10 font 40, de 43 ôtez 40, reste 3. Ensuite disant, 4 fois 4 font 16, de 37 ôtez 16, reste 21.

4	21		
7Ø	37	64	(54
1	Ø4		

7°. *S'il y a plus de deux tranches, il faut doubler les caracteres trouvez de la racine cherchée, & aprés avoir placé ce double sous le reste du nombre proposé, de sorte que le dernier caractere se trouve sous la derniere place de la tranche dont on veut extraire la racine, il faut diviser les nombres de dessus par ce double, le quotient sera le caractere qu'on cherche.*

Puisqu'il y a donc plus de deux tranches dans le nombre proposé, je double les caracteres trouvez 54 de la racine cherchée. Je place le double de 54 qui est 108, comme il a été enseigné, sçavoir 8 sous la derniere place de la premiere tranche. Je divise 216 par 108, le quotient est 2, que je place aprés 54, & sous la premiere place de la derniere tranche.

21	Ø4	
1Ø	81	(542

8°. *Il faut retrancher ce plan dont on vient de parler des nombres de dessus: outre cela le quarré du caractere de la racine, lequel caractere on vient de connoître.*

S'il n'y a plus d'autres tranches, & qu'il ne reste

reste aucun nombre, c'est une marque que le nombre proposé étoit quarré. S'il reste quelque chose, il n'étoit pas quarré.

Je multiplie 1082 par 2, & j'ôte le produit des nombres sous lesquels 1082 sont écrits, disant 2 fois 10 font 20; de 21 ôtez 20, il reste 1. Ensuite je dis, 2 fois 8 font 16: de 16 ôtez 16, il ne reste rien: 2 fois 2 font 4, de 4 ôtez 4, il ne reste rien; ainsi le nombre proposé 293764 est un nombre quarré, dont 542 est la racine.

Voici la même extraction dans laquelle se fait la soustraction, selon la maniere que nous avons proposée Liv. I. n. 13.

4	21	00	
29	37	64	(542
1	04	87	
	19		

Soit le même nombre 293764. Je dis, la racine de 29 est 5; 5 fois 5 font 25, De 29 reste 4, que j'écris dessus.

Je double 5, ce qui fait 10, que j'écris sous le nombre proposé, ainsi que vous le voyez. Je dis: en 43 combien 10? Il y est 4, que j'écris au quotient, & sous 7; puis je multiplie 104 par 4 disant: 4 fois 4 font 16. De 17 j'ôte 16, reste 1, que j'écris dessus, & retiens 1 par memoire.

Puis 4 fois 0 est 0, avec 1 de retenu fait 1 que j'ôte de 3, reste 2, que j'écris dessus 3.

Puis 4 fois 1 fait 4, qui ôtez de 4, reste 0.

Ensuite je double 54, ce qui fait 108, que j'écris pour diviseur, & je trouve que ce double est contenu deux fois dans 216. J'écris 2 au quotient, & sous le 4; puis je dis; 2 fois 2 font 4, il ne reste rien: 2 fois 8 font 16, de 16 ne reste rien,

rien, & retiens 1 par memoire. Puis deux fois 0 est 0, avec 1 de retenu fait 1 que je soustrais, il ne reste rien, puis 2 fois 1 fait 2 que je soustrais, ainsi il ne reste rien, &c.

Le preuve de cette operation se fait en multipliant la racine trouvée 542 par elle-même; si son produit est 293764, l'operation a été bien faite.

Autre Exemple.

Ce nombre 71824, est donné pour extraire la racine quarrée.

1°. Aprés l'avoir partagé par tranches, j'extrais la racine du nombre quarré, qui approche le plus de 7. Ce nombre quarré est 4, dont la racine est 2, que je marque: Aprés j'ôte de 7 le quarré de 2 qui est 4, & il reste 3.

~~3~~	18	24	(2
~~7~~	46		

2°. Je double le caractere trouvé 2. Je place ce double qui est 4 sous 1, par lequel je divise 31, le quotient est 7; mais parce que ce quotient est trop grand, comme il est facile de l'experimenter, je ne prens pour quotient que 6 que je place aprés 2, & sous la premiere place de la seconde tranche, c'est à dire sous 8. Je multiplie 46 par 6, & j'en ôte le produit de 318, disant: 6 fois 4 font 24, que je retranche de 31, reste 7: 6 fois 6 font 36, que je retranche de 78, reste 42.

	4		
	~~7~~2		
~~3~~	18	24	(26
	46		

3°. Il ne reste plus du nombre proposé que 4224,

4224, que j'écris & que je tranche, comme vous le voyez. Je double les caracteres 26 de la racine cherchée, ce double est 52, que je place comme il a été enseigné, en écrivant 2 sous la derniere place de la premiere tranche, & je divise par ce nombre les nombres qui sont dessus. Le quotient de cette division est 8, que je mets aprés les deux caracteres déja trouvez de la racine que je cherche, & en même-temps sous la premiere place de la premiere tranche.

42	24	(268
5	28	

Je multiplie 528 par 8, je retranche le produit de cette multiplication des nombres de dessus, qui sont 4224; ce que je fais en disant, 8 fois 5 font 40; de 42 ôtez 40, reste 2: 8 fois 2 font 16, de 22 ôtez 16, reste 6: 8 fois 8 font 64, il ne reste rien. Ainsi ayant observé les Regles, je suis assuré que 71824 est un nombre quarré dont 268 est la racine.

Autre Exemple.

On propose d'extraire la racine quarrée de ce nombre 92428. 1°. Aprés l'avoir tranché j'extrais la racine de la derniere tranche où est 9, qui est un nombre quarré; cette racine est 3, que je marque à part, je prens le quarré de cette racine que j'ôte de 9, & il ne reste rien.

ø	24	28	(3

2°. Je double ce caractere trouvé 3, je pose le double qui est 6, sous le dernier caractere de la seconde tranche, qui est 2, je ne puis pas diviser 2 par 6; ainsi le second caractere de la racine cherchée est un zero. Je marque donc un zero aprés 3, & sous le premier caractere de la seconde tranche.

Je

Je multiplie 60 par zero, & cela ne fait rien; je ne puis donc rien ôter des nombres sous lesquels 60 sont placez.

24	28	(30
60		

3°. Je double 30 qui est au quotient; ce double est 60, que je place de sorte que le caractere zero soit sous la derniere place de la premiere tranche, sçavoir sous 2.

Je divise les nombres de dessus par 60, le quotient est 4, que je marque aprés 30 au quotient, & sous le premier caractere de la premiere tranche.

24	28	(304
6	04	

Je multiplie 60 par 4, disant: 4 fois 6 font 24; que je retranche du nombre de dessus 24, & il ne reste rien: 4 fois zero font zero, 4 fois 4 font 16, de 28 ôtant 16, il reste 12.

	12	
~~24~~	~~28~~	(304
~~6~~	~~04~~	

Ainsi le nombre proposé 92428 n'est pas un nombre quarré, celui qui en approche le plus est 92416, dont la racine est 304.

Nous ferons voir dans la suite que lors qu'un nombre n'est pas quarré comme 18 *ne l'est pas, il est impossible de trouver une grandeur qui, multipliée par elle même, fasse le nombre* 18.

CHAPITRE II.

De l'Extraction des Racines cubes.

39 L'Extraction de la racine cube d'un nombre qui est grand ne se fait que par parties, comme l'extraction des racines quarrées. On coupe le nombre cube proposé par tranches, & l'on ne tire la racine que d'une de ses parties qui soit un cube, dont la racine se puisse exprimer avec un seul chifre. Ainsi il faut premierement sçavoir les cubes des premiers chifres, qu'on ne peut ignorer. Vous voyez ces cubes dans cette Table.

Racines.	1	2	3	4	5
Cubes.	1	8	27	64	125
Racines,	6	7	8	9	10
Cubes.	216	343	512	729	1000

LEMME.

La grandeur b + c *étant multipliée cubiquement, son cube* bbb + 2bbc + ccb + bbc + 2ccb + ccc *ou* bbb + 3bbc + 3ccb + ccc *contient les cubes des parties* b *&* c, *& deux solides, dont le premier qui est* 3bbc *est fait du triple du quarré de la derniere racine* b, *multiplié par la premiere racine* c, *& le second* 3ccb *est fait du triple du quarré de* c, *multiplié par* b.

Cela saute aux yeux. Si la grandeur donnée étoit $b - c$, il y auroit les mêmes parties; mais avec des signes en parties contraires, comme il est évident. Le cube de $b - c$ est $b^3 - 3bbc + 3ccb - c^3$.

Si

Si la grandeur donnée avoit eu trois lettres, par exemple qu'elle eût été $b+c+d$, le cube de la toute contiendroit les cubes particuliers de ces trois lettres, sçavoir bbb, ccc, ddd: outre cela quatre solides, dont le premier seroit $3bbc$, le second $3bcc$, le troisiéme fait du triple de $b+c$, multiplié par le quarré dd: ainsi si $b+c=x$, ce troisiéme solide seroit $3xdd$. Le quatriéme solide est fait du triple du quarré de $b+c$ ou de x, qui est égal à $b+c$ & de d: ainsi ce quatriéme solide seroit $3xxd$.

CINQUIE'ME THEOREME.

Un nombre cube tel que celui-ci 160103007, 40
fait de cette racine 543 *multipliée cubiquement, contient* 1° *les trois cubes de chacun des caracteres de sa racine* 543. 2. *quatre solides, dont le premier est fait du triple du quarré de* 5, *multiplié par* 4: *& le second est fait du triple de* 5, *multiplié par le quarré de* 4: *le troisiéme est fait du triple du quarré de* 54, *multiplié par* 3: *& le quatriéme fait du triple de* 54, *multiplié par le quarré de* 3.

Par ces trois lettres $b+c+d$ du Lemme precedent, nous avons pû marquer ce nombre 543, qui étant multiplié cubiquement fait 160103007, par consequent ce nombre cube 160103007 est égal au cube de $b+c+d$ qui contient les parties exprimées dans la proposition.

SIXIE'ME THEOREME.

Ayant partagé ce nombre cube 160103007 *par des* 41
tranches ou des lignes, commençant de droit à gauche de trois caracteres en trois caracteres, comme vous le voyez.

160	103	007
C	B	A

1°. *Le cube de* 5 *est dans la premiere place de la*

tranche C, *& dans les places suivantes; parce que ce cube ne peut estre exprimé que par trois chifres.* 2°. *Le cube de* 4 *est dans la premiere place de la tranche* B, *& dans le chifre suivant: Et* 30, *le cube de* 3 *est dans la premiere place de la tranche* A *en partie; parce que ce cube ne peut estre exprimé qu'avec deux chifres.*

Cette proposition se prouve par l'operation, qui en multipliant la racine 543 a produit le nombre cube. Pour estre plus clair, & en même-temps plus court, j'applique à un nombre cube particulier ce qui convient à tous. Ce qu'on a dit de l'extraction des racines quarrées sert à comprendre ce qu'on voit ici: ce qui fait que je m'étens moins.

COROLLAIRE.

42 *Un nombre cube ayant donc été coupé par tranches, il y a autant de caracteres dans sa racine que de tranches.*

Car 1°, s'il y a trois chifres dans sa racine, le cube du dernier sera dans la premiere place de la troisiéme tranche, aprés lequel l'on n'ajoûte plus rien. Ainsi comme le cube du plus grand chifre, qui est 9, peut être exprimé par trois chifres, sçavoir 729, il ne peut pas y avoir plus de trois tranches. Quand le cube du dernier chifre peut être exprimé avec deux chifres, la derniere tranche n'a pas trois chifres comme les autres.

SEPTIE'ME THEOREME.

43 *Les deux premiers solides, l'un fait du triple du quarré de* 5, *multiplié par* 4; *l'autre fait du triple de* 5. *multiplié par le quarré de* 4, *sont entre* C *&* B; *les deux autres, dont l'un est fait du triple du quarré de* 54 *multiplié par* 3; *& l'autre fait du triple de* 54, *multiplié par le quarré de* 3, *sont entre* B *&* A.

Cette

Cette proposition est évidente à quiconque multiplie cubiquement 543, & qui fait attention aux multiplications partiales qu'il fait.

Huitie'me Theoreme.

S'il y avoit quatre chifres dans la racine cubique entre le trois & le quatriéme cube, il y auroit deux solides ou leur valeur. Le premier fait du triple des trois racines suivantes, multiplié par le quarré de la premiere racine; le second fait du triple du quarré des trois racines suivantes, multiplié par la premiere racine. 44

Cette proposition se prouve comme les autres. On apperçoit assez ce qui arrive lors qu'un nombre cube a cinq, six tranches, & davantage.

Probleme Troisie'me.

Trouver la racine cube d'une grandeur cube exprimée par lettres. 45

Si cette grandeur est incomplexe,+ il n'y a pas de difficulté: il est manifeste que la racine cube de bbb en b.

+ h.e. si non complectatur alias Quantitates per multiplicationem additas.

Soit cette grandeur $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, dont il faut tirer la racine cube. La racine cube de a^3 est a, j'ôte a^3 de a, & il ne reste rien. Entre le cube a^3 & le cube suivant, est un solide fait du triple de aa multiplié par la racine du cube suivant, selon le Lemme precedent; je divise donc $3aab$ par $3aa$, le quotient est b, qui est par consequent la racine du cube suivant. Je multiplie $3aa$ par b; ce qui fait $3aab$, que j'ôte de $3aab$, il ne reste rien. Entre le cube de a & de b, il y a encore un second solide par le même Lemme fait de $3a$ multiplié par bb. J'ôte donc ce solide de $3abb$, il ne reste rien; je suis donc assuré que $a + b$ est la racine cube de $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$.

PROBLEME QUATRIE'ME.

46 *Trouver la racine d'un nombre cube donné.*

1°. *Il faut couper le nombre cube qui a été donné pour en extraire la racine, par tranches de trois caracteres en trois caracteres, commençant de la droite à la gauche.*

Cette premiere operation vous fera connoître par le Corollaire ci-dessus n. 42. le nombre des caracteres de la racine cube cherchée; s'il y a trois tranches, la racine cherchée a trois chifres.

Soit donc donné ce nombre cube 160103007, dont il faut trouver la racine. Je le partage en trois tranches de la droite à la gauche, de trois caracteres en trois caracteres.

160 | 103 | 007

2°. *Il faut extraire la racine cubique du nombre contenu dans la derniere tranche, s'il est cube; & s'il ne l'est pas, du nombre cube qui en approche le plus.*

Cette racine sera le dernier caractere de la racine cherchée, qu'il faut écrire dans un demi-cercle, comme le quotient d'une division.

J'extrais donc la racine cubique de 160, qui est dans la derniere tranche; ce nombre n'est pas cube, je trouve dans la Table des cubes, qui est ci-dessus, que le cube qui approche le plus de 160 est 125, dont la racine est 5, que je marque à part, comme nous avons fait jusqu'à present dans les divisions & dans les extractions des racines.

160 | 103 | 007 | (5

3°. *Il faut prendre le cube de ce caractere trouvé, & l'ôter du nombre proposé.*

On fait de cette maniere l'operation & sa preu-

ve.

ve en même-temps: car pour être assuré que les parties que l'on dit être dans le nombre cube proposé y sont en effet, il faut qu'elles en puissent être retranchées. Je retranche donc le cube 125 de la derniere tranche, où il étoit contenu, il reste 35.

35
~~000~~ | 103 | 007 | (5

40. *Il faut tripler le quarré du caractere trouvé, & écrire ce triple de sorte que le premier caractere de la droite à la gauche, soit sous le dernier caractere de la tranche suivante.*

Le quarré du caractere 5 que j'ay trouvé est 25, dont le triple est 75, que je place comme la Regle l'ordonne.

35 | 103 | 007 | (5
7 | 5

5°. *Il faut diviser par ce triple les nombres sous lesquels il est écrit, & multipliant ce triple par le quotient de cette division, ôter le produit des nombres de dessus.*

Entre le cube du caractere trouvé de la racine cherchée & le precedent, est un solide fait du triple du quarré de 5 multiplié par le caractere precedent de la racine, qui est encore inconnu. Or par le Probleme 2. s̃ n. 29. le quotient de cette division, que la Regle ordonne, sera la racine de ce solide.

Je divise donc par 75 les nombres de dessus 351, le quotient de la division est 4, qui est le second caractere de la racine cherchée, que je place par consequent aprés celui que j'avois trouvé. Je retranche ce solide fait du triple du quarré de 5, qui est 75, multiplié par 4, en disant: 4 fois 7 font 28; de 35 ôtant 28, il reste 7; ensuite 4 fois 5 font 20, de 71 ôtant 20, il reste 51.

5			
~~7~~			
~~38~~	103	007	(54
~~7~~	~~8~~		

Il reste donc 5103007 à diviser, que j'écris à part pour éviter la confusion, & que je tranche comme vous le voyez ci-aprés.

6°. *Il faut prendre le quarré de ce caractere qu'on vient de connoître, & aprés l'avoir multiplié par le triple du dernier caractere trouvé par la seconde Regle, en ôter le produit des nombres qui restent tant en la derniere qu'en la tranche precedente; il faut aussi ôter le cube de ce caractere, puisque tout cela est contenu dans les deux premieres tranches par la troisiéme Proposition.*

Je prens le quarré de 4, qui est 16, que je multiplie par 15 triple de 5; ce qui fait 240 que j'ôte de 510, & il reste 270: ainsi j'ôte d'un même lieu deux solides, le premier fait du triple du quarré de 5 multiplié par 4, le second fait du quarré de 4 multiplié par le triple de 5, puisqu'ils y étoient contenus.

~~2~~	7		
~~8~~	~~103~~	007	(54

Aprés cela il faut retrancher le cube de 4, qui est 64; mais prenez garde qu'il faut le retrancher du lieu où il est. Or étant exprimé par deux chifres, il est contenu au moins en partie dans les deux premiers chifres de la seconde tranche, sçavoir dans 03. Ayant ôté de cette maniere 64 de 2703, il reste 2 | 639 | 007.

7°. *S'il y a plus de deux tranches dans le nombre cube proposé, il faut prendre le quarré des racines trouvées, tripler ce quarré, & aprés l'avoir placé*

placé de sorte que le dernier caractere soit sous la derniere place de la tranche precedente, diviser les nombres de dessus par ce diviseur, le quotient donnera le caractere cherché.

Il y a en cet endroit un solide fait du triple du quarré des racines trouvées, multiplié par la racine qu'il faut trouver ensuite. Or divisant ce solide par le quarré des racines trouvées, le quotient de la division donnera cette racine. s̃ n. 28.

Je prends le quarré des deux racines 54, qui est 2916 que je triple; ce triple est 8748, par lequel nombre je divise les nombres restans du cube proposé. Le quotient de cette division est 3, que j'écris aprés les autres racines trouvées.

2	639	007	(543
	874	8	

8°. *Il faut multiplier par ce caractere qu'on vient de connoître, le triple du quarré des caracteres déja connus, & retrancher ce produit; outre cela prendre le quarré de ce caractere, & aprés l'avoir multiplié par le triple des autres caracteres connus, en ôter le produit de ce qui reste du nombre proposé. De plus, il faut ôter le cube de ce caractere; s'il ne reste rien, c'est une marque que le nombre proposé étoit un nombre cube.*

Je multiplie le triple du quarré 54, qui est 8748 par 3, le produit de cette multiplication est 26244, que je retranche de 26390; il reste 14607.

14 | 607

Je prends le quarré de 3, qui est 9, que je multiplie par le triple de 54 qui est 162; je retranche le produit de cette multiplication qui est 1458, de 14607, il reste 27.

Enfin je prends le cube de 3, qui est 27, que je retranche du reste 27 par la même Regle, aprés

quoy il ne reste rien ; ainsi 543 est la racine cube de 160103007, & ce nombre est cube.

La preuve de cette operation se fait en multipliant la racine trouvée 543 cubiquement. Si son produit est 160103007, l'operation a esté bien faite.

AUTRE EXEMPLE.

Le nombre proposé est 216000, aprés l'avoir coupé par tranches, j'extrais la racine de la premiere tranche

216 | 000

qui contient le nombre cube 216, dont la racine est 6, comme il se voit dans la Table ci-dessus, je retranche ce cube, & il ne reste rien de cette premiere tranche.

Je prends le quarré de 6 qui est 36, je le triple ; ce triple est 108, par lequel voulant diviser les chifres precedens, je trouve que zero est le quotient, je le pose pour le second chifre de la racine cherchée qui n'a que deux chifres, puisque son nombre cube n'a que deux tranches.

On voit évidemment que le nombre proposé est cube, & que sa racine est 60.

CHAPITRE III.

De l'extraction des Racines des autres Puissances.

47 L'Extraction des racines des autres Puissances se peut faire aussi facilement que de celles des secondes & troisiémes puissances. La methode qui vient d'être enseignée le fait assez appercevoir. On voit, par exemple, qu'ayant partagé un nombre quarré de quarrez par tranches de quatre caracteres en quatre caracteres, il y aura autant de caracteres dans la racine de ce nombre qu'il y aura de tranches : que s'il y a trois tranches, cette racine aura trois chifres, que le quarré de quarré du dernier chi-

chifre sera dans la derniere tranche. Comme ces extractions ne sont gueres d'usage, & que les operations de cette methode seroient ennuyeuses, l'on peut prendre un chemin plus court, en rappellant ces puissances aux quarrez & aux cubes. Pour concevoir comment cela se peut faire, il faut remarquer que toute grandeur qui peut être faite de deux grandeurs égales est quarrée, & que celle qui peut être faite de trois grandeurs égales multipliées cubiquement, est un cube; d'où il s'ensuit qu'une grandeur de 4 dimensions, comme *bbbb*, peut être considerée comme un quarré, car elle peut être produite de *bb* multiplié par *bb*. Une grandeur de six dimensions peut être aussi considerée comme un quarré; car *bbb* multiplié par *bbb*, fait b^6. Une grandeur de neuf dimensions peut être considerée comme un cube; car *bbb* multiplié cubiquement fait b^9: d'où il suit que toute puissance qui peut être divisée par 2 ou par 3 exactement[+], peut être reduite à une moindre puissance, jusques à la premiere même, si on peut encore diviser celle à laquelle elle est reduite par 2 ou par 3, de sorte que le dernier quotient soit 1; ce qui se comprendra mieux par des exemples.

[+] Potentia enim quadratica est duap dimens. Noveq; cubica tres.

La grandeur b^{12}, qui a 12 dimensions, peut être divisée exactement par 2 & par 3, & je la puis considerer ou comme un cube, ou comme un quarré; car *bbbb* multiplié cubiquement fait b^{12}, ou comme un quarré; car b^6 multiplié par lui-même, fait b^{12}. Ainsi en prenant la racine quarrée de cette grandeur, je la reduirai à une grandeur de six dimensions. En prenant sa racine cubique, je la reduirai à une grandeur de 4 dimensions. Or en prenant la racine quarrée d'une 6e puissance, par exemple de b^6, on la réduit à une 3e, sçavoir à b^3, de laquelle ayant pris la racine cubique, on la reduit à la pre-

miere. En prenant la racine quarrée d'une 4e puissance, on la reduit à une seconde, d'où ayant pris la racine quarrée, on la reduit à la premier e.

Pour tirer, selon cette methode, la racine de la 9e puissance de ce nombre 512, puisqu'une grandeur de 9 dimensions peut être divisée par 3, & être faite de la 3e puissance multipliée cubiquement, je prends la racine cube de 512 qui est 8, & ensuite la racine cube de 8 qui est 2; ainsi je connois que 2 est la racine de 512, consideré comme une 9e puissance.

Il est bien évident qu'on ne peut pas en cette maniere reduire à une moindre puissance la 5e, la 7e, la 11e, la 13e la 17e, la 19e puissance. On peut reduire la 10e à la 5e, en prenant sa racine quarrée, la 14e à une 7e, en prenant encore sa racine quarrée, la 15e à une 5e, en prenant sa racine cubique: mais on ne peut pas les reduire à la premiere puissance. S'il étoit necessaire de le faire, il faudroit déduire de ce que nous avons enseigné touchant l'extraction des racines quarrées & cubiques, ce que l'on doit faire pour extraire les racines de ces puissances. Si les grandeurs absoluës de ces puissances, c'est à dire celles dont elles sont les puissances, étoient exprimées par plusieurs chifres, il faudroit des operations infinies; car l'on apperçoit bien par exemple qu'une 5e puissance doit se diviser par tranches de cinq caracteres en cinq caracteres; que la 5e puissance du dernier chifre de toute la racine, se trouveroit dans la premiere place de la derniere tranche & dans les suivantes: qu'entre la premiere place de cette tranche & la premiere place de la tranche precedente, il y auroit plusieurs grandeurs de cinq dimensions, comme il est facile de le connoître en faisant monter une grandeur telle que $b+d$ à sa cinquiéme puissance, c'est à dire en la multipliant cinq fois par elle-même.

ELE-

ELEMENS DES MATHEMATIQUES OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE TROISIEME.

Des Raisons ou Rapports que les Grandeurs ont entre elles.

SECTION PREMIERE.

Des Raisons ou Rapports en general.

CHAPITRE PREMIER.

On donne une idée de ce que c'est que Raison, & Proportion.

RApport & *Comparaison*, c'est presque une même chose. Considerer le rapport d'une chose avec une autre; c'est voir ce que l'une est quand on la compare avec l'autre. Comme si en

en considerant la taille d'un homme, en même-temps je le compare avec une autre personne, ce qui me fait concevoir qu'il est grand, ou qu'il est petit. Grand, si je le trouve d'une taille plus avantageuse que celui avec qui je le compare; Petit, si sa taille est moins avantageuse. Ainsi ce mot, *Rapport*, ne signifie proprement qu'une maniere d'être d'une chose au regard d'une autre: ou pour parler plus juste, c'est la maniere qu'on conçoit qu'une chose est, en la rapportant à une autre. Nous jugeons le même homme grand ou petit, selon que nous le comparons avec telle & telle personne.

Le rapport ou la maniere d'être d'une chose s'appelle *Raison*, du nom Latin *Ratio*, dont la signification est fort étenduë. Il se prend pour cette lumiere qui nous éclaire; il signifie aussi le rapport de deux ou plusieurs choses. Souvent dans les Auteurs Latins modernes on appelle un rapport *habitudo*, du verbe *habere*; ce qui est pris des Grecs, qui pour dire *ce que cette chose est au regard de celle-là*, disent ὡς ἔχει, &c. ce qu'on dit en Latin *ut ista res se habet*, *&c.* Je fais cette remarque, parce qu'il est trés-important d'avoir des idées bien nettes des mots qui sont d'usage dans les Sciences.

On ne compare ensemble que les choses qui sont d'une même espece; c'est toûjours, selon ce qui se rencontre en elles, de plus ou de moins, d'égal ou de semblable. On compare les qualitez entr'elles, les couleurs avec les couleurs, & on dit qu'elles sont plus ou moins claires. On compare le pere avec son fils, parce qu'il lui communique la même nature. Il y a entr'eux égalité de nature. Les rapports ou raisons, dont nous devons parler, sont ceux qui se font selon *la quantité*. Il y a differentes

ferentes especes de quantité; il faut donc ajoûter que ces rapports se font selon la même espece de quantité: car on ne dit point qu'une ligne soit plus grande ou plus petite qu'une surface, qu'un corps, qu'un espace de temps, ou qu'une quantité de mouvement, ou qu'elle leur soit égale. Or quand on considere deux grandeurs de même espece, c'est à dire deux lignes, deux surfaces, deux corps, deux espaces de temps, deux quantitez de mouvement, deux poids, l'on n'y peut remarquer autre chose, comme nous venons de voir, que de l'égalité ou de l'inégalité, de la petitesse ou de l'excés.

Les idées de ces mots, *égalité*, *inégalité*, *grand*, *petit*, enferment une comparaison, c'est à dire que ces mots signifient qu'on compare une grandeur. On dit qu'elle est égale ou inégale, petite ou grande, selon qu'on la rapporte à une telle ou telle grandeur. Tout ce que l'on peut donc dire des raisons ou rapports des grandeurs, se reduit à sçavoir quand est-ce qu'elles sont égales ou inégales, petites ou plus grandes. Mais cette égalité ou inégalité se peut concevoir en differentes manieres; ce qui fait qu'on établit plusieurs especes de raisons ou de raports.

Les raisons des grandeurs sont leurs manieres d'être, ou ce qu'elles sont au regard les unes des autres, égales ou inégales, petites ou plus grandes. Or l'égalité, l'inégalité, petitesse & grandeur de deux choses qu'on compare, se peuvent considerer en deux manieres; 1°, en examinant de combien l'une surpasse l'autre, l'excés de l'une & le défaut de l'autre, en un mot leur difference. Comme si je compare ces deux nombres 5 & 9, je regarde que 9 est plus grand que 5, que son excés par dessus 5 est 4, & que 4 est le defaut de 5 au dessous de 9, ou que 4 est la difference de ces deux

nom-

nombres. Il est certain qu'on considere ainsi tres-souvent les choses, lesquelles on compare selon leur quantité. On dira de deux bâtons ; celui-ci est plus grand que l'autre d'un pouce, de deux pouces.

2°. L'autre maniere de comparer deux grandeurs, est de ne pas considerer seulement leur difference ; mais ce qu'elles sont entierement. Dans la premiere maniere, on ne considere quasi que les extrémitez des choses. Pour me servir de l'exemple que j'ai proposé, en joignant deux bâtons, on en considere les extremitez, & l'on voit que l'un est plus grand de quelques pouces, ou qu'il s'en faut quelques pouces que l'extremité de l'autre n'atteigne son extremité.

Dans la seconde maniere on considere comment une grandeur entiere est contenuë dans une autre ; si elle y est contenuë tant de fois exactement ou non ; ce qui fait qu'on dit qu'elle en est le tiers, le quart, &c. Cette maniere est la plus considerable ; & quand on parle de *Rapport*, c'est elle qu'on entend. Quand on demande d'une grandeur ce qu'elle est au regard d'une autre, c'est la maniere qu'elle y est contenuë, si elle en est la moitié, le tiers, le quart, &c. Aussi parmi les Mathematiciens le mot de *Raison*, quoi qu'il ne signifie que rapport ou maniere d'être, & que la premiere maniere dont nous venons de parler soit par consequent une *raison* aussi-bien que la seconde, cependant dans l'usage par ce mot on n'entend que la maniere dont une grandeur contient ou est contenuë dans une autre : & pour distinction, on appelle *Difference* la premiere maniere.

Comme on peut comparer une chose avec toute autre lors qu'il y a lieu de le faire, aussi on peut comparer les comparaisons mêmes qu'on fait, c'est à dire un raport avec un rapport, examinant

si

ſi une choſe eſt au regard d'une ſeconde ce qu'une troiſiéme eſt au regard d'une quatriéme ; ſi par exemple Pierre eſt auſſi petit au regard de Jacques, que Jean l'eſt au regard de François.

On appelle *Proportion* l'égalité, ou la ſimilitude des Rapports. Il y a deux ſortes de Proportions, comme il y a deux ſortes de Rapports. L'égalité des differences s'appelle, *Proportion Arithmetique.* Je ne ſçai point d'autre cauſe pour laquelle on lui a donné ce nom, ſi ce n'eſt qu'on la conſidere particulierement dans l'Arithmetique. Le rapport qu'on conſidere le plus dans les nombres, c'eſt leur difference, l'excés ou le defaut de l'un au regard de l'autre. On a nommé *Proportion Geometrique* l'égalité des Raiſons ; parce qu'effectivement on ne parle guere dans la Geometrie que de l'égalité des Raiſons.

Il faut ſe ſervir des noms que l'uſage a établis ; mais il faut bien en marquer les veritables idées. Ce mot, *Raiſon*, ne ſignifie plus en general un raport quel qu'il ſoit, puiſqu'il conviendroit à la difference ou à la premiere maniere de comparer deux Grandeurs C'eſt une neceſſité d'entendre par ce mot un certain rapport, ſelon lequel on conſidere la maniere qu'une grandeur en contient une autre, ou qu'elle en eſt contenuë. Quand il eſt impoſſible d'exprimer par nombre cette maniere, on appelle cela une *Raiſon ſourde.*

Comme tout rapport, ſoit *Difference*, ſoit *Raiſon* demande deux termes, auſſi tout rapport de difference ou de raiſon demande quatre termes ; c'eſt à dire qu'en comparant des raiſons ou des differences on a quatre termes devant les yeux, mais un même terme peut ſervir deux fois, comme en conſiderant que de même que 9 ſurpaſſe 5 de 4, de même 13 ſurpaſſe 9 de 4 ; ce qui eſt une

pro-

proportion Arithmetique. Ou comme 2 est le tiers de 6, de même 6 est le tiers de 18; ce qui est une proportion Geometrique.

Il y a une proportion qu'on considere dans l'Harmonie ou Musique; ce qui fait qu'on lui donne le nom de *Proportion Harmonique*. Elle est composée de la proportion Arithmetique, & de la proportion Geometrique: car on dit que trois termes sont en proportion Harmonique, lors que la difference du premier & du second a une même raison avec la difference du second & du troisiéme, que le premier terme avec le troisiéme. Ainsi ces trois nombres 60, 30, 20 sont une proportion Harmonique; car la difference de 60 à 30, qui est 30, a une même raison avec 10 difference de 30 à 20, que 60 avec 20.

Cette même proportion se nomme *Contr'Harmonique*, quand le troisiéme terme est au premier, comme la difference du premier & du second est à la difference du second & du troisiéme. Ces trois nombres 6, 5, 3 sont une proportion Contr'Harmonique, car 3 est à 6 comme 1, difference de 6 & de 5 est à 2, differences de 5 & de 3.

CHAPITRE II.

Définition & explication des termes dont on se doit servir.

PREMIERE DEFINITION.

2 *LOrs que l'on compare deux grandeurs l'une avec l'autre, ces deux grandeurs sont nommées Termes de cette comparaison. Le premier terme s'appelle Antecedent, & le second Consequent.*

En comparant deux grandeurs *A* avec *B*, on le peut faire en commençant par *B* aussi bien que par *A*:

A: ainsi le premier terme est celui par lequel on commence, & qui s'écrit le premier. On pourroit commencer par celui qu'on a écrit le dernier; ainsi le même terme de Consequent, peut devenir Antecedent. Proprement l'Antecedent c'est la chose qu'on compare, & le Consequent celle à qui on la compare.

SECONDE DEFINITION.

L'excés d'une grandeur par dessus une autre grandeur, s'appelle Difference. 3

L'excés de 7 par dessus 5 est 2. Ce nombre 2 est la difference de 7 & de 5.

TROISIE'ME DEFINITION.

La maniere dont une grandeur contient ou est contenuë dans celle avec laquelle on la compare, se nomme Raison. 4

La maniere que 2 est contenu dans 6, & que 6 contient 2, s'appelle Raison de 2 à 6.

QUATRIE'ME DEFINITION.

L'égalité des raisons ou des differences, s'appelle Proportion. 5

CINQUIE'ME DEFINITION.

Proportion Arithmetique, est une égalité de differences. 6

La difference de 5 avec 3, est la même que celle de 10 avec 8; l'égalité de ces deux differences s'appelle Proportion Arithmetique.

SIXIE'ME DEFINITION.

L'égalité des raisons se nomme Proportion Geometrique, ou simplement Proportion. 7

Les deux raisons de 2 à 4 & de 3 à 6 étant égales, ces nombres sont en proportion Geometrique.

SEP-

SEPTIE'ME DEFINITION.

8 *Chaque difference & chaque raison supposant deux termes, la proportion qui dépend de l'égalité des differences & des raisons, suppose par consequent quatre termes, dont le premier est nommé Premier Antecedent; le second, Premier Consequent; le troisiéme, Second Antecedent; le quatréme, Second Consequent.*

Je marque les Proportions Arithmetiques avec trois points, les Geometriques avec quatre au milieu des termes de la proportion.

Proportion Arithmetique, 5, 7 ∴ 10, 12;

C'est à dire qu'il y a même difference entre 5 & 7, qu'entre 10 & 12.

Proportion Geometrique, 3, 6 :: 4, 8.

C'est à dire que la raison de 3 à 6 est égale à celle de 4 à 8; que 3 est contenu deux fois en 6, comme 4 est contenu deux fois en 8.

HUITIE'ME DEFINITION.

9 *Le premier & le dernier terme d'une proportion s'appellent les Extrêmes de cette Proportion, & le second & le troisiéme, Ceux du Milieu, ou les Moyens.*

Proportion Arithmetique, 5, 7 ∴ 10, 12.

Ces deux nombres 5 & 12 sont les Extrêmes de cette Proportion; & 7 & 10, les Moyens.

Proportion Geometrique, 3, 6 :: 4, 8.

Ces deux nombres 3 & 8, sont les Extrêmes dans cette Proportion, & 6 & 4 les Moyens.

NEU-

NEUVIE'ME DEFINITION.

Un même terme peut servir de premier Conse- 10
quent au premier Antecedent, & de second Ante-
cedent au second Consequent; ainsi trois grandeurs
suffisent pour faire une proportion. Pour lors cette
proportion est dite Continuë, & la grandeur qui
fait l'office de deux termes, est appellée Moyenne
proportionnelle.

Proport. Arithm. Continuë, 5, 7 ∺ 7, 9.
Proport. Geometr. Continuë, 2, 4 :: 4, 8.

Pour abreger on exprime cette proportion Arithmetique avec une ligne entre deux points, la Geometrique avec une ligne entre quatre points.

÷ 5, 7, 9. *Proportion Arithm. Continuë.*
∺ 2, 4, 8. *Proportion Geometr. Continuë.*

DIXIE'ME DEFINITION.

Si une proportion Continuë a plus de trois ter- 11
mes; elle s'appelle Progression.

÷ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, &c. *Progression Arithm.*
∺ 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. *Progression Geometr.*

ONZIE'ME DEFINITION.

Le premier & le dernier terme d'une progression 12
sont appellez les Extrêmes, & on nomme Moyens
ceux qui sont entre ces Extrêmes.

SEC-

SECTION SECONDE.

DE LA PROPORTION ET PROGRESSION ARITHMETIQUE.

Proprietez de cette Proportion & Progression.

CHAPITRE PREMIER.

Methode pour connoître les proprietez de la Proportion & Progression Arithmetique.

13 SELON la Définition de la Progression Arithmetique, il y a une même difference entre tous les termes, comme en celle-ci.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*k*	*&c.*
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	

La difference de *b* avec *a* est 2 : celle de *c* avec *b* est encore 2 ; ainsi de suite : d'où il est évident que puisque le second terme *b* n'est que le premier *a* augmenté de la difference qui regne dans cette progression, connoissant le premier terme *a* avec la difference de la progression, on connoîtra *b* avec lequel on connoîtra *c*, qui ne differe de *b* que parce qu'il a par dessus lui une grandeur connuë. Ainsi on connoîtra tous les autres termes de cette progression, fussent-ils infinis en nombre.

Les choses ne sont obscures que parce que nous

ne

ne les envisageons, pour ainsi dire, que par un endroit qui n'est point éclairé, ou que nous ne tâchons point d'ôter de certains voiles qui les cachent & les font paroître differentes de celles que nous connoissons. Le secret des Sciences c'est de dévoiler les choses, & de les faire paroître telles qu'elles sont: que ce qu'elles ont de semblable paroisse; & qu'en même-temps ou apperçoive & qu'on distingue bien tout ce qui fait leur difference. Dans cette progression que nous venons de proposer, comme dans toutes les autres, ses termes paroissent tous differens; & de la maniere que je les ai exprimez vous ne voyez point en quoi ils sont conformes, & en quoi ils different. Puisque deux termes qui se suivent ne sont differens que par une certaine grandeur, dont l'un est plus grand & l'autre plus petit, il est évident que l'un plus ou moins cette grandeur doit être égal à l'autre. b est different de a, parce qu'il est plus grand que a de deux unitez. Si je nomme donc x ces deux unitez, il faut que $a+x$ soit égal à b. Ainsi $a+x=b$, ou $b-x=a$. Par la même raison $b+x=c$, ou $c-x=b$. De même de tous les autres termes.

Par consequent il est facile d'exprimer toute cette progression de maniere, qu'on voye dans tous ses termes ce qu'ils ont de commun, & en quoi ils different. Car puisque $a+x=b$, donc au lieu de b je pourrai écrire $a+x$: Et puisque $b+x=c$, donc $a+x+x$, ou $a+2x=c$, & par la même raison $a+3x=d$. Je reduis donc la progression proposée à celle-ci, qui est la même; je n'en change que les expressions.

$$\div\ a.a+x.a+2x.a+3x.a+4x.a+5x.a+6x.$$
$$1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11 \quad 13\ \&c.$$

Avec cela seul nous allons découvrir & démon-

trer

trer toutes les proprietez des Proportions & Progressions Arithmetiques. Ce que je viens de dire en plusieurs paroles, je le renfermerai dans la Proposition suivante.

LEMME.

14 *Dans une Proportion Arithmetique l'antecedent plus ou moins sa difference avec son consequent, est égal à son consequent.*

Soit b l'antecedent, d le consequent, c leur difference. Si b surpasse d de la grandeur c, il est bien évident qu'ajoûtant à d ce qui lui manquoit, ou retranchant de b l'excés qu'il a par dessus d, ces deux grandeurs seront égales, $d+c=b$, ou $b-c=d$. Si au contraire b est plus petit que d de la grandeur c, ajoûtant à b ce qui lui manque, $b+c=d$, ou retranchant de d ce qu'il a par dessus b, alors on fait $b=d-c$. Si $=$ 1. 3. 5. 7. &c. la difference est 2, il est evident que $1+2=3$ & $3+2=5$, ou que $3-2=1$ & $5-2=3$.

COROLLAIRE 1.

15 *De là il s'ensuit qu'on peut exprimer en la maniere suivante deux termes, dont on connoit la difference.*

Si $b+c=d$, ou si $b-c=d$, par tout où se trouvera d je pourrai substituer $b+c$ ou $b-c$, selon que b sera ou plus grand ou plus petit que d. Pour abreger je supposerai, dans les Démonstrations suivantes, que le consequent d est toûjours plus grand que l'antecedent b; s'il étoit plus petit, il ne faudroit que changer le signe $+$ en $-$.

COROLLAIRE 2.

16 *On peut marquer tous les differens termes d'une Progression*

Progression Arithmetique, de maniere qu'ils ayent presque le même nom.

Soit cette Progression ÷ *b.d.f.g.h.&c.* je suppose que la difference qui regne entre tous ces termes est *c*. Ainsi $b+c=d$: & puisque *f* surpasse *d* de *c*, il faut que $b+c+c$, ou $b+2c=f$, par la même raison $b+3c=g$, & $b+4c=h$; ainsi cette progression se trouve reduite à celle-ci : ÷ b, $b+c$. $b+2c$. $b+3c$. $b+4c$. &c. Ainsi cette progression ÷ 1.3.5.7.9.11.&c. peut être changée en celle-ci : ÷ 1. 1 + 2. 1 + 4. .1 + 6. 1. + 8. .1 + 10.

CHAPITRE II.

Propositions touchant les proprietez des Proportions & Progressions Arithmetiques.

PREMIERE PROPOSITION.

Theoreme 1.

DAns une Proportion Arithmetique les Extrêmes ajoûtez ensemble, sont égaux aux Moyens ajoûtez ensemble. 17

Soient en Proportion Arithmetique ces quatre termes *b.d* ∺ *e.f.* ou 3. 5 ∺ 7. 9. il faut démontrer que l'addition de *d* avec *e*, qui sont les Moyens, fait une somme égale à celle de *b* & de *f*, qui sont les Extrêmes de cette proportion, c'est à dire que $b+f=d+e$, ou que $3+9=5+7$.

Soit la difference de *b* à *d* nommée *c*, qui sera aussi par la définition de cette proportion, celle de *e* avec *f*. Donc s̃ n. 15. $b+c=d$, & $e+c=f$; ainsi les quatre termes de cette Proportion se peuvent reduire à cette expression $b.b+c$ ∺ $e.e+c$. Il faut donc démontrer que le premier

terme b, plus le dernier qui est $e+c$, sont égaux au second terme $b+c$, plus le troisiéme terme qui est e, c'est à dire que $b+e+c=b+c+e$; ce qui est évident, puisque les grandeurs sont les mêmes de part & d'autre. Cette proportion $3.5 :: 7.9.$ étant changée en celle-ci qui est la même, $3.3+2 :: 5\ 5+2.$ il est évident que les Moyens $3+2+5.$ sont la même chose que les Extrêmes $3+5+2.$

COROLLAIRE I.

18 *Dans une progression Arithmetique, l'addition de deux termes également éloignez des deux Extrêmes, est égale à celle des Extrêmes.*

Soit cette progression $\div b.\ c.\ d.\ e.\ f.$ ces termes c & e sont également éloignez des Extrêmes b & f. Je dis que $c+e$ est égal à $b+f$, ce qui est évident; car il y a même difference entre b & c qu'entre e & f, selon la définition de la progression: Donc ces quatre grandeurs sont en proportion $b.\ c :: e.\ f.$ Ainsi par ce Theorême $b+f=c+e$; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE 2.

19 *Lors que le nombre des termes d'une proportion Continuë ou Progression est impair, le terme du milieu ajoûté à lui-même, est égal à l'addition des Extrêmes.*

Per Coroll. 2. C. praec. terminis ea-dem nota notentur. sit v. gr. earum differentia q. Eg.

Soient $\div b.\ c.\ d.\ e.\ f.$ Le terme du milieu de cette progression est d, lequel terme tient lieu de deux termes; sçavoir de Consequent à c, & d'Antecedent à e. par la définition de la proportion Continuë. On peut donc considerer ce seul terme comme deux termes Moyens, qui avec b & avec f ont cette proportion, qui a quatre termes, $b.\ d.\ :: d.\ f.$ Or par ce Theorême $b+f=d+d$, ou $b+f=2d$, qui est ce qu'il falloit prouver.

$\div b.\ c.\ d.\ e.\ f.$
$\div b.\ b+q.\ b+2q.\ b+3q.\ b+4q.$

Sam terminus medius $b+2q$ sibi ipsi additus est $2b+4q$. Extrema vero $b.\ b+4q.$ sibi addita dant itidem $2b+4q$.

SECONDE PROPOSITION.

Premier Problême.

Connoissant les trois premiers termes d'une proportion Arithmetique, connoître le quatriéme. 20

Ces trois nombres donnez, 10, 15, 13, sont les trois premiers termes d'une proportion Arithmetique dont on cherche le quatriéme terme, c'est à dire un nombre qui ait le même excés par dessus 13, que 15 a par dessus 10. Cela se trouve en deux manieres.

Il faut ajoûter à 13 la difference qui est entre 10 & 15, sçavoir 5. Par la définition de la proportion le nombre 13, avec cette difference, sera le quatriéme terme qu'on cherche, comme il est évident. Ou ce qui est la même chose, il faut ajoûter les termes Moyens 15 & 13 dans une somme, de laquelle ayant retranché le premier terme 10, ce qui restera sera le quatriéme terme, puisque par la Proposition precedente, ce quatriéme terme ajoûté au premier, égale la somme des Moyens; ainsi ayant ajoûté 13 avec 15, ce qui fait 28, & en ayant retranché le premier terme 10, le reste qui est 18 sera le quatriéme terme proportionnel aux trois donnez.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Second Problême.

Continuer une Progression Arithmetique, dont on connoit le premier terme, & la différence qui est entre le premier & le second. 21

Soit le premier terme b, sa difference d'avec le second est c. Chaque terme surpasse celui qui le precede de cette difference, selon la definition de la progression; donc si le premier est b, le second sera $b + c$, le troisiéme $b + 2c$, le quatriéme $b + 3c$, ainsi de suite.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Second Theorême.

22 *En toute progression Arithmetique chaque terme renferme le premier, & outre cela autant de fois la difference qui regne dans cette progression, qu'il y a de termes avant lui.*

Soit donnée cette progression.

$\div b, d, f, g, h, k, l, m, n, \&c.$

la difference de b à d est c. Je puis exprimer ainsi cette progression, s̃n. 16.

$\div b.b+c.b+2c.b+3c.b+4c.b+5c\,b+6c.b+7c.$

Aprés cette reduction l'on voit sensiblement la verité du Theorême proposé. $b+4c$ qui a devant lui quatre termes, contient le premier terme b, & quatre fois la difference du premier au second terme, laquelle difference regne dans la progression.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Troisiéme Problême.

23 *Entre deux nombres donnez, trouver un ou plusieurs Moyens proportionnels.*

Il faut diviser la difference des deux nombres donnez par le nombre des Moyens proportionnels que l'on veut trouver entre les deux nombres donnez, ajoûtant à ce nombre l'unité. Par exemple, soient donnez b & k, le premier vaut 5 & le second 30, entre lesquels on veut trouver quatre Moyens proportionnels. Leur difference est 25, qu'il faut diviser par 4 plus 1, c'est à dire par 5; le quotient de la division est 5, qui sera la difference qui regnera dans une progression de six termes, dont b sera le premier terme & k le sixiéme,

xiéme, qui se trouveront être par la troisiéme Proposition

b *k*
5 10 15 20 25 30.

Vous voyez qu'entre *b* & *k* il y a quatre termes Moyens proportionnels; ce que l'on cherchoit.

Sixie'me Proposition.

Problême 4.

Connoissant le premier terme d'une progression avec le dernier, & combien elle a de termes, connoître la difference qui regne dans cette progression. 24

Soit proposé une progression dont on sçait que le premier terme *b* vaut 5, & que *k* qui vaut 30 est le dernier & le sixiéme terme; il faut connoître la difference qui regne dans cette progression.

Puisque *k* est le sixiéme terme, il y a donc entre lui & *b* quatre Moyens proportionnels, qu'on peut trouver par le Probleme precedent, & par consequent connoître quelle est toute la progression, & par consequent la difference qui y regne.

Question.

Une personne distribuë pendant 8 jours quelque aumône à des pauvres; le premier jour elle leur donne 5 sols, le dernier jour 26, & chaque autre jour un certain nombre plus que le precedent, augmentant tous les jours également; on demande combien elle a donné chaque jour. On voit bien que ces aumônes de chaque jour font une progression dont le premier terme & le dernier sont connus, & en même-temps combien cette progression a de termes, sçavoir 8. Le premier terme de cette progression est 5, le huitiéme terme est 26. Pour satisfaire à la question, il faut trouver six termes

proportionnels entre 5 & 26. Divisant donc, selon le troisiéme Problême, la difference de 5 à 26 qui est 21 par 7, le quotient 3 de cette division sera la difference que l'on cherche; ainsi cette personne a donné le second jour 8 sols, le troisiéme 11 sols, &c.

Septie'me Proposition.

Problême cinquiéme.

25 *Le premier terme d'une progression étant donné, & la difference qui regne dans la progression, connoître le quantiéme terme de cette progression est un certain nombre proposé.*

Le premier terme de la progression qui est proposée est *b*, qui vaut 4; la difference *c*, qui vaut 2. Ce nombre 22 est un de ses termes, dont on demande la place dans cette progression.

Il faut 1°, en retrancher *b*, c'est à dire 4, reste 18; ensuite il faut voir combien *c*, qui vaut 2, est contenu dans 18; il y est contenu 9 fois: Donc par la quatriéme Proposition, ce nombre 22 est le dixiéme terme de cette progression, puisqu'il contient une fois le premier terme *b* plus 9 fois la difference *c*.

Question.

Il y a une rangée d'arbres, on sçait que sur le premier il y a quatre colombes, sur le second il y en a six; ainsi de suite en progression Arithmetique. Il y a un arbre sur lequel il y en a 22; on demande le quantiéme est cet arbre. Par cette septiéme Proposition il est le dixiéme.

Huitie'me Proposition.

Problême sixiéme.

26 *Le premier terme, la difference, & la valeur du*

du dernier terme étant donnez, trouver combien la progression a de termes.

Le premier terme est *b*, qui vaut 4; la difference est *c*, qui vaut 2. On sçait que le dernier terme vaut 22. Il faut trouver par la septiéme Proposition le quantiéme terme de la progression peut être ce nombre 22; s'il est le dixiéme, il y a donc dix termes, qui est ce qu'on vouloit sçavoir.

QUESTION.

Un Marchand empruntant de l'argent d'un Usurier, s'est engagé de lui payer le premier mois 4 écus, le second 4 écus plus 2, c'est à dire 6, ainsi de suite en progression Arithmetique. Il se trouve que le dernier mois il paye 22 écus d'interest; on demande combien il s'est écoulé de mois, c'est à dire combien cette progression a de termes. Par cette huitiéme Proposition on trouve qu'il y en a dix.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Problême septiéme.

La difference, le nombre des termes, le dernier terme étant donnez, trouver le premier terme. 27

Dans la progression dont il est question, soit *e* ou 2 la difference. Il y a dix termes, & ce nombre 22 est le dernier terme, lequel par la quatriéme Proposition contient 9 fois la difference *c*, & une fois le premier terme. Ainsi ayant ôté 9 fois la valeur de *c*, c'est à dire 18 de 22, le reste qui est 4 sera la valeur du premier terme que l'on cherchoit.

QUESTION.

Une personne a dépensé de l'argent pendant 10 jours. Chaque jour elle a dépensé 2 sols plus que

le jour precedent, & le dernier jour elle en a dépensé 22. On demande, combien de sols cette personne a dépensé le premier jour, & chacun des suivans? On connoît la difference, le nombre des termes, & le dernier terme de cette progression; ainsi par cette neuviéme Proposition, on trouvera que le premier jour cette personne avoit dépensé 4 sols, & le suivant 6 sols, ainsi de suite.

Dixie'me Proposition.

Problême huitiéme.

28 *Connoissant le premier terme d'une progression, avec la difference qui regne dans cette progression, connoître un terme proposé de cette progression.*

Il faut multiplier la difference connuë de cette progression par le nombre des termes qui precedent celui que l'on cherche, & ajoûter à ce produit le premier terme.

Soit 8 le premier terme d'une progression. Sa difference d'avec le second est 5, on cherche le dixiéme terme de cette progression. Il faut multiplier la difference 5 par 9, ce qui produit 45, auquel il faut ajoûter 8, ce qui fait 53, qui sera la valeur du terme que l'on cherche.

Car par la quatriéme Proposition, le dixiéme terme doit contenir 9 fois 5, qui est la difference qui regne dans cette progression, plus le premier terme qui est 8.

Question.

Un Jardinier a cueilli des pommes d'un pommier pendant douze années; la premiere année il a cueilli 5 pommes, la seconde 60 plus que la premiere, la troisiéme 60 plus que la seconde, ainsi de suite jusques à la douziéme année. L'on demande combien il a cueilli de pommes la douziéme

me année? Le nombre des pommes cueillies chaque année fait une progression Arithmetique, dont le premier terme est 5, & la difference qui regne dans la progression est 60; ainsi, selon la dixiéme Proposition, le douziéme terme doit être 665.

ONZIE'ME PROPOSITION.

Troisiéme Theoreme.

En toute progression arithmetique la somme de deux Extrêmes multipliée par la moitié du nombre de tous les termes, est égale à la somme de tous les termes. 29

Soit cette progression ÷ $b, c, d, f, g, h, k, l, m, n, p, q$.

Nous avons prouvé ci-dessus, que dans une progression Arithmetique, la somme de deux termes également éloignez des Extrêmes, est égale à celles des Extrêmes : ainsi tous les moyens étant pris deux à deux sont des sommes égales $c + p = d + n = f + m = g + l$. C. II. Corol. I.

$$b + q = \left\{ \begin{array}{l} c + p \\ d + n \\ f + m \\ g + l \\ h + k \end{array} \right.$$

Donc comme il y a ici douze termes; six fois la somme des Extrêmes est égale à la somme de tous les termes. Par consequent la somme des Extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, est égale à la somme de tous les termes.

COROLLAIRE I.

Si le nombre des termes d'une progression est impair, leur somme entiere est égale au produit du moyen multiplié par le nombre de tous les termes. 30

Car si la somme des deux Extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, est égale à la somme de tous ces termes, la moitié de la somme des Extrêmes multipliée par le nombre entier de tous les termes, doit être égale à la somme de tous

les termes. Or le moyen vaut la moitié de la somme des Extrêmes, puis qu'ajoûté à lui-même il vaut cette somme; donc, &c. Soit retranché de la progression precedente le terme q, de sorte qu'il ne reste plus qu'onze termes dont le moyen est b. Alors $b + b$, ou $2b = b + p$; donc multipliant b par 11, le produit $11b$ sera égal à la somme de tous ces onze termes.

COROLLAIRE 2.

31 *Dans une progression Arithmetique dont le premier terme est zero, le dernier terme* z *multiplié par* x, *le nombre des termes de la progression, est le double de la somme de tous les termes.*

Le dernier terme z avec zero le premier terme, ce qui ne fait que z, étant multiplié par la moitié de x nombre des termes, est égal à la somme de tous les termes de cette progression; donc multiplié par tout x, il est le double de toute cette somme. C'est à dire que xz est le double de toute la progression.

DOUZIE'ME PROPOSITION.

Quatriéme Theorême.

32 *Une progression Arithmetique peut estre continuée à l'infini, en montant. Elle ne le peut en descendant, si ces termes ne sont des grandeurs negatives.*

Ajoûtant à un terme d'une progression la difference qui regne dans la progression, on a le terme suivant: ainsi on la peut augmenter ou continuer à l'infini, en montant. Mais on ne le peut faire en descendant, si ces termes sont des grandeurs positives. Car soit cette progression $\div\ o\ a\ b\ c$ qu'on ait continué en descendant, jusques à ce que x difference qui regne dans la progression soit telle que

$n =$

$a - x = o$, je dis qu'on ne peut pas trouver un terme au dessous de a, & plus grand que o. Si on suppose que z est ce terme, alors $z + x = a$; partant $z = a - x$. Or $a - x = o$; donc $z = o$, & par consequent z n'est pas plus grand que zero.

Mais si dans une progression Arithmetique il y a des grandeurs negatives, elle peut estre continuée en montant & en descendant. Soit une progression dont 1 est la difference, il est évident qu'il y a même difference entre $o + 1$ qu'entre $o - 1$, sçavoir la valeur de 1. Ainsi cette progression peut être augmentée à l'infini, soit en montant soit en descendant, $\div 3. 2. 1. 0. - 1. - 2. - 3.$ &c.

Treizie'me Proposition.
Problême neuviéme.

Le premier terme, la difference, & le nombre des termes étant donnez, trouver la somme de la progression. 33

Le premier terme est 3, la difference est 2, le nombre des termes est 12. Il faut 1°, trouver le dernier terme, sçavoir le douziéme. Par la dixiéme Proposition ce terme est 25, qu'il faut joindre avec le premier, ce qui fait 28; ensuite il faut multiplier cette somme 28 par 6, moitié du nombre des termes de la progression, ce qui fait 168, qui sera par la onziéme Proposition la somme de tous les termes de cette progression.

Quand le nombre des termes est impair, il faut chercher la valeur du moyen. Par exemple, si le nombre des termes eût été onze, le terme moyen est le sixiéme terme dont il auroit fallu chercher la valeur, par la dixiéme Proposition; ensuite multiplier ce moyen par le nombre entier des termes de la progression, le produit seroit la somme de

tous les termes de la progression, par le premier Corollaire de la Progression onziéme s̃ n. 30.

QUESTION.

Un Capitaine a rangé ses Soldats de maniere qu'au premier rang il y a trois Soldats, au second 5; il y a 12 rangs. On demande combien il y a de Soldats? c'est à dire quelle est la somme de cette progression? Par la treiziéme Proposition cette somme est 168.

QUATORZIE'ME PROPOSITION.

Problême dixiéme.

34 *La difference, le nombre des termes, & la somme de la progression étant donnez, trouver les deux Extrêmes, & chacun des interposez.*

La differencé est c qui vaut 2, le nombre des termes est 12, la somme de la progression est 168. Soient x & z ses Extrêmes qu'il faut trouver, avec leurs interposez. Ayant divisé 168, somme de la progression par 6 moitié de 12 nombres des termes, le quotient est 28. Donc $28 = x + z$ par la Proposition onziéme. Or par la quatriéme $x + 11c$, ou $x + 22 = z$ Donc $28 = x + x + 22$. Ostant de part & d'autre 22, restera $6 = x + x$. Donc $3 = x$. Ainsi le premier terme est 3. Mais $x + 22 = z$: donc $z = 3 + 22$, ou $z = 25$. La difference qui regne dans la progression est connuë, sçavoir c ou 2; donc le second terme sera 5, le troisiéme sera 7, &c.

QUESTION.

Une fontaine artificielle a 12 jets d'eau differens, le second jette dans une heure deux pintes d'eau plus que le premier, le troisiéme deux pin-

ces.

tres plus que le second, & ainsi de suite, & tous ensemble jettent 168 pintes d'eau dans une heure. L'on demande combien chacun des jets de cette fontaine jette d'eau dans une heure.

L'on connoît la difference qui regne dans cette progression, sçavoir 2, le nombre des termes qui est 12, la somme de tous les termes qui est 168; ainsi par la treiziéme Proposition on trouvera que le premier jette dans une heure trois pintes d'eau, le second cinq pintes, le troisiéme sept pintes, ainsi de suite.

QUINZIE'ME PROPOSITION.
Problême onziéme.

Connoissant le nombre des termes d'une progression Arithmetique, & leur somme avec le premier ou le dernier terme, connoître le reste. 35

Ce nombre 168 est la somme d'une progression qui a douze termes, le dernier terme est 25; on cherche le premier terme, & la difference qui regne dans cette progression.

Selon ce qui a été démontré dans la quatorziéme Proposition, ayant divisé 168 par 6, moitié du nombre des termes de cette progression, le quotient de cette division qui est 28, sera la somme des Extrêmes. Or 25 est le dernier terme, donc 3 sera le premier terme. Par la Proposition sixiéme ci-dessus, on trouvera la difference qui regne dans cette progression.

QUESTION PREMIERE.

Un debiteur est obligé de payer la premiere semaine une livre, la suivante quatre livres, la troisiéme sept livres; ainsi chaque semaine trois livres plus que dans la precedente. On demande combien il doit payer la vingt huitiéme semaine.

Dans

Dans cette progression le nombre des termes est connu, la difference qui y regne, & le premier terme. Par la neuviéme Proposition on trouvera que la somme de cette progression est 82 livres. Car multipliant le terme precedent le dernier 28, c'est à dire 27 par 3, difference qui regne dans la progression, le produit est 81, auquel ajoûtant le premier terme 1 cela fait 82, qui est le 28 terme.

QUESTION SECONDE.

Un debiteur ayant payé 82 livres la vingt huitiéme semaine, & payé trois livres moins dans la semaine precedente, sçavoir la vingt septiéme, & toûjours de même en retrogradant, on demande combien il a dû payer à la fin de la premiere semaine.

Le terme penultiéme, sçavoir le 27 multiplié par la difference 3, c'est à dire 81, plus le premier terme est égal à 82, selon qu'on l'a vû dans la Question precedente: Donc de 82 ôtant 81, le reste 1 sera le premier terme qu'on demande, ou ce que le débiteur doit payer à la fin de la premiere semaine.

QUESTION TROISIE'ME.

Un debiteur doit pendant 28 semaines payer à la fin de chacune une certaine somme, qui croît également chaque semaine; la premiere il a payé une livre, la derniere 8 livres: on demande quelle est cette augmentation, c'est à dire quelle est la difference qui regne en cette progression.

Otez de 82 dernier terme le premier 1, reste 81; divisez ce nombre par le nombre des termes moins 1, par consequent par 27, le quotient 3 marquera cette difference, selon ce qu'on vient de voir dans les deux Questions precedentes.

QUES-

QUESTION QUATRIE'ME.

Un debiteur a payé la premiere semaine une livre, la seconde 4, la troisiéme 7, de sorte que la difference de la progression est trois ; à la fin de la derniere semaine il a payé 82 : on demande le nombre de ces semaines.

Le dernier payement & le dernier terme de la progression est 82, dont j'ôte le premier terme reste 81, que je divise par 3 difference de la progression ; le quotient de la division est 27 : ainsi il y a 27 + 1 termes, c'est à dire 28 : ce qu'on demandoit.

QUESTION CINQUIE'ME.

Le débiteur doit payer pendant vingt huit semaines à la fin de chacune un certain prix croissant de 3 livres : à la fin de la premiere il a payé 1. & à la fin de la vingt huitiéme 82 : on demande combien il a payé en tout.

Le premier & le dernier termes 1 + 82 multipliez par la moitié du nombre des termes, sont égaux à la somme de tous les termes de la progression $\frac{\bar{s}}{2}$ n. 28 : multipliant donc 1 + 82 ou 83 par 14, puisqu'il y a 28 termes ; le produit 1162 est la somme que l'on demande.

QUESTION SIXIE'ME.

Un débiteur doit payer 1162 livres en un certain nombre de semaines, il a payé la premiere semaine 1 livre, & la derniere 82, payant en chacune plus qu'en la precedente dans la mesme Progression que dans les Questions precedentes : on demande quel est le nombre de ces semaines.

Je

Je divise 1162 par la somme du premier & dernier terme, c'est à dire par 1 + 82, ou 83 : le quotient est 14, je double ce quotient ; ce qui m'apprend que 28 est le nombre des semaines qu'on demande.

QUESTION SEPTIE'ME.

Un débiteur doit payer 1162 livres en 28 semaines, la premiere une livre dans les mêmes progressions : on demande ce qu'il payera la derniere semaine.

Je divise 1162 par la moitié de 28, c'est à dire par 14 ; le quotient est 83 dont je retranche le premier terme qui est 1, le dernier terme est 82 que je cherchois. Le débiteur doit donc payer 82 livres la derniere semaine.

SECTION TROISIE'ME.

DES RAISONS, ET DES PROPORTIONS ET PROGRESSIONS GEOMETRIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

On éclaircit la notion des Raisons. Methode pour connoître leurs proprietez, & celles des Proportions & Progressions Geometriques.

CE mot *Raison*, comme je l'ai fait voir, ne signifiant en general qu'un rapport, l'idée en est confuse quand on ne specifie point ce rapport. Avoir rapport, c'est être d'une certaine maniere au regard d'une autre; or dire en general qu'une chose est d'une certaine maniére au regard d'une autre, c'est parler confusément, au moins obscurément, si on ne specifie cette maniere; car la paternité est un rapport du pere au fils: ainsi ce n'est rien dire que les Raisons sont des raports. On ne peut tirer d'une notion si generale des Raisons aucune lumiere suffisante pour démontrer ce qu'on en propose dans les Mathematiques. Il est vrai que l'on ajoûte que Raison c'est un raport selon la quantité; mais quoi que cela marque que l'on considere la quantité ou la grandeur des choses qu'on compare & qu'on rapporte l'une à l'autre,

neanmoins on ne dit pas encore assez, puisque cette comparaison se peut faire en deux manieres; ainsi on ne donne pas une idée entiere de ce que c'est que Raison, selon qu'on prend ce mot.

On a vu que l'on peut comparer deux grandeurs l'une avec l'autre, ou en considerant leur difference, ou examinant comment l'une contient l'autre, ou en est contenuë. Ainsi pour donner une idée distincte des Raisons, c'est à dire des rapports des Grandeurs entant qu'on veut parler d'un rapport qui ne consiste pas dans la différence de deux grandeurs qu'on rapporte l'une à l'autre, il faut necessairement dire que Raison c'est une maniere de contenir, ou d'être contenu.

Ce qui a trompé plusieurs personnes, & leur a fait rejetter cette notion que nous donnons ici des Raisons, c'est qu'ils se sont imaginez que les Raisons ainsi expliquées, ne pouvoient s'appliquer qu'aux Grandeurs, dont l'une contient l'autre ou en est contenuë exactement tant de fois, & qu'on peut exprimer par nombres. Il y a, disent-ils, & ils ne se trompent pas en cela, une infinité de Grandeurs dont on ne peut pas dire que l'une soit contenuë un certain nombre de fois dans l'autre: ainsi comment dire que la raison qu'elles ont entr'elles est la maniere dont elles se contiennent, puisque cette maniere est inconnuë, & qu'il est impossible de l'exprimer? Ce qu'on peut donc dire de leur raison, c'est que l'une a un rapport à l'autre.

Volla tout ce qu'ils peuvent dire contre la notion que je donne des Raisons, mais cela n'a aucune force; car bien que je ne connoisse point la maniere précise qu'une Grandeur est contenuë dans une autre, cela n'empêche pas que je ne puisse démontrer les proprietez des Raisons & des

Pro-

Proportions Geometriques, ſuivant cette notion que je donne des Raiſons. Si je ſçai que *b* eſt contenu dans *c* comme *d* dans *f*, ſans pourtant ſçavoir ſi c'eſt exactement ou avec reſte, ſuivant la définition des Proportions je ſçaurai certainement que ces quatre termes *b. c. d. f.* ſont proportionnels; Ignorant, dis je, la maniere dont *b* eſt contenu dans *c*, je pourrois faire voir que *d* eſt à *f* comme *b* à *c*. ſi j'avois un moyen de démontrer qu'effectivement *d* eſt contenu dans *f* comme *b* l'eſt dans *c*. Il ne ſeroit pas neceſſaire que je pûſſe dire preciſément cette maniere, que par exemple *b* eſt le tiers de *c* comme *d* eſt le tiers de *f* Il ſuffiroit que je fiſſe voir que ſi on ſuppoſoit *c* & *f* diviſez en mille parties, ſi *b* étoit une milliéme partie de *c*, *d* ſeroit auſſi une milliéme partie de *f*; & que ſi diviſant *c* par *b* il reſtoit un reſte, diviſant *f* par *d* il y auroit auſſi un reſte; & que ſi on concevoit ce reſte de *c* diviſé en mille parties, & le reſte de *f* diviſé auſſi en mille parties, *b* ſeroit à chaque milliéme partie du reſte de *c* comme *d* à la milliéme partie du reſte de *f*; ainſi à l'infini. Lors, dis je, que cela ſe peut démontrer, il eſt évident que la maniere dont *d* eſt contenu dans *f* eſt la même que celle dont *b* eſt contenu dans *c*; ainſi cette définition des Raiſons que ce ſont des manieres de contenir ou d'être contenu convient à toutes les Raiſons, tant à celles qu'on peut exprimer par nombre, qu'à celles qui ne le peuvent. Il n'eſt pas même neceſſaire d'ajoûter dans la définition des Raiſons, qn'il faut afin que deux Raiſons ſoient ſemblables, que ſi on diviſe le premier & le ſecond Antecedent en mille parties, & que le premier Conſequent ſoit une milliéme partie du premier Antécedent, le ſecond Conſequent ſoit auſſi une milliéme partie du ſecond Antecedent; & que ſi le

per-

premier Consequent se trouve plus petit qu'une milliéme partie du premier Antecedent, le second Consequent se trouve aussi plus petit qu'une milliéme partie du second Antecedent. Car si cela n'étoit pas, les deux manieres de contenir ou d'être contenu ne seroient pas les mêmes. Une définition doit être courte & nette. Nous démontrerons dans ces Elemens tout ce qu'on peut démontrer touchant les Raisons des Grandeurs en general, sans avoir besoin de cette addition; mais dans les Elemens de Geometrie nous nous en servons utilement. Il n'y a point de moyen plus naturel pour démontrer les proportions des lignes.

CHAPITRE II.

Explication des termes dont on se doit servir.

PREMIERE DEFINITION.

36 *RAison de deux Grandeurs étant la maniere que l'une est contenuë dans l'autre, ou qu'elle la contient, si cette Raison se peut exprimer par un nombre, elle est appellée exacte ou de nombre à nombre.*

Par exemple, si *a* est contenu exactement ou 2 fois, ou 3 fois dans *b*, on dit que la raison de *a* à *b* est une raison de *nombre à nombre.*

SECONDE DEFINITION.

