OKRĘGOWA
BIBLIOTEKA
PAGOGICZNA
W GDAŃSKU
z siedzibą
Sopocie
5574

inż. M. T. HUBER

KINEMATYKA I DYNAMIKA

WARSZAWA 1950
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWA TECHNICZNE

Prof. dr inż. M. T. HUBER

KINEMATYKA I DYNAMIKA

WARSZAWA 1950

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWA TECHNICZNE

803

Opiniodawca: *inż. mech. A. Troskolański* Redaktor: *inż. Wiesław Grabowski*

Książka została opracowana i przygotowana do druku przez INSTYTUT WYDAWNICZY SIMP (Stowarzyszenia Inżynierów Mechaników Polski), zawiera wykłady mechaniki ogólnej oraz szereg przykładów ilustrujących zastosowanie w praktyce wyników dociekań mechaniki teoretycznej. Praca ta przeznaczona jest dla studentów wyższych uczelni technicznych.

A-k Księg. Dział Książki Nr. 10/VIII
12. VI. 51 r.

BIBLIOTEKA PEDAGOGICZNA K. O. S. GDAŃSK

Inw. 5574

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE

Dz. 62

Redaktor techniczny: *C Z Barancewicz* Korektor: *mgr F. Galicki*

Format A5 Symbol PWT 71116/M Nakład 6100 egz.

Ark. druku 18 Pap. druk. kl. V, 70 g. 610×860 Data ukończ. druku XII 1950 r.

PWZG oddz. 22, Wrocław, ul. Szewska 43. Zam. 354/50. — 6100. — F-1-11118.

SPIS RZECZY

Str.

Przedmowa VII
Zestawienie ważniejszych oznaczeń IX
Wstęp 1
A. Czas. Ruch. Układ odniesienia. Przestrzeń. Masa 1
B. Zakres mechaniki i jej podział 2
C. Względność spoczynku i ruchu 4
D. Granice stosowalności mechaniki klasycznej 5
E. Układy jednostek dla wielkości podstawowych mechaniki . . . 6
F. Skalary i wektory 8

CZĘŚĆ PIERWSZA

KINEMATYKA

ROZDZIAŁ I. KINEMATYKA PUNKTU

1. Sposób pierwszy opisu matematycznego ruchu punktu 11
2. Inne sposoby opisu matematycznego ruchu punktu 16
3. Ruch prostoliniowy zmienny 19
4. Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny 20
5. Prędkość i przyśpieszenie ruchu krzywoliniowego 23
6. Przyśpieszenie styczne i normalne w ruchu punktu po torze krzywoliniowym 28
7. Prędkość i przyśpieszenie ruchu krzywoliniowego punktu przedstawionego współrzędnymi prostokątnymi 29

ROZDZIAŁ I A. RUCHY SZCZEGÓLNE PUNKTU

8. Ruch kołowy jednostajny jako ruch harmoniczny 31
9. Równanie ogólniejsze prostego ruchu harmonicznego 33
10. Składanie prostych ruchów harmonicznych 35
11. Składanie prostych drgań harmonicznych o różnych częstościach . . 38
12. Ruch centralny 40
13. Ruch przy stałym wektorze przyśpieszenia 42

ROZDZIAŁ II. KINEMATYKA CIAŁA SZTYWNEGO

Str.

14. Swoboda ruchu sztywnego. Ruch obrotowy i postępowy. Posunięcie i obrót 48
15. Ruch obrotowy około osi stałej 51
16. Wektory obrotu 53
17. Moment wektora względem punktu jako iloczyn wektorowy . . . 55
18. Wyrażenie ogólniejsze prędkości punktu ciała w jego obrocie chwilowym. Przesunięcie osi obrotu 57
19. Ruch równoległy do płaszczyzny, czyli ruch posuwisty, albo „płaski“ 59
20. Toczenie się i ślizganie krzywej płaskiej 62
21. Ruch płaski (posuwisty) jako toczenie się krzywej ruchomej po krzywej stałej. Centrodie i aksoidy 63
22. Ruch ciała sztywnego około punktu stałego, czyli kręcenie się . . 69
23. Ruch najogólniejszy ciała sztywnego 71
24. Rozmieszczenie prędkości w ciele sztywnym 76
25. Rozmieszczenie przyśpieszeń w ciele sztywnym 77
26. Składanie ruchów 80
27. Składanie obrotów chwilowych około osi równoległych 82
28. Para obrotów chwilowych 87
29. Składanie par obrotów 89
30. Obroty chwilowe około osi przecinających się 90
31. Składanie obrotów chwilowych w przypadku najogólniejszym . . 91
32. Rozkład najogólniejszego ruchu ciała sztywnego na przesunięcia i obroty chwilowe 93
33. Zmiana układu odniesienia. Związek między prędkościami . . . 95
34. Związek między przyśpieszeniami punktu poruszającego się odniesionymi do układu stałego i ruchomego. Przyśpieszenie Coriolisa . . 98
35. Przykłady ruchu względnego punktu 101
36. Ruch względny dwu ciał 104

CZĘŚĆ DRUGA

DYNAMIKA

ROZDZIAŁ I. PODSTAWY DYNAMIKI TEORETYCZNEJ

37. Zasada bezwładności 107
38. Prawo podstawowe dynamiki Newtona 110
39. Prawo działania i przeciwdziałania (prawo akcji i reakcji) . . . 112
40. Prawo ciążenia powszechnego (prawo grawitacji) 113
41. Mierzenie mas i sił 115
42. Pomiar statyczny sił. Siły ciągłe i siły chwilowe 119
43. Moment pędu, czyli krętpunktu materialnego 121
44. Znaczenie dynamiczne środka masy układu materialnego 122

ROZDZIAŁ II. PRACA, ENERGIA KINETYCZNA I POTENCJALNA

Str.

45. Mnożenie skalarowe dwu wektorów 125
46. Pojęcie pracy mechanicznej. Praca elementarna 126
47. Praca całkowita. Jednostki pracy. Praca w jednostce czasu. Moc . . 129
48. Wykres pracy. Indykator 133
49. Praca siły ciężkości 137
50. Zasada pracy dla ruchu punktu materialnego 139
51. Energia kinetyczna układów materialnych 141
52. Twierdzenie Koeniga o energii kinetycznej ciała sztywnego . . . 142
53. Potencjał. Energia potencjalna. Zasada zachowania energii . . . 144

ROZDZIAŁ III. MOMENTY BEZWŁADNOŚCI I ZBOCZENIA

54. Moment bezwładności ciał materialnych ciągłych. Promień (ramię) bezwładności. Masa sprowadzona (zredukowana) 150
55. Momenty bezwładności względem osi równoległych. Biegunowy moment bezwładności . . . . . .
56. Momenty bezwładności względem osi przecinających się w stałym punkcie ciała. Momenty zboczenia (odśrodkowe) 154
57. Elipsa bezwładności. Główne osie bezwładności 156
58. Twierdzenie o momentach zboczenia. Położenie głównych osi bezwładności w przypadkach symetrii 158
59. Momenty bezwładności i zboczenia jednolitych ciał, powierzchni lub linii materialnych. Geometryczne momenty bezwładności i zboczenia 160
60. Proste przykłady obliczenia J i D ciał jednorodnych 161

ROZDZIAŁ IV. KINETYKA PUNKTU MATERIALNEGO NIESWOBODNEGO

61. Ruch nieswobodny. Reakcja linii lub powierzchni ograniczającej swobodę punktu materialnego 175
62. Wahadło matematyczne proste 179
63. Wahadło stożkowe i sferyczne 183
64. Ruch punktu materialnego ciężkiego po torach różnej postaci . . . 185
65. Stałość równowagi (stateczność) punktu materialnego w potencjalnym polu sił 188

ROZDZIAŁ V. KINETYKA WZGLĘDNA PUNKTU MATERIALNEGO

66. Siła bezwzględna i względna 192
67. Pole ciężkości względnej 194
68. Równowaga względna ciężkiego punktu materialnego w układzie poruszającym się względem ziemi 197

Str.

69. Równowaga względna ciężkiego punktu materialnego na krzywej obracającej się jednostajnie około osi pionowej 200
70. Spadanie swobodne punktu materialnego z uwzględnieniem obrotu ziemi i oporu powietrza 203
71. Inne skutki siły Coriolisa 207
72. Wahadło Foucaulta 208

ROZDZIAŁ VI. KINETYKA UKŁADÓW MATERIALNYCH

73. Zasada ruchu środka masy 211
74. Zasada d'Alemberta 214
75. Ruch ogólny ciała sztywnego swobodnego. Warunki ruchu postępowego 216
76. Obrót ciała sztywnego około osi stałej 218
77. Wahadło „fizyczne“ 220
78. Reakcje łożysk stałej osi obrotu 224
79. O różnych znaczeniach nazwy „siła odśrodkowa“ 234
80. Zasada pracy i energii 236
81. Ruch ciężkiego walca jednolitego lub kuli po płaszczyźnie pochyłej . 238
82. Ruch kołowrotu z ciężarami 244
83. Zasada krętu, czyli momentu ogólnego pędu cząstek układu materialnego swobodnego 246
84. Ruch obrotowy ciała sztywnego swobodnego. Ruch bezwładnościowy ciała sztywnego około punktu stałego 249
85. Reakcje wywołane zmianą kierunku osi nieswobodnej obrotu. Działanie girostatyczne 254
86. Działanie girostatyczne w przypadku ogólniejszym. Precesja regularna i pseudoregularna ciężkiego bąka 259
87. Zagadnienia dynamiczne w maszynach 262
88. Obliczenie koła zamachowego 265

CZĘŚĆ TRZECIA

TEORIA UDERZENIA

89. Określenia i rozważania ogólne 271
90. Uderzenie proste środkowe 273
91. Uderzenie proste mimośrodkowe 281
92. Uderzenie ciała obracalnego dokoła osi stałej 283
93. Uderzenie ukośne 287
94. Uderzenie kuli o ścianę płaską 290

PRZEDMOWA

Książka niniejsza powstała z wykładów wojennych autora w latach 1940 — 1944 w Warszawie na kursach prywatnych i publicznych zastępujących w miarę możności zawieszone podczas okupacji wykłady politechniczne. Dlatego zakres jej wychodzi nieco poza ramy, jakie będą prawdopodobnie ustalone dla nauczania mechaniki ogólnej w nowoczesnych Szkołach Inżynierskich. Widzę w tym jednak raczej dobrą stronę podręcznika, albowiem miejsca trudniejsze, pomijane przez wykładających w kursie normalnym, budzą właśnie szczególne zainteresowanie młodzieży bardziej uzdolnionej.

Wydatne stosowanie elementów rachunku wektorowego może wywołać wątpliwości starszego pokolenia wykładowców, czy poziom wykładu nie jest w książce za wysoki, jednakże wieloletnie doświadczenie dydaktyczne przekonało mnie o ogromnych korzyściach oswojenia się uczniów z metodą rachunku wektorowego przy wywodzie najważniejszych twierdzeń, chociażby metoda analityczna jest także niezbędną do rozwiązywania liczbowego zadań szczegółowych. W minionym 50 leciu pojawiają się coraz rzadziej w piśmiennictwie światowym podręczniki mechaniki ogólnej, w których by metoda rachunku wektorowego nie wysuwała się na plan pierwszy.

Tytuł książki podkreśla pominięcie w niej systematycznego wykładu statyki, ponieważ po wojnie wyszło już drugie wydanie cennego podręcznika „Statyki" St. Neumarka, a statyka ze względów dydaktycznych, bywa wykładana przed kinematyką i dynamiką, chociaż taka kolejność koliduje z naturalnym rozwojem teorii w całej mechanice ogólnej - newtonowskiej.

Autor

ZESTAWIENIE WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$\times$ znak mnożenia wektorowego dwóch czynników wektorów

$\rightarrow$ strzałka umieszczona nad literą udziela wielkości przedstawionej przez nią cechy wektora

a wartość liczbowa przyśpieszenia albo amplituda drgania

$\vec{a}$ przyśpieszenie jako wektor

b podstawa przekroju prostokątnego

c wartość liczbowa stałej prędkości

$\vec{c}$ stała prędkość jako wektor

ds, dx, dy przyrosty elementarne rzeczywiście dokonane

e mimośród uderzenia

g gram masy lub przyśpieszenie spadania swobodnego na powierzchnię ziemi

h wysokość

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ wektory jednostkowe (wersory) na osiach X, Y, Z

i, k ramię (promień) bezwładności

k współczynnik uderzenia

l długość, rozpiętość, długość wahadła matematycznego

l_{red} długość „sprowadzona“ wahadła „fizycznego“

m masa punktu materialnego

p wartość liczbowa przyśpieszenia

$\vec{p}$ przyśpieszenie jako wektor

p_n przyśpieszenie normalne

p_t przyśpieszenie styczne

$\vec{p}_b$ przyśpieszenie bezwzględne

$\vec{p}_w$ przyśpieszenie względne

$\vec{p}_u$ przyśpieszenie unoszenia

$\vec{p}_c$ przyśpieszenie Coriolisa

$\vec{r}$ promień - wektor

r, R promień koła albo krzywizny

s długość łuku jako współrzędna drogowa ruchu punktu

t czas

v wartość liczbowa prędkości

$\vec{v}$ prędkość (zmienna) jako wektor

$\vec{v}_b$ prędkość bezwzględna

$\vec{v}_w$ prędkość względna

$\vec{v}_u$, u prędkość unoszenia

x_o, y_o, z_o współrzędne środka masy

C stała grawitacji (6,65 . 10^{-8} dyn cm^2g^{-2})

D moment zboczenia, moment odśrodkowy

D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} momenty zboczenia względem układu osi X, Y, Z

E energia kinetyczna

F pole figury płaskiej, pole przekroju

G ciężar własny, gram ciężaru

H „odległość" biegunowa

I moment bezwładności (masowy)

I_1, I_2, I_3 główne momenty bezwładności ciała (masowe) względem osi przechodzących przez dany punkt

I_b biegunowy moment bezwładności (masowy)

I_x, I_y, I_z moment bezwładności względem osi układu prostokątnego (masowy)

J moment bezwładności przekroju (geometryczny)

K kręt (moment ilości ruchu)

L praca

L praca użytkowa (maszyny)

praca stracona (w maszynie)

M masa ciała materialnego

N moc albo składowa normalna reakcji w miejscu stykania się ciał

P wartość liczbowa siły

$\vec{P}$ wektor siły

Q ciężar lub jakakolwiek siła

$\vec{R}$ wektor siły wypadkowej albo reakcji całkowitej

R, r, ϱ promień koła albo krzywizny

T okres ruchu harmonicznego lub tarcie jako siła

U potencjał albo energia potencjalna

X, Y, Z osie układu prostokątnego albo składowe prostokątne siły działającej na punkt materialny

$\mathfrak{M}$ moment siły lub układu sił względem obranego punktu stałego

α, β, γ kąty nachylenia prostej do osi X, Y, Z.

ϑ kąt, jako współrzędna biegunowa

β stopień niejednostajności obrotu koła zamachowego

ε wartość liczbowa przyśpieszenia kątowego

$\vec{\varepsilon}$ przyśpieszenie kątowe jako wektor na osi obrotu

α kąt nachylenia równi pochyłej

μ współczynnik tarcia kinetycznego

μ_0 współczynnik tarcia sczepnego (statycznego)

$\vec{\Pi}$ impuls siły, impuls uderzenia

ϱ, R, r promień krzywizny albo koła

φ kąt tarcia kinetycznego

φ_0 kąt tarcia sczepnego (statycznego)

$\dot{\psi}$ prędkość kątowa precesji (bąka)

ω prędkość kątowa albo częstość kątowa (pulsacja)

$\vec{\omega}$ prędkość kątowa jako wektor na osi obrotu

WSTĘP

A. Czas. Ruch. Układ odniesienia. Przestrzeń. Masa.

Zjawiskiem albo zdarzeniem w przyrodzie nazywamy każdą zmianę dającą się obserwować z biegiem czasu. Wprawdzie ścisłe określenie pojęcia czasu natrafia na poważne trudności, ale nawykliśmy tak dawno do mierzenia czasu za pomocą zegarów, że go pojmujemy intuicyjne.

Najprostszym i najpowszechniejszym zjawiskiem dostrzegalnym na ciałach przyrody jest ruch, tj. zmiana położenia jednego ciała względem drugiego lub względem układu ciał, które swego względnego położenia nie zmieniają, a które umownie możemy uważać za będące w spoczynku.

Układ ten (oznaczmy go przez U), do którego odnosimy ruch ciała rozpatrywanego A, albo związany z nim niezmiennie układ współrzędnych zazwyczaj prostokątnych nazywamy układem odniesienia. Gdy np. ciałem A jest jedna ze wskazówek zegara, to ona porusza się względem tarczy zegarowej, a więc zarazem względem ściany na której zegar umieszczono i względem ziemi, na której spoczywa dom, do którego ściana należy.

Jako drugi przykład obierzmy ciężar A zawieszony na haku żórawia. Taki żóraw służy do podnoszenia lub opuszczania ciężaru w kierunku pionowym Z, a zarazem do przesuwania go w kierunkach poziomych X i Y, równoległych do długości i szerokości hali fabrycznej o prostokątnym rzucie poziomym. Odpowiedni układ odniesienia jest wyznaczony, np. trzema

krawędziami przecięcia się płaszczyzny podłogi z płaszczyznami ścian przyległych, tj. X, Y, Z.

Układ odniesienia określa zarazem przestrzeń geometryczną, w której odbywa się ruch ciała A w rozpatrywanym przedziale czasu od chwili początkowej t_o do końcowej t, które odpowiadają położeniu początkowemu i końcowemu wskazówek zegara służącego do pomiaru czasu t.

Przyjmujemy więc, że czas jest wielkością zmienną, która podobnie jak nieograniczona prosta nie ma początku ani końca, a punktom tej prostej, następującym po sobie w równych odstępach, odpowiadają chwile t_1, t_2, t_3, ... wyznaczające kolejno równe przedziały czasu.

Ciała materialne poruszające się w przyrodzie przedstawiają się oczom naszym najczęściej jako bryły geometryczne wypełnione materią. Gdy bryły te zachowują podczas ruchu prawie dokładnie swoje wymiary i postać, to nazywamy je ciałami stałymi.

Dla uproszczenia teorii zastępujemy je oderwanymi (bo nie istniejącymi w rzeczywistości) ciałami (doskonale) sztywnymi. Z każdym ciałem materialnym jest związana pewna wielkość, którą nazywamy masą tego ciała. Odkładając pomiar masy ciała materialnego do miejsca, gdzie stanie się należycie jasny i zrozumiały, zaznaczymy tylko, że sporządziwszy z jednego i tego samego materiału dwa ciała, z których jedno zajmuje np. dwa, trzy . . . n razy większą objętość niż drugie, przypisujemy ciału pierwszemu masę dwa, trzy . . . n razy większą od masy ciała drugiego.

B. Zakres mechaniki i jej podział.

Mechanikę można określić w ogóle jako naukę o ruchu ciał materialnych. Niegdyś, w czasach zamierzchłych, mechanika była zbiorem luźnych prawideł zdobytych doświadczalnie przez tęgich w swoim zawodzie rzemieślników. Przez długie wieki rozwijała się jako nauka praktyczna, czyli jak teraz mówimy techniczna. Dopiero odkrycia *Archimedesa* z Syra-

kuz (287 — 212 przed Chr.) i *Herona* z Aleksandrii (około r. 100 przed Chr.) zapoczątkowały budowę mechaniki jako nauki ścisłej, tj. matematycznej.

Tę budowę uwieńczyły prace *G. Galileusza* (1564 — 1642) i *I. Newtona* (1643 — 1727). Odtąd datuje się olbrzymi postęp w rozwoju mechaniki i jej zastosowaniach technicznych. Współczesna mechanika, zwana klasyczną albo newtonowską (z powodów, które objaśnimy poniżej) rozpada się na dwa główne działy:

A. Kinematyka jako nauka o ruchu w oderwaniu od materii (masy) poruszającego ciała.

B. Dynamika, tj. nauka o ruchu z uwzględnieniem materii (masy) ciał. Z tych określeń wynika, że właściwą mechaniką jest dynamika, gdyż kinematyka może się zajmować także ruchami, które nie zdarzają się w przyrodzie. Toteż w wykładach mechaniki ograniczamy zakres wiadomości z kinematyki tylko do tych, którymi się posługuje dynamika.

Ale z nazwy „dynamika" (pochodzącej od greckiego wyrazu „dynamis", tzn. siła) wynika, że pojęcie siły nie występujące w kinematyce gra bardzo ważną rolę w dynamice. Nic w tym dziwnego, gdyż w rozwoju historycznym mechaniki powstał najdawniej dział dynamiki zwany statyką, tj. nauką o równowadze ciał materialnych i sił na te ciała działających. Z tego powodu dzieli się obecnie dynamikę na statykę i kinetykę, zwaną także dynamiką właściwą, która się zajmuje zagadnieniami ruchu ciał materialnych, powstającego pod działaniem danych sił. Powstała przez to dwuznaczność terminu „dynamika" nie prowadzi na szczęście do nieporozumień w mechanice technicznej. Mówi się często o zagadnienu dynamicznym mając na myśli zagadnienie kinetyczne. Jest to tym bardziej usprawiedliwione, że przy pomocy tzw. zasady *d' Alembert'a* (podanej poniżej) można każde zadanie kinetyczne zamienić na statyczne.

Mechanikę dzielimy ponadto zależnie od stanu skupienia materii w ciałach przyrody, którymi się zajmuje. Tutaj jednak-

że ograniczymy obszar tej nauki do mechaniki ogólnej zwanej także „teoretyczną" (fr. mécanique rationelle). Jej przedmiotem są prawa ruchu punktów materialnych i ich zbiorów, oraz ciał sztywnych. Te obiekty badane są oczywiście tylko uproszczonymi przez abstrakcję modelami ciał rzeczywistych, ale zastępują je całkiem dobrze w bardzo licznych zagadnieniach praktycznych i prowadzą do wystarczająco dokładnych rozwiązań. Śledząc np. ruch pocisku, którego wymiary są bardzo małe w porównaniu do toru opisanego przez środek pocisku, zastępujemy go punktem materialnym umieszczonym w tym środku, który ma masę równą masie pocisku, sam zaś pocisk uważamy za ciało sztywne.

C. Względność spoczynku i ruchu.

Jeżeli przy opisie matematycznym ruchu ciała A obieramy pewien układ odniesienia U, to uważamy w myśli ten układ za będący w spoczynku. Wyłania się więc pytanie czy można znaleźć taki układ odniesienia, który by był w spoczynku bezwzględnym. Otóż takiego układu nie ma i być nie może. Chociaż bowiem w bardzo wielu zadaniach mechaniki technicznej wystarcza przyjąć ziemię za nieruchomy układ odniesienia, to jednak wiemy, że ziemia, obracając się względem słońca, porusza się nadto po torze eliptycznym, leżącym w tzw. płaszczyźnie eliptyki, która przechodzi przez środek słońca, a samo słońce porusza się także względem innych gwiazd. Dlatego każdy spoczynek i ruch jest względny. Znając ruch ciała A względem ciała B przyjętego za układ odniesienia patrzymy niejako na ten ruch ze stanowiska obranego na ciele B. Gdy jednakże przeniesiemy się w myśli na ciało A, to z tego nowego stanowiska dostrzegamy na odwrót — ruch ciała B względem przyjętego za nieruchome ciała A.

Pojęcia ruchu i spoczynku są przeto względne, a w kinematyce jest zasadniczo obojętne które z dwu ciał A i B poruszających się względem siebie obieramy za nieruchomy układ

odniesienia. Na obiór ten wpływają tylko względy praktyczne, Tak np. ruch części składowych silnika fabrycznego odnosimy do ziemi jako układu odniesienia, podczas gdy ruch części składowych silnika w samolocie odnosimy do kadłuba samolotu.

Nic tak nie charakteryzuje różnicy między kinematyką a dynamiką jak rozwój historyczny poglądu na stosunek naszej ziemi do słońca. Do początku wieku XVI wierzono powszechnie, że ziemia jest dla innych ciał niebieskich nieruchomym układem odniesienia, a uczony grecki *Ptolemeusz* zbudował na tej podstawie już w II wieku naszej ery bardzo skomplikowaną teorię kinematyczną, opisującą ruchy innych planet względem ziemi. Nie usiłował jednakże zbadać, jakby się te ruchy przedstawiały, gdyby układ odniesienia przenieść na słońce.

Uczynił to dopiero *Mikołaj Kopernik* w r. 1507 dowodząc, że obrawszy słońce za układ odniesienia otrzymujemy bez porównania przejrzystszy i prostszy obraz ruchu planet, które krążą w jednym i tym samym kierunku po torach zamkniętych prawie kołowych.

Otóż ze stanowiska kinematyki są oba układy, (to jest geocentryczny *Ptolemeusza* i heliocentryczny *Kopernika*) równoważne, a układ *Kopernika* odznacza się tylko większą prostotą. Inaczej przedstawia się sprawa ze stanowiska dynamiki, która, przenosząc układ odniesienia na tzw. gwiazdy stałe, prowadzi do uznania tylko układu *Kopernika* jako wynikającego z powszechnego prawa ciążenia (grawitacji) odkrytego przez *I. Newtona* (w r. 1666).

D. Granica stosowalności mechaniki klasycznej.

Dokonana z początkiem naszego stulecia rewizja pojęć czasu i przestrzeni[1] wyłoniła tzw. mechanikę relatywistyczną. Jednocześnie rozwinęła się na podłożu badań bu-

[1] Bliższe szczegóły można znaleźć w „Mechanice ogólnej i technicznej" autora, wydawanej obecnie w Szwecji przez spółdzielnię „Czytelnik".

dowy atomów „mechanika kwantowa“ czyli mikromechanika, która pozwala wyjaśnić zachowanie się części składowych każdego z atomów materii, niezrozumiałe ze stanowiska mechaniki klasycznej.

Powstanie tych nowych mechanik dowodzi niewystarczalności mechaniki klasycznej do objęcia wszelkich zjawisk ruchu cząstek materialnych, wobec czego nasuwa się pytanie w jakich granicach obliczenia wykonane według praw mechaniki klasycznej dają wyniki dość dokładne? Otóż okazuje się, że dla cząstek materialnych, z jakimi mamy do czynienia we wszelkich zagadnieniach mechaniki technicznej, które zawierają ogromne ilości atomów i poruszają się z prędkością światła (300.000 km/sek), wyniki liczbowe mechaniki klasycznej są tak dokładne, że nawet gdyby postęp techniczny doprowadził do udzielania pociskom prędkości setki razy większej niż obecnie, to i tak nie można by było stwierdzić praktycznie różnicy. Chociaż więc we współczesnej fizyce teoretycznej nowe mechaniki są niezbędnym narzędziem badania, to w mechanice technicznej można zapewne przez wiele dalszych stuleci poprzestać na stosowaniu mechaniki klasycznej wyłożonej w książce niniejszej jako niezawodnej przewodniczki w pracy zawodowej lub badawczej technika i inżyniera.

E. Układy jednostek dla wielkości podstawowych mechaniki.

Jak wynika z rozważań powyższych wielkościami podstawowymi mechaniki są: długość, masa i czas. Siła jest wobec tego w mechanice klasycznej wielkością pochodną. Ale pojęcie siły gra od najdawniejszych czasów tak doniosłą rolę praktyczną, że stało się zrozumiałym intuicyjnie dla każdego lepiej nawet niż pojęcie masy. Z tego powodu mechanika praktyczna, zwana także techniczną, albo stosowaną, posługuje się po dziś dzień innym układem wielkości podstawowych różniących się od powyższego, zwanego naukowym tym, że trzecią wielkością obok długości

i czasu jest siła, a nie masa. Jest przeto rzeczą ważną aby zaznajomić się dokładnie z oboma układami wielkości podstawowych mechaniki i ich jednostkami. W układzie naukowym obrano centymetr za jednostkę podstawową długości (skrót cm). Jest to jedna setna długości metra. Długość zaś metra określamy od r. 1889 jako odległość dwu kresek poprzecznych naznaczonych na wzorcu sporządzonym ze stopu platyny z irydem i przechowywanego w Pavillon de Breteuil pod Paryżem, przy czym ta odległość jest uważana ściśle za metr przy temperaturze 0°. W układzie praktycznym stosuje się często również centymetr jako jednostkę długości, ale obok tego używa się jeszcze inne jednostki metrycznego układu miar długości, jak np. milimetr (skrót mm) = 0,1 cm, metr (skrót m) = 100 cm itd. Za jednostkę czasu średniego słonecznego, określoną jako $\frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 1/86.400$ doby średniej, podzielonej na 24 godziny, z których każda dzieli się na 60 minut, a każda minuta na 60 sekund. Doba średnia jest średnią wartością doby słonecznej, tj. przedziału czasu, jaki upływa między dwoma kolejnymi południami, czyli chwilami w których słońce znajduje się najwyżej na pozornej kuli nieba.

