

ANNALES  
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA  
LUBLIN - - POLONIA

Vol. III. 1

SECTIO E

15.I.1948

Z Zakładu Systematyki i Geogr. Roślin Wydz. Mat. Przynr. U. M. C. S.  
Kierownik: prof. dr Józef Motyka



Władysław MATUSZKIEWICZ

2117619

**Z badań nad zmiennością *Erophila verna* DC**

**Some researches on the variation of *Erophila verna* DC**  
**Przyczynek do znajomości chwastów**

Z inicjatywy Prof. Dr. St. Kulczyńskiego podjąłem w roku 1940 badania celem opracowania systematycznego form zbiorowego gatunku *Erophila verna* DC. W toku pracy zwróciłem uwagę na pewne cechy morfologiczne, uchodzące uwagi badaczy omawianego gatunku, a mianowicie na zmienność rodzaju i intensywności owłosienia działek kielicha. Przedstawieniu tych cech poświęcona jest praca niniejsza.

Analizę populacji *Erophila verna*, której obrazem był dostępny mi w danej chwili materiał zielnikowy, rozpocząłem od czysto fenotypowego przeglądu zmienności i współzależności wspomnianych powyżej cech na drodze badań statystycznych, zdając sobie zupełnie jasno sprawę, że operując materiałem bezwarunkowo genetycznie różnorodnym, otrzymać muszę w wyniku obraz sumaryczny, w wielu wypadkach nierealny, nie będący za tym odzwierciedleniem rządzących w naturze praw. Lecz według słów Johanna Sen'a „ściśle liczbowe opracowanie musi poprzedzać dokładniejsze badania genetyczne“, dając materiał do myślenia i wskazując kierunek, w którym pójść może badanie genetyczne, zmierzające do wyróżnienia realnych biotypów i naświetlenia ich czynników wewnątrzrozwojowych. W ten sposób praca niniejsza jest wstępem do dalszych badań, przeprowadzanych na gruncie genetyki ścisłej.

Zbiorowy gatunek *Erophila verna* DC. wykazuje m. in. szeroką skalę zmienności pod względem owłosienia działek kielicha, które może być bądźto jednolite, złożone z włosków pojedynczych, bądź też mieszane, złożone zarówno z włosków pojedynczych, jak i widełkowatych. Znaczną zmienność wykazuje również intensywność tegoż owłosienia, wahająca się w granicach od 0 do 72 włosków na działce kielicha.

Zmienność cechy „rodzaj owłosienia działek kielicha“ (x) wyrażałem jako stosunek ilości włosków widełkowatych do pojedynczych

w formie liczby dziesiętnej z dokładnością do jednego miejsca po kropce z zwyczajnym zaokrągleniem.

Zmienność cechy „intensywność owłosienia działek kielicha“ ( $y$ ) wyrażałem w bezwzględnej ilości włosków na jedną działkę.

Celem dokładnego zlokalizowania pomiaru przestrzegałem zasady homologii organów, biorąc pod uwagę jedynie zewnętrzne działki najniższego normalnie rozwiniętego kwiatu.

W ten sposób zbadałem 134 okazów odpowiadających mniej więcej 70 stanowiskom omawianego gatunku z terenu prawie całej Europy ze szczególnym uwzględnieniem ziem polskich. Z opracowania wyłączałem materiały rosyjskie, jako reprezentujące konsekwentnie formy odrębne od zachodnio- i środkowo-europejskich. Opracowaniu ich miałem zamiar poświęcić specjalną notatkę.

W celu opracowania statystycznego rozsegregowałem materiał na klasy zmienności, a mianowicie dla cechy ( $x$ ) z przedziałem 0,1 włosków widełkowatych na włoskę pojed., zaś dla cechy ( $y$ ) z przedziałem 5 włosków oraz zestawilem załączoną tablicę korelacji, dającą przegląd całości zbadanego materiału.

T A B L I C A I.

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$P_{i,j}$	$M_{i,j}$
0-4	8			1																		9	0,03
5-9	20	1																			1	22	0,10
10-14	12	3	1	1					1													18	0,09
15-19	10	8			1				1													20	0,10
20-24	4	5	1		1	3	1		1		1											17	0,29
25-29	2	2		1		1		1			1			1						1		10	0,58
30-34	3	1	2	1	1	2						1	1									12	0,38
35-39	1		4	1	1	1		1														9	0,30
40-44	3		1			3																7	0,24
45-49			1			2																3	0,40
50-54				1												1						2	0,90
55-59	1																1	1				3	1,10
60-64												1										1	1,10
65-69																							
70-74												1										1	1,10
$P_{i,j}$	64	20	10	6	4	12	1	2	3		2	3	1	1		1	1	1	1		1	134	
$M_{i,j}$	14	19	34	27	27	35	22	32	17		25	55	32	27		52	57	57	27		7		

Liczby umieszczone w poszczególnych kratkach tej tablicy wyrażają ilość okazów czyniących zadość obu cechom we wskazanym wyniarze. Jeżeli założymy, że cecha ( $x$ ) może przyjmować różne wartości liczbowe:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ , zaś cecha ( $y$ ) wartości:  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_j$  i jeśli przy tym umówimy się ilość okazów oznaczać ogólnie przez  $n$ , to ilość okazów, odpowiadających kolejno każdej poszczególnej parze klas obu wchodzących tu w rachubę cech oznaczymy przez  $n_{i,j}$  jako t. zw. frekwencje sprzężone.

Przedostatni wiersz naszej tablicy zawiera t. zw. frekwencje całkowite —  $n_i$  — cechy ( $x$ ), podające bezwzględną ilość okazów dla różnych wartości, przybieranych przez tę cechę. Frekwencja całkowita zmiennej ( $x$ ) dla  $x = x_1$  równa się za tym sumie frekwencji sprzężonych tejże zmiennej dla  $x = x_1$ . Szereg wartości  $n_i$  daje za tym rozkład frekwencji zmiennej ( $x$ ), czyli obraz danej cechy — w tym wypadku rodzaj owłosienia działek kielicha — w obrębie badanego materiału.