37 *Lors qu'une Raison n'est pas de nombre à nombre, elle est appellée Sourde.*

Si on ne peut exprimer par nombre la raison de *b* à *c*, c'est à dire combien de fois *b* est contenu dans *c*, ou qu'il contient *c*, cette Raison est une Raison Sourde.

TROI-

TROISIE'ME DEFINITION.

La Raison exacte ou de nombre à nombre, se divise en Raison d'égalité ou d'inégalité. 38

Raison d'égalité c'est lors qu'une Grandeur est contenuë precisément & exactement une fois dans une autre.

La Raison d'inégalité se divise en celle qu'on appelle de plus grande inégalité, qui est quand on commence par le plus grand terme en le comparant au plus petit, comme 3 à 2; & celle de moindre inégalité est quand on commence par le plus petit terme en le comparant au plus grand, comme 2 à 3.

Ne confondez pas ces choses, Raison d'égalité, & égalité de Raisons: elles sont differentes. Egalité de Raisons est une similitude de Raisons, comme l'égalité de la raison de 3 à 6 & de celle de 2 à 4. La Raison d'égalité consiste dans l'égalité d'un antecedent à son consequent, comme est la raison de b*a*b.

Remarquez aussi qu'une raison appartient proprement à l'antecedent, c'est à dire que dans une raison ou rapport on considere premierement & principalement le terme antecedent: comme dans ce rapport du pere au fils qu'on nomme Paternité, *cette paternité appartient au pere. On appelle donc Raison de grande inégalité, quand l'Antecedent est plus grand que son Consequent. On dit que cette Raison est de moindre inégalité, lors que l'Antecedent est plus petit au regard de son Consequent,*

QUATRIE'ME DEFINITION.

Une Raison est dite inverse d'une autre Raison, si ce ne sont que les mesmes termes dont l'ordre est seulement renversé. 39

Ainsi

Ainsi la raison de 3 à 6 est inverse de celle de 6 à 3.

Cinquie'me Definition.

40 *La Raison exacte d'une Grandeur à une autre Grandeur, reçoit differens noms selon que l'Antecedent est contenu ou contient son Consequent un certain nombre de fois.*

La Raison de deux termes s'appelle Double, lors que l'un est contenu deux fois dans l'autre; Triple, s'il y est contenu 3 fois, &c. Lors que le plus petit terme est l'Antecedent, on dit Sousdouble, Soustriple, &c..

Sixie'me Definition.

41 *Divisant l'un des deux termes d'une Raison par l'autre terme, le quotient de cette division est appellé l'Exposant de cette Raison.*

Parce qu'il expose & fait connoître la maniere que l'un des deux termes contient l'autre, ou en est contenu. Ainsi divisant 12 par 6, le nombre 2 qui est le quotient de cette division, est l'Exposant de la Raison de 12 à 6.

Septie'me Definition.

42 *On appelle particulierement Exposans d'une Raison, les moindres nombres qu'on puisse trouver qui soient entr'eux comme les termes d'une Raison.*

Ainsi si *b* est la septiême partie de *c*, les exposans de la raison de *b* à *c* sont 1 & 7, qui sont les moindres nombres qui soient entr'eux, comme *b* est à *c*.

Huitie'me Definition.

43 *On dit que plusieurs termes sont proportionnels, lors que comme le premier d'une part est au premier de l'autre part; ainsi le second d'une part est au second*

second de l'autre part, & le troisiéme d'une part est au troisiéme de l'autre part. Ainsi de suite.

Ce qui se marque en ces deux manieres.

Premiere maniere. 2. 5 6. :: 4. 10. 12.

Seconde maniere. 2. 4 :: 5. 10 :: 6. 12,

Neuvie'me Definition.

Les termes homologues d'une proportion sont ceux qui sont de mesme nom, & tiennent la mesme place chacun en son rang. 44

Ainsi dans la proportion precedente 2 & 4, 5 & 10, 6 & 12 qui sont ou antecedens ou consequens, sont les termes *homologues* de cette proportion.

Dixie'me Definition.

Proportion ordonnée, c'est l'arrangement de plusieurs Grandeurs d'une part, & d'autant de Grandeurs d'une autre part, disposées de telle sorte que la premiere du premier ordre soit à la seconde du premier ordre, comme la premiere du second ordre est à la seconde, &c. 45

Voila une proportion ordonnée.

12. 4. 2. 8. :: 30. 10. 5. 20.

Onzie'me Definition.

Proportion troublée, c'est l'arrangement de plusieurs Grandeurs d'une part, & d'autant d'autres Grandeurs d'une autre part, disposées de telle sorte que la premiere du premier ordre soit à la seconde, comme la penultiéme du second ordre à la derniere; puis la seconde du premier ordre à la troisiéme, comme l'antepenultiéme du second ordre à la penultiéme, & ainsi de suite. 46

Voila une proportion troublée.

12. 4. 2, 18. 9. 3.

Dou-

Douzie'me Definition.

47 *La proportion Geometrique droite, c'est celle dont les termes sont disposez par ordre chacun en son rang.*

Comme 3 est à 6, de même 4 est à 8 ; cette proportion ainsi rangée 3. 6 :: 4. 8. est droite.

Treizie'me Definition.

48 *Si le premier terme est au second comme le quatriéme au troisiéme, cette proportion s'appelle Renversée, & alors on dit que les deux premiers termes sont reciproques aux deux autres.*

3, 6. :: 4. 8. Ces quatre termes étant ainsi rangez 3. 6. 8. 4. la proportion est renversée, & 3 est à 6 reciproquement, comme 8 est à 4.

Chapitre III.

Explications de quelques termes moins utiles.

JE ne dois pas passer sous silence l'explication de certains autres termes qui se trouvent dans les Livres. Il faut donc sçavoir que l'une & l'autre raison de plus grande inégalité & de moindre inégalité, sont distinguées en cinq especes.

Les especes de la raison de plus grande inégalité sont cinq. La premiere s'appelle *Multiple* ; la seconde *Surparticuliere* ; la troisiéme *Surpartiente* ; la quatriéme *Multiple surparticuliere* ; la cinquiéme *Multiple surpartiente.*

La raison *Multiple* est quand la plus grande contient tant de fois précisément la plus petite, comme 6 contient trois fois 2, ainsi 6 est multiple de 2.

La raison *Surparticuliere*, c'est lors qu'un nombre

bre en contient un autre une fois plus une partie, comme la raiſon de 3 à 2 eſt ſurparticuliere, car 3 contient une fois 2, & outre cela une partie de 2.

Les raiſons ſurparticulieres reçoivent differents noms; ce mot, *ſeſqui*, eſt un terme dont on ſert pour exprimer l'unité: ainſi raiſon *ſeſquialtere* eſt quand un nombre en contient un autre une fois & une moitié de ce nombre. La raiſon de 3 à 2 eſt *ſeſquialtere*, la raiſon de 4 à 3 eſt *ſeſquitierce*, parce que 4 contient une fois 3 & un tiers de 3; la raiſon de 5 à 4 eſt *ſeſquiquarte*, parce que 5 contient une fois 4 & une quatriéme partie de 4.

Raiſon *ſurpartiente* eſt quand la plus grande contient la plus petite une fois, & qu'elle contient outre cela plus d'une de ſes parties. La raiſon de 5 à 3 eſt *ſurpartiente*, parce que 3 eſt contenu une fois dans 5, outre cela il y a plus d'une partie de 3 dans 5, car la troiſiéme partie de 3 y eſt contenuë 2 fois, outre que 3 y eſt contenu une fois; ainſi cette raiſon de 5 à 3 eſt nommée *Surbipartiente-tierce*, celle de 7 à 4 *Surtripartiente-quarte*; ainſi cette raiſon reçoit differens noms.

Raiſon *multiple ſurparticuliere*, eſt quand le plus grand nombre contient le plus petit pour le moins 2 fois, & outre cela une des parties du plus petit. Telle eſt la raiſon de 5 à 2, car 2 eſt contenu 2 fois dans 5, outre cela 5 contient une partie de 2; ce qui s'appelle encore Raiſon *double ſeſquialtere*, comme celle de 7 à 3 *double ſeſquitierce*, celle de 13 à 4 *triple ſeſquiquarte*, parce que 13 contient 3 fois 4, plus une quatriéme partie de 4.

Raiſon *multiple ſurpartiente*, eſt quand le plus grand nombre contient 2 ou pluſieurs fois le plus petit, & plus d'une de ſes parties. Telle eſt la raiſon de 8 à 3, 8 contient 2 fois 3 plus 2 parties de 3; c'eſt pourquoi cette raiſon eſt nommée Raiſon

double surbipartiente tierce : la raison de 15 à 4, Raison *triple surtripartiente-quatriéme.*

Les cinq especes de la raison de moindre inégalité, ne different de celles dont nous venons de parler, que par cette particule *sous*, qu'on apposé à leur nom, au lieu de dire *multiple*, on dit *sous-multiple*, *sous-surparticuliere*, au lieu de dire *surparticuliere* ; ainsi tout ce qu'on a dit des cinq especes de la Raison de grande inégalité, se doit entendre des especes de la raison de moindre inégalité. Par exemple, la raison de 4 à 3 qui est de grande inégalité, est surparticuliere : la raison de 3 à 4 qui est de moindre inégalité, est une raison sous-surparticuliere.

Il n'est pas necessaire de forcer sa memoire à retenir ces noms, on ne doit pas même s'en servir : si une raison est de nombre à nombre, il faut l'exprimer par ses exposans. Par exemple, si la raison de *b* à *d* est triple sesquiquarte, au lieu de me servir de ces termes embarassans, je dirai simplement que *b* est à *d*, comme 13 est à 4.

On trouve aussi dans les Auteurs les termes suivans, lesquels j'expliquerai pour la même raison, quoi que je ne m'en serve pas dans ces Elemens.

Une grandeur est appellée *Multiple* au regard de ses parties, qui étant prises un certain nombre de fois lui sont égales ; ainsi 24 est multiple de *6*. Or on dit que deux Grandeurs sont multiples pareils ou *equimultiples*, lors qu'elles contiennent les parties dont elles sont les multiples un même nombre de fois : ainsi 10*b* & 10*d* sont des multiples pareils.

Lors qu'une partie d'une Grandeur est contenuë precisément tant de fois dans son tout, 2 fois, ou 3 fois, &c. cette partie est appellée *Aliquote* de cette Grandeur ; ainsi 5 est aliquote de 15. Il n'y a point de nombre qui tout au moins n'ait pour aliquote

quotel'unité; car tout nombre eſt contenu une fois en lui-même.

Si les parties aliquotes d'une Grandeur ſont autant de fois dans leur tout, que les parties aliquotes d'une autre Grandeur ſont dans le leur, elles ſont appellées *Aliquotes pareilles*; ainſi 3 & 4 ſont les aliquotes pareilles de 9 & 12, car 3 eſt contenu 3 fois dans 9, comme 4 eſt contenu trois fois dans 12.

On appelle *Aliquote commune*, un nombre qui étant pris autant qu'il faut, eſt égal à deux autres nombres: ainſi 3 eſt aliquote commune de 9 & de 12; car 3 pris trois fois eſt égal à 9, & pris 4 fois il eſt égal à 12. Deux nombres ont tout au moins pour leur commune aliquote l'unité, car il eſt manifeſte que l'unité repetée autant qu'il faut, eſt égale à quel que nombre que ce ſoit,

---

CHAPITRE IV.

Des proprietez des Raiſons & des Proportions Geometriques.

PREMIER AXIOME.

Les Raiſons égales ont des Expoſans égaux. 50

SECOND AXIOME.

Les Grandeurs égales ne peuvent être les Expoſans que de Raiſons qui ſoient egales. Si 4 & 2 exponens de 4 ad 2 nec non de 12 ad 6, erit 4 : 2 = 12 : 6. 51

LEs Raiſons ſont des manieres de contenir ou d'être contenu, d'où il eſt évident que deux raiſons ſont égales, c'eſt à dire que celle de *b* à *d* eſt la même que celle de *f* à *g*, lors que *b* contient ou eſt contenu dans *d* comme *f* dans *g*; ou ce qui eſt une même choſe, que diviſant *b* & *d* l'un par

l'autre, le plus grand par le plus petit, le quotient de cette division est le même que de la division de *f* par *g*. Car le quotient n'est qu'un signe ou une expression de la maniere qu'une Grandeur est contenuë dans celle qu'elle divise. Ces quotiens sont appellez les Exposans de ces Raisons par la sixiéme Définition ci-dessus qui seront ainsi égaux si ces quotiens sont égaux; les démonstrations du reste de ce Livre roulent toutes sur ces deux Axiomes.

Troisie'me Axiome.

52 *Si la raison de* b *à* d *est la mesme que celle de* f *à* g, *celle de* d *à* b *est la mesme que de* g *à* f.

Ce troisiéme Axiome n'est pas moins certain que le premier & le second. *Contenir* & être *contenu* sont des termes reciproques; ainsi il est évident que si *b* contient *d* comme *f* contient *g*; ainsi *d* est contenu dans *b*, comme *g* est contenu dans *f*.

Quand on tire une consequence de cet Axiome, cela s'appelle conclure *invertendo*.

Quatrie'me Axiome.

53 *Le premier Antecedent est au second Antecedent, comme le premier Consequent au second Consequent.*

Ainsi si *A.B* :: *C. D*; donc *A.C* :: *B. D.* laquelle maniere de conclure s'appelle *Alternando*. On compare alternativement *A* avec *C*, l'Antecedent avec l'Antecedent; & *B* avec *D* le Consequent avec le Consequent. Ce que nous appellons ici *Alternando*, d'autres l'appellent *Permutando*.

Nous avons vu dans la Section precedente l'importance qu'il y a de réduire autant que cela se peut, plusieurs & differentes Grandeurs aux mesmes signes; de sorte que dans la maniere qu'on les ex-

exprime on apperçoive ce qu'elles ont de commun, & ce qu'elles ont de particulier. On le peut faire ici de mesme.

Les lettres marquent toutes sortes de Grandeurs; ainsi une Raison étant proposée telle qu'elle soit, sourde ou non, je puis appeller b *l'Antecedent de cette Raison, &* d *le Consequent; je puis diviser* b *par* d, *ou* d *par* b. *Or si je nomme* q *le quotient de* d *divisé par* b, *qui est le signe de la maniere que* b *est contenu dans* d: *donc puisque le quotient d'une division multipliant le diviseur, ici* q *multipliant* b, *doit faire une grandeur égale à la grandeur divisée* d, *il faut que* qb *soit égal à* d, *Livre I. n.* 21. *Ainsi je puis nommer* qb *la grandeur* d, *& reduire ces deux termes* b *&* d *à ceux-ci* b. qb *quoi que je ne connoisse point leur valeur, & même qu'elle ne se puisse pas exprimer par nombres, & qu'ainsi leur raison soit sourde. Car* q *ne marque autre chose que la maniere que* b *est dans* d, *sans la déterminer. C'est le quotient de* d *divisé par* b, *qui ne dit point si* b *peut diviser exactement* d *ou non. Il est certain par les Axiomes qu'on vient de proposer, que les raisons égales ont des exposans égaux, les exposans sont les quotiens; par consequent lors que deux raisons sont égales, que* b *est à* d *comme* f *est à* g, *si le quotient de* d *divisé par* b *est* q, *celui de* g *divisé par* f *doit être le même; ainsi* g *doit être égal à* qf. *On peut donc reduire cette proportion* b. d :: f. g *à celle-ci*, b. qb :: f. qf. *C'est ce que je dis en moins de paroles dans le Lemme suivant & son Corollaire.*

LEMME.

Le plus grand terme d'une Raison est égal au plus petit, multiplié par le quotient de la division du plus grand par le plus petit. 54

Soient b & d les deux termes d'une raison, b est le plus petit terme. Ayant divisé d par b, je nomme q le quotient de cette division. Ce quotient q, multipliant le diviseur b, le produit qb sera égal à d la grandeur divisée, Liv. I. n 21. Ainsi $qb = d$, ce qu'il falloit prouver.

Je supposerai toûjours pour abreger, que c'est le consequent qui est le plus grand terme. Si d *avoit été plus petit que* b, *la même démonstration fait voir que* $qd = b$.

Corollaire.

55 *On peut donc exprimer les termes d'une Raison de la maniere suivante.*

J'appellerai toujours q le quotient du consequent divisé par l'antecedent. Si ces termes sont donc b & d, je pourrai mettre qb au lieu de d. Je pourrai aussi exprimer tous les termes d'une progression de cette même maniere, & changer par exemple cette progression $\div\!\div\ b, c, d, f, g, h, k$, en celle-ci, $\div\!\div\ b.\ qb.\ qqb.\ q^3b.\ q^4b.\ q^5b.\ q^6b.$ qui est la même; car par le Lemme precedent $qb = c$, & multipliant qb par le quotient de la raison de c à d, qui est toûjours le même, sçavoir q, il faudra que $q^2b = d$; ainsi que $q^3b = f$, & que $q^4b = g$, &c.

Premiere Proposition.
Premier Theorême.

6 *Deux grandeurs sont égales, lors qu'elles ont même raison à une troisiéme grandeur.*

Soit $b.g :: b\ f$. c'est à dire que g & f ont une même raison avec b, je dis que $g = f$. Ayant divisé g par b, & f par le même b, puisque les raisons de b à g & de b à f sont égales, ces deux divisions auront un même exposant, ou même quotient, selon

ſelon le premier Axiome. Je nomme q ce quotient ; donc par le Lemme precedent, $qb = \frac{g}{f}$. Ainſi les grandeurs g & f étant égales à une même grandeur, ſçavoir à qb, elles ſont égales entr'elles ; ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE PROPOSITION.

Second Theorême.

Deux Raiſons égales à une troiſiéme raiſon, ſont égales entr'elles. 57

La raiſon de b à d eſt égale à celle de x à z, à laquelle celle de f à g eſt auſſi égale. $b.d :: x.z$, & $f.g :: x.z$. Il faut démontrer que $b.d :: f.g$ Par l'hypotheſe, ſelon le premier Axiome, l'expoſant de la raiſon de b à d. ou ce qui eſt la même choſe, le quotient de d diviſé par b, eſt le même que celui de z diviſé par x, puiſque ces deux raiſons ſont égales. Ainſi ſi le quotient de la raiſon de b à d eſt q, celui de la raiſon de x à z ſera auſſi q. Or puiſque f eſt à g comme x eſt à z, & que le quotient de x à z eſt q, donc celui de f diviſé par g ſera auſſi q. Puis donc que ces deux raiſons ont un même quotient, ſçavoir q, elles ont un même expoſant ; Donc, ſelon le premier Axiome, elles ſont égales, ce qu'il falloit prouver.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Troiſiéme Theorême.

Deux Grandeurs demeurent en même Raiſon, quoi qu'on ajoûte à l'une & à l'autre, pourveu que ce qu'on ajoûte à la premiere ſoit à ce qu'on ajoûte à la ſeconde, comme la premiere eſt à la ſeconde. 58

Soient donnez d'une part b & d, & de l'autre f & g : on ajoûte f à b, ce qui fait $b + f$ & g à d,

ce qui fait $d+g$; si $b.d :: f.g$, je dis que $b+f.$ $d+g :: b\ d$; ce qu'il faut démontrer.

Soit q l'exposant de la raison de b à d, qui sera aussi celui de la raison de f à g, puisque ces raisons sont égales: Donc par le Corollaire du Lemme ci-dessus, je puis exprimer ainsi ces quatre grandeurs $b.d.f.g.$ les réduisant à celles-ci $b.qb.f.qf$; ainsi ajoûtant f à b, & qf à qb, il faut démontrer que $b+f.\ qb+qf :: b.d.$ Pour cela je divise le premier consequent $qb+qf$ par le premier antecedent $b+f$, le quotient de cette division est q. selon ce qui a été enseigné touchant cette Operation dans le premier Livre, que pour diviser par exemple $qb+qf$ par $b+f$, il n'y avoit qu'à supprimer les lettres communes au diviseur, & à la grandeur qui doit être divisée, sçavoir ici $b+f$, aprés quoi il ne reste que q. Or par l'hypothese le quotient de d divisé par b est aussi q: donc par le second Axiome la raison de $b+f$ à $qb+qf$. où de $b+f$ à $d+g$, est égale à celle de b à d; qui est ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

59 *Lors que deux Raisons sont égales, l'antecedent de l'une plus son consequent est à ce même consequent, comme l'antecedent de l'autre plus son consequent est à ce consequent.*

Ce Corollaire n'est qu'une expression particuliere de la Proposition precedente, car deux raisons étant égales, le premier consequent est au premier antecedent, comme le second consequent est au second antecedent par le troisiéme Axiome. Soit $b.d :: f.g$; il est évident que le premier consequent d est au premier antecedent b, comme le second consequent g est au second antecedent f, donc, selon cette proposition, $b+d.\ d :: f+g.\ g$.

Quand

Quand on compare ainſi les antecedens plus leurs conſequens avec ces mêmes conſequens, cela s'appelle compoſer. Et quand on en tire quelque conſequence, on dit qu'on conclut *componendo*.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Quatriéme Theorême.

Deux grandeurs demeurent en même raiſon, quoi qu'on retranche de l'une & de l'autre, pourveu que ce qu'on retranche de la premiere ſoit à ce qu'on retranche de la ſeconde, comme la premiere eſt à la ſeconde. 60

Soit $b.\ d :: f\ g$, on retranche f de b; ce qu'on marque ainſi $b - f$, & g de d, ce qui ſe marque de même $d - g$; il faut démontrer que $b - f.\ d - g :: b.\ d.$ Soit diviſé le conſequent d par ſon antecedent b, je ſuppoſe que le quotient eſt q; diviſant g par f, cette diviſion aura le même quotient q, puiſqu'on ſuppoſe que la raiſon de f à g eſt égale à celle de b à d. Je puis donc, par le Corollaire du dernier Lemme, ſ̃ n. 54. ſubſtituer qb en la place de d, & qf en la place de g; ainſi il faut démontrer que

$b - f\ qb - qf :: b.\ d.$ On a ſuppoſé que le quotient de d diviſé par b eſt q. Or diviſant le conſequent $qb - qf$ par l'antecedent $b - f$, le quotient eſt le même, ſçavoir q: donc par le ſecond Axiome ci deſſus,

$b - f,\ qb - qf :: b.\ d.$ ou $b - f.\ d - g :: b.\ d.$

COROLLAIRE.

Lors que deux Raiſons ſont égales, le premier antecedent moins le premier conſequent, eſt à ce conſequent comme le ſecond antecedent moins le ſecond conſequent, eſt à ce ſecond conſequent. 61

Soit f à g comme b à d; ainsi $b.\ d :: f.g$: donc par cette presente Proposition,

$$b - d.\ d :: f - g.\ g.$$

Quand on tire une consequence de cette verité, on appelle cela conclure *dividendo*. Il me semble qu'on auroit dû dire *subtrahendo*, car c'est une soustraction.

Cinquie'me Proposition.

Cinquiéme Theorême.

62 *Lors que deux Raisons sont égales, le premier antecedent est au premier antecedent moins le premier consequent, comme le second antecedent est au second antecedent moins le second consequent.*

Si $a.\ b :: c.\ d$, il faut que $a.\ a - b :: c.\ c - d$, car *alternando* $a.\ c :: b.\ d$: donc de a & de c ôtant des grandeurs qui sont en même raison aprés cette soustraction, les restes sont en même raison.

Quand on tire une consequence de cette verité, cela s'appelle conclure *convertendo*.

Sixie'me Proposition.

Sixiéme Theorême.

63 *Lors que deux grandeurs sont multipliées par une même grandeur, elles sont, étant multipliées, en même raison qu'avant que d'être multipliées.*

Soient les grandeurs b & d multipliées par x, il faut démontrer que $xb.\ xd :: b.\ d$. Ayant divisé le consequent d par l'antecedent b, soit nommé le quotient de cette division q; ainsi $qb = d$, & par consequent $xqb = xd$. Il faut donc démontrer que $xb.\ xqb :: b.\ d$. Par l'hypothese le quotient de la division de d par b est q. Or divisant le consequent xqb par l'antecedent xb, le quotient est encore q, selon ce qui a été enseigné en parlant de la

la division ; par consequent par le second Axiome ci dessus, les deux raisons proposées ayant le même quotient, elles sont les mêmes.

xb. xqb :: *b. d.* ou *xb. xd.* :: *b. d.* ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Le multiplicateur est au produit de la multiplication comme l'unité à la grandeur à multiplier, ou comme le nombre à multiplier au produit de la multiplication. 64

Soit le nombre 6 à multiplier par le multiplicateur 3, en multipliant 1 & 6 par 3 ; ce qui fait 3 & 18. La même raison demeure

1 6 :: 3 18

alternando 1 3 :: 6 18

Donc comme l'unité est au multiplicateur 3, de même 6, nombre à multiplier, est au produit 18.

De même si *b* est multiplié par *d*, dont *bd* est le produit 1. *b* :: *d. db.*

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Septiéme Theorême.

Divisant deux grandeurs par une troisiéme, les quotiens de ces divisions seront en mesme raison que ces grandeurs. 65

Soient deux grandeurs *b* & *d*, je les divise par *x*, le quotient de *b* par *x* soit nommé *p*, & celui de *d* par *x* soit nommé *q*, il faut prouver que *p. q* :: *b d.* Or $px = b$, & $qx = d$; ẽ *n.* 55. Donc *px. qx* :: *b. d.* Or *p* & *q* ayant été multipliez par *x*, selon la Proposition precedente, *xp. xq* :: *p. q* : donc, par la seconde ci-dessus, puisque les raisons de *b* à *d* & de *p* à *q* sont égales à une troisiéme raison qui est celle de *xp* à *xq*, il faut que *p. q* :: *b. d* ; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

66 *Le diviseur est à la grandeur à diviser comme l'unité est au quotient, ou comme l'unité est au quotient aussi le diviseur est au nombre à diviser.*

Soit 18 à diviser par le diviseur 6, le quotient est 3. Or c'est la même chose que si on proposoit de diviser 6 & 18 par 6, dont les quotiens sont 1 & 3, qui par le Theorême sont entr'eux comme 6 & 18, qui est ce qu'il falloit prouver.

1. 3 :: 6. 18.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Huitiéme Theorême.

67 *Lors que quatre grandeurs sont en proportion Geometrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soient ces quatre grandeurs $b.\ d :: f.\ g$, dont b & g sont les extrêmes, & d & f les moyens, il faut démontrer que $bg = df$. Ayant nommé q le quotient de la raison de b à d, celui de la raison de f à g sera aussi q. Donc ⁊ n. 55. je puis nommer qb la grandeur d, & qf la grandeur g; ainsi il faut démontrer que $bqf = bqf$; ce qui est évident, puisque ce sont les mêmes grandeurs. Voici encore une autre démonstration.

Multipliant les deux derniers termes f & g par le premier qui est b, par la sixiéme Proposition $bf.\ bg :: f.\ g$, & par la même Proposition multipliant b & d par f qui est le second antecedent $bf.\ fd :: b.\ d$, & par consequent bg & fd ayant même raison avec une troisiéme, sçavoir bf, par la premiere Proposition ces deux produits sont égaux; ce qu'il falloit démontrer.

$$bf \begin{cases} bg :: f.\ g. \\ fd :: b.\ d. \end{cases}$$

Co-

COROLLAIRE.

Trois grandeurs étant en proportion continuë, le terme moyen multiplié par lui-mesme ou le quarré de ce terme, égal au produit ou plan fait des deux extrêmes. 68

Soient $\div b, c, d$, je dis que $cc = bd$; car $b. c :: c. d$; donc $bd = cc$.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Neuviéme Theorême.

Lors que quatre grandeurs sont tellement dispo-sées que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, ces quatre grandeurs sont proportionnelles. 69

Soient ces quatre grandeurs b, d, f, g. Si fd produit des moyens f & d est égal à bg produit des extrêmes b & g; je dis que $b.d :: f.g$. Je multiplie f & g par b, par la 6e Proposition $bf.bg :: f.g$. Je multiplie b & d par f: ainsi par la même Proposition $bf, fd :: b, d$. Or puisque fd & bg sont deux produits égaux : Donc $bf \left\{ \begin{array}{l} fd :: b. d. \\ bg :: f. g. \end{array} \right.$ La raison de bf à fd est la même que celle de bf à bg, puisque fd & bg étant égaux, ce n'est qu'une même grandeur; Donc s n. 57 la raison de b à d est la même que celle de f à g: ainsi $b. d :: f. g$; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE PREMIER.

Donc si $ab^2c\ ab^2c - ab^2c = ab^2c - abc^2$, il faut que les grandeurs bc & $ab - ac$ qui ont produit $ab^2c - abc^2$ soient ou extrêmes ou moyens d'une proportion : donc ab & $ac - bc$, qui ont produit $a^2bc - ab^2c$ sont aussi extrêmes ou moyens.

Co-

Corollaire Second.

71 *Tout changement qui n'empêche point que de quatre grandeurs les mesmes soient ou extrêmes ou moyens, ne trouble point leur proportion.*

Soit *b. d* :: *f. g.* Quelque changement qui arrive, pourveu que *b* & *g* soient ou les deux moyens ou les deux extrêmes, & que *d* & *f* soient aussi ou les deux moyens ou les deux extrêmes; de sorte que le produit $bg = df$, ces quatre termes seront proportionnels. Or en transposant les raisons, comme lors que de *b. d* :: *f. g.* on fait *f. g* :: *b. d.* les moyens deviennent les extrêmes, & les extrêmes les moyens: ainsi la proportion n'est point troublée, puisque $df = bg$.

De même en changeant la disposition des termes de chaque raison, de sorte que le consequent prenne la place de l'antecedent, & l'antecedent celle du consequent, comme si de *b. d* :: *f. g* on fait *d. b* :: *g. f.* Par ce changement les extrêmes deviennent les moyens, par consequent $bg = df$; ainsi la proportion demeure. En prenant les termes d'une proportion alternativement, c'est à dire en comparant les antecedens ensemble, & les consequens ensemble; comme si de *b. d* :: *f. g.* on fait *b. f* :: *d. g*, alors *b* & *g* demeurent les extrêmes, & *f* & *d* les moyens; la proportion demeure donc, puisque $bg = fd$.

On tire souvent des consequences de ces changemens, qui ne changent point la proportion dont on vient de parler dans le Corollaire precedent, ou dans ce qui precede. Ainsi 1°. *si* a. b :: c. d, *la consequence est bonne* invertendo, *b. a* :: *d. c.*

2°. *Si* a. b :: c. d, *la consequence est bonne* alternando *ou* permutando, *a c* :: b d.

3°. *Si* a. b :: c. d; *la consequence est bonne*

a

a + b. b :: c + d. d; *ce qui se nomme* componendo.

4°. *Si* a. b :: c. d, *la consequence est bonne* a — b. b :: c — d. d; *ce qui s'appelle* dividendo.

5°. *Si* a. b :: c. d. *la consequence est bonne* convertendo *a. a — b :: c. c — d.*

Cela a été démontré ci-dessus. Or on peut tirer, en la mesme maniere, des consequences des deux Propositions suivantes qu'on va démontrer.

Dixie'me Proposition.

Dixiéme Theorême.

S'il y a deux suites de grandeurs a, b, e, *&* c, d, f, *telles que* a. b :: c. d, *&* b. e :: d. f, *on peut conclure donc* a. e :: c. f. *Cela s'appelle conclure* ex propositione ordinata. 72

Selon la supposition *ad = bc* & *ed = bf*: donc *ad. ed :: bc. bf*; car *bc* & *bf* ont une même raison à une troisiéme *ad*, ou à son égale *ed*. Or *ad. ed :: a. e*, ẽ n. 63. & *bc. bf :: c. f*: Donc *a. e :: c. f*; ce qu'il falloit prouver.

Onzie'me Proposition.

Onziéme Theorême.

S'il y a deux suites de grandeurs a, b, e, *&* c, d, f; *telles que* a. b :: d. f, *&* b. e :: c, *on peut conclure donc* a. e :: c. f. 73

Cela s'appelle conclure *ex propositione perturbata*, comme dans la démonstration precedente *af = ec*: ainsi *af. ef :: ec. ef*. Mais *af. ef :: a. e*, & *ec. ef :: c. f* : donc *a. e :: c. f*; ce qu'il falloit prouver.

Douzie'me Proposition.

Douziéme Theorême.

Les quotiens d'une mesme grandeur divisée par 74

dif-

differens diviseurs, sont reciproquement entr'eux comme les diviseurs.

Soit a divisé par b, dont le quotient soit nommé p; ainsi $\frac{a}{b} = p$. Soit aussi a divisé par c, dont le quotient soit nommé q; ainsi $\frac{a}{c} = q$. Il faut prouver que p est à q reciproquement comme b est à c, & par consequent que $p.q :: c.b$.

Puisque le quotient multiplié par le diviseur, fait un produit égal à la grandeur divisée: donc $pb = a$, & $qc = a$: donc $pb = a = qc$: donc $pb = qc$: donc s̃ n. 69. $p.q. :: c.b$; ce qu'il falloit démontrer.

Treizie'me Proposition.

Treiziéme Theorême.

75 *Dans une proportion de plusieurs termes, comme l'un des antecedens est à son consequent; ainsi la somme de tous les antecedens sera à celle de tous les consequens.*

Soit $b.c :: d.f :: g.h$. Il faut démontrer que $b+d+g$ somme des antecedens, est à $c+f+h$ somme des consequens, comme b est à c, ou d à f, ou g à h.

Alternando b.d :: c.f.
Componendo b+d.d :: c+f.f.
Alternando b+d. c+f :: d.f.

Par l'hypothese $d.f :: g.h$.
Donc $b+d.\ c+f :: g.h$.
Alternando b+d.g :: c+f.h.
Componendo b+d+g. g :: c+f+h.h.
Alternando b+d+g. c+f+h :: g.h; qui est ce qu'il faloit démontrer. La raison de g à h est la même que celle de b à c, & de d à f.

QUA-

QUATORZIE'ME PROPOSITION.

Quatorziéme Theorême.

Si l'on multiplie par ordre les termes de deux proportions, les produits seront aussi en proportion. 76

Soit $a.b :: c.d.$, & $e.f :: g.h$. Je dis que $ae.bf :: cg.dh$: car s. n. 67. $ad = bc$, & $eh = fg$, & multipliant ad & bc grandeurs égales par les grandeurs égales eh & fg elles resteront égales. Ainsi $adeh = bcfg$, ou $aedh = bfcg$: donc par la neuviéme Proposition $ae.bf :: cg.dh$.

COROLLAIRE.

1°. *Si l'on divise les termes d'une proportion par les termes d'une autre, les quotiens seront aussi en proportion.* 77

Car $\frac{ae}{e}.\frac{bf}{f} :: \frac{cg}{g}.\frac{dh}{h}$ devient $a.b :: c.d$.

2°. *Les puissances quelconques d'une proportion sont aussi en proportion.*

Si $a.b :: c.d$ en multipliant les termes de cette proportion par eux-mêmes, l'on aura $aa.bb :: cc.dd$; multipliant encore celle-ci par la premiere, l'on aura $a^3.b_3 :: c_3.d^3$.

3°. *Les racines quelconques des termes d'une proportion, sont aussi en proportion.*

Si $a.b :: c.d.$ $\sqrt{a}.\sqrt{b}. :: \sqrt{c}.\sqrt{d}.$ &c.

CHA-

CHAPITRE V.

Usage des Proportions dans les Regles de Trois, de Compagnie, d'une Fausse position.

QUINZIE'ME PROPOSITION.

Problême premier.

78 *LEs trois premiers termes d'une proportion de quatre termes connus, connoitre le quatriéme.*

Soient donnez *b*, *c*, *d* les trois premiers termes d'une proportion de quatre termes, on cherche le quatriéme.

Il faut multiplier le second & le troisiéme l'un par l'autre, ce qui fait *cd*, & diviser ce produit par le premier terme *b*. Je suppose que le quotient de cette division soit *f*, je dis que *f* sera le quatriéme terme que l'on cherche, & je le démontre.

Le quotient *f* de *c d* divisé par *b* étant multiplié par *b*, il fait un produit égal à *cd*, Liv. I. n. 21. Ainsi $bf = cd$; Donc ces quatre termes *b*, *c*, *d*, *f* font une proportion *b*. *c* :: *d*. *f*, § n. 69. Le quatriéme terme de cette proportion se connoît ainsi.

Si on me donnoit donc ces trois nombres 8, 12 & 10, & qu'on demandât un quatriéme terme qui fût à 10 comme 12 est à 8, je multiplierois le second terme 12 par le troisiéme qui est 10, ce qui fait 120, lequel produit je diviserois par le premier terme 8. Le quotient de cette division qui est 15, seroit à 10 comme 12 est à 8.

COROLLAIRE.

79 *Soit* b, c : : d, f. *Voila ce qui doit arriver, selon ce Problême.*

1°.

1o. *c* le ſecond terme ayant été multiplié par le troiſiéme *d*, & le produit *cd* ayant été diviſé par le quatriéme *f*, le quotient de la diviſion ſera le premier terme : car par la neuviéme *f*, *d* :: *c*. *b*. Ainſi on peut prendre le dernier conſequent pour le premier antecedent, & alors *b* qui étoit le premier terme, ſera le quatriéme.

2°. *b*, premier terme, ayant été multiplié par *f* quatriéme terme, & le produit *bf* ayant été diviſé par *d* troiſiéme terme, le quotient de cette diviſion ſera égal à *c* ſecond terme ; car par la neuviéme *d*, *b* :: *f*, *c*, ou *c* eſt le quatriéme.

3o. Le troiſiéme terme *d* eſt égal au produit du premier *b*, par le quatriéme *f* diviſé par le ſecond *c* ; car *c*, *b* :: *f*, *d*, & alors *d* eſt le quatriéme terme.

4°. Si la proportion eſt renverſée, c'eſt à dire qu'au lieu de cette diſpoſition *b*, *c* :: *d*, *f*, ces termes ayent celle-ci *b*, *c*, *f*, *d*, dans laquelle le quatriéme *d* eſt d'autant plus grand que le troiſiéme *f*, que le ſecond *c* eſt plus petit que le premier *b*, alors le quatriéme terme *d* eſt égal à *bf* produit du premier *b* par le troiſieme *f* diviſé par le ſecond qui eſt *c* ; car ces termes étant diſpoſez comme dans une proportion droite, ils peuvent être ainſi placez, *c*, *b* :: *f*, *d*. Or, ſelon la Propoſition precedente n. 78. le produit de *bf* diviſé par *c*, eſt égal à *d* : Donc, &c.

DE LA REGLE DE TROIS DROITE, ET INVERSE.

Ce dernier Corollaire enſeigne la pratique de la Regle qu'on appelle communément Regle de Trois, & à laquelle quelques uns, à cauſe du grand uſage qu'on en fait, ont donné le nom de Regle d'Or. La Regle de Trois eſt Droite ou Inverſe. 80

verse. Par la Regle de Trois droite on cherche le quatriéme terme d'une proportion dont les termes sont ordonnez proportionnellement, c'est à dire que le quatriéme est au troisiéme ce que le second est au premier. Par la Regle de Trois Inverse on trouve le quatriéme terme d'une proportion où l'ordre proportionnel des termes est renversé, de sorte que dautant que le second terme est plus grand ou plus petit que le premier, le quatriéme au contraire est plus petit ou plus grand que le troisiéme. Dans la Regle de Trois droite on raisonne du plus au plus, ou du moins au moins. Dans l'Inverse on raisonne du plus au moins, ou du moins au plus; ainsi il est évident qu'on renverse la raison.

QUESTION SUR LA REGLE DE TROIS DROITE.

Un homme dépense en 6 jours 24 pistoles; On demande combien en 30 jours il dépensera de pistoles, faisant toûjours les mesmes depenses.

Dans cette Question on cherche un quatriéme terme qui soit à 30, comme 24 est à 6. On connoît les trois premiers termes de cette proportion; pour trouver le quatriéme, il faut selon la Proposition precedente, multiplier 30 par 24, & diviser leur produit 720 par le premier terme qui est 6, le quotient de cette division 120 sera le quatriéme terme, & le nombre de pistoles que dépensera cet homme en 30 jours.

Toute la pratique de cette Regle consiste à aranger les termes connus & donnez, en sorte qu'ils soient proportionnels les uns aux autres, & que l'inconnu se trouve le quatriéme terme de la proportion; car on peut proposer cette question de maniere, que les termes ne soient pas rangez dans une proportion droite. Comme si par exemple on di-

disoit, Un homme a dépensé 24 pistoles en six jours; en trente jours, combien dépensera t-il? Il faut que les choses de même espece soient ou *les antecedens*, ou *les consequens* de la proportion. Si on a mis les jours pour premier antecedent, il faut que les jours soient le second antecedent; ce qui est évident lors que l'on a conçu ce que c'est que proportion. Il faut aussi tâcher de donner aux mêmes choses les mêmes noms. On pourroit proposer cette même question ainsi, demandant si un homme en six jours dépense 24 pistoles, combien dans un mois il dépensera d'écus? Ces nombres six jours, 24 pistoles, un mois, ne sont pas proportionnels. Pour ôter cette confusion, il faut donner à la même quantité les mêmes noms. Par exemple, ayant appellé le premier temps, jours, il faut appeller le second temps des jours: & ayant parlé de pistoles, il faut continuer à exprimer la quantité de l'argent par ce même nom de pistoles; après il faut placer ces noms de sorte, qu'ils se répondent. Au lieu donc de dire un mois, il faut dire trente jours: au lieu de dire combien depensera-t-on d'écus? il faut dire, combien dépensera-t-on de pistoles? Ce sont de petites difficultez qui ne peuvent pas arrêter ceux qui ont une notion distincte des proportions.

DE LA REGLE DE TROIS INVERSE.

On se sert de cette Regle lors qu'on cherche un 81
quatriéme terme plus petit que le troisiéme, à proportion que le second terme est plus grand que le premier, ou qui soit plus grand que le troisiéme, à proportion que le second est plus petit que le premier.

QUESTION SUR LA REGLE DE TROIS INVERSE.

A present que le septier de bled coûte 16 livres; pour une certaine monnoye j'ai 6 livres de pain, lors que la mesme mesure de bled ne vaudra que 8 livres, combien aurai je de livres de pain pour la mesme monnoye?

Les trois termes donnez 16, 6, 8, ne sont point rangez proportionnellement Le nombre proposé des livres de pain qu'on cherche, doit être d'autant plus grand que celui qui est connu, sçavoir 6. livres de pain, que 16 livres prix du septier de bled dans un certain temps, est plus grand que 8 prix d'un septier de bled dans un autre temps; ainsi le troisiéme terme devroit être le premier. C'est pourquoi faisant le contraire de ce qu'on a fait dans la Regle de Trois Droite, il faut multiplier le premier terme par le second, 16 par 6, ce qui fait 96, & diviser le produit 96 par le troisiéme qui est 8, le quotient de cette division 12 est le quatriéme terme. Ainsi cette Regle est assez inutile; car quand on connoît bien la nature des proportions, on peut arranger les termes d'une Question de sorte qu'ils fassent une proportion droite, dont on trouve le quatriéme terme par une Regle de Trois droite. Les termes de cette Question pouvoient se ranger en cette maniere.

8 *bled*, 16 *bled* :: 6 *pain*, 12 *pain*;

SEIZIE'ME PROPOSITION.

Problême second.

82 *Diviser proportionnellement une grandeur donnée aux parties données d'une autre grandeur.*

a est un nombre dont les parties sont *b*4, *c*2, *d*3.

*A*27 est un second nombre qu'on veut partager

ger en trois parties B, C, D, proportionnelles à celles de a; de sorte que

$$a9.\ A27 :: \begin{cases} b4 & B12 \\ c2 & C\ 6 \\ d3 & D\ 9 \end{cases}$$

Il faut chercher la valeur de B, de C, & de D; qui sont les quatriémes termes de cette proportion, par trois operations differentes.

1°. La valeur de B, multipliant b par A, & divisant le produit par a, le quotient de cette division, qui est 12, sera la valeur de B.

2°. Il faut multiplier c par A, & en diviser le produit par a, le quotient de la division qui est 6, sera la valeur de C.

3°. Multipliant d par A, & divisant leur produit par a, le quotient 9 sera la valeur de D. Or il n'y pas de doute que B, C, D ne soient les parties de A; car par l'hypothese, $a, A :: b, B :: c, C :: d, D$. Donc s̃ n. 75.

$a + b + c + d.\ A + B + C + D :: a, A.$

Donc *alternando*:

$a + b + c + d.\ a :: A + B + C + D.\ A.$

Donc *dividendo*:

$a + b + c + d - a.\ a :: A + B + C + D - A.\ A.$ ou ce qui est la même chose,

$b + c + d.\ a :: B + C + D.\ A.$

Or $b + c + d = a$ par l'hypothese: Donc $B + C + D = A$; ce qu'il falloit démontrer.

DE LA REGLE DE COMPAGNIE.

La Regle de Compagnie est une pratique de la Proposition precedente. Lors que plusieurs Marchands sont entrez dans une societé, & qu'ils ont fourni diverses sommes d'argent avec lesquelles ils ont fait un certain gain; on voit par cette Regle de

de Compagnie combien ils doivent gagner à proportion des sommes qu'ils ont contribuées, ou de quelle maniere il faut partager le gain proportionnellement aux sommes particulieres que chaque Marchand de cette Compagnie a contribuées, divisant par le moyen de la Proposition precedente, tout le gain proportionnellement aux parties de la mise totale.

QUESTION.

Trois Marchands ont fait une bourse de 10000. *livres; le premier a mis* 2000. *liv. le second* 5000. *liv. le troisiéme* 3000. *liv. ils ont gagné* 4000. *liv. On demande comment on pourra partager le gain qu'ils ont fait, proportionnellement aux sommes qu'ils ont avancées?*

Selon ce qui a été enseigné dans la derniere Proposition, il faut mettre au premier terme d'une Regle de Trois, l'addition des trois sommes contribuées, qui est 10000. livres; au second, le gain qui est 4000. livres; au troisiéme les trois sommes qu'ils ont avancées separément, & puis chercher les quatriémes termes proportionnels, qui se trouveront être pour le premier 800. liv. pour le second 2000. liv pour le troisiéme 1200. livres. Ces trois sommes sont les parties du gain 4000. liv. divisées en parties proportionnelles à la mise totale 10000. livres.

$$10000.\,l.\ 4000.\,l.\ ::\ \left\{\begin{array}{ll} 2000.\ l. & 800.\,l. \\ 5000.\ l. & 2000.\ l. \\ 3000.\ l. & 1200.\ l. \end{array}\right.$$

DE LA REGLE D'UNE FAUSSE POSITION.

84 Lors qu'on sçait la proportion que les parties inconnuës d'un nombre proposé ont ensemble, on suppose

ſuppoſe un nombre autre que le propoſé, dont les parties ſont en même proportion que celles du propoſé, & par les nombres ſuppoſez & connus, on connoît ceux qu'on cherche.

On appelle cette Regle, la Regle *de Fauſſe poſition*, parce qu'on ſuppoſe un nombre avec lequel on raiſonne comme ſi c'étoit le veritable nombre, quoi qu'il ne le ſoit pas. Il y a deux Regles de Fauſſe poſition; la premiere eſt d'une Fauſſe poſition, la ſeconde eſt de deux Fauſſes poſitions. Nous parlerons de cette derniere ailleurs.

QUESTION SUR LA REGLE DE FAUSSE POSITION.

On ſçait que les trois âges de trois perſonnes ſont enſemble 144 *ans, que l'âge de la ſeconde eſt double de l'âge de la premiere, & l'âge de la troiſiéme triple de l'âge de la ſeconde. On demande quel eſt l'age d'un chacun.*

Je fais cette ſuppoſition, que le premier eſt âgé de 3 ans, par conſequent ſelon la Queſtion, l'âge de la ſeconde perſonne doit être 6 double de 3, l'âge de la derniere eſt triple de la ſeconde; il doit donc être de 18. Or ces trois âges 3, 6, 18 ne ſont que 27, par conſequent ma ſuppoſition eſt fauſſe; car les trois âges ſelon la Queſtion, doivent faire 144 ans. Mais puiſque je ſçai que les parties de 144 ſont proportionnelles aux parties de 27, qui ſont 3, 6, 18 par la Propoſition precedente, je partage 144 en parties proportionnelles à celles de 27, comme il a été enſeigné ci-deſſus, n. 82.

$$27.\ 144 :: \left\{ \begin{array}{ll} 3 & 16 \\ 6 & 32 \\ 18 & 96 \end{array} \right.$$

Ainſi la premiere perſonne aura 16 ans, la ſeconde 32, & la troiſiéme 96.

CHAPITRE VI.

Des Progressions Geometriques.

DIX-SEPTIE'ME PROPOSITION.

Theorême quinziéme.

85 *DAns une Progression Geometrique, le produit de deux termes également éloignez des Extrêmes, est égal au produit des Extrêmes.*

Soit cette progression $\div$ $b.c.d.e.f.g.h.$ &c. il faut prouver que $cg = bh$, ou $df = bh$. Par la Définition des progressions $b, c :: g, h$: Donc § n. 67. $bh = cg$. Et puisque $b, d :: f, b$; Donc $bh = df$, &c.

COROLLAIRE.

86 *Le produit ou plan fait de deux termes d'une progression, est égal au quarré d'un troisiéme terme moyen entre ces deux termes.*

Ainsi $ce = dd$, & $df = ee$; car $c\ d :: d.e$, & $d.e. :: e.f$, &c.

DIX-HUITIE'ME PROPOSITION.

Theorême seiziéme.

87 *Dans une progression le second terme est égal au premier multiplié par la premiere puissance de l'exposant de la raison qui regne dans cette progression; le troisiéme au premier multiplié par la seconde puissance de cet exposant; le quatriéme au premier par la troisiéme puissance de cet exposant. Ainsi de suite.*

Il n'y a que l'expression de ce Theorême qui le fait paroître difficile. Ce n'est qu'une suite du Lemme proposé § n. 54. Soit cette progression

b,

$\div\div$ b, c, d, f, b, h, &c. supposant que l'exposant de la raison de h à c est q, c'est à dire que c divisé par b le quotient de cette division est q: Donc $qb = c$. Et puisque le quotient de d divisé par c ou qb est encore q: Donc qc ou qqb égal à d. Ainsi on reduira cette progression à celle-ci, qui est la même,

$\div\div$ b, qb, q^2b, q^3b, q^4b, q^5b, &c.

Vous voyez à l'œil que le second terme est égal à b le premier terme multiplié par la premiere puissance de l'exposant q, le troisiéme au premier b multiplié par la seconde puissance de q. Ainsi de suite.

Dix-neuvie'me Proposition.

Problême troisiéme.

Continuer une progression dont on connoît les trois premiers termes, ou deux seulement, avec l'exposant de leur raison. 88

Soient ces trois termes $\div\div$ $b.\ c.\ d.$ Multipliant c par d, & divisant le produit par b, le quotient $\frac{cd}{b}$ sera le quatriéme terme s̃ n, 78. $b.\ c.\ ::\ d.\ \frac{cd}{b}$. Or puisque $\div\div$ $c.\ d.\ \frac{cd}{b}$, c'est à dire que ces trois termes sont les trois premiers termes d'une proportion, on leur trouvera de la même maniere un quatriéme; ainsi on pourra augmenter à l'infini cette progression.

Si l'on sçait que l'exposant de la raison qui regne dans cette progression est q, c'est à dire que q est le quotient de c divisé par b, par la Proposition precedente, le troisiéme terme sera q^2b, le quatriéme q^3b, le cinquiéme q^4b; ainsi de suite.

In Exemplis ad Proportionem Geometricam s. potius ad Progressionem spectantibus tria inprimis observanda. 1. terminus Progressionis 2) numerus terminorum 3 exponens.

Vingtie'me Proposition.

Problême quatriéme.

89 *Trouver quelque terme que ce soit d'une progression dont on connoît le premier terme avec l'exposant de la raison qu'il a avec le second terme.*

Le premier terme d'une progression est 5, l'exposant de la raison qu'il a avec le second terme est 10; je veux trouver le huitiéme terme. Pour cela je prens la septiéme puissance de 10, en multipliant sept fois 10 par lui même; ce qui se fait en ajoûtant 7 zero aprés 10. Je multiplie donc par la septiéme puissance de 10 qui est 100000000, le premier terme 5, ce qui fait 500000000, qui sera le huitiéme terme que l'on cherche $\bar{s}$ n. 87. car il est fait du premier terme multiplié par la septiéme puissance de l'exposant de sa raison avec le second terme.

Premiere Question.

Un Marchand vend un tres-beau cheval, à condition que du premier clou de ses fers on donnera un denier, du second clou on donnera 10 deniers, du troisiéme 100, & il y en a 20: on demande combien le vingtiéme clou doit être payé?

Pour trouver ce prix il faut ajoûter 19 zero aprés 10; de sorte que ce dernier clou vaudroit 100000000000000000000 deniers; ce qui fait une somme prodigieuse. Tous les Princes du monde ne seroient pas assez riches pour acheter ce cheval à cette condition.

Seconde Question.

Jacob entra en Egypte avec 70 personnes. On suppose que sa famille aprés 20 ans fut deux fois aussi grande; que 20 ans ensuite elle s'augmenta

encore

encore deux fois autant, en mesme proportion, ainsi de suite. On demande de combien elle fut augmentée 200 aprés.

On cherche le dixiéme terme d'une progression, dont le premier terme est 70, pour cela j'éleve 2, exposant de la raison qui regne dans cette progression à la neuviéme puissance, multipliant 9 fois 2 par lui-même, ce qui fait 512, par laquelle puissance je multiplie le premier terme 70. Le produit est 35840. Ainsi les dernieres 20 années du second siecle aprés que Jacob entra en Egypte, sa famille s'augmenta de ce nombre.

VINGT-UNIE'ME PROPOSITION.

Theorême dix-septiéme.

Dans une progression Geometrique le second terme, moins le premier, est au premier comme le dernier, moins le premier, est à la somme de tous les termes qui le precedent. 90

Soit ∺ *b. c. d. f. g. h.* Dans cette progression, comme dans toutes les autres, chaque consequent peut être pris pour antecedent du terme suivant; ainsi on peut exprimer cette progression en cette maniere:

$$b.\ c :: c.\ d :: d.\ f :: f.\ g :: g.\ h.$$

Or comme le premier terme b est au second c, ainsi $b+c+d+f+g$, somme de tous les antecedens, est à $c+d+f+g+h$, somme de tous les consequens, ẽ n. 75.

$$b.c :: b+c+d+f+g.c+d+f+g+h.$$

Invertendo,

$$c.b :: c+d+f+g+h.\ b+c+d+f+g.$$

Dividendo,

$$c-b.\ b :: c+d+f+g+h-b-c-d-f-g.\ b+c+d+f+g.$$

Or puisque $+c+d+f+g-c-d-f-g=0$; donc $c+d+f+g+h-b-c-d-f-g=h-b$, & par consequent $c-b.\ b::h-b.\ b+c+d+f+g$; c'est à dire que le second terme c moins le premier b est à b, comme le dernier h moins le premier b est à la somme de tous ceux qui le precedent; qui est ce que nous voulions démontrer.

COROLLAIRE.

91 1°. *Si la raison double regne dans une progression, le dernier terme que je nomme* x, *moins le premier terme, est égal à la somme de tous les termes qui le precedent.*

Soit nommé s la somme de tous les termes qui precedent x le dernier terme, je nomme a le premier terme. Si c'est la raison double qui regne dans cette progression, le premier terme étant a, le second sera $2a$. Or par la Proposition presente $2a-a.\ a::x-a.s$. Donc puisque $2a-a$ est égal à a, il faut que $x-a$ soit égal à s: c'est à dire que le dernier terme de la progression moins le premier, est égal à la somme de tous les termes qui le precedent: ce qu'on avoit proposé.

2°. *Si la raison triple regne, le dernier terme* x *moins le premier, est le double de* s, *somme de ceux qui le precedent.*

Car si a est le premier, le second sera $3a$. Or par la Proposition presente, $3a-a.a::x-a.s$. Partant puisque $3a-a$ est le double de a; donc $x-a$ sera le double de s: ce qu'on avoit proposé.

3°. *Si la raison quatruple regne, le dernier terme* x *moins le premier, est triple de* s, *somme de ceux qui le precedent.*

Car si le premier est a, le second sera $4a$. Or par la Proposition presente $4a-a.a::x-a.s$.

Donc

Donc $4a - a$ étant le triple de a, il faut que $x - a$ soit le triple de s.

Ainsi de toutes les autres progressions qui ont par consequent des proprietez particulieres, selon les differentes raisons qui y regnent, lesquelles nous découvrons toutes par ce seul Corollaire.

On appelle Progression Multiple celle dont le second terme est plus grand que le premier, & Sous-multiple celle dont le premier terme est plus grand que le second; de sorte que la progression va toûjours en diminuant, comme celle-ci $\div$ 16. 8. 4. 2. 1. *&c. ce qui peut aller à l'infini, puisque l'esprit ne trouve aucune borne dans la divisibilité des Grandeurs. Mais supposons qu'enfin on puisse arriver à une fin, c'est à dire à une Grandeur si petite qu'elle ne puisse estre divisée, & qu'elle soit presque égale à zero. Puisque nous pouvons regarder le premier terme de cette progression qui est* 16, *comme le dernier, selon le Corollaire precedent;* 16 *moins le premier terme qui est zero, est égal à tous les termes qui le precedent, quoi que leur nombre soit indéfini. Ce qui nous fait appercevoir la solution du Sophisme de Zenon.* 92

Supposant, disoit ce Philosophe, qu'Achille aille dix fois plus vite qu'une tortuë, si la tortuë a une lieuë d'avance, jamais Achille ne l'attrapera; car tandis qu'Achille fera la premiere lieuë, la tortuë fera la dixiéme de la seconde lieuë; & tandis qu'Achille fera la dixiéme de la seconde lieuë, la tortuë fera la dixiéme de cette dixiéme, & ainsi à l'infini.

Zenon supposoit que toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini, faisoient un espace infini de lieuës, qui pourtant ne sont toutes ensemble qu'une neuviéme de lieuës; car puisque la raison Decuple regne dans cette progression, le dernier terme, qui est une

Milliare supponit dicitur in novem partes, quamtibet earundem Achilles uno passu absolvit. Testudo illum praecedit omnibus illis novem partibus i.e. integro milliari, confictis 10 suis passibus

unum passum Achillis.[1] 4 Et ali Achilles unum milliare et unam nonam partem alterius Milliaris i.e. decem passus absolvit; Testudo quoq demum $\frac{1}{10}$ alterius Milliaris confecit, adeoq ibi eam jam attigit Achilles.

une lieuë, moins le premier, qui est presque zero, sera neuf fois plus grand que ceux qui le precedent, c'est à dire que toutes ces dixiémes de dixiémes. Dans cette progression sous-multiple, une lieuë est le premier terme; mais, comme nous avons dit, en changeant cette progression dans une multiple, une lieuë est le dernier terme qui, moins le premier zero, sera neuf fois plus grande que toutes ces dixiémes de dixiémes de lieuës par le Corollaire precedent; ainsi toutes ces dixiémes de dixiémes ne vaudront qu'un neuviéme de lieuë.

VINGT-DEUXIE'ME PROPOSITION.

Theorême dix-huitiéme.

93 *Le nombre des termes d'une progression Geometrique se peut augmenter en montant & en descendant.*

Soit cette progression ∺ *a. b. c*, on peut trouver un quatriéme terme proportionnel à ces trois qui sont donnez; on le peut de même en descendant. Car soit *a* le plus petit terme de tous ceux de la progression, dans laquelle je suppose que regne la raison decuple. En divisant *a* en dix parties, & appellant *x* une de ces dixiémes, alors ∺ *x a. b. c*; car *x* sera la dixiéme de *a*, comme *a* est la dixiéme de *b*. Derechef divisant *x* en dix parties, & nommant *z* cette dixiéme, alors ∺ *z. x. a. b. c*; ainsi à l'infini, sans qu'on puisse venir jusqu'à zero. Car supposez qu'on en aproche de si prés, qu'on puisse dire que zero soit le premier terme de cette progression continuée en descendant jusqu'à l'infini. Soit nommée *s* la somme de tous les termes qui precedent *a*, comme c'est la raison decuple qui regne, *a* moins le premier, c'est à dire *a* — *o* sera neuf fois p'us grand que *s* par le Corollaire precedent, & par consequent la difference

ference de a & de o, qu'on exprime ainsi $a - o$, est plus grande que toutes ces dixiémes de dixiémes au dessous de a entre a & zero, ainsi ces dixiémes ne descendront point jusques à zero; & par consequent la progression se pourra continuer à l'infini en descendant.

VINGT-TROISIE'ME PROPOSITION.

Theorême dix-neuviéme.

La somme d'une progression infinie peut estre égale à un nombre fini. 94

Car soit une progression infinie en descendant, dans laquelle regne la raison double. Le premier terme est 2, le second $\frac{1}{2}$, c'est à dire la moitié de 2. Le troisiéme $\frac{1}{4}$, c'est à dire la moitié de la moitié, & ainsi à l'infini: de sorte que comme ces termes vont en diminuant, on peut dire que le dernier terme est zero. Ainsi $\div\div$ 2. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$ ..... 0; & partant $\div\div$ 0 ..... $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$2. Or $\bar{s}$ n. 91. ce dernier terme 2 moins le premier qui est zero, est égal à la somme de tous les termes precedens; partant toute cette suite infinie de moitiez de moitiez, est égale à 2, ainsi à un nombre fini.

VINGT-QUATRIE'ME PROPOSITION.

Problême cinquiéme.

Trouver la somme d'une progression dont on connoît le premier & le second terme avec le dernier. 95

Je nomme le premier a, le second b, & le dernier x, & s la somme de ceux qui precedent le der-

nier. $b - a. a :: x - a. f.$ ⁊ n. 90. On trouvera la valeur de f, multipliant le dernier terme x, aprés en avoir retranché le premier a, par le premier qui est a, & divisant ce produit par le second terme, aprés en avoir retranché le premier, c'est à dire par $b - a$. Le quotient sera la valeur de f, qui étant ajoûtée au dernier, on aura la somme de toute la progression, puisque f est la valeur de tous les termes qui precedent x, qui est le dernier terme.

Premiere Question.

Une personne la premiere année a depensé 10 *pistoles, la seconde année* 15, *& la derniere année de sa vie* 10010. *On demande combien elle a dépensé de pistoles avant sa mort.*

Selon cette derniere Proposition le second terme 15, moins le premier 10, est au premier 10 comme 10010 moins le premier 10 est à la somme des termes qui le precedent.

$$15 - 10 \quad 10 :: 10010 - 10 \quad f.$$

Pour avoir donc la somme que l'on cherche, je multiplie 10010 — 10, c'est à dire 100000, par 10, le produit est 100000 que je divise par 15 — 10, c'est à dire par 5, le quotient de la division est 20000 que j'ajoûte à 10010, ce qui fait 30010, qui est le nombre de pistoles que cette personne a dépensées.

Seconde Question.

Supposant que la famille de Jacob 20 *ans aprés son entrée dans l'Egypte fut deux fois aussi grande que lors qu'elle y entra, & qu'ainsi Jacob y étant entré avec* 70 *personnes:, aprés* 20 *ans sa famille fut de* 140, *augmentant toûjours dans la mesme*

pro-

proportion, & qu'enfin les 20 dernieres années du second siecle aprés son entrée, elle augmenta de 35840. On demande de combien elle fut augmentée en l'espace de 200 ans?

Cette Question se réduit à trouver la somme d'une progression dont le premier terme est 70, le second 140, & le dernier 35840. Or puisque ce dernier terme moins le premier 70, est égal à tous les termes qui le precedent, s̃ n. 91; il faut ajoûter à 35840. le même nombre 35840 moins 70, c'est à dire, 35770 avec 35840, ce qui fait 71610.

Au bout de 20 ans cette famille fut plus grande deux fois, que lors qu'elle entra dans l'Egypte. Elle ne fut pas seulement augmentée du double; car Jacob avoit plusieurs enfans, qui étant tous mariez, eurent des enfans de leurs femmes pendant ces vingt premieres années. Ainsi 200 ans aprés, cette famille étoit bien plus que de 71610 personnes.

VINGT-CINQUIE'ME PROPOSITION.

Problême sixiéme.

Le premier, le dernier terme, & le nombre des termes d'une progression étant donnez, en trouver l'exposant. 96

Soit une progression dont 70 est le premier terme, & 35840 le dernier terme qui est le dixiéme. On veut trouver l'exposant de la raison qui regne dans cette progression. Ce dernier terme est fait du permier terme 70 multiplié par la neuvieme puissance de l'exposant que l'on cherche, s̃ n. 87. Divisant donc 35837 par 70, le quotient qui sera 512 sera la neuviéme puissance de l'exposant, laquelle étant extraite de ce nombre 512, selon la methode

que nous en avons donnée Liv. 2. n. 47. il se trouve que l'exposant que l'on cherchoit est 2.

VINGT-SIXIE'ME PROPOSITION.

Problême septiême.

97 *Le premier terme, l'exposant, & le dernier terme étant donnez, trouver le nombre des termes.*

Le premier terme est 70, l'exposant est 2, le dernier terme 35840. On demande combien il y a de termes en cette progression? Ayant divisé le dernier terme 35840 par 70 le premier terme, le quotient sera 512, qui sera la puissance de l'exposant égale au nombre des termes de la progression moins 1 ⁊ ꝯ n. 87. Donc puisque 512 est la neuviéme puissance de 2, le terme 35840 sera le dixiéme; ainsi cette progression aura 10 termes.

+ primus enim terminus non multiplicat per potentiam.

QUESTION.

On sçait qu'une personne la premiere année dépensa 6 pistoles, la seconde trois fois davantage, & qu'elle dépensa 486 la derniere année. On demande pendant combien d'années elle fit cette dépense?

Le premier terme de cette progression est 6 pistoles, l'exposant de la raison qui regne dans cette progression est 3, & le dernier terme est 486. Je divise 486 par le premier terme 6, le quotient de cette division est 81, qui étant la quatriéme puissance de 3. il faut que 486 soit le cinquiéme terme, & que par consequent cette progression ait 5 termes.

VINGT-SEPTIE'ME PROPOSITION.

Problême huitiéme.

98 *L'exposant, le nombre des termes, le dernier terme étant donnez, trouver le premier terme de la progression.*

L'ex-

L'exposant d'une progression est 3, le dernier terme est 486; il y a cinq termes. Le terme 486 est fait du premier terme multiplié par la quatriéme puissance de l'exposant, ſ n. 87: Donc en divisant 486 par 81 quatriéme puissance de 3, le quotient qui est 6, sera le premier terme de cette progression que je cherchois.

VINGT-HUITIE'ME PROPOSITION.

Problême neuviéme.

L'exposant, le nombre des termes étant donnez avec la somme de la progression, trouver chacun des termes. 99

L'exposant d'une progression de six termes est 3, la somme de cette progression est 728, il faut trouver chaque terme de cette progression. Pour cela je prends une progression connuë où regne la raison triple, comme est celle-ci qui a six termes, ∺ 1. 3. 9. 27. 81. 243. la somme de cette progression est 364. En divisant 728 en parties proportionnelles à celle de 364. ſ n. 82. l'on trouvera tous les termes que l'on cherche, qui seront ∺ 2. 6. 18. 54. 162. 486. car ces termes doivent être tous proportionnels à ceux de l'autre progression.

VINGT-NEUVIE'ME PROPOSITION.

Problême dixiéme.

Le premier terme d'une progression, l'exposant de la raison qui y regne, & la somme de la progression étant donnée, trouver combien cette progression a de termes, & la valeur du dernier terme. 100

Le premier terme d'une progression est 2, l'exposant de la raison qui y regne est 3, & 728 est la somme de tous les termes de la progression. Cette somme contient le dernier terme, plus tous ceux

qui

qui le precedent. Or ce dernier terme moins le premier qui est 2, est le double de tous ceux qui le precedent, s̃ n 91. Donc ayant ôté de 728 le premier terme qui est 2, & divisé le reste de 726 en deux parties, telles que l'une soit le double de l'autre, qui seront 242 & 484, s̃ n. 82, ayant ajoûté à 484 le premier terme 2, ce qui fait 486, ce nombre sera le dernier terme, aprés quoi on trouvera quel est le nombre des termes de cette progression, s̃ n. 97. ÷ 2. 6. 18. 54. 162. 486.

Cette resolution paroît particuliere à cet exemple, mais elle ne l'est pas. Quand on connoist la raison qui regne dans une progression, on peut, s̃ n. 90 *connoître la raison que le dernier terme moins le premier a avec tous les termes qui le precedent; ainsi on resoudra en la mesme maniere ce dixiéme Problême, quelqu'autre exemple qu'on propose. Cependant nous en donnerons une resolution plus generale dans le VII. Livre, sans considerer quelle raison regne dans la progression, connoissant seulement le premier & le second terme avec la somme de la progression.*

vid. p. 377.

ELEMENS

ELEMENS DES MATHEMATIQUES OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE QUATRIE'ME.

Des Raiſons compoſées que les Puiſſances & toutes les Grandeurs de pluſieurs Dimenſions peuvent avoir entr'elles.

SECTION PREMIERE.

Des Raiſons compoſées. Ce que c'eſt que Raiſon compoſée.

CHAPITRE PREMIER.

Les Raiſons ſe peuvent nombrer, ajouter, multiplier. Ce qu'il eſt neceſſaire de conſiderer pour ſavoir ce que c'eſt que Raiſon compoſée.

NOus n'avons proprement conſideré dans le Livre precedent, où nous avons parlé des Raiſons, que ce qu'une Grandeur eſt par rapport 1

à d'autres Grandeurs avec qui on la compare. Examinons maintenant les raisons ou rapports d'une maniere absoluë, c'est à dire considerons les Raisons en elles mêmes comme des Grandeurs absoluës. Considerons par exemple la Raison double, la Raison triple, & toutes les autres Raisons. J'apperçois que les Raisons ainsi considerées peuvent être nombrées, qu'elles sont capables des Operations de l'Arithmetique, qu'on peut ajoûter une raison avec une autre raison, par exemple une raison double avec une autre raison, ou double, ou triple, &c. Qu'on peut ôter une raison double d'une raison triple: qu'on peut prendre la raison double tant de fois, par exemple trois fois, & la multiplier ainsi par 3, ce qui fait une raison sextuple; ou diviser une raison sextuple par 3, de laquelle division le quotient est une raison double Raison n'est qu'une maniere de contenir ou d'être contenu; ainsi je puis regarder cette maniere comme une grandeur, puisqu'elle est capable d'être diminuée & d'être augmentée. Les nombres, si nous considerons bien leur nature, ne sont que des rapports ou raisons. Quand on dit que cette tour a cent pieds de haut, que celle-ci n'en a que quatre-vingt, on compare ces deux tours: on considere le raport ou la raison qu'elles ont avec un pied, & ensuite on dit que l'une est plus grande, ayant cent parties telles que la plus petite n'en a que quatrevingt: de sorte que ces mots *cent*, *quatre-vingt* ne marquent qu'un certain rapport. Lors qu'on entreprend de nombrer, l'on convient premierement d'une commune mesure, & on commence par une partie qui est commune aux choses qu'on veut nombrer Dans l'exemple des deux tours, on convient d'une certaine mesure, qui est la grandeur d'un pied. Il faut aussi en nombrant les raisons,

les

les reduire premierement, de maniere qu'elles ayent un terme commun, qui soit comme leur commune mesure. Nous allons voir que cela se peut faire; aprés quoi les Operations de l'Arithmetique se font sur les raisons avec la même facilité que sur les nombres. Ainsi on concevra clairement qu'on peut composer une raison de plusieurs raisons, comme on peut composer un nombre de plusieurs autres nombres par l'addition ou par la multiplication.