Doba słoneczna była niegdyś naturalną praktyczną miarą czasu dopóki nie stwierdzono, że następujące po sobie doby słoneczne nie są równe. Dlatego przyjęto za wzorzec miary czasu średnią wartość doby słonecznej w ciągu całego roku i nazwano ją *dobą średnią*.

Tak określone jednostki czasu odpowiadały nie tylko wymogom praktycznym ale także naukowym przy założeniu, że obrót ziemi względem tzw. gwiazd stałych można uważać za jednostajny. To zaś okazało się dopuszczalne w ciągu wielu stuleci.

Jako jednostkę masy w układzie naukowym obrano masę jednego grama, która jest jedną tysięczną częścią kilograma wzorcowego ze stopu platyny z irydem

przechowywanego razem z wzorcem metra pod Paryżem. Ten kilogram (skrót kg) jest zarazem w bardzo wielkim przybliżeniu równy masie jednego decymetra sześciennego (czyli litra) wody czystej przy temperaturze odpowiadającej jej największej gęstości, tj. 4° C. Gram oznaczamy w skrócie przez g. Naukowy układ jedostek podstawowych nosi nazwę układu C. G. S., tj. centymetr-gram-sekunda.

W układzie praktycznym trzecią jednostką podstawową jest jednostka siły. Jest nią ciężar masy jednego kilograma, w miejscu na powierzchni ziemi, gdzie przyśpieszenie spadania swobodnego ciał ma wartość 980,665 cm/sek^2. Dla tej jednostki praktycznej siły nie obmyślono zrazu pożądanej nazwy odróżniającej ją od kilograma jako masy, lecz nazwano ją również kilogramem, a tylko w przypadkach możliwości nieporozumienia dodawano „jako siła". Dopiero w czasach nowszych, zaradzono złemu wprowadzając uchwałą PKN dla jednostki praktycznej siły skrót kG zamiast kg (oznaczającego kilogram jako masę). Jeszcze lepiej załatwiają sprawę proponowane nazwy następujące dla jednostek praktycznych siły:

a. *pond* (skrót p) tj. siła równa ciężarowi masy jednego grama w miejscu, gdzie przyśpieszenie ciężkości = 980,665 cm/sek^2.
b. *kilopond* (*kp*) tj. siła równa ciężarowi masy jednego kilograma przy tym samym przyśpieszeniu ciężkości;
c. *megapond* (*mp*) tj. siła równa ciężarowi masy jednej tony czyli 1000 kg przy tym samym przyśpieszeniu ciężkości. Znaczenie określeń powyższych stanie się należycie jasne w paragrafach początkowych dynamiki.

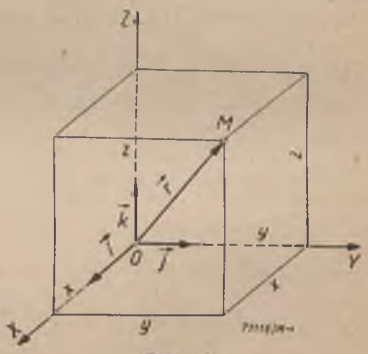
F. Skalary i Wektory.

Spośród omawianych wielkości podstawowych mają długość, czas i masa tę właściwość, że do ich określenia ilościowego wystarcza liczba jednostek im właściwych. Gdy więc mówimy, że długość pewnego odcinka danej prostej wynosi np. 25 cm, albo że trwanie jakiegoś zjawiska wyno-

siło 30 sekund, albo wreszcie, że masa pewnego ciała równa się 50 g, to te liczby mianowane wystarczą do zupełnego określenia ilościowego w każdym z przykładów.

Tak samo ma się rzecz z powierzchnią lub objętością ciała, z jego temperaturą, zawartością ciepła, nabojem elektrycznym i innymi wielkościami fizykalnymi, które dają się określić ilościowo liczbą mianowaną. Nazywamy je w ogóle wielkościami skalarowymi albo *skalarami*.

Drugim rodzajem wielkości, które grają ważną rolę w mechanice i całej fizyce są wielkości kierunkowe, czyli *wektory* do określenia ilościowego których nie wystarcza sama liczba, lecz nad to oznaczony kierunek w przestrzeni. Do takich wielkości, tj. wektorów zaliczamy w kinematyce prędkość, przyśpieszenie, a w dynamice przede wszystkim wszelkie siły. Wektory dają się poglądowo przedstawić odcinkami, w których odróżniamy początek A od końca B, co określa kierunek uwidoczniony zarazem grotem strzałki wskazującym od A ku B. Wartość liczbową zaś wyrażamy długością odcinka do tej wartości proporcjonalną. Każdy wektor $\vec{W}$ można także przedstawić wielkościami jego trzech rzutów W_x, W_y, W_z na osie prostokątnego układu współrzędnych (rys. 1). Z tego wynika, że wektor jest zupełnie określony trzema liczbami algebraicznymi przedstawiającymi wartość jego trzech rzutów na osie współrzędnych. Znane ze statyki składanie sił działających na jeden punkt jest operacją, którą dla wektorów wogóle nazywamy dodawaniem wektorowym (albo geometrycznym). Każdy wektor $\vec{W}$ może być także wyrażony w postaci $\vec{W} = W\vec{w}$, tzn. w postaci iloczynu swej war-



Rys. 1.

tości liczbowej W (zwanej także miarą wektora $\vec{W}$) przez tzw. *wektor jednostkowy* czyli *wersor* $\vec{w}$ o długości $w = 1$, a kierunku tym samym co wektor dany. Wersory na osiach współrzędnych prostokątnych (kartezjańskich) oznaczamy przez $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Za pomocą tych stałych wersorów można każdy wektor $\vec{W}$ o rzutach W_x, W_y, W_z na osie współrzędnych przedstawić w postaci sumy wektorowej:

$$\vec{W} = \vec{i}\,W_x + \vec{j}\,W_y + \vec{k}\,W_z, \qquad [1]$$

skąd wynika od razu dla dwu wektorów $\vec{W}$ i $\vec{W'}$, że

$$\vec{W} = \vec{i}\,W_x + \vec{j}\,W_y + \vec{k}\,W_z,$$

$$\vec{W'} = \vec{i}\,W'_x + \vec{j}\,W'_y + \vec{k}\,W'_z,$$

a po dodaniu obu równań

$$\vec{W} + \vec{W'} = \vec{i}\,(W_x + W'_x) + \vec{j}\,(W_y + W'_y) + \vec{k}\,(W_z + W'_z) \qquad [2]$$

To zaś wyraża, że dodawaniu wektorowemu dwu lub więcej wektorów odpowiada dodawanie algebraiczne ich rzutów na każdą z trzech osi współrzędnych. Inne proste prawidła działania na wektorach poznamy kolejno w toku wykładu.

Część pierwsza

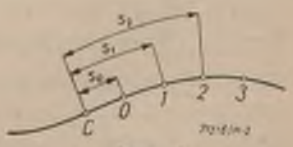
KINEMATYKA

Rozdział I

KINEMATYKA PUNKTU

1. Sposób pierwszy opisu matematycznego ruchu punktu

Sposób pierwszy opisu matematycznego ruchu punktu objaśnimy na następującym przykładzie. Szlak jakiejkolwiek kolejki górskiej uzmysławia swą „trasą", czyli osią toru, linię, w ogóle krzywą przestrzenną, a położenie na szlaku wózka jadącego po nim znaczy (np. w nocy) lampka umieszczona na wózku jako punkt m poruszający się po tej krzywej. Krzywą tę nazywamy *torem* punktu m. Gdy więc, jak w tym przykładzie, tor jest dany, to zachowanie się punktu m w czasie można opisać urządziwszy np. wymienioną lampkę tak, aby dawała tylko chwilowe („błyskawiczne") sygnały świetlne w równych przedziałach czasu, dajmy na to, co sekundę. Wtedy znacząc na torze kolejne położenia punktu (rys. 2) liczbami $0, 1, 2, 3 \ldots$ (można to wykonać fotograficznie) znajdujemy długość odcinków $\overline{01}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$, itd. Liczba 0 odpowiada przy tym chwili początkowej obranej dla ruchu rozpatrywanego zresztą dowolnie. Naznaczone na torze punkty określają długości łuków mierzone od punktu stałego C (rys. 2) obranego na torze dowolnie, a więc najdogodniej w punkcie O. Długości łuków przedstawiają *współrzędną drogową* s, która w chwili O ma wartość $s = s_0 = \overline{CO}$, a w chwilach,



Rys. 2.

kiedy upłynęło *1, 2, 3* . . . jednostek czasu ma odpowiednie wartości $s = s_1$, $s = s_2$ . . .

Stosownie do postaci toru rozróżniamy *ruchy prostoliniowe* od *ruchów krzywoliniowych.*

Na torze odróżniamy dwa możliwe *kierunki ruchu* (czyli *zwroty*), ustaliwszy jako dodatni ten, przy którym *s* wzrasta z upływem czasu (jak na rysunku). Wtedy współrzędna *s* mierzy zarazem *drogę* opisaną (przebieżoną) przez punkt *m*. Kierunek drugi ujemny, przeciwny poprzedniemu, odpowiada zmniejszaniu się współrzędnej *s* z upływem czasu. Ruch może przeto odbywać się w ogóle tak, że w pewnych przedziałach czasu współrzędna *s* rośnie z czasem, a w innych maleje. W takich przypadkach współrzędna *s* nie określa już właściwie drogi opisanej w dowolnym przedziale czasu. Jako tę drogę można bowiem uważać tylko sumę wartości bezwzględnych łuków opisanych na torze w obu kierunkach.

Ujętą w ten sposób różnicę między współrzędną drogową *s*, a drogą przebieżoną (opisaną) *S* uzmysłowi jeszcze następujący przykład praktyczny:

Nająłem samochód z licznikiem w celu przejechania np. 100 km autostradą od *A* do *B*. Po drodze wypadła gdzieś walizka, co spostrzeżono dopiero po przejechaniu 10 km od miejsca wypadku. Trzeba było zatem zawrócić, podjąć zgubę, i dopiero jechać znów w kierunku pierwotnym do *B*. Jest rzeczą jasną, że ostatecznie licznik pokazał nie 100 lecz 120 km, czyli nie współrzędną drogi *s*, lecz drogę przejechaną *S*.

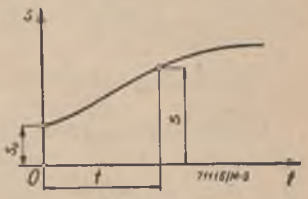
W sposobie powyższym będzie ruch punktu opisany tym dokładniej, im mniejsze przedziały czasu zastosujemy jako jednostki. Opis zupełnie ścisły wymaga oczywiście, aby każdej wartości *t* w czasie trwania ruchu odpowiadała jednoznacznie określona wartość *s*, czyli wyrażając się matematycznie, aby *s* było określone jako jednoznaczna funkcja czasu *t*. Wymaganie jednoznaczności odpowiada postulatowi oczywistemu, że poruszający się punkt nie może być jednocześnie w dwu lub więcej miejscach. Zależność *s* od *t* przedstawiamy równaniem symbolicznym:

$$s = F\ (t),$$

które czytamy: współrzędna drogi (na danym torze) jest funkcją czasu. Równanie to jest dla danego toru jedynym

równaniem ruchu, koniecznym i wystarczającym do ścisłego przedstawienia tego ruchu.

Często zastępujemy powyższe równanie obrazem geometrycznym, czyli wykresem (diagramem) na płaszczyźnie współrzędnych prostokątnych, odbierając np. t za odciętą, a s za rzędną. Wtedy równanie $s = F(t)$ przedstawia wogóle linię krzywą (rys. 3). Jego postać odzwierciedla zachowanie się punktu poruszającego się w czasie, a tor charakteryzuje zachowanie się punktu w przestrzeni.



Rys. 3.

Z najprostszym rodzajem ruchu mamy przeto do czynienia, gdy tor jest linią prostą, a wykres drogowy ruchu przedstawia się także linią prostą, czyli

$$s = s_0 + ct. \qquad [3]$$

Wyraża to, że współrzędna drogi s rośnie równomiernie (jednostajnie) z czasem t, a stała c przedstawia przyrost drogi w jednostce czasu. Ruch taki nazywamy *prostoliniowym jednostajnym*, a stałą c — jego *prędkością*.

Gdy ustaliwszy jedną parę wartości odpowiednich s i t, oznaczymy parę późniejszą przez $s + \Delta s$, $t + \Delta t$, rozumiejąc przez Δt przedział czasu, jaki upłynął od chwili t*, to napiszemy:

$$s + \Delta s = s_0 + c\,(t + \Delta t),$$
$$s = s_0 + ct.$$

---

* Z określenia znaczenia Δx jako przyrostu wielkości x wynika oczywiście, że samo Δ nie przedstawia tutaj żadnej wielkości i np. iloraz $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ nie da się w ogóle „uprościć" do postaci $\frac{x}{t}$, tak jak iloraz $\frac{ab}{ac}$, który się równa $\frac{b}{c}$. Znaki Δ i x są niejako zrośnięte z sobą w jedną całość Δx, przedstawiającą wielkość przyrostu zmiennej x, zwanego także „różnicą" tej zmiennej. Iloraz różnic Δy i Δx dwu zmiennych nawzajem zależnych nazywamy *ilorazem różnicowym*. Wartość graniczna (limes) ilorazu różnicowego, jaką tenże otrzymuje, gdy oba przyrosty zdążają do zera, nazywa się *ilorazem różniczkowym* i oznacza symbolem $\frac{dy}{dx}$, w którym symbol dy nazywamy różniczką zmiennej y, a dx różniczką zmiennej x.

Z odjęcia obu równań otrzymujemy:

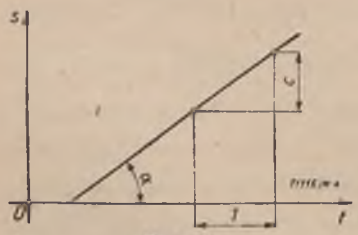
$$\Delta s = c \cdot \Delta t, \text{ czyli } \frac{\Delta s}{\Delta t} = c. \qquad [4]$$

Równanie to wyraża, że wielkość prędkości ruchu prostoliniowego jednostajnego jest równa ilorazowi przyrostu współrzędnej drogi przez odpowiedni przyrost czasu.

W skrócie nieścisłym mówimy często: prędkość $= \frac{\text{droga}}{\text{czas}}$.

Widzimy, że przy obranej wartości dodatniej Δt znak algebraiczny c jest ten sam co Δs. Znaczy to, że kierunek ruchu jest zarazem kierunkiem prędkości. Z tego wynika, że *prędkość* ma cechy wektora, który w ruchu prostoliniowym i jednostajnym jest *wektorem stałym* $\vec{c}$ zwanym *wektorem prędkości* albo krótko *prędkością*.

Jest rzeczą jasną, że prędkość $\vec{c}$ ruchu prostoliniowego i jednostajnego jest także zupełnie określona wektorem łączącym położenie punktu poruszającego się w chwili dowolnej t z położeniem osiągniętym w chwili $t + 1$, czyli po upływie jednostki czasu. To samo wyraża się zdaniem: Prędkość $\vec{c}$ ruchu prostoliniowego jednostajnego ma wartość liczbową równą drodze opisanej w jednostce czasu.

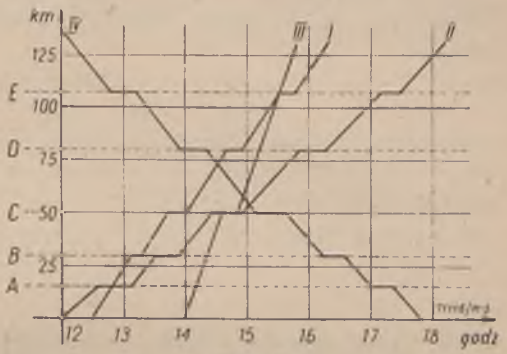


Rys. 4.

Na wykresie (s, t) ruchu jednostajnego (rys. 4) jest wartość liczbowa prędkości określona tangensem kąta nachylenia α prostej wykresu do osi czasu. A zatem prosta równoległa do osi czasu przedstawia ruch z prędkością $c = 0$, czyli *spoczynek*. Prostym nachylonym pod kątem coraz większym (ale ostrym) odpowiadają prędkości coraz większe. Wyłączywszy ruchy z prędkością

nieskończenie wielką, jako fizykalnie niemożliwe, musimy wyłączyć także jako wykresy, proste prostopadłe do osi czasu. Proste zaś nachylone do osi czasu pod kątem rozwartym przedstawiają ruchy z prędkością ujemną, tj. skierowane przeciwnie, czyli ruchy wsteczne względem poprzednich.

Takie wykresy są stosowane do sporządzania wykreślnych rozkładów jazdy na linii kolejowej łączącej dwie stacje końcowe. Rys. 5 przedstawia część wykresu odpowiadającą godzinom doby licząc od południa (godz. 12) i przeszło 125 kilometrom szlaku ze stacjami *A, B, C, D, E*. Rzut oka wystarczy, aby rozpoznać, że linia łamana *III jest* wykresem pociągu pośpiesznego, który wyprzedza pociąg towarowy przedstawiony linią *II* na stacji *C* (w kilometrze 50), pociąg zaś osobowy *I* mija się z pociągiem towarowym *IV* jadącym w kierunku przeciwnym około kilometra 70 przed stacją *D*, co dowodzi, że szlak jest dwutorowy. Dalej widać, że na stacji *C* skupia się ruch między godziną 13 min. 45, a godziną 15 min. 40, po tym zaś jest szlak po obu stronach stacji wolny przez czas dłuższy.



Rys. 5.

Przykład 1. Z miejsca *A* odległego od *B* o 60 km wyjeżdża motocyklista w kierunku *B* z prędkością 45 km/godz. Jednocześnie z miejsca *B* wyrusza w tym samym kierunku kolarz jadący ze stałą prędkością 15 km/godz. Po jakim czasie i w jakiej odległości od miejsca *B* motocyklista dogoni kolarza?

Rozwiązanie. Po szukanej liczbie t godzin znajdzie się kolarz w odległości $(60 + 15\,t)$ km od *A*. Aby go dopędzić musi motocyklista przebyć drogę $(45\,t)$ km. Mamy więc równanie warunkowe dla t:

$$60 + 15\,t = 45\,t,$$

z którego znajdujemy $t = 2$ godz, a stąd miejsce spotkania w odległości $2 \cdot 15 = 30$ km od miejsca *B*.

Przykład 2. Z miejsca A na danej drodze wyjeżdża o godz. 8 samochód jadący z prędkością 45 km/godz ku B. Tymczasem z B wyrusza o godz 8,10 drugi samochód ku A z prędkością 55 km/godz. Kiedy i gdzie się spotkają, jeżeli odległość AB wynosi 30 km?

Rozwiązanie. Spotkanie nastąpi po t minutach od chwili, kiedy samochód wyjeżdżający z A przebędzie $\frac{45}{60}\,t$ km. Samochód wyjeżdżający z B o 10 min później przejedzie tylko $55\frac{(t-10)}{60}$ km. Ponieważ suma przejechanych km $= 30$, przeto równanie warunkowe dla niewiadomej t ma postać:

$$\frac{45 \cdot t}{60} + \frac{55\,(t-10)}{60} = 30;$$

stąd $t = 23{,}5$ min, a więc odległość miejsca spotkania od A wyniesie

$$\frac{45 \cdot 23{,}5}{60} = 17{,}6 \text{ km}.$$

2. Inne sposoby opisu matematycznego ruchu punktu

Gdy położenie punktu w danym układzie odniesienia określimy współrzędnymi prostokątnymi x, y, z, to ruch punktu wyznaczają te współrzędne jako dane jednoznaczne funkcje czasu:

$$x = F_1(t), \qquad y = F_2(t), \qquad z = F_3(t). \qquad [5]$$

Każda z nich przedstawia ruch rzutu poruszającego się punktu m na odpowiednią oś współrzędnych. Jeżeli każdy z tych ruchów, zwanych także *ruchami składowymi*, jest ruchem jednostajnym, to powyższe równania ruchu przyjmą postać:

$$x = x_0 + c_1 t, \qquad y = y_0 + c_2 t, \qquad z = z_0 + c_3 t, \qquad [6]$$

gdzie x_0, y_0, z_0 oznaczają współrzędne początkowego położenia punktu, odpowiadające wartości $t = 0$, a c_1, c_2, c_3 są prędkościami ruchu rzutów punktu poruszającego się na osiach układu. Z wzorów [6] wynikają związki:

$$\frac{x - x_0}{c_1} = \frac{y - y_0}{c_2} = \frac{z - z_0}{c_3} = t, \qquad [7]$$

dowodzące, że torem ruchu jest prosta nachylona do osi pod kątami α, β, γ, której dostawy kierunkowe spełniają związki:

$$\frac{\cos\alpha}{c_1} = \frac{\cos\beta}{c_2} = \frac{\cos\gamma}{c_3} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} = \frac{1}{c}$$

jeżeli $c^2 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$. A zatem:

$$\frac{x - x_0}{c_1} = \frac{y - y_0}{c_2} = \frac{z - z_0}{c_3} = \frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}{c} = t.$$

Oznaczywszy przez $s = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ odległość punktu ruchomego x, y, z od stałego x_0, y_0, z_0 widzimy, że $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ jest prędkością ruchu rozpatrywanego, którego równaniem według pierwszego sposobu przedstawienia ruchu jest:

$$\frac{s}{c} = t. \qquad [8]$$

Zamiast współrzędnych prostokątnych można położenie punktu m określić *promieniem - wektorem* $\vec{r}$ łączącym początek układu 0 (jako punkt stały) z punktem poruszającym się m. Wtedy równanie wektorowe

$$\vec{r} = \vec{F}(t) \qquad [9]$$

jest równaniem ruchu równoważnym z trzema równaniami analitycznymi [5], albowiem wektor $\vec{r}$ jest sumą geometryczną (wektorową) trzech wektorów $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, które dają się wyrazić przez wektory jednostkowe (wersory) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ na osiach odpowiednich X, Y, Z, a mianowicie

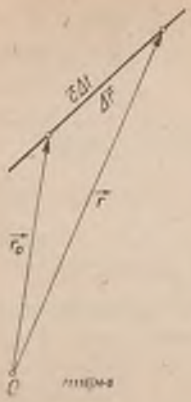
$$\vec{r} = i\vec{x} + j\vec{y} + k\vec{z}$$

W przypadku najprostszym wektorowe równanie ruchu ma postać:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{c}t, \qquad [10]$$

gdzie $\vec{r}_o = \vec{x}_o + \vec{y}_o + \vec{z}_o$ jest promieniem - wektorem położenia początkowego (dla $t = 0$), a $\vec{c}$ wektorem stałym. Równanie to przedstawia ruch prostoliniowy jednostajny (rys. 6)

BIBLIOTEKA PEDAGOGICZNA K. O. S. GDAŃSK



Rys. 6.

z prędkością $\vec{c}$, którą podobnie jak w § 1 można wyrazić równaniem:

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{c} \qquad [11]$$

gdzie $\Delta \vec{r}$ oznacza przyrost (geometryczny) promienia - wektora $\vec{r}$ odpowiadający przyrostowi czasu Δt.

Ruch punktu można także przedstawić współrzędnymi biegunowymi. Poprzestając na przypadkach ruchu na płaszczyźnie napiszemy:

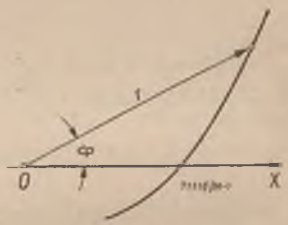
$$r = f(t) \qquad \vartheta = \varphi(t) \qquad [12]$$

jako równania ruchu punktu o współrzędnych biegunowych r i ϑ (rys. 7). W tych współrzędnych przedstawia się szczególnie prosto ruch jednostajny po okręgu koła, albowiem równanie toru ma postać:

$$r = R,$$

gdzie R oznacza wielkość promienia koła. Równanie ruchu zaś wyrazi, że kąt ϑ, jaki promień r punktu m opisuje, rośnie liniowo z czasem, czyli:

$$\vartheta = \vartheta_0 + \omega t, \qquad [13]$$



Rys. 7.

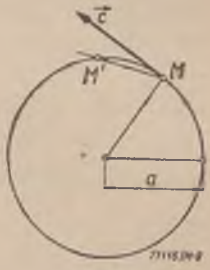
gdzie $\omega = \text{const}$ określa kąt opisany w jednostce czasu, czyli stałą wartość stosunku:

$$\frac{\Delta \vartheta}{\Delta t} = \frac{\text{przyrost kąta}}{\text{przyrost czasu}} = \omega \qquad [14]$$

zwaną prędkością kątową. Kąt ϑ_0 określa oczywiście położenie początkowe punktu m.

Mierząc kąty stosunkiem łuku do promienia, czyli przyjmując jako jednostkę kąt środkowy odpowiadający długości łuku równej promieniowi (tzw. „radian"), otrzymujemy jako wymiar prędkości kątowej liczbę oderwaną, podzieloną przez

jednostkę czasu. A zatem w układzie C. G. S: jednostką prędkości kątowej jest sek^{-1}. Powrócimy do niej w teorii ruchu obrotowego. Ponieważ $R\omega = c$ przedstawia długość łuku koła opisaną w jednostce czasu, przeto $c = R\omega$ określa stałą wartość liczbową prędkości ruchu kołowego jednostajnego. Ażeby zgodnie z pojmowaniem (jak powyżej) prędkości jako wektora, określić kierunek prędkości $\vec{c}$ w miejscu M zajętym w chwili t przez poruszający się punkt, łączymy M z punktem M' zajętym w chwili $t + \Delta t$. Utworzona w ten sposób cięciwa MM' (rys. 8) zmniejsza swoją długość, gdy Δt maleje zdążając do tej samej granicy co długość łuku $\overset{\frown}{MM'}$ ($\lim \frac{MM'}{\overset{\frown}{MM'}} = 1$). Kierunek cięciwy zdąża zarazem do granicy, którą jest kierunek stycznej w punkcie M, gdy $\Delta t \to 0$. A zatem wektor $\vec{c}$ prędkości ma w punkcie M kierunek styczny do toru kołowego, który, jak wiadomo, jest prostopadły do promienia tego punktu.



Rys. 8.

3. Ruch prostoliniowy zmienny

Gdy równanie ruchu $s = F(t)$ po torze prostym nie jest liniowe względem czasu, a więc nie przedstawia ruchu jednostajnego, to *ruch* ten nazywamy *niejednostajnym*, albo *zmiennym*. Drugi przymiotnik podkreśla, że prędkość ruchu nie jest stała. Zachodzi przeto pytanie, jak tę prędkość określić, gdy dane jest równanie ruchu. Tutaj w sposób najnaturalniejszy narzuca się porównanie ruchu danego między punktami M i M' zajętymi przez punkt m w chwili t i $t + \Delta t$ z ruchem jednostajnym innego punktu m', któryby w tym samym przedziale czasu t opisał drogę prostoliniową równą $MM' = \Delta s$. Prędkość stałą $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tego drugiego punktu nazywamy p r ę d k o -

ścią średnią ruchu danego punktu m między M a M' i wyrażamy ją równaniem:

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad [15]$$

Gdy teraz ustaliwszy w myśli chwilę t, zmniejszamy przedział czasu Δt aż do granicy 0, to granica ilorazu („różnicowego") $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ staje się (według określenia rachunku różniczkowego) ilorazem różniczkowym $\frac{ds}{dt}$, czyli pochodną s względem t, co wyrażamy równaniem *

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt},$$

a wektor prędkości $\vec{v}$ wzorem

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}, \qquad [16]$$

gdzie $d\vec{s}$ oznacza wektor przemieszczenia elementarnego na torze. A zatem wartością liczbową prędkości chwilowej ruchu zmiennego prostoliniowego jest pochodna współrzędnej drogi względem czasu. Na wykresie (s, t) określa ją w sposób widoczny tangens kąta, jaki styczna do krzywej wykresu tworzy z osią t.

4. Ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny

Ruchem prostoliniowym jednostajnie zmiennym nazywamy taki ruch, w którym zmiana prędkości w jednostce czasu jest stałą, czyli prędkość v po t jednostkach czasu przedstawia się wzorem:

$$v = v_0 + at,$$

* Stosując nazwę łacińską granicy „limes" piszemy w skrócie $\lim_{(\Delta t \to 0)} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ zamiast: „granica do której zdąża iloraz $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$, gdy Δt zdąża do zera".

gdzie v_o oznacza prędkość początkową (w chwili $t = 0$), zaś a jest wielkością zmiany prędkości w jednostce czasu, czyli jak się wyrażamy *wielkością przyśpieszenia*.

Taki rodzaj ruchu stwierdził najpierw *Galileusz* na punktach ciał ciężkich spadających swobodnie pionowo z niezbyt wielkiej wysokości, tj. w warunkach umożliwiających pominięcie oporu powietrza. Powrócimy do tego w zagadnieniach kinetyki.

Ponieważ prędkość jest wektorem $\vec{v}$, a czas t skalarem, przeto i przyśpieszenie jest wektorem $\vec{a}$. Wektor ten ma kierunek zgodny z prędkością, gdy wartość prędkości rośnie, a przeciwny, gdy ona maleje. W tym ostatnim przypadku mówimy o *przyśpieszeniu ujemnym*, albo *opóźnieniu* (*zwolnieniu*) *ruchu*.

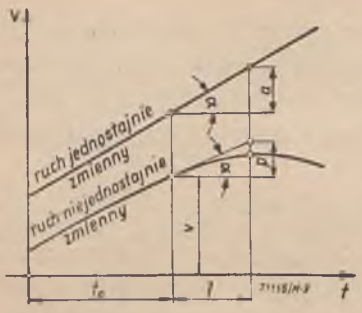
Analogicznie, jak dla prędkości ruchu prostoliniowego jednostajnego, napiszemy dla przyśpieszenia ruchu prostoliniowego jednostajnie zmiennego równania:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a, \qquad \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}. \qquad [17]$$

Gdy stosunek przyrostu prędkości do przyrostu czasu nie jest — jak założyliśmy powyżej — stały, to *ruch* taki nazywamy *niejednostajnie zmiennym*. Dla takiego ruchu iloraz $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ nazywamy (analogicznie do wprowadzonej powyżej prędkości średniej) *przyśpieszeniem średnim*. To prowadzi również do uogólnienia pojęcia przyśpieszenia $\vec{p}$ w chwili t, jako granicy, do której zdąża iloraz $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$, gdy Δt zdąża do zera, czyli jako:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{p}. \qquad [18]$$

Jest to zarazem najogólniejsze określenie przyśpieszenia (jako wektora).



Rys. 9.

W ruchu niejednostajnie zmiennym prędkość $\vec{v}$ jest funkcją czasu różną oczywiście od liniowej. Zależność v, przedstawiona wykreślnie na płaszczyźnie współrzędnych (rys. 9), daje linię prostą w przypadku ruchu jednostajnie zmiennego, krzywą zaś dla każdego ruchu niejednostajnie zmiennego. Wielkość p przyśpieszenia ruchu prostoliniowego niejednostajnie zmiennego jest zatem na wykresie (v, t) określona tangensem kąta α, jaki styczna do krzywej wykresu tworzy z osią t.

Przykład 1. Z jakim przyśpieszeniem ma ruszać z miejsca samochód, aby po $t = 2, 3, 4 \ldots$ sekundach uzyskać prędkość $v = 50$ km/godz, czyli $\frac{1000 \cdot 50}{60 \cdot 60} = 13{,}9$ m/sek.

Rozwiązanie. Przyjąwszy, że ruch początkowy jest jednostajnie przyśpieszony, zastosujemy wzór $v = at$, a więc szukane przyśpieszenie $a = v/t = 13{,}9/t$ (m/sek²).

Np. dla $t =$ 2 3 4 sek
jest $a =$ 6,95 4,63 3,47 m/sek².

Przykład 2. Jakie przyśpieszenie ujemne a należy nadać pojazdowi mającemu prędkość $v = 50$ km/godz $= 13{,}9$ m/sek, aby zahamować go na długości $s = 10$ m.

Rozwiązanie: Szukane przyśpieszenie $a = \frac{v}{t}$, zaś $s = \frac{1}{2} at^2$.

Z drugiego równania znajdujemy $\sqrt{\frac{2s}{a}} = t$, a po podstawieniu w pierwsze mamy: $a = v \sqrt{\frac{a}{2s}}$, czyli

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{13{,}9^2}{20} = 9{,}65 \text{ m/sek}^2.$$

Przykład 3. Do głębokiego szybu puszczamy swobodnie kamień, który w znacznym przybliżeniu spada z przyśpieszeniem $g = 9{,}81$ m/sek^2 i mierzymy czas t, jaki upływa od wypuszczenia kamienia z ręki aż do usłyszenia jego uderzenia o dno. Obliczyć głębokość szybu przyjmując, że szybkość rozchodzenia się fal głosowych w szybie wynosi 333 m/sek.

Rozwiązanie. Czas spadania z wysokości h równej głębokości szybu jest (patrz przykład 2) $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, czas zaś potrzebny do dojścia fali głosowej do ucha $t_2 = \frac{h}{c}$, gdzie $c = 333$ m/sek.

Ponieważ $t = t_1 + t_2$, więc równanie warunkowe do wyznaczenia h ma postać:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c}.$$

Rozwiązanie tego równania kwadratowego względem h daje:

$$h = \frac{c^2}{g}\left(1 + \frac{gt}{c} + \sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}\right).$$

Drugi z pierwiastków, mający znak + w środku odrzucamy jako nie spełniający warunku, że gdy $t = 0$ i $h = 0$.

Rozwiązaniu łatwo nadać postać korzystniejszą w rachunku liczbowym, a mianowicie:

$$h = \frac{gt^2}{1 + \frac{gt}{c} + \sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}}$$

Gdy np. $t = 10$ *sek*, to ponieważ $\frac{g}{c} = \frac{9{,}81}{333} = 0{,}0295$ sek^{-1}, więc

$$h = \frac{9{,}81 \cdot 100}{1 + 0{,}295 + \sqrt{1 + 0{,}590}} = 383 \text{ m}.$$

5. Prędkość i przyśpieszenie ruchu krzywoliniowego

Gdy ruch jest przedstawiony równaniem wektorowym

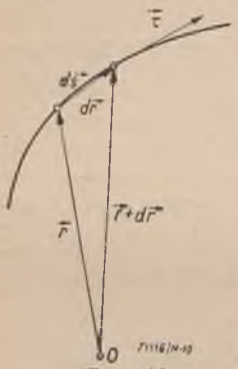
$$\vec{r} = \vec{F}(t),$$

które zarazem określa tor jako w ogóle krzywą przestrzenną, to przyrost geometryczny $\Delta \vec{r}$ promienia $\vec{r}$ w przedziale czasu Δt przedstawia cięciwę łączącą miejsce M poruszającego się punktu m w chwili t z miejscem M' tegoż punktu w chwili

$t + \Delta t$. Iloraz $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ wyraża zatem prędkość takiego ruchu prostoliniowego jednostajnego po tej cięciwie, który rozpoczyna się w punkcie M i kończy w M' jednocześnie z ruchem krzywoliniowym danym po łuku $\overset{\frown}{MM'}$. Dlatego $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_{sr}$ przedstawia prędkość średnią zgodnie z określeniami poprzednimi, a

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \qquad [19]$$

określa prędkość poruszającego się punktu m w chwili t, jako pochodną (iloraz różniczkowy) promienia-wektora tego punktu względem czasu t.



Rys. 10.

Gdy element łuku toru ds pojmujemy jako wektor łączący koniec promienia $\vec{r}$ z końcem promienia $\vec{r} + d\vec{r}$ (rys. 10), to $d\vec{s} = d\vec{r}$. Oznaczymy przez $\vec{\tau}$ wektor jednostkowy (wersor) na stycznej do toru w punkcie rozpatrywanym, to $d\vec{r} = d\vec{s} = \vec{\tau}\, ds$, a więc

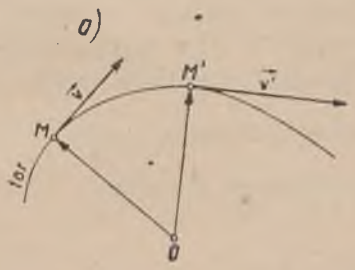
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\tau}\,\frac{ds}{dt} \qquad [20]$$

z czego widać, że prędkość $\vec{v}$ jest styczna do toru i ma wartość algebraiczną:

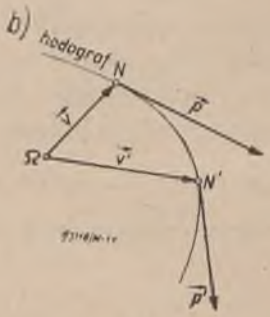
$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad [21]$$

Dajmy na to, że dla danego ruchu krzywoliniowego (rys. 11 a) wyznaczyliśmy prędkość w punktach kolejnych i zna-

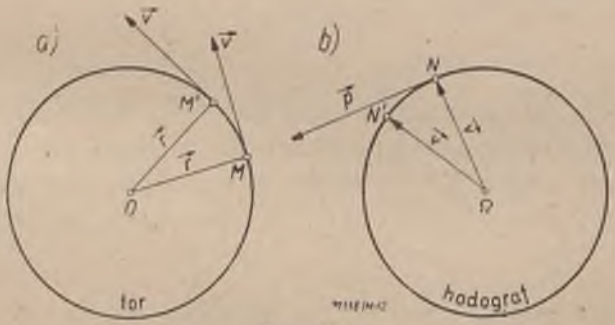
lezione wektory prędkości wystawiamy z dowolnie obranego początku (rys. 11 b). Wtedy końce tych wektorów leżą na krzywej nazywanej przez *R. Hamiltona hodografem* danego ruchu. Ruch ten określa przeto jednoznacznie ruch innego punktu, pomyślanego, po hodografie. Prędkością ruchu po hodografie jest oczywiście $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$, czyli pochodna prędkości ruchu



Rys. 11 a.



Rys. 11 b.



Rys. 12.

danego względem czasu. Uogólniając teraz pojęcie przyśpieszenia ustalone powyżej dla ruchu prostoliniowego, widzimy, że równanie

$$\vec{p} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad [22]$$

określające wektor przyśpieszenia jakiegokolwiek ruchu krzy-

woliniowego wyraża, że przyśpieszenie ruchu danego jest równe prędkości w odpowiednim punkcie hodografu tego ruchu.

Stosownie do tego znajdujemy w prostym przypadku ruchu po okręgu koła o promieniu r z prędkością o stałej wartości liczbowej v, że hodograf tego ruchu jest również okręgiem koła o promieniu równym v (rys. 12). W każdej chwili jest promień $\vec{r}$ prostopadły do odpowiedniego promienia $\vec{v}$ hodografu. Oba okręgi są oczywiście opisane w czasie tym samym T (czas obiegu, okres ruchu), a więc prędkości kątowe w obu ruchach są równe. Ich wartość ω wyraża się dla ruchu danego przez $\frac{v}{r}$, a dla ruchu po hodografie przez $\frac{p}{v}$, jeżeli p oznacza przyśpieszenie ruchu danego. A zatem:

$$\frac{v}{r} = \frac{p}{v},$$

z czego wynika

$$p = \frac{v^2}{r}. \qquad [23]$$

Dowodzi to, że przyśpieszenie ruchu kołowego jednostajnego z prędkością v jest skierowane do środka koła i ma wartość równą kwadratowi prędkości podzielonemu przez promień koła.

Gdy ruch po okręgu koła nie jest jednostajny, t. j. gdy wartość liczbowa prędkości $v = \frac{ds}{dt}$ nie jest stała, to hodograf ruchu nie jest kołem, a więc prędkość po hodografie, która jest zarazem przyśpieszeniem ruchu danego, nie ma już kierunku prostopadłego do prędkości $\vec{v}$ ruchu danego i zwróconego ku środkowi koła, lecz odchyla się odeń ku kierunkowi prędkości $\vec{v}$ o kąt ostry. A zatem przyśpieszenie $\vec{p} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ jest wtedy wektorem dającym się rozłożyć w kierunku stycznym i normalnym do toru.

Rozkład ten wykonamy najłatwiej, wstawiwszy jak powyżej $\vec{v}$ wartość $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$, czyli pisząc

$$\vec{p} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\tau}\,\frac{ds}{dt}\right)$$

i wykonując różniczkowanie iloczynu $\vec{\tau}\,\frac{ds}{dt}$ według wzoru różniczkowego $d(uv) = u\,dv + v\,du$.

Mamy więc

$$\vec{p} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\frac{ds}{dt} + \vec{\tau}\,\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Uwzględniając, że

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}, \text{ a } \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{dv}{dt}$$

znajdujemy

$$\vec{p} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \vec{\tau}\,\frac{dv}{dt}. \qquad [24]$$

Ale $d\vec{\tau}$ ma oczywiście kierunek normalnej, ponieważ $\vec{\tau}$ ma długość stałą i równą 1, a tylko kierunek zmienny. Oznaczywszy wersor normalnej przez $\vec{\nu}$, a kąt elementarny o jaki się obraca styczna, a zarazem i normalna, gdy współrzędna drogi s wzrośnie o ds, przez $d\alpha$, mamy $d\vec{\tau} = \vec{\nu}\,d\alpha$, a więc:

$$\frac{d\tau}{ds} = \vec{\nu}\,\frac{d\alpha}{ds}.$$

Ponieważ $\frac{ds}{d\alpha} = r$ (promieniowi toru), przeto równanie [24] przyjmie postać

$$\vec{p} = \vec{\nu}\,\frac{v^2}{r} + \vec{\tau}\,\frac{dv}{dt} = \vec{p}_n + \vec{p}_t, \qquad [25]$$

jeżeli

$$\vec{p}_n = \vec{\nu}\,\frac{v^2}{r}, \text{ czyli } p_n = \frac{v^2}{r} \qquad [26]$$

oznacza składową normalną przyśpieszenia, czyli *przyśpieszenie normalne*, zaś

$$\vec{p_t} = \vec{\tau}\,\frac{dv}{dt}, \text{ czyli } p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad [27]$$

oznacza składową styczną przyśpieszenia, czyli *przyśpieszenie styczne*. Równania te wyrażają, że:

1. Przyśpieszenie styczne ma wartość równą drugiej pochodnej współrzędnej drogowej względem czasu albo pierwszej pochodnej wartości prędkości względem czasu.

2. Przyśpieszenie normalne skierowane ku środkowi toru ma wartość równą kwadratowi prędkości podzielonemu przez promień toru. Nazywamy je także *przyśpieszeniem dośrodkowym*.

6. Przyśpieszenie styczne i normalne w ruchu punktu po torze krzywoliniowym

Wykonany powyżej rozkład przyśpieszenia w ruchu jednostajnym po kole na przyśpieszenie styczne $\vec{p_t}$ i normalne $\vec{p_n}$ wykazuje nader ważną własność ogólną ruchu krzywoliniowego. Każdy bowiem łuk krzywej „gładki", t. zn. posiadający wszędzie styczną i promień krzywizny ϱ może być traktowany jako ciąg łuków kołowych elementarnych o promieniach określonych promieniami krzywizn. Łuk taki jako tor punktu poruszającego się ma zatem własność wspólną z okręgami kół, czyli wykazuje przyśpieszenie styczne $\vec{p_t}$ o wielkości $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ i kierunku stycznej do toru, oraz przyśpieszenie normalne, czyli dośrodkowe $\vec{p_n}$, o wielkości $\frac{v^2}{\varrho}$ skierowane ku środkowi krzywizny.

Kierunek przyśpieszenia stycznego jest zgodny z kierunkiem prędkości gdy $\frac{dv}{dt}$ jest dodatnie, a przeciwny gdy $\frac{dv}{dt}$ jest ujemne.

Przyśpieszenie całkowite $\vec{p}$ ma przeto wartość liczbową:

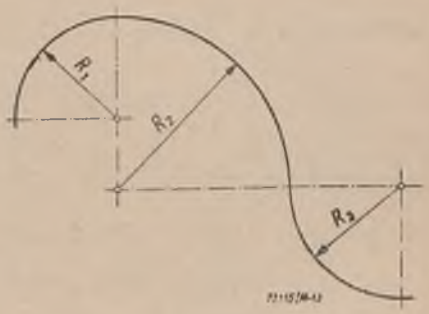
$$p = \sqrt{p^2_t + p^2_n} \qquad [28]$$

i jest skierowane ku wklęsłości toru.

Wniosek 1. Gdy ruch krzywoliniowy jest jednostajny, to $p_t = 0$, a przyśpieszeniem całkowitym jest p_n.

Wniosek 2. W punktach przegięcia toru (gdzie krzywizna zmieniając znak przechodzi przez wartość zerową) jest $p_n = 0$, a przyśpieszeniem całkowitym staje się p_t.

Przykład 1. Po torze składającym się z łuków kołowych płaskich o promieniach $R_1 = 100$ m, $R_2 = 200$ m, $R_3 = 150$ m (rys. 13) porusza się punkt m z prędkością o stałej wartości liczbowej $c = 10$ m/sek. Obliczyć przyśpieszenie.



Rys. 13.

Rozwiązanie. Na każdym z łuków jest przyśpieszenie stałe i równa się c^2R, ale dla każdego z nich różne. To przyśpieszenie ma przy powyższych danych wartości:

$$\frac{100}{100} = 1 \text{ m/sek}^2; \quad \frac{100}{200} = 0{,}5 \text{ m/sek}^2; \quad \frac{100}{150} = 0{,}667 \text{ m/sek}^2,$$

przy czym to ostatnie jest skierowane ku przeciwnej stronie toru niż dwa pierwsze. W naszym zadaniu jest przeto przyśpieszenie w zależności od miejsca na torze funkcją przedziałami ciągłą, ale zrywającą ciągłość w miejscach złączenia przedziałów.

Przykład 2. Przyśpieszenie a ruchu jednostajnego po okręgu koła o promieniu $R = 10$ ma wartość 15 m/sek^2. Jaka jest prędkość ruchu c?
Odpowiedź. Ponieważ $a = c^2/R$, więc $c = \sqrt{aR} = \sqrt{15.10} = 12{,}25$ m/sek.

7. Prędkość i przyśpieszenie ruchu krzywoliniowego punktu przedstawione współrzędnymi prostokątnymi

Każdą ze współrzędnych x, y, z możemy wyrazić równaniami:

$$x = F_1(t), \qquad y = F_2(t), \qquad z = F_3(t),$$

gdzie F_1, F_2, F_3 przedstawiają określone funkcje czasu.

Jak zaznaczono już na wstępie (patrz równanie [2]), promień-wektor $\vec{r}$ łączący początek współrzędnych z punktem poruszającym się m da się wyrazić w postaci sumy wektorowej:

$$\vec{r} = \vec{xi} + \vec{yj} + \vec{zk}, \qquad [29]$$

gdzie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ są wektorami jednostkowymi (wersorami) na osiach X, Y, Z, a więc współczynnikami stałymi. Wobec tego prędkość $\vec{v}$, jako określoną ogólnie ilorazem różniczkowym $\frac{\vec{dr}}{dt}$, można przedstawić wzorem:

$$\frac{\vec{dr}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \qquad [30]$$

zaś przyśpieszenie:

$$\vec{p} = \frac{\vec{dv}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \qquad [31]$$

Wzory te wyrażają, że rzut wektora prędkości i wektora przyśpieszenia punktu m na dowolną prostą (obraną za oś współrzędnych prostokątnych) jest odpowiednio równy wektorowi prędkości i przyśpieszenia rzutu punktu m na tę prostą.

Na tym polega znaczenie praktyczne współrzędnych prostokątnych (lub innych, które będziemy stosowali zależnie od typu zagadnienia), albowiem w zadaniach konkretnych szukamy wartości liczbowych długości, kątów, dla wyznaczenia rzutów, które przedstawiają szukany wektor.

Rzuty wektora na osie X, Y, Z nazywamy także *składowymi prostokątnymi* tego *wektora*, który wtedy nazywamy często *wektorem wypadkowym.*

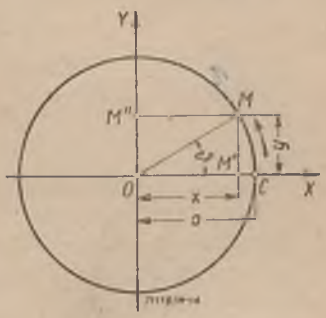
Rozdział IA

RUCHY SZCZEGÓLNE PUNKTU

W następnych paragrafach rozpatrzymy szczegółowo niektóre najważniejsze i najprostsze przypadki ruchu punktu, rozpoczynając od ruchu jednostajnego po okręgu koła, który jest najprostszym przykładem *ruchów okresowych,* tj. takich, które się powtarzają identycznie w równych kolejnych przedziałach czasu T zwanych *okresem (periodem) ruchu.* Ruch taki wykonują wszystkie punkty jakiejkolwiek części maszynowej obracającej się jednostajnie około osi wyznaczonej środkami czopów otoczonych panewkami łożysk.

8. Ruch kołowy jednostajny jako ruch harmoniczny

Gdy punkt m (rys. 14) porusza się jednostajnie po okręgu o promieniu a z położenia początkowego C (dla $t = 0$), np. w kierunku przeciwnym wskazówkom na tarczy zegara, to obrawszy prostą OC za oś odciętych X, a prostopadłą do niej OY za oś rzędnych Y, znajdziemy równania ruchu we współrzędnych prostokątnych, wyraziwszy te współrzędne przez promień $r = a$ i kąt ϑ, jaki zawiera r z osią X. A zatem:



Rys. 14.

$$x = a \cos \vartheta,$$
$$y = a \sin \vartheta.$$

Ale kąt ϑ jako proporcjonalny względem czasu t da się wyrazić równaniem $\vartheta = \omega t$, gdzie ω jest prędkością kątową obrotu promienia, albo też — ponieważ $\omega = \frac{2\pi}{T}$, gdzie T jest okresem ruchu — równaniem

$$\vartheta = \frac{2\pi}{T} t. \qquad [32]$$

Mamy więc:

$$x = a \cos \omega t = a \cos \frac{2\pi}{T} t,$$
$$y = a \sin \omega t = a \sin \frac{2\pi}{T} t, \qquad [33]$$

jako równanie danego ruchu. Każde z tych równań jest zarazem równaniem ruchu prostoliniowego punktu, który jest rzutem punktu m danego ruchu kołowego. Ruchy te, odgrywające bardzo ważną rolę w akustyce, otrzymały nazwę *prostych ruchów harmonicznych*. Z tego wynika, że ruch kołowy jednostajny jest z nimi niejako najbliżej spokrewniony, wobec czego nazwiemy go *ruchem harmonicznym kołowym*.

Przykład 1. Promień $r = 4$ m punktu poruszającego się jednostajnie po okręgu wykonywa 100 obrotów na minutę; jaka jest prędkość i przyśpieszenie punktu?

Odpowiedź. Przy n obrotach na minutę opisuje promień w 1 sekundzie kąt $\frac{n2\pi}{60} = \omega$ (prędkość kątowa w sek -1). Przy powyższych danych liczbowych jest więc:

$$\omega = \frac{100 \cdot 2\pi}{60} = \frac{10 \cdot \pi}{3} \quad (\text{sek}^{-1})$$

Prędkość zaś liniowa

$$v = r\omega = 4 \cdot \frac{10 \cdot \pi}{3} = 41{,}9 \text{ m/sek.}$$

Wreszcie przyśpieszenie (dośrodkowe):

$$a = v^2/r = 41{,}9^2/4 = 439 \text{ m/sek}^2.$$

Przykład 2. Obliczyć prędkość i przyśpieszenie punktu poruszającego się prostym ruchem harmonicznym o okresie $T = 5$ sek i amplitudzie $A = 10$ cm.

Rozwiązanie. Rozpoczynając liczyć czas od chwili, gdy odchylenie od środka ruchu $x = A$, piszemy równanie danego ruchu w postaci:

$$x = A \cos \frac{2\pi t}{T} = 10 \cos \frac{2\pi}{5} t.$$

Ponieważ ruch ten jest rzutem ruchu jednostajnego po okręgu o promieniu A, przeto szukana prędkość i przyśpieszenie są rzutami na oś X prędkości i przyśpieszenia tego ruchu kołowego. Jego prędkość

$$V = \frac{2\pi A}{T},$$

a przyśpieszenie (dośrodkowe) $a = \frac{V^2}{A} = \frac{4\pi^2 A}{T^2}$.

Prędkość V jest nachylona do osi X pod kątem $\frac{\pi}{2} + \varphi$, gdzie $\varphi = \frac{2\pi t}{T}$, a zatem prędkość ruchu harmonicznego rozpatrywanego

$$v = V \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -V \sin \frac{2\pi t}{T} = -\frac{2A\pi}{T} \sin \frac{2\pi t}{T} =$$

$$= 12{,}57 \cdot \sin 1{,}257\, t.$$

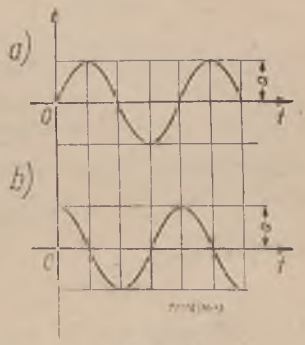
Przyśpieszenie zaś jako rzut przyśpieszenia $\frac{4\pi^2}{T^2} A$, nachylonego do X pod kątem $\pi + \varphi$, ma wielkość

$$p = \frac{4\pi^2}{T^2} A \cos(\pi + \varphi) = -\frac{4\pi^2}{T^2} A \cos \frac{2\pi t}{T} = -15{,}79 \cos 1{,}257\, t.$$

To samo otrzymalibyśmy przez kolejne różniczkowanie względem t danego równania ruchu.

9. Równanie ogólniejsze prostego ruchu harmonicznego

Równania $x = a \cos \omega t$ i $y = a \sin \omega t$ przedstawiają ruchy harmoniczne proste o okresie tym samym $T = 2\pi/\omega$. Ich wykresy widzimy na rys. 15 a i b. W obu największą rzędną jest a. Nazywamy ją *amplitudą (obszernością) ruchu harmonicznego*. Obydwa wykresy przedstawiają linię falistą tej samej postaci zwanej sinusoidą, a tylko druga krzywa (którą można by nazwać cosinusoidą) jest cofnięta na osi czasu względem pierwszej o $T/4$, ponieważ (jak wiadomo z goniometrii) jest $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$,



Rys. 15.

a więc $\cos \omega t = \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{T}{4}\right)$.

Widzimy z tego, że proste ruchy harmoniczne określone równaniami:

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T} t \quad \text{i} \quad y = a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

różnią się jedynie tzw. *fazą ruchu*. Gdy bowiem w chwili $t = 0$ punkt poruszający się według równania sinusowego przechodzi przez środek ruchu a zarazem początek współrzędnych, to punkt poruszający się według równania cosinusowego jest oddalony o amplitudę a. W tym zaś miejscu znajdzie się punkt pierwszy dopiero po czasie równym $T/4$. Fakt ten stwierdzamy mówiąc w sposób przyjęty powszechnie, że faza ruchu drugiego wyprzedza fazę ruchu pierwszego o ćwierć okresu.

Zamiast określać fazę ruchu okresowego ułamkiem okresu T, podajemy często wartość kąta φ, jaki w odpowiednich ruchach kołowych tworzą promienie punktów ruchomych. Fazie $T/4$ odpowiada zatem kąt równy jednej czwartej 2π, czyli

$\pi/2$. Kąt ten mierzy *różnicę faz* obu powyższych ruchów równookresowych.