Zupełnie analogicznie przedostatnia kolumna tablicy korelacji, zawierając frekwencje całkowite —  $n_j$  — zmiennej ( $y$ ), będące sumą wszystkich frekwencji sprzężonych danej zmiennej dla  $y = y_j$  przedstawia obraz zmienności cechy ( $y$ ) w obrębie badanego materiału.

Jest rzeczą zrozumiałą, że:

$$\sum n_{i,j} = \sum n_i = \sum n_j = n$$

czyli w naszym przypadku wynosi 134.

Celem scharakteryzowania zmienności obu omawianych cech obliczyłem ich średnie wartości oraz dyspersje.

Średnią arytmetyczną cechy ( $x$ ) —  $M_x$  — obliczyć można z tablicy korelacji według wzoru:

$$M_x = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{n} \quad (1)$$

W naszym wypadku  $M_x = 0,26$  (włosków widełek./włosek pojed.).

Dyspersję, czyli średnie odchylenie szeregu wartości  $n_i$ , — oblicza się według wzoru:

$$\sigma^2 = \frac{\sum n_i \cdot (x_i - M_x)^2}{n} \quad (2)$$

czyli w omawianym przykładzie  $\sigma = 0,41$  wł. wid./wł. pojed.

Jeżeli za miarę zmienności jakiegoś szeregu statystycznego przyjmujemy nie wprost dyspersję, lecz t. zw. współczynnik zmienności —  $v$  — wyrażający się wzorem:

$$v = 100 \cdot \sigma : M \quad (3)$$

to otrzymamy  $v_x = 157,69$ .

Stosując analogiczne wzory można obliczyć średnią, dyspersję i współczynnik zmienności drugiej z rozpatrywanych tu cech — cechy (y) — a mianowicie intensywności owłosienia działek kielicha. Za tym

$$M_y = \frac{\sum n_{ij} y_{ij}}{n} \quad (= 21,9 \text{ włosków}) \quad (4)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum n_{ij} (y_{ij} - M_y)^2}{n} \quad (= 14,7 \text{ wł.}) \quad (5)$$

$$v_y = 100 \sigma_y : M_y = 67,12$$

Dla ścisłości wyniku należy wyznaczyć średnie błędy, określające stopień prawdopodobieństwa wartości średnich omawianych cech, a określone ogólnym wzorem

$$m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

za tym w naszym przypadku średnie wartości obu badanych cech przedstawiają się następująco:

$M_x = 0,26 \pm 0,035$  włosków widełkowatych/1 włoszek pojed.

$M_y = 21,9 \pm 1,270$  włosków (na jednej zewnętrznej działce) co wskazuje na stopień wiarygodności odpowiednich średnich; można bowiem stawiać 1 : 99 na to, że prawdziwe, niezależnie od błędów obserwacji i niedokładności materiału średnie mieszczą się w przedziale + i — 3-krotnej wartości odpowiedniego średniego błędu.

Do ogólnej charakterystyki obu omawianych cech należy dodać, że cecha (x) — rodzaj owłosienia działek kielicha — jest przeszło 2,34 razy bardziej zmienna niż cecha (y) — intensywność ich owłosienia — jak to wynika z porównania współczynników zmienności  $v_x$  i  $v_y$ .

Graficznym obrazem zmienności badanego materiału są wykresy: fig. 1 i fig. 2.

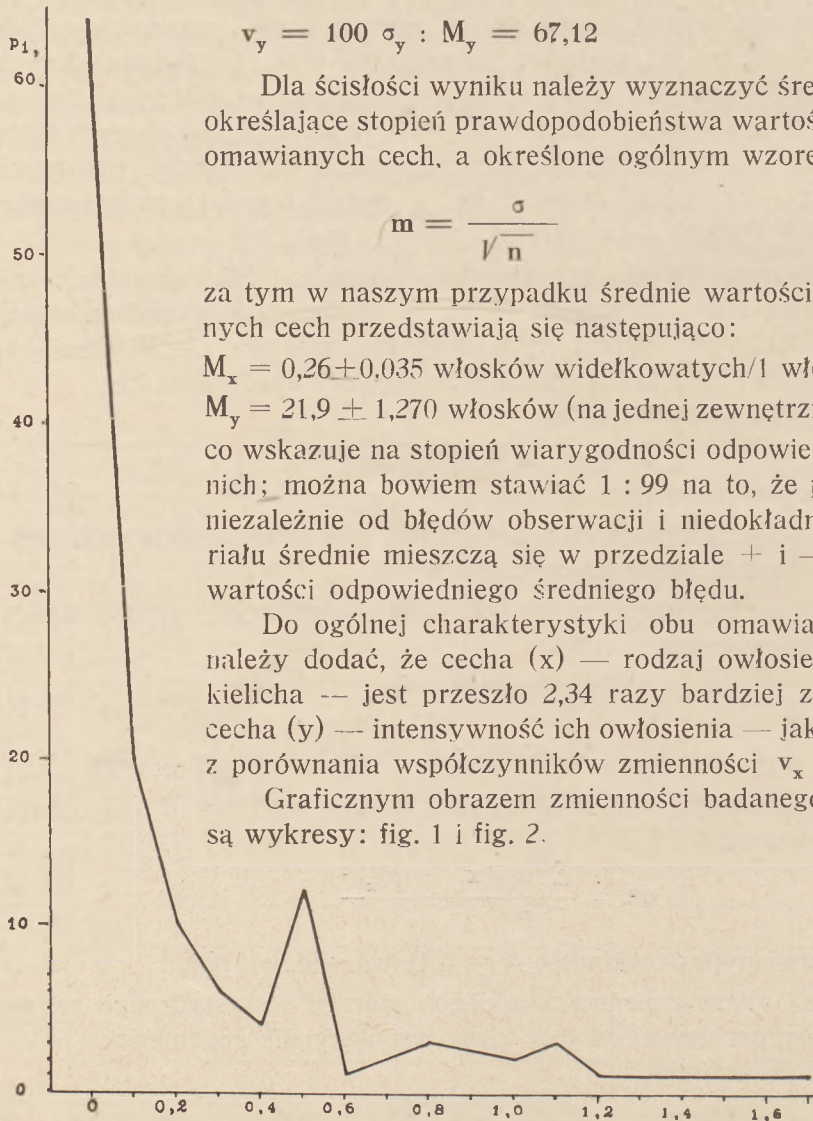


Fig. 1. Zmienność cechy (x).