On pourroit faire les mêmes reflexions sur *les Differences*, considerant qu'*une difference* peut être composée de plusieurs *differences*. Il est bien évident que l'excés ou le defaut des deux grandeurs qu'on compare ensemble peuvent être nombrez, ajoûtez, soustraits les uns des autres, se multiplier & diviser. On peut dire que la difference de 10 à 15 a cinq fois la difference de 9 à 10: qu'ôtant la difference de 14 à 15 de la difference de 11 à 15, on a la difference de 9 à 12. Cela est trop clair pour s'y arrêter, & on ne tireroit aucune utilité d'un plus long discours sur cette matiere.

Pour donner une idée encore plus claire de ce que c'est que Raison composée, il faut considerer qu'on peut rappeller toutes les Raisons à une commune mesure, c'est à dire les exprimer de maniere qu'on les puisse comparer avec une même grandeur, & par ce moyen connoître ce qu'elles sont les unes au regard des autres. Cela se fait en leur donnant un même consequent, si elles en ont de differens, car par exemple dans les deux raisons de 3 à 12 & de 4 à 12, où les deux antecedens 3 & 4 ont pour consequent un même nombre qui est 12, on voit clairement le rapport de ces deux raisons: que celle de 3 à 12 est quatruple, que celle de 4 à 12 est triple, & qu'ainsi la raison de 3 à 12 est

à

à celle de 4 à 12 comme 3 à 4. Or pour donner un même consequent à deux raisons, à celle de *b* à *c*, & à celle de *f* à *g*, je multiplie les termes de la premiere par le consequent de la derniere; c'est à dire *b* & *c* par *g*, ce qui fait *bg*, *cg*, qui sont en même raison que *b* & *c*, L 3. n. 63. Je multiplie de même les termes de la seconde raison par le consequent de la premiere raison, c'est à dire *f* & *g* par *c*. ce qui fait *cf* & *cg*, qui est, selon ce qu'on vient de dire, une même raison que celle de *f* à *g*.

$$\left.\begin{matrix} b. & c. & :: & bg. \\ f. & g. & & cf. \end{matrix}\right\} cg.$$

Ces deux raisons *b. c.* & *f.g* étant ainsi réduites à celles-ci de *bg* à *cg*, & de *cf* à *cg*, elles ont un même consequent, sçavoir *cg*.

Soient ces deux raisons en nombres, 3. 7. & 5. 11. Il les faut reduire de sorte que ces deux raisons n'ayent qu'un même consequent, afin qu'on connoisse mieux le rapport qu'elles ont entr'elles. Je multiplie donc 1°. 3 & 7 par 11, ce qui fait 33 & 77. 2°. Je multiplie 5 & 11 par 7, ce qui fait 35 & 77; ainsi les deux raisons de 3 à 7, de 5 à 11 sont reduites à celles-ci, qui ont un même consequent. On $\left.\begin{matrix} 33 \\ 35 \end{matrix}\right\} 77$ voit que ces deux raisons proposées sont comme ces nombres 33 & 35; aprés quoi operant sur ces exposans, les ajoûtant, les multipliant, on est censé ajoûter, multiplier ces raisons; ce que je remarque pour faire comprendre comment les operations de l'Atithmetique se peuvent faire sur les raisons; car il n'est pas necessaire pour cela de les reduire de maniere qu'elles ayent un même consequent. Comprenons seulement ici qu'il n'est pas plus difficile de faire les operations de l'Arithmetique sur les raisons que sur les nombres, qui ne sont eux-mêmes, comme je l'ai dit, que des raisons.

ſons. S'il faut ajoûter une raiſon triple avec une raiſon double, j'ajoûte 2 & 3 qui ſont leurs expoſans, ce qui fait 5 expoſant de la raiſon quintuple. S'il faut ôter la raiſon double de la raiſon triple, j'ôte 2 de 3, & il reſte 1 expoſant de la raiſon d'égalité. S'il faut multiplier la raiſon triple par la raiſon double, je multiplie 2 & 3 leurs expoſans l'un par l'autre, le produit eſt 6, qui eſt l'expoſant de la raiſon ſextuple. Ainſi le produit de la raiſon double multipliée par la raiſon triple, eſt la raiſon ſextuple. On voit de même que la raiſon ſextuple étant diviſée par la raiſon triple, le quotient de cette diviſion eſt une raiſon double.

Ce que je dis des raiſons qui ont pour expoſant des nombres, convient aux raiſons ſourdes, dont on peut trouver les expoſans, comme nous avons vû, & enſuite operer ſur ces expoſans, car, comme on l'a démontré, deux raiſons quelles qu'elles ſoient ſe peuvent reduire de maniere qu'elles n'ayent qu'un même conſequent, & alors leurs antecedens ſont leurs expoſans, ſur leſquels on peut faire les operations de l'Arithmetique, comme ſur les nombres abſolus qui ſont comme les antecedens de pluſieurs raiſons, qui ont toutes un même conſequent, ſçavoir l'unité. En chemin faiſant nous pouvons démontrer cette Propoſition.

Deux raiſons ſont entr'elles comme le produit des extrêmes eſt au produit des moyens, c'eſt à dire *comme le produit du premier antecedent par le ſecond conſequent eſt au produit du ſecond antecedent par le premier conſequent.*

Soient ces deux raiſons de *b* à *c*. & de *f* à *g*, elles ſe reduiſent à celles-ci. La raiſon de *b* à *c* à celle de *bg* à *cg*, & celle de *f* à *g* à celle de *cf* à *cg*. Ces raiſons ayant un même conſequent, ſçavoir *cg*, elles ſont entr'el-

$\left.\begin{matrix} bg \\ cf \end{matrix}\right\} cg$

trelles comme *bg* est à *cf*, qui est ce que dit cette Proposition ; car *bg* est le produit des extrêmes, & *cf* celui des moyens.

Je n'ai parlé ici des operations Arithmetiques sur les Raisons, que pour faire comprendre ce que nous allons dire des Raisons composées dans ce quatriéme Livre ; car le Livre suivant est entierement employé à parler de ces operations.

CHAPITRE II.

Des Definitions & Axiomes touchant les Raisons composées

2 CE mot *Composer* est équivoque, aussi-bien que ce mot *Raison composée* ; car comme une Grandeur peut être composée en deux manieres, de deux ou de plusieurs Grandeurs, sçavoir ou par l'addition, ou par la multiplication de ces Grandeurs ; aussi une Raison sera composée de plusieurs autres Raisons, ou parce qu'elle est égale à la somme de ces Raisons, comme la Raison quintuple est égale à la Raison double jointe à la triple, ou parce qu'elle est faite par la multiplication de ces Raisons, comme la Raison sextuple est faite de la Raison double multipliée par la triple.

L'usage l'a ainsi voulu, que lors que l'on dit qu'une Raison est composée de deux Raisons, que par exemple la Raison de deux plans est composée de celles de leurs deux racines, on entend que ces deux Raisons étant multipliées l'une par l'autre, elles font la raison des deux plans, comme on le demontrera + Ainsi l'usage ôte l'équivoque de ce mot, *Raison composée*.

p. 226.

PREMIERE DEFINITION.

3 *Une Raison est composée, lors qu'elle est faite de*

de

de deux ou de plusieurs Raisons multipliées les unes par les autres.

Ainsi la raison sextuple est appellée Composée; lors qu'on considere que cette raison est faite de la raison double multipliée par la raison triple.

DEUXIE'ME DEFINITION.

On appelle Raisons composantes celles dont la multiplication a produit une raison composée. 4

Ainsi la raison triple & la raison double sont les raisons composantes de la raison sextuple, qui a été composée par la multiplication de ces deux raisons.

TROISIE'ME DEFINITION.

Une raison composée de deux raisons égales, s'appelle raison doublée de chacune de ces raisons. 5

La raison de 2 à 8 est composée de deux raisons égales, de 2 à 4, & de 4 à 8. Cette raison de 2 à 8 est doublée.

QUATRIE'ME DEFINITION.

Une raison composée de trois raisons égales s'appelle Raison triplée de chacune de ces raisons. 6

CINQUIE'ME DEFINITION.

Une raison composée de quatre raisons égales est une raison quatruplée, ainsi de suite. 7

Raison doublée n'est pas la même chose qu'une raison double, ni une raison triplée n'est pas la même chose qu'une raison triple, &c. Ce que que vous remarquerez dans la suite.

AXIOME PREMIER.

Des raisons sont censées estre multipliées les unes par les autres, lors que l'on multiplie leurs exposans les uns par les autres. 8

Cet-

Cette Proposition est évidente aprés ce qu'on a remarqué ci dessus, que lors qu'on a reduit des raisons à un même consequent, & qu'ainsi on a trouvé des grandeurs qui exposent les raisons, que ces raisons ont les unes avec les autres, on peut faire sur elles toutes les operations de l'Arithmetique, comme sur des grandeurs absoluës.

Axiome second.

9 *Les raisons composées sont égales, lors que les raisons composantes sont égales.*

Cela est évident, les Tous sont égaux qui ont des parties égales. Des nombres égaux ajoûtez ou multipliez de la même maniere font des sommes égales, ou des produits égaux.

Chapitre III.

Theorêmes & Problêmes touchant les Raisons composées.

Lemme premier.

10 *Plusieurs grandeurs étant de suite, la suivante étant plus grande que celle qui la precede, l'exposant de la raison de la premiere à la seconde, multipliant celui de la raison de la seconde à la troisiéme produit l'exposant de la raison de la premiere à la troisiéme, & cet exposant multipliant celui de la raison de la troisiéme à la quatriéme, produit celui de la raison de la premiere à la quatriéme; ainsi de suite.*

Soient ces grandeurs de suite b, c, d, f, l'exposant de la raison de b à c soit nommé q, c'est à dire le quotient de c divisé par b. Celui de la raison de c à d soit nommé p, il faut prouver que pq sera

sera l'exposant de la raison de b à d. Pour cela considerez que $qb = c$, Liv. III. n. 54. Et puisque p est le quotient de d divisé par c, ou par qb égal à c: Donc $qpb = d$, Liv. III. n. 54. Or le quotient de qpb divisé par b est qp, partant qp est l'exposant de la raison de b à d, selon la Définition qui a été donnée de l'exposant d'une raison; ce qu'il falloit démontrer.

Soit nommé y l'exposant de la raison de d à f; donc $yqpb = f$. Or ayant divisé $yqpb$ par b, le quotient est yqp, qui est le produit des quotiens qp & y: Donc l'exposant de la raison de b à f est fait par la multiplication des exposans des raisons des grandeurs interposées; ce qu'il falloit prouver.

Lemme second.

Une raison est composée des raisons dont les exposans en se multipliant font son exposant. 11

Soit cette raison de b à f dont l'exposant soit qpy, fait de q exposant de la raison de b à c, & de p exposant de la raison de c à d; & de y exposant de la raison de d à f; je dis que la raison de b à f est composée de celles de b à c, de c à d, & de d à f; car, selon la Définition des raisons composées, c'est dire que la raison de b à f est faite de ces raisons multipliées. Or ces raisons se multiplient en multipliant leurs exposans, selon le premier Axiome ci-dessus.

Premiere Proposition.

Theorême premier.

La raison d'une grandeur à une autre grandeur, est composée des raisons des grandeurs interposées. 12

Soient ces grandeurs b, c, d, f; entre b & f sont interposées c, d. Il faut démontrer que la raison

ſon de *b* à *f* eſt compoſée de la raiſon de *b* à *c*, de celle de *c* à *d*, & de celle de *d* à *f*. Cela eſt, ſelon le ſecond Lemme, ſi l'expoſant de la raiſon de *b* à *f* eſt égal au produit des expoſans de ces raiſons; or cela eſt, ſelon ce que nous avons fait voir dans le premier Lemme; partant cette Propoſition eſt bien démontrée.

SECONDE PROPOSITION.

Theorême ſecond.

13 *Dans une Progreſſion Geometrique, la raiſon du premier terme au ſecond eſt ſimple, du premier au troiſiéme doublée, du premier au quatriéme triplée: ainſi de ſuite.*

Cette Propoſition peut être conceuë en cette autre maniere.

Dans une Progreſſion Geometrique, la raiſon de deux termes entre leſquels il y a deux intervalles, eſt doublée; s'il y a trois intervalles, triplée.

Cela eſt manifeſte. La progreſſion Geometrique eſt une continuation de la même raiſon; partant puiſque la raiſon d'un terme à un autre, eſt compoſée des raiſons des termes interpoſez entre ces deux termes par la Propoſition precedente, & que la raiſon du premier terme au ſecond, & celle du ſecond au troiſiéme ſont égales il faut, par la troiſiéme Définition, que la raiſon du premier terme au troiſiéme ſoit une raiſon doublée. Ainſi la raiſon du premier au quatriéme terme étant compoſée de trois raiſons égales, eſt une raiſon triplée.

Cette même démonſtration montre qu'entre deux termes d'une progreſſion, tels qu'ils ſoient, s'il y a deux intervalles, la raiſon de l'un à l'autre eſt doublée, étant faite de deux raiſons égales; s'il

y

y a trois intervalles, triplée, étant faite de trois raisons égales, &c.

Troisie'me Proposition.
Theorême troisiéme.

Plusieurs raisons étant données, si on multiplie les antecedens par les antecedens, & les consequens par les consequens, les deux produits de ces deux multiplications seront l'un à l'autre en raison composée de ces raisons. 14

Soient d'une part *b* & *c*, de l'autre part *d* & *f*,

bd cd :: *b. c.* & *cd cf* :: *d. f.*

Si on multiplie l'antecedent *b* par l'antecedent *d*, ce qui fait *bd*, & le consequent *c* par le consequent *f*, ce qui fait *cf*; je dis que la raison de ces deux produits *bd* & *cf* sera composée de la raison de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f*.

Pour démontrer cette vérité, prenons une des deux racines du produit *bd*, ou *b* ou *d*, & une autre des deux qui ont produit *cf*, ou *c*, ou *f*, prenant la plus petite ou la plus grande, de sorte que le produit des deux racines qu'on aura choisies soit plus grand ou plus petit que l'un de ces produits *bd* & *cf*, & qu'il se rencontre ainsi interposé entre deux. Je prens *c* & *d*, & multipliant ces deux racines l'une par l'autre, cela fait *cd*, que je suppose être entre *bd* & *cf*; ainsi voilà trois grandeurs qui se suivent, *bd. cd. cf.* Selon ce qui a été démontré, *bd. cd.* :: *b. c.* & *cd. cf* :: *d. f.* Liv. 3. n 63.

Or s̃ n 12. la raison de *bd* à *cf* est composée de celle de *bd* à *cd*, & de celle de *cd* à *cf*. Donc elle est aussi composée de celle de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f* qui sont les mêmes. Soit une troisiéme raison de *g* à *h*; je multiplie *bd* par *g*, & *cf* par *h*;

 donc

donc selon ce qu'on vient de dire, la raison de *bdg* à *cfh*, est composée de celles de *bd* à *cf* & de *g* à *h*. Ainsi la raison de *bdg* à *cfh* est composée des trois raisons de *b* à *c*, de *d* à *f*, de *g* à *h*, &c. ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION QUATRIE'ME.

Problême premier.

15 *Deux ou plusieurs raisons étant données, trouver la raison composée dont elles sont les raisons composantes.*

Soient les raisons de *b* à *c*, & *d* à *f*, il faut trouver la raison composée dont elles sont les composantes. Pour cela on doit multiplier les antecedens l'un par l'autre, & les consequens l'un par l'autre; la raison de ces produits qui seront *bd* & *cf*, est une raison composée de ces deux raisons, par la Proposition précedente. Si on avoit encore une troisiéme raison comme celle de *g* à *h*, les deux premieres ayant composé celle qui est entre *bd* & *cf*, il ne faut plus que multiplier l'antecedent *g* par *bd*, ce qui fait *bdg*; & le consequent *h* par *cf*, ce qui fait *cfh*. Par la Proposition précedente, la raison de *bdg* à *cfh* est composée de celle de *g* à *h*, & de celle de *bd* à *cf*.

S'il y avoit une quatriéme raison que l'on voulût joindre avec celle-là, il faudroit multiplier *bdg* par l'antecedent de cette raison, & *cfh*, par le consequent de cette quatriéme raison, la raison des produits seroit composée des quatre raisons données.

Ainsi on voit comment on peut trouver une raison composée de tant de raisons qu'on voudra, lors que ces raisons seront données.

CHA-

CHAPITRE IV.

Des Regles de Trois & de Compagnie composées.

1°. DE LA REGLE DE TROIS COMPOSE'E.

QUelquefois on cherche un quatriéme terme 16
qui soit à une raison composée de plusieurs autres raisons, comme est un autre terme à une autre raison composée. Par exemple dans cette Question. C'est la coûtume de payer 4 écus pour des marchandises du poids de 200 livres, qui ont été apportées de 100 lieuës. On demande combien on doit de port pour des marchandises qui pesent 300 livres, lors qu'elles sont apportées de 400 lieuës.

Il est manifeste que l'on cherche un quatriéme terme que je nomme x, qui ne soit pas seulement proportionnel à la distance du chemin, mais ensemble au poids des marchandises. Ainsi pour résoudre cette Question & celles qui seront semblables, il faut trouver la raison composée du poids au poids, & de la raison de la distance à la distance.

Je multiplie donc les 200 livres par 100 lieuës, ce qui fait 20000. Je multiplie les 300 autres liv. par les autres 400 lieuës, ce qui produit 120000. Par la Proposition précedente, la raison de ces deux produits 20000 & 120000 est composée de la raison des livres aux livres du poids de ces marchandises, & de la raison de la distance des chemins à la distance des chemins.

Aprés cela il est évident que le terme inconnu x doit être à 120000, comme 4 écus est à 20000.

20000. 4. :: 120000. x.

Ainsi pour achever la résolution de cette Question,

puiſque ces trois nombres 20000. 4. 120000. ſont les trois premiers termes d'une proportion, je multiplie le troiſiéme par le ſecond, c'eſt à dire 120000 par 4, ce qui produit 480000, que je diviſe par le premier terme 20000, le quotient de cette diviſion eſt 24, qui ſera le quatriéme terme de cette proportion, & le nombre des écus qui doivent être payez pour le port de 300 livres apportées de 400 lieuës, ce qu'on cherchoit. La valeur de *x* eſt ainſi 24.

On peut chercher un troiſiéme terme qui ſoit à une raiſon compoſée de 3, de 4 raiſons, comme un terme donné eſt à une autre raiſon compoſée d'autant de raiſons.

Par la Propoſition précedente, vous avez appris à trouver les raiſons compoſées, dont les raiſons compoſantes ſont données: ainſi il n'eſt pas néceſſaire que j'enſeigne plus au long comment ces Queſtions peuvent être réſoluës.

Mais je ne veux pas oublier qu'on peut propoſer des Queſtions dans leſquelles le terme inconnu ſoit à une raiſon compoſée, comme un terme donné eſt à une raiſon ſimple.

Par exemple, un Ouvrier ayant par un travail de deux jours gagné 20 écus; On demande combien ce même Ouvrier doit gagner pour avoir travaillé 20 jours, & outre cela pour avoir fourni un cheval pendant tout ce temps-là?

Il faut premierement conſiderer combien cet Ouvrier pour ſa ſeule peine doit recevoir, qui ſera 200 écus.

Aprés cela il faut ſçavoir ce qu'on donne à un Loüeur de chevaux par chaque jour; ſi c'eſt l'ordinaire de lui payer 20 ſols, cet Ouvrier outre ces 200 écus, doit recevoir 20 livres.

DE LA REGLE DE COMPAGNIE COMPOSE'E.

Dans la Regle de Compagnie simple, on cherche un terme qui ait une raison donnée à un terme donné : mais dans celle qui est composée, on cherche un terme qui ait une raison donnée à une raison composée. 17

Quatre Marchands ont gagné en commun 240 livres, le premier avoit donné 20 écus pour 4 mois, le second 40 pour 5 mois, le troisiéme 60 pour 6 mois, le quatriéme 80 écus pour 7 mois ; le gain d'un chacun doit être proportionné à la raison composée de celle de l'argent à l'argent, & de celle du temps au temps.

La premiere chose qu'on doit donc faire, c'est de trouver les raisons composées de ces raisons, & pour cela il faut multiplier l'argent d'un chacun par le temps durant lequel on a prêté son argent ; ce qui produit ces quatre nombres 80, 200, 360, 560, chacun de ces nombres est à chaque autre, par exemple 80 à 200, en raison composée, de celle de 20 écus à 40 écus, & de celle de 4 mois à 5 mois, ainsi des autres.

Aprés cela j'ajoûte ces quatre nombres dans une somme qui sera 1200. Or comme cette somme 1200 est à 240, qui est le gain general, ainsi 80 sera au gain particulier du premier, 200 au gain du second, 360 au gain du troisiéme, 560 au gain du quatriéme. On trouvera tous ces gains particuliers par la Régle de Trois simple, multipliant le second terme de cette proportion par le troisiéme, & en divisant le produit par le premier, de laquelle division le quotient sera le quatriéme terme inconnu qu'on cherche.

Ces quatriémes termes ou ces quatre gains particuliers, se trouvent être par cette operation 16

livres pour le gain du premier, 40 livres pour le gain du second, 72 livres pour le gain du troisiéme, & 114 livres pour le gain du quatriéme.

$$1200 \quad 240 :: \left\{ \begin{array}{ll} 80 & 16 \\ 200 & 40 \\ 360 & 72 \\ 560 & 112 \end{array} \right.$$

Lors qu'on a bien compris une fois la theorie de l'Arithmetique, les exemples ne sont pas nécessaires: ainsi je ne suis pas obligé de dire plus au long ce qu'il faudroit faire dans une Regle de Compagnie, où la grandeur des gains ou des pertes dépend, non seulement d'une raison composée de deux raisons, mais de 3, de 4, &c. On voit bien qu'il faut premierement trouver ces raisons composées, & ensuite faire ce qui a été enseigné touchant la Regle de Compagnie simple dans le troisiéme Livre.

SECTION SECONDE.

Des Raisons qu'ont entr'elles les Puissances & les Grandeurs de plusieurs dimensions.

PROPOSITION CINQUIE'ME.

Theorême quatriéme.

18 *DEux grandeurs de plusieurs dimensions qui ont quelques unes de leurs racines égales & les autres inégales, sont entr'elles comme les inégales.*

Soient ces deux grandeurs *bc* & *dc*, qui ont une de leurs racines égales, sçavoir *c*; il faut prouver que *bc*. *dc* :: *b*. *d*. ce qui est manifeste; car

car Liv. III. n. 63. les produits de deux grandeurs qui ont été multipliées par une troisiéme grandeur, sont entr'eux comme ces grandeurs. Or les grandeurs *bc* & *dc* sont produites par *b* & *d* multipliées par la même grandeur *c*, partant *bc. dc* :: *b. d.* Soient ces deux grandeurs *bbc* & *dbc*, je dis que *bbc. dbc* :: *d. b.* car ces grandeurs *bbc* & *dbc* sont produites de la multiplication des grandeurs *b* & *d* par une même grandeur; sçavoir *bc*. Ainsi par la même Proposition *bbc. dbc* :: *d. b.* ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Le produit de deux grandeurs est un moyen proportionnel entre les quarrez de ces grandeurs. 19

Soient ces deux grandeurs *b* & *d*, dont le produit est *bd*. Le quarré de *b* est *bb*, celuy de *d* est *dd*, je dis que ∺ *bb. bd. dd.* ce que je prouve. Par la derniere Proposition $\left.\begin{matrix} bb. & bd \\ bd. & dd \end{matrix}\right\}$ :: *b. d.* Donc *bb. bd* :: *bd. dd.* Liv. III. n. 57. Donc ∺ *bb. bd. dd.* qui est ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE 2.

Le produit des racines quarrées de deux quarrez, est un moyen proportionnel entre ces quarrez. 20

C'est à dire que ∺ *bb. bd. dd.* ce qui a été démontré; car la racine de *bb* est *b*, celle de *dd* est *d*; ainsi *bd* est le produit de ces racines. Ce Corollaire est le même que le précedent, énoncé d'une autre maniere.

COROLLAIRE 3.

Deux cubes comme xxx *&* yyy *étant donnez, si* 21

on multiplie le quarré de la racine du premier par la racine cube du second, ce qui fait xxy, *& le quarré de la racine du second par la racine cube du premier, ce qui fait* yyx, *je dis que ces deux produits seront moyens proportionnels entre les cubes donnez.*

$\div$ xxx. xxy. yyx. yyy.

Par la derniere Proposition $\left\{\begin{matrix} xxx. & xxy \\ xxy. & yyx \\ yyx. & yyy \end{matrix}\right\} :: x.y.$

Donc Liv. III. n. 57.

xxx. xxy :: xxy. yyx :: yyx. yyy.

Donc $\div$ *xxx. xxy. yyx. yyy.*

COROLLAIRE 4.

22 *Entre deux quarrez de quarrez comme* a^4 *&* b^4, *ces trois produits* a^3b, $aabb$. ab^3, *sont trois moyens proportionnels. Entre* a^5 *&* b^5, *ces quatre produits* a^4b, a^3bb, aab^3, ab^4, *sont quatre moyens proportionnels; ainsi de suite des autres puissances.*

Ce qui se prouve par la démonstration qui a été employée dans les deux Corollaires précedens, & qui se peut appliquer à toutes ces puissances. Ainsi je ne proposeray toutes ces veritez que par les expressions suivantes, qui font connoître combien de moyens proportionnels se trouvent entre deux puissances, selon que les racines de ces puissances sont multipliées les unes par les autres, de la maniere qu'on le peut remarquer dans la Table suivante.

Avis sur cette Table.

23 Cette Table représente la grandeur complexe $a+b$ élevée à differens degrez jusqu'au dixiéme. Son premier degré est $a+b$, son second $aa+2ab+bb$, ou $a^2+2ab+b^2$; mais on ne

voit

voir point dans cette Table les *coefficiens*, c'est ainsi qu'on appelle par exemple ce nombre 2 mis devant le plan ab; car comme on a vû entre les quarrez a^2 & b^2, il y a un double plan qui a pour racine celle de ces deux quarrez. Ainsi si on élevoit $a + b$ au troisiéme degré entre a^3 & b^3, il y auroit le triple de deux solides, dans lesquels ce nombre 3 est *coefficient*; ce que nous dirons en son lieu plus exactement. Or il est évident qu'aprés avoir ôté ces Coefficiens; ce qui reste sont des grandeurs qui sont en progression comme on le vient de voir dans les Corollaires précedens $\div\div a^2.ab.b^2$. ainsi des autres degrez, ce qu'il sera facile de prouver d'un chacun selon l'énoncé de ce quatriéme Corollaire.

Remarquez aussi que les exposans des puissances d'une même grandeur sont une progression Arithmetique. $a^1.\ a^2.\ a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.$ &c. Ainsi pour trouver l'exposant du produit de deux puissances, par exemple de a^2 multiplié par a^3. Il faut ajoûter dans une somme les exposans 2 & 3, ce qui fait 5 exposant du produit de ces deux puissances. Comme il est évident $aa = a^2$ $aaa = a^3$. $aaaa = a^4$. $aaaaa = a^5$. comme aussi le quarré de a^2 c'est a^2 multiplié par a^2 pour avoir l'exposant de ce quarré; il faut ajoûter 2 à 2, ce qui sera a^4. Ainsi l'exposant du quarré de a^3 est a^6. celui du quarré de a^4 est a^8.

10	$\frac{::}{::}a^{10}$	a^9b	a^8b^2	a^7b^3	a^6b^4	a^5b^5	a^4b^6	a^3b^7	aab^8	ab^9	b^{10}
9	$\frac{:}{:}a^9$	a^8b	a^7bb	a^6b^3	a^5b^4	a^4b^5	a^3b^6	aab^7	ab^8	b^9	
8	$\frac{:}{:}a^8$	a^7b	a^6bb	a^5b^3	a^4b^4	a^3b^5	aab^6	ab^7	b^8		
7	$\frac{:}{:}a^7$	a^6b	a^5bb	a^4b^3	a^3b^4	aab^5	ab^6	b^7			
6	$\frac{:}{:}a^6$	a^5b	a^4bb	a^3b^3	aab^4	ab^5	b^6				
5	$\frac{:}{:}a^5$	a^4b	a^3bb	aab^3	ab^4	b^5					
4	$\frac{:}{:}a^4$	a^3b	$aabb$	ab^3	b^4						
3	$\frac{:}{:}a^3$	aab	abb	b^3							
2	$\frac{:}{:}a^2$	ab	b^2								
1	$a+b$										

PROPOSITION SIXIE'ME.

Theorême cinquiéme.

24 *Les plans sont les uns aux autres en raison composée de leurs racines.*

Soient deux plans donnez *bd* & *cf*, je dis que leur raison est composée de celle de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f*. Le premier plan *bd* est produit par la multiplication des antecedens *b* & *d* de ces deux raisons, & *cf* le second plan est fait par la multiplication des consequens *c* & *f*; Donc par la Proposition 3e *bd* est à *cf* en raison composée de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f*.

COROLLAIRE.

Les quarrez sont entr'eux en raison doublée de celles de leurs racines. 25

bb & *dd* sont deux quarrez qui sont l'un à l'autre en raison composée de celle de *b* à *d*, & de celle de *b* à *d*. Or ces deux raisons sont égales: Donc par la 3e Definition, la raison composée de *bb* à *dd* est doublée.

PROPOSITION SEPTIE'ME.

Theorême Sixiéme.

La raison d'un solide à un autre solide est composée des raisons que leurs racines ont entr'elles. 26

bdc & *fgh* sont deux solides. Il faut prouver que la raison du premier au second est composée de ces trois raisons de *b* à *f*, de *d* à *g*, de *c* à *h*. Le premier est fait de la multiplication des antecedens de ces trois raisons qui sont *b*, *d*, *c*, & le second est fait des trois consequens *f*, *g*, *h* multipliez de la même maniere: Donc par la 3e Proposition la raison de *bdc* à *fgh*, est composée de ces trois raisons.

COROLLAIRE.

Les cubes sont entr'eux en raison triplée, de celles de leurs racines. 27

bbb, *ccc*, sont deux cubes. Par la présente Proposition la raison du premier au second est composée des trois raisons de *b* à *c*, de *b* à *c*, de *b* à *c*. Or ces trois raisons sont égales : Donc par la 4e Définition la raison qu'elles composent est une raison triplée.

Proposition Huitie'me.

Theorême septiéme.

28 *Les quarrez de quarrez sont en raison composée de leurs racines, & cette raison est quatruplée ; ainsi des autres Puissances.*

Cette Proposition se prouve comme les deux précedentes. Les quatriémes puissances ont leurs quatre racines égales ; ainsi la raison qu'elles ont entr'elles est quatruplée. Il en est de même des autres puissances. Il est évident que les cinquiémes puissances sont en raison quintuplée de celle de leurs racines, les sixiémes en raison sextuplée, ainsi de suite.

Proposition neuvie'me.

Theoréme huitiéme.

29 *Lors que des grandeurs sont proportionnelles, leurs quarrez & leurs cubes, & toutes leurs puissances sont proportionelles.*

Si $a.\ b :: c.\ d.$ je dis que $\begin{cases} a^5\ b^5 :: c^5\ d^5 \\ a^4\ b^4 :: c^4\ d^4 \\ a^3\ b^3 :: c^3\ d^3 \\ a^2\ b^2 :: c^2\ d^2 \end{cases}$

La raison de *aa* avec *bb*, & celle de *cc* avec *dd*, est doublée d'une même raison, sçavoir de celle de *a* avec *b*, ou de *c* avec *d*. La raison de *aaa* avec

avec *bbb*, & celle de *ccc* avec *ddd*, sont triplées de cette même raison de *a* avec *b*; ainsi les raisons composantes étant égales par l'Axiome second, les composées seront égales.

La converse de cette Proposition est manifeste, qui est que lors que des quarrez ou des cubes sont proportionnels, leurs racines sont proportionnelles.

COROLLAIRE.

Les quarrez, les cubes, & les autres puissances des termes d'une progression, sont en progression. 30

Puisque les quarrez & les cubes de grandeurs proportionnelles sont proportionnels, si la proportion des grandeurs est continuë, il est évident que celle de leurs quarrez & de leurs cubes doit être aussi continuë.

$$\text{Si } \overset{::}{-} a.\ b.\ c. \text{ il faut que } \begin{cases} \overset{::}{-} aa.\ bb.\ cc. \\ \overset{::}{-} aaa.bbb.ccc. \\ \overset{::}{-} a^4.\ b^4.\ c^4. \\ \overset{::}{-} a^5.\ b^5.\ c^5. \end{cases}$$

DIXIE'ME PROPOSITION.

Theorême neuviéme.

Toutes les puissances ou degrez d'une même grandeur rangez de suite sont en progression. 31

Soit *a* élevé à ses puissances qui soient icy rangées de suite, $a^1.\ a^2.\ a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.\ a^7.$ &c. c'est une même raison qui regne; car divisant la puissance qui suit par la précedente, c'est toujours le même quotient qui est icy *a*. Par consequent selon la Définition de la progression, cet ordre des puissances rangées selon leur degré fait une progression.

PRO-

PROPOSITION ONZIE'ME.

Theorême dixiéme.

32 *En toute progression Geometrique les quarrez de deux termes qui se suivent immédiatement, sont entr'eux comme le premier terme à celui qui suit le second.*

Soit ∺ *b. c. d. f.* &c. je dis que *bb. cc* :: *b. d.* Car s̃ n. 25. la raison de *bb* à *cc* est doublée de la raison de *b* à *c.* qui est la même que celle de *c* à *d.* Or s̃. n. 13. la raison de *b* à *d* est composée de ces deux mêmes raisons: Donc par le second Axiome s̃ n. 9 il y a même raison entre *bb* & *cc*, qu'entre *b* & *d*; donc *bb. cc* :: *b. d.*

PROPOSITION DOUZIE'ME.

Theorême onziéme.

33 *Dans une progression Geometrique, le cube du premier terme est au cube du second, comme le premier terme est à celui qui suit le troisiéme.*

Soit ∺ *b. c. d. f.* &c. je dis que *bbb.* :: *ccc. b. f.* la raison de *bbb* à *ccc* est triplée de celle de *b* à *c*, qui est la même que celle de *c* à *d*, de *d* à *f.* s̃ n. 27. Or la raison de *b* à *f* est composée de ces trois mêmes raisons. s̃ n. 13. Donc celle de *bbb* à *ccc* est égale à celle de *b* à *f.*

Ce Theorême donne le moyen de doubler un cube; car puisque bbb. ccc :: b f. *Pour trouver un cube double de* bbb, *il faut prendre le double de* b, *& entre* b *& ce double que je nomme* f. *trouver* c *&* d *deux moyens proportionnels. On va voir comment ces moyens se trouvent. Si* f *est le double de* b, *le cube de* c *sera le double du cube de* b.

PRO-

PROPOSITION TREIZIE'ME.

Theorême douziéme.

Dans une progression Geometrique, le quarré de quarré du premier terme, est à la même puissance du second comme le premier terme est à celuy qui suit le quatriéme: ainsi des autres puissances. 34

Cette Proposition se prouve comme les deux précedentes. Il en est de même des autres puissances. La cinquiéme puissance du premier terme est à la cinquiéme puissance du second, comme le premier terme est à celui qui suit le cinquiéme; ainsi de suite.

PROPOSITION QUATORZIE'ME.

Problême second.

Trouver un moyen proportionnel entre deux grandeurs données. 35

Il faut multiplier les deux grandeurs données l'une par l'autre, la racine quarrée de ce produit sera un moyen proportionnel entre ces deux grandeurs. Liv. III. n. 86. Ainsi les deux grandeurs données étant *b* & *c*, la racine quarrée de *bc* sera un moyen proportionnel entre *b* & *c*. Si l'on cherche un moyen entre 2 & 18, je multiplie donc 2 par 18, ce qui fait 36, la racine quarrée de ce produit qui est 6, sera un moyen proportionnel entre 2 & 18.

Autrement.

Si les deux nombres donnez sont quarrez comme le sont 4 & 16; il faut prendre la racine de l'un & de l'autre; celle de 4 est 2, celle de 16 est 4, le produit de 2 par 4 qui est 8, sera

moyen

moyen proportionnel entre 4 & 16, par le premier Corollaire de la 5e Proposition s. n. 19.

PROPOSITION QUINZIE'ME.

Problême troisiéme.

36 *Trouver deux moyens proportionnels entre deux grandeurs données.*

Cette Proposition est quelquefois impossible aussi bien que la précedente, quand il s'agit de nombres. Nous verrons en quel cas, lors que nous parlerons des incommensurables.

Soient ces deux nombres 2 & 16, entre lesquels il faut trouver deux moyens proportionnels. J'appelle ces moyens m & n; ainsi $\div\div$ 2. m: n. 16. Le cube de 2 qui est 8, est à m, comme 2 est à 16. s. n. 33. Ainsi

8 m^3 :: 2. 16. ou 2. 16 :: 8. m^3.

Voilà donc une proportion de quatre termes dont les trois premiers sont connus. Je trouve la valeur du cube m^3, multipliant 16 par 8, ce qui fait 128, que je divise par 2 pre ier terme de cette proportion, le quotient est 64; qui sera la valeur de m^3. La racine cube de 64 est 4; donc m premier moyen proportionnel vaut 4. Je cherche ensuite par la Proposition précedente un moyen proportionnel entre 4 & 16, qui est 8. Donc n vaut 8; ainsi j'ay trouvé entre 2 & 16 deux moyens proportionnels; ce qui étoit proposé.

Autrement.

Si les nombres donnez sont des cubes comme 8 & 64, je prens leurs racines cubiques qui sont 2 & 4, je multiplie le quarré de la premiere racine 2 par la seconde, c'est à dire 4 par 4 ce qui produit 16, & le quarré de la seconde racine 4 par

par la premiere racine, c'est à dire 16 par 2, ce qui fait 32. Or ÷ 8. 16. 32. 64. ẽ n. 21.

PROPOSITION SEIZIE'ME.

Problême quatriéme.

Entre deux grandeurs données, trouver tant de moyens proportionnels qu'on voudra. 37

Soient ces deux grandeurs b & l, on propose de trouver cinq moyens proportionnels, sçavoir c. d. f. g. h. Comme b est à l, la sixiéme puissance de b est à la sixiéme puissance de c, premier moyen proportionnel. ẽ n. 34. Donc

$$b. \quad l. :: b^6. \quad c^6.$$

Ainsi on trouvera la valeur de c^6, qui est le quatriéme terme de cette proportion, dont les trois premiers termes sont connus. Ce premier moyen étant connu, on trouvera le second; car $c. l :: c^5. d^5.$ ẽ n. 34. La valeur de d étant connuë, on trouvera celle de f; car $d. \quad l :: d^4 \quad f^4$; ainsi de suite.

Autrement.

Il faut extraire les racines des puissances des grandeurs données, entre lesquelles on veut trouver plusieurs moyens proportionnels, ensuite multiplier ces racines, comme il a été dit. ẽ n. 22.

L'on ne peut pas toûjours exprimer par nombres la valeur de ces moyens proportionnels. Nous verrons dans le sixiéme Livre quand est-ce que cela se peut faire.

PROPOSITION DIX-SEPTIE'ME.

Theorême treiziéme.

Si deux grandeurs chacune de deux dimensions sont égales, les deux racines de la premiere seront 38

ra-

reciproques à celles de la seconde, c'est à dire, *qu'elles seront ou les extrêmes, ou les moyens d'une proportion de quatre termes.*

Si *b f* & *cd* sont deux grandeurs égales, leurs racines *b*, *f*, *c*, *d*, sont réciproques, c'est à dire, que *b* est à *c* comme *d* est à *f*, ce qui est évident; car on a démontré Liv. III. n. 69, que lors que quatre grandeurs sont tellement rangées que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, ces grandeurs sont proportionnelles.

PROPOSITION DIX-HUITIE'ME.

Theorême quatorziéme.

39 *Dans une proportion de quatre termes, le produit des moyens ou des extrêmes est moyen proportionnel entre le produit des antecedens, & celuy des consequens.*

Si *b*, *c* :: *d*. *f*. il faut que, *bd*, *cd* :: *b*, *c*, & *cd*, *cf* :: *d*, *f*: 8 n. 18: Donc *bd*, *cd* :: *cd*, *cf*, ou ∺ *bd*, *cd*, *cf*: donc *cd* produit des moyens est moyen proportionnel entre *bd* produit des antecedens, & *cf* produit des consequens. On peut démontrer de la même maniere que *bf* est moyen proportionnel entre *bd* & *cf*.

PROPOSITION DIX-NEUVIE'ME.

Theorême quinziéme.

40 *Dans une proportion de quatre termes, les quarrez de deux termes de chaque raison sont entr'eux, comme le produit des antecedens est au produit des consequens.*

Je suppose que *b*, *c* :: *d*, *f*. La proposition est que *bb*, *cc* :: *bd*, *cf*; ce qui se démontre aisément. Puisque *b*, *c* :: *d*, *f*: donc *b*, *d* :: *c*, *f*. Donc

par

par la cinquiéme proposition ci-dessus bb, bd :: b, d & cc, cf :: c, f. Donc puisque la raison de c à f est la même que celle de b à d, ainsi bb, bd :: cc, cf, & partant bb, cc :: bd, cf, qui est ce qu'il falloit prouver. On peut faire une infinité de propositions semblables, qu'il sera également facile de résoudre.

PROPOSITION VINGTIE'ME.

Problême cinquiéme.

Trouver la somme des quarrez de chaque terme d'une progression. 41

Soit cette progression $\div\div$ a, b, c, d, f, g; je suppose que q est le quotient du second terme divisé par le premier; ainsi selon ce qui a été enseigné, je reduis cette progression à celle-cy.

$\div\div$ $a.$ $aq.$ $aq^2.$ $aq^3.$ $aq^4.$ $aq^5.$

Voicy les quarrez de cette progression qui font une progression, s̃ n. 30.

$\div\div$ $aa.$ $aaq^2.$ $aaq^4.$ $aaq^6.$ $aaq^8.$ $aaq^{10}.$

Cette seule expression découvre le moyen de résoudre la question. Car il ne s'agit que de chercher la somme de cette progression dont on connoît le premier terme, & de combien de termes elle est composée : cette somme se trouve comme il a été enseigné par les dernieres Propositions du Livre III.

PROPOSITION VINGT-UNIE'ME.

Theorême seiziéme.

Dans une progression $\div\div$ c, d, f, g, *l'un de ces termes* c *sera à* f *comme la somme des quarrez de* c *& de* d *est la somme des quarrez de* d *& de* f. 42

C'est à dire que c, f :: $cc + dd$. $dd + ff$; ce qu'il est facile de démontrer. Car s̃ n. 32, cc, dd.

dd :: *c*, *f*, & *dd*, *ff*, :: *d*, *g*. Or la raison de *d* à *g* est la même que celle de *c* à *f*: donc ajoûtant à *cc* & à *dd* des grandeurs qui ayent même raison, *cc* + *dd*, *dd* + *ff* :: *cc*, *dd*. Liv. III. n. 58. Partant *cc* + *dd*, *dd* + *ff* :: *c*, *f*: Ce qu'il falloit démontrer, & ce qui donne jour pour démontrer plusieurs Theorêmes semblables, comme sont ceux-cy qui suivent.

PROPOSITION VINGT-DEUXIE'ME.

Theorême dix-septiéme.

43 *Comme* c *est à* g, *la somme des cubes de* c, *de* d, *de* f *est à la somme des cubes de* d, *de* f, *de* g.

PROPOSITION VINGT-TROISIE'ME.

Theorême dix-huitiéme.

44 *Comme* c *est à* f, *le quarré de* c + d *est au quarré de* d + f.

Comme c *est à* g, *le cube de* c + d + f *est à* c *celuy de* d + f + g.

PROPOSITION VINGT-QUATRIE'ME.

Theorême dix-neuviéme.

45 *Comme* c *est à* f, *ainsi la difference des quarrez de* c *& de* d *est à la difference des quarrez de* d *& de* f.

La démonstration de ce dernier Theorême est encore facile. Puisque *cc*, *dd* :: *c*, *f*. & *dd*, *ff* :: *c*, *f*: donc Livre III. n. 60, ôtant de *dd* & de *ff* les grandeurs *cc* & *dd* qui ont même raison, ils demeureront en même raison, *dd* — *cc*. *ff* — *dd* :: *c*, *f*. Or *dd* — *cc* est la difference de *cc* & de *dd*, comme *ff* — *dd* est la difference de *dd*, & de *ff*.

ELEMENS

ELEMENS DES MATHEMATIQUES OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE CINQUIE'ME.

Des Fractions & des Operations Arithmetiques ſur les Fractions & ſur les Raiſons.

SECTION PREMIERE.

Préparations pour faire les Operations de l'Arithmetique ſur les Fractions & ſur les Raiſons.

CHAPITRE PREMIER.

Les Fractions ſont des manieres d'exprimer une Raiſon ; ainſi les Fractions ſont des Raiſons.

LES Fractions, ou nombres rompus, ne ſont 1
rien autre choſe que des manieres d'exprimer

mer la raison qu'ont deux ou plusieurs nombres entr'eux; ce sont ainsi des raisons. C'est pourquoy je m'étonne qu'un trés-habile homme ait dit, qu'autrefois on n'avoit pas pris garde qu'on pouvoit faire toutes les Operations Arithmetiques sur les raisons, puisque de tout temps on a ajoûté, on a soustrait, on a multiplié & divisé des fractions qui ne sont que des raisons.

Les expressions en quoy consistent les fractions sont fort naturelles, c'est à dire qu'elles sont propres pour marquer ce qu'on veut qu'elles expriment. On appelle fraction par exemple cette expression $\frac{5}{6}$ qui marque qu'une grandeur entiere a été rompuë en 6 parties, ou qu'elle a 6 parties dont on ne prend que cinq. Cette expression, dis-je, $\frac{5}{6}$ est propre pour marquer une raison; car *Raison*, comme on l'a dit souvent, c'est une maniere de contenir ou d'être contenu; ce qu'on connoît par la division, qui fait voir combien de fois une grandeur est dans une autre: C'est pourquoy le quotient de la division de deux grandeurs est l'exposant de leur raison. Or on a vû que le signe general de la division étoit une petite ligne sur laquelle on mettoit la grandeur à diviser, & dessous le diviseur; comme pour diviser b par c on écrit $\frac{b}{c}$. Le quotient de b divisé par c étant donc $\frac{b}{c}$, cette expression est propre pour marquer la raison de b à c. Par la même raison $\frac{5}{6}$ étant une marque qu'il faut concevoir que 5 est divisé par 6, cette expression

sion marque la raison de 5 à 6.

Nous avons dit dés le premier Livre, que lors que le diviseur étoit plus grand que le nombre à diviser, il le falloit mettre sous ce nombre. Par exemple que pour diviser 5 par 6, on devoit écrire $\frac{5}{6}$. On voit à present la raison de cette régle. On appelle cette expression une fraction; parce que, comme on le va dire, on suppose que chaque unité du reste du nombre à diviser est rompuë en autant de parties qu'il y a d'unitez dans le diviseur. Par exemple, si 5 sont cinq écus qui restent à diviser, ou à partager à six personnes; comme chacune ne peut pas en avoir un écu puisqu'il n'y en a que 5, on conçoit que chaque écu est divisé en 6 parties, dont chacune vaut 10 sols; ainsi cette expression $\frac{5}{6}$ dit que cinq écus étant divisez à six personnes, chacune a cinq parties telles que l'écu en vaut six. Vous voyez donc pourquoy on appelle ces expressions *des Fractions*, & que $\frac{5}{6}$ est un nombre rompu, à cause que 6 est un nombre qui marque l'unité rompuë en six parties. C'est ce que nous allons expliquer avec soin, & fort aisément, car tous les principes ont été établis, puisque ces fractions ne sont que des raisons.

CHA-

CHAPITRE II.

Définitions & explications des termes. Axiomes ou propositions évidentes touchant les Fractions.

PREMIERE DEFINITION.

2 *FRaction est une expression qui exprime le rapport de la partie d'un nombre entier, qui est rompu & divisé en tant de parties qu'on a voulu, avec ce nombre entier.*

Soit *a* une grandeur entiere; par exemple une toise, aïant rompu ce nombre entier *a* en 12 parties, on met comme on l'a dit, ce nombre 12, qui marque en combien de parties la grandeur *a* ou le nombre 1 est rompu, sous une petite ligne ou barre en cette maniere $\frac{}{12}$. Aprés pour exprimer le nombre des parties de *a*, soit la sixiéme, soit la quatriéme, ou quelqu'autre partie que ce soit, on met dessus cette ligne ou barre, le nombre des parties qu'on veut exprimer, en cette maniere $\frac{6}{12}$ ou $\frac{4}{12}$. Cette fraction $\frac{6}{12}$ vaut 6 parties de *a*, telles que *a* en vaut 12. Cette fraction $\frac{4}{12}$ vaut 4 parties telles que toute la grandeur *a* en vaut 12.

SECONDE DEFINITION.

3 *Dans une fraction les nombres qui sont sous la ligne s'appellent Dénominateurs de la fraction, parce qu'ils font connoître en combien de parties l'entier*

l'entier est rompu ou partagé; ainsi ces nombres donnent le nom à la fraction.

Dans cette fraction $\frac{3}{4}$, le nombre 4 qui est sous la ligne, est le dénominateur de cette fraction parce que faisant connoître que l'entier dont $\frac{3}{4}$ est la fraction, est rompu en 4 parties, il donne le nom à la fraction; car si $\frac{3}{4}$ est la fraction d'un écu, on dira que cette fraction vaut trois quarts d'écu.

TROISIE'ME DEFINITION.

Dans une fraction le nombre qui est sur la ligne s'appelle le numerateur. 4

Dans cette fraction $\frac{3}{4}$, le nombre 3 qui est sur la ligne est appellé le numerateur de cette fraction, parce qu'il nombre les parties que vaut cette fraction de l'entier qui est rompu en 4 parties, sçavoir $\frac{3}{4}$ de la grandeur a : c'est à dire les trois quarts de cette grandeur a.

QUATRIE'ME DEFINITION.

Fractions de fractions sont des nombres qui expriment les parties de la partie d'un entier. 5

Soit a un écu, soit b moitié de cet entier a, le nombre qui exprimera quelques parties de b, sera un nombre doublement rompu. Ces fractions de fractions s'expriment en cette maniere. La premiere fraction qui vaut une moitié de a,

se doit exprimer ainsi $\frac{1}{2}$; & puisque cette moitié est rompuë encore en deux parties, il faut rompre le premier numerateur 1 en deux parties, ce qui fera $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, c'est à dire une moitié d'une moitié. Ainsi comme une simple fraction exprime la raison d'une partie à son tout, une fraction de fraction exprime la raison d'une partie de partie à la grandeur entiere.

On pourroit rompre une troisiéme fois cette seconde fraction, disant une moitié, d'une moitié d'une moitié, $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, & pour lors ce seroit une fraction de fraction de fraction; ainsi à l'infini.

1. Axiome ou Demande.

6 *Le dénominateur d'une fraction vaut toûjours un entier.*

Dans cette fraction $\frac{3}{4}$, le dénominateur 4 vaut un entier, puisqu'il montre en combien de parties l'entier est divisé, & qu'il exprime toutes ses parties, lesquelles prises ensemble égalent le tout ou l'entier.

2. Axiome ou Demande.

7 *Lors que le numerateur est égal à son dénominateur, il vaut un entier; s'il est plus petit il vaut moins qu'un entier; s'il est plus grand il vaut davantage,*

Dans cette fraction $\frac{4}{4}$, le numerateur 4 vaut une

un entier, puisqu'il comprend toutes les parties du dénominateur.

Dans cette fraction $\frac{2}{4}$, le numerateur 2 vaut moins que son dénominateur 4, parce qu'il ne vaut que 2 parties telles que 4 en vaut 4.

Dans cette fraction $\frac{6}{4}$, le numerateur 6 vaut plus que son dénominateur, parce qu'il vaut 6 parties telles que 4 n'en vaut que 4.

3. Axiome ou Demande.

Les fractions ne sont que l'expression de la raison qui est entre un tout & sa partie. 8

Par exemple $\frac{3}{4}$ d'un écu. Cette fraction exprime la valeur d'un nombre qui a la même raison à un écu entier, que celle qui est entre ces deux nombres 3 & 4.

4. Axiome ou Demande.

Quoy qu'on ajoûte ou qu'on retranche du numerateur & du dénominateur d'une fraction, la valeur en sera la même, si la même raison demeure entre le numerateur & le dénominateur devant & aprés ce changement. 9

Cette proposition est une suite de la précedente, puisqu'une fraction est une raison, la valeur sera la même si c'est une même raison; Ainsi $\frac{2}{4}$ & $\frac{6}{12}$ & $\frac{5}{10}$ ne valant que la moitié de l'entier mis en fraction, pendant que le numerateur sera

la moitié du dénominateur, la fraction vaudra toûjours la moitié de l'entier. Six parties de douze parties ne disent pas autre chose que deux parties de quatre parties; cinq parties de dix parties. Toutes ces expressions signifient une même chose, sçavoir la moitié d'un même tout, dont il est question.

CHAPITRE III.

Préparations nécessaires pour faire les operations de l'Arithmetique sur les Fractions & Raisons.

PROPOSITION PREMIE'RE.

Problême premier.

10 R*Eduire un tout en ses parties.*

Il faut multiplier le tout par le nombre des parties dans lesquelles on le veut réduire.

Soient 10 écus que l'on veut réduire en sols. Chaque écu est composé de 60 sols, je multiplie donc 10 par 60, le produit de cette multiplication qui est 600, sera le nombre de sols que valent 10 écus; ce qui est clair. Car si un écu vaut 60 sols, il faut que 10 écus valent 10 fois 60 sols.

COROLLAIRE I.

11 *Par le moyen de cette Proposition on donne le même nom à deux grandeurs differentes, ce qui fait connoître plus clairement leur rapport.*

Car par exemple, comparant un écu avec 40 sols, si l'on réduit un écu en ses parties qui sont 60 sols, on apperçoit plus clairement la raison de 40 sols à 60 sols, que d'un écu à 40 sols.

Co-

COROLLAIRE 2.

Ou peut évaluer les monnoyes & les mesures. 12

Evaluer une grande monnoye ou une grande mesure, c'est exprimer la valeur d'une monnoye ou d'une mesure par une autre espece de monnoye plus connuë, ou une autre espece de mesure plus connuë.

On veut sçavoir combien 100 écus d'or valent de sols; il faut multiplier 100 écus par 114 sols, qui étoient autrefois les parties d'un écu d'or, le produit 11400 sera la valeur de 100 écus d'or, qui valent ainsi 11400 sols.

On veut sçavoir combien 100 toises valent de pieds. Les parties connuës d'une toise sont 6 pieds: je multiplie 100 par 6, le produit qui est 600 pieds sera la valeur de 100 toises.

COROLLAIRE 3.

On peut réduire un entier dans une fraction dont le nom est donné. 13

Le dénominateur de la fraction est 6, on veut réduire ce nombre entier 5 en une fraction dont le dénominateur soit 6, il faut multiplier 4 par 6 ce qui sera 24, & écrire 6 sous 24. Cette fraction $\frac{24}{6}$ vaudra 4 entiers, car le numerateur 24 contient 4 fois le dénominateur 6 qui vaut un entier.

Pour réduire la grandeur a dans une fraction dont le dénominateur soit d, suivant ce que nous venons de dire, je multiplie a par d, ce qui fait ad, que je place au dessus d'une ligne sous laquelle je place d en cette maniere $\frac{ad}{d}$. De même

pour réduire cette grandeur a dans une fraction dont $a+b$ soit le dénominateur, je multiplie a par $a+b$, le produit est $aa+ab$, sous lequel je place $a+b$ de cette sorte $\frac{ab+ab}{a+b}$.

COROLLAIRE 4.

14 *Pour réduire un entier en fraction, il ne faut qu'écrire le nombre donné au dessus d'une ligne, & l'unité au dessous.*

Par exemple, pour exprimer en fraction un écu, j'écriray $\frac{1}{1}$ d'écu; car le numerateur étant égal au dénominateur, par le premier Axiome $\frac{1}{1}$ vaut un écu. Ainsi pour réduire la grandeur x en fraction, j'écris $\frac{x}{1}$, car divisant x par 1, le quotient est x: partant $\frac{x}{1}$ est égal à x, c'est à dire à la grandeur entiere.

Remarquez que pour marquer la partie d'une grandeur exprimée par des lettres qu'on ne peut pas diviser comme des chifres, l'on met à côté une fraction avec des chifres qui expriment la valeur de la partie qu'on veut signifier; ainsi pour exprimer la quatriéme partie de aa, *j'écris* $\frac{1}{4}$ aa. *ou* $\frac{a^2}{4}$

SECONDE PROPOSITION.

Problême second.

15 *Rappeller les parties à leur tout.*

Il faut diviser le nombre des parties données par

par le nombre qui marque combien leur entier les contient de fois. Par exemple, pour réduire 600 sols en écus; puisque 60 sols font un écu, je divise 600 par 60, le quotient 10 montre que 600 sols valent 10 écus, puisque ce nombre de sols vaut 10 fois 60 sols.

COROLLAIRE I.

Par le moyen de cette Proposition on donne un même nom à deux grandeurs differentes; ce qui fait que l'on découvre plus clairement leur rapport. 16

Soient données ces deux grandeurs 600 deniers & 100 sols. Je donne le même nom à ces deux sommes, en réduisant les deniers en sols; ce que je fais en divisant 600 par 12, qui est le nombre des deniers qui font un sol: le quotient de cette division qui est 50, fait connoître que 600 deniers valent 50 sols. Le rapport de 50 sols à 100 sols est plus sensible, que celuy de 600 deniers à 100 sols.

COROLLAIRE 2.

L'on peut réduire les petites monnoyes à de plus grandes, & les évaluer, c'est à dire voir ce qu'elles valent au regard de celles qui sont plus grandes. 17

Je veux sçavoir combien 600 deniers valent de sols, 12 deniers font un sol, je divise 600 par 12, le quotient de cette division 50 sera 50 sols, valeur de 600 deniers.

Je veux sçavoir combien 120 pieds font de toises, 6 pieds font une toise. Je divise 120 par 6, le quotient qui est 20, marque que 120 pieds valent 20 toises.

COROLLAIRE 3.

18 *L'on peut réduire une fraction en nombres entiers, & connoître combien elle vaut d'entiers.*

Je suppose que cette fraction vaille tout au moins un entier. Par exemple, soit cette fraction $\frac{24}{4}$. Je divise 24 numerateur par le dénominateur 4; le quotient de cette division 6 fera connoître que $\frac{24}{4}$ vaut 6 entiers; car 24 doit valoir autant d'entiers que 4 est contenu dans 24, selon le second Axiome cy-dessus; ainsi étant contenu 6 fois dans 24, cette fraction vaut 6 entiers.

p. 242.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Problême troisiéme.

19 *Réduire à un mesme dénominateur ou à un mesme consequent plusieurs fractions ou raisons.*

C'est la même chose que de réduire deux raisons à des expressions, où elles ayent un même consequent; ce qu'on a enseigné cy-dessus page 210.

Soient ces deux fractions ou raisons $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$, on veut les réduire à un même dénominateur, c'est à dire faire qu'elles ayent un même consequent, & par consequent un même nom, sans toutefois rien changer de leur valeur.

$$\frac{2}{5} \quad \frac{3}{4} \qquad \frac{8 \quad 15}{20}$$

Il faut multiplier le dénominateur de la premiere par le dénominateur de la seconde, le produit

duit sera le commun dénominateur que j'écris sous une ligne. Aprés il faut multiplier le numerateur de la premiere par le dénominateur de la seconde. Par exemple 2 par 4, le produit 8 sera le numerateur de la premiere. Enfin le numerateur de la seconde par le dénominateur de la premiere, c'est à dire 3 par 5, dont le produit 15 sera le numerateur de la seconde; car le numerateur 2 & le dénominateur 5 de cette fraction $\frac{2}{5}$, ont été multipliez par le même nombre sçavoir 4, le numerateur & le dénominateur de la fraction $\frac{3}{4}$, ont aussi été multipliez par le même nombre 5 Ainsi Liv. III. n. 63. 8 est à 20 comme 2 à 5, & 15 est à 20 comme 3 à 4; Donc par l'Axiome 3e cy-dessus ce sont les même fractions $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ & $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$.

S'il falloit réduire plusieurs fractions à un même dénominateur, il faudroit réduire premierement les deux premieres à un même dénominateur, aprés les réduire toutes trois en cette maniere. Soit donnée $\frac{5}{6}$ une troisiéme fraction; les deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$, ayant déja été réduites à celle-cy $\frac{8 \quad 15}{20}$; je multiplie 20 par 6 ce qui fait 120, qui sera le dénominateur commun des trois fractions; aprés je multiplie 8 par 6, ce qui fera 48, qui sera le numerateur de la premiere fraction, & 15 par 6, ce qui fait 90, qui sera le numerateur de la seconde fraction; enfin

je multiplie 5 numerateur de la troisiéme fraction, par 20 dénominateur des deux premieres fractions, cela fait 100 numerateur de cette troisiéme; ainsi ces trois fractions sont réduites à celles-cy $\frac{48\ 90\ 100}{120}$, qui ont un même consequent ou un même dénominateur, & qui sont toûjours les mêmes que les $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{6}$, puis que ce sont les mêmes raisons.

Soient données ces deux fractions $\frac{b}{x}$ & $\frac{c}{z}$. Si on suit la regle precedente, c'est à dire qu'on multiplie les dénominateurs x & z l'un par l'autre, & le numerateur de la premiere par le dénominateur de la seconde b par z, & le numerateur de la seconde par le dénominateur de la premiere, c par x, elles seront réduites à ces deux fractions qui ont le même consequent, ainsi le même nom $\frac{zb}{zx}$ & $\frac{xc}{zx}$.

COROLLAIRE I.

20 *Par le moyen de cette Proposition on peut connoître sensiblement le rapport de deux fractions differentes.*

Soient ces deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$ je veux connoître l'excés de l'une par dessus l'autre, je les réduis à ces deux fractions suivantes, qui ont un même dénominateur ou consequent $\frac{8}{20}$ & $\frac{15}{20}$ qui sont les mêmes. Aprés quoy je vois clairement que la premiere est plus petite que la seconde de sept parties, telles que la grandeur en-

tiere exprimée par le dénominateur 20 en contient 20. Ayant reduit ces deux raisons $\frac{b}{x}$ & $\frac{c}{z}$ à celles-cy $\frac{bz}{xz}$ & $\frac{cx}{xz}$ qui ont un même dénominateur ou même consequent, on voit plus sensiblement quel est leur rapport.

COROLLAIRE 2.

Deux raisons étant données, on peut connoître quelle est la plus grande & quelle est la plus petite. 21

Pour entendre en quoy consiste cet excés d'une raison par dessus une autre raison, il faut remarquer que la raison étant une maniere d'être d'une grandeur à l'égard des grandeurs avec qui elle est comparée; ce qui se dit d'une raison s'entend particulierement du premier terme qui est comparé: Ainsi lors que l'antecedent d'une raison est plus grand à l'égard de son consequent que l'antecedent d'une autre raison à l'égard de son consequent, la premiere raison est plus grande que la seconde. Pour donc remarquer sensiblement cet excés, il faut donner aux deux antecedens de ces deux raisons le même consequent, en les réduisant au même nom. Ainsi ces deux raisons $\frac{2}{7}$ & $\frac{4}{9}$ étant données, les ayant réduites à ces deux raisons qui ont un même consequent $\frac{18}{63}$ $\frac{28}{63}$ l'on apperçoit clairement que la premiere raison est plus petite que la seconde, puisque 18 est plus petit au regard de 63, que 28 au regard du même nombre 63.

LEMME PREMIER.

22 *Trouver la plus grande commune mesure, ou le plus grand commun diviseur de deux nombres donnez.*

On appelle commune mesure ou commun diviseur de deux nombres un troisiéme nombre, par lequel les deux premiers peuvent être divisez exactement.

Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres donnez, il faut ôter le plus petit du plus grand.

Premier Cas.

Si l'excés du plus grand mesure exactement le petit, il sera le commun diviseur de tous deux, & le plus grand de tous les communs diviseurs de ces deux nombres.

Soient donnez *b* 25 & *d* 30, ôtant 25 de 30 l'excés de *d* par dessus *b* est 5; & parce que 5 mesure 25, je dis qu'il mesurera 30, & que c'est le plus grand commun diviseur de *b* & de *d*.

Puisque *d* ne surpasse que d'une fois 5, si 5 est 5 fois dans 25, il faut qu'il soit encore une fois dans *d*; ainsi il le mesure exactement, & il est le plus grand commun diviseur des deux nombres donnez; ce que je démontre. Supposons qu'il y en ait un *c* qui soit plus grand. Examinons si cette supposition est possible. Puisque *d* surpasse *b*, il faut que *c* soit plus de fois dans *d* que dans *b*. Or ce nombre *c* sera ou plus grand ou plus petit, ou égal à 5, qui est l'excés de *d* par dessus *b*. S'il est plus grand, il ne mesurera pas exactement *d* & *b*; s'il est plus petit, ou qu'il lui soit égal, il ne sera donc pas un plus grand & commun diviseur de *b*

&

& de *d*, que ce nombre 5; la supposition étoit ainsi impossible.

Second Cas.

Si l'excés du plus grand nombre par dessus le plus petit ne mesure pas le plus petit, il faut retrancher cet excés du plus petit jusqu'à ce qu'on ait trouvé un nombre qui mesure le plus petit nombre, ce qui se comprendra mieux par un exemple. Soient donnez 21 & 27, l'excés de 27 par dessus 21 qui est 6, ne mesure pas 21. Je retranche cet excés 6 de 21, il reste 15, qui ne mesure pas le plus petit nombre 6. Je retranche donc 6 de 15 reste 9, & de 9 je retranche encore une fois 6. le reste est 3, qui mesure exactement 6. Je dis que 3 est la commune & la plus grande mesure des nombres proposez 21 & 27. Car 1°, par la démonstration précedente 3 est la commune & la plus grande mesure de 9 & de 6: Et puisque 15 surpasse 9 de 6, il faut que 3 soit la commune mesure de 9 & de 15, & la plus grande: car s'il y en avoit une autre plus grande, 3 ne seroit pas la plus grande mesure de 9 & de 6. L'on démontrera de la même maniere que 3 est la commune & la plus grande mesure de 15 & de 21, de 21 & de 27.

LEMME SECOND.

Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer deux nombres donnez. 23

Si l'un des deux nombres donnez est mesuré par l'autre, il sera celui que l'on cherche. Soient donnez 3 & 6, le premier nombre 3 mesure 6; ainsi il est évident que 6 est le plus petit nombre qui puisse être mesuré par les deux nombres 3 & 6.

Si l'un des deux nombres donnez ne mesure

pas

pas l'autre, il faut les multiplier l'un par l'autre, & le produit sera le nombre qu'on cherche. Soient donnez 3 & 4 : leur produit 12 est le plus petit nombre qui puisse être mesuré par 3 & par 4. Mais cela n'est vray que lors que les deux nombres donnez n'excedent pas le plus grand chifre 9 ; & qu'ils sont premiers entr'eux. On dira dans la suite quels sont les nombres premiers. 6 & 4 ne sont pas premiers, aussi 6 multiplié par 4 fait 24, qui n'est pas le plus petit nombre que 6 & 4 mesurent, c'est le nombre 12. La régle generale que nous pouvons donner icy, c'est de trouver les deux plus petits nombres qui soient les exposans de leur raison. Comme si 8 & 12 étoient donnez, il faudroit prendre 2 & 3 ; aprés quoy multipliant le plus grand par le plus petit exposant, & le plus petit par le plus grand des exposans, ce qui ne doit faire qu'un même produit ; ce produit est ce que l'on cherche. Multipliant 8 par 3, & 12 par 2 le nombre 24 produit de l'une & l'autre multiplication est le plus petit nombre que 8 & 12, divisent exactement.

Quatrie'me Proposition.
Problême quatriéme.

24 *Réduire une fraction ou raison aux moindres termes.*

Il faut diviser le numerateur & le dénominateur de la fraction par leur plus grande commune mesure.

Soit cette fraction $\frac{30}{48}$, je divise 30 & 48 par 6, qui est la plus grande commune mesure de 30 & de 48, F les quotiens 5 & 8 donneront la nouvelle fraction $\frac{5}{6}$; car Liv. III. n. 65, 5 est à 8 com-

F par la Demonstration du Lemme premier

comme 30 est à 48. Donc par l'Axiome 4 cy-dessus, les deux fractions $\frac{30}{48}$ & $\frac{5}{8}$ valent la même chose. Or il est certain que cette fraction est réduite aux plus petits termes, car ayant divisé 30 & 48 par 6, qui est leur plus grande & commune mesure, aucune autre division ne peut donner de plus petits exposans que les quotiens de cette division, puisque les plus grands diviseurs donnent de plus petits quotiens. Aprés cette réduction l'on voit plus nettement le rapport du numerateur de cette fraction à son dénominateur, ou quelle est leur raison.

Les fractions & raisons qui sont exprimées par des lettres, se réduisent facilement à de plus simples termes; car selon ce qu'on a dit, que lors que les mêmes lettres se trouvent dans la grandeur à diviser & dans le diviseur, pour faire la division, il ne faut que retrancher les lettres semblables qui se trouvent également dans la grandeur à diviser & dans le diviseur; pour diviser bx par x, il ne faut que retrancher x de la grandeur à diviser bx, & b qui reste est le quotient de cette division. p. 71.

Par consequent pour réduire à de plus simples termes la raison de aac à acd, ou la fraction $\frac{aac}{acd}$; je retranche du numerateur & du dénominateur les lettres qui se trouvent dans l'un & dans l'autre, ce qui donne cette fraction $\frac{a}{d}$ qui a la même valeur que $\frac{aac}{acd}$, c'est à dire, que la raison de a à d est la même que celle de aac à acd, car en faisant ce retranchement, j'ay divisé le numerateur

teur aac & le dénominateur acd par un même diviseur, sçavoir ac; Partant les quotients a & d sont en même raison que aac & acd.

Soit donnée cette fraction $\frac{aac + aad}{cd + dd}$, en retranchant les lettres qui se trouvent dans le numerateur & dans le dénominateur, cette fraction se trouvera réduite à celle-cy $\frac{aa + aa}{d + d}$; & puisqu'en retranchant de deux grandeurs proposées deux autres grandeurs qui ont même raison, la même raison demeure aprés ce retranchement, on pourra encore réduire la fraction donnée à celle-cy $\frac{aa}{d}$. aa est à d, comme $aac + aad$ est à $cd + dd$.

Lors que deux fractions ont un commun dénominateur, pour les reduire à de plus simples termes, de telle sorte qu'elles ayent toûjours un commun dénominateur, il faut prendre garde de ne retrancher que les lettres qui se trouveront en même-temps dans les deux numerateurs & dans le dénominateur commun. Soient par exemple ces deux fractions qui ont un même dénominateur $\frac{bdcd}{aaccd}$ & $\frac{a^5c}{aaccd}$, je retranche simplement un c des numerateurs & du dénominateur commun, & reste $\frac{bdd}{aacd}$ & $\frac{a_5}{aacd}$. Si je n'avois pas voulu faire cette réduction de telle sorte que ces deux fractions eussent toûjours le même dénominateur, je les aurois pû reduire à celles-cy $\frac{bd}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Problême cinquiéme.

Réduire les fractions de fractions dans une seule fraction. 25

Soit donnée cette fraction de fraction $\frac{b}{c}$ de $\frac{c}{z}$; le produit des dénominateurs c & z, qui est cz, sera le dénominateur de la fraction qu'on cherche, & le produit des numerateurs b & c qui est bc, sera le numerateur de cette fraction qui est ainsi $\frac{bc}{cz}$.