Przy danej różnicy faz φ mają równania dwu ruchów prostych harmonicznych o równych okresach i amplitudach postać:

$$z = a \sin \omega t \qquad \text{i} \qquad z = a \sin (\omega t + \varphi)$$

Otóż drugie równanie można przekształcić na

$$z = a \sin \omega t \cdot \cos \varphi + a \cos \omega t \cdot \sin \varphi$$

albo oznaczywszy współczynniki stałe

$$a \cos \varphi = A, \; a \sin \varphi = B \qquad [34]$$

napiszemy

$$z = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

Wyraża to, że każdy prosty ruch harmoniczny, czyli krócej *drganie harmoniczne*, można uważać za złożony z drgania sinusowego i cosinusowego o amplitudach różnych A i B, lecz okresach równych. Z danych zaś wartości amplitud ruchów składowych A i B znajdujemy amplitudę i fazę ruchu wypadkowego przy pomocy wzorów:

$$a^2 = A^2 + B^2 \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$$

wynikających bezpośrednio ze związków — wzór [34].

Równanie:

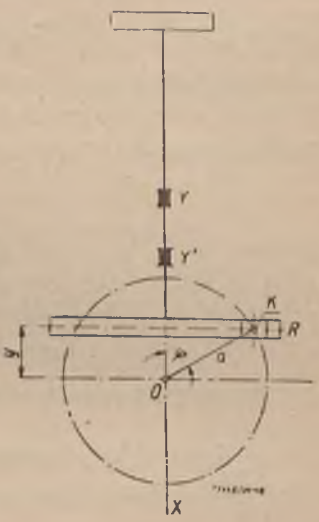
$$z = a \sin (\omega t + \varphi) = a \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi \right), \qquad [35]$$

gdzie φ może być dodatnie lub ujemne, jest przeto równaniem najogólniejszym prostego ruchu harmonicznego o amplitudzie a, okresie T i fazie początkowej φ (określonej kątem fazy). Gdy okres drgania harmonicznego jest bardzo krótki, to dla wygody rachunku liczbowego wprowadzamy wartość $1/T = n$ zwaną *częstością* (także „częstotliwością") ruchu okresowego. Częstość przedstawia więc ilość okresów odbytych w jednostce czasu, np. w sekundzie. W obliczeniach teoretycznych jest jeszcze wygodniej posługiwać się *częstością kątową*

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$ (zwaną także przez elektryków „pulsacją“ drgania), która jest liczbowo równa prędkości kątowej promienia tego ruchu kołowego, którego rzutem jest rozpatrywany prosty ruch harmoniczny.

10. Składanie prostych ruchów harmonicznych

Wykonany powyżej rozkład ruchu jednostajnego po okręgu koła na dwa ruchy proste harmoniczne wzajemnie prostopadłe stanowi nie tylko formalną operację matematyczną, ale da się unaocznić na mechanizmie konkretnym tak zwanej *kulisy Wolfa* (rys. 16). Jest to rama R z wycięciem podłużnym, (na rysunku poziomym) w którym to wycięciu może się tam i na powrót przesuwać tzw. krzyżulec K połączony przegubowo z korbą KO złączoną z osią O ustaloną prostopadle do płaszczyzny rysunku. Sama kulisa jest wodzona po osi pionowej YY' za pośrednictwem prętów z nią sztywnie złączonych. Przy obrocie korby kulisa porusza się okresowo do góry i w dół, a krzyżulec przesuwa się w niej również okresowo na prawo i na lewo. Gdy obrót korby jest taki, że środek krzyżulca porusza się jednostajnie po okręgu koła, to przesunięcie kulisy porusza każdy jej punkt w górę i w dół ruchem harmonicznym. Takiż ruch odbywa krzyżulec względem kulisy w prawo i w lewo.



Rys. 16.

Skoro nawzajem udzielimy kulisie prostego ruchu harmonicznego pionowego $y = a \sin \omega t$, a krzyżulcowi ruchu poziomego $x = a \cos \omega t$ względem kulisy, to środek krzyżulca opisze względem podstawy mechanizmu koło o promieniu a

z prędkością stałą $a\omega$. Wynik ten stwierdzamy mówiąc, że ruch kołowy harmoniczny jest ruchem wypadkowym z dwu prostych ruchów harmonicznych wzajemnie prostopadłych o równych okresach i amplitudach, a o fazach różniących się o ćwierć okresu.

Podobnie łatwo sobie uzmysłowić inne przypadki składania prostych ruchów harmonicznych, jak np.:

$$x = a \sin \omega t, \quad y = b \sin \omega t. \tag{36}$$

Te dwa ruchy wzajemnie prostopadłe o różnych okresach i fazach, a różnych amplitudach a i b dają, jak łatwo dostrzec, ruch wypadkowy, który jest znowu prostym ruchem harmonicznym po prostej $y = \frac{b}{a}x$, o amplitudzie równej $\sqrt{a^2 + b^2}$. Wynika to z podzielenia obu równań, oraz podniesienia do kwadratu, dodania i wyciągnięcia pierwiastka kwadratowego. Równanie ruchu wypadkowego przyjmuje postać:

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin \omega t, \tag{37}$$

gdzie $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest odchyleniem punktu od środka ruchu. Gdyby fazy powyższych ruchów składanych różniły się np. o kąt φ, to równaniami ruchu byłyby:

$$x = a \sin \omega t, \quad y = b \sin (\omega t + \varphi) \tag{38}$$

Drugie równanie można jednak przekształcić na

$$y = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t, \text{ gdzie } c_1 = b \cos \varphi, \; c_2 = b \sin \varphi.$$

Z pierwszego równania znajdujemy:

$$\sin \omega t = \frac{x}{a},$$

z drugiego zaś:

$$\cos \omega t = \frac{1}{c_2}(y - c_1 \sin \omega t) = \frac{y}{c_2} - \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{x}{a}.$$

Po podniesieniu do kwadratu i dodaniu otrzymamy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{y}{c_2} - \frac{c_1 x}{a c_2}\right)^2 = 1$$

albo wyraziwszy c_1 i c_2 przez b i φ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\varphi = \sin^2\varphi \qquad [39]$$

jako równanie toru, który jest elipsą o środku w początku współrzędnych.

Z ruchem takim i innymi złożonymi z prostych ruchów harmonicznych spotykamy się niejednokrotnie w kinetyce, zwłaszcza przy badaniu *drgań sprężystych*, tj. ruchów okresowych wywołanych siłami sprężystości. Gdy np. pręt stalowy okrągły opatrzony na końcu kulą utwierdzimy jednym końcem w imadle i wytrącimy kulę z położenia równowagi w kierunku dowolnym, to powstaną drgania pręta objawiające się prostym ruchem harmonicznym środka kuli. Ruch ten łatwo uwidocznić wyraźnie np. przez wypolerowanie powierzchni kuli na zwierciadło wypukłe, które skupia obraz zewnętrznego źródła światła.

Gdy po odchyleniu kuli z położenia równowagi, udzielimy jej prędkości początkowej nachylonej do kierunku odchylenia, to środek kuli opisze elipsę określoną równaniem [39].

Przechodząc teraz do przypadków bardziej złożonych weźmy pod uwagę drganie prostoliniowe złożone z dowolnej liczby prostych drgań harmonicznych o różnych amplitudach i fazach, ale wspólnym okresie T, czyli wspólnej częstości kątowej ω. Pokaże się, że wypadkowa takich drgań jest prostym ruchem harmonicznym o tej samej częstości ω. Wystarczy oczywiście dowieść tego dla dwu równań, kiedy równanie ruchu wypadkowego ma postać:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \qquad [40]$$

co po znanym rozwinięciu funkcyj sumy kątów daje:

$$x = (a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2)\sin\omega t + (a_2 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2)\cos\omega t.$$

Wprowadźmy nowe stałe a i φ przez podstawienie:

$$a\cos\varphi = a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2;\quad a\sin\varphi = a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2$$

Po podniesieniu do kwadratu i dodaniu znajdziemy

$$a^2 = a^2_1 + a^2_2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

a z podzielenia tych samych równań wynika:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2} \qquad \text{stąd}$$

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{\sqrt{a^2_1 + a^2_2 + 2\,a_1\,a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}$$

Z tymi wartościami przyjmie równanie ruchu postać

$$x = a\cos\varphi\,\sin\omega t + a\sin\varphi\,\cos\omega t = a\sin(\omega t + \varphi) \qquad [41]$$

określającą prosty ruch harmoniczny.

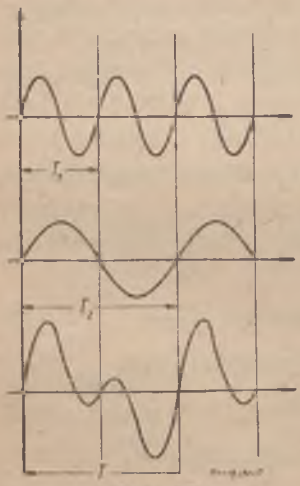
11 Składanie prostych drgań harmonicznych o różnych częstościach

Weźmy dwa drgania harmoniczne po tej samej prostej o okresach T_1 i T_2 i odpowiednio o częstościach kątowych ω_1 i ω_2. Równaniem ruchu wypadkowego jest

$$x = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad [42]$$

albo $x = a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t + \varphi_1\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} t + \varphi_2\right)$.

Należy odróżnić dwa przypadki; w pierwszym T_1 i T_2 (albo ω_1 i ω_2) są współmierne, w drugim zaś niewspółmierne.



Rys. 17.

Gdy okresy obu drgań są współmierne, to ich stosunek

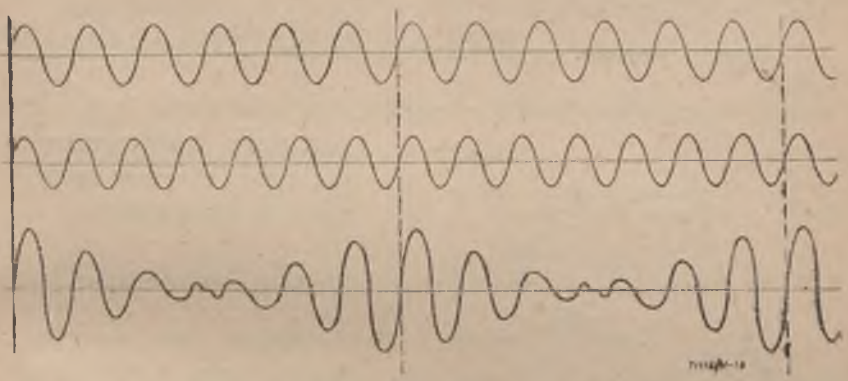
$$T_1 : T_2 = n_1 : n_2$$

gdzie n_1 i n_2 są liczbami całkowitymi nie mającymi czynnika wspólnego różnego od 1. Wtedy $T = n_1 T_2 = n_2 T_1$ jest okresem ruchu wypadkowego, ponieważ w tym przedziale czasu upłynie całkowita liczba n_2 okresów pierwszej składowej i całkowita n_1 okresów drugiej składowej, wobec czego punkt wróci do tego samego stanu ruchu, co na początku, a więc rozpocznie drugi okres ruchu wypadkowego (rys. 17).

W ważnym przypadku szczególnym bardzo małej różnicy okresów T_1 i T_2 staje się T bardzo wielkim. Niechaj bowiem $T_1 - T_2 = \frac{1}{m} T_1$, gdzie m jest liczbą całkowitą np. 100, to $T_2 : T_1 = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m} = \frac{99}{100}$, a więc $n_1 = 100$, $n_2 = 99$, zaś

$$T = 100\,T_2 = 99\,T_1.$$

Tym się tłumaczy w akustyce zjawisko „dudnienia", tj. okresowego wzmacniania i przyciszania tonu wydawanego



Rys. 18.

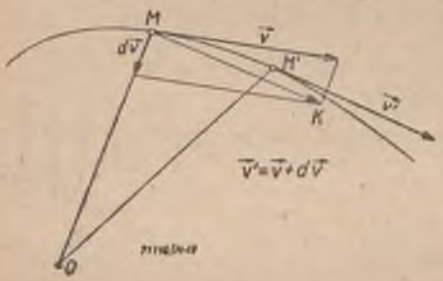
np. przez dwa kamertony o nieznacznej różnicy częstości (rys. 18). To zjawisko ułatwia bardzo strojenie instrumentów muzycznych.

Gdy okresy obu drgań są niewspółmierne, to nie ma liczb całkowitych skończonych n_1 i n_2, których stosunek byłby równy T_1 i T_2, a zatem nie może być okresu skończonego T ruchu wypadkowego, czyli ruch wypadkowy nie jest biorąc ściśle okresowy. Ale wykres tego ruchu jest tym bardziej zbliżony do poprzedniego, im jest mniejsza różnica względna obu okresów drgań składowych, tak iż również występuje zjawisko dudnienia.

12. Ruch centralny

Ruchem centralnym nazywamy ruch punktu, jeżeli jego przyśpieszenie całkowite przechodzi przez punkt stały, zwany *środkiem ruchu*. Torem punktu może być wtedy oczywiście tylko krzywa płaska, której płaszczyznę wyznacza środek ruchu i kierunek prędkości początkowej, tzn. prędkości punktu w chwili, od której liczymy czas. Ruch centralny posiada własność bardzo ważną wyrażoną twierdzeniem: Promień — wektor $\vec{r}$ łączący środek ruchu z punktem poruszającym się opisuje pole proporcjonalne do czasu.

Dowód polega na wykazaniu przede wszystkim, że moment* wektora prędkości $\vec{v}$ względem środka ruchu O (rys. 19) jest stały, czyli nie zmienia się z czasem, co wyrazimy równaniem:



Rys. 19.

$$\mathrm{Mom}_O \vec{v} = \vec{\mathfrak{M}} = \text{const.} \quad [43]$$

Ażeby to wykazać, weźmy pod uwagę dwa położenia kolejne M i M' poruszającego się punktu odpowiadające chwilom t i $t + \mathrm{d}t$. Prędkość $\vec{v}$ w położeniu M uległa zmianie $\mathrm{d}\vec{v}$ o kierunku zgodnym z przyśpieszeniem $\vec{p}$, które według założenia ma kierunek MO. Prędkość $\vec{v}'$ w położeniu M' jest równa sumie wektorowej $\vec{MK} = \vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}$, przesuniętej równole-

* Pojęcie momentu względem punktu wektora siły, znane dobrze ze statyki, ma zastosowanie do wszelkich wektorów, a więc tutaj do wektora prędkości.

gle z punktu początkowego M do punktu M'. Moment $\vec{v}$ względem O różni się od momentu wektora $\vec{MK}$ o nieskończenie małą rzędu drugiego, ponieważ MM' i kąt MOM' są nieskończenie małymi rzędu pierwszego. Wobec tego moment $\vec{v}$ staje się w granicy równym momentowi wektora $\vec{MK}$. Ten zaś stosownie do twierdzenia *Varignona* jest:

$$\mathrm{Mom}_0 \vec{MK} = \mathrm{Mom}_0 (\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) = \mathrm{Mom}_0 \vec{v} + \mathrm{Mom}_0 d\vec{v}$$

Ale dodajnik drugi znika jako moment wektora, którego kierunek przechodzi przez O, a zatem:

$$\mathrm{Mom}_0 \vec{v'} = \mathrm{Mom}_0 \vec{v} = \mathfrak{M} = \mathrm{const.} \qquad [44]$$

Wynik ten można napisać w postaci:

$$v\, r \sin (\vec{r}, \vec{v}) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\, r \sin (\vec{r}, \vec{v}) = \mathfrak{M} = \mathrm{const} \qquad [45]$$

Ponieważ $\vec{v}$ ma kierunek ten sam co $\vec{\mathrm{d}s}$, przeto iloczyn

$$\mathrm{d}s\, r \sin (\vec{r}, \vec{v}) = \mathrm{d}s\, r \sin (\vec{r}, \vec{\mathrm{d}s})$$

przedstawia pole podwójne trójkąta elementarnego z wierzchołkiem w środku O, którego podstawą jest ds. Oznaczywszy pole tego trójkąta przez $\mathrm{d}F$ otrzymujemy:

$$2\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const}, \text{ czyli } \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const} = C. \qquad [46]$$

Równanie to wyraża, że wielkość $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ zwana *prędkością wycinkową* jest w ruchu centralnym stała. Stąd

$$\mathrm{d}F = C\,\mathrm{d}t,$$

a przez całkowanie otrzymujemy:

$$F = C\,(t - t_0), \qquad [47]$$

gdzie t_0 oznacza chwilę od której rozpoczęliśmy mierzyć pole F opisywane przez promień r. Twierdzenie powyższe jest prze-

to dowiedzione. Można je nadto wysłowić w innej jeszcze postaci, jeżeli oznaczymy przez h wysokość trójkąta elementarnego. Wysokość ta jest bowiem długością prostopadłej spuszczonej ze środka ruchu na styczną do toru. A zatem $vh =$ stałej czyli: prędkość punktu w jego ruchu centralnym jest odwrotnie proporcjonalna względem prostopadłej, spuszczonej ze środka na kierunek stycznej toru w miejscu rozpatrywanym.

13. Ruch przy stałym wektorze przyśpieszenia

Oznaczywszy stały wektor przyśpieszenia przez $\vec{g}$ mamy

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} \qquad [48]$$

jako równanie różniczkowe ruchu rozpatrywanego, bardzo łatwe do scałkowania. Pierwsze całkowanie daje:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{g}t + \vec{c} \qquad [49]$$

gdzie $\vec{c}$ jest dowolną stałą całkowania, która otrzymuje znaczenie określone prędkości początkowej, gdyż dla $t = 0$ jest $\vec{v} = \vec{c}$.

Całkując drugi raz otrzymamy:

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{c}t + \vec{c}' . \qquad [50]$$

gdzie $\vec{c}'$ oznacza drugą stałą całkowania, którą można uczynić równą 0 obrawszy początek promieni-wektorów $\vec{r}$ w miejscu, gdzie punkt ruchomy znajduje się w chwili $t = 0$. A zatem równanie

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{c}t \qquad [51]$$

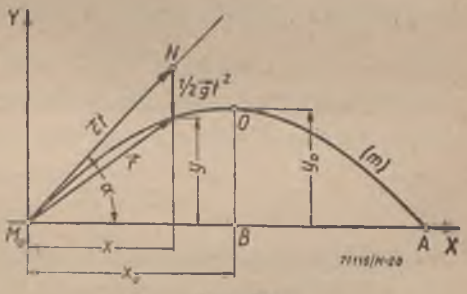
przedstawia ogólny ruch punktu, w których przyśpieszenie $\vec{g}$ jest stałe. Ponieważ $\vec{c}$ jest drugim wektorem stałym, przeto z równania tego czytamy, że ruch odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez $\vec{g}$ i $\vec{c}$ oraz, że ruch ten można rozłożyć na ruch prostoliniowy jednostajny o równaniu:

$$\vec{r}_1 = \vec{c}\,t$$

i ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny o równaniu:

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{2}\,\vec{g}\,t^2.$$

Ruch wypadkowy jest w ogóle krzywoliniowy. Ruch taki odbywałby, jak o tym będzie mowa w kinetyce, punkt materialny w obszarze niezbyt wielkim nad powierzchnią ziemi, o ile można pominąć wpływ oporu powietrza i uważać przyśpieszenie $\vec{g}$ wywołane siłą ciężkości za stałe. Wtedy $\vec{g}$ jest skierowane pionowo w dół, a torem punktu jest parabola o osi pionowej, zwrócona wierzchołkiem ku górze.



Rys. 20.

Uzasadnimy to najprościej przy pomocy prostokątnego układu współrzędnych o początku w M_0, tj. w położeniu początkowym punktu poruszającego się z prędkością początkową $\vec{c}$ nachyloną do poziomej osi X pod kątem α (rys. 20). Oś Y niech będzie skierowana w górę. Wtedy znajdujemy dla współrzędnych punktu poruszającego się, jako dla rzutów promienia - wektora $\vec{r}$ na obie osie, wyrażenia następujące:

$$x = c\,t\cos\alpha\,; \quad y = c\,t\sin\alpha - \frac{1}{2}\,g\,t^2. \qquad [52]$$

Rozwiązawszy pierwsze z tych równań względem $t = \frac{x}{c\cos\alpha}$ i wstawiwszy tę wartość w drugie otrzymamy:

$$2c^2\cos^2\alpha \cdot y = 2c^2\sin\alpha\cos\alpha \cdot x - g\,x^2$$

jako równanie toru. Po podzieleniu przez g i podstawieniu

$$\frac{c^2\cos^2\alpha}{g} = q, \qquad [53]$$

napiszemy $2\,q\,y = q^2\,\mathrm{tg}^2\alpha \cdot x - x^2$.

Dodając i odejmując po stronie prawej $q^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$, otrzymujemy

$$2\,q\,y = q^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - (x - q\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2$$

albo

$$(x - q\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2 = -2\,q\left(y - \frac{q}{2}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\right). \qquad [54]$$

Gdy teraz przeniesiemy początek współrzędnych do punktu

$$x_0 = q\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad y_0 = \frac{q}{2}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha\,,$$

to równanie [54] przyjmie postać:

$$x^2 = -2\,q\,y \qquad [55]$$

przedstawiającą równanie wierzchołkowe paraboli, której oś ma kierunek pionowy w dół. Zarazem stwierdzamy, że:

$$y_0 = \frac{q}{2}\,\mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{c^2\sin^2\alpha}{2\,g} = \overline{OB} \qquad [56]$$

jest najwyższym wzniesieniem punktu ruchomego ponad poziom położenia początkowego M_0X, zaś

$$2\,x_0 = 2\,q\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,c^2\cos\alpha\sin\alpha}{g} = \overline{M_0A} \qquad [57]$$

wyznacza cięciwę poziomą toru $M_0\,A$ zwaną w balistyce (teorii strzelania) *doniosłością poziomą* strzału.

Rozpatrzmy jeszcze ważniejsze przypadki szczególne, jakie zachodzą:

1 — gdy prędkość początkowa jest skierowana pionowo w górę,
2 — „ „ „ „ „ „ w dół i
3 — „ „ „ „ równa 0.

W tych wszystkich przypadkach ruch staje się prostoliniowy, albowiem w pierwszym, tj. dla $\alpha = 90^0$, przekształcają się równania ruchu [52] na:

$$x = 0, \qquad y = c\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2. \tag{58}$$

Podobnie w przypadku drugim, tj. dla $\alpha = -90^0$, otrzymujemy:

$$x = 0, \qquad y = -\left(c\,t + \frac{1}{2}\,g\,t^2\right). \tag{59}$$

W przypadku trzecim, czyli dla $c = 0$, jest:

$$x = 0, \qquad y = -\frac{1}{2}\,g\,t^2. \tag{60}$$

Przy pomocy rozwiązania [58] odpowiemy z łatwością na wszelkie pytania odnoszące się do *rzutu pionowego w górę* i tak:

Prędkość $v = \frac{dv}{dt} = c - g\,t$ maleje z upływem czasu i staje się zerem w chwili $t_1 = \frac{c}{g}$, a więc na wysokości

$$h = c\,\frac{c}{g} - \frac{1}{2}\,g\left(\frac{c}{g}\right)^2,$$

czyli

$$h = \frac{c^2}{2\,g}. \tag{61}$$

Od chwili t_1 zmienia się widocznie znak algebraiczny prędkości v, a punkt materialny zaczyna *spadać*; po czasie $2\,t_1 = \frac{2\,c}{g}$ nabywa prędkości $v = c - g\,\frac{2\,c}{g} = -c$, w miejscu określonym wartością $y = c\,\frac{2\,c}{g} - \frac{1}{2}\,g\left(\frac{2\,c}{g}\right)^2 = 0$, czyli wraca do położenia początkowego z prędkością o wartości liczbowej równej prędkości początkowej.

Drogi opisywane od wyjścia ze stanu spoczynku do końca jednej, dwu, trzech... t jednostek czasu są proporcjonalne względem kwadratów kolejnych liczb naturalnych. Kładąc bowiem $y = -s$ i oznaczając przez s_n drogę opisaną w n jednostkach czasu ($n = 0, 1, 2, 3 \ldots$) mamy według równania [60]

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \qquad [62]$$

a stąd:

$$s_1 : s_2 : s_3 : \ldots . s_n = 1^2 : 2^2 : 3^2 : \ldots . n^2 \qquad [63]$$

Oznaczywszy nadto drogę opisaną podczas n-tej jednostki czasu przez σ_n i zważywszy, że $\sigma_n = s_{n+1} - s_n =$

$= \frac{1}{2} g [(n+1)^2 - n^2] = \frac{1}{2} g (2n+1)$ widzimy, iż

$$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 \ldots \sigma_n = 1 : 3 : 5 : \ldots . : (2n + 1) \qquad [64]$$

czyli słowami:

Drogi opisywane podczas pierwszej, drugiej, trzeciej itd. jednostki czasu są proporcjonalne względem kolejnych liczb nieparzystych.

Obliczając na koniec z równania [62] prędkość:

$$v = g t$$

i rugując z obu równań czas t, znajdujemy

$$s = \frac{v^2}{2g}, \quad \text{albo} \quad v = \sqrt{2gs}. \qquad [65]$$

Pierwsze z wyrażeń powyższych określa wysokość spadania potrzebną do nabycia prędkości v, drugie zaś prędkość nabytą wskutek spadania z wysokości s.

Przykład 1. Pod jakim kątem α do poziomu należy wyrzucić pocisk z punktu A, aby trafił w punkt B, znajdujący się na tym samym poziomie w odległości $l = 100$ m, jeżeli prędkość początkowa $c = 40$ m/sek jest dana, a opór powietrza można pominąć?

Rozwiązanie. Według wzoru [57] jest:

$$l = 2x_0 = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$$

a zatem $\sin 2\alpha = gl/c^2$. Widać stąd, że rozwiązanie jest możliwe tylko, gdy $c^2 > gl = 981 = 31{,}32^2$ co jest w temacie spełnione, gdyż:

$$\sin 2\alpha = \frac{981}{1600} = 0{,}613.$$

W tablicach znajdujemy, że $2\alpha = 37^0\,50'$, a więc $\alpha = 18^0\,55'$.

Ale danej wartości $\sin 2\alpha$ odpowiada nadto kąt o 90^0 większy, czyli

$2\alpha = 127^0\,50'$, a więc $\alpha = 63^0\,55'$.

Znaczy to, że w tych warunkach pocisk trafi w cel, gdy go wyrzucić albo pod kątem $18^0\,55'$, albo też pod kątem $63^0\,55'$.

Przykład 2. Punktowi m_1 udzielono początkowej prędkości $v_1 = 10$ m/sek pionowo w górę, a w pół sekundy później wysłano za nim punkt m_2 z prędkością $v_2 = 15$ m/sek. Gdzie i kiedy nastąpi spotkanie?

Rozwiązanie. Równaniem ruchu punktu m_1 jest $z = v_1 t - \frac{1}{2} gt^2$, drugiego zaś przy samym początku liczenia czasu

$$z = v_2 (t - 0{,}5) - \frac{1}{2} g (t - 0{,}5)^2.$$

Z warunku równości obu wyrażeń znajdziemy czas spotkania, a więc:

$$v_1 t - \frac{1}{2} gt^2 = v_2 t - 0{,}5 v_2 - \frac{1}{2} g (t^2 - t + 0{,}25).$$

stąd

$$t = \frac{0{,}5 v^2 + 0{,}125\ g}{0{,}5\ g + v_2 - v_1} = 0{,}882 \text{ sek.}$$

Odpowiednią wartość z daje wzór:

$$z = v_1 t - \frac{1}{2} gt^2 = 8{,}82 - \frac{1}{2} 9{,}81 \cdot 0{,}882^2 = 5{,}01 \text{ m.}$$

Rozdział II

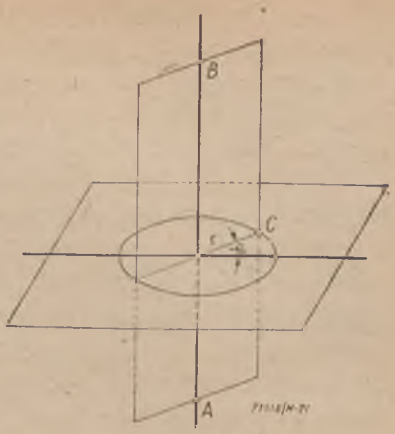
KINEMATYKA CIAŁA SZTYWNEGO

14. Swoboda ruchu ciała sztywnego — Ruch obrotowy i postępowy — Przesunięcie i obrót

Trzy punkty ciała sztywnego A, B, C tworzące trójkąt właściwy ustalają jego położenie w przestrzeni wobec układu odniesienia. Znając ruchy tych trzech punktów znamy tym samym ruch ciała. Ich tory nazywamy *kierownicami ruchu*. Oczywiście tylko jedna z tych kierownic może być dowolną linią ciągłą. Pozostałe są już od niej zależne z powodu niezmiennej odległości wzajemnej trzech poruszających się punktów ciała sztywnego. Położenie jednego punktu wyznaczamy w przestrzeni trzema współrzędnymi (np. prostokątnymi x, y, z).