Fig. 1. odnosi się do zmienności cechy (x) — t. j. do rodzaju owłosienia działek kielicha. Zaznaczają się tu wyraźnie cztery fenotypy o wartościach modalnych równych kolejno 0, 0,5, 0,8 i 1,1. Szczególnie dwie pierwsze grupy, charakteryzujące się liczbami 0 i 0,5 jako najczęściej spotykanymi wartościami współczynnika rodzaju owłosienia działek kielicha stanowią nader wybitne typy, bardzo odrębne fizjognomicznie: owłosienie działek grupy pierwszej jest jednolite, złożone wyłącznie z włosków pojedynczych w przeciwieństwie do grupy drugiej, gdzie działki kielicha pokryte są owłosieniem mieszanym, w skład którego wchodzi zarówno włoski widełkowate, jak i pojedyncze. Co do dwu dalszych typów o modalnych kolejno 0,8 i 1,1 to trudno rozstrzygnąć, czy są one wyrazem jakichś istotnych różnic materiału, czy też raczej stanowią wynik przypadkowego zgrupowania, co łatwo mogło nastąpić wobec stosunkowo niewielkiej liczby badanych okazów, przy znacznym stopniu zmienności danej cechy. W każdym razie wydaje się być pewnym, że oprócz wymienionych poprzednio fenotypów o wartościach modalnych = 0 i 0,5 mamy do czynienia w obrębie badanego materiału z jeszcze jednym typem, odznaczającym się owłosieniem działek kielicha złożonym z mieszaniny włosków widełkowatych i pojedynczych w równych mniej więcej ilościach.

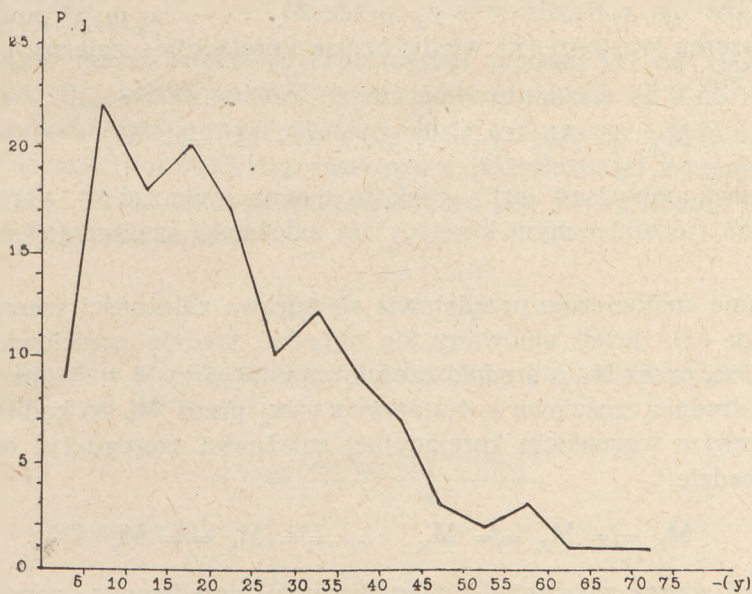


Fig. 2. Zmienność cechy (y).

Przechodząc do omówienia zmienności drugiej z interesujących nas cech, a mianowicie intensywności owłosienia działek kielicha (patrz fig. 2)

zaznaczyć muszę, że mamy tu do czynienia ze znacznie dalej posuniętą transgresją poszczególnych typów, niż w poprzednim przykładzie. Dokładne rozgraniczenie ich staje się bardzo trudne. Cztery przypuszczalne grupy form — odpowiadające czterem wierzchołkom krzywej zmienności — charakteryzują się kolejno następującymi liczbami, jako wartościami modalnych omawianej cechy: I. — 5—10 włosków; II. — 15—20 włosków; III. — 30—35 włosków i IV. — 55—60 włosków. Charakter zaznaczających się tu fenotypów oraz w ogóle bliższe szczegóły odnośnie zobrazonej wykresem fig. 2. zmienności badanej cechy mogą być wyjaśnione jedynie w drodze planowych badań genetycznych.

Stosunek wzajemny obu przedstawionych cech stanowi treść zagadnienia ich korelacji.

Problem ten obejmuje zasadniczo dwa zagadnienia: 1) zależność (x) od (y) i 2) odwrotnie, zależność (y) od (x), które to zagadnienia — jako nie identyczne — winny być bezwzględnie rozdzielnie traktowane.

W myśl definicji korelacji szereg (x) jest korelacyjnie zależny od szeregu (y) gdy częściowe średnie wartości x-ów są różne przy różnym y. Jeżeli średnią częściową x-ów dla  $y = y_1$  oznaczamy przez  $M_{,1}$  a średnią częściową x-ów dla  $y = y_2$  — przez  $M_{,2}$  i w ogóle średnią częściową x-ów dla wartości  $y = y_j$  przez  $M_{,j}$  to — w myśl powyższej definicji szereg wartości (x) wtedy będzie korelacyjnie zależny od szeregu (y), gdy

$$M_{,1} \neq M_{,2} \neq M_{,3} \dots \neq M_{,j} \neq M_x \quad (7)$$

-Warunek powyższy jest — jak to można wykazać — warunkiem koniecznym i dostatecznym korelacyjnej zależności szeregu (x) od szeregu (y).

Zupełnie analogicznie przedstawia się sprawa zależności szeregu (y) od szeregu (x). Jeżeli umówimy się określać średnią częściową y-ów przy  $x = x_1$ , przez  $M_1$ , a średnią częściową y-ów przy  $x = x_2$ , przez  $M_2$ , i w ogóle średnią częściową y-ów przy  $x = x_i$ , przez  $M_i$ , to koniecznym i dostatecznym warunkiem korelacyjnej zależności szeregu (y) od szeregu (x) będzie

$$M_1 \neq M_2 \neq M_3 \dots \neq M_i \neq M_y \quad (8)$$

Ostatni wiersz załączonej tablicy korelacji przedstawia szereg wartości  $M_{,i}$  t. j. szereg wartości średnich częściowych zmiennej (y) dla poszczególnych wartości x; ostatnia kolumna tejże tablicy zawiera szereg  $M_i$  t. j. szereg wartości średnich częściowych zmiennej (x) dla poszczególnych wartości y.