Par la définition des fractions de fraction, [t] cette fraction de fraction donnée $\frac{b}{c}$ & $\frac{c}{z}$ exprime la raison de b partie de c à la grandeur entiere z, dont c est aussi partie. Partant Liv. IV. n. 12, la raison de b à z est composée de celle de b à c. & de celle de c à z. Or Liv. IV. n. 13, la raison de bc à cz est composée de la raison de b à c, & de celle de c à z. Donc la raison de bc à zc est égale à celle de b à z, ce qu'on cherchoit Car réduire une fraction de fraction dans une seule fraction, c'est exprimer tout d'un coup la raison de la partie de la partie à la grandeur entiere. + p. 241. (5.

Soit donnée cette fraction de fraction $\frac{2}{4}$ de $\frac{5}{8}$, je multiplie 4 dénominateur de l'une par 8 dénominateur de l'autre, ce qui fait 32, & 2 numerateur de l'une par 5 numerateur de l'autre, ce qui fait 10, la fraction $\frac{10}{32}$ sera égale à $\frac{2}{4}$ de $\frac{5}{8}$.

S'il y avoit des fractions de fraction de fraction de fraction, pour les réduire dans une seule fraction, par exemple pour réduire dans une seule fraction cette fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ *de* $\frac{7}{8}$, *je multiplie le dénominateur de la premiere par celui de la seconde* 4 *par* 6, *ce qui fait* 24, *aprés je multiplie* 24 *par le dénominateur* 8 *de la derniere, ce qui fait* 192, *qui sera le dénominateur de la fraction qu'on cherche.*

Je multiplie de la même maniere les numerateurs, le premier par le second, sçavoir 3 *par* 5 *ce qui fait* 15, *& ce produit* 15 *par le troisiéme qui est* 7 *ce qui fait* 105, *qui sera le numerateur de la fraction cherchée, qui est par consequent* $\frac{105}{192}$.

Sixie'me Proposition.

Problême sixiéme.

26 *Evaluer une fraction, ou la réduire à des termes connus.*

Soit cette fraction $\frac{2}{3}$, qui vaut les deux tiers d'un écu : on veut l'évaluer, c'est à dire qu'on cherche combien cette fraction vaut de sols.

Je multiplie le numerateur 2 & le dénominateur qui est 3. par les parties connuës d'un écu qui sont 60 sols, les produits 120 & 180 sont entr'eux comme 2 à 3, & ayant divisé 120 & 180 par 3 le dénominateur de la fraction donnée, les quotiens 40 & 60 seront encore en même raison que $\frac{2}{3}$. Donc $\frac{2}{3}$ est égal à $\frac{40}{60}$, c'est à dire que

deux

deux troisiémes d'écu valent 40 sols.

La multiplication du dénominateur n'est utile que pour la démonstration; ainsi pour résoudre la présente Proposition, il suffit de multiplier le numerateur de la fraction donnée par ses parties connuës de la grandeur entiere proposée. Dans l'exemple proposé je multiplie 2 par 60 sols, qui sont les parties connuës d'un écu, & je divise 120 produit de cette multiplication, par 3 le dénominateur de la fraction donnée, 40 qui est le quotient, est ce que je cherchois.

AVERTISSEMENT.

Le produit du numerateur que l'on a multiplié par les parties connuës de l'entier, étant divisé par le dénominateur de la fraction, si la division n'est pas exacte & qu'il reste une fraction, il faut encore évaluer ce reste, & continuer ces évaluations jusques à ce qu'il ne reste que des parties, ou connuës ou si petites, que leur valeur ne soit pas considerable. Un exemple rendra cet Avertissement plus clair.

Soit cette fraction $\frac{3}{7}$ d'un écu, selon ce qui a été enseigné, je multiplie le numerateur 3 par les parties connuës d'un écu qui sont 60 sols, le produit de cette multiplication est 180, que je divise par le dénominateur 7, le quotient est 25 plus $\frac{5}{7}$, partant $\frac{3}{7}$ d'un écu valant 25 sols plus $\frac{5}{7}$ de sols. Pour sçavoir maintenant ce que vaut cette fraction $\frac{5}{7}$, je multiplie le numerateur 5 par 12 dernieres parties connuës d'un sol, le produit est 60 que je divise par 7, le quotient est 8 plus

$\frac{4}{7}$, ainsi $\frac{5}{7}$ d'un sol vaut 8 deniers plus $\frac{4}{7}$ d'un denier; la valeur de cette fraction n'est pas considerable.

SEPTIE'ME PROPOSITION.
Problême septiéme.

27 *Diviser un petit nombre par un plus grand.*

Il faut écrire le plus grand sous le plus petit, ce qui donne une fraction qui exprime la valeur du quotient que l'on cherche.

Pour diviser 2 par 5 j'écris $\frac{2}{5}$. Si ce 2 marque deux écus qu'il faut partager à 5 hommes, chacun aura deux cinquiémes d'écu. Pour réduire ce nombre entier 2 dans une fraction dont 5 soit le dénominateur, il faut s̃ n. 13, multiplier 2 par 5, dont le produit 10 sera le numerateur de la fraction que l'on cherche, laquelle fraction $\frac{10}{5}$, vaut le nombre entier 2. Or pour partager 10 cinquiémes d'écus à 5 hommes, il est clair qu'il faut diviser 10 par 5, laquelle division doit avoir pour quotient le nombre entier 2, puisque le nombre 10 a été fait de 2 multiplié par 5. Ainsi en écrivant le plus grand nombre sous le plus petit, on fait en abregé deux operations. Par la premiere, on réduit le nombre entier dans une fraction qui a pour dénominateur le diviseur. Par la seconde on divise le numerateur de cette fraction par le diviseur proposé: Et tout cela se fait, comme nous venons de le voir, avec un trait de plume.

Nous ne pouvions pas donner plutôt la démonstration de cette Operation que nous avons proposée dans le premier Livre, en traitant de la Division des nombres entiers.

SEC-

SECTION SECONDE.

Operations Arithmetiques sur les Fractions & sur les Raisons.

AVERTISSEMENT.

NOus avons déja dit que lors que plusieurs raisons ont pour consequent une même grandeur, la grandeur de chaque antecedent qui est relative à l'égard de son consequent, peut être régardée comme absoluë à l'égard des autres antecedens; car il est clair que plusieurs tiers d'une même grandeur, par exemple plusieurs tiers d'un écu sont entr'eux des grandeurs absoluës. Pour donc ajoûter 2 tiers à 3 tiers, il ne faut point d'autre regle que les ordinaires: deux tiers avec trois tiers font 5; mais aussi pour faire connoître que ce nombre 5 signifie 5 tiers de la grandeur dont il est parlé, il faut mettre dessous le consequent 3 qui est le dénominateur de cette fraction ou raison. Ainsi quand les raisons ou fractions proposées ont été réduites à un même nom ou à un même dénominateur, ayant pour lors un même consequent, les operations que l'on fait sur elles n'ont plus de difficultez. Raison & fraction sont une même chose; partant en montrant comment se font les Operations Arithmetiques sur les Fractions, on enseigne comment elles se doivent faire sur les Raisons.

EHA-

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition, Soustraction, Multiplication, & Division des Fractions & des Raisons.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Problême huitiéme.

28 *Ajoûter dans une somme plusieurs fractions ou raisons.*

Il faut premierement les réduire à un même dénominateur, par la 3e Proposition. Soient $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{4}$, je les réduis à ces trois fractions ou raisons qui ont un même dénominateur ou consequent $\frac{72}{96}\ \frac{80}{}\ \frac{48}{}$. J'ajoûte dans une somme les numerateurs 72, 80, 48, ce qui fait 200, sous lequel j'écris le dénominateur commun 96; ainsi $\frac{200}{96}$ est égal $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{4}$.

Quand il faut ajoûter des nombres entiers avec des nombres rompus, il faut reduire les entiers dans une fraction qui ait même nom que la fraction donnée; ainsi pour ajoûter 6 avec $\frac{2}{8}$, je réduis 6 dans une fraction qui ait pour dénominateur 8, + qui sera $\frac{48}{8}$, cette fraction ajoûtée avec $\frac{2}{8}$ fait $\frac{50}{8}$

+ par le Coroll. 3 de la 1e Prop. p. 245.

Ainsi pour ajouter ces deux fractions ou raisons

ſons $\frac{aa}{c}$ & $\frac{bb}{c}$ dans une ſeule ſomme, j'écris $\frac{aa + bb}{c}$. La raiſon de $aa + bb$ à c eſt égale aux deux raiſons de aa à c, & de bb à c, ajoûtées dans une ſomme.

PROPOSITION NEUVIE'ME.

Problême neuviéme.

Souſtraire une petite fraction ou raiſon d'une plus grande fraction ou raiſon. 29

Soient $\frac{4}{6}$ & $\frac{2}{8}$, il faut retrancher $\frac{2}{8}$ de $\frac{4}{6}$, je les réduis premierement à ces deux fractions ou raiſons qui ont un même dénominateur ou conſequent $\frac{12 \quad 32}{48}$, aprés je retranche le numerateur 12 du numerateur 32, le reſte ſera $\frac{20}{48}$.

S'il faut retrancher une fraction d'un entier, ou un entier d'une fraction, il faut réduire l'entier dans une fraction donnée. Pour retrancher $\frac{3}{4}$ de 8, je réduis cet entier 8 à cette fraction $\frac{32}{4}$, d'où ayant ôté la fraction propoſée $\frac{3}{4}$, il reſte $\frac{29}{4}$.

Ainſi pour retrancher la fraction $\frac{aa}{c}$ de la fraction $\frac{bb}{c}$, j'écris $\frac{bb - aa}{c}$.

DIXIE'ME

DIXIE'ME PROPOSITION.
Problême dixiéme.

30 *Multiplier une fraction ou raison par une autre fraction ou raison.*

Soient données ces deux fractions ou raisons $\frac{4}{5}$ & $\frac{2}{3}$, je les réduis à ces deux fractions ou raisons qui ont un même dénominateur ou consequent $\frac{12 \quad 10}{15}$. Je multiplie ensuite les numerateurs l'un par l'autre, le produit 120 sera le numerateur de la fraction $\frac{12}{15}$ multipliée par la fraction $\frac{10}{15}$, sous lequel numerateur 120 on met ordinairement le produit du dénominateur commun 15 multiplié par lui-même, lequel produit est icy 225; de sorte que le produit des deux fractions données est $\frac{120}{225}$.

Pour abreger cette operation, sans faire aucune réduction, il faut prendre pour numerateur de la fraction que l'on cherche, le produit des numerateurs des fractions données, & pour dénominateur le produit des dénominateurs; ainsi les fractions données étant $\frac{4}{5}$ & $\frac{2}{3}$, leur produit sera $\frac{8}{15}$. Il est facile de démontrer que cette operation est bonne.

Il ne faut que démontrer que la raison $\frac{8}{15}$ est

égale

égale à celle-cy $\frac{120}{225}$. Ce qui eſt clair, car elles ſont compoſées de raiſons égales, puiſque la raiſon de $\frac{8}{15}$ eſt compoſée de celles-cy $\frac{4}{5}$ & $\frac{2}{3}$, comme cette fraction $\frac{120}{225}$ eſt compoſée des fractions $\frac{12}{15}$ & $\frac{10}{15}$, qui ſont les mêmes. Les raiſons compoſées ſont égales, lorſque les raiſons compoſantes ſont égales.

Ainſi pour multiplier $\frac{b}{c}$ par $\frac{m}{n}$, il faut écrire $\frac{bm}{cn}$.

ONZIE'ME PROPOSITION.

Problême onziéme.

Diviſer une fraction par une fraction.

Dans toute diviſion on cherche la maniere dont le diviſeur eſt contenu dans la grandeur à diviſer, ou la raiſon du diviſeur à la grandeur à diviſer; car comme nous avons vû, l'expoſant de la raiſon de ces deux grandeurs eſt le quotient de la diviſion de l'une par l'autre. Ainſi quand on propoſe de diviſer une fraction par une autre fraction, on demande quelle eſt la raiſon de l'une à l'autre, & quel eſt l'expoſant de cette raiſon. 31

Lors que deux fractions ou raiſons ont le même dénominateur ou même conſequent, il eſt évident qu'elles ſont entr'elles comme leurs numerateurs. Par exemple, il eſt clair que $\frac{2}{4}$ eſt à $\frac{3}{4}$

comme 2 est à 3 ; ainsi dans ce cas il faut seulement placer le numerateur de l'une sur le numerateur de l'autre : cette fraction $\frac{2}{3}$ est l'exposant de ces deux fractions $\frac{2}{4}$ & $\frac{3}{4}$.

Si les deux fractions proposées ont differens noms, il faut les multiplier en croix, le dénominateur de l'une par le numerateur de l'autre, & le dénominateur de celle-cy par le numerateur de l'autre fraction. Soient données ces deux fractions $\frac{b}{d}$ & $\frac{f}{g}$. Je multiplie d par f & g par b, ce qui me donne $\frac{bg}{df}$, exposant de la raison des deux fractions proposées, ce que je démontre ainsi.

En multipliant b par g & f par d, j'auray ces deux produits df & bg, sous lesquels ayant placé le produit de d par g, les deux fractions proposées seront réduites à celles-cy qui ont le même nom $\frac{df}{dg}$ & $\frac{bg}{dg}$, dont l'exposant est $\frac{bg}{df}$, selon ce que nous venons de dire, que lors que deux fractions ont le même nom, elles sont entr'elles comme leurs numerateurs. Or c'est ce qu'il falloit démontrer, sçavoir que $\frac{bg}{df}$ étoit l'exposant des deux fractions $\frac{b}{d}$ & $\frac{f}{g}$.

Selon cette methode, pour diviser $\frac{3}{5}$ par $\frac{2}{6}$ & pour trouver l'exposant de la raison de ces deux fractions, je multiplie 5 par 2, ce qui fait 10, que je

je place sous une ligne, sur laquelle je mets le produit de 3 par 6, ce qui me donne $\frac{18}{10}$, qui est l'exposant de la raison de $\frac{3}{5}$ à $\frac{2}{6}$.

Lors que le numerateur se peut diviser par le numerateur, & le dénominateur par le dénominateur, la chose est aisée. Ainsi ayant à diviser $\frac{6}{20}$ par $\frac{2}{5}$, les quotiens sont $\frac{3}{4}$, ce qui abrege, & sur tout pour les grandeurs literales, comme $\frac{acd}{bg}$ par $\frac{d}{g}$ vient $\frac{ac}{b}$. La raison est que la division defait ce que la multiplication a fait.

CHAPITRE II.

Des autres Operations Arithmetiques sur les Fractions.

LEs autres Operations de l'Arithmetique se font 32
sur les fractions comme sur les grandeurs absolues; ainsi il n'est pas nécessaire d'en parler. Ces Operations ne consistent que dans certaines manieres d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions: c'est pourquoy lors que l'on sçait ajoûter ou soustraire, multiplier ou diviser des nombres rompus, on sçait les Regles de trois, de compagnie, & les autres Regles sur ces nombres.

Les extractions des racines se font aussi de la même maniere sur les nombres rompus que sur les nombres entiers. Par exemple, pour tirer la

racine quarrée de cette fraction $\frac{9}{25}$, je tire celle du numerateur 9 qui est 3, celle du dénominateur 25 qui est 5, ce qui me donne cette fraction $\frac{3}{5}$, racine quarrée de $\frac{9}{25}$.

Ainsi $\frac{a}{b}$ est la racine quarrée de $\frac{aa}{bb}$. La racine cubique de $\frac{8}{27}$ est $\frac{2}{3}$; car celle de 8 est 2, & celle de 27 est 3. La racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$ est $\frac{a}{b}$.

Je proposeray ici quelques questions, où l'on verra l'usage des fractions, & la pratique de ce qu'on a enseigné. Remarquez dans ces questions une chose de la derniere importance, que la résolution d'une question dépend souvent de la seule maniere d'en exprimer les termes. Un nombre entier se rompt en tant de parties qu'on veut. Il faut choisir une fraction propre à résoudre la question, comme vous l'allez voir.

QUESTION PREMIERE.

33 *Le bassin d'une fontaine a trois ouvertures; par la premiere l'eau s'écoule toute en 3 heures, par la seconde en 5, & par la troisiéme en 6. On demande en combien de temps tout le bassin plein d'eau s'écouleroit, si on ouvroit en même-temps toutes ses ouvertures.*

Selon que la question est proposée; toute l'eau s'écoulant en 3 heures par la premiere ouverture, il s'en écoulera $\frac{1}{3}$ par la même ouverture dans une heure, & parcillement il s'en écoulera $\frac{1}{5}$ dans

dans une heure par la ſeconde ouverture, & $\frac{1}{6}$ par la troiſiéme ouverture, & par toutes trois enſemble il s'en écoulera $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$ dans l'eſpace d'une heure. Toutes ſes fractions ajoûtées enſemble ſelon les regles de l'addition font $\frac{63}{90}$, laquelle fraction ſe réduit à celle-cy $\frac{7}{10}$. Aprés quoy on peut ainſi raiſonner : Si $\frac{7}{10}$, c'eſt à dire ſi ſept dixiémes de toute l'eau s'écoulent dans une heure, dans combien de temps s'écouleront $\frac{10}{10}$ de cette eau, c'eſt à dire toute l'eau ? Ces termes $\frac{7}{10}$ 1 heure, & $\frac{10}{10}$, ſont les trois premiers termes d'une proportion de quatre termes, dont le temps qu'il faut pour écouler toute l'eau fait le quatriéme terme.

$$\frac{7}{10} \quad 1. \quad :: \quad \frac{10}{10}$$

En multipliant le troiſiéme terme de cette proportion par le ſecond ; c'eſt à dire $\frac{10}{10}$ par 1, ce qui fait $\frac{10}{10}$, & diviſant ce produit par le premier terme qui eſt $\frac{7}{10}$ le quotient qui eſt $1\frac{3}{7}$, ſera le quatriéme terme.

$$\frac{7}{10} \quad 1 \quad :: \quad \frac{10}{10} \; 1\frac{3}{7}.$$

C'est à dire que toute l'eau s'écoulera par ces trois ouvertures dans une heure plus trois septiémes parties d'une heure.

Question Seconde.

34 *La moitié d'une pique & un tiers sont dans l'eau, & deux pieds de cette pique sont hors de l'eau; quelle est la longueur de toute la pique.*

Je nomme x cette longueur. Ainsi $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+2=x$. Je réduis selon la regle 5 n. 19, ces deux fractions à un même nom; à celles-cy $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$ que j'ajoûte l'une avec l'autre. 5 n. 28. ce qui fait $\frac{5}{6}$, ainsi $\frac{5}{6}+2=x$. Or $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=x$; car le dénominateur 6 est la valeur de tout x, ainsi $\frac{6}{6}=x$, donc $\frac{1}{6}=2$; donc la grandeur entiere x est un nombre dont 2 est la sixiéme partie; partant c'est le produit de 2 multiplié par 6, c'est à dire 12; cette pique est donc de 12 pieds.

Question Troisie'me.

35 *Achille va dix fois plus vîte qu'une tortuë, cette tortuë a une lieuë d'avance. On demande quand Achille pourra l'attraper.*

Achille attrapera cette tortuë à la premiere neuviéme de la seconde lieuë; car pendant qu'elle aura fait $\frac{1}{9}$ de cette seconde lieuë, Achille doit avoir fait $\frac{10}{9}$, c'est à dire dix fois plus de che-

min

min. Or $\frac{10}{9}$, valent une lieuë entiere plus $\frac{1}{9}$ de lieuë.

Ces espaces que parcourt la tortuë font cette progression Geometrique $\div\div$ $1. \frac{1}{10} \frac{1}{100} \frac{1}{1000}$, &c. Laquelle progression va toûjours en diminuant. Ainsi, comme on l'a remarqué Liv. III. n. 92. toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini ne font qu'une neuviéme de lieuë.

QUESTION QUATRIE'ME.

Une horloge a deux aiguilles, l'une des heures qui fait son tour en 12 heures, & l'autre des minutes qui fait le même tour en une heure. On demande que l'on marque tous les points ausquels ces deux aiguilles se rencontrent. 36

Aprés chaque tour l'aiguille des minutes se trouve sur 12 heures. Ainsi aprés le premier tour l'aiguille des heures a l'intervalle d'une heure d'avance par dessus celle des minutes, qui l'attrapera aprés la $\frac{1}{11}$ de deux heures; car dans le temps que l'aiguille des heures a fait $\frac{1}{11}$ d'une heure, l'aiguille des minutes qui va douze fois plus vîte, doit avoir fait douze onziémes $\frac{12}{11}$ c'est à dire l'intervalle d'une heure entiere plus $\frac{1}{11}$ de cet intervalle. Aprés le second tour, l'aiguille des heures aura d'avance, l'intervalle de deux heures; elle ne peut donc être attrapée qu'à la

$\frac{2}{11}$ de l'intervalle qui est entre deux & trois heures; car pour lors l'aiguille des minutes allant toûjours douze fois plus vîte, aura fait $\frac{24}{11}$ qui valent l'intervalle de deux heures plus $\frac{2}{11}$. Ainsi de suite ces aiguilles se rencontreront à ces heures icy: $I + \frac{1}{11}$ $II + \frac{2}{11}$. $III + \frac{3}{11}$. $IV + \frac{4}{11}$ $V + \frac{5}{11}$. $VI + \frac{6}{11}$. $VII + \frac{7}{11}$. $VIII + \frac{8}{11}$. $IX + \frac{9}{11}$ $X + \frac{10}{11}$. Enfin les deux aiguilles se rencontreront à $XI + \frac{11}{11}$, c'est à dire à douze heures.

On peut se servir de cette methode pour determiner les conjonctions des Planetes lors qu'on sçait leur periode, ou le nombre des années dans lequel elles font leur cours. On peut assigner les points du Ciel où les Planetes doivent se rencontrer.

Question cinquie'me.

37 *Le mauvais Riche brûlé de soif, pria Abraham de luy laisser distiller une goutte d'eau. Supposé que cette goutte eut fait la premiere minute* 100 *lieuës, le seconde* 99, *toûjours selon cette même raison de* 100 *à* 99 *Et qu'il y eût une distance infinie entre le mauvais Riche & Abraham, on demande en combien de temps cette goutte auroit pû arriver jusques au mauvais Riche.*

Le mouvement de cette goutte d'eau en descen-

cendant est retardé; car dans la premiere minute devant faire 100 lieuës, & dans la seconde n'en faisant que 99: son mouvement diminuë selon cette même raison. Ainsi les espaces qu'elle parcourt font une progression sous-multiple, dont le premier est 100, le second 99. On trouvera le troisiéme terme selon ce qui a été enseigné, multipliant le second terme 99 par lui-même, divisant son produit par le premier qui est 100, le quotient $98\frac{1}{100}$ sera le troisiéme. On trouvera ainsi tous les autres termes, qui iront en diminuant, cette progression étant sous-multiple. Le dernier terme n'étant donc pas une grandeur sensible; on le peut supposer égal à zero.

Ainsi $\div$ 100. 99. $98\frac{1}{100}$. 0.

ou $\div$ 0 $98\frac{1}{100}$. 99. 100.

Soit donc nommé *s* la somme de tous les termes de cette progression. Donc Liv. III. n. 90. 100—zero. *s* :: 100—99. 100. Or 100—99 n'est que 1; ainsi 1. 100 :: 100. *s*. Je multiplie le second terme par le 3e, 100 par 100, ce que je divise par 1 le premier; le quotient de cette division est 10000 valeur de *s*. Liv. III. n. 78. Cette goutte d'eau dont il est question, ne feroit donc dans toute l'éternité que 10000 lieuës, & par consequent ne pourroit jamais arriver jusques au lieu du mauvais Riche; puisqu'on suppose qu'entre luy & Abraham il y avoit un espace infini.

SECTION TROISIEME.

Des differentes especes de Nombres Rompus.

CHAPITRE PREMIER.

Des Fractions Décimales.

38 LEs Fractions peuvent prendre leur nom de la maniere que la grandeur entiere est divisée. On nomme par exemple Fractions Décimales, celles où l'entier est divisé en dix parties, & chacune de ces dix parties, en dix autres, & ces dixiémes de dixiéme en autres dixiémes à l'infini; leurs dénominateurs font une progression Geometrique sous-multiple, dans laquelle regne la raison sous-decuple. comme vous le voyez.

$$\frac{1}{10} \quad \frac{1}{100} \quad \frac{1}{1000} \quad \frac{1}{10000} \quad \frac{1}{100000} \text{ \&c.}$$

Joignons à cette progression Geometrique, la progression des nombres naturels, de sorte que le premier terme de l'une réponde au premier terme de l'autre, ainsi de suite.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
	1	2	3	4	5	6	7
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000.

Multipliant par exemple le 3e terme *c* de la progression Geometrique par le 4e *d*, ce qui fait 10000000. Pour sçavoir quel terme c'est que ce produit dans la progression Geometrique, j'ajoûte

joûte *C* & *D*, l'un à l'autre de la progression Arithmetique, ce qui me donne 7 pour 7e terme; ainsi je connois que le produit 10000000 est le septiéme terme. Dans la progression Arithmetique on fait par addition, ce qu'on fait dans la Geometrique par la multiplication.

On joint toûjours la progression Arithmetique à cette progression des Fractions décimales; mais au lieu des chifres de la progression des nombres naturels, on met des lignes de cette maniere. 39

10′. 100″. 1000‴. 10000⁗. 100000′′′′′.
1000000VI. 10000000VII.

Ce qui fait qu'on leur donne les noms du nombre de ces petites lignes, ou de la valeur des termes de la progression Arithmetique, à laquelle ces fractions répondent. On les nomme donc *Primes*, *Secondes*, *Tierces*, *Quatriémes*, *Cinquiémes*, *Sixiémes*, *Septiémes*; ainsi de suite à l'infini, & selon ce qu'on a dit; multipliant des primes par des secondes 10′ par 100″; ce qui fait 1000: Pour sçavoir ce que c'est que ce produit, j'ajoûte les lignes de dessus les unes avec les autres ′ avec″ & cela fait ‴; ce qui me fait connoître que le produit des primes multipliées par des secondes sont des tierces. Qu'ainsi des tierces multipliées par des quatriémes font des septiémes, puisque 3 & 4 font 7. De même une prime par une prime 1′ par 1′, cela doit faire 1″. & 1″ par 1″ doit faire 1‴. cela est évident; car une prime c'est $\frac{1}{10}$: multipliant $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{10}$, cela fait $\frac{1}{100}$. Liv. V. n. 30; Ainsi une prime mul-

tipliée par une prime doit valoir une seconde; car $\frac{1}{100}$ c'est une seconde. Le produit est donc toûjours de l'espece que donne l'addition des petites lignes. Ainsi encore une fois des tierces par des tierces donnent des sixiémes, les secondes par des quatriémes, ″ par ‴ donnent des sixiémes.

L'utilité des Fractions décimales est très-grand, parce que les operations qu'on fait par leur moyen sont courtes. Pour réduire des entiers en primes, des primes en secondes, ou des secondes en des primes, & des primes en entiers, il n'est question que de multiplier ou diviser. Pour réduire des entiers en des primes, il faut les multiplier par 10; pour les réduire en des secondes, il faut les multiplier par 100, puisqu'un entier vaut 10 primes, ou 100 secondes. Or pour faire cette reduction, il faut seulement joindre les plus petits aux plus grands. L'on a 5 entiers 3′ & 6″, on veut réduire ces 5 entiers & ces 3 primes en des secondes, j'écris 536″; car pour faire cette réduction il faut multiplier 5 par 100, c'est à dire le faire valoir 100 fois davantage, en le faisant passer dans le rang des centaines; ce que j'ay fait en plaçant deux chitres devant luy; pour reduire 3′ en secondes, il faut multiplier 3 par 10, ou le faire valoir 10 fois davantage, ce que je fais en plaçant un chifre devant luy.

Au contraire, pour réduire de petites mesures en de plus grandes, il faut les diviser par le nombre de leurs parties qui est nécessaire pour faire la grandeur dont elles sont parties. Pour réduire par exemple un nombre de primes en entiers, il faut le diviser par 10, ou ce qui est la même chose, faire que ce nombre vaille 10 fois moins,

ce

ce qui se fait en retranchant un chifre. Par exemple, pour réduire 53′ en des entiers, je separe 3 de 4, alors 5 ne vaudra pas cinq dixaines, mais cinq unitez qui seront cinq entiers. Ainsi si l'on propose de sçavoir combien 6782‴ font de secondes, je retranche un chifre, & j'apperçois que cela fait 678″ plus 2‴; si l'on demande combien c'est de primes, je retranche deux chifres, & je vois que cela fait 67′ plus 82‴, ou 8 plus 2‴; si enfin l'on me demande combien ce sont d'entiers, je retranche 3 chifres, & j'apperçois que 6782‴ font 6 entiers plus 782‴, ou 7′ + 8″ + 2‴.

L'Addition & la Soustraction des Fractions dé- 41
cimales se font à l'ordinaire. On met les fractions de même nom les unes sous les autres; les primes sous les primes, les secondes sous les secondes, les tierces sous les tierces, &c. Et on opere à l'ordinaire. Il suffit de jetter les yeux sur ces exemples.

ADDITION.	*Ajoûter*		5′	6″	3‴.		
			0′	7″	2‴.		
	somme		6′	3″	5‴.		
SOUSTRACTION.	*de*	6.	4′	5″	0‴	7⁗	5′⁗.
	ôter	3.	6′	0″	8‴	2⁗	3′⁗.
	reste	2.	8′.	4″	2‴	5⁗	2′⁗.

Vous pourrez remarquer qu'on emprunte du terme précedent, quand celuy qu'on veut ôter est plus grand que celuy sous lequel il est.

La multiplication & la division se font aussi 42
facilement avec ces fractions décimales; on multiplie les chifres à l'ordinaire, les uns par les autres, & on ajoûte dans une somme leurs petites barres; comme on l'a vû, s̃ n. 39. Ainsi pour multiplier 5 entiers 6′ 3″. 4‴ par 8 entiers

tiers 2′ 4″, 6‴, je réduis ces deux sommes au même nom, écrivant simplement 5634‴ & 8246‴. Aprés quoy je multiplie 5634‴ par 8246‴ dont le produit est 46457964^{VI} sur lequel je mets ^{VI}, qui est fait de l'addition de‴ & de″ ou de 3 & de 3. Ainsi ce produit sont des sixiémes.

La division se fait en la même maniere. On divise les chifres du dividende par les chifres du diviseur; & on ôte les barres du diviseur du nombre de celles du dividende, on met le reste sur le quotient. Ainsi des huitiémes divisées par des cinquiémes donnent des troisiémes; car de v‴ ôtant v reste ‴ ou 3. Si on veut donc diviser 8′ 6″ 4‴ par 2′. Je divise 864‴ par 2, le quotient est 432″ sur lequel je mets ″ ôtant ′ de‴, dont le reste est″. Pour diviser 3 entiers 4′. 4″ 3‴ 5⁗ 2⁗ par 9′ 6″. il faut diviser 344352⁗ par 96″, le quotient sera 3587′ sur lequel je mets trois petites lignes; car de⁗ ôtez ″ reste‴

35 Les divisions & subdivisions décimales sont commodes, comme vous le voyez, parce que les operations de l'Arithmetique en sont faciles. Ainsi autant qu'on le peut il y faut rappeller les autres subdivisions. Pour cela les toises dont se servent nos Ouvriers, étant divisées d'un côté en six parties ou six pieds; chaque pied en douze pouces, & chaque pouce en douze lignes. Il faut de l'autre côté marquer une division de la toise entiere en dix parties; & de chaque dixiéme en d'autres dixiémes à l'infini. Ainsi en mesurant avec cette toise, on peut ne parler ni de pieds ni de pouces, ni de lignes; & au bout du calcul, évaluer les parties décimales, ce qui est aisé. Car pour sçavoir en pieds, en pouces, & en lignes ce que valent 8′. 9″, on raisonne ainsi; si 10 primes ou cent secondes valent une toise ou six pieds, combien 8′ 9″ ou 89″ vaudront-elles? ce

que je trouve par la Regle de trois, j'multipliant 89 par 6, & divisant le produit 534 par 100; le quotient $5\frac{34}{100}$ fera connoître que 8′ 9″ valent 5 pieds quelque chose de plus. J'évaluë cette fraction qui vaut 34 parties d'un pied divisé en 100, disant si 100, donne 34, combien donneront douze pouces qui valent un pied entier; partant ses 100 parties. Je multiplie 34 par 12, & j'en divise le produit 408 par 100; le quotient $4\frac{8}{100}$ marquera que cette fraction $\frac{34}{100}$ d'un pied vaut 4 pouces plus $\frac{8}{100}$ de pouce, ce qu'on pourra de même évaluer en lignes.

Si on vouloit sçavoir combien cinq pieds trois pouces valent de primes & de secondes, on le trouveroit de la même maniere raisonnant ainsi: si six pieds valent une toise, & par consequent dix primes, ou, ce qui est la même chose, si trois pieds valent cinq primes, combien cinq pieds vaudront-ils de primes,

---

CHAPITRE II.

De la réduction des Mesures & des Monnoyes.

LEs grandes mesures se divisent ordinairement en de plus petites mesures. On peut nommer les nombres qui expriment les grandes mesures, des nombres entiers; & nombres rompus ceux qui n'expriment que les petites. Nous avons enseigné cy-dessus les moyens de réduire toutes ces differentes mesures, & de donner aux plus grandes & aux plus petites le même nom, lors qu'il est nécessaire de faire sur elles les operations ordinaires de l'Arithmetique; mais sans cette 44

te réduction ces operations se font aisément en rangeant ces differentes mesures sous differentes colomnes, à qui on donne le nom de ces mesures; ainsi qu'on a vû que les chiffres ont differentes valeurs, selon le rang ou colomne dans lesquels ils sont placez. Les poids, les monnoyes sont des mesures qui se subdivisent. Les toises, par exemple, se subdivisent en pieds, les pieds en pouces, les pouces en lignes. Il y a de grandes & de petites monnoyes. Il suffira pour faire concevoir tout ce qu'il est nécessaire de sçavoir touchant les operations sur ces subdivisions, de voir comme on peut faire une addition de differentes especes de monnoyes. Si on avoit donc une addition à faire de plusieurs pistoles, livres, sols, deniers; il faudroit ranger toutes ces differentes monnoyes sous differentes colomnes, comme vous le voyez dans l'exemple suivant & pratiquer la même chose que ce qu'on a fait sur les nombres ordinaires.

Une pistole vaut 10 livres. Une livre vaut 20 sols. Un sol vaut 12 deniers. Ayant differentes sommes composées de pistoles, de livres, de sols, de deniers, pour les ajoûter dans une seule somme, il faut écrire chaque monnoye sous celle de même nom, mettant les deniers dans le premier rang de droit à gauche, après dans le second rang les sols, dans le troisiéme les livres, dans le quatriéme les pistoles, de cette maniere.

5 *pistoles.*	6 *livres.*	8 *sols.*	4 *denier.*
7	8	9	10
11	9	17	8
25	8	10	7
51	3	6	5

Je commence cette addition par le premier rang,

rang, dans lequel je trouve 29 deniers, qui font 2 sols & 5 deniers ; je marque 5 sous ce rang ; & je retiens 2 sols pour le rang suivant, lesquels avec ceux qui y sont font 46 sols, qui valent 2 livres plus 6 sols. Je marque 6 sols sous ce rang, & je tiens 2 livres. Dans le troisiéme rang je trouve 31 livres, qui avec les deux livres que j'avois retenuës en font 33, qui valent 3 pistoles plus trois livres. Je ne marque donc que 3 sous ce rang, & je reserve 4 pistoles, qui avec les 48 qui s'y trouvent font 51 pistoles ; ainsi la somme de toutes ces sommes particulieres est 51 pistoles 3 livres 6 sols 5 deniers.

La soustraction se fait de la même maniere, il faut écrire les monnoyes de même nom dans une même colomne, la plus petite somme sous la plus grande, & commençant par la premiere colomne de la droite à la gauche, il faut retrancher le plus petit du plus grand, & ce qui reste le placer dans le rang qui lui convient. Si dans les premieres colomnes il se trouve que ce qui est dessous est plus grand que ce qui est dessus, il faut emprunter de la colomne suivante. Ainsi voulant ôter trois pistoles six livres dix-huit sols dix deniers de cinq pistoles huit livres quinze sols six deniers, aprés avoir

5 pistoles.	*8 livres.*	*15 sols.*	*6 deniers.*
3	6	18	10
2.	1.	16	8.

écrit ces deux sommes, je dis, on ne peut pas ôter dix deniers de six ; j'emprunte un sol de la colomne suivante, qui avec 6 fait 18 deniers, d'où je retranche 10 deniers, & le reste est 8. De 14 sols qui restent je ne puis ôter 18 sols : j'emprunte une livre qui avec ces 14 fait 34 sols, d'où

ayant

ayant ôté 18 reste 16 sols. De 7 livres retranchant 6 livres reste 1. De 5 pistoles ôtez-en 3 reste 2. Ainsi aprés la soustraction reste 2 pistoles une livre, 16 sols huit deniers.

Ces deux exemples suffisent pour comprendre comment se doivent faire l'addition & la soustraction de plusieurs especes differentes, soit de monnoye soit de mesures; comme aussi sur les parties qu'on nomme Aliquotes, c'est à dire qui se trouvent exactement un certain nombre de fois dans une grandeur. On voit par exemple ce qu'on doit faire s'il étoit question de faire un addition de tiers, de quarts, de cinquiémes, ou une soustraction; il faut en faire de colomnes, dont la derniere est celle des entiers; ainsi comme trois tiers font un entier, leur addition se doit mettre dans la colomne des entiers. Dans le calcul Astronomique l'on compte par degrez, minutes, secondes. Un dégré a soixante minutes; une minute soixante secondes, une seconde soixante tierces, ainsi de suite. Lorsqu'il s'agit de faire une addition de ces parties, il faut les ranger dans des colomnes, chacune dans celle de son nom; & ensuite operer, comme on a fait sur les monnoyes.

Pour les autres operations d'Arithmetique, il faut nécessairement réduire les differentes especes de mesures qu'on veut multiplier les unes par les autres, comme on l'a vû s̃ n. 26. Cette réduction se fait par la multiplication, quand aprés cela on veut sçavoir quelles especes contient le produit de cette multiplication, si ce sont des mesures, combien ce produit contient par exemple de toises, de pieds, de pouces, de lignes, on divise ce produit par les nombres qui marquent les raisons que ces parties ont entr'elles. On donne

ces

ces régles poure les réductions des monnoyes dont il est facile de découvrir le fondement en faisant ces operations selon les regles ordinaires. Pour réduire les livres en sols, il faut ajoûter un zero & doubler la somme. Pour réduire 40 livres en sols je double cette somme, ce qui fait 80, & j'ajoûte un zero. Quarante livres valent 800 sols; & pour réduire les sols en livres, il faut retrancher le dernier chifre de droit à gauche, & prendre la moitié du reste, & ce qui reste sont des sols. Pour réduire 857 sols en livres, je retranche le dernier chifre 7. & je prends la moitié de 85 ou de 84, ce qui me fait connoître que 857 sols valent 42 livres 17 sols. Pour réduire les sols en deniers, il faut multiplier les sols par 4 & par 3, ou quadrupler & tripler la somme. Ainsi pour réduire 42 sols en deniers, je multiplie 42 par 4, ce qui fait 168. & 168 par 3, ce qui fait 504. c'est le nombre de deniers que valent 42 sols. Pour réduire les deniers en sols il faut prendre le tiers & le quart. Ainsi le tiers de 504 qui est 168, & le quart de ce tiers qui est 42, est le nombre de sols que valent 504 deniers. En faisant ces réductions tout au long, on voit le fondement de ces régles.

CHAPITRE III.

De l'aproximation des Racines des puissances imparfaites, ou de l'expression (à peu prés) *en nombres rompus, de ce qu'on ne peut pas exprimer avec de nombres entiers.*

JE prouverai dans le livre suivant qu'on ne 45
peut exprimer par aucun nombre, soit entier

soit

soit rompu; la racine d'une puissance imparfaite; que par exemple ce nombre 18 qui n'est pas un nombre quarré ne peut avoir une racine qui se puisse exprimer avec quelque nombre, même rompu. Or ce qu'on ne peut pas exactement se peut faire à peu prés. Pour cela il faut rompre l'entier & le réduire en fraction. Si par exemple ce nombre 18 est proposé pour en extraire la racine qui soit à peu prés celle de 18, qui est un nombre de pieds; il faut réduire ces pieds en ouces. Chaque pied vaut en longueur 12 pouces, mais un pied quarré vaut 144 pouces, il faut donc multiplier 18 par 144, le produit 2592, auquel un quarré de 18 pieds est égal. Ensuite il faut prendre la racine quarrée de ce produit; mais on n'en trouvera pas d'exacte pour en approcher de plus prés, il faut réduire l'entier 18 en fractions décimales; lesquelles peuvent être continuées à l'infini. Enfin on peut trouver une fraction qui multipliée par elle-même fasse ce nombre 18 avec si peu de difference que cela ne soit pas sensible. J'ajoûte à 18 deux zero, cela fait 1800 primes quarrées, qui ne valent que 18 entiers quarrez, ayant partagé ce nombre par tranches

2		
18	00	4
	82	

& pris la racine du quarré de la derniere tranche qui est 16, dont la racine est 4, il faut doubler cette racine trouvée, comme il a été enseigné, le double de 4 est 8, par lequel je divise 20, le quotient est 2, qui sera le second chifre de la racine du nombre donné, & que j'écris aprés le diviseur 8. Ensuite ayant multiplié 82 par 2,

ce

ce qui fait 164, & ôté ce produit de 200, reste 36.

$$2 \left| \begin{array}{l} 36 \\ 00 \\ 82 \end{array} \right\} 42$$

Ainsi je sçay que 42 primes, ou 4 entiers plus 2 primes sont la racine de 18, mais cette racine n'est pas juste, puisqu'il s'en faut 36 primes qu'elle ne fasse 18 entiers.

Pour avoir encore une racine plus exacte, il faut réduire ce reste en des secondes quarrées, en plaçant devant le reste 36 deux zero.

$$\begin{array}{l} 36 \\ 8 \end{array} \left| \begin{array}{l} 00 \\ 44 \end{array} \right\} 424''$$

Ensuite il faut doubler les racines trouvées 42, ce qui fait 84, & diviser 3600 par ce double, le quotient de cette division est 4 qui est le troisiéme caractere de la racine cherchée, que je marque aprés les deux premieres que j'ay déja trouvées; je multiplie 844 par ce dernier caractere 4, ce qui fait 3376, que j'ôte de 3600, & reste 224; ainsi cette racine 424″ n'est pas encore la juste racine de 18, car il s'en faut 224 secondes qu'elle ne fasse 18; c'est pourquoy si on en veut trouver une plus exacte, il faut continuer cette operation, sans esperance, comme nous le ferons voir dans le Livre suivant, qu'on puisse trouver une racine entierement précise d'un nombre non quarré qui a été proposé, & de tout autre nombre qui n'est pas quarré: mais vous voyez que le moyen que nous avons donné est exact, puisqu'on connoît de combien on est éloigné du terme où l'on prétend aller.

Ce qui est merveilleux, c'est qu'on peut augmenter jusqu'à l'infini ce nombre 4, qui est la racine

cine du quarré 16, qui est le nombre quarré qui approche le plus de 18, sans que cette addition augmente cette racine 4 d'un nombre entier; ce que nous démontrerons ainsi.

9 primes, 9 secondes, 9 tierces, & tous les autres nombres rompus de suite ajoûtez ensemble, quand il y en auroit une infinité, ne peuvent faire une unité d'un nombre entier. Car afin que ce qu'on ajoûte à 9 secondes fasse 10 secondes, il faudroit que cette addition valut 10 tierces, puis qu'une seconde vaut 10 tierces; ainsi 9 tierces avec 9 secondes, ne peuvent pas faire 10 secondes. Or afin que ce qu'on ajoûte à 9 primes valût 10 primes, & par consequent un entier, il faudroit que cette addition valût 10 secondes; ce qui n'est pas. On a vû que 9 tierces avec 9 secondes ne peuvent valoir 10 secondes; ainsi $9'$ $9''$ $9'''$ ajoûtées ensemble, ne peuvent valoir 10 primes, ny par consequent un entier. Cette même démonstration prouve que $9'$ $9''$ $9'''$ $9''''$ ne peuvent faire un entier, & ainsi à l'infini. D'un autre côté $9'$ $9''$ $9'''$ valent bien plus que 9 simples primes: ainsi vous voyez comme l'on peut augmenter ce même nombre 9 primes de plus en plus, sans cependant venir jusqu'à 10 primes; ce qui surprend ceux qui n'ont jamais fait réflexion sur la divisibilité indéfinie de tout ce qui est grand.

On peut en la même maniere extraire la racine cubique des nombres qui ne sont pas cubes autant que cela se peut faire. Il faut réduire le nombre donné ou en primes, ou en secondes, ou en tierces, selon qu'on veut avoir une racine plus précise. Soit donné ce nombre non cube 30: le cube qui approche le plus de 30 est 27, dont la racine cubique est 3; de 30 ôtant 27, reste 3.

Pour

Pour avoir une racine plus précise de ce nombre, il faut le réduire en primes. Nous avons remarqué cy dessus, qu'un entier qui est cube vaut 1000 primes; ce qui est évident, car un entier vaut dix primes: Or 10 multipliez par 10 fait 100, & 100 multipliez par 10 fait 1000; donc pour réduire les 30 entiers donnez en primes, il ne faut qu'écrire de suite trois zero; ainsi 30000. Il faut extraire la racine cube de ce nombre 30000 par les regles ordinaires, 1° le coupant par tranches, comme il a été enseigné.

	20	
3	3̸19	
3̸0̸	0̸0̸0̸	(31

2°. Il faut extraire la racine du cube de la derniere tranche: cette racine est 4 dont le cube est 27, que j'ôte de 30, le reste est 3. Selon les regles je prends le quarré de 3 que je viens de trouver, ce quarré est 9 que je triple, le triple est 27 par lequel je divise 30, le quotient est 1, que je marque aprés la premiere racine trouvée 3. De 30 j'ôte 27, reste 3; je prends le quarré de 1 qui est 1, je le multiplie par 9 triple de 3, dernier chifre de la racine. Je retranche le produit qui est 9 de 30, il reste 21; j'ôte de 210 le cube de 1 qui est 1, il reste 209. Ainsi je connois que la racine cube de 30 est 31 primes. Mais cette racine n'est pas précise, puis qu'il s'en faut 209 que 31 primes multipliées cubiquement fassent 30 entiers. Pour avoir donc une racine plus exacte, il faut reduire le nombre proposé en des secondes: & puis que les primes cubiques valent 1000 fois davantage que les secondes qui ne sont point figurées, il faut encore ajoûter trois zero aprés les primes qui restoient, sçavoir aprés 209, ainsi

209000.

209000. Ensuite il faut extraire la racine cube de ce nombre commençant par le trancher, comme il a été enseigné.

209 | 000 (310

Selon la regle je prends le quarré de 31, qui est 961 que je triple, ce qui fait 2883, par lequel nombre ne pouvant diviser 2090, j'écris zero aprés les racines trouvées. Je sçay ainsi que la racine cube de 30 est 310 secondes; mais cette racine n'est point encore exacte; c'est pourquoy si j'en veux avoir une qui approche encore plus de la veritable racine de 30, je dois réduire ces secondes en tierces, & continuer la même operation.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE SIXIE'ME.

Des Grandeurs incommensurables.

SECTION PREMIERE.

Ce que c'est que la commensurabilité & incommensurabilité des Grandeurs. Des nombres pairs, impairs, premiers, quarrez, cubes, &c.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que Grandeur incommensurable. I

EN parlant des Raisons nous avons vû qu'on disoit qu'une Raison étoit *sourde* lors qu'elle ne se pouvoit exprimer avec des nombres, c'est à

dire qu'on ne pouvoit pas marquer exactement combien l'un des termes de cette Raison contenoit de fois, ou étoit contenu dans l'autre, par exemple s'il y étoit ou une fois, ou deux fois, ou trois fois, &c. Les nombres ne sont proprement que des raisons. Lors qu'il s'agit de nombrer plusieurs choses, l'on en prend ou l'on en conçoit une qui est bien connue, qu'on établit pour l'unité ou pour la commune mesure, ainsi qu'on l'a déja remarqué. Ensuite comparant avec cette commune mesure toutes les autres choses qu'on veut nombrer, selon le rapport qu'on trouve qu'elles ont avec elle, on leur donne differens noms: on les appelle deux, trois, quatre, &c. Les nombres ne sont ainsi que des rapports connus, par exemple, ce nombre 7 est le rapport qu'il y a entre deux choses, dont on sçait que l'une étant repetée tant de fois, mesure précisément l'autre.

L'unité est donc comme la mesure dont on se sert pour mesurer. Ainsi l'on dit que plusieurs grandeurs sont commensurables, ou qu'elles peuvent être mesurées par une même mesure, lors qu'on peut assigner une certaine quantité qui se rencontre exactement tant de fois dans chacune. Que si cela n'arrive pas, ces grandeurs sont incommensurables. Les grandeurs qui n'ont entr'elles qu'une raison sourde sont donc incommensurables, puis qu'on ne les peut exprimer par nombres: ou qu'il n'y a aucune certaine quantité qui étant prise pour l'unité les puisse mesurer exactement sans reste, & qu'il y manque quelque chose ou qu'il y a de l'excés.

Il est trés-important de remarquer ici que les hommes ne conçoivent jamais clairement une chose quand ils n'y sont point accoûtumez, à moins qu'on

qu'on ne leur fasse appercevoir qu'elle a un rapport exact avec les choses qui leur sont familieres. Or toutes les choses ne sont pas commensurables. Il est bon de s'en convaincre & de bien remarquer qu'on ne doit pas toûjours prendre pour regle ce qu'on connoît, parce qu'il se peut faire que ce qu'on propose est d'un autre ordre. Ceux qui veulent tout rapporter au corps, jugent mal de la nature de l'ame; & ceux qui rapportent tout aux choses creées & finies comme sont l'ame & le corps jugent mal de Dieu, de ce qu'il est, & de la Trinité des Personnes qui est en Dieu, les esprits & les corps n'étant pas commensurables, ny Dieu avec ses creatures.

Pour concevoir comment il y a des Grandeurs incommensurables, considerons qu'avec une toise, qui est une mesure de six pieds, on ne peut mesurer exactement une longueur qui a moins de six pieds ou qui en a plus, mais qui n'en a pas douze; car alors deux fois la toise feroit cette longueur de douze pieds. Si cette longueur a tant de pieds & outre cela quelque chose de plus ou de moins qu'un pied, une mesure d'un pied ne pourra pas encore mesurer cette longueur exactement, quoy que le pied le fasse plus exactement que la toise, car ce qui reste à mesurer est plus petit. Si on prend pour mesure un pouce, qui est la douziéme partie d'un pied, & que la longueur qu'on veut mesurer ait tant de pouces, mais outre cela quelque chose de plus ou de moins, vous voyez que le pouce ne sera pas encore une mesure exacte, & que le pouce & cette longueur ne sont pas commensurables. Que si on continuë à prendre des mesures toûjours plus petites que le pouce, par exemple qu'on prenne la douziéme partie d'un pouce qui est une ligne, & qu'on ne trouve point de mesure

exacte quoy que l'on pousse la chose à l'infini, alors cette longueur est censée incommensurable avec toutes les grandeurs que nous connoissons. Je dis si cela arrive, car je ne le puis pas démontrer encore comme je le feray dans la suite. Or si cela est, il est évident que cela vient de la divisibilité de la grandeur à l'infini ; car enfin si les grandeurs avoient des parties indivisibles, ces dernieres parties seroient des mesures communes.

Ces réflexions sur l'incommensurabilité de certaines grandeurs, sont de la derniere importance pour se convaincre de cette verité, d'un si grand usage dans la Religion, qu'il y a des choses de fait constantes, qui sont incomprehensibles. Nous connoissons plusieurs veritez touchant les grandeurs incommensurables également certaines & cachées, qu'on ne comprend point ; ce qui nous apprend que quoyque les mysteres soient incomprehensibles, & qu'on n'en ait point d'idée parfaite, neanmoins on en peut croire & démontrer plusieurs choses. Mais en même-temps que cette matiere nous fait connoître les bornes de l'esprit de l'homme, elle nous en doit faire concevoir la vaste étenduë, & sa grande pénetration qui luy fait découvrir tant de choses dans ce qui de soy même est tellement caché, qu'on ne peut point connoître ce qu'il est veritablement.

CHA-

CHAPITRE II.

Préparations pour connoître si ces grandeurs sont commensurables, ou incommensurables, 2

C'Est particulierement l'extraction des racines des puissances imparfaites qui fait paroître l'incommensurabilité. On nomme parfaite une puissance qui se peut exprimer par un nombre quarré, par un nombre cube. Un nombre est quarré ou cube qui a un nombre pour racine. Ainsi il s'agit icy particulierement de donner des regles pour connoître quand des puissances sont parfaites, quand ce sont des nombres quarrez ou cubes, ce qui nous oblige de parler de ces nombres; & pour cela de dire encore quelque chose touchant la nature des nombres en general.

L'unité est ce qui peut être conçû comme une seule chose. 3

Le nombre est une multitude composée d'unitez. 4

Nombre pair est celuy qui se peut diviser en deux nombres égaux. 5

Tels sont 6 & 10, qui ont pour moitié l'un 3 & l'autre 5.

Nombre impair est celuy qui ne peut être divisé en deux nombres égaux, ou qui differe d'avec le nombre pair qui le précede, ou qui le suit immédiatement, de l'unité. 6

Ce nombre 9 est impair, on ne le peut pas diviser en deux nombres égaux: sa difference d'avec 8 & avec 10 qui sont des nombres pairs, est l'unité. Dans ce nombre impair & dans tout autre qui soit aussi impair, il est évident qu'en retran-

chant, ou luy ajoûtant l'unité il devient pair; comme au contraire ajoûtant ou retranchant d'un nombre pair l'unité il devient impair. On dit d'un nombre pair qu'il est pairement pair, lors que sa moitié est un nombre pair; Ainsi 12 est pairement pair parce que 6 est un nombre pair; mais 10 est impairement pair, car 5 est impair.

7 *Nombre premier est celuy qui n'a point d'autre mesure que l'unité.*

C'est à dire qu'il n'y a point d'autre nombre que l'unité qui le puisse mesurer exactement, étant répeté tant de fois. Ces nombres 2. 3. 5. 7. sont des nombres premiers.

8 *Les nombres sont premiers entr'eux qui n'ont que l'unité pour leur commune mesure.*

Ces nombres 4 & 7 sont premiers entr'eux, car il n'y a que l'unité qui puisse être leur mesure commune. Ces nombres 18 & 6 ne sont pas nombres premiers entr'eux, car outre l'unité ils peuvent être mesurez par ces nombres 2 & 3. On a dit que les plus petits nombres qui expriment une raison sont les exposans de cette raison; ainsi les exposans d'une raison sont nombres premiers entr'eux.

On a déja vû que les nombres reçoivent differens noms selon qu'on les conçoit faits de la multiplication d'autres nombres. Generalement on appelle *nombre plan*, celuy qui est fait de la multiplication de deux nombres: *Solide*, celui qui est fait de la multiplication de trois nombres Un nombre est dit quarré lors qu'il est fait de la multiplication d'un nombre par luy-même, lequel est appellé *Racine quarrée* de ce nombre. Ainsi 16 qui est fait de 4 multiplié par 4, est un nombre quarré dont 4 est la racine quarrée. Un nombre cubique est fait de la multiplication d'un nombre mul-

multiplié deux fois par luy-même, qui se nomme *Racine cube* de ce nombre cubique. Le nombre 27 qui est fait de 3 multiplié premierement par luy-même ce qui fait 9, & de ce produit par le même nombre 3, ce qui fait 27, est un nombre cubique, dont 3 est la racine cubique.

Lors qu'un nombre n'est ny quarré ny cube, & qu'ainsi on ne connoît point de nombre, ou qu'il n'y en a point comme on le démontrera, qui puisse être sa racine, alors pour exprimer cette racine, on met devant le nombre dont elle est racine ce signe $\sqrt{}$ qu'on appelle *Signe radical*, parce qu'il sert à marquer les racines.

Quand la grandeur devant laquelle on le met est complexe, c'est à dire composée de deux ou plusieurs grandeurs, jointes par le signe $+$ ou $-$, si c'est la racine de toute la grandeur complexe qu'on veut marquer, on allonge une des jambes du signe radical, pour qu'il comprene toute la grandeur. Ainsi $\sqrt{xx+aa}$ & cela s'appelle une racine universelle.

Autrefois on mettoit aprés le signe radical la premiere lettre de la puissance dont ce signe marquoit la racine. Ainsi $\sqrt{Q}$ si c'étoit une racine quarrée. $\sqrt{C}$ si c'étoit une racine cube. $\sqrt{QQ}$ si c'étoit une racine de quarré quarré, comme $\sqrt{QC}$ si c'étoit une racine d'un quarré cube. Maintenant on met dans le signe radical l'exposant de la puissance dont il marque la racine; ainsi $\sqrt[2]{}$ au lieu de $\sqrt{Q}$ pour dire que c'est une racine quarrée. Quand on voit ce signe seul, il faut supléer l'exposant de la seconde puissance qui est 2. On exprime ainsi les autres racines $\sqrt[3]{}\ \sqrt[4]{}\ \sqrt[5]{}\ \sqrt[6]{}$. Ces nombres qui sont dans le signe radical, sont les exposans des puissances.

Lemme.

9 *Toute puissance doit être censée nombre ou quarré ou cube, &c. lorsque sa racine est égale à un nombre.*

Si x racine de x^2 de x^3 de x^4 est égale à un nombre, x^2 doit être égal à un nombre quarré, x^3 à un nombre cube; car ce nombre auquel x est égal multiplié quarrément sera égal à x^2, multiplié cubiquement, il sera égal à x^3.

Proposition Premie're.
Theorême premier.

10 *Un nombre quarré multipliant un nombre qui n'est pas quarré, le produit ne sera pas un nombre quarré.*

Soit 18 nombre non quarré multiplié par le quarré de 2 qui est 4, le produit 72 ne sera pas quarré. Soit $18 = xx$ & $aa = 4$, le produit de 18 par 4 est 72, comme celuy de xx par aa est $xaxa$, ainsi $xaxa = 72$. & $xa = \sqrt{72}$. Si donc 72 étoit un nombre quarré, il auroit une racine qui se pourroit exprimer en nombre, c'est à dire que xa seroit égale à un nombre. Or connoissant une des racines de ce nombre xa, sçavoir a qui est 2, on connoît la seconde, sçavoir x: par consequent xx ou 18 seroit un nombre quarré contre l'hypothese. Il ne se peut donc pas faire que le produit d'un nombre non-quarré multiplié par un nombre quarré soit nombre quarré; mais prenez garde que deux nombres qui ne sont pas quarrez peuvent en se multipliant produire un nombre quarré. Car 3 & 12 ne sont pas des nombres quarrez, mais le produit de leur multiplication 36, est un nombre quarré.

Se-

SECONDE PROPOSITION.

Theorême second.

Le produit de deux nombres quarrez est toûjours un nombre quarré, qui a pour sa racine un plan fait des deux racines de ces deux nombres quarrez. 12

Soient donnez ces deux nombres quarrez 4 & 16, dont le produit est 64. 1°. Il faut démontrer que ce produit est un nombre quarré. Soit $aa = 4$, & $bb = 16$, aa étant multiplié par bb, cela fait $aabb = 64$. La racine quarrée de $aabb$ est ab, égale à celle de 64. Or la valeur de ab est connuë; car a est égal à la racine de 4 qui est 2, & b est égal à 4 racine de 16. Donc ab est égal au produit de 2 & de 4; Ainsi la racine de 64 se pouvant exprimer par nombre, il faut conclure par le Lemme précedent, que 64 est un nombre quarré.

2°. Il est manifeste que la racine ab du quarré $aabb$ est le produit de a & de b, qui sont les racines des quarrez aa & bb, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Donc un nombre quarré multiplié par luy-même, produit un nombre quarré. 13

Car le produit de cette multiplication est fait par deux nombres quarrez. Ainsi 4 par 4 fait 16, qui est un nombre quarré.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Troisiéme Theorême.

Deux raisons de nombre à nombre étant égales, 14

le produit des antecedens & le produit des consequens sont entr'eux comme deux nombres quarrez.

Soient *a b* :: *c d*. La raison de *a* à *c* est de nombre à nombre, comme aussi celle de *b* à *d*. Il faut prouver que *ac* est à *bd* comme deux nombres quarrez. Ainsi si $a = 12$, $b = 24$, $c = 8$, $d = 16$, il faut prouver que 12×8, ou 96 est à 24×16 ou 384, comme deux nombres quarrez.

Ces deux raisons étant égales, elles ont les mêmes exposans. Ainsi en les réduisant aux moindres termes, on les réduit à ces nombres 1. 2 :: 1. 2. Les deux antecedens de ces deux raisons sont un même nombre, & les deux consequens sont aussi un même nombre; ainsi par la définition des nombres quarrez, le produit 1 des antecedens & 4 produit des consequens, seront des nombres quarrez. Les raisons composées de raisons égales sont égales: Donc *ac* ou 96 est à *bd* ou à 384 comme 1 à 4, & par consequent comme deux nombres quarrez, ce qu'il falloit démontrer.

Quatrie'me Proposition.

Theorême quatriéme.

14 *Le produit de deux nombres plans semblables, c'est à dire dont les racines sont proportionnelles, est un nombre quarré.*

Soient ces deux nombres plans 8 & 18, les racines du premier sont 2 & 4, celles du second sont 3 & 6. Ces quatre racines sont en proportion, 2. 3 :: 4. 6. Donc par la Proposition précedente, les plans 8 & 18 faits de ces racines sont entr'eux comme deux nombres quarrez, sçavoir 4 & 9, qui sont les quarrez des moindres termes 2 & 3 ausquels peuvent être réduites les deux raisons égales

des

des plans proposez ; ainsi 8. 18 :: 4. 9 ; par consequent 8. 4. :: 18. 9.

Par la même raison le produit 144 des antecedens 8 & 18, est à 36 produit des consequens 4 & 9, comme deux nombres quarrez, sçavoir comme 4 est à 1, les quarrez des moindres termes ausquels les raisons de 8 à 4 & de 18 à 9 peuvent être réduites ; Ainsi,

144. 36 : : 4. 1.

Lors que les quarrez sont en proportion, leurs racines sont proportionnelles, Liv. IV. n. 29. Donc $\sqrt{144}$ $\sqrt{36}$: : $\sqrt{4}$ $\sqrt{1}$. Ainsi la raison de la racine de 36 à celle de 144 est connuë, puis qu'elle est égale à celle qui est entre la racine de 1 & celle de 4 qui est 2. Le produit 36 fait par les nombres quarrez 4 & 9, est un nombre quarré, 5 n. 11. Donc la racine de 144 ayant une raison connuë à un nombre connu qui est la racine quarrée du nombre quarré 36, par le Lemme cy-dessus proposé, ce nombre 144, qui est le produit de 8 & de 18, sera un nombre quarré ; ce qu'il falloit démontrer.

Proposition cinquie'me.
Cinquiéme Theorême.

Le produit de deux nombres cubiques, est un nombre cubique. 15

Soient ces deux nombres cubiques 8 & 27, la racine de 8 est 2, celle de 27 est 3. Je nomme *aaa* le nombre 8, & *bbb* le nombre 27. Le produit de 8 par 27 est 216, égal par consequent à cette grandeur *aaabbb*, produit de *aaa* par *bbb*. La racine cubique de ce produit est *ab*. Or puis que *a* est égal à 2, & *b* égal à 3 ; donc *ab* est égal à 6. Ainsi la racine cubique du produit 216, qui est

égale à la grandeur *aaabbb*, est *6*, par consequent ce nombre est cubique, ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

16 *Donc un nombre cubique multiplié par luy-même produit un nombre cubique.*

Car le produit de cette multiplication est fait par deux nombres cubiques. Ainsi 8 par 8 fait 64 qui est un nombre cubique.

SIXIE'ME PROPOSITION.
Sixiéme Theorême.

17 *Trois raisons de nombre à nombre étant égales, le produit des trois antecedens sera au produit des trois consequens comme deux nombres cubiques.*

Soient *b. c* :: *f. g* :: *h. l.* le produit des antecedens de ces raisons est *bfh*, & celuy des consequens est *cgl*, il faut démontrer que *bfh* est à *cgl*, comme un nombre cubique est à un autre nombre cubique.

La raison de *b* à *c* a pour exposans ces deux nombres 2, 3; donc les trois raisons données étant égales, elles auront pour exposans les mêmes nombres 2. 3. :: 2. 3 :: 2. 3. Ainsi les trois antecedens de ces nombres sont trois mêmes nombres, & les trois consequens trois mêmes nombres; donc par la définition des nombres cubiques, le produit des antecedens qui est 8, & le produit des consequens, qui est 27, seront deux nombres cubiques. La raison de 8 à 27 est composée des mêmes raisons dont la raison de *bfh* à *cgl*, est composée: donc ces deux produits *bfh* & *cgl*, seront entr'eux comme 8 est à 27. Or ces deux nombres sont cubiques; donc *bfh* est à *cgl*, com-

comme un nombre cubique est à un autre nombre cubique, ce qu'il falloit prouver.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Septiéme Theorême.

Le produit de deux nombres solides semblables, c'est à dire dont les racines sont proportionnelles, est un nombre cube. 18

Cela se démontre de la même maniere qu'on a prouvé que le produit de deux plans semblables est un nombre quarré.

AVERTISSEMENT.

De ce que nous avons démontré touchant les secondes & troisiémes puissances, il suit clairement que le produit de deux puissances numeriques d'un même degré, est un nombre de la même puissance, par exemple, qu'un nombre quarré de quarré, multiplié par un nombre quarré de quarré, produit un nombre quarré de quarré. Que si quatre raisons de nombre à nombre sont égales, le produit des antecedens est à celuy des consequens, comme deux nombres quarrez de quarré: ainsi des cinquiémes, sixiémes puissances numeriques à l'infini.

Il faut se souvenir icy que dans le langage des anciens Geometres, le quarré est la premiere puissance & le cube la seconde. Nous avons vû les raisons que les nouveaux Geometres ont eu de changer ce langage.

SECTION SECONDE.

Regles pour connoître si des Grandeurs proposées sont commensurables ou incommensurables.

AVERTISSEMENT.

J'Abrege autant que je le puis cette doctrine de la commensurabilité & incommensurabilité, parce qu'il suffit dans les Elemens d'en donner les principes generaux. Je ne parle ici que de ce qui peut être commun à toutes sortes de grandeurs. Je ne touche point à ce qui appartient à la Geometrie.

DEFINITIONS.

PREMIERE DEFINITION.

19 *Deux Grandeurs sont commensurables, lors que la raison qui est entr'elles se peut exprimer par nombre; incommensurables, si cette raison est sourde.*

DEUXIE'ME DEFINITION.

20 *Si deux Grandeurs n'étant pas comme nombre à nombre, leurs quarrez ou leurs cubes sont comme nombre à nombre, on dit alors que ces grandeurs sont incommensurables en elles-mêmes, mais qu'elles sont commensurables en puissance.*

Si $xx = 18$ & $aa = 25$, la racine de 18 ou de

de xx qui est x, est incommensurable avec a racine de aa; mais ces racines qui sont incommensurables en elles-mêmes, sont commensurables en puissance, puis que $xx.\ aa :: 18.\ 25$.

DEMANDE.

Si un nombre mesure une certaine grandeur, celui qui est incommensurable à cette grandeur lui est incommensurable. 21

Soit 3 commensurable avec 12, avec lequel x est incommensurable: je dis que 3 & x sont incommensurables: car si x étoit un certain nombre de fois dans 12, ou 12 dans x, il est évident que 3 seroit aussi en x d'une maniere qui s'exprimeroit par nombre.

PROPOSITION HUITIE'ME.

Huitiéme Theorême.

La raison doublée ou triplée d'une raison de nombre à nombre, est aussi une raison de nombre à nombre, qui a pour ses exposans des nombres quarrez si elle est doublée, & des nombres cubiques si elle est triplée. 22

La raison doublée est une raison composée de deux raisons égales, dont les antecedens ont été multipliez l'un par l'autre, & les consequens de la même maniere l'un par l'autre; par consequent §. n. 13, ces deux produits qui sont les termes de la raison doublée, sont entr'eux comme deux nombres quarrez; ainsi cette raison a pour ses exposans des nombres quarrez. p. 213.

Une raison triplée est composée de trois raisons égales; ainsi les termes de cette raison tri-

plée

plée sont entr'eux comme deux nombres cubiques §. n. 17, & cette raison a pour ses exposans des nombres cubiques ; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION NEUVIE'ME.

Theorême neuviéme.

23 *Une raison simple est sourde, si la raison doublée ou triplée de cette raison n'a pas pour ses exposans des nombres quarrez ou cubiques.*

Si xx n'est pas à zz comme des nombres quarrez & xxx à zzz comme des nombres cubiques, je dis que la raison de x à z est une raison sourde ; car si elle est de nombre à nombre, il faut par la proposition précedente, que xx soit à zz, ou xxx à zzz comme nombre à nombre, & que la raison de xx à zz ait des nombres quarrez pour ses exposans, & la raison de xxx à zzz des nombres cubiques : Or par l'hypothese cela n'est point ; il est donc impossible que la raison de x à z soit une raison de nombre à nombre.

DIXIE'ME PROPOSITION.

Dixiéme Theorême.

24 *Trois grandeurs étant continuellement proportionnelles, la raison de la premiere à la troisiéme ne peut être que de trois sortes.*

1°. *Ou de nombre à nombre, ayant pour ses exposans des nombres quarrez.*

2°. *Ou de nombre à nombre n'ayant pas pour ses exposans des nombres quarrez.*

3°. *Ou sourde, & non de nombre à nombre.*

Premier Cas.

Si la raison de la premiere grandeur à la troisiéme

siéme est une raison de nombre à nombre, qui a pour ses exposans des nombres quarrez, ces trois grandeurs sont commensurables.

Soient ∺ *b. c. d.* trois grandeurs *b. d* :: 4. 9. le produit des nombres quarrez 4 & 9 qui est 36, sera ſ̃. n. 11, un nombre quarré, dont la racine se pourra par consequent exprimer par ce nombre 6. Or cette racine est un moyen proportionnel entre 4 & 9. Donc puis que *c* est un moyen proportionnel entre *b* & *d*, il faut que $c = 6$. Ainsi ces trois grandeurs *b. c. d.* seront commensurables, puis que la raison qu'elles ont entr'elles se peut exprimer avec des nombres.

Second Cas.

Si la raison de la premiere grandeur à la troisiéme, est une raison de nombre à nombre qui n'ait pas pour ses exposans des nombres quarrez, la moyenne grandeur est incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance à la prémiere & à la troisiéme.

Soient ∺ *k. l. m.* trois grandeurs *k. m* :: 3. 4. La raison de *k* à *m* est doublée de la raison de *k* à *l*, ou composée des deux raisons égales de *k* à *l* & de *l* à *m*. Or 3 & 4, qui sont les exposans de cette raison doublée de *k* à *m*, ne sont pas deux nombres quarrez, les deux raisons de *k* à *l* & de *l* à *m* dont cette raison est composée, ne pouvent donc être des raisons de nombre à nombre par la neuviéme Proposition cy-dessus : Donc *k* & *l* sont incommensurables, comme aussi *l* & *m*. Mais puisque Liv. IV. n. 32.

$$\left.\begin{matrix} kk. & ll \\ ll. & mm \end{matrix}\right\} :: k.\ m. \text{ ou } 3.\ 4.$$

Donc *kk*, *ll*, *mm*, sont commensurables; donc

k, *l*, *m*, que l'on a démontré être incommensurables en elles-mêmes, sont commensurables en puissance, c'est à dire que leurs quarrez sont commensurables; ce qu'il falloit prouver. *kk.* est à *ll* comme 3 à 4, & *ll* est à *mm* comme 3 à 4.