Trzy punkty wymagają zatem do określenia ich położenia 9 współrzędnych. Ale między tymi współrzędnymi zachodzą trzy związki wyrażające, że 3 wzajemne odległości punktów A, B, C są stałe. Pozostaje zatem tylko 6 wielkości od siebie nawzajem niezależnych, które wyznaczają położenie ciała sztywnego w obranym układzie odniesienia. Liczba 6 jest zarazem największą liczbą tzw. *stopni swobody ciała sztywnego*, kiedy ciało jest zupełnie swobodne. Ustalając jedną, dwie itd. współrzędne pozbawiamy ciało sztywne jednego, dwu itd. stopni swobody. Gdy np. ustalimy dwa punkty ciała A i B, to wszystkie punkty leżące na prostej AB pozostaną w spoczynku, a każdy inny punkt C odległy od prostej AB o r może tylko poruszać się po okręgu koła o promieniu r (rys. 21). Ruch taki nazywamy *obrotowym* lub krótko *obrotem* a prostą

AB o s i ą *obrotu*. Podczas obrotu płaszczyzna każdego przekroju płaskiego przechodzącego przez oś obrotu (przekroju osiowego) zajmuje coraz to nowe położenia tworzące z pierwotnym kąt φ, zwany *kątem obrotu*. Kąt ten wyrażony w mierze łukowej, stanowi najdogodniejszą współrzędną do określania ilościowego ruchu obrotowego.



Rys. 21.

Każdy punkt ciała odległy od osi obrotu o r (promień obrotu tego punktu) opisuje drogę $s = r\varphi$.

Oś obrotu może leżeć także poza ciałem, jak np. oś obrotu wagonu motorowego, który jedzie po torze kolejowym, będącym łukiem kołowym w płaszczyźnie poziomej. Wtedy (pionowa) oś obrotu przechodzi przez środek okręgu wyznaczającego linię środkową toru kolejowego. Na tej osi obrotu leżą oczywiście środki wszystkich okręgów opisywanych przez oddzielne punkty ciała przy jego obrocie. Promienie tych okręgów rosną, gdy oś obrotu oddala się od ciała. Przy pomyślanej nieskończonej odległości osi obrotu tory wszystkich punktów ciała zbliżają się coraz bardziej do toru prostoliniowego, a ponieważ są równoległe, przeto obrót około osi, której odległość od ciała zdąża do nieskończoności staje się ruchem, w którym wektory prędkości wszystkich punktów ciała są równe geometrycznie. Taki szczególnie prosty ruch ciała sztywnego nazywamy *przesunięciem* (translatio). Ruch taki wykonywa np. każdy tłok w cylindrze silnika, a w ogóle każde ciało sztywne „*wodzone* (*prowadzone*) *pryzmatycznie*". Wodzenie pryzmatyczne realizujemy np. w sposób stosowany powszechnie w dźwigach pionowych, których klatka może się poruszać swobodnie tylko do góry i na dół. W wielu maszynach uzyskuje się także wodzenie części przez nawleczenie

jej otworem pryzmatycznym na nieruchomy sztywny pręt o przekroju takim samym jak otwór. Wtedy każdy punkt tej części może się poruszać tylko równolegle do osi pręta i otworu (przy pominięciu skutków małego luzu niezbędnego praktycznie, który oczywiście zezwala na bardzo małe obroty).

Przesunięcie jest oczywiście ruchem o jednym stopniu swobody. Ruch ten jest zarazem przypadkiem szczególnym drugiego, obok ruchu obrotowego, ruchu o jednym stopniu swobody zwanego *ruchem postępowym*. Ruch postępowy zachodzi, jeżeli wszystkie 3 punkty *A, B, C* ciała sztywnego poruszają się po torach równych i równoległych a zarazem ustalonych. Wtedy z powodu sztywności ciała muszą być jednoczesne prędkości wszystkich jego punktów równe i równoległe, a więc ruch jednego tylko punktu przedstawiony współrzędną drogi w zależności od czasu t określa zupełnie ruch postępowy ciała wzdłuż ustalonej kierownicy ruchu. Tak określony ruch postępowy jest w ogólnym wypadku *krzywoliniowy*. W przypadku szczególnym, gdy kierownica ruchu jest linią prostą, czyli gdy ruch postępowy jest zarazem *prostoliniowy*, mamy oczywiście do czynienia z poprzednio określonym przesunięciem.

Obrót około osi stałej i przesunięcie w kierunku stałym są najprostszymi ruchami ciała sztywnego o jednym stopniu swobody.

Przykładem ruchu postępowego krzywoliniowego jest ruch trzonu łączącego dwie korby równe i równoległe obracające się identycznie. Każdy punkt trzonu opisuje okrąg koła o promieniu równym promieniowi korby.

Ogólny ruch postępowy można sobie wyobrazić jako złożony z *ruchów chwilowych*, czyli *elementarnych*, które są w granicy *przesunięciami elementarnymi* (*chwilowymi*). Podobnie obrót w elemencie czasu $\mathrm{d}t$ o kąt $\mathrm{d}\varphi$ jest obrotem elementarnym (chwilowym). Przesunięcie elementarne i obrót elementarny są szczególnie ważnymi rodzajami ruchu ciała sztywnego, ponieważ, jak będzie dalej dowiedzione, ogólny ruch chwilowy ciała sztywnego da się zawsze zastąpić zespołem dwóch ruchów: przesunięcia w połączeniu z obrotem.

15. Ruch obrotowy około osi stałej

Ruch obrotowy około osi stałej jest stosownie do rozważań poprzedniego paragrafu określony kątem obrotu φ w funkcji czasu t

$$\varphi = f(t). \qquad [66]$$

Pochodna, czyli iloraz różniczkowy $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ wyraża zatem *prędkość kątową*, wprowadzoną już w teorii ruchu harmonicznego punktu.

Ponieważ współrzędną drogi jakiegokolwiek punktu ciała odległego o promień r od osi obrotu jest

$$s = r\varphi \qquad [67]$$

przeto różniczkując to równanie względem czasu (przy r uważanym za stałe) otrzymujemy:

$$\frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \text{ czyli } v = r\omega. \qquad [68]$$

A zatem wartość liczbowa prędkości liniowej v punktu ciała sztywnego obracającego się z prędkością kątową ω około osi danej jest równa iloczynowi promienia obrotu tego punktu r przez ω.

Przyśpieszenie punktu o promieniu obrotu r składa się z przyśpieszenia stycznego:

$$p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

i normalnego

$$p_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2.$$

Pochodną $\frac{d\omega}{dt}$ nazywamy *przyśpieszeniem kątowym* i oznaczamy przez ε. A zatem

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

$$p_t = r\varepsilon, \qquad [69]$$

a przyśpieszenie całkowite punktu ciała

$$p = \sqrt{p_t^2 + p_n^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad [70]$$

Części maszyn obracające się z wielką prędkością kątową ω mają zwykle przyśpieszenie kątowe ε stosunkowo małe, wobec czego we wzorze powyższym wyraz ω^4 przewyższa bardzo ε^2. Przyśpieszenie całkowite jest wtedy praktycznie prawie równe przyśpieszeniu normalnemu (dośrodkowemu).

Prędkość obracających się części maszyn, kół wagonów itp. mierzymy w praktyce zwykle liczbą n obrotów całkowitych (tj. o kąt 360^0, czyli o 2π) dokonanych w jednej minucie. Gdy obrót nie jest jednostajny, mierzymy przez to oczywiście prędkość średnią w ciągu minuty. Ponieważ opisany przy tym kąt obrotu wynosi w mierze łukowej

$$\varphi = 2\pi n,$$

przeto prędkością kątową wyrażoną w sek^{-1} jest

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30},$$

natomiast

$$n = \frac{30\,\omega}{\pi} \qquad [72]$$

jest liczbą obrotów na minutę wyrażoną przez prędkość kątową odniesioną do sekundy jako jednostki czasu.

Przykład 1. Przy rozruchu maszyny trwającym t_1 sek koło zamachowe o promieniu R cm osiąga n obrotów na minutę. Obliczyć przyśpieszenie kątowe koła oraz przyśpieszenie liniowe punktów jego obwodu w czasie rozruchu.

Przyjmując, że obrót koła w czasie rozruchu można uważać za jednostajnie przyśpieszony i oznaczając przez ε_1 przyśpieszenie kątowe tego obrotu napiszemy $\omega = \varepsilon_1 t$ jako równanie ruchu. Wstawiwszy tutaj $t = t_1$, a $\omega = \frac{n\pi}{30}$ otrzymamy

$$\frac{n\pi}{30} = \varepsilon_1 t_1, \text{ a więc: } \varepsilon_1 = \frac{n\pi}{30\,t_1}.$$

Gdy np. $n = 90$, a zatem $\frac{n\pi}{30\,t_1} = 9,425$, zaś $t_1 = 20$ sek, to

$$\varepsilon_1 = \frac{9.425}{20} = 0,471 \text{ sek}^{-2}.$$

Prędkość kątową ω_1 ruchu jednostajnego po okresie rozruchu znajdujemy z wzoru $\omega_1 = \varepsilon_1 t_1 = 9,425$ sek^{-1}.

Stąd przyśpieszenie normalne na obwodzie koła $p_n = R\omega^2 = 88{,}8\ R$ cm/sek², a więc np. przy $R = 50$ cm jest $p_n = 4440$ cm/sek² $= 44{,}4$ m/sek².

Natomiast przyśpieszenie styczne

$$p_t = \varepsilon_1 R = 0{,}471\ R = 23{,}6 \text{ cm/sek}^2 = 0{,}236 \text{ m/sek}^2$$

jest około 188 razy mniejsze od p_n.

16. Wektory obrotu

Gdy około danej osi zachodzi obrót ciała o kąt φ, to można go określić jednoznacznie wektorem kąta obrotu $\vec{\varphi}$ pomyślanym na osi ze strzałką przedstawiającą umownie kierunek (zwrot) obrotu. Przyjmiemy więc tutaj, że patrząc w kierunku przeciwnym strzałki widzimy obrót zgodny z obrotem wskazówek na tarczy zegarowej *.

Znając wektor $\vec{\varphi}$ w zależności od czasu t, znajdziemy wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ przez różniczkowanie względem czasu, a więc:

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}, \qquad [73]$$

a wektor przyśpieszenia kątowego

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}. \qquad [74]$$

Wszystkie trzy wektory leżą na osi obrotu.

Podobnie jak sklasyfikowaliśmy najważniejsze rodzaje ruchu punktu po danym torze, tj. ruch jednostajny, jednostajnie zmienny i niejednostajnie zmienny, określimy *obrót jednostajny* przedstawiony równaniem:

$$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}\, t \qquad (\vec{\omega} = \text{const}) \qquad [75]$$

jako obrót z prędkością kątową stałą; *obrót jednostajnie zmienny* określony równaniem:

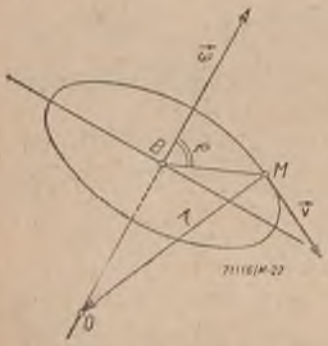
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}\, t, \qquad [76]$$

* W wielu książkach, zwłaszcza angielskich, napotykamy umowę odwrotną.

gdzie $\vec{\varepsilon}$ jest wektorem przyśpieszenia kątowego stałego, a wreszcie *obrót niejednostajnie zmienny*, w którym $\vec{\omega}$ zależy w inny sposób od czasu, niż w równaniu powyższym.

Wielkości $\vec{\varphi}_0$ i $\vec{\omega}_0$ oznaczają oczywiście początkowe wartości wektorów $\vec{\varphi}$ i $\vec{\omega}$ (dla $t = 0$).

Wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ danego obrotu pozwala wyrazić prędkość liniową dowolnego punktu ciała M jako moment wektora względem punktu M (rys. 22).



Rys. 22.

Istotnie bowiem prędkość liniowa $\vec{v}$ punktu M jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny przesuniętej przez M i przez wektor $\vec{\omega}$ leżący gdziekolwiek na osi obrotu. Dalej wskazuje $\vec{v}$ swoją strzałką kierunek odpowiadający umowie co do momentu wektora względem punktu M. Wreszcie wartością liczbową $\vec{v}$ jest $\omega\varrho$, jeżeli ϱ jest ramieniem momentu, tj. odległością prostopadłą środka momentu M od prostej na której leży wektor $\vec{\omega}$.

Gdy zestawimy wektor prędkości kątowej obrotu $\vec{\omega}$ z wektorem prędkości liniowej ruchu postępowego, to zauważymy łatwo pewną różnicę zasadniczą. Wektor $\vec{\omega}$ (a tak samo $\vec{\varepsilon}$) jest związany z osią obrotu o tyle, że może leżeć na tej osi (jako prostej nieograniczonej) odmierzony od dowolnego punktu. Taki *wektor* nazywamy *posuwnym*, albo *związanym z prostą*. Tymczasem wektor $\vec{v}$, jako prędkość ruchu postępowego, nie zmienia swego znaczenia mechanicznego, gdy go przesuniemy równo-

legle w sposób dowolny; jest więc *wektorem swobodnym*, zarówno jak przyśpieszenie ruchu postępowego ciała. Natomiast prędkość $\vec{v}$ wybranego punktu ciała sztywnego jest *wektorem związanym z punktem*. Takie rozróżnianie trzech typów wektorów ma także znaczenie w statyce ciał sztywnych, gdzie siła P jest wektorem posuwnym, para sił wektorem swobodnym, a np. reakcje punktów podparcia są wektorami związanymi z tymi punktami.

Twierdzenie powyżej uzasadnione wyrazi równanie symboliczne

$$\vec{v} = \mathrm{Mom}_M \vec{\omega}. \qquad [77]$$

17. Moment wektora względem punktu jako iloczyn wektorowy

Oprócz znanego ze statyki dodawania i odejmowania wektorów (siły), która jest nader pożytecznym i celowym uogólnieniem dodawania i odejmowania liczb algebraicznych, wprowadzono także do rachunku wektorowego odpowiednio uogólnione mnożenie. Okazało się przy tym, że na nazwę mnożenia wektora A przez wektor B zasługują dwa różne działania na tych wektorach, z których jedno daje jako wynik skalar *(iloczyn skalarowy)*, a drugi wektor (*iloczyn wektorowy*). Tutaj określimy iloczyn wektorowy, biorąc jako pierwszy czynnik wektor $\vec{r}$, a jako drugi wektor $\vec{\omega}$ (bez ujmy dla ogólności wywodu) w sposób następujący:

Iloczynem wektorowym wektora $\vec{r}$ przez wektor $\vec{\omega}$ oznaczonym symbolem:

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega} \text{ (piszą także) } [\vec{r}\,\vec{\omega}]$$

nazywamy wektor $\vec{v}$, który:

1. jest prostopadły do płaszczyzny obu wektorów - czynników,
2. ma wartość liczbową równą $r\,\omega \sin(\vec{r}, \vec{\omega})$, tj. pola równoległoboku zbudowanego z obu wektorów-czynników i
3. ma kierunek (zwrot) taki, że w kolejności $\vec{r}$, $\vec{\omega}$, $\vec{v}$, tworzą te trzy wektory układ prawy.

Porównawszy to określenie z określeniem momentu w poprzednim paragrafie, widzimy, że

$$\vec{v} = \mathrm{Mom}_M \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{\omega} \qquad [78]$$

czyli słowami, że prędkość punktu M ciała sztywnego będącego w stanie ruchu obrotowego około osi OO' z prędkością kątową ω jest równa iloczynowi wektorowemu promienia wektora $\vec{OM} = \vec{r}$ przez $\vec{\omega}$ (przy czym O jest punktem dowolnie obranym na osi obrotu jako punkt początkowy wektora $\vec{\omega}$).

Analogiczne twierdzenie w statyce brzmiałoby: moment siły $\vec{P}$ leżącej na prostej OO' względem punktu dowolnego M jest równy iloczynowi wektorowemu wektora $\vec{OM} = \vec{r}$ przez $\vec{P}$ czyli $\vec{r} \times \vec{P}$. Zamiast tego piszą przeważnie:

$$\mathrm{Mom}_M \vec{P} = \vec{P} \times \vec{MO} \qquad [79]$$

albowiem promień-wektor $\vec{r'} = \vec{MO} = -\vec{OM} = -\vec{r}$,

a więc $$\mathrm{Mom}_M \vec{P} = \vec{P} \times (-\vec{r}) = \vec{r} \times \vec{P}, \qquad [80]$$

jak to wynika bezpośrednio z określenia iloczynu wektorowego.

Widać stąd, że iloczyn wektorowy nie podlega prawu przemienności obowiązującemu dla iloczynów algebraicznych ($ab = ba$), gdyż zmiana porządku czynników w iloczynie wektorowym nie wpływa wprawdzie na wartość liczbową iloczynu, ale odwraca jego kierunek na przeciwny (stosownie do punktu 3 w podanym określeniu). Mamy więc ogólnie

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}. \qquad [81]$$

Natomiast mnożenie wektorowe podlega na równi z mnożeniem zwykłej algebry tzw. prawu rozdzielności, dającemu prawidło mnożenia sumy wektorowej dodajników $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \ldots$

przez wektor $\vec{W}$ w postaci:

$$(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \ldots .) \times \vec{W} = \vec{A} \times \vec{W} + \vec{B} \times \vec{W} + \vec{C} \times \vec{W}$$

albo:

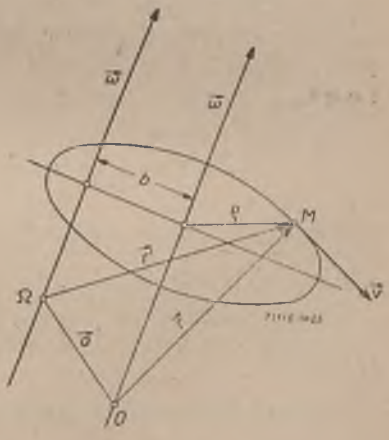
$$\vec{W} \times (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \ldots) =$$

$$= \vec{W} \times \vec{A} + \vec{W} \times \vec{B} + \vec{W} \times \vec{C} + \ldots . \qquad [82]$$

Dowód wynika bezpośrednio ze znanego ze statyki twierdzenia *Varignona*, że moment sumy geometrycznej (wektorowej) $\vec{R}$ sił $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ ... o wspólnym początku O względem dowolnie obranego punktu M jest sumą geometryczną momentów wszystkich sił względem tegoż punktu M.

18. Wyrażenie ogólniejsze prędkości punktów ciała w jego obrocie chwilowym — Przesunięcie osi obrotu

We wzorze wyprowadzonym powyżej na prędkość $\vec{v}$ dowolnego punktu M ciała przy jego obrocie chwilowym około osi danej z prędkością kątową $\vec{\omega}$, występuje promień-wektor $\vec{r}$, łączący punkt O na osi obrotu (rys. 23) z punktem M. Gdy teraz zamiast O obierzemy inny punkt stały Ω (tzn. nieruchomy w układzie odniesienia tak samo jak O) jako początek promieni wektorów i oznaczymy przez $\vec{r}'$ promień-wektor $\vec{\Omega M}$, to



Rys. 23.

$$\vec{r} = \vec{O\Omega} + \vec{r}' = \vec{a} + \vec{r}',$$

gdzie $\vec{a} = \vec{O\Omega}$. A zatem:

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{\omega} = (\vec{a} + \vec{r}') \times \vec{\omega} = \vec{a} \times \vec{\omega} + \vec{r}' \times \vec{\omega}. \qquad [83]$$

Każdy z obu wyrazów po prawej stronie równania określa prędkość składową prędkości $\vec{v}$. Wyraz pierwszy

$$\vec{a} \times \vec{\omega} = \vec{c}$$

jako stały, tzn. niezależny od położenia punktu ciała M, przedstawia prędkość ruchu postępowego tego ciała. Wyraz zaś drugi

$$\vec{r'} \times \vec{\omega} = \vec{v'}$$

przedstawia prędkość punktu M jakaby powstała, gdyby obrót chwilowy $\vec{\omega}$ zachodził nie około osi danej przechodzącej przez O, lecz około osi do niej równoległej przechodzącej przez Ω. Prędkość składowa $\vec{c}$ jest przy tym prostopadła do płaszczyzny obu osi i równa się momentowi wektora $\vec{\omega}$ o początku w O względem punktu Ω. Wyniki te prowadzą do następującego twierdzenia:

Obrót chwilowy ciała sztywnego około osi przechodzącej przez punkt O tego ciała z prędkością kątową określoną wektorem $\vec{\omega}$ da się zawsze zastąpić obrotem z tą samą prędkością kątową około innej osi równoległej do pierwszej i jednoczesnym przesunięciem chwilowym w kierunku prostopadłym do płaszczyzny obu osi. Prędkość liniowa $\vec{c}$ tego przesunięcia jest równa momentowi wektora $\vec{\omega}$ obrotu pierwszego względem dowolnego punktu Ω osi obrotu drugiego.

Uwzględniając, że wartością liczbową prędkości $\vec{c}$ jest $c = (\vec{a} \times \vec{\omega}) = a\omega \sin(\vec{a}, \vec{\omega})$, a zatem odległość obu osi $b = a \sin(\vec{a}, \vec{\omega}) = \frac{c}{\omega}$ dochodzimy do twierdzenia:

Ruch wypadkowy z obrotu chwilowego i przesunięcia chwilowego w kierunku prostopadłym do osi obrotu jest obrotem geometrycznie równym około osi równoległej. Płaszczyzna obu osi jest prostopadła do prędkości przesunięcia, a odległość wzajemna b obu osi równa się ilorazowi prędkości przesunięcia przez wartość liczbową prędkości kątowej obrotu.

Przykład 1. Walec o promieniu $r = 1{,}2$ m toczy się bez ślizgania po płaszczyźnie poziomej, przy czym oś walca ma prędkość ruchu postępowego $v = 6$ m/sek. Jaka jest prędkość kątowa ω obrotu walca?

Odpowiedź. Przy toczeniu się bez ślizgania musi być tworząca styczności walca z płaszczyzną w każdej chwili osią obrotu walca. A zatem:

$$\omega = \frac{v}{a} = \frac{6}{1{,}2} = 5 \text{ sek}^{-1}.$$

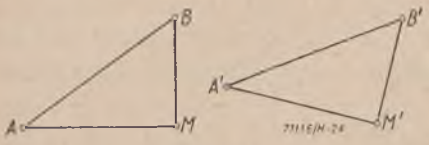
Obrót ten jest równoważny z obrotem około osi geometrycznej walca z tą samą prędkością kątową ω i ruchem postępowym tejże osi z prędkością $v = a\omega$. Każdy punkt walca toczącego się opisuje krzywą zwaną cykloidą. Jeżeli ten punkt leży na powierzchni walca, to *cykloidę* nazywamy *zwyczajną*; jeżeli leży wewnątrz walca, to opisuje *cykloidę wydłużoną;* jeżeli wreszcie leży zewnątrz walca, a tylko jest z nim sztywno złączony, to opisuje *cykloidę skróconą.*

19. Ruch równoległy do płaszczyzny, czyli ruch posuwisty albo „płaski"

Ruch posuwisty może odbywać każdy (zachowujący się jako ciało sztywne) sprzęt na podłodze płaskiej, gdy go ciągniemy lub popychamy tak, aby się poruszał nie przestając przylegać do podłogi. Opisując ten rodzaj ruchu naukowo, powiemy, że w ruchu posuwistym wszystkie punkty ciała poruszają się w płaszczyznach równoległych.

Obrawszy 3 punkty tworzące trójkąt na jednej z tych płaszczyzn (zwaną *płaszczyzną kierującą*) stwierdzamy łatwo, że ruch posuwisty ciała jest wyznaczony ruchem figury płaskiej

przekroju tego ciała przez płaszczyznę kierującą. Do opisania zaś tego ruchu wystarczają ruchy dwu punktów A i B (rys. 24), albowiem inny punkt dowolny M figury płaskiej wyznacza wraz z punktami A i B trójkąt ABM. Budując dla nowego położenia $A'B'$ punktów A, B trójkąt $\triangle A'B'M' \cong \triangle ABM$ tak, aby obieg $A'B'M'$ był zgodny z obiegiem ABM znajdujemy jednoznacznie położenie nowe M' punktu M.

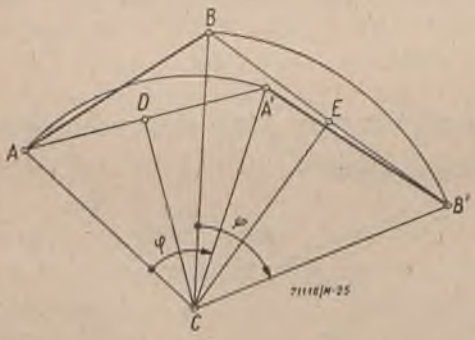


Rys. 24.

Dowiedziemy teraz, że:

Jeżeli ciało poruszające się równolegle do płaszczyzny danej zajmuje kolejno dwa położenia, to z położenia początkowego da się przeprowadzić w położenie końcowe przez określony obrót około osi prostopadłej do płaszczyzny kierującej.

Niech AB i $A'B'$ (rys. 25) oznaczają odpowiednio położenia w chwili t i $t + \Delta t$ dwu punktów ciała leżących na jego przekroju wyznaczonym płaszczyzną kierującą obraną za płaszczyznę rysunku. Gdy znajdziemy taki punkt ciała C, który nie zmienił swego położenia wskutek ruchu rozpatrywanego, to dowiedziemy tym samym, że wszystkie punkty ciała, leżące na prostej przechodzącej przez C i prostopadłej do płaszczyzny kierującej, nie zmieniły swego położenia, czyli że zmiana położenia ciała może być wywołana obrotem około tej prostej. Połączmy w tym celu A z A', B z B' i poprowadźmy syme-



Rys. 25.

tralne odcinków AA' i BB'. Ich punkt przecięcia C jest punktem szukanym osi obrotu, albowiem $ABC \cong A'B'C$

ponieważ $AB = A'B'$, $AC = A'C$, $BC = B'C$.

Kątem zaś obrotu $\varphi = \sphericalangle ACA' = \sphericalangle BCB'$.

Tory punktów A i B są w ogóle krzywymi płaskimi, różnymi od łuków kołowych AA' i BB', które by punkty te opisały gdyby ruch odcinka AB był rzeczywiście obrotem około punktu C; skoro jednak położenia AB i $A'B'$ obierzemy nieskończenie bliskie, czyli sąsiednie (rys. 25), to łuki torów rzeczywistych, jak również i odpowiednie łuki kołowe dążą do tej samej granicy oznaczonej przemieszczeniami chwilowymi punktów A i B. Wtedy przedział czasu Δt staje się elementem dt, a ruch w nim nazywamy *ruchem chwilowym*. A zatem:

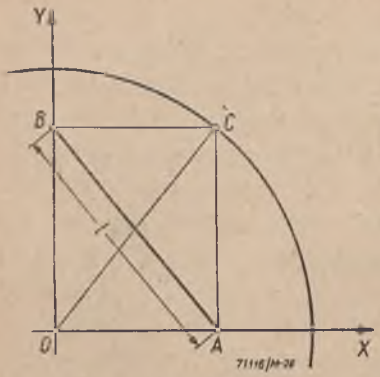
Ruch chwilowy ciała poruszającego się równolegle do płaszczyzny jest obrotem chwilowym około prostopadłej do płaszczyzny. Ta prosta nazywa się *osią chwilową obrotu* tego ciała, a jej ślad C na płaszczyźnie kierującej *środkiem chwilowym obrotu* figury płaskiej, utworzonej z punktów ciała leżących na tej płaszczyźnie. Ponieważ w granicy stają się osie symetrii elementów AA' i BB' normalnymi w A i B do odpowiednich torów, więc:

Środek chwilowy jest punktem przecięcia się normalnych do torów, które opisują jednocześnie punkty figury płaskiej, poruszającej się w swej płaszczyźnie. Prędkość każdego punktu figury jest proporcjonalna do odległości tego punktu od chwilowego środka ($v_1 = \overline{AC} \cdot \omega$, $v_2 = BC \cdot \omega$).