Stopień korelacji ( $x$ ) w zależności od ( $y$ ) pojętej zgodnie z powyższymi zastrzeżeniami jednostronnie wyraża się wielkością t. zw. wykładnika korelacji —  $\eta_{xy}$  — określonego przez Pearson'a jako:

$$\eta_{xy}^2 = 1 - \frac{S_x^2}{\sigma_x^2} \quad (9)$$

przy czym  $S_x^2$  jest kwadratem t. zw. przeciętnej dyspersji zmiennej ( $x$ ) t. j. średnią arytmetyczną wszystkich dyspersji częściowych zmiennej ( $x$ ) przy  $y$  równym kolejno  $y_{,1}$ ,  $y_{,2}$ ,  $y_{,3}$  ...  $y_{,j}$ . Za tym wielkość  $S_x^2$  wyraża się następującym wzorem:

$$S_x^2 = \frac{\sum n_{i,j} (x_i - M_j)^2}{n} \quad (10)$$

Można łatwo udowodnić, że w wypadku gdy szereg ( $x$ ) jest zupełnie niezależny od szeregu ( $y$ ), wówczas dyspersja przeciętna jest równa dyspersji całkowitej, za tym  $S_x^2 = \sigma_x^2$ . Wówczas — jak łatwo przewidzieć z wzoru (9) — wykładnik korelacji  $\eta_{xy} = \sqrt{1-1} = 0$ . Przeciwnie w wypadku idealnej korelacji, gdy za tym zmienna ( $x$ ) jest jednoznaczną funkcją zmiennej ( $y$ ), wówczas przeciętna dyspersja jest równa zero, każda bowiem z dyspersji częściowych równa się zero. W tym wypadku  $\eta_{xy} = \sqrt{1-0} = 1$ .

Za tym miarą zależności korelacyjnej szeregu ( $x$ ) od szeregu ( $y$ ) jest liczba  $\eta_{xy}$ , której wartość mieści się w granicach od 0 do +1.

Powyższe rozumowania odnoszą się in extenso do odwrotnego stosunku zależności korelacyjnej, mianowicie do zależności szeregu ( $y$ ) od szeregu ( $x$ ). Miarą zależności korelacyjnej jest tu wykładnik korelacji  $\eta_{yx}$ , określony równaniem:

$$\eta_{yx}^2 = 1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2} \quad (11)$$

gdzie — zupełnie analogicznie jak poprzednio —  $S_y$  czyli przeciętna dyspersja zmiennej ( $y$ ) wyraża się wzorem:

$$S_y^2 = \frac{\sum n_{i,j} (y_j - M_i)^2}{n} \quad (12)$$

Za tym — tak samo jak  $\eta_{xy}$  —

$$0 < \eta_{yx} < +1$$

Tak więc stosunek zależności dwu cech określony jest całkowicie oboma wykładnikami korelacji  $\eta_{xy}$  i  $\eta_{yx}$ .

W naszym przykładzie  $\eta_{xy} = 0,68$  zaś  $\eta_{yx} = 0,72$ . Widzimy za tym, że korelacja omawianych cech jest dość znaczna, przy czym cecha ( $y$ )

w wyższym nieco stopniu zależy od cechy (x) niż odwrotnie, co jest zupełnie zrozumiałe, skoro weźmiemy pod uwagę, że cecha (y) jest znacznie bardziej „stała“ i mniej zmienna niż cecha (x), jak to wynika z porównania współczynników zmienności obu cech.

Tablica I. jako tablica korelacji daje najogólniejsze pojęcie o charakterze współzależności obu omawianych cech wykazując mianowicie, że mamy tu do czynienia z korelacją prostą, gdzie przyrostowi wartości jednej cechy towarzyszy przyrost wartości drugiej cechy. W naszym konkretnym przypadku oznacza to, że w obrębie badanego materiału *Erophila verna* okazy o skąpom owłosieniu działek kielicha odznaczają się zwykle również jednolitym ich owłosieniem, składającym się wyłącznie z włosków pojedynczych, zaś okazy o coraz bogatszym owłosieniu z reguły coraz znaczniejszą domieszką włosków widełkowatych. Przysłówki „zwykle“ i „zreguły“ w powyższym zdaniu mają odzwierciedlać względną niepewność przedstawionych tu wyników, co zresztą zupełnie jasno wynika już na pierwszy rzut oka z tablicy korelacji. Określenia te — jako czysto intuicyjne — są oczywiście bardzo luźne i nieściśle; dokładne określenie stopnia prawdopodobieństwa danego wniosku co do współzależności obu omawianych cech możliwe jest jedynie w drodze operacji rachunkowych, których wyrazem jest t. zw. współczynnik korelacji —  $r_{1,1}$ .

Współczynnik ten, który zresztą w pewnych typach korelacji może służyć wprost za miarę stopnia odbiegania dwu szeregów statystycznych od warunków wzajemnej niezależności zamiast omówionego poprzednio wykładnika korelacji, określa się następującym wzorem ogólnym. wprowadzonym przez B r a v a i s' a:

$$r_{1,1} = \frac{\sum n_{i,j} (x_i - M_x) (y_j - M_y)}{n \sigma_x \sigma_y} \quad (13)$$