On se tromperoit ici si on prenoit pour exposant d'autres nombres que ceux qui sont les plus petits. Car par exemple si on prend ces trois nombres 3. 6. 12. *ausquels soient égaux* k. l. m; *il est vrai que* k. l. m :: 3. 6. 12. *Ainsi* k. l. m. *sont commensurables, quoyque la raison de* k *à* m. *qui est double de celle de* k *à* l, *& de celle de* l *à* m, *ne soient pas comme celle de deux nombres quarrez; car* 3. *&* 12. *ne le sont pas. Mais si on réduit ces nombres aux plus petits, on aura* 1. 2. 4. *alors* k *sera à* m *comme* 1 *à* 4, *qui sont deux nombres quarrez. Les nombres exposans d'une raison sont toûjours les plus petits de ceux qui la puissent exposer.*

Troisiéme Cas.

Si la raison de la premiere grandeur à la troisiéme n'est pas de nombre à nombre, la moyenne grandeur sera incommensurable tant en elle même qu'en puissance.

N'étant pas de nombre à nombre, elle n'est pas par consequent comme des nombres quarrez. Ainsi la raison simple de la premiere à la seconde dont celle de la premiere à la troisiéme est doublée, sera sourde par la 9e Prop. cy-dessus. On suppose toûjours que la premiere grandeur est connuë; par consequent si la raison qu'elle a avec la seconde est sourde, il faut que celle-cy soit inconnuë, & qu'elle ne se puisse exprimer en nombres.

Cette

Cette seconde grandeur sera aussi incommensurable en puissance, parce que le quarré de la premiere est au quarré de la seconde, comme la premiere est à la troisiéme. Liv. IV. n. 32. Donc si la raison de la premiere à la troisiéme n'est pas de nombre à nombre, la raison du quarré de la premiere au quarré de la seconde ne sera pas de nombre à nombre. La premiere & la seconde sont donc incommensurables en puissance. Il en est de même de la seconde à la troisiéme: ainsi ces trois grandeurs sont incommensurables en elles-mêmes & en puissance.

ONZIE'ME PROPOSITION.

Theorême onziéme.

Quatre grandeurs étant continuellement proportionnelles, la raison de la premiere à la quatriéme ne pouvant être que de trois sortes; voicy ce qui arrivera. 25

Premier Cas.

Si la raison de la premiere à la quatriéme est une raison de nombre à nombre qui ait pour ses exposans des nombres cubiques, ces quatre grandeurs seront commensurables.

Soient ∺ *b. c. d. f.* quatre grandeurs, *b. f* :: 8. 27. puis que 8 & 27 sont deux nombres cubiques, leurs racines sont connuës; celle de 8 est 2, celle de 27 est 3. Multipliant le quarré de la premiere racine, lequel est 4 par la seconde racine qui est 3, ce qui produit 12; & 9 quarré de la seconde racine par la premiere racine qui est 2, ce qui produit 18, ces deux produits 12 & 11 seront deux moyens proportionnels entre 8 & 27. Liv. IV. n. 25; partant *b. c. d f* :: 8. 12. 18. 27. Ainsi

si les raisons que ces quatre grandeurs ont entr'elles pouvant être exprimées par nombres, elles sont commensurables.

Second Cas.

Si la raison de la premiere à la quatriéme est une raison de nombre à nombre qui n'ait pas pour ses exposans des nombres cubiques, la premiere & la seconde grandeur sont incommensurables en elles-mêmes, & commensurables en troisiéme puissance; & il en est de même de la seconde & de la troisiéme, de la troisiéme & quatriéme,

Soient ∺ *k. l. m. n.* on suppose que *k n* : : 3. 4. la raison de *k* à *n* étant triplée de la raison de *k* à *l*, ou composée des trois raisons égales de *k* à *l*, de *l* à *m*, de *m* à *n*; chacune de ces trois raisons égales ne sçauroit être de nombre à nombre, s̃. n. 23. Puis que la raison de *k* à *n* qui est triplée de ces raisons, a pour ses exposans les nombres 3 & 4, qui ne sont pas des nombres cubiques; Ainsi elles sont incommensurables, *k* avec *l*, *l* avec *m*, & *m* avec *n*. Or Liv. IV. n. 33.

$$\left.\begin{matrix} kkk. & lll \\ lll & mmm \\ mmm. & nnn \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} k. & n. \\ 2. & 4. \end{matrix}\right.$$

Donc ces cubes sont commensurables, puis qu'ils sont comme 3 à 4; par consequent les 4 grandeurs proposées *k. l. m. n.* sont commensurables en troisiéme puissance, puis que leurs cubes sont commensurables.

Troisiéme Cas.

Si la raison de la premiere à la quatriéme grandeur n'est pas de nombre à nombre, la premiere & la seconde, la seconde & la troisiéme, la troisiéme & la quatriéme, sont incommensurables tant en elles-mêmes qu'en troisiéme puissance.

1°. Puis

1°. Puis que la raison de la premiere à la quatriéme qui est triplée des raisons de ces quatre grandeurs n'est pas de nombre à nombre, & par consequent qu'elle est sourde. S. n. 23. Les raisons de ces quatre grandeurs sont sourdes; ainsi elles sont incommensurables en elles-mêmes.

2°. Ces grandeurs sont pareillement incommensurables en troisiéme puissance; parce que la raison du cube de la premiere au cube de la seconde, est la même que la raison de la premiere grandeur à la quatriéme, que l'on suppose n'être pas de nombre à nombre.

DOUZIE'ME PROPOSITION.

Douziéme Theorême.

Si deux grandeurs quarrées n'ont pas des nombres quarrez pour les exposans de leur raison, les racines en sont incommensurables. 26

Et de même si deux grandeurs cubiques n'ont pas pour les exposans de leur raison des nombres cubiques, elles sont incommensurables.

Car les quarrez sont en raison doublée de leurs racines, & les cubes en raison triplée. Or S n. 23. si deux raisons ou doublées ou triplées n'ont pas pour exposans des nombres quarrez ou des nombres cubiques, les raisons dont elles sont composées sont sourdes : Ainsi les racines des quarrez ou des cubes qui ne sont pas entr'eux comme nombre à nombre, n'ont entr'elles qu'une raison sourde; ainsi elles sont incommensurables.

TREIZIE'ME PROPOSITION.

Treiziéme Theorême.

Entre deux nombres qui n'ont pas pour exposans de leur raison des nombres quarrez, on ne peut 27

trouver

trouver un nombre qui soit moyen proportionnel, & entre deux nombres qui n'ont pas pour exposans de leur raison des nombres cubiques, on ne peut pas trouver deux nombres qui soient moyens proportionnels.

Car si cela se pouvoit, trois grandeurs proportionnelles seroient commensurables, quoy que la premiere ne fût pas à la troisiéme comme deux nombres quarrez; ce qui est impossible par le second Cas de la Proposition dixiéme.

Si cela se pouvoit, quatre grandeurs proportionnelles seroient commensurables, quoyque la premiere ne fût pas à la quatriéme comme deux nombres cubiques; ce qui est impossible par le second cas de la Proposition onziéme.

COROLLAIRE I.

28 *Deux nombres ne sont pas quarrez, si les exposans de leur raison ne sont pas des nombres quarrez.*

Soient *bb. cc* :: 1 2. ces deux nombres 1 & 2 n'étant pas quarrez, *bb* & *cc* ne le peuvent être; car par la Proposition précedente, entre *bb* & *cc* on ne peut trouver de moyen proportionnel; ce qui se pourroit faire si *bb* & *cc* étoient deux nombres quarrez; car le produit *bbcc* seroit un nombre quarré, s̃ n. 11. Dont la racine *bc*, Liv. III. n. 68. seroit moyen proportionnel entre *bb*. & *cc*.

COROLLAIRE 2.

29 *Ainsi l'on voit évidemment que l'on ne peut trouver un nombre quarré qui soit moitié, ou tiers, ou la cinquiéme partie, ou la sixiéme, ou la septiéme d'un autre nombre quarré, &c.*

Puis

Puis que ces nombres 2. 3. 5. 6. 7. exposans de ces raisons, ne sont point des nombres quarrez.

COROLLAIRE 3.

Deux nombres ne sont point cubiques, si les exposans de leur raison ne sont pas nombres cubiques. 30

Soient *ddd. fff* :: 1. 2. ces deux nombres 1, 2, ne sont pas cubiques. Par la Proposition precedente, on ne peut pas trouver deux moyens proportionnels entre *ddd*, & *fff*, ce qui se pourroit faire neanmoins Liv. IV. n. 37, si *ddd* & *fff* étoient deux nombres cubiques.

COROLLAIRE 4.

Ainsi on voit qu'on ne peut pas trouver un nombre cubique qui soit ou moitié, ou tiers, ou la quatriéme, ou la cinquiéme, ou la sixiéme, ou la septiéme partie, &c. d'un autre nombre cubique. 31

Puis que ces nombres 2. 3. 4. 5, 6. 7. &c. ne sont pas des nombres cubiques.

QUATORZIE'ME PROPOSITION.

Quatorziéme Theorême.

On ne peut exprimer par nombres, soit entiers soit rompus, la valeur de la racine d'une puissance imparfaite. 32

Soit ce nombre 18 qui n'est pas un nombre quarré. Car il est évident qu'il n'y a point de nombre entier qui multiplié par lui-même fasse 18. On pourroit, comme on l'a dit, penser qu'il pourroit y avoir quelque nombre rompu, qui exprimât la valeur de sa racine, que je nomme *x*, ce

Voy. SC. du C. art. 305. où il y a une Demonstration plus simple

ce que je vais démontrer impossible; car si cela étoit, la raison de x à 18 ne seroit pas sourde; Or elle l'est, ce que je prouve ainsi. Je multiplie 18 par 1, ce qui fait 18 que je puis ainsi considerer comme un nombre plan, dont la racine quarrée est un moyen proportionnel entre 1 & 18. Liv. III. n. 68. Ainsi $\div$ 1. x. 18. Or par le second
p. 305 Cas de la dixiéme Proposition cy-dessus, la raison de 1 à 18 n'ayant pas pour ses exposans des nombres quarrez, x est incommensurable avec 1 & avec 18.

Donc par la demande $\overset{\text{ss}}{\text{s}}$ n. 21. tout nombre ou toute grandeur commensurable avec 18 ou avec 1, ne le sera pas avec x; ainsi x ne se peut exprimer avec aucun nombre. Sa raison avec 18 est donc sourde, ce qu'il falloit démontrer.

Soit donné le nombre 24 qui n'est pas cubique, je nomme x sa racine cubique, & prenant le cube de 1, qui est 1. $\div$ 1x. 1xx. 24. Liv. IV. n. 21. Par le second Cas de la onziéme Proposition cy-dessus, la raison de 1 avec 1x est sourde. Or 1. 1x :: 1. x Liv. IV. n. 18. Donc x étant incommensurable avec 1 qui est une grandeur commensurable, il sera aussi incommensurable avec 24; ce qu'il falloit démontrer.

Ainsi de toutes les autres puissances imparfaites.

Autre Démonstration.

Pour avoir une démonstration sensible qu'il n'y a point de nombre rompu qui puisse exprimer la valeur de x qu'on suppose la racine quarrée de 18, il faut se souvenir que pour réduire 18 en fraction afin d'avoir une racine plus grande que 4 racine de 16, nombre quarré qui approche le plus

plus de 18. il faut multiplier 18 par le quarré de la fraction dans laquelle on a réduit 18. page 284. Ce produit n'est point un nombre quarré ñ n. 10. donc en ayant ôté la racine quarrée du plus prochain, il restera encore quelque chose. Prenant une plus petite fraction on aura encore un nombre qui ne sera pas quarré. On trouvera une racine plus grande que la précedente, mais moindre que la veritable, ainsi puisque quelque petite fraction qu'on prenne, ce ne sera jamais un quarré, il y aura toûjours du reste, sans pouvoir jamais venir à une grandeur précisément égale à *x*.

SECTION TROISIE'ME.

Des Operations de l'Arithmetique sur les Grandeurs incommensurables.

CHAPITRE PREMIER.

On peut faire toutes les Operations de l'Arithmetique sur les Grandeurs incommensurables. Préparations pour cela.

QUOY qu'on ne connoisse point la valeur 33
d'une racine sourde, on peut neanmoins faire sur elle toutes les operations de l'Arithmetique, l'ajoûter avec une autre racine ou l'en soustraire, les multiplier ou les diviser l'une par l'autre. Ces racines qu'on nomme Grandeurs irrationnelles ou sourdes, se rencontrent souvent.

L'extraction des racines, soit de celles qui sont quarrées, soit de celles qui sont cubiques est une operation fort ordinaire. Comme il y a donc plus de nombres qui ne sont ny quarrez ny cubiques, que de nombres quarrez ou cubiques, à tous momens on trouve des racines sourdes; ainsi il est important de connoître comment on peut operer sur ces sortes de grandeurs : mais avant que de faire ces operations sur les racines sourdes, il les faut préparer. Cette préparation est aisée ; elle est fondée sur la demande suivante.

DEMANDE.

34 *Une racine ne devient pas plus grande lors que de racine quarrée qu'elle étoit on fait qu'elle est racine cubique, ou racine de quarré de quarré, en augmentant les dimensions de la grandeur dont elle est la racine.*

Par exemple a est la racine de toutes ces puissances. $a^2.a^3.a^4.a^5$. ainsi leurs racines ne valent pas l'une plus que l'autre.

PROPOSITION QUINZIE'ME.
Problême premier.

35 *Réduire deux ou plusieurs racines sourdes à un même nom ou même signe.*

Pour réduire deux racines au même nom, il faut élever la plus petite puissance à la plus grande, selon qu'on l'a enseigné; si la premiere est $\sqrt{aa}$. & la seconde $\sqrt[3]{b^3}$, j'augmente aa d'une dimension, & alors $\sqrt[3]{a^3}$. & $\sqrt[3]{b^3}$. auront un même nom, ce seront deux racines cubiques: ce qui ne change point leur valeur, car par la De-

Demande précedente $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^2}$.

Quand on veut réduire une grandeur absoluë à un même nom avec une racine donnée, il faut prendre le quarré ou le cube de la grandeur absoluë, selon que la racine proposée est racine de quarré ou de cube, &c. Ainsi s'il faut réduire 5 & $\sqrt{27}$ au même nom, je prens le quarré de 5 qui est 25, devant lequel je mets le signe radical ainsi, $\sqrt{25}$. Aprés cela 5 & $\sqrt{27}$ sont réduits au même nom sans changer leur valeur; car $\sqrt{25}$ est la même chose que 5.

L'on ne peut pas toûjours selon cette regle réduire au même signe deux racines sourdes. Par exemple, soient données ces deux racines $\sqrt{5}$ & $\sqrt[3]{40}$; car pour élever cette racine $\sqrt{5}$, & de quarrée la faire une racine cubique, il faudroit multiplier le quarré 5 par sa racine quarrée, ce qui est impossible, puis que cette racine est sourde. Il faut donc élever ces deux racines proposées à de plus hautes puissances, sans qu'il soit besoin de connoître la valeur de la racine quarrée de 5, ny celle de la racine cubique de 40. Par exemple, en multipliant 5 par luy-même, on fait 25, qui est un quarré de quarré dont la racine est $\sqrt[4]{25}$, qui est la même chose que $\sqrt{5}$; & en multipliant le quarré 25 par sa racine, j'auray 125 qui est un quarré cube dont la racine est $\sqrt[5]{125}$, égale à $\sqrt{5}$. En multipliant le cube 40 par luy-même cela fait 1600, qui est un quarré cube dont la racine est $\sqrt[5]{1600}$, égale à $\sqrt[3]{40}$. Ainsi les deux racines $\sqrt{5}$ & $\sqrt[5]{40}$, étant réduites à celles-cy $\sqrt[5]{125}$ & $\sqrt[5]{1600}$, elles ont un même nom.

DEFINITION.

36 *On appelle l'exposant d'une grandeur incommensurable, l'expression la plus simple qui puisse marquer sa juste valeur.*

LEMME.

37 *Une puissance faite par la multiplication de deux puissances a pour racine, le produit des deux racines de ces deux puissances.*

Soit *aaxx*, fait de la multiplication de *aa* par *xx*, la racine de ce quarré est *ax* produit des racines des deux quarrez *aa* & *xx*. De même soit *aaaxxx* fait de la multiplication de *aaa* par *xxx*, la racine de ce cube est *ax* produit des deux cubes *aaa* & *xxx*, ce qui est évident.

On ne met le signe radical que devant les puissances imparfaites pour marquer leur racine. Les racines de celles qui sont parfaites s'expriment simplement, sans ce signe. Ainsi au lieu de $\sqrt{aa}$, *on écrit simplement* a. *Car* $\sqrt{aa} = a$.

PROPOSITION SEIZIE'ME.

Problême second.

38 *Réduire les racines sourdes à des expressions plus simples, ou aux plus petits termes avec lesquels elles puissent être exprimées.*

Cette réduction ne se peut faire que lorsque les puissances devant lesquelles est placé le signe radical sont telles qu'elles peuvent être divisées par un diviseur lequel, ou le quotient de la division soit un nombre quarré ou cube. Par exemple on pourroit réduire $\sqrt{27}$ à une expression plus simple, divisant 27 par 9, un nombre quarré, le quotient

tient de cette division est 3, que j'écris aprés le signe radical devant lequel j'écris la racine de 9 qui est 3, ainsi $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$.

Puisque 9 est trois fois dans 27, donc $9 \times 3 = 27$ donc considerant 9 & 3 comme deux quarrez, le produit de leurs racines qui sont 3 & $\sqrt{3}$ sera la racine de 27 par le Lemme précedent. Ainsi $3 \times \sqrt{3}$ ou $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$. Ainsi $3\sqrt{3}$ est l'exposant de cette grandeur incommensurable $\sqrt{27}$.

Pour réduire en un même temps deux grandeurs incommensurables, il faut trouver, si cela est possible, un commun diviseur qui soit tel que lui ou le quotient de la division soit une puissance parfaite. Soient données ces deux grandeurs incommensurables $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$ pour les réduire à de plus petits termes, je divise 75 & 27 par 3, les quotiens sont 25 & 9 nombres quarrez, dont les racines sont 5 & 3. Je les place devant le signe radical $\sqrt{}$, aprés lequel je mets le diviseur 3 de cette maniere $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$; & je dis que $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$ & $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$; comme nous venons de le démontrer.

COROLLAIRE.

On peut connoître quelle est la raison de deux racines sourdes. 39

Ayant réduit ces deux racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$ à cette expression $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, puisque deux produits dont un des multiplicateurs est le même, sont entr'eux comme les multiplicateurs inegaux. Donc $5\sqrt{3} . 3\sqrt{3} :: 5 . 3$. Ainsi une racine qui n'est pas commensurable avec le quarré dont elle est la racine, peut être commensurable avec une autre racine sourde.

DEFINITION.

40 *Les racines sourdes dont on peut ainsi exprimer la raison, sont appellées* communicantes *ou* commensurables.

DIX-SEPTIE'ME PROPOSITION.
Problême troisiéme.

41 *Trouver si deux racines sourdes sont commensurables ou communicantes entr'elles.*

Cela se trouve par la multiplication & par la division. 1°. Multipliant deux grandeurs proposées l'une par l'autre, si leur produit est un nombre quarré, leurs racines sont *communicantes*. Soient ces deux grandeurs $\sqrt{2}$ & $\sqrt{8}$, je multiplie 2 par 8; le produit 16 est un nombre quarré, dont 4 la racine montre que $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{8}$ comme 1 à 2 ce que je démontre.

Soit $2 = xx$ & $8 = zz$, partant $\sqrt{2} = x$ & $\sqrt{8} = z$, le produit de xx par zz est $xxzz$ égal à 16. ainsi $xz = 4$. Or Liv. III. n. 69. xx xz :: xz. zz. Donc 2 ou xx. xz ou 4 :: $\sqrt{2}$ ou x. $\sqrt{8}$ ou z: donc 2. 4 :: $\sqrt{2}$ $\sqrt{8}$, ou 1. 2. :: $\sqrt{2}$. $\sqrt{8}$

2°. Divisant deux grandeurs l'une par l'autre, si le quotient de la division est un nombre quarré leurs racines sont *communicantes*. Je divise 8 par 2, le quotient 4 est un nombre quarré; alors $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{8}$ comme 1 à 2. Car 2 & 8 divisés par 2, demeurent en même raison. Liv. III. n. 65. 2. 8. :: 1. 4. Donc Liv. IV. n. 29. $\sqrt{2}$. $\sqrt{8}$ :: $\sqrt{1}$. $\sqrt{4}$, c'est à dire que $\sqrt{2}$ $\sqrt{8}$ :: 1. 2. ce qu'il faloit prouver.

Exemples.

Exemples.

Je connois par cette regle que les racines $\sqrt{a^4 + aabb}$ & $\sqrt{aabb + b^4}$ sont commensurables, parce que divisant $a^4 + aabb$ par $aa + bb$, le quotient est aa, & divisant $aabb + b^4$ par le même diviseur $aa + bb$, le quotient sera bb. Ces deux quotiens aa & bb sont deux nombres quarrez dont les racines sont a & b; ainsi les deux racines proposées, reduites à leurs expressions les plus simples sont $a\sqrt{aa + bb}$ & $b\sqrt{aa + bb}$, lesquelles sont comme a est à b. Soient données ces deux racines $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, je divise 12 & 3 par 3, les deux quotiens sont 4 & 1 deux nombres quarrez. Ainsi $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ & $1\sqrt{3} = \sqrt{3}$; car 1 ne multiplie point. Par cette operation je découvre que l'une de ces deux racines est double de l'autre.

Soient données ces deux racines $\sqrt[3]{135}$ & $\sqrt[3]{320}$, je divise l'une & l'autre par 135. les quotiens sont 1 & $2\frac{50}{135}$. Je réduis ce dernier quotient dans une fraction plus simple, divisant le numerateur & le dénominateur par 5, & vient $2\frac{10}{27}$. Ce quotient vaut 2 entiers & $\frac{10}{27}$. Je réduis ces deux entiers en fraction, écrivant $\frac{54}{27}$, à quoy ajoûtant $\frac{10}{27}$, cela fait $\frac{64}{27}$. Je réduis pareillement le premier quotient 1 dans une fraction de même nom que cette derniere, écrivant $\frac{27}{27}$. La racine cubi-

que de $\frac{27}{27}$ est $\frac{3}{3}$; celle de $\frac{64}{27}$ est $\frac{4}{3}$: Donc $\sqrt[3]{320}$: $\sqrt[3]{135}$ :: $\frac{4}{3}$: $\frac{3}{3}$.

CHAPITRE II.

Les quatre operations de l'Arithmetique sur les racines sourdes.

POur faire l'addition des racines, il ne suffit pas d'ajoûter en une somme les grandeurs dont elles sont racines; car par exemple, ayant ajoûté 16 avec 9, cela fait 25, dont la racine quarrée qui est 5, n'est pas 7, la somme des racines de 9 & de 16, il faut donc chercher des regles particulieres. La premiere chose que l'on doit faire, est de réduire au même nom les racines proposées, si elles en ont de differens, & ensuite les réduire à l'expression la plus simple.

PROPOSITION DIX-HUITIE'ME.

Problême quatriéme.

42 *Ajoûter dans une somme deux ou plusieurs racines sourdes.*

Cela se peut faire en trois manieres. 1°. Joignant par le signe + les racines données; ainsi pour ajoûter $\sqrt{45}$ avec $\sqrt{30}$, je lie ces deux racines par + en cette maniere $\sqrt{45}+\sqrt{30}$.

2°. Il faut réduire les racines proposées à un même nom, pour reconnoître si elles sont commensurables entr'elles. Si elles le sont il faut ajoûter dans une somme les exposans de leur raison, & mettre ensuite le signe radical avec le divi-

diviseur commun, par lequel les grandeurs dont les racines sont proposées, ont été divisées.

Soient données ces deux racines $\sqrt{7}$ & $\sqrt{27}$, je les réduis à cette expression $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, qui me fait connoître que les exposans de ces racines sont 5 & 3 que j'ajoûte, écrivant selon cette règle $8\sqrt{3}$, qui est la somme de $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$ comme il est évident.

3°. Pour ajoûter deux racines sourdes d'une troisiéme maniere, il faut premierement sçavoir que multiplians les quarrez de deux racines l'un par l'autre, la racine de ce quarré sera le plan des deux racines, ce qui est évident; xx multiplié par zz produit le quarré $xxzz$, dont la racine xz est le plan des racines de xx & de zz. Il est aussi évident que la racine quarrée de l'addition de xx avec zz plus deux fois le plan des deux racines de xx & de zz, c'est à dire $2xz$. Il est, dis-je, évident que $x + z$ la racine de cette somme $xx + 2xz + zz$, est la somme des racines de xx & de zz. Partant pour ajouter $\sqrt{75}$ avec $\sqrt{48}$. 1°. J'ajoûte 75 avec 48, ce qui fait 123. 2°. Je multiplie 75 par 48, le produit est 3600 dont la racine quarrée 60 est le plan des racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{48}$, comme on le vient de voir. Je double 60 ce qui fait 120 que j'ajoûte à 123, cela fait 243, dont la racine quarrée qui est $\sqrt{243}$, est la somme de $\sqrt{75}$, ajoûté avec $\sqrt{48}$.

Lors que le produit des deux nombres n'est pas un nombre quarré comme l'est celuy de 75 & de 48, on ne peut point en cette maniere ajoûter ainsi les racines proposées,

PROPOSITION DIX-NEUVIE'ME.

Problême cinquiéme.

43 *Soustraire des Racines sourdes les unes des autres.*

Cela se peut faire aussi en trois manieres. 1°. en changeant les signes, pour soustraire $\sqrt{aa - bb}$ de $\sqrt{aa + bb}$, il faut écrire $\sqrt{aa + bb} - \sqrt{aa - bb}$. Pour ôter $\sqrt{40}$ de $\sqrt{50}$, j'écris $\sqrt{50} - \sqrt{40}$.

2°. Lorsque les racines données sont commensurables entr'elles, il faut retrancher l'exposant de l'une de l'exposant de l'autre, & mettre ensuite le signe radical avec le diviseur commun par lequel les grandeurs, dont les racines sont proposées, ont été divisées.

Soient données ces deux racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$, je les réduis à cette expression qui est plus simple $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$; ensuite pour retrancher $3\sqrt{3}$ de $5\sqrt{3}$, j'écris $2\sqrt{3}$, qui est ce qui reste aprés cette soustraction, ou ce qui est la difference des deux racines proposées.

3°. On ajoûte dans une somme les deux grandeurs qui sont aprés le signe radical, & l'on retranche de cette somme deux fois la racine du produit de ces deux grandeurs; & la racine de ce qui reste, est la difference ou le reste qu'on cherche.

Pour retrancher $\sqrt{48}$ de $\sqrt{75}$, j'ajoûte dans une somme 75 & 48; & j'ay 123, dont je retranche 120, c'est à dire deux fois 60, qui est la racine de 3600 produit de 75 par 48. Il reste 3, dont la racine, sçavoir $\sqrt{3}$ est la difference ou le reste que l'on cherche.

Le

Le nombre 75 soit nommé xx, & 48 soit nommé zz, en retranchant $\sqrt{zz}$ de $\sqrt{xx}$, le reste est $x - z$. Ainsi il faut démontrer que $x - z = \sqrt{3}$. Le quarré de $x - z$ est $xx - 2xz + zz$. lequel est égal à 75 plus 48, moins deux fois le produit de la racine du produit de 75 & de 48, laquelle est 60. Ainsi $xx - 2xz + zz = 75 - 120 + 48$. Or de $75 + 48$, c'est à dire de 123 ayant retranché 120, le reste est 3. Donc $xx - 2xz + zz = 3$. Donc $\sqrt{xx - 2xz + zz}$, ou $x - z\sqrt{3}$, ce qu'il falloit démontrer.

Proposition vingtie'me.

Problême sixiéme.

Multiplier deux Racines sourdes. 44

1°. Si ces deux racines sont les mêmes, il ne faut qu'ôter à l'une le signe radical. Quand on multiplie $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$, on cherche un quarré, dont $\sqrt{5}$ marque la racine, par consequent ce quarré est 5.

2°. En general il faut multiplier les grandeurs dont les racines sont proposées les unes par les autres, la racine de ce produit, sera celuy des racines, ce qui est évident; car soient ces deux grandeurs xx & zz, leur produit est $xxzz$ dont la racine quarrée est xz, produit de x & de z les deux racines de xx & de zz. S'il faut donc multiplier la racine $\sqrt{15}$ par $\sqrt{6}$, je multiplie 15 par 6, ce qui fait 90, dont la racine quarrée est égale à la racine de 15 multipliée par celle de 6.

S'il faut multiplier $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{cd}$, le produit sera $\sqrt{abcd}$.

Lorsque les racines sont communicantes, il

faut multiplier leurs exposans l'un par l'autre. Ainsi pour multiplier $\sqrt{75}$ par $\sqrt{27}$, dont les exposans sont $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$ j'écris $15\sqrt{9}$. Ces exposans sont la valeur des racines proposées, ainsi multipliant ces exposans l'un par l'autre, ils doivent faire le même produit qu'en multipliant ces deux racines l'une par l'autre. Or 9 étant un nombre quarré dont 3 est la racine; ce signe $15\sqrt{9}$, marque que 15 est multiplié par 3, ce qui fait 45. On trouve ainsi que le produit de $\sqrt{27}$ par $\sqrt{75}$ est 45.

COROLLAIRE.

45 *On peut connoître le produit de deux racines sourdes, lors que les grandeurs dont elles sont les racines étant multipliées l'une par l'autre, produisent un nombre quarré.*

Ces racines sourdes $\sqrt{2}$ & $\sqrt{50}$ étant multipliées l'une par l'autre, elle produisent le nombre quarré 100, dont la racine est 10; qui étant égale au produit des racines de 2 & de 50, on connoît le produit des racines.

Cela est admirable qu'on ne puisse point connoître deux grandeurs, & qu'on puisse démontrer la valeur de leur produit, & même quelle raison elles ont entr'elles; car ces deux racines étant données $\sqrt{2}$ & $\sqrt{18}$, je sçay que leur produit est $\sqrt{36}$, c'est à dire 6; & comme elles sont communicantes, *je sçay encore que $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{18}$ comme 1 est à 3.*

PROPOSITION VINGT-UNIE'ME.
Problême septieme.

46 *Diviser une racine sourde par une autre racine sourde.*

La division défait ce qu'a fait la multiplication, si $\sqrt{2}$ multipliant $\sqrt{50}$ fait $\sqrt{100}$, qui est la racine du produit de 2 par 50; donc pour diviser $\sqrt{100}$ par $\sqrt{50}$, il faut diviser 100 par 50, la racine du quotient de cette division, c'est à dire $\sqrt{2}$, sera la racine cherchée.

Ainsi pour diviser $\sqrt{aaab - abbb}$ par $\sqrt{aa - bb}$, il faut simplement diviser $aaab - abbb$ par $aa - bb$, de laquelle division le quotient est ab; la racine de ce quotient ab est ce qu'on cherche.

Lors que les racines données sont commensurables entr'elles, on se contente de diviser l'exposant de l'une par l'exposant de l'autre. Ainsi $15\sqrt{9}$ étant l'exposant de $\sqrt{75}$ pour diviser cette racine par $\sqrt{27}$, je divise $15\sqrt{9}$ par $3\sqrt{3}$ exposant de $\sqrt{27}$ & vient $5\sqrt{3}$ qui est l'exposant de cette division.

CHAPITRE III.

Des Binomes & Multinomes.

DEFINITIONS.

PREMIERE DEFINITION.

LA somme de deux grandeurs incommensurables entr'elles se nomme Binomes. 47

Ainsi cette grandeur $a + \sqrt{b}$ est un Binome, si la racine $\sqrt{b}$ est incommensurable avec la grandeur a.

SECONDE DEFINITION.

La difference de deux grandeurs incommensurables entr'elles, s'appelle Apotome *ou* Residu. 48

On

On dit par exemple que $a - \sqrt{b}$ est un apotome. Les Apotomes se nomment aussi *Binomes.*

Troisie'me Definition.

49 *Une grandeur composée de plusieurs grandeurs incommensurables entr'elles, est nommée* Multinome.

La grandeur $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ est multinome, si ces trois grandeurs sont incommensurables entr'elles.

Euclide distingue plusieurs sortes de Binomes à qui il donne differens noms, dont il n'est pas fort necessaire de charger sa memoire.

De l'Addition & Soustraction des Binomes & Multinomes.

50 L'Addition & la soustraction de ces grandeurs n'ont rien de particulier. Pour ajoûter $30 - 4\sqrt{5}$ & $8\sqrt{12} - 4\sqrt{5}$, j'écris $30 + 4\sqrt{5} + 8\sqrt{12} - 4\sqrt{5}$: & pour retrancher $8\sqrt{12} - 4\sqrt{5}$ de $30 - 4\sqrt{5}$, j'écris $30 - 4\sqrt{5} - 8\sqrt{12} + 4\sqrt{5}$.

De la Multiplication des Binomes & des Multinomes.

51 Elle se fait comme celle des grandeurs complexes. Pour multiplier $a + \sqrt{d}$ par $f + \sqrt{b}$, je multiplie premierement $a + \sqrt{d}$ par f, ce qui fait $af + f\sqrt{d}$; en suite je multiplie $a + \sqrt{d}$ par $\sqrt{b}$, ce qui fait $a\sqrt{b} + \sqrt{bd}$, j'ajoûte les deux produits en un $af + f\sqrt{d} + a\sqrt{b} + \sqrt{bd}$, qui est celuy que l'on cherchoit.

Autre Exemple.

Pour multiplier $6 + 2\sqrt{5}$ par luy-même, je multiplie 6 par 6 ce qui fait 36, & $2\sqrt{5}$ encore par

par 6, ce qui fait 12 $\sqrt{5}$; ensuite je multiplie 6 par 2 $\sqrt{5}$ ce qui fait 12 $\sqrt{5}$, & 2 $\sqrt{5}$ par 2 $\sqrt{5}$, de laquelle multiplication le produit est 20; car le produit de $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$ c'est 5, qui est le quarré de $\sqrt{5}$. Donc en multipliant $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$, on fait déja 5. Le produit des nombres 2 & 2 qui sont devant le signe radical $\sqrt{5}$, est 4. Ainsi comme il faut concevoir qu'on multiplie par 4 le produit de $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$ sçavoir 5, ce qui fait 20; l'entier produit de toute cette multiplication est $36 + 12\sqrt{5} + 12\sqrt{5} + 20$, ou ce qui est la même chose, $56 + 24\sqrt{5}$.

De la division des Binomes & des Multinomes.

Elle se fait comme celle des grandeurs com- 52
plexes, mettant le Binome à diviser sur le Binome qui est le diviseur. Mais il n'en est pas comme des grandeurs ordinaires dont la division se fait facilement, ou dont les divisions s'expriment nettement, parce qu'on peut effacer les mêmes lettres qui se trouvent dans le diviseur, & la grandeur qui est à diviser, comme en divisant *ab* par *b* on n'écrit que *a*. Neanmoins on peut appliquer aux Binomes & aux Multinomes ce qu'on a dit des incommensurables, dont on a vû que les divisions en certains cas se pouvoient exprimer d'une maniere fort simple. Plusieurs ont tâché de trouver d'autres regles. Il est bon de tenter, mais on se trompe facilement quand on prétend faire une régle generale de ce qui ne se rencontre que dans un exemple particulier.

De la resolution des Puissances des Binomes.

73 Cette résolution pour l'ordinaire est impossible. Jusqu'à present l'on n'a pu trouver de Regles certaines & generales pour extraire toutes sortes de racines de ces grandeurs. Voicy la Regle que l'on donne pour extraire les racines quarrées des Binomes.

1°. On retranche le quarré de la petite partie du quarré de la grande, & on tire la racine du reste.

2°. On ajoûte cette racine à la grande partie, ce qui fait une somme & on la retranche de la même partie, ce qui fait une difference.

3°. On tire la racine de la moitié de la somme, & la racine de la moitié de la difference, ensuite on prend la somme de ces deux racines, si chaque partie du Binome a le signe $+$, ou bien on prend leur difference si une partie a $+$ & l'autre $-$, & l'on a la racine que l'on cherche. Ainsi pour tirer la racine quarrée de ce Binome $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, 1° je retranche 4 $aabc$, qui est le quarré de la plus petite partie, de $a^4 + 2aabc + bbcc$, qui est le quarré de la plus grande partie; le reste est $a^4 - 2aabc + bbcc$, dont la racine quarrée $aa - bc$ étant ajoûtée à la plus grande partie $aa + bc$, & en étant ôtée elle fait cette somme $2aa$, & cette difference $2bc$, dont les moitiez sont aa & bc, dont les racines quarrées sont a & $\sqrt{bc}$, lesquelles étant jointes par le signe $+$ elles font $a + \sqrt{bc}$, qui est la racine que l'on cherche; car si l'on multiplie cette racine $a + \sqrt{bc}$ par elle-même, le produit de cette multiplication qui est le quarré de cette raison, sera $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, qui est le Binome

nome dont on cherchoit la racine: Donc $a + \sqrt{bc}$ est la racine que l'on cherchoit.

Pour tirer la racine cubique de $45 + 29\sqrt{2}$. Otez 2 de 29, à cause que 2 est sous le signe $\sqrt{}$. reste 27, prenez-en le tiers 9, dont la racine 3. joint avec $\sqrt{2}$. ou $3 + \sqrt{2} = \sqrt[c]{45 + 29\sqrt{2}}$ & $3 - \sqrt{2} = \sqrt[c]{45 - 29\sqrt{2}}$, car il faut garder le même signe de la partie commensurable. Si vous formez le cube de $3 + \sqrt{2}$ ou plûtôt le cube de $a + \sqrt{b}$, & que vous en remarquiez les parties vous verrez bien la démonstration de la Régle, & les especes où elle doit reüssir.

ELEMENS

ELEMENS DES MATHEMATIQUES OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GENERAL.

LIVRE SEPTIE'ME.

De la methode de résoudre une Question ou Problême.

CHAPITRE PREMIER.

Il y a deux differentes Methodes de résoudre une Question ou Problême, qui sont la Synthese *&* l'Analyse. *Dans celle-cy on suppose les choses telles qu'elles le doivent estre, selon que la question est proposée. Comment cela se peut faire?*

1 ON nomme *Question* la proposition ou la recherche d'une verité qui est inconnuë, mais dont

dont on connoit quelque rapport avec des veritez connuës. On ne cherche point ce qu'on connoît : ce seroit aussi en vain qu'on chercheroit ce qu'on ignore, si on n'en avoit quelque connoissance ; aussi dans une Question tout n'est pas inconnu. Or c'est de ce qu'on sçait déja qu'on peut apprendre ce qu'on ne sçavoit point : une premiere connoissance servant de degré pour en acquerir de nouvelles. Pour cela il faut se servir de l'une ou de l'autre de ces deux methodes, que l'exemple suivant fera comprendre. Supposons un homme qui veut connoître les ressorts d'une montre, qui n'en a jamais vû d'ouverte, & de démontée. Si cette montre étoit dans sa boëte, & qu'ainsi il ne vît point ce qui la fait marcher, il seroit porté à l'ouvrir & à la démonter pour en voir le dedans ; ce seroit la premiere methode qu'il suivroit. Si cette montre étoit démontée, & que toutes ses pieces fussent séparées, il souhaiteroit de trouver un Artisan habile qui pût les assembler, & luy en expliquer l'usage. La premiere de ces methodes s'appelle *Analyse*, c'est à dire Methode de résolution, parce qu'on résout en ses parties la chose qu'on veut connoître. La seconde methode s'appelle *Synthese*, ou Methode de composition, parce qu'on assemble les parties de la chose qu'on examine. La premiere défait, la seconde compose. C'est en suivant l'une ou l'autre methode que l'on peut résoudre une Question.

Il ne faut point s'attacher scrupuleusement à l'étymologie des noms : il faut voir ce qu'ils signifient dans l'usage present. Par la *Synthese* on entend la methode de résoudre une Question par les principes de la Science que cette Question regarde : comme pour résoudre les Theorêmes &

les

les Problêmes que nous avons proposez dans les six premiers Livres, vous avez vu en chaque Livre que nous nous sommes servis de ce que nous avions démontré précedemment ; & qu'ainsi nous avons composé comme un corps de doctrine qui comprend toutes les veritez principales que doit renfermer un Traité de la Grandeur en general. Ainsi il n'est pas nécessaire de parler plus au long de la *Synthese*. Cet Ouvrage, si on en est content, peut servir de modelle de ce qu'on doit faire lors qu'on l'employe. On l'appelle *Methode de Doctrine*, parce qu'elle est propre pour enseigner. Un Maître qui sçait déja les choses, ne propose d'abord à son Disciple que celles qui sont faciles à comprendre, le menant par degrez de connoissance en connoissance, selon que les veritez qu'il enseigne se suivent, ou que les unes servent à faire comprendre les autres; car comme elles luy sont toutes connuës, il les peut ranger comme il luy plaist. C'est ainsi que j'ay rangé les parties de ce Traité, aprés avoir bien connu moy-même ce que j'avois dessein de faire connoitre. Il n'en est pas de même de l'*Analyse*. On ne l'employe pas pour faire connoître ce que l'on sçait, mais pour trouver ce qu'on ne sçavoit pas; c'est pour cela qu'on l'appelle *Methode d'invention*; & c'est cette Methode à laquelle j'ay destiné ce dernier Livre. Ce mot *Analyse* se peut traduire en François *Resolution*.

Mais ne nous arrétons pas à ce que signifie ce mot, tâchons d'en avoir une notion si claire selon qu'on l'entend aujourd'huy, que nous puissions déduire de cette notion ce qu'on doit faire lors qu'on se sert de cette methode. Un Problême étant proposé, lorsqu'on supose la chose faite comme elle est proposée; & que de ce qui est connu dans la Question

tion on tire la connoissance de ce qu'on ne sçavoit pas; cela s'appelle *Analyse*. Ainsi vous voyez pourquoy on l'appelle *Methode d'invention*, parce qu'avec son secours on découvre ce qu'on ne sçavoit pas; au lieu que dans la Synthese on ne peut enseigner aux autres que ce qu'on sçait déja. Chacune de ces deux methodes a son prix; mais puisque la Synthese est assez connuë par l'usage qu'on en a fait dans les Livres précedens, appliquons-nous à bien faire connoître l'Analyse.

La notion que nous venons de donner de cette methode nous apprend, que la premiere chose qu'on doit faire c'est d'exprimer nettement ce qui est proposé, afin de le considerer attentivement puisque de la seule supposition qu'on fait que la chose dont il s'agit est faite d'une telle maniere, on doit déduire tout ce qu'on en veut sçavoir. Pour être entendu servons-nous d'un exemple. On propose de découvrir les âges de trois personnes. *La second est*, dit-on, *plus vieux que le premier de cinq ans*; *le troisiéme a le double des années du premier & du second*, *& les âges de ces trois personnes font ensemble 75 années*. Si je nomme donc x l'âge du premier; celuy du second sera $x+5$; & puis que l'âge du troisiéme est le double de l'age du premier & du second, donc son âge sera $4x+10$. Ainsi ces trois âges sont x. $x+5$. $4x+10$. Or ils sont égaux à 75; donc $6x+15=75$. On a ainsi exprimé le Problême proposé tel qu'il est. C'est de cette seule supposition qu'il faut déduire la verité qu'on cherche, c'est à dire quel est l'âge de chacun. Tout dépend de bien exprimer un Problême, marquant dans l'expression qu'on en fait ses conditions. Les Regles suivantes servent pour cela.

CHA-

CHAPITRE II.

Regles pour exprimer les Grandeurs inconnuës dans une question, conformément à ce qu'elles sont; & de maniere qu'on trouve des Equations qui résolvent la question. Ce que c'est qu'Equation.

PREMIERE REGLE.

2 *LA premiere chose que l'on doit faire est de concevoir trés-distinctement l'état de la Question qu'on propose de résoudre: c'est à dire ce qu'il faut chercher pour satisfaire à la Question.*

Une Question est presque résoluë quand on sçait bien ce qu'il faut chercher; ce qui paroîtra plus clairement dans un exemple. On propose à un homme qui ne sçait pas la Langue de la Chine de faire un Recueil de plusieurs mots, entre lesquels se trouvent écrits les termes de cette Langue, sans le secours d'aucun Livre ny d'aucun Maître. Cette question paroît d'abord impossible; neanmoins elle n'est pas difficile, quand on apperçoit que pour satisfaire à ce Problême, il n'est question que de trouver par l'art des combinaisons tous les mots possibles que l'on peut faire de toutes les lettres de l'Alphabet; car entre ces mots tous les termes de la Langue de la Chine s'y trouveront nécessairement. On parlera des combinaisons dans la suite.

SECONDE REGLE.

3 *Pour découvrir quel est l'état de la Question il en faut retrancher toutes les choses qu'il n'est point né-*

nécessaire d'examiner pour arriver à la connoissance de la verité que l'on cherche, & supléer celles qui sont nécessaires.

Ceux qui proposent des Questions y joignent quelquefois des conditions qui semblent nécessaires, quoy qu'elles ne le soient pas. Comme dans cette Question : *J'ay vû*, dit-on, *des Chasseurs, ou plûtôt des Pescheurs, qui emportoient avec eux ce qu'ils ne prenoient pas, & qui jettoient dans l'eau ce qu'ils prenoient.* L'esprit étant préoccupé de l'idée de pescheurs qui peschent du poisson. il ne peut concevoir ce que l'on veut dire; & toute la difficulté qu'il y a pour résoudre cette Question. vient de ce qu'on ne pense pas que des Chasseurs & des Pescheurs aussi bien que d'autres hommes, cherchent quelquefois dans leurs habits certains petits animaux qu'ils rejettent s'ils les attrapent, & qu'ils emportent avec eux s'ils ne peuvent les attraper. Ainsi il n'étoit point nécessaire de parler dans cette Question de Chasseurs ny de Pescheurs.

Quelquefois aussi on ne met pas dans une Question tout ce qui est necessaire, comme dans celle-cy. *Rendre un homme immobile sans le lier; ou plûtôt ayant mis le petit doigt d'un homme dans l'oreille de cet homme, le rendre par cette posture comme immobile, en sorte qu'il ne puisse sortir du lieu où on l'aura mis jusques à ce qu'il ôte son petit doigt de son oreille.* La condition que l'on ne dit pas, est que l'on doit faire embrasser un arbre à celuy qui met son petit doigt dans son oreille, en sorte que cet arbre soit enfermé entre son bras & son oreille. Cette condition étant mise, il n'y a plus de Question.

TROISIE'ME REGLE.

4 *Or quand on a retranché d'une Question tout ce qui ne servoit qu'à la rendre plus embarassée, & que l'on a suppléé les conditions nécessaires que l'on ne disoit pas, & qu'ainsi on voit clairement ce qu'il faut chercher; pour soulager l'esprit dans cette recherche, il faut donner un nom à chaque terme de la Question, & l'exprimer par un caractere sur le papier.*

Cela arrête l'imagination & empêche que l'on ne s'embrouille, & que l'on n'oublie les découvertes que l'on a fait. Ainsi dans la Question que l'on a fait cy-dessus des âges de trois personnes differentes, pour fixer mon esprit j'appelle x l'âge du premier, z celuy du second, & y celuy du troisiême. Ces caracteres me rendent plus facile l'attention que je dois donner à cette Question; & quand j'auray fait quelque découverte, je la marqueray pour ne la pas oublier. Par exemple, connoissant par la proposition qui a été faite de la présente Question, que l'âge de la premiere personne que j'ai nommé x, est moindre de cinq années que l'âge de la seconde qui est marqué par la lettre z, je découvre que x plus cinq années est égal à z, ce que je marque de cette maniere $x + 5 = z$. Et ensuite je continuë l'examen de cette Question, donnant à chaque chose mon esprit tout entier, parce que je ne suis point obligé de conserver dans ma mémoire ma premiere découverte, l'ayant laissée comme en dépôt sur le papier.

QUA-

QUATRIE'ME REGLE.

En marquant par des signes les grandeurs qui sont le sujet de la Question, il faut distinguer par des signes differens celles qui sont connuës d'avec celles qui ne le sont pas. 5

Si tout étoit connu dans une Question, ce ne seroit pas une Question, comme on l'a remarqué. On ne s'avise pas de demander sérieusement quelle est la grandeur qui est la moitié de 24, & qui est égale à 12. Si tout étoit inconnu, ce ne seroit pas aussi un sujet de Question. Si un homme me proposoit simplement de découvrir quel nombre il a pensé, sans me dire autre chose, je luy répondrois que je ne suis pas devin. Dans une Question raisonnable il y a toûjours quelque grandeur connuë qui se trouve mêlée avec des grandeurs inconnuës: il les faut distinguer; ce qu'on peut faire, marquant celles qui sont connuës avec les premieres lettres de l'alphabet *a*, *b*, *c*, *d*, & se servant des dernieres lettres *x*, *y*, *z*, pour marquer les inconnuës. Cela soulage encore l'imagination, & fait appercevoir sensiblement ce qu'il faut chercher dans une Question. C'est toûjours la valeur de *x*, ou de *z*, ou de *y*, que l'on cherche.

Quand dans la Question proposée l'on y parle de plusieurs grandeurs de differentes especes, on peut les marquer avec les premieres lettres de leur nom. Si l'on parloit par exemple de pistoles, d'écus, de sols, on pourroit appeller les écus *e*, les pistoles *p*, les sols *s*. Tout cela sert merveilleusement à faciliter la résolution d'une Question, aidant l'imagination, sans le secours de laquelle la plûpart des hommes ne peuvent rien

concevoir. Outre que cela abrége fort le discours, sans le rendre neanmoins obscur, parce que ces signes sont simples & faciles à connoître. Je suppose qu'on les réduit à un petit nombre; car autrement bien loin de rendre le discours clair en l'abregeant, ils l'obscurciroient, comme l'experience le fait connoître, en ce qu'ils composeroient un langage tout nouveau auquel l'on n'est point accoûtumé.

CINQUIE'ME REGLE.

6 *Quand une Question n'est point déterminée par quelque grandeur particuliere, de sorte que plusieurs grandeurs peuvent avoir les conditions qui sont requises dans la Question, il faut supposer à discretion quelque grandeur qui la détermine.*

Si on proposoit de trouver une grandeur qui fût la sixiéme partie d'une autre grandeur, cette Question seroit indéterminée; car l'on peut trouver une infinité de differentes grandeurs qui seront la sixiéme partie d'une autre grandeur. Je prends donc 30 que je divise par 6, le quotient de cette division qui est 5, est la sixiéme partie d'une grandeur. Je puis supposer une autre grandeur comme est 24, dont la sixiéme partie est 4; ainsi ces deux nombres 24 & 4 satisfont à la Question, comme font 30 & 5. Dans ces Questions indéterminées l'on est ainsi obligé de choisir à discretion une grandeur qui n'est point marquée; sans cela, comme il paroît dans ces exemples, l'on ne peut résoudre ces Questions.

SIXIE'ME REGLE.

Il faut corriger les noms ou les expressions des grandeurs qui sont le sujet de la Question, & les réduire aux plus simples termes qu'il se pourra faire. 7

C'est à dire que les expressions dont on se sert doivent être nettes & abregées, afin qu'on ait moins de peine à se les imaginer ; ainsi au lieu de $x + 5 + x + x + 10$, on doit écrire $3x + 15$. De même lorsqu'on a des fractions il faut les réduire aux plus simples termes ; au lieu de $\frac{12}{24}$ écrire $\frac{1}{2}$; & si on a plusieurs fractions les ajoûter dans une somme. Par consequent si $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ sont la valeur d'une grandeur donnée, il faut ajoûter ces deux fractions & mettre en leur place leur valeur $\frac{7}{6}$.

Pour épargner la diversité des signes ; au lieu de deux grandeurs connuës, il faut mettre une seule qui leur soit égale. Ainsi au lieu de $ax + dx$, prendre c qui soit égale à $a + d$, & écrire cx. De la même maniere si la grandeur donnée est $\frac{dx}{3}$ c'est à dire le tiers de dx, je prends une grandeur que je nomme f, qui soit le tiers de d, & au lieu de $\frac{dx}{3}$ j'écris fx, car fx est le tiers de x. Ces expressions plus simples & moins embarrassées rendent la question plus claire.

Septie'me Regle.

8 *Connoissant les rapports qui sont entre les termes d'une question, on connoît la difference qui est entre ces termes, & ce qui les rend inégaux, & par ce moyen on peut les exprimer en deux manieres; ce qui s'appelle faire une Equation.*

Pour demeurer dans la même Question qui a été proposée cy-dessus, connoissant que z surpasse x de 5, ou que la difference de x & de z est 5, je sçay donc que $x - 5 = x$, ou que $x + 5 = z$: & puis que y est le double de x & z, qu'il faut que $2x + 2z$ soit égal à y. Ainsi je puis exprimer ces grandeurs en deux maniere, nommer $x + 5$ la grandeur z, & $2x + 2z$ la grandeur y. J'ai, dis-je, de doubles expressions, ce qui s'appelle des *Equations*. Remarquez que j'ay examiné cette question comme si tout étoit fait. J'ay donné des noms aux choses comme si je les connoissois; aprés quoy sans considerer aucune difference entr'elles, j'ay parcouru la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement leurs rapports, ce qui m'a fait trouver le moyen d'exprimer une même grandeur en deux façons; ce qui se nomme une *Equation*. Les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. $x + 5 = z$ & $2x + 2z = y$.

Huitie'me Regle.

9 *Il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de grandeurs inconnuës, afin que dans l'expression du Problême il n'y ait qu'une seule grandeur inconnuë.*

Il est évident que la fin de tout ce que l'on fait dans

dans l'examen d'une question, c'est en comparant les grandeurs inconnuës avec celles qui sont connuës, de connoître ce qui les rend inégales, ou ce qu'il faudroit ajoûter ou retrancher plus ou moins, afin qu'elles fussent égales. C'est ce qui s'appelle trouver une Equation. Ainsi en examinant toutes les conditions d'un problême; il faut trouver autant d'équations qu'il y a de grandeurs inconnuës; aprés quoy il ne restera si on le veut qu'une seule inconnuë, c'est à dire une seule des lettres qui marquent des inconnuës. Par exemple dans la Question cy-dessus proposée, puis que je sçay que $x+5$ est égal à z, qui est le second âge, je n'appelle plus ce second âge z, mais $x+5$; & puis que le troisiéme âge y est le double de x & de $x+5$, je n'appelle plus y le troisiéme âge, mais $2x+2x+10$; laquelle expression $2x+2x+10$ étant corrigée, se réduit à celle-cy $4x+10$; ainsi les trois grandeurs x, z, y étant réduites à celle-cy x. $x+5$ $4x+10$, elles n'ont qu'une de ces lettres qui marquent les inconnuës, sçavoir x. Cela rend la Question bien plus simple, car la réduisant à la recherche d'une seule grandeur inconnuë, il n'est plus question dans l'exemple proposé que de chercher la valeur de x, qu'on trouve aprés facilement. Puis que la somme des trois âges $x+x+5+4x+10$ est égale à 75, donc aprés avoir corrigé cette expression, & l'avoir réduite à celle-cy $6x+15$, qui est plus simple, j'ay cette Equation $6x+15=75$, c'est à dire une double expression de la même grandeur, car $6x+15$ & 75 ont une même valeur.

NEUVIE'ME REGLE.

10 *Quand les grandeurs connuës & inconnuës se trouvent mêlées ensemble, il faut les séparer, & transporter d'un côté ce qui est tout connu, & de l'autre ce qui est inconnu.*

On appelle *membre* d'une Equation ce qui est de part & d'autre du signe de l'égalité; ainsi $6x + 15$ & 75 sont les membres de cette équation $6x + 15 = 75$. Or quand dans l'un des membres d'une Equation la grandeur inconnuë se trouve toute seule, & que dans l'autre membre il n'y a que des grandeurs connuës, il est évident que cette grandeur n'est plus inconnuë. Si $x = 10$, je sçay que la valeur de x est 10. Pour achever donc la Question, il faut faire passer dans l'un des membres tout ce qui est connu, & dans l'autre tout ce qui est inconnu, de telle maniere que le rapport de la grandeur inconnuë avec les grandeurs connuës soit net. Par exemple dans cette Equation $6x + 15 = 75$, la grandeur x se trouvant mêlée avec $+15$, je rejette cette grandeur connuë 15 de l'autre côté de cette maniere $6x = 75 - 15$, ce que je fais en retranchant de chaque membre cette grandeur 15, ce qui ne trouble point l'Equation, puis que de deux choses qui sont égales si on en retranche choses égales, elles demeurent égales.

DIXIE'ME REGLE.

11 *Il faut réduire aux plus simples termes cette raison ou rapport d'égalité qui est entre les deux membres de l'Equation.*

Ainsi

Ainsi au lieu de $6x = 75 - 15$, j'écris $6x = 60$, car $75 - 15$, c'est la même chose que 60. Je réduis encore cette Equation ou rapport $6x = 60$ à de moindres termes, divisant ces deux termes $6x$ & 60 par leur commune & plus grande mesure qui est 6. Cette division donne x & 10, qui sont encore en même raison, puis que divisant deux grandeurs par un même diviseur, elles gardent entr'elles la même raison qu'elles avoient auparavant. Ainsi $x = 10$, aprés quoi on connoît sensiblement la raison de l'inconnuë x avec ce qui est connu; elle n'est plus inconnuë. Toute la question se trouve donc résoluë; car puisque x vaut 10, que $x + 5 = z$, donc $10 + 5 = z$, donc z vaut 15: & puis que $2x + 2z = y$, donc y vaut 50: Par consequent le premier âge est 10, le second 15, le troisiéme est 50, la somme desquels âges est 75 années.

Ainsi lors qu'on suit la méthode que nous avons prescrite, l'on trouve enfin la résolution de la Question. Ce n'est point par hazard, c'est en suivant une methode judicieuse & naturelle. Pour marque de cela, c'est que si le Problême ne peut pas être résolu, on en découvre l'impossibilité.

Un Problême est impossible, ou absolument, 12
ou par rapport à nos connoissances. Un Problême est absolument impossible lorsqu'il renferme une contradiction, comme celuy-cy: *Trouver un nombre qui soit le tiers de* 12, *& qui soit égal à* 5, cela est impossible, car le tiers de 12 est 4. Ainsi l'on demande de trouver un nombre égal en même-temps à 4 & à 5, ce qui renferme une contradiction. Or en suivant la methode prescrite, l'on reconnoît si un Problême est absolument impossible; car dans ce Problême ayant supposé que

le tiers de 12 se nomme x, j'ay cette Equation $3x = 12$: & puis que x est égal à 5, il faut que $3x = 15$; ce qui est impossible, car $3x = 12$. Ainsi je connois que les deux conditions qui sont renfermées dans ce Problême se combattent, & que par consequent ce Problême est impossible.

Nous connoissons aussi si un Problême est impossible par rapport à nos connoissances, car si par exemple aprés avoir suivi les Regles précedentes, je n'ay pas pû réduire à des termes plus simples une Equation, qu'à ceux-cy, $xx = bb + ax$, j'apperçois bien que je ne puis pas sçavoir quelle est la valeur de x, parce que je n'ay point encore de Regles pour connoître la valeur d'une grandeur inconnuë comme est x, quand je sçay seulement que son quarré qui est xx est égal au quarré d'une grandeur connuë, tel qu'est bb plus un plan fait de l'inconnuë x & d'une grandeur connuë, tel qu'est le plan ax.

13 Lors qu'en parcourant la difficulté de la maniere qu'on vient de le dire, on ne trouve point d'Equation, c'est une marque que la question est indéterminée, car le rapport de deux grandeurs déterminées, fait qu'on les peut exprimer en deux manieres. Alors comme on l'a dit, on suppose des grandeurs à discretion qui puisse satisfaire à la question.

CHA-

CHAPITRE III.

De la réduction d'une Equation à une telle expression que la grandeur inconnuë qu'on cherche, se trouve seule dans un des nombres de l'Equation.

L'Analyse consiste principalement à couper & tailler une Equation de sorte qu'on la reduise à une expression simple, & qu'on délivre la grandeur inconnuë de ce qui empêchoit qu'on ne vît precisément son rapport avec les grandeurs connuës. Comme dans cette Equation $5x - 1 = 4x + 6$ en ajoûtant 1 de part & d'autre, $5x = 4x + 7$. & ôtant $4x$ de part & d'autre, on a $x = 7$, où le même rapport d'égalité subsiste. C'est ce qui a fait donner le nom d'Analyse à la methode dont nous parlons. C'est un mot Grec qui signifie résoudre, couper, délier. Ces réductions se font ajoûtant aux membres d'une Equation ou en retranchant quelque chose, les multipliant ou les divisant de maniere que l'égalité qui est entr'eux ne soit point ôtée.

Des Réductions qui se font par Addition.

Si de part & d'autre du signe de l'égalité on ajoûte des grandeurs égales, les membres de l'Equation demeureront égaux, & l'Equation ne sera point troublé. 14

Si à des Grandeurs égales on en ajoûte d'égales, elles demeurent égales entr'elles. Ainsi si $x = 15$, & qu'on ajoûte 5 de part & d'autre, l'Equation reste $x + 5 = 20$. Pour ajoûter il suffit

d'effacer d'un membre d'une Equation ce qui s'y trouve avec le signe — & l'écrivant dans l'autre avec le signe +. Alors l'on ajoûte également à l'un & à l'autre membre. Soit cette Equation $x - 50 = 6$. Pour ajoûter 50 de part & d'autre, j'efface 50 qui est dans le premier membre avec —, & je le mets dans l'autre membre avec le signe + de cette maniere, $x = 6 + 50$; ce qui n'est qu'une expression corrigée & abbregée de l'addition que je fais; car si $x - 50 = 6$, il est certain que $x - 50 + 50 = 6 + 50$. Or puis que $-50 + 50 = 0$, pour faire cette addition d'une maniere nette, il faut seulement écrire $x = 6 + 50$, ou $x = 56$. Ainsi si $a - z = 0$, pour ajoûter z à l'un & l'autre membre, j'écris $a = 0 + z$, ou simplement $a = z$, puis que ce zero n'augmente point dans ce lieu la valeur de z. Si on a cette Equation $a - 2x = 6 + x$, en transportant $-2x$ dans l'autre membre & l'écrivant avec +, on a cette Equation $a = 6 + x + 2x$, ou $a = 6 + 3x$.

Des Réductions qui se font par la Soustraction.

16 *Si de part & d'autre du signe de l'égalité on retranche des grandeurs égales, l'Equation n'est point troublée.*

De choses égales ôtant choses égales, elles demeurent égales entr'elles: Ainsi si $x + 5 = 20$, retranchant 5 de part & d'autre, l'Equation reste $x = 15$. Si $a = 6 + 3x$, ôtant 6 de part & d'autre $a - 6 = 3x$. Or pour faire ce retranchement il suffit d'effacer d'un nombre ce qui s'y trouve avec le signe +, & de l'écrire dans l'autre avec le signe —. Car pour lors l'on retranche également de l'un & de l'autre membre de l'Equation, & l'on

l'on ne fait qu'abreger l'operation ; car si $x + 50 = 80$, il est évident que $x + 50 - 50 = 80 - 50$ Or puis que $+ 50 - 50$ ne fait rien, pour retrancher 50 de part & d'autre, il ne faut qu'écrire $x = 80 - 50$, ou $x = 30$.

Des Réductions qui se font par la Multiplication.

Lors que l'on multiplie les deux nombres d'une Equation par un même multiplicateur, l'on ne trouble point cette Equation. 16

En multipliant les deux termes d'une raison par une même grandeur, les produits sont en même raison que les grandeurs multipliées. Ainsi si l'on multiplie les deux membres de cette Equation $\frac{z}{a} = b$ par a, l'on aura cette Equation $z = ba$; car puis que la raison de $\frac{z}{a}$ avec b est une raison d'égalité, la raison de z avec ba qui est la même sera aussi une raison d'égalité. Ainsi si $\frac{x}{3} = 6$, multipliant l'un & l'autre membre par 3, l'on aura $x = 18$.

Si $\frac{zz}{z-b} = a$, puisqu'en effaçant le dénominateur $z - b$ du premier membre, ce membre est censé être multiplié par $z - b$, en multipliant a par $z - b$, on aura cette réduction $zz = az - ab$. Par la même raison si $\frac{zz}{a} = \frac{zz - bz + bb}{z}$ pour multiplier ces deux nombres par a, j'efface a du premier, & je multiplie les parties du se-

cond par a; & j'ai $zz = \frac{azz - abz + abb}{z}$

En multipliant cette Equation ainsi réduite par z, on a cette Equation encore plus simple $z^3 = azz - abz + abb$ selon le même principe, que pour multiplier une fraction par son denominateur, il ne faut qu'effacer ce dénominateur.

C'est ce qui fait connoître que pour délivrer une Equation des fractions quand elle en a, il n'y a qu'à la multiplier par le dénominateur de la fraction. S'il y a des Fractions dans les deux membres de l'Equation, il faut faire la même chose, comme icy $\frac{zz}{a} = \frac{zz - bz + bb}{z}$, je multiplie 1°. l'un & l'autre membre par a, ce qui produit $zz = azz - abz + abb$. 2°. Je multiplie l'un & l'autre membre par z & j'ay $z^3 = az^2 - abz + abb$, Ainsi il n'y a plus de fraction.

Des réductions qui se font par la Division.

Lors que l'on divise les deux membres d'une Equation par la même grandeur, l'Equation demeure.

Les deux termes d'une raison étant divisez par une même grandeur les quotiens de ces divisions sont en même raison que ces deux termes. Si $zz = 4z$ divisant les deux membres par z, on aura $z = 4$. Si $z^4 = az^3 + bbzz$, divisant cette Equation par zz, on aura $z^2 = az + bb$. De même si $3z = 12$, divisant par 3 viendra $z = 4$. Si $az = ab$ divisant par a, on aura $z = b$. Cette Equation $azz + bzz = abz + bbz - abb - b^3$, pouvant être divisée par $a + b$ on la reduit par

cette

cette division à celle-cy $zz = bz - bb$. On doit icy se souvenir que pour diviser, il faut effacer dans la grandeur à diviser, celles qui sont dans le diviseur.

Des Réductions qui se font par l'extraction des Racines, & en abaissant une puissance.

En tirant les racines de chaque membre d'une Equation, l'on ne trouble point cette Equation. 18

Cette Regle est fondée sur ce principe, que les puissances égales ont des racines égales. Si donc $xx = 25$, en prenant les racines de xx, & de 25, il faut que x racine de xx, & 5 racine de 25 soient égales; ainsi $x = 5$. Vous voyez qu'on abaisse la puissance xx d'un degré. Ainsi si $z^3 = 125$, ayant tiré la racine cubique de l'un & l'autre membre, on aura $z = 5$. ayant de même extrait la racine quarrée de part & d'autre dans cette Equation $zz = aa + 2ab + bb$, elle sera réduite à celle-cy $z = a + b$.

Des Réductions qui se font en élevant une puissance à un plus haut degré.

En élévant chaque membre d'une Equation à un plus haut & même degré, l'on ne trouble point cette Equation. 19

Car comme les racines des grandeurs égales sont égales, aussi les grandeurs qu'on regarde comme des racines, demeurent égales entr'elles si on les éleve à un même degré: ce qui est fort utile pour se délivrer des grandeurs incommensurables; car si j'ay cette Equation $\sqrt{z} = 5$ en éle-

élevant ces deux grandeurs à un même degré, c'est à dire prenant le quarré de $\sqrt{z}$ qui est z, & celuy de 5 qui est 25, je réduis l'Equation $\sqrt{z} = 5$ à celle-cy $z = 25$. Car il est évident que pour quarrer une grandeur qui a le signe radical, il suffit d'ôter ce signe. Le quarré de $\sqrt{xx}$ est xx : celuy de $\sqrt{xx + yy}$ est $xx + yy$.

Des réductions qui sont par la Substitution.

20 Il ne faut pas oublier la réduction qui se fait par la Substitution ; c'est à dire mettant au lieu d'une grandeur inconnuë ou incommode, quelqu'autre grandeur connuë, ou qui facilite la résolution de la question. On en a déja vû des exemples dans le Problême des trois âges ; où en la place des grandeurs z & y, on a mis $x + 5$ pour z & $4x + 10$, pour y.

Réductions par la Transposition.

21 On peut reduire une Equation de maniere que la grandeur inconnuë se trouve seule d'un côté, ce qui se fait par la transposition. 1°. Par l'Addition ou par la Soustraction. Car par exemple si l'Equation donnée est $x - a = b$, on peut transporter a afin que x soit seul, en ajoûtant a de part & d'autre ; ainsi $x = b + a$. Si la grandeur a eût été jointe avec x par le signe $+$, il auroit falu retrancher a de côté & d'autre, ce qui eût donné $x = b - a$. On fait aussi cette transposition par la multiplication & par la division, & l'on délivre une grandeur de celle avec qui elle se trouve mêlée. Soit par exemple cette Equation $\frac{x}{3} = b$, pour ôter 3 du premier membre,

bre, je multiplie le premier membre $\frac{x}{3}$, & le second qui est b par 3; ce qui me donne cette Equation $x = 3b$, dans laquelle x est dégagée de toute autre grandeur. Si l'Equation donnée eût été $3x = b$, en divisant les membres de cette Equation par 3, je l'aurois réduite à celle cy $x = \frac{b}{3}$, ou x se trouve toute seule, & 3 est transporté de l'autre côté.

Ces réductions changent tellement une Equation qu'on n'en appergoit ni l'origine ni le progrez à moins qu'on ne les fasse soy-même. C'est ce qui fait la difficulté des Livres d'Algebre. Voyons-le dans un exemple.

Soit cette Equation $\sqrt{\frac{zz + 3aa}{4}} + \sqrt{\frac{zz - 3aa}{4}} = \sqrt{\frac{azz}{b}}$. Les quarrez des grandeurs égales étant égaux, en quarrant les membres de cette Equation, ce qui se fait ôtant les signes radicaux; je l'exprime ainsi. $\frac{zz + 3aa}{4} + zz - \frac{3aa}{4} = \frac{azz}{b}$.

$+\frac{3aa}{4}$ & $-\frac{3aa}{4}$ ne sont rien, je le supprime donc pour rendre l'expression plus nette; & puisque $\frac{zz}{4}$ est un quart de zz, en ajoûtant une fois cette même grandeur, c'est à dire la doublant, ce qui ne valoit qu'un quart vaut la moitié. C'est à dire que $\frac{zz}{4} + \frac{zz}{4}$ est égal à $\frac{zz}{2}$. Je

réduis donc l'Equation proposée à celle-cy $\frac{zz}{2} = \frac{azz}{b}$; qui est fort differente de sa premiere expression,

---

CHAPITRE IV.

Principes des Equations ou moyens de trouver de doubles expressions qui facilitent la résolution d'un Problême.

22 TOutes ces réductions dont nous venons de parler, supposent qu'on a trouvé des Equations, c'est à dire de doubles expressions des grandeurs dont on cherche la valeur, que la seule maniere dont un Problême énoncé fait connoître, par exemple, si on propose que z est trois fois plus grand que x, je conclus que trois fois x est égal à z qu'ainsi z se peut nommer $3x$; j'ay donc une double expression de la même grandeur, & par consequent cette Equation $z = 3x$. C'est ainsi que par les rapports qu'ont entr'elles les grandeurs, qui sont les termes de la Question on trouve des Equations. Or tout raport, comme nous avons vû, est ou difference, ou raison; ainsi pour égaler des grandeurs dont on connoît les rapports, & par consequent pour les exprimer en deux manieres, il faut considerer leurs differences, ou les raisons qu'elles ont entr'elles.

