



**POLITECHNIKA  
GDAŃSKA**

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI  
I AUTOMATYKI



Imię i nazwisko studenta: Kamil Andrzejewski  
Nr albumu: 154687  
Studia pierwszego stopnia  
Forma studiów: stacjonarne  
Kierunek studiów: Automatyka i Robotyka  
Specjalność: Robotyka i Systemy Mechatroniki

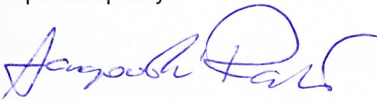
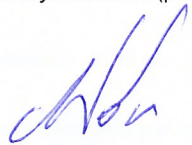
Imię i nazwisko studenta: Mateusz Czyżniewski  
Nr albumu: 155371  
Studia pierwszego stopnia  
Forma studiów: stacjonarne  
Kierunek studiów: Automatyka i Robotyka  
Specjalność: Automatyka i Systemy Sterowania

Imię i nazwisko studenta: Maciej Zielonka  
Nr albumu: 155522  
Studia pierwszego stopnia  
Forma studiów: stacjonarne  
Kierunek studiów: Automatyka i Robotyka  
Specjalność: Automatyka i Systemy Sterowania

### PRACA DYPLOMOWA INŻYNIERSKA

Tytuł pracy w języku polskim: Budowa stanowiska z podwójnym odwróconym wahadłem wraz z syntezą sterowania.

Tytuł pracy w języku angielskim: Synthesis and implementation of control system for double inverted pendulum.

Potwierdzenie przyjęcia pracy	
Opiekun pracy  podpis	Kierownik Katedry/Zakładu (pozostawić właściwe)  podpis
dr inż. Rafał Łangowski	dr. hab. inż. Miroslaw Wotolczyński, prof. nadzw. PG

Data oddania pracy do dziekanatu:

## Streszczenie

W niniejszej pracy inżynierskiej rozważano problem budowy stanowiska z podwójnym, odwróconym wahadłem wraz z syntezą systemu sterowania, który miał odpowiadać za stabilizację wahadła w jego górnym położeniu równowagi. Zasadniczymi celami postawionymi przez autorów było zaprojektowanie i wykonanie fizycznego obiektu sterowania oraz stworzenie sprawnego i spójnego systemu regulacji na podstawie odpowiedniego modelu matematycznego. Ponadto, zakres pracy obejmował przegląd literatury dotyczącej modelowania matematycznego, zaawansowanych algorytmów sterowania i estymacji nieliniowymi, wielowymiarowymi systemami dynamicznymi, przeprowadzenie analizy dynamiki obiektu sterowania, opis metodologii syntezy systemu sterowania, wykonanie szeregu symulacji weryfikujących jakość działania systemu regulacji, projekt mechanizmu estymacji zmiennych procesowych, dobór struktury sprzętowej oraz programowej realizacji systemu sterowania oraz weryfikację działania algorytmów na rzeczywistym obiekcie sterowania. Ponadto, zaprojektowany system sterowania uwzględniał fakt, iż nie wszystkie parametry wahadła były dokładnie znane. Stabilność układu regulacji w górnym położeniu równowagi musiała być zapewniona nie tylko ze względu na zmiany w obiekcie sterowania, ale również w celu odrzucania zakłóceń zewnętrznych. Na potrzeby budowy fizycznego obiektu zaprojektowano mikroprocesorowy system sterowania charakteryzujący się rozproszeniem obliczeń między poszczególnymi jednostkami w celu dekompozycji funkcjonalnej oraz przyśpieszeniu operacji na danych. Obsługiwał on układ pomiarowy złożony z trzech enkoderów oraz dwóch akcelerometrów, które to dostarczały informacji poprzez sprzężenie zwrotne do układu regulacji. Następnie, poprzez estymator oparty na Filtrze Kalmana odtwarzano odpowiednie zmienne stanu, które były niezbędne do wykonywania się algorytmów sterowania. Algorytmy sterowania w postaci regulatora liniowo - kwadratowego oraz typu PID musiały zapewnić wystawienie sygnału sterującego, który poprzez moduł urządzeń wykonawczych składający się z silnika i przekładni pasowych stabilizował obiekt wahadła. Elementami konstrukcyjnymi wahadła były dwa ramiona połączone ze sobą łożyskowanym enkoderem oraz wózek przymocowany w identyczny sposób do jednego z ramion. Całość stanowiska poruszała się po odpowiednio długiej suwnicy liniowej.

Autorzy pracy odpowiadali za następujące składowe prace:

- Kamil Andrzejewski - rozdziały: 1,2,3,4,5,6,7, podrozdziały: 2.3, 3.2, 4.6, 6.1, 6.2, punkty: -,
- Mateusz Czyżniewski - rozdziały 1,2,3,4,6,7, podrozdziały: 3.3, 3.5, 4.2, 4.3, punkty: 2.4.3, 3.4.1, 4.1.3,
- Maciej Zielonka - rozdziały 1,2,3,4,6,7, podrozdziały: 3.2, 3.5, 4.4, 4.6, 6.1, 6.2, punkty: 2.4.2, 3.4.2.

**Słowa kluczowe:** Automatyka, Filtr Kalmana, Nieliniowe systemy dynamiczne, Systemy sterowania, Wahadło.

**Dziedzina nauki i techniki, zgodnie z wymogami OECD:** <Elektrotechnika>, <Elektronika>, <Inżynieria informatyczna>, <Robotyka i automatyka>.

## **Abstract**

In the scope of this engineering thesis a problem of double inverted pendulum (DIP) stabilising control has been addressed. The main goal of the work was to synthesise a control system by following a model driven design approach. The main objectives included state-of-the-art assessment in modeling and control of DIP, derivation of DIP model based on Euler-Lagrange approach and model based control system design, tuning and validation using PID and linear-quadratic (LQR) type controllers (to stabilise the DIP in inverted position) and a swing-up control for which a Kalman state estimation was required. The controllers were tuned under model parameters uncertainty by which a certain level of controller robustness was achieved. The originally continuous time control algorithms were emulated into the discrete time for implementation in dedicated digital hardware platform. The main feature of the hardware platform is a distribution of the estimation and control algorithms in between the computation nodes (microcontrollers) to reduce the calculation burden.

**Key words:** Control engineering, Kalman Filter, Nonlinear dynamic systems, Control systems, Pendulum.

## SPIS TREŚCI

Wykaz ważniejszych oznaczeń i skrótów .....	10
1. Wstęp i cel pracy (Kamil Andrzejewski, Mateusz Czyżniewski, Maciej Zielonka).....	11
1.1. Wprowadzenie .....	11
1.2. Cel i zakres pracy .....	12
1.3. Struktura pracy .....	13
2. Model matematyczny obiektu (Kamil Andrzejewski, Mateusz Czyżniewski, Maciej Zielonka) 14	
2.1. Aspekty dotyczące modelowania.....	14
2.1.1. Sformułowanie założeń .....	14
2.1.2. Opis zmiennych fizycznych obiektu .....	15
2.1.3. Opis parametrów fizycznych obiektu.....	17
2.2. Wyprowadzenie modelu .....	18
2.2.1. Równania Eulera - Lagrange'a jako metoda rachunku wariacyjnego .....	18
2.2.2. Model energetyczny wahadła.....	20
2.2.3. Wyprowadzenie równań Eulera - Lagrange'a dla wahadła .....	24
2.2.4. Model parametryczny współczynników tarcia .....	27
2.2.5. Modele momentów bezwładności ramion wahadła .....	28
2.2.6. Wartości parametrów wahadła .....	28
2.3. Rozwinięcie modelu (Kamil Andrzejewski) .....	29
2.3.1. Postać macierzowo - wektorowa modelu w wersji uwikłanej .....	29
2.3.2. Postać macierzowo - wektorowa modelu w wersji rozwikłanej .....	30
2.4. Symulacyjne badanie modelu .....	31
2.4.1. Dobór parametrów do celów badania modelu obiektu .....	31
2.4.2. Dobór procedury numerycznej (Maciej Zielonka).....	33
2.4.3. Weryfikacja poprawności działania modelu symulacyjnego (Mateusz Czyżniewski) .....	34
3. Modele dla celów sterowania i estymacji (Kamil Andrzejewski, Mateusz Czyżniewski, Maciej Zielonka).....	40
3.1. Linearyzacja modelu obiektu .....	40
3.1.1. Metoda rozwinięcia w szereg Taylora .....	40
3.1.2. Postać macierzowo - wektorowa modelu zlinearyzowanego .....	41
3.1.3. Wyznaczenie punktów równowagi .....	42
3.1.4. Procedura obliczania pochodnych .....	44
3.1.5. Model zlinearyzowany .....	47
3.2. Modele urządzeń wykonawczych oraz pomiarowych (Kamil Andrzejewski, Maciej Zielonka) .....	54
3.2.1. Modele urządzeń wykonawczych.....	55
3.2.2. Modele urządzeń pomiarowych .....	58
3.3. Synteza systemu sterowania a niepewność strukturalna i parametryczna modelu (Mateusz Czyżniewski) .....	59
3.4. Modele do celów sterowania .....	60
3.4.1. Model w przestrzeni stanu dla potrzeb sterowania liniowo - kwadratowego (Mateusz Czyżniewski).....	60
3.4.2. Model wejście - wyjście dla potrzeb sterowania typu PID (Maciej Zielonka) ...	62
3.5. Badanie modeli do celów sterowania (Mateusz Czyżniewski, Maciej Zielonka).....	63
3.5.1. Badanie sterowalności modelu zlinearyzowanego.....	63
3.5.2. Badanie minimalnofazowości modelu obiektu regulacji .....	64
3.6. Modele dla celów estymacji stanu .....	67
3.6.1. Istota procesu estymacji dla obiektu wahadła .....	67

3.6.2.	Model do celów estymacji prędkości liniowej wózka.....	68
3.6.3.	Model do celów estymacji prędkości kątowej.....	68
4.	Synteza systemu sterowania (Kamil Andrzejewski, Mateusz Czyżniewski, Maciej Zielonka)	70
4.1.	Estymacja stanu .....	71
4.1.1.	Filtr Kalmana jako optymalny estymator stanu .....	71
4.1.2.	Struktura blokowa algorytmu estymacji.....	73
4.1.3.	Filtr Kalmana dla wahadła (Mateusz Czyżniewski).....	74
4.2.	Kryteria jakościowe systemu regulacji (Mateusz Czyżniewski) .....	75
4.3.	Synteza systemu sterowania z regulatorem liniowo - kwadratowym (Mateusz Czyżniewski).....	76
4.3.1.	Prawo sterowania.....	76
4.3.2.	Schemat blokowy systemu sterowania .....	78
4.3.3.	Dobór nastaw regulatora .....	78
4.3.4.	Dyskretyzacja prawa sterowania.....	80
4.3.5.	Testy symulacyjne .....	80
4.4.	Synteza systemu sterowania typu PID (Maciej Zielonka).....	87
4.4.1.	Prawo sterowania.....	87
4.4.2.	Schemat blokowy systemu sterowania .....	89
4.4.3.	Dobór nastaw algorytmu .....	89
4.4.4.	Dyskretyzacja prawa sterowania.....	90
4.4.5.	Testy symulacyjne .....	91
4.5.	Porównanie wyników symulacyjnych regulatorów LQR oraz typu PID.....	98
4.6.	Mechanizm rozhuśtania wahadła (Kamil Andrzejewski, Maciej Zielonka).....	100
4.6.1.	Prawo sterowania.....	100
4.6.2.	Dobór nastaw regulatora .....	101
4.6.3.	Testy symulacyjne .....	101
4.6.4.	Mechanizm przełączania algorytmów regulacji.....	103
5.	Budowa stanowiska (Kamil Andrzejewski).....	104
5.1.	Realizacja sprzętowa systemu sterowania wahadłem.....	104
5.1.1.	Koncepcja systemu sterowania .....	104
5.1.2.	Dobór metod komunikacji między modułami systemu sterowania.....	105
5.1.3.	Schemat połączeń urządzeń oraz przepływu sygnałów w systemie sterowania.....	106
5.2.	Dobór elementów oraz urządzeń.....	107
5.2.1.	Dobór elementów konstrukcyjnych .....	107
5.2.2.	Dobór urządzeń wykonawczych oraz pomiarowych .....	110
5.2.3.	Dobór elektronicznych urządzeń sterujących.....	111
5.3.	Wykonanie stanowiska .....	112
5.3.1.	Montaż i łączenie elementów elektronicznych .....	112
5.3.2.	Montaż i łączenie elementów mechanicznych .....	115
6.	Implementacja oraz walidacja zastosowanych rozwiązań (Kamil Andrzejewski, Mateusz Czyżniewski, Maciej Zielonka).....	117
6.1.	Opis oprogramowania systemu sterowania (Kamil Andrzejewski, Maciej Zielonka) ...	117
6.1.1.	Struktura danych .....	117
6.1.2.	Funkcjonalności mikrokontrolera.....	118
6.1.3.	Transmisja danych .....	119
6.1.4.	Obsługa urządzeń pomiarowych.....	119
6.1.5.	Obsługa urządzenia wykonawczego.....	122
6.2.	Implementacja algorytmów sterowania i estymacji (Kamil Andrzejewski, Maciej Zielonka).....	123
6.2.1.	Implementacja sprzętowa algorytmów estymacji .....	123
6.2.2.	Implementacja sprzętowa algorytmu LQR .....	124

6.2.3. Implementacja sprzętowa algorytmu typu PID .....	125
6.3. Porównanie badań symulacyjnych oraz eksperymentalnych na obiekcie rzeczywistym	125
6.3.1. Badania dla algorytmu PD .....	125
6.3.2. Badania dla algorytmu LQR .....	127
7. Podsumowanie (Kamil Andrzejewski, Mateusz Czyżniewski, Maciej Zielonka) .....	130
7.1. Spostrzeżenia oraz wnioski .....	130
7.2. Kierunki przyszłych badań .....	131
7.2.1. Przełączalny system sterowania .....	131
7.2.2. Nieliniowe algorytmy sterowania .....	131
7.2.3. Alternatywne metody estymacji .....	132
7.2.4. Alternatywne rozwiązania natury projektowej .....	133
Wykaz literatury .....	134
Wykaz rysunków .....	136
Wykaz tabel .....	139
Dodatek A (Mateusz Czyżniewski) .....	140
Dodatek B (Kamil Andrzejewski, Mateusz Czyżniewski, Maciej Zielonka) .....	144
Dodatek C (Kamil Andrzejewski, Mateusz Czyżniewski, Maciej Zielonka) .....	147
Dodatek D (Mateusz Czyżniewski) .....	150
Dodatek E (Kamil Andrzejewski, Maciej Zielonka) .....	152
Dodatek F (Kamil Andrzejewski, Maciej Zielonka) .....	154
Dodatek G .....	156
Dodatek H .....	157
Dodatek I .....	164

## Wykaz ważniejszych oznaczeń i skrótów

LQR - Regulator liniowo - kwadratowy (*ang.: Linear - Quadratic regulator*),

PID - Regulator PID (*ang.: proportional–integral–derivative*),

$c(t)$  - wektor wielkości sterowanych systemu,

$c_{ref}(t)$  - wektor sygnałów referencyjnych,

$L_1$  - długość całkowita ramienia pierwszego  $[m]$ ,

$L_2$  - długość całkowita ramienia drugiego  $[m]$ ,

$l_1$  - odległość pierwszego przegubu do środka masy ramienia pierwszego  $[m]$ ,

$l_2$  - odległość drugiego przegubu do środka masy ramienia drugiego  $[m]$ ,

$I_1$  - moment bezwładności ramienia pierwszego  $[kg\ m^2]$ ,

$I_2$  - moment bezwładności ramienia drugiego  $[kg\ m^2]$ ,

$F_{t0}(t)$  - siła związana z tarciem suwnicy  $[N]$ ,

$g$  - przyspieszenie ziemskie  $[m/s^2]$ ,

$m_0$  - masa wózka  $[kg]$ ,

$m_1$  - masa ramienia pierwszego  $[kg]$ ,

$m_2$  - masa ramienia drugiego wraz z obciążeniem  $[kg]$ ,

$m_k$  - masa obciążenia  $[kg]$ ,

$m_b$  - masa ramienia drugiego  $[kg]$ ,

$M_{t1}(t)$  - moment siły związany z tarciem w łożysku dla ramienia pierwszego  $[Nm]$ ,

$M_{t2}(t)$  - moment siły związany z tarciem w łożysku dla ramienia drugiego  $[Nm]$ ,

$Q$  - macierz kowariancji szumu przetwarzania,

$Q_w$  - macierz wag stanu,

$R$  - macierz kowariancji szumu pomiarowego,

$R_w$  - macierz wag sterowania,

$x(t)$  - wektor zmiennych stanu systemu sterowania,

$\hat{x}(t)$  - wektor estymowanych zmiennych stanu systemu sterowania,

$\varepsilon(t)$  - wektor uchybów sterowania,

$\eta_0$  - współczynnik tarcia wózka o suwnicę  $[kg\ m/s]$ ,

$\eta_1$  - współczynnik tarcia w pierwszym przegubie  $[kg\ m^2/s]$ ,

$\eta_2$  - współczynnik tarcia w drugim przegubie  $[kg\ m^2/s]$ ,

$\theta_0(t)$  - położenie liniowe wózka  $[m]$ ,

$\theta_1(t)$  - położenie kątowe ramienia pierwszego  $[rad]$ ,

$\theta_2(t)$  - położenie kątowe ramienia drugiego  $[rad]$ ,

$\xi_0(t)$  - siła zakłócająca działająca na wózek  $[N]$ ,

$\xi_1(t)$  - moment zakłócający działający na pierwsze ramię  $[Nm]$ ,

$\xi_2(t)$  - moment zakłócający działający na drugie ramię  $[Nm]$ ,

$u(t)$  - sygnał sterujący  $[N]$ .

# 1. Wstęp i cel pracy

## 1.1. Wprowadzenie

Automatyka, jako dziedzina wiedzy, związana jest zarówno z bardzo szeroką gamą zagadnień praktycznych jak również teoretycznych. Bardzo ważnym aspektem kształcenia inżyniera automatyka jest nauczenie go łączenia osiągnięć wypracowanych na gruncie teorii z projektowaniem i budową rzeczywistego obiektu. Ze względu na niejednokrotnie zaawansowany aparat matematyczny stosowany przy syntezy systemów sterowania oraz mnogość problemów związanych z implementacją, realizacja powyższego postulatu jest zadaniem złożonym.

Podjęta w niniejszej pracy tematyka budowy stanowiska podwójnego, odwróconego wahadła na poruszającej się platformie jest zadaniem wymagającym dużej wiedzy teoretycznej, dotyczącej modelowania i algorytmów sterowania oraz umiejętności praktycznych, związanych z budową fizycznego urządzenia. Rozważany obiekt charakteryzuje się silnie nieliniową dynamiką. Matematyczna teoria układów dynamicznych udowadnia, że rozwiązania nieliniowych równań różniczkowych są bardzo wrażliwe na zmiany parametrów, co może skutkować nieprzewidywalnym zachowaniem się układu w kolejnych chwilach czasu [48]. Zapewnienie stabilności nieliniowego układu dynamicznego jest zadaniem znacznie bardziej złożonym i wymagającym niż stabilizowanie układu liniowego [30, 48]. Obiekt opisany takim modelem matematycznym może posiadać kilka osobnych punktów równowagi, w których dynamika zanika co można powiązać z osiągnięciem przez niego stanu ustalonego [18]. Zatem, projektując algorytm sterowania, trzeba mieć na uwadze fakt, że najlepsze właściwości dynamiczne są osiągane przez układ w punkcie równowagi co wiąże się z zastosowaniem takiego sterowania, aby doprowadzić system ze stanu początkowego do pożądanego punktu pracy.

Podwójne, odwrócone wahadło jest doskonałym przykładem obiektu nieliniowego, który posiada wyżej wymienione własności. Dla identycznych wartości parametrów oraz tych samych warunków początkowych, bądź też przy niewielkich ich zmianach, ruch wahadła może stać się nieprzewidywalny. Zatem, bieżąca realizacja jego trajektorii może być odmienna, od tych zaobserwowanych we wcześniejszych eksperymentach. Jest to związane z zachowaniem się trajektorii fazowych układu w przestrzeni stanu [38, 48]. Zjawisko to jest charakterystyczne dla tzw. ruchu chaotycznego, tj. takiego, w którym punkty znajdujące się na płaszczyźnie fazowej, mogą zachowywać się w sposób nieprzewidywalny. Zatem, obserwując przestrzeń fazową takiego układu, można zauważyć, że leżące blisko siebie trajektorie fazowe z czasem zaczynają się od siebie oddalać [48]. W związku z tym, przy sterowaniu takim obiektem ważne jest, aby system sterowania osiągnął stabilność w punkcie pracy nim dynamika obiektu stanie się zbyt chaotyczna [38].

Obecny stan wiedzy dotyczący sterowania podwójnym, odwróconym wahadłem jest bardzo bogaty. Mnogość zastosowanych algorytmów regulacji, rozciągająca się od układu sterowania opartego o regulatory PD [37] przez regulator liniowo - kwadratowy *ang.: linear - quadratic regulator - LQR* [37] i sterowanie ślizgowe *Sliding Mode Control - SMC* [23, 42] po sieci neuronowe [6, 17].



Autorzy niniejszej pracy inżynierskiej opracowali dwa algorytmy stabilizacji wahadła w pozycji pionowej (górnym położeniu równowagi) z zastosowaniem:

- układu regulatorów typu PID (*ang.*: *proportional integral derivative controller*) [30]
- sterowania optymalnego z regulatorem liniowo-kwadratowym LQR [18, 38]

Oprócz przedstawionych powyżej koncepcji, w celu wprowadzenia wahadła w obszar pracy regulatora stabilizującego, przeanalizowano działanie mechanizmu rozhuśtania wahadła (*ang.* *Swing - up*) [31].

Głównym zadaniem proponowanych algorytmów sterowania jest zapewnienie przejścia układu ze stabilnego punktu równowagi obiektu (znajdującego się w dolnym położeniu ramion wahadła) do punktu pracy, w którym ramiona są uniesione, przy spełnieniu założonych kryteriów jakościowych, również w warunkach niepewności pomiarów i/lub modelu obiektu.

Niezbędnym dla działania układu regulacji, jest dobór odpowiedniego zestawu urządzeń pomiarowych. Na podstawie pomiarów z dwóch żyroskopów oraz trzech enkoderów mierzy się odpowiednie zmienne procesowe, które następnie poprzez estymator oparty na Filtrze Kalmana, są dostosowywane do postaci niezbędnej do realizacji sterowania [19]. Następnie, na podstawie opracowanego algorytmu sterowania, układ mikroprocesorowy oblicza sterowanie dla urządzenia wykonawczego. Urządzeniem wykonawczym systemu został silnik prądu stałego o magnesach trwałych. Jego praca jest regulowana za pomocą dedykowanego sterownika, który wykorzystując modulację PWM realizuje odpowiednie napięcie wpływające na prędkość obrotową urządzenia [20].

## 1.2. Cel i zakres pracy

Celem niniejszej pracy inżynierskiej było zaprojektowanie oraz zbudowanie stanowiska z podwójnym odwróconym wahadłem wraz z syntezą systemu sterowania.

Zakres pracy obejmował:

- Przegląd literatury obejmujący w szczególności: modelowanie matematyczne oraz syntezę sterowania wielowymiarowymi nieliniowymi systemami dynamicznymi.
- Wyprowadzenie modelu matematycznego dla celów poznawczych.
- Implementacja modelu poznawczego w środowisku Matlab Simulink.
- Wyprowadzenie modeli matematycznych dla celów sterowania.
- Syntezę systemu sterowania z wykorzystaniem modelu wejście-wyjście.
- Implementacja systemu sterowania bazującego na modelu wejście-wyjście w środowisku Matlab Simulink.
- Syntezę systemu sterowania z wykorzystaniem modeli w przestrzeni stanu.
- Implementacja systemu sterowania bazującego na modelu w przestrzeni stanu w środowisku Matlab Simulink.
- Dobór elementów dla potrzeb stanowiska.
- Zaprojektowanie i zbudowanie stanowiska.
- Implementacja algorytmów sterowania w zbudowanym stanowisku oraz ich praktyczna weryfikacja.

### 1.3. Struktura pracy

Rozdział pierwszy zawiera wprowadzenie, cel i zakres pracy oraz opis jej struktury.

W drugiej części pracy zawarte są treści związane z modelowaniem obiektu. Począwszy po wyprowadzenie modelu poznawczego, po jego uporządkowanie na przeprowadzeniu symulacji w środowisku Matlab Simulink kończą.

Kluczowe dla działania systemu sterowania zagadnienia zawiera rozdział trzeci. Na jego początku wyprowadzony zostaje model zlinearyzowany wahadła, a następnie na jego podstawie budowane są modele do celów sterowania w postaci ciągłej oraz dyskretnej i do celów estymacji stanu. Nakreślone zostają podstawy teoretyczne dotyczące proponowanych algorytmów sterowania i estymacji.

W rozdziale czwartym przedstawiona została synteza systemu sterowania.

Rozdział piąty poświęcony jest zagadnieniu budowy obiektu. Opiszana jest w nim kwestia doboru urządzeń pomiarowych, wykonawczych oraz platformy mikroprocesorowej, która odpowiada za fizyczną realizację nakreślonych w rozdziałach poprzednich koncepcji. Oprócz tego, wyjaśnione zostają aspekty związane z praktyczną realizacją konstrukcji wahadła.

W rozdziale szóstym przedstawiono rezultaty jakie otrzymano po opracowaniu systemu sterowania wahadłem. Porównano tam wyniki symulacyjne uzyskane dzięki środowisku Matlab Simulink, z rzeczywistymi sygnałami występującymi w zbudowanym stanowisku. Poruszane są również aspekty związane z implementacją algorytmów w zbudowanym stanowisku.

Ostatni rozdział ma charakter podsumowania pracy. Zawarte są tam wnioski oraz przemyślenia autorów na temat zbudowanego systemu. Dodatkowo, przedstawione są koncepcje, których celem byłoby udoskonalenie powstałego systemu.

Na końcu pracy umieszczono stosowną bibliografię, spis rysunków, tabeli i schematów oraz załączniki zawierające dodatki do pracy. Prezentują one rozwiązania pewnych problemów natury teoretycznej, które autorzy napotkali na swojej drodze, stosowne spisy urządzeń oraz projekty elementów.

## 2. Model matematyczny obiektu

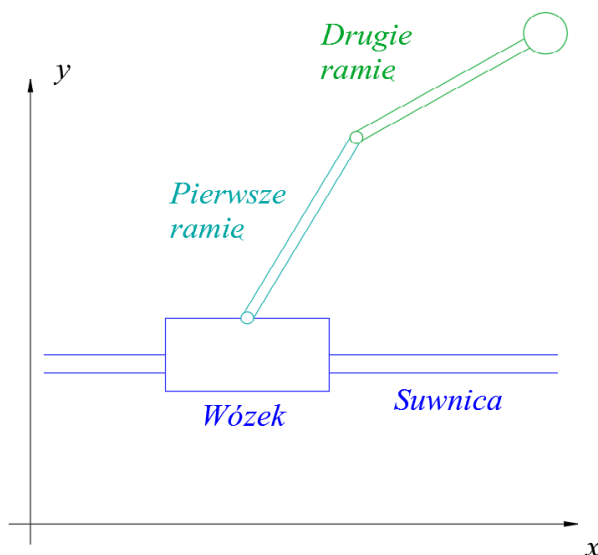
Syntezę systemu sterowania należało rozpocząć od budowy modelu matematycznego obiektu. Sam proces modelowania matematycznego systemów dynamicznych jest działaniem wieloetapowym. Na potrzeby niniejszej pracy inżynierskiej wyszczególniono cztery kroki postępowania [10, 11]:

- Krok 1: określenie oraz wyodrębnienie obiektu z otoczenia,
- Krok 2: opracowanie koncepcji oraz prezentacji ideowej systemu w zakresie potrzebnych zależności oraz cech,
- Krok 3: budowa reprezentacji matematycznej obiektu,
- Krok 4: weryfikacja poprawności zbudowanego modelu,

W związku z tym, w podrozdziale 2.1 przedstawiono realizację kroków 1 i 2. Następnie wyprowadzony został model matematyczny (krok 3). Na koniec dokonano weryfikacji poprawności modelu poznawczego za pomocą badań symulacyjnych.

### 2.1. Aspekty dotyczące modelowania

Podwójne, odwrócone wahadło stanowiące obiekt rozważany w niniejszej pracy można podzielić na następujące elementy: wózek poruszający się w poziomie, dwa obracające się w jednej płaszczyźnie ramiona, które połączone ze sobą za pomocą łożyskowanego enkodera, suwnicy oraz ciężarka umieszczonego na szczycie ramienia drugiego. Na rysunku poglądowym 2.1 przedstawiono ogólny zarys budowy obiektu.



Rys. 2.1. Rysunek poglądowy z oznaczonymi elementami wahadła

#### 2.1.1. Sformułowanie założeń

Dla potrzeb modelowania tego obiektu przyjmuje się następujące założenia:

**Założenie 1. Ramiona wahadła są idealnie sztywne**

Sztywność ramion wahadła powoduje, iż nie zmienia się w czasie ich geometria, co wiąże się ze stałą formułą matematyczną opisującą ich moment bezwładności. Zjawisko to wynika z faktu, iż materiał, z którego zbudowane są ramiona, nie ulega istotnym odkształceniom podczas przenoszenia obciążeń [44].

**Założenie 2. Brak oporów powietrza**

Ruch wahadła nie jest zakłócany przez otaczające je powietrze. Gęstość powietrza nie powoduje występowania dodatkowego oporu ruchu. Powoduje to uproszczenie modelu zakłóceń wahadła przy pominięciu pewnych wpływów zewnętrznych. Należy jednak zaznaczyć, iż w rzeczywistości opory powietrza mogą wywierać znaczący wpływ na wytracanie pędu przez ramiona wahadła [15].

**Założenie 3. Równomierny rozkład masy w rozpatrywanych elementach konstrukcyjnych**

Powoduje to uproszczenie modelu matematycznego opisującego moment bezwładności ramion wahadła [44].

**Założenie 4. Niepewność w parametrach**

Masa ciężarka umieszczonego na szczycie ramienia drugiego nie jest dokładnie znana. Wiadomo natomiast, że jej wartość znajduje się w pewnym znanym i ograniczonym przedziale. Współczynniki tarcia wymagają wcześniejszego oszacowania ze względu na złożoną procedurę modelowania [10].

**Założenie 5. Ruch rozpatruje się w dwóch wymiarach**

Modelowany obiekt rozpatrywano w przestrzeni dwuwymiarowej, ze względu na to, że wszelki ruch w trzecim wymiarze nie powoduje zauważalnych zmian w dynamice układu [15].

**2.1.2. Opis zmiennych fizycznych obiektu**

W pierwszej kolejności należy określić jakie zmienne w postaci funkcji czasu występują w fizycznym modelu wahadła. Można je podzielić na zmienne wejściowe, oraz na zmienne procesowe, których to opis jest kluczowy dla rozpatrywanego modelu. Wszystkie zmienne widoczne są na rysunku 2.2.

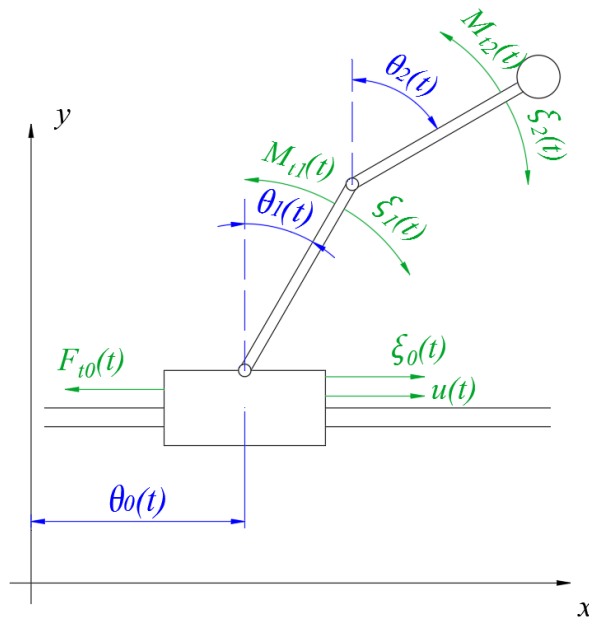
Zmiennymi wejściowymi układu są:

- siła napędowa mająca charakter sygnału sterującego  $u(t)$ , oznaczona na rysunku,
- siłę zewnętrzną zakłócającą  $\xi_0(t)$  (nie pochodząca z jednostki napędowej) przyłożoną do wózka,
- momenty zewnętrzne zakłócające  $\xi_1(t)$  i  $\xi_2(t)$  (nie pochodzące od ruchu obrotowego ramion) działające na pierwsze i drugie ramie.

Jako zmienne procesowe będące funkcjami czasu określono:

- położenie liniowe wózka  $\theta_0(t)$  względem punktu bazowego znajdującego się na suwnicy,

- położenie kątowe ramienia pierwszego  $\theta_1(t)$  jako kąt między prostą równoległą do osi rzędnych, a osią symetrii przechodzącą przez końce ramienia pierwszego,
- położenie kątowe ramienia drugiego  $\theta_2(t)$  jako kąt między prostą równoległą do osi rzędnych, a osią symetrii przechodzącą przez końce ramienia drugiego.
- siła tarcia w ruchu postępowym dla wózka  $F_{t0}(t)$ ,
- moment sił tarcia w ruchu obrotowym dla ramienia pierwszego  $M_{t1}(t)$  oraz drugiego  $M_{t2}$ .



Rys. 2.2. Rysunek poglądowy z oznaczonymi zmiennymi wejściowymi i procesowymi

Powyższy opis pozwala zdefiniować wektor położeń jako:

$$\boldsymbol{\theta}(t) \triangleq [\theta_0(t) \quad \theta_1(t) \quad \theta_2(t)]^T, \quad (2.1)$$

oraz zakłócenia jako wektor:

$$\boldsymbol{\xi}(t) \triangleq [\xi_0(t) \quad \xi_1(t) \quad \xi_2(t)]^T. \quad (2.2)$$

Na podstawie (2.1) oraz (2.2), zdefiniowano wektory  $\boldsymbol{x}(t)$  oraz  $\boldsymbol{z}(t)$ , które zostaną wykorzystane w dalszej części pracy. Wektor stanu  $\boldsymbol{x}(t)$  wyraża się jako:

$$\boldsymbol{x}(t) \triangleq [\boldsymbol{\theta}(t) \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)]^T, \quad (2.3)$$

a wektor zakłóceń  $\boldsymbol{z}(t)$ :

$$\boldsymbol{z}(t) \triangleq \boldsymbol{\xi}(t). \quad (2.4)$$

Ze względu na chęć uproszczenia zapisu matematycznego, oznaczenia zmiennych:  $\theta(t)$ ,  $\xi(t)$ ,  $x(t)$ ,  $z(t)$  oraz  $u(t)$ , zapisywane będą odpowiednio jako:  $\theta$ ,  $\xi$ ,  $x$ ,  $z$  oraz  $u$ .

### 2.1.3. Opis parametrów fizycznych obiektu

Parametry układu są ściśle związane z mechaniczną naturą obiektu sterowania. Zasadniczym faktem, jaki wiązał się z opisem parametrów obiektu było wyszczególnienie, które z nich są dane w pewnym przedziale wartości. Parametry opisano kolejno dla każdego elementu waha-  
dła, zostały one również zaznaczone na rysunku 2.3:

- dla wózka:

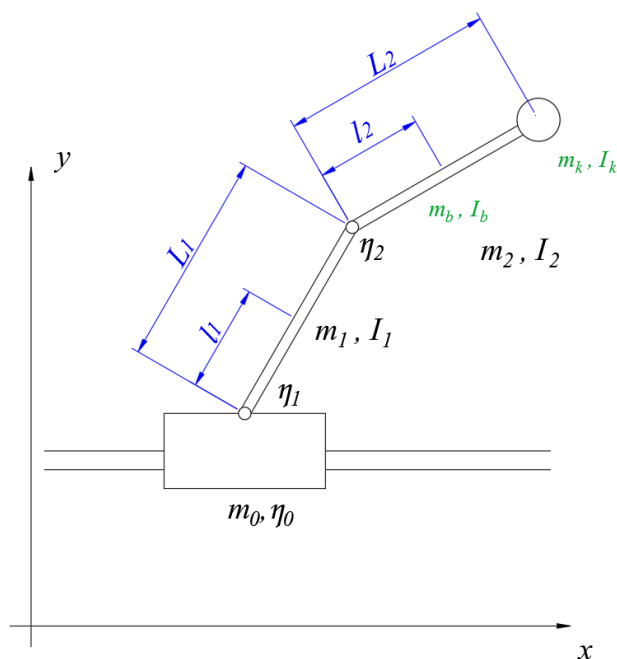
- masa wózka  $m_0$  zawierająca w sobie masę elementu ruchomego suwnicy, mocowanie na enkoder oraz odpowiednie połączenia mechaniczne,
- współczynnik tarcia liniowego między suwnicą a wózkiem  $\eta_0$ .

- dla ramienia pierwszego:

- masa ramienia  $m_1$  zawierająca masę łącznika, enkodera, mocowania na enkoder i aluminiowego profilu,
- moment bezwładności ramienia  $I_1$ , obliczony na podstawie rozkładu środka ciężkości elementów wchodzących w skład ramienia,
- długość ramienia  $L_1$ ,
- odległość od połączenia z wózkiem do środka ciężkości ramienia  $l_1$ ,
- współczynnik tarcia w pierwszym przegubie  $\eta_1$ .

- dla ramienia drugiego:

- masa ramienia  $m_2$  zawierająca masę łącznika, enkodera, mocowania na enkoder i aluminiowego profilu wchodzącego w skład  $m_b$  oraz masę ciężarka w postaci metalowej śruby umieszczonej na końcu ramienia drugiego  $m_k$ , której wymiar oraz waga będzie ulegała zmianie,
- moment bezwładności ramienia drugiego  $I_b$ , obliczony na podstawie rozkładu środka ciężkości elementów wchodzących w skład ramienia,
- moment bezwładności ciężarka  $I_k$ ,
- moment bezwładności ramienia drugiego  $I_2$ , obliczony na podstawie rozkładu momentu bezwładności ramienia drugiego  $I_b$  oraz ciężarka  $I_k$  znajdującego się na jego czubku,
- długość ramienia  $L_2$ ,
- odległość od połączenia z ramieniem pierwszym do środka ciężkości ramienia wraz z ciężarkiem  $l_2$ ,
- współczynnik tarcia w drugim przegubie  $\eta_2$ .



Rys. 2.3. Rysunek poglądowy z oznaczonymi parametrami

## 2.2. Wyprowadzenie modelu

Kolejnym krokiem modelowania obiektu było wyprowadzenie matematycznego opisu zależności fizycznych występujących w rozważanym wahadle (2). Uzyskany opis bazuje na nieliniowych równaniach różniczkowych zwyczajnych, obrazujących dynamikę wewnętrzną obiektu [18].

### 2.2.1. Równania Eulera - Lagrange'a jako metoda rachunku wariacyjnego

Fizyczna natura obiektu sterowania skłania do oparcia modelowania o metodykę mechaniki klasycznej. Korzystając z zasady zachowania energii zbudowano funkcję Lagrange'a, opisującą ruch ciał w matematycznej przestrzeni konfiguracyjnej układu [14, 44].

Funkcja Lagrange'a jest w rzeczywistości funkcjonałem czasu, współrzędnych położenia oraz prędkości ciał rozpatrywanego układu. Zgodnie z zasadą najmniejszego działania Hamiltona, będącą fundamentem rachunku wariacyjnego, ruch ciał w układzie fizycznym pomiędzy danymi punktami w przestrzeni, musi przebiegać po takiej krzywej, że opisujący ją funkcjonał osiąga ekstremum minimalne. Dla układu  $n$  ciał o masach  $m_i, \forall i \in \overline{0, n}$ , który posiada, bądź nie posiada więzów ograniczających jego energię oraz przy założeniu, że prędkości występujące w rozpatrywanym układzie są znacznie mniejsze od prędkości światła, energia kinetyczna  $E_k(\dot{\mathbf{q}}(t), t)$  układu opisana jest jako funkcjonał [14]:

$$E_k(\dot{\mathbf{q}}(t), t) \triangleq \sum_{i=0}^n \frac{m_i}{2} \dot{q}_i(t), \quad (2.5)$$

gdzie  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  jest wektorem prędkości uogólnionych układu.

Energia potencjalna  $E_p(\mathbf{q}(t), t)$  w jednorodnym polu grawitacyjnym związana jest z położeniem obiektu lub układu obiektów w przestrzeni [15]. Dana jest jako funkcjonal [14]:

$$E_p(\mathbf{q}(t), t), \quad (2.6)$$

gdzie  $\mathbf{q}(t)$  to wektor przemieszczeń uogólnionych układu. Współrzędne uogólnione definiuje się jako niezależne względem siebie zmienne mające reprezentację fizyczną, które opisują dynamikę układu w pewnej skończonej przestrzeni [44].

Definiując wektor sił uogólnionych:

$$\mathbf{Q}(u(t), \boldsymbol{\xi}(t)) \triangleq \left[ Q_0(u(t), \boldsymbol{\xi}(t)) \quad Q_1(u(t), \boldsymbol{\xi}(t)) \quad Q_2(u(t), \boldsymbol{\xi}(t)) \right]^T, \quad (2.7)$$

gdzie taka postać (2.7) wiąże się z faktem, iż wpływami zewnętrznymi dla rozpatrywanego modelu wahadła jest siła sterująca wózkiem  $u(t)$  oraz wektor zakłóceń  $\boldsymbol{\xi}(t)$ .

Macierz współczynników tarcia definiuje się jako:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_2 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Wykorzystując (2.5) oraz (2.6) zapisano funkcjonal będący różnicą energii kinetycznej oraz potencjalnej układu [14]:

$$L(\dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t), t) = E_k(\dot{\mathbf{q}}(t), t) - E_p(\mathbf{q}(t), t). \quad (2.9)$$

Układ fizyczny ewoluujący w czasie spełnia zasadę najmniejszego działania Hamiltona gdy [14]:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\cdot) dt \Rightarrow \min. \quad (2.10)$$

Rozwiązanie równania całkowego (2.10) można sprowadzić do rozwiązania wektorowego równania różniczkowego Eulera - Lagrange'a [14]. Dla układu  $n$  ciał, równanie to jest postaci [44]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}(t)} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\mathbf{q}}(t)} = \mathbf{Q}(\cdot), \quad (2.11)$$

Po prawej stronie równań (2.11), umieszczono zewnętrzne siły uogólnione układu  $\mathbf{Q}(\cdot)$ , które wpływają na zachowanie energii całkowitej układu [44]. Dla uproszczenia zapisu matematycznego symbole  $L(\dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t), t)$  oraz  $\mathbf{Q}(\cdot)$  w dalszej części pracy będzie oznaczać się jako  $L$  oraz  $\mathbf{Q}$ .

Funkcja dyssipacji Rayleigha  $D(\dot{\mathbf{q}}(t), t)$  zawiera zależności, które nie są związane z energią kinetyczną oraz potencjalną układu a zmieniają całkowitą energię układu w czasie. Moż-



na ją interpretować jako opis czynników rozpraszających energię np. tarcie czy opory powietrza [14, 44].

Człon  $D(\cdot)$  można bezpośrednio powiązać z siłami tarcia, które uwzględniane są w modelu wahadła. Gdy siły oporów tarcia zależą liniowo od prędkości uogólnionych układu  $\dot{q}(t)$ , to funkcja dyssypacji wyraża się jako [44]:

$$D(\dot{q}(t), t) = \frac{1}{2} \dot{q}^T(t) \boldsymbol{\eta}(t) \dot{q}(t) \quad (2.12)$$

Taka strategia modelowania pozwala na szybkie przejście ze zmiennych związanych ze zmianami energii układu na równania opisujące dynamikę obiektu [44].

### 2.2.2. Model energetyczny wahadła

Aby móc skorzystać z (2.9), należało wyprowadzić równania dla  $E_k(\cdot)$  i  $E_p(\cdot)$  charakteryzujące dany układ fizyczny. Wykorzystując założenie 5, definicję (2.1) oraz (2.11) zapisano równania Eulera - Lagrange'a w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} = \mathbf{Q}, \quad (2.13)$$

Opis energetyczny układu jest dany jako:

$$E_k(\cdot) = E_{k0}(\cdot) + E_{k1}(\cdot) + E_{k2}(\cdot), \quad (2.14)$$

$$E_p(\cdot) = E_{p0}(\cdot) + E_{p1}(\cdot) + E_{p2}(\cdot), \quad (2.15)$$

gdzie  $E_{k0}(\cdot)$ ,  $E_{k1}(\cdot)$ ,  $E_{k2}(\cdot)$  to energie kinetyczne odpowiednio: wózka, ramienia pierwszego i ramienia drugiego oraz  $E_{p0}(\cdot)$ ,  $E_{p1}(\cdot)$ ,  $E_{p2}(\cdot)$  to energie potencjalne odpowiednio: wózka, ramienia pierwszego i ramienia drugiego. W celu uproszczenia zapisu matematycznego, stosuje się symbole opisujące daną energię bez zmiennych tych, że funkcji.

Przyjmując za  $\dot{q}(t)$  rozszerzony wektor  $\boldsymbol{\theta}$  o element  $\theta_2 - \theta_1$ , wynikający z konieczności zastosowania jednego układu współrzędnych oraz macierz  $\boldsymbol{\eta}$  z równania (2.8), korzystając z wzoru (2.12) otrzymano:

$$D = \frac{1}{2} \eta_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} \eta_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \eta_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 = \frac{1}{2} \eta_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} \eta_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \eta_2 (\dot{\theta}_2^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1^2). \quad (2.16)$$

Licząc pochodne cząstkowe z (2.16) po  $\dot{\theta}$  otrzymuje się zmienne fizyczne w postaci siły tarcia  $F_{0t}(t)$  oraz momenty tarcia  $M_{1t}(t)$  i  $M_{2t}(t)$ , które zostały oznaczone na rysunku 2.2:

$$F_{0t}(t) = \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_0} = \eta_0 \dot{\theta}_0, \quad (2.17)$$

$$M_{1t}(t) = \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1} = \eta_1 \dot{\theta}_1 + \eta_2 \dot{\theta}_1 - \eta_2 \dot{\theta}_2, \quad (2.18)$$

$$M_{2t}(t) = \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2} = \eta_2 \dot{\theta}_2 - \eta_2 \dot{\theta}_1. \quad (2.19)$$

Poszczególne składowe wektora sił uogólnionych wyraża się jako:

$$Q_0 = u + \xi_0, \quad (2.20)$$

$$Q_1 = \xi_1, \quad (2.21)$$

$$Q_2 = \xi_2. \quad (2.22)$$

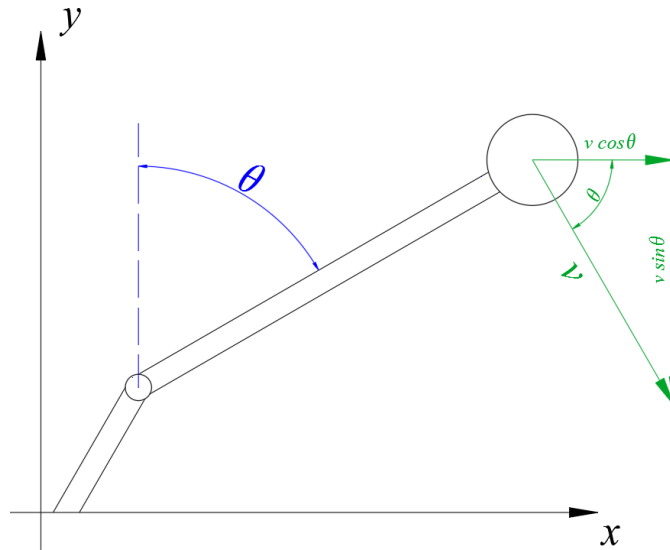
Energia kinetyczna obiektu jest związana z przemieszczaniem się jego masy. Przy wyznaczaniu energii kinetycznej w przypadku wahadła należy uwzględnić ruch postępowy oraz ruch obrotowy. Wówczas wzór na energię kinetyczną można zapisać jako sumę energii kinetycznych ruchu postępowego i obrotowego [15, 44].

Prędkości środka masy ramion wahadła są obliczane poprzez rozłożenie prędkości liniowej wynikającej bezpośrednio z prędkości kątowej członu na osie  $x$  oraz  $y$ . Ogólna zależność opisująca związek prędkości liniowej z kątową jest dana wzorem (2.23) [15]:

$$\nu(t) = \dot{\theta}(t)r_p, \quad (2.23)$$

gdzie  $\nu(t)$  to chwilowa prędkość liniowa,  $\dot{\theta}(t)$  jest chwilową prędkością kątową a  $r_p$  to promień okręgu, który zatacza trajektoria poruszającego się ciała.

Prędkości w osiach  $x$  oraz  $y$  składane są przy pomocy twierdzenia Pitagorasa, co pokazane zostało na rysunku 2.4, gdzie  $\nu(t) \cos \theta$  jest składową prędkości liniowej dla osi  $x$  a  $\nu(t) \sin \theta$  jest składową prędkości liniowej dla osi  $y$  [15].



Rys. 2.4. Rozłożenie prędkości liniowej na składowe

Energię kinetyczną całego obiektu można rozpatrywać jako sumę energii kinetycznych poszczególnych jego elementów. Wiedząc, że umieszczone na wózku ramiona posiadają tę własność, iż ich ruch postępowy jest ściśle związany z przemieszczaniem się wózka, należy uwzględnić  $\dot{\theta}_0$  w członie opisującym energię kinetyczną dla ruchu postępowego w osi  $x$  dla obu ramion [44]. Zatem, prędkość liniową ramienia pierwszego dla osi  $x$  można zapisać jako:

$$\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1, \quad (2.24)$$

a dla osi  $y$  jako:

$$\dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1. \quad (2.25)$$

Pod uwagę należy również wziąć fakt, iż rozpatrywany układ współrzędnych jest wyznaczany względem wózka wahadła. Skutkuje to tym, że dla drugiego ramienia, jego przemieszczenie kątowe jest zależne od przemieszczenia kątowego ramienia pierwszego. Dla drugiego ramienia prędkość liniowa względem osi  $x$  jest równa:

$$\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2, \quad (2.26)$$

a dla osi  $y$  jako:

$$\dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2. \quad (2.27)$$

Zatem, po wyjaśnieniu jak odbywa się ruch w przyjętym układzie współrzędnych, możliwe jest wyznaczenie wzorów na energię kinetyczną całego układu.

Dla wózka, energia kinetyczna jest równa:

$$E_{k0} = \frac{1}{2} m_0 \dot{\theta}_0^2. \quad (2.28)$$

Biorąc pod uwagę zależność dotyczącą przemieszczenia liniowego, przy wykorzystaniu (2.24) i (2.25), energia kinetyczna ramienia pierwszego jest równa:

$$E_{k1} = \frac{1}{2}m_1 \left( (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1)^2 + (\dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1)^2 \right) + \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta}_1^2, \quad (2.29)$$

a dla ramienia drugiego przy uwzględnieniu obu zależności oraz (2.26) i (2.27), energia kinetyczna wynosi:

$$E_{k2} = \frac{1}{2}m_2 \left( (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2)^2 + (\dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2)^2 \right) + \frac{1}{2}I_2 \dot{\theta}_2^2. \quad (2.30)$$

Dokonując dalszego przekształcenia (2.29) oraz (2.30) otrzymano zależności:

- dla  $E_{k1}$ :

$$\begin{aligned} E_{k1} &= \frac{1}{2}m_1(\dot{\theta}_0^2 + 2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 \sin^2 \theta_1) + \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta}_1^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1(\dot{\theta}_0^2 + 2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2) + \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta}_1^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 \dot{\theta}_0^2 + m_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2}m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta}_1^2, \end{aligned} \quad (2.31)$$

- dla  $E_{k2}$ :

$$\begin{aligned} E_{k2} &= \frac{1}{2}m_2(\dot{\theta}_0^2 + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 + 2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \\ &\quad + 2\dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 \sin^2 \theta_1 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 \sin^2 \theta_2 + 2\dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2) + \frac{1}{2}I_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2(\dot{\theta}_0^2 + \dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \dot{\theta}_2^2 l_2^2 + 2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 + 2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 + 2\dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \\ &\quad + 2\dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2) + \frac{1}{2}I_2 \dot{\theta}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_2 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{\theta}_2^2 l_2^2 + m_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 + m_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \\ &\quad + m_2 \dot{\theta}_1 L_1 \dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}I_2 \dot{\theta}_2^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Podstawiając (2.28), (2.31) i (2.32) do (2.14) otrzymano zależność opisującą energię kinetyczną całego układu:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{\theta}_0^2 + m_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2}m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{\theta}_1^2 L_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2 \dot{\theta}_2^2 l_2^2 + m_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 + m_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 + m_2 \dot{\theta}_1 L_1 \dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}I_2 \dot{\theta}_2^2. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Energię potencjalną całego obiektu można rozpatrywać jako sumę energii potencjalnych poszczególnych jego elementów.

Dla wózka energia potencjalna jest równa:

$$E_{p0} = 0, \quad (2.34)$$

a, energię potencjalną ramienia pierwszego wyraża wzór:

$$E_{p1} = l_1 m_1 g \cos \theta_1. \quad (2.35)$$

Wiedząc, iż położenie drugiego ramienia zależy od położenia ramienia pierwszego, energia potencjalna ramienia drugiego jest równa:

$$E_{p2} = m_2 g (L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2). \quad (2.36)$$

Podstawiając (2.34), (2.35) i (2.36) do (2.15) otrzymano zależność opisującą energię potencjalną całego układu:

$$E_p = m_1 g \cos \theta_1 l_1 + m_2 g \cos \theta_1 L_1 + m_2 g \cos \theta_2 l_2 = m_2 g l_2 \cos \theta_2 + (m_1 g l_1 + m_2 g L_1) \cos \theta_1. \quad (2.37)$$

### 2.2.3. Wyprowadzenie równań Eulera - Lagrange'a dla wahadła

Podstawiając (2.33) oraz (2.37) do (2.9) otrzymano następujący Lagranżjan:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_0 \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_0^2 + m_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} m_1 \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_0^2 \\ &+ \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_1^2 L_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 l_2^2 + m_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_1 + m_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 \\ &+ m_2 \dot{\theta}_1 L_1 \dot{\theta}_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 g L_2 \cos \theta_2 - (l_1 m_1 g + m_2 g L_1) \cos \theta_1 \\ &= \frac{1}{2} (m_0 + m_1 + m_2) \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (m_2 l_2^2 + I_2) \dot{\theta}_2^2 \\ &+ (m_1 l_1 + m_2 L_1) \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &- m_2 g l_2 \cos \theta_2 - g(m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Przy wykorzystaniu (2.38), poszczególne elementy składowe równania Eulera - Lagrange'a (2.13) wyznaczone zostały w następujący sposób:

- dla wózka:

· licząc pochodną cząstkową z  $L$  po  $\dot{\theta}_0$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} = (m_0 + m_1 + m_2) \dot{\theta}_0 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2, \quad (2.39)$$

· różniczkując po czasie (2.39):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) &= (m_0 + m_1 + m_2) \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \left( \dot{\theta}_1 (-\sin \theta_1) \dot{\theta}_1 + \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \right) \\
&\quad + m_2 l_2 \left( \dot{\theta}_2 (-\sin \theta_2) \dot{\theta}_2 + \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \right) \\
&= (m_0 + m_1 + m_2) \ddot{\theta}_0 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

· licząc pochodną cząstkową z  $L$  po  $\theta_0$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_0} = 0, \tag{2.41}$$

· odejmując (2.41) od (2.40) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_0} &= (m_0 + m_1 + m_2) \ddot{\theta}_0 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

- dla ramienia pierwszego:

· licząc pochodną cząstkową z  $L$  po  $\dot{\theta}_1$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \dot{\theta}_1 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \dot{\theta}_0 + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2, \tag{2.43}$$

· różniczkując po czasie (2.43):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \ddot{\theta}_1 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_0 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_0 \\
&\quad + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2,
\end{aligned} \tag{2.44}$$

· licząc pochodną cząstkową z  $L$  po  $\theta_1$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -(m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_1 - m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta_1, \tag{2.45}$$

· odejmując (2.45) od (2.44) otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \ddot{\theta}_1 \\
&\quad + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta_1.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

- dla ramienia drugiego:

· licząc pochodną cząstkową z  $L$  po  $\dot{\theta}_2$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = (m_2 l_2^2 + I_2) \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_0 + m_2 L_1 l_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1, \quad (2.47)$$

· różniczkując po czasie (2.47):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= (m_2 l_2^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_0 - m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 \\ &+ m_2 L_1 l_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \dot{\theta}_1 (-\sin (\theta_1 - \theta_2)) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ &= (m_2 l_2^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_0 - m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 \\ &- m_2 L_1 l_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 L_1 l_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, \end{aligned} \quad (2.48)$$

· licząc pochodną cząstkową z  $L$  po  $\theta_2$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\sin \theta_2 m_2 l_2 \dot{\theta}_0 \dot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_2 g \sin \theta_2, \quad (2.49)$$

· odejmując (2.49) od (2.48) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_0 + m_2 L_1 l_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 \\ &- m_2 L_1 l_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 g \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (2.50)$$

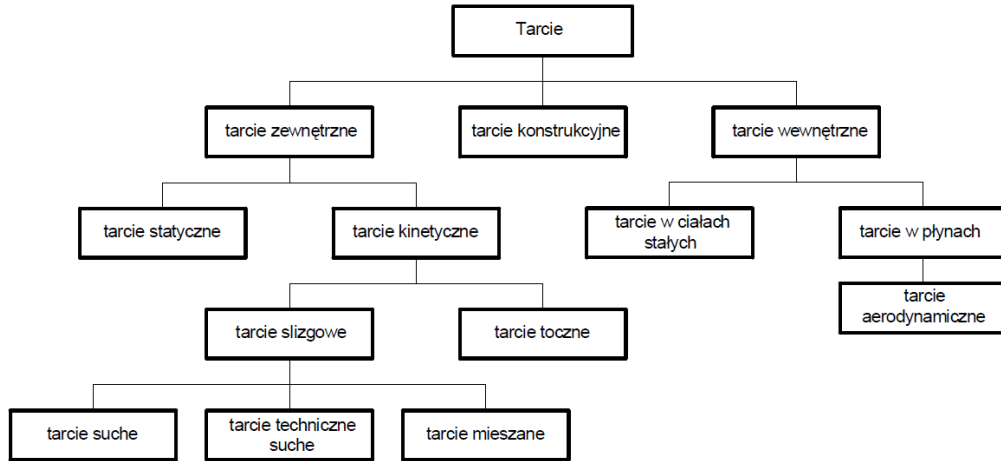
Wykorzystując (2.17), (2.18), (2.19), (2.20), (2.21), (2.22), (2.42), (2.46) oraz (2.50), równanie Eulera - Lagrange'a (2.13) przyjmuje postać następującego układu równań:

$$\left\{ \begin{aligned} u + \xi_0 - \dot{\theta}_0 \eta_0 &= (m_0 + m_1 + m_2) \ddot{\theta}_0 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \\ &(m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2, \\ \xi_1 - \dot{\theta}_1 \eta_1 - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \eta_2 &= (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_0 + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \ddot{\theta}_1 + \\ &m_2 L_1 l_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 l_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta_1, \\ \xi_2 - (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \eta_2 &= m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_0 + m_2 L_1 l_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 \\ -m_2 L_1 l_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 &- m_2 l_2 g \sin \theta_2. \end{aligned} \right. \quad (2.51)$$

Otrzymany układ równań różniczkowych drugiego stopnia charakteryzuje się uwikłaną formą. Innymi słowy w jednym równaniu znajduje się więcej niż jedna pochodna drugiego stopnia. Pozostawienie modelu w takiej postaci może wiązać się z problemami przy syntezy systemu sterowania oraz z symulacją w środowisku Matlab Simulink.

#### 2.2.4. Model parametryczny współczynników tarcia

Z natury, tarcie które występuje w układach mechanicznych cechuje się nieliniowością oraz niestacjonarnością. Negatywnym wpływem jej działania jest pogarszanie dynamiki układu co powoduje, że zadanie kompensacji tego zjawiska jest niezwykle ważne [8, 47]. Zasadniczo, rodzaje tarć można podzielić według schematu umieszczonym na rysunku 2.5.