Można udowodnić, że wartość bezwzględna tego współczynnika nie może przekraczać liczby (1), że za tym:

$$-1 < r_{1,1} < +1$$

Współczynnik korelacji  $r_{1,1}$  jest zawsze liczbą względną. W wypadku ścisłej współzależności danych cech, czyli ścisłej ich k o w a r j a c j i, gdy każdej konsekwentnej zmianie wartości jednej z cech towarzyszy zawsze wprost proporcjonalna do niej, konsekwentna zmiana wartości drugiej cechy (jest to idealny wypadek t. zw. korelacji liniowej), wówczas bezwzględna wartość liczby  $r_{1,1}$  wynosi + 1. Im bardziej dany materiał statystyczny, zobrazowany przy pomocy tablicy korelacji od-



biega od schematu idealnej korelacji liniowej, tym bardziej wartość bezwzględna liczby  $r_{1,1}$  zbliża się ku wartości zerowej, którą osiąga w wypadku gdy tablica korelacji grupuje materiał statystyczny doskonale w myśl prawa przypadkowości. W tym wypadku za tym konsekwentne zmiany wartości jednej z cech nie powodują konsekwentnych zmian wartości drugiej cechy w żadnym kierunku; dlatego współczynnik korelacji  $r_{1,1}$  jest liczbą bezkierunkową, jest zerem. Gdy jakkolwiek współzmiennność zaznacza się w obrębie badanych szeregów statystycznych wówczas liczba  $r_{1,1}$  staje się wielkością kierunkową — dodatnią — gdy konsekwentnym przyrostom wartości jednej z badanych cech towarzyszą konsekwentnie przyrosty wartości cechy drugiej, lub — ujemną — gdy konsekwentne przyrosty wartości jednej cechy pociągają za sobą konsekwentne ubytki wartości cechy drugiej. Wypadek pierwszy określamy jako korelację prostą, zaś drugi — jako korelację odwrotną.

Za tym wartość bezwzględna współczynnika korelacji określa stopień sprzężenia dwu cech w sensie ich współzmienności, czyli kowariacji, zaś znak jego — kierunek kowariacji.

Jak widać z powyższego współczynnik korelacji  $r_{1,1}$  w przeciwieństwie do  $\eta_{xy}$  i  $\eta_{yx}$  nie wyraża więc stopnia odchylenia odnośnego materiału statystycznego od podanych poprzednio warunków korelacyjnej niezależności dwu szeregów zmiennych, lecz jedynie stopień w jakim badany materiał statystyczny zbliża się do schematu idealnej korelacji liniowej.

Liczba  $r_{1,1}$  jest za tym właściwie raczej miarą stopnia współzmienności (kowariacji) dwu szeregów statystycznych, niż stopnia ich współzależności (korelacji). W wypadkach gdy te dwa zasadniczo różne pojęcia pokrywają się, za tym w wypadku korelacji liniowej, wartość bezwzględna liczby  $r_{1,1}$  jest równa wartości  $\eta_{xy}$  i  $\eta_{yx}$ .

W naszym przykładzie współzmiennność cech rodzaj i intensywność owłosienia działek kielicha wyraża się współczynnikiem korelacji  $r_{1,1} = +0,48$ .

Wynik ten, precyzując wypowiedziane poprzednio intuicyjne wnioski oparte na obserwacji Tablicy I. — stanowi ich potwierdzenie. Dodatni znak współczynnika korelacji wskazuje na istniejącą współzmiennność omawianych cech w kierunku pozytywnym, zaś wartość bezwzględna tej liczby poucza, że sprzężenie obu cech dalekim jest od zupełności.

Ten ostatni fakt nabiera pełni barwy w świetle założenia, że przecież badany materiał, stanowiąc bezsprzecznie populację gatunku *Erophila verna* jest bezwarunkowo genetycznie różnorodny, że za tym „odchylenia“ i „wyjątki“ od korelacji są tu nietylko grą przypadku, lecz w znacz-

nej części napewno wyrazem istnienia różnych tak fenotypów, jak genotypów, co całkiem naturalnie wywołuje rozbitcie i niekonsekwencję tablicy korelacji.

Współczynnik korelacji  $r_{1,1}$  stwierdzając fakt istnienia współzależności dwu szeregów statystycznych i oznaczając zasadniczy jej kierunek nie określa jednak przebiegu samego zjawiska. W ten sposób stajemy przed problemem nowym, znanym pod nazwą zagadnienia regresji dwu badanych cech.

Badanie regresji sprowadza się do ujęcia w zależność funkcjonalną wzajemnego stosunku obu cech i na skutek tego rozpada się na dwa zagadnienia: 1) zależność średnich częściowych  $M_{.j}$  cechy (x) od poszczególnych wartości (y) i 2) odwrotnie zależność średnich częściowych  $M_{i.}$  cechy (y) od poszczególnych wartości (x). Stąd mówić będziemy o regresji (x) względem (y) oraz o regresji (y) względem (x) zależnie od tego, czy wartości (x) czy (y) spełniać mają rolę zmiennej niezależnej.

Obrazem regresji (x) względem (y) jest wykres, gdzie na osi odciętych zaznaczamy poszczególne wartości cechy (y), zaś na osi rzędnych — odpowiadające tamтым wartości średnich częściowych cechy (x)  $M_{.j}$ .

Przeciwnie, wykres, przedstawiający poszczególne wartości cechy (x) jako odcinki osi odciętych, zaś odpowiadające im wartości średnich częściowych cechy (y) —  $M_{i.}$  — jako odcinki osi rzędnych — jest graficznym obrazem regresji (y) względem (x).

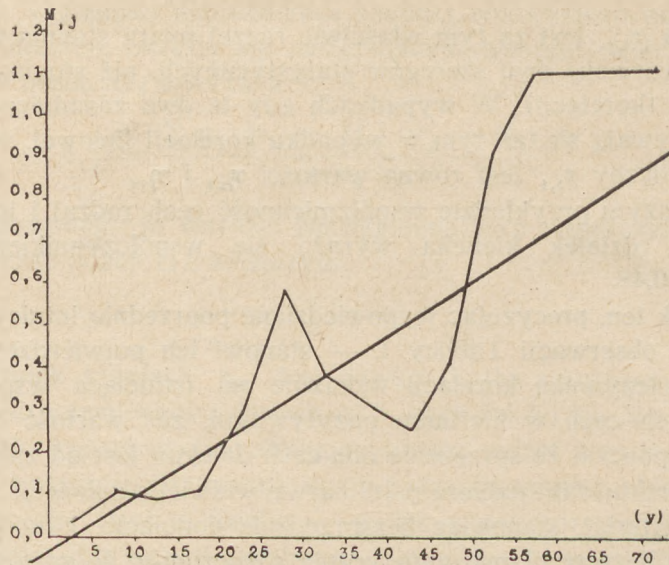


Fig. 3. Regresja (x) w stosunku do (y).