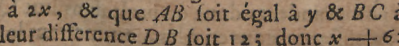
La difference de deux grandeurs est l'excés de la plus grande par dessus la plus petite, ou le desaut de la plus petite au dessous de la plus grande. Ainsi en ajoûtant cette difference à la plus petite, on l'égale à la plus grande, & en retranchant

chant cette difference de la plus grande, on l'égale à la plus petite, Si la difference de x à z est 10, que x soit plus petit que z, donc $x + 10 = z$, ou $x = z - 10$; ce qui me donne de doubles expressions des grandeurs x & z. Je puis nommer $x + 10$ la grandeur z, & $z - 10$ la grandeur x, selon que cela me sera plus commode, & ainsi au lieu de l'une substituer l'autre, de sorte que je n'aye qu'une lettre inconnuë.

Dans une somme composée de deux parties, la difference de cette somme à l'une de ses parties, est l'autre partie. Par exemple, si a & b sont les parties de z; la difference de z à a est b, & sa difference à b est a; ainsi $z - a = b$, & $z - b = a$.

Dans une proportion Arithmetique, les extrêmes ajoûtez ensemble font une somme égale à l'addition des moyens. Ainsi si $\div a.b.c.d.$ donc $a + d = b + c$, donc $a + c = 2b$.

La moitié de la somme de deux grandeurs 23
inégales, plus la moitié de la difference de ces grandeurs est égale à la plus grande, & moins cette même moitié à la plus petite. Par exemple, soient ces deux lignes AB & BC jointes ensemble; leur difference est DB, & les lignes AE & EC sont les deux moitiez de AC.



Il est évident que CE moins BE moitié de la difference de ces deux lignes, est égale à BC la petite ligne, & que AE plus DE ou EB moitié de la même difference est égale à AB. Soit donc AC égal à $2x$, & que AB soit égal à y & BC à z, que leur difference DB soit 12; donc $x + 6 = y$ & $x - 6 = z$. Ainsi on peut nommer $x + 6$

la

la grandeur y, & nommer $x - 6$ la grandeur z, par ce moyen on leur donne en quelque maniere le même nom, ce qui est d'une trés grande utilité, comme on le verra dans la suite.

Quand on connoît quelle raison il y a entre deux grandeurs, on les peut égaler facilement; car il est évident que si x est le tiers de z, il faut que x pris trois fois soit égal à z, comme nous l'avons dit, & qu'ainsi $3x = z$, ou que $\frac{1}{3}z = x$. Si m est à n comme 2 à 3, donc $m = \frac{2}{3}n$, ou $3m = 2n$.

Puis que dans une proportion Geometrique le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, si $\frac{a.}{b.} \frac{c.}{d.}$ donc $ad = bc$. & $ac = bb$ & $\frac{bc}{a} = d$; ainsi l'on peut tirer de la connoissance que l'on a des raisons qui sont entre les grandeurs proposées, des moyens assez faciles de les égaler, ou de trouver entr'elles des Equations; ce qui est la même chose.

Lors qu'on sçait que le quarré d'une grandeur inconnuë est égal à une connuë, il ne faut que l'élever d'un degré. Je sçay que le quarré de z est égal à d. donc $zz = d$: Au contraire si je sçay que la racine de x est égale à d, je conclus donc $x = dd$.

Une chose qu'on ne peut trop dire en cette matiere, c'est que le succez de la peine qu'on prend pour résoudre un Problême, dépend trés-souvent des expressions heureuses dont on se sert, en donnant aux grandeurs dont on parle dans une Question, des signes convenables, ou mettant le tout pour toutes les parties, ou toutes les parties pour

le tout, distinguant le tout en tant & tant de parties, selon que le nombre qu'on choisira sera plus commode. On le va voir dans la résolution des problêmes suivans.

CHAPITRE V.

Application de ce qu'on a dit touchant l'Analyse à des Problemes particuliers. Comment on resout ces Problemes selon la methode ancienne par la Regle de deux fausses positions, ou par la Regle d'Alliage. Quelles sont ces Regles?

QUoique tout ce qu'on vient de voir soit intelligible, rendons le encore plus clair & plus sensible, faisant une application de tout cela à quelques Problêmes.

PROBLEME.

Une personne ayant rencontré des pauvres, & leur ayant voulu donner à chacun cinq sols, elle a trouvé qu'elle en avoit un de trop peu; ainsi ne leur ayant donné qu'à chacun quatre sols, il lui en est resté six. Combien y avoit-il de pauvres, & combien cette personne avoit-elle de sols? 24

Il faut tirer la solution de ce Problême du Problême même, c'est à dire la connoissance de ce qu'on ignore, de la seule maniere dont il est proposé. 1°. Il faut exprimer sur le papier la chose dont il est question, la supposant faite comme le Problême dit qu'elle l'est; pour cela lui donnant des noms. Je nomme x le nombre des pauvres qui ne m'est pas connu, & z celui de l'argent qu'a cette personne qui m'est pareillement inconnu.

Je

Je considere les rapports que les grandeurs inconnuës x & z ont ensemble, afin que je puisse representer la chose, comme on suppose qu'elle est. Puis que cette personne ayant voulu donner à chaque pauvre cinq sols, elle en avoit un de trop peu; donc cinq fois le nombre des pauvres moins un sol, c'est à dire $5x - 1$ est égal au nombre de sols de cette personne, c'est à dire à z. Ainsi le rapport de x & de z, me fait trouver cette double expression ou équation $5x - 1 = z$.

Il faut, comme on a dit, faire en sorte que dans une question il n'y ait qu'une grandeur inconnuë; & pour cela trouver autant d'équations qu'il y a de grandeurs inconnuës dans la question. Je cherche donc une autre double expression de z, considerant les autres rapports que peuvent avoir ces deux grandeurs x & z Selon que la question est proposée. Puis que cette personne donnant 4 sols à chaque pauvre elle en a 6 de reste; donc en multipliant x le nombre des pauvres par 4, ce qui fait 4, & y ajoûtant six sols on fait une grandeur égale à z qui est son argent. $4x + 6 = z$.

Or puis que $5x - 1 = z$, & que $z = 4x + 6$, donc $5x - 1 = 4x + 6$. Il n'y a dans cette derniere équation que x d'inconnu. Il faut faire en sorte qu'il se trouve d'un côté delivré de toute autre grandeur, & qu'il soit précisément égal à une grandeur connuë. Je fais cette réduction. 1°. En ajoûtant 1 de part & d'autre de cette équation $5x - 1 = 4x + 6$; ce qui fait $5x = 4x + 7$. 2°. En ôtant $4x$ de l'un & de l'autre membre de l'équation, aprés quoy il reste $x = 7$; par consequent x qui est le nombre des pauvres vaut 7. Il y avoit donc sept pauvres. Or $4x + 6 = z$, c'est à dire 4 fois sept plus six ou

28

28 plus 6 sont egaux à z: donc $z = 34$. Ainsi cette personne avoit 34 sols.

Faisons encore l'application des regles de l'Analyse à la question suivante, mais sans tant de paroles.

Alexandre étoit plus âgé qu'Ephestion de deux 25
ans. Clitus avoit quatre ans plus que la somme des deux âges d'Alexandre & d'Ephestion, & leurs trois âges faisoient 96 ans. On demande quel étoit l'âge d'un chacun.

L'age d'Ephestion soit appellé x, celuy d'Alexandre z, & celuy de Clitus y Puis qu'Ephestion a deux ans moins qu'Alexandre, donc $x + 2 = z$: & puis que Clitus étoit aussi agé que tous deux ensemble, & de quatre ans davantage; donc $x + z + 4 = y$. Au lieu de z on peut substituer son égale $x + 2$, ainsi $x + x + 2 + 4 = y$; laquelle équation étant corrigée, $2x + 6 = y$ Les trois âges inconnus x, z, y, se peuvent donc exprimer de cette maniere où il n'y a qu'une inconnuë. x. $x + 2$. $2x + 6$. Or ces trois âges réduits dans une somme qui est $4x + 8$ font 96, selon que la question est proposée, donc on a cette équation $4x + 8 = 96$. Il faut faire passer ce qui est connu d'un côté, pour cela je retranche 8 de part & d'autre, & j'ay $4x = 88$, ensuite pour délivrer l'inconnuë x du chifre 4, je divise l'un & l'autre membre par 4, aprés quoy j'ay $x = 22$: Donc l'âge d'Ephestion est 22 ans, celuy d'Alexandre qui a deux ans par dessus 24 ans, & par consequent celuy de Clitus 50.

De la Regle de deux fausses positions.

Dans l'Arithmetique ordinaire, pour résou- 26
dre les Problêmes que nous venons de propo-
ser,

ser, l'on suppose des nombres qui ayent quelqu'une des conditions qui appartiennent aux nombres inconnus que l'on cherche. On fait deux suppositions de nombres, qu'on nomme fausses suppositions, parce qu'effectivement les nombres supposez ne sont pas les veritables que l'on cherche, quoy que par leur moyen on les trouve. Pour montrer comment cela se fait je vais résoudre le dernier Problême par cette regle. Je suppose des nombres qui ayent les conditions marquées dans la question ; aprés j'ajoûte ces nombres dans une somme, & j'observe quelle est la difference entr'eux & le nombre 96, qui est la somme connuë des trois âges. Cette difference se marque avec les signes + & —. Je suppose donc que l'âge d'Ephestion est 16 ans, ainsi celuy d'Alexandre est 18, & celuy de Clitus est 38. Or $16 + 18 + 38$ ne sont pas 96, il s'en faut 24, par consequent les nombres que j'avois supposé ne sont pas les veritables, je les écris neanmoins $16 + 18 + 38 = 96 - 24$. Je fais cette seconde supposition que l'âge d'Ephestion est 21, & qu'ainsi celuy d'Alexandre est 23, & celui de Clitus 48. Or $21 + 23 + 48 = 96 - 4$; donc cette seconde supposition est encore fausse. Pour trouver les nombres veritables, il faut faire évanoüir les differences — 24 & — 4, afin que d'un côté on trouve trois nombres, qui outre cette premiere condition marquée dans la question qu'ont les nombres qu'on vient de supposer, ayent encore la seconde ; c'est à dire qu'ils se trouvent précisement égaux à 96. voilà le principe des Regles qu'on donne que je vais expliquer, qui servira icy & ailleurs.

On peut faire évanoüir d'une Equation une grandeur embarassante, ajoûtant cette Equation avec

avec une autre dans laquelle se trouve cette même grandeur avec un signe contraire. Par exemple, si $x = d - 6$, & $z = d + 6$, pour faire évanoüir le nombre 6, j'ajoûte ces deux Equations, & les ayant corrigées, cela fait $x + z = 2d$, où 6 ne paroît plus; car -6 avec $+6$ ne fait rien. Si la même grandeur se trouve dans les deux Equations avec le même signe, ou $-$ ou $+$, il faut soustraire une de ces Equations de l'autre. Par exemple, si $x = d - 6$, & $z = b - 6$, je retranche l'un de l'autre, & il reste $x - z = d - b$, dans laquelle Equation 6 ne paroît plus; car quand on retranche $b - 6$ de $d - 6$, ou $b + 6$ de $d + 6$, abregeant l'expression de l'operation, le reste est $d - b$. Or pour faire que deux Equations ayent ainsi une même grandeur qu'on puisse faire évanoüir, il faut multiplier réciproquement les membres de l'une par une grandeur qui se trouve dans l'autre Equation, de cette maniere. Soient ces deux Equations $x = c - 2$, & $z = d - 6$, je multiplie les membres de la premiere par 6, & ceux de la seconde par 2; ce qui me donne ces Equations $6x = 6c - 12$, & $2z = 2d - 12$, dans lesquelles se trouve la même grandeur 12 avec le même signe, sçavoir $-$. Ôtant une de ces Equations de l'autre Equation, j'auray $6x - 2z = 6c - 2d$, où 12 ne paroît point.

Suivant ces principes, pour résoudre la question des âges d'Alexandre, d'Ephestion & de Clitus; c'est à dire pour résoudre ces deux Equations $16 + 18 + 38 = 96 - 24$, & $21 + 23 + 48 = 96 - 4$, il faut multiplier la premiere équation par la difference de la seconde supposition qui est 4, c'est à dire $16 + 18 + 38 = 96 - 24$ par 4, ce qui donne cette équation $64 +$

72 +

72 + 152 = 384 — 96, & multiplier la seconde équation par 24, ce qui est la difference de la premiere supposition, c'est à dire 21 + 23 + 48 = 96 — 4 par 24, ce qui donne 504 + 552 + 1152 = 2304 — 96. 2°. Il faut retrancher la plus petite de ces équations de la plus grande, & il restera 440 + 480 + 1000 + 1920, dans lequel reste — 96, & — 96 ne paroissent plus; ainsi cette difference est évanoüie comme on le souhaitoit. Or puis que 96 étoit 24 fois dans 2304 produit de 96 multiplié par 24, & qu'il étoit 4 fois dans 384 produit de 96 multiplié par 4; ayant ôté 384 de 2304, il faut qu'il soit 24 fois moins 4 fois, c'est à dire 20 fois dans le reste qui est 1920. C'est pourquoy la Regle dit que pour réduire la derniere Equation a de plus simples termes, il la faut diviser par la plus grande difference 24 moins la petite qui est 4, c'est à dire par 20. Aprés cette division par 20, l'on a cette équation 22 + 24 + 50 = 96, qui me fait connoître que l'âge d'Ephestion est 22, celuy d'Alexandre 24, celuy de Clitus 50. Si les differences des deux suppositions avoient été + 4 & + 24, au lieu qu'elles étoient — 4 & — 24, il auroit fallu faire la même chose. Mais si elles avoient été — 4 & + 24, ou + 24 & — 4, aprés avoir multiplié chaque supposition par la difference de l'autre supposition, au lieu de retrancher l'une de l'autre, il auroit fallu les ajoûter, ce qui est évident.

Nous avions résolu le même Problême en deux coups de plume. Aussi je n'ay proposé cette derniere methode que pour donner la démonstration de cette Regle de deux fausses positions, qui s'enseigne dans les Livres de l'Arithmetique ordinaire.

De

De la Regle d'Alliage.

Lors que l'Alliage de plusieurs choses de dif- 27
ferente nature est fait, il est facile de connoître la valeur de chaque partie du tout composé de cet alliage, quand le prix du tout est connu. Par exemple, un Marchand a mis dans un vaisseau qui tient 300. pintes, 100 pintes de vin à 5 sols, 100 autres à 3 sols, & 100 autres à 10 sols la pinte. Ces 300 pintes ainsi mêlées les unes avec les autres valent 90 livres ou 1800 sols, on demande combien chacune doit valoir aprés ce mélange. C'est la trois centiéme partie de 90 livres ou de 1800 sols, qui est 6 sols. Ainsi si on ne proposoit que de trouver le prix de chaque pinte de ce vin qui est mêlé, la question seroit aisée.

Mais lors que l'alliage n'est point encore fait, & que l'on a assigné un certain prix moyen avec lequel il faut allier deux ou plusieurs choses de different prix, il y a plus de difficulté. La Regle que l'on donne pour faire cet alliage, n'est pas fort differente de la Regle de deux fausses positions. Tout l'artifice consiste à trouver combien de fois il faut prendre chacune des choses données, pour être alliées avec une certaine grandeur moyenne, afin qu'elles fassent une somme précisément égale à cette grandeur moyenne prise exactement autant de fois. Cela se comprendra mieux par un exemple.

L'on ordonne à un Marchand de vendre son vin 6 sols la pinte; le Marchand n'a que deux sortes de vin, le premier que je nomme x vaut 3 sols la pinte, & le second que je nomme z en vaut 8. Afin qu'il ne perde point, il faut qu'il

allie ces deux sortes de vin, de maniere qu'un certain nombre de pintes de vin qu'il aura mêlé, vaille précisément 6 sols, lequel prix moyen je nomme a. Il faut marquer ce rapport de x avec a, & celuy de z avec le même a; ce qui donne ces deux Equations $x = a - 3$, & $z = a + 2$. Selon la Regle d'Alliage, 1°. Il faut multiplier la premiere Equation par 2, qui est la difference de la seconde Equation; ce qui donnera cette Equation $2x = 2a - 6$, & multiplier la seconde Equation par 3, qui est la difference de la premiere Equation; ce qui donne $3z = 3a + 6$. 2°. Il faut ajoûter ces deux Equations dans une somme, ce qui fait $2x + 3z = 5a$. Cette Equation me fait connoître que deux pintes de vin à 3 sols avec 3 pintes de vin à 8 sols, font 5 pintes de la valeur de 5 pintes de vin à 6 sols. Ainsi si ce Marchand, pour faire cette alliage, prend deux pintes de vin à 3 sols, il faut qu'il prenne trois pintes de vin à 8 sols pour ne tromper personne, & n'être pas trompé luy-même.

Vous voyez que cette Regle a les mêmes fondemens que la Regle de deux fausses positions. Pour faire évanoüir les differences -2 & $+3$, on multiplie chacune de ces deux Equations par la difference de l'autre Equation; & comme ces differences ont des signes contraires, on ajoûte dans une somme les Equations, aprés laquelle addition ces differences s'évanoüissent, comme on l'a dit.

Quand on veut allier plusieurs grandeurs differentes avec une moyenne grandeur, il faut faire cet alliage à plusieurs fois. Par exemple, on veut allier x des carolus qui valent 10 deniers, z des sols marquez de quinze deniers, y des pieces de six blancs qui valent 30 deniers, avec des

sols.

sols. Un sol que je nomme a est le prix moyen. J'allie premierement x avec y.

$x = a - 2$, & $y = a + 18$. Je multiplie la premiere Equation par 18, & la seconde par 2, ce qui fait $18x = 18a - 36$, & $2y = 2a + 36$. On ajoûte ces deux Equations dans une somme qui est $18x + 2y = 20a$. Ainsi je sçay qu'il faut mettre 18 carolus avec 2 pieces de six blancs, pour faire 20 sols en 20 pieces.

Aprés cela j'allie z avec x; car dans cet alliage il faut comparer une grandeur avec une qui soit plus petite que la moyenne si elle est plus grande que la moyenne, ou avec une plus grande que la moyenne, si elle est plus petite que la moyenne. Or selon les rapports que la question me fait connoître que z & x ont avec a, je trouve ces deux Equations $z = a + 3$, & $x = a - 2$. Je multiplie la premiere par 2, & la seconde par 3, & j'ajoûte dans une somme ces deux produits, ce qui fait $2z + 3x = 5a$, laquelle Equation étant jointe avec la précedente, $18x + 2y = 20a$, cela fait $21x + 2z + 2y = 25a$. Ainsi pour faire l'alliage proposé, c'est à dire pour faire 25 sols en 25 pieces, il faut prendre 21 carolus, 2 pieces de six blancs & 2 sols marquez valant 15 deniers.

On reconnoît si un Problême est possible ou non, car si l'on proposoit de faire 20 sols en 20 de ces trois pieces dont nous venons de parler, il est évident que le Problême seroit impossible, parce que l'on ne peut pas les allier, comme nous venons de le voir, à moins que de prendre 21 carolus, 2 sols marquez, & 2 pieces de six blancs; ce qui fait 25 pieces.

On résout plusieurs Problêmes par le moyen de cette regle d'alliage, par exemple celui-cy.

Il y avoit, dit-on, *dans un batteau des hommes, des femmes & des enfans ; les hommes pour le passage poyoient six-blancs, les femmes un sol marqué, & les enfans un carolus ; & l'on sçait que toutes ces pieces faisoient 15 sols en 13 pieces. Combien y avoit-il d'hommes ? combien de femmes ? combien d'enfans ?* Il faut allier ces pieces. Je leur donne des noms ; j'appelle a six-blancs, b les sols marquez de quinze deniers, & c les carolus de dix deniers, & m le prix moyen qui est un sol. J'allie a avec c, & j'ay ces équations $a - 6 = 2m$, & $o + 2 = m$. Je multiplie la premiere équation par 2, ce qui me donne $2a - 12 = 4m$; & la seconde par 6, ce qui fait $6c + 12 = 6m$. J'ajoûte ces deux équations ensemble, j'ay $2a + 6c = 10m$.

J'allie ensuite b avec c. J'ay cette équation, $b - 3 = m$, & $c + 2 = m$. Je multiplie la premiere par 2, ce qui fait $2b - 6 = 2m$, & la seconde par 3, ce qui fait $3c + 6 = 3m$. J'ajoûte ces deux produits en un, $3c + 2b = 5m$. Je joins celuy-cy avec le produit du premier alliage qui est $2a + 6c = 10m$, cela fait $2a + 2b + 9c = 15m$; ce qui me fait connoître qu'il y avoit deux hommes, deux femmes, neuf enfans.

Il est facile de se tromper en ces sortes de Problêmes, sur tout lors qu'il y a plusieurs grandeurs, parce que l'alliage se peut faire en differentes manieres ; comme en cet exemple. *Une troupe de cent personnes composée d'hommes, de femmes, d'enfans & de serviteurs ont dépensé dans un voyage* 100 *pistoles. Les hommes ont dépensé chacun trois pistoles, les femmes chacune une, chaque enfant une demie pistole, & chaque serviteur une septiéme.* b est l'argent des hommes,

f ce-

f celuy des femmes, *e* celui des enfans, & *s* celui des serviteurs. S'il étoit question de sçavoir le nombre des hommes, des femmes, des enfans & des serviteurs séparément, l'on ne pourroit pas conclure qu'il y eût nécessairement 28 hommes, 5 femmes, 4 enfans, 63 serviteurs de ce que $28b + 5f + 4e + 63s = 100$ pistoles; car on peut allier ces quatre grandeurs en plusieurs differentes manieres, de sorte qu'elles fassent toûjours 100 pistoles, comme vous le voyez dans cet exemple. $25b + 15f + 4e + 56s = 100$. Cent pieces de differentes valeurs font encore icy 100 pistoles. Bachet dans ses Commentaires sur Diophante, Livre IV. Question 4e, propose en nombres entiers quatre-vingt & une résolutions differentes de cette question.

CHAPITRE VI.

Résolution de plusieurs Problêmes.

POur faire voir avec plus d'étenduë l'usage de la methode qu'on enseigne icy, je proposeray dans ce Chapitre plusieurs Problêmes. Je les énonce d'une maniere abstraite pour abreger, & en même temps pour en rendre les resolutions plus generales. J'aurois pû par exemple proposer le premier Problême suivant d'une maniere moins abstraite, en le proposant ainsi. *Deux hommes ont ensemble cent écus, l'un a 40 écus plus que l'autre : quel est l'argent d'un chacun ?* On pourroit de la même maniere au lieu de l'énoncé de chacun des autres Problêmes former des Questions de cette nature, faire des énigmes telles que Bachet en propose 45 qu'il a trouvées 28

dans l'Anthologie Grecque. En voicy une. *Une asnesse dit à une mule, si je t'avois donné un de mes sacs, nous en aurions autant l'une que l'autre: & si tu m'en avois donné un des tiens, j'en aurois le double de toy. Combien l'asnesse avoit-elle de sacs?* Ces questions seroient divertissantes; mais cela m'obligeroit à de longs discours. Je pourrois aussi faire voir que la résolution de chaque Problême donne lieu de faire un Theorême, comme vous allez voir dans le Problême suivant qu'on le peut faire.

Probleme Premier.

Diviser ce nombre 100 *en deux parties, telles que leur difference soit* 40.

La plus grande partie de 100 soit nommée z, & la plus petite x. Leur difference doit être 40. J'ay donc cette double expression ou équation $x + 40 = z$, ou $z - 40 = x$. Ainsi je puis substituer $x + 40$ en la place de z, & $z - 40$ en la place de x.

Pour trouver une seconde équation par le moyen de laquelle une des grandeurs inconnuës se trouve seule, comparée avec des grandeurs connues; je considere que selon que la question est proposée $x + z = 100$, ou $x + x + 40 = 100$, ou $z + z - 40 = 100$. L'une ou l'autre que je prenne de ces deux dernieres équations je puis résoudre ce Problême facilement; car dans $x + x + 40 = 100$, ôtant 40 de part & d'autre j'auray $x + x = 60$, & prenant la moitié de ce reste je trouveray que $x = 30$; ainsi je connois la valeur de x. Dans $z + z - 40 = 100$, si j'ajoûte 40 de part & d'autre, j'auray $z + z = 140$, dont prenant la moitié j'auray

ray $z = 70$; ainsi la valeur de z me sera connuë.

Or vous voyez que puisque $x + x + 40 = 100$, donc il est vray que *deux fois la plus petite partie d'une grandeur plus sa difference avec l'autre partie de cette grandeur est égale à toute la grandeur.* Et puisque $2z - 40 = 100$, donc *deux fois la plus grande partie moins sa difference avec la plus petite partie est égale à toute la grandeur.* Voilà donc un Theorême. La résolution de tous les Problêmes que vous verrez vous donnera de la même maniere la connoissance d'un Theorême. Il suffit de l'avoir montré en cet exemple. C'est ainsi qu'on a trouvé la plûpart des Theorêmes de la Geometrie.

Probleme Second.

Couper ce nombre 100 *en deux parties, telles que la plus grande soit égale à trois fois la plus petite plus vingt unitez.*

Soit nommée z la plus grande, & x la plus petite. Selon que la question est proposée $3x + 20 = z$. Au lieu de z je puis donc substituer $3x + 20$ par tout où il faudra mettre z: & puis que z & x sont les deux parties de 100, & qu'ainsi $z + x = 100$, il faut que $3x + 20 + x$, ou $4x + 20$ soit égal à 100. Ainsi $4x + 20 = 100$. Donc en retranchant 20 de part & d'autre, $4x = 80$. Si on divise par 4 l'un & l'autre membre, on a cette équation $x = 20$. Ainsi 20 est la valeur de x, & par conséquent puis que $3x + 20 = z$, donc la valeur de z est 80.

PROBLEME TROISIE'ME.

Partager 60 en deux nombres tels que $\frac{1}{5}$ *du premier plus* $\frac{1}{3}$ *du second fassent 14.*

Je nomme x la cinquiéme partie du premier nombre que je cherche, & z le second ; ainsi le premier est $5x$. Et puis que x avec un tiers de z est égal à 14, comme on le suppose, $14 - x = \frac{1}{3} z$. Je multiplie cette équation par 3, & j'ay $42 - 3x = z$. Or $5x + z = 60$. Donc mettant $42 - 3x$ en la place de z, j'auray $5x + 42 - 3x$, ou $42 + 2x = 60$. J'ôte 42 de part & d'autre, donc $2x = 18$, donc $x = 9$ & $5x = 45$; donc le premier nombre est 45, & partant le second est 15.

PROBLEME QUATRIE'ME.

On cherche deux nombres dont on sçait que le plus petit est le tiers du plus grand, & que si on ôte le plus petit de 16 & le plus grand de 30, les restes seront égaux.

Le plus petit soit x, l'autre soit z. Par la premiere supposition $3x = z$, & par la seconde $16 - x = 30 - z$. Substituant $3x$ égal à z en la place de z, alors on aura cette équation $16 - x = 30 - 3x$. J'ajoûte de part & d'autre un x, & j'ai $16 = 30 - 2x$. J'ajoûte ensuite de part & d'autre $2x$, & j'ay $16 + 2x = 30$. Je retranche 16 de part & d'autre, & j'ay $2x = 14$. Je divise l'un & l'autre membre par 2, & j'ay $x = 7$; ainsi x vaut 7, & par consequent z qui est égal à $3x$ vaut 21.

PRO-

PROBLEME CINQUIE'ME.

On cherche deux nombres qui soient entre eux comme 1 *est à* 5 ; *mais qui deviennent comme* 1 *est à* 3, *aprés avoir ajoûté* 4 *au plus petit, & 6 au plus grand.*

Le plus petit soit x, le plus grand z. Puis que x est la cinquiéme partie de z, donc $5x = z$; & puis qu'ayant ajoûté 4 à x & 6 à z, pour lors $x + 4$ est le tiers de $z + 6$, ou de $5x + 6$, car $5x$ est egal à z, on a cette équation $3x + 12 = 5x + 6$. Retranchant de part & d'autre $3x$ & 6; il ne reste plus que $6 = 2x$: divisant ces deux membres par 2 on a $3 = x$; donc x vaut 3, & par consequent z vaut 15, puis qu'il vaut cinq fois x.

PROBLEME SIXIE'ME.

Cette grandeur inconnuë $x - 30$ *est le triple de* $x - 100$. *On cherche la valeur de la grandeur* x.

Puis que $x - 30$ est le triple de $x - 100$, donc $x - 30 = 3x - 300$ J'ajoûte 30 de part & d'autre, & pour lors j'ay $x = 3x - 270$. J'ajoûte derechef 270, & j'ay $x + 270 = 3x$, j'ôte un x de part & d'autre, il reste $270 = 2x$. Je divise cette équation par 2, ce qui me donne $135 = x$, donc x vaut 135.

PROBLEME SEPTIE'ME.

Il faut diviser cent en deux parties, de telle sorte que le $\frac{1}{3}$ *de la premiere avec le* $\frac{1}{5}$ *de la seconde fasse* 30.

brevius.

$\frac{x}{3}+\frac{z}{5}=30.$

$\frac{5x+3z}{15}=30.$

$5x+3z=450.$

$5x+300-3x$
$=450.$

$2x=150$

$\&\ x=75$

$\text{et } z=25.$

La premiere partie soit x, la seconde z; donc $100-x=z$, & $100-z=x$. Par la supposition qu'on fait que $\frac{1}{3}$ de la premiere partie x avec $\frac{1}{5}$ de z seconde partie égale à $100-x$, est égal à 30; l'on a cette équation $\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}100-\frac{1}{5}x=30$. Il faut corriger cette équation, & la réduire à de plus simples termes. Pour cela j'en multiplie les membres par ce nombre 15, qui peut être divisé exactement par 3 & par 5. Je multiplie premierement le second membre 30 par ce nombre 15, ce qui fait 450; ensuite je multiplie l'autre membre, commençant par $\frac{1}{3}x$, qui étant multiplié par 15, le produit est quinze tiers qui sont cinq entiers; ainsi le produit de cette multiplication est $5x$. Ensuite je multiplie $\frac{1}{5}100-\frac{1}{5}x$ par 15, ce qui fait $300-3x$; ainsi j'ay cette équation $5x+300-3x=450$. Je corrige cette équation, ôtant du premier membre $3x$ qui se trouve avec des signes contraires, & j'ay $2x+300=450$. Je retranche de part & d'autre 300, aprés quoy $2x=150$. Je divise cette équation par 2, ce qui me donne $x=75$, par consequent x vaut 75. Or $100-x$, ou $100-75$, ou $25=z$; donc la valeur de z est 25.

PROBLEME HUITIE'ME.

Trouver un nombre, lequel ajoûté à 100 *& à* 20, *fasse deux nombres qui soient l'un à l'autre comme* 3 *est à* 1.

Le nombre qu'on cherche soit nommé x; je suppose la chose faite, sçavoir que $20 + x$. $100 + x :: 1. 3$. Le produit des extrêmes est égal à celuy des moyens, partant $60 + 3x = 100 + x$. Je retranche 60 & une fois x de part & d'autre, & j'ay $2x = 40$. Je divise cette équation par 2; j'ay $x = 20$, par consequent x vaut 20. qui ajoûté à 100 fait 120 triple de $20 + 20$ ou de 40.

PROBLEME NEUVIE'ME.

Connoissant la difference de deux grandeurs, & le rapport de l'une à l'autre, trouver chaque grandeur.

Je nomme x la plus petite. Sa difference à la plus grande est b. Donc cette plus grande est $x + b$. On suppose que $x . x + b :: 1. 3$ donc $3x = x + b$. J'ôte x de part & d'autre; donc $2x = b$: donc $x = \frac{1}{2} b$. Si $x . x + b :: 2. 3$. alors $3x = 2x + 2b$. J'ôte $2x$ de part & d'autre, & j'ay $x = 2b$. Ainsi la valeur de x est connuë. L'expression de ce Problême est generale, par consequent quelque raison & quelque difference qu'on puisse supposer être entre des grandeurs données, on trouvera la valeur de ces grandeurs comme on vient de trouver la valeur de x.

PROBLEME DIXIE'ME.

Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs, & le produit de l'une par l'autre, trouver chaque grandeur.

Je nomme la ſomme de ces deux grandeurs $2a$, & leur difference $2z$. Ainſi ſi la plus petite eſt $a - z$, la plus grande ſera $a + z$. leur produit connu ſoit nommé b; donc ſelon que la queſtion eſt propoſée multipliant $a - z$ par $a + z$, leur produit $aa + az - az - zz$ ſera égal à b. Puis que $+ az - az$ ne font rien, on a cette équation $aa - zz = b$. Ajoûtant zz de part & d'autre on a $aa = b + zz$. Otant b, reſte $aa - b = zz$. Donc ôtant b du quarré aa, la racine quarrée du reſte ſera la valeur de $z = \sqrt{a^2 - b}$

L'expreſſion de ce Problême eſt encore fort generale. Exprimant de la maniere que nous venons de le faire deux grandeurs dont on connoît la ſomme ou leur difference, on réſout une infinité de queſtions.

PROBLEME ONZIE'ME.

L'on demande que l'on diviſe ce nombre 100 *en deux parties, telles que la plus grande* z *étant multipliée par la plus petite* x, *le produit qui eſt* xz *ſoit à* xx *quarré de la plus petite, comme* 10 *eſt à* 1.

On ſuppoſe que la plus petite eſt x, & la plus grande eſt z. Puis que z & x ſont les parties de 100, donc $100 - z = x$, & $100 - x = z$. Or ſelon que la queſtion eſt propoſée, x ayant été multiplié par z ou par la grandeur qui lui eſt égale, ſçavoir $100 - x$, le produit $100x -$

xx,

xx, doit être à xx comme 10 à 1.

$$100x - xx \quad xx :: 10. \quad 10. \quad 1.$$

Par consequent puis que le produit des extrêmes est égal à celuy des moyens, $100x - xx = 10xx$. j'ajoûte xx de part & d'autre, & j'ay $100x = 11xx$. Je divise les membres de cette équation par x, & j'ay $100 = 11x$. Je divise de nouveau les membres de cette équation par 11; le quotient de cette division est $9\frac{1}{11}$, donc $9\frac{1}{11} = x$; donc x vaut $9\frac{1}{11}$, & partant z qui est l'autre partie de 100, vaut $90\frac{10}{11}$.

Probleme douzie'me.

J'ay dépensé un certain nombre de livres, dont je ne me souviens plus; je sçay seulement que le $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ *de ce nombre* $+ 22 = 94$.

Tous ces nombres rompus ajoûtez dans une somme, font $\frac{26}{24}$; donc $\frac{26}{24} + 22 = 94$. J'ôte 22 de part & d'autre, ce qui me donne $\frac{26}{24} = 72$. Puis que 72 est ainsi égal à $\frac{26}{24}$, c'est à dire à $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ du nombre que je cherche, & que je nomme x; je sçay donc que 72 doit être à x, comme 26 est à 24, qui représente l'entier x. Par consequent 26. 24 :: 72. x; multipliant donc 72 par 24, & divisant le produit de cette mul-

multiplication par 26, le quotient de cette division qui est $66\frac{6}{13}$, donnera la valeur de x qu'il falloit trouver.

PROBLEME TREIZIE'ME.

Ce nombre 576 est un nombre plan, on cherche ses racines inconnuës x *&* z, *qui sont entr'elles comme* 1 *&* 4.

Selon que ce Problême est proposé, on sçait que $x.\ z :: 1.\ 4.$ & que $xz = 576$. Or puis que le produit des extrêmes x & 4 est égal à celuy des moyens qui sont icy z & 1; donc $4x = z$. Ainsi au lieu de xz on peut mettre $x4x$, ou $4xx$: par consequent puis que xz est égal à 576, donc $4xx = 576$. Je divise cette équation par 4, j'ay $xx = 144$; je prends la racine quarrée des deux membres, ce qui me donne $x = 12$; donc x vaut 12, & par consequent z vaut 48.

PROBLEME QUATORZIE'ME.

On veut partager le nombre 178 *en trois parties qu'on nomme* x, y, z, *telles que* $\frac{x}{5} = 8z$, *& que* $8z = \frac{y}{6}$.

Pour résoudre ce Problême il n'est question que de trouver la proportion qui est entre ces trois parties, ce que l'on connoîtra par le moyen de trois équations; car puis que $\frac{x}{5} = 8z$, donc en multipliant l'un & l'autre membre par 5, l'on aura $x = 40z$; ainsi on sçait déja que puis que x est égal

égal à 40 fois z, il faut que $z.\ x :: 1.\ 40$. En second lieu, puis que $\frac{y}{6} = 8z$; en multipliant cette équation par 6, on a $y = 48z$: donc on sçait que y est égal à 48 fois z, & qu'ainsi $z.\ y :: 1.\ 48$. Cela fait connoitre les raisons des trois grandeurs $z\ x.\ y$. sçavoir que $z.\ x\ y :: 1.\ 40\ 48$. Pour achever ce Problême, il faut diviser 178. proportionellement à ces trois nombres 1. 40. 48. Liv. III. n. 82.

Probleme quinzie'me.

Ce nombre 30 *étant donné, trouver ses trois parties* x. y. z. *On sçast que* $\frac{x}{y} :: \frac{y}{z}$ *& que* $xy.\ xz :: 1.\ 4$.

Pour résoudre ce Problême, il n'est question que de trouver la raison qu'ont entr'elles ces parties $x.\ y.\ z$. du nombre 30, qu'on suppose en progression. On suppose encore $xy.\ xz :: 1.\ 4$. Donc puisque l'on a démontré Liv. III. n. 63 que xy est à xz comme y à z; il faut que z soit quatre fois plus grand que y. Et puis que x est le premier terme de la progression, si on dit que z soit 16, & par consequent que y soit 4, x doit être 1. Il ne s'agit donc plus que de diviser 30 proportionnellement à ces trois nombres 1. 4. 16. On trouvera Liv. III. nombre 82. ces trois nombres $1\frac{9}{21}.\ 5\frac{15}{21}.\ 22.\frac{18}{21}$. qui seront les trois parties de 30 que l'on cherchoit.

Probleme seizie'me.

On cherche deux nombres x. *&* z *On sçait qu'ôtant* 1. *de* z *& l'ajoûtant à* x. *alors* x *est double de*

de z; *& qu'ôtant* 1 *de* x *& l'ajoûtant à* z, *alors* x *&* z *sont égaux.*

Selon la premiere supposition $2z - 2 = x + 1$, & selon la seconde $z + 1 = x - 1$. Il faut reduire les deux inconnuës z & x à une seule, z à x, ou x à z. Si on veut faire évanoüir x, il faut ajoûter aux deux membres de l'équation $z + 1 = x - 1$ la même grandeur 1, aprés quoy on aura $z + 2 = x$. Mettant donc $z + 2$ pour x dans l'Equation $2z - 2 = x + 1$, pour lors $2z - 2 = z + 3$. Ajoûtez 2 de part & d'autre, vous aurez $2z = z + 5$. Retranchez un z de part & d'autre, & vous aurez $z = 5$. Donc puis que $z + 1$, c'est à dire $5 + 1 = x - 1$, il faut que $x = 7$.

Remarquez que ce Problême exprimé d'une maniere abstraite, est le Problême de la mule & de l'ânesse dont nous avons parlé cy-dessus. x marque le nombre des sacs de l'ânesse, & z celuy des sacs de la mule. Ainsi l'ânesse avoit sept sacs, & la mule cinq. Si on enseignoit ce petit ouvrage à de jeunes gens, il faudroit appliquer ces Problêmes à de semblables questions pour les divertir, & les convaincre en même temps de l'utilité de l'Analyse.

PROBLEME DIX-SEPTIE'ME.

x, z :: 1. 3. *&* zz. x :: 6. 1. *l'on cherche la valeur de* x *& de* z.

De la maniere que cette question est proposée, il faut que x soit le tiers de z: donc $z = 3x$. Et puis que $zz. x :: 6. 1.$ mettant $3x$ en la place de z, ou $9xx$ quarré de $3x$ en la place de zz quarré de z, j'exprimeray ainsi la proportion précedente: $9xx, x :: 6. 1.$ où z ne paroît plus.

Le

Le produit des extrêmes est égal à celuy des moyens ; donc $9xx = 6x$. Je divise les membres de cette équation par 9, & j'ay $xx = \frac{6x}{9}$, ou $\frac{2x}{4}$. Je les divise encore par x ; & j'ay $x = \frac{2}{3}$. Ainsi x vaut $\frac{2}{3}$, & par consequent z vaut 2, dont le quarré qui est 4 est six fois plus grand que $\frac{2}{3}$.

PROBLEME DIX-HUITIE'ME.

Connoissant le premier & le second terme d'une progression Geometrique, avec la somme de tous les termes ; connoître combien elle a de termes, & la valeur du dernier.

Soit cette progression $\div\!\div$ 2. 6..... x. Le premier terme & le second sont des nombres connus, les autres sont inconnus ; ainsi j'ay marqué leur place avec des points. On sçait que 728 est la somme de tous les termes. Je nomme x le dernier terme. 728 contient x, & la somme de tous les termes qui précedent x, qui est ainsi $728 - x$. Or Liv. III. n. 90 $6 - 2. 2. :: x - 2. 728 - x$. Donc $2x - 4$ produit des moyens est égal à $2912 - 4x$ produit des extrêmes. Ainsi $2x - 4 = 2912 - 4x$. J'ajoûte $4x$ de part & d'autre, ce qui fait $6x - 4 = 2912$. J'ajoûte encore de part & d'autre 4, ce qui fait $6x = 2916$. que je divise par 6, & j'ay $x = 486$. Le dernier terme est donc 486. On connoîtra le nombre des termes de la progression proposée, par ce qui a été enseigné, Liv. III, n. 97. p. 204.

Ce Problême-cy est celui dont l'on avoit promis la résolution. Liv. III. n. 100.

PROBLEME DIX-NEUVIE'ME.

Connoissant la difference qui est entre deux grandeurs inconnuës, & un moyen proportionnel entre ces grandeurs, connoître ces grandeurs.

Les grandeurs données sont y & z. leur difference est 8. Le moyen proportionnel qui est entr'elles est d. Il faut premierement exprimer ces deux grandeurs, de maniere qu'elles se réduisent à une expression où il n'y ait qu'une lettre inconnuë. Supposant que $2x = z + y$, & prenant 4 moitié de la difference de z à y, selon ce que nous avons enseigné cy-dessus, n. 23. $x + 4$ doit être égal à z, si z est plus grand que y, & $x - 4$ à y. Par consequent, selon que la question est proposée, $\div x + 4$. d. $x - 4$. Le produit des extrêmes qui est $xx - 16$, est égal à dd quarré de d moyen proportionnel: Donc $xx - 16 = dd$. Transportez 16 pour avoir $xx = dd + 16$. La grandeur d est connuë: si elle étoit 3, donc dd étoit 6; ainsi $xx = 25$. laquelle équation on réduit par l'extraction de la racine quarrée à celle-cy $x = 5$. Or $z = x + 4$; donc $z = 9$, & par consequent $y = 1$.

PROBLEME VINGTIE'ME.

Trois personnes ont chacun un nombre d'écus; la premiere & la seconde ont a *plus que la troisiéme; la premiere & la troisiéme ont* b *plus que la seconde; & la seconde & la troisiéme ont* c *plus que la premiere. On demande ce que chacun doit avoir.*

Soit

Soit x le nombre des écus de la premiere, y celuy de la seconde, & z celui de la troisiéme. Selon que la question est proposée, 1°. $x+y-a=z$; donc $x=z-y+a$.

2°. $x+z-b=y$; donc $x=y-z+b$

3°. $x=y+z-c$.

Remarquez que tous les seconds membres de ces trois équations, $x=z-y+a$ $x=y-z+b$. $x=y+z-c$, sont égaux entr'eux étant égaux à x. Donc $z-y+a=y+z-c$. & $y+z-c=y-z+b$.

Je considere cette équation $z-y+a=y+z-c$. J'ôte z de part & d'autre, reste $-y+a=y-c$. J'ajoûte y, & j'ay $a=2y-c$. J'ajoûte encore c, & j'ay $a+c=2y$; donc y vaut la moitié de $a+c$.

De même je réduis cette équation $y-z+b=y+z-c$ à celle-cy $b+c=2z$, en ôtant de part & d'autre y, & vient $-z+b=+z-c$. J'ajoûte, de part & d'autre z & j'ay $b=2z-c$. J'ajoûte encore c & vient $b+c=2z$. Donc z est égal à la moitié de $b+c$. Or $x=y+z-c$; donc la valeur de x ne peut plus être inconnuë. Sa valeur sera la moitié de $a+c+b+c$ valeur de $y+z$, retranchant de ces sommes la valeur de c.

PROBLEME VINGT-UNIE'ME.

On sçait que x. z. y :: 9. 12. 16. *Outre cela que* xx + zz + yy = 4329. *Il faut trouver la valeur de ces trois grandeurs*, x. z, y.

On peut réduire ces trois grandeurs à un même nom, parce qu'on sçait quelle raison elles ont entr'elles, en les exprimant ainsi $9x$. $12x$. $16x$. dont les quarrez sont $81xx$. $144xx$. $256xx$. La

somme

ſomme de ces quarrez qui eſt $481xx$ eſt égale à 4329. Ainſi $481xx = 4329$. Je diviſe cette équation par 481, ce qui me donne $xx = 9$ Faiſant l'extraction de la racine quarrée de chaque membre, j'ay $x = 3$. Par conſequent puisque x vaut 3, z vaut 4, & y vaut $5\frac{1}{3}$

PROBLEME VINGT-DEUXIE'ME.

2 a eſt la ſomme de deux grandeurs, dont le produit ajoûté à la ſomme de leurs quarrez eſt c, trouver chaque grandeur.

Je nomme $2y$ leur difference qui eſt inconnuë. La plus petite ſera $a - y$, & la plus grande $a + y$; leur produit eſt $aa - yy$. La ſomme de leurs quarrez eſt $2aa + 2yy$ laquelle avec ce produit fait $3aa + yy$ égal à c Ainſi on a cette équation $3aa + yy = c$; donc $yy = c - 3aa$. Or $c - 3aa$ eſt tout connu; donc yy le ſera pareillement.

PROBLEME VINGT-TROISIE'ME.

Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs & la ſomme de leurs quarrez, trouver chaque grandeur.

Soit $2a$ la ſomme des grandeurs qu'on veut connoître, & c la ſomme de leurs quarrez. Je nomme $2z$ la difference des deux grandeurs: ainſi la plus petite eſt $a - z$, & la plus grande $a + z$ Le quarré de $a - z$ eſt $aa - 2az + zz$, & celuy de $a + z$ eſt $aa + 2az + zz$ Ces deux quarrez ajoûtez enſemble ſont $2aa + 2zz$. Or c eſt égal à ces deux quarrez; donc $2aa + 2zz = c$; donc $2zz = c - 2aa$, & $zz =$

$\frac{1}{2}c - aa$. Pour connoître z il faut retrancher aa de la moitié de c; & du reste en prendre la racine quarrée, qui sera la valeur de z. $z = \sqrt{\frac{c}{2} - a^2}$

PROBLEME VINGT-QUATRIE'ME.

Connoissant la somme de deux grandeurs & la difference de leurs quarrez trouver chaque grandeur.

Soit $2a$ la somme de ces grandeurs, leur difference qui est inconnuë soit $2z$. La plus petite est $a - z$. La plus grande $a + z$. Le quarré de $a - z$ est $aa - 2az + zz$: celuy de $a + z$ est $aa + 2az + zz$. La difference de ces deux quarrez est $4az$ qui est égale à b. Donc $4az = b$. Je divise cette équation par $4a$, aprés quoy $z = \frac{b}{4a}$, ainsi le quotient de b divisé par $4a$ est la valeur de z.

PROBLEME VINGT-CINQUIE'ME.

Connoissant la somme de deux grandeurs, & la somme de leurs cubes, où la difference de leurs cubes trouver chaque grandeur.

Ce Problême se résout comme les deux précedens.

PROBLEME VINGT-SIXIE'ME.

Connoissant que le produit de deux grandeurs est 32, & que la somme de leurs quarrez est 80, trouver quelles sont ces grandeurs.

Je nomme $2x$ leur somme & $2z$ leur difference. Ainsi selon ce que l'on a dit s̃n. 23 dont vous

voyez

voyez que nous faisons tant d'usage, $x - z$ sera la plus petite de ces deux grandeurs inconnuës, & $x + z$ la plus grande. Le produit de ces deux grandeurs est $xx - xz + xz - zz$ égal, comme on le suppose, à 32. Ainsi corrigeant l'expression de ce produit on a cette équation $xx - zz = 32$. ou $xx = 32 + zz$.

Le quarré de la plus petite de ces deux grandeurs est $xx - 2xz + zz$: celui de la plus grande est $xx + 2xz + zz$. La somme de ces quarrez est $2xx + 2zz$ égale à 80. Selon que la question est proposée; on a donc cette équation $2xx + 2zz = 80$, ou $2xx = 80 - 2zz$. Divisant cette équation par 2 vient $xx = \frac{80 - 2zz}{2}$

On a trouvé que $xx = 32 + zz$. Donc substituant $32 + zz$ au lieu de xx, on aura cette équation $32 + zz = \frac{80 - 2zz}{2}$ que je multiplie par 2, & j'ay $64 + 2zz = 80 - 2zz$. J'ajoûte $2zz$ & j'ay $64 + 4zz = 80$. Je retranche 64 & j'ay $4zz = 80 - 64$. c'est à dire $4zz = 16$. Je divise par 4. Ainsi $zz = 4$. partant z moitié de la difference de ces deux grandeurs qu'on cherche est 2; la difference entiere est donc 4. Puisque $xx - zz$ leur produit est égal à 32, qu'ainsi $xx = 32 + zz$, c'est à dire que $xx = 36$, donc x vaut 6. La plus petite des grandeurs qu'on cherche est $x - z$, & la plus grande $x + z$, c'est à dire $6 - 2$ & $6 + 2$. Donc ces grandeurs sont 4 & 8.

PROBLEME VINGT-SEPTIE'ME.

2y *est la somme de deux grandeurs inconnuës: leur difference est* 2z: *leur produit connu* b, *&* c *la*

valeur de ce produit ajoûté à la somme de leurs quarrez, il faut connoître ces grandeurs.

La plus petite est $y - z$: la plus grande $y + z$. Leur produit est $yy - zz$. Leurs quarrez sont $yy - 2yz + zz$ & $yy + 2yz + zz$. Ces deux quarrez joints avec le produit $yy - zz$ font $3yy + zz$. Or $yy - zz = b$, partant $yy - b = zz$, & $3yy + zz = c$, ou $zz = c - 3yy$. Donc $yy - b = c - 3yy$. Et ajoûtant yy, on a $4yy - b = c$, & par consequent $4yy = c + b$ & $yy = \frac{1}{4}c + \frac{1}{3}b$ &c.

PROBLEME VINGT-HUITIE'ME.

Le solide c *est fait du produit de* 2y *somme de deux grandeurs par la somme des quarrez de ces grandeurs, & le solide* d *est fait par* 2z *difference de ces grandeurs multipliée par la difference des quarrez de ces grandeurs. Connoître chaque grandeur.*

La plus petite de ces deux grandeurs est $y - z$, & la plus grande $y + z$. La somme de leurs quarrez est $2yy + 2zz$ dont le produit par $2y$ est $4y^3 + 4yzz$ égal à c. La difference des quarrez de $y - z$ & $y + z$ est $4yz$, qui multipliée par $2z$ fait $8yzz$ égal à d. Donc $4y^3 + 4yzz = c$ & $8yzz = d$. Or la premiere équation se réduit à celle-cy $yzz \frac{1}{4}c - y^3$, & la seconde à celle-cy $yzz = \frac{1}{8}d$. Donc $\frac{1}{4}c - y^3 = \frac{1}{8}d$. Donc $\frac{1}{4}c = \frac{1}{8}d + y^3$, & $\frac{1}{4}c - \frac{1}{8}d = y^3$.

PROBLEME VINGT-NEUVIE'ME.

On cherche la valeur de x *& de* y, *dont la difference est* z. *On sçait seulement que le produit de* x *& de* y *divisé par leur difference* z *est* $5\frac{1}{4}$.

Selon que la question est proposée yx produit de x multiplié par y étant divisé par z, le quotient de cette division est égal à $5\frac{1}{4}$. Ainsi on a cette équation $\frac{yx}{z} = 5\frac{1}{4}$. Mais elle ne suffit pas, il en faut avoir une autre, qu'on ne peut point trouver, parce que cette question n'est point determinée ; c'est à dire que les grandeurs qu'on cherche n'ont point de rapport particulier qui les détermine de telle sorte qu'il n'y ait qu'une seule grandeur à qui ce raport convienne. Plusieurs grandeurs peuvent avoir ce même rapport ; ainsi on peut supposer telle grandeur qu'on voudra. Je suppose donc que la plus petite des deux grandeurs proposées est 3 ; la plus grande est donc $z + 3$. Le produit de 3 & de $z + 3$ est $3z + 9$, qui étant divisé par z, le quotient doit être $5\frac{1}{4}$. Ainsi $\frac{3z+9}{z} = 5\frac{1}{4}$. Je multiplie les membres de cette équation par z & j'ay $3z + 9 = 5z + \frac{1}{4}z$. Je retranche $3z$ & vient $9 = 2z + \frac{1}{4}z$. Pour délivrer l'équation de cette fraction, je la multiplie par 4, & j'ay $36 = 8z + z$. Par consequent $36 = 9z$ que je divise par 9, aprés quoy

quoy $4 = z$. Ainsi z vaut 4, & partant comme la plus petite grandeur qu'on cherchoit est 3, la plus grande sera 7. Le produit de 3 par 7 est 21. Ce nombre étant divisé par 4, le quotient est $5\frac{1}{4}$. Ainsi ces deux nombres satisfont à la question. En prenant tout autre nombre que 3 j'aurois résolu de la même maniere la question ; c'est à dire que j'aurois trouvé d'autres nombres qui y auroient satisfait.

Probleme Trentie'me.

Ce nombre 34 est composé de ces deux nombres quarrez 9 & 25. Il faut partager ce nombre en deux autres nombres quarrez. De telle maniere que ce que l'on ajoûte à la racine de l'un soit la moitié de ce qu'on ôte de la racine de l'autre.

La racine de 9 est 3, celle de 25 est 5. Pour résoudre ce Problême, il faut trouver deux autres racines, dont l'une soit plus petite, & l'autre plus grande. J'ajoûte x à 3. L'on demande outre cela, que ce que l'on ôte de 5 soit le double de ce que l'on ajoûte à 3 ; ainsi si la premiere racine est $3 + x$; la seconde racine sera $5 - 2x$. Le quarré de $3 + x$ est $9 + 6x + xx$; celuy de $5 - 2x$ est $25 - 20x + 4xx$. Ces deux quarrez ajoûtez ensemble font $34 - 14x + 5xx$ qui sont égaux à 34 ; ainsi on a cette équation $34 - 14x + 5xx = 34$. J'ajoûte $14x$ de part & d'autre, $34 + 5xx = 34 + 14x$. Je retranche 34, j'ay $5xx = 14x$; je divise par x, & j'ay $5x = 14$. Je divise par 5, & il vient $x = \frac{14}{5}$. La

premiere racine est $3 + \frac{14}{5}$. La seconde est $5 - \frac{28}{5}$ qui corrigée est $\frac{3}{5}$. Le quarré de la premiere est $33\frac{16}{25}$. Celui de la seconde $\frac{9}{25}$, tous deux font 34.

Probleme trente-unieme.

Deux diviseurs étant donnez, trouver un nombre qui divisé par l'un, ne reste rien; & divisé par l'autre reste 1.

Soient proposez ces deux diviseurs $a = 19$, & $b = 28$. Leur difference est $d = 9$. Donc $a + d = b$ ou $a = b - d$. Je multiplie l'équation par 2, & vient $2a = 2b - 2d$. Or $2d = a - 1$. ce que j'ajoûte $3a - 1 = 2b$. Donc le nombre que je cherche est 57, qui divisé par 28. ne reste rien, par 19 reste 1.

Soient proposez $a = 7$ & $b = 30$; la difference de ces deux nombres est $d = 23 = 3a + 2$. Ainsi $4a + 2 = b$, ou $4a = b - 2$. Je multiplie cette équation par 3 & vient $12a = 3b - 6$. j'ajoûte une fois a ou 7, & j'ai $13a = 3b + 1$. Donc 91 est le nombre que je cherchois, divisé par 7 il ne reste rien, par 30 il reste 1.

Soient ces deux diviseurs $a = 17$ & $b = 20$. Leur difference $d = 3$. Donc $a + d = b$ & $b - d = a$. Or $6d = a + 1$. Je multiplie donc l'équation par 6 & vient $6b - 6d = 6a$. J'ajoûte $6d$ ou $a + 1$, ce qui fait $6b = 7a + 1 = 120$. Ce nombre 120 est celuy qu'on cherche, divisé par b ou 20 ne reste rien, par a ou 17. reste 1.

Pro-

PROBLEME TRENTE-DEUXIE'ME.

Trouver un nombre dont on ſçait qu'étant diviſé par a, *ou dont ayant rejetté* a *autant qu'il ſe peut, il reſte* m, *& par* b *il reſte* n.

$a = 19.$ $b = 28.$ $m = 4.$ $n = 3.$ Il faut 1°. trouver par le Problême précedent ce nombre 57 qui diviſé par a ne reſte rien, par b reſte 1. Ainſi on a cette équation.

$$57 = 3a = 2b + 1.$$

2°. Je prens la difference de m & de $n + b$, que je nomme d, par laquelle je multiplie l'équation & j'écris,

$$57d = 3ad = 2bd + d.$$

J'ajoûte m par tout; & j'ay

$$57d + m = 3ad + m = 2bd + d + m.$$

Or puiſque d eſt la difference de m & de $n + b$. Donc $d + m = n + b$. Ainſi au lieu de $d + m$, je puis mettre $n + b$.

$$57d + m = 3ad + m = 2bd + b + n.$$

Ainſi on a ce qu'on cherche; car $3ad + m$, diviſé par $3ad$ reſte m, comme $2bd + b + n$ diviſé par $2bd + b$ reſte n.

PROBLEME TRENTE-TROISIE'ME.

Trouver le plus petit nombre, qui diviſé par a *reſte* m, *par* b *reſte* n.

Il faut multiplier les diviſeurs a & b l'un par l'autre, & ôter leur produit autant de fois qu'il ſe pourra faire du nombre qui diviſé par a donne m, diviſé par b donne n. Le reſte ſera le plus petit nombre qu'on cherche, comme il eſt évident.

PROBLEME TRENTE-QUATRIE'ME.

Trouver un nombre dont on ſçait qu'étant diviſé par a *il reſte* m, *par* b *il reſte* n, *par* c *il reſte* p.

1°. Il faut trouver par le Problême 32 le nombre *b*, qui diviſé par *a* donne *m*, & diviſé par *b* donne *n*.

2°. Je cherche par le Problême 31 un nombre qui diviſé par *b* ne reſte rien, par *c* reſte l'unité. Je nomme ce nombre *k*.

3°. Ce nombre *k* auſſi bien que *b* diviſé par *a* donnera *m*, par *b* donnera *n*; je cherche donc par le Problême 32 un nombre qui diviſé par *k* donne un nombre qui ait les conditions du nombre *b*, & diviſé par *c* donne *p*. qui eſt tout ce qu'on cherche.

PROBLEME TRENTE-CINQUIE'ME.

Trouver le plus petit nombre qui diviſé par a *reſte* m, *par* b *reſte* n, *par* c *reſte* p.

Il faut prendre le produit des trois diviſeurs *a*, *b*, *c*, & l'ôter autant qu'il ſe pourra faire du nombre qu'on veut réduire â un plus petit nombre qui ait les conditions propoſées. Le reſtant aura les mêmes conditions.

Voilà quelques exemples de Problêmes indéterminez ſur des grandeurs rationnelles; c'eſt à dire qui ſe peuvent exprimer par nombres. Comme il eſt libre entre les grandeurs dont la valeur n'eſt point déterminée, d'en ſuppoſer une telle qu'on la veut choiſir, ces Problêmes ſont capables de pluſieurs differentes réſolutions. Prenez garde aux methodes, qui étant bien entenduës découvrent le

le moyen de résoudre une infinité de Problêmes sur les nombres.

PROBLEME TRENTE-SIXIE'ME.

Trouver deux grandeurs commensurables, & telles que leur somme, & celle de leurs quarrez ayent un même rapport que deux grandeurs connuës.

a & b sont les grandeurs connuës. Je nomme z la premiere des inconnuës, & zy la seconde. Prenez garde à cette expression. Dans les Problêmes précedens on a marqué chaque inconnuë par une seule lettre. Selon que la question est proposée $z+zy$ la somme des deux inconnuës est à $zz+zzyy$; la somme de leurs quarrez comme a est à b; ainsi le produit des extrêmes de cette proportion $z+zy$ & b est égal au produit des moyens a & $zz+zzyy$, Donc,

$$bz+bzy=azz+azzyy.$$

Je divise les deux membres de cette équation par $az+azyy$, & aprés la correction vient

$$z=\frac{b+by}{a+ayy}$$

Si je suppose que $y=2$. Donc $z=\frac{b+b^2}{a+a^4}$ & si $a=1$, & $b=10$; donc $z=6$. Ainsi $zy=12$. Or $z+zy$ ou $6+12$ est à $zz+zzyy$ ou $36+144$, comme a est à b, c'est à dire 18. 180 :: 1. 10. Voilà donc la question résoluë. On auroit trouvé d'autres nombres, si on avoit supposé à y une autre valeur que ce nombre 2.

PROBLEME TRENTE SEPTIE'ME.

Couper un quarré déterminé en deux quarrez parfaits.

Soit a le côté du quarré connu, & z du premier inconnu qu'on cherche, & x le côté du second. Ainsi voilà ce qu'on cherche $aa = zz + xx$. Il est évident que x & z sont chacun moindre que a. Prenons $a - zy$ ou $zy - a$ pour x. Ainsi au lieu de l'équation précedente on aura $aa = zz + aa + zzyy - 2azy$, qu'on peut réduire par les voies ordinaires à celle-cy, $2azy = zz + zzyy$. Divisant de part & d'autre par z vient $2ay = z + zyy$, ou $2ay = 1z + 1zyy$. Je divise l'un & l'autre membre par $1 + yy$ & j'ay $\frac{2ay}{1+yy} = z$. Donc supposant $y = 2$ & $a = 10$. Alors $2ay = 40$ & $1 + yy = 1 + 4$. Ainsi $z = \frac{2ay}{1+yy} = 8$ & $zy = 16$ & $zy - a = 6$. Donc $x = 6$ & $xx + zz$ ou $36 + 64 = 100 = aa$. Il faut toûjours supposer y plus grand que l'unité.

PROBLEME TRENTE-HUITIE'ME.

Diviser la somme de deux quarrez parfaits en deux autres parfaits.

Soit a le côté du plus grand des quarrez connus, & b celuy du plus petit. Le côté d'un des deux inconnus sera moindre nécessairement que le côté a, & l'autre par consequent plus grand que le petit côté b. Nommons donc $a - z$ celuy des côtez inconnus qui vaut moins que le côté con-

connu a; & nommant ensuite $yz - b$ l'autre côté qui doit surpasser b; les quarrez de ces deux côtez seront $aa - 2az + zz$ & $yyzz - 2byz + bb$. Et leur somme égalera la somme connuë $aa + bb$. Ce qui donnera une équation qui se réduit à celle-cy.

$$zz + yyzz = 2az + 2byz.$$

Divisant cette équation par z, vient

$$z + yyz = 2a + 2by.$$

Or $z + yyz = 1z + yyz1$. Divisant donc l'équation précedente par $1 + yy$, reste $z = \frac{2a + 2by}{1 + yy}$.

Ainsi si $a = 3$. $b = 2$, & qu'on suppose que $y = 2$. Donc $z = \frac{6 + 8}{1 + 4} = \frac{14}{5}$. On trouvera de cette maniere une résolution de la question qui en peut recevoir une infinité d'autres.

Equation & égalité c'est une même chose. On se sert plus souvent du premier nom; & on n'employe le second que lorsqu'il s'agit de Problêmes numeriques, qu'on distingue en Problêmes de double, de triple égalité, selon le nombre des égalitez qu'il faut trouver pour les résoudre. On définit ainsi ces égalitez. On nomme double égalité la comparaison de deux grandeurs qui renferment une même inconnuë, à deux divers quarrez qui sont inconnus. Comme s'il faut découvrir deux quarrez, dont l'un soit égal à une grandeur az, *& l'autre à une grandeur* bz, *ensorte que l'inconnuë* z *de la grandeur* az *soit la même* z *qui est inconnuë dans* bz. *Et s'il falloit découvrir de la même sorte deux quarrez, dont l'un fût égal à une grandeur* az + 6, *& l'autre à une autre grandeur* bz + d. *Mais s'il y avoit trois diverses*

grandeurs, dont chacune renfermât une même inconnuë, & qu'il fallût égaler chacune à un quarré; on diroit que c'est une triple égalité. Voilà un Problème de double égalité.

PROBLEME TRENTE-NEUVIE'ME.

Trouver une grandeur laquelle étant multipliée par deux grandeurs connuës, donne deux produits qui soient chacun un quarré parfait.

Ayant nommé a & b les deux grandeurs connuës, & z l'inconnuë qui les multiplie; le premier plan az sera égal à un quarré yy. Ainsi $az = yy$, divisant par a cette équation, viendra $z = \frac{yy}{a}$. Le second plan bz sera égal à un quarré xx. Ainsi $bz = xx$ & $z = \frac{xx}{b}$. Partant $\frac{xx}{b} = \frac{yy}{a}$, & multipliant de part & d'autre par b, on aura le quarré $xx = \frac{byy}{a}$, dont prenant la racine on aura $x = \frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. De sorte que pour trouver une résolution où les grandeurs soient toutes commensurables, il est nécessaire que les grandeurs connuës a & b soient telles que la grandeur $\sqrt{\frac{b}{a}}$ soit un quarré parfait, ou que les grandeurs a & b soient deux plans semblables. Soit $a = 6$. $b = 54$. Ainsi $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{9}$. Comme y est arbitraire, supposé que $y = 8$. Alors $x = 24$ & $z = \frac{32}{3}$ & az

ou

ou $6z = 64$ & bz ou $54z = 576$.

Ainsi on a trouvé ce que l'on cherchoit, c'est à dire z une grandeur qui multipliée par a & par b donne deux produits, qui sont deux quarrez parfaits. Vous pouvez voir que cette liberté qu'on a de choisir ou de supposer des grandeurs telles qu'on le veut, est ce qui rend souvent la résolution des Problêmes indéterminez trés-difficile, quand il s'agit de trouver des nombres ou quarrez, ou cubes. Cela demande un grand temps qui n'est pas entierement perdu, parce que cela peut exercer l'esprit; & qu'on y trouve un amusement agreable quand on aime les questions numeriques. Mais comme je ne dois pas grossir ces Elemens, je ne proposerai pas d'autres semblables Problêmes. J'ay tiré ces quatre derniers des Elemens du Pere Prestet de l'Oratoire, qui en propose un grand nombre. La résolution de ceux-ci donnera une entrée facile dans ce que cet Auteur a écrit touchant la résolution des Problêmes indéterminez.

CHAPITRE VII.

De la nature des Equations, de leurs differens degrez, & des préparations nécessaires pour les résoudre.

DAns les Problêmes qu'on vient de proposer on y a réduit toutes les grandeurs inconnuës à une seule, qu'on fait passer dans un des membres de l'équation, la délivrant de toute autre grandeur, de maniere que se trouvant égale à une ou plusieurs grandeurs connuës, elle n'est

plus inconnuë. Il y a des Problêmes plus composez, dans lesquels aprés toutes les réductions qui ont été expliquées; c'est le quarré ou le cube, ou le quarré de quarré de la lettre qui marque l'inconnuë, par exemple ou z^2, ou z^3, ou z^4, qui est dans l'un des membres de l'Equation, & dans l'autre, se trouve la grandeur inconnuë z mêlée avec d'autres grandeurs connuës; de sorte que le Problême n'est pas résolu; puisqu'on ne connoît pas la valeur précise de z. Quand cela arrive l'Equation n'est pas simple comme celles que nous avons vûës jusqu'à présent, elle est composée; & c'est de la nature des Equations composées que nous allons parler dans ce Chapitre, pour voir comment on les peut résoudre.

I.

Les Equations sont dites d'un ou de plusieurs degrez, selon le degré où la grandeur inconnuë est élevée.

Considerez ces Equations, où l'inconnuë est z.

$$z = b$$
$$z^2 = -az + bb$$
$$z^3 = +az^2 + bbz - c^3$$
$$z^4 = az^3 - c^3z + d^4$$

Dans la premiere de ces Equations, la grandeur inconnuë z est égale à b: Dans la seconde le quarré de z est égal au quarré de b moins a multiplié par z. Dans la troisiéme, le cube de z est égal à a multiplié par le quarré de z, plus le quarré de b multiplié par z moins le cube de c. Enfin dans la quatriéme, le quarré de quarré de z est égal à a multiplié par le cube de z moins

le

le cube de c multiplié par z, plus le quarré de quarré de d. &c. Ces Equations sont composées, & à la réserve de la premiere les autres ne font pas decouvrir la juste valeur de l'inconnuë. Or ces Equations reçoivent differens noms selon la puissance à laquelle la grandeur inconnuë est élevée. Une équation est du premier degré si l'inconnuë est une grandeur lineaire, ou si elle est dans le premier degré, comme est la premiere de ces équations $z = b$. Elle est du second degré, si cette inconnuë est un quarré; du troisiéme, si c'est un cube; du quatriéme, si l'inconnuë est élevée à la quatriéme puissance. Ainsi de toutes les autres équations qui prennent leur nom des degrez de l'inconnuë.

On reconnoîtra dans la suite que pour mieux expliquer la nature des Equations, & pour les résoudre il est bon de faire passer dans le premier membre tout ce qui est dans le second, égalant toute l'équation à zero; ce qui se fait en joignant les deux membres par le signe $+$ ou $-$ selon que l'inconnue est une grandeur positive ou négative; & mettant zero dans le second membre aprés le signe de l'égalité. Il est évident que si $z = b$, ôtant b de z il ne doit rien rester; c'est à dire qu'en retranchant d'une grandeur sa valeur entiere, on l'égale à zero. Si $z = b$ donc $z - b = 0$.

Lorsqu'une grandeur est négative, elle est moins que rien. Ainsi si z est négatif, & qu'il s'en faille b qu'il ne soit égal à rien: que $z = 0 - b$, alors pour faire passer b dans le premier membre, il faut le joindre avec $+$. car dans ce cas, afin que z soit égal à zero, il est évident qu'il faut lui ajoûter b, par consequent $z + b = 0$. Voilà donc la regle generale, si la gran-

deur inconnuë qui eſt ſeule dans le premier membre eſt poſitive, le premier membre moins le ſecond eſt égal à zero. Si cette inconnuë eſt négative, le premier membre plus le ſecond eſt égal à zero. Au reſte quand on fait paſſer le ſecond membre dans le premier, on change les ſignes c'eſt à dire le $+$ en $-$ & le $-$ en $+$. Ainſi ſi $z^2 = -pz + q$, on écrit $z^2 + pz - q = 0$. Si $z^2 = +pz - q$, on écrit $z^2 - pz + q = 0$.

II.

Des differens termes d'une Equation. Qu'appelle-t-on terme d'une Equation?