Rys. 2.5. Podział zjawiska tarcia [8]

Budowa matematycznej reprezentacji zjawiska tarcia jest zadaniem bardzo złożonym i wymagającym zaawansowanej procedury identyfikacji parametrów oraz założenia odpowiedniego modelu do celów estymacji. Odwołanie się do teorii modelowania tarć w układach mechanicznych pozwala jednak na pewne uproszczenia modeli fizycznych. Szczególnie jest to przydatne przy syntezie systemu sterowania [47].

Postać równań Eulera - Lagrange'a (2.13), zastosowana przy modelowaniu wahadła, w której wstępuje człon  $D$  wymusza zapisanie wpływu czynników rozpraszających energię w postaci (2.12). ze względu na skomplikowaną procedurę modelowania wpływu tarć na ruch poszczególnych elementów wahadła, konieczne było zastosowanie uproszczonego opisu matematycznego tych zjawisk.

Autorzy pracy zdecydowali się na model tarcia, w którym wartości nominalnych współczynników podanych w (2.8) zostaną ustalone w sposób deterministyczny jako pewne stałe [10]. Wyboru tego dokonano poprzez arbitralne założenie ich jednostek fizycznych tak, aby po przemnożeniu razy prędkość liniową bądź kątową otrzymać kolejno siłę wyrażoną w  $N$  oraz moment siły wyrażony w  $Nm$ . Wówczas współczynniki macierzy  $\eta$  wyniosły (2.52):

$$\eta = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$



## 2.2.5. Modele momentów bezwładności ramion wahadła

Mając na uwadze założenia dotyczące parametrów z (2.1.3), konieczne było wyznaczenie wypadkowych momentów bezwładności  $I_1$  i  $I_2$ . Nierównomierny rozkład masy poszczególnych elementów wahadła musiał zostać uwzględniony przy obliczeniach. ze względu ich złożoność, do wyznaczenia wartości parametrów zastosowano program Inventor firmy Autodesk. Jego funkcjonalność została również wykorzystana do zaprojektowania odpowiednich elementów składowych wahadła co zostanie szerzej omówione w rozdziale (5.2.1). do wyliczania momentów bezwładności  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_b$  i  $I_k$  program wykorzystywał metodę całki ujemnej [2].

W przypadku ramienia pierwszego, jego masa  $m_1$  oraz moment bezwładności  $I_1$  pozostawały niezmiennie, ze względu na brak możliwości wpływania na elementy składowe. Inna sytuacja występowała dla ramienia drugiego. Wartości momentu bezwładności ramienia  $I_b$  oraz masy  $m_b$  bez ciężarka były stałe. Zmiany wartości momentu bezwładności  $I_2$  oraz masy  $m_2$  wynikały z niepewności parametrów  $I_k$  i  $m_k$ , które opisują właściwości ciężarka umieszczanego na szczycie ramienia. Dla maksymalnych oraz minimalnych wartości parametrów  $I_k$  i  $m_k$  należało wyznaczyć wartości wypadkowe  $I_2$  oraz  $m_2$ , które są docelowymi wielkościami rozpatrywanymi w kontekście symulacji oraz syntezy sterowania.

## 2.2.6. Wartości parametrów wahadła

Kolejnym krokiem w modelowaniu obiektu wahadła było podanie wartości parametrów fizycznych obiektu. ze względu na założenia poczynione w (2.1.3) oraz rozważania z rozdziałów (2.2.5) oraz (2.2.4), określenie wartości parametrów składa się z dwóch części. Pierwsza z nich dotyczyła parametrów o stałych, wartościach natomiast druga część opisywała parametry dla których niepewność miała charakter deterministyczny, przedziałowy. Dokładny opis elementów konstrukcyjnych, z których zbudowano wahadło zawarto w rozdziale (5.2.1). na ich podstawie dobrano wartości parametrów wahadła, umieszczone w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Parametry fizyczne wahadła

Lp.	Parametr	Wartość parametru	Jednostka
1.	$I_1$	0,0016556	$kg\ m^2$
2.	$I_2$	[0,0012716; 0,0014248]	$kg\ m^2$
3.	$I_b$	0,000816116	$kg\ m^2$
4.	$I_k$	[0,0000015; 0,0000122]	$kg\ m^2$
5.	$l_1$	0,14527	$m$
6.	$l_2$	[0,11483; 0,12633]	$m$
7.	$L_1$	0,23138	$m$
8.	$L_2$	0,257	$m$
9.	$m_0$	0,530168	$kg$
10.	$m_1$	0,18369	$kg$
11.	$m_2$	[0,130933; 0,14778]	$kg$
12.	$m_b$	0,109236	$kg$
13.	$m_k$	[0,021697; 0,038554]	$kg$
14.	$\eta_0$	0,1	$kg\ m/s$
15.	$\eta_1$	0,01	$kg\ m^2/s$
16.	$\eta_2$	0,01	$kg\ m^2/s$

## 2.3. Rozwikłanie modelu

W przypadku bezpośredniej implementacji modelu (2.51) w środowisku Matlab/Simulink, pojawiła się konieczność rozwiązania nie tylko równań różniczkowych, ale i tzw. pętli algebraicznych. Wbudowane solvery środowiska Matlab/Simulink podejmują próbę rozwiązania problemu poprzez uruchomienie dodatkowych procedur iteracyjnych. Jednakże, jak wskazuje dokumentacja, działania te nie zawsze będą gwarantowały znalezienie rozwiązania [34, 39].

W związku z tym, w rozważanym przypadku możliwe były dwie ścieżki postępowania. Pierwsza to dostosowanie modelu do postaci wymaganej przez dedykowane, modelom uwikłanym solvery środowiska Matlab. Druga to przekształcenie (rozwikłanie) modelu do postaci jawnej, co umożliwi wykorzystanie typowych solverów środowiska symulacyjnego [34, 39].

### 2.3.1. Postać macierzowo - wektorowa modelu w wersji uwikłanej

W niniejszej pracy zdecydowano się na drugie z podejść. W związku z tym, w pierwszej kolejności (2.51) przekształcono do postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_0 + m_1 + m_2)\ddot{\theta}_0 = u + \xi_0 - \dot{\theta}_0\eta_0 + (m_1l_1 + m_2L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ - (m_1l_1 + m_2L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - m_2l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2, \\ (m_1l_1^2 + m_2L_1^2 + I_1)\ddot{\theta}_1 = \xi_1 - \dot{\theta}_1\eta_1 - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\eta_2 - m_2L_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ + (m_1l_1 + m_2L_1)g \sin \theta_1 - (m_1l_1 + m_2L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_0 - m_2L_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2, \\ (m_2l_2^2 + I_2)\ddot{\theta}_2 = \xi_2 - (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\eta_2 + m_2L_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2l_2g \sin \theta_2 \\ - m_2l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_0 - m_2L_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1. \end{array} \right. \quad (2.53)$$

Chcąc uprościć procedurę wyznaczania rozwikłanego układu równań różniczkowych opisujących zachowanie dynamiki obiektu przyjęto następujące podstawienia:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_r \triangleq (m_0 + m_1 + m_2), \\ b_r \triangleq b_r(\dot{\theta}, \theta) = u + \xi_0 - \dot{\theta}_0\eta_0 + (m_1l_1 + m_2L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2, \\ c_r \triangleq c_r(\theta) = (m_1l_1 + m_2L_1) \cos \theta_1, \\ d_r \triangleq d_r(\theta) = m_2l_2 \cos \theta_2, \\ e_r \triangleq (m_1l_1^2 + m_2L_1^2 + I_1), \\ f_r \triangleq f_r(\dot{\theta}, \theta) = \xi_1 - \dot{\theta}_1\eta_1 - (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\eta_2 - m_2L_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + (m_1l_1 + m_2L_1)g \sin \theta_1, \\ h_r \triangleq h_r(\theta) = m_2L_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \\ i_r \triangleq m_2l_2^2 + I_2, \\ j_r \triangleq j_r(\dot{\theta}, \theta) = \xi_2 - (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)\eta_2 + m_2L_1l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + m_2l_2g \sin \theta_2. \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Następnie równania (2.53), zapisano ponownie, używając wprowadzonych oznaczeń (2.54):

$$\begin{cases} a_r \ddot{\theta}_0 = b_r - c_r \ddot{\theta}_1 - d_r \ddot{\theta}_2, \\ e_r \ddot{\theta}_1 = f_r - c_r \ddot{\theta}_0 - h_r \ddot{\theta}_2, \\ i_r \ddot{\theta}_2 = j_r - d_r \ddot{\theta}_0 - h_r \ddot{\theta}_1. \end{cases} \quad (2.55)$$

Po uporządkowaniu (2.55) otrzymano:

$$\begin{cases} a_r \ddot{\theta}_0 + c_r \ddot{\theta}_1 + d_r \ddot{\theta}_2 = b_r, \\ c_r \ddot{\theta}_0 + e_r \ddot{\theta}_1 + h_r \ddot{\theta}_2 = f_r, \\ d_r \ddot{\theta}_0 + h_r \ddot{\theta}_1 + i_r \ddot{\theta}_2 = j_r. \end{cases} \quad (2.56)$$

Wprowadzając opis macierzowo - wektorowy rozwikłanie modelu danego w (2.56) można przeprowadzić w następujący sposób. Definiując macierze  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{B}_r$  oraz  $\mathbf{X}_r$ :

$$\mathbf{A}_r \triangleq \begin{bmatrix} a_r & c_r & d_r \\ c_r & e_r & h_r \\ d_r & h_r & i_r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_r \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_r \triangleq \begin{bmatrix} b_r \\ f_r \\ j_r \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

które muszą spełniać zależność:

$$\mathbf{A}_r \mathbf{X}_r = \mathbf{B}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}_r = \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{B}_r, \quad (2.58)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_r^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}_r} [\mathbf{A}_r^D]^T. \quad (2.59)$$

Należy podkreślić, iż macierz funkcji zależnych od zmiennych systemu  $\mathbf{A}_r$ , zdefiniowana w (2.57) musi być nieosobliwa, co zostało pokazane w Dodatku C.

### 2.3.2. Postać macierzowo - wektorowa modelu w wersji rozwikłanej

W celu wyznaczenia macierzy odwrotnej  $\mathbf{A}_r^{-1}$  obliczono:

- wyznacznik z macierzy  $\mathbf{A}_r$ :

$$\det \mathbf{A}_r = a_r e_r i_r + 2c_r d_r h_r - c_r^2 i_r - a_r h_r^2 - d_r^2 e_r, \quad (2.60)$$

- macierz dopełnień:

$$\mathbf{A}_r^D = \begin{bmatrix} e_r i_r - h_r^2 & d_r h_r - c_r i_r & c_r h_r - d_r e_r \\ d_r h_r - c_r i_r & a_r i_r - d_r^2 & c_r d_r - a_r h_r \\ c_r h_r - d_r e_r & c_r d_r - a_r h_r & a_r e_r - c_r^2 \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

- macierz dopełnień transponowanych:

$$[\mathbf{A}_r^D]^T = \begin{bmatrix} e_r i_r - h_r^2 & d_r h_r - c_i & c_r h_r - d_r e_r \\ d_r h_r - c_r i_r & a_r i_r - d_r^2 & c_r d_r - a_r h_r \\ c_r h_r - d_r e_r & c_r d_r - a_r h_r & a_r e_r - c_r^2 \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Następnie (2.60), (2.61) oraz (2.62) wprowadzono do (2.59) otrzymując:

$$\mathbf{A}_r^{-1} = \frac{1}{a_r e_r i_r + 2c_r d_r h_r - c_r^2 i_r - a_r h_r^2 - d_r^2 e_r} \begin{bmatrix} e_r i_r - h_r^2 & d_r h_r - c_r i_r & c_r h_r - d_r e_r \\ d_r h_r - c_r i_r & a_r i_r - d_r^2 & c_r d_r - a_r h_r \\ c_r h_r - d_r e_r & c_r d_r - a_r h_r & a_r e_r - c_r^2 \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Na podstawie (2.58) oraz (2.63) zapisano równanie macierzowe wymagane do wyznaczenia macierzy  $\mathbf{X}_r$  zawierającej drugie pochodne zmiennych  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  opisujących położenie obiektu:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_r e_r i_r + 2c_r d_r h_r - c_r^2 i_r - a_r h_r^2 - d_r^2 e_r} \begin{bmatrix} e_r i_r - h_r^2 & d_r h_r - c_r i_r & c_r h_r - d_r e_r \\ d_r h_r - c_r i_r & a_r i_r - d_r^2 & c_r d_r - a_r h_r \\ c_r h_r - d_r e_r & c_r d_r - a_r h_r & a_r e_r - c_r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r \\ f_r \\ j_r \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Przekształcając (2.64), ostatecznie otrzymano układ równań zawierający rozwikłane równania różniczkowe:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_0 = \frac{b_r(e_r i_r - h_r^2) + f_r(d_r h_r - c_r i_r) + j_r(c_r h_r - d_r e_r)}{a_r e_r i_r + 2c_r d_r h_r - c_r^2 i_r - a_r h_r^2 - d_r^2 e_r}, \\ \ddot{\theta}_1 = \frac{b_r(d_r h_r - c_r i_r) + f_r(a_r i_r - d_r^2) + j_r(c_r d_r - a_r h_r)}{a_r e_r i_r + 2c_r d_r h_r - c_r^2 i_r - a_r h_r^2 - d_r^2 e_r}, \\ \ddot{\theta}_2 = \frac{b_r(c_r h_r - d_r e_r) + f_r(c_r d_r - a_r h_r) + j_r(a_r e_r - c_r^2)}{a_r e_r i_r + 2c_r d_r h_r - c_r^2 i_r - a_r h_r^2 - d_r^2 e_r} \end{cases} \quad (2.65)$$

Tak uzyskany model (2.65) zaimplementowano w środowisku Matlab/Simulink.

## 2.4. Symulacyjne badanie modelu

W celu przeanalizowania działania modelu wahadła oraz weryfikacji jego poprawności (2), konieczne było przeprowadzenie symulacji w programie Matlab Simulink. Rozwikłaną postać równań różniczkowych z (2.65) badano pod kątem wpływu wartości parametrów fizycznych oraz warunków początkowych  $\theta(0)$  i  $\dot{\theta}(0)$  na działanie układu.

### 2.4.1. Dobór parametrów do celów badania modelu obiektu

Parametry przyjęto z rozdziału (2.2.6), gdzie dla tych cechujących się niepewnością przedziałową należało zdecydować, jakie wartości zostaną obrane za nominalne. Wiadomym było,

iz ustalając wartość parametrów  $I_k$  oraz  $m_k$ , można było wyliczyć na podstawie ich znajomości wartości parametrów  $I_2, l_2$  oraz  $m_2$ , niezbędnych do badania obiektu.

Wartość parametrów  $I_k$  oraz  $m_k$  obliczono według średniej geometrycznej [7, 38]:

$$\hat{b} = \sqrt{b_{max}b_{min}}, \quad (2.66)$$

przy założeniu, że:

$$0 < b_{min} \leq \hat{b} \leq b_{max}, \quad (2.67)$$

gdzie  $\hat{b}$  jest estymatą parametru, a  $b_{max}$  oraz  $b_{min}$  są kolejno maksymalną oraz minimalną wartością danego parametru [7, 38].

Na podstawie rozważań z (2.66), (2.67) oraz znajomości krańcowych wartości parametrów z tabeli 2.1, obliczono wartości estymat  $\hat{I}_k$  oraz  $\hat{m}_k$ :

$$\begin{aligned} \hat{m}_k &= 28,9186647 \text{ g}, \\ \hat{I}_k &= 43,98882642 \text{ gcm}^2. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ze względu na fakt, iż program Inventor jest w stanie tworzyć jedynie rzeczywiste obiekty, które nie mogą mieć dowolnych wymiarów oraz właściwości, osiągnięcie wartości nominalnych parametrów wyliczonych w (2.68) było utrudnione [2]. W celu rozwiązania problemu autorzy postanowili zamodelować obciążenie tak, aby jego parametry  $\hat{I}_{k_{inv}}$  oraz  $\hat{m}_{k_{inv}}$  miały wartość przybliżoną do estymat  $\hat{I}_k$  oraz  $\hat{m}_k$ . Błąd dopasowania założono na poziomie 5% na każdy parametr.

Matematycznie, zależność tą można wyrazić jako błąd względny w postaci:

$$\begin{aligned} 0.05 &\geq \frac{|\hat{I}_k - \hat{I}_{k_{inv}}|}{\hat{I}_k}, \\ 0.05 &\geq \frac{|\hat{m}_k - \hat{m}_{k_{inv}}|}{\hat{m}_k}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Po dokonaniu modelowania elementu o przybliżonych właściwościach zweryfikowano jego dokładność. Obliczenia numeryczne przeprowadzono w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \frac{|43,98882642 - 44,06807|}{43,98882642} &= 0.0018 \leq 0.05 \text{ g cm}^2, \\ \frac{|28,9186647 - 28,717|}{28,9186647} &= 0.00697 \leq 0.05 \text{ g}. \end{aligned}$$

Wówczas na podstawie powyższych obliczeń spełniających warunek z (2.69) można przyjąć  $\hat{I}_{k_{inv}}$  oraz  $\hat{m}_{k_{inv}}$  jako nominalne parametry  $I_k$  oraz  $m_k$ .

Zatem, bazując na wartościach parametrów z tabeli 2.1, obliczeń z (2.68), oraz rozważań z (2.69), po przeliczeniu na jednostki układu SI wybrano wartości nominalnych parametrów do celu symulacji obiektu, które zamieszczono w tabeli 2.2.

**Tabela 2.2.** Parametry fizyczne wahadła

Lp.	Parametr	Wartość parametru	Jednostka
1.	$I_1$	0,0016556	$kg\ m^2$
2.	$I_2$	0,0013518	$kg\ m^2$
3.	$I_b$	0,0008161	$kg\ m^2$
4.	$I_k$	0,0000043	$kg\ m^2$
5.	$l_1$	0,14527	$m$
6.	$l_2$	0,12041	$m$
7.	$L_1$	0,23138	$m$
8.	$L_2$	0,257	$m$
9.	$m_0$	0,530168	$kg$
10.	$m_1$	0,18369	$kg$
11.	$m_2$	0,137952	$kg$
12.	$m_b$	0,109	$kg$
13.	$m_k$	0,028	$kg$
14.	$\eta_0$	0,1	$kg\ m/s$
15.	$\eta_1$	0,01	$kg\ m^2/s$
16.	$\eta_2$	0,01	$kg\ m^2/s$

#### 2.4.2. Dobór procedury numerycznej

W celu numerycznego rozwiązania zaimplementowanego modelu należy wskazać właściwą procedurę numeryczną. Typowo, wybrane środowisko symulacyjne Matlab Simulink, do rozwiązania równań różniczkowych wykorzystuje jednokrokową metodą Rungego-Kutty rzędu 4 i 5 [29]. Metoda ta sprawdza się stosunkowo dobrze dla szerokiego zakresu problemów, gwarantując niewielki błąd przy racjonalnym czasie obliczeń. Jednakże, autorzy pracy przebadali również inne, dostępne w Matlabie, odpowiednie dla rozważanego problemu, solvery. Dobór metody numerycznej uzależniony od wielu różnych aspektów, np. to czy symulowany model jest w postaci ciągłej, dyskretnej czy jest hybrydą dwóch pozostałych [34, 39]. Stworzony model wahadła został przygotowany dla ciągłej dziedziny czasu, co poskutkowało wyborem metody o zmiennym kroku.

W przypadku modelu o dynamice ciągłej, dobór metody o zmiennym kroku pozwalał na to, że algorytm podczas swojego działania potrafił dostosowywać się do zmian zachodzących w modelu na bieżąco. na podstawie dokumentacji wybrano następujące solvery [34, 39]:

- ode 23 (mod.stiff/Trapezoidal) - Metoda Rungego-Kutty, dopasowanie Bogackiego - Shampina (2,3),
- ode 45 - Metoda Rungego-Kutty, dopasowanie Dormanda-Prince'a (4,5),
- ode 113 (Adams) - metoda PECE (*Predict-Evaluate-Correct-Evaluate*) Adamsa -Bashfortha - Moultona.

W wyniku przeprowadzonych rozważań, opartych na analizach dokumentacji solverów oraz przeprowadzeniu odpowiednich badań symulacyjnych, wybrana została metoda ODE 45. W tabeli 2.3 umieszczono parametry solvera, które stosowano we wszystkich plikach symulacyjnych.

Tabela 2.3. Parametry procedur numerycznych

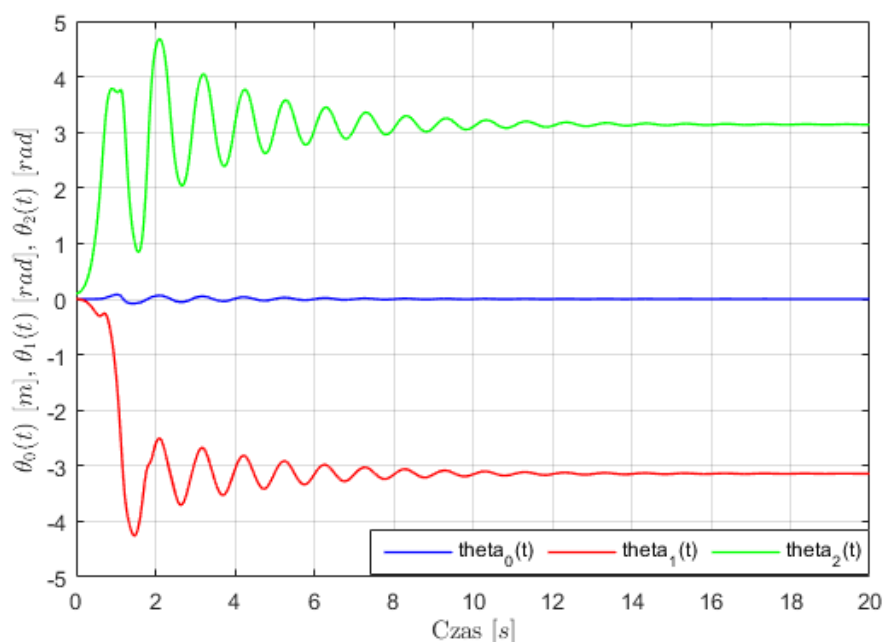
Lp.	Parametr	Wartość parametru
1.	Max Step Size	0.001
2.	Min Step Size	auto
3.	Relative Tolerance	1e-3
5.	Absolute Tolerance	auto
6.	Shape Preservation	Disable All

### 2.4.3. Weryfikacja poprawności działania modelu symulacyjnego

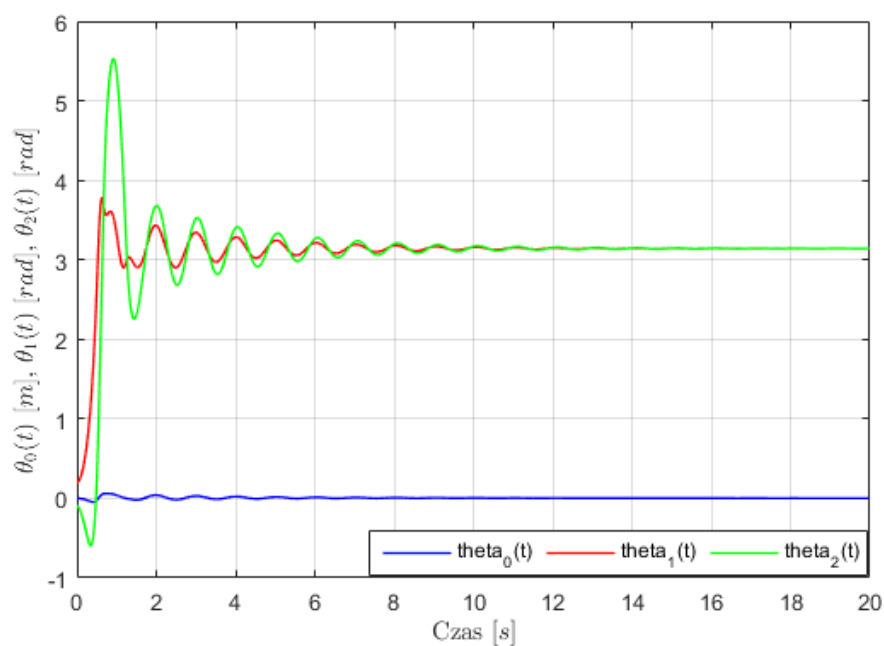
W celu zweryfikowania poprawności działania modelu symulacyjnego wahadła, zobrazowano jego działanie na przebiegach czasowych uzyskanych w programie Matlab Simulink. Model ten można znaleźć na płycie CD w Dodatku I pod nazwą *DIP\_MODEL.slx*. Dla znanych wartości parametrów fizycznych oraz założonych z góry warunków początkowych  $\theta(0)$  i  $\dot{\theta}(0)$  analizowano ewolucję wektora zmiennych  $\theta(t)$  w czasie. Dla następującego zestawu warunków początkowych:

- symulacja nr.1 -  $\begin{bmatrix} \theta^T(0) & \dot{\theta}^T(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}^T$ ,
- symulacja nr.2 -  $\begin{bmatrix} \theta^T(0) & \dot{\theta}^T(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.2 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}^T$ ,
- symulacja nr.3 -  $\begin{bmatrix} \theta^T(0) & \dot{\theta}^T(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}^T$ ,

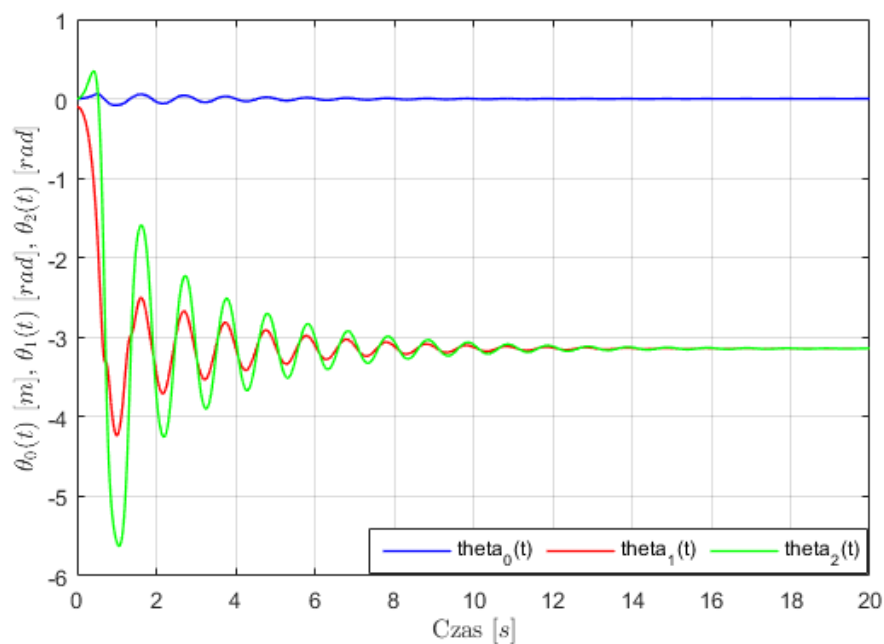
przeprowadzono trzy symulacje, dla których czas ich trwania wyniósł 20 jednostek czasu. Na rysunkach 2.6, 2.7 i 2.8 przedstawiono wykresy pokazujący zmiany dynamiki wahadła w czasie.



Rys. 2.6. Przebieg czasowy wektora  $\theta(t)$  dla pierwszego zestawu warunków początkowych



Rys. 2.7. Przebieg czasowy wektora  $\theta(t)$  dla drugiego zestawu warunków początkowych



Rys. 2.8. Przebieg czasowy wektora  $\theta(t)$  dla trzeciego zestawu warunków początkowych

Analizując rysunki 2.6, 2.7 i 2.8, można dojść do wniosku, iż wartości wektora zmiennych  $\theta$  są zbieżne do pewnej określonej, skończonej wartości równej:

$$\bar{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & \pm\pi & \pm\pi \end{bmatrix}^T. \quad (2.70)$$



Logicznym jest, że dla danej pozycji początkowej, puszczone swobodnie, rzeczywiste wahadło wskutek oporów ruchu zatrzyma się po pewnym czasie w dolnym położeniu (2.70). Mając na uwadze nieliniową dynamikę obiektu, takie zachowanie wahadła można utożsamzić z osiągnięciem przez nie dolnego punktu równowagi [38].

W przypadku otrzymanego wyniku z (2.70), zmienne  $\theta_1$  oraz  $\theta_2$  osiągały wartość  $\pm\pi$  ze względu na postać układu współrzędnych. Wahadło, dążąc do dolnego punktu równowagi, w zależności od założonych warunków początkowych, może poruszyć się w lewo bądź prawo. Funkcje trygonometryczne  $\sin(\cdot)$  oraz  $\cos(\cdot)$  występujące w modelu z (2.65), dla zmiennych których wartości są równe  $\pm\pi$  osiągają te same wartości.

Odwołując się do teorii stabilności nieliniowych układów dynamicznych, dynamika wewnętrzna takiego systemu cechuje się, asymptotyczną stabilnością, jeżeli system osiąga stabilny punkt równowagi w pewnym czasie  $t \in [t_0, \infty]$ , co można zapisać jako [38]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\|_2 = \bar{\mathbf{x}}, \quad (2.71)$$

gdzie:  $\|(\cdot)\|_2$  oznacza normę euklidesową, a  $\bar{\mathbf{x}}$  jest punktem równowagi układu. Układy nieliniowe mogą cechować się globalną asymptotyczną stabilnością, co oznacza, że startując z dowolnego warunku początkowego możliwe jest osiągnięcie (2.71), oraz lokalną, asymptotyczną stabilnością, gdzie jedynie ograniczony zbiór warunków początkowych gwarantuje spełnienie (2.71) [18].

Dowód globalnej, asymptotycznej stabilności danego punktu stacjonarnego dla układu nieliniowego wiązałby się ze zdefiniowaniem odpowiedniej, skalarnej funkcji Lapunov'a  $V(\mathbf{x}(t))$  spełniającej następujące warunki [18]:

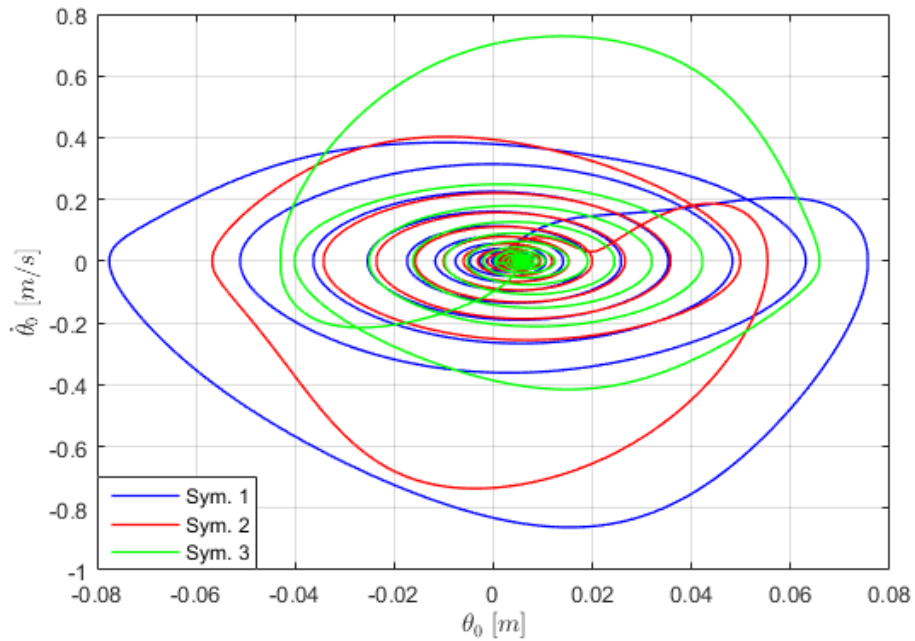
$$\begin{cases} V(\mathbf{x}(t)) \geq 0, \\ V(\bar{\mathbf{x}}) = 0, \\ \dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}(t) < 0. \end{cases} \quad (2.72)$$

Ze względu na złożoność oraz objętość potencjalnego dowodu matematycznego, mającego na celu wykazanie bądź wykluczenie globalnej, asymptotycznej stabilności dolnego punktu równowagi za pomocą (2.72), prostszym i czytelniejszym rozwiązaniem problemu analizy stabilności było odwołanie się do graficznego przedstawienia zachowania się modelu wahadła. Chcąc zobrazować dynamikę nieliniowego systemu warto sięgnąć po Metodę płaszczyzny fazowej [38]. Polega ona na poszukiwaniu rozwiązania stanu układu w funkcji pochodnej stanu  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  od zmiennej stanu  $\mathbf{x}(t)$  [38]. Punkt znajdujący się na płaszczyźnie fazowej porusza się wraz z upływem czasu po krzywej zwanej trajektorią fazową, która jest geometryczną formą zobrazowania dynamiki układu. Portretem fazowym definiuje się zbiór trajektorii systemu, który ewoluuje w czasie [18].

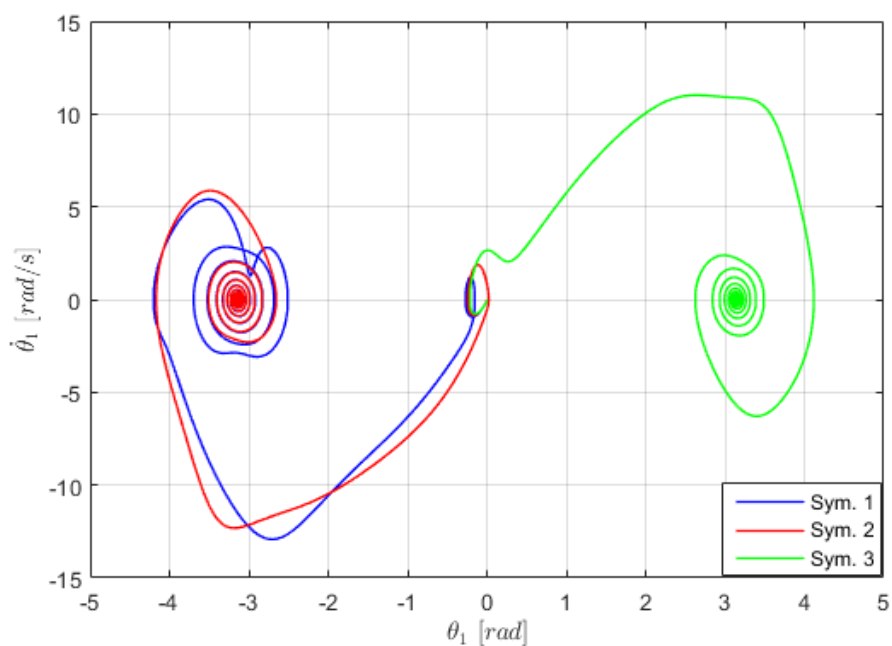
Ze względu na potrzebę przedstawienia zależności między zmienną stanu a jej pochodną, dokonano przekształcenia przestrzeni sześciowymiarowej, w której zawiera się wektor  $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^6$ , na trzy podprzestrzenie dwuwymiarowe  $\mathbb{R}^2$ . Ponadto, w celu podkreślenia różnic w zachowaniu

systemu dla różnych wartości warunków początkowych, trajektorie fazowe dla wszystkich symulacji umieszczono na jednym wykresie, dla danej podprzestrzeni  $\mathbb{R}^2$ .

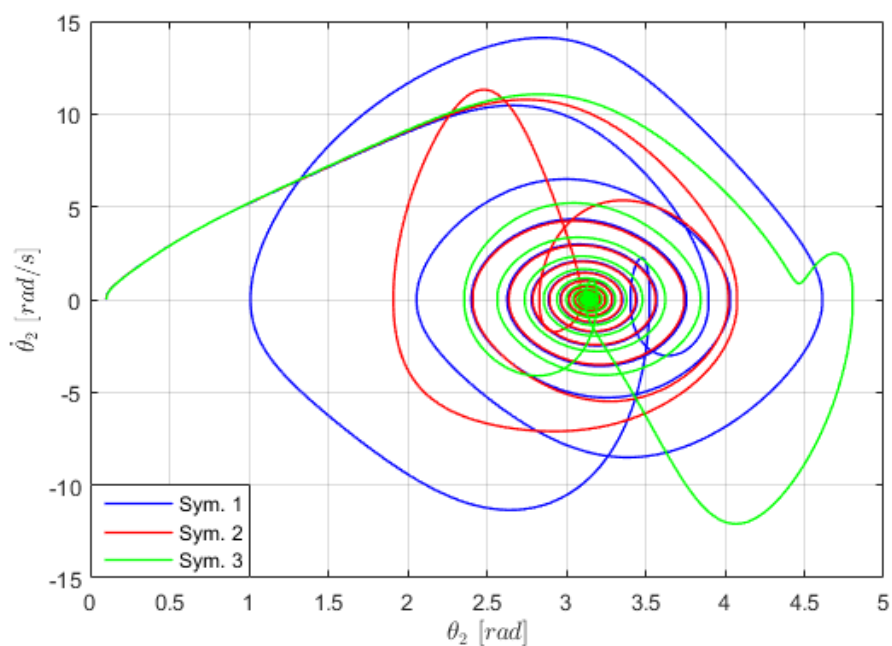
Portrety fazowe wygenerowano przy pomocy programu napisanego w Matlab Simulink, który można znaleźć w Dodatku I pod nazwą *chaos.m*. na poniżej zamieszczonych rysunkach 2.9, 2.10 i 2.11 zamieszczono zbiór trajektorii fazowych dla trzech różnych zestawów warunków początkowych, których postać zdefiniowano w Dodatku B. Czas jednej symulacji trwał 20 jednostek czasu.



Rys. 2.9. Portret fazowy dla  $\dot{\theta}_0(\theta_0)$



Rys. 2.10. Portret fazowy dla  $\dot{\theta}_1(\theta_1)$



Rys. 2.11. Portret fazowy dla  $\dot{\theta}_2(\theta_2)$

Analizując treść rysunków 2.9, 2.10 i 2.11, można zauważyć, że dla założonych trzech zestawów warunków początkowych, wahadło osiąga dolny punkt równowagi w  $t \rightarrow \infty$ . Wnioskuje się, że dolny punkt równowagi jest asymptotycznie stabilny [38]. Nie można jednak uznać, że jest to stabilność globalna. Ustawiając warunki początkowe wahadła w górnym punkcie równowagi, model pozostanie w tym położeniu. Zatem, należy odrzucić stwierdzenie o globalnej stabilności

i przyjąć, że model jest lokalnie, asymptotycznie stabilny [18]. Oprócz powyższych analiz, autorzy zdecydowali się na zbadanie stabilności lokalnej punktów równowagi wahadła za pomocą pośredniej metody Lapunov'a. Model do celów badań zaczerpnięto z rozdziału (3.1.5), a wartości punktów stacjonarnych z (3.21) i (3.22). Efekty tych działań zostały zaprezentowane w Dodatku D.

Na podstawie powyższych obserwacji można było stwierdzić, że model poznawczy wahadła działa poprawnie i może on zostać zastosowany przy syntezie systemu sterowania obiektem.

Autorzy pracy dokonali również badań symulacyjnych nad chaotyczną dynamiką modelu wahadła. W Dodatku B, zamieszczono krótki opis teoretyczny zjawiska chaosu występującego w nieliniowych systemach dynamicznych, osiągnięcia związane z przeprowadzonymi testami oraz odpowiednie wnioski.

### 3. Modele dla celów sterowania i estymacji

Aby zastosować założone algorytmy sterowania, niezbędne jest dostosowanie poznawczego modelu matematycznego wahadła do odpowiedniej postaci. W tym celu koniecznym było dokonanie operacji przedstawionych w niniejszym rozdziale. W pierwszej kolejności zdecydowano się na linearyzację modelu w otoczeniu punktu pracy, co było niezbędne dla opisu w przestrzeni stanów oraz wejście - wyjście. Następnie wprowadzono modele urządzeń wykonawczych i pomiarowych oraz powiązano je z dynamiką obiektu. Dodatkowo przeprowadzono dyskusję na temat przedstawienia niepewności w parametrach obiektu. Na sam koniec rozdziału przedstawiono model na potrzeby estymacji stanu wahadła.

#### 3.1. Linearyzacja modelu obiektu

Ze względu na rodzaj zastosowanych algorytmów sterowania, nieliniowy model matematyczny wahadła musiał zostać zlinearyzowany wokół punktu pracy układu. Przyjmuje się, że punktem pracy jest górny punkt równowagi wahadła. Chcąc odnaleźć punkt pracy należy wyzerować pochodne w równaniach opisujących właściwości fizyczne układu, a następnie rozwiązać układ równań algebraicznych. Następnie, koniecznym było znalezienie współczynników linearyzacji wynikających z rozwinięcia równań dynamiki obiektu w szereg Taylora [10]. Na koniec przedstawiono model zlinearyzowany w postaci macierzowo - wektorowej.

##### 3.1.1. Metoda rozwinięcia w szereg Taylora

Linearyzacja układu została dokonana przy zastosowaniu metody rozwijania funkcji wielu zmiennych w szereg Taylora [18, 30]. Przyjmując postać systemu jako wektor funkcjonałów  $f(\cdot)$ :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t)), \quad (3.1)$$

gdzie wyszczególnić można  $n$  zmiennych stanu oznaczonych wektorem  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $p$  sygnałów sterujących  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$  oraz  $o$  sygnałów zakłócających  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^o$ .

Definiując wektor funkcjonałów na podstawie (3.1), dla sześciu zmiennych stanu otrzymamy następujące równoważności:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t)), \\ \dot{x}_2(t) = f_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t)), \\ \dot{x}_3(t) = f_3(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t)), \\ \dot{x}_4(t) = f_4(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t)), \\ \dot{x}_5(t) = f_5(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t)), \\ \dot{x}_6(t) = f_6(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{z}(t)), \end{cases} \quad (3.2)$$

gdzie wektory  $x$  oraz  $z$  zostały zdefiniowane w (2.3) oraz (2.4).

Na podstawie następującej formuły, gdzie dany jest punkt równowagi  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{z})$  układu opisanego jako funkcjonal (3.2), konstruuje się przybliżenie liniowe w otoczeniu punktu stacjonarnego. Aproksymacja liniowa w otoczeniu punktu równowagi jest rozwinięciem funkcji wektorowej zmiennej wektorowej w szereg Taylora równe [18]:

$$\dot{x}(t) = f(\bar{x}, \bar{u}, \bar{z}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{z}} (x(t) - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{z}} (u(t) - \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\bar{x}, \bar{u}, \bar{z}} (z(t) - \bar{z}) + O, \quad (3.3)$$

gdzie  $O$  jest błędem przybliżenia liniowego [30].

Mając na uwadze to, iż układ ma wykazywać niewielkie odchylenia od stanu równowagi, zakłada się iż, błąd linearyzacji jest równy zero, podobnie jak człon  $f(\bar{x}, \bar{u}, \bar{z})$ , będący wartością wektora funkcjonalów  $f$  w punkcie pracy [38].

### 3.1.2. Postać macierzowo - wektorowa modelu zlinearyzowanego

Dla górnego oraz dolnego położenia ramion wahadła definiuje się dwa punkty równowagi w postaci:

$$P_1 \triangleq (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{u}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)|_{P_1}, \quad (3.4)$$

$$P_2 \triangleq (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{u}, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)|_{P_2}, \quad (3.5)$$

gdzie  $P_2$  jest dolnym a  $P_1$  górnym punktem równowagi.

Aby móc przedstawić układ nieliniowy w postaci zlinearyzowanej wokół punktu stacjonarnego, należy zdefiniować zmienne przyrostowe, które ułatwiają zapis dynamiki układu liniowego [30]:

$$\begin{aligned} \Delta x_1(t) &\triangleq x_1(t) - \bar{x}_1, & \Delta x_2(t) &\triangleq x_2(t) - \bar{x}_2, & \Delta x_3(t) &\triangleq x_3(t) - \bar{x}_3, & \Delta x_4(t) &\triangleq x_4(t) - \bar{x}_4, \\ \Delta x_5(t) &\triangleq x_5(t) - \bar{x}_5, & \Delta x_6(t) &\triangleq x_6(t) - \bar{x}_6, & \Delta u(t) &\triangleq u(t) - \bar{u}, & \Delta z_1(t) &\triangleq z_1(t) - \bar{z}_1, \\ \Delta z_2(t) &\triangleq z_2(t) - \bar{z}_2, & \Delta z_3(t) &\triangleq z_3(t) - \bar{z}_3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Korzystając z (3.6) możliwe było zdefiniowanie wektorów przyrostowych: stanu  $\Delta x(t)$  i zakłóceń  $\Delta z(t)$  w postaci [30]:

$$\Delta x(t) \triangleq \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) & \Delta x_2(t) & \Delta x_3(t) & \Delta x_4(t) & \Delta x_5(t) & \Delta x_6(t) \end{bmatrix}^T, \quad (3.7)$$

$$\Delta z(t) \triangleq \begin{bmatrix} \Delta z_1(t) & \Delta z_2(t) & \Delta z_3(t) \end{bmatrix}^T. \quad (3.8)$$

Pomijając człon  $f(\bar{x}, \bar{u}, \bar{z})$ , którego wartość w  $P_1$  lub  $P_2$  jest zawsze równa 0, oraz pomijając błąd linearyzacji, równanie (3.3), przy uwzględnieniu zdefiniowanych zmiennych przyrosto-

wych (3.6) oraz zdefiniowanych wektorów z (3.7) i (3.8) sprowadza się do [30]:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \Delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \Delta u(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \Delta \mathbf{z}(t). \quad (3.9)$$

W celu uproszczenia zapisu równań stanu, dokonano następującego zdefiniowania macierzy  $A$ ,  $B$  oraz  $\Xi$  w postaci:

$$\begin{cases} A \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}}, \\ B \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}}, \\ \Xi \triangleq \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}}, \end{cases} \quad (3.10)$$

co pozwala zapisać (3.9) jako:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}}(t) = A \Delta \mathbf{x}(t) + B \Delta u(t) + \Xi \Delta \mathbf{z}(t), \quad (3.11)$$

gdzie wymiary macierzy zdefiniowanych w (3.10) dane są jako:  $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$  i  $\Xi \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ .

Dla obiektu wahadła, postać macierzowo - wektorowa jest równa:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1(t) \\ \Delta \dot{x}_2(t) \\ \Delta \dot{x}_3(t) \\ \Delta \dot{x}_4(t) \\ \Delta \dot{x}_5(t) \\ \Delta \dot{x}_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_x f_1|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_x f_2|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_x f_3|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_x f_4|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_x f_5|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_x f_6|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \\ \Delta x_3(t) \\ \Delta x_4(t) \\ \Delta x_5(t) \\ \Delta x_6(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_u f_1|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_u f_2|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_u f_3|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_u f_4|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_u f_5|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_u f_6|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \end{bmatrix} \Delta u(t) + \begin{bmatrix} \nabla_z f_1|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_z f_2|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_z f_3|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_z f_4|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_z f_5|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \\ \nabla_z f_6|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{u}, \bar{z}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_1(t) \\ \Delta z_2(t) \\ \Delta z_3(t) \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

gdzie  $\nabla$  (nabla) oznacza operator różniczkowy gradientu.

### 3.1.3. Wyznaczenie punktów równowagi

Zgodnie z przedstawioną procedurą, pierwszym krokiem linearyzacji jest znalezienie wartości zmiennych fizycznych, sterowań oraz zakłóceń w punkcie pracy:

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{\xi}_i = 0, \quad \bar{\theta}_i = ?, \quad \bar{\dot{\theta}}_i = 0, \quad \bar{\ddot{\theta}}_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2). \quad (3.13)$$

Ze względu na fakt, iż w stanie ustalonym wartość sterowania  $u(t)$  jest równa 0, dla szukanego punktu pracy zakłada się w (3.13), że  $\bar{u} = 0$ . Analogicznie, wektor zakłóceń  $\xi$  w stanie ustalonym jest rozpatrywany jako nie wpływający na dynamikę układu [18].

Aby móc dokonać odnalezienia punktów równowagi układu, uwikłane równania dynamiki zapisano w postaci trójelementowego wektora funkcjonałów  $g(\theta, u, \xi)$ . Podejście to zastosowano, ze względu na fakt, iż analiza równań algebraicznych powstałych w wyniku wyzerowania

pochodnych jest prostsza, niż w sytuacji analizy rozwickłanych równań dynamiki [10]. Operacje te przedstawiają się w następujący sposób:

- dla  $g_1(\cdot)$ :

· definiując funkcjonal  $g_1(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} g_1 \left( u, \xi_0, \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_0, \ddot{\theta}_2 \right) \triangleq & -u - \xi_0 + \dot{\theta}_0 \eta_0 + (m_0 + m_1 + m_2) \ddot{\theta}_0 \\ & - (m_1 l_1 + m_2 L_1) \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ & - m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

· podstawiając do (3.14) wartości (3.13) w punkcie pracy:

$$g_1 \left( \bar{u}, \bar{\xi}_0, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, 0, 0, 0, 0, 0 \right) = 0 = -\bar{u} - \bar{\xi}_0 \Rightarrow -\bar{u} = \bar{\xi}_0, \quad (3.15)$$

co pokrywa się z założeniem (3.13).

- dla  $g_2(\cdot)$ :

· definiując funkcjonal  $g_2(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} g_2 \left( \xi_1, \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_0, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2 \right) \triangleq & -\xi_1 + \dot{\theta}_1 \eta_1 + (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \eta_2 + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \cos \theta_1 \ddot{\theta}_0 \\ & + (m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1) \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 \\ & + m_2 L_1 l_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 - (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (3.16)$$

· podstawiając do (3.16) wartości (3.13) w punkcie pracy:

$$g_2 \left( \bar{\xi}_1, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, 0, 0, 0, 0 \right) = -\bar{\xi}_1 - g \sin \bar{\theta}_1 (m_1 l_1 + L_1 m_2) = 0, \quad (3.17)$$

co na podstawie (3.17) pozwala określić punkt równowagi dla  $\theta_1$  jako:

$$\bar{\theta}_1 = 0 + k\pi \quad k \in Z. \quad (3.18)$$

- dla  $g_3(\cdot)$ :

· definiując funkcjonal  $g_3(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} g_3 \left( \xi_2, \theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_0, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2 \right) \triangleq & -\xi_2 + (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \eta_2 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_0 \\ & + m_2 L_1 l_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 l_2^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 \\ & - m_2 L_1 l_2 \sin (\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 g \sin \theta_2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

· podstawiając do (3.19) wartości (3.13) w punkcie pracy:

$$g_3 \left( \bar{\xi}_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, 0, 0, 0, 0 \right) = 0 = -m_2 l_2 g \sin \bar{\theta}_2. \quad (3.20)$$



co na podstawie (3.20) pozwala określić punkt równowagi  $\theta_2$  jako:

$$\bar{\theta}_2 = 0 + k\pi \quad k \in Z.$$

Mając na uwadze istotę działania systemu, założono iż,  $\bar{\theta}_1$  oraz  $\bar{\theta}_2$  mogą przyjmować wartości od  $-\pi$  do  $\pi$ . Wynika to z faktu, iż konieczne jest uniknięcie nawarstwiania się wartości  $k \in Z$  związanego z okresowym działaniem systemu. Pozwala to określić wartości zmiennych fizycznych jako  $\theta_1|_{P_1} = 0$  i  $\theta_2|_{P_1} = 0$  oraz  $\theta_1|_{P_2} = \pi$  i  $\theta_2|_{P_2} = \pi$ .

Na podstawie obliczeń oraz założeń (3.13), (3.4) oraz (3.5) znaleziono dwa punkty równowagi, które są równe:

$$P_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \quad (3.21)$$

$$P_2 = (0, \pi, \pi, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0). \quad (3.22)$$

### 3.1.4. Procedura obliczania pochodnych

Zależności między zmiennymi  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ , a zmiennymi  $x_4(t)$ ,  $x_5(t)$ ,  $x_6(t)$  są w dane jako:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{z}(t)) = x_4(t), \quad (3.23)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{z}(t)) = x_5(t), \quad (3.24)$$

$$\dot{x}_3(t) = f_3(\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{z}(t)) = x_6(t). \quad (3.25)$$

Pochodne po czasie zmiennych  $x_4(t)$ ,  $x_5(t)$ ,  $x_6(t)$  są określonymi w (2.65) zmiennymi  $\ddot{\theta}_0$ ,  $\ddot{\theta}_1$ ,  $\ddot{\theta}_2$ :

$$\dot{x}_4(t) = f_4(\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{z}(t)) = \ddot{\theta}_0 \triangleq \frac{L_1}{M}, \quad (3.26)$$

$$\dot{x}_5(t) = f_5(\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{z}(t)) = \ddot{\theta}_1 \triangleq \frac{L_2}{M}, \quad (3.27)$$

$$\dot{x}_6(t) = f_6(\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{z}(t)) = \ddot{\theta}_2 \triangleq \frac{L_3}{M}, \quad (3.28)$$

gdzie:

- $L_1$  - licznik pierwszego równania z (2.65),
- $L_2$  - licznik drugiego równania z (2.65),
- $L_3$  - licznik trzeciego równania z (2.65),
- $M$  - mianownik występujący w układzie równań (2.65).

W celu uproszczenia obliczeń pochodnych skorzystano ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji:

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad \text{o ile } g(x) \neq 0 \quad (3.29)$$

Co po uwzględnieniu zależności (3.26), (3.27) i (3.28) oraz wzoru (3.29) pozwoliło uzyskać:

$$\left. \frac{\partial f_{j_l}}{\partial x_{i_l}} \right|_{P_{n_l}} = \frac{\frac{\partial L_{j_l}}{\partial x_{i_l}} M - \frac{\partial M}{\partial x_{i_l}} L_{j_l}}{M^2} \Bigg|_{P_{n_l}}, \quad (3.30)$$

$$\left. \frac{\partial f_{j_l}}{\partial u} \right|_{P_{n_l}} = \frac{\frac{\partial L_{j_l}}{\partial u} M - \frac{\partial M}{\partial u} L_{j_l}}{M^2} \Bigg|_{P_{n_l}}, \quad (3.31)$$

$$\left. \frac{\partial f_{j_l}}{\partial z_{k_l}} \right|_{P_{n_l}} = \frac{\frac{\partial L_{j_l}}{\partial z_{k_l}} M - \frac{\partial M}{\partial z_{k_l}} L_{j_l}}{M^2} \Bigg|_{P_{n_l}}, \quad (3.32)$$

a oznaczenia dla (3.30), (3.31) i (3.32) dane się jako:

$$i_l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad j_l \in \{1, 2, 3\}, \quad k_l \in \{1, 2, 3\}, \quad n_l \in \{1, 2\}.$$

Na podstawie zdefiniowanych oznaczeń (2.54) wprowadzono nowe oznaczenia, w ten sposób, aby nie zawierały one w sobie zmiennych stanu:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \triangleq m_0 + m_1 + m_2, \\ B_1 \triangleq m_1 l_1 + m_2 L_1, \\ B_2 \triangleq m_2 l_2, \\ C \triangleq m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + I_1, \\ D_1 \triangleq m_2 L_1 l_2, \\ D_2 \triangleq (m_1 l_1 + m_2 L_1) g, \\ E \triangleq m_2 l_2^2 + I_2, \\ F \triangleq m_2 l_2 g \triangleq B_2 g. \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Następnie, bazując na (2.54) oraz (3.33) określono zależności między oznaczeniami:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_r \triangleq A, \\ b_r \triangleq u + \xi_0 - x_4\eta_0 + B_1 \sin x_2 x_5^2 + B_2 \sin x_3 x_6^2, \\ c_r \triangleq B_1 \cos x_2, \\ d_r \triangleq B_2 \cos x_3, \\ e_r \triangleq C, \\ f_r \triangleq \xi_1 - x_5\eta_1 - (x_5 - x_6)\eta_2 - D_1 \sin(x_2 - x_3)x_6^2 + D_2 \sin x_2, \\ h_r \triangleq D_1 \cos(x_2 - x_3), \\ i_r \triangleq E, \\ j_r \triangleq \xi_2 - (x_6 - x_5)\eta_2 + D_1 \sin(x_2 - x_3)x_5^2 + F \sin x_3. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Korzystając z tak określonych oznaczeń (3.34) możliwe jest sprawne obliczenie wymaganych pochodnych. Przed wykonaniem obliczeń rozłożono wyrażenia zawarte w układzie równań (2.65) na liczniki  $L1$ ,  $L2$ ,  $L3$  oraz mianownik  $M$  w następujący sposób:

- mianownik układu równań (2.65):

$$\begin{aligned} M \triangleq & ACE + 2B_1 \cos x_2 B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3) - B_1^2 \cos^2 x_2 E \\ & - AD_1^2 \cos^2(x_2 - x_3) - B_2^2 \cos^2 x_3 C, \end{aligned} \quad (3.35)$$

- licznik pierwszego równania z układu równań (2.65):

$$\begin{aligned} L1 \triangleq & (u + \xi_0 - x_4\eta_0 + B_1 \sin x_2 x_5^2 + B_2 \sin x_3 x_6^2)(CE - D_1^2 \cos^2(x_2 - x_3)) \\ & + (\xi_1 - x_5\eta_1 - (x_5 - x_6)\eta_2 - D_1 \sin(x_2 - x_3)x_6^2 + D_2 \sin x_2) \\ & (B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3) - B_1 \cos x_2 E) + (\xi_2 - (x_6 - x_5)\eta_2 \\ & + D_1 \sin(x_2 - x_3)x_5^2 + F \sin x_3)(B_1 \cos x_2 D_1 \cos(x_2 - x_3) - B_2 \cos x_3 C), \end{aligned} \quad (3.36)$$

- licznik drugiego równania z układu równań (2.65):

$$\begin{aligned} L2 \triangleq & (u + \xi_0 - x_4\eta_0 + B_1 \sin x_2 x_5^2 + B_2 \sin x_3 x_6^2)(B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3) - B_1 \cos x_2 E) \\ & + (\xi_1 - x_5\eta_1 - (x_5 - x_6)\eta_2 - D_1 \sin(x_2 - x_3)x_6^2 + D_2 \sin x_2)(AE - B_2^2 \cos^2 x_3) \\ & + (\xi_2 - (x_6 - x_5)\eta_2 + D_1 \sin(x_2 - x_3)x_5^2 + F \sin x_3)(B_1 \cos x_2 B_2 \cos x_3 - AD_1 \cos(x_2 - x_3)), \end{aligned} \quad (3.37)$$

- licznik trzeciego równania z układu równań (2.65):

$$\begin{aligned}
L3 \triangleq & (u + \xi_0 - x_4\eta_0 + B_1 \sin x_2 x_5^2 + B_2 \sin x_3 x_6^2)(B_1 \cos x_2 D_1 \cos(x_2 - x_3) - B_2 \cos x_3 C) \\
& + (\xi_1 - x_5\eta_1 - (x_5 - x_6)\eta_2 - D_1 \sin(x_2 - x_3)x_6^2 + D_2 \sin x_2) \\
& (B_1 \cos x_2 B_2 \cos x_3 - AD_1 \cos(x_2 - x_3)) \\
& + (\xi_2 - (x_6 - x_5)\eta_2 + D_1 \sin(x_2 - x_3)x_5^2 + F \sin x_3)(AC - B_1^2 \cos^2 x_2). \tag{3.38}
\end{aligned}$$

### 3.1.5. Model zlinearyzowany

W pierwszej kolejności obliczono wszystkie pochodne z  $M$  zdefiniowanego w (3.35):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial M}{\partial z_1} = \frac{\partial M}{\partial z_2} = \frac{\partial M}{\partial z_3} = \frac{\partial M}{\partial x_1} = \frac{\partial M}{\partial x_4} = \frac{\partial M}{\partial x_5} = \frac{\partial M}{\partial x_6} &= 0, \\
\frac{\partial M}{\partial x_2} &= -2 \sin x_2 B_2 \cos x_3 B_1 D_1 \cos(x_2 - x_3) - 2 \cos x_2 B_2 B_1 \cos x_3 D_1 \sin(x_2 - x_3) \\
&+ 2 \cos x_2 \sin x_2 E B_1^2 + 2 A D_1^2 \cos(x_2 - x_3) \sin(x_2 - x_3), \\
\frac{\partial M}{\partial x_3} &= -2 \cos x_2 B_1 B_2 \sin x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3) + 2 \cos x_2 B_1 B_2 \cos x_3 D_1 \sin(x_2 - x_3) \\
&- 2 A D_1^2 \cos(x_2 - x_3) \sin(x_2 - x_3) + 2 B_2^2 C \cos x_3 \sin x_3.
\end{aligned}$$

Podstawiając wartość  $P_1$  do pochodnych oraz funkcji  $M$  otrzymano:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial M}{\partial u} \right|_{P_1} &= \left. \frac{\partial M}{\partial z_1} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial M}{\partial z_2} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial M}{\partial z_3} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial M}{\partial x_1} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial M}{\partial x_2} \right|_{P_1} \\
&= \left. \frac{\partial M}{\partial x_3} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial M}{\partial x_4} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial M}{\partial x_5} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial M}{\partial x_6} \right|_{P_1} = 0.
\end{aligned}$$

Podstawiając  $P_2$  do  $M$  otrzymano:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial M}{\partial u} \right|_{P_2} &= \left. \frac{\partial M}{\partial z_1} \right|_{P_2} = \left. \frac{\partial M}{\partial z_2} \right|_{P_2} = \left. \frac{\partial M}{\partial z_3} \right|_{P_2} = \left. \frac{\partial M}{\partial x_1} \right|_{P_2} = \left. \frac{\partial M}{\partial x_2} \right|_{P_2} = \left. \frac{\partial M}{\partial x_3} \right|_{P_2} \\
&= \left. \frac{\partial M}{\partial x_4} \right|_{P_2} = \left. \frac{\partial M}{\partial x_5} \right|_{P_2} = \left. \frac{\partial M}{\partial x_6} \right|_{P_2} = 0.
\end{aligned}$$

Podstawiając wartości  $P_1$  i  $P_2$  do funkcji mianownika otrzymano:

$$M|_{P_1} = M|_{P_2} = ACE + 2B_1 B_2 D_1 - B_1^2 E - AD_1^2 - B_2^2 C.$$

Obliczając wszystkie pochodne z  $f_1$  oraz podstawiając  $P_1$  do pochodnych z  $f_1$  otrzymano:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{P_1} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial z_3} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{P_1} = \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right|_{P_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \right|_{P_1} = 1, \\
\left. \frac{\partial f_1}{\partial x_5} \right|_{P_1} &= \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \right|_{P_1} = 0.
\end{aligned}$$

Obliczając wszystkie pochodne z  $f_2$  oraz podstawiając  $P_1$  do pochodnych z  $f_2$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial u}\Big|_{P_1} &= \frac{\partial f_2}{\partial z_1}\Big|_{P_1} = \frac{\partial f_2}{\partial z_2}\Big|_{P_1} = \frac{\partial f_2}{\partial z_3}\Big|_{P_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{P_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{P_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\Big|_{P_1} \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_4}\Big|_{P_1} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_5}\Big|_{P_1} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_6}\Big|_{P_1} = 0.\end{aligned}$$

Obliczając wszystkie pochodne z  $f_3$  oraz podstawiając  $P_1$  do pochodnych z  $f_3$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial u}\Big|_{P_1} &= \frac{\partial f_3}{\partial z_1}\Big|_{P_1} = \frac{\partial f_3}{\partial z_2}\Big|_{P_1} = \frac{\partial f_3}{\partial z_3}\Big|_{P_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\Big|_{P_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\Big|_{P_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\Big|_{P_1} \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial x_4}\Big|_{P_1} = \frac{\partial f_3}{\partial x_5}\Big|_{P_1} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_6}\Big|_{P_1} = 1.\end{aligned}$$

Obliczając wszystkie pochodne z  $f_1$  oraz podstawiając  $P_2$  do pochodnych z  $f_1$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial u}\Big|_{P_2} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_1}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_1}{\partial z_2}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_1}{\partial z_3}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\Big|_{P_2} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_4}\Big|_{P_2} = 1, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_5}\Big|_{P_2} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_6}\Big|_{P_2} = 0.\end{aligned}$$

Obliczając wszystkie pochodne z  $f_2$  oraz podstawiając  $P_2$  do pochodnych z  $f_2$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial u}\Big|_{P_2} &= \frac{\partial f_2}{\partial z_1}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_2}{\partial z_2}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_2}{\partial z_3}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\Big|_{P_2} \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial x_4}\Big|_{P_2} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_5}\Big|_{P_2} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_6}\Big|_{P_2} = 0.\end{aligned}$$

Obliczając wszystkie pochodne z  $f_3$  oraz podstawiając  $P_2$  do pochodnych z  $f_3$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial u}\Big|_{P_2} &= \frac{\partial f_3}{\partial z_1}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_3}{\partial z_2}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_3}{\partial z_3}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\Big|_{P_2} \\ &= \frac{\partial f_3}{\partial x_4}\Big|_{P_2} = \frac{\partial f_3}{\partial x_5}\Big|_{P_2} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_6}\Big|_{P_2} = 1.\end{aligned}$$

Obliczając pochodne z  $L_1$ , zdefiniowanego w (3.36) otrzymano:

- po zmiennych  $u, z_1, z_2, z_3$  i  $x_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial u} &= CE - D_1^2 \cos^2(x_2 - x_3), \quad \frac{\partial L_1}{\partial z_1} = CE - D_1^2 \cos^2(x_2 - x_3), \\ \frac{\partial L_1}{\partial z_2} &= -\cos x_2 B_1 E + B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3), \\ \frac{\partial L_1}{\partial z_3} &= \cos x_2 B_1 D_1 \cos(x_2 - x_3) - B_2 C \cos x_3, \quad \frac{\partial L_1}{\partial x_1} = 0,\end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_2$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial x_2} &= B_1 x_5^2 \cos x_2 (CE - D_1^2 \cos^2(x_2 - x_3)) \\
&+ 2D_1^2 \cos(x_2 - x_3) \sin(x_2 - x_3) (u + z_1 - \eta_0 x_4 + B_1 x_5^2 \sin x_2 + B_2 x_6^2 \sin x_3) \\
&+ (-D_1 x_6^2 \cos(x_2 - x_3) + D_2 \cos x_2) (-\cos x_2 B_1 E + B_2 \cos x_2 D_1 \cos(x_2 - x_3)) + (z_2 - \eta_1 x_5 \\
&- (x_5 - x_6) \eta_2 - D_1 x_6^2 \sin(x_2 - x_3) + D_2 \sin x_2) (\sin x_2 B_1 E - B_2 \cos x_3 D_1 \sin(x_2 - x_3)) \\
&+ D_1 x_5^2 \cos(x_2 - x_3) (\cos x_2 B_1 D_1 \cos(x_2 - x_3) - B_2 C \cos x_3) + (z_2 - (x_6 - x_5) \eta_2 \\
&+ D_1 x_5^2 \sin(x_2 - x_3) + F \sin x_3) (-\sin x_2 B_1 D_1 \cos(x_2 - x_3) - \cos x_2 B_1 D_1 \sin(x_2 - x_3)),
\end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_3$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial x_3} &= x_6^2 B_2 \cos x_3 (CE - D_1^2 \cos^2(x_2 - x_3)) \\
&+ (u + z_1 - \eta_0 x_4 + B_1 x_5^2 \sin x_2 + B_2 x_6^2 \sin x_3) (-2D_1^2 \cos(x_2 - x_3) \sin(x_2 - x_3)) \\
&+ D_1 x_6^2 \cos(x_2 - x_3) (-\cos x_2 B_1 E + B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3)) + (z_2 - \eta_1 x_5 - (x_5 - x_6) \eta_2 \\
&- D_1 x_6^2 \sin(x_2 - x_3) + D_2 \sin x_2) (-B_2 \sin x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3) + B_2 \cos x_3 D_1 \sin(x_2 - x_3)) \\
&+ (-D_1 x_5^2 \cos(x_2 - x_3) + F \cos x_3) (\cos x_2 B_1 D_1 \cos(x_2 - x_3) - B_2 C \cos x_3) \\
&+ (z_3 - (x_6 - x_5) \eta_2 + D_1 x_5^2 \sin(x_2 - x_3) + F \sin x_3) (\cos x_2 D_1 B_1 \sin(x_2 - x_3) + B_2 C \sin x_3),
\end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_4$ :

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_4} = -\eta_0 (CE - D_1^2 \cos^2(x_2 - x_3)),$$

- po zmiennej  $x_5$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial x_5} &= 2B_1 x_5 \sin x_2 (CE - D_1^2 \cos^2(x_2 - x_3)) - (\eta_1 + \eta_2) (-\cos x_2 B_1 E + B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3)) \\
&+ (\eta_2 + 2D_1 x_5 \sin(x_2 - x_3)) (\cos x_2 B_1 D_1 \cos(x_2 - x_3) - B_2 C \cos x_3),
\end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_6$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_1}{\partial x_6} &= 2x_6 B_2 \sin x_3 (CE - D_1^2 \cos^2(x_2 - x_3)) \\
&+ (\eta_2 - 2x_6 D_1 \sin(x_2 - x_3)) (-\cos x_2 B_1 E + B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3)) \\
&- \eta_2 (\cos x_2 B_1 D_1 \cos(x_2 - x_3) - B_2 C \cos x_3).
\end{aligned}$$

Podstawiając  $P_1$  do pochodnych z  $L_1$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial u}\Big|_{P_1} &= CE - D_1^2, & \frac{\partial L_1}{\partial z_1}\Big|_{P_1} &= CE - D_1^2, & \frac{\partial L_1}{\partial z_2}\Big|_{P_1} &= -B_1E + B_2D_1, & \frac{\partial L_1}{\partial z_3}\Big|_{P_1} &= B_1D_1 - B_2C, \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_1}\Big|_{P_1} &= 0, & \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\Big|_{P_1} &= D_2(-B_1E + B_2D_1), & \frac{\partial L_1}{\partial x_3}\Big|_{P_1} &= F(B_1D_1 - B_2C), \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_4}\Big|_{P_1} &= -\eta_0(CE - D_1^2), & \frac{\partial L_1}{\partial x_5}\Big|_{P_1} &= -(\eta_1 + \eta_2)(-B_1E + B_2D_1) + \eta_2(B_1D_1 - B_2C), \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_6}\Big|_{P_1} &= \eta_2(B_2D_1 - B_1E) - \eta_2(B_1D_1 - B_2C).\end{aligned}$$

Podstawiając  $P_2$  do pochodnych z  $L_1$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_1}{\partial u}\Big|_{P_2} &= CE - D_1^2, & \frac{\partial L_1}{\partial z_1}\Big|_{P_2} &= CE - D_1^2, & \frac{\partial L_1}{\partial z_2}\Big|_{P_2} &= B_1E - B_2D_1, & \frac{\partial L_1}{\partial z_3}\Big|_{P_2} &= -B_1D_1 + B_2C, \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_1}\Big|_{P_2} &= 0, & \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\Big|_{P_2} &= D_2(-B_1E + B_2D_1), & \frac{\partial L_1}{\partial x_3}\Big|_{P_2} &= F(B_1D_1 - B_2C), \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_4}\Big|_{P_2} &= -\eta_0(CE - D_1^2), & \frac{\partial L_1}{\partial x_5}\Big|_{P_2} &= -(\eta_1 + \eta_2)(B_1E - B_2D_1) + \eta_2(-B_1D_1 + B_2C), \\ \frac{\partial L_1}{\partial x_6}\Big|_{P_2} &= \eta_2(-B_2D_1 + B_1E) - \eta_2(-B_1D_1 + B_2C).\end{aligned}$$

Podstawiając  $P_1$  i  $P_2$  do  $L_1$  otrzymano:

$$L_1|_{P_1} = 0, \quad L_1|_{P_2} = 0.$$

Obliczając pochodne z  $L_2$ , zdefiniowanego w (3.37) otrzymano:

- po zmiennych  $u, z_1, z_2, z_3$  i  $x_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial u} &= B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3) - \cos x_2 B_1 E, & \frac{\partial L_2}{\partial z_1} &= B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3) - \cos x_2 B_1 E, \\ \frac{\partial L_2}{\partial z_2} &= AE - B_2^2 \cos^2 x_3, & \frac{\partial L_2}{\partial z_3} &= \cos x_2 B_1 B_2 \cos x_3 - AD_1 \cos(x_2 - x_3), & \frac{\partial L_2}{\partial x_1} &= 0,\end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_2$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial x_2} &= B_1 x_5^2 \cos x_2 (B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3) - \cos x_2 B_1 E) \\ &+ (-B_2 \cos x_3 D_1 \sin(x_2 - x_3) + \sin x_2 B_1 E)(u + z_1 - \eta_0 x_4 + B_1 x_5^2 \sin x_2 + B_2 x_6^2 \sin x_3) \\ &+ (-D_1 x_6^2 \cos(x_2 - x_3) + D_2 \cos x_2)(AE - B_2^2 \cos^2 x_3) \\ &+ D_1 x_5^2 \cos(x_2 - x_3)(\cos x_2 B_1 B_2 \cos x_3 - AD_1 \cos(x_2 - x_3)) \\ &+ (z_3 - (x_6 - x_5)\eta_2 + D_1 x_5^2 \sin(x_2 - x_3) + F \sin x_3)(-\sin x_2 B_1 B_2 \cos x_3 + AD_1 \sin(x_2 - x_3)),\end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_3$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial x_3} &= (u + z_1 - \eta_0 x_4 + B_1 x_5^2 \sin x_2 + B_2 x_6^2 \sin x_3)(B_2 D_1 \sin(x_2 - x_3) \cos x_3 \\ &\quad - B_2 D_1 \cos(x_2 - x_3) \sin x_3) - D_1 x_6^2 \cos(x_2 - x_3)(B_2^2 \cos(x_2 - x_3)^2 - AE) \\ &\quad - (z_2 - \eta_1 x_5 - (x_5 - x_6)\eta_2 - D_1 x_6^2 \sin(x_2 - x_3) + D_2 \sin x_2)(2B_2^2 \cos x_3 \sin x_3) \\ &\quad - (-D_1 x_5^2 \cos(x_2 - x_3) + F \cos x_3)(AD_1 \cos(x_2 - x_3) - B_1 B_2 \cos x_2 \cos x_3) \\ &\quad + (z_3 - (x_6 - x_5)\eta_2 + D_1 x_5^2 \sin(x_2 - x_3) + F \sin x_3)(-AD_1 \sin(x_2 - x_3) - B_1 B_2 \cos x_2 \sin x_3) \\ &\quad - B_2 x_6^2 \cos x_3 (B_1 E \cos x_2 - B_2 D_1 \cos(x_2 - x_3) \cos x_3),\end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_4$ :

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_4} = -\eta_0 (B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3) - \cos x_2 B_1 E),$$

- po zmiennej  $x_5$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial x_5} &= 2B_1 x_5 \sin x_2 (B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3) - \cos x_2 B_1 E) - (\eta_1 + \eta_2)(AE - B_2^2 \cos^2 x_3) \\ &\quad + (\eta_2 + 2D_1 x_5 \sin(x_2 - x_3))(\cos x_2 B_1 B_2 \cos x_3 - AD_1 \cos(x_2 - x_3)),\end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_6$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial x_6} &= (\eta_2 - 2D_1 \sin(x_2 - x_3)x_6)(AE - B_2^2 \cos^2 x_3) - \eta_2 (\cos x_2 B_2 B_1 \cos x_3 - AD_1 \cos(x_2 - x_3)) \\ &\quad + 2x_6 B_2 \sin x_3 (B_2 \cos x_3 D_1 \cos(x_2 - x_3) - \cos x_2 B_1 E).\end{aligned}$$

Podstawiając  $P_1$  do pochodnych z  $L_2$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial u} \Big|_{P_1} &= B_2 D_1 - B_1 E, \quad \frac{\partial L_2}{\partial z_1} \Big|_{P_1} = B_2 D_1 - B_1 E, \quad \frac{\partial L_2}{\partial z_2} \Big|_{P_1} = AE - B_2^2, \quad \frac{\partial L_2}{\partial z_3} \Big|_{P_1} = B_1 B_2 - AD_1, \\ \frac{\partial L_2}{\partial x_1} \Big|_{P_1} &= 0, \quad \frac{\partial L_2}{\partial x_2} \Big|_{P_1} = D_2 (AE - B_2^2), \quad \frac{\partial L_2}{\partial x_3} \Big|_{P_1} = -F (AD_1 - B_1 B_2), \quad \frac{\partial L_2}{\partial x_4} \Big|_{P_1} = -\eta_0 (B_2 D_1 - B_1 E), \\ \frac{\partial L_2}{\partial x_5} \Big|_{P_1} &= -(\eta_1 + \eta_2)(AE - B_2^2) + \eta_2 (B_1 B_2 - AD_1), \quad \frac{\partial L_2}{\partial x_6} \Big|_{P_1} = \eta_2 (AE - B_2^2) - \eta_2 (B_2 B_1 - AD_1).\end{aligned}$$

Podstawiając  $P_2$  do pochodnych z  $L_2$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_2}{\partial u} \Big|_{P_2} &= -B_2 D_1 + B_1 E, \quad \frac{\partial L_2}{\partial z_1} \Big|_{P_2} = -B_2 D_1 + B_1 E, \quad \frac{\partial L_2}{\partial z_2} \Big|_{P_2} = AE - B_2^2, \\ \frac{\partial L_2}{\partial z_3} \Big|_{P_2} &= B_1 B_2 - AD_1, \quad \frac{\partial L_2}{\partial x_1} \Big|_{P_2} = 0, \quad \frac{\partial L_2}{\partial x_2} \Big|_{P_2} = -D_2 (AE - B_2^2), \quad \frac{\partial L_2}{\partial x_3} \Big|_{P_2} = F (AD_1 - B_1 B_2), \\ \frac{\partial L_2}{\partial x_4} \Big|_{P_2} &= -\eta_0 (-B_2 D_1 + B_1 E), \quad \frac{\partial L_2}{\partial x_5} \Big|_{P_2} = -(\eta_1 + \eta_2)(AE - B_2^2) + \eta_2 (B_1 B_2 - AD_1), \\ \frac{\partial L_2}{\partial x_6} \Big|_{P_2} &= \eta_2 (AE - B_2^2) - \eta_2 (B_2 B_1 - AD_1).\end{aligned}$$



Podstawiając  $P_1$  oraz  $P_2$  do  $L_2$  otrzymano:

$$L_2|_{P_1} = 0, \quad L_2|_{P_2} = 0.$$

Obliczając pochodne z  $L_3$  otrzymano:

- po zmiennych  $u, z_1, z_2, z_3$  i  $x_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_3}{\partial u} &= -CB_2 \cos x_3 + D_1 \cos(x_2 - x_3) \cos x_2 B_1, & \frac{\partial L_3}{\partial z_1} &= -CB_2 \cos x_3 + D_1 \cos(x_2 - x_3) \cos x_2 B_1, \\ \frac{\partial L_3}{\partial z_2} &= \cos x_2 B_1 B_2 \cos x_3 - AD_1 \cos(x_2 - x_3), & \frac{\partial L_3}{\partial z_3} &= AC - B_1^2 \cos^2 x_2, & \frac{\partial L_3}{\partial x_1} &= 0, \end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_3}{\partial x_2} &= B_1 x_5^2 \cos x_2 (-CB_2 \cos x_3 + D_1 \cos(x_2 - x_3) \cos x_2 B_1) + (-\sin x_2 B_1 D_1 \cos(x_2 - x_3) \\ &\quad - B_1 D_1 \cos x_2 \sin(x_2 - x_3))(u + z_1 - \eta_0 x_4 + B_1 x_5^2 \sin x_2 + B_2 x_6^2 \sin x_3) \\ &\quad - (-D_1 x_6^2 \cos(x_2 - x_3) + D_2 \cos x_2)(\cos x_2 B_1 B_2 \cos x_3 - AD_1 \cos(x_2 - x_3)) \\ &\quad + (z_2 - \eta_1 x_5 - (x_5 - x_6)\eta_2 - D_1 x_6^2 \sin(x_2 - x_3) + D_2 \sin x_2)(-\sin x_2 B_1 B_2 \cos x_3 \\ &\quad + AD_1 \sin(x_2 - x_3)) + 2B_1^2 \cos x_2 \sin x_2 (z_3 - (x_6 - x_5)\eta_2 + D_1 x_5^2 \sin(x_2 - x_3) + F \sin x_3) \\ &\quad + (AC - B_1^2 \cos^2 x_2)(D_1 x_5^2 \cos(x_2 - x_3)), \end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_3}{\partial x_3} &= x_6^2 B_2 \cos x_3 (-CB_2 \cos x_3 + D_1 \cos(x_2 - x_3) \cos x_2 B_1) \\ &\quad + (u + z_1 - \eta_0 x_4 + B_1 x_5^2 \sin x_2 + B_2 x_6^2 \sin x_3)(CB_2 \sin x_3 + D_1 \sin(x_2 - x_3) \cos x_2 B_1) \\ &\quad + D_1 x_6^2 \cos(x_2 - x_3)(\cos x_2 B_1 B_2 \cos x_3 - AD_1 \cos(x_2 - x_3)) \\ &\quad + (z_2 - \eta_1 x_5 - (x_5 - x_6)\eta_2 - D_1 x_6^2 \sin(x_2 - x_3) + D_2 \sin x_2)(-\cos x_2 B_1 B_2 \sin x_3 \\ &\quad - AD_1 \sin(x_2 - x_3)) + (AC - B_1^2 \cos^2 x_2)(-D_1 x_5^2 \cos(x_2 - x_3) + F \cos x_3), \end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_4$ :

$$\frac{\partial L_3}{\partial x_4} = -\eta_0 (-CB_2 \cos x_3 + D_1 \cos(x_2 - x_3) \cos x_2 B_1),$$

- po zmiennej  $x_5$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_3}{\partial x_5} &= 2B_1 x_5 \sin x_2 (-CB_2 \cos x_3 + D_1 \cos(x_2 - x_3) \cos x_2 B_1) \\ &\quad - (\eta_1 + \eta_2)(\cos x_2 B_1 B_2 \cos x_3 - AD_1 \cos(x_2 - x_3)) \\ &\quad + (\eta_2 + 2D_1 x_5 \sin(x_2 - x_3))(AC - B_1^2 \cos^2 x_2), \end{aligned}$$

- po zmiennej  $x_6$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_3}{\partial x_6} &= (\eta_2 - 2D_1 \sin(x_2 - x_3)x_6)(\cos x_2 B_1 B_2 \cos x_3 - AD_1 \cos(x_2 - x_3)) \\ &\quad - \eta_2(AC - B_1^2 \cos^2 x_2) + 2x_6 B_2 \sin x_3 (B_1 D_1 \cos x_2 \cos(x_2 - x_3) - B_2 \cos x_3 C).\end{aligned}$$

Podstawiając  $P_1$  do  $L_3$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial L_3}{\partial u} \right|_{P_1} &= -CB_2 + D_1 B_1, \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial z_1} \right|_{P_1} = -CB_2 + D_1 B_1, \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial z_2} \right|_{P_1} = B_1 B_2 - AD_1, \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial z_3} \right|_{P_1} = AC - B_1^2, \\ \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_1} \right|_{P_1} &= 0, \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_2} \right|_{P_1} = D_2(B_1 B_2 - AD_1), \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_3} \right|_{P_1} = F(AC - B_1^2), \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_4} \right|_{P_1} = -\eta_0(-CB_2 + D_1 B_1), \\ \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_5} \right|_{P_1} &= -(\eta_1 + \eta_2)(B_1 B_2 - AD_1) + \eta_2(AC - B_1^2), \\ \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_6} \right|_{P_1} &= \eta_2(B_1 B_2 - AD_1) - \eta_2(AC - B_1^2).\end{aligned}$$

Podstawiając  $P_2$  do  $L_3$  otrzymano:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial L_3}{\partial u} \right|_{P_2} &= CB_2 - D_1 B_1, \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial z_1} \right|_{P_2} = CB_2 - D_1 B_1, \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial z_2} \right|_{P_2} = B_1 B_2 - AD_1, \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial z_3} \right|_{P_2} = AC - B_1^2, \\ \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_1} \right|_{P_2} &= 0, \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_2} \right|_{P_2} = -D_2(B_1 B_2 - AD_1), \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_3} \right|_{P_2} = -F(AC - B_1^2), \quad \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_4} \right|_{P_2} = -\eta_0(CB_2 - D_1 B_1), \\ \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_5} \right|_{P_2} &= -(\eta_1 + \eta_2)(B_1 B_2 - AD_1) + \eta_2(AC - B_1^2), \\ \left. \frac{\partial L_3}{\partial x_6} \right|_{P_2} &= \eta_2(B_1 B_2 - AD_1) - \eta_2(AC - B_1^2).\end{aligned}$$

Podstawiając  $P_1$  do  $P_2$  do  $L_3$  otrzymano:

$$L_2|_{P_1} = 0, \quad L_2|_{P_2} = 0.$$

Po znalezieniu wszystkich wartości pochodnych funkcjonału  $f(\cdot)$ , do obliczenia wartości macierzy (3.10), wykorzystano wartości parametrów z tabeli (2.2). Po podstawieniu do pochodnych (3.21) oraz (3.22), postać macierzowo - wektorowa z (3.11) i (3.12) przyjmuje następujące wartości:

- dla  $P_1$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}|_{P_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & -4,5744 & 0,1066 & -0,1712 & 0,1655 & 0,1496 \\ 0 & 88,7525 & -22,4745 & -0,7947 & -4,4631 & 2,9211 \\ 0 & -79,3866 & 73,9291 & -0,0654 & 7,2953 & -5,9161 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}|_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,7120 \\ -7,9473 \\ 0,6544 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{E}|_{P_1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1,7120 & -7,9473 & 0,6544 \\ -7,9473 & 154,1926 & -137,9209 \\ 0,6544 & -137,9209 & 453,6863 \end{bmatrix}, \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

- dla  $P_2$ :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}|_{P_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ 0 & -4,5744 & 0,1066 & -0,1712 & -0,1655 & -0,1496 \\ 0 & -88,7525 & 22,4745 & -0,7947 & -4,4631 & 2,9211 \\ 0 & 79,3866 & -73,9291 & 0,0654 & 7,2953 & -5,9161 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}|_{P_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,7120 \\ 7,9473 \\ -0,6544 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{E}|_{P_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1,7120 & 7,9473 & -0,6544 \\ 7,9473 & 154,1926 & -137,9209 \\ -0,6544 & -137,9209 & 453,6863 \end{bmatrix}. \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Tak stworzone modele w postaci macierzy stanu wykorzystano następnie przy syntezie sterowania regulatorami LQR oraz typu PID.

### 3.2. Modele urządzeń wykonawczych oraz pomiarowych

Synteza sytemu sterowania wymagała rozpatrzenia zależności fizycznych, które występują w urządzeniach wykonawczych oraz pomiarowych. Koniecznym było zbudowanie odpowiednich modeli matematycznych a następnie powiązanie ich z modelem poznawczym wahadła (2.65) oraz modelem zlinearyzowanym (3.39).

### 3.2.1. Modele urządzeń wykonawczych

Moduł urządzeń wykonawczych składał się z trzech elementów składowych:

- zasilacz przekształcający napięcie przemiennie  $230\text{ V } 50\text{ Hz}$  na napięcie stałe o wartości  $\pm 12\text{ V}$ ,
- mechaniczna przekładnia planetarna o przełożeniu równym  $i_p$  sprzęgnięta z silnikiem DC,
- silnik prądu stałego o magnesach trwałych, o napięciu zasilania równym  $\pm 12\text{ V}$ , przełożeniu równym  $i_s$ .

Ograniczenie na napięciu wyjściowym z zasilacza zostało zamodelowane jako saturacja o dolnej granicy równej  $-12\text{ V}$  oraz granicy górnej w postaci  $+12\text{ V}$ . Wpływało to bezpośrednio na zakres generowanego sygnału sterującego  $u(t)$ .

Uwzględnienie przekładni mechanicznej wiązało się z analizą prędkości na wale silnika oraz na wale napędzanym przez urządzenie. Przełożenie przekładni można uzyskać ze wzoru [44]:

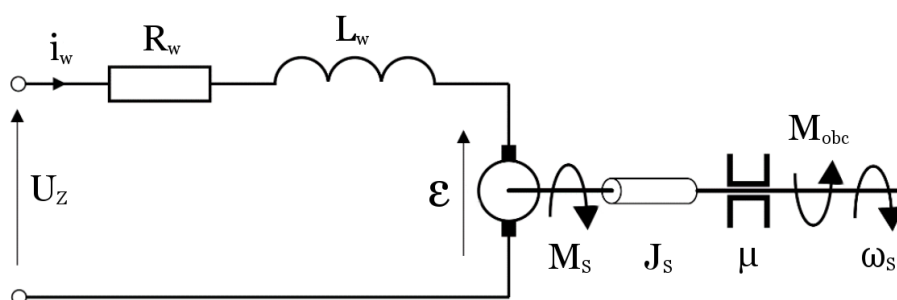
$$i_p = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (3.41)$$

gdzie  $\omega_1$  to prędkość na wale silnika a  $\omega_2$  to prędkość na wale napędzanym, obie wyrażone w  $[\text{obr}/\text{min}]$ . W modelu matematycznym urządzenia wykonawczego, przekładnię zamodelowaną jako (3.41) uwzględniono jako człon proporcjonalny oznaczony jako  $i_p [-]$ . Na podstawie dokumentacji silnika zamieszczonej w Dodatku I na płycie CD pod nazwą *P205.pdf*, wartość przełożenia przyjęto jako:

$$i_p = 6. \quad (3.42)$$

Kolejną częścią modułu urządzeń wykonawczych był silnik DC zasilany napięciem w zakresie od  $-12\text{ V}$  do  $+12\text{ V}$ , które było odpowiednio regulowane poprzez sterownik silnika. Przekształcał on informacje o modulacji szerokości wypełnienia impulsu PWM na odpowiednie napięcie zasilania [20]. Sposób zastosowania tegoż mechanizmu w niniejszej pracy inżynierskiej zawarto w rozdziałach (5.2.2) i (5.2.3).

Rzeczywisty model matematyczny silnika prądu stałego cechuje się dużą złożonością. Opisuje on zjawiska elektromagnetyczne i elektrodynamiczne występujące w urządzeniu oraz zależności między częścią elektryczną i mechaniczną silnika [4, 22]. ze względu na fakt, iż w niniejszej pracy inżynierskiej miał pełnić on rolę urządzenia wykonawczego, koniecznym było uproszczenie jego modelu matematycznego. Na rysunku 3.1 zamieszczono schemat ideowy uproszczonego modelu silnika DC, który opracowano na bazie publikacji [36].



Rys. 3.1. Schemat zastępczy obwodu wirnika silnika DC

Widoczne na nim wielkości można podzielić na elektryczne, które opisują odpowiednio [4, 36]:

- $U_z(t)$  - napięcie zasilania silnika [V],
- $i_w(t)$  - prąd w uzwojeniach wirnika [A],
- $R_w$  - rezystancja zastępcza uzwojeń silnika [ $\Omega$ ],
- $L_w$  - indukcyjność zastępcza uzwojeń silnika [H],
- $\mathcal{E}(t)$  - SEM [V],
- $k_e$  - stała elektryczna silnika [Vs],

oraz mechaniczne opisujące [36]:

- $M_s(t)$  - moment obrotowy silnika [Nm],
- $\omega_s(t)$  - prędkość kątowa wirnika silnika [rad/s],
- $\mu$  - współczynnik tarcia wału [kgm<sup>2</sup>/s],
- $J_s$  - moment bezwładności wału silnika [kgm<sup>2</sup>],
- $M_{obc}$  - stały moment obciążenia silnika [Nm],
- $k_m$  - stała elektromechaniczna silnika [kgm<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>A].

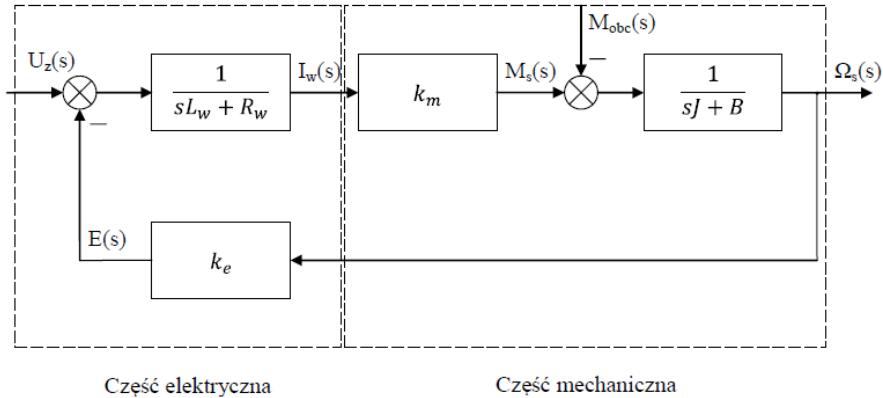
Korzystając z praw bilansowych w postaci II Prawa Kirchoffa i Prawa równowagi momentów obrotowych, równania różniczkowe opisujące dynamikę silnika DC są dane w postaci [36]:

$$\begin{cases} \frac{di_w(t)}{dt} = \frac{1}{L_w} u_z(t) - \frac{R_w}{L_w} i_w(t) - \frac{k_e}{L_w} \omega_s(t), \\ \frac{d\omega_s(t)}{dt} = \frac{k_m}{J_s} i_w(t) - \frac{\mu}{J_s} \omega_s(t) - \frac{1}{J_s} M_{obc}. \end{cases} \quad (3.43)$$

Przy założeniu zerowych warunków początkowych, równania różniczkowe (3.43) przekształcono za pomocą transformacji Laplace'a do postaci [36]:

$$\begin{cases} I_w(s) = \frac{-k_e \Omega_s(s) + U_z(s)}{L_w s}, \\ \Omega_s(s) = \frac{k_m I_w(s) - M_{obc}}{J_s s + \mu}, \end{cases} \quad (3.44)$$

Na rysunku 3.2 zaprezentowano schemat blokowy modelu silnika DC z podziałem na część elektryczną i mechaniczną bazujący na opisie matematycznym z (3.44).



Rys. 3.2. Schemat blokowy silnika prądu stałego [36]

Chcąc uprościć model silnika jako urządzenia wykonawczego, poczyniono następujące, realistyczne w kontekście budowanego systemu założenia [4, 36]:

- moment obciążenia wału silnika zakłada się jako  $M_{obc} = 0$ ,
- spadek napięcia związany z  $\mathcal{E}(t)$  zostaje zaniedbany ze względu na fakt, iż straty mocy w uzwojeniu są pomijanie małe,
- współczynnik tarcia  $\mu$  jest na tyle mały, że jego wpływ na dynamikę ruchu obrotowego wału silnika jest znikomy,
- wartość momentu bezwładności wału silnika  $J_s$  jest pomijanie mała w stosunku do momentu bezwładności wahadła jako obiektu sterowania.

Powyższe założenia powodują, że model matematyczny silnika można uprościć do postaci danej transmitancją [36]:

$$G(s) = \frac{M_s(s)}{U_z(s)} = \frac{K_s}{T_e s + 1}, \quad (3.45)$$

gdzie  $T_e$  jest stałą czasową członu elektrycznego silnika w postaci  $T_e = \frac{L_w}{R_w}$  a  $K_s$  jest wzmocnieniem statycznym równym  $K_s = \frac{k_m}{R_w}$ .

Wielkością wyjściową z transmitancji (3.45) jest wypadkowy moment silnika  $M_s(s)$ , co w kontekście syntezy systemu sterowania jest bardzo użyteczne gdyż sygnał sterujący  $u(t)$  jest siłą co na podstawie znajomości promienia wałka napędowego  $R_{wn}$  pozwala wyjść na zależność [4]

$$u(s) = \frac{M_s(s)}{R_{wn}}, \quad (3.46)$$

która pozwala na jednoznaczne uzależnienie napięcia zasilania silnika  $U_z(t)$  ze sterowaniem  $u(t)$ . Na podstawie dokumentacji suwnicy, wartość promienia wałka napędowego przyjęto jako [16]:

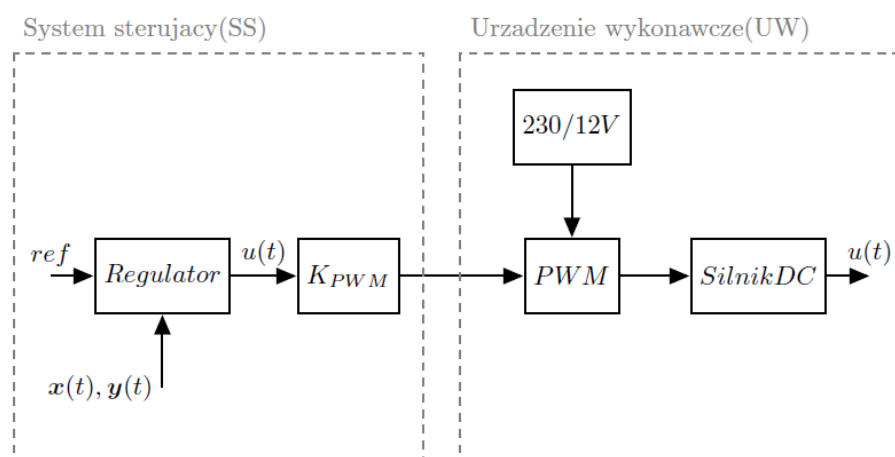
$$R_{wn} = 1,05 \text{ cm}. \quad (3.47)$$

Kolejnym założeniem, które poczyniono w celu przygotowania modelu urządzenia wykonawczego było zaniechanie dynamiki wewnętrznej części elektrycznej silnika. Dokonano tego ze względu na fakt, iż stała czasowa  $T_e$  jest pomijanie mała przy czasie ustalania się obiektu sterowania [4]. Wówczas, uwzględniając transmitancję (3.45), zależności wyrażające działanie przekładni (3.41), statyczny model silnika DC (3.46) oraz promień wałka napędowego (3.47) można było zapisać uproszczony model urządzenia wykonawczego w postaci:

$$H(s) = \frac{U(s)}{U_z(s)} = \Phi = \frac{K_s}{R_{wn}i_p}. \quad (3.48)$$

Wiedząc, że sygnał sterujący wystawiany przez regulator jest siłą, możliwe było zaprojektowanie struktury sterowania tak, aby nie wpływać na wyliczanie sygnału sterującego oraz zagwarantować odpowiednią pracę zespołu wykonawczego. Mając na uwadze model statyczny z (3.48), konieczne było wyznaczenie zależności wiążącej sygnał sterujący z urządzeniem wykonawczym tak, aby jego działanie pozwalało na właściwą regulację systemu.

Napięcie zasilające silnik jest wystawiane na podstawie wypełnienia PWM, autorzy postanowili dokonać bezpośredniej identyfikacji zależności wiążącej  $u(t)$  z działaniem sterownika silnika, co oznaczono za pomocą stałej  $K_{pwm}$ . Pozwoliło to na pominięcie badań nad właściwościami fizycznymi silnika. W Dodatku E, dołączonym do pracy zamieszczono efekty badań częścią wykonawczą systemu. Na rysunku 3.3 zaprezentowano schemat blokowy struktury pokazujący sposób połączenia części sterującej systemu z urządzeniem wykonawczym.



Rys. 3.3. Schemat przedstawiający sposób przeliczania sygnału sterującego dla urządzenia wykonawczego

### 3.2.2. Modele urządzeń pomiarowych

W modelu symulacyjnym zaimplementowanym w programie Matlab Simulink zbudowano modele enkoderów oraz żyroskopów, które miały symulować ich rzeczywiste działanie jako urządzeń pomiarowych. Miało to na celu zweryfikowanie wpływu działania sensorów na działanie układu regulacji.

Pomiar prędkości obrotowej za pomocą żyroskopu charakteryzuje się występowaniem addytywnego szumu białego, który to zniekształca rzeczywistą wartość zmiennej procesowej [41]. Zamodelowanie wpływu zakłóceń na mierzoną wielkość fizyczną późniejsze testy FK w modelu symulacyjnym, co przełożyło się na sprawniejszą implementację w rzeczywistym obiekcie. Sensor zamodelowano w środowisku Matlab Simulink poprzez dodanie do linii sygnałowej przenoszącej prędkość sygnał z funkcji Band-Limited White Noise [39]. Blok ten pozwala na generowanie szumu białego, który w kontekście prowadzonych badań musiał zostać zidentyfikowany.

Przemieszczenia kątowe były mierzone za pomocą enkoderów inkrementalnych. Urządzenia te ze swojej natury nie wykazują występowania zakłóceń w postaci szumu białego. Sygnały wystawiane na wyjściach (A i B) mają charakter przebiegów prostokątnych, które to wpływają na przetwarzanie danych [41]. Autorzy zdecydowali się na zamodelowanie enkoderów w aplikacji symulacyjnej stworzonej w programie Matlab Simulink w postaci podsystemów, których efektem działania jest kwantowanie rzeczywistego sygnału pomiarowego. Na płycie CD w Dodatku I zamieszczono skrypt o nazwie *enkoder.slx*, który zawiera modele enkoderów.

### **3.3. Synteza systemu sterowania a niepewność strukturalna i parametryczna na modelu**

Relacje między rzeczywistością, a modelami, które ją opisują są bardzo skomplikowane. Dokładna reprezentacja obiektu fizycznego często prowadzi do skomplikowanego opisu (modelu) matematycznego. ze względu na ograniczenia poznawcze oraz skomplikowanie zjawisk fizycznych, zbudowanie modelu uwzględniającego wszystkie zależności jest praktycznie niemożliwe [10, 38, 46].

Z tego powodu, projektanci systemu muszą podczas modelowania odpowiednio wybrać zależności fizyczne, które dla danych kategorii analizowania modelu są najważniejsze. Dobry model matematyczny, rozpatrywany przy syntezie sterowania musi być na tyle prosty, aby jego analiza i wykorzystanie było efektywne oraz na tyle rozbudowany, aby dać pewność, że zaprojektowany na jego podstawie system sterowania zrealizuje stawiane przed nim wymagania w rzeczywistym obiekcie sterowania [46]. Podjęcie decyzji jakie zależności fizyczne oraz jakie wartości parametrów modelu zostaną uwzględnione przy syntezie sterowania ma kluczowe znaczenie dla skuteczności działania algorytmu sterowania. Częstym zjawiskiem podczas modelowania systemów jest brak pełnej informacji o istotnych zależnościach fizycznych. Wiąże się to z niepewnością strukturalną, gdzie pewne cechy dynamiki systemu nie mogą zostać odpowiednio odwzorowane oraz niepewnością w parametrach objawiającą się niepełną informacją o wartościach parametrów [10, 38]. Jeżeli niepewności modelowe oraz w parametrach można ograniczyć w pewnych znanych, ustalonych granicach możliwy jest dobór nastaw algorytmów sterowania tak, że zapewniona zostanie stabilność systemu. Taki rodzaj sterowania nazywa się Sterowaniem Krzepkim [38].

W przypadku syntezy systemu sterowania dla budowanego wahadła, wszystkie niepewności w parametrach opisane są w sposób deterministyczny, przedziałowy co zaprezentowano



w rozdziale (2.2.6). Oznacza to, że możliwe jest pewne arbitralne dobranie nominalnych parametrów tak, aby zapewnić odpowiednie działanie systemu sterowania, który przy nieprzewidywalnych zmianach ich wartości będzie w stanie zapewnić stabilność. Dla rozpatrywanego wahadła, niepewność w strukturze modelu matematycznego objawiała się głównie w uproszczeniu opisu zjawiska tarcia występującego w poruszających się elementach. Analizując rozważania poczynione w rozdziale (2.2.4) oraz strukturę modelu matematycznego z (2.51), można dojść do wniosku, że poczynione uproszczenie modelu nie wpłynie znacząco na wynik działania systemu, a jedynie go skoryguje. W wielu implementacjach algorytmów sterowania dla wahadła, modele do celów syntezy pomijały wpływ tarć na działanie całego układu fizycznego [6].

Mając na uwadze powyższe rozważania, koniecznym było przeprowadzenie dyskusji dotyczącej ustalenia jakie wartości parametrów zostaną obrane jako docelowe. Wiedząc, że wartości odpowiednich parametrów mają charakter deterministyczny i zawierają się w pewnym zamkniętym przedziale możliwe były dwie drogi postępowania [7, 38]:

- wybór wartości parametrów na końcach przedziałów,
- wybór wartości parametrów w postaci średniej geometrycznej lub arytmetycznej z przedziału.

Wiedząc, że parametry o niepewnej wartości zamieszczone w tabeli (2.1) mają charakter multiplikatywny, co wynika z podstawień (2.54) oraz postaci modelu (2.65), konieczne było obliczenie estymat nominalnych parametrów w postaci średniej geometrycznej. Autorzy pracy zdecydowali się na przyjęcie wartości parametrów z tabeli (2.2), ze względu na zastosowanie identycznego toku rozumowania przy zakładaniu parametrów do celów symulacji modelu poznawczego wahadła.

### 3.4. Modele do celów sterowania

W tym rozdziale zostaną wyprowadzone modele na podstawie których, dokona się syntezy systemu sterowania.

#### 3.4.1. Model w przestrzeni stanu dla potrzeb sterowania liniowo - kwadratowego

W celu syntezy sterowania LQR niezbędnym jest wyprowadzenie liniowego modelu obiektu w przestrzeni stanu. Wykorzystano do tego wynik linearyzacji wokół  $P_1$  z (3.39). Podstawowym wymaganiem stawianym sterowaniu liniowo - kwadratowemu jest stabilizacja stanu wewnętrznego oraz osiągnięcie w stanie ustalonym wektora trajektorii referencyjnych  $c_{ref}(t) \in \mathbb{R}^q$  przez  $c(t) \in \mathbb{R}^q$ . W przypadku rozważanego modelu wahadła, wektor sygnałów referencyjnych jest zdefiniowany w postaci:

$$c_{ref}(t) \triangleq \begin{bmatrix} c_{ref_1}(t) & c_{ref_2}(t) & c_{ref_3}(t) \end{bmatrix}^T, \quad (3.49)$$

a wektor wyjść sterowanych definiuje się jako:

$$\mathbf{c}(t) \triangleq \begin{bmatrix} c_1(t) & c_2(t) & c_3(t) \end{bmatrix}^T. \quad (3.50)$$

Po zdefiniowaniu wektora wyjść w punkcie równowagi  $\bar{\mathbf{c}}$ :

$$\bar{\mathbf{c}} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{bmatrix}^T, \quad (3.51)$$

oraz wektora wartości referencyjnych w punkcie równowagi  $\bar{\mathbf{c}}_{ref}$ :

$$\bar{\mathbf{c}}_{ref} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{c}_{ref1} & \bar{c}_{ref2} & \bar{c}_{ref3} \end{bmatrix}^T, \quad (3.52)$$

można obliczyć, że dla  $P_1$  przy uwzględnieniu (3.21) wektory (3.51) i (3.52) wyniosły:

$$(\bar{\mathbf{c}})|_{P_1} = (\bar{\mathbf{c}})_{ref}|_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (3.53)$$

Zatem, przyrostowy wektor sygnałów referencyjnych definiuje się jako:

$$\Delta \mathbf{c}_{ref}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \Delta c_{ref1}(t) & \Delta c_{ref2}(t) & \Delta c_{ref3}(t) \end{bmatrix}^T. \quad (3.54)$$

przyrostowy wektor sygnałów sterowanych:

$$\Delta \mathbf{c}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \Delta c_1(t) & \Delta c_2(t) & \Delta c_3(t) \end{bmatrix}^T, \quad (3.55)$$

którego składowe są równe:

$$\Delta c_1(t) \triangleq \Delta x_1(t), \quad \Delta c_2(t) \triangleq \Delta x_2(t), \quad \Delta c_3(t) \triangleq \Delta x_3(t). \quad (3.56)$$

Wykorzystując (3.49), (3.50) oraz (3.53) wektory przyrostowe (3.54) i (3.55) wyprowadzono zależności równo:

$$\Delta \mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t) - \bar{\mathbf{c}}, \quad \Delta \mathbf{c}_{ref}(t) = \mathbf{c}_{ref}(t) - \bar{\mathbf{c}}_{ref}. \quad (3.57)$$

Celem sterowania wahadłem jest zapewnienie dojścia całego układu do górnego punktu pracy  $P_1$ , co wiąże się z tym, że zmienne stanu  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  oraz  $x_3(t)$  muszą osiągnąć pewną wartość referencyjną.

Zatem, zapisując zależność wyjść sterowanych w postaci wektorowo-macierzowej (3.56) otrzymuje się  $E$  równa się:

$$\mathbf{E} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Znając model w postaci macierzy stanu z (3.39) oraz zależności wiążące wielkości referencyjne z wyjściami dane w (3.54), możliwe było przeprowadzenie syntezy systemu sterowania w przestrzeni stanu.

### 3.4.2. Model wejście - wyjście dla potrzeb sterowania typu PID

W celu syntezy algorytmu PID wyprowadzono model wejście-wyjście w postaci transmitancji operatorowe. W związku z tym posłużono się jednostronną transformatą Laplace'a, która pozwoli na przejście z rzeczywistej dziedziny czasu  $t$  do zespolonej dziedziny  $s$ . Chcąc przekształcić model w postaci równań stanu na postać transmitancyjną stosując wzór [30]:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{E}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (3.59)$$

Korzystając z (3.39) i macierzy wyjść sterowanych (3.58), otrzymany wektor transmitancji był w postaci:

$$\mathbf{G}(s) \triangleq \left[ \Delta G_0(s) \quad \Delta G_1(s) \quad \Delta G_2(s) \right]^T. \quad (3.60)$$

W celu przekształcenia modelu w przestrzeni stanu na postać wejście - wyjście zastosowano odpowiedni skrypt w programie Matlab Simulink [34, 39] realizujący zależność (3.59). Znajduje się on w Dodatku I pod nazwą *transmitancje.m*. Otrzymane składowe wektora (3.60) są równe:

$$\begin{cases} \Delta G_0(s) = \frac{\Delta C_0(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1,712s^4 + 16,55s^3 - 249,1s^2 - 405,1s + 5619}{s^6 + 10,55s^5 - 155,7s^4 - 488s^3 + 4657s^2 + 1086s}, \\ \Delta G_1(s) = \frac{\Delta C_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{-7,947s^4 - 47,83s^3 + 556,6s^2 + 201,1s}{s^6 + 10,55s^5 - 155,7s^4 - 488s^3 + 4657s^2 + 1086s}, \\ \Delta G_2(s) = \frac{\Delta C_2(s)}{\Delta U(s)} = \frac{0,6544s^4 - 55,06s^3 + 553,2s^2 + 211,3s}{s^6 + 10,55s^5 - 155,7s^4 - 488s^3 + 4657s^2 + 1086s}. \end{cases} \quad (3.61)$$

Sygnal  $U(s)$  jest transformatą Laplace'a sygnału  $u(t)$  natomiast  $\Delta C_0(s)$ ,  $\Delta C_1(s)$  oraz  $\Delta C_2(s)$  są transformatami sygnałów wyjściowych sterowanych (3.55). Wiedząc, że algorytm regulacji wahadłem musi realizować trójelementowy wektor sygnałów referencyjnych z (3.54), można zdefiniować wektor uchybu w postaci:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(s) \triangleq \left[ \Delta \varepsilon_0(s) \quad \Delta \varepsilon_1(s) \quad \Delta \varepsilon_2(s) \right]^T, \quad (3.62)$$

gdzie poszczególne składowe wektora (3.62) są dane jako:

$$\begin{cases} \Delta \varepsilon_0(s) = \Delta c_{ref_1}(s) - \Delta c_1(s), \\ \Delta \varepsilon_1(s) = \Delta c_{ref_2}(s) - \Delta c_2(s), \\ \Delta \varepsilon_2(s) = \Delta c_{ref_3}(s) - \Delta c_3(s). \end{cases} \quad (3.63)$$

Zatem, znając zależności modelowe wiążące zlinearyzowaną dynamikę wahadła daną w (3.61) oraz powiązania między wartościami referencyjnymi i sterowanymi z (3.63) możliwe było przeprowadzenie syntezy sterowania za pomocą zespołu regulatorów typu PID.

### 3.5. Badanie modeli do celów sterowania

W procesie syntezy systemu sterowania bardzo ważnym jest zbadanie pewnych właściwości wyprowadzonych modeli do celów sterowania. Autorzy pracy zdecydowali się na weryfikację sterowalności obiektu oraz jego minimalnofazowości. Badań dokonano jedynie dla modelu przedstawiającego linearyzację nieliniowych równań stanu z (2.65) wokół punktu pracy  $P_1$ , ze względu na fakt, iż był on rozpatrywany przy syntezie układu regulacji.

#### 3.5.1. Badanie sterowalności modelu zlinearyzowanego

Liniowy system dynamiczny jest sterowalny, gdy jest możliwe zastosowanie takiego sterowania  $u(t)$ , które w skończonym czasie  $t \in [t_0, t_k]$  pozwala na przejście stanu systemu  $x(t)$  ze stanu początkowego  $x(t_0)$  do stanu końcowego  $x(t_k)$  [18, 30].

Jedną z metod badania sterowalności układu jest test Kalmana. Jest to metoda algebraiczna, która polega na skonstruowaniu macierzy sterowalności [30]:

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

a następnie zbadaniu jej rzędu, który musi spełniać zależność  $rank(M_c) = n$ , gdzie  $n$  to rząd dynamiki układu [30].

Bazując na modelu (3.39), zbadano czy dla danych macierzy  $A$  oraz  $B$ , uzyskanych w procesie linearyzacji wokół  $P_1$ , model systemu cechował się sterowalnością. Ze względu na złożoność obliczeniową analitycznego dowodu sterowalności, autorzy pracy zdecydowali się na zastosowanie odpowiedniego skryptu w Matlab Simulink, wykorzystującego zależność (3.64). Zamieszczony on został na płycie CD w Dodatku I pod nazwą *wyznacz\_lqr.m*. Program ten wykonuje się po uruchomieniu skryptu pod nazwą *dip\_sterowanie.m*.

Dla górnego punktu równowagi  $P_1$  wyznacznik z macierzy sterowalności jest równy:

$$\det(M_c|_{P_1}) = 6,9576 \times 10^{14}. \quad (3.65)$$

Na rysunku 3.4 zaprezentowano screen z programu Matlab Simulink, który przedstawia wyniki badania sterowalności systemu.

```

Command Window
Obiekt jest Sterowalny w P1
Obiekt jest Sterowalny w P2
Punkt pracy P1 nie jest lokalnie, asymptotycznie stabilny
Punkt pracy P2 jest lokalnie, asymptotycznie stabilny
fx >>

```

Rys. 3.4. Komunikat dotyczący sterowalności systemu w  $P_1$

Na podstawie powyższego komunikatu oraz otrzymanej wartości wyznacznika z (3.65), można stwierdzić iż, system jest sterowalny w  $P_1$ .

**3.5.2. Badanie minimalnofazowości modelu obiektu regulacji**

Kolejnym badaniem modelu na jakie zdecydowali się autorzy pracy jest weryfikacja minimalnofazowości obiektu, którą oparto na analizie transmitancyjnego modelu z (3.61). Układem minimalnofazowym definiuje się taki układ, którego przebieg charakterystyki fazowej może zostać przewidziany na podstawie charakterystyki amplitudowej układu. Nieminimalnofazowość wpływa negatywnie na układ regulacji, zwiększając jego wrażliwość na zmiany wartości parametrów oraz zmniejszając zapas stabilności [21].

Przyczynami nieminimalnofazowości są [21]:

- opóźnienie transportowe  $e^{-sT_0}$ ,
- występowanie bieguna lub zera w prawej półpłaszczyźnie zespolonej,
- "rozłożenie" systemu.

Weryfikacji minimalnofazowości modelu wahadła dokonano sprawdzając, czy zera transmitancji obiektu mają ujemną część rzeczywistą. Jeżeli obiekt posiada choć jedno nieujemne zero transmitancji to można go nazwać nieminimalnofazowym [21]. Badań obiektu dokonano za pomocą programu napisanego w aplikacji Matlab Simulink, o nazwie *transmitancje.m*, który można znaleźć w Dodatku I na płycie CD.

Wektor transmitancji  $\Delta G(s)$  z (3.61), po przekształceniu jego składowych do postaci iloczynowej, posiada następujące zera transmitancji:

- dla  $\Delta G_0(s)$ :

$$\begin{cases} s_{G_{01}} = -16,7979, \\ s_{G_{02}} = -5,1669, \\ s_{G_{03}} = 6,1484 + 0,1221i, \\ s_{G_{04}} = 6,1484 - 0,1221i, \end{cases} \tag{3.66}$$

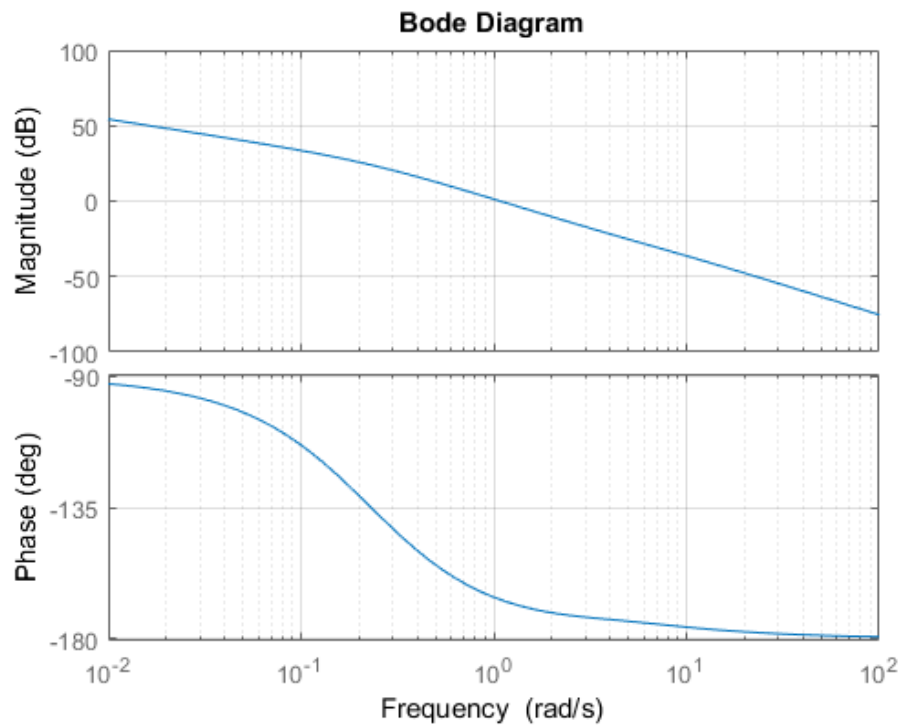
- dla  $\Delta G_1(s)$ :

$$\begin{cases} s_{G_{11}} = -11,7805, \\ s_{G_{12}} = 6,1138, \\ s_{G_{13}} = -0,3513, \end{cases} \tag{3.67}$$

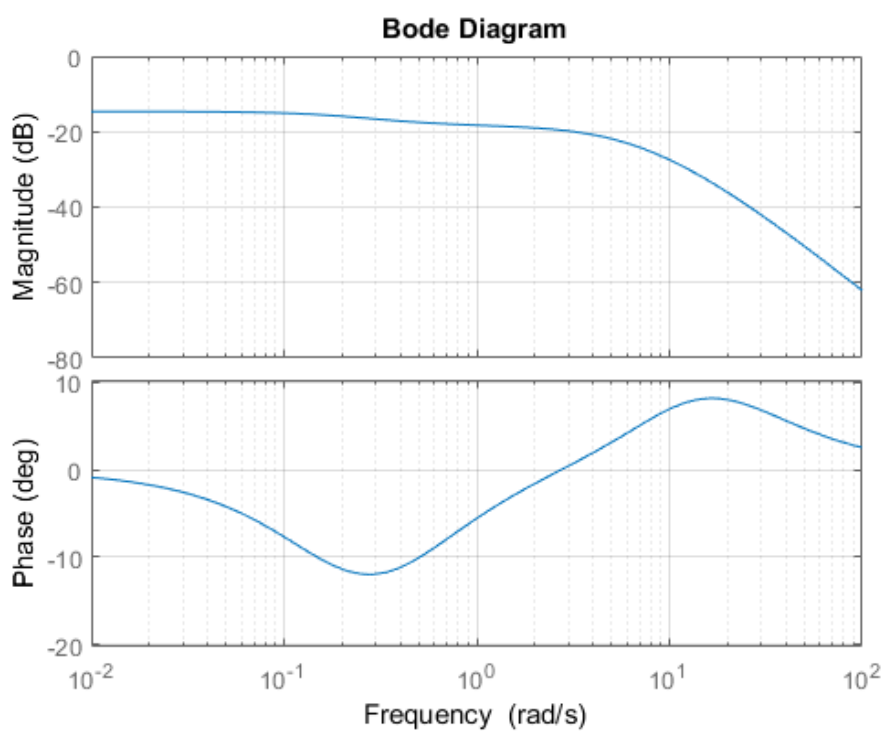
- dla  $\Delta G_2(s)$ :

$$\begin{cases} s_{G_{21}} = 72,3955, \\ s_{G_{22}} = 12,1057, \\ s_{G_{23}} = -0,3684, \end{cases} \quad (3.68)$$

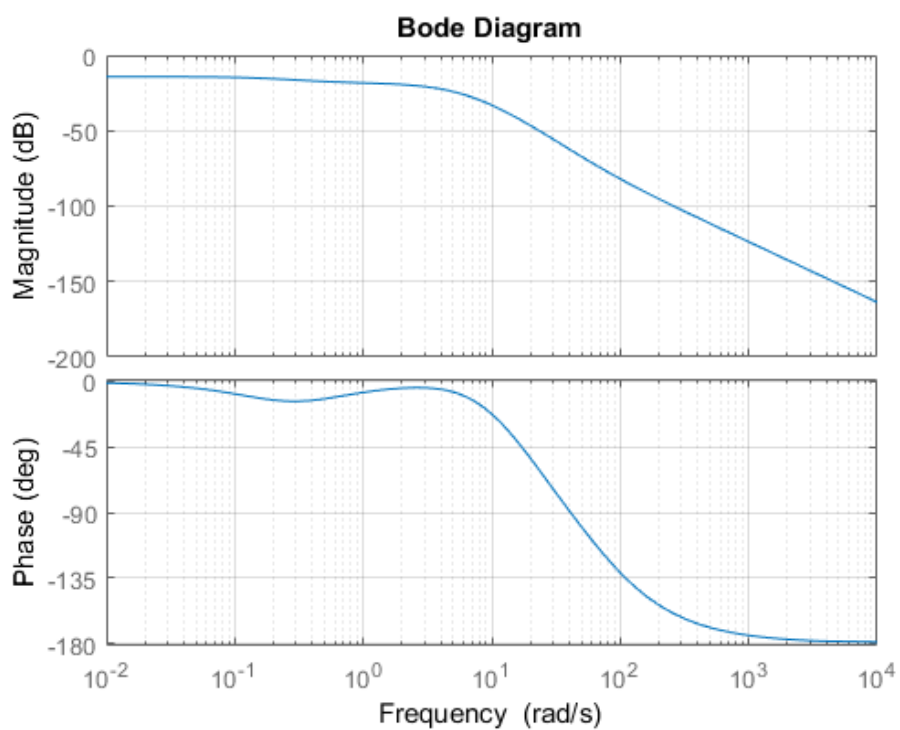
Analizując wartości zer wektora transmitancji  $\Delta G(s)$  z (3.66), (3.67) oraz (3.68), można dojść do wniosku, że obiekt jest nieminimalnofazowy. Oprócz badania zer transmitancji, autorzy pracy zdecydowali się na wykreślenie charakterystyk amplitudowo - fazowych Bode'a [30]. Na rysunkach 3.5, 3.6 oraz 3.7 zamieszczono wyżej wspomniane charakterystyki. Do ich wygenerowania posłużono się programem napisanym w aplikacji Matlab Simulink, o nazwie *transmitancje.m*, który można znaleźć w Dodatku I na płycie CD.



Rys. 3.5. Charakterystyka amplitudowo - fazowa  $\Delta G_0(\omega j)$



Rys. 3.6. Charakterystyka amplitudowo - fazowa  $\Delta G_1(\omega j)$



Rys. 3.7. Charakterystyka amplitudowo - fazowa  $\Delta G_2(\omega j)$

Analizując otrzymane rysunki 3.5, 3.6 oraz 3.7 można zauważyć widoczny brak związku w przebiegach charakterystyk fazowych względem amplitudowych.

### 3.6. Modele dla celów estymacji stanu

W przypadku rozważanego systemu sterowania wahadłem konieczne było estymowanie oraz filtrowanie odpowiednich zmiennych stanu. Wynikało to z faktu, iż sensory, które zastosowano w rzeczywistym systemie dawały zniekształcony pomiar co wymagało zastosowania mechanizmów odrzucania niepożądanych zakłóceń [32, 41].

#### 3.6.1. Istota procesu estymacji dla obiektu wahadła

Problemem jaki stanął przed projektantami systemu było stworzenie odpowiedniej metody estymacji stanu, która jest w stanie działać skutecznie bez względu na to, z jakim rodzajem algorytmu sterowania jest związane sterowanie procesem. W przypadku rozważanego systemu zdecydowano się na pomiar następujących wielkości fizycznych:

- Przesunięcie kątowe wału silnika przy pomocy enkodera inkrementalnego  $\omega(t)$  [rad],
- Przesunięcie kątowe pierwszego ramienia przy pomocy enkodera inkrementalnego  $\theta_1(t)$  [rad],
- Przesunięcie kątowe drugiego ramienia przy pomocy enkodera inkrementalnego  $\theta_2(t)$  [rad],
- Prędkość kątowa ramienia pierwszego przy pomocy żyroskopu  $\dot{\theta}_1(t)$  [rad/s],
- Prędkość kątowa ramienia drugiego przy pomocy żyroskopu  $\dot{\theta}_2(t)$  [rad/s].

Zatem, bazując na definicji wektora  $x(t)$  z (2.3), można było zdefiniować wektor pomiarowy systemu  $y(t)$  jako:

$$\mathbf{y}(t) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & y_5(t) & y_6(t) \end{bmatrix}^T, \quad (3.69)$$

oraz wektor sygnałów pomiarowych w punkcie równowagi  $\bar{\mathbf{y}}$ :

$$\bar{\mathbf{y}} \triangleq \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 & \bar{y}_5 & \bar{y}_6 \end{bmatrix}^T. \quad (3.70)$$

Można, określić że dla  $P_1$  oraz  $P_2$  przy uwzględnieniu wartości z (3.21) i (3.22) wektory dla obu punktów pracy, oparte na definicji (3.70) wyniosły:

$$(\bar{\mathbf{y}})|_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (\bar{\mathbf{y}})|_{P_2} = \begin{bmatrix} 0 & \pi & \pi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (3.71)$$

Wówczas, bazując na (3.69) oraz (3.71) można było zdefiniować przyrostowy wektor pomiarowy w postaci:

$$\Delta \mathbf{y}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \Delta y_1(t) & \Delta y_2(t) & \Delta y_3(t) & \Delta y_5(t) & \Delta y_6(t) \end{bmatrix}^T. \quad (3.72)$$



którego składowe są równe:

$$\Delta y_1(t) \triangleq \Delta x_1(t), \Delta y_2(t) \triangleq \Delta x_2(t), \Delta y_3(t) \triangleq \Delta x_3(t), \Delta y_5(t) \triangleq \Delta x_5(t), \Delta y_6(t) \triangleq \Delta x_6(t). \quad (3.73)$$

Wykorzystując (3.71) oraz (3.72), wektor przyrostowy (3.73) można opisać zależnością równą:

$$\Delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \bar{\mathbf{y}}, \quad (3.74)$$

Mając na uwadze właściwości różnych algorytmów estymacji oraz wiedzę na temat działania urządzeń pomiarowych zdecydowano się na zastosowanie dwóch Filtrów Kalmana, których celem było eliminowanie szumu białego pochodzącego z pomiaru żyroskopami [41].

### 3.6.2. Model do celów estymacji prędkości liniowej wózka

Aby otrzymać przemieszczenie liniowe wózka należy uwzględnić prostą zależność fizyczną między ruchem postępowym a obrotowym z (2.23). Pomiar przemieszczenia liniowego wózka dokonano poprzez zastosowanie enkodera inkrementalnego przymocowanego do zębatki osi jezdnej wózka. Znając promień wałka  $R_{wn}$ , na którym obracał się enkoder otrzymywano wartość zmiennej stanu  $x_1(t)$ . Następnie konieczne było zastosowanie odpowiedniego algorytmu estymacji, pozwalającego uzyskać prędkość liniową wózka  $x_4(t)$ . Jednym z możliwych rozwiązań tego problemu byłoby zastosowanie estymatora w postaci obserwatora Luenbergera, który uwzględniałby znajomość modelu do celów estymacji, sygnału sterującego  $u(t)$  oraz odpowiednich pomiarów  $\mathbf{y}(t)$  [18]. W niniejszej pracy inżynierskiej autorzy zdecydowali się jednak na zastosowanie prostszego rozwiązania polegającym na różniczkowaniu pomiaru zmiennej stanu  $x_1(t)$ . Wówczas estymowana zmienna stanu  $\hat{x}_4(t)$ , której nieobciążona estymata mogła zostać potraktowana jako w pełni odtworzona zmienna stanu  $x_4(t)$  była równa:

$$\hat{x}_4(t) = \dot{x}_1(t). \quad (3.75)$$

W Dodatku F zamieszczono rozważania na temat doboru odpowiedniej metody pomiaru prędkości za pomocą enkodera.

### 3.6.3. Model do celów estymacji prędkości kątowej

W przypadku estymacji prędkości kątowych, konieczne było wyprowadzenie modelu, który uwzględniałby wpływ szumu białego na pomiar prędkości żyroskopem. Mając na uwadze fakt, iż algorytm musiał zostać zaimplementowany na platformie mikroprocesorowej, postać jego mo-

delu musiała być dyskretna. Wówczas stan  $x_o(k)$  oraz wyjście z filtru  $y_o(k)$  są dane jako:

$$x_o(k) \triangleq x_{N_k}(k), \quad y_o(k) \triangleq \hat{x}_o(k), \quad (3.76)$$

gdzie  $N_k \in \{1, 2\}$ .

Wówczas, na podstawie powyższych rozważań oraz definicji z (3.76) model co celów estymacji jest dany w postaci:

$$\begin{cases} \hat{x}_o(k) = \hat{x}_o(k-1) + w(k-1), \\ y_o(k) = \hat{x}_o(k) + v(k), \end{cases} \quad (3.77)$$

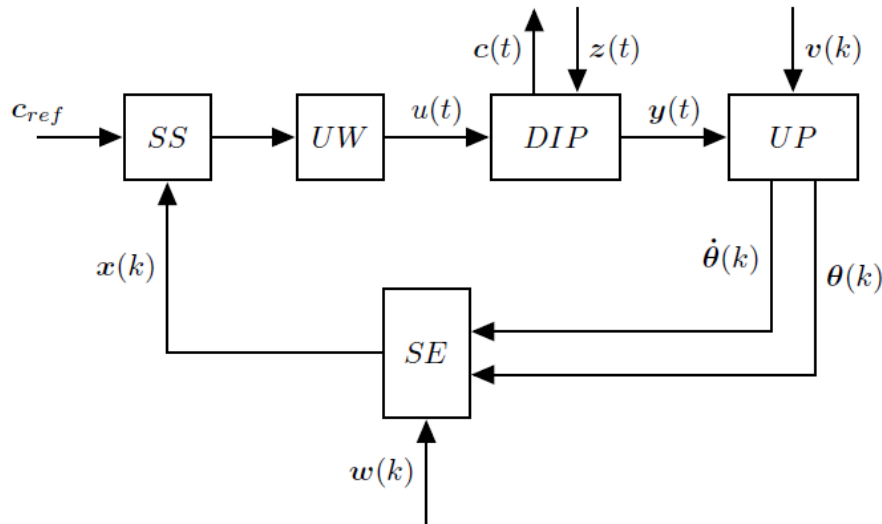
gdzie  $v(k)$  jest szumem pomiarowym a  $w(k)$  jest szumem przetwarzania [32].

Zatem macierze  $A_o$ ,  $B_o$ ,  $C_o$  oraz  $H_o$  były w postaci:

$$A_{Do} = 1, \quad B_{Do} = 0, \quad H_{Do} = 1, \quad C_{Do} = 1. \quad (3.78)$$

## 4. Synteza systemu sterowania

Celem tego rozdziału jest opis syntezy systemu sterowania wahadłem w oparciu o przygotowane wcześniej modele. Pojęcie syntezy systemu sterowania wyraża zbiór operacji mających na celu określenie struktury oraz parametrów algorytmu regulacji dla wskazanego systemu sterowania. Warunki działania oraz wymagania stawiane systemowi muszą być ściśle zdefiniowane [11, 18]. Na rysunku 4.1 przedstawiono strukturę blokową przedstawiającą system sterowania obiektem wahadła.



Rys. 4.1. Schemat blokowy systemu sterowania

Przedstawienie takiej struktury systemu sterowania pozwala na wyrażenie w sposób najbardziej ogólny istoty jego działania. Oprócz oznaczeń przepływających sygnałów, na schemacie zaprezentowano moduły systemu, które zidentyfikować można następującymi skrótami:

- *SS* - algorytm regulacji,
- *UW* - moduł urządzeń wykonawczych,
- *DIP* - podwójne odwrócone wahadło,
- *UP* - moduł urządzeń pomiarowych,
- *SE* - system estymacji stanu.

Zasadniczym wymaganiem stawianym algorytmom sterowania było realizowanie trajektorii referencyjnych  $c_{ref}$  oraz odrzucanie zakłóceń  $z(t)$ . Obiekt wahadła, po rozhuśtaniu musiał utrzymać górne położenie równowagi, bez względu na pewne ograniczone zmiany wartości parametrów oraz niepożądane wpływy zewnętrzne [10, 30].

Dokonując syntezy systemu sterowania należało mieć na uwadze zasadę separowalności, która głosi, iż możliwe jest osobne zaprojektowanie prawa sterowania przy założeniu dostępności pomiarowej wszystkich zmiennych stanu oraz odrębnym skonstruowaniu mechanizmu estymacji, który to na podstawie rzeczywistych pomiarów  $y(t)$  rekonstruuje stan systemu. Takie zjawisko zachodzi jedynie dla obiektów dynamicznych, które opisane są za pomocą liniowych równań różniczkowych. Rozważany obiekt wahadła będący systemem nieliniowym nie spełnia zasady

separowalności jednak ze względu na fakt dokonania linearyzacji wokół punktu pracy, zakłada się słuszność zastosowania tej reguły [11, 30].

W pierwszej kolejności dokonano syntezy algorytmów estymacji, ze względu na fakt, iż konieczna jest współpraca estymatora ze wszystkimi zastosowanymi algorytmami sterowania. Po tem określono wymagania jakie postawiono przed wybranymi algorytmami regulacji. Następnie, opisany zostaje proces doboru nastaw dla liniowych algorytmów LQR oraz typu PID. W dalszej kolejności opisana zostaje metoda Swing - up, oraz jej powiązanie z wyżej wymienionymi algorytmami. Dla każdego rodzaju regulatora przeprowadzono szereg testów symulacyjnych oraz wyciągnięto odpowiednie wnioski z badań.

## 4.1. Estymacja stanu

Zaprezentowano strukturę blokową prezentującą przepływ sygnałów między poszczególnymi fragmentami a na koniec, autorzy na podstawie modelu do celów estymacji, wyprowadzonego w (3.6.3), realizują koncepcję estymacji nakreśloną w (3.6.1).

### 4.1.1. Filtr Kalmana jako optymalny estymator stanu

Filtr Kalmana, będący optymalnym estymatorem stanu umożliwia dokonanie fuzji danych pomiarowych z różnych rodzajów sensorów. Ma to na celu zmniejszenie potencjalnych błędów w pomiarze zmiennych procesowych oraz zwiększenie niezawodności funkcjonowania systemu sterowania [26]. W przypadku rozważanego systemu sterowania, pomiarów dokonywano z dwóch komplementarnych sensorów w postaci żyroskopów i enkoderów.

Użycie jakiegokolwiek rodzaju czujnika pomiarowego skutkuje wystąpieniem pewnych niedogodności w odtwarzaniu mierzonych wielkości, zakłócenia można wyrazić w postaci wektora szumu przetwarzania  $w(t)$  oraz wektora szumu pomiarowego  $v(t)$ . Wektory te można przedstawić w postaci źródeł ciągłego szumu białego, gdzie  $Q$  jest macierzą kowariancji szumu przetwarzania a  $R$  jest macierzą szumu pomiarowego [32]:

$$w(t) = \mathcal{N}(0, Q), \quad v(t) = \mathcal{N}(0, R). \quad (4.1)$$

W przypadku uwzględnienia wektora szumu przetwarzania  $w(t)$  oraz wektora szumu pomiarowego  $v(t)$ , dyskretne równania stanu, rozważanego modelu do celów estymacji mają postać [32]:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k(k) = \mathbf{A}_D \mathbf{x}_k(k-1) + \mathbf{B}_D \mathbf{u}_k(k-1) + \mathbf{G}_D w(k-1), \\ \mathbf{z}_k(k) = \mathbf{H}_D \mathbf{x}_k(k) + \mathbf{D}_D \mathbf{u}_k(k) + v(k), \end{cases} \quad (4.2)$$

gdzie  $\mathbf{x}_k(k-1)$  jest dyskretnym wektorem stanu filtru,  $\mathbf{u}_k(k-1)$  jest dyskretnym sygnałem wejść do filtru natomiast  $\mathbf{z}_k(k)$  jest dyskretnym wektorem pomiarowym. Macierze  $\mathbf{A}_D$ ,  $\mathbf{B}_D$ ,  $\mathbf{H}_D$  oraz  $\mathbf{D}_D$  są macierzami stanu, wejścia wyjścia oraz sprzężenia bezpośredniego w FK [7, 32].

Ze względu na brak bezpośredniego sprzężenia od wejścia oraz braku wpływu wielkości zakłócających nie będących szumem białym na wyjście mierzone oraz stan, macierz  $D_D$  jest równa 0. Upraszcza to (4.2) do postaci:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k(k) = \mathbf{A}_D \mathbf{x}_k(k-1) + \mathbf{B}_D \mathbf{u}_k(k-1) + \mathbf{G}_D \mathbf{w}(k-1), \\ \mathbf{z}_k(k) = \mathbf{H}_D \mathbf{x}_k(k) + \mathbf{v}(k). \end{cases} \quad (4.3)$$

Wektor szumu pomiarowego  $\mathbf{v}(k)$  wpływa negatywnie na pomiar  $\mathbf{z}_k(k)$ . Macierz wzmocnień  $\mathbf{G}_D$  w równaniach (4.2) oraz (4.3) wyraża wpływ zakłóceń stanu na błąd predykcji. Każda mierzona zmienna stanu oraz wejścia może być przedstawiona jako suma wartości pomiaru  $\tilde{\mathbf{x}}_k(k)$  lub  $\tilde{\mathbf{u}}_k(k)$  dodana do szumu przetwarzania  $\mathbf{w}(k)$  [7, 32]:

$$\mathbf{u}_k(k) = \tilde{\mathbf{u}}_k(k) + \mathbf{w}(k), \quad \mathbf{x}_k(k) = \tilde{\mathbf{x}}_k(k) + \mathbf{w}(k), \quad (4.4)$$

Aby skompensować wpływ zakłóceń, zastosowano algorytm dyskretnego, optymalnego estymatora w postaci Filtru Kalmana. Łączy on możliwości odtwarzania stanu znane z obserwatora Luenbergera oraz pozwala na skompensowanie działania szumów pomiarowych [25, 43].

Algorytm Filtru Kalmana można podzielić na dwie zasadnicze części. Równania aktualizacji czasu dokonują predykcji stanu układu w chwili  $k-1$  na chwilę  $k$ . są one w postaci [7, 32]:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k(k|k-1) = \mathbf{A}_D \hat{\mathbf{x}}_k(k-1|k-1) + \mathbf{B}_D \mathbf{u}_k(k-1), \\ \mathbf{P}_k(k|k-1) = \mathbf{A}_D \mathbf{P}_k(k-1|k-1) \mathbf{A}_D^T + \mathbf{Q}, \end{cases} \quad (4.5)$$

gdzie wektory  $\hat{\mathbf{x}}_k(k|k-1)$  oraz  $\hat{\mathbf{x}}_k(k-1|k-1)$  są estymatami stanu przed oraz po pomiarze wektora stanu. Macierze  $\mathbf{P}_k(k|k-1)$  oraz  $\mathbf{P}_k(k-1|k-1)$  są macierzami kowariancji wektorów przed oraz po pomiarze wektora stanu. Macierz  $\mathbf{Q}$  jest macierzą kowariancji szumu przetwarzania [7, 19].

Równania aktualizacji, powodują przystosowanie się stanu do nowych wartości pomiarowych. są one w postaci [7, 32]:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_k(k) = \mathbf{z}_k(k) - \mathbf{H}_D \hat{\mathbf{x}}_k(k|k-1), \\ \mathbf{S}_k(k) = \mathbf{H}_D \mathbf{P}_k(k|k-1) \mathbf{H}_D^T + \mathbf{R}, \\ \mathbf{K}_k(k) = \mathbf{P}_k(k|k-1) \mathbf{H}_D^T \mathbf{S}_k^{-1}(k), \\ \hat{\mathbf{x}}_k(k|k) = \hat{\mathbf{x}}_k(k|k-1) + \mathbf{K}_k(k) \mathbf{e}_k(k), \\ \mathbf{P}_k(k|k) = \mathbf{P}_k(k|k-1) - \mathbf{K}_k(k) \mathbf{S}_k(k) \mathbf{K}_k^T(k). \end{cases} \quad (4.6)$$

gdzie  $\mathbf{K}_k(k)$  jest macierzą wzmocnienia Kalmana,  $\mathbf{R}$  to macierz kowariancji szumu pomiarowego,  $\mathbf{e}_k(k)$  to błąd estymacji natomiast  $\mathbf{S}_k$  jest macierzą pomocniczą wiążącą macierz kowariancji szumu pomiarowego  $\mathbf{R}$ . Macierze kowariancji tworzy się na podstawie korelacji pomiędzy poszczególnymi szumami pomiarowymi [19, 43].

Macierz kowariancji szumu pomiarowego  $R$  można przedstawić jako:

$$R = E[vv^T] = \Sigma_v, \quad (4.7)$$

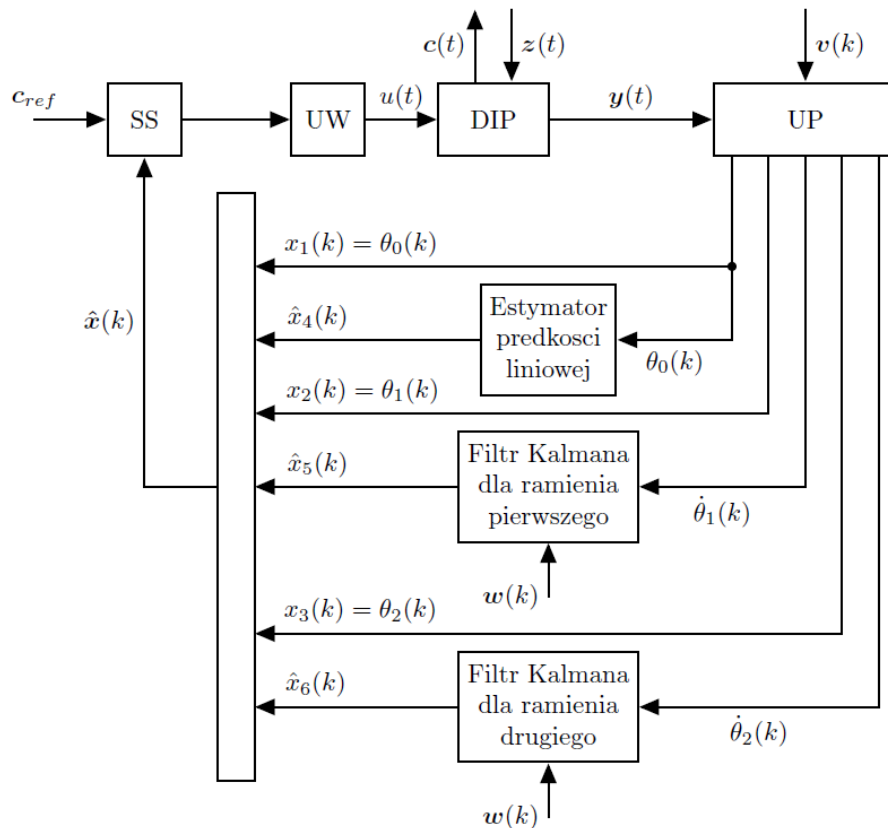
a macierz kowariancji szumu przetwarzania  $Q$  jest dana w postaci:

$$Q = E[ww^T] = G_D \Sigma_w G_D^T. \quad (4.8)$$

Postać (4.7) oraz (4.8) wynika z zależności (4.1), gdzie macierz  $\Sigma_v$  wyraża kowariancję szumu pomiarowego a macierz  $\Sigma_w$  przedstawia kowariancję szumu zakłócającego przetwarzanie danych zmiennych w filtrze [7, 32].

#### 4.1.2. Struktura blokowa algorytmu estymacji

W celu zobrazowania współpracy algorytmów estymacji wraz z resztą systemu sterowania, niezbędne było przedstawienie dokładnej struktury blokowej, która uwzględniałaby uwzględniałaby wszystkie niezbędne do jego działania sygnały oraz ich powiązanie z innymi sygnałami występującymi w systemie. Na rysunku 4.2 zaprezentowano schemat blokowy wyszczególniający część związaną z algorytmami estymacji.



Rys. 4.2. Schemat blokowy systemu sterowania dla algorytmów estymacji

#### 4.1.3. Filtr Kalmana dla wahadła

Na potrzeby projektu, algorytm Filtru Kalmana zastosowano w dwóch przypadkach jako osobne podsystemy. Miały one na celu optymalne filtrowanie sygnałów reprezentujących prędkości kątowe pierwszego i drugiego ramienia po to, aby zniwelować szum pomiarowy. Dla obu algorytmów skorzystano z modelu (3.77).

Macierz kowariancji szumu przetwarzania  $\mathbf{Q}$  określono na podstawie macierzy  $\mathbf{G}_D$  danej jako:

$$\mathbf{G}_D = 1, \quad (4.9)$$

oraz  $\Sigma_w$  w postaci:

$$\Sigma_w = \sigma^2. \quad (4.10)$$

Wykorzystując odpowiednio długi wektor pomiarowy wyznaczono średnią z pomiaru korzystając z wzoru:

$$m_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i_k=1}^{n_k} x_{k_i}, \quad (4.11)$$

gdzie  $x_{k_i}$  to dany pomiar a  $n_k$  jest liczbą pomiarów wykonanych na potrzeby obliczeń.

Następnie kowariancję wyznaczono z wzoru [32]:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n_k} \sum_{i_k=1}^{n_k} (x_{k_i} - m_k)^2. \quad (4.12)$$

Zatem, bazując na zależnościach (4.8), (4.9), (4.10), (4.11) oraz (4.12) macierz  $\mathbf{Q}$  była dana jako:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}_D \Sigma_w \mathbf{G}_D^T = \sigma^2 = 0.0073. \quad (4.13)$$

Ze względu na wpływ szumu pomiarowego  $v(k)$  na działanie żyroskopu, konieczne było uwzględnienie macierzy  $\mathbf{R}$  w równaniach filtru. Korzystając z zależności (4.7), (4.11) oraz (4.12) macierz  $\mathbf{R}$  wyznaczono jako:

$$\mathbf{R} = \Sigma_v = \sigma^2 = 0.0073. \quad (4.14)$$

Wówczas równania predykcji systemu, opracowane na bazie (4.5) są dane jako:

$$\begin{cases} \hat{x}_k(k|k-1) = \hat{x}_k(k-1|k-1), \\ P_k(k|k-1) = P_k(k|k-1) + \mathbf{Q}. \end{cases} \quad (4.15)$$

gdzie wartość macierzy  $\mathbf{Q}$  zaczerpnięto z (4.13).

Równania aktualizacji stworzone w oparciu o (4.6) mają postać:

$$\begin{cases} e_k(k) = z_k(k) - \hat{x}_k(k|k-1), \\ S_k(k) = P_k(k|k-1) + \mathbf{R}, \\ K_k(k) = P(k|k-1)S^{-1}(k), \\ \hat{x}_k(k|k) = \hat{x}_k(k|k-1) + K_k(k)e_k(k), \\ P_k(k|k) = P_k(k|k-1) - K_k(k)S_k(k)K_k^T(k) \end{cases} \quad (4.16)$$

gdzie wartość macierzy  $\mathbf{R}$  zaczerpnięto z (4.14).

Równania Filtru Kalmana określone w (4.15) oraz (4.16) można było bezpośrednio zaimplementować na platformie mikroprocesorowej.

Niezbędnym było zainicjowanie odpowiednich warunków początkowych w postaci [7]:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k(0) = \hat{\mathbf{x}}_k(-1) = 0, \\ \mathbf{P}_k(0) = \mathbf{P}_k(-1) = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

W przypadku estymatora pracującego w systemie predyktor - korektor, bardzo ważnym jest, aby warunki początkowe algorytmu estymacji były tak dobrane, aby odtwarzane zmienne stanu szybko osiągnęły stan zbliżony do rzeczywistej trajektorii [7, 10]. Dla Filtru Kalmana, warunki początkowe określone w (4.17), założono tak, aby były one zbieżne z górnego punktu pracy  $P_1$ .

## 4.2. Kryteria jakościowe systemu regulacji

Chcąc ocenić skuteczność działania systemu regulacji, konieczne jest przyjęcie pewnych kryteriów, na podstawie których weryfikowana jest jego jakość działania. Analiza stabilności nasuwa jedynie wnioski o tym, czy system osiąga pewien stan ustalony bądź też wykazuje pewne oscylacje wokół niego. Konieczne jest więc dokonanie dodatkowych analiz dynamiki układu sterowania [11, 18, 30].

Wiedząc, że błąd regulacji systemu sterowania można zdefiniować jako [11]:

$$e(t) \triangleq e_s + e_p(t), \quad (4.18)$$

gdzie  $e(t)$  to uchyb całkowity,  $e_s$  to uchyb w stanie ustalonym a  $e_p(t)$  to uchyb w stanie przejściowym, miarami jakości sterowania na jakie zdecydowali się autorzy systemu były kryteria całkowite. Wskaźniki te pokazują całość z błędu regulacji w czasie trwania stanu przejściowego [11, 30]. Wiedząc, że system posiada trzy sygnały referencyjne zdefiniowane w (3.54), można na podstawie (4.18) zdefiniować tożsamy do (3.62) wektor uchybów  $e(t)$  w postaci:

$$e(t) \triangleq e_s + e_p(t), \quad (4.19)$$



gdzie poszczególne wektory  $e_s$  oraz  $e_p(t)$  dane są jako:

$$e_s = [e_{s0} \quad e_{s1} \quad e_{s2}]^T, \quad e_p(t) = [e_{p0}(t) \quad e_{p1}(t) \quad e_{p2}(t)]^T. \quad (4.20)$$

Zatem, na podstawie (4.19) i (4.20) możliwe jest zdefiniowanie całkowych wskaźników jakości sterowania w postaci wektorowej:

- całka z formy kwadratowej wektora uchybu przejściowego:

$$J_{c1}(e_p(t)) = \int_0^{\infty} e_p(t)^T e_p(t) dt, \quad (4.21)$$

- całka z normy euklidesowej wektora uchybu przejściowego:

$$J_{c2}(e_p(t)) = \int_0^{\infty} \|e_p(t)\|_2 dt, \quad (4.22)$$

gdzie  $e_p(t) \in \ell_2^3$ , przy czym  $\ell_2^3$  jest trójwymiarową przestrzenią z normą euklidesową  $\|e_p(t)\|_2$  [46],

- całka z supremum wektora uchybu przejściowego:

$$J_{c3}(e_p(t)) = \int_0^{\infty} \|e_p(t)\|_{\infty} dt, \quad (4.23)$$

gdzie  $e_p(t) \in \ell_{\infty}^3$ , przy czym  $\ell_{\infty}^3$  jest trójwymiarową przestrzenią z normą supremum  $\|e_p(t)\|_{\infty} = \sup\{|e_{p_n}(t)| : n \in \{1, 2, 3\}\}$  [46].

Wskaźnikami jakości systemu regulacji są więc wartości całek z funkcjonalów (4.21), (4.22) oraz (4.23), które muszą zostać zminimalizowane. Zakładając, że na osiągnięcie przez system stanu ustalonego nie są nałożone żadne ramy czasowe, jego błąd regulacji w stanie przejściowym  $e_p(t) \rightarrow 0$  dla  $t \rightarrow \infty$ , co uzasadnia przedział całkowania jako  $t \in [0, \infty]$  [11, 30].

### 4.3. Synteza systemu sterowania z regulatorem liniowo - kwadratowym

Zadaniem postawionym przed liniowo - kwadratowym algorytmem sterowania było stabilizowanie obiektu wahadła w jego górnym, punkcie pracy  $P_1$ . Wybrana metoda regulacji musiała radzić sobie z odrzucaniem zewnętrznych zakłóceń i spełniać wymagania postawione w (3.3) oraz (4.2) [30, 35]. Podrozdział ten przedstawia całą procedurę syntezy algorytmu począwszy od wyjaśnienia istoty jego działania, po dobór nastaw na testach symulacyjnych kończąc.

#### 4.3.1. Prawo sterowania

Regulator liniowo - kwadratowy jest algorytmem wykorzystującym ujemne sprzężenie zwrotne od stanu, w którym to sterowanie jest wyznaczane względem rozwiązania zadania optymalizacji [35]. Minimalizowana funkcja celu jest funkcjonalnym kwadratowym, zawierającym w sobie wektor stanu  $x(t)$ , wektor sterowań  $u(t)$  oraz typowo diagonalne, dodatnio określone macierze

wag  $Q_w$  i  $R_w$ . Dla ciągłego modelu systemu, na którego sterowanie nie są narzucone ramy czasowe, funkcja celu jest równa [18, 35]:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_w \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}_w \mathbf{u}(t) dt. \quad (4.24)$$

Prawo sterowania dla algorytmu LQR jest dane jako:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{u}_x(t) + \mathbf{u}_{ref}(t), \quad (4.25)$$

gdzie  $\mathbf{u}_x(t)$  jest w postaci:

$$\mathbf{u}_x(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (4.26)$$

a macierz  $\mathbf{K}$  jest równa:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_w. \quad (4.27)$$

Macierz  $\mathbf{P}_w$ , pojawiającą się w (4.27) można wyznaczyć z rozwiązania algebraicznego równania Riccatiego w postaci [18, 35]:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}_w + \mathbf{P}_w \mathbf{A} - \mathbf{P}_w \mathbf{B} \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_w + \mathbf{Q}_w = \mathbf{0}. \quad (4.28)$$

Wyprowadzenie powyższych zależności (4.27) oraz (4.28) dokonuje się poprzez zastosowanie Zasady Maksimum Pontragina, metody optymalizacji dynamicznej korzystającej z równań Hamiltona [18]. Rozwiązanie powyższego problemu optymalizacji dla funkcji celu (4.24) można znaleźć w pracy [35].

Oprócz sterowania od stanu  $\mathbf{u}_x(t)$  opisanego w (4.26), konieczne było wyznaczenie sterowania od wartości referencyjnej  $\mathbf{u}_{ref}(t)$  danej jako [10]:

$$\mathbf{u}_{ref}(t) = \mathbf{K}_r \mathbf{c}_{ref}(t), \quad (4.29)$$

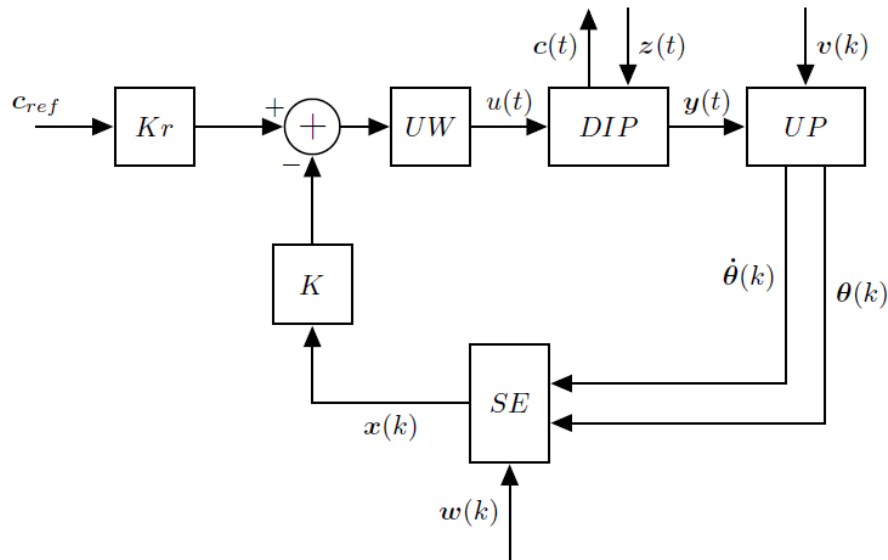
gdzie macierz wzmocnienia sprzężenia w przód  $\mathbf{K}_r$  można wyznaczyć z zależności (4.30) [10]:

$$\mathbf{K}_r = -(\mathbf{E}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B})^{-1}. \quad (4.30)$$

Dzięki zastosowaniu podejścia opartego o rozwiązanie zadania optymalizacji z funkcją celu (4.24), możliwe jest dobranie sterowania od stanu (4.25) i (4.29) w taki sposób, aby mieć na uwadze to czy system ma szybciej podążać do punktu pracy czy też ma ograniczać zużycie energii związane z generowaniem sygnału sterującego [18]. Wartości macierzy wag  $Q_w$  i  $R_w$  są dobierane arbitralnie przez projektantów systemu [35].

#### 4.3.2. Schemat blokowy systemu sterowania

W celu zobrazowania współpracy algorytmu LQR wraz z resztą systemu sterowania, na rysunku 4.3 przedstawiono dokładną strukturę blokową, uwzględniającą wszystkie niezbędne do jego działania sygnały oraz ich powiązanie z innymi sygnałami występującymi w systemie.



Rys. 4.3. Schemat blokowy systemu sterowania dla algorytmu LQR

Ze względu na to, iż zadaniem regulatora jest utrzymywanie wahadła w górnym położeniu równowagi, wartość referencyjna  $c_{ref}$  musiała być powiązana z wartościami punktu pracy  $P_1$ . Wówczas jej wartość jest równa  $c_{ref} = 0$ , co skutkuje tym, że macierz wzmocnienia w przód  $K_r$  nie jest brana pod uwagę przy wyliczaniu sterowania  $u(t)$ .

#### 4.3.3. Dobór nastaw regulatora

Bardzo ważnym faktem związanym z zagadnieniem sterowania optymalnego jest to, że analityczne bądź numeryczne znalezienie rozwiązania problemu optymalizacyjnego nie gwarantuje wyznaczenia takiego sterowania, które zapewni stabilność systemu [18]. W przypadku algorytmu LQR, dobranie różnych wartości wag w macierzach  $Q_w$  i  $R_w$ , daje odmienne rezultaty. Począwszy od zmiany jakości sterowania systemem, przez większe zużycie energii urządzeń wykonawczych po w najgorszym przypadku zdestabilizowanie systemu sterowania [35].

Wiedząc że wymiary macierzy wag są w postaci:  $Q_w \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  i  $R_w \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  ich wartości dobrano jako:

$$Q_w = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

oraz:

$$R_w = 1. \quad (4.32)$$

Wówczas, w oparciu o macierze wag z (4.31) oraz (4.32), wektor  $K$  wyniósł:

$$K = [10, 0 \quad -280, 44 \quad 338, 12 \quad 10, 65 \quad -0, 0849 \quad 29, 1]. \quad (4.33)$$

Zadanie optymalizacji zostało wykonane dzięki zastosowaniu skryptu napisanego w programie Matlab Simulink, który można znaleźć na płycie CD w Dodatku I pod nazwą *wyznacz\_lqr.m*. Program ten wykonuje się po uruchomieniu skryptu pod nazwą *dip\_sterowanie.m*.

Po dobraniu macierzy wzmocnień  $K$ , nowe bieguny układu regulacji dane są jako:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = -18, 42, \\ s_2 = -10, 93, \\ s_3 = -7, 47 + 1, 49i, \\ s_4 = -7, 47 - 1, 49i, \\ s_5 = -2, 1 + 0, 599i, \\ s_6 = -2, 1 - 0, 599i. \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Takie ułożenie biegunów (4.34) daje gwarancję asymptotycznej stabilności układu regulacji. ze względu na fakt, iż  $s_3$  i  $s_4$  oraz  $s_5$  i  $s_6$  są do siebie sprzężone, wyjście systemu  $c(t)$  będzie miało charakter oscylacyjny [10, 18].

Przy doborze wartości macierzy wag  $Q_w$  i  $R_w$ , projektanci kierowali się jak najlepszym wpływem sterowania na przemieszczenie liniowe wózka oraz przemieszczenie kątowe ramion wahadła. Pozwala to na lepszą reakcję na zmiany wartości stanów  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  oraz  $x_3(t)$ , które muszą być odpowiednio szybko doprowadzone do punktu pracy. Mniejszą uwagę poświęcono pozostałym stanom, których stabilizacja nie musiała być dostatecznie szybka.

#### 4.3.4. Dyskretyzacja prawa sterowania

W celu zaimplementowania algorytmu LQR na platformie sprzętowej, niezbędnym było przejście na postać dyskretną. ze względu na fakt, że dyskretyzacja prawa sterowania w postaci (4.25) nie uwzględnia członów dynamicznych, jego postać dyskretna jest następująca [11]:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(k) + \mathbf{K}_r \mathbf{c}_{ref}(k). \quad (4.35)$$

Wartości nastaw dla regulatora (4.35) w postaci wektora  $\mathbf{K}$  zaczerpnięto z (4.33).

#### 4.3.5. Testy symulacyjne

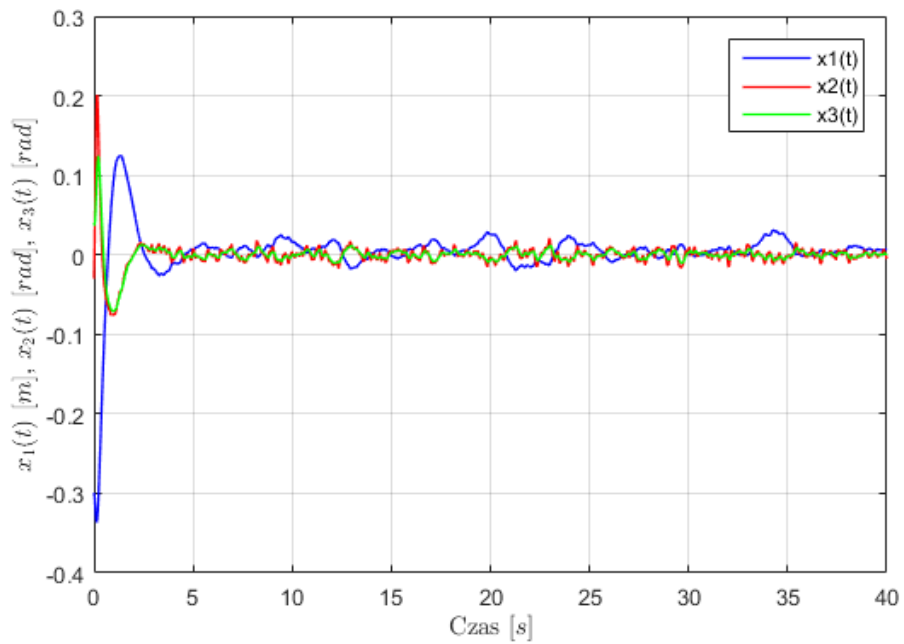
Zakończenie procesu doboru nastaw oraz dyskretyzacji prawa sterowania algorytmu pozwoliło na przeprowadzenie testów symulacyjnych na modelu poznawczym (2.65) w celu sprawdzenia jakości działania systemu sterowania.

Podczas testów symulacyjnych rozważano dwa scenariusze. Pierwszy zakładał brak wpływu zakłóceń zewnętrznych  $z(t)$  na działający system sterowania a drugi uwzględniał je po to, aby zweryfikować zdolności systemu do ich odrzucania. Dla dwóch zestawów stanów początkowych badano zachowanie się układu poprzez obserwację przebiegów czasowych dla wektora wyjść sterowanych  $\mathbf{c}(t)$  oraz zmiany zachodzące w wartościach kryteriów całkowych zdefiniowanych w rozdziale (4.2). na potrzeby testów, okres próbkowania  $T_s$  został założony jako  $T_s = 0,0001$  s. Dla obu typów badań warunki początkowe przyjęto jako:

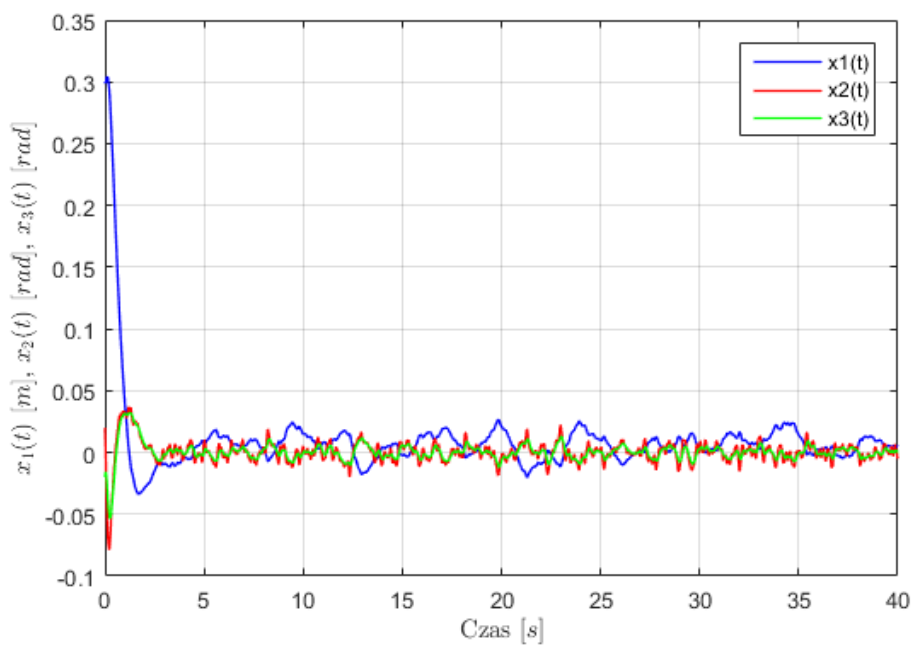
- $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -0,3 & -0,04 & 0,03 & 0,1 & 0,2 & -0,2 \end{bmatrix}^T$ ,
- $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,02 & -0,02 & -0,1 & -0,2 & 0,2 \end{bmatrix}^T$ ,

Badania symulacyjne wykonano przy pomocy odpowiedniego skryptu napisanego stworzonego w programie Matlab Simulink. Znajduje się on na płycie CD w Dodatku I pod tytułem *DIP\_STEROWANIE.slx*. Aby zainicjalizować parametry symulacji, w pierwszej kolejności należało uruchomić plik *dip\_sterowanie.m*.

W pierwszej kolejności zweryfikowano działanie systemu z pominięciem zakłóceń zewnętrznych. Czas symulacji trwał 40 jednostek czasu. Na poniżej zamieszczonych rysunkach 4.4 oraz 4.5 zamieszczono przebiegi czasowe wektora  $\mathbf{c}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}^T$ .

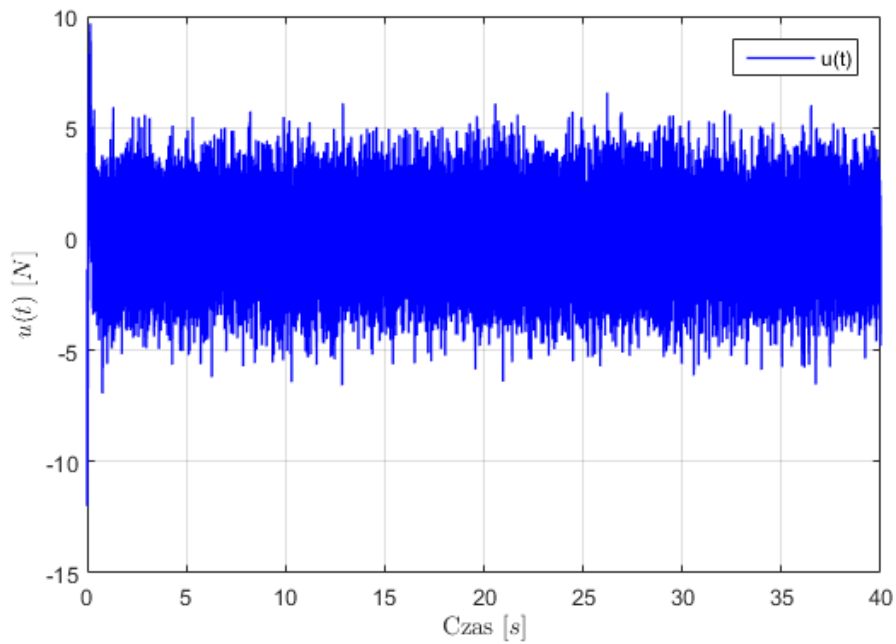


Rys. 4.4. Symulacja 1 - trajektorie składowych wektora  $c(t)$  dla pierwszego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń  $z(t)$

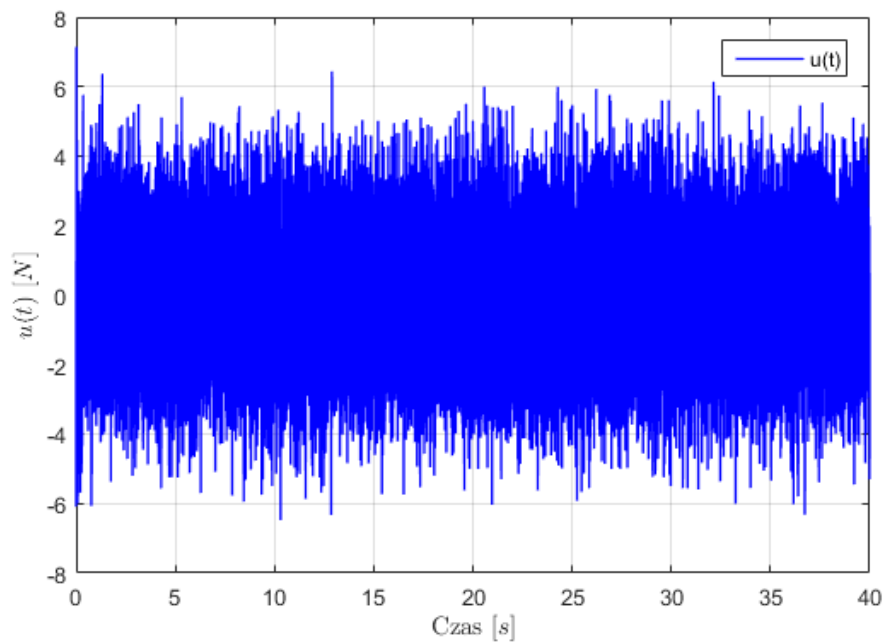


Rys. 4.5. Symulacja 2 - trajektorie składowych wektora  $c(t)$  dla drugiego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń  $z(t)$

Na rysunkach 4.6 oraz 4.7 zamieszczono przebiegi czasowe sygnału sterującego  $u(t)$  dla obu symulacji bez zakłóceń.

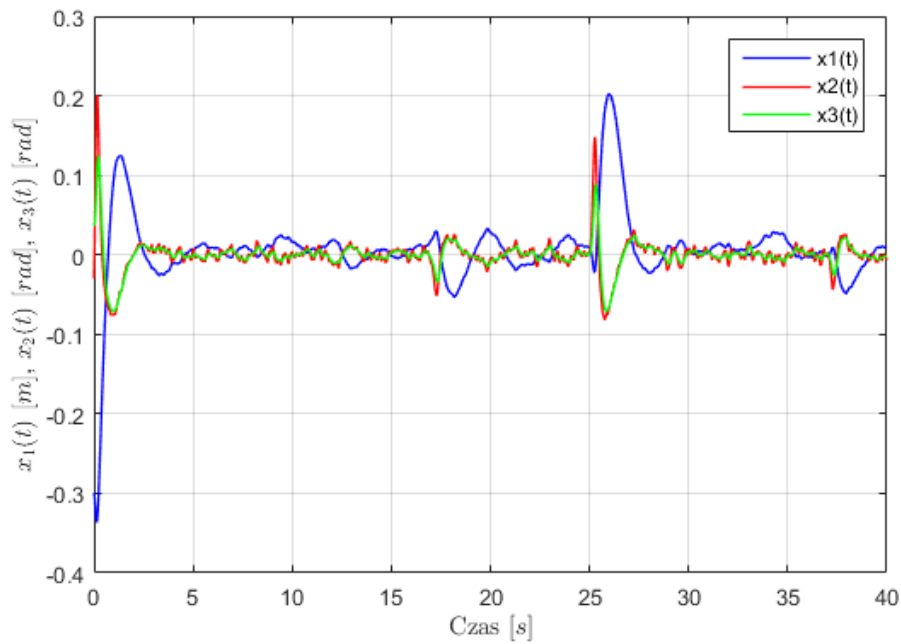


Rys. 4.6. Symulacja 1 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  dla pierwszego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń  $z(t)$

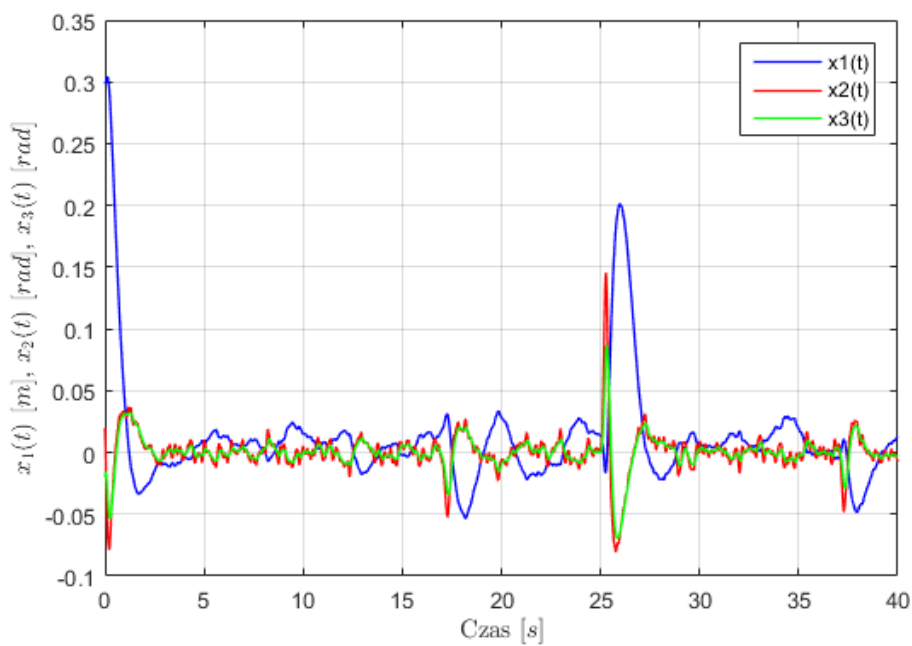


Rys. 4.7. Symulacja 2 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  dla drugiego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń  $z(t)$

Następnie zweryfikowano działanie systemu z uwzględnieniem zakłóceń zewnętrznych. Czas symulacji trwał 40 jednostek czasu. Na poniżej zamieszczonych rysunkach 4.8 oraz 4.9 zamieszczono przebiegi czasowe wektora  $c(t)$ .



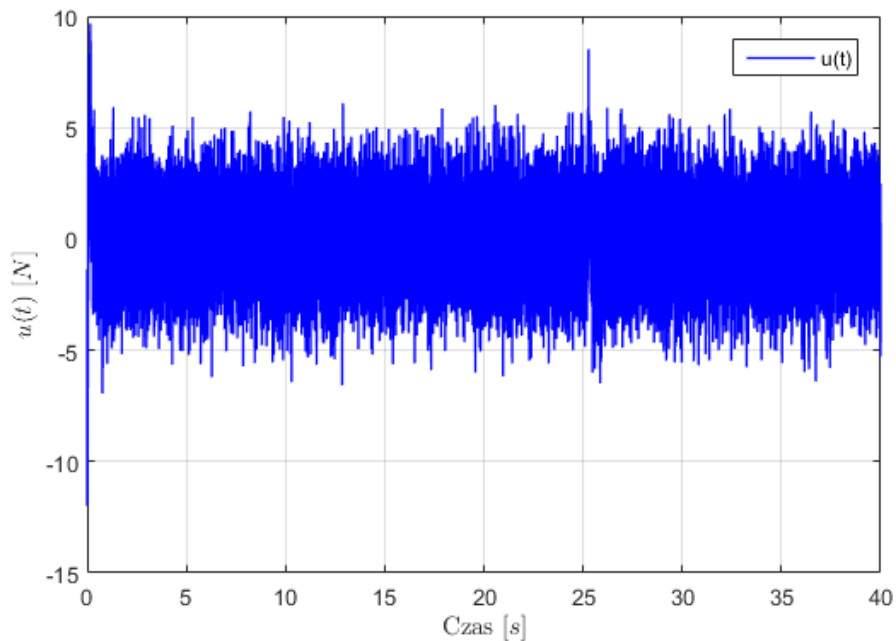
Rys. 4.8. Symulacja 3 - trajektorie składowych wektora  $c(t)$  dla pierwszego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$



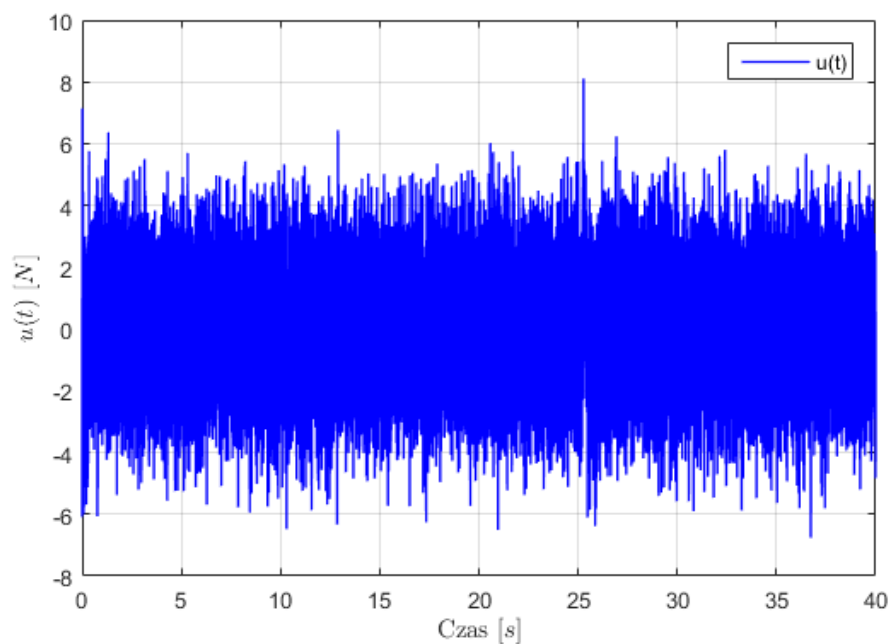
Rys. 4.9. Symulacja 4 - trajektorie składowych wektora  $c(t)$  dla drugiego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$

Na rysunkach 4.10 oraz 4.11 zamieszczono przebiegi czasowe sygnału sterującego  $u(t)$  dla obu symulacji przy uwzględnieniu zakłóceń  $z(t)$ :





Rys. 4.10. Symulacja 3 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  dla pierwszego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$



Rys. 4.11. Symulacja 4 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  dla drugiego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$

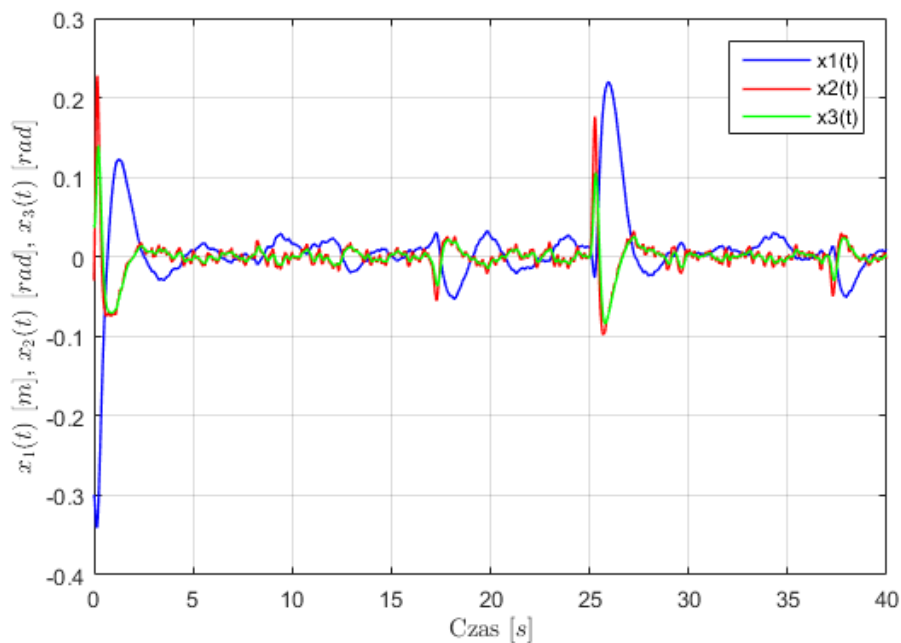
Analizując powyżej zamieszczone rysunki 4.4, 4.5, 4.8 oraz 4.9 można wyciągnąć wnioski, iż algorytm sterowania LQR gwarantuje stabilność systemu dla różnych warunków początkowych. ze względu na silną nieliniowość rzeczywistego obiektu, oraz uwzględnienie modeli urządzeń pomiarowych oraz wykonawczych, zauważalne są niewielkie oscylacje w przebiegu zmiennych wyj-

ściowych. Ponadto, widoczny jest wpływ zakłóceń zewnętrznych  $z(t)$  pojawiających się w różnych momentach czasu, jednakże są one odrzucane i system powraca do punktu pracy.

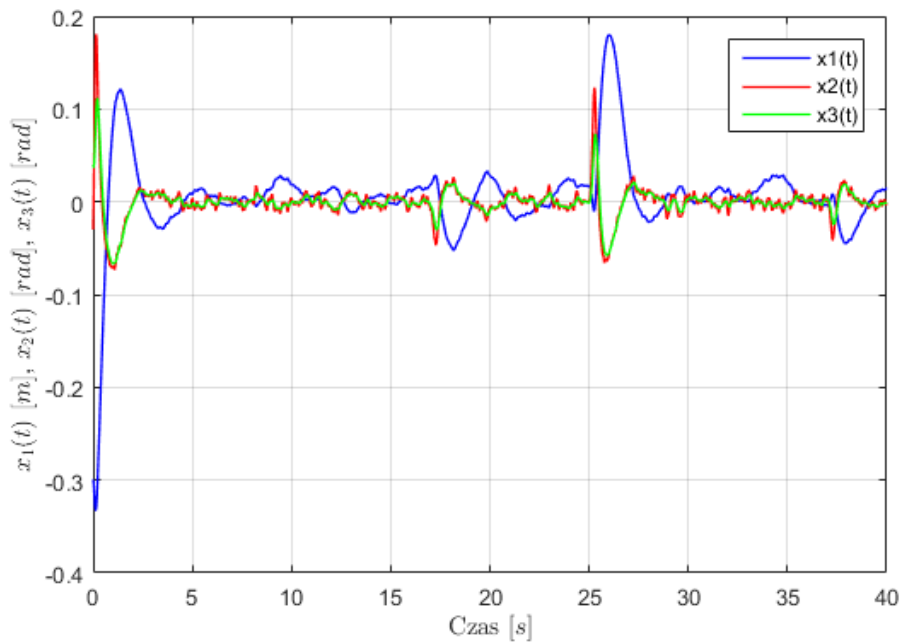
Dotychczasowe badania odbywały się przy wykorzystaniu nominalnych wartości parametrów  $I_2$ ,  $l_2$  i  $m_2$ . Aby zweryfikować krzepkość działania systemu zdecydowano się na pozostawienie nastaw z (4.33) oraz zmiany wartości parametrów  $I_k$  oraz  $m_k$  między ich minimalnymi i maksymalnymi wartościami. Warunki początkowe dla symulacji przyjęto arbitralnie w postaci:

$$\mathbf{x}(0) = [-0,3 \quad -0,04 \quad 0,03 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad -0,2]^T. \quad (4.36)$$

Dla przykładowych, dwóch przeprowadzonych symulacji trwających 40 jednostek czasu, uwzględniono wpływ zakłóceń zewnętrznych. Na rysunkach 4.12 oraz 4.13 przedstawiono przebiegi czasowe wektora  $\mathbf{c}(t)$ .

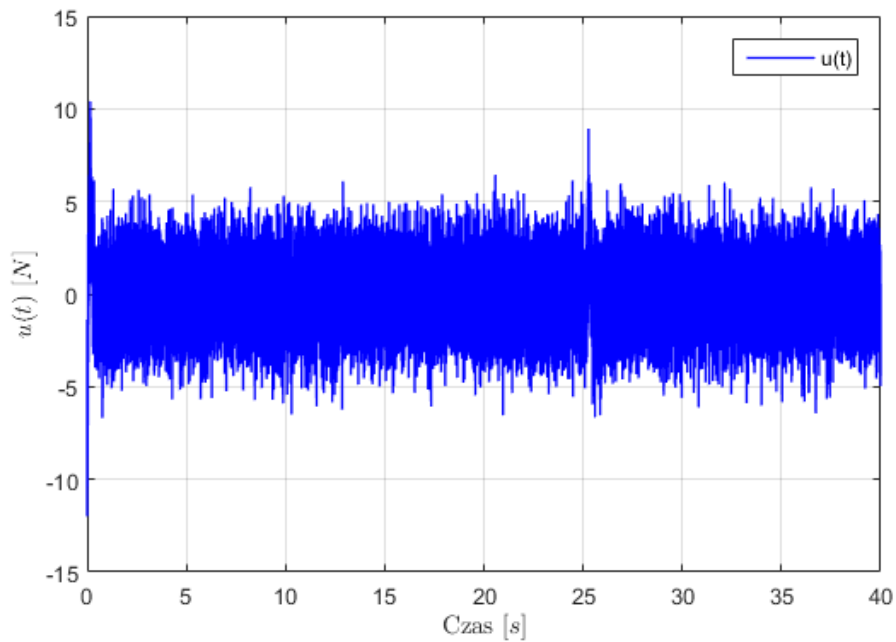


Rys. 4.12. Symulacja 5 - trajektorie składowych wektora  $\mathbf{c}(t)$  dla parametrów  $I_{k_{min}}$  i  $m_{k_{min}}$  z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$

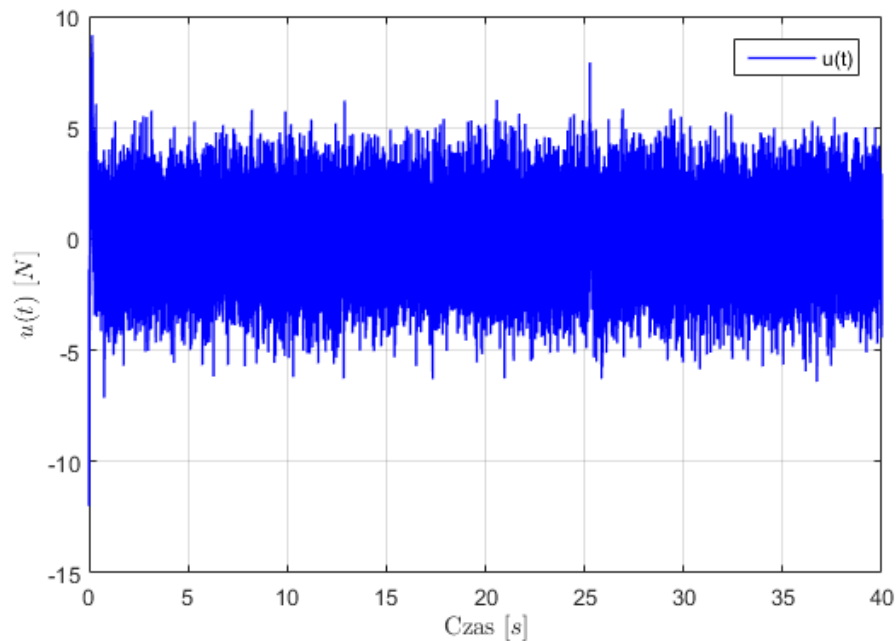


Rys. 4.13. Symulacja 6 - trajektorie składowych wektora  $c(t)$  dla parametrów  $I_{k_{max}}$  i  $m_{k_{max}}$  z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$

Na rysunkach 4.14 oraz 4.15 zamieszczono przebiegi czasowe sygnału sterującego  $u(t)$  dla obu symulacji.



Rys. 4.14. Symulacja 5 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$



Rys. 4.15. Symulacja 6 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$

Analizując powyżej zamieszczone rysunki 4.12 oraz 4.13 można dojść do wniosku, iż system sterowania dla nastaw dobranych przy nominalnych parametrach zachowuje stabilność przy nieznanych zmianach wartości parametrów.

Sygnały sterujące zamieszczone na rysunkach 4.6, 4.7, 4.10, 4.11, 4.14 oraz 4.15 mają charakter szybko zmienny. Realizacja zadania utrzymania wahań w górnym punkcie równowagi powoduje, że sygnał  $u(t)$  przełącza się z dużą częstotliwością.

#### 4.4. Synteza systemu sterowania typu PID

Zadaniem postawionym przed regulatorem PD było stabilizowanie obiektu wahań w jego górnym, punkcie pracy  $P_1$ . Wybrana metoda regulacji musiała radzić sobie z odrzucaniem zewnętrznych zakłóceń i spełniać wymagania postawione w (3.3) oraz (4.2). Rozdział ten przedstawia całą procedurę syntezy algorytmu począwszy od wyjaśnienia istoty jego działania, po dobór nastaw na testach symulacyjnych kończąc.

##### 4.4.1. Prawo sterowania

Drugim z przewidzianych algorytmów sterowania był układ regulatorów typu PID. Taka struktura sterowania cechuje się połączeniem w zestaw kilku regulatorów PID, które współpracując ze sobą, są w stanie wygenerować sygnał sterujący  $u(t)$ , stabilizujący obiekt regulacji [11, 30].

Autorzy zdecydowali się na zastosowanie klasycznego, rzeczywistego algorytmu PID, w wersji niezależnej IND (*ang.: independent*). W dziedzinie zespolonej  $s$ , jego równanie opisu-

jące zależność między sygnałem sterującym  $u(s)$  oraz uchybem  $\varepsilon(s)$  jest dane jako [30]

$$u(s) = \varepsilon(s) \left( k_p + \frac{k_d s}{T_b s + 1} + \frac{k_i}{s} \right), \quad (4.37)$$

gdzie  $k_p$  to wzmocnienie członu proporcjonalnego,  $k_d$  to wzmocnienie członu różniczkującego,  $T_b$  jest stałą czasową inercji rzeczywistego członu różniczkującego,  $k_i$  to wzmocnienie członu całkującego [30].

Mając na uwadze naturę obiektu wahadła, fakt iż stabilizacja odbywa się jedynie w otoczeniu  $P_1$  oraz wnioski, które nasuwa dowód twierdzenia zamieszczonego w Dodatku A, logicznym jest, że zespół regulatorów PID (4.37) zostanie zredukowany do regulatorów PD, gdzie równanie pojedynczego regulatora jest w postaci:

$$u(s) = \varepsilon(s) \left( k_p + \frac{k_d s}{T_b s + 1} \right). \quad (4.38)$$

Jedną z wad stosowania algorytmu PD jest wrażliwość członu D na szum pomiarowy. Aby skompensować tę niedogodność, w (4.38) zastosowano człon inercji pierwszego rzędu dołączony do części różniczkującej [30].

Wiedząc, że  $\varepsilon(s) \in \mathbb{C}^{3 \times 1}$  oraz  $u(s) \in \mathbb{C}$  należało zdefiniować wektory wzmocnień, odpowiedzialnych za daną część regulatora PD. Wektor wzmocnień członów proporcjonalnych zdefiniowano jako:

$$\mathbf{k}_p = \begin{bmatrix} k_{p0} & k_{p1} & k_{p2} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

a wektor wzmocnień członów różniczkujących zdefiniowano jako:

$$\mathbf{k}_d = \begin{bmatrix} k_{d0} & k_{d1} & k_{d2} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Na podstawie znajomości wektora uchybu (3.62), wektorów (4.39) i (4.40) oraz prawa sterowania w postaci (4.38), zdefiniowano macierzowo - wektorową strukturę regulacji PD daną jako:

$$u(s) = \mathbf{k}_p \varepsilon(s) + \mathbf{k}_d \begin{bmatrix} \frac{s}{T_{b0}s + 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s}{T_{b1}s + 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{T_{b2}s + 1} \end{bmatrix} \varepsilon(s), \quad (4.41)$$

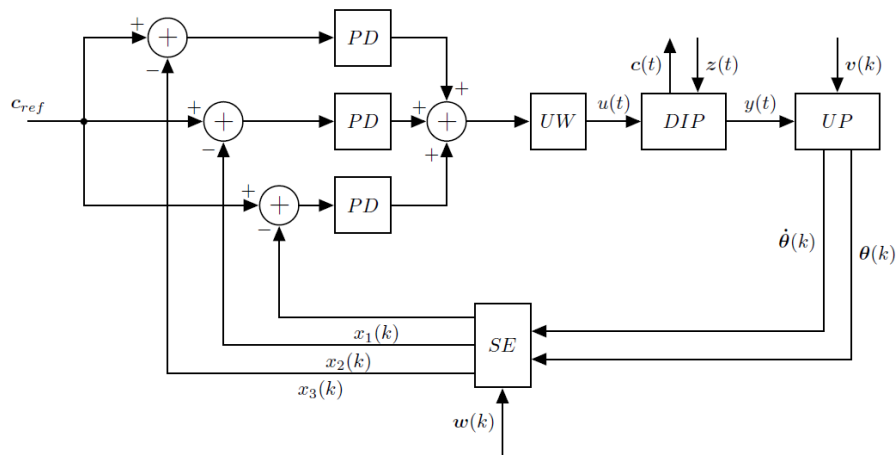
gdzie dla każdego z trzech regulatorów PD, stałe inercji  $T_{b0}$ ,  $T_{b1}$  oraz  $T_{b2}$  zostały wyznaczone jako [11]:

$$\begin{cases} T_{b0} = 0,005, \\ T_{b1} = 0,005, \\ T_{b2} = 0,005, \end{cases} \quad (4.42)$$

Odpowiednio dobrana wartość stałych czasowych inercji (4.42) pozwala na skompensowanie negatywnego wpływu zakłóceń na człon D a zarazem nie wpływa znacząco na szybkość działania układu regulacji [7, 11].

#### 4.4.2. Schemat blokowy systemu sterowania

W celu zobrazowania współpracy algorytmu z zespołem regulatorów PD z resztą systemu sterowania, na rysunku 4.16 przedstawiono dokładną strukturę blokową, uwzględniającą wszystkie niezbędne jego działania sygnały oraz ich powiązanie z innymi sygnałami występującymi w systemie.



Rys. 4.16. Schemat blokowy systemu sterowania dla algorytmu typu PD

#### 4.4.3. Dobór nastaw algorytmu

Nastawy dla zespołu regulatorów PD dobrano na podstawie osiągnięć uzyskanych przy strojeniu regulatora LQR. W Dodatku A przedstawiono dowód matematyczny, który objaśnia w jaki sposób możliwe było przeniesienie nastaw ze sterowania od stanu na strukturę algorytmów PD.

Zatem, wektory wzmocnień  $k_p$  oraz  $k_d$  wyniosły:

$$\mathbf{k}_p = [10 \quad -280,44 \quad 338,12], \quad \mathbf{k}_d = [10,65 \quad -0,0849 \quad 29,1] \quad (4.43)$$

gdzie składowe wektorów  $k_p$  oraz  $k_d$  zaczerpnięto z (4.33).

#### 4.4.4. Dyskretyzacja prawa sterowania

W celu zaimplementowania algorytmu LQR na platformie sprzętowej, niezbędnym było przejście na postać dyskretną. Dla uproszczenia obliczeń, procedurę dyskretyzacji przeprowadzono dla jednego regulatora PD, a następnie złożono analogiczne struktury dla pozostałych, jak w (4.41). Stosując Transformację biliniową Tustina daną jako [11, 30]:

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}, \quad (4.44)$$

gdzie  $T_s$  jest okresem próbkowania, a  $z$  jest zmienną zespoloną, dokonano transformacji przestrzeni. Następnie, podstawiając (4.44) do (4.38) otrzymano:

$$u(z) = \varepsilon(z) \left( k_p + \frac{2k_d(z-1)}{(2T_b + T_s)z + T_s - 2T_b} \right). \quad (4.45)$$

W celu uproszczenia obliczeń zastosowano następujące oznaczenia:

$$\alpha_1 \triangleq 2k_d, \quad \alpha_2 \triangleq 2T_b + T_s, \quad \alpha_3 \triangleq T_s - 2T_b, \quad (4.46)$$

co po podstawieniu (4.46) do (4.45):

$$u(z) = \varepsilon(z) \frac{(\alpha_1 + k_p \alpha_2)z + k_p \alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 z + \alpha_3}, \quad (4.47)$$

pozwoiliło uzyskać z (4.47) postać wejście - wyjście:

$$u(z)(\alpha_2 z + \alpha_3) = \varepsilon(z)(\alpha_1 + k_p \alpha_2)z + k_p \alpha_3 - \alpha_1. \quad (4.48)$$

Stosując odwrotną transformację  $Z$  na równaniu (4.48) otrzymano równanie różnicowe:

$$\alpha_2 u(k+1) + \alpha_3 u(k) = (\alpha_1 + k_p \alpha_2) \varepsilon(k+1) + (k_p \alpha_3 - \alpha_1) \varepsilon(k). \quad (4.49)$$

Po uporządkowaniu oraz przesunięciu próbek w (4.49), równanie rzeczywistego regulatora PD w postaci równania różnicowego jest dane jako:

$$u(k) = \frac{(2k_d + k_p(2T_b + T_s))\varepsilon(k) + (k_p(T_s - 2T_b) - 2k_d)\varepsilon(k-1) - (T_s - 2T_b)u(k-1)}{2T_b + T_s}. \quad (4.50)$$

Następnie, na podstawie (4.41) stworzono dyskretną strukturę algorytmów PD generującą sygnał  $u(k)$  w postaci:

$$u(k) = u_0(k) + u_1(k) + u_2(k), \quad (4.51)$$

gdzie  $u_0(k)$ ,  $u_1(k)$  oraz  $u_2(k)$  są sygnałami sterującymi z poszczególnych regulatorów PD. Bazując na (4.50) oraz (4.51) sygnał sterujący  $u(k)$  można zapisać jako:

$$u(k) = \frac{(2k_{d0} + k_{p0}(2T_{b0} + T_s))\varepsilon_0(k) + (k_{p0}(T_s - 2T_{b0}) - 2k_{d0})\varepsilon_0(k-1) - (T_s - 2T_{b0})u_0(k-1)}{2T_{b0} + T_s} + \frac{(2k_{d1} + k_{p1}(2T_{b1} + T_s))\varepsilon_1(k) + (k_{p1}(T_s - 2T_{b1}) - 2k_{d1})\varepsilon_1(k-1) - (T_s - 2T_{b1})u_1(k-1)}{2T_{b1} + T_s} + \frac{(2k_{d2} + k_{p2}(2T_{b2} + T_s))\varepsilon_2(k) + (k_{p2}(T_s - 2T_{b2}) - 2k_{d2})\varepsilon_2(k-1) - (T_s - 2T_{b2})u_2(k-1)}{2T_{b2} + T_s}, \quad (4.52)$$

Nastawy dla algorytmu sterowania (4.52) zaczerpnięto z (4.43).

#### 4.4.5. Testy symulacyjne

Po dobraniu nastaw oraz dyskretyzacji prawa sterowania, przeprowadzono testy symulacyjne na modelu (2.65). Miało to na celu sprawdzenie jakości działania systemu sterowania. Testy obejmowały dwa możliwe scenariusze działania. W pierwszym założono to, że zakłócenia zewnętrzne  $z(t)$  nie będą wpływać na system sterowania, a w drugim uwzględniono ich wpływ.

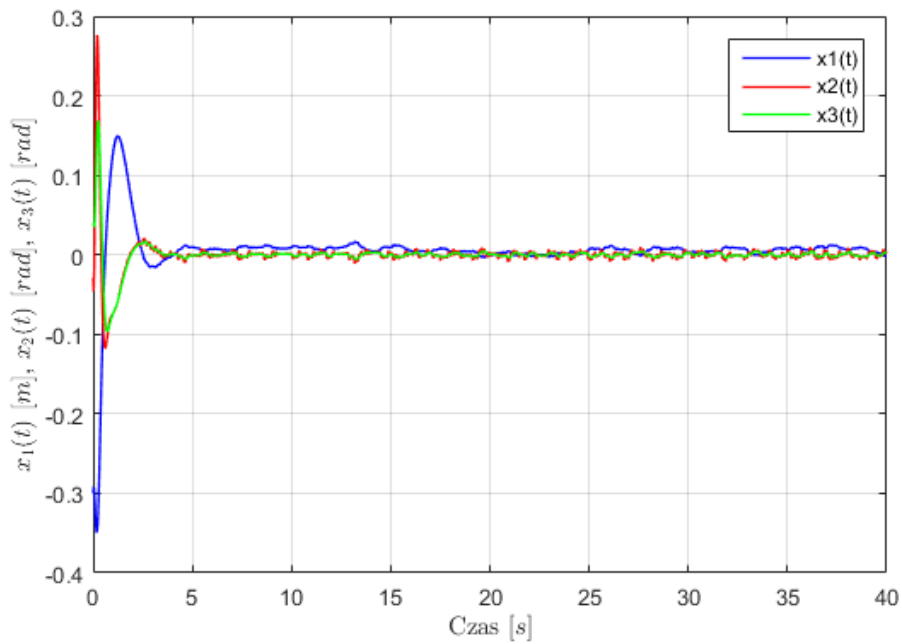
Dla dwóch zestawów stanów początkowych badano zachowanie się układu poprzez obserwację przebiegów czasowych dla wektora wyjść sterowanych  $c(t)$  oraz zmiany zachodzące w wartościach kryteriów całkowych zdefiniowanych w rozdziale (4.2). na potrzeby testów, okres próbkowania  $T_s$  został założony jako  $T_s = 0,0001$  s. Dla obu typów badań warunki początkowe przyjęto jako:

- $x(0) = \begin{bmatrix} -0,3 & -0,04 & 0,03 & 0,1 & 0,2 & -0,2 \end{bmatrix}^T$ ,
- $x(0) = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,02 & -0,02 & -0,1 & -0,2 & 0,2 \end{bmatrix}^T$ ,

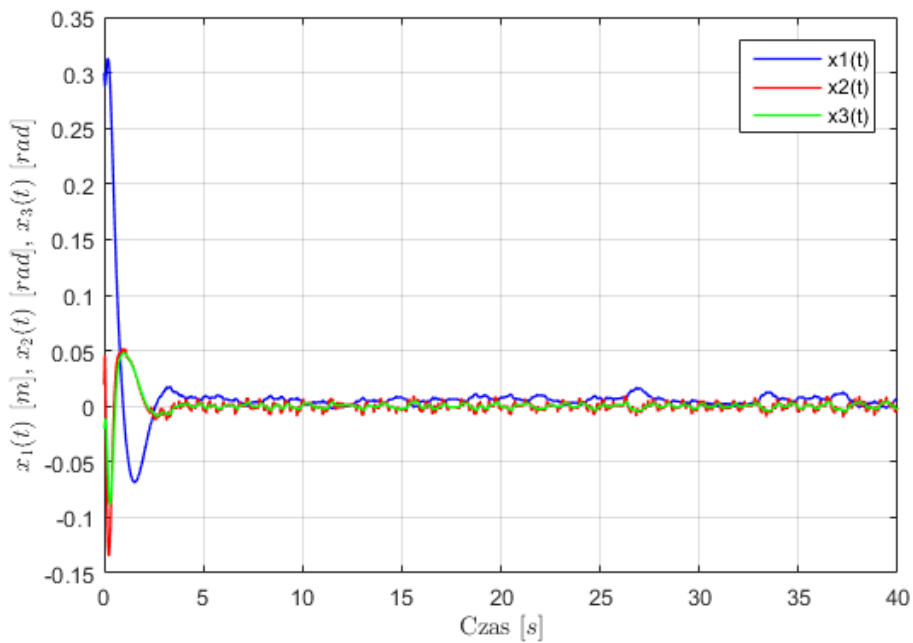
Badania symulacyjne wykonano przy pomocy odpowiedniego skryptu napisanego stworzonego w programie Matlab Simulink. Znajduje się on na płycie CD w Dodatku I pod tytułem *DIP\_STEROWANIE\_PID.slx*. Aby zainicjalizować parametry symulacji, w pierwszej kolejności należało uruchomić plik *dip\_sterowanie.m*.

W pierwszej kolejności zweryfikowano działanie systemu z pominięciem zakłóceń zewnętrznych. Czas symulacji trwał 40 jednostek czasu. Na poniżej zamieszczonych rysunkach 4.17 oraz 4.18 zamieszczono przebiegi czasowe wektora  $c(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}^T$ .



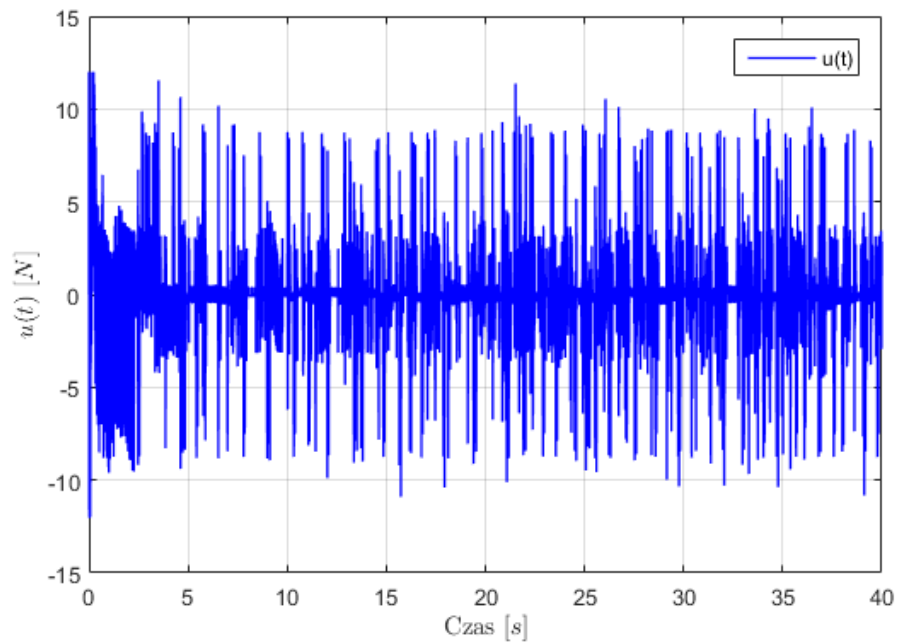


Rys. 4.17. Symulacja 1 - trajektorie składowych wektora  $c(t)$  dla pierwszego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń  $z(t)$

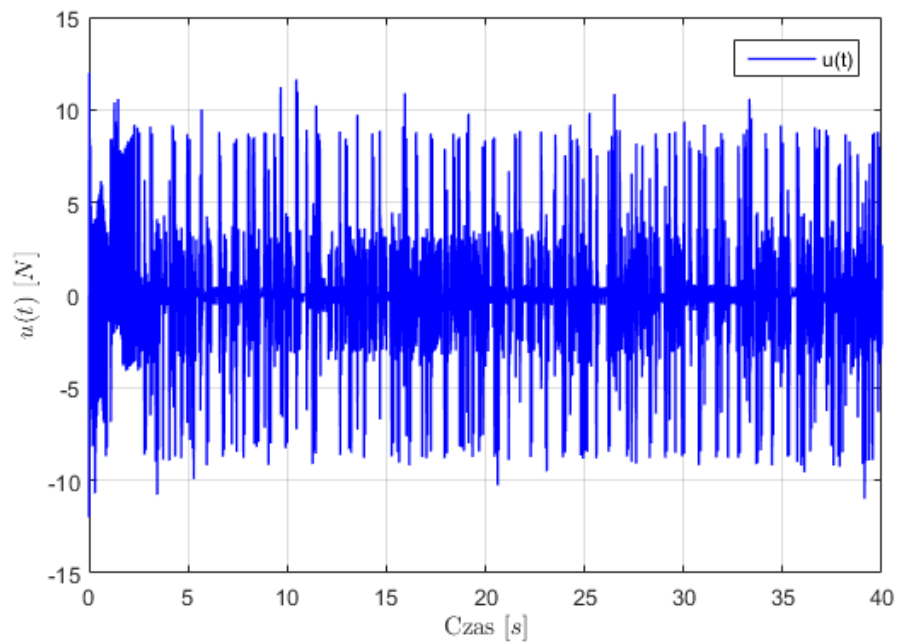


Rys. 4.18. Symulacja 2 - trajektorie składowych wektora  $c(t)$  dla drugiego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń  $z(t)$

Na rysunkach 4.19 oraz 4.20 zamieszczono przebiegi czasowe sygnału sterującego  $u(t)$  dla obu symulacji bez zakłóceń.

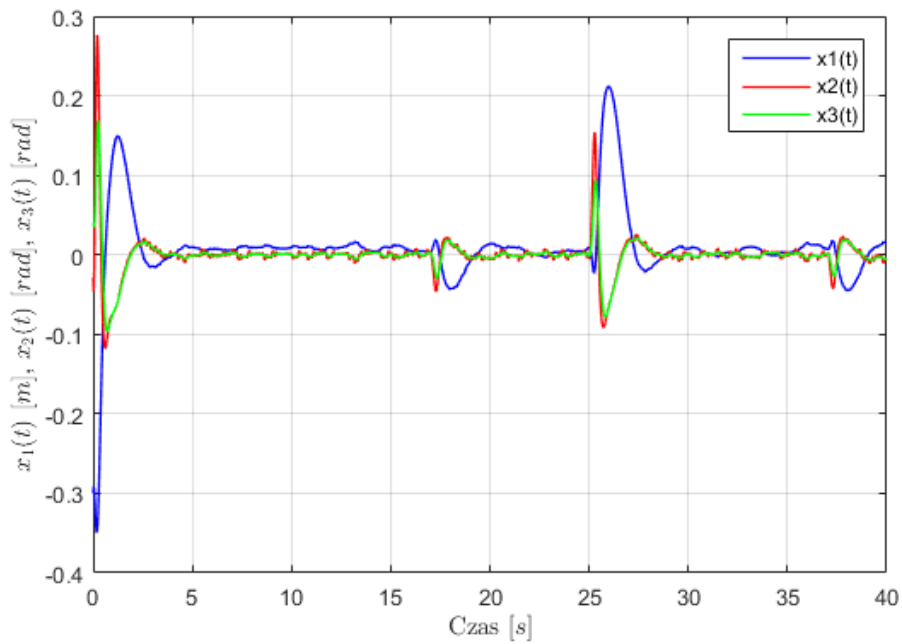


Rys. 4.19. Symulacja 1 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  dla pierwszego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń  $z(t)$

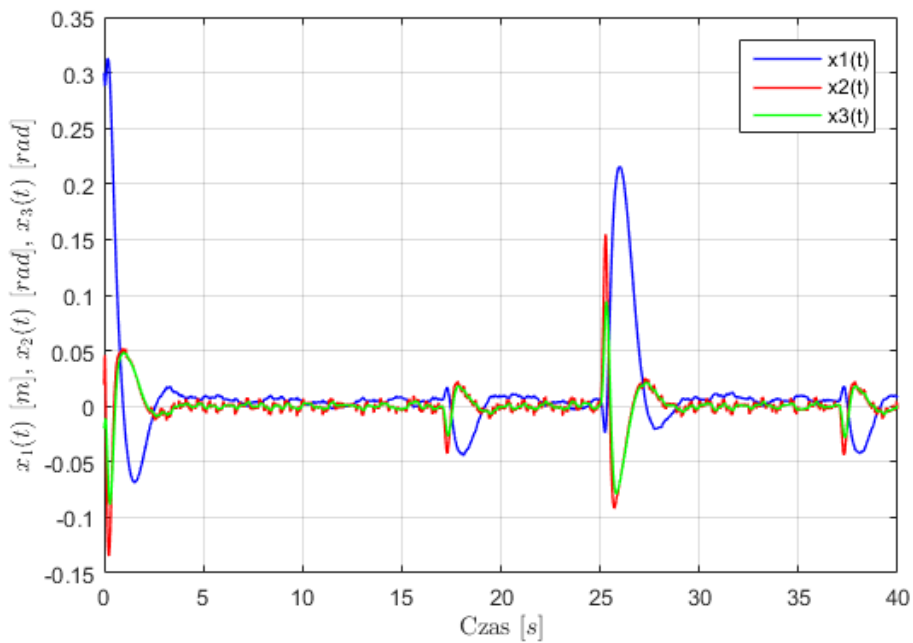


Rys. 4.20. Symulacja 2 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  dla drugiego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń  $z(t)$

Następnie zweryfikowano działanie systemu z uwzględnieniem zakłóceń zewnętrznych. Czas symulacji trwał 40 jednostek czasu. Na poniżej zamieszczonych rysunkach 4.21 oraz 4.22 zamieszczono przebiegi czasowe wektora  $c(t)$ .

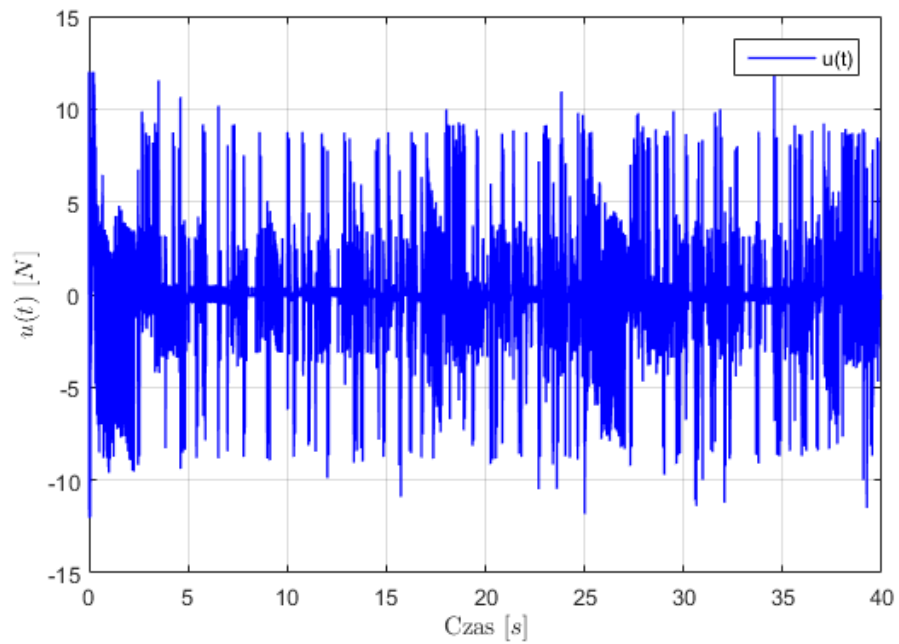


Rys. 4.21. Symulacja 3 - trajektorie składowych wektora  $c(t)$  dla pierwszego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$

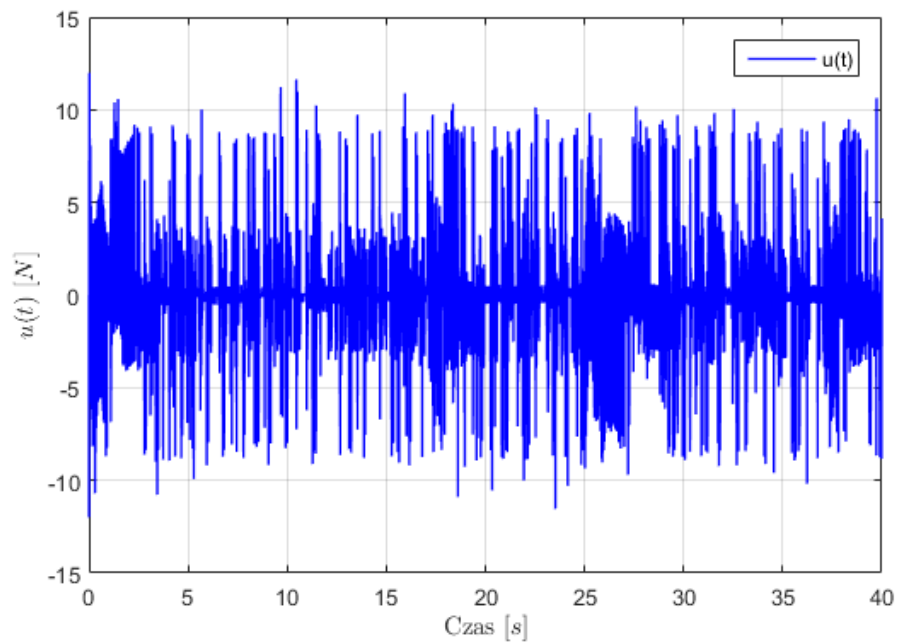


Rys. 4.22. Symulacja 4 - trajektorie składowych wektora  $c(t)$  dla drugiego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$

Na rysunkach 4.23 oraz 4.24 zamieszczono przebiegi czasowe sygnału sterującego  $u(t)$  dla obu symulacji z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$ :



Rys. 4.23. Symulacja 3 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  dla pierwszego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$



Rys. 4.24. Symulacja 4 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  dla drugiego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$

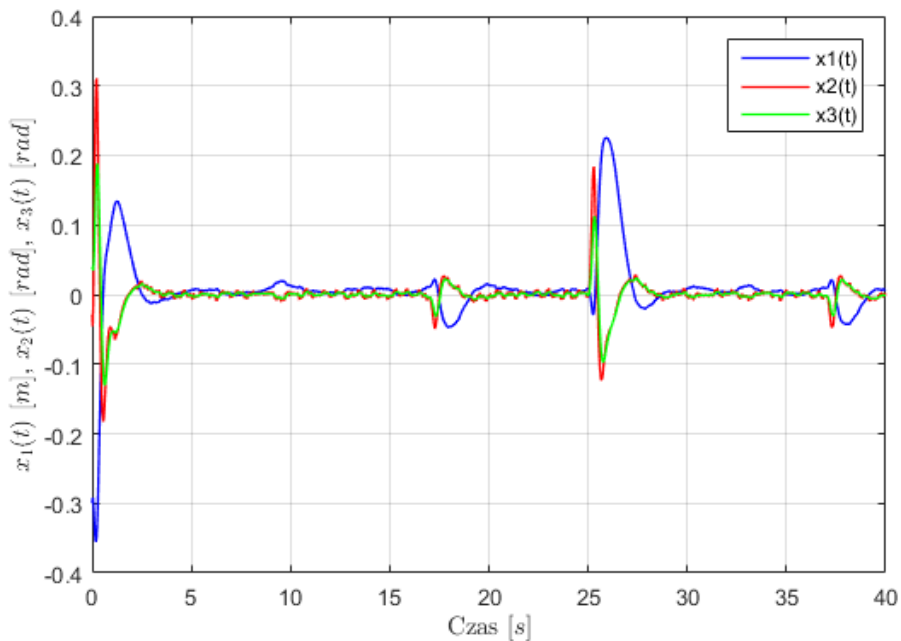
Analiza rysunków 4.17, 4.18, 4.21 oraz 4.22 nasuwa kilka wniosków. Algorytm sterowania PD gwarantuje stabilność systemu dla różnych warunków początkowych. ze względu na silną nieliniowość rzeczywistego obiektu, zastosowanie modeli urządzeń pomiarowych oraz wykonawczych, zauważalne są niewielkie oscylacje w przebiegu zmiennych wyjściowych. Ponadto, wi-

doczny jest wpływ zakłóceń zewnętrznych  $z(t)$  pojawiających się w różnych momentach czasu, jednakże są one odrzucane i system powraca do punktu pracy.

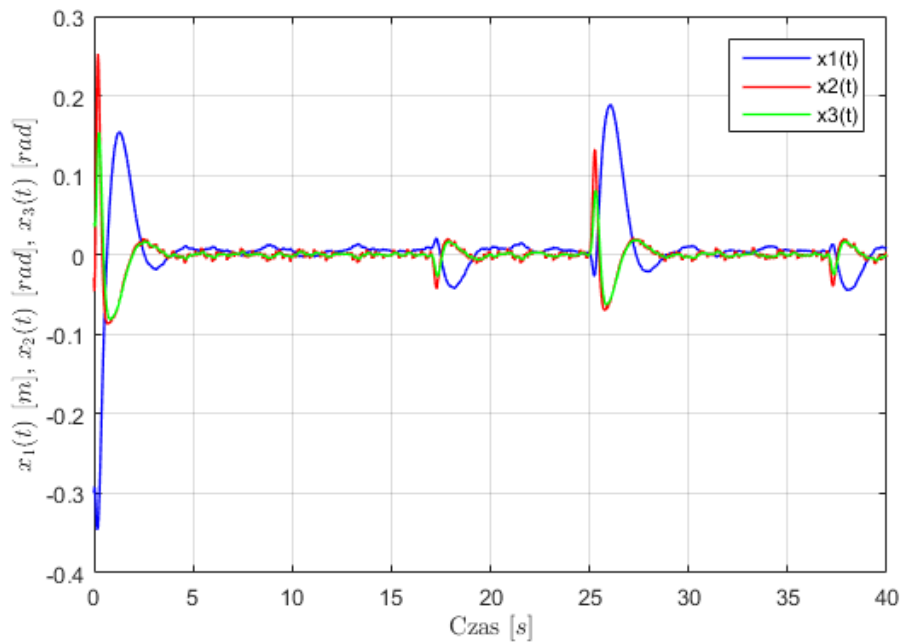
Dotychczasowe badania odbywały się przy wykorzystaniu nominalnych wartości parametrów  $I_2$ ,  $l_2$  i  $m_2$ . Aby zweryfikować krzepkość działania systemu zdecydowano się na pozostawienie nastaw algorytmu z (4.43) oraz zmiany wartości parametrów  $I_k$  oraz  $m_k$  między ich minimalnymi i maksymalnymi wartościami. Warunki początkowe dla symulacji przyjęto jako:

$$\mathbf{x}(0) = [-0,3 \quad -0,04 \quad 0,03 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad -0,2]^T. \quad (4.53)$$

Dla przykładowych, dwóch przeprowadzonych symulacji trwających 40 jednostek czasu, uwzględniono wpływ zakłóceń zewnętrznych. Na rysunkach 4.25 oraz 4.26 przedstawiono przebiegi czasowe wektora  $\mathbf{c}(t)$ .

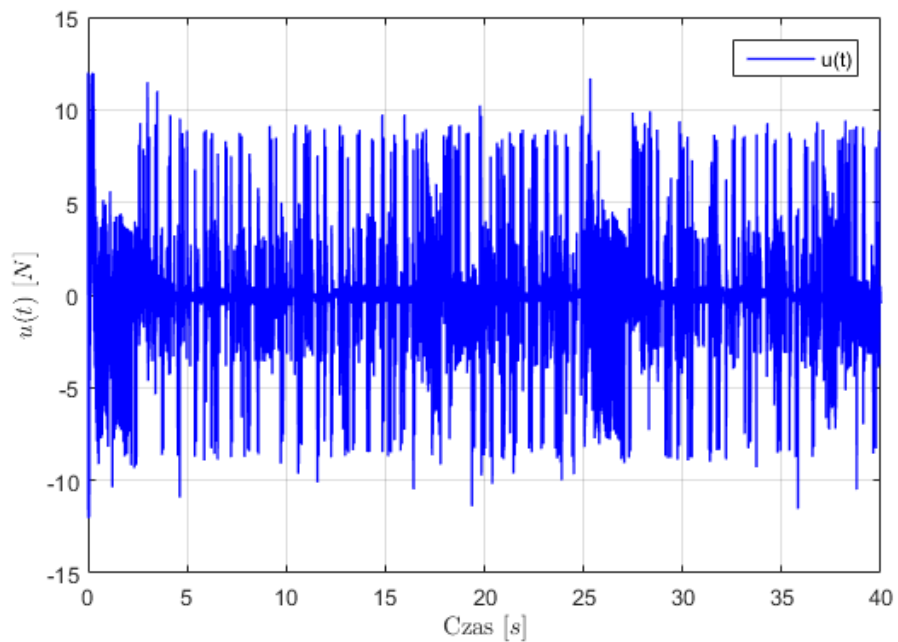


Rys. 4.25. Symulacja 5 - trajektorie składowych wektora  $\mathbf{c}(t)$  dla parametrów  $I_{k_{min}}$  i  $m_{k_{min}}$  z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$

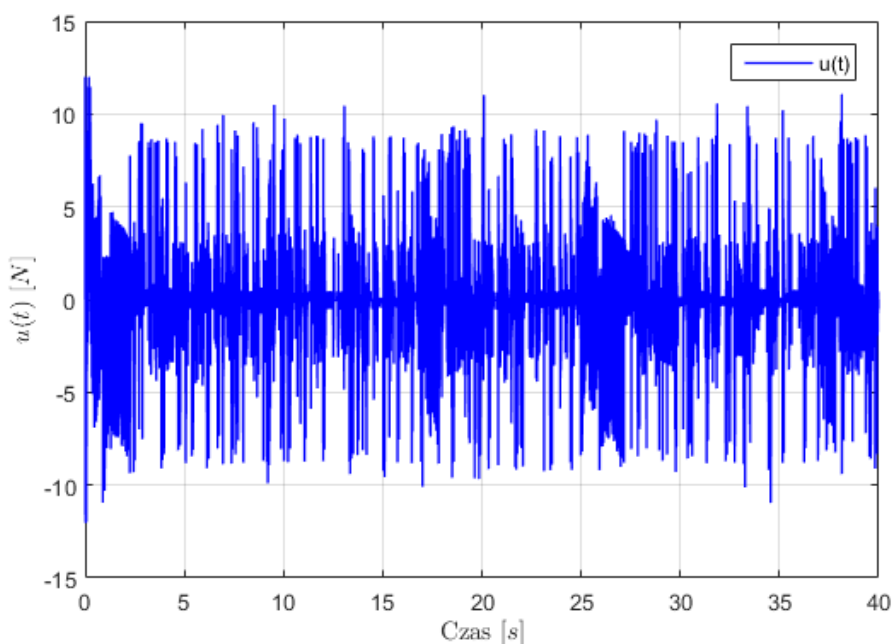


Rys. 4.26. Symulacja 6 - trajektorie składowych wektora  $c(t)$  dla parametrów  $I_{k_{max}}$  i  $m_{k_{max}}$  z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$

Na rysunkach (4.27) oraz (4.28) zamieszczono przebiegi czasowe sygnału sterującego  $u(t)$  dla obu symulacji z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$ :



Rys. 4.27. Symulacja 5 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$



Rys. 4.28. Symulacja 6 - przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$  z uwzględnieniem zakłóceń  $z(t)$

Analizując powyżej zamieszczone rysunki 4.25 oraz 4.26 można dojść do wniosku, iż system sterowania dla nastaw dobranych przy nominalnych parametrach zachowuje stabilność przy nieznanymi zmianach wartości parametrów.

Sygnały sterujące zamieszczone na rysunkach 4.19, 4.20, 4.23, 4.24, 4.27 oraz 4.28 mają charakter szybko zmienny. Realizacja zadania utrzymania wahadła w górnym punkcie równowagi powoduje, że sygnał  $u(t)$  przełącza się z dużą częstotliwością.

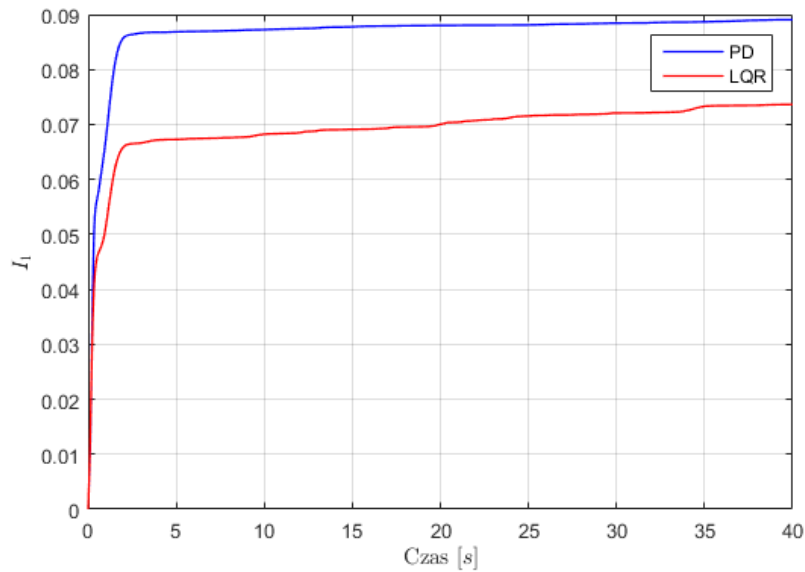
#### 4.5. Porównanie wyników symulacyjnych regulatorów LQR oraz typu PID

Mając na uwadze fakt, iż do syntezy sterowania LQR oraz PD zastosowano te same nastawy, należało określić, jak istota działania tych regulatorów wpływa na działanie systemu regulacji. W przypadku sterowania od stanu, wykorzystywano pełny stan obiektu, na podstawie którego wyliczano sygnał sterujący, natomiast w przypadku sterowania równoległą strukturą regulatorów PD, zmienne stanu  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  oraz  $x_3(t)$  były różniczkowane w przez człon D regulatora. Dyskretna implementacja mechanizmu różniczkowania charakteryzuje się działaniem na próbkach sygnału, które są pobierane co okres  $T_s$ . Zbyt duży czas próbkowania może skutkować uzyskiwaniem mało dokładnych wyników, które są efektem nadmiernych przeskoków między zbieranymi danymi [11, 40]. Jest to zasadnicza różnica w porównaniu ze sterowaniem od stanu, gdzie różniczkowanie pewnych zmiennych wynika wprost z dynamiki obiektu.

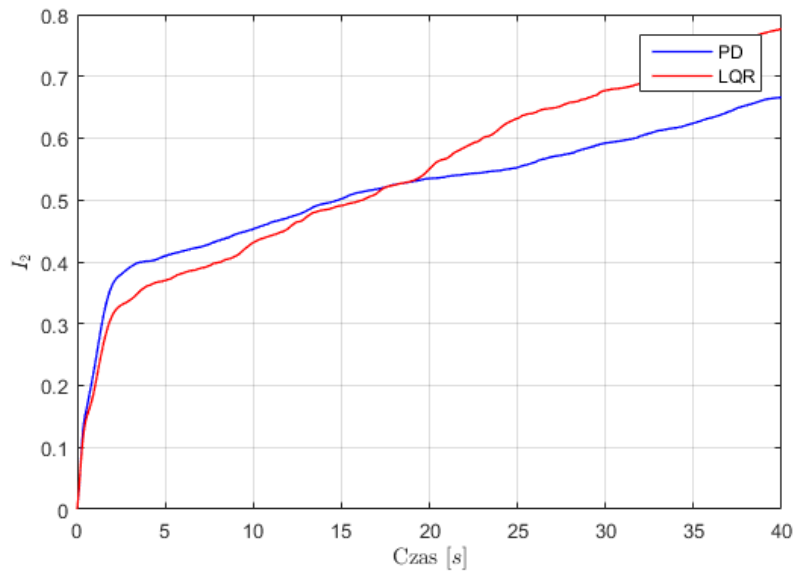
Dokonując zestawienia przebiegów wyjść  $c(t)$  uzyskanych dla algorytmu liniowo - kwadratowego (rysunki od 4.4 do 4.13) z przebiegami uzyskanymi przy wykorzystaniu regulatorów typu PID (rysunki od 4.17 do 4.26) można zauważyć, że zachowanie obiektu wykazuje niewielkie różnice. W przypadku struktury regulatorów PD trendy stanów  $x_2$  i  $x_3$  reprezentujących przemiesz-

czenia kątowne wahadła wykazują niewielkie oscylacje w bardzo bliskim otoczeniu punktu pracy. Przebiegi uzyskane dla algorytmu LQR wykazują oscylacje ze względu na, fakt iż sensory mierzące stany  $x_5$  oraz  $x_6$  generują szum biały, który musiał zostać skompensowany.

Do porównania jakości działania obu algorytmów regulacji posłużono się kryteriami całkowymi zdefiniowanymi w (4.21), (4.22) oraz (4.23). Na rysunkach 4.29, 4.30, 4.31 zamieszczono przebiegi czasowe wskaźników jakościowych przyjętych na potrzeby analiz. do potrzeb symulacji wykluczono wpływ zakłóceń zewnętrznych oraz zastosowano warunki początkowe z (4.53). Czas symulacji trwał 40 jednostek czasu.

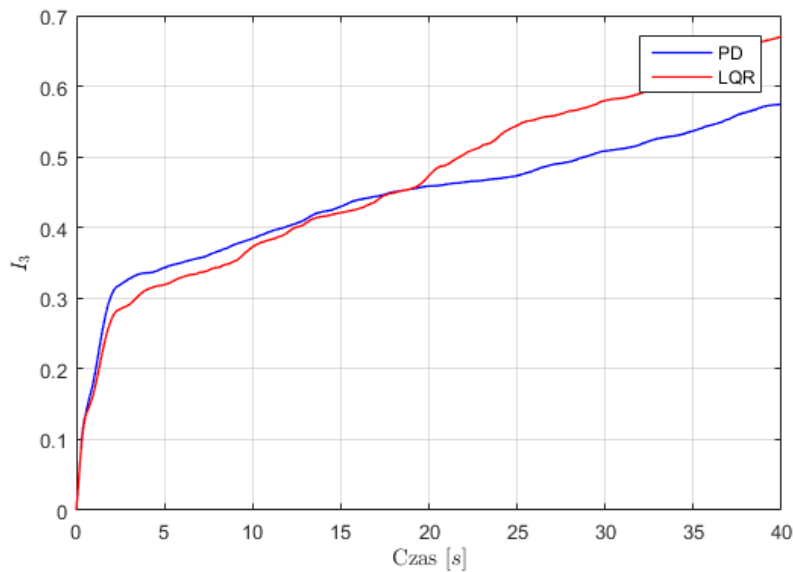


Rys. 4.29. Trajektorie dla wskaźnika jakościowego  $J_{c1}$



Rys. 4.30. Trajektorie dla wskaźnika jakościowego  $J_{c2}$





Rys. 4.31. Trajektorie dla wskaźnika jakościowego  $J_{c3}$

Analizując przebiegi czasowe wskaźników całkowitych można dojść do wniosku, że uchyb przejściowy obiektu sterowanego algorytmem PD jest mniejszy od uchybu przejściowego dla sterowania liniowo - kwadratowego. Jest to zgodne z wcześniejszymi spostrzeżeniami związanymi z badaniami przebiegów czasowych, analizą działania systemu estymacji opartym o FK oraz dyskusją dotyczącą sposobu działania mechanizmu różniczkowania w regulatorach PD.

## 4.6. Mechanizm rozhuśtania wahadła

Mając do dyspozycji algorytmy sterowania pozwalające na utrzymywanie stabilnego położenia wahadła w górnym punkcie pracy, nmożna przejść do rozważenia mechanizmu, który pozwoli na przejście z dolnego punktu równowagi  $P_2$  do punktu pracy  $P_1$ . W literaturze, algorytm regulacji pozwalający na tego typu działanie często określa się mianem *Swing up* [31].

### 4.6.1. Prawo sterowania

Literatura naukowa nasuwa wiele rozwiązań, które pozwalają na zrealizowanie postulatu rozhuśtania wahadła. Najczęściej opierają się one o nieliniowe algorytmy sterowania, których zastosowanie wymaga wykonanie takich zabiegów jak linearyzacja przez sprzężenie zwrotne czy definiowanie funkcji Lapunov'a [5, 31]. Autorzy pracy zdecydowali się na skorzystanie z finalnych dokonań teoretycznych zamieszczonych w pracy [31]. Zastosowany algorytm miał charakter proporcjonalnego regulatora energii potencjalnej układu  $E_p$ . W celu osiągnięcia górnego położenia wahadła, należało zadać energię potencjalną równoważną dla tego punktu równowagi. Wówczas uchyb energii potencjalnych można było zdefiniować jako [31]:

$$\Delta E_p = E_{p_{ref}} - E_p, \quad (4.54)$$

gdzie  $E_{pref}$  jest wartością referencyjną energii potencjalnej.

Zatem, prawo sterowania dla algorytmu Swing - up jest w postaci:

$$u(t) = -k_{1sw}x_1(t) - k_{2sw}x_4(t) + k_{3sw}\Delta E_p[h_{2sw}x_5(t) \cos x_2(t) + h_{3sw}x_6(t) \cos x_3(t)], \quad (4.55)$$

gdzie  $k_{1sw}$ ,  $k_{2sw}$ , oraz  $k_{3sw}$  to arbitralnie dobrane stałe które pozwoliły na poprawne działanie algorytmu, a  $h_{2sw}$ , oraz  $h_{3sw}$  to pewne współczynniki które są określone przez fizyczne wartości parametrów wahadła.

#### 4.6.2. Dobór nastaw regulatora

Nastawy algorytmu Swing - up, którego prawo sterowania zdefiniowano w (4.55) dobrano eksperymentalnie, dla pewnego testowego zestawu parametrów wahadła, poprzez przeprowadzenie szeregu symulacji w specjalnie przygotowanym skrypcie napisanym przy pomocy programu Matlab Simulink. Program ten można znaleźć na płycie CD w Dodatku I pod tytułem *przeszukanie\_swing\_up.m* Istotą jego działania było przeszukiwanie trójwymiarowej przestrzeni parametrów  $k_{1sw}$ ,  $k_{2sw}$  i  $k_{3sw}$  w celu znalezienia nastaw gwarantujących osiągnięcie górnego punktu równowagi dla ograniczonego, z góry założonego czasu. Zmiany wartości parametrów odbywały się ze stałym, ustalonym krokiem. Program przeszukujący na podstawie przebiegu symulacji określał ilość czasu przebywania w górnym punkcie pracy. Przy pomocy tego czasu określał czy wahadło zostało w górnym punkcie i przez długi czas się w nim utrzymywało.

Dla przeprowadzonych testów, wartości nastaw były dane jako:

$$\begin{cases} k_{1sw} & = 1, 4, \\ k_{2sw} & = 2, 1, \\ k_{3sw} & = 2, 7. \end{cases} \quad (4.56)$$

#### 4.6.3. Testy symulacyjne

Zakończenie procesu doboru nastaw prawa sterowania algorytmu pozwoliło na przeprowadzenie testów symulacyjnych na modelu poznawczym (2.65) w celu sprawdzenia jakości działania systemu sterowania. Warunki początkowe systemu przyjęto w postaci:

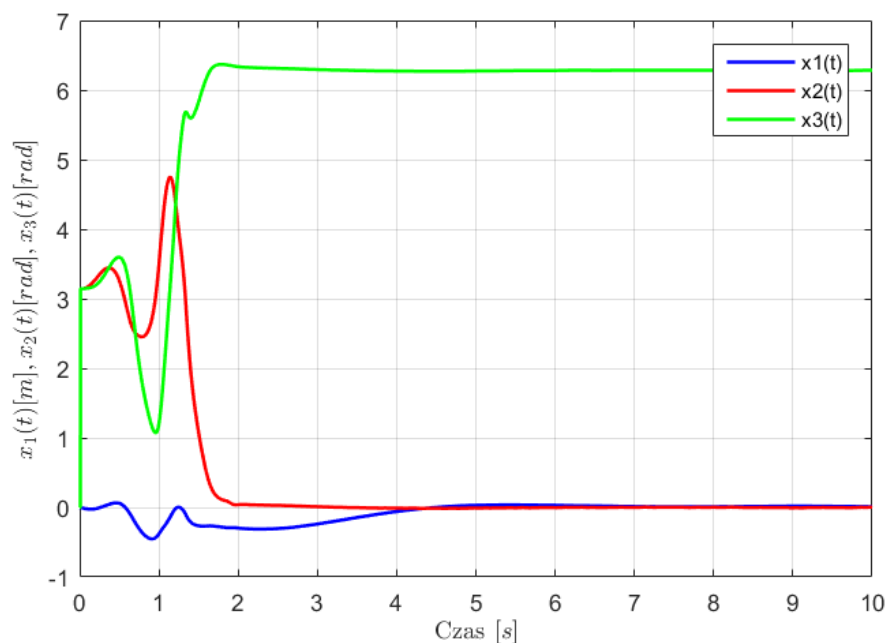
$$\mathbf{x}(0) = [0 \quad \pi \quad \pi \quad -0.3 \quad 0.1 \quad 0.1]^T, \quad (4.57)$$

co pokrywa się z dolnym punktem równowagi  $P_2$ , którego wartość określono w (3.22). W tabeli 4.1 zamieszczono wartości parametrów, dla jakich przeprowadzono symulacje.

**Tabela 4.1.** Parametry wahadła dla celów badania swing - up

Lp.	Parametr	Wartość parametru	Jednostka
1.	$I_1$	0,000443	$kg\ m^2$
2.	$I_2$	0,000443	$kg\ m^2$
3.	$I_b$	0,000443	$kg\ m^2$
4.	$I_k$	0	$kg\ m^2$
5.	$l_1$	0,12	$m$
6.	$l_2$	0,12	$m$
7.	$L_1$	0,12	$m$
8.	$L_2$	0,12	$m$
9.	$m_0$	0,4	$kg$
10.	$m_2$	0,288	$kg$
11.	$m_b$	0,288	$kg$
12.	$m_k$	0	$kg$
13.	$\eta_0$	0,1	$kg\ m/s$
14.	$\eta_1$	0,01	$kg\ m^2/s$
15.	$\eta_2$	0,01	$kg\ m^2/s$

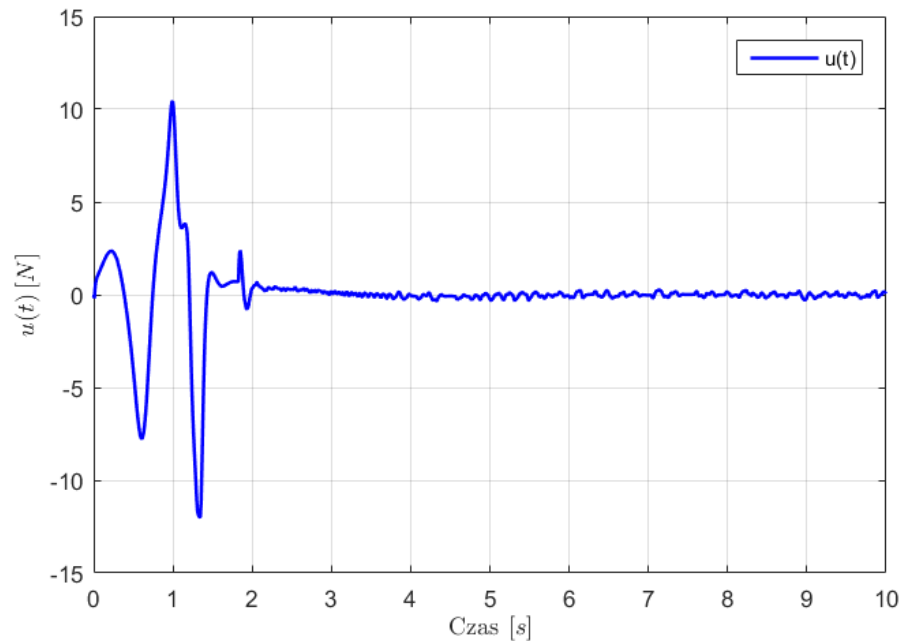
Badania wykonano przy pomocy odpowiedniego skryptu napisanego stworzonego w programie Matlab Simulink. Znajduje się on na płycie CD w Dodatku I pod tytułem *DIP\_SWINGUP.slx*. Aby zainicjalizować parametry symulacji, w pierwszej kolejności należało uruchomić plik *dip\_sterowanie.m*. Na rysunku 4.32 zaprezentowano przebieg czasowy wyjść systemu  $c(t)$ . Na potrzeby testów, okres próbkowania  $T_s$  został założony jako  $T_s = 0,0001\ s$ . Czas symulacji trwał 10 jednostek czasu.



Rys. 4.32. Przebiegi czasowe wektora  $c(t)$  dla mechanizmu Swing - up

Analizując powyższy rysunek 4.32 można zauważyć, iż po bardzo krótkim czasie wahadło startujące z warunków początkowych (4.57) osiąga górne położenie równowagi. Spełnienie warunków (4.58) powoduje przełączenie na algorytm sterowania, który gwarantuje utrzymanie stabil-

ności systemu w punkcie pracy  $P_1$ . Na rysunku 4.33 zaprezentowano przebieg czasowy sygnału sterującego  $u(t)$ .



Rys. 4.33. Przebiegi czasowe sygnału sterującego  $u(t)$  dla mechanizmu Swing - up

#### 4.6.4. Mechanizm przełączania algorytmów regulacji

Warunkiem, który musi być spełniony przy przełączeniu się z mechanizmu Swing - up na jeden z algorytmów regulacji utrzymujących układ w górnym punkcie równowagi jest znalezienie się składowych wektora zmiennych stanu układu w pewnym przedziale wartości. Dzięki temu, regulatory będą w stanie zagwarantować osiągnięcie i utrzymanie stabilności w górnym punkcie równowagi  $P_1$ . Bazując na osiągnięciach z pracy [31], warunki przełączenia algorytmów dane są jako:

$$\begin{cases} 0 \leq |x_2(t)| \leq 0,2, \\ 0 \leq |x_3(t)| \leq 0,2, \end{cases} \quad (4.58)$$

Wartości te były dobrane eksperymentalnie i skuteczność ich działania dla innych konfiguracji parametrów wahadła może być odmienna.

## 5. Budowa stanowiska

Głównym celem podjętej przez autorów pracy, było zbudowanie rzeczywistego stanowiska z obiektem wahadła oraz dołączenie odpowiednich urządzeń automatyki, których celem było realizowanie algorytmów sterowania oraz estymacji stanu. Począwszy od odpowiednich założeń poprzez przedstawienie koncepcji realizacji sprzętowej systemu sterowania, autorzy nakreślają najważniejsze cechy zrealizowanego projektu. Następnie opisany został proces doboru urządzeń oraz elementów, na których oparto rzeczywiste stanowisko. Na koniec rozdziału zaprezentowano aspekty związane z łączeniem oraz montażem poszczególnych elementów wahadła.

### 5.1. Realizacja sprzętowa systemu sterowania wahadłem

W pierwszej kolejności koniecznym było zaprojektowanie struktury sprzętowej dla systemu sterowania wahadłem. Dokładne określenie architektury urządzeń oraz topologii połączeń miało na celu sprecyzowanie wymagań, które musiały spełnić urządzenia, aby z powodzeniem realizować zadania w ramach systemu sterowania.

#### 5.1.1. Koncepcja systemu sterowania

Każdy cyfrowy system sterowania musi spełniać pewien zbiór wymagań. Zasadniczo, można je opisać jako [33]:

- realizacja przesyłu danych oraz ich przetwarzania z określonym, nieprzekraczalnym reżimem czasowym (system czasu rzeczywistego),
- sprawna i niezawodna komunikacja między wszystkimi modułami,
- reagowanie w sposób przewidywalny, zamierzony na sygnały zewnętrzne,
- odporność na zakłócenia zewnętrzne,

Platforma mikroprocesorowa musi nie tylko wykonywać założone algorytmy ale również interpretować informacje z innych urządzeń tak, aby były one ze sobą kompatybilne w celu przetwarzania ich jako pewnych danych. Kluczowym było odpowiednie dostosowanie danych pomiarowych pochodzących z różnych urządzeń sensorycznych, które następnie miały zostać użyte w celu estymacji zmiennych stanu [33].

Ze względu na fakt, iż w układzie pomiarowym systemu występowały dwa rodzaje sensorów, których obsługa wymagała wysokiej częstotliwości taktowania procesora, w szczególności w przypadku inkrementalnych enkoderów optycznych, a także z uwagi na konieczność wykorzystania dodatkowego modułu sterowania silnikiem DC, zdecydowano się na przydzielenie poszczególnych zadań osobnym układom mikroprocesorowym połączonych ze sobą w jedną strukturę sterowania. Miało to na celu spełnienie wymagań założonych w (5.1.1). Rozproszenie obliczeń na odrębne urządzenia mikroprocesorowe, pozwoliło na dekompozycję funkcjonalną oraz strukturalną systemu, która umożliwiła bardziej precyzyjne wydzielenie zadań związanych z realizacją sterowania [33, 41].

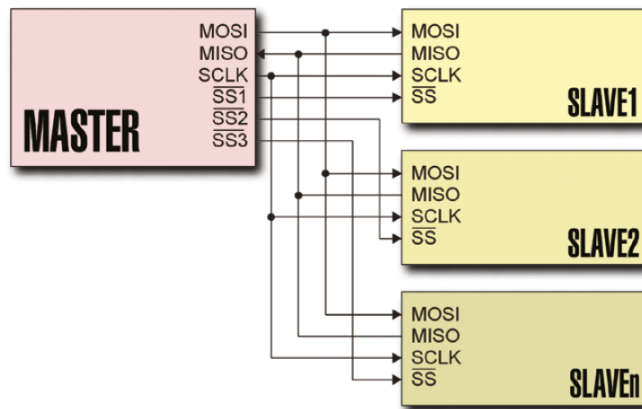
Sposób działania zastosowanych urządzeń pomiarowych wymuszał na projektantach wykorzystanie wstępnych metod obróbki informacji sensorycznych. Rozwiązaniem natury sprzętowo programowej, mającymi na celu przetwarzanie danych pomiarowych do użytecznej z perspektywy systemu sterowania postaci, których forma uniemożliwia ich bezpośrednie pozyskanie, nazywa się soft sensorami [45].

Dane z czterech soft sensorów trafiają do głównej jednostki obliczeniowej, której celem jest ostateczna obróbka sygnałów pomiarowych oraz realizowanie algorytmów estymacji i sterowania, a następnie wysłanie odpowiedniego sygnału do modułu urządzeń wykonawczych. Sterownik silnika DC, odbiera wygenerowany przez jednostkę główną sygnał PWM a następnie przetwarza go na odpowiednie napięcie zasilające silnik.

### 5.1.2. Dobór metod komunikacji między modułami systemu sterowania

Ze względu na rozproszenie obliczeń pomiędzy różnymi platformami mikroprocesorowymi konieczne było zapewnienie odpowiedniej metody przesyłu danych między nimi tak, aby spełnić założenia postawione w (5.1.1).

Autorzy zdecydowali się na zastosowanie interfejsu SPI (*ang.: Serial Peripheral Interface*). Charakteryzuje się on szeregową transmisją danych między urządzeniami w technologii master slave, gdzie informacje przesyłane są w trybie full duplex, co oznacza, że możliwe jest jednoczesne nadawanie i odbieranie sygnałów za pomocą osobnych kanałów komunikacyjnych [9]. Na rysunku 5.1 zaprezentowano przykładową konfigurację urządzeń komunikujących się za pomocą SPI.



Rys. 5.1. Przykładowy schemat połączeń w interfejsie SPI [9]

W komunikacji za pomocą interfejsu SPI urządzenia połączone są za pomocą następujących linii [9]:

- SCLK (*ang.: Signal Clock*) - linia sygnału taktującego pracę urządzeń slave,
- MOSI (*ang.: Master Output Slave Input*) - linia przesyłania danych z jednostki master do slave,
- MISO (*ang.: Master Input Slave Output*) - linia przesyłania danych z jednostki slave do master,

- SS (*ang.: Slave Select*) - linia wyboru jednostki slave przez master'a.

Ważnym w komunikacji protokołem SPI jest fakt, iż linii SS musi być tyle, ile jednostek podrzędnych slave, po jednym osobnym kanale komunikacyjnym dla danego slave'a [9]. W przypadku rozpatrywanego systemu sterowania wahadłem zastosowano cztery linie SS.

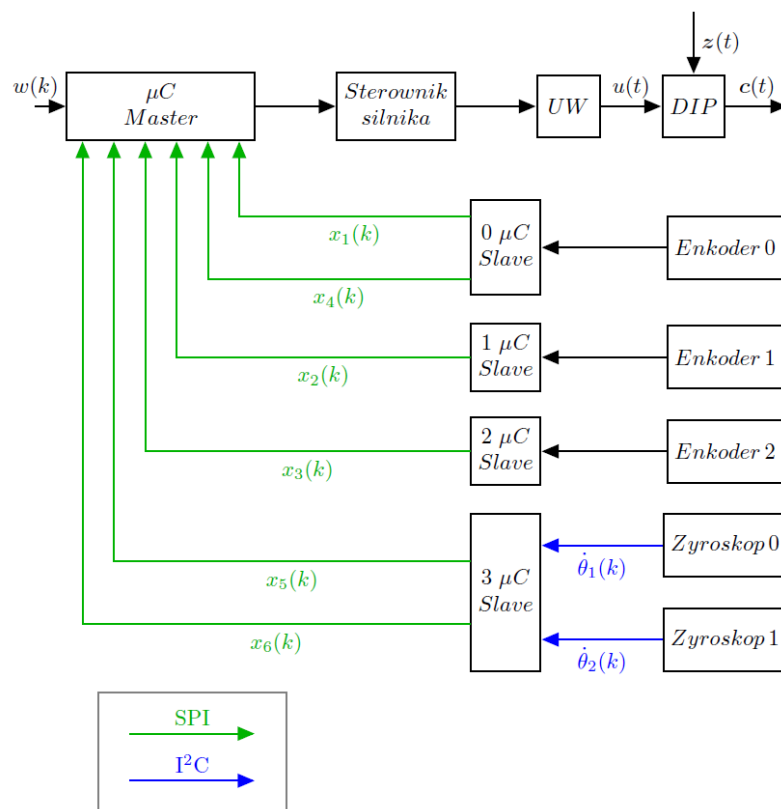
Do komunikacji z jednym z soft sensorów a żyroskopami zastosowano interfejs I2C, który podobnie jak interfejs SPI, działa w systemie master - slave, a dane przesyłane są za pomocą dwóch kanałów komunikacyjnych [9]:

- SCL (*ang.: Serial Clock*) - zegar taktujący transmisję danych,
- SDA (*ang.: Serial Data*) - linia transmisji danych.

Linia SDA działa dwukierunkowo, co skutkuje tym, że transmisja ma charakter half duplex. Przesył i odbiór danych odbywa się na zmianę, co powoduje mniejszą prędkość transmisji w stosunku do protokołu SPI [9].

### 5.1.3. Schemat połączeń urządzeń oraz przepływu sygnałów w systemie sterowania

W celu zobrazowania struktury sprzętowej systemu sterowania konieczne było stworzenie odpowiedniego schematu ideowego, na którym zaznaczono, role jakie spełniają dane urządzenia, oraz przepływ sygnałów analogicznie do schematu z rysunku 4.1. Zamieszczony poniżej rysunek 5.2 prezentuje ogólną architekturę urządzeń oraz topologię połączeń między nimi:



Rys. 5.2. Schemat blokowy urządzeń systemu sterowania

Na rysunku 5.2 widoczny jest podział mikrokontrolerów oznaczonych jako  $\mu C$ , ze względu na rodzaj wykonywanych przez nie obliczeń oraz ze względu na pełnioną rolę: Master bądź Slave. Pokazano również, za pomocą jakich interfejsów komunikacyjnych odbywa się przesył danych między danymi urządzeniami a sensorami.

## 5.2. Dobór elementów oraz urządzeń

Celem obranym przy projektowaniu konstrukcji mechanicznej wahadła było wykonanie oraz dopasowanie elementów w taki sposób, aby spełnione zostały założenia dotyczące budowy stanowiska.

W pierwszej kolejności należało zaprojektować mechaniczną część wahadła oraz oszacować wartości jej parametrów fizycznych tak, aby połączone ze sobą elementy stanowiły jedną całość. Następnie koniecznym było dobranie odpowiedniego zestawu urządzeń wykonawczych oraz pomiarowych tak, aby ich parametry nieznacznie wpłynęły na model obiektu sterowania. Na koniec należało zaimplementować algorytmy regulacji oraz estymacji na platformie mikroprocesorowej, która połączona z modułami wykonawczymi oraz sensorycznymi, pozwoliłaby na sprawną regulację obiektu.

### 5.2.1. Dobór elementów konstrukcyjnych

Zasadniczym problemem, który stanął przed autorami pracy było odpowiednie zaprojektowanie oraz wykonanie elementów konstrukcyjnych wahadła.

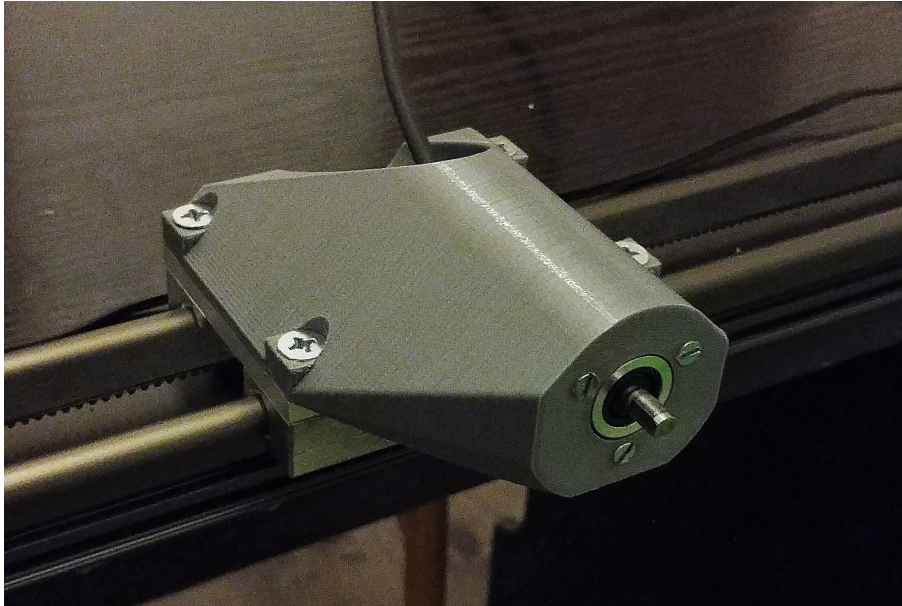
Ruch wózka oraz umieszczonych na nim ramion odbywał się po suwnicy liniowej ZLW-1040 firmy Igus. Posiada ona przekładnię mechaniczną, która poprzez wał przenosi moment napędowy z silnika na pas zębaty połączony z wózkiem [16]. Na rysunku 5.3 zaprezentowano zdjęcie poglądowe suwnicy liniowej ZLW-1040.



Rys. 5.3. Suwnica liniowa ZLW-1040 firmy Igus [16]

Autorzy zdecydowali się na suwnicę liniową firmy Igus ze względu na zadowalające parametry i wytrzymałość urządzenia [16]. W celu zespolenia ramion oraz wózka zastosowano odpowiednie mocowanie wykonane w technice druku 3D. Jego konstrukcja była tak zaprojektowana, aby w jego wnętrzu można było umieścić enkoder, którego wał stanowił bezpośrednie połączenie między pierwszym ramieniem wahadła a wózkiem. Na rysunku 5.4 zilustrowano zastosowane mocowanie.





Rys. 5.4. Mocowanie enkodera umieszczonego na wózku

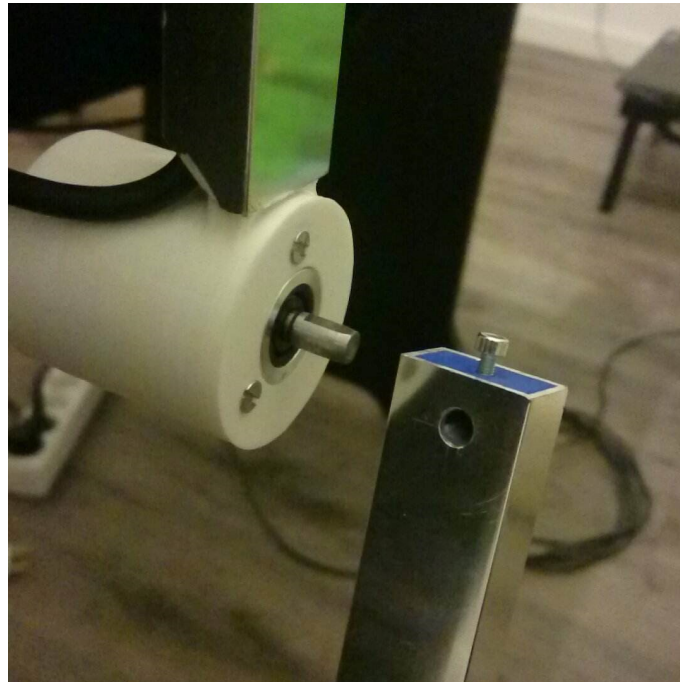
Ramiona wahadła zostały wykonane z aluminiowych rur czworokątnych o przekroju poprzecznym o wymiarach  $25 \times 15 \times 1,5 \text{ mm}$ . Ich konstrukcja pozwalała na mocowanie wciskowe innych elementów składowych wahadła. W pierwszym ramieniu umieszczono uchwyt na enkoder, który umożliwiał przewlekanie przewodów wewnątrz ramion. Element ten wykonano w technice druku 3D. Poniżej na rysunku 5.5 zamieszczono zdjęcie wspomnianego elementu.



Rys. 5.5. Mocowanie enkodera umieszczonego na ramieniu

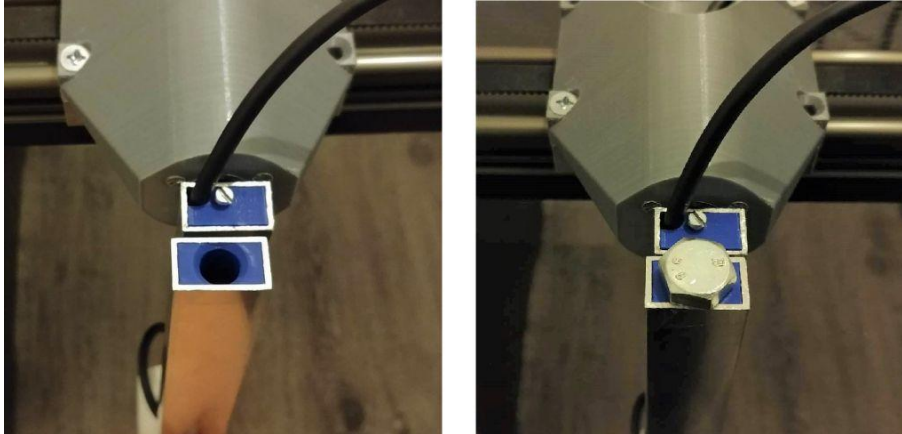
Obrotowe przeguby wahadła zarówno ramienia pierwszego jak i drugiego zostały zrealizowane poprzez połączenie ramion z wałkiem enkoderów. Wartość statycznego obciążenia pro-

mieniowego wynikającego z masy ramion i przyspieszenia ziemskiego nie przekracza  $5 N$ , co pozwala stosować opisywane rozwiązanie. Wałek enkodera został wsunięty poprzez wywiercony w osi ramienia otwór w uchwyt mocujący, wykonany za pomocą druku 3D. Konstrukcja uchwyty umożliwia zatwierdzenie wału w otworze poprzez śrubę dociskową wkręcaną prostopadle do osi wałka. Ze względu na to, że zastosowana technologia druku 3D nie pozwala na drukowanie tak dokładnych elementów konstrukcyjnych jak otwór gwintowany oraz wykorzystany materiał nie jest wystarczająco twardy, koniecznym było umieszczenie w druku 3D miejsca na nakrętkę, o którą mogła zaprzeć się śruba mocująca. Na rysunku 5.6 pokazano zdjęcie przedstawiające uchwyt.



Rys. 5.6. Uchwyt na końcu ramienia pierwszego

Umieszczane na szczycie drugiego ramienia ciężarki zrealizowano za pomocą śrub o różnych masach i długościach, które mogły być wymieniane podczas pracy urządzenia. Ich mocowanie do ramienia zrealizowano za pomocą zaprojektowanego w technice 3D uchwyty. Na poniższym rysunku 5.7 zaprezentowano wspomniany uchwyt.



Rys. 5.7. Uchwyt na końcu drugiego ramienia z możliwością umieszczania ciężarków

Projekty wykonano przy pomocy programu Autodesk Inventor. Modele wszystkich wymienionych w tym podrozdziale elementów zamieszczono na płycie CD w Dodatku I, a ich rysunki techniczne w Dodatku H. Na płycie zamieszczono także kompletny projekt wahadła o nazwie *DIP.iam*.

### 5.2.2. Dobór urządzeń wykonawczych oraz pomiarowych

Z badań symulacyjnych na wyprowadzonym modelu wahadła w programie Matlab/Simulink określono, że przy stabilizacji w górnym położeniu maksymalna chwilowa prędkość  $V_m$  wynosi nie więcej niż  $0,8 \text{ m/s}$ , a wymagana siła  $F_m$  nie więcej niż  $15 \text{ N}$ . Moc potrzebną do stabilizowania wahadła obliczono z (5.1) [28].

$$P_m = V_m F_m \quad (5.1)$$

Wynika z tego, że do stabilizacji wahadła potrzebne jest dostarczanie do układu mocy o wartości co najmniej  $12 \text{ W}$ . Po uwzględnieniu tych wartości oraz po przyjęciu odpowiedniego marginesu błędu jako urządzenie wykonawcze napędzające wózek znajdujący się na suwnicy wybrano silnik szczotkowy prądu stałego z przekładnią planetarną o momencie znamionowym wynoszącym  $M_n = 0,58 \text{ Nm}$  oraz znamionowej prędkości kątowej wynoszącej  $\omega_n = 49,22 \text{ rad/s}$ . Moc mechaniczna na wale silnika jest obliczana zgodnie z (5.2) [28].

$$P_n = M_n \omega_n \quad (5.2)$$

Po podstawieniu wartości do (5.2) obliczono, że dla omawianego przypadku moc mechaniczna na wale silnika wynosi  $28,55 \text{ W}$ , co spełnia postawione wymagania.

Na podstawie badań doświadczalnych przeprowadzonych w programie Matlab/Simulink z wykorzystaniem stworzonego modelu matematycznego enkoderów inkrementalnych stwierdzono, że wystarczającą na potrzeby sterowania rozdzielczością enkoderów jest  $1000 \text{ imp/obr}$ . Wykorzystując odpowiednią metodę pomiaru możliwe jest otrzymanie rozdzielczości położenia kąto-

wego równej  $0,09^\circ$ . Urządzenia pomiarowe wykorzystane przy budowie obiektu zostały przedstawione w tabeli 5.1

**Tabela 5.1.** Urządzenia pomiarowe

Urządzenie pomiarowe	Mierzone wielkości	Ilość W
Enkoder inkrementalny f. Sick, 1000 imp/obr	położenie	2
Enkoder inkrementalny f. Sick, 10000 imp/obr	położenie, prędkość	1
Żyroskop cyfrowy MPU-6050	prędkość	2

Enkodery inkrementalne o rozdzielczości 1000 *imp/obr* oraz żyroskopy cyfrowe umieszczono na ramionach wahadła. Enkoder o rozdzielczości 10000 *imp/obr* został sprzężony poprzez przekładnię z wałem obrotowym suwnicy liniowej. do poprawnego działania zastosowane enkodery wymagały doprowadzenia przewodów zasilających o napięciu zasilania z zakresu 10...32 V oraz przewodów sygnałowych łączących wyjścia A, B i Z enkodera z wejściami mikrokontrolera. Dokładniejszy opis działania tych urządzeń oraz rozwiązań technicznych i programowych wykorzystanych przy ich obsłudze został przedstawiony w dalszej części niniejszej pracy. Dokumentacje techniczne wymienionych elementów systemu zamieszczone zostały na płycie CD w Dodatku I.

### 5.2.3. Dobór elektronicznych urządzeń sterujących

W celu realizacji koncepcji systemu sterowania, która została nakreślona w rozdziale (5.1.1) konieczne było dobranie zestawu platform mikroprocesorowych oraz połączenia ich według struktury z rozdziału (5.1.3).

Na potrzeby realizacji systemu sterowania zdecydowano się na wykorzystanie platform opartych na układach Arduino Nano i Arduino Uno wykorzystujących mikroprocesory firmy Atmel z rodziny Atmega328. Mikrokontrolery taktowane są zewnętrznym oscylatorem kwarcowym o częstotliwości 16 MHz. Posiadają dwa ośmiobitowe i jeden szesnastobitowy układy zliczające, które wykorzystywane są przy odmierzaniu czasu i generacji sygnału PWM. Ponadto wyposażone są w przetwornik analogowo-cyfrowy o rozdzielczości 10 bitów oraz obsługują interfejsy komunikacyjne takie jak UART, SPI oraz I2C. Dzięki tym właściwościom zapewniają one wystarczającą do projektowanego systemu moc obliczeniową oraz możliwości komunikacyjne.

Ich zaletami są także niewielkie rozmiary, duża dostępność oraz możliwość programowania za pomocą interfejsu USB dzięki obecności bootloadera [1]. Jednostki obliczeniowe korzystające z architektury Arduino Nano pełniły rolę soft sensorów natomiast jednostkę bazującą na architekturze Arduino Uno zastosowano jako główny moduł obliczeniowy.

Sterownik silnika Pololu VNH5019 pracujący z napięciami do 24 V i maksymalnym ciągłym prądem wyjściowym o wartości 12 A, na podstawie odbieranego sygnału PWM oraz sygnałów sterujących kierunkiem obrotów generował napięcie w zakresie  $-12 V$  do  $+12 V$ . Dobór urządzenia zależał od wymagań prądowych silnika DC [27]. Dokumentację urządzenia można znaleźć na załącznej płycie CD w Dodatku I. Wszystkie urządzenia były zasilane za pomocą odpowiednio zmodyfikowanego, zasilacza typu ATX o całkowitej mocy równej 500 W. Umożliwia on zasilanie

napięciem stałym o wartościach  $\pm 3,3 V$ ,  $\pm 5 V$  oraz  $\pm 12 V$ . Znamionowy prąd na linii o napięciu  $12 V$  wynosi  $12 A$ .

### 5.3. Wykonanie stanowiska

W tym rozdziale opisany został proces łączenia dobranych elementów konstrukcyjnych w jedną całość. Zbudowane stanowisko zostało wykonane tak, aby podczas działania jego integralność nie była naruszona. Tyczy się to takich zjawisk jak rozłączanie połączeń elektrycznych, zrywanie się przewodów, wyginanie elementów mechanicznych czy też w najgorszym wypadku odpadanie części lub zwarcia.

#### 5.3.1. Montaż i łączenie elementów elektronicznych

W celu zachowania zwartej i ergonomicznej struktury sprzętowej, mikrokontrolery zostały umieszczone na specjalnie zaprojektowanej płytce PCB (*Printed Circuit Board*) pełniącej rolę płyty głównej. Płyta została zaprojektowana tak, aby zapewniać modułowość systemu poprzez możliwość szybkiego montażu jednostek obliczeniowych i sterownika silnika oraz ich ewentualnej wymiany w przypadku uszkodzenia. Zaprojektowano oraz wykonano listwy kołkowe typu "goldpin" w celu umożliwienia sprawnego podłączania urządzeń pomiarowych - enkoderów inkrementalnych oraz żyroskopów cyfrowych. Ze względu na wymagane poziomy napięć przez wykorzystane urządzenia sterujące i wykonawcze zastosowanych urządzeń sekcję zasilania podzielono na trzy sektory:

- $3,3 V$  - do obsługi żyroskopów cyfrowych,
- $5 V$  - do obsługi mikrokontrolerów,
- $12 V$  - do obsługi enkoderów.

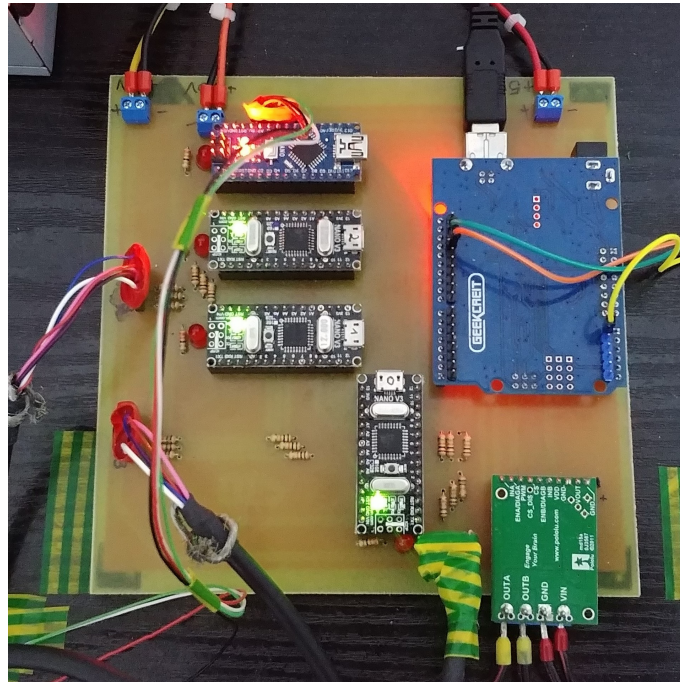
Ze względu na to, że maksymalną dopuszczalną wartością napięcia sygnału wejściowego zastosowanych mikrokontrolerów nie powodującym ich uszkodzenia jest  $5,5 V$ , a sygnały pochodzące z enkoderów optycznych zawierały się w zakresie  $0 \dots 12 V$  koniecznym było zastosowanie dzielników napięcia w postaci odpowiedniego układu rezystorów dla każdego kanału enkodera. Wartości oporników dobrano tak, aby napięcie wyjściowe z dzielnika zawierało się w wartościach dopuszczalnych. Napięcie wyjściowe  $U_{wy}$  wyznaczono z równania na dzielnik napięcia:

$$U_{wy} = \frac{U_{we}}{R_1 + R_2} R_2, \quad (5.3)$$

gdzie:

- $R_1$  - rezystancja pierwszego rezystora -  $15 k\Omega$ ,
- $R_2$  - rezystancja pierwszego rezystora -  $10 k\Omega$ ,
- $U_{we}$  - napięcie wejściowe -  $12 V$ ,
- $U_{wy}$  - napięcie wyjściowe -  $4,8 V$ .

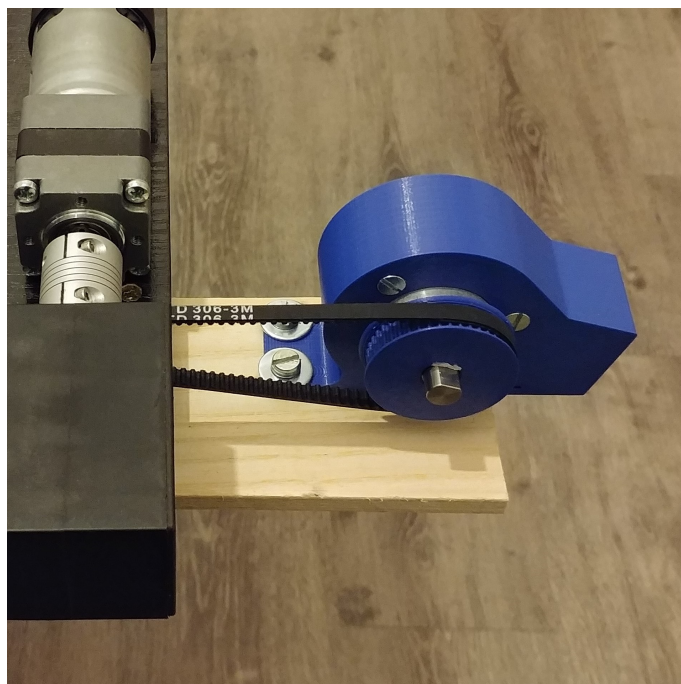
Wzór poprowadzonych ścieżek płyty uwzględniał schemat połączeń interfejsu SPI dla jednostki master, czterech soft sensorów, sterownika silnika oraz urządzeń pomiarowych. Na płycie CD w Dodatku I zawarto projekt elementu o nazwie PCB, do którego stworzenia zastosowano program Eagle [12]. W Dodatku H zamieszczono schemat ideowy połączeń elektrycznych oraz obraz płyty drukowanej. Na rysunku 5.8 zamieszczono zdjęcie przedstawiające wykonaną płytkę PCB wraz z urządzeniami.



Rys. 5.8. Płyta PCB z zamocowanymi modułami elektronicznymi

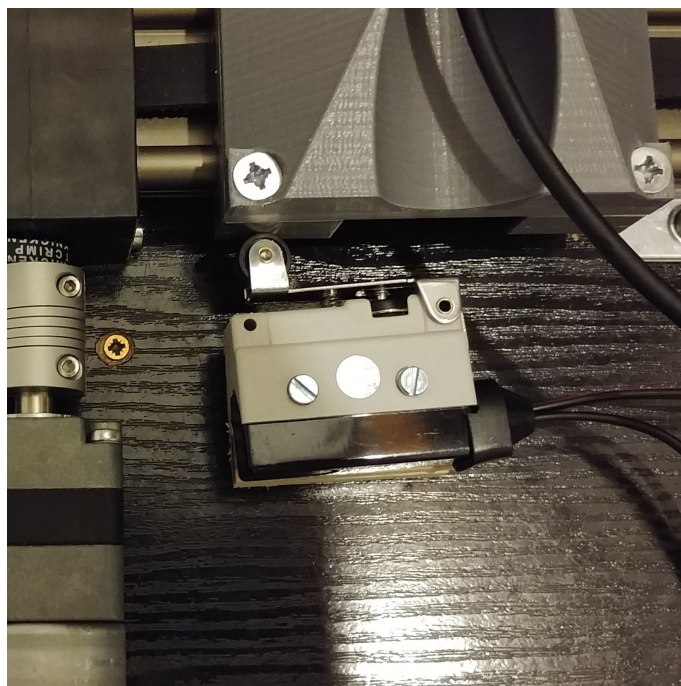
Żyroskopy zostały umieszczone na powierzchni ramion wahadła. Ich połączenie z soft sensorem odpowiadającym za przetwarzanie danych pomiarowych zostało zrealizowane poprzez zestaw przewodów, które zostały zabezpieczone tak, nie uszkodzić elementów układu sterującego.

Enkoder obsługujący suwnicę został zamocowany w przygotowanej do tego obudowie, która została wykonana za pomocą druku 3D. Połączenie z odpowiadającym mu soft sensorem zrealizowano za pomocą zestawu przewodów, które podobnie jak w przypadku łączenia żyroskopów, były odpowiednio zabezpieczone. Projekt mocowania opisywanego enkodera znajduje się na załączonej płycie CD. Na rysunku 5.9 zaprezentowano sposób mocowania enkodera obsługującego suwnicę.



Rys. 5.9. Enkoder wraz z mocowaniem

W skrajnych pozycjach suwnicy umieszczono czujniki krańcowe, których celem było zabezpieczenie wózka przed uderzeniem w obudowy przekładni pasowych. W momencie osiągnięcia niepożądanego położenia, następuje odcięcie zasilania od silnika. Na rysunku 5.10 zaprezentowano sposób mocowania krańcówek zabezpieczających suwnicę.

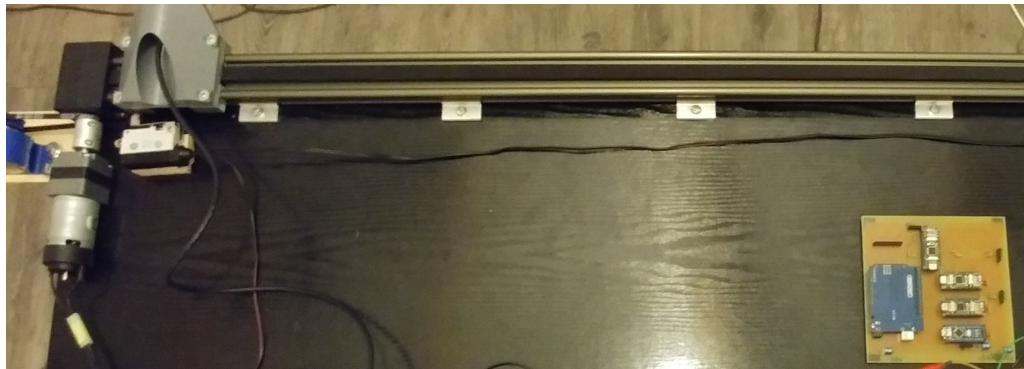


Rys. 5.10. Sposób mocowania czujników krańcowych

Karty katalogowe zastosowanych elementów w postaci krańcówek zamieszczono na płycie CD w Dodatku I.

### 5.3.2. Montaż i łączenie elementów mechanicznych

Suwnica liniowa, na której znajdowało się stanowisko wahadła została przymocowana za pomocą zestawu śrub i łączników, do odpowiednio stabilnego stołu, na którym również umieszczone zostały urządzenia sterujące i wykonawcze. Na rysunku 5.11 zaprezentowano sposób mocowania suwnicy do stołu.

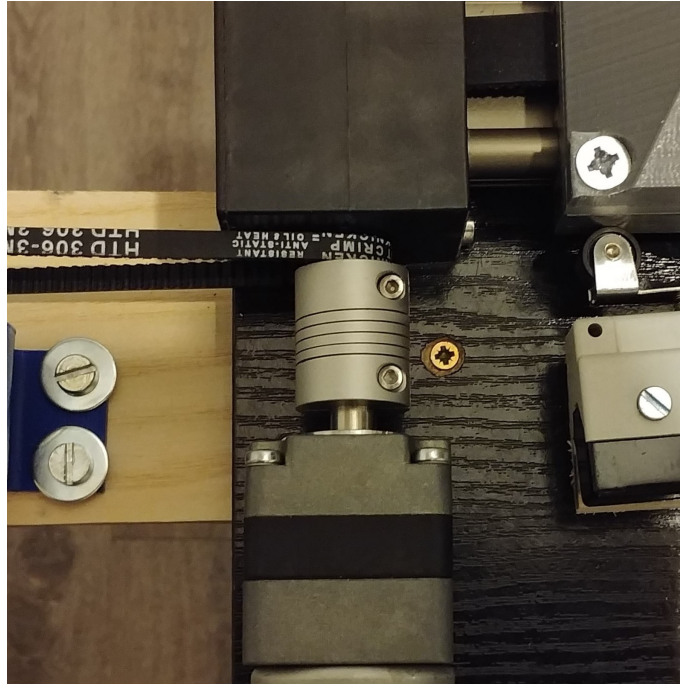


Rys. 5.11. Mocowanie suwnicy do blatu stołu

Opisane w podrozdziale 5.2.1 mocowanie enkodera znajdującego się na wózku zrealizowano za pomocą czterech śrub M6x40. Umieszczony wewnątrz mocowania enkoder, dzięki odpowiedniemu łożyskowaniu mógł zostać wykorzystany do połączenia z ramieniem.

Połączenie silnika oraz suwnicy dokonano za pomocą elastycznego sprzęgła, które umożliwiło przenoszenie momentu napędowego oraz redukcję ewentualnej niewspółosiowości wałów napędu i suwnicy. Element ten posiada niewielki moment bezwładności oraz wytrzymałą konstrukcję. Na rysunku 5.12 przedstawiono fizyczną realizację połączenia silnika z wałem suwnicy.





Rys. 5.12. Połączenie silnika z suwnicą liniową

Ze względu na bardzo dużą rozdzielczość enkodera obsługującego suwnicę oraz na ograniczone taktowanie procesora soft sensora, zastosowano odpowiednią przekładnię pasową, która pozwalała na zmniejszenie prędkości obrotowej na wale urządzenia. Mechanizm został skonstruowany w oparciu o dwa koła zębate wykonane w technice druku 3D oraz transmisyjny pas zębaty. Projekt elementów wykonano przy pomocy programu Autodesk Inventor, został on zamieszczony na załączonej płycie CD w Dodatku I. Zamieszczony poniżej rysunek 5.13 przedstawia wykonanie połączenia między wałem suwnicy a enkoderem.



Rys. 5.13. Połączenie enkodera z wałem suwnicy

## 6. Implementacja oraz walidacja zastosowanych rozwiązań

Szósty rozdział pracy ma charakter powiązania osiągnięć na gruncie syntezy systemu sterowania oraz budowy stanowiska, w celu zweryfikowania działania zaprojektowanych rozwiązań na rzeczywistym obiekcie regulacji.

W pierwszej części znajduje się opis stworzonych programów, które zostały zaimplementowane w systemie sterowania. Opisy zawierają najistotniejsze fragmenty kodu i przedstawiają argumentację dotyczącą celowości stosowanych rozwiązań. W drugiej części rozdziału zostaną porównane wyniki symulacyjne z wynikami uzyskanymi w skutek obserwacji działania fizycznego obiektu.

### 6.1. Opis oprogramowania systemu sterowania

Systemy sterowania oparte o mikroprocesorowe jednostki obliczeniowe muszą spełniać postulat determinizmu czasowego. Ich wydajność wynikająca z warstwy sprzętowej oraz oprogramowania musi być na tyle duża, aby zapewnić wykonywanie się obliczeń w odpowiednim czasie. Mechanizmami zastosowanymi w programie, które pozwoliły na zapewnienie determinizmu czasowego były:

- podział zadań pomiędzy wieloma jednostkami obliczeniowymi,
- struktury danych w postaci unii usprawniające przesyłanie bajtów komunikacją SPI,
- przerwania programowe na slave'ach,
- odpowiednia struktura kodu pozwalająca na szybkie przesyłanie danych oraz efektywne wykorzystanie mocy obliczeniowej procesorów.

#### 6.1.1. Struktura danych

Sprawność programu zależy w dużej mierze od przygotowanej struktury danych, które będą wykorzystywane do zbierania pomiarów i wykonywania na nich obliczeń. Dane powinny być przygotowane tak, aby nie powodować zbędnych opóźnień przy ich przesyśle. Najważniejszą pod względem transmisji danych strukturę zaprezentowano poniżej.

```
1 union data
2 {
3     volatile byte Byte[20]; // tablica mieszcząca wszystkie dane pomiarowe
4     struct select          // struktura porządkująca dane pomiarowe
5     {
6         struct state
7         {
8             volatile long Time;
9             volatile int Rotation;
10        } Enc_State[2];
11        struct Big_state
12        {
13            volatile long Time;
14            volatile long Rotation;
```

```

15     } Big_Enc_State ;
16 } Select ;
17 };
18
19 // przykładowe odniesienie do zmiennej określającej położenie kątowne enkodera
20 sensor.Select.Enc_State[0].Rotation = 0;

```

Zmienne zamieszczono w typie danych zwanym unią, która powoduje zapisywanie wszystkich zawartych w niej zmiennych na tym samym fragmencie pamięci. Rozmiar unii jest równy rozmiarowi jej największego składnika. Pierwszą składową unii jest dwudziesto elementowa tablica zmiennych ośmiobitowych, a drugim struktura zawierająca dwu elementową tablicę struktur oraz inną strukturę.

### 6.1.2. Funkcjonalności mikrokontrolera

Korzystanie z określonych funkcjonalności mikroprocesorów z rodziny Atmega, takich jak protokół SPI, obsługa przerwań systemowych, oraz układów zliczających wymaga operacji inicjalizujących. Polegają one na wpisywaniu odpowiednich wartości do określonych rejestrów procesora. Dane techniczne oraz wytyczne dotyczące stosowania odpowiednich funkcji znajdują się w dokumentacji używanych procesorów [3].

W celu przedstawienia tego mechanizmu poniżej zamieszczono fragment kodu inicjalizującego układ zliczający typu "timer".

```

1 void timer2_init()
2 {
3     TCCR2A = 0; // ustawienie w "normal mode"
4     TCNT2 = POS_BIAS; // przypisanie początkowej wartości licznika
5     TCCR2B = (1 << CS21) | (1 << CS20); // preskaler 32
6     TIMSK2 = (1 << TOIE2); // aktywacja przepełnienia timer'a 2
7 }

```

Układy zliczające czas korzystają z zegara systemowego, który taktowany jest przy pomocy rezonatora kwarcowego o częstotliwości 16 MHz. Preskaler definiuje liczbę taktów procesora wymaganych do jednorazowej inkrementacji licznika. Przepełnienie się bajtu zawierającego inkrementowaną liczbę jest zdarzeniem (wewnętrznym), które powinno zostać obsłużone przez program mikrokontrolera. W podobny sposób inicjowane są pozostałe funkcjonalności wykorzystane przy projektowaniu systemu.

Ze względu na postulat działania systemu w czasie rzeczywistym koniecznym było reagowanie na zewnętrzne lub wewnętrzne bodźce zachodzące nieprzewidywalnie. Do tego celu wykorzystano mechanizm przerwań systemowych. Przykładową obsługę przerwania wywołwaną zakończeniem pojedynczej transakcji SPI przedstawiono poniżej.

```

1 ISR(SPI_STC_vect){
2     SPDR = sensor.Byte[i]; // przepisanie bajtu do rejestru przesuwonego
3     i++;
4 }

```

### 6.1.3. Transmisja danych

Kluczowym elementem systemu była sprawna i deterministyczna komunikacja między urządzeniami. Listing funkcji zawartej w jednostce master odpowiedzialnej za wymianę danych przedstawiono poniżej.

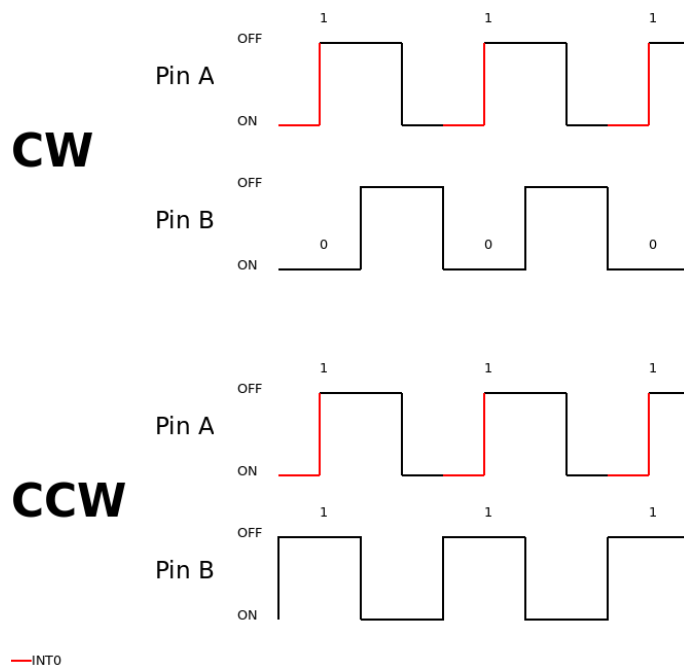
```
1 void SPI_read(uint8_t slave, uint8_t start_byte, uint8_t byte_count)
2 {
3     SlaveSelect(slave);           // funkcja odpowiedzialna za aktywację danego slave'a
4     for (uint8_t i = start_byte; i < (start_byte + byte_count); i++)
5     {
6         _delay_us(SPI_DELAY);     // czas na ustabilizowanie się stanów przejściowych
7         SPI_send(0);              // funkcja wpisująca pusty bajt na rejestr przesuwny
8         sensor.Byte[i] = SPDR;    // przepisanie wartości przesłanej przez slave'a
9     }
10 }
```

Protokół SPI działa w trybie full-duplex, co oznacza, że transmisja danych musi odbywać się dwukierunkowo. Wynika to z połączenia rejestrów przesuwnych master'a i slave'a. Ze względu na to, że urządzenia typu slave nie wymagają odbioru żadnych znaczących informacji, urządzenie typu master każdorazowo przygotowuje do transakcji pusty bajt, którego zapisywanie w rejestrze powoduje wymianę bitów zawartych w rejestrach przesuwnych.

### 6.1.4. Obsługa urządzeń pomiarowych

Aby zapewnić determinizm czasowy oraz odpowiednią dokładność pomiaru należało wybrać odpowiednią metodę obróbki cyfrowej sygnałów pochodzących z enkoderów optycznych.

Pierwszą metodą zastosowaną przy pomiarze obrotu enkodera jest obsługa przerwania wywoływanego z boczem. Aby zastosować takie rozwiązanie jeden kanał enkodera podłączony został do fizycznego wejścia procesora, które umożliwia obsługę przerwania zewnętrznego. W momencie wystąpienia przerwania mikrokontroler sprawdza stan logiczny na drugim kanale enkodera i na tej podstawie dekrementuje bądź inkrementuje licznik określający pozycję enkodera. Na rysunku 6.1 zobrazowano opisaną metodę [13]. Podczas tego samego przerwania obliczany jest czas, który upłynął od ostatniego przerwania. Na jego podstawie master po otrzymaniu tej wartości liczy prędkość liniową wózka na suwnicy.



Rys. 6.1. Przebiegi sygnałów na pinach enkodera (CW - clockwise), (CCW - counter-clockwise) [13]

Fragment kodu odpowiedzialny za realizację opisanej metody pomiaru został zamieszczony poniżej.

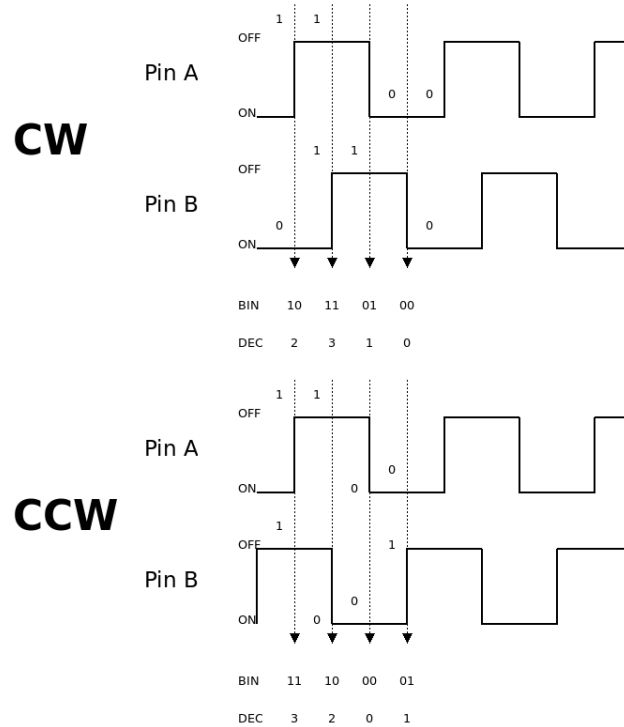
```

1 ISR(INT1_vect)           // obsługa przerwania zewnętrznego
2 {
3     if (PIND & B)        // warunek sprawdzający kierunek obrotu
4     {
5         sensor.State.Rotation++; // inkrementacja położenia kąowego
6         dir = 0;          // ustawienie zmiennej określającej kierunek
7     }
8     else
9     {
10        sensor.State.Rotation--; // dekrementacja położenia kąowego
11        dir = 1;
12    }
13    // określenie czasu od ostatniego przerwania w celu liczenia prędkości
14    dt = (micros() - time);
15    time = micros();
16 }

```

Drugą metodą zastosowaną przy pomiarze obrotu enkodera jest cykliczne sprawdzanie stanów jego kanałów. Gdy obecny stan kanałów różni się od poprzedniego, sprawdzany jest kierunek zmiany przy pomocy kodu Gray'a oraz ośmiu warunków logicznych, czterech dla kierunku dodatniego oraz czterech dla kierunku ujemnego. Na rysunku 6.2 zobrazowano opisaną metodę [13]. Aby nie dopuścić do przepełnienia się licznika zliczającego impulsy na końcu danego przerwania czasowego wykonywana jest operacja modulo, której mianownikiem jest ilość impulsów przypadających na pełny obrót ramienia, a licznikiem jest bieżąca wartość obrotu. Takie zabezpieczenie

jest potrzebne jedynie w przypadku enkoderów w przegubach, ponieważ ramiona nie mają fizycznych ograniczeń, co do ilości wykonywanych obrotów, zaś suwnica takie ograniczenia posiada. Zdecydowano się na taką metodę pomiaru położenia kąowego, ponieważ ilość dostępnych na mikrokontrolerze przerwań aktywowanych zboczem była niewystarczająca. Aby zachować dużą dokładność enkodera koniecznym było zastosowanie przerwań czasowych.



Rys. 6.2. Przebiegi sygnałów na pinach enkodera (CW - clockwise), (CCW - counter-clockwise) [13]

Fragment kodu odpowiedzialny za realizację opisanej metody pomiaru został zamieszczony poniżej.

```

1 ISR (TIMER2_OVF_vect) // obsługa przerwania wewnętrznego
2 {
3     TCNT2 = POS_BIAS; // podniesienie wartości licznika
4     val_tmp = read_pins(); // odczyt stanu pinów i zapisanie ich w postaci kodu gray'a
5     if (val != val_tmp) // sprawdzenie zmiany stanu na wyjściach enkodera
6     {
7         // określenie czasu od ostatniego przerwania w celu liczenia prędkości
8         dt = micros() - time;
9         time = micros();
10        // sprawdzanie warunków określających kierunek obrotu
11        if ((val == 2 && val_tmp == 3) ||
12            (val == 3 && val_tmp == 1) ||
13            (val == 1 && val_tmp == 0) ||
14            (val == 0 && val_tmp == 2))
15        {
16            sensor.State.Rotation++; // inkrementacja położenia kąowego
17            dir = 0;
18        }

```

```

19 // sprawdzanie warunków określających kierunek obrotu
20 else if ((val == 3 && val_tmp == 2) ||
21         (val == 2 && val_tmp == 0) ||
22         (val == 0 && val_tmp == 1) ||
23         (val == 1 && val_tmp == 3))
24 {
25     sensor.State.Rotation--; // dekrementacja położenia kąowego
26     dir = 1;
27 }
28 sensor.State.Rotation = sensor.State.Rotation % 4000;
29
30 val = val_tmp; // przepisanie stanu obecnego do stanu poprzedniego
31
32 if (PIND & Z) // sprawdzenie czy enkoder w pozycji zerowej
33     if (calibrated)
34         // przepisanie skalibrowanej wartości do położenia kąowego
35         sensor.State.Rotation = zero_value;
36     else {
37         // przepisanie położenia kąowego do kalibrowanej wartości
38         zero_value = sensor.State.Rotation;
39         calibrated = 1;
40     }
41 }
42 }

```

### 6.1.5. Obsługa urządzenia wykonawczego

W celu poprawnego sterowania obiektem sygnał sterujący generowany przez układ cyfrowy powinien zapewniać odpowiednią rozdzielczość i zakres napięciowy. Wstępnie przetworzone dane powinny także zostać ostatecznie przeliczone na wymagane wartości fizyczne. Fragment kodu odpowiedzialny za te funkcje został przedstawiony poniżej.

```

1 void scale_u()
2 {
3     if (u < 0) // warunek określający kierunek obrotu silnika
4     {
5         PORTD &= ~INB;
6         PORTD |= INA;
7         dir = 1;
8     }
9     else if (u > 0)
10    {
11        PORTD &= ~INA;
12        PORTD |= INB;
13        dir = 1;
14    }
15    else
16        dir = 0;
17

```

```

18  u = abs(u * CONTROL_CONSTANT); // obliczenie wartości bezwzględnej sygnału
    referencyjnego
19
20  if (dir)
21      u += CONTROL_BIAS; // niwelacja tarcia statycznego
22
23  if (u > 1023) // saturacja
24      u = 1023;
25
26  OCR1A = (int) u; // rejestr wypełnienia sygnału PWM
27 }

```

Sygnal sterujący wysyłany na urządzenie wykonawcze pochodzi ze sterownika silnika, który przetwarza doprowadzony z jednego z wyjść mikrokontrolera sygnał PWM. Sygnal ten generowany jest przy użyciu metody z korekcją fazy zalecaną przez dokumentację techniczną do sterowania silnikami elektrycznymi [3]. Metoda ta wykorzystuje licznik o rozdzielczości dziesięciu bitów, co przekłada się na 1024 możliwe do uzyskania poziomy napięcia z zakresu 0...12 V. Polaryzacja napięcia sterowana jest za pomocą zmiany stanu wejść sterownika oznaczonych jako INA oraz INB.

## 6.2. Implementacja algorytmów sterowania i estymacji

Implementacja sprzętowa algorytmów sterowania oraz estymacji zawsze wiąże się ze stworzeniem programowej reprezentacji danego rozwiązania w postaci kodu, uruchomionego na platformie mikroprocesorowej. W związku z rozproszeniem obliczeń w systemie sterowania (5.1.1), konieczne było nie tylko przedstawienie programistycznych rozwiązań lecz również powiązania między poszczególnymi zmiennymi, mikrokontrolerami oraz modułami I/O.

### 6.2.1. Implementacja sprzętowa algorytmów estymacji

Sprzętowa implementacja filtra Kalmana była ułatwiona ze względu na fakt, iż jego koncepcja teoretyczna bazuje na dyskretnych równaniach stanu, które można bezpośrednio przenieść na kod programu. Algorytm został umieszczony na głównej jednostce obliczeniowej, która to odbierała odpowiednio przetworzone dane pomiarowe z soft sensorów obsługujących żyroskopy oraz enkodery przypisane ramionom wahadła. Bazując na równaniach (4.15), (4.16) oraz (4.17), stworzono dwa osobne estymatory, tak aby proces estymacji przebiegał osobno dla danego ramienia. Struktura kodu dla obu estymatorów jest identyczna, z tego względu poniżej zamieszczony został tylko jeden przykładowy listing.

```

1 float kalman (float z){
2 static float x_est = 0; // inicjalizacja warunkow początkowych
3 static float p_est = 0;
4
5 float x_pred;
6 float p_pred;

```



```

7 float e;
8 float S;
9 float K;
10
11 // faza predykcji
12 x_pred = x_est;
13 p_pred = p_est + Q;
14
15 // faza aktualizacji
16 e = z - x_pred;
17 S = p_pred + R;
18 K = p_pred / S;
19 x_est = x_pred + K * e ;
20 p_est = p_pred - K * S * K ;
21
22 return x_est;
23 }

```

Działanie kodu jest następujące. Na wejście funkcji *kalman* zadawany jest pomiar korekcyjny z żyroskopu. Potem, wykonywane są fazy predykcji oraz aktualizacji. Na koniec funkcja zwraca optymalną estymatę prędkości kątowej.

Odfiltrowana wartość zostaje później przesłana do wyliczenia sterowania za pomocą algorytmów LQR lub PD opisanych w podrozdziałach 6.2.2 i 6.2.3.