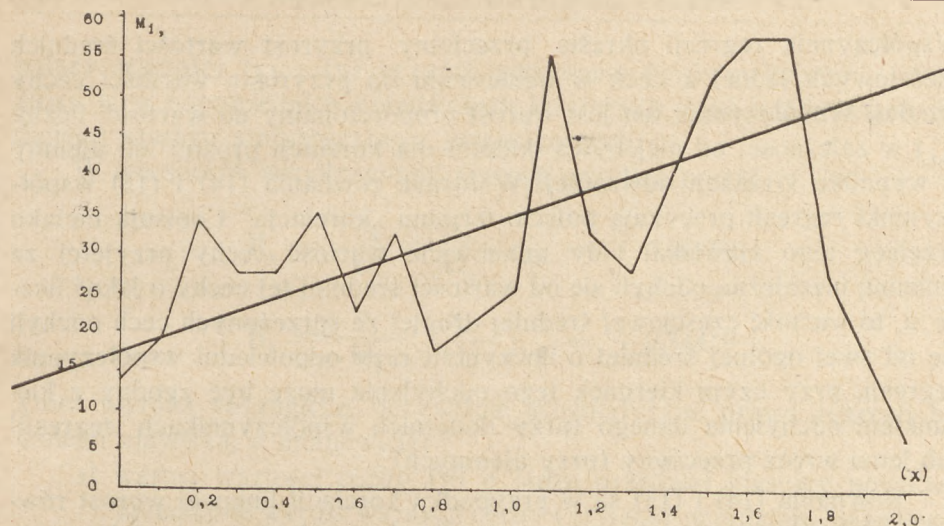


Fig. 4. Regresja (y) w stosunku do (x).

Fig. 3 i 4 przedstawiają obie linie regresji odnośnie opracowanego materiału *Erophila verna*. Linie te są utworami geometrycznie zupełnie nieregularnymi, co jest całkiem naturalne, jeśli weźmiemy pod uwagę stosunkowo nieznaczną ilość zbadanego materiału przy dużej zmienności cech przede wszystkim zaś jego bezsprzeczną niejednorodność genetyczną, powodującą napewno występowanie w danej próbce populacji, jaką jest opracowany materiał zielnikowy, nieznaney ilości różnych biotypów.

Ogólny kierunek tych linii jest wstępujący co odpowiada korelacji prostej.

Dla ściślejszego zobrazowania zasad regresji w badanym przypadku wykreśliłem na obu figurach linie proste, możliwie najlepiej aproksymujące dość nieregularnie rozrzucone punkty regresji.

Stosując interpolację według metody najmniejszych kwadratów można udowodnić, że prosta, wyrażona równaniem:

$$M_{i_1} - M_y = R_y (x_{i_1} - M_x) \quad (14)$$

wyraża najlepiej ze wszystkich możliwych prostych regresję (y) w stosunku do (x), tę samą zaś rolę odnośnie regresji (x) w stosunku do (y) spełnia prosta:

$$M_{j_1} - M_x = R_x (y_{j_1} - M_y) \quad (15)$$

Występujące w powyższych równaniach współczynniki  $R_x$  i  $R_y$  noszą nazwę współczynników regresji i wyrażają się następującymi wzorami:

$$R_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} r_{1,1} \quad (16)$$

$$R_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r_{1,1} \quad (17)$$

Współczynnik regresji określa przeciętny przyrost wartości średnich częściowych jednej z cech w odniesieniu do przyrostu wartości cechy drugiej. Współczynnik ten jest wprost proporcjonalny do wartości liczby  $r_{1,1}$  i w zależności od niej bywa dodatni dla korelacji prostej lub ujemny w wypadku korelacji odwrotnej. W formie równania (14) i (15) współczynniki regresji precyzują pojęcie terminu „korelacja“ i opisują niejako przebieg tego zjawiska. Gdy mianowicie wartość cechy przyjętej za zmienną niezależną odchyli się od wartości średniej tej cechy o jakąś liczbę  $a$ , to wartość częściowej średniej drugiej ze sprzężonych cech odchyli się od swej ogólnej średniej o iloczyn:  $a$  razy odpowiedni współczynnik regresji, przy czym kierunek tego odchylenia może być zgodny z kierunkiem odchylenia danego (przy dodatnich współczynnikach regresji) lub jemu wręcz przeciwny (przy ujemnych).

Równania (14) i (15) są w przypadku korelacji liniowej wprost równaniami linii regresji, w innych przypadkach przedstawiają — jak zaznaczono — proste możliwie najlepiej oddające stosunki wzajemnej regresji dwu szeregów statystycznych, schematyzując zjawisko częstokroć znacznie bardziej skomplikowane.

Geometrycznie jest współczynnik regresji współczynnikiem kierunkowym prostej, określonej równaniem (14) wzgl. (15) t. zn. w normalnym układzie współrzędnych tangensem kąta, utworzonego przez odnośną prostą regresji z dodatnim kierunkiem osi  $x$ -ów.

W badanym przypadku współczynnik regresji cechy ( $x$ ) względem cechy ( $y$ ) wynosi  $R_x = + 0,01339$  co oznacza, że gdy wartość cechy „intensywność owłosienia działek kielicha“ wzrośnie o jeden włossek, to stosunek ilości włosków widełkowatych do pojedynczych — jako miara cechy „rodzaj owłosienia działek kielicha“ — zwiększy się przeciętnie o 0,01339 na korzyść mieszanego owłosienia.

Odwrotnie współczynnik regresji cechy ( $y$ ) względem ( $x$ ) wynosi  $R_y = + 17,20973$  jako stały przyrost średniej wartości cechy ( $y$ ), gdy stosunek ilości włosków widełkowatych do pojedynczych na działce kielicha wzrośnie o jeden.