Aprés qu'on a fait paſſer d'un côté toutes les grandeurs d'une Equation, qu'ainſi le premier membre eſt égal à zero, on voit que dans le premier lieu de ce premier membre la grandeur inconnuë y eſt dans le degré qui donne le nom à l'équation; que c'eſt ou une quatriéme, ou une troiſiéme, ou une ſeconde puiſſance, & qu'elle deſcend enſuite; comme icy dans cette Equation du quatriéme degré.

$$\underset{A}{x^4} \underset{B}{- 4x^3} \underset{C}{- 19x^2} \underset{D}{+ 106x} \underset{E}{- 120} = 0$$

Faites attention aux parties du premier membre de cette Equation. L'inconnuë x qui eſt dans la premiere partie A, y eſt élevée juſques au quatriéme degré, & elle deſcend dans les autres parties; car dans la ſeconde partie B, elle eſt abaiſſée au troiſiéme degré. En C elle eſt deſcendue au ſecond, & en D juſques au premier.

Ces parties ſont ce qu'on appelle les termes d'une Equation; qui ſe nomment premiers, ſeconds,

conds, troisiémes, selon que l'inconnuë descend, & a moins de dimensions. La derniere partie E, où x la grandeur inconnuë ne se trouve point, se nomme le dernier terme. Le premier c'est celui dans lequel l'inconnuë est dans le degré qui donne le nom à l'équation. x^4 qui est dans la premiere place A, est le premier terme & 120 qui est dans la derniere place E, est le dernier terme.

On ne compte que pour un terme, deux ou plusieurs grandeurs qui sont mêlées avec le même degré de l'inconnuë, ou dans lequel deux ou plusieurs grandeurs connuës se trouvent avec le même degré de l'inconnuë. Ainsi $bx + cx$ ou $bx - cx$ ne peuvent faire qu'un terme, car il n'y a qu'à corriger leur expression, prenant par exemple d qui soit égal à $b + c$; ainsi au lieu de $bx + cx$, écrivant dx. Si on ne fait pas cette réduction, il faut écrire dans une même colomne ou l'un sous l'autre tout ce qui ne peut faire qu'un terme. Ainsi avant la réduction il faudroit écrire $\begin{array}{l} +bx \\ +cx. \end{array}$

Ces réductions sont aisées. Considerons icy en passant comment on peut changer une expression dans une autre, un quarré dans un plan, un plan dans un quarré. Si au lieu de aa on veut avoir un plan égal, ayant pris à discretion une grandeur plus petite ou plus grande que a; il faut en trouver une seconde, telle qu'entre ces deux, a soit un moyen proportionnel. Si c'est m & n, & qu'ainsi $\div m. a. n.$ il est evident que $mn = aa$. Si on vouloit donc changer le plan mn dans un quarré de même valeur, il faudroit trouver un moyen proportionnel entre m & n.

Les termes d'une Equation sont complexes ou in-

incomplexes, selon que leur expression est simple ou composée. Un terme comme celuy-cy $+bx+cx$ qui n'en fait qu'un, est complexe. Si on le changeoit, & qu'ayant pris d égal à $b+c$, on fit $dx = bx+cx$, ce terme dx seroit incomplexe. Autant qu'on le peut il faut faire ensorte que les termes d'une Equation deviennent incomplexes s'ils ne le sont pas. Ainsi dans cette équation dont le dernier terme est complexe.

$$xx - ax + bb - cc = 0$$

Il faut pour le rendre incomplexe supposer $bb - cc = dd$, & au lieu de $bb - cc$, écrire dd qui est un terme incomplexe. De même dans cette Equation.

$$xx = \frac{aax + ccd}{a - b}$$

Ou dans celle-cy qui est la même chose,

$$xx = \frac{aax}{a-b} + \frac{ccd}{a-b}$$

Divisant aa par $a - b$ qui sont des grandeurs connuës, & nommant g le quotient de cette division. Divisant de même ccd par $a - b$, & nommant hh le quotient de cette division, j'auray cette expression $xx = gx + hh$, où le second & le dernier terme sont incomplexes. C'est par le moyens de ces réductions & corrections qu'on réduit les Equations de chaque degré à de certaines formules.

La grandeur inconnuë se trouve seule dans le premier terme; comme celle qui est connuë se trouve toute seule dans le dernier. Dans les autres termes on appelle grandeurs *coeficientes*, celles qui se trouvent mêlées avec les grandeurs qui composent ces termes. Il est bon de se souvenir icy que lors qu'on éleve une grandeur com-

plexe

plexe ou un Binome, à quelque degré qu'on l'éleve, tous les termes dont elle sera composée sont en proportion aprés qu'on en a ôté les nombres coefficiens ; car par exemple le produit de $a + b$ par $a + b$ est $aa + 2ab + bb$; ôtez ce nombre 2 qui est dans le second membre, & qui est coefficient, , alors $\div\div aa. ab. bb.$

Il y a des Equations dont tous les termes ne paroissent pas, comme en celle-cy, qui n'a point de second terme.

$$x^2 \ldots bb = 0.$$

Cela arrive lorsque la même valeur se trouve avec des signes contraires, qui se détruisent ; ainsi on la supprime en corrigeant les expressions. Par exemple dans celle-cy, dont les racines sont $x - a$ & $x + a$; c'est à dire qui est faite de la multiplication de $x - a$ par $x + a$.

$$xx + ax - ax + aa = 0.$$

Pour corriger l'expression je supprime $+ ax - ax$, qui ont des signes qui se détruisent, aprés quoy il n'y a plus de second terme.

$$xx \ldots + aa = 0.$$

III.

Des Racines d'une Equation.

On nomme racines d'une Equation les valeurs de l'inconnue, par la multiplication desquelles une Equation a été composée, Ainsi si on suppose $x = 2$ ou $x - 2 = 0$ & $x = 3$ ou $x - 3 = 0$, & qu'on multiplie $x - 2$ par $x - 3$, on aura cette Equation $xx - \frac{2x}{3x} + 6 = 0$. qui étant corrigée deviendra

$$xx - 5x + 6 = 0 \text{ ou } xx = 5x - 6.$$

Les

Les racines de cette Equation sont $x - 2$ & $x - 3$. Que si derechef on suppose $x - 4 = 0$, & qu'on multiplie la précedente équation par cette racine on aura cette équation

$$x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$$

dont les trois racines sont 2. 3. 4. qui sont les differentes valeurs. Ce n'est pas que dans la résolution d'un Problême, on puisse supposer qu'une même grandeur ait differentes valeurs; mais c'est qu'on appelle racines d'une Equation les grandeurs par la multiplication desquelles elle peut être formée; & que celle par exemple qu'on vient de proposer, se peut concevoir comme étant formée de ces trois racines $x - 2 = 0$. $x - 3 = 0$. $x - 4 = 0$.

Ces racines sont nommées vraies ou fausses, selon qu'elles expriment des grandeurs réelles & positives, ou des grandeurs négatives, c'est à dire moindres que zero.

Le degré où l'inconnuë est élevée fait connoître combien l'Equation a de racines; & les signes $+$ & $-$ font appercevoir quand elles sont vraies ou fausses.

Dans une Equation qui a plusieurs racines, comme dans celle cy dont les racines

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

sont 2. 3. 4. qui sont vrayes ou politives, la grandeur connuë 9 qui est au second terme $9x^2$ est égale à la somme de toutes ces racines. $2 + 3 + 4 = 9$. La grandeur connuë du troisiéme terme $26x$ est égale à la somme des produits de ces racines prises deux à deux, c'est à dire aux produits. 1°. de 2 & de 3, ce qui fait 6. 2°. de 2 & de 4 qui fait 8. 3°. de 3 & de 4, c'est à dire à 12. Ces produits font 26. La grandeur du dernier terme qui est entierement connuë est égale à 6 produit

de

de la premiere & de la seconde, multiplié par la troisiéme 4, ce qui fait 24. Cela se reconnoît en composant cette équation, c'est à dire en multipliant ses racines.

Il est évident qu'une Equation qui contient plusieurs racines peut être divisée par un binome composé de l'inconnuë moins la valeur de l'une des racines vraies, laquelle que ce soit, ou plus la valeur de l'une des fausses. Au moyen de quoy on diminue d'autant ses dimensions, & réciproquement si la somme d'une équation ne peut être divisée par un binome composé de l'inconnuë $+$ ou $-$ quelque autre grandeur; c'est une marque que cette autre grandeur n'est point la valeur d'aucune de ses racines; comme cette équation peut être divisée par $x - 2$

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

& par $x - 3$ & par $x - 4$ & par $x + 5$; mais non point par $x +$ ou $-$ aucune autre grandeur; ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4 & 5.

Les racines d'une équation sont, comme on vient de le dire, ou vraies ou fausses. Elles sont encore ou réelles ou imaginaires. C'est ce qu'il faut expliquer; rendre raison pourquoy il y a des racines imaginaires, & montrer qu'elles sont d'usage.

Nous avons vû & démontré que *moins en moins* donne *plus*; ainsi il ne se peut pas faire que la racine quarrée de $-aa$ soit une grandeur réelle; car le produit de $-a$ par $-a$ c'est $+aa$, comme on l'a vû Liv. I. n. 36. Ainsi $\sqrt{-aa}$ c'est une racine imaginaire, c'est à dire qu'elle n'est point réelle puisque $-aa$ ne peut être le produit de $-a$. Car $-a$ par $-a$ fait $+aa$. Cependant il y a des occasions

ſions où l'on rencontre de ces racines imaginaires dont on peut faire uſage comme on le fait des quatriémes, cinquiémes, ſixiémes puiſſances, quoy qu'il n'y ait point de puiſſance dans la nature au-deſſus de la troiſiéme, qui eſt le cube.

IV.

On peut augmenter & diminuer, multiplier & diviſer les racines d'une Equation ſans les connoître.

Sans connoître la valeur des racines d'une équation, on les peut augmenter ou diminuer de quelque grandeur connuë. Il ne faut pour cela qu'au lieu du terme inconnu en ſuppoſer un autre qui ſoit plus ou moins grand de cette même grandeur connuë, & le ſubſtituer par tout en la place du premier. Comme ſi on veut augmenter de 3 la racine de cette Equation.

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

Il faut prendre y au lieu de x, & penſer que cette grandeur y eſt plus grande que x de 3, en ſorte que $y - 3$ eſt égal à x, & au lieu de x^2 il faut mettre le quarré de $y - 3$ qui eſt $y^2 - 6y + 9$, & au lieu de x^3 il faut mettre ſon cube qui eſt $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$, & enfin au lieu de x^4 il faut mettre ſon quarré de quarré qui eſt $y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$. Et ainſi décrivant la ſomme précedente en ſubſtituant par tout y au lieu de x on a l'Equation ſuivante, laquelle ſe trouve corrigée au-deſſous de la ligne que vous voyez.

$y^4 -$

$$\begin{array}{rrrrr} y^4 - 12y^3 & + 54y^2 & - 108y & + 81 \\ + 4y^3 & - 36y^2 & + 108y & - 108 \\ & - 19y^2 & + 114y & - 171 \\ & & - 109y & + 318 \\ & & & - 120 \end{array}$$

$$y^4 - 8y^3 - 1y^2 + 8y = 0$$

Ou bien $y3 - 8y^2 - 1y + 8 = 0$ où la racine vraie qui étoit 5 est maintenant 8 à cause du nombre 3 qui luy est ajoûté.

Que si au contraire on veut diminuer de 3 la racine de cette même Equation, il faut faire $y + 3 = x$ & $y^2 + 6y + 9 = x^2$, & ainsi des autres, de façon qu'au lieu de

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

on met

$$\begin{array}{rrrrr} y^4 + 12y^3 & + 54y^2 & + 108y & + 81 \\ + 4y^3 & + 36y^2 & + 108y & + 108 \\ & - 19y^2 & - 114y & - 171 \\ & & - 106y & - 318 \\ & & & - 120 \end{array}$$

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0$$

En augmentant les vraies racines d'une Equation, on diminuë les fausses de la même grandeur, ce qui est évident, & au contraire en diminuant les vraies, on augmente les fausses. Je copie Descartes, mais je passe ce que je ne crois pas si nécessaire ici.

On peut de même sans connoître la valeur des racines d'une Equation, les multiplier, ou diviser toutes, par telle grandeur connuë qu'on veut; ce qui se fait en supposant que la grandeur inconnuë étant multipliée ou divisée par

celle

celle qui doit multiplier ou diviser les racines, est égale à quelqu'autre. Ensuite multipliant ou divisant la grandeur connuë du second terme par celle qui doit multiplier ou diviser les racines, & par son quarré celle du troisiéme, & par son cube celle du quatriéme, & ainsi jusqu'au dernier. Ce qui peut servir pour réduire à des nombres entiers & rationaux les fractions ou souvent aussi les nombres sourds, qui se trouvent dans les termes des Equations. Comme si on a cette équation, & qu'on veüille en avoir

$$x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0$$

une autre en sa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux; il faut supposer $y = x\sqrt{3}$, & multiplier par $\sqrt{3}$ la grandeur connuë du second terme qui est aussi $\sqrt{3}$. & par son quarré qui est 3, celle du troisieme terme qui est $\frac{26}{27}$, & par son cube qui est $3\sqrt{3}$ celle du dernier, qui est $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, ce qui fait

$$y - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0$$

Aprés cela si on en veut avoir encore une autre en la place de celle-cy, dont les grandeurs connuës ne s'expriment que par des nombres entiers, il faut supposer que $z = 3y$, & multipliant 3 par 3, $\frac{26}{9}$ par 9 & $\frac{8}{9}$ par 27 on trouve

$$z^3 - 9z_2 + 26z - 24 = 0$$

où les racines étant 2. 3 & 4, on connoît de là que celles de l'autre d'auparavant étoient $\frac{2}{3}$, 1 & 4.

$\frac{4}{3}$ & que celles de la premiere étoient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

V.

Regle generale pour faire évanoüir le second terme d'une Equation.

Pour faire évanoüir le second terme d'une Equation proposée, il faut considerer que $+$ une grandeur $-$ cette même grandeur $= 0$. Or si l'on peut substituer quelques grandeurs qui fassent que le second terme de l'Equation proposée se trouve affecté du signe $+$ & du signe $-$, il est évident qu'il ne s'y trouvera plus. Pour cela il faut ajouter ou ôter selon la diversité des signes $+$ & $-$, des racines la grandeur connuë qui se trouve au second terme étant divisée par l'exposant de la puissance du premier : & substituant cette valeur dans l'équation autant que faire se pourra, le second terme aprés les operations faites ne s'y trouvera plus. Les exemples éclairciront cette regle.

Exemple pour le second Degré.

Soit cette Equation dont il faille ôter le second terme. $xx - px + q = 0$. L'on prendra selon la Regle $x - \frac{1}{2}p = y$; dont $x = y + \frac{1}{2}p$, & $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$, & $-px = -py - \frac{1}{2}pp$; L'on aura donc $xx - px + q = yy + py + \frac{1}{4}pp + q - py - \frac{1}{2}pp = 0$, & ôtant les termes qui se détruisent, il viendra enfin $yy * - \frac{1}{4}pp + q = 0$, où l'on voit que le second terme est évanoüi.

Si

Si l'Equation proposée eut eu le signe $+$ au second terme, on auroit pris $x + \frac{1}{2}p = y$, & l'on auroit trouvé la même égalité resultante n'ayant de difference que dans les signes.

Exemple pour le troisiéme Degré.

Soit cette Equation $x^3 - pxx + qx + r = 0$, dont on veut faire évanoüir le second terme; comme l'exposant du premier est 3, il faut selon la Regle prendre $x - \frac{1}{3}p = y$, donc $x = y + \frac{1}{3}p$; & $x^3 = y^3 + pyy + \frac{1}{3}ppy + \frac{1}{27}p^3$; $-pxx = -pyy - \frac{2}{3}ppy - \frac{1}{9}p^3$ & $qx = qy + \frac{1}{3}pq$. L'on aura donc

$$x^3 - pxx + qx + r = y^3 \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ pyy + \frac{1}{3}ppy = \frac{1}{27}p^3 + qy + \frac{1}{3}pq + r$$
$$- pyy - \frac{2}{3}ppy - \frac{1}{9}p^3 \qquad = 0.$$

Et effaçant les termes qui se détruisent, il viendra enfin cette équation, qui n'aura plus de second terme $y^3 * - \frac{1}{3}ppy - \frac{2}{27}p^3 + qy + \frac{1}{3}pq + r = 0$

Si l'égalité avoit eu le signe plus au 2e terme, l'on auroit supposé $x + \frac{1}{3}p = y$.

Il en est de même pour le quatriéme degré, n'y ayant de difficulté que la longueur du calcul.

Cette Regle est la même que celle que M. Descartes donne dans sa Geometrie lorsqu'il dit que pour faire évanoüir le second terme d'une équation, il faut retrancher des vraies racines la quantité connuë de ce second terme divisée par le nombre des dimensions du premier, si l'un de ces deux termes ayant le signe $+$ l'au-

tre a le ſigne —; ou bien en l'augmentant de la même grandeur s'ils ont tous deux le ſigne + ou tous deux le ſigne —. C'eſt ce que nous avons fait, car pour les Equations du ſecond degré, nous avons pris la moitié de p, c'eſt à dire que nous avons diviſé p par 2, qui marquoit les dimenſions de l'inconnuë x^2. Le nombre 3 marque les dimenſions du troiſiéme degré. Auſſi nous avons pris le tiers de p, ce qui eſt diviſer p par 3. Pour ôter le ſecond terme de cette Equation de quatre degrez.

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0$$

Ayant diviſé 16 par 4 à cauſe des quatre dimenſions du premier terme y^4 Il vient derechef 4; c'eſt pourquoy je fais $z - 4 = y$, & j'écris

$$\begin{array}{rrrrr}
z^4 - 16z^3 & + 96z^2 & - 256z & + 256 \\
+ 16z^3 & - 192z^2 & + 768z & - 1024 \\
 & + 71z^2 & - 568z & - 1136 \\
 & & - 4z & + 16 \\
 & & & - 420 \\
\hline
z^4 & - 25z^2 & - 60z & - 36 = 0
\end{array}$$

Le ſecond terme eſt évanoüi, ou il ne doit plus paroître, parce que $- 16z^3 + 16z^3 = 0$.

Ainſi pour faire évanoüir le ſecond terme d'une Equation du quatriéme degré, il faut augmenter cette Equation de — le quart de la grandeur connuë du ſecond terme (ou du nombre coefficient, comme nous avons vû que ce mot ſe prenoit) ſi ce ſecond terme a le ſigne +; ou + le même quart, ſi ce terme a le ſigne —.

CHAPITRE VIII.

De la resolution des Equations, ou des moyens de résoudre les Problêmes du premier, du second, du troisiéme, & du quatriéme dégré.

LEs Problêmes prennent leur nom des degrez des Equations que l'on trouve en les examinant. On réduit, comme on l'a vû à un certain degré les Equations. C'est de ce degré qu'un Problême prend son nom. Si l'Equation n'a qu'un degré, il se nomme *lineaire* ou d'un degré. Si l'Equation est du second degré, le Problême s'appelle *plan* ou du second degré. Si l'Equation a trois degrez le Problême est *solide* ou de trois degrés. Enfin on dit qu'il est du quatriéme degré *plus que solide* si l'Equation a quatre degrez. Les Problêmes lineaires ou du premier se résolvent comme nous avons vû. Quand l'inconnuë se trouve seule dans l'un des membres, & que l'autre n'a que des grandeurs connuës, la valeur de cette inconnuë ne peut plus être inconnuë. Tous les Problêmes du Chapitre sixiéme sont du premier degré. Parlons des autres Problêmes.

I.

Les termes d'une Equation de deux ou de plusieurs degrez se résolvent en proportion.

Les Equations d'un même degré se réduisent à un certain nombre de formules; & toutes ces formules

formules se peuvent réduire dans une proportion qui fait connoître de quoy il s'agit pour résoudre un Problême. C'est ce qu'il faut considerer. On appelle Equation pure celle où l'inconnuë n'est point mêlée avec les inconnuës, comme celle-cy $xx - ab = 0$. Quand cela n'est pas ainsi on dit qu'elle est affectée. Cette Equation pure $xx - ab = 0$ se change en cette proportion $\div\div a. x : b.$ car $ab = xx$. Ainsi pour résoudre cette Equation il s'agit de trouver entre deux grandeurs données une moyenne proportionnelle, qui sera la racine de cette Equation ou la valeur de la grandeur inconnuë x. Cette Equation affectée $xx - ax - bc = 0$ se résout en cette proportion $x. b :: c. x - a$; ce qui fait connoître que pour résoudre entierement l'Equation, il faut trouver quatre grandeurs proportionnelles, dont les deux moyennes soient données, aussi bien que l'excés de la premiere sur la quatriéme. Or toutes les questions qu'on peut faire sur la maniere de trouver ces proportionnelles se résolvent aisément, exprimant deux grandeurs inconnuës dont la difference est connuë, en la maniere qu'on l'a expliqué, s̃ n. 23. Soit p. 353.
$\div\div y. b. z$, & que la difference de y & de z soit 8. Il faut supposer que x est la moitié de $y + z$. Ainsi si y est plus petit que z, alors $x - 4 = y$ & $x + 4 = z$. Partant $\div\div y\ b\ z$ & $\div\div x - 4. b. x + 4$ sont une même chose. Le produit des extrêmes est égal à celuy des moyens, ainsi $xx + 4x - 4x - 16 = bb$; où vous voyez que les signes contraires se faisant évanouir l'un l'autre, l'Equation devient $xx - 16 = bb$, ou $xx = bb + 16$, qui est une Equation pure, & partant facile à résoudre.

Toutes les Equations de trois, de quatre, & de plusieurs autres degrez, soit qu'elles soient pures, soit qu'elles soient affectées se résolvent en proportion; ce qui ne se pouvant expliquer en peu de paroles, je proposeray une voie plus courte pour résoudre les Equations. De quelque degré que soit une Equation quand elle est pure elle se résout aisément. Pour résoudre celle-cy $x^2 = ab$, il ne s'agit que de tirer la racine quarrée de ab. Si ab n'est pas un nombre quarré, on ne peut pas exprimer en nombre la valeur de x. Pour résoudre cette Equation $x^3 = aab$ qui est pure, il faut tirer la racine cube de aab; ainsi des autres degrez ou puissances. Il ne s'agit donc que de la résolution des Equations affectées.

I I.

Des differentes formules des Equations du second degré, & de leur proprieté.

Les Equations d'un même degré se réduisent à un certain nombre de formules qui sont differentes, parce que leurs racines peuvent avoir differens signes. Les Equations du second degré ont ces quatre formules.

$$z^2 = pz + q \qquad z^2 - pz + q = 0$$
$$z^2 = pz - q \qquad z^2 - pz - q = 0$$
$$z^2 = -pz + q \qquad z^2 + pz + q = 0$$
$$z^2 = -pz - q \qquad z^2 + pz - q = 0$$

La raison de ces quatre formules, c'est que si la grandeur inconnuë est négative, ses racines seront ou $-p-q$ ou $-p+q$, ce qui fait deux cas. Si elle est positive cela fait encore deux autres

autres cas ; car ces racines seront pareillement ou $+p+q$ ou $+p-q$. Je suppose dans la suite du Chapitre que la grandeur connuë du second terme est p, & que celle du dernier terme qui est toûjours connu soit q. Les deux Theorêmes suivans contiennent le fondement de ce que l'on dira touchant la résolution des Equations de deux degrez.

THEOREME PREMIER.

Si $z = p + x$ *ou* $z = p - x$. *Le quarré* zz *de la grandeur entiere* z *est égal au plan fait de la partie* p, *& de la toute* z, *moins ou plus le plan de* zx.

En multipliant $z = p + x$ par z vient l'Equation $zz = pz + xz$; comme en multipliant $z = p - x$ par z vient $zz = pz - xz$, ce qui fait voir aux yeux la verité de ce Theoreme.

COROLLAIRE.

pz *étant le second terme, le plan* xz *est la valeur du dernier terme ; ainsi* $xz = q$.

Nous supposons que $z^2 = pz + q$. Par consequent puisque selon ce Theorême $z^2 = pz + xz$, il faut que $xz = q$.

THEOREME SECOND.

z *est égal à la moitié de* p. *plus ou moins la racine d'un quarré fait de* $\frac{1}{4}pp + q$.

Soit m moitié de p, donc $2m = p$. & $mm =$

$\frac{1}{4}pp$. Il faut donc prouver que $z = m \pm \sqrt{mm \pm q}$. Nous supposons $z = p \pm x$ ou $z = m \pm m \pm x$; donc $z - m$ est égal à la racine du quarré de $m \pm x$ qui est $mm \pm 2mx \pm xx$. Ainsi $\sqrt{mm \pm 2mx \pm xx} = m \pm x$. Or puisque $z = p \pm x$ ou $z = 2m \pm x$. Donc $2mx \pm xx = xz$. Mais par le Corollaire précedent $xz = q$. Donc $2mx \pm xx = q$. Partant $z = m \pm \sqrt{mm \pm q}$; ou $z = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp \pm q}$, qui est ce qu'il falloit prouver.

III.

Résolution des Equations du second degré.

Premier Cas.

Lorsque l'Equation est incomplete.

On dit qu'une Equation est complete lorsque tous les termes paroissent; si quelqu'un ou plusieurs sont évanoüis, qu'elle est incomplete. Une Equation du second degré incomplete se réduit à ces deux formules $xx \ast + q = 0$ & $xx \ast - q = 0$. En ôtant de la premiere formule, de part & d'autre q. vient $xx = -q$. cette formule montre que x est une grandeur négative. Prenant la racine quarrée de l'un & l'autre membre on aura $x = \pm\sqrt{-q}$. La raison pour laquelle on met $+$ & $-$ devant le signe radical, en cette formule, c'est que le quarré $-q$ se peut faire

faire également de cette racine $+\sqrt{\ }-q$ multipliée par elle-même, ou de cette racine $-\sqrt{\ }-q$, multipliée aussi par elle-même.

Dans l'autre formule $xx * \ -q = 0$, la grandeur inconnuë x est positive. J'ajoûte de part & d'autre q, ce qui donne cette Equation $xx = q$; d'où ayant tiré les racines quarrées, la question sera résoluë $x = \sqrt{q}$. Si q n'est pas un nombre quarré, on ne pourra pas exprimer en nombre la juste valeur de x.

Second Cas.

Lorsque l'Equation est complete.

On pourroit résoudre cette Equation comme dans le premier Cas; parce qu'il est toûjours aisé de la rendre incomplete, en faisant évanoüir son second terme, comme on l'a enseigné cy-dessus.

Nous avons déja dit que les Equations du second genre qui ont tous leurs termes se réduisent à ces quatre formules.

$$z^2 - pz + q = 0 \qquad z^2 = pz + q$$
$$z^2 - pz - q = 0 \qquad z^2 = pz - q$$
$$z^2 + pz + q = 0 \qquad z^2 = -pz + q$$
$$z^2 + pz - q = 0 \qquad z^2 = -pz - q$$

Ces quatre formules se peuvent résoudre par le Theorême 2 cy-dessus. Voyons comme on le peut faire sans le secours de ce Throrême. Je transforme les quatre formules en celles-cy.

$$z^2 - pz = -q$$
$$z^2 - pz = +q$$
$$z^2 + pz = -q$$
$$z^2 + pz = +q.$$

J'ajoûte de part & d'autre $\frac{1}{4}pp$. c'est à dire le quart du quarré de la grandeur connuë du second terme ; & j'ay ces Equations.

$$z^2 - pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q$$

$$z^2 - pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q$$

$$z^2 + pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q$$

$$z^2 + pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q.$$

Aprés cela le premier membre est une puissance parfaite dont il est facile de tirer la racine quarrée. Celle de $z^2 + pz + \frac{1}{4}pp$ est $z + \frac{1}{2}p$. Ainsi en faisant l'extraction des autres fomules. On les réduit à celles-cy.

$$z - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$$

$$z - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}pp + q}$$

$$z + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q}$$

$$z + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}pp + q}.$$

Remarquez ces deux signes $\pm$ qu'on met devant le signe radical, pour faire connoître que z a deux valeurs, selon qu'on prend cette grandeur positivement ou négativement.

Enfin ayant transporté $\frac{1}{2}p$ de l'autre côté afin

fin que l'inconnuë se trouve seule, on a ces dernieres formules qui sont la résolution des précedentes.

$$z = +\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q}$$

$$z = +\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + q}$$

$$z = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q}$$

$$z = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + q}$$

C'est ce que nous avons démontré dans le second Theorême cy-dessus.

PROBLEMES DU SECOND DEGRE'.

PREMIER PROBLEME.

Le premier terme a *d'une progression Arithmetique étant donné avec* b, *la difference qui regne dans la progression, & d somme de tous ses termes, trouver son dernier terme, & le nombre de tous les termes.*

Soit x le nombre de tous les termes. Selon ce qui a été démontré Liv. III. n. 28, le dernier terme d'une progression contient le premier terme a, plus autant de fois la difference b qu'il y a de termes moins une fois cette difference. Ainsi le dernier terme sera $xb - b + a$, ce dernier terme avec le premier a, c'est-à-dire $xb - b + 2a$ multiplié par x nombre des termes, est égal au double de d somme de la progression. Ainsi $xxb - bx + 2ax = 2d$. Pour corriger cette Equation, je prens $c = -b + 2a$. Ainsi j'ay $xxb + cx = 2d$. Je divise le tout par b, & vient

$xx + \frac{cx}{b} = \frac{2d}{b}$. Comme b est connu, si c'est par exemple 3 je prens p tiers de c, & alors $px = \frac{cx}{b}$ & comme $\frac{2d}{b}$ est tout connu je le fais égal à q. ainsi j'ay cette Equation $xx + px = q$. ou $xx + px - q = 0$. qui est une Equation du second degré qui vient d'être résoluë.

SECOND PROBLEME.

Deux Marchands ont mis en societé 12 pistoles, & ils en ont gagné 34. Le premier a eu sept pistoles, tant pour mise que pour gain pour deux mois; & le second en a pris 39, tant pour sa mise que pour son gain pour cinq mois. On demande la mise & le gain d'un chacun en particulier.

J'appelle a la mise de ces deux Marchands; qui est 12 pistoles. Donc si la mise du premier est x, celle du second est $a - x$.

Je nomme b la mise & gain du premier, qui est 7 pistoles; ainsi $b - x$ est le gain du premier.

Je nomme c la mise & gain du second, qui est 39 pistoles; ainsi puis que sa mise est $a - x$; donc $c - a + x$ sera son gain.

Comme x mise du premier, multipliée par son temps qui est 2 ce qui fait $2x$, est à son gain, qui est $b - x$; ainsi $a - x$ mise du second multipliée par son temps qui est 5, ce qui fait $5a - 5x$, est à son gain qui est, comme nous venons de le dire, $c - a + x$, c'est à dire que $2x.b - x :: 5a - 5x.c - a + x$. Le produit des extrêmes est égal à celui des moyens; donc $2xc - 2ax + 2xx = 5ab - 5ax = 5bx + 5xx$.

J'ajoûte

J'ajoûte de part & d'autre $2ax$, & je retranche en même-temps $2xx$, & j'ay $2xc = 5ab - 3ax - 5bx + 3xx$. J'ajoûte de part & d'autre $3ax + 5bx$, ce qui me donne $2xc + 3ax + 5bx = 5ab + 3xx$.

Je prens $d = 2c + 3a + 5b$; ainsi $dx = 5ab + 3xx$. Je suppose encore $f = 5ab$; & qu'ainsi $dx = f + 3xx$. Je retranche f de part & d'autre, ce qui me donne $dx - f = 3xx$. Enfin au lieu de d je prens $3p$ que je luy suppose égal, comme aussi $3q$ à $\frac{1}{3}f$ ainsi $px - q = xx$. Ce qui est une Equation du second degré qui a été résoluë.

IV.

Résolution des Equations du troisiéme degré.

Lorsque les Equations du troisiéme degré n'ont ni second ni troisiéme terme, c'est à dire qu'elles ne sont point affectées, elles n'ont aucune difficulté. Par exemple cette Equation étant pure $z^3 = q$ il est evident que $z = \sqrt[3]{q}$; & qu'ainsi pour trouver la valeur de z il n'est question que de tirer la racine cube de q. Quand une Equation du troisiéme degré a tous ses termes; il faut faire évanoüir le second, comme on l'a enseigné cy dessus. Or les Equations de ce degré qui n'ont point de seconds termes se réduisent à ces quatre formules.

$$z^3 + pz + q = 0$$
$$z^3 - pz + q = 0$$
$$z^3 + pz - q = 0$$
$$z^3 - pz - q = 0$$

On résout ces quatre Cas par cette méthode que Monsieur Varignon propose dans les Mémoires

moires de l'Academie des Sciences. Le 5 Aouſt 1699 à la page 191. Edit. de Holl.

Soit $z^3 + pz + q = 0$ l'Equation à réſoudre qui eſt du troiſiéme degré, & qui n'a point de ſecond terme. Prenez $z = x - y$, (il faudroit prendre $z = x + y$, ſi l'Equation avoit $-pz$) & vous aurez le cube de z égal à celuy de $x - y$. Ainſi $z^3 = x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$ Or $-3xxy + 3xyy = -3xy \times x - y$. Car écrivant au long le produit de $-3xy$ par $x - y$, il vient $-3xxy + 3xyy$. Mais puiſque $x - y = z$, on a $-3xy \times x - y = -3xy \times z = -3xyz$. Maintenant dans l'Equation précedente $z^3 = x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$, à la place de $-3xxy + 3xyy$ mettez la valeur $-3xyz$, & l'Equation ſera reduite à celle-cy $z^3 = x^3 - 3xyz - y^3$, & en tranſpoſant tout d'un côté $z^3 + 3xyz \begin{smallmatrix} +y^3 \\ -x^3 \end{smallmatrix} = 0$.

Si vous comparez terme à terme cette derniere Equation avec la propoſée $z^3 + pz + q = 0$, la comparaiſon du ſecond terme vous donnera $3xyz = pz$, & diviſant par z vous aurez $3xy = p$, & diviſant encore par $3x$, vous aurez $y = \frac{p}{3x}$; & par conſequent $y^3 = \frac{p^3}{27x^3}$. Or la comparaiſon du troiſiéme terme vous donnera $y^3 - x^3 = q$, ou mettant au lieu de y^3 ſa valeur $\frac{p^3}{27x^3}$ il viendra $\frac{p^3}{27x^3} - x^3 = q$ & multipliant par x^3, $\frac{1}{27}p^3 - x^6 = qx^3$, & tranſpoſant tout d'un côté vous aurez $x^6 + qx^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0$. Or $x^6 = x^3 \times x^3$ & $qx^3 = q \times x^3$. Ainſi on peut regarder

garder x^6 comme un quarré dont x^3 est la racine & qx^3. comme un plan dont q & x^3 sont les racines; ainsi $x^6 + qx^3 - \frac{1}{27}p^3$. comme une Equation du second degré; par consequent $x^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, selon ce qu'on a demontré en parlant de la résolution du second degré. Ainsi ce que nous avons dit éclaircit la résolution du troisiéme, & nous découvre le fondement des regles; car par la même voie on trouve la valeur de y, sçavoir que $y^6 + qy^3$ est égal à $\frac{1}{27}p^3$. Partant comme $q = y^3 - x^3$ ou $q + x^3 = y^3$. On pourroit aussi se servir de $y = \frac{p}{3x}$ c'est pour arriver d'abord aux formules ordinaires que l'on commence par icy. L'on aura de même $y^3 = q + x^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$.

Donc $z(x - y) = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$ $- \sqrt{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. ce qu'il falloit trouver.

On peut voir dans les Memoires de l'Academie Royale des Sciences de l'année 1699 page 190. l'Ecrit entier que Monsieur Varignon y a fait inserer, pour trouver ce que donneront encore les trois autres Cas de ce troisiéme degré sans second terme. La forme du volume de mon Ouvrage ne me permet pas de rapporter cet Ecrit.

V.

Résolution des Equations du quatriéme degré.

On suppose qu'on a fait évanoüir le second & le quatriéme terme d'une Equation du quatriéme degré qu'on veut résoudre. Si elle est complete lorsqu'on la propose, on fait évanoüir ces deux termes, comme on l'a enseigné dans le Chapitre précedent. Or une Equation incomplete de quatre degrez se résout comme celle de deux degrez. La quatriéme puissance se peut considerer comme la seconde, avec cette difference que sa racine est un quarré. La racine de x^4 est x^2. Voilà quatre formules ausquelles on réduit ces Equations: pour les résoudre on pratique ce qui a été enseigné pour le second degré, comme vous le voyez; mais comme je l'ai dit, la racine est un quarré, qui est égal à des grandeurs toutes connuës. Ainsi l'Equation se trouve entierement résoluë.

1 $x^4 = aabb$ $\qquad xx = ab$ ou $x = \sqrt{ab}$

2 $x^4 = adxx + aabb$ $\quad xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$

3 $x^4 = -aaxx - aabb$ $\quad xx = -\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}$

4 $x^4 = aaxx - aabb$ $\quad xx = \frac{1}{2}aa \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}$.

Pour avoir la valeur de xx il faut prendre la racine quarrée de chaque membre; car comme on le dit, les racines que donne la résolution précedente sont des quarrez. Or en tirant la racine quar-

quarrée de ces deux membres on a ces trois formules.

1. $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}}$

3. $x = -\sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}}$

4. $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa - \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}}$

Si l'on l'on veut que tout le membre connu, à sçavoir $\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$ soit nommé ab tout se réduira à cette seule formule $xx = ab$ dont la résolution est $x = \sqrt{ab}$. Pour s'assûrer que ces résolutions sont bonnes il n'y a qu'à élever à la quatriéme puissance ces racines; comme pour s'assûrer d'une racine quarrée on la quarre. Si elles sont égales aux grandeurs dont on prétend qu'elles sont les racines, elles le sont veritablement.

La seconde Equation étoit $x^4 = aaxx + aabb$, dont la derniere solution est $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}}$ en quarrant chaque membre l'on a $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$. En transposant $\frac{1}{2}aa$ l'on a $xx - \frac{1}{2}aa = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$; & quarrant chaque membre on

on a $x^4 - aaxx + \frac{1}{4} a^4 = \frac{1}{4} a^4 + aabb$ qui se réduit à $x^4 - aaxx = aabb$ ou $x^4 = aaxx + aabb$, qui est l'Equation proposée. Ainsi des autres formules.

LIVRE VIII.

SUPLEMENT DES ELEMENS DES MATHEMATIQUES

TRAITE'

De la progression des nombres naturels & des nombres impairs. Les fondemens de l'Arithmetique des Infinis.

CHAPITRE PREMIER.

Proprietez de la Progression des nombres naturels.

ON appelle nombres naturels ceux dont la A
difference est l'unité, comme,
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c.

Des

Ces nombres sont une progression qui peut être continuée jusqu'à l'infini. Je nomme a le premier terme de cette progression, soit qu'on la commence par zero, soit par 1. Le dernier terme de quelques termes qu'on compose la progression sera nommée x, & z le nombre des termes, quel que soit ce nombre (*cela n'a pas été observé cy-dessus page* 330.)

Lemme premier.

1 *x le dernier terme plus l'unité est égal au premier terme* a, *plus* z *le nombre des termes.*

C'est à dire que $x+1=a=a+z$, & par consequent que $x=a+z-1$.

Le dernier terme x contient le premier terme a, & autant de fois la difference qui regne dans la progression qu'il y a de termes devant luy. Liv. III. n. 22. Or z est le nombre de tous les termes de la progression, partant égal moins 1 au nombre des termes qui précedent le dernier. Ce nombre est ainsi $z-1$. Donc $x=a+z-1$. ajoûtant l'unité de part & d'autre vient $x+1=a+z$; ce qu'il falloit prouver.

Premier Theoreme.

3 *Si le premier terme est zero,* x *le dernier terme plus l'unité est égal à* z *le nombre des termes.*

C'est à dire que $x+1=z$ ou $x=z-1$; car par le Lemme précedent $x=a+z-1$. Or icy a est zero qui ne fait rien, on peut donc le suprimer; & partant $x=z-1$. ajoûtant de part & d'autre l'unité, on aura $x+1=z$. Ce qu'il falloit démontrer.

Second

SECOND THEOREME.

Si le premier terme a *est l'unité, le dernier terme* x *est précisément égal à* z *nombre des termes.* 4

Selon le Lemme $x = a + z - 1$. icy $a = 1$. donc $x = 1 + z - 1$. Or $+1 - 1 = 0$. donc $x = z$ ce qu'il falloit prouver. Ainsi dans une progression de cinquante termes, si le premier est 1, le cinquantiéme est 50.

TROISIE'ME THEOREME.

Le terme (que je nomme y) *qui suivroit aprés* x *le dernier terme est égal au premier* a *plus à* z *nombre des termes.* 5

Il faut prouver que $y = a + z$. Ce terme y est plus grand d'une unité que le dernier x. Ainsi $x + 1 = y$ ou $x = y - 1$. Mais par le Lemme précedent $x = a + z - 1$; donc $y - 1 = a + z - 1$ ou $y = +1 + a + z - 1$. & parce que $+1 - 1$ ce n'est rien, $y = a + z$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE PREMIER.

Donc si dans $y = a + z$, *le premier terme* a *est zero, le terme* y *est précisément égal à* z. 6

COROLLAIRE 2.

Donc si dans $y = a + z$, *le premier terme* a *est* 1; *le terme* y *moins* 1 *est égal à* z *ou* $z + 1 = y$. 7

QUA-

QUATRIE'ME THEOREME.

8 *Le premier terme* a *étant zero, le quarré de* x *dernier terme plus ce même terme* x *est égal au double de toute la progression.*

C'est à dire que $xx + x$ est égal au double de la somme de toute la progression. La somme du premier terme qui est ici zero & de x dernier terme ne fait que x; & en ce cas $x = z - 1$ ou $x + 1 = z$. Sn. 3. Or multipliant la somme du premier & du dernier terme; c'est à dire icy x par z nombre des termes, ou par $x + 1$ égal à z, le produit $xx + 1x$ sera le double de la progression, selon ce qui a été démontré Liv. III. n. 31. Partant xx quarré du dernier terme plus une fois x est le double de la progression; ce qu'il falloit démontrer.

CINQUIE'ME THEOREME.

9 *Le premier terme étant zero, le quarré de* y *qui suivroit le dernier terme* x *est égal au double de la progression des termes précedens moins une fois* y.

On vient de prouver que $xx + x$ est le double de la somme de la progression dont x est le dernier terme. Or le terme y qui suit ce dernier x étant plus grand de l'unité; & par consequent $x = y - 1$. Il faut que $xx = yy - 2y + 1$. Ajoûtons la premiere Equation $x = y - 1$ viendra $xx + x = yy - 2y + 1 + y - 1$. Or $-2y + 1 + y - 1 = -y$, donc $xx + x = yy - y$. Mais $xx + x$ est le double de la progression dont x est le dernier terme; donc $yy - y$ est le double de la même progression.

LEMME

Lemme Second.

Dans la progression naturelle soit ajoûté à un nombre quarré le double de sa racine, plus l'unité cela fera une somme égale au nombre quarré qui suit de plus prés ce quarré. 16

Soit aa un nombre quarré dont a est la racine. Celle du nombre quarré qui suit de plus prés est $a+1$. dont le quarré est $aa+2a+1$; ce qui montre que pour avoir un quarré qui suive de plus prés un nombre quarré donné, il faut prendre $2a$ double de la racine plus l'unité. Ainsi pour avoir le quarré qui suive celui-cy 9, je luy ajoûte 6 double de sa racine, & l'unité ce qui fait 16.

$$9+3+3+1=16.$$

Sixie'me Theoreme.

Le quarré d'un terme de la progression naturelle est égal au double des termes qui le précedent plus au quarré du premier, plus encore à la difference qui regne dans la progression multipliée par le nombre des termes. 18

Soit cette progression $\div$ *a. b. c. d.* par le Lemme précedent.

$$dd=cc+2c+1$$
$$cc=bb+2b+1$$
$$bb=aa+2a+1$$

Je substituë ou j'écris $bb+2b+1$ en la place de cc; comme $aa+2a+1$ en la place de bb, ce qui me donne

$dd=$

$$dd = \left\{ \begin{array}{l} \quad + 2c + 1 \\ \quad + 2b + 1 \\ aa + 2a + 1 \end{array} \right.$$

Par consequent le quarré de *dd* est égal, 1°. à *aa* quarré du premier terme *a*. 2°. à $2c + 2b + 2a$, c'est à dire au double de tous les termes qui le précedent. 3°. à la difference 1 multipliée par le nombre des termes qui précedent; c'est à dire icy à 1 multiplié par 3, ce qui fait 3.

LEMME TROISIEME.

12 *Si on ajoûte à un nombre cubique le triple du quarré de sa racine, plus le triple de la même racine, plus l'unité, cela fera une somme égale au nombre cubique, qui suit de plus prés le cube proposé.*

Soit *aaa* un nombre cube, dont la racine est *a*, par consequent $a + 1$ celle du nombre cube qui suit de plus prés le nombre cube *aaa*.

Le cube de $a + 1$ est $aaa + 3aa + 3a + 1$. Ce qui fait voir que le cube que l'on cherche est plus grand que le nombre cube *aaa*. 1°. du triple du quarré de sa racine *a*. 2°. du triple de la même racine simple. 3°. de l'unité. Ainsi 64 nombre cubique qui suit de plus prés le nombre cubique 27. est plus grand 1°. de 27 qui est triple de 9, quarré de la racine cubique qui est 3. 2°. de 9 triple de 3. 3°. de l'unité; car $27 + 27 + 9 + 1 = 64$.

SEPTIE'ME THEOREME.

13 *Le cube d'un terme de la progression naturelle est égal* 1°. *au cube du premier terme.* 2°. *plus au triple des quarrez des termes qui le précedent.* 3°. *plus*

plus au triple de la somme des termes qui le précedent. 4o. *plus à l'unité multipliée par le nombre des termes.*

Soit cette progression $\div a.\ b.\ c.\ d.$ par le Lemme précedent.

$$d^3 = c^3 + 3cc + 3c + 1$$
$$c^3 = b^3 + 3bb + 3b + 1$$
$$b^3 = a^3 + 3aa + 3a + 1$$

Substituant en la place de c^3 la grandeur égale $b^3 + 3bb + 3b + 1$, & en celle-cy au lieu de b^3 substituant la grandeur égale $a^3 + 3aa + 3a + 1$. on aura

$$d^3 = \left\{ \begin{array}{l} 3cc + 3c + 1 \\ 3bb + 3b + 1 \\ a^3 + 3aa + 3a + 1 \end{array} \right.$$

Partant le cube de d est égal, 1°. au cube a^3 du premier terme a. 2°. à $3cc + 3bb + 3aa$, c'est à dire au triple des quarrez des termes précedens. 3°. à $3c + 3b + 3a$: c'est à dire au triple de la somme de tous les termes de la progression qui le precedent. 4°. & outre cela au produit de l'unité multipliée par le nombre des termes, c'est à dire, qu'outre cela que le cube d^3 est égal au nombre des termes.

COROLLAIRE I.

Le cube du terme qui suit le dernier moins le cube du premier terme moins le nombre des termes, moins le triple de la progression des termes; est égal au triple des quarrez des termes. 14

Soit s somme de la progression; t le nombre des termes, a le premier terme, & q la somme des quarrez. Par le Theorême $d^3 = a^3 + t + 3s + 3q$. Otant de part & d'autre $+ a^3 + t$

$+3s$, vient $d^3 - a^3 - t - 3s = 3q$. ce qu'il falloit prouver.

Huitie'me Theoreme.

Le quarré du dernier terme d'une progression naturelle dont zero est le premier terme multiplié par le nombre des termes est égal au triple des quarrez de la progression, aprés avoir ôté la moitié du quarré du dernier terme, & la moitié de ce même terme.

Soit zero le premier terme, z le dernier: ainsi $z+1$ est le nombre des termes, & celuy qui suit le dernier terme, s̃n. 3. Le cube de $z+1$ est $z^3 + 3zz + 3z + 1$. Retranchons en 1°. le cube du premier terme zero, c'est à dire rien. 2°. retranchons le nombre des termes, c'est à dire $z+1$, & reste $z^3 + 3zz + 2z$. 3°. Retranchons le triple de la somme de la progression. $zz + z$ est le double de cette somme, s̃. n. 8. partant $2zz + 2z$ est le quadruple; ôtant $\frac{zz+z}{2}$ qui est une fois la somme de la progression, donc $2zz + 2z - \frac{zz - z}{2}$ en est le triple, lequel triple retranché de $z^3 + 3zz + 2z$, reste $z^3 + zz + \frac{zz + z}{2}$, égal par le Corollaire précedent au triple de la somme des quarrez: Or le quarré zz du dernier terme multiplié par $z + 1$ est $z^3 + zz$: donc ce produit est égal au triple de la somme des quarrez de la progression, dont on a retranché $\frac{zz + z}{2}$; ou $z^3 + zz + \frac{zz + z}{2}$ est égal au triple de la somme des

quarrez de la progreſſion, ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

Donc $\frac{z^3+zz}{3}+\frac{zz+z}{6}$ *ſera la ſomme des quarrez de la progreſſion.*

Car puiſque $z^3+zz+\frac{zz+z}{2}$ eſt le triple de la ſomme des quarrez; donc le tiers ſera une fois la ſomme des quarrez.

$$\frac{z^3+zz}{3}+\frac{zz+z}{6}$$

car pour avoir le tiers de $\frac{zz+z}{2}$ il faut diviſer $zz+z$ par un dénominateur trois fois plus grand que 2.

CHAPITRE II.

Proprietez de la progreſſion des nombres impairs.

LEs nombres impairs ſont faits de l'addition 17
des nombres naturels: par exemple ce nombre 3 qui eſt le ſecond des impairs eſt fait de l'addition du premier & du ſecond des naturels. 5 qui eſt le troiſiéme des impairs eſt fait de l'addition du ſecond & du troiſieme des naturels; ainſi de ſuite.

NEUVIE'ME THEOREME.

18 *Si l'on dispose successivement & par ordre tous les nombres impairs* 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. *& les autres qui suivent, le premier de ces nombres qui est* 1. *sera le premier nombre quarré; ce quarré plus* 3 *qui le suit, donne* 4 *le second quarré;* 4 *plus* 5 *qui suit* 3, *donne* 9 *le troisiéme quarré: & ainsi de suite.*

La raison de cela est claire; car s̃ n. 10. ajoûtant au quarré 1 deux fois sa racine plus l'unité, c'est à dire 3, l'on a le quarré qui le suit qui est celuy de 2; ajoûtant au quarré 4 deux fois sa racine & l'unité, c'est à dire 5, on a le quarré de 3 qui est 9; ainsi de suite.

DIXIE'ME THEOREME.

19 *Dans la progression des nombres impairs le quarré du nombre des termes est égal à la somme de la progression.*

Le nombre 2 est la difference qui regne dans la progression des impairs. Soit nommé z le nombre des termes. Le dernier terme que je nomme x est égal au premier terme plus la difference 2 multipliée par z moins une fois cette difference 2 Liv. III. n. 22. Partant $x = 1 + 2z - 2$. La somme du premier terme 1 & du dernier x ou $1 + 2z - 2$ grandeur égale, est donc $1 + 1 + 2z - 2$ ou $2z$, puisque $+1 + 1 - 2 = 0$. Or cette somme $2z$ étant multipliée par z le nombre des termes, ce qui fait $2zz$ est le double de la progression. Liv. III. n. 29 donc la moitié de $2zz$ qui est $1zz$ ou zz est égale à la somme de toute la progression; ce qu'il falloit prouver.

Ainsi

Ainsi dans une progression de nombres impairs qui a dix termes, le quarré du nombre des termes, c'est à dire le quarré de 10 est égal à la somme de tous les dix termes de la progression.

On découvre d'admirables proprietez dans les nombres; elles sont infinies. Considerez celles cy, que j'expose seulement. Jettez les yeux sur la Table suivante de six colomnes. La premiere est des progressions des nombres naturels. 20

La seconde colomne contient les quarrez de ces nombres qui sont faits de l'addition des nombres impairs qui précedent chaque quarré. Ainsi le deuxiéme quarré 4 est fait des deux premiers impairs 1 & 3. Le troisiéme quarré 9 est fait du premier, du second, & du troisiéme des impairs, 1. 3. 5. Le quatriéme quarré 16 est fait de 1. 3. 5. 9. les quatre impairs: Et c'est ce qui vient d'être démontré.

La troisiéme colomne comprend les differences des quarrez des nombres naturels: & ces differences sont la progression des nombres impairs.

Dans la quatriéme colomne, sont les cubes des nombres naturels.

Dans la cinquiéme, sont les differences des cubes.

Et dans la derniere, la difference de ces differences qui sont une progression Arithmetique, dont la difference est 6.

Nombres.	Quarrez des nombres.	Difference des quarrez.	Cubes des nombres.	Difference des cubes.	Differences des differences.
1	1	3	1	7	12
2	4	5	8	19	18
3	9	7	27	37	24
4	16	9	64	61	30
5	25	11	125	91	36
6	36	13	216	127	42
7	49	15	343	169	48
8	64	17	512	217	54
9	81	19	729	271	60
10	100	21	1000	331	66

CHAPITRE III.

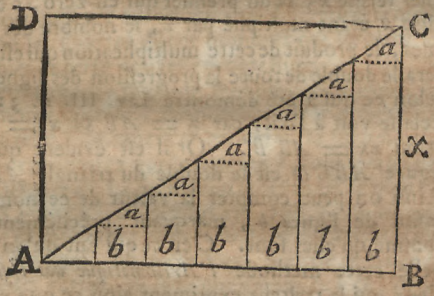
Fondement de l'Arithmetique des Infinis.

21 DAns la progression naturelle l'unité est la difference entre deux termes qui se suivent immédiatement. La difference entre 4 & 5 c'est 1. Or si on interposoit entre ces deux nombres 4 & 5, mille autres termes qui fussent aussi en progression Arithmetique, & qu'on fit la même chose entre chacun des autres termes de la progression, alors la difference qui regneroit dans la progression seroit encore 1 mais un millieme: & si on interposoit de même entre les termes

de

de cette nouvelle progreſſion mille autres termes, alors cela feroit une nouvelle progreſſion dont la difference ſeroit encore 1, mais un milliéme de milliéme : continuant de même juſqu'à l'infini, enfin on viendroit à une difference ſi petite qu'on la pourroit concevoir ſans erreur comme nulle ; c'eſt à dire égale à zero. Cela feroit toûjours une progreſſion naturelle, dont 1 ſeroit la difference mais infiniment petit.

Quelque grandeur qu'on propoſe on y peut 22
concevoir une infinité de parties. Soit par exemple la ligne *AB*, dans laquelle je conçois une infinité de parties telles que *b*, ou une infinité de lignes élevées ſur ces parties *b*. Je ſuppoſe toutes ces lignes en progreſſion Arithmetique,



croiſſant également depuis *A* juſqu'à *B*. La ligne *BC* eſt la plus grande & le dernier terme de la progreſſion que je nomme *x* ; je mene une ligne droite du point *A* au point *C* ; & par les ſommets de ces lignes *b* de petites lignes qui font les petits triangles *a*. Il eſt évident que ſi on conçoit un grand nombre de lignes telles que *b* qui couvrent la ſurface du triangle *ABC*, on

pourra dire que la somme des lignes *b* sera égale à la surface du triangle *ABC*, aprés en avoir ôté la somme des petits triangles *a*. Or si le nombre des lignes *b* est infini ou innombrable, & qu'ainsi leur difference soit nulle, ou égale à zero; en ce cas comme tous ces petits triangles *a* ne sont que des zeros, l'on pourra dire que la somme des lignes *b* sera précisement égale à la surface du triangle *ABC*.

La ligne *AB* sur laquelle sont élevées les lignes *b*, peut être considerée comme le nombre des termes de la progression que font ces lignes & *BC* ou *x*, comme nous l'avons dit, en est le dernier terme, le premier c'est zero. *AB* qui représente le nombre des termes soit nommée *z*, la somme du dernier terme *x*, & du premier qui est zero, c'est à dire *x* étant multiplié par *z*, le nombre des termes, le produit de cette multiplication qui est *zx*, sera le double de toute la progression des lignes *b*, selon ce qui a été démontré Liv. III. n. 31. & cela se voit à l'œil; car $z = AB$ & $x = BC$. Ainsi $zx = AB\ BC$. Or il est évident que la figure *ABCD* est le double du triangle *ABC*. Ainsi on peut compter la valeur de ce nombre infini de lignes *b*, marquant précisément la somme qu'elles font. C'est ce qui fait qu'on appelle cette methode *l'Arithmetique des Infinis.* Ceux qui la traitent expriment ainsi ce que nous venons de démontrer, & en font cette proposition.

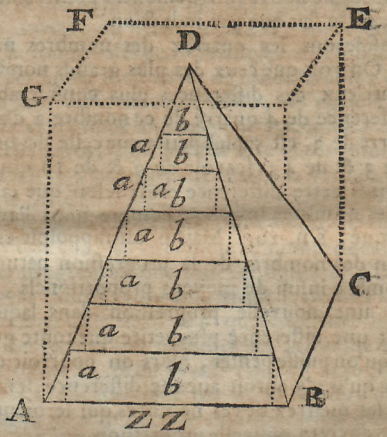
Une suite de lignes en progression Arithmetique étant donnée, si on multiplie BC, *la plus grande de toutes ces lignes par* AB *somme de tous les termes, c'est à dire* x *par* z, *le produit* BC×AB *ou* xz *sera le double de la somme de cette progression.*

C'est

C'est ce que nous avons démontré positivement. Wallis ne le fait que par induction.

Considerons les quarrez des nombres naturels. On voit que ceux des plus grands nombres ont entr'eux des differences plus considerables. La difference de 4 quarré de ce nombre 2 d'avec 9 quarré de 3, est 5 plus petite que celle des quarrez de 3 & de 4 ; sçavoir de 9 & de 16 qui est 7. Ainsi cette difference croît selon que croissent les nombres impairs, comme nous l'avons remarqué, § n. 20. Mais si on supposoit entre chacun des nombres de la progression naturelle un nombre infini de moyens proportionels, qui fissent une nouvelle progression dans laquelle regnât une difference plus petite que toute grandeur qu'on puisse penser, alors on pourroit concevoir qu'il n'y auroit aucune difference sensible entre les quarrez de ces nombres qui seroient les termes de cette nouvelle progression.

Pour rendre la chose sensible, concevons les nombres quarrez, des nombres de la progression naturelle à commencer par zero. Je suppose que tous ces quarrez que je nomme *b*, sont mis les uns sur les autres. Le dernier ou le dessus est *D* zero ; le plus grand qui est dessous est *ABCA*. ils décroissent en montant ; mais je suppose qu'ils ont la même épaisseur, ou qu'ils sont en égale distance les uns des autres, ils font une pyramide ; & s'ils ont de l'épaisseur, ils font un solide égal à la solidité de la pyramide *ABCD*, si on en ôte les petits triangles *a* que laissent les écheles que font tous ces quarrez étant mis les uns sur les autres, & décroissant comme ils font.



Mais si au lieu d'un certain nombre fini de quarrez entre *AB* & *D* il y en avoit une infinité, leur difference *a* ne seroit nullement sensible; c'est à dire qu'ils ne laisseroient point de triangles ou d'échellons sensibles sur la pyramide qu'ils feroient; par consequent leur solidité seroit sensiblement la même que celle de la pyramide *ABCD*. La question est de trouver quelle est la raison de la somme de tous ces quarrez *b* avec le produit du quarré *ABCA*, qu'on peut regarder comme le plus grand terme de la progression, multiplié par la hauteur de tous ces quarrez, ou par le nombre des termes de cette progression; ce qui feroit le solide *ABCEFG*. Le premier terme de la progression est zero; je suppose un nombre infini de termes, dont le plus grand est *x*, & par consequent *xx* est le plus grand

grand quarré de tous les quarrez des termes de la progreſſion, x étant le dernier terme, $x+1$ ſ n. 3. eſt le nombre des termes, ainſi $x+1 = AG$, partant xx multiplié par $x+1$ eſt égal au ſolide $ABCEFG$, ainſi $x^3+xx = ABCEFG$.

Or ſ n. 15. $x^3+xx+\frac{xx+x}{2}$ eſt le triple de la ſomme des quarrez de la progreſſion naturelle; donc $ABCEFG$ plus $\frac{xx+x}{2}$ eſt le triple de tous ces quarrez. Il n'eſt donc queſtion que de montrer que cette difference $\frac{xx+x}{2}$ eſt de nulle conſideration.

Les differences de tous ces quarrez ſont une progreſſion de nombres impairs, ſ n. 20, qui a un nombre de termes égal à celuy de la progreſſion des nombres naturels dont on conſidere les quarrez. Ainſi $x+1$ eſt encore le nombre des termes de cette progreſſion d'impairs, partant le dernier terme de ces impairs eſt encore x; or le premier terme étant zero, donc $x+0$, ou x multiplié par $x+1$ le nombre des termes fait $xx+x$, double de toute la progreſſion des impairs: ainſi $\frac{xx+x}{2}$ eſt la juſte ſomme de la progreſſion que font ces differences. Par l'hypotheſe la difference de tous ces quarrez eſt nulle, ou n'eſt pas ſenſible; donc $\frac{xx+x}{2}$ ne doit point être conſiderée; ainſi on peut dire que la ſomme de tous ces quarrez eſt le tiers du ſolide $ABCEFG$, qui eſt ce qu'il falloit démontrer.

En suivant la methode que nous avons employée, on pourroit démontrer des autres puissances ce que nous avons démontré de la premiere & de la seconde puissance : sçavoir par exemple que la somme des termes d'une progression naturelle infinie est le quart du produit du cube du dernier terme multiplié par le nombre des termes. Ainsi de toutes les autres puissances.

TRAITE'

Des progressions Arithmetiques & Geometriques jointes ensemble.

De la composition & de l'usage des Logarithmes.

AVERTISSEMENT.

LEs deux progressions Arithmetique & Geometrique ont des proprietez considerables quand elles sont jointes ensemble. Elles le sont dans le Triangle Arithmetique dont M. Paschal a fait un Traité. J'exposeray sommairement les proprietez de ce Triangle, que je suppose fait tel que cet Auteur le représente. J'en considere les proprietez principales qui résultent de la disposition des nombres qu'il renferme, toutes si évidentes qu'il n'est point nécessaire de les démontrer autrement qu'en les exposant.

TRIANGLE ARITHMETIQUE

Ordres Numeriques		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 Unites	1	A 1	B 1	C 1	D 1	E 1	F 1	G 1	H 1	I 1	K 1
2 Nomb. naturels	2	L 1	A 2	B 3	C 4	D 5	E 6	F 7	G 8	H 9	
3 Triangulaires	3	M 1	K 3	a 6	b 10	c 15	d 21	e 28	f 36		
4 Piramidaux	4	N 1	l 4	g 10	m 20	n 35	o 56	p 84			
5 Triangulo-Triangulaires	5	O 1	M 5	q 15	r 35	s 70	t 126				
Sixieme Ordre	6	P 1	N 6	v 21	z 56	aa 126					
Setieme Ordre	7	Q 1	o 7	x 28	bb 84						
Huitieme Ordre	8	S 1	P 8	y 36							
Neuvieme Ordre	9	T 1	Q 9								
Dixieme Ordre	10	V 1									

Rangs paralleles.

Rangs perpendiculaires

CHAPITRE PREMIER.

Proprieté du Triangle Arithmetique qui comprend celles des progressions Arithmetiques & Geometriques.

LE nombre des cellules de chaque rang parallele avec le nombre de celles du rang perpendiculaire qui luy répond font une progression Arithmetique ; car dans le premier rang parallele *AK* il y a dix cellules & autant dans le perpendiculaire *AV*. Il y en a 8 dans le second rang parallele *AH*, & autant dans le second perpendiculaire *AQ*. Ainsi le nombre de ces cellules font dans ce Triangle cette progression.

20. 18. 16. 14. 12. 10. 8. 6. 4. 2.

Il y a dans ce Triangle une autre progression, qui consiste en ce que chaque base contient une cellule plus que la précedente. Il n'y en a qu'une dans l'angle droit, sçavoir la cellule *A*; aprés laquelle suivent les deux cellules *B* & *L* ; aprés elles il y en a trois autres dans la base qui suit qui sont *CAM*.

La cellule A est appellée la Generatrice, & le nombre 1 qui y est le Generateur. Il est arbitraire, on y peut mettre tout autre nombre, mais celuy là posé il faut qu'en chaque cellule il y ait un nombre égal aux deux des deux cellules, l'une superieure dans le rang parallele, l'autre qui la précede dans le rang perpendiculaire. Icy l'unité étant la Generatrice, ce nombre 6 de la cellule *a* est égale à 3 + 3 des cellules *BK*. De même 3 de la cellule *K* est égal à 1 + 2 des cellules *CA*.

1°. Chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallele précedent comprises depuis son rang perpendiculaire jusques au premier inclusivement.

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4. \text{ ou } L\ A\ B\ C.$$

2°. Chaque cellule égale la somme de toutes celles du rang perpendiculaire précedent comprises depuis son rang parallele jusqu'au premier inclusivement.

$$10 = 1 + 3 + 6 \text{ ou } b = M, K. a.$$

3°. Chaque cellule diminuée de l'unité est égale à la somme de toutes celles qui sont comprises entre son rang parallele & son rang perpendiculaire, exclusivement.

$$15 - 1 = 4 + 3 + 2 + \quad + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$\text{ou } c - 1 = C + B + A + L + D + C + B + A$$

4°. Chaque cellule est égale à sa réciproque $B = L$ & $B = K$.

5°. Un rang parallele & un perpendiculaire qui ont un même exposant sont composés de cellules toutes pareilles.

Le rang parallele dont 6 est l'exposant contient des cellules égales au rang perpendiculaire qui a le même exposant.

6°. La somme des cellules de chaque base est double de celle de la base précedente.

$N + K + B - D$ est le double de $M + A + C$.

7°. La somme des cellules de chaque base est un nombre de la progression Geometrique, double qui commence par l'unité dont l'exposant est le même que celui de la base.

$$\doteq 1.\ 2.\ 4.\ 8.\ 16.\ 32.\ 64.\ 128.\ \&c.$$

8°. Chaque base diminuée de l'unité est égale à la somme de toutes les précedentes.

$N +$

$N + K + B + D - A = M + A + C + B + L + A$

La quatriéme base est de 8, & les trois premieres de 7.

9°. La somme de tant de cellules continuës qu'on voudra de la base, à commencer par une extremité, est égale à autant de cellules de la base précedente, plus encore à autant hormis une.

Prenant ces trois cellules *N. K. B.* de la quatriéme base, leur somme qui est 7 est égale aux trois cellules *M. A. C.* de la base précedente; plus encore à autant hormis une. M. Paschal appelle cellules de la Dividende celles que la ligne qui divise l'angle droit par la moitié traverse diagonalement, comme *A A a*, *m*, *f*.

10° Chaque cellule de la Dividende est double de celle qui la précede dans son rang parallele ou perpendiculaire. *a* est double de *B* comme aussi de *K*.

11°. Deux cellules contiguës, comme *a* & *I* étant dans une même base, la superieure est à l'inferieure. 6 à 4 comme la multitude des cellules depuis la superieure jusqu'au haut de la base, à la multitude de celles depuis l'inferieure jusqu'en bas inclusivement, car il en a trois au dessus de *a* en comptant *a*; sçavoir *a C E*, & au dessous il n'y en a que deux *L* & *O*.

12°. Deux cellules contiguës *b* & *m* étant dans un même rang perpendiculaire, l'inferieure est à la superieure 20 à 10, comme 6 exposant de la base superieure à 3 exposant de son rang parallele.

13°. Deux cellules contiguës *B* & *C* étant dans un même rang parallele, la plus grande est à sa précédente comme 4 exposant de la base

de cette précedente à 3 exposans de son rang perpendiculaire.

14°. En tout Triangle Arithmetique, comme dans le Triangle *ADN*. la somme des cellules d'un rang parallele comme icy le second *LABC* est à la derniere de ce rang, c'est à dire à *B*, comme 3 exposant du Triangle est à 2 exposant du rang parallele.

15°. Soit un Triangle quelconque, par exemple le cinquiéme *AEO*, quelque rang parallele qu'on y prenne, par exemple le troisiéme, la somme de ces cellules *M.K.a*, qui est 10 est à *N.I*; celles du quatriéme, comme 4 exposant du rang quatriéme est à 2, qui est l'exposant de la multitude des cellules; car il n'y en a que deux de ce rang qui soient dans le Triangle *A.D.N.*

Ce que je viens de dire suffit pour comprendre qu'on peut unir ensemble les deux progressions Arithmetique & Geometrique. L'Auteur de ce Triangle Arithmetique montre qu'il a plusieurs autres proprietez dont on peut faire usage: c'est ce que je ne dois pas entreprendre d'expliquer dans ces premiers Elemens.

Ce Triangle sert à trouver les ordres numeriques dont on a parlé cy-dessus L. 2. n. 17. Vous voiez par exemple vis à vis du troisiéme ordre dans la cellule *a* ce nombre 6, formé par l'addition des nombres du second ordre qui sont dans les cellules *L, A, B*, savoir 1, 2, 3.

CHAPITRE V.

L'union de la progression naturelle des nombres avec une progression Geometrique se nomme Logarithme.

LE zero, ainsi qu'on l'a remarqué, peut être consideré comme un milieu entre la grandeur positive & la grandeur négative, ce qui est positivement grand peut être si petit, & si infiniment petit, qu'on le peut supposer égal à zero. Considerant donc une grandeur qui commence, & qui croît toûjours dans une même proportion Arithmetique, & par consequent dont les accroissemens sont une progression Arithmetique, on peut dire que zero en est le premier terme; les autres termes sont les nombres comme ils se suivent naturellement. Voicy cette progression.

$\div$ c. 1. 2 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c.

Au lieu de considerer que cette grandeur qui commence depuis le zero croisse par addition, comme il se fait dans la progression Arithmetique; concevons qu'elle croît par la multiplication; c'est à dire qu'étant multipliée continuellement par elle-même on l'éleve à tous ses degrez ou puissances. Ces puissances sont une progression Geometrique, comme on l'a prouvé, Liv. IV. n. 29. Or on peut dire que le premier terme de cette progression est encore zero. Car si la grandeur proposée est a, en la considerant dans la premiere origine sortant pour ainsi dire du neant, & luy étant encore égale, on la peut appeller a^0, qui sera le premier terme. Le zero mul-

multipliant a ne l'augmente point; ainsi a^0. sera toûjours zero; on ne peut donc pas dire que ce soit un degré. Le premier degré c'est a^1. qui sera le second terme de la progression. a^2 est le troisiéme. Voilà cette progression que font les degrez de a.

$\frac{\cdot}{\cdot\cdot}$ a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. a^8. a^9.

Tous les degrez d'une grandeur ainsi exprimez font deux progressions, l'une Arithmetique, l'autre Geometrique. La suite des nombres naturels qui exposent les degrez de cette grandeur font une progression Arithmetique; comme les puissances qui sont dessous en font une Geometrique; ce qui est évident,

$\frac{\cdot}{\cdot\cdot}$ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c.

$\frac{\cdot}{\cdot\cdot}$ a^0. a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. a^7. a^8. a^9 a^{10}. &c.

C'est l'union de ces deux progressions qu'on nomme *Logarithme*. Ce nom est composé de deux noms: le premier signifie *raison*, & l'autre *nombre*. Ce mot *Logarithme* signifie proprement des nombres en progression Arithmetique qui correspondent à d'autres nombres qui sont en progression Geometrique. Par le moyen de cette union, on abrege plusieurs operations Arithmetiques. Vous voyez icy que la somme ou l'addition de deux nombres de la progression Arithmetique est l'exposant d'une puissance faite par la multiplication des deux puissances dont ces deux nombres sont les exposans. Ainsi par exemple $2 + 3$ ou 5 est l'exposant de a^5, qui est une puissance faite par la multiplication de a^2 par a^3, ou de aa par aaa, car ce produit est $aaaaa$ ou a^5, suivant les regles de la multiplication.