## 6.2.2. Implementacja sprzętowa algorytmu LQR

W przypadku implementacji sprzętowej algorytmu liniowo kwadratowego, sterowanie  $u(k)$  wyliczono na podstawie wymnożenia wektora wzmocnień od stanu  $K$  z estymatami zmiennych stanu  $\hat{x}(k)$  oraz wektora wzmocnienia w przód  $K_r$  z wektorem sygnałów referencyjnych  $c_{ref}(k)$ . Z uwagi na fakt, że wektor sygnałów referencyjnych był równy zero, w programowej realizacji algorytmu pominięto ten człon. Taki zestaw operacji wprost realizował dyskretne prawo sterowania określone w (4.35). Poniżej zamieszczony fragment kodu realizował przemnażanie wektora wzmocnień z estymatami.

```

1 void LQR_control ()
2 {
3     LQR_u = x[0] * K[0] +
4           x[1] * K[1] +
5           x[2] * K[2] +
6           x[3] * K[3] +
7           x[4] * K[4] +
8           x[5] * K[5];
9 }

```

Funkcja ta nadpisuje zmienną globalną *LQR\_u* zawierającą wartość sterującą w konkretnej chwili czasu. Wartość ta trafia następnie do funkcji skalującej i realizującej generowanie sygnału sterującego opisaną w podrozdziale 6.1.5.

### 6.2.3. Implementacja sprzętowa algorytmu typu PID

Strukturę zawierającą równoległe rozmieszczone algorytmy PD zaimplementowano na podstawie równań różnicowych z (4.52). Wartości wektora uchybów  $\varepsilon(k)$  oraz sterowania  $u(k)$  w chwili  $k - 1$  zainicjalizowano w postaci osobnych zmiennych z zerowymi warunkami początkowymi. Po zakończeniu wyliczania sygnału sterującego, próbki z chwili  $k$  są przesuwane do próbek odpowiadających chwili  $k - 1$ .

```
1 // wyliczenie składowych sygnału sterującego
2 u0[0] = ( (2 * K[3] + K[0] * (2 * TB + Ts)) * e0[0] + (K[0] * (Ts - 2 * TB) - 2 * K
3 [3]) * e0[1] - (Ts - 2 * TB) * u0[1]) / (2 * TB + Ts);
4 u1[0] = ( (2 * K[4] + K[1] * (2 * TB + Ts)) * e1[0] + (K[1] * (Ts - 2 * TB) - 2 * K
5 [4]) * e1[1] - (Ts - 2 * TB) * u1[1]) / (2 * TB + Ts);
6 u2[0] = ( (2 * K[5] + K[2] * (2 * TB + Ts)) * e2[0] + (K[2] * (Ts - 2 * TB) - 2 * K
7 [5]) * e2[1] - (Ts - 2 * TB) * u2[1]) / (2 * TB + Ts);
8
9 // wartość sterująca
10 u = u0[0] + u1[0] + u2[0];
11
12 // przesunięcie uchybów i sterowania
13 e0[1] = e0[0];
14 e1[1] = e1[0];
15 e2[1] = e2[0];
16 u0[1] = u0[0];
17 u1[1] = u1[0];
18 u2[1] = u2[0];
19
20 // obliczanie czasu próbkowania
21 Ts = (micros() - time);
22 time = micros();
```

Podobnie jak w przypadku programu realizującego sterowanie za pomocą algorytmu LQR, zmienna globalna  $u$  w każdej chwili czasu trafia do funkcji skalującej i realizującej generowanie sygnału sterującego opisanej w podrozdziale 6.1.5.

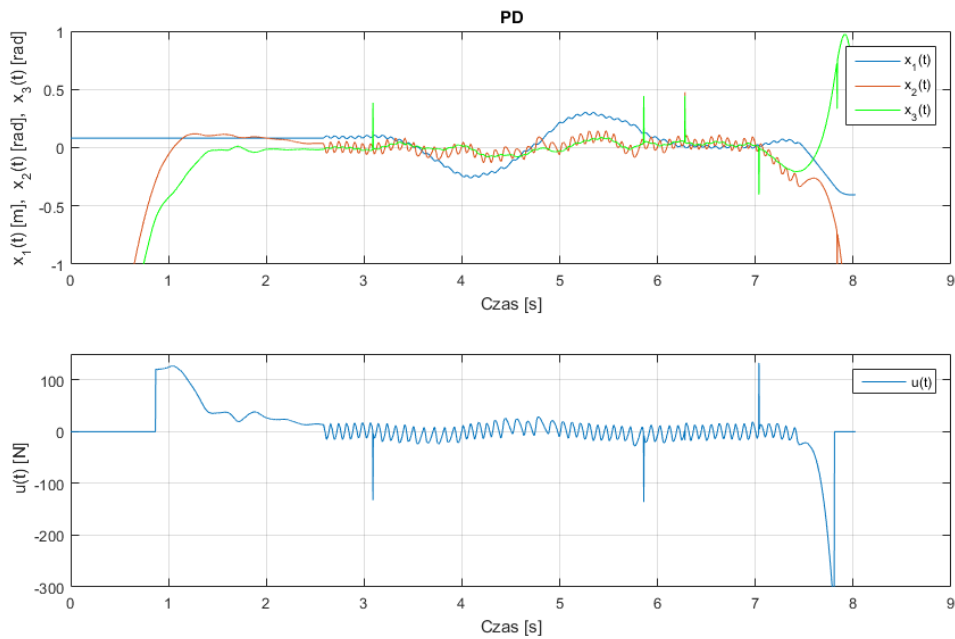
## 6.3. Porównanie badań symulacyjnych oraz eksperymentalnych na obiekcie rzeczywistym

Weryfikacja skuteczności działania algorytmów sterowania na docelowym, rzeczywistym obiekcie wymagała porównania wyników symulacyjnych z rzeczywistymi. Chcąc dokonać zestawienia wyników symulacyjnych z (4.3.5) oraz (4.6.3), konieczne było zebranie odpowiednich obserwacji i wyciągnięcie z nich wniosków.

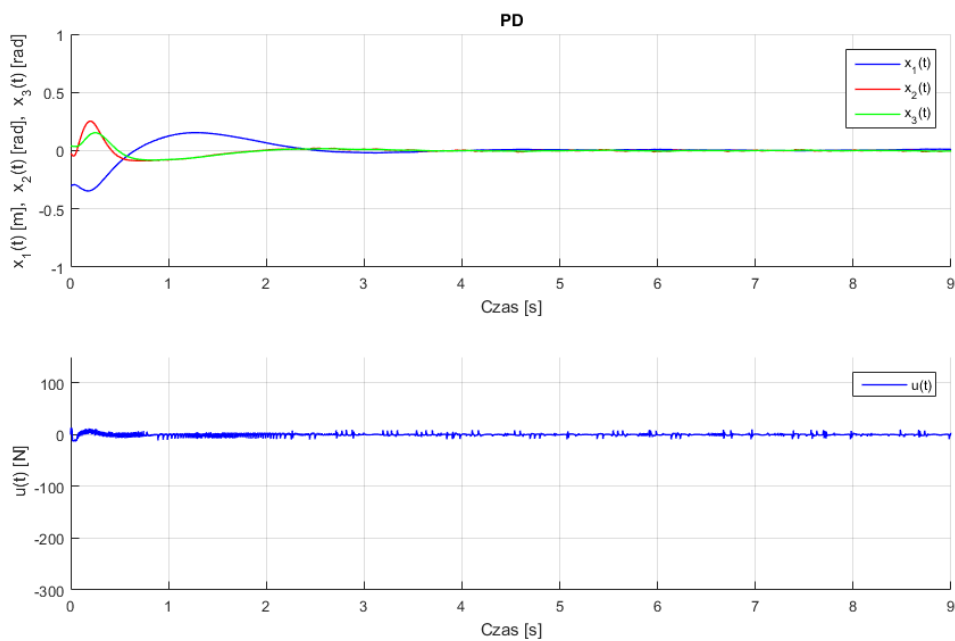
### 6.3.1. Badania dla algorytmu PD

Jedną z zastosowanych metod regulacji były trzy równoległe regulatory PD, których nastawy były dobierane przy pomocy macierzy  $K$  regulatora LQR. Algorytm mimo poprawnego działa-

nia w środowisku Matlab Simulink, po zaimplementowaniu na zbudowanym stanowisku nie zadziałała poprawnie. Skutkowało to brakiem stabilizacji w górnym położeniu, co zostało zaprezentowane na filmie w dodatku I na płycie CD pt. *regulacjaPD.mp4*, z którego przebiegi zostały pokazane na rysunku 6.3. Dodatkowo, na rysunku 6.4 zaprezentowano przebiegi uzyskane z badań symulacyjnych, w celu porównania ich z rzeczywistymi.



Rys. 6.3. Przebiegi położenia oraz sterowania wahadła podczas działania regulatora PD na obiekcie rzeczywistym



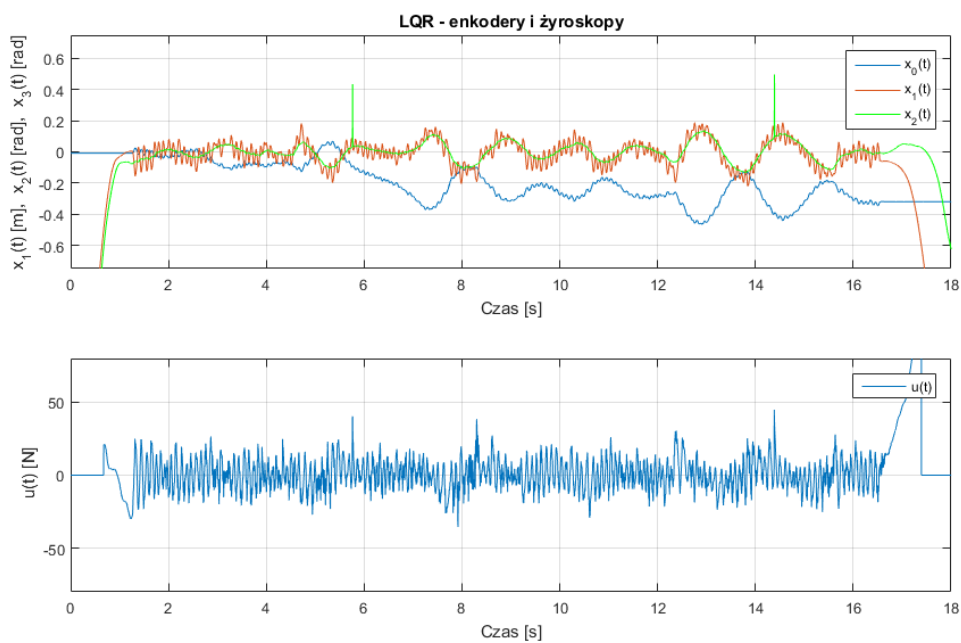
Rys. 6.4. Przebiegi położenia oraz sterowania wahadła podczas działania regulatora PD dla symulacji

Podczas eksperymentu wahadło było przez siedem sekund podtrzymywane ręką w pozycji pionowej górnej, a następnie swobodnie puszczone. Zarejestrowane dane ilustrują, że zestaw regulatorów PD nie stabilizuje wahadła w górnym położeniu równowagi. Prawdopodobnym powodem tej sytuacji było to, że pochodne członów różniczkujących są wyznaczone numerycznie z pomiarów położenia zarejestrowanych przy pomocy enkoderów ze stosunkowo krótkim czasem próbkowania. Według wniosków wypływających z Dodatku E skutkuje otrzymaniem dużego błędu względnego dla małych prędkości. Błąd ten mógł być wystarczający, aby przekłamać odczyty, które mnożone są przez wzmocnienia regulatora.

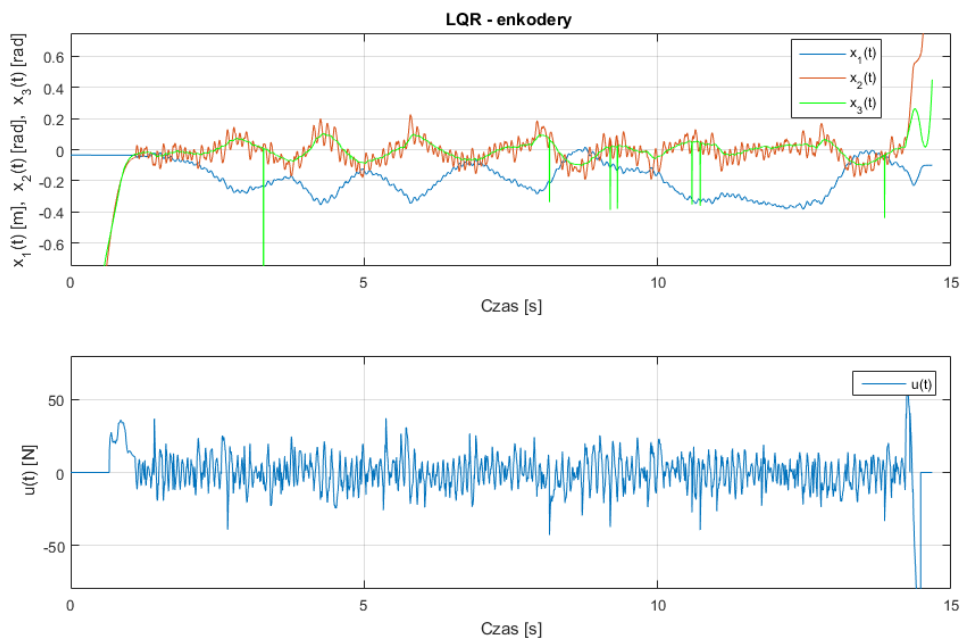
### 6.3.2. Badania dla algorytmu LQR

Drugą z zastosowanych metod regulacji był regulator LQR. Nastawy algorytmu, które zostały wyznaczone w środowisku Matlab/Simulink, zostały zaimplementowane na zbudowanym stanowisku. Stabilizacja w górnym punkcie pracy wahadła została osiągnięta. Regulator wykazywał również odporność na przykładane do niego zakłócenia w postaci delikatnych uderzeń w poszczególne człony wahadła, co zostało zaprezentowane na filmie w Dodatku I na płycie CD pt. *LQR\_ENC\_GYRO.mp4* oraz *LQR\_ENC.mp4*. Przebiegi odpowiadające wymienionym filmom zostały pokazane na Rysunkach 6.5 oraz 6.6. Dodatkowo, na rysunku 6.7, zaprezentowano przebiegi czasowe z symulacji. Można na nich zauważyć, że warunki symulacji komputerowej były w stosunku do warunków weryfikacji sprzętowej znacząco wyidealizowane, algorytm jednak zadziałał poprawnie w obu środowiskach.

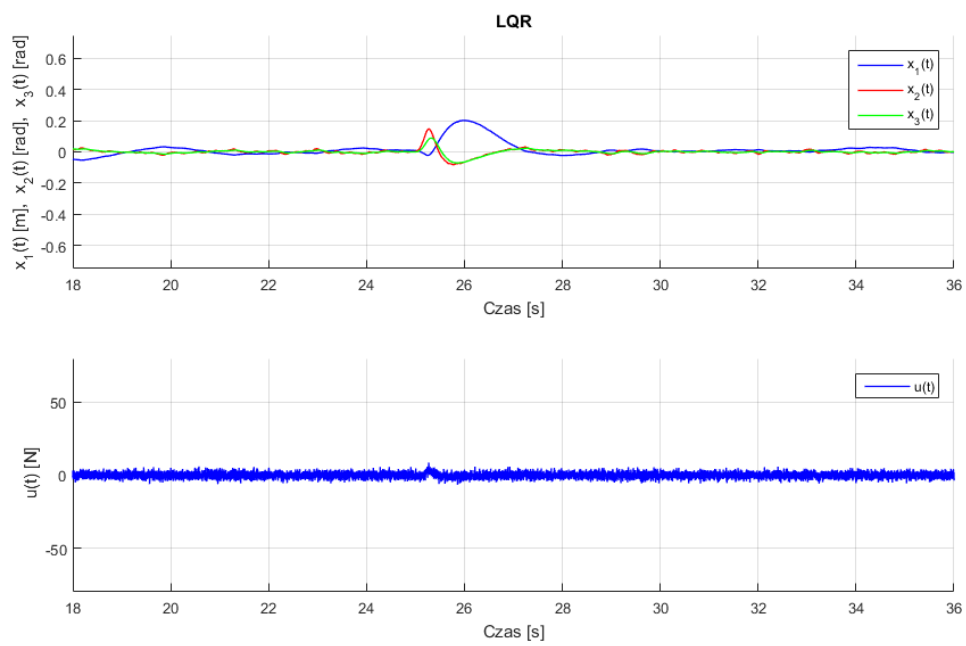
Algorytm został zaprezentowany dla dwóch wariantów pozyskiwania danych pomiarowych. Pierwsza metoda pomiaru prędkości polegała na odczycie z żyroskopów cyfrowych oraz enkoderów cyfrowych, a druga opierała się na metodzie różniczkowania enkoderów optycznych znajdujących się w przegubach. W wariantcie z wykorzystaniem enkoderów przyjętą metodą obliczania prędkości była metoda okresowa, która zgodnie z Dodatkiem E charakteryzuje się mniejszym błędem przy niewielkich prędkościach obrotowych.



Rys. 6.5. Przebiegi położeń oraz sterowania wahadła podczas działania regulatora LQR na obiekcie rzeczywistym, w wariacie z enkoderami i żyroskopami



Rys. 6.6. Przebiegi położeń oraz sterowania wahadła podczas działania regulatora LQR na obiekcie rzeczywistym, w wariacie z enkoderami



Rys. 6.7. Przebiegi położeń oraz sterowania wahadła podczas działania regulatora LQR dla symulacji

## 7. Podsumowanie

Ostatni rozdział pracy ma za zadanie podsumować dokonania autorów w niniejszej pracy inżynierskiej. Oprócz wniosków zamieszczono dyskusję na temat alternatywnych rozwiązań, które mogą stanowić kierunki przyszłych prac.

### 7.1. Spostrzeżenia oraz wnioski

Podjęte w niniejszej pracy inżynierskiej zadanie zbudowania fizycznego stanowiska z podwójnym, odwróconym wahadłem było zagadnieniem złożonym. Wymagało ono syntezy wiedzy wywodzącej się nie tylko z dziedziny automatyki, ale również mechaniki czy elektroniki. Bardzo ważnym było umiejętne połączenie dokonań na gruncie modelowania obiektu oraz doboru struktury i algorytmów sterowania ze sprzętową oraz programową implementacją zaproponowanych rozwiązań.

Zaczynając od założeń związanych z modelowaniem po wyprowadzenie matematycznej reprezentacji wahadła autorzy starali się w jak najdokładniejszy sposób opisać działanie obiektu. Dzięki rozbudowanym analizom poczynionym w rozdziałach trzecim oraz czwartym, wyjaśniono i opisano wiele zjawisk związanych z fizycznym działaniem obiektu. Począwszy od badań chaotyczności ruchu, przez nieminimalnofazowość po wpływ zmian parametrów na zachowanie układu, autorzy starali się stworzyć pewny grunt pod syntezę systemu sterowania oraz przyszłe badania związane z modelem wahadła. Opracowując modele matematyczne, które rozważano w niniejszej pracy, autorzy brali pod uwagę wiele różnych oddziaływań mogących potencjalnie negatywnie wpłynąć na jakość symulacji oraz późniejszego działania systemu. Przykładem takiego działania było opracowanie modelu tarć, który mimo swojego uproszczenia dawał dobry punkt odniesienia względem rzeczywistego obiektu.

Synteza systemu sterowania, której finalnym celem było opracowanie systemu regulacji stabilizującego wahadło w górnym punkcie pracy, z wykorzystaniem regulatora LQR lub PD, została zwieńczona sukcesem. Oprócz odrębnych badań, autorzy zdecydowali się na dokonanie zestawienia działania obu regulatorów. Było to bardzo ważne, mając na uwadze fakt, iż w strukturze regulatorów PD zaimplementowano identyczne nastawy, które wyznaczono rozwiązując zadanie optymalizacji ze wskaźnikiem liniowo - kwadratowym. Warto również dodać, że badanie działania systemu zweryfikowało skuteczność działania algorytmów estymacji, których główną składową były filtry Kalmana.

Implementacja algorytmów w środowisku symulacyjnym Matlab Simulink została zwieńczona sukcesem. Dla sterowania typu PID oraz liniowo - kwadratowego, obiekt zachowuje stabilność, pomimo niedokładności modelowych oraz parametrycznych. Regulacja rzeczywistego obiektu sterowania również została zrealizowana z sukcesem dla regulatora LQR.

Opisując aspekty związane z budową, wskazano argumenty świadczące o słuszności wyboru danych elementów. Autorzy nie tylko korzystali z gotowych urządzeń, ale również zaprojektowali i wykonali części w postaci mocowań i przekładni mechanicznych. Zaprojektowano także

mikroprocesorowy układ sterowania działający w środowisku rozproszonym, który został zintegrowany na wykonanej płycie PCB. Realizacja fizycznego stanowiska bez wspomnianych rozwiązań nie byłaby możliwa. Takie podejście pozwoliło na jak najlepsze wykorzystanie posiadanych elementów elektronicznych oraz mechanicznych, które służyły za urządzenia wykonawcze oraz pomiarowe. Oprócz zobrazowania efektów działania w postaci zdjęć stanowiska, do pracy dołączono szereg projektów oraz dokumentacji opisujących właściwości danych elementów. Na płycie CD, w Dodatku I zamieszczono szereg zdjęć oraz filmów prezentujących proces tworzenia stanowiska. Pokazują one również finalne efekty prac autorów na, które składają się materiały z testów obiektu, gdzie widoczne są badania dla sterowania mającego na celu utrzymanie obiektu w górnym punkcie równowagi.

Ze względu na ograniczoną objętość pracy pewne problemy napotkane podczas syntezy systemu sterowania oraz budowy rzeczywistego obiektu zostały jedynie zasygnalizowane w treści pracy. Część z nich została bardziej szczegółowo zaprezentowana w dodatkach do pracy, a część może stanowić kierunki przyszłych prac. Część z tych zagadnień została przedstawiona w treści dodatków załączonych do pracy. Zagadnienia te dotyczyły rozwiązywania problemów związanych z aspektami sprzętowymi oraz programowymi.

Reasumując, cel pracy w postaci zaprojektowania oraz zbudowania stanowiska z podwójnym odwróconym wahadłem wraz z synteza systemu sterowania został zrealizowany.

## **7.2. Kierunki przyszłych badań**

W związku z dużą liczbą zagadnień merytorycznych poruszonych w pracy, autorzy bazując na odpowiedniej literaturze oraz własnych doświadczeniach pokusili się o przedstawienie możliwych kierunków dalszych prac.

### **7.2.1. Przełączalny system sterowania**

Zaprezentowany w podrozdziale (4.6) mechanizm rozhuśnięcia wahadła, w postaci regulatora Swing up, oraz warunki przełączania pomiędzy tym regulatorem a regulatorami stabilizującymi powinien zostać przetestowany dla parametrów rzeczywistego wahadła zestawionych w tabeli 2.2. W przypadku symulacyjnego potwierdzenia poprawności jego działania możliwe będzie jego zaimplementowanie na platformie sprzętowej. Naturalnie wyniki testów mogą wymagać dalszych prac, związanych np. z dodatkową identyfikacją parametrów rzeczywistego obiektu, w celu umożliwienia zarówno poprawnego podniesienia wahadła jak i jego "przechwycenia" przez regulator stabilizujący jego położenie w górnym punkcie pracy. Oczywiście sprzętowa implementacja będzie wymagała dyskretyzacji prawa sterowania przedstawionego w podrozdziale (4.6.1).

### **7.2.2. Nieliniowe algorytmy sterowania**

Zastosowane w pracy algorytmy LQR oraz typu PID bazują na zlinearyzowanych modelach matematycznych, będących uproszczoną formą nieliniowych równań różniczkowych. Ich



skuteczność działania jest ograniczona jedynie do pewnego otoczenia punktów pracy. Jednakże, jest możliwe zastosowanie metod sterowania, które wykorzystują przy syntezie sterowania modele nieliniowe [38].

W przypadku rozważanego problemu stabilizacji wahadła autorzy pracy rozważali zastosowanie regulatora ślizgowego, którego istota pozwala na dobranie sterowania w taki sposób, że możliwe jest niwelowanie niepewności modelowych oraz w parametrach. Przykładowe implementacje tej metody regulacji można spotkać w pracach [23, 42]. Ze względu na złożoność modelu wahadła (2.65) zadanie to charakteryzuje się znaczną złożonością, jak pokazują wstępnie zrealizowane prace.

Możliwe też było zastosowanie metody, która sama z siebie nie jest algorytmem sterowania lecz pozwala na bardzo duże ułatwienie zadania syntezy systemu sterowania. Metoda linearyzacji przez sprzężenie zwrotne polega na zastosowaniu takiego podstawienia pod nieliniowe zmienne stanu obiektu, że po przejściu do nowego stanu system, na wyjściu zachowuje się podobnie jak liniowy. Bazując na koncepcjach nakreślonych w literaturze, możliwe było potraktowanie ramion wahadła jako manipulatora o dwóch stopniach swobody, których to dynamikę można sprowadzić do układu liniowego [38]. Do tak przekształconego modelu można dobrać prosty algorytm regulacji, który jest w stanie zagwarantować duży zakres stabilności.

### 7.2.3. Alternatywne metody estymacji

W niniejszej pracy dyplomowej zastosowano mechanizm estymacji, składający się z trzech odrębnych estymatorów w postaci dyskretnego różniczkowania oraz dwóch filtrów Kalmana. Użycie takiej struktury było ściśle powiązane z możliwościami jakie dawał układ pomiarowy. Autorzy, oprócz zastosowanej koncepcji rozważali również zastosowanie kaskadowego estymatora, w którym oprócz optymalnych filtrów Kalmana, do estymacji prędkości liniowej wózka użyłoby obserwatora Luenbergera.

Pomysłem zastosowanym w pracy było podzielenie przestrzeni stanu poprzez projekcję z sześciowymiarowej przestrzeni stanu  $x(t) \in \mathbb{R}^6$  na trzy podprzestrzenie dwu wymiarowe  $x(t) \in \mathbb{R}^2$ . Wówczas, przy wykorzystaniu rzeczywistych pomiarów, których fizyczna korelacja umożliwia przyjęcie uproszczonej dynamiki, możliwe było skuteczne estymowanie stanu liniowym algorytmem dla nieliniowej dynamiki obiektu sterowania. Takie działanie było możliwe ze względu na rozwikłanie modelu matematycznego wahadła do postaci danej w (2.65). Pozwoliło to na dekompozycję dynamiki systemu na część nieliniową oraz liniową [18].

Aby estymować prędkości oraz przemieszczenia kątowne, możliwe było zastosowanie takiej konfiguracji filtru Kalmana, która uwzględniałaby pomiar z akcelerometru, którego informacja pomiarowa jest obciążona szumem białym. Wskutek działania algorytmu nie tylko dokonywanoby filtracji, ale również odtwarzania brakującego stanu. Estymacja prędkości liniowej wózka miałyby opierać się nie tylko na pomiarze położenia kątownego pomnożonego razy promień zębatego ale również przy wykorzystaniu pomiaru prądu z silnika. Znajomość stałej elektromechanicznej  $k_m$  pozwala na uzyskanie wartości momentu napędowego, który po skorelowaniu z momentem bez-

władności układu dawałby w efekcie wartość przyspieszenia kąowego. Przypuszcza się, że taka struktura do celów estymacji byłaby bardziej niezawodna i skuteczniejsza niż ta zastosowana w pracy. Niestety, ze względu na brak pomiaru prądu silnika, niemożliwe było zastosowanie tego rozwiązania w zbudowanym stanowisku.

#### **7.2.4. Alternatywne rozwiązania natury projektowej**

Oprócz rozważań natury teoretycznej należy wspomnieć o możliwościach rozwiązania pewnych problemów natury konstrukcyjnej. Za przykład takiej koncepcji można uznać zrealizowanie połączeń elektrycznych umieszczonych między ramionami wahadła za pomocą odpowiednich pierścieni ślizgowych. W porównaniu z przewodami, pozwalają na niezawodne zasilanie bez ryzyka plątania bądź zerwania się przewodów. Niestety ze względu na ograniczenia finansowe oraz czasowe nie zdecydowano się na zastosowanie tego rozwiązania.

Transmisja danych pomiarowych między sensorami a odpowiednimi jednostkami obliczeniowymi mogła zostać zrealizowana poprzez komunikację radiową za pomocą technologii Zig Bee bądź Bluetooth. Zaletą takiego rozwiązania byłoby wykluczenie połączeń przewodowych, które mają ograniczone możliwości fizyczne wynikające z ruchu obrotowego ramion wahadła. Jako wadę należy uznać to, iż taka metoda przesyłu danych wymagałaby dodatkowych zasobów obliczeniowych systemu, który oprócz obsługi protokołów I2C oraz SPI, musiałby realizować przesył zgodnie ze standardami przyjętymi dla wyżej wymienionych technologii.

## WYKAZ LITERATURY

- [1] Oficjalna strona marki Arduino <https://www.arduino.cc/>, (data dostępu 19.11.2017 r.).
- [2] Dokumentacja programu Inventor Autodesk <https://www.autodesk.pl/products/inventor/overview>, (data dostępu 19.11.2017 r.).
- [3] Dokumentacja procesora Atmega328 [http://www.atmel.com/Images/Atmel-42735-8-bit-AVR-Microcontroller-ATmega328-328P\\_Datasheet.pdf](http://www.atmel.com/Images/Atmel-42735-8-bit-AVR-Microcontroller-ATmega328-328P_Datasheet.pdf), (data dostępu 25.11.2017 r.).
- [4] Andriejew W.P., Sabinin J. A.: *Podstawy napędu elektrycznego*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1966.
- [5] Astrom K.J., Furata K.: *Swinging Up a Pendulum by Energy Control*, Lund, Tokyo, 1997.
- [6] Bogdanov A.: *Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart*, 2004.
- [7] Brdys M.A., Zubowicz T.: *Wykłady z przedmiotu Struktury i Algorytmy Sterowania*, Gdańsk, Wydział Elektrotechniki i Automatyki PG 2014 .
- [8] Brodny J.: *Modelowanie tarcia w układach mechanicznych* 2010.
- [9] Doliński J.: [https://ep.com.pl/artykuly/10370-Analizowanie\\_protokolow\\_szeregowych\\_oscyloskopami\\_RohdeSchwarz\\_SPI\\_IsupC\\_cz\\_.html](https://ep.com.pl/artykuly/10370-Analizowanie_protokolow_szeregowych_oscyloskopami_RohdeSchwarz_SPI_IsupC_cz_.html), (data dostępu 14.11.2017 r.).
- [10] Duzinkiewicz K.: *Wykłady z przedmiotu Modelowanie i Podstawy Identyfikacji*, Gdańsk, Wydział Elektrotechniki i Automatyki PG 2017.
- [11] Duzinkiewicz K.: *Wykłady z przedmiotu Teoria Sterowania*, Gdańsk, Wydział Elektrotechniki i Automatyki PG 2017.
- [12] Dokumentacja programu Eagle Autodesk <http://eagle.autodesk.com/eagle/documentation>, (data dostępu 14.11.2017 r.).
- [13] EE & IT blog: <http://www.leniwienc.org/2014/04/28/enkoder-obrotowy-w-praktyce-prawidlowe-podlaczenie-do-mikrokontrolera-avr/>, (data dostępu 20.11.2017 r.).
- [14] Gelfand I. M., Fomin S. W.: *Rachunek wariacyjny*, Warszawa 1972 PWN.
- [15] Halliday D., Resnick R., Walker J.: *Podstawy fizyki Tom I*, Warszawa 2015 PWN.
- [16] Parametry suwnicy IGUS: [https://www.igus.pl/wpck/4770/ZWL\\_technische\\_daten](https://www.igus.pl/wpck/4770/ZWL_technische_daten), (data dostępu 20.11.2017 r.).
- [17] Jadlovska S., Sarnovsky J.: *Classical Double Inverted Pendulum – a Complex Overview of a System*, Koszyce 2012.
- [18] Kaczorek T.: *Teoria sterowania Tom I i II*, Warszawa 1982 PWN.
- [19] Kędzierski J.: *Filtr Kalmana - Zastosowanie w prostych układach sensorycznych*, Wrocław 2007.
- [20] Korenko M., Lis S., Tomasik M.: *Modulacja szerokości impulsu PWM w sterowaniu automatycznym* Uniwersytet Rolniczy w Krakowie, Wydział Inżynierii Produkcji i Energetyki 2017.
- [21] Kostro J., Lewandowski A., Markowski A. : *Automatyka w pytaniach i odpowiedziach*, Warszawa, PWN 1985.
- [22] Kostro K., Kutt F., Michna M., Ronkowski M.: *Maszyny elektryczne wokół nas*, Gdańsk, Wydział Elektrotechniki i Automatyki PG 2011.
- [23] Kuo Y.H., Lo J.C.: *Decoupled Fuzzy Sliding-Mode Control*, Taipei, National Central University. Chung-Li, 1998.
- [24] Lamar K., Kocsis A.G.: *Implementation of speed measurement for electrical drives equipped with quadrature encoder in LabView FPGA*, Budapest University of technology 2013.
- [25] Luenberger D.G.: *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*, Wiley, New York 1979.
- [26] Pazderski D.: *Wykłady z przedmiotu Systemy pomiarowe w automatyce i robotyce*, Poznań Instytut Automatyki i Robotyki PP 2017.
- [27] Dokumentacja sterownika silnika DC [https://www.pololu.com/docs/pdf/0J49/dual\\_vnh5019\\_motor\\_driver\\_shield.pdf](https://www.pololu.com/docs/pdf/0J49/dual_vnh5019_motor_driver_shield.pdf), (data dostępu 14.11.2017 r.).
- [28] Reymer B. (red.): *Mały poradnik mechanika:praca zbiorowa. T.1, Nauki matematyczno - fizyczne, materiałoznastwo*, Warszawa 1988.
- [29] Rosołowski E.: *Metody Numeryczne dla Inżynierów*, Wrocław 2012.
- [30] Rosołowski E.: *Podstawy regulacji automatycznej*, Wrocław 2016.
- [31] Rock H., Zhong W. : *Energy and Passivity Based Control of the Double Inverted Pendulum on a Cart*, Christian-Albrechts-University of Kiel, 2001.

- [32] Grochowski M., Rutkowski T.A.: *Wykłady z przedmiotu Monitowanie i Diagnostyka w Systemach Sterowania*, Gdańsk, Wydział Elektrotechniki i Automatyki PG 2017.
- [33] Rutkowski T.A., Tarnawski J.: *Wykłady z przedmiotu Komputerowe Systemy Sterowania*, Gdańsk, Wydział Elektrotechniki i Automatyki PG 2017.
- [34] MathWorks: <https://www.mathworks.com/>, (data dostępu 14.11.2017 r.).
- [35] Murray R.M.: *CDS 110b, Lecture 2 - LQR Control*, Los Angeles California 2006.
- [36] Nowak M.: *Laboratorium inteligentnych systemów sterowania*, Poznań Instytut Informatyki PP, 2010.
- [37] Singh N., Kumar Yadav S. : *Comprasion of LQR and PD controller for stabilizing Dobule Inverted Pendullum System*, Punjab 2012.
- [38] Slotine J.J., Li.W: *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, New Yersey 1991.
- [39] Sradomski W.: *Matlab. Praktyczny poradnik modelowania*, Wydawnictwo HELION, 2015.
- [40] Szabatin J.: *Podstawy teorii sygnałów*, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności 2003.
- [41] Świsulski D.: *Wykłady z przedmiotu Sensoryka Robotów*, Gdańsk, Wydział Elektrotechniki i Automatyki PG 2017.
- [42] Tomera M.: *Zmiana położenia układu odwróconego wahadła przy użyciu sterowania ślizgowego*.
- [43] Tyma J.: <http://www.jtjt.pl/filtr-kalmana>, (data dostępu 12.10.2017 r.).
- [44] Wittbrodt E.: *Wykłady z przedmiotu Mechanika Ogólna I, II i III*, Gdańsk, Wydział Mechaniczny PG 2017.
- [45] Verikas A.: *Inteligent System Lab - Soft Sensors for Monitoring*, Halmstad University 2009.
- [46] Zhou K.: *Essentials of Robust Control*, 1999.
- [47] Żabiński T.: *Tarcie i jego kompensacja w układach mechatronicznych*, 2006.
- [48] Żołądek H.: *Jakościowa teoria równań różniczkowych zwyczajnych*, Warszawa UW 2011.

## WYKAZ RYSUNKÓW

2.1. Rysunek poglądowy z oznaczonymi elementami wahadła .....	14
2.2. Rysunek poglądowy z oznaczonymi zmiennymi wejściowymi i procesowymi .....	16
2.3. Rysunek poglądowy z oznaczonymi parametrami .....	18
2.4. Rozłożenie prędkości liniowej na składowe .....	22
2.5. Podział zjawiska tarcia [8] .....	27
2.6. Przebieg czasowy wektora $\theta(t)$ dla pierwszego zestawu warunków początkowych ....	34
2.7. Przebieg czasowy wektora $\theta(t)$ dla drugiego zestawu warunków początkowych .....	35
2.8. Przebieg czasowy wektora $\theta(t)$ dla trzeciego zestawu warunków początkowych .....	35
2.9. Portret fazowy dla $\dot{\theta}_0(\theta_0)$ .....	37
2.10. Portret fazowy dla $\dot{\theta}_1(\theta_1)$ .....	38
2.11. Portret fazowy dla $\dot{\theta}_2(\theta_2)$ .....	38
3.1. Schemat zastępczy obwodu wirnika silnika DC .....	56
3.2. Schemat blokowy silnika prądu stałego [36] .....	57
3.3. Schemat przedstawiający sposób przeliczania sygnału sterującego dla urządzenia wykonawczego .....	58
3.4. Komunikat dotyczący sterowalności systemu w $P_1$ .....	64
3.5. Charakterystyka amplitudowo - fazowa $\Delta G_0(\omega_j)$ .....	65
3.6. Charakterystyka amplitudowo - fazowa $\Delta G_1(\omega_j)$ .....	66
3.7. Charakterystyka amplitudowo - fazowa $\Delta G_2(\omega_j)$ .....	66
4.1. Schemat blokowy systemu sterowania .....	70
4.2. Schemat blokowy systemu sterowania dla algorytmów estymacji .....	73
4.3. Schemat blokowy systemu sterowania dla algorytmu LQR .....	78
4.4. Symulacja 1 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla pierwszego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń $z(t)$ .....	81
4.5. Symulacja 2 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla drugiego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń $z(t)$ .....	81
4.6. Symulacja 1 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ dla pierwszego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń $z(t)$ .....	82
4.7. Symulacja 2 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ dla drugiego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń $z(t)$ .....	82
4.8. Symulacja 3 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla pierwszego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	83
4.9. Symulacja 4 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla drugiego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	83
4.10. Symulacja 3 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ dla pierwszego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	84
4.11. Symulacja 4 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ dla drugiego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	84
4.12. Symulacja 5 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla parametrów $I_{k_{min}}$ i $m_{k_{min}}$ z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	85

4.13. Symulacja 6 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla parametrów $I_{k_{max}}$ i $m_{k_{max}}$ z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	86
4.14. Symulacja 5 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	86
4.15. Symulacja 6 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	87
4.16. Schemat blokowy systemu sterowania dla algorytmu typu PD .....	89
4.17. Symulacja 1 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla pierwszego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń $z(t)$ .....	92
4.18. Symulacja 2 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla drugiego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń $z(t)$ .....	92
4.19. Symulacja 1 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ dla pierwszego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń $z(t)$ .....	93
4.20. Symulacja 2 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ dla drugiego zestawu warunków początkowych, bez uwzględnienia zakłóceń $z(t)$ .....	93
4.21. Symulacja 3 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla pierwszego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	94
4.22. Symulacja 4 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla drugiego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	94
4.23. Symulacja 3 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ dla pierwszego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	95
4.24. Symulacja 4 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ dla drugiego zestawu warunków początkowych z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	95
4.25. Symulacja 5 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla parametrów $I_{k_{min}}$ i $m_{k_{min}}$ z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	96
4.26. Symulacja 6 - trajektorie składowych wektora $c(t)$ dla parametrów $I_{k_{max}}$ i $m_{k_{max}}$ z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	97
4.27. Symulacja 5 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	97
4.28. Symulacja 6 - przebieg czasowy sygnału sterującego $u(t)$ z uwzględnieniem zakłóceń $z(t)$ .....	98
4.29. Trajektorie dla wskaźnika jakościowego $J_{c1}$ .....	99
4.30. Trajektorie dla wskaźnika jakościowego $J_{c2}$ .....	99
4.31. Trajektorie dla wskaźnika jakościowego $J_{c3}$ .....	100
4.32. Przebiegi czasowe wektora $c(t)$ dla mechanizmu Swing - up .....	102
4.33. Przebiegi czasowe sygnału sterującego $u(t)$ dla mechanizmu Swing - up .....	103
5.1. Przykładowy schemat połączeń w interfejsie SPI [9].....	105
5.2. Schemat blokowy urządzeń systemu sterowania .....	106
5.3. Suwnica liniowa ZLW-1040 firmy Igus [16] .....	107
5.4. Mocowanie enkodera umieszczonego na wózku .....	108
5.5. Mocowanie enkodera umieszczonego na ramieniu .....	108
5.6. Uchwyt na końcu ramienia pierwszego .....	109
5.7. Uchwyt na końcu drugiego ramienia z możliwością umieszczania ciężarków.....	110
5.8. Płyta PCB z zamocowanymi modułami elektronicznymi .....	113

5.9. Enkoder wraz z mocowaniem .....	114
5.10. Sposób mocowania czujników krańcowych .....	114
5.11. Mocowanie suwnicy do blatu stołu .....	115
5.12. Połączenie silnika z suwnicą liniową .....	116
5.13. Połączenie enkodera z wałem suwnicy .....	116
6.1. Przebiegi sygnałów na pinach enkodera (CW - clockwise), (CCW - counter-clockwise) [13] .....	120
6.2. Przebiegi sygnałów na pinach enkodera (CW - clockwise), (CCW - counter-clockwise) [13] .....	121
6.3. Przebiegi położeń oraz sterowań wahadła podczas działania regulatora PD na obiekcie rzeczywistym .....	126
6.4. Przebiegi położeń oraz sterowania wahadła podczas działania regulatora PD dla symulacji .....	126
6.5. Przebiegi położeń oraz sterowania wahadła podczas działania regulatora LQR na obiekcie rzeczywistym, w wariancie z enkoderami i żyroskopami .....	128
6.6. Przebiegi położeń oraz sterowania wahadła podczas działania regulatora LQR na obiekcie rzeczywistym, w wariancie z enkoderami .....	128
6.7. Przebiegi położeń oraz sterowania wahadła podczas działania regulatora LQR dla symulacji .....	129
7.1. Portret fazowy dla $\dot{\theta}_0(\theta_0)$ .....	145
7.2. Portret fazowy dla $\dot{\theta}_1(\theta_1)$ .....	145
7.3. Portret fazowy dla $\dot{\theta}_2(\theta_2)$ .....	146
7.1. Wykres mianownika dla $x_1$ i $x_2$ .....	148
7.2. Przebieg zmian wartości mianownika dla różnych warunków początkowych .....	149
7.1. Komunikat dotyczący stabilności $P_1$ i $P_2$ .....	151
7.1. Stanowisko pomiarowe .....	152
7.2. Charakterystyka wypełnienia PWM do siły oddziałującej na wózek .....	153
7.1. Wykres błędu względnego enkodera przy pomiarze prędkości obrotowej .....	155

## WYKAZ TABEL

2.1. Parametry fizyczne wahadła.....	28
2.2. Parametry fizyczne wahadła.....	33
2.3. Parametry procedur numerycznych.....	34
4.1. Parametry wahadła dla celów badania swing - up.....	102
5.1. Urządzenia pomiarowe .....	111



## Dodatek A: Dobór nastaw regulatora PD z wykorzystaniem metod przestrzeni stanu

Niech:  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{c}(t), \mathbf{c}_{ref}(t) \in \mathbb{R}^q$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^m$  oznaczają odpowiednio wektory: stanu, wejść sterujących, wyjść sterowanych i ich wartości oraz wyjść dostępnych pomiarowo. Przyjmując jako stan początkowy  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  można zapisać, iż  $\forall t \in [t_0, \infty]$ , liniowy, stacjonarny, deterministyczny system dynamiczny jest opisany [11]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \\ \mathbf{c}(t) = \mathbf{E}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (7.1)$$

gdzie  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  oznaczają odpowiednio macierze: stanu, sterowań, wyjść pomiarowych i sterowanych [18, 30].

Człon związany ze sterowaniem  $\mathbf{u}(t)$  w równaniach wyjścia pominięto ze względu na brak sprzężenia w przód wiążącego sygnał sterujący z wyjściem [11].

Jeżeli system cechuje się sterowalnością możliwe jest zastosowanie odpowiedniego algorytmu sterowania. Chcąc stabilizować stan oraz nadażanie za trajektorią referencyjną, można zdefiniować prawo sterowania w postaci [11]:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{ref}(t) + \mathbf{u}_x(t), \quad (7.2)$$

gdzie:

$$\mathbf{u}_x(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (7.3)$$

$$\mathbf{u}_{ref}(t) = \mathbf{K}_r \mathbf{c}_{ref}(t). \quad (7.4)$$

Człon  $\mathbf{u}_x(t)$  (7.3) odpowiada za stabilność wewnętrzną obiektu sterowania. Jest on często nazywany sprzężeniem od stanu. Dobór macierzy wzmocnień  $\mathbf{K}$  pozwala na alokację biegunów, tak aby spełnić z góry założone wymagania dotyczące kryteriów jakościowych sterowania. Dynamika wewnętrzna takiego systemu cechuje się asymptotyczną stabilnością, której wynikiem jest to, że warunki początkowe zostają sprowadzone do 0 w pewnym czasie  $t \in [t_0, \infty]$ , co można zapisać jako (7.5) [38]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\|_2 = 0, \quad (7.5)$$

gdzie  $\|(\cdot)\|_2$  oznacza normę euklidesową.

Dobór macierzy  $\mathbf{K}$  może zostać dokonany poprzez arbitralne założenie biegunów układu regulacji lub poprzez rozwiązanie odpowiedniego zadania optymalizacji [18].

Ponadto, aby system dynamiczny nadążał za trajekcją referencyjną trzeba dobrać macierz wzmocnień  $K_r$ , która to pozwala na osiągnięcie w stanie ustalonym [11]:

$$c(t) \rightarrow c_{ref}(t). \quad (7.6)$$

Macierz wzmocnienia  $K_r$  można wyznaczyć z zależności [11]:

$$K_r = -(E(A - BK)^{-1}B)^{-1}, \quad (7.7)$$

którą można otrzymać przeprowadzając następujące rozumowanie.

Wiedząc, że system ma śledzić pewną trajekcję referencyjną  $c_{ref}(t)$ , w stanie ustalonym zachodzi (7.6), co pozwala zapisać [11, 30]:

$$c_{ref}(t) = Ex(t), \quad (7.8)$$

$$x(t) \rightarrow x_s, \quad (7.9)$$

$$\dot{x}(t) \rightarrow 0, \quad (7.10)$$

$$u_{ref} = const, \quad (7.11)$$

gdzie  $x_s$  jest wartością wektora zmiennych stanu  $x(t)$  w stanie ustalonym [11, 30].

Podstawiając do równania stanu (7.1) sterowanie w postaci (7.2) otrzymuje się [11]:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bu_{ref}(t), \quad (7.12)$$

co po uwzględnieniu (7.8), (7.9), (7.10) oraz (7.11) daje [11]:

$$0 = (A - BK)x_s + Bu_{ref}. \quad (7.13)$$

Po przekształceniu (7.13) otrzymano [11]:

$$x_s = -(A - BK)^{-1}Bu_{ref}. \quad (7.14)$$

Podstawiając w (7.14) za  $x_s$  (7.8) [11]:

$$c_{ref} = -E(A - BK)^{-1}Bu_{ref}, \quad (7.15)$$

co po przekształceniu (7.15) na  $u_{ref}$  dało [11]:

$$u_{ref} = -(E(A - BK)^{-1}B)^{-1}c_{ref}. \quad (7.16)$$

Przyrównując (7.4) do (7.16) można zauważyć, że zależność (7.7) jest prawdziwa.

Działanie tego typu regulatora można porównać do działania szeregu regulatorów PD, których równanie można opisać jako [11]:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}_p \mathbf{e}(t) + \mathbf{k}_d \dot{\mathbf{e}}(t), \quad (7.17)$$

gdzie  $\mathbf{k}_p$  oraz  $\mathbf{k}_d$  są kolejno macierzami wzmocnień członu proporcjonalnego oraz różniczkującego regulatora PD [11].

Wektor  $\mathbf{e}(t)$  jest błędem sterowania danym jako [11]:

$$\mathbf{e}(t) = -\mathbf{c}(t) + \mathbf{c}_{ref}(t). \quad (7.18)$$

Po podstawieniu  $\mathbf{c}(t)$  z (7.1) do (7.18) można otrzymać:

$$\mathbf{e}(t) = -\mathbf{E}\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}_{ref}(t), \quad (7.19)$$

a po zróżniczkowaniu (7.19):

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = -\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{c}}_{ref}(t). \quad (7.20)$$

Jeżeli  $\mathbf{c}_{ref}(t)$  jest trajekcją stała wartościową, jej pochodna jest równa 0, co można zapisać jako:

$$\dot{\mathbf{c}}_{ref}(t) = 0. \quad (7.21)$$

Wiedząc, że dla obiektu wahadła  $n = 6$ ,  $p = 1$ ,  $q = 3$  oraz  $m = 3$  oraz, że wektor stanu  $\mathbf{x}(t)$  jest zdefiniowany jako:

$$\mathbf{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}(t) & \dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{bmatrix}^T, \quad (7.22)$$

oraz, że macierz  $\mathbf{E}$  ma postać:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7.23)$$

a macierze  $\mathbf{k}_p$  oraz  $\mathbf{k}_d$  stają się wektorami o wymiarach  $\dim(\mathbf{k}_p) = 1 \times 3$  i  $\dim(\mathbf{k}_d) = 1 \times 3$ .

Podstawiając do (7.17) zależności z punktów (7.19), (7.20) oraz (7.21) uzyskuje się równanie regulatora PD w postaci:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{k}_p \mathbf{c}_{ref}(t) - \mathbf{k}_p \mathbf{E}\mathbf{x}(t) - \mathbf{k}_d \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t), \quad (7.24)$$

przekształcając (7.24) przy danej macierzy  $E$  z (7.23):

$$u(t) = \mathbf{k}_p \mathbf{c}_{ref}(t) - \mathbf{k}_p \boldsymbol{\theta}(t) - \mathbf{k}_d \dot{\boldsymbol{\theta}}(t), \quad (7.25)$$

a następnie, przy wykorzystaniu (7.25) i (7.22) otrzymuje się następujące prawo sterowania:

$$u(t) = \mathbf{k}_p \mathbf{c}_{ref}(t) - \begin{bmatrix} \mathbf{k}_p & \mathbf{k}_d \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \quad (7.26)$$

Porównując stronami (7.26) z (7.2) otrzymano następujące wyniki:

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{k}_p, \quad (7.27)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_p & \mathbf{k}_d \end{bmatrix}. \quad (7.28)$$

Na podstawie powyższych obliczeń można wyciągnąć wniosek, że znając nastawy regulatora PD, można je bezpośrednio przenieść na regulator operujący na zmiennych stanu, według (7.27) i (7.28). W przypadku, gdy znana jest macierz  $\mathbf{K}$ , jej wartości przenosi się do wnętrza regulatorów PD.

Warto zauważyć, że jeżeli macierz  $\mathbf{K}$  zostanie wyznaczona w skutek rozwiązania pewnego zadania optymalizacji (np. LQR), to wówczas równoważny regulator PD, również posiada tę cechę.

## Dodatek B: Badanie chaotycznej dynamiki wahadła

Zgodnie z teorią systemów dynamicznych, wiedząc że znajomość pewnych parametrów oraz warunków początkowych układu jest znana ze skończoną dokładnością, nawet niewielkie zmiany ich wartości mogą spowodować znaczące zmiany w zachowaniu dynamiki systemu. Może to skutkować tym że , sposób działania układu staje się nieprzewidywalny. Zjawisko to jest nazywane chaosem układu dynamicznego [38].

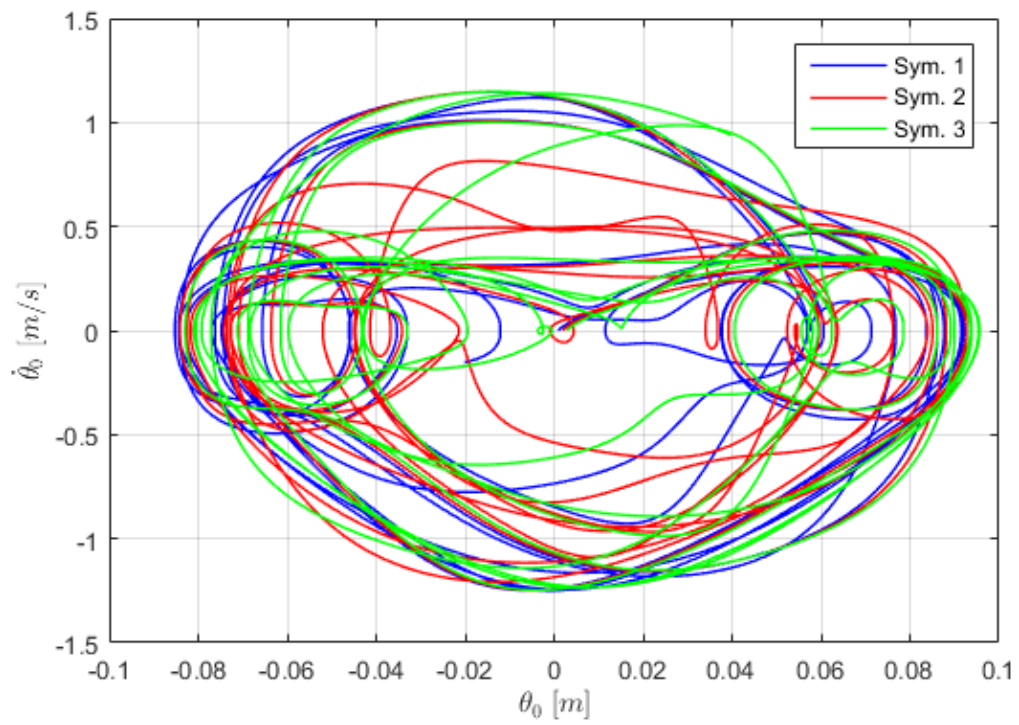
Rozważane w niniejszej pracy wahadło jest przykładem systemu chaotycznego. W celu pokazania tego zjawiska przeprowadzono eksperyment symulacyjny w środowisku Matlab/Simulink z zastosowaniem metody płaszczyzny fazowej. Eksperyment polegał na przeprowadzeniu trzech symulacji, w których przy zastosowaniu modelu symulacyjnego wahadła zmieniano warunki początkowe. Czas symulacji wyniósł 10 jednostek czasu, a warunki początkowe zmieniano dla położenia kąтового, liniowego oraz dla prędkości liniowej oraz kątowych. Dodatkowo, na potrzeby symulacji, wyłączono z modelu wpływ sił oraz momentów tarcia, które to rozpraszałyby energię wahadła w czasie. Dokonano tego eliminując wektor  $\eta$ , którego wartości zdefiniowano w (2.52) poprzez przyrównanie go do 0.

Wartości warunków początkowych były wyznaczone według następującego algorytmu:

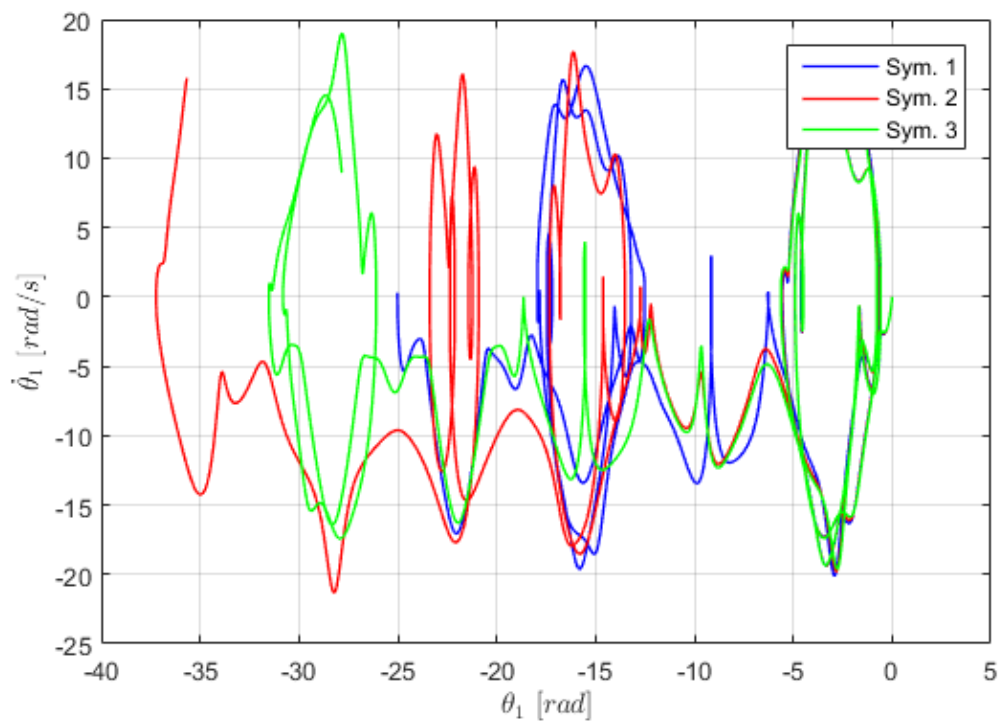
- $\theta_0(0) = 0 + 0.0001k$  - warunek początkowy dla przemieszczenia liniowego wózka,
- $\theta_1(0) = 0 + 0.0001k$  - warunek początkowy dla przemieszczenia kąowego ramienia pierwszego,
- $\theta_2(0) = 0.1 + 0.0001k$  - warunek początkowy dla przemieszczenia kąowego ramienia drugiego,
- $\dot{\theta}_0(0) = 0 + 0.0001k$  - warunek początkowy dla prędkości liniowej wózka,
- $\dot{\theta}_1(0) = 0 + 0.0001k$  - warunek początkowy dla prędkości kąowej ramienia pierwszego,
- $\dot{\theta}_2(0) = 0 + 0.0001k$  - warunek początkowy dla prędkości kąowej ramienia drugiego,

gdzie  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

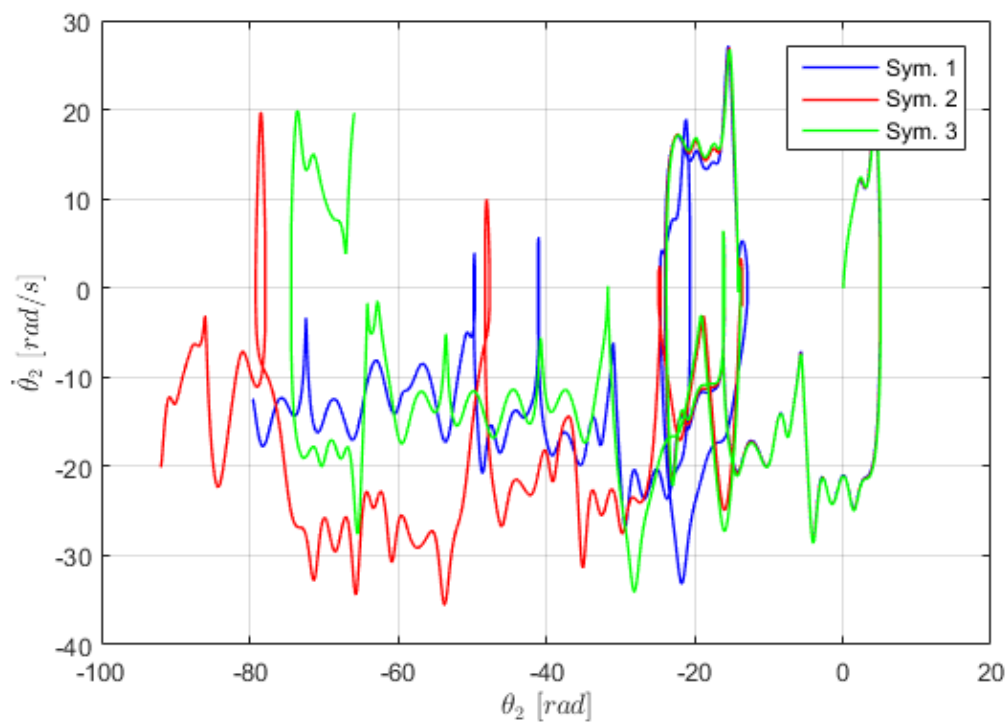
Wyniki eksperymentu zaprezentowano na rysunkach od 7.1, 7.2 i 7.3. Ze względu na potrzebę przedstawienia zależności między zmienną stanu a jej pochodną, dokonano przekształcenia przestrzeni sześciowymiarowej, w której zawiera się wektor  $\theta(t) \in \mathbb{R}^6$ , na trzy podprzestrzenie dwuwymiarowe  $\mathbb{R}^2$ . Ponadto, w celu podkreślenia różnic w zachowaniu systemu dla różnych wartości warunków początkowych, trajektorie fazowe dla wszystkich symulacji umieszczono na jednym wykresie, dla danej podprzestrzeni  $\mathbb{R}^2$ . Do stworzenia portretów napisano odpowiedni skrypt w programie Matlab Simulink, który można znaleźć na płycie CD w Dodatku I pod tytułem *chaos.m*.



Rys. 7.1. Portret fazowy dla  $\dot{\theta}_0(\theta_0)$



Rys. 7.2. Portret fazowy dla  $\dot{\theta}_1(\theta_1)$



Rys. 7.3. Portret fazowy dla  $\dot{\theta}_2(\theta_2)$

Analizując portrety fazowe zamieszczone na rysunkach 7.1, 7.2 oraz 7.3 można zauważyć rozbieżności w ich przebiegach. Już niewielkie zmiany w warunkach początkowych, spowodowały że dla kolejnych symulacji modelu, zachowanie obiektu jest istotnie inne w porównaniu do poprzednich wywołań algorytmu.

Zatem, przy wykorzystaniu metody płaszczyzny fazowej, pokazano że model wahadła jest chaotyczny.

## Dodatek C: Dowód nieosobliwości macierzy $A_r$

W celu zachowania logicznej spójności w rozumowaniu autorów, niezbędne było dokonanie odpowiedniego dowodu, który poświadczałby o nieosobliwości macierzy  $A_r$ .

Równania fizyczne, wyprowadzone w (2.65) wyrażają bilans sił oraz momentów w całym układzie wahadła. Stosując zaproponowaną przez autorów metodę rozwikłania modelu poznawczego ((2.58) oraz (2.59)) na równania drugiego stopnia, konieczne było umieszczenie współczynników odpowiednich zmiennych procesowych w macierzach. Fizyczna interpretacja macierzy  $A_r$  ma charakter inercyjny, ze względu na występowanie w niej członów związanych z momentami bezwładności oraz masami ramion wahadła. Identyczny sens wykazuje macierz opisująca inercję ramion manipulatora  $H$ , której konstrukcję przedstawiono w rozdziale szóstym książki Slotine J.J., Li.W: *Applied Nonlinear Control* [38].

Rozdział dziewiąty powyżej wspomnianej publikacji nasuwa koncepcję udowodnienia nieosobliwości macierzy  $H$  poprzez wykazanie jej dodatniej określoności. Niestety, dla macierzy  $A_r$  analogiczna operacja byłby niemożliwa ze względu na fakt, iż  $x_1$  oraz  $x_2$  są funkcjami czasu i konieczne byłoby wykonanie dowodu nieskończoną ilość razy.

Ze względu na istotę przekształcenia (2.59), autorzy zdecydowali się na sprawdzenie wprost, czy wyznacznik z macierzy  $A_r$ , będący jednocześnie mianownikiem równań (2.65) jest różny od zera.

Równanie mianownika jest dane jako:

$$\begin{aligned} M = & ACE + 2B_1 \cos x_1 B_2 \cos x_2 D_1 \cos(x_1 - x_2) - B_1^2 \cos^2 x_1 E \\ & - AD_1^2 \cos^2(x_1 - x_2) - B_2^2 \cos^2 x_2 C. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Obie zmienne fizyczne występujące w równaniu mianownika (7.29), charakteryzują się następującą dziedziną:

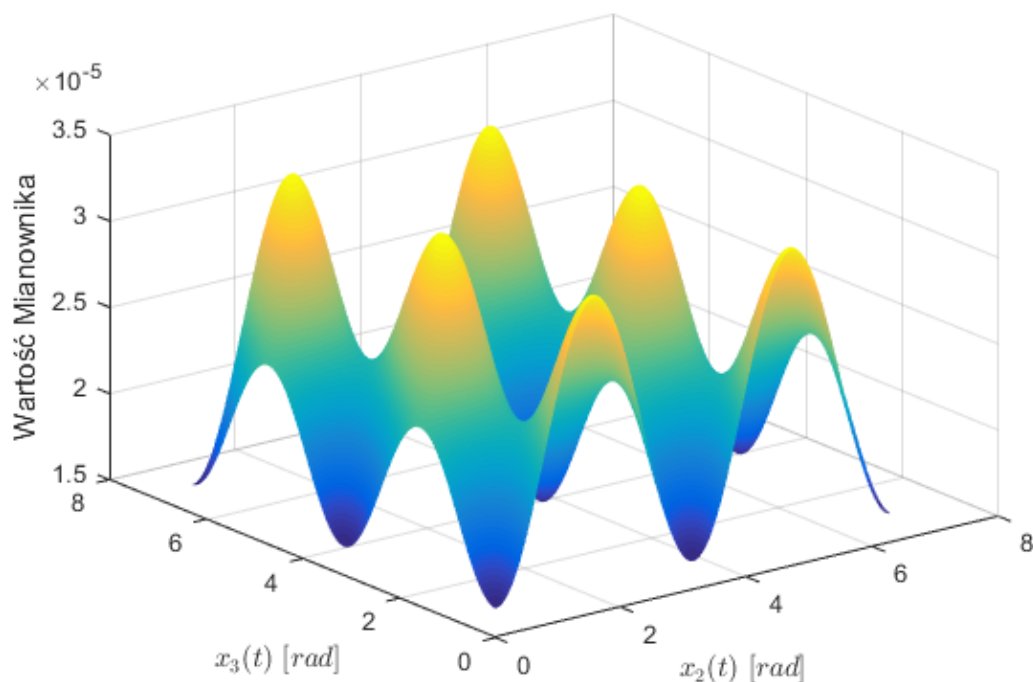
$$x_1 \in [0, 2\pi],$$

$$x_2 \in [0, 2\pi].$$

Najprostszym oraz najbardziej intuicyjnym rozwiązaniem powyższego problemu było oszacowanie wartości mianownika dla kilku różnych punktów w dziedzinie. Niestety ze względu na fakt, iż metoda ta nie rozstrzyga tego czy mianownik jest zawsze różny od zera, konieczne było zastosowanie innej metodologii.

Metodą jaką autorzy zdecydowali się zastosować w celu udowodnienia nieosobliwości macierzy  $A_r$  było przebadanie mianownika  $M$  jako funkcji dwóch zmiennych  $x_1$  oraz  $x_2$ . Następnie wykreślono wykres funkcji w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , tak aby widoczne były punkty ekstremalne oraz ewentualne miejsca zerowe. Do stworzenia wykresu posłużono się skryptem napisanym w programie Matlab Sillmulink, który można znaleźć na płycie CD w Dodatku I pod tytułem *test\_mianownika.m*. Na rysunku (7.1) zamieszczono wykres funkcji  $M(x_1, x_2)$ :





Rys. 7.1. Wykres mianownika dla  $x_1$  i  $x_2$

Analizując wykres funkcji, można zauważyć, że nie osiąga on zera, co może nasunąć wniosek, iż nie jest możliwe aby wartość mianownika osiągała wartość zerową, co implikuje nieosobliwość macierzy  $A_r$ .

W celu dodatkowego zilustrowania powyższego rozumowania, autorzy przeprowadzili dodatkowe badania symulacyjne pokazujące zbieżność mianownika. W pierwszej kolejności warto poczynić pewne założenia:

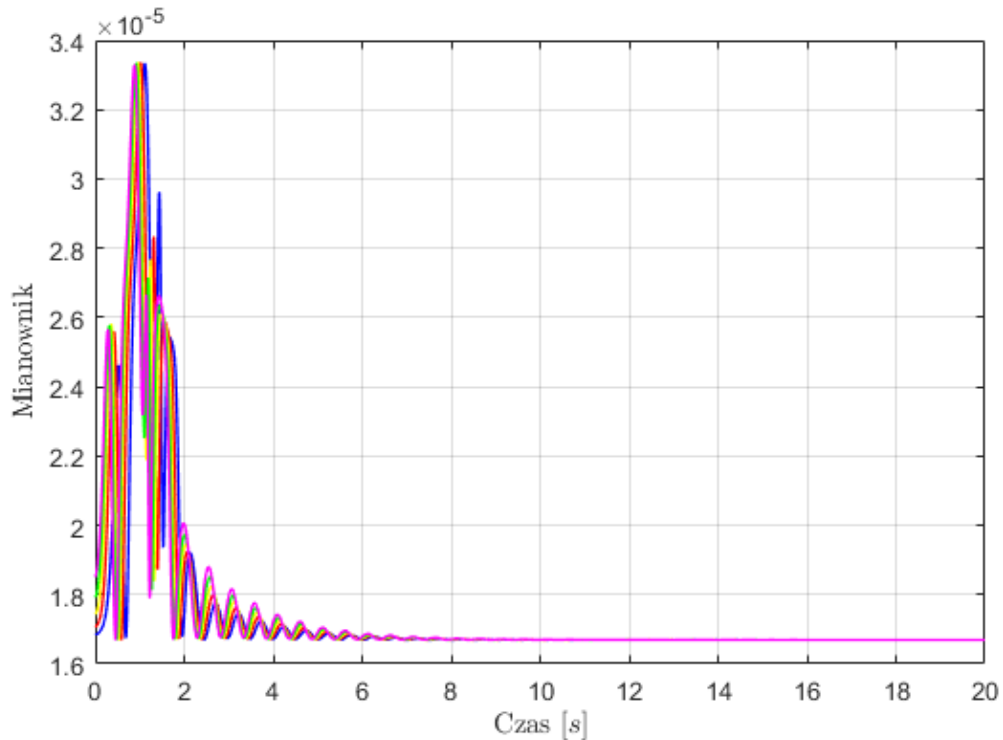
- Przy uwzględnieniu stałych wartości parametrów w tym wpływu tarć, dla dowolnych warunków początkowych wahadło będzie tracić energię kinetyczną, zwalniając oraz zmierzając do dolnego punktu pracy  $P_2$ ,
- Punkt  $P_2$  jest asymptotycznie stabilny, co powoduje że wartości stanów przy czasie dążącym do nieskończoności osiągną pewną skończoną wartość. Dowód asymptotycznej stabilności punktu równowagi  $P_2$  zaprezentowano w Dodatku D.

Zatem, można znaleźć wartość mianownika w dolnym punkcie pracy, a następnie przy użyciu symulacji sprawdzić, czy po odpowiednio dużym czasie wartości mianownika będą zbieżne do pewnej różnej od zera stałej  $\varepsilon$ .

Podstawiając  $P_2$  do  $M$  otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 M|_{P_2} &= ACE + 2B_1B_2D_1 - B_1^2E - AD_1^2 - B_2^2C \\
 &= \varepsilon \simeq 1,6691 \times 10^{-5}.
 \end{aligned}
 \tag{7.30}$$

Następnie dla różnych zestawień warunków początkowych systemu, przeprowadzono szereg badań symulacyjnych, w celu sprawdzenia czy w  $t \rightarrow \infty$  wynik będzie zbieżny do określonego w (7.30)  $\varepsilon$ . Przy użyciu odpowiedniego skryptu w programie Matlab Simulink, który można znaleźć na płycie CD w Dodatku I pod tytułem *podglad\_mianownika.m*, dla czasu trwania symulacji równego 20 jednostek czasu, zdecydowano się na przebadanie pięciu różnych zestawów warunków początkowych. Wyniki eksperymentu numerycznego, przedstawiono na poniższym rysunku 7.2.



Rys. 7.2. Przebieg zmian wartości mianownika dla różnych warunków początkowych

Analizując wartości przebiegu w powiększeniu, można zauważyć, iż po pewnym czasie wartości mianownika, przy niewielkich oscylacjach zbiegają ku wartości  $1,6691 \times 10^{-5}$ .

Mając na uwadze treść tezy początkowej, niesprzeczne założenia oraz powyżej zamieszczone dowody analityczne oraz symulacyjne właściwym jest dojście do wniosku, iż macierz  $A_r$  jest nieosobliwa, gdyż dla dowolnych warunków początkowych, system dynamiczny zbiega do  $P_2$  nie może przekroczyć  $\varepsilon = 1,6691 \times 10^{-5}$ .

## Dodatek D: Badanie lokalnej stabilności punktów stacjonarnych za pomocą pośredniej metody Lapunov'a

Analiza stabilności obiektów nieliniowych jest zazwyczaj procesem bardzo żmudnym oraz złożonym matematycznie. Jeżeli jest możliwa linearyzacja modelu wokół pewnego punktu pracy  $\bar{x}$ , wówczas można skorzystać z pośredniej metody Lapunova. Metoda ta sprawdza się jedynie przy badaniu lokalnej, stabilności dla danego punktu równowagi  $\bar{x}$  [18, 38]. Polega ona na rozwinięciu równań stanu układu w szereg Taylora, czego podstawy teoretyczne nakreślono w (3.9), (3.10) oraz (3.11).

Koniecznym jest zbadanie wartości własnych macierzy  $A$  oznaczonych wektorem  $\lambda$ . System jest lokalnie asymptotycznie stabilny jeżeli dla wszystkich wartości własnych systemu, ich części rzeczywiste są mniejsze od 0. W przypadku, gdy jedna z wartości własnych macierzy stanu ma część rzeczywistą równą 0, to system cechuje się krytyczną stabilnością [18].

Wiedząc, że w analizie stabilności punktów pracy  $P_1$  i  $P_2$  położenie wózka nie musi być brane pod uwagę, zdecydowano się na dekompozycję macierzy  $A$  do macierzy  $A_{lap}$ , w której wykluczono współczynniki związane z położeniem wózka  $x_1(t)$  oraz prędkością liniową wózka  $x_4(t)$ .

Wówczas macierz  $A_{lap}$  wyniosła:

$$A_{lap} \triangleq \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} & A_{26} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} & A_{36} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} & A_{56} \\ A_{62} & A_{63} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix}. \quad (7.31)$$

Wartości elementów macierzy (7.31) zaczerpnięto jako wynik linearyzacji wokół punktu równowagi  $P_1$  z (3.39) oraz  $P_2$  z (3.40).

Aby znaleźć wartości własne macierzy, można wykorzystać równanie charakterystyczne postaci:

$$\det(\lambda I - A_{lap}|_{P_1, P_2}) = 0, \quad (7.32)$$

za pomocą którego uzyskuje się wielomian charakterystyczny macierzy  $A_{lap}|_{P_1, P_2}$  w danym punkcie pracy. Na jego podstawie można określić wektor wartości własnych  $\lambda$ , które dla rozpatrywanego modelu  $\lambda \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  [30].

Obliczenia numeryczne, realizujące zależność (7.32) zostały wykonane przy pomocy specjalnie przygotowanego skryptu napisanego w programie Matlab Simulink, który można znaleźć na płycie CD w Dodatku I pod nazwą *wyznacz\_lqr.m*. Program ten wykonuje się po uruchomieniu skryptu pod nazwą *dip\_sterowanie.m*. Efektem jego działania jest zwrot komunikatu w oknie dialogowym, który to obwieszcza o rodzaju stabilności. Na rysunku 7.1 zaprezentowano screen z programu Matlab Simulink, który przedstawia wyniki badania stabilności dla obu punktów równowagi.

```

Command Window
Obiekt jest Sterowalny w P1
Obiekt jest Sterowalny w P2
Punkt pracy P1 nie jest lokalnie, asymptotycznie stabilny
Punkt pracy P2 jest lokalnie, asymptotycznie stabilny
fx >>

```

Rys. 7.1. Komunikat dotyczący stabilności  $P_1$  i  $P_2$

Dla górnego punktu równowagi  $P_1$  wektor wartości własnych macierzy  $A_{lap}|_{P_1}$  wyniósł:

$$\lambda|_{P_1} = [-17.07 \quad -6.52 \quad 7.48 \quad 5.73], \quad (7.33)$$

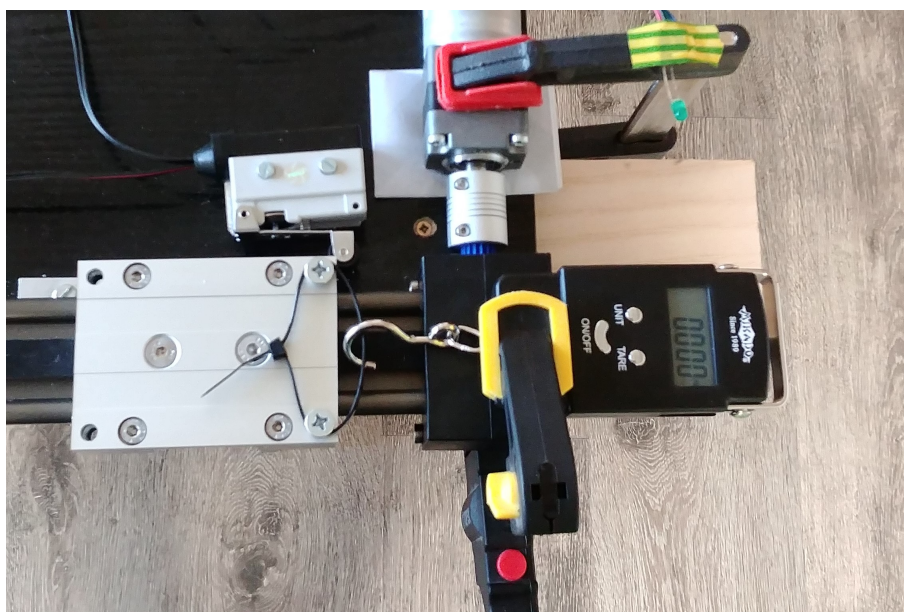
natomiast dla dolnego punktu równowagi  $P_2$ , wektor wartości własnych macierzy  $A_{lap}|_{P_2}$  wyniósł:

$$\lambda|_{P_2} = [-4.86 + 9.93i \quad -4.86 - 9.93i \quad -0.32 + 6.23i \quad -0.32 - 6.23i]. \quad (7.34)$$

Komunikaty obwieszczające wykonanie się programu oraz otrzymane wartości wektorów własnych z (7.33) i (7.34) mają jednoznaczną interpretację. Górny punkt równowagi  $P_1$  jest lokalnie niestabilny, co można wprost powiązać z fizycznym działaniem układu oraz otrzymanymi wynikami symulacyjnymi. W przypadku dolnego punktu równowagi  $P_2$ , wynik analiz pokrywa się z wnioskami dotyczącymi badania portretów fazowych zamieszczonych na rysunkach 2.9, 2.10 i 2.11. Punkt ten jest lokalnie, asymptotycznie stabilny a jego macierz  $A_{lap}|_{P_2}$  jest macierzą Hurwitza [18].

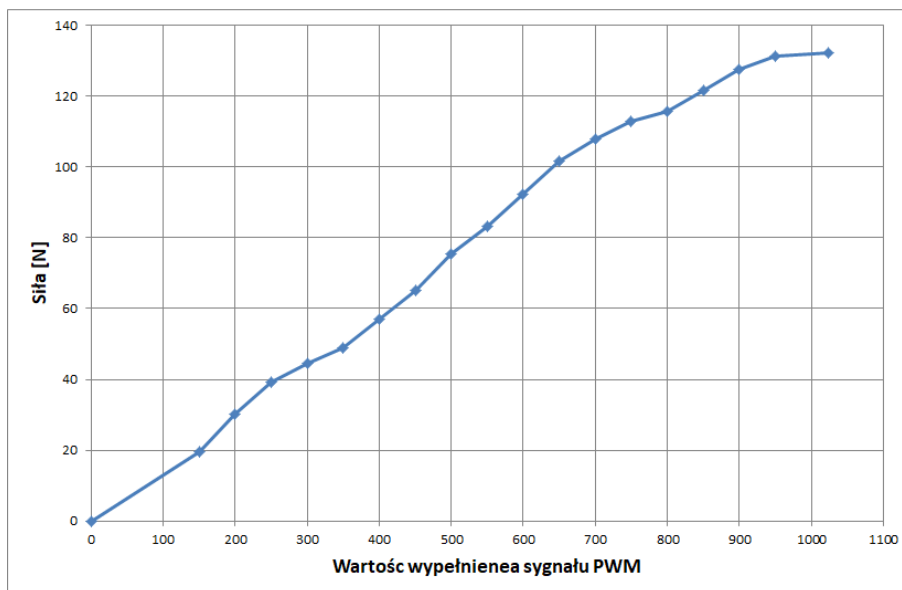
## Dodatek E: Badanie charakterystyki silnika DC

Ze względu na to, że wartością sterującą  $u(t)$  pochodząca z urządzenia wykonawczego jest siła wyrażona w  $N$ , koniecznym było wyznaczenie zależności pomiędzy wypełnieniem sygnału PWM generowanego przez mikrokontroler a siłą przykładaną do wózka. Badania wykonano dla obiektu pozbawionego ramion oraz mocowań. Do wózka jeźdźnego przymocowano wagę hakową, która pozwalała na dokonywanie pomiarów z dokładnością  $10\text{ g}$  w zakresie  $0 - 50\text{ kg}$ . Wypełnienie modulacji PWM było zadawane z pozycji komputera, który poprzez interfejs USB przekazywał dane do mikrokontrolera. Układ sterowania na podstawie otrzymanych danych generował wymagane napięcie. Aby uniknąć dynamicznych zrywów silnika, które mogłyby powodować duże prądy chwilowe oraz ewentualne uszkodzenie układu, napięcie było zwiększane metodą tzw. rampy i utrzymywane na danym poziomie przez 4 sekundy. Czas ten pozwalał na dokonanie pomiaru. W celach pomocniczych na stanowisku zainstalowano diodę LED, która sygnalizowała osiągnięcie zadanej wartości wypełnienia sygnału PWM. Stanowisko pomiarowe przedstawiono na rysunku 7.1.



Rys. 7.1. Stanowisko pomiarowe

Urządzenie pomiarowe w swojej istocie jest siłomierzem wyskalowanym w jednostkach masy przy założeniu określonej wartości przyspieszenia ziemskiego, dlatego możliwe jest otrzymanie siły wyrażonej w  $N$  po odpowiednim przemnożeniu otrzymanego pomiaru. Przyjęto wartość przyspieszenia grawitacyjnego równą  $g = 9,81\text{ m/s}^2$ . Po wykonaniu serii pomiarów otrzymano zależność siły ciągnącej wózek od wypełnienia sygnału PWM, która została przedstawiona na rysunku 7.2.



Rys. 7.2. Charakterystyka wypełnienia PWM do siły oddziałującej na wózek

## Dodatek F: Wybór metody pomiaru prędkości za pomocą enkodera inkrementalnego

Sygnal dyskretny otrzymywany z przetwornika obrotowo-impulsowego wymaga odpowiedniego przetworzenia w celu określenia prędkości obrotowej. Wybór metody pomiarowej dokonywany jest tak, aby minimalizować błąd względny enkodera i jest podyktowany założonym zakresem prędkości obrotowej. Prędkość obrotowa może być określana na podstawie pomiaru częstotliwości lub okresu sygnału wyjściowego.

Pomiar częstotliwości polega na zliczaniu okresów sygnału wyjściowego w stałym czasie. Błąd pomiaru jest w tym przypadku większy przy małych prędkościach obrotowych. Zmniejszenie błędu można uzyskać poprzez wydłużanie czasu pomiaru, co nie zawsze jest możliwe, szczególnie w systemach krytycznych czasowo [41]. Prędkość obrotową dla tej metody obliczyć można z (7.35)

$$\omega = \frac{X}{T_m ER}, \quad (7.35)$$

gdzie:

- $\omega$  - prędkość obrotowa [obr/s],
- $T_m$  - czas pomiaru [s],
- $X$  - ilość zliczonych okresów sygnału w czasie  $T_m$ ,
- $E$  - mnożnik zależny od trybu obsługi enkodera (1, 2, 4),
- $R$  - rozdzielczość enkodera.

Błąd kwantowania  $\Delta\omega$  przedstawiony jest poniższym równaniem:

$$\Delta\omega = \frac{1}{T_m ER}, \quad (7.36)$$

Błąd względny pomiaru prędkości przy metodzie częstotliwościowej  $e_{rel_f}$  może zostać obliczony przez dzielenie błędu kwantowania  $\Delta\omega$  przez aktualną prędkość obrotową  $\omega$  [24].

$$e_{rel_f} = \frac{\Delta\omega}{\omega}. \quad (7.37)$$

Druga metoda polegająca na pomiarze okresu sygnału wyjściowego enkodera polega na pomiarze czasu pomiędzy dwoma sąsiednimi narastającymi lub opadającymi zboczami sygnału. Metoda ta cechuje się większym błędem przy wyższych prędkościach. Czas ten mierzony jest poprzez zliczanie okresów sygnału z generatora wzorcowego. Zmniejszenie błędu można uzyskać poprzez zwiększanie częstotliwości generatora wzorcowego, co może być ograniczone przez możliwości stosowanego sprzętu [41]. Prędkość obrotową dla metody pomiaru okresu obliczyć można z (7.38)

$$\omega = \frac{f_{clk}}{XER}, \quad (7.38)$$

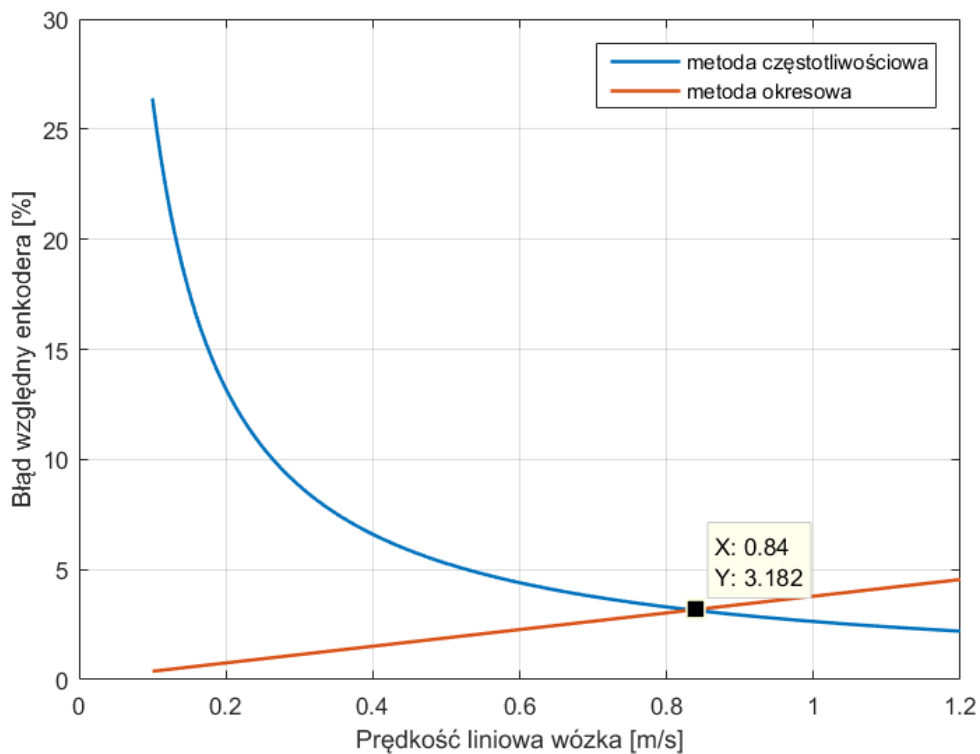
Błąd kwantowania  $\Delta\omega$  przedstawiony jest poniższym równaniem:

$$\Delta T_{rev} = \frac{ER}{f_{clk}}, \quad (7.39)$$

Błąd względny pomiaru prędkości przy metodzie pomiaru okresu  $e_{rel_T}$  może zostać obliczony przez dzielenie błędu kwantowania  $\Delta\omega$  przez aktualną prędkość obrotową  $\omega$  [24].

$$e_{rel_T} = \frac{\Delta\omega}{\omega}. \quad (7.40)$$

Znając rozdzielczość enkodera, przełożenie jednego obrotu wału na przemieszczenie liniowe wózka oraz częstotliwość zegara taktującego i wymaganą szerokość okna czasowego możliwe było wyznaczenie charakterystyki błędu względnego pomiaru w funkcji prędkości wózka dla metody częstotliwościowej i okresowej. Skrypt napisany w programie Matlab Simulink wyznaczający opisane zależności zamieszczony został na płycie CD w Dodatku I, pod nazwą *blad\_kwantowania\_enkodera.m*.



Rys. 7.1. Wykres błędu względnego enkodera przy pomiarze prędkości obrotowej

Na podstawie obliczeń i badań stwierdzono, że maksymalna prędkość liniowa suwnicy wynosi około  $0,75\text{ m/s}$ . Zatem wybrano metodę pomiaru okresu, z uwagi na mniejszy błąd względny w całym zakresie prędkości wózka.



## **Dodatek G: Spis elementów i urządzeń użytych w projekcie**

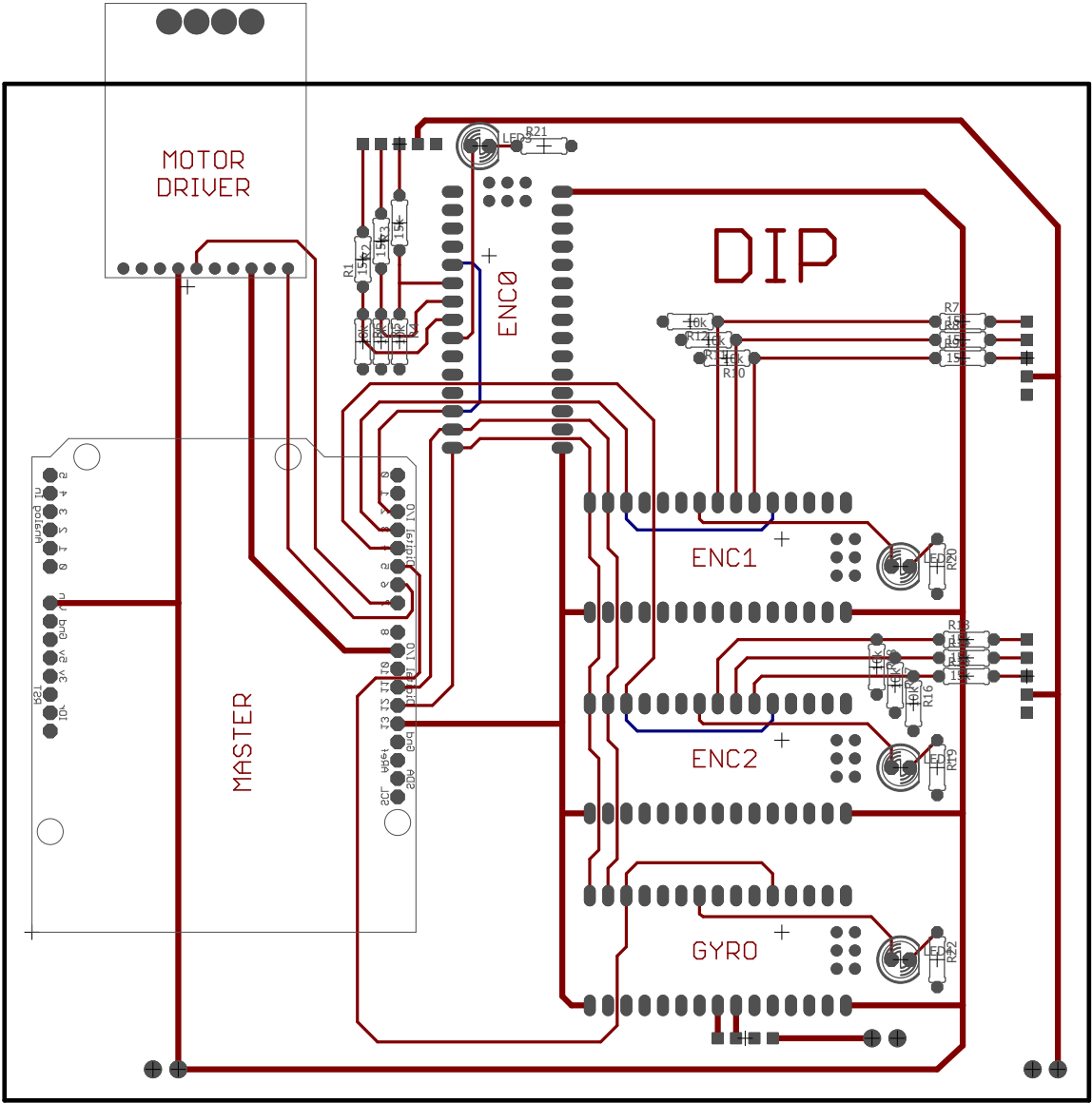
Spis elementów wchodzących w skład wahadła:

- Sprzęgło bezluzowe elastyczne CNC D25\*L30 - 8x10 mm,
- Mikroprzełączniki STDELE AZ-7141,
- Sterownik silnika VNH5019 Motor Driver Carrier,
- Suwnica liniowa ZLW-1040 firmy Igus,
- Żyroskopy cyfrowe MPU-6050,
- Silnik prądu stałego o magnesach trwałych o napięciu zasilania 12V,
- Mocowania na enkodery oraz ramiona wykonane w technice druku 3D,
- Enkodery inkrementalne firmy SICK,
- Zasilacz komputerowy impulsowy o mocy 500 W,
- Platforma mikroprocesorowa oparta o architekturę Arduino Uno,
- Platformy mikroprocesorowe oparte o architekturę Arduino Nano.

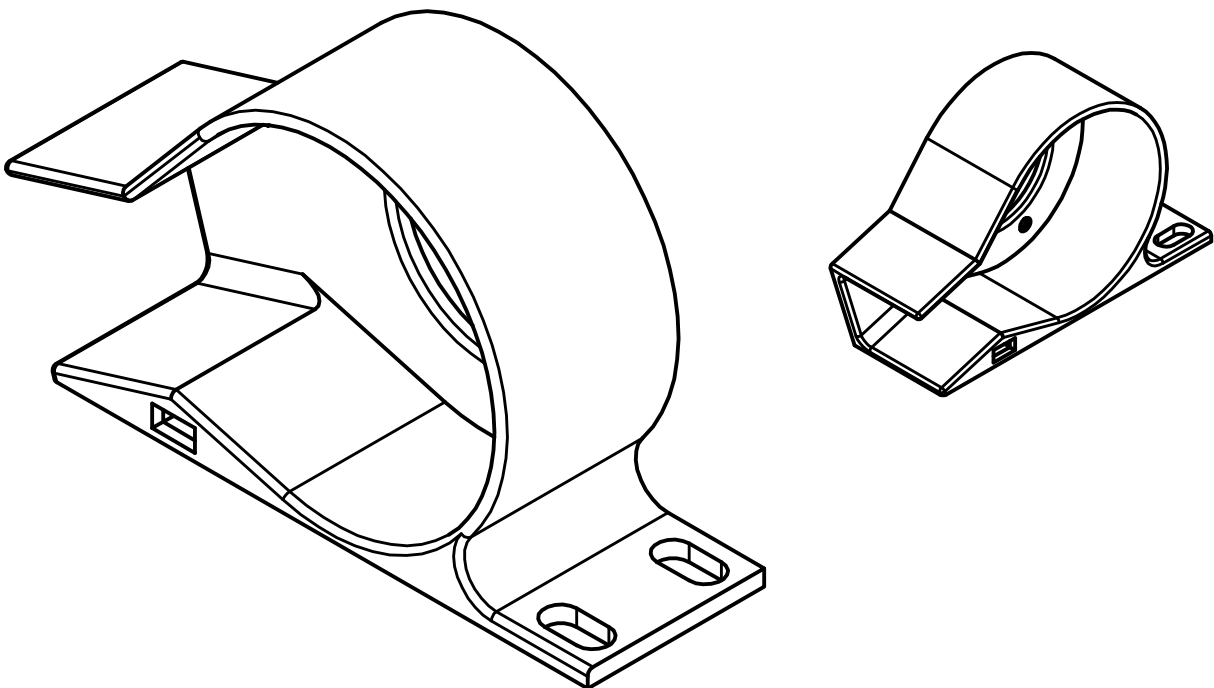
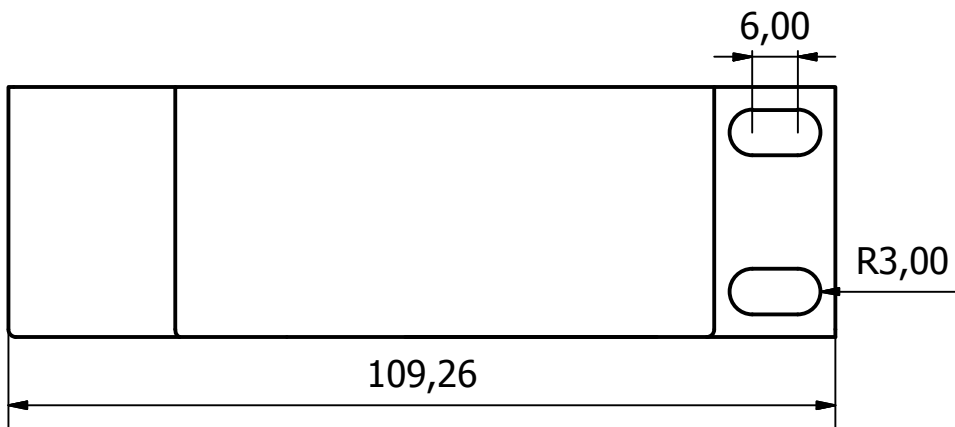
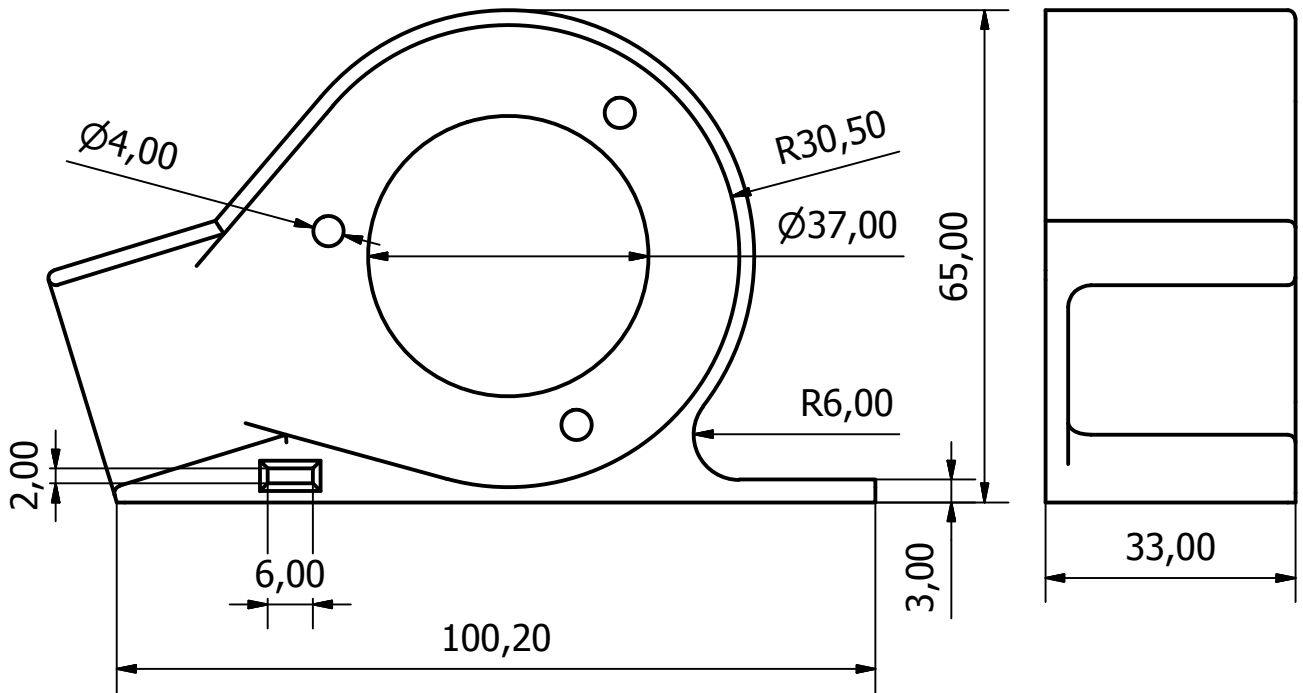
## **Dodatek H: Zbiór projektów zastosowanych w pracy**

Spis projektów zastosowanych w pracy:

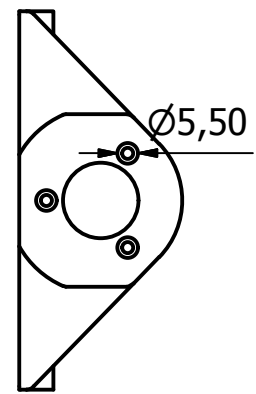
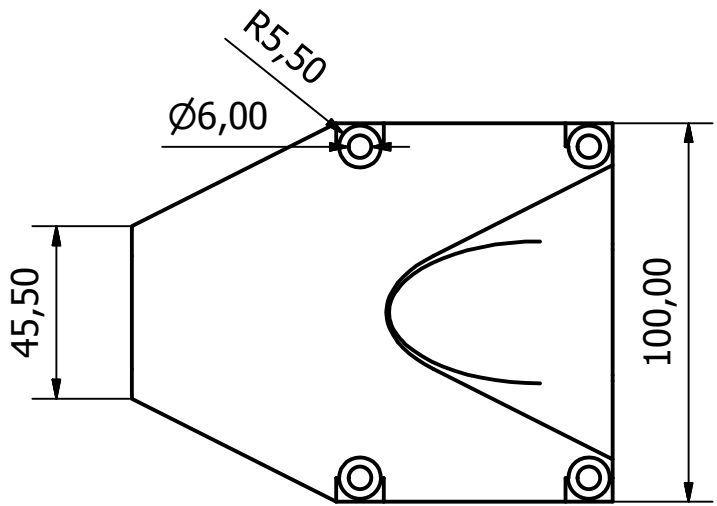
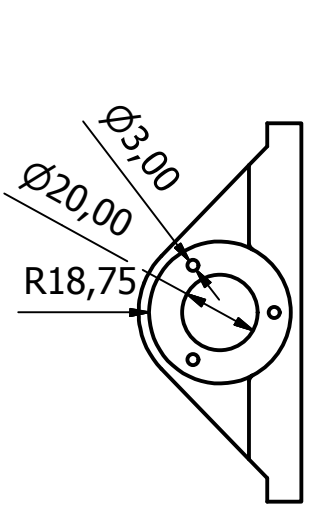
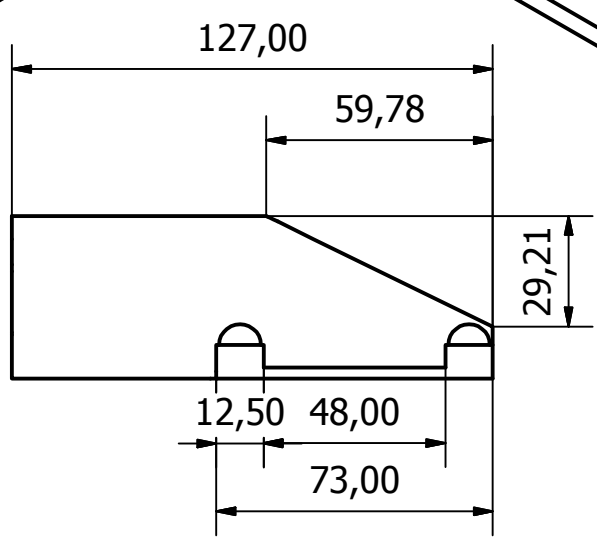
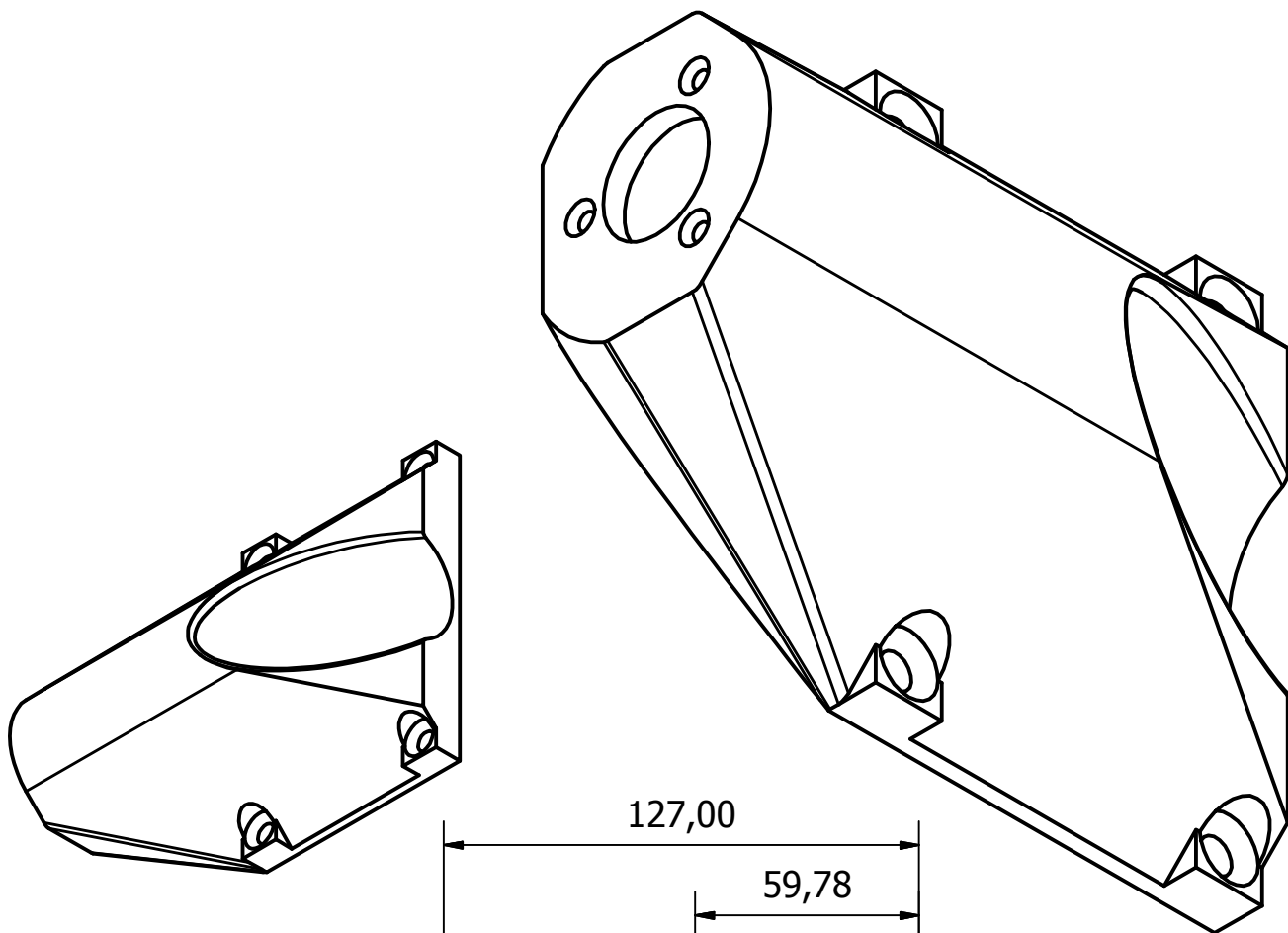
- Projekt płytki drukowanej PCB,
- Projekt mocowania na enkoder obsługujący wał suwnicy,
- Projekt mocowania na enkoder łączącego dolne ramię z wózkiem suwnicy,
- Projekt mocowania na enkoder łączącego ramiona wahadła,
- Projekt kołków mocujących przewody i ciężarek,
- Projekt kół zębatach.



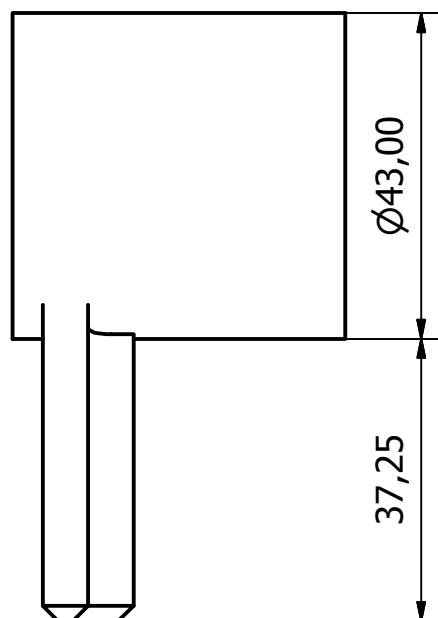
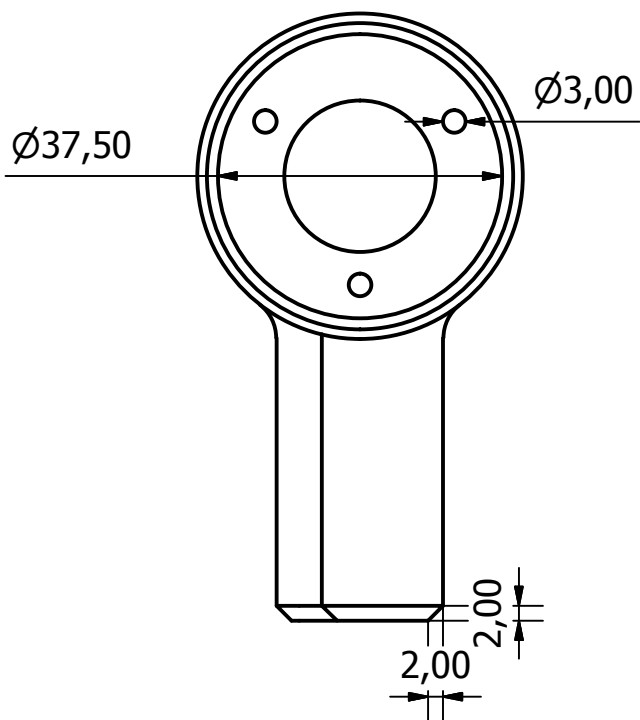
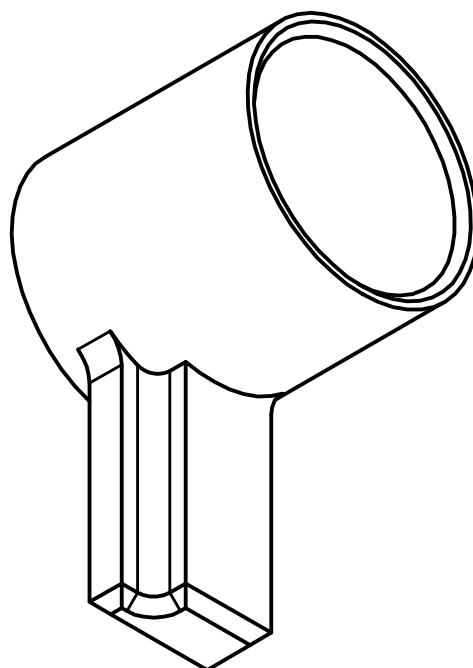
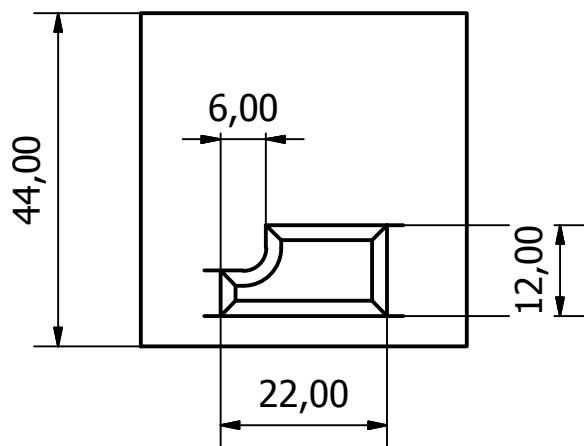
Oprawka na enkoder (suwnica)



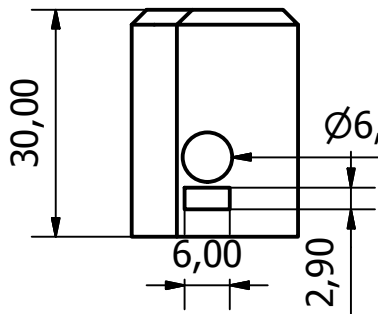
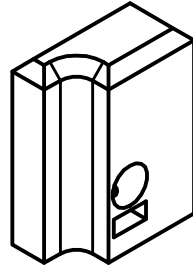
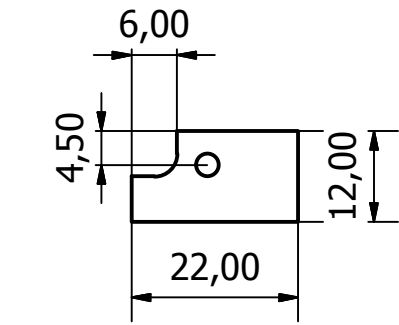
Oprawka na enkoder (wózek)



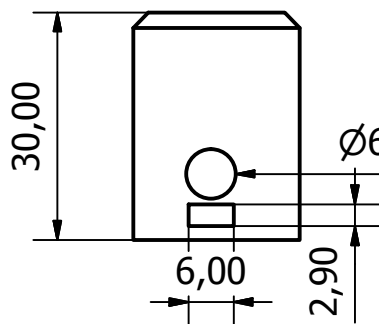
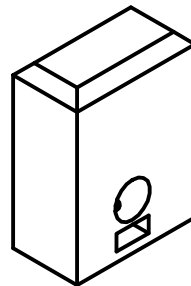
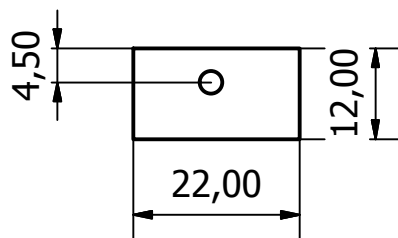
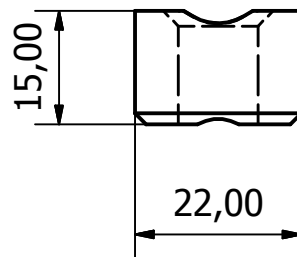
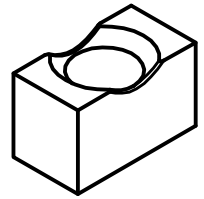
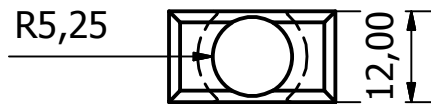
Oprawka na enkoder (przegub)



Kołki mocujące

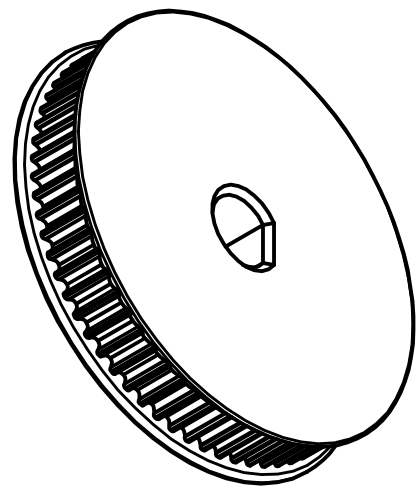
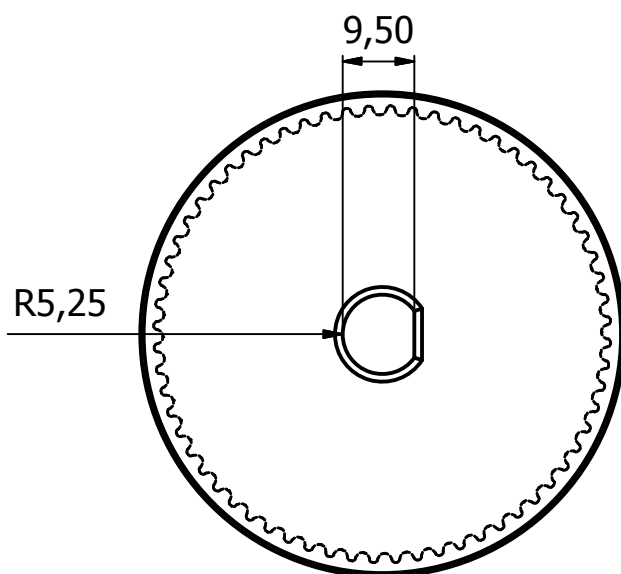
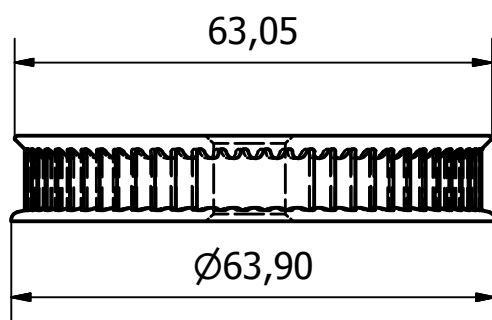
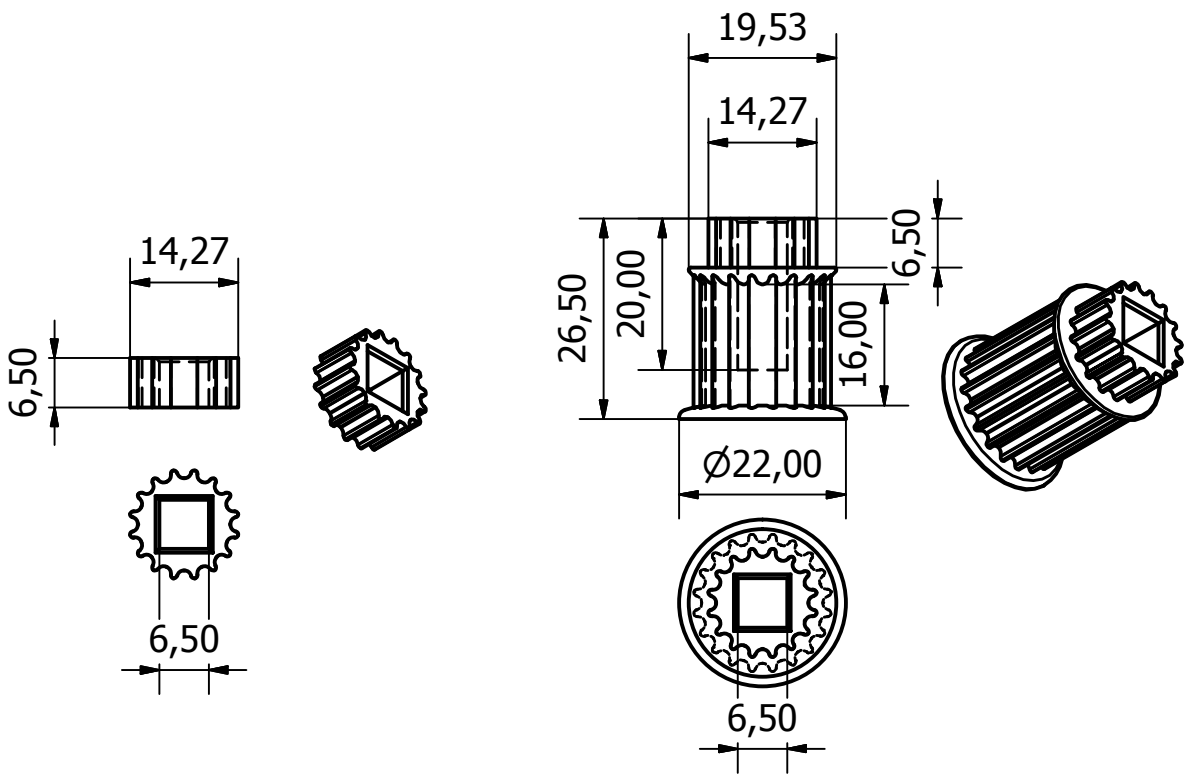


Ø6,50 -11,00 GŁĘBOKOŚĆ



Ø6,50 -11,00 GŁĘBOKOŚĆ

Koła zębate





## **Dodatek I: Płyta CD**

Zawartość płyty CD:

- praca dyplomowa w formacie PDF,
- rysunki wykorzystane w pracy w formacie FIG, JPEG I PNG,
- aplikacje stworzone w programie Matlab Simulink na potrzeby modelowania i symulacji obiektu,
- pliki projektowe z programu Inventor Autodesk,
- pliki projektowe z programu Eagle Autodesk,
- materiały w formacie mp.4 przedstawiające działanie obiektu,