Za tym linie regresji badanego materiału mają następującą postać:

$$M_{,i} = 0,01339 y_{,i} - 0,03324 \quad \text{zaś}$$

$$M_i = 17,20973 x_i + 17,42547$$

Równania te, jako operujące bezwzględnyymi, a za tym nieporównywalnymi miarami obu wchodzących w rachubę cech, nie mają w tej formie wspomnianego powyżej geometrycznego znaczenia odnośnie naszych wykresów, gdzie miary ( $x$ ) i ( $y$ ) są zupełnie różnego rzędu. Aby to usunąć,

należy wartości (x) i (y) uczynić wzajemnie porównywalnymi, wyrażając je w odpowiednich przedziałach klasowych, jako wielkościach dla danego szeregu statystycznego jednostkowych.

W ten sposób współczynniki regresji przyjmą postać:

$$R_x = \frac{\sigma_x}{kl_x} : \frac{\sigma_y}{kl_y} r_{1,1} = + 0,66950$$

$$R_y = \frac{\sigma_y}{kl_y} : \frac{\sigma_x}{kl_x} r_{1,1} = + 0,34419$$

która wyraża zasadnicze, oczywiście schematyczne prawa regresji badanego zjawiska, a mianowicie:

- a) wzrost wartości cechy (y) o jeden przedział klasowy powoduje przeciętnie wzrost wartości cechy (x) o 0,67 przedziału klasowego;
- b) wzrost wartości cechy (x) o jeden przedział powoduje przeciętnie przyrost wartości cechy (y) o 0,34 przedziału.

Podobnie równania linii regresji — po przeprowadzeniu prostych operacji arytmetycznych — można przedstawić w następującej formie:

$$M_{y_i} = 0,66950 y_i - 0,33241$$

$$M_{x_i} = 0,34419 x_i + 3,48509$$

gdzie wszelkie wartości cech wyrażone są w jednostkach przedziałów klasowych.

W powyższej formie są równania regresji wprost algebraicznym obrazem schematycznych, przeciętnych prostych, aproksymujących rozrzucone punkty regresji na Fig. 3 i 4. Współczynniki regresji są tu za tym tangensami kątów, utworzonych przez odnośną prostą z dodatnim kierunkiem osi x-ów. Kąty te mają wartość:

$$\alpha_{x/y} = 33^{\circ}48' \quad \text{zaś} \quad \alpha_{y/x} = 18^{\circ}59'$$

Tablica I. daje również ogólny pogląd na rozkład frekwencji opracowanego materiału. Niestety, wobec małej ilości zbadanych okazów przy wielopostaciowości omawianego gatunku obraz ten jest mocno fragmentaryczny i jako taki nie upoważnia do wysnuwania daleko idących wniosków co do zróżnicowania badanego materiału na takie, czy inne fenotypowe grupy. Gdyby opracowany materiał zielnikowy był obfity, możnaby twierdzić, że jest on mniej lub więcej pełnym wyrazem stosunków fenotypowych badanej populacji; przy skąym materiale musi się zawsze pamiętać, że rzadsze formy tak wielopostaciowego gatunku, jak *Erophila verna* bardzo łatwo mogą wcale nie zostać objęte opracowywaną

próbką, bądź też mogą być w niej reprezentowane zbyt nielicznie by za-  
ważyć na ogólnym obrazie tabelarycznego zestawienia. W tych więc  
warunkach Tablica I, pozwala jedynie na wyróżnienie najczęstszych i naj-  
wybitniejszych form badanej populacji.

W omawianym przykładzie zmienności gatunku zbiorowego *Erophila  
verna* pod względem dwu zanalizowanych cech — istnienie w obrębie  
badanego materiału przynajmniej dwu grup form wydaje się nie ulegać  
wątpliwości.

Pierwsza charakteryzuje się działkami kielicha owłosionymi skapo  
(0)—5—10—(15) włosków na jedną działkę, przy czym owłosienie to  
składa się niemal wyłącznie z włosków pojedynczych; grupa druga od-  
znacza się znacznie obfitym owłosieniem działek (mniej więcej 20—45,  
średnio 34,5 włosków na jedną działkę), na które przy tym składają się  
włoski widełkowate i pojedyncze — najczęściej w stosunku 1:2. Należy  
przy tym nadmienić, że różnice pomiędzy powyższymi typami dotyczą  
z reguły także innych cech morfologicznych, niż rozpatrywane w niniej-  
szej notatce, jak kształt i wielkość łuszczyнки, wymiary liścia i t. p., co  
wyróżnie zaznacza się w materiale zielnikowym. Typ pierwszy odpo-  
wiada przede wszystkim odmianie *var. majuscula* (Jordan) Haussknecht;  
typ drugi łączy się najczęściej z *var. acrocarpa* (Brenner) Schultz i po-  
krewnymi jej *var. americana* (Pers) O. E. Schulz i *var. Krockeri* (Andrz)  
O. E. Schulz.

Jest rzeczą charakterystyczną, że wyróżnione w powyższy sposób  
grupy form *majusculae* i *acrocarpae* zdają się realizować zasadę geogra-  
ficzną. Podczas gdy pierwsza z nich jest rozpowszechniona na całym  
obszarze, objętym niniejszym opracowaniem, to druga zdaje się ogra-  
niczać do terenu Polesia, Wołynia, częściowo Podola oraz przyległych  
do nich części pldn.-wsch. krain Polski. W każdym razie stosunki tego  
rodzaju ujawniają się w obrębie zbadanego materiału zielnikowego, obej-  
mującego zgrubsza cały teren Europy.

Rozstrzygnięcie kwestii czy mamy tu do czynienia z jakąś lokalną  
rasą geograficzną możliwe jest w drodze zbadania większej ilości mate-  
riału zielnikowego, traktującego równomiernie cały obszar występowania  
omawianego gatunku.

Przedstawione powyżej wyniki badań mają oczywiście charakter  
tymczasowy. Zarówno dokładne wyróżnienie istniejących w obrębie ba-  
danej populacji biotypów, jak i ściśle zbadanie granic i charakteru zmien-  
ności omawianych tu cech osiągnąć można jedynie na skutek planowych  
badań genetycznych, opartych o zasadę linii czystych.