Dans les progressions Arithmetiques on fait par l'addition & la soustraction ce qui ne se fait dans la progression Geometrique que par la multiplication

tiplication & par la division, qui sont des operations beaucoup plus longues. Ainsi en ajoûtant icy les exposans 3 & 6 de qui fait 9, on a l'exposant de la neuviéme puissance, qui est faite par les puissances troisiéme & sixiéme multipliées l'une par l'autre. Par consequent la difference de deux exposans est le quotient de deux puissances divisées l'une par l'autre. Ainsi 9 — 6 ou 3 difference de 9 & de 6 est le quotient ou la puissance qui résulte de la puissance neuviéme divisée par la sixiéme. La puissance qui résulte de cette division est la troisiéme, La division defait ce que la multiplication avoit produit. Or pour diviser a^9 par a^6, il faut ôter six a de neuf a, & les trois a qui restent sont le quotient de cette division.

CHAPITRE III.

De la composition des Tables des Logarithmes.

L'Union des deux progressions Arithmetique & Geometrique donnant donc le moyen de trouver par l'addition & par la soustraction, ce qu'autrement on ne trouve que par la multiplication, & par la division, qui sont des operations difficiles, on s'est avisé de joindre ces deux progressions, & de composer des Tables qui continssent les nombres naturels depuis l'unité jusqu'à cent mille & plus, avec leurs Logarithmes propres, c'est à dire des nombres qui fissent une progression Arithmetique, & fussent les exposans d'autant de termes d'une progression Geometri-

metrique. Pour comprendre mieux ce que c'est que ces Logarithmes & leurs usages, il faut faire voir comme ils se trouvent, c'est à dire comme on a composé les Tables qui les contiennent. Considerez ces deux progressions, ou parties de progressions que vous voyez. L'une est des nombres naturels, & a pour son premier terme zero. Dans la progression Geometrique regne la raison décuple, comme la difference qui regne dans l'Arithmetique c'est 10000000. On vera pourquoy ce grand nombre de zero dans la progression Arithmetique, & pourquoy je ne luy donne pour son premier terme que des zero, lequel répond à 1, qui est le premier terme de la Geometrique. On a pris ce mot *Logarithme* pour le terme d'une progression Arithmetique, qui répond à un terme d'une progression Geometrique, ce nombre 10000000 de la progression Arithmetique est donc le Logarithme de 10 un des termes de la Geometrique.

Geometrique.	*Arithmetique.*
1	0.0000000
10	10000000
100	20000000
1000	30000000
10000	40000000
100000	50000000
1000000	60000000

Vous ne voyez pas icy les Logarithmes de 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. & c'est ce qui est nécessaire, si on veut avoir la suite des Logarithmes de tous les nombres comme ils se suivent depuis l'unité. Ils ne se trouvent qu'avec un travail infini

ſini dont vous allez voir un échantillon. Le Baron Neper Ecoſſois commença ce travail l'an 1614. Brigge Anglois le perfectionna. Pour juger combien il eſt grand, il ſuffit de chercher le Logarithme de 9, & on connoîtra par-là la grandeur du travail; car pour le trouver il faut auparavant trouver tant de moyens proportionnels entre 1 & 10, qu'enfin on en trouve un égal à 9, ou dont la difference avec ce nombre ne ſoit pas conſiderable. Il faut en meme temps chercher à chacun de ces moyens proportionnels, un terme dans la progreſſion arithmetique auſſi moyen proportionnel qui lui réponde, pour avoir enfin le Logarithme de 9, qu'on ne peut aſſigner autrement.

C'eſt par l'extraction des racines qu'on trouve des moyens proportionnels entre deux nombres donnez, comme on l'a enſeigné. Ces produits ne ſont pas toûjours des puiſſances parfaites ou nombres quarrez ou cubes; ainſi comme on n'en peut avoir que des racines approchées, au lieu de 1 & de 10 on prend ces grands nombres 10000000 & 10. 0000000 qui ſont en même raiſon, afin que l'erreur ne ſoit pas ſenſible. Prenez garde à cette Table que vous voyez devant vos yeux. Ce n'eſt que le commencement d'une qui eſt plus grande qui ſe trouve dans tous les Auteurs qui traitent des Logarithmes. Elle repréſente les ſupputations qu'il faut faire pour trouver le ſeul Logarithme de 9. Jugez de-là du travail de la compoſition des Tables entieres des Logarithmes.

Pre-

	Proportion Geometrique.	*Logarithmes.*
A	1. 0000000	0. 000000000
C	3. 1622777	0. 500000000
B	10 0000000	1 000000000
B	100000000	1 000000000
D	5 6234132	0 750000000
C	3 1622777	0 500000000
B	100000000	1 0000 0000
E	7 4989421	0 8750000000
D	5 6234132	0 750000000

Il faut chercher un moyen proportionnel entre ces deux nombres *A* & *B*. On trouve *C* en multipliant *A* par *B*, & tirant la racine quarrée de leur produit; aprés cela on cherche le Logarithme de *C*, c'est à dire un nombre qui soit moyen Arithmetique entre 000000000 & 100000000. On le trouve ajoûtant ces deux termes en une somme, dont la moitié est le moyen Arithmetique qu'on cherche. Puisque dans cette progression le premier terme n'est rien, il suffit de prendre la moitié de l'autre terme.

Or le moyen proportionnel *C* qu'on a trouvé est moindre que 90000000, il faut donc chercher un autre moyen proportionnel entre le moindre *C* & le plus grand *B*. Je trouve *D* & son logarithme, mais comme ce moyen *D* est encore moindre que celui qu'on cherche; il faut de même chercher entre *D* & le plus grand terme *B*, un troisiéme moyen proportionnel *E* & son Logarithme, qui ne sera point encore celui que l'on cherche. Mais enfin en continuant de chercher

entre-

entre le prochainement moindre, & le prochainement plus grand des moyens Geometriques proportionnels, on aura des nombres qui approcheront toûjours de plus en plus du nombre proposé 90000000, lequel enfin se trouvera le vingt-sixiéme moyen proportionnel; comme on le voir dans les Auteurs qui rapportent cette operation en toute son étenduë. Quel est donc le travail quand il faut composer des Tables entieres, c'est à dire trouver les Logarithmes depuis l'unité jusqu'à cent mille, & encore plus loin, puisque seulement pour trouver le Logarithme de 9 il faut faire tant d'operations?

Quand on a trouvé les Logarithmes de tous les nombres absolus, à commencer depuis l'unité on les range selon leur suite. Vous trouverez icy le commencement de ces Tables. Dans la premiere colomne qui est la plus étroite, sont les nombres absolus, & vis à vis leurs Logarithmes, qui ont été trouvez en la maniere que je l'ay dit. Tous les moyens Geometriques qu'il a fallu trouver auparavant ne paroissent point dans ces Tables; car cela ne sert de rien pour l'usage qu'on en veut faire.

Les Logarithmes qui sont comme les exposans des nombres absolus ou naturels, sont entr'eux arithmetiquement, ce que les nombres naturels sont entr'eux Geometriquement, c'est à dire par exemple que ces trois nombres 4. 6. 9, étant en progression Geometrique, les Logarithmes qui sont à côté de ces trois nombres sont en progression Arithmetique. Ainsi le Logarithme qui se trouvera à côté d'un nombre quatriéme proportionel aux trois précedens, sera aussi un quatriéme proportionnel arithmetique aux Logarithmes des trois nombres précedens.

CHA-

CHAPITRE IV.

De l'usage des Tables des Logarithmes.

POur trouver un quatriéme terme proportionnel Geometriquement, il faut multiplier, comme on l'a enseigné, le second par le troisiéme, & en diviser le produit par le permier. Si 3. 6 :: 4. on multiplie 6 par 4, & on divise 24 le produit par 3, le quotient 8 sera le quatriéme qu'on cherche. Or ces multiplications & divisions sont des operations longues : on s'en exempte en se servant de la Table des Logarithmes. Je prens le Logarithme de 6 qui est 7781512, je l'ajoûte à celui de 4 qui est 6020600, cela fait 13802112 dont je retire ce nombre 4771212 qui est Logarithme de 3, le reste est 9030900, qui est un quatriéme proportionnel arithmetiquement aux trois Logarithmes précedens. Je cherche ce nombre ou celui qui en approche le plus, à côté duquel je trouve 8, qui est ainsi le terme que je cherchois.

Outre que l'addition & la soustraction sont des operations plus courtes que la multiplication & la division; cela seul, que le premier terme de la progression des Logarithmes est zero, fait que les operations sont trés courtes, ou qu'une seule suffit. Voyons le dans un exemple. Soient ces quatre termes a, b, c, d, en porportion Arithmetique, qui représente les Logarithmes de quatre nombres. $a + d = b + c$. Liv. III. n. 17. Donc si a étoit le logarithme de l'unité, cette lettre ne vaudroit que zero premier terme de la progression Logarithmique, comme on le voit dans la Table ; ainsi d seul

est

est égal à $b+c$, c'est à dire que le Logarithme d est égal à la somme des Logarithmes b & c. Pour le trouver, il suffit d'ajouter les Logarithmes b & c, puisque leur somme lui est égale. De même si $\div a\ b\ c$. puisque $a+c=b+b$, ou $a+c=2b$, supposant comme on a fait que a est zero, le Logarithme c est le double de b; ainsi pour l'avoir il ne faut que doubler b.

Les Tables des Logarithmes abregent les operations de l'Arithmetique, donnant le moyen de faire par l'addition ou par la soustraction ce qu'on seroit obligé de faire par la multiplication & par la division; car par exemple si on veut trouver le quotient d'un nombre divisé par un autre nombre de 24 divisé par 6, il n'y a qu'à prendre la difference des Logarithmes de 6 & de 24, ou retirer le plus petit du plus grand, le reste est le Logarithme du nombre qui est le quotient qu'on cherche; ce quotient est 4. Or l'unité est au quotient comme le diviseur 6 est au nombre à diviser 24, ainsi 1. 4 :: 6. 24. Soient donc leurs Logarithmes $a\ b :: c\ d$ puisque a Logarithme de 1 est zero; donc $b+c=d$; donc $d-c=b$, c'est à dire la difference des Logarithmes de c & de d; ou le reste du Logarithme de d dont on a ôté c est le logarithme de b qu'on cherche.

Nous avons vû que la racine d'un nombre quarré est une moyenne proportionelle entre ce nombre quarré & l'unité. Par exemple 9 est un nombre quarré dont la racine est 3, il faut que $\div\!\div$ 1. 3. 9; d'où il suit que le double du Logarithme d'une racine est le nombre quarré : & par consequent que la moitié du Logarithme d'un nombre quarré est le logarithme de la racine de ce quarré. Car soient $\div\!\div\ a\ b\ c$ & qu'à l'ordinaire

naire a soit zero, pour lors $b + b = c$, donc la moitié de c sera égale à la moitié de $b + b$, ou à b. Quand il s'agit donc d'extraire la racine quarrée d'un nombre, ce qui est une operation longue; il faut chercher dans la Table le logarithme de ce nombre, dont la moitié sera le logarithme de la racine que l'on cherche.

Le triple du Logarithme d'une racine cube est le Logarithme du cube de cette racine cube; ainsi pour extraire la racine cube d'un nombre, au lieu de faire l'operation ordinaire encore plus longue que l'extraction des racines quarrées, il faut seulement prendre le tiers de son logarithme; & ce tiers est le logarithme de la racine cube que l'on cherche. En voilà la démonstration. L'unité est à la racine cube comme le quarré de cette racine est à son cube. Soit donc ce nombre cube 27 dont la racine est 3, alors 1 . 3 :: 9 . 27, ainsi ces quatre lettres qui désignent les Logarithmes de ces quatre nombres font cette proportion Arithmetique. $a . b :: c . d$ donc $a + d = b + c$. On suppose toûjours que a est zero; partant $d = b + c$. Or on a vû que le Logarithme d'un nombre quarré vaut le double du logarithme de sa racine; donc $c = b + b$. Ainsi substituant $b + b$ en la place de c, alors $d = b + b + b$, ou $d = 3b$; qui est ce qu'il falloit prouver, que d logarithme du nombre cube étoit le triple de b logarithme du nombre qui est la racine du nombre cube.

Je n'en dirai pas davantage de l'usage des Tables des Logarithmes, qui se trouve expliqué au commencement de ces Tables, dont voilà la premiere page, que je ne propose que pour y appliquer ce que nous venons de dire, & le rendre plus intelligible. Ces Tables se trouvent par tout.

N.

N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.
1	0. 0000000	31	1. 4913617
2	0. 3010300	32	1. 5051500
3	0. 4771213	33	1. 5185139
4	0. 6020600	34	1. 5314789
5	0. 6989700	35	1. 5440680
6	0. 7781513	36	1. 5563025
7	0. 8450980	37	1. 5682017
8	0. 9030900	38	1. 5797836
9	0. 9542425	39	1. 5910646
10	1. 0000000	40	1. 6020600
11	1. 0413927	41	1. 6127839
12	1. 0791812	42	1. 6232493
13	1. 1139434	43	1. 6334685
14	1. 1461280	44	1. 6434527
15	1. 1760913	45	1. 6532125
16	1. 2041200	46	1. 6627578
17	1. 2304489	47	1. 6720979
18	1. 2552725	48	1. 6812412
19	1. 2787536	49	1. 6901961
20	1. 3010300	50	1. 6989700
21	1. 3222193	51	1. 7075702
22	1. 3424227	52	1. 7160033
23	1. 3617278	53	1. 7242759
24	1. 3802112	54	1. 7323938
25	1. 3979400	55	1. 7403627
26	1. 4149733	56	1. 7481880
27	1. 4313638	57	1. 7558749
28	1. 4471580	58	1. 7634280
29	1. 4623980	59	1. 7708520
30	1. 4771213	60	1. 7781513

N.	Logarithmes.	N.	Logarithmes.
61	1. 7853298	91	1. 9590414
62	1. 7923917	92	1. 9637878
63	1. 7993405	93	1. 9684829
64	1. 8061800	94	1. 9731279
65	1. 8129134	95	1. 9777236
66	1. 8195439	96	1. 9822712
67	1. 8260748	97	1. 9867717
68	1. 8325089	98	1. 9912261
69	1. 8388491	99	1. 9956352
70	1. 8450980	100	2. 0000000
71	1. 8512583	101	2. 0043214
72	1. 8573325	102	2. 0086002
73	1. 8633229	103	2. 0128372
74	1. 8692317	104	2. 0170333
75	1. 8750613	105	2. 0211893
76	1. 8808136	106	2. 0253059
77	1. 8864907	107	2. 0293838
78	1. 8920946	108	2. 0334238
79	1. 8976271	109	2. 0374265
80	1. 9030900	110	2. 0413927
81	1. 9084850	111	2. 0453230
82	1. 9138139	112	2. 0492180
83	1. 9190781	113	2. 0530784
84	1. 9242793	114	2. 0569049
85	1. 9294189	115	2. 0606978
86	1. 9344984	116	2. 0644080
87	1. 9395193	117	2. 0681859
88	1. 9444827	118	2. 0718820
89	1. 9493900	119	2. 0755470
90	1. 9542425	120	2. 0791812

TRAITE'.

TRAITE'

de la Proportion Harmonique.

CHAPITRE I.

Ce que c'eſt que proportion Harmonique.

LA proportion Arithmetique & la Geometrique ſont jointes enſemble dans la proportion Harmonique. Pour le concevoir voyons ce qui peut faire que les ſons ſoient d'accord & agreables, ce qui n'arrive que lorſqu'il s'y trouve une union de ces deux proportions. Le ſon ſe fait par un trémouſſement ou certain mouvement de l'air qui ſe communique à une membrane tenduë dans l'organe de l'oüie. C'eſt cette impreſſion qui nous cauſe le ſentiment du ſon. Tout corps qui peut donner à l'air ce trémouſſement eſt ſonore. Par exemple une corde de boyau ou de leton qui eſt tenduë, fait un ſon lorſqu'on la pince, parce qu'elle agite l'air. En la pinçant on la tire hors de la ligne droite; où avant que de ſe remettre, & d'être en repos elle va & vient en delà & en deçà. Ces allées & ces venuës ſont ce que l'on appelle des vibrations qui cauſent un trémouſſement dans l'air, & qui par conſequent font ſon.

Pour entendre ce que c'eſt que ces vibrations, conſiderez un pendule, c'eſt à dire un fil au bout

 duquel

duquel pend une bale de plomb. Lorſqu'on retire ce pendule hors de la perpendiculaire, la bale y redeſcend, & paſſe au-delà, & ne s'y arrête qu'aprés pluſieurs allées & venuës, ce qu'on nomme des vibrations. Elles ſont à peu prés *iſochrones*, c'eſt à dire qu'elles ſe font en temps égaux; car au commencement quand la bale va plus vîte, elle parcourt un plus grand eſpace; ſur la fin qu'elle va plus lentement, elle a moins de chemin à faire.

Les cordes des inſtrumens font de même des vibrations quand on les pince. Elles ſemblent trembler, & c'eſt en tremblant qu'elles font trémouſſer l'air, ce qui produit le ſon. L'experience fait connoître que le ſon eſt plus grave lorſque les vibrations ſont plus lentes: qu'il eſt plus aigu quand elles ſont plus frequentes; ou que dans un même temps il s'en fait un plus grand nombre. Les cordes plus longues & plus groſſes & moins tenduës, ſe remuant plus lentement, leurs vibrations ſont plus tardives; auſſi leur ſon eſt plus grave. Une corde plus menuë, moins longue, plus tenduë, fait plus de vibrations dans un même eſpace de temps; ainſi ſon ſon eſt plus aigu.

Or trois choſes ſont l'agrément des ſons, la diſtinction, l'égalité, la varieté. 1°. Une corde bien égale dont les parties ſont bien unies comme ſont celles de boyau, & plus encore celles de leton, quand elle eſt tenduë, eſt plus capable de ces vibrations qui font trembler l'air; & comme ſon tremblement dure du temps, le ſon qu'elle fait ſe diſtingue bien mieux, & ſe conſerve dans une égalité, ſes vibrations étant à peu prés égales pour le temps. Les oreilles ne peuvent être contentes que de ce qu'elles diſtin-

guent;

guent; ainsi aucun rapport qui puisse être entre les sons ne leur plaît que quand il s'exprime par de petits nombres. C'est pour cela que les rapports Arithmetiques sont plus propres pour l'Harmonie, parce qu'ils ne consistent que dans une difference sensible.

2°. L'égalité des sons entre ceux que produisent les cordes d'un instrument, dépend du rapport de leurs vibrations. Deux cordes de même matiere, égales dans leur grosseur & dans leur longueur, & également tenduës, doivent faire dans un même espace de temps un égal nombre de vibrations quand elles sont pincées de la même maniere. Aussi l'experience montre qu'elles sont d'accord, & que si dans le temps d'une seconde, l'une fait dix vibrations, l'autre en fait un pareil nombre; & si elles sont pincées en même-temps, le temps de chaque vibration de l'une doit être égal au temps de la vibration de l'autre. Des oreilles qui sentent aisément cette égalité sont donc contentes; au lieu qu'elles sont troublées, & comme inquiettes, quand il n'y a aucun rapport exact qui se puisse exprimer par nombres entre leurs vibrations, en la même maniere que ce qui est confus & sans ordre déplaît à la vûë.

3°. L'égalité seroit neanmoins des-agréable si la varieté ne prévenoit le dégoût qu'elle pourroit causer. Il y a une varieté qui s'allie avec l'égalité, & qui peut ainsi satisfaire les oreilles; car si par exemple aprés un certain intervalle de temps deux cordes commencent & finissent exactement leurs vibrations; mais que dans cet espace l'une faisant une vibration, l'autre en fasse deux; ou lorsqu'une en fait deux, l'autre en fasse trois, il est évident que la varieté & l'égalité s'y ren-

contrent, & que leurs mouvemens s'accommodent. Les oreilles sentent & distinguent aisément cette alliance, si le rapport de leurs vibrations s'exprime avec de petits nombres; car je ne crois pas que l'oreille la plus fine pût remarquer l'accord des vibrations de deux ordres, si dans le temps par exemple que l'une en fait quarante-neuf, l'autre en faisoit precisément cinquante.

C'est l'experience qui a fait connoître que trois cordes d'instrument également grosses & tenduës, dont la longueur est comme ces trois nombres 3. 4. 6. forment ces trois principaux accords de la Musique; sçavoir l'Octave, la Quinte, & la Quarte, quand elles sont pincées. De deux de ces cordes qui seront l'une à l'autre comme 3 à 6; ou 1 à 2; la plus courte fera deux vibrations dans le temps que la plus longue n'en fera qu'une; ce qui fait l'octave. De ces trois cordes les deux qui sont l'une à l'autre comme 6 à 4, ou 3 à 2, la plus courte fera trois vibrations contre deux de la plus longue, ou six contre quatre; c'est cet accord qu'on nomme la quinte. Enfin deux de ces trois cordes dont la plus courte fera quatre vibrations dans le temps que l'autre n'en fera que trois, feront quand on les pince en même-temps ou successivement cet accord qui se nomme la quarte.

Ainsi l'experience a fait connoître que ces trois nombres 3. 4. 6. expriment la proportion qui fait les principaux accords de la Musique, & c'est pour cela que cette proportion se nomme *Harmonique*; car l'harmonie c'est l'accord des sons. Or remarquez en ces trois nombres que comme le premier 3 est au dernier 6, la difference du premier & du second, c'est à dire de 3 avec 4, qui

4, qui est 1, est à la difference du second & du quatriéme, c'est à dire de 4 & 6 dont la difference est 2, ce qui se peut exprimer ainsi.

3 9 :: 4 — 3 6 — 4.

Prenez garde à cette expression qui est la même que celle-cy, 3. 6. :: 1. 2. c'est à dire que les grandeurs que ces deux expressions marquent sont les mêmes 4 — 3 = 1 & 6 — 4 = 2. Vous voyez en quel sens ou comment la proportion Harmonique est composée de la proportion Arithmetique & de la proportion Geometrique. On y considere l'égalité de la difference, ainsi l'Arithmetique s'y trouve, & la Geometrique, puisqu'il y a aussi égalité de raisons.

CHAPITRE II.

Proprietez de la proportion Harmonique.

DEFINITION.

LA proportion Harmonique arrive lorsque les nombres sont tels que le plus petit est au plus grand geometriquement, comme l'excés du moyen sur le plus petit est à l'excés du plus grand sur le moyen; ou comme la difference du premier & du deuxiéme à la difference du deuxiéme & du troisiéme.

Ces nombres 3. 4. 6. sont en proportion Harmonique, car le plus petit 3 est la moitié de 6 le plus grand, comme l'excés du moyen 4 sur le plus petit 3 est à l'excés du plus grand 6 sur le moyen 4.

3. 6 :: 4 — 3. 6 — 4.

Premiere Proposition.

Problême premier.

Ces deux termes 12 & 5 d'une proportion Harmonique étant donnez, trouver le troisiéme.

J'appelle x ce troisiéme terme qui m'est inconnu & que je cherche. Voilà donc les trois termes 12. 5. x. de la proportion Harmonique donnée. Suivant la définition de la proportion Harmonique

$$12 \; x :: 12 - 5 \;\; 5 - x.$$

ce que je puis exprimer de cette maniere, car $12 - 5 = 7$.

$$12 \; x :: 7 \;\; 5 - x.$$

Le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Liv. III. n. 67 donc

$$60 - 12x = 7x$$

Ajoûtant à ces grandeurs égales de part & d'autre $12x$ selon les régles des additions, cela produit,

$$60 = 19x.$$

Et divisant ces deux grandeurs égales par 19; cela fait

$$\frac{60}{19} = x.$$

Ainsi le troisiéme terme que je cherchois est $\frac{60}{19}$, c'est à dire le quotient de 60 divisé par 19.

PROPOSITION SECONDE.
Premier Theorême.

Toutes les fois que la difference de deux nombres est plus grande que le plus petit des deux, on ne peut pas en montant trouver un troisiéme nombre en proportion Harmonique.

Soit 5 & 12 dont la difference 7 est plus grande que 5. Soit x le troisiéme terme, je dis qu'il ne peut pas être plus grand que 12. car supposé que 5. 12. x. soient en proportion Harmonique, alors

$$5 \quad x :: 12 - 5 \text{ ou } 7. \quad x - 12.$$

Or d'autant que 7 est plus grand que 5, il faudroit que $x - 12$ fut plus grand que x; ce qui est impossible, qu'une partie de x soit plus grande que toute la grandeur entiere x.

PROPOSITION TROISIE'ME.
Second Theorême.

Une proportion Harmonique peut diminuer à l'infini, mais non pas augmenter.

Ces trois nombres 4 6. 12. sont en proportion Harmonique, c'est à dire que

$$4. \ 12 :: 6 - 4 \quad 12 - 6$$

ou ce qui est la même chose.

$$4. \ 12 :: 2. \ 6.$$

Il faut donc démontrer qu'on ne peut pas continuer cette proportion en l'augmentant, c'est à dire trouver un troisiéme terme plus grand que 12, qui avec 6 fasse une proportion Harmonique, qu'on puisse ainsi augmenter. Supposons qu'on puisse trouver ce troisiéme terme : quel qu'il soit nommons le x. Voyons si la supposi-

non est possible : en premier lieu je puis ainsi exprimer cette supposition.

$$6 \; x :: 12 - 6 \; x - 12.$$

Or si x est plus grand que 12, comme on le suppose; il faudroit que le même nombre $12 - 6$ ou 6 eût un même rapport avec l'entier x qu'avec une partie de x, sçavoir avec $x - 12$; ce qui est absurde. S'il est donc vray, comme on le suppose, que

$$6. \; x :: 12 - c \; x - 12$$

il faut que x le troisiéme terme soit plus petit que 12. Cette démonstration fait donc voir que la proportion Harmonique ne se peut pas augmenter à l'infini, mais elle peut diminuer; car on peut trouver x qui sera plus petit, comme on l'a fait dans la premiere proportion.

PROPOSITION QUATRIE'ME.
Theorême troisiéme.

Trois grandeurs étant en proportion Arithmetique les produits. 1°. de la premiere par la seconde 2°. de la premiere par la troisiéme. 3°. de la deux'éme par la troisiéme sont en proportion Harmonique.

Soient $a \; b \; c$ en proportion Arithmetique; aprés avoir multiplié 1°. a par b, 2°. a par c, 3°. b par c, il faut prouver que ces trois produits $ab \; ac \; bc$ sont en proportion Harmonique; & qu'ainsi, selon la Définition précedente $ab \; bc :: ab - ac \; ac - bc$. Puisque $= a. \; b. \; c.$ donc Liv. III. n. 19. $a + c = 2b$. Multipliant $a + c$ & $2b$ grandeurs égales par abc les produits seront égaux. On aura ainsi une équation dont aïant réduit les deux membres aux plus simples termes, elle se trouvera être

a^2bc

$$a^2bc + abc^2 = 2ab^2c$$

ou $$a^2bc - ab^2c = ab^2c - abc^2.$$

Mais $a^2bc - ab^2c$ est le produit de ab multiplié par $ac - bc$. comme $ab^2c - abc^2$ est le produit de bc & de $ab - ac$, donc ces quatre grandeurs sont proportionnelles. Liv. III. n. 70.

$$ab\ bc :: ab - ac.\ ac - bc.$$

qui est ce qu'il falloit prouver. Car selon la définition de la proportion Harmonique, ces trois produits ab, bc, ac, sont en cette proportion.

COROLLAIRE.

Donc ayant trois nombres en proportion Arithmetique. ÷ 6. 4. 2. *ces trois produits* 6×4. 4×2. 6×2 *ou* 24. 12. 8. *seront en proportion Harmonique.*

PROPOSITION CINQUIE'ME.
Theorême quatriéme.

Si on divise la même grandeur par des diviseurs qui soient en progression Arithmetique, les quotiens de la division seront proportionnels Harmoniquement.

Soit a divisé par les termes de cette progression ÷ $b.\ b + d\ b + 2d$, les quotiens de ces diviseurs sont $\frac{a}{b}\ \frac{a}{b+d}\ \frac{a}{b+2d}$. Soit $\frac{a}{a} = e$, & $\frac{a}{b+d} = f$ & $\frac{a}{b+2d} = g$; ainsi il faut prouver que $e\ g :: c - f\ f - g$. Les quotiens de la même grandeur sont entr'eux réciproquement comme les diviseurs, Liv. III. n. 74. Ainsi $e\ f :: b + d\ b$; partant *dividendo* $e - f\ f :: b + d - b\ b$. Puisque $+ b - b =$ zero : Donc

$$e - ff :: d\ b$$

par le même raisonnement

$$f\ g :: b + 2d\ \ b + d \text{ donc } \textit{dividendo.}$$

$$ff - g :: b + 2d\ \ b + 2d - b - d$$

or $b + 2d - b - d = d$, donc

$$ff - g :: b + 2d.\ \ d.$$

On vient de voir que $e - ff :: d\ b$

donc *ex proportione turbata.* Liv. III. n. 73.

$$e - ff - g :: b + 2d\ b.$$

Or e, $g :: b + 2d\ b$, comme on vient de le voir, e est le quotient de a divisé par b, comme g est le quotient de a divisé par $b + 2d$, donc les quotiens de la même grandeur étant entr'eux réciproquement comme les diviseurs, Liv. III. n. 74. $e\ \ g :: b + 2d\ b :: e - ff - g$

donc $e\ \ g :: e - ff - g$, qui est ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Divisant ce nombre 60 par cette progression Arithmetique 1 2. 3. 4. 5. 6. &c. les quotiens seront en proportion Harmonique.

Les quotiens sont 60. 30. 20. 15. 12. 10. qui par le Theorême précedent doivent être en proportion Harmonique, ainsi ils font une progression Harmonique; car 60 20 :: 60 — 30. 30 — 20; & 30 15 :: 30 — 20 20 — 15, & 20 12 :: 20 — 15 15 — 12, & 15 10 :: 15 — 12 12 — 10. Ces nombres sont donc une progression Harmonique.

Si on vouloit avoir une plus longue progression Harmonique, il faudroit continuer la progression Arithmetique, & si elle avoit sept termes multiplier 60 par 7, ce qui feroit 420, lequel nombre divisé par les sept termes de la progression

gression Arithmetique, donneroit une nouvelle progression Harmonique, sçavoir 420. 210. 140. 105. 84. 70. 60. Vous voyez que c'est là une autre progression, qui continue la premiere, mais en descendant, comme nous avons vû que cela se pouvoit faire.

PROPOSITION SIXIE'ME.
Problême second.

Deux termes d'une Progression Harmonique étant donnez, trouver entr'eux tant de moyens qu'on voudra.

Soient les deux termes donnés $a = 5$ & $b = 30$. Je prens un nombre à discretion comme 60 que je divise par a & par b, c'est à dire par 5 & par 30, les quotiens sont 12 & 2. Si on cherche quatre termes entre a & b ou entre 5 & 30. Je cherche quatre moyens Arithmetiques entre 12 & 2, qui se trouvent 10. 8. 6. 4 ainsi $\frac{60}{8}$ 12. 10. 8. 6. 4. 2. Je divise donc 60 par ces six termes, les quotiens de ces divisions sont 5. 6. 10. 15. 30. qui par le Theorême précedent sont en proportion Harmonique. Ainsi on a trouvé ce que l'on cherchoit.

TRAITÉ

des Combinaisons & des changemens d'ordre.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que Combinaison. Comment on trouve les Combinaisons possibles de deux & de plusieurs choses.

LE mot de Combinaisons ne signifie proprement que la maniere de prendre plusieurs choses deux à deux, & de trouver toutes les differentes dispositions qu'elles peuvent avoir ainsi prises. Mais on donne une signification plus étenduë à ce mot. On entend la maniere de trouver generalement toutes les dispositions que peuvent avoir, soit deux, soit plusieurs choses, selon qu'on les voudra prendre, non seulement deux à deux, mais trois à trois, quatre à quatre, & de quelqu'autre façon, en les ajoûtant, en les multipliant, selon qu'il sera nécessaire. Changement d'ordre, c'est lorsque l'on change leur ordre de la maniere dont nous donnerons des exemples, aprés avoir expliqué les Combinaisons.

Les Combinaisons sont d'usage dans une infinité de rencontres. Souvent pour ne se point tromper, il faut faire des dénombremens exacts.

La

La difficulté est d'être assûré de cette exactitude, c'est à dire que rien n'a échapé; ce qu'on obtient par le secours des Combinaisons. Voilà en quoy consiste tout leur art. Comme dans toute l'Arithmetique, il faut 1°. *Faire par parties ce qu'il seroit impossible de faire tout d'un coup, en ne commençant que par des Combinaisons fort simples.*

2°. *Il faut faire avec ordre les premieres Combinaisons.*

3°. *Il faut tirer des consequences de ce qu'on a découvert en faisant les premieres Combinaisons.*

Un exemple rendra sensible ces trois Regles ausquels je réduis tout l'art des Combinaisons. On verra comme les premieres Combinaisons simples & aisées font découvrir tout ce qu'on peut sçavoir des Combinaisons composées, sans qu'on soit obligé de les faire.

On propose de connoître le nombre de tous les mots possibles qu'on peut faire des vingt-quatre lettres de l'Alphabet, faisant les uns de deux lettres, les autres de trois, les autres de quatre, jusques à les faire de vingt-quatre lettres. Cette proposition paroit d'abord fort difficile, & cependant il est facile de la résoudre en suivant les trois regles qu'on vient de donner. Car premierement je n'entreprendray pas de faire la chose tout d'un coup, & je ne commenceray que par des Combinaisons aisées. Je verray donc combien on peut faire de mots de deux lettres; ce que je feray par parties; car je n'examineray d'abord qu'en combien de manieres chaque lettre peut être combinée avec les autres lettres. En second lieu, suivant la seconde regle, je garderay un ordre naturel; car puisque la lettre *a* est

la premiere de l'Alphabet, je commenceray par elle ces Combinaisons & je suivrai l'ordre des lettres. Il me sera donc facile de trouver qu'on peut combiner la lettre *a* avec les 24 de l'Alphabet en 24 manietes que voilà : *aa*, *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af* *ag*, *ah*, *ai*, *ak*. *al*, *am*, *an*, *ao*, *ap*, *aq*, *ar*, *as*, *at*, *au*, *ax*, *ay*, *az*, *&c.*

Maintenant je dois faire ce que la troisiéme regle m'avertit de faire, qui est de considerer cette premiere combinaison qui est trés simple, d'y faire attention, & de voir ce que j'en puis conclure. Il est évident que ce que j'ay fait en commençant par *a*, je le puis faire en commençant par *b*; c'est à dire combinant *b* la seconde lettre avec les 24 lettres, suivant le même ordre, disant : *ba*, *bb*, *bc*, *&c.* par conséquent puisque chaque lettre se combine en 24 manieres differentes, ou elle tienne toûjours la premiere place ; on peut donc faire vingt-quatre fois vingt-quatre, c'est à dire 576 combinaisons differentes, ou mots de deux lettres. Ainsi cette premiere combinaison simple & aisée de *a* avec les lettres de l'Alphabet me fait découvrir le nombre de tous les mots de deux lettres, & je vois bien que s'il les faloit tous écrire, je le pourrois faire sans qu'il m'en échapât un.

Cette premiere & seule combinaison me donne encore une plus grande connoissance, & pour le dire en un mot elle me fait connoître tout ce que je cherche. Car pour trouver tous les mots de trois lettres, je n'ay qu'à garder le même ordre, combinant chacun de ces mots de deux lettres avec chacune des vingt quatre lettres. Par exemple, comme le premier mot étoit *aa*, disant *aaa*, *aab*, *aac*, *&c.* d'où il est évident que comme je combineray chaque mot de deux lettres en

24

24 manieres differentes, les combinant avec les 24 lettres de l'Alphaber, le nombre des mots de trois lettres sera vingt quatre fois plus grand que celuy des mots de deux lettres; ainsi multipliant 576 par 24; ce qui fait 13824, j'auray le nombre des mots de trois lettres, sans faire aucune combinaison.

Il n'en faut pas davantage, car j'apperçois qu'en combinant chacun de ces mots de trois lettres avec les 24 lettres, gardant toûjours le même ordre, disant par exemple *aaaa*, *aaab*, *aaac*, *&c.* le nombre des mots de quatre lettres doit être 24 fois plus grand; ce qui me découvre une proportion ou progression qui regne icy; sçavoir que le nombre des mots de quatre lettres sera 24 fois plus grand que celuy des mots de trois lettres: que le nombre des mots de cinq lettres sera 24 fois plus grand que celuy des mots de quatre lettres; & qu'ainsi ces Combinaisons augmentent dans une même proportion. On peut donc connoître tout d'un coup, aprés avoir fait cette premiere combinaison simple; combien par exemple il y auroit de mots faits de treize lettres, & si l'on veut quel seroit le nombre de toutes les combinaisons ensemble. Car une progression étant donnée connoissant le premier terme & la raison qui regne, il est facile de connoître quelqu'autre de ses termes qui soit proposé, & la somme de tous les termes.

Ce seul exemple suffit pour comprendre l'art des Combinaisons. On trouve toûjours de la même maniere une certaine proportion qui regne. On la découvre d'abord lorsqu'on commence par les Combinaisons les plus simples, & qu'on suit un ordre naturel. Voyons le dans ce second exemple. On demande en combien de manieres

on peut combiner les dix premiers chifres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. en les prenant deux à deux, aprés trois à trois, continuant jusqu'à dix. La valeur des chifres dépendant de leur place, il faut bien considerer en les combinant qu'ils gardent la même place. 12 & 21 ne sont pas une même chose. Ainsi commençant la combinaison par 1, il faut le mettre à la premiere place; & on trouvera d'abord que le nombre de ces combinaisons sera une progression dans laquelle regne la raison décuple.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.
11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 10.

Vous voyez que les dix premiers chifres pris seuls, sont le premier terme de cette progression. Le chifre 1 combiné avec chacun de ces dix chifres, fait dix combinaisons; partant chacun des dix étant ainsi combinés,

21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 20.

combinant, dis-je, tous les autres chifres en la même maniere, cela sera cent combinaisons.

Cela seul vous fera connoître que les dix chifres pris de la même maniere trois à trois, feront mille combinaisons. Ainsi tout d'un coup, on voit le nombre de combinaisons que ces dix chifres peuvent faire pris par exemple sept à sept; & quel est le nombre de toutes les combinaisons, qui sera la somme d'une progression. Par des chifres on peut entendre quelque chose qu'on voudra; & on voit comment quel que soit leur nombre, il est facile d'en trouver toutes les combinaisons possibles.

CHAPITRE II.

Les Combinaisons se font differemment, selon la fin pour laquelle on les fait.

ON peut avoir differentes vûës en faisant les Combinaisons: les unes sont inutiles à la fin qu'on se propose, & celles-là se doivent connoître pour les exclure, ou pour les éviter, afin qu'elles ne broüillent point. Des exemples feront comprendre ce qu'on veut faire remarquer icy. En même-temps on verra comme les combinaisons sont d'usage dans les choses mêmes qui semblent n'avoir aucune liaison avec les Mathematiques. On appelle *syllogisme* un raisonnement composé de trois propositions, qui sont nécessairement ou des propositions universelles affirmatives, comme est celle-cy. *Tous les hommes sont mortels*: ou des propositions universelles négatives, comme celle cy. *Aucun homme n'est immortel*: ou ces propositions sont particulieres & affirmatives: *Comme il y a des hommes sçavans.* Ou enfin ces propositions sont particulieres négatives. *Il y a des hommes qui ne sont pas raisonnables.* On marque avec ces quatre voyelles *A. E. I. O.* la qualité de ces propositions. *A* marque une proposition universelle affirmative: *E* une proposition universelle négative. *I* une proposition particuliere affirmative. *O* une proposition particuliere négative. Or cette affirmation ou negation, universalité ou particularité des trois propositions dont un syllogisme est composé, est ce qu'on appelle *mode*

a'un

d'un syllogisme, lequel mode se marque avec trois de ces quatre voyelles. Si ces propositions sont toutes universelles affirmatives, son mode sera *AAA*. Ainsi pour sçavoir combien on peut faire de differens syllogismes, quant à cette qualité de leurs trois propositions, il faut voir en combien de manieres on peut combiner ces quatre voyelles *A. E. I.* O. prenant trois de ces voyelles à la fois, par exemple ou *AAA* ou *AAE*, ou *AAI* ou *AAO*. Vous voyez devant vos yeux toutes ces Combinaisons, & l'ordre que j'ay tenu.

1. Aaa.	17. Eee.	33. Iii.	49. Ooo.
2. Aea.	18. Eae.	34. Iai.	50. Oao.
3. Aia.	19. Eie.	35. Iei.	51. Oeo.
4. Aoa.	20. Eoe.	36. Ioi.	52. Oio.
5. Aee.	21. Eaa.	37. Iaa.	53. Oaa.
6. Aii.	22. Eii.	38. Iee.	54. Oee.
7. Aoo.	23. Eoo.	39. Ioo.	55. Oii.
8. Aae.	24. Eea.	40. Iia.	56. Ooa.
9. Aai.	25. Eei.	41. Iie.	57. Ooe.
10. Aao.	26. Eeo.	42. Iio.	58. Ooi.
11. Aei.	27. Eai.	43. Iae.	59. Oae.
12. Aeo.	28. Eao.	44. Iao.	60. Oai.
13. Aie.	29. Eia.	45. Iea.	61. Oea.
14. Aio.	30. Eio.	46. Ieo.	62. Oei.
15. Aoe.	31. Eoa.	47. Ioa.	63. Oia.
16. Aoi.	32. Eoi.	48. Ioe.	64. Oie.

J'ay suivi celuy de l'Alphabet, & commençant par *A*, j'ay trouvé seize Combinaisons, dans lesquelles *A* tient la premiere place; ainsi je vois que puisqu'il y a quatre voyelles *A. E I O.* il doit y avoir quatre fois seize ou soixante-quatre combinaisons. Il peut donc y avoir soixante-

quatre

quatre differens syllogismes. C'est aux Philosophes qui enseignent l'art de raisonner, d'examiner si tous ces soixante-quatre modes sont bons. Ils établissent des regles, selon lesquelles par exemple on ne peut rien conclure de deux propositions négatives: ainsi ces modes *EEE*, *EOE* & semblables ne sont pas concluans. De deux propositions particulieres on ne peut non plus rien conclure; & jamais la derniere proposition ne peut être plus étenduë que les premieres. Suivant ces regles & quelques autres, un Logicien peut marquer les syllogismes qui sont bons ou mauvais, & traiter avec la clarté & l'exactitude des Mathematiques cette matiere.

Voyons la même chose dans l'exemple suivant; & comment on doit exclure les combinaisons inutiles au dessein pour lequel on les fait. On demande en combien de maniere se peuvent combiner les sept Planetes. La chose seroit aisée si c'étoit toutes leurs combinaisons possibles qu'on cherchât. Désignons premierement les sept Planetes par les sept premieres lettres de l'Alphabet. *a* marque le Soleil, *b* la Lune, ainsi de suite. Si on combine *a* avec luy même & avec les autres lettres suivantes, cela fera ces sept combinaisons *aa. ab. ac. ad. ae. af. ag.* combinant de même chacune des sept Planetes cela fera sept fois sept, c'est à dire 49 combinaisons. Si on combinoit *aa* premierement avec luy même, *aaa*, *aab*, *aac*, & qu'on fit la même chose des 49 combinaisons précedentes, on en trouveroit sept fois quarante-neuf, c'est à dire 363; ce qui montre que ces combinaisons font une progression dont la raison est septuple. Mais toutes ces Combinaisons ne sont pas utiles, si l'on demande que la même Planete ne se trou-

ve

ve point deux fois dans une même combinaison ; ou qu'on ne la combine point avec elle-même, qu'ainsi il faille exclure des combinaisons, qu'on cherche, ces combinaisons *aa. bb. cc*, *&c.* On peut aussi demander que celles qui ont les mêmes lettres ne soient comptées que pour une ; que par exemple *ab* & *ba*, ne soient pas comptées pour deux differentes combinaisons, comme effectivement le Soleil & la Lune, & la Lune & le Soleil ne sont qu'une même chose. Alors le nombre des combinaisons sera bien plus petit ; car en premier lieu il faudra exclure ces sept combinaisons, où une lettre est combinée avec elle-même, comme *aa. bb. cc*, *&c.* Ainsi de 49 il en faut déja retrancher 7, reste 42. Or dans celles qui restent se trouvent encore *ab* & *ba*, *ac* & *ca*, *&c.* qui ne peuvent être pris que pour une combinaison, il en faut donc retrancher la moitié ; ainsi de 42 il ne reste que 21 combinaisons des sept Planetes, les prenant deux à deux, selon les conditions proposées.

Voicy la maniere d'exclure toutes les combinaisons qu'on regarde icy comme inutiles. Puisqu'on ne peut pas combiner chaque planete avec elle-même, je ne dois combiner *a* la premiere qu'avec les six lettres suivantes ; ce qui ne fait donc que six combinaisons. Venant à combiner *b*, comme cette lettre a deja été combinée avec *a*, je ne la puis combiner qu'avec les cinq dernieres lettres. Je ne feray donc que cinq combinaisons differentes. Par la même raison la troisiéme lettre *c* ne peut être combinée qu'avec quatre, la quatriéme *d* qu'avec trois, la cinquiéme qu'avec deux, la sixiéme qu'avec une. La septiéme se trouve déja dans les combinaisons précedentes. Ainsi il n'y a d'utiles que ces combinaisons

naiſons qui font cette progreſſion.

÷ 6. 5. 4. 3. 2. 1.

La ſomme de cette progreſſion eſt 21.

Pour combiner les Planetes trois à trois, il faut combiner ces 21 combinaiſons trouvées ou 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1. Mais comme je ne puis pas combiner *a* avec ſoi même, & qu'il ſe trouve dans les 6 premieres combinaiſons, je ne le combine qu'avec les combinaiſons ſuivantes qui ſont 5 + 4 + 3 + 2 + 1, ce qui ne fait que 15 nouvelles combinaiſons. *b* ſe trouve auſſi dans ſix combinaiſons, ſçavoir *ab. cb. db. eb. fb. gb.* & dans ces cinq autres, ſçavoir *bc. bd. be. bf. bg.* Je n'en puis donc faire de nouvelles combinaiſons qu'avec 4 + 3 + 2 + 1, ce qui fait 10.

Par les mêmes raiſons je ne puis combiner *c* qu'avec 3 + 2 + 1, ce qui fait 6. & *d* qu'avec 2 + 1, & *e* avec + 1. Ainſi ces combinaiſons des ſept Planetes priſes trois à trois ne font que 15 + 10 + 6 + 3 + 1; ce qui fait trente-cinq.

Par cette méthode on trouvera qu'on ne peut faire que 35 combinaiſons des ſept Planetes les prenant quatre à quatre. 21 ſi on les prenoit cinq à cinq. 7 ſi on les prend ſix à ſix; & une ſeule combinaiſon ſi on les prend toutes ſept; car dans cette ſeule combinaiſon *abcdefg* elles ſe trouvent, ainſi il ne peut pas y avoir d'autres combinaiſons de ces ſept lettres. Toutes les combinaiſons des ſept Planetes deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on les prenne toutes ſept, ſont donc au nombre de 120, qui ſe pourroit trouver tout d'un coup par le moyen d'une progreſſion : ce qu'il faut voir, & ce qui prouvera ce que nous

avons

avons dit; qu'en faisant les combinaisons avec ordre, on découvre des progressions qui abregent l'operation.

Une seule chose ne peut se prendre qu'une fois séparément de toute autre. Deux choses comme *a* le Soleil, & *b* la Lune, ne se peuvent joindre que d'une maniere; car *ab* & *ba* ne sont pas deux conjonctions differentes. Si nous ajoûtons *c* une troisiéme Planete, ces trois Planetes *a. b. c.* pourront faire quatre conjonctions *ab*, *ac*, *bc*, & cette quatriéme *abc* qui comprend ces trois Planetes. Quatre Planetes peuvent faire ces onze conjonctions que voilà, *ab. ac. ad. bc. bd. cd. abc. abd. acd. bcd. abcd.* Quand on prend les Planetes séparément, cela s'appelle leur disjonction. Or si on ajoûte au nombre de leurs conjonctions celuy de leur disjonction: par exemple à celuy de la conjonction de deux planetes, qui est 1, ce nombre 2 de leur disjonction: de même qu'on ajoûte à 4, qui est le nombre des conjonctions de trois Planetes, celuy de leur disjonction qui est 3; & à 11 celuy de la conjonction de quatre Planetes celuy de leur disjonction qui est 4, vous aurez ces nombres,

1. 3. 7. 15.

Ajoutez-y l'unité, & viendra

2. 4. 8. 16.

Ces nombres font une progression dans laquelle regne la raison double. Nous avons vû qu'on pourroit trouver 120 conjonctions des Planetes toutes differentes. Ajoûtez à ce nombre 120 leurs disjonctions, qui sont 7, cela fera 127. Or ayant ôté l'unité de chacun des termes de cette progression double

∺ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128.

viendront ces nombres

1.

1. 3. 7. 15. 31. 63. 127.

Ainsi vous voyez que le septiéme terme de cette suite de nombres donne toutes les conjonctions & disjonctions possibles des sept Planetes.

Il semble que cela ne s'accorde pas avec ce que nous avons dit cy-dessus, qu'il y avoit 21 combinaisons des sept Planetes prises deux à deux: 35 quand elles sont prises trois à trois, &c. mais dans ces combinaisons nous les prenions toutes sept. Nous combinions par exemple *a* avec les six autres; au lieu que dans ces combinaisons dont le nombre est exprimé par ces nombres 1. 3. 7. 15., &c. on considere les Planetes en premier lieu comme s'il n'y en avoit que deux; ensuite qu'il n'y en eût que trois. Mais de quelque maniere qu'on fasse ces combinaisons, toutes les conjonctions & disjonctions possibles des sept Planetes ou des sept choses fait toûjours précisément 127. Nous avons trouvé 120 combinaisons; ajoûtez les 7 disjonctions cela fait ce nombre 127.

CHAPITRE III.

Des Changemens d'ordre.

IL est aussi utile de considerer comment on peut decouvrir tous les changemens possibles d'un certain nombre de choses, par exemple en combien de differentes manieres on pourroit changer l'ordre de dix personnes assis à une même table. Il ne faut point d'autres regles que celles que j'ay proposées pour les combinaisons.

1°. *Il faut commencer par examiner les changemens les plus simples.*

2°. *Ob-*

2°. *Observer un ordre dans cet examen.*

3°. *Et reconnoistre s'il n'y a point quelque espece de proportion, laquelle étant trouvée, on puisse juger par les premiers changemens simples & faciles, de tous ceux qui sont plus composez.*

Je me sers des lettres de l'Alphabet, dont je suis l'ordre. Une seule lettre, comme *A* ne peut pas recevoir de changement. Quand on la joint avec une seconde lettre, comme avec *B*, puisqu'on peut mettre *B* devant ou aprés, *AB* ou *BA*, cela fait deux changemens; ainsi deux lettres se peuvent changer en deux manieres. Si j'ajoûte une troisiéme lettre *C*: comme on peut mettre *C* dans trois places de *AB*, sçavoir ou au commencement, *CAB*, ou au milieu *ACB*, ou à la fin, *ABC*; & qu'on peut faire la même chose dans *BA*, plaçant *C* en trois endroits, ou au commencement, ou au milieu, ou à la fin, *CBA*, *BCA*, *BAC*, comme vous le voyez.

ABC	*BAC*	*CAB*
ACB	*BCA*	*CBA*

Je connois que je puis disposer trois lettres, & par consequent trois choses en six manieres. Si j'ajoûte *D* une quatriéme lettre, comme en chacun des six changemens dont trois lettres sont capables, il y a quatre places où je puis mettre *D*, par exemple dans *ACB*, je puis mettre *D* en quatre endroits differens, écrivant ou *DACB*, ou *ADCB*, ou *ACDB* ou *ACBD*. Si, dis je, j'ajoûte une quatriéme lettre, ces 4 lettres, & partant 4 choses seront capables de 4 fois 6 differens changemens, c'est à dire de 24 changemens. Il n'en faut pas davantage pour me faire appercevoir que cinq choses seront capables de 5 fois 24 changemens, c'est à dire de 120: Que multi-

pliant

pliant 120 par 6, ce produit 720 sera le nombre des changemens de 6 lettres : Et 5040 produit de 720 par 7, le nombre des changemens de 7 lettres : 40320 produit de 5040 par 8, le nombre des changemens de 8 lettres : 362880 produit de 40320 par 9, le nombre des changemens de 9 lettres ; Et qu'enfin 3628800 produit de 362880 par 10 est le nombre des changemens possibles de dix lettres, & par consequent de dix hommes assis à une même table.

La regle generale c'est d'écrire les termes de la progression naturelle. Chacun de ces termes marquera le nombre des choses ou des lettres, dont on cherche les differens changemens. Sous cette progression il faut ranger les continuels produits des termes de dessus, comme vous le voyez.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	2.	6.	24.	120	720.	5040	40320	362880

Le produit des deux termes naturels 1 & 2 c'est 2 ; ce produit multiplié par le troisiéme terme c'est 6 que j'écris sous 3. ce 6 me fait connoitre que trois choses reçoivent 6 changemens. Je multiplie le produit 6 par 4 ; j'en écris le produit 24 sous 4. Ensuite je multiplie 24 par 5, & j'écris 120 le produit sous 5. je continuë de même. Je trouve par exemple que six choses peuvent changer en 720 manieres differentes, Ainsi pour connoître de combien de changemens sont capables 7 lettres je n'ay qu'à multiplier 720 par 7, & le produit 5040 est le nombre de ces changemens.

Ceci peut servir à trouver tous les changemens possibles des lettres du nom d'une personne, de maniere qu'elles fassent un autre nom qui ait un sens obligeant ou satyrique, selon

qu'on veut louer ou blâmer. C'est ce qu'on appelle faire des *Anagrammes*; dont l'art ne consiste qu'à trouver toute les changemens possibles des lettres d'un nom. On les compte, & aussitôt on connoit combien elles peuvent recevoir de differens changemens. Vous pourrez remarquer la difference qu'il y a entre les combinaisons & changemens d'ordre. Proprement combiner, c'est un certain nombre de choses étant donné les prendre les unes après les autres, ou deux à deux ou trois à trois. Dans le changement d'ordre, on ne fait que changer la place des choses qui sont proposées. Quand la même lettre se trouve plusieurs fois dans un nom on luy donne differentes figures, comme en ce nom *Jesus*, où il y a deux *s*. il en faut faire une italique & l'autre romaine, ou l'une majuscule & l'autre petite, pour les distinguer. Ces cinq lettres reçoivent 120 changemens, ainsi on en peut faire autant de noms parmi lesquels on choisit ceux qui signifient quelque chose. Qannd le nombre des choses dont on cherche les changemens est grand, ce nombre est prodigieux; par exemple celuy des changemens des dames d'un damier, & des piéces d'un Jeu d'échecs. Qui le croiroit s'il n'y en avoit démonstration, que dix hommes assis à une même table peuvent changer de place en 3628800 manieres differentes.

On peut faire plusieurs questions sur le changement d'ordre; par exemple celle-cy. En combien de manieres on peut changer l'ordre des mots de ce vers Latin

Tot tibi sunt dotes virgo, quot sidera cœlo.

de sorte que ce soit toûjours un vers Latin. Pour entendre le détail de ce qu'on doit faire: il faut avoir quelque connoissance de la poësie

Latine

Latine ; & je n'écris que pour des François. Ceux qui ſçavent les regles de cette Poëſie, & qui gardent les trois regles que nous avons données pour les combinaiſons & les changemens d'ordre, trouveront aiſément en combien de manieres ce vers ſe peut changer ſans perdre ſa meſure ; ou de ſorte que ce ſoit toûjours un vers Latin, dont le cinquiéme pied ſoit comme il le doit, un *dactile*, & le ſixiéme un *ſpondée*. Ainſi comme dans ce vers, il n'y a que ces dactiles *ſidera* & *tot tibi* ou *ſunt tibi*, ou *quot tibi*: il faut que *ſidera* ou *tibi* ſe trouvent toûjours au cinquiéme pied.

Tot tibi ſunt dotes virgo quot ſidera cœlo,
Sidera quot cœlo tot dotes ſunt tibi virgo.

En changeant ainſi l'ordre de ces mots ; on peut faire un nombre infini de differens vers dont chacun ne ſera compoſé que de ces mots. Mais dans les uns le dernier pied ſera *cœlo*, dans l'autre *virgo*; l'un aura au cinquieme *ſidera*, l'autre *tot tibi*. Tous auront quelque difference ; quelque ordre particulier. Le Pere Preſtet dans la premiere édition de ſes Elemens, compte 2196 changemens poſſibles des mots qui compoſent ce vers. Dans la ſeconde il en trouve 3376 & qu'ainſi de ce ſeul vers on en peut faire ce grand nombre de differens vers qui ſeront tous compoſez des mêmes mots, & qui ne differeront entr'eux que parce que ces mots ſeront differemment placez.

CHAPITRE IV.

Moyens de trouver une combinaison dont le rang est donné dans une suite de plusieurs combinaisons, ou la combinaison étant donnée, trouver son rang. Application de ces moyens à la periode Julienne.

CEs moyens sont utiles dans les occasions. Voyons les dans l'application que nous en allons faire à la période Julienne. Cette periode est faite de la multiplication de ces trois cycles, du Solaire de 28 ans, du Lunaire de 19, & de l'Indiction qui est une révolution de quinze années. Cette periode est une combinaison de ces trois cycles dont je marque les années avec des lettres que vous voyez. Je combine, 1°. le cycle Solaire avec le cycle Lunaire, combinant A avec a & avec toutes les 19 lettres du cycle Lunaire. Cela fait 19 combinaisons. Combinant ensuite B & toutes les 28 lettres du cycle solaire avec les 19 du cycle Lunaire, cela fait vingt-huit fois dix-neuf combinaisons; c'est à dire 532 toutes differentes. Combinant ensuite ces 532 combinaisons avec les 15 lettres du cycle des Indictions, cela fait quinze fois cinq cens trente deux, ou 7980 combinaisons differentes. On pourroit augmenter ce nombre de combinaisons si on comptoit les changemens d'ordre, comme seroient A a & a A & A a *A* : mais ce ne sont pas differentes choses non plus que celles cy *K* b *D* & b K D ou *D* b K. Car il est évident que dire

dire le 10. du cycle Solaire, le ſecond du cycle Lunaire, c'eſt la même choſe, que ſi on commençoit par le Lunaire, diſant le ſecond du cycle Lunaire, le 10. du Solaire.

Cycle Solaire.		*Cycle Lunaire.*		*Cycle des Indictions.*	
A	1	a	1	*A*	1
B	2	b	2	*B*	2
C	3	c	3	*C*	3
D	4	d	4	*D*	4
E	5	e	5	*E*	5
F	6	f	6	*F*	6
G	7	g	7	*G*	7
H	8	h	8	*H*	8
I	9	i	9	*I*	9
K	10	k	10	*K*	10
L	11	l	11	*L*	11
M	12	m	12	*M*	12
N	13	n	13	*N*	13
O	14	o	14	*O*	14
P	15	p	15	*P*	15
Q	16	q	16		
R	17	r	17		
S	18	s	18		
T	19	t	19		
V	20				
X	21				
Y	22				
Z	23				
β	24				
γ	25				
δ	26				
ζ	27				
θ	28				

La periode Julienne est une suite de 7980 combinaisons differentes. Chacun de ces trois cycles étant revolu, il recommence. Par exemple, l'année 28. du cycle Solaire, est suivie de la premiere année du même cycle. Ainsi du cycle Lunaire & du cycle des Indictions. Ces trois cycles commencent & finissent sans que dans toute la periode qui est de 7980 combinaisons, deux années ayent les mêmes cycles.

I. QUESTION.

Une année des 7980 de la periode Julienne étant donnée, trouver quels sont les cycles de cette année, & par consequent la combinaison caractere de cette année.

IL est évident que rejettant autant qu'on le peut un cycle entier de l'année proposée ce qui reste est l'année du cycle qu'on cherche. Si par exemple, de cette année 4714 de la periode Julienne, on rejette autant qu'on le peut le cycle Solaire 28 ce nombre 10 qui restera, sera l'an du cycle Solaire de cette année 4714; puisqu'après 28 années, le cycle Solaire recommence toûjours.

Or pour rejetter un cycle autant qu'on le peut & trouver ce qui reste, il faut diviser l'année proposée par le cycle entier. Ce n'est pas le quotient de cette division qu'on cherche. Mais c'est parce que s'il ne reste rien la division faite, on connoît que c'est la derniere année du cycle entier. S'il reste quelque chose, ce reste est l'année particuliere du cycle entier. Ainsi pour trouver les trois cycles de l'année 4714 il en faut rejetter les cycles 28, 19. 15. ce qui se fait divisant ce nombre 4714 par ces cycles 10. par 28. pour connoître quel étoit le cycle solaire de cette année 4714. La division faite le reste qui sera 10, donnera ce cycle; de mê-

me

me pour connoître quel sera le cycle Lunaire de la même année, il faut diviser 4719 par 19, le reste 2 sera le cycle Lunaire de cette année; enfin en le divisant par 15, le reste 4 marquera que l'Indiction étoit 4. Prenant ensuite les lettres qui sont vis à vis des années 10. 2, 4 en chaque cycle, on trouvera cette combinaison K *b D*, qui ne se trouve que dans cette année 4714.

La premiere année de l'Ere Chrétienne à ces mêmes cycles; partant cette premiere année convient avec l'année 4714. de la periode Julienne, qui est ainsi nommée, parce qu'on la joint avec nos années qui ont été réglées par Jule-Cesar; d'où elles ont été appellées les années Juliennes. On trouve ainsi les cycles de toutes les autres années de la periode Julienne, qui seront données.

II. Question.

La combinaison propre à une certaine année étant donnée, ou les cycles de cette année étant connus, connoître cette année.

Soit proposé cette combinaison K *b D* ou ce qui est la même chose, ces trois nombres 10 du cycle Solaire, 2 du cycle Lunaire, & 4 du cycle des Indictions, trouver l'année de la periode Julienne à qui convienne cette combinaison K *b* D où ces trois cycles 10. 2. 4. Tout l'artifice est de trouver le plus petit nombre, qui aprés avoir été divisé par les trois cycles entiers, donne ces trois nombres, c'est à dire qui étant divisé par 28, reste 10; par 19 reste 2: par 15 reste 4. Ce nombre qu'on trouvera sera l'année de la periode Julienne que l'on cherche; & par consequent le rang de la combinaison proposée K *b D* dans la suite de 7980 combinaisons. Nous avons enseigné comment l'on peut trouver ce nombre. Avant que

de resoudre la question presente, il faut relire avec une nouvelle attention les 31. 32. 33. 34. 35. Problêmes du Chapitre VI du Livre VII. Aprés quoy tout sera facile. Il s'agit dans cette question de trouver le plus petit nombre, qui divisé par 28 reste 10, par 19 reste 2, par 15 reste 4. voilà ce qu'il faut faire, selon qu'on l'a enseigné dans les cinq Problêmes marqués.

1°. Il faut trouver un nombre qui divisé par 19 ne reste rien, par 28 reste 1. Ce nombre se trouvera être 57 par le Problême 31.

2°. Selon le Problême 32; je prens la difference du cycle Lunaire qui est dans cet exemple 2 d'avec le cycle Solaire qui est 10, cette difference est 8, par laquelle je multiplie le nombre 57 — 1. ou 56. Le produit sera 448, auquel ayant ajoûté le cycle Solaire 10. cela fait 458. Ce nombre aura cette proprieté, que divisé par 28 restera 10, par 19 restera 2.

3°. Il faut chercher par le Problême 31. un nombre, qui divisé par 28 & par 19 ne reste rien, & par 15 reste une unité. Ce nombre se trouvera être 1064.

4°. De ce nombre 458 qui a les deux premiers cycles, il faut ôter le cycle donné de l'Indiction, qui est 4 reste 454, par lequel nombre, ou difference ayant multiplié 1064 je trouverois un produit; mais qui ne seroit pas le plus petit nombre qui eut les conditions que je cherche. Ainsi je rejete de 454 le nombre entier de l'Indiction autant qu'il se peut: c'est à dire que je divise 454 par 15, le reste est 4 par lequel nombre ayant multiplié 1064, le produit sera 4256, ayant ajoûté à ce nombre 458, viendra 4714, qui sera l'année de la periode Julienne à laquelle conviendra la combinaison K*b*D dont on cherchoit le rang.

FIN

ad p. 372. Probl. dixieme.

On a trouvé que $z = \sqrt{a^2 - b}$.

Donc la plus grande des grandeurs inconnues est $a - z = a - \sqrt{a^2 - b}$. et la plus petite est $a + z = a + \sqrt{a^2 + b}$.

Pour trouver aisement des exemples je nomme $a^2 + b = d^2$

Donc $a^2 - d^2 = b$.

Je prens a et d arbitrairement.

Soit $a = 4$. $d = 2$. Donc $b = 12$.

Donc $a - z = 2$. et $a + z = 6$.

et la Somme $2a = 8$.

Soit $a = 2$. $d = 1$. Donc $b = 3$.

$a - z = 1$ et $a + z = 2$. et la Somme $2a = 4$.

ad pag. 366. Probleme de l'anesse.

Je nomme le nombre des sacs de l'anesse x et celui des sacs de la Mule y.

Donc par la condition du Probleme

$x-1=y+1$ & $x+1=2y-2$.

$x-2=y$. $\frac{x+3}{2}=y$.

$$x-2=\frac{x+3}{2}.$$

$$2x-4=x+3.$$

Q. $x=7$. et $y=5$.

---

ad p. 372. Probl. dixieme.

Alia Solutio

Je nomme la premiere grandeur inconnue x et la seconde y.

Par la condition du Probl.

$x+y=a$. Q. $x=a-y$.

et $xy=b$ $ay-y^2=b$.

$$y^2-ay=-b$$

$$y^2-ay+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-b$$

$$\text{Q. } y=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Unde Sequens fluit Regula.

A Quadrato Semi Summae duarum quantitatum subtrahatur factum earundem, et ex residuo extrahatur Radix, cui si addatur Semi Summa duarum quantitatum, prodit una ex quantitatibus quaesitis, quae alteram statim detegit.

ut

Ut vero facile numeri inveniantur, quorum alter summam, alter factum duorum aliorum incognitorum numerorum exhibeat; quantitates illae sub Signo Radicali positae Quadrato alicui aequandae quò ex illis valor unius inveniri possit.

ex. gr. $\frac{a^2}{4} - b = d^2$. d. pro lubitu sumit.

$\frac{a^2}{4} - d^2 = b$. Invento valore

$b = xy$ facto duorum numerorum incognitorum valor illius in numeris quaerendus

Iam pro lubitu $a = 8$ et $d = 2$.

Et $b = 12$. Et. Suma $= 8$.
Factum $= 12$.

Numeri ipsi incogniti ex Regula inveniendi.

Ad pag. 380. Probl. XXII.

Alia Solutio.

Je nomme la premiere grandeur inconnue x
et la seconde ——— ——— — y.

Donc. $x+y=a$. Somme.

$y=a-x$. et $xy+x^2+y^2=c$

au lieu de y je mets $a-x$.

& $ax-x^2+x^2+a^2-2ax+x^2=c$.

$$a^2-ax+x^2=c$$

$$x^2-ax=c-a^2$$

$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}=c-a^2+\frac{a^2}{4}$$

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{c-\frac{3a^2}{4}}.$$

Pour les exemples.

$c-\frac{3a^2}{4}=d^2$.

& $c=d^2+\frac{3a^2}{4}$

Je prens arbitrairement
$a=20$ et $d=4$
& $c=316$.
et $x=14$. $y=6$.

ad p. 380. Probl. XXIII

Soit la premiere grandeur inconnüe . x
et la seconde _____ y.

Donc par la condition du Probleme

$x+y=a.$ et $x^2+y^2=b.$

$y=a-x.$

$$x^2+a^2-2ax+x^2=b.$$
$$2x^2-2ax=b-a^2$$
$$x^2-ax=\frac{b-a^2}{2}$$
$$\text{\&}\ x^2-ax+\frac{a^2}{4}=\frac{b-a^2}{2}+\frac{a^2}{4}=\frac{2b-a^2}{4}$$
$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{2b-a^2}{4}}.$$

Pour les exemples

$$\frac{2b-a^2}{4}=c^2.$$
$$2b-a^2=4c^2$$
$$2b=4c^2+a^2$$
$$b=\frac{4c^2+a^2}{2}$$

Je prens arbitrairem.
$a=10$ et $c=2$

Donc $b=58.$
$x=7.$
$y=3$

ad p. 382. Probl. XXV.

$x+y=a.$ et $x^3+y^3=b.$

$x=a-y$

$$a^3-3a^2y+3ay^2=b.$$
$$3ay^2-3a^2y=b-a^3.$$
$$y^2-ay=\frac{b-a^3}{3a}.$$
$$y^2-ay+\frac{a^2}{4}=\frac{b-a^3}{3a}+\frac{a^2}{4}.$$
$$\text{\&}\ y=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{b-a^3}{3a}+\frac{a^2}{4}}$$

Pour les exemples c'est la meme methode par la quelle se trouvera $b=3ad^2+\frac{a^3}{4}.$

Soit $a=6$ et $d=2$

Donc $b=126.$

ad p. 381. Probl. XXVI.

Autre Solution.

Je nomme la Somme des deux grandeurs inconnues $2x$.
et leur difference . . $2y$.
$x-z$ sera la plus petite de ces grandeurs
$x+z$ sera la plus grande.
Le produit de ces deux grandeurs
$x^2-z^2=32$. par la supposition.
La Somme des quarrez de ces grandeurs
$2x^2+2z^2=80$. par la supposit.
$x^2+z^2=40$. j'ajoute $x^2-z^2=32$
à $x^2+z^2=40$
Donc $2x^2=72$.
$x^2=36$
$x=6$

Encore une autre

Soit $x+y$ la Somme et le produit $xy=32$
$x^2+y^2=80$. J'ajoute $2xy=64$
à $x^2+y^2=80$
Donc $x^2+2xy+y^2=144$
Racine $x+y=12$.
Connoissant donc la Somme de ces deux grandeurs et leur produit, je trouve chaque grandeur par la Solution du Probl. Xeme.

Solution generale du Probl. XXVI.

Soit $xy = b$. et $x^2 + y^2 = c$.

ajoutant $2b$ à c. $x^2 + 2xy + y^2 = 2b + c$

Donc $x + y = \sqrt{2b+c}$ la somme

Je nomme $\sqrt{2b+c}$, a. Donc $x = a - y$.

multipl. par y. $xy = ay - y^2$

Donc $xy = ay - y^2 = b$.

$$y^2 - ay = -b.$$

$$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b.$$

$$\text{Donc } y = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Pour les exemples.

$2b + c = a^2$. $c = d^2 + e^2$.

$2b + d^2 + e^2 = a^2$.

$2b = a^2 - d^2 - e^2$.

$b = \frac{a^2 - d^2 - e^2}{2}$.

Soit $a = 6$.
$d = 4$.
$e = 2$.
Donc $b = 8$.
$c = 20$.
$y = 4$. $x = 2$.

Soit $a = 5$
$d = 3$
$e = 2$
Donc $b = 6$.
$c = 13$.
$y = 2$. et $x = 3$.

La troisieme edition de ce livre est de 1692.
La quatrieme est celle-ci de 1710
La cinquieme est de 1731.

Compl.