Ruch posuwisty w danej płaszczyźnie jest oczywiście ruchem o trzech stopniach swobody, albowiem każdy z dwu punktów określających ruch ma dwie współrzędne — razem cztery, między którymi zachodzi jedno równanie warunkowe wyrażające niezmienność odległości wzajemnej obu punktów. A zatem tylko trzy współrzędne są od siebie niezależne.

Prostym przykładem ruchu posuwistego jest ruch sztywnego pręta AB (rys. 26), którego jeden koniec A porusza się

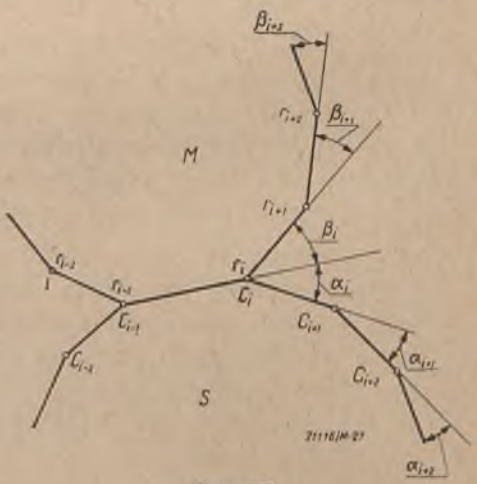
po osi X, a drugi B po osi Y prostokątnego układu współrzędnych. Wtedy prostopadłe do torów obu punktów przecinają się w punkcie C jako środku chwilowym obrotu. Odległość tego punktu od początku układu O jest, jak widać od razu, równa długości pręta l. A~ zatem miejscem chwilowych środków na płaszczyźnie kierującej jest okrąg koła o promieniu l i środku w O. Dowolny punkt pręta dzielący jego długość na części a i b opisuje elipsę o środku w O i półosiach a i b.



Rys. 26.

20. Toczenie się i ślizganie krzywej płaskiej

Wyobraźmy sobie dwa wieloboki wypukłe (rys. 27) o bokach równych ale zresztą dowolne, leżące na płaszczyźnie rysunku, z których jeden oznaczony literą S o wierzchołkach C_i ($i = 1, 2, 3 \ldots n$) jest nieruchomy, a drugi M o wierzchołkach Γ_i ($i = 1, 2, 3 \ldots n$) porusza się w płaszczyźnie w ten sposób, iż zawsze przynajmniej jednym wierzchołkiem dotyka odpowiedniego wierzchołka C_i wieloboku stałego. Taki ruch wieloboku M nazywamy jego *toczeniem się* po wieloboku S. Stosownie do zasady względno-

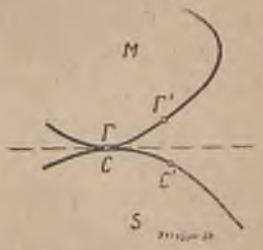


Rys. 27.

ści ruchu, obierając wielobok M za układ odniesienia, możemy powiedzieć, że wielobok S toczy się po nim.

Toczenie się jest widocznie niczym innym, jak szeregiem obrotów około wierzchołków, które się chwilowo schodzą. Odpowiednimi kątami obrotu są sumy kątów zewnętrznych przynależnych obu schodzącym się wierzchołkom tj. $(\alpha_i + \beta_i)$.

Zmniejszając teraz w myśli boki i kąty zewnętrzne obu wierzchołków aż do granicy 0, dochodzimy do wyobrażenia toczenia się krzywej M po krzywej S (rys. 28). Ruch taki jest ciągłym następstwem chwilowych obrotów około punktów styczności obu krzywych. Skoro zatem w chwili dowolnej t krzywa ruchoma dotyka punktem Γ punktu C krzywej stałej, to w chwili tej prędkość punktu Γ jest równa 0, czyli punkt Γ jest *chwilowo w spoczynku*. Inny punkt Γ'' będzie w spoczynku w chwili t', kiedy krzywa ruchoma dotyka punktem Γ'' punktu C', przy czym $\overset{\frown}{\Gamma\Gamma''} = \overset{\frown}{CC'}$ itd.



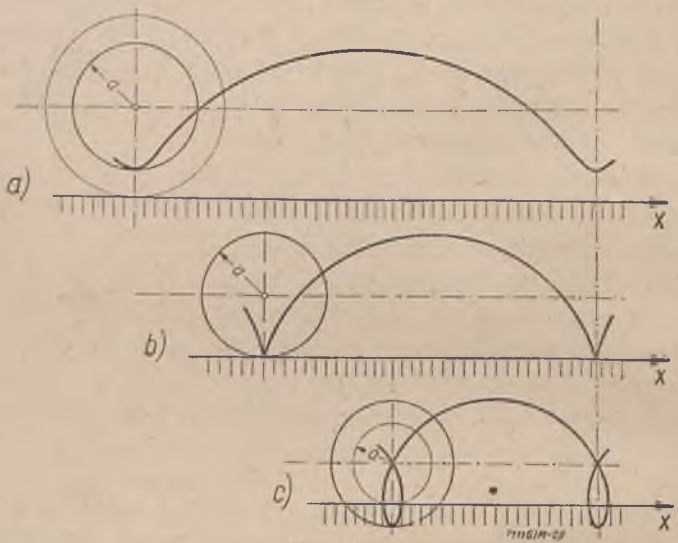
Rys. 28.

Jeżeli krzywa M, poruszając się dotyka krzywej S ciągle tym samym punktem, to ruch taki nazywamy *ślizganiem się* krzywej M po krzywej S. Wreszcie ruch krzywej M, podczas którego coraz inne jej punkty dotykają krzywej S, ale ich prędkości w chwili zetknięcia nie równe są zeru, uważamy za połączenie toczenia się ze ślizganiem. Dzieje się to wówczas, gdy łuk $\overset{\frown}{\Gamma\Gamma''}$ ma długość różną od łuku $\overset{\frown}{CC'}$.

21. Ruch płaski (posuwisty) jako toczenie się krzywej ruchomej po krzywej stałej — Centrodie i aksoidy

Rozpatrzmy najpierw ważny najprostszy przypadek toczenia się koła o promieniu a po prostej obranej za oś X (rys. 29 b). Mamy tu najwidoczniej do czynienia z ruchem płaskim. Środek koła porusza się po prostej równoległej do X, a jakikolwiek punkt okręgu koła opisuje *cykloidę zwyczajną*, która

w geometrii określa się właśnie takim ruchem. Punkty wewnętrzne koła opisują *cykloidy skrócone* o postaci falistej (rys. 29 a); punkty zewnętrzne połączone sztywnie z kołem opisują *cykloidy wydłużone* z pętlicami (rys. 29 c). Wszystkie te krzywe przedstawiają łuki symetryczne, (względem osi prostopadłych do X) powtarzające się identycznie w odstępach $2a\pi$ na osi X.

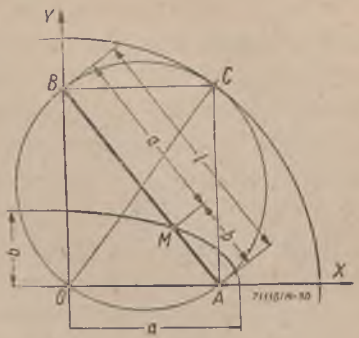


Rys. 29.

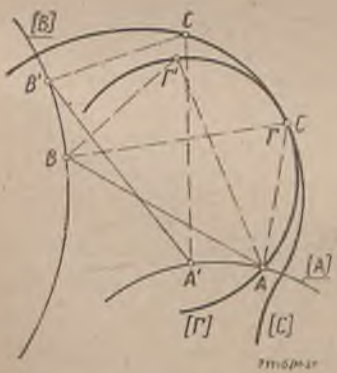
Cykloida zwyczajna ma w tych odstępach punkty zwrotu, a cykloida wydłużona punkty podwójne. Cykloida skrócona ma po parze punktów przegięcia, powtarzających się również w odstępach $2a\pi$, mierzonych od środka każdej pary.

Nie trudno się przekonać, że każdy ruch płaski ciała sztywnego może być uważany za toczenie się określonej krzywej połączonej niezmiennie z ciałem po krzywej określonej w układzie odniesienia. Obie krzywe znajdziemy np. łatwo w przykładzie z § 19 (rys. 26), gdzie rozpatrywaliśmy ruch końców A i B sztywnego odcinka figury płaskiej po osiach X i Y układu prostokątnego. Miejscem środków chwilowych w tym układzie (rys. 30) okaże się okrąg koła o promieniu równym $AB = l$ i środku w początku układu w O. W chwili

rozpatrywanej t ruchem chwilowym figury jest jej obrót około środka C. Punkt ten jest wierzchołkiem trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątną jest $AB = l$. A zatem środek chwilowy zajmuje w figurze poruszającej się coraz to inne miejsce spełniające powyższy warunek. Ponieważ miejscem geometrycznym wierzchołków kąta prostego trójkąta o stałej przeciwprostokątnej l jest okrąg koła o promieniu $l/2$ i środku leżącym w połowie tej przeciwprostokątnej, przeto miejscem środków chwilowych w rozpatrywanym przekroju ciała poruszającego się (płaszczyzna XY) jest w tym przypadku okrąg koła dwa razy mniejszego od okręgu środków chwilowych w układzie odniesienia przyjętym za nieruchomy. Okrąg ten toczy się podczas ruchu ciała po stronie wewnętrznej okręgu środków chwilowych w układzie XY.



Rys. 30.



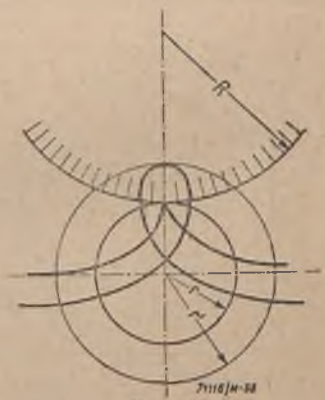
Rys. 31.

Gdy w ogólnym przypadku obie kierownice ruchu posuwistego (płaskiego) są krzywymi dowolnymi, np. [A] i [B] (rys. 31), to chwilowe środki C, C' ... znajdujemy, kreśląc normalne do kierownic w położeniach kolejnych punktów A i B ruchomej figury. Punkty przecięcia normalnych wyznaczają chwilowe środki C w układzie odniesienia. Miejsce geometryczne środków C nazywamy *centrodią nieruchomą* lub *stałą*. Ale chwilowy środek zajmuje nie tylko coraz to inne położenie na płaszczyźnie kierującej w układzie odniesienia, lecz także na poruszającej się figurze. Oznaczmy przez

Γ ten punkt figury, który w chwili t pokrywa punkt C płaszczyzny kierującej, a przez Γ' punkt figury, który w innej chwili t' będzie pokrywał C', to w położeniu przedstawionym na rysunku, a odpowiadającym chwili t znajdziemy Γ' budując $\triangle A B \Gamma'' \cong \triangle A' B' C'$. Punkty Γ' i Γ'' leżą na krzywej $[\Gamma'']$, która jest miejscem chwilowych środków na figurze poruszającej się. Nazywamy ją *centrodią ruchomą* albo *centrodią figury (ciała)*. Podczas ruchu centrodia ruchoma toczy się po centrodii stałej.

Jak wiadomo z poprzednich rozważań, ruch figury w jej płaszczyźnie określa ruch ciała równoległy do tej płaszczyzny. Środkom chwilowym ruchu figury odpowiadają osie chwilowe ruchu ciała, prostopadłe do płaszczyzny kierującej. Osie te są więc w ciele tworzącymi walca, który w każdej chwili dotyka walca utworzonego z osi chwilowych w układzie odniesienia. Centrodie są śladami obu walców na płaszczyźnie kierującej. Jako miejsca osi chwilowych walce otrzymały nazwę: *aksoidy*. Mamy więc *aksoidę stałą* jako miejsce osi chwilowych w układzie odniesienia oraz *aksoidę ruchomą* jako miejsce osi chwilowych w ciele poruszającym się.

Rys. 32.



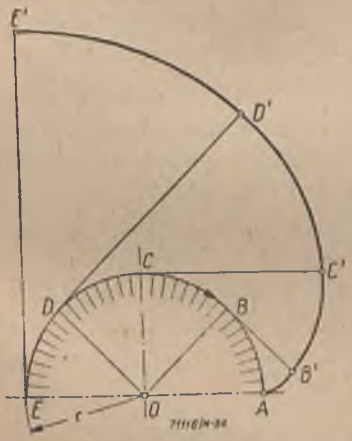
Rys. 33.

Aksoida ruchoma toczy się podczas ruchu po aksoidzie stałej.

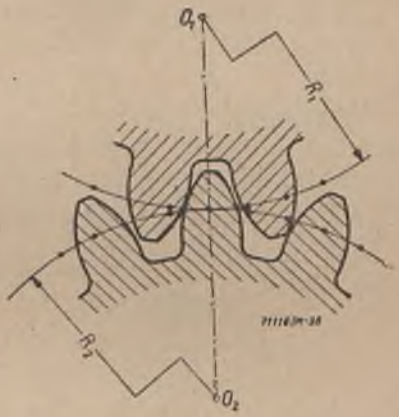
W rozpatrywanym przykładzie ruchu odcinka AB końcami po osiach X i Y, który to ruch okazał się równoważnym z tocze-

niem się koła o promieniu 1/2 *AB* wewnątrz koła o promieniu *AB*, znajdziemy jeszcze łatwo, że dowolny punkt *M* odcinka *AB* (*BM* = *a*, *MA* = *b*) opisuje elipsę o środku położonym w początku współrzędnych i o półosiach *a* i *b*. Na tej zasadzie zbudowane są *elipsografy*, tj. przyrządy do kreślenia elips.

W teorii kół zębatych ważną rolę grają ruchy określone toczeniem się koła po okręgu zewnętrznym lub wewnętrznym oraz prostej po okręgu. Punkty koła toczącego się opisują w pierwszym przypadku *epicykloidy* (rys. 33) i *hipocykloidy* (rys. 32). Punkty zaś prostej toczącej się po okręgu koła opisują *rozwijającą* (*ewolwentę*) tego koła, tj. krzywą opisaną końcem owiniętej na kole nierozciągliwej nici, przy jej odwijaniu w stanie napiętym (rys. 34). Pary zwykłych kół zęba-



Rys. 34.

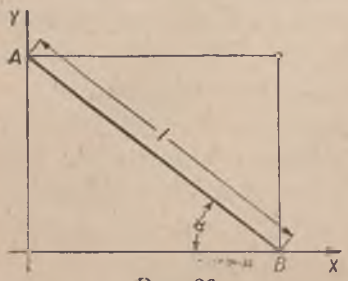


Rys. 35.

tych o osiach równoległych (rys. 35), które służą do przeniesienia ruchu obrotowego jednej osi na drugą, uzmysławiają bardzo dobrze toczenie się po sobie obu centrodyj ruchu płaskiego, w tym przypadku kołowych, jeżeli wyobrazimy sobie zęby nieskończenie małe jako wyłączające ślizganie. Zęby rzeczywiste, o wymiarach skończonych, muszą się nieco ślizgać po sobie. Ślizganie to zmniejsza się wraz z wielkością zębów dążąc do zera. Mowa tu oczywiście o ruchach względnych obu kół.

Przykład 1. Końce A i B pręta sztywnego o długości $l = 60$ *cm* ślizgają się po osiach X i Y prostokątnego układu współrzędnych (rys. 36). Znaleźć jaki jest stosunek prędkości v_B końca B do prędkości v_A końca A w chwili, gdy pręt jest nachylony do osi X pod kątem $\alpha = 30^0$, 45^0 i 60^0.

Rozwiązanie. Środek obrotu, którym jest ruch chwilowy pręta ma współrzędne $x = l \cos\alpha$, $y = l \sin\alpha$. Prędkość kątową obrotu chwilowego ω obliczymy więc, dzieląc szybkość v_A przez $l \sin\alpha$, czyli



Rys. 36.

$$\omega = v_A/l \sin\alpha$$

lub dzieląc szybkość v_B przez $l \cos\alpha$

$$\omega = v_B/l \cos\alpha.$$

stąd $v_A/\sin\alpha = v_B/\cos\alpha$,

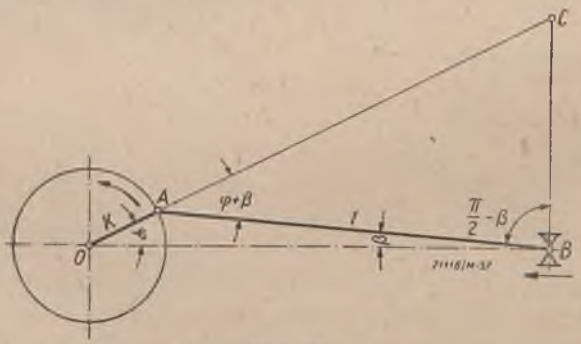
a stosunek $v_B/v_A = \operatorname{ctg}\alpha$

Dla $\alpha = 30^0$; $v_B/v_A = 1{,}732$

$\alpha = 45^0$ $v_B/v_A = 1$

$\alpha = 60^0$ $v_B/v_A = 0{,}577$.

Przykład 2. Korba $OA = k$ mechanizmu korbowego obraca się jednostajnie robiąc n obrotów na minutę. Jaka jest chwilowa prędkość v krzyżulca B (rys. 37), jeśli kąt między korbą, a prostą łączącą środek korby



Rys. 37.

ze środkiem czopa krzyżulca jest φ, a kąt między korbowodem i tą prostą jest β.

Rozwiązanie. Koniec korby A ma prędkość do niej prostopadłą $c = \frac{n \cdot \pi}{30} k$. Przedłużywszy promień OA aż do przecięcia się z prostą BC

prostopadłą do kierunku prędkości B, określonego prostą OB, otrzymujemy środek obrotu chwilowego korbowodu AB. Prędkość kątowa tego obrotu $= c/AC$, ą więc prędkość punktu B jest:

$$v = BC \cdot \frac{c}{AC} = c \cdot \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos\beta} = c\,(\sin\varphi + \operatorname{tg}\beta\,\cos\varphi).$$

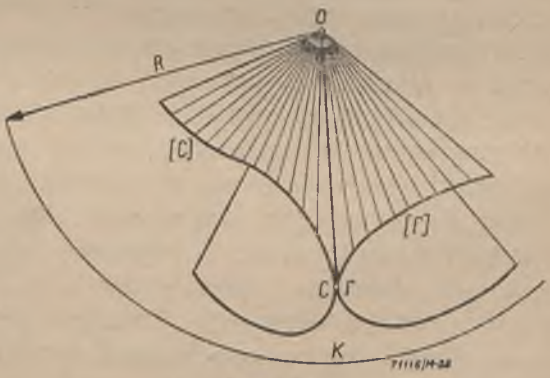
Ponieważ $\operatorname{tg}\beta = \frac{k\sin\varphi}{l}$, a $\varphi = \frac{n\pi}{30}\,t = \omega t$.

otrzymamy:

$$v = c\,(\sin\omega t + \frac{1}{2}\cdot\frac{k}{l}\sin 2\omega t).$$

22. Ruch ciała sztywnego około punktu stałego, czyli kręcenie się

Kręceniem się nazywamy ruch, jaki może wykonywać ciało sztywne (np. świecznik gazowy zawieszony u stropu przegubem kulistym), gdy tylko jeden punkt O ciała ustalimy względem układu odniesienia, wyłączając przez to możliwość jego ruchu postępowego w dowolnym kierunku, pozostawiając natomiast swobodę obrotów chwilowych około dowolnej osi przechodzącej przez stały punkt O zwany *środkiem kręcenia się*. Osie te wyznaczają w przestrzeni układu odniesienia stożek o wierzchołku O (rys. 38). Nazwawszy w ogóle miejsce geometryczne osi chwilowych obrotów, jakich ciało sztywne doznaje w ciągu trwania jego ruchu aksoidą, widzimy, że aksoidą kręcenia się około środka O względem danego układu odniesienia (uważanego za nieruchomy) jest powierzchnia stożkowa o wierzchołku O. Nazywamy ją *aksoidą stałą*, albo też *stożkiem nieruchomym osi chwilowych*. Wyobraźmy sobie, że



Rys. 38.

w każdej chwili t podczas obserwowanego ruchu zaznaczyliśmy położenie chwilowej osi także w samym ciele (jako ruchomym układzie odniesienia), to wówczas osie te utworzą w tym ciele drugi stożek zwany *stożkiem ruchomym osi chwilowych*. Stożek ten [Γ] stanowi *aksoidę ruchomą*. Oba stożki mają w każdej chwili t po jednej tworzącej wspólnej, a ponieważ w chwili $t + dt$ określa nowa oś chwilowa — nieskończenie bliska — tworzące wspólne obu stożków, przeto podczas ruchu ciągłego zachodzi toczenie się stożka ruchomego po stożku stałym (bez ślizgania). A zatem:

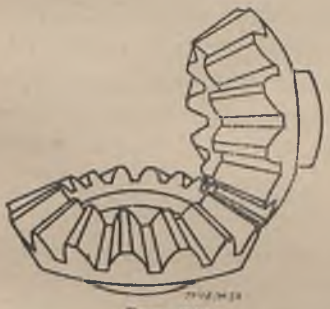
Jakikolwiek ruch ciała sztywnego około punktu stałego O można uważać za toczenie się pewnego stożka w samym ciele (niezmiennie z nim związanego) po pewnym stożku nieruchomym. Punkt O jest przy tym wierzchołkiem wspólnym obu stożków.

Nie trudno zauważyć, że kręcenie się jest ruchem o 3 stopniach swobody, podobnie jak ruch posuwisty. Opisawszy bowiem około środka kręcenia się O kulę o promieniu R, wyznaczającą stały przekrój kulisty K ciała poruszającego się (rys. 38), widzimy, że przekrój ten musi pozostawać podczas ruchu na powierzchni tej samej kuli. Podobnie ma się rzecz w przypadku ruchu posuwistego w płaszczyźnie P. Przekrój ciała tą płaszczyzną pozostaje w niej podczas ruchu, obracając się w każdej chwili t około osi do niej prostopadłej. W przypadku kręcenia się przekrój kulisty K obraca się w każdej chwili około osi prostopadłej do powierzchni kuli. Położenie tej osi jest wyznaczone przez dwie współrzędne, np. kąty nachylenia α i β względem osi X i Y (kąt trzeci γ jest, jak wiadomo, zależny od α i β według równania $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$). Chwilowa prędkość kątowa obrotu ω określa trzecią współrzędną. Liczba 3 stopni swobody wynika także stąd, że ustalenie środka kręcenia O pozbawia ciało trzech stopni swobody z 6, jakie posiadało przed tym jako zupełnie swobodne.

Środek kręcenia się O ciała sztywnego może oczywiście leżeć także poza ciałem. Jeżeli jego odległość R od ciała

pomyślimy sobie jako coraz większą w stosunku do wymiarów samego ciała, to tory punktów ciała jako krzywe kuliste będą zdążały coraz bardziej do torów płaskich na płaszczyznach równoległych, stając się nimi w granicy, gdy $R \to \infty$. Dlatego ruch posuwisty można uważać za przypadek graniczny kręcenia się, gdy środek kręcenia O oddala się do nieskończoności (czyli staje się punktem niewłaściwym w przestrzeni układu odniesienia).

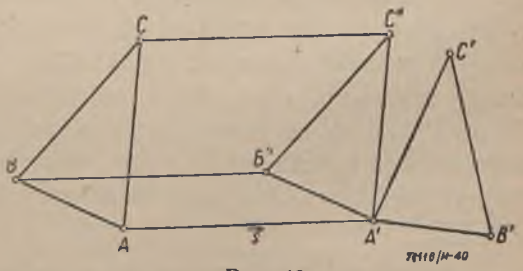
Toczenie się po sobie obu aksoid stożkowych w ruchu około punktu stałego uzmysławia doskonale zespół kół zębatych stożkowych (rys. 39), służących do przeniesienia ruchu obrotowego jednej osi maszyny na drugą, nachyloną do niej w najprostszym przypadku, kiedy osie obrotu obu kół się przecinają. Wtedy, podobnie jak dla zwykłych kół zębatych (§ 21), jest ruch względny obu części jest toczeniem się jednego stożka obrotowego po drugim, przy czym w miejscach stykania się zębów musi jednakże zachodzić ślizganie, które jest tym mniejsze im mniejsze są wymiary zębów.



Rys. 39.

23. Ruch najogólniejszy ciała sztywnego

Niechaj dane ciało zajmuje w chwili t położenie określone trójkątem przechodzącym przez trzy punkty A, B, C (rys. 40), a w chwili późniejszej $t + \Delta t$ położeniem A', B', C' tychże trzech punktów. Jest rzeczą jasną, że położenie to można osiągnąć np. w ten sposób, że najpierw udzielimy ciału przesu-



Rys. 40.

nięcia określonego wektorem $\vec{AA'} = \vec{s}$. To przesunięcie przeniesie $\triangle ABC$ w położenie $A'B''C''$ równoległe do pierwotnego. Aby z tego położenia przejść w położenie końcowe $A'B'C'$ trzeba tylko według § 22 wykonać obrót około osi przechodzącej przez A', określony wektorem kąta obrotu $\vec{\varphi}$. A zatem:

Najogólniejsza zmiana położenia ciała sztywnego (czyli jego najogólniejsze przemieszczenie) może być dokonana ruchem złożonym z przesunięcia $\vec{s}$ i obrotu $\vec{\varphi}$.

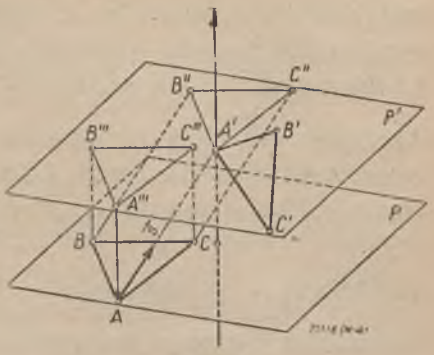
Ponieważ obiór punktu A określającego przesunięcie AA' jest dowolny, przeto widzimy, że jest nieskończenie wiele różnych możliwych zespołów przesunięcia z obrotem, które wykonane w dowolnym porządku wywołują jednoznacznie określoną zmianę położenia sztywnego *.

W każdym takim zespole przesunięcia z obrotem jest oczywiście wektor przesunięcia $\vec{s}$ różny. W odniesieniu do wektora obrotu $\vec{\varphi}$ nie jest trudno zauważyć, że kierunek osi obrotu pozostaje stałym. Wynika to z oczywistego faktu, że wskutek obrotu zmieniają się w ogóle położenia płaszczyzn przekrojów ciała nachylonych do osi obrotu pod kątem nieprostym, a nie zmieniają swego położenia (w przestrzeni układu odniesienia) tylko płaszczyzny przekrojów prostopadłych do osi. Skoro więc w zespole obranym wyznaczymy oś obrotu i poprowadzimy w ciele przekrój do tej osi prostopadły, np. płaszczyznę P' (rys. 41), to ta płaszczyzna przed przesunięciem musiała zajmować położenie $P \parallel P'$. Obrawszy teraz na tej płaszczyźnie trójkąt punktów ABC jako określający położenie początkowe

---

* Albowiem z tym samym skutkiem można najpierw obrócić $\triangle ABC$ około osi przechodzącej przez A, aby zajął położenie równoległe do $A'B'C'$, a po tym dopiero przesunąć go w położenie końcowe. Można również obrać jako punkt wyjścia B lub C zamiast A, albo też wierzchołek jakiegokolwiek innego trójkąta utworzonego z punktów w ciele.

ciała i udzieliwszy mu przesunięcia w dowolnym kierunku, ale tak, aby trójkąt ABC znalazł się na płaszczyźnie P' zajmując przy tym położenie np. $A'''\ B'''\ C'''$ widzimy, że przejście od $A'''\ B'''\ C'''$ w położenie końcowe $A'\ B'\ C'$ wymaga tylko ruchu posuwistego, dającego się jak wiadomo zastąpić obrotem około osi prostopadłej do P', a więc i do P. Z tego wynika, że osie obrotu są we wszystkich zespołach równoległe, podczas gdy kierunki przesunięć są nachylone do płaszczyzn P i P' pod kątami o każdej w ogóle dowolnej wartości, różnej od 90^0. W tym bowiem przypadku mielibyśmy do czynienia z ruchem równoległym do płaszczyzny (P lub P'), który da się zastąpić samym obrotem. W przypadku ogólnym można zawsze spośród nieskończenie wielu zespołów przesunięcia z obrotem wybrać jeden i tylko jeden taki, w którym kierunek przesunięcia jest równoległy (zgodnie lub przeciwnie) do wektora kąta obrotu, czyli prostopadły do płaszczyzny obrotu.



Rys. 41.

Powyższy wynik ujmuje twierdzenie: Dowolne przemieszczenie ciała sztywnego może być tylko w jeden sposób zastąpione zespołem obrotu z przesunięciem równoległym do osi obrotu.

W zespole tym jest obojętne, który z dwóch ruchów składowych będzie najpierw wykonany. Nie trudno jednak wyobrazić sobie je jako wykonane jednocześnie. Wyobraźmy sobie oś obrotu zmaterializowaną i osadzoną w łożyskach na sztywnej ramie, która może się tylko przesuwać w kierunku równoległym do osi. Rama ta przedstawia układ odniesienia, który może się poruszać w opisany sposób względem nieruchomego układu związanego sztywnie, np. z ziemią. Gdy rama

przesuwa się ruchem jednostajnym z prędkością $\vec{v}$, a obrót jest również jednostajny z prędkością kątową $\vec{\omega}$, to każdy punkt ciała posiada względem ramy prędkość prostopadłą do promienia obrotu r o wielkości $r\omega$, zaś względem ziemi posiada prędkość $\vec{v}$, z jaką rama unosi ciało względem ziemi, a więc równoległą do osi obrotu. Obie prędkości są do siebie prostopadłe i mają znaczenie składowych (rzutów) prędkości wypadkowej (względem ziemi) nachylonej do płaszczyzny obrotu pod kątem α, którego $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{r\omega}$. Punkty ciała leżące na walcu obrotowym o promieniu r opisują więc linie śrubowe z prędkością $v_r = \sqrt{v^2 + r^2\omega^2}$. Ruch taki wykonują śruby przy ich wkręcaniu i dlatego nazywamy go *ruchem śrubowym* albo *skrętem*. Twierdzenie powyższe możemy przeto wysłowić krócej w postaci:

Przemieszczenie ogólne ciała sztywnego może być zastąpione skrętem tylko w jeden sposób.

Z tego nie wynika oczywiście, ażeby punkty ciała sztywnego przy jego przemieszczeniu ogólnym opisywały linie śrubowe (tak samo jak w ruchu posuwistym punkty te nie opisują łuków kołowych); im jednak bliżej obierzemy drugie położenie kolejne ciała, tym mniej będzie ruch rzeczywisty różnił się od skrętu. Gdy obydwa położenia zbliżają się ku sobie, a długości AA', BB' i CC' zdążają do zera, to te długości stają się elementami linii śrubowych, a ruch w elemencie czasu dt, czyli ruch chwilowy ciała staje się w granicy skrętem chwilowym. Wynik ten wyraża twierdzenie *Mozziego* i *Chaslesa*.

Ruch chwilowy ciała sztywnego jest w ogóle skrętem chwilowym.

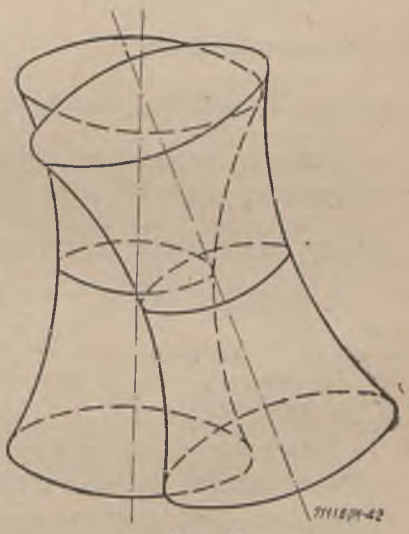
Ruch ciągły ciała sztywnego jest następstwem ciągłym skrętów chwilowych o zmieniającej się prędkości kątowej obrotu $\vec{\omega}$ i prędkości ruchu postępowego $\vec{v}$. W układzie odnie-

sienia osie skrętów chwilowych tworzą powierzchnię prostoliniową, zwaną aksoidą nieruchomą (stałą). W samym ciele natomiast miejscem geometrycznym tychże osi jest powierzchnia prostoliniowa, jako aksoida ruchoma, czyli aksoida ciała. W każdej chwili są obie aksoidy styczne względem siebie wzdłuż odnośnej osi chwilowej skrętu.

A zatem ogólny ruch ciągły ciała sztywnego można wywołać przez toczenie się wraz ze ślizganiem aksoidy ciała po aksoidzie nieruchomej.

Obie aksoidy stykają się w każdej chwili wzdłuż odpowiedniej chwilowej osi skrętu jako wspólnej tworzącej. Około tej osi zachodzi chwilowy obrót jako toczenie się, a równoległe do niej chwilowe przesunięcie jako ślizganie.

Prostym modelem uzmysławiającym powyższe twierdzenie w przypadku szczegółowym jest zespół kół zębatych hyperboloidalnych, stosowany niekiedy do przeniesienia ruchu obrotowego z jednej osi na drugą, ustawioną skośnie względem pierwszej (rys. 42). Wtedy oba koła mają postać części hyperboloid obrotowych o jednej powłoce, które jak wiadomo z geometrii są powierzchniami prostoliniowymi. Proste tworzące są skośne względem osi symetrii obrotowej każdej z hyperboloid; Wzdłuż tych prostych nacina się zęby, które powodują toczenie się wraz ze ślizganiem obu powierzchni po sobie. Zmniejszanie wymiarów zębów nie wpływa w tym wypadku na ślizganie wzdłuż nich, a tylko zmniejsza ślizganie poprzeczne, jak w kołach zębatych zwykłych (walcowych) i stożkowych.



Rys. 42.

24. Rozmieszczenie prędkości w ciele sztywnym

Stan ruchu ciała sztywnego jest według § 23 w każdej chwili t określony przesunięciem elementarnym (chwilowym) o wektorze prędkości $\vec{v}_p$ i obrotem chwilowym o wektorze prędkości kątowej $\vec{\omega}$. Oś obrotu ma przy tym kierunek niezależny od obioru trójkąta punktów w ciele, których chwilowe przemieszczenia wyznaczają ten stan ruchu. Natomiast wektor prędkości przesunięcia $\vec{v}_p$ może mieć kierunki najrozmaitsze, zależnie od obioru trójkąta punktów. Tylko w jedynym przypadku, gdy trójkąt ten obierzemy na płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{\omega}$ jest wektor $\vec{v}_p$ równoległy do $\vec{\omega}$.

Rozpatrując przypadek ogólny znajdujemy, że prędkość dowolnego punktu M ciała sztywnego jest złożona z prędkości przesunięcia chwilowego $\vec{v}_p$ i prędkości $\vec{v}_\omega$ wywołanej obrotem $\vec{\omega}$. Ta ostatnia prędkość jest jak dowiedziono w § 4, 16 i 17 równa momentowi wektora $\vec{\omega}$ (leżącego na osi obrotu) względem punktu M, albo też iloczynowi wektorowemu promienia wektora $\vec{OM} = \vec{r}$ przez $\vec{\omega}$*.

A więc prędkością wypadkową punktu M jest

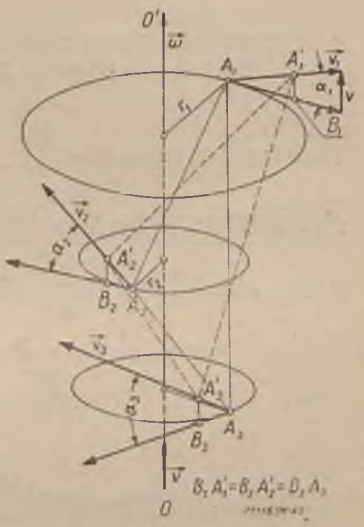
$$\vec{v} = \vec{v}_p + \mathrm{Mom}_o\,\vec{\omega} = \vec{v}_p + \vec{r} \times \vec{\omega} = \vec{v}_p + \vec{\omega} \times (-\vec{r}), \qquad [84]$$

gdzie $-\vec{r} = \vec{MO}$.

Równanie to określa wektor prędkości każdego punktu ciała sztywnego w jego ruchu chwilowym ogólnym, czyli jest równaniem *pola prędkości* w obszarze zajętym przez ciało. Przejrzysty obraz geometryczny tego pola prędkości otrzymamy wychodząc z któregokolwiek punktu o prędkości $\vec{v}$,

* Jeżeli O jest dowolnie obranym punktem na osi obrotu

i posuwając się w kierunku tej prędkości do punktu sąsiedniego itd. Otrzymana w ten sposób linia ma tę własność, że jej styczne w każdym punkcie wskazują kierunek prędkości. Te linie prędkości są oczywiście liniami śrubowymi zwyczajnymi o wspólnej osi, która jest osią chwilowego skrętu. Skok h wszystkich tych linii śrubowych jest wspólny (rys. 43), albowiem każda z nich przecina odpowiednie tworzące walca w odstępach równych $2\varrho\pi\operatorname{tg}\alpha = 2\pi\frac{v^*}{\omega}$, gdzie v^* jest prędkością chwilowego przesunięcia równoległego do osi obrotu, ϱ — promieniem walca odpowiedniej linii śrubowej, a α — kątem nachylenia tej linii do płaszczyzny prostopadłej do osi.



Rys. 43.

Gdy w szczególnym przypadku jest $v^* = 0$, to chwilowy ruch ciała jest obrotem, a linie prędkości sprowadzają się do okręgów, których środki leżą na osi obrotu. W drugim szczególnym przypadku, kiedy $\omega = 0$, czyli gdy mamy do czynienia z chwilowym przesunięciem ciała, są linie prędkości oczywiście prostymi równoległymi do kierunku przesunięcia.

25. Rozmieszczenie przyśpieszeń w ciele sztywnym

Rozmieszczenie przyspieszeń w ciele sztywnym znajdziemy różniczkując równanie pola prędkości

$$\vec{v} = \vec{v}_p + \vec{r} \times \vec{\varepsilon}. \qquad [85]$$

co będzie najprostsze przy założeniu, że $\vec{v}_p \parallel \vec{\omega}$.

Mamy tu do czynienia z różniczkowaniem iloczynu wektorowego dwu czynników $\vec{r}$ i $\vec{\omega}$, które jak łatwo przewidzieć,

odbywa się tak samo, jak różniczkowanie iloczynu wielkości skalarowych, lecz z zastrzeżeniem zachowania porządku czynników. Mamy wtedy

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{p} = \frac{d\vec{v}_p}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega} + \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad [86]$$

Zbadajmy znaczenie każdego z trzech ilorazów różniczkowych po prawej stronie równania.

Pierwszy z nich, tj. $\frac{d\vec{v}_p}{dt}$ jest oczywiście przyśpieszeniem ruchu postępowego $\vec{p}_p$, czyli przesunięcia (chwilowego) ciała. Iloraz różniczkowy $\frac{d\vec{r}}{dt}$ przedstawia prędkość $\vec{v}$, a więc

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_p + \vec{r} \times \vec{\omega}. \qquad [87]$$

Wreszcie iloraz trzeci $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$ określa wektor przyśpieszenia kątowego leżący na osi obrotu, jak $\vec{\omega}$. A zatem przyśpieszenie dowolnego punktu M ciała

$$\vec{p} = \vec{p}_p + (\vec{v}_p + \vec{r} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega} + \vec{r} \times \vec{\varepsilon}. \qquad [88]$$

Ale stosownie do założenia $\vec{v}_p \times \vec{\omega} = 0$, pozostaje więc

$$\vec{p} = \vec{p}_p + (\vec{r} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega} + \vec{r} \times \vec{\varepsilon}. \qquad [89]$$

W tym wypadku $\vec{r} \times \vec{\varepsilon}$ jest wektorem przyśpieszenia składowego prostopadłego do płaszczyzny przesuniętej przez rozpatrywany punkt M i przez oś obrotu. Oznaczymy go przez $\vec{p}_{t\omega}$. Jego wielkością jest $r \sin(\vec{r}, \vec{\omega}) \times \varepsilon = \varrho\varepsilon$ jeżeli

$\varrho = r \cdot \sin(\vec{r}, \vec{\omega})$ (rys. 44). Jest to więc przyśpieszenie styczne wywołane obrotem. W podwójnym iloczynie wektorowym $(\vec{r} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}$ jest część $\vec{r} \times \vec{\omega}$ niczym innym jak prędkością $\vec{v}_\omega$ punktu M wywołaną samym obrotem, czyli

$$(\vec{r} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega} = \vec{v}_\omega \times \vec{\omega}.$$

Rys. 44.

To zaś przedstawia wektor prostopadły zarówno do osi obrotu, jak i prędkości $\vec{v}_\omega$, a skierowany od punktu M ku osi obrotu. Jego wartością liczbową jest zatem $v_\omega \cdot \omega$, a ponieważ $v_\omega = \varrho\,\omega$, przeto mamy do czynienia z przyśpieszeniem dośrodkowym $\vec{p}_{c\omega}$ punktu M wywołanym obrotem $\vec{\omega}$.

Napiszemy więc zamiast [89]

$$\vec{p} = \vec{p}_b + \vec{p}_{c\omega} + \vec{p}_{t\omega}, \qquad [90]$$

albo oznaczywszy

$$\vec{p}_{c\omega} + \vec{p}_{t\omega} = \vec{p}_\omega,$$

jako przyśpieszenie całkowite punktu M ciała wywołane samym jego obrotem chwilowym, to

$$\vec{p} = \vec{p}_b + \vec{p}_\omega. \qquad [91]$$

Wzór ten wyraża, że przyśpieszenie dowolnego punktu ciała sztywnego w jego ruchu chwilowym najogólniejszym jest sumą geometryczną (wektorową) przyśpieszenia $\vec{p}_b$ wywołanego ruchem składowym postępowym i przyśpieszenia $\vec{p}_\omega$ odpowiadającego samemu obrotowi składowemu.

Gdy rozpatrywany punkt M nie jest punktem ciała sztywnego lecz tylko punktem układu współrzędnych połączonego niezmiennie z ciałem, to jego prędkość i przyśpieszenie nazy-

wamy prędkością unoszenia v_u i przyśpieszeniem unoszenia p_u.

Z rozważań powyższych wynika przeto twierdzenie:

Prędkość (przyśpieszenie) unoszenia w układzie współrzędnych połączonym niezmiennie z ciałem sztywnym jest podczas chwilowego ruchu dowolnego tego ciała sumą wektorową prędkości (przyśpieszenia) jego ruchu postępowego i prędkości (przyśpieszenia) wywołanej (wywołanego) jego obrotem.

26. Składanie ruchów

W § 23 podano, jako jeden z ważnych przykładów składania ruchów, ruch śrubowy złożony z przesunięcia i obrotu. Ruch taki wykonywa ciało sztywne obracające się około osi, która jednocześnie przesuwa się podłużnie. Jeszcze prostszym przykładem składania ruchów jest ruch wózka suwnicy złożony z ruchu samej suwnicy po szynach ułożonych na przeciwległych ścianach hali maszyn i ruchu wózka po belce suwnicy. Z pominięciem ruchu kół wózka każdy z ruchów składowych wózka jest ruchem postępowym i prostoliniowym, czyli przesunięciem. A zatem i chwilowy ruch wypadkowy, tj. ruch względem ziemi jako układu odniesienia, jest oczywiście przesunięciem chwilowym, a jego prędkość i przyśpieszenie są złożone z wzajemnie prostopadłych prędkości i przyśpieszeń obu ruchów składowych.

Takich przykładów nastręcza kinematyka maszyn bardzo wiele. Zagadnienie ogólne, jakie się z nich wyłania, można sformułować w następujący sposób:

Ciało sztywne A posiada ruch chwilowy określony względem ciała sztywnego B, które znów wykonywa dany ruch chwilowy względem ciała C itd. aż do ciała U, które stanowi ostatni układ odniesienia przyjęty za nieruchomy. Znaleźć ruch chwilowy ciała A względem U.

Wymienione ruchy ciał A, B, C... występują tutaj jako

kolejne ruchy składowe tak, iż ruch A względem C jest ruchem wypadkowym z ruchu A względem B i ruchu B względem C itd.

Widzimy stąd, że rozpatrywane ogólnie są te zagadnienia wielce złożone, chociaż w zasadzie wymagają tylko rozwiązania zadania składania dwu ruchów i kolejnego zastosowania takiego rozwiązania w przypadkach trzech lub więcej ruchów składowych. Jednakże przypadki technicznie najważniejsze są zwykle najprostsze i te rozpatrzymy przede wszystkim. Do nich należy składanie przesunięć i obrotów chwilowych.

Z opisu analitycznego ruchu punktu względem układu kartezjańskiego, który umożliwia rozkład prędkości i przyśpieszenia na trzy składowe, wynika bezpośrednio, że gdy ciało A przesuwa się względem B z prędkością $\vec{v}_1$ i przyśpieszeniem $\vec{p}_1$, a ciało B względem C z prędkością $\vec{v}_2$ i przyśpieszeniem $\vec{p}_2$, to prędkością przesunięcia chwilowego ciała A względem C będzie

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 , \qquad [92]$$

a przyśpieszeniem:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 . \qquad [93]$$

W przypadku ogólnym n układów otrzymamy więc:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots . + \vec{v}_n$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \ldots . + \vec{p}_n . \qquad [94]$$

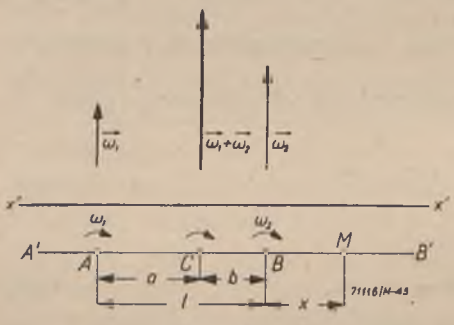
Składanie obrotów chwilowych występuje w postaci bardzo prostej, np. w następującym zadaniu. Ciało sztywne A posiada oś materialną, której łożyska znajdują się w ciele B obracającym się około innej osi o łożyskach osadzonych w układzie odniesienia U. Ruch chwilowy ciała A względem B jest obrotem z prędkością kątową $\vec{\omega}_1$; ruch ciała B względem U jest

obrotem chwilowym z prędkością kątową $\vec{\omega}_2$. Jaki jest ruch wypadkowy ciała A, tj. ruch chwilowy tego ciała względem U ?

Na to pytanie można odpowiedzieć przy pomocy całkiem prostych rozważań geometrycznych. Przeprowadzimy je w następnych paragrafach rozpoczynając od przypadków najprostszych.

27. Składanie obrotów chwilowych około osi równoległych

Niechaj ciało sztywne bierze udział jednocześnie w dwu obrotach chwilowych przedstawionych na rys. 45 (w dwu rzutach) wektorami prędkości kątowych $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ na osiach równoległych skierowanych zgodnie. Poprowadźmy przez obie osie płaszczyznę, której śladem na płaszczyźnie rzutów prostopadłej do obu osi jest $A'\,A\,B\,B'$ przy czym odległość $\overline{AB} = l$. Weźmy pod uwagę punkt C ciała leżący na AB w odległości a od A i b od B. Pod wpływem obrotu chwilowego $\vec{\omega}_1$, punkt ten otrzyma prędkość skierowaną prostopadle do AB w dół o wartości liczbowej $a\,\omega_1$; pod wpływem zaś obrotu $\vec{\omega}_2$ otrzyma prędkość skierowaną przeciwnie o wartości liczbowej $b\,\omega_2$. Prędkość wypadkowa punktu C ma przeto wartość $|a\,\omega_1 - b\,\omega_2|$. Wartość ta staje się równą zeru, czyli punkt C pozostanie w spoczynku, gdy $a\,\omega_1 = b\,\omega_2$. Z tego wynika, że ruch wypadkowy ciała jest obrotem chwilowym około osi równoległej do osi obrotów składowych i przechodzącej



Rys. 45.

przez C. Dowiedziemy nadto, że prędkość kątowa obrotu wypadkowego $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$.

W tym celu obieramy na $A'B'$ dowolny punkt M w odległości x od B. Wartościami prędkości składowych tego punktu skierowanych zgodnie są:

$$\text{wskutek obrotu } \vec{\omega}_1 \qquad v_1 = \omega_1 (l + x),$$

$$\text{wskutek obrotu } \vec{\omega}_2 \qquad v_2 = \omega_2 x,$$

Prędkość wypadkowa jest więc równa

$$v = v_1 + v_2 = \omega_1 l + (\omega_1 + \omega_2) x,$$

co można przekształcić na

$$v = \omega_1 (a + b) + (\omega_1 + \omega_2) x$$

albo, ponieważ $\omega_1 a = \omega_2 b$, na

$$v = (\omega_1 + \omega_2) b + (\omega_1 + \omega_2) x = (\omega_1 + \omega_2) (b + x),$$

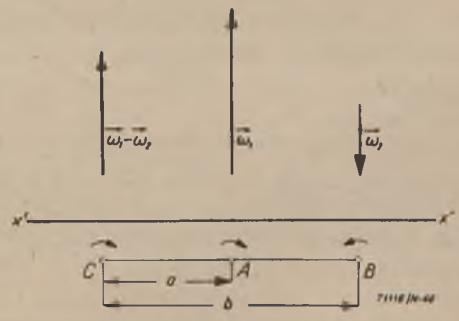
Ta sama prędkość v jako wywołana obrotem wypadkowym ω około osi C wyraża się wzorem:

$$v = \omega (b + x).$$

Z porównania obu tych równań wynika istotnie, że $\omega = \omega_1 + \omega_2$, a zarazem

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2. \quad [95]$$

Tak samo łatwo dowieść, że obrót wypadkowy $\vec{\omega}$ z dwu obrotów $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ około osi równoległych, ale o kierunkach przeciwnych (rys. 46), zachodzi około osi C równoległej do nich i leżącej w ich płaszczyźnie po stronie obrotu składowego o większej prędkości kątowej. Gdy np. jest $\omega_1 > \omega_2$, to



Rys. 46.

oznaczywszy przez a odległość CA, zaś przez b odległość CB, mamy

$$\omega_1 a = \omega_2 b\,; \qquad \omega = \omega_1 - \omega_2\,. \qquad [96]$$

Wyniki te dowodzą, że składanie obrotów chwilowych około osi równoległych odbywa się według prawideł identycznych ze znanymi ze statyki prawidłami składania sił równoległych działających na ciało sztywne. Wystarczy więc wektor siły zastąpić wektorem prędkości kątowej, aby otrzymać z odnośnego twierdzenia statyki twierdzenie o obrotach chwilowych (na razie) około osi równoległych. Zobaczymy, że ta analogia jest całkiem ogólna, a tymczasem wyrazimy wyniki dotychczasowe słowami:

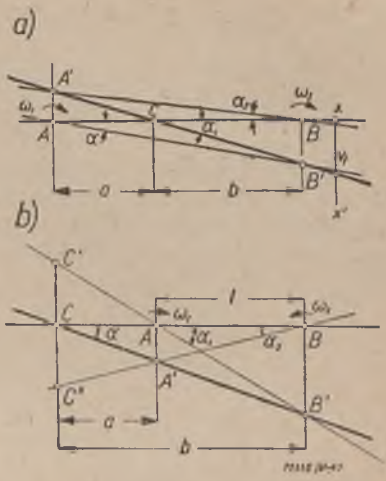
1) Wektory obrotów chwilowych $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ o osiach równoległych i skierowanych zgodnie (określające obroty składowe ciała sztywnego) są równoważne z wektorem $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ obrotu wypadkowego około osi leżącej między obu osiami w ich płaszczyźnie. Oś obrotu ω dzieli l między ω_1 a $\vec{\omega}_2$ w stosunku odwrotnym do wartości $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$.

2) Wektory obrotów chwilowych $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ o osiach równoległych a skierowanych przeciwnie (określające obroty składowe ciała sztywnego), są równoważne z wektorem $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ obrotu wypadkowego około osi leżącej w płaszczyźnie obu osi po stronie wektora o większej wartości liczbowej. Oś obrotu $\vec{\omega}$ dzieli odstęp l między $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ w stosunku odwrotnym do wartości ω_1 i ω_2.

Obydwa przytoczone przypadki składania obrotów można nadto uzmysłowić wykresami (rys. 47). Na wykresie a przedstawia A i B ślady osi obrotów zgodnych ω_1 i ω_2 na płaszczyźnie rysunku do nich prostopadłej. Prędkości liniowe punktów

ciała leżących na prostej AB, wywołane obrotem ω_1, przedstawiają rzędne prostej $A'B'$ nachylonej do AB pod kątem α_1. Tangens kąta α_1 jest wyznaczony stosunkiem prędkości v_1 dowolnego punktu X na prostej AB do odległości AX, czyli

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_1}{AX} = \frac{AX\,\omega_1}{AX} = \omega_1 .$$



Rys. 47.

Prędkości liniowe tychże punktów wywołane obrotem ω_2 przedstawiają rzędne prostej $A'B$ nachylonej pod kątem α_2, przy czym $\operatorname{tg}\alpha_2 = \omega_2$. Ponieważ prędkości liniowe v wywołane obu obrotami są sumami algebraicznymi prędkości v_1 i v_2, przeto wykres v jest również prostą, która musi przechodzić przez punkty końcowe A' i B' rzędnych AA' i BB', albowiem AA' jest prędkością wypadkową punktu A, zaś BB' prędkością wypadkową punktu B. Punkt C, w którym prosta $A'B'$ wykresu v przecina AB, jest śladem osi obrotu wypadkowego. Dla kąta α, jaki prosta $A'B'$ tworzy z AB, znajdujemy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AA'}{AC} = \frac{BB'}{CB} = \frac{AA' + BB'}{AB}, \text{ czyli}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega_2 l}{a} = \frac{\omega_1 l}{b} = \omega_1 + \omega_2 ,$$

a ponieważ $\operatorname{tg}\alpha = \omega$, tj. prędkości kątowej obrotu wypadkowego przeto otrzymujemy po raz wtóry

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 .$$

Na wykresie b (rys 47) widzimy A i B jako ślady osi obrotów przeciwnych ω_1 i ω_2. Prędkości liniowe wywołane obrotem ω_1 są rzędnymi prostej AB', zaś prędkości liniowe wsku-

tek obrotu ω_2 są rzędnymi prostej $A'B$, przy czym jest

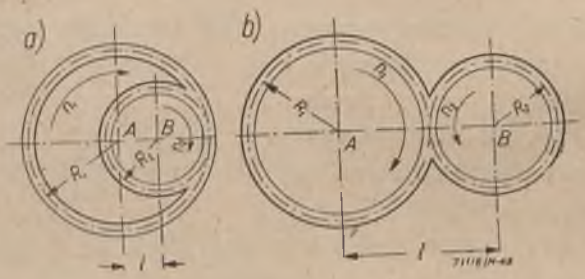
$$\omega_1 = \operatorname{tg}\alpha_1, \qquad \omega_2 = \operatorname{tg}\alpha_2.$$

C jest śladem osi obrotu wypadkowego $\omega = \operatorname{tg}\alpha = \omega_1 - \omega_2$,

$$\text{zaś} \qquad \omega_1 a = \omega_2 b, \qquad \omega_1 a = \omega_2 (l + a),$$

$$\text{stąd } (\omega_1 - \omega_2)\, a = \omega_2 l;\ a = \frac{\omega_2 l}{\omega},\ b = \frac{\omega_1 l}{\omega}.$$

Przykład 1. Dany jest odstęp $l = 80$ cm osi równoległych A i B dwu kół zazębiających się (rys. 48), z których pierwsze ma wykonywać $n_1 = 25$ obr/min, a drugie $n_2 = 125$ obr/min. Obliczyć długości promieni kół podziałowych obu kół zębatych.



Rys. 48.

Rozwiązanie. Mogą tu zachodzić dwa przypadki:

a) Obydwa koła obracają się w tym samym kierunku (rys. 48 a).

b) Koła obracają się w kierunkach przeciwnych (rys. 48 b).

Ponieważ w miejscu stykania się kół podziałowych prędkości liniowe są dla obu kół równe, przeto w przypadku *a* koła podziałowe stykają się wewnętrznie, a w przypadku *b* zewnętrznie.

Prędkości liniowe są proporcjonalne do promieni R_1 i R_2, a zarazem do prędkości kątowych, a więc także do ilości obrotów na minutę, czyli $R_1 n_1 = R_2 n_2$. A zatem w przypadku *a* zachodzi nadto związek $R_1 - R_2 = l$ zaś w przypadku *b* $R_1 + R_2 = l$

Stąd $R_1 = \dfrac{n_2 \cdot l}{n_2 - n_1} = 100$ cm; $R_2 = \dfrac{n_2 \cdot l}{n_2 - n_1} = 20$ cm w przypadku *a*

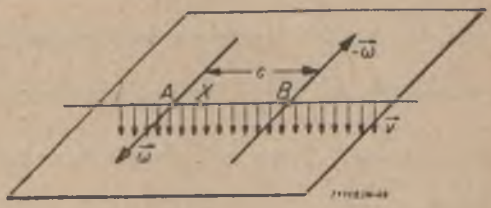
$R_1 = \dfrac{n_2 \cdot l}{n_1 + n_2} = 66\dfrac{2}{3}$ cm; $R_2 = \dfrac{n_1 \cdot l}{n_1 + r_2} = 13\dfrac{1}{3}$ cm w przypadku *b*.

28. Para obrotów chwilowych

Tak nazywamy dwa obroty około osi równoległych o prędkościach kątowych $\vec{\omega}$ i $-\vec{\omega}$. Oznaczywszy przez c odległość AB (rys. 49) między obu osiami, znajdujemy dla prędkości, jaką pod wpływem obu obrotów otrzymuje punkt X obrany dowolnie na prostej AB:

$$v = (\overline{AB} + \overline{BX})\,\omega - \overline{BX}\cdot\omega = \overline{AB}\,\omega = c\,\omega.$$

Jest to prędkość stała dla wszystkich punktów ciała leżących w płaszczyźnie obu osi, a więc i dla wszystkich innych punktów ciała. A zatem:



Rys. 49.

Para obrotów $\vec{\omega}$ i $-\vec{\omega}$ o odstępie ich osi $c = AB$ daje jako ruch wypadkowy ciała sztywnego przesunięcie chwilowe o prędkości v równej liczbowo $c\omega$ i o kierunku prostopadłym do płaszczyzny obu osi. Zwrot tego przesunięcia jest określony zwrotem prędkości liniowej, jakiej obrót $\vec{\omega}$ udziela jakiemukolwiek punktowi ciała leżącemu pomiędzy osiami.

Tak samo można wyrazić zwięźlej uwzględniając, że prędkość liniowa $\vec{v}_1$ punktu dowolnego M ciała sztywnego poddanego obrotowi chwilowemu $\vec{\omega}$ jest równa momentowi wektora $\vec{\omega}$ względem tego punktu, zaś prędkość liniowa $\vec{v}_2$ tegoż punktu M wskutek obrotu $-\vec{\omega}$ jest równa momentowi wektora $-\vec{\omega}$ względem M. Pod wpływem obu obrotów

otrzyma punkt M prędkość $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \mathrm{Mom}_M \vec{\omega} +$ $+ \mathrm{Mom}_M (-\vec{\omega})$. Ale jak wiadomo (patrz § 16 i 17) jest $\mathrm{Mom}_M \vec{\omega} = r_1 \times \vec{\omega}$, gdzie $r_1 = \vec{MO}$ jest promieniem-wektorem łączącym początek O wektora $\vec{\omega}$ na pierwszej osi obrotu. Podobnie jest

$$\mathrm{Mom}_M (-\vec{\omega}) = \vec{r}_2 \times (-\vec{\omega}) = -\vec{r}_2 \times \vec{\omega},$$

gdzie $\vec{r}_2 = \vec{MO'}$ jest promieniem-wektorem łączącym początek O' wektora $-\vec{\omega}$ na drugiej osi obrotu. A zatem:

$$\vec{v} = \vec{r}_1 \times \vec{\omega} - \vec{r}_2 \times \vec{\omega} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{\omega} = \vec{c} \times \vec{\omega}, \qquad [97]$$

jeżeli $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{c} = \vec{OO'}$. Ten iloczyn wektorowy przedstawia wektor stały, tj. niezależny od obioru początków O i O' na obu równoległych osiach obrotu, zwany *momentem pary wektorów posuwnych*. „Ramię" $\vec{c}$ momentu pary obieramy najdogodniej jako prostopadłe do obu osi. Wtedy bowiem mamy dla wartości liczbowej momentu pary zamiast $c\,\omega \sin(\vec{c}, \vec{\omega})$ wartość $c_0\,\omega_0$; gdzie $c_0 = c \sin(\vec{c}, \vec{\omega})$ jest wzajemną odległością obu osi, czyli *ramieniem prostopadłym pary*. Zupełnie tak samo określa się w statyce moment pary sił i jej ramię. Wysłowienie poprzednie możemy zatem zastąpić zdaniem:

Para obrotów chwilowych $\vec{\omega}$, $-\vec{\omega}$ jest równoważna przesunięciu chwilowemu z prędkością $\vec{v}$ równą momentowi tej pary.

Ponieważ prędkość $\vec{v}$ przesunięcia chwilowego równoważnego danej parze obrotów $\vec{\omega}$ i $-\vec{\omega}$ jest wektorem swobodnym (patrz § 16), przeto daną parę obrotów chwilowych $\vec{\omega}$ i $-\vec{\omega}$

można zastąpić inną parą o momencie wektorowo równym, a więc np. wektory $\vec{\omega}$ i $-\vec{\omega}$ danej pary wraz z jej ramieniem prostopadłym $\vec{c}_1$ można obrócić o dowolny kąt w płaszczyźnie pary i przesunąć w tej płaszczyźnie, a nadto przenieść do innej płaszczyzny równoległej. Każda z tak przekształconych par obrotów jest równoważna danej parze, ponieważ wywołuje tę samą prędkość przesunięcia chwilowego jako ruchu wypadkowego.

29. Składanie par obrotów

Z rozważań poprzedniego paragrafu wynika bezpośrednio, że:

Dwie pary obrotów równoważne przesunięciom z prędkościami $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ dają parę wypadkową równoważną przesunięciu z prędkością $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, czyli parę, której moment równa się sumie geometrycznej momentów obu par składowych.

Uogólnienie tego twierdzenia do ilukolwiek par obrotów nie wymaga objaśnień. Skoro zaś dany układ par obrotów o momentach $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \ldots \vec{v}_n$ jest taki, że

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \ldots + \vec{v}_n = 0,$$

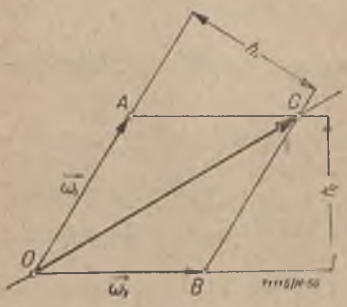
czyli gdy wielobok utworzony z wektorów momentów jest zamknięty, to moment pary wypadkowej jest równy zeru, czyli dany układ par obrotów znosi się nawzajem (nie wywołując ruchu ciała sztywnego, gdy to ciało było przedtem w stanie spoczynku).

Oczywistym wreszcie jest wniosek, że każde przesunięcie chwilowe ciała sztywnego z prędkością daną $\vec{v}$ da się na nieskończenie wiele

sposobów zastąpić parą obrotów chwilowych o momencie równym $\vec{v}$.

30. Obroty chwilowe około osi przecinających się

Niech $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ (rys. 50) przedstawiają wektory prędkości kątowych obrotów chwilowych około osi przecinających się w punkcie O ciała sztywnego.



Rys. 50.

Dowiedziemy, że wektor $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ przedstawia prędkość kątową obrotu wypadkowego około osi przechodzącej przez punkt O. W tym celu wystarczy wykazać, że oprócz O jeszcze inny punkt prostej wektora $\vec{\omega}$ pozostaje w spoczynku, podczas gdy ciało podlega jednocześnie obrotom $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$, a nadto, że prędkość liniowa dowolnego innego punktu ciała jest wypadkową prędkości wywołanych obrotami składowymi ω_1 i ω_2.

Z wierzchołka C równoległoboku $OACB$ zbudowanego z wektorów $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ wykreślmy prostopadłe h_1 i h_2 na boki OA i OB. Wskutek obrotu chwilowego $\vec{\omega}_1$ otrzyma punkt C prędkość skierowaną ku patrzącemu o wielkości $\omega_1 h_1$, zaś wskutek obrotu $\vec{\omega}_2$ prędkość skierowaną przeciwnie o wartości $\omega_2 h_2$. Otóż $\omega_1 h_1 = \omega_2 h_2$, albowiem każdy z tych iloczynów przedstawia podwójne równe pola trójkątów OAC i OCB. A więc punkt C jest punktem osi obrotu wypadkowego. Nadto jest prędkość liniowa punktu A, wywołana obu obrotami składowymi liczbowo równa $\omega_2 h_2$. Prędkość ta jest skierowana poza

płaszczyznę rysunku. Tę samą prędkość nadaje punktowi A obrót wypadkowy $\vec{\omega}$, ponieważ mierzy ją iloczyn ω przez prostopadłą wykreśloną z A na $\vec{\omega}$. Iloczyn ten jest bowiem tak samo równy polu równoległoboku $OACB$, jak $\omega_2 h_2$, a więc obie prędkości liniowe są równe, a obrót jest równoważny obrotom $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$.

Uogólniając bez trudności twierdzenie powyższe do przypadku układu obrotów chwilowych $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \ldots \vec{\omega}_n$, których osie skierowane dowolnie w przestrzeni przecinają się w jednym punkcie ciała O, możemy stwierdzić, że:

Obroty chwilowe ciała sztywnego około osi przecinających się w jednym punkcie są równoważne obrotowi wypadkowemu, którego wektor jest sumą geometryczną wektorów obrotów składowych.

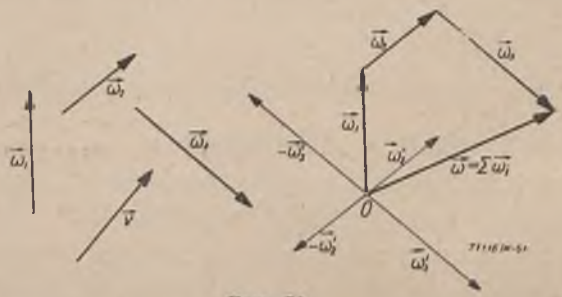
Stąd wniosek, że obroty chwilowe około osi przecinających się w jednym punkcie znoszą się nawzajem, gdy wielobok wektorów ich prędkości kątowych się zamyka (czyli gdy suma geometryczna tych wektorów jest równa zeru).

31. Składanie obrotów chwilowych w przypadku najogólniejszym

Gdy osie obrotów chwilowych, w których ciało sztywne bierze jednocześnie udział, są względem siebie skośne, czyli nie przecinają się nawzajem, to składanie obrotów da się wykonać w sposób następujący:

Obrawszy w ciele poddanym obrotom chwilowym $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \ldots \vec{\omega}_n$ około osi skośnych (rys. 51) punkt stały dowolny O, pomyślmy sobie w tym punkcie jako początku, wektory

$\vec{\omega}_1, -\vec{\omega}_1; \ldots \vec{\omega}_n, -\vec{\omega}_n$ przedstawiające układ obrotów znoszących się nawzajem, a więc nie mające wpływu na stan chwilowy ruchu naszego ciała sztywnego. Otóż każdy z wektorów pierwotnych np. $\vec{\omega}_i$ wraz z wektorem $-\vec{\omega}_i$ o początku w O



Rys. 51.

tworzy parę obrotów dającą się, jak wiadomo, zastąpić przesunięciem chwilowym z prędkością $\vec{v}_i$ równą momentowi tej pary, a zarazem momentowi wektora pierwotnego względem O. Mamy zatem do czynienia z n parami obrotów i z n obrotami około osi przechodzących przez punkt O. Te ostatnie dają, jak wynika z § 30, obrót wypadkowy około osi przechodzącej przez O z prędkością kątową $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \ldots + \vec{\omega}_n$. Pary obrotów zaś dają wypadkową o momencie równym sumie geometrycznej momentów wektorów pierwotnych $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2 \ldots \vec{\omega}_n$ względem punktu O, czyli jak dowiedziono w § 29, przesunięcie wypadkowe z prędkością $\vec{v}$ równą tej samej sumie momentów.

Dochodzimy więc do wyniku zgodnego z teorią ruchu ogólnego chwilowego ciała sztywnego, że:

Najogólniejszy zespół danych obrotów chwilowych $\vec{\omega}_1 \vec{\omega}_2 \ldots \vec{\omega}_n$, któremu podlega ciało sztywne, da się zastąpić jednym przesu-

nięciem chwilowym z prędkością $\vec{v}$ i jednym obrotem $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \ldots + \vec{\omega}_n$ około osi w ogóle nie równoległej do prędkości $\vec{v}$. Prędkość chwilowa $\vec{v}$ przesunięcia wypadkowego jest sumą geometryczną momentów wektorów prędkości kątowych danych obrotów chwilowych względem obranego punktu O, przez który przechodzi oś obrotu wypadkowego $\vec{\omega}$.

Ponieważ punkt O zwany *środkiem redukcji obrotów chwilowych* jest obrany dowolnie, przeto dla każdego punktu O otrzymujemy inny moment danych wektorów obrotów chwilowych, a więc inny kierunek i wielkość prędkości $\vec{v}$ przesunięcia wypadkowego. Natomiast wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ obrotu wypadkowego jest dla każdego środka redukcji oczywiście ten sam.

Widać stąd, że ruch chwilowy ciała sztywnego wypadkowy z dowolnej liczby ruchów chwilowych ogólnych złożonych z przesunięć i obrotów chwilowych jest w ogóle jednym z nieskończenie wielu zespołów jednego przesunięcia i jednego obrotu chwilowego, przy czym wektory obrotu chwilowego w każdym z tych zespołów są równe (chociaż leżą na prostych równoległych), natomiast wektory przesunięcia chwilowego są różne, zależnie od odbioru środka redukcji O.

32. Rozkład najogólniejszego ruchu ciała sztywnego na przesunięcia i obroty chwilowe

Rozkład ruchu ciała sztywnego na przesunięcia i obroty chwilowe może być najrozmaitszy, ale szczególnie ważny jest następujący: gdy stan ruchu ciała jest określony przesunięciem chwilowym z prędkością $\vec{v}$ i obrotem chwilowym

z prędkością kątową $\vec{\omega}$, to obrawszy początek O układu kartezjańskiego na tej osi rozkładamy wektor $\vec{\omega}$ według schematu:

$$\vec{\omega} = \vec{i}\,\omega_x + \vec{j}\,\omega_y + \vec{k}\,\omega_z, \qquad [98]$$

zaś wektor $\vec{v}$ według schematu:

$$\vec{v} = \vec{i}\,v_x + \vec{j}\,v_y + \vec{k}\,v_z; \qquad [99]$$

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — oznaczają wersory na osiach X, Y, Z;

ω_x, ω_y, ω_z — składowe, czyli rzuty prędkości kątowej $\vec{\omega}$ na te osie;

v_x, v_y, v_z — składowe, czyli rzuty prędkości przesunięcia wzdłuż tych osi.

Sześć wielkości skalarowych ω_x, ω_y, ω_z, v_x, v_y, v_z określa stan ruchu chwilowego ciała sztywnego swobodnego. Łatwo to sobie uzmysłowić na modelu ciała nawleczonego na nieruchomy długi pręt sztywny o przekroju kołowym, którego oś jest równoległa do osi X. Taki model ma dwa stopnie swobody, gdyż może się przesuwać wzdłuż osi X i obracać dokoła tej osi. Jeżeli pręt X (jak go krótko nazwiemy) osadzimy w ramie obejmującej go wraz z rozpatrywanym ciałem, a ramę tę uruchomimy w podobny sposób, jak to ciało, nawlekając ją na takiż pręt o osi równoległej do Y, znowu na razie nieruchomy, to zwiększymy liczbę stopni swobody ciała na 4 (możliwość przesunięć w kierunkach X i Y oraz obrotów około osi X i Y). Gdy wreszcie i drugi pręt zespolimy z nową ramą nawleczoną w ten sam sposób na trzeci pręt nieruchomy, o osi równoległej do Z, to ciało pozyska jeszcze dwa stopnie swobody; razem przeto będzie ich miało 6. To odpowiada przy opisie analitycznym ruchu chwilowego ciała zupełnie swobodnego sześciu współrzędnym v_x, v_y, v_z, ω_x, ω_y, ω_z.

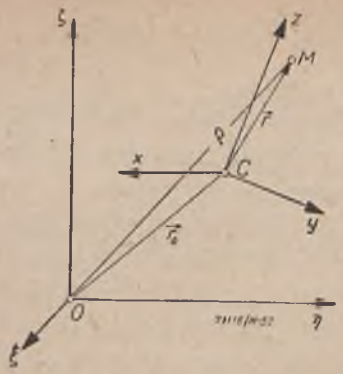
33. Zmiana układu odniesienia — Związek między prędkościami

Obraz matematyczny ruchu punktu sporządzony dla układu odniesienia A, musi być oczywiście w ogóle inny dla układu odniesienia B, jeżeli ten układ porusza się względem A, co jest równoważne ze stwierdzeniem, że A porusza się względem B (zasada kinematyczna względności ruchu). Uzmysławia to dobrze statek powietrzny (sterowiec lub wielki płatowiec) jako układ A poruszający się względem ziemi jako układu B. Ruch piłki, którą się bawią pasażerowie statku przedstawia się inaczej dla nich (tj. w układzie A) niż dla obserwatorów stojących na ziemi (w układzie odniesienia B). Wyłaniające się stąd ważne zagadnienie kinematyki opiewa tak:

Znamy prędkość $\vec{v}_w$ i przyśpieszenie $\vec{p}_w$ ruchu punktu M względem układu A (statku) oraz prędkość $\vec{u}$ chwilowego przesunięcia i prędkość kątową $\vec{\omega}$ obrotu chwilowego układu A względem B (ziemi). Szukamy prędkości $\vec{v}_b$ i przyśpieszenia $\vec{p}_b$ punktu M względem B (ziemi).

Oznaczenia tutaj przyjęte odpowiadają umowie często stosowanej, że układ B (w tym przypadku ziemię) uważamy za nieruchomy i dlatego nazywamy go układem bezwzględnym. Stąd oznaczenia $\vec{v}_b$ i $\vec{p}_b$. Układ zaś A (statek) uważamy wtedy za ruchomy, czyli względny; stąd oznaczenia $\vec{v}_w$ i $\vec{p}_w$.

Ażeby znaleźć rozwiązanie ogólne umieścimy na każdym z obu ciał sztywnych A i B układ współrzędnych prostokątnych (rys. 52) a więc na A układ X, Y, Z o początku C, a na B układ ξ, η, ζ o początku O. Poruszający się punkt M ma zatem dwojakie współrzędne (x, y, z) względem A i (ξ, η, ζ) względem B. Zarazem określa położenie M promień — wek-



Rys. 52.

tor $\vec{CM} = \vec{r}$ i promień - wektor $\vec{OM} = \vec{\varrho}$, oraz promień - wektor $\vec{OC} = \vec{r_o}$. Przy tym zachodzi związek oczywisty:

$$\vec{\varrho} = \vec{r_o} + \vec{r}. \qquad [100]$$

Załóżmy, że ruch chwilowy układu A jest określony prędkością $\vec{v_o}$ punktu C jako prędkością przesunięcia chwilowego i prędkością kątową $\vec{\omega}$ obrotu około osi przechodzącej przez C. Wiadomo bowiem z § 23, że można przedstawić dowolny ruch chwilowy ciała sztywnego. A zatem

$$\vec{v_o} = \frac{d\vec{r_o}}{dt}. \qquad [101]$$

Szukany związek między prędkościami znajdziemy przez różniczkowanie równania 100 względem czasu, a więc:

$$\frac{d\vec{\varrho}}{dt} = \frac{d\vec{r_o}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad [102]$$

Tutaj ma oczywiście $\frac{d\vec{\varrho}}{dt}$ znaczenie prędkości bezwzględnej, gdyż wektor $\vec{\varrho}$ jest zależny jedynie od czasu t. Natomiast iloraz różniczkowy $\frac{d\vec{r}}{dt}$ nie przedstawia prędkości względnej tj. prędkości względem układu A (statku), ponieważ wektor $\vec{r}$ w odniesieniu do układu B jest zależny nie tylko od t, ale także od ruchu układu A względem B. Jeszcze wyraźniej wyjdzie

to na jaw, gdy promień wektor $\vec{r}$ wyrazimy w postaci:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z,$$

gdzie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ są wersorami leżącymi na osiach X, Y, Z, poruszających się względem układu ξ, η, ζ, a więc wektorami jednostkowymi zależnymi od czasu t. Ta zależność jest zresztą bardzo prosta, gdyż przesunięcie z prędkością $\vec{v}_o$ nie zmienia położenia wersorów. Natomiast zmiana czasowa występuje wskutek obrotu chwilowego układu A z prędkością kątową $\vec{\omega}$. A więc np. wersor $\vec{i}$ otrzyma wskutek obrotu przyrost geometryczny $\mathrm{d}\vec{i}$ (prostopadły do $\vec{i}$), którego prędkość $\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t}$ jest oczywiście taka sama, jak prędkość punktu końcowego wektora $\vec{i}$ o początku C wywołanym obrotem około osi przechodzącej przez C. To znaczy (stosownie do §§ 17 i 25), że:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t} = \vec{i} \cdot \vec{\omega} \qquad [103]$$

i podobnie

$$\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t} = j \cdot \vec{\omega} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t} = k \cdot \vec{\omega}.$$

Uwzględniwszy to napiszemy

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{i}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \vec{j}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \vec{k}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t}x + \frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t}y +$$

$$+ \frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t}z = \left(\vec{i}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \vec{j}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \vec{k}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) +$$

$$+ (\vec{i} \times \vec{\omega}x + \vec{j} \times \vec{\omega}y + \vec{k} \times \vec{\omega}z),$$

Pierwszy trójmian jest wyrażeniem prędkości względnej punktu M, czyli $\vec{v}_w$, drugi zaś można napisać w postaci

$$(\vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z) \times \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{\omega},$$

a zatem

$$\frac{d\vec{\varrho}}{dt} = \vec{v}_b = \vec{v}_o + \vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{v}_w. \qquad [104]$$

Ponieważ, jak wiadomo z § 25, dwumian $\vec{v}_o + \vec{r} \times \vec{\omega}$ określa prędkość unoszenia $\vec{v}_u$, przeto mamy ostatecznie wzór

$$\vec{v}_b = \vec{v}_u + \vec{v}_w, \qquad [105]$$

czyli słowami: Prędkość bezwzględna punktu (tj. prędkość tegoż punktu względem układu B przyjętego za nieruchomy) jest sumą wektorową prędkości względnej (tj. prędkości względem układu A) i prędkości unoszenia (tegoż układu A). Odwrotnie

$$v_w = v_b + (-v_u), \qquad [106]$$

czyli prędkość względna jest sumą wektorową (czyli wypadkową), prędkości bezwzględnej i przeciwnie wziętej prędkości unoszenia.

34. Związek między przyśpieszeniami punktu poruszającego się odniesionymi do układu stałego i ruchomego Przyśpieszenie Coriolisa

Podobnie jak prędkość unoszenia $\vec{v}_u$ pojmujemy jako prędkość punktu ustalonego względem układu ruchomego (np. statku powietrznego) spowodowaną ruchem tego układu względem układu odniesienia, uważanego za stały (np. ziemi), tak też przez *przyśpieszenie unoszenia* $\vec{p}_u$ rozumiemy przyśpieszenie punktu ustalonego względem tegoż układu ruchomego (statku), wywołane samym ruchem tego układu względem układu odniesienia

uważanego za nieruchomy (ziemi). Oznaczywszy przez $\vec{p_a}$ *przyspieszenie* względne, tj. przyśpieszenie poruszającego się punktu M względem układu ruchomego A (uzmysłowionego jako statek powietrzny), a przez $\vec{p_b}$ *przyśpieszenie bezwzględne*, tj. przyśpieszenie względem układu B uważanego za nieruchomy (np. ziemi), znajdziemy związek między tymi wielkościami kinematycznymi, różniczkując względem czasu związek między prędkościami znaleziony w § 33 w postaci

$$\vec{v_b} = \vec{v_o} + \vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{v_w}. \qquad [107]$$

Przy różniczkowaniu musimy również pamiętać o zależności od czasu wektorów jednostkowych (wersorów) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ na osiach układu ruchomego (X, Y, Z). Napiszemy więc najpierw:

$$\frac{d\vec{v_b}}{dt} = \vec{p_b} = \frac{d\vec{v_o}}{dt} + \vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega} + \frac{d\vec{v_w}}{dt} \qquad [108]$$

Tutaj $\frac{d\vec{v_o}}{dt}$ jest przyśpieszeniem ruchu postępowego układu ruchomego, $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ jest przyśpieszeniem kątowym $\vec{\varepsilon}$ obrotu chwilowego tegoż układu, a $\vec{r} \times \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{r} \times \vec{\varepsilon}$ jest, jak wiadomo z § 25, jedną ze składowych przyśpieszenia unoszenia, a mianowicie składową styczną przyśpieszenia wywołanego obrotem układu ruchomego. Pozostaje jeszcze rozwinąć dwa wyrazy ostatnie. Podobnie jak w § 33 mamy teraz

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{\omega} + \frac{d}{dt}(\vec{xi} + \vec{yj} + \vec{zk}) \times \vec{\omega} =$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) \times \omega + \left(x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\right) \times \vec{\omega} =$$

$$= \vec{v_w} \times \vec{\omega} + (\vec{x}\vec{i} \times \vec{\omega} + \vec{y}\vec{j} \times \vec{\omega} + \vec{z}\vec{k} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}.$$

Tutaj można wyrażenie drugie po stronie prawej napisać w postaci

$$[(\vec{xi} + \vec{yj} + \vec{zk})] \times \vec{\omega} = (\vec{r} \times \vec{\omega}) \times \vec{\omega}.$$

To zaś, jak wiadomo z § 25, przedstawia $\vec{p}_{cw}$, tj. przyśpieszenie dośrodkowe wywołane obrotem $\vec{\omega}$, czyli składową normalną przyśpieszenia unoszenia. A zatem wzór 108 przyjmie postać:

$$\vec{p}_b = \left(\frac{d\vec{v}_o}{dt} + r \times \vec{\varepsilon} + \vec{p}_{cw} \right) + \vec{v}_w \times \vec{\omega} + \frac{d\vec{v}_w}{dt}, \text{ albo}$$

$$\vec{p}_b = \vec{p}_u + \vec{v}_w \times \vec{\omega} + \frac{d\vec{v}_w}{dt}.$$

Pozostaje do rozwinięcia tylko wyraz

$$\frac{dv_w}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \right) =$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} + \frac{dx}{dt} \times \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \times \frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \times \frac{d\vec{k}}{dt}$$

Trójmian $\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$ przedstawia oczywiście przyśpieszenie względne $\vec{p}_w$, a trójmian