---

## L I T E R A T U R A

1. Johanness W. — Elemente der exacten Erblichkeitslehre — mit Grundzügen der biologischen Variationsstatistik Jena 1912. Zweite Auflage.
  2. Łomnicki A. — Z zagadnień statystyki matematycznej. Statystyka jednej zmiennej. Kosmos „B“ t. LIII. p. 477—506. Lwów 1928.
  3. Łomnicki A. — Z zagadnień statystyki matematycznej. Statystyka dwu i więcej zmiennych. Teoria korelacji. Kosmos „B“, t. LV. p. 165—240. Lwów 1930.
  4. Schulz O E. — *Cruciferac — Draba et Erophila* in Engler u. Prantl. Das Pflanzenreich — Regni Vegetabilis Conspectus. t. IV. 105. p. 343—372. Leipzig 1927.
-

## S U M M A R Y

This paper appears as a result of investigations undertaken by the author in 1940 Y. The aim of this work is to obtain by means of statistical methods adapted to herbarium material a possible exact picture of the variability of two morphologic characters within the collective species *Erophila verna* DC.

The investigated characters were: 1) the type of hairs on sepal-apices 2) the intensity of this hairiness.

As already preliminary review of the herbarium material shows the hairs on the sepal-apices of *Erophila verna* may be of an uniform type or of mixed one. In the first case all hairs of an sepal-apex are simple; in the second case simple hairs are mixed with forked ones. The percentage of forked hairs shows a strong variability. The numeral relation of forked hairs to the simple ones with the interval from 0,1 was taken by the author in this paper as a measure of this variability.

The intensity of the hairiness of the sepal-apices i. e. the whole number of hairs on a singular sepal-apex varies also in broad limits. The grade of this variability was expressed by the author in form of the absolute number of hairs for each examined sepal-apex.

In order to keep the whole comparableness of the material only homologous organs were taken in account, namely the outer sepal-apices of the lowest normally developed flower of each investigated plant individual.

By means of this method 134 plant specimens have been investigated. The herbarium material, on which these investigations are based embraces nearly the whole geographical area of *E. verna* with a special reference to Poland's territory.

The material collected in the manner as described above has been elaborated statistically to obtain the phenomenon of variability elucidated and more exactly precised.

The plan of the author's investigations is as follows:

1. A phenotypic analysis of *E. verna* population as concerns each of two characters mentioned above by using of variation statistical methods.
2. Reciprocal correlations-relations between two characters in question, namely:
  - a) dependence of one of two variations rows on the another and vice versa i. e. the correlation of the characters in question in the narrowest sense,



- b) covariation of both the rows of variation,
- c) laws of regressions.

3. A general phenotypic analysis of the investigated population as regards both the mentioned characters.

The statistical-phenotypic analysis made by the author shows, that the whole material of *Erophila verna* is equally ununiform as concerns the first of two characters, chosen to the biometric reaserch or — the second one.

The variations curve of the type of the hairiness of sepal-apices for the investigated material shows four phenotypes with the modal values 0, 0,5, 0,8, 1,1. Very interesting are specially two first tops on account of their frequency. Whether two farther tops reflect also natural, real forms too or represent groups outcoming only on account of the uncompleteness of the investigated material this cannot be established now; a far richer material is necessary. At any rate it may be admitted,, that within the population of *E. verna* there exists two groups of phenotypes as regards the first of two investigated characters: the groupe with simple hairs and second — with mixed ones.

The variation curve of the hair number within the investigated sample of population shows analogically to the precedent case also four tops corresponding to four groups of phenotypes too. The modal values of them lie at 5—10, 15—20, 30—35, 55—60 hairs for one sepal-apex. On account of a strong transgression these types are heavily to be distinguished. Whatever more exact grasping of them is possible only on the base far going genetic investigations.

The question of correlation of both discussed characters is exhaustively elucidated (also as regards the methodic side of the work) in the Polish text. In this summary it is place only for a few numbers representing the final results of the statistical considerations.

Thus the correlative dependence of the „x“ variation row on the „y“ is expressed by so called „correlation relation“ = 0,68. On the contrary the dependence of the „y“ row upon the „x“ one is expressed by the correlation relation = 0,72.

The correlation coefficient calculated after the Bravais's formula well adapted to reflect the covariation of two statistical rows, shows the value  $r_{1,1} = + 0,48$ . This result means, that it exists within the investigated material a positive, not too narrow correlation.

The laws of regression find their expression in the values of the so called regression coefficients, they are:

- a)  $R_x = + 0,01339$  forked./simple hairs on one hair; or expressed in intervals —  $R_x = 0,66950$  intervals of the „x“ row on each increase of the „y“ — row value on one interval.

- b)  $R_y = + 17,20973$  hairs on the increase of the „hairiness coefficient“ on 1; in intervals:  $R_y = + 0,34419$  intervals of the „y“ — row for each interval of the „x“ — row.

It must not be forgotten, that the numbers given above represent only a schematic and average picture of the real relations of correlation and regression of the investigated material. It is out of doubt, that further, more precise genetic investigations must throw much light on this problem and so change in consequence perhaps seriously the view given here.

The author's work aims of course to distinguish the phenotypic forms which appear in the investigated material as concerns both the characters in question. Unfortunately this aim is on account of an incompleteness of the material scarcely to be attained. In such a situation is the author compelled to be satisfied only by distinguishing the most outstanding, the most important types. They are:

1) *majusculae* - Type with a few hair on sepal-apices; hairs as a rule simple.

2) *acrocarpae* - Type; hairs of mixed type, more abundant (20—35—45 hairs on one sepal-apex). The number relation of the forked hairs to the simple ones is most often 1:2 (= 0,5).

A review of the herbarium material leads to the conclusion, that the types distinguished above seem to realise the „geographical principle“ in the sense, that the *acrocarpae* - Type shows a very limited geographical area. Further floristical researches shall corroborate this point of view.

It must be once more stressed, that this contribution has the character of a preliminary communication. A deepening of observations and proving of number relations mentioned above as well as a grounding of conclusions based on the above researches is to be expected only as result of an exact, far going genetic investigations.

A - 11531

Wydawnictwo  
J. PIETRZYŃKOWSKI  
w Lublinie

Nakł. 700. 61x86. V kl. 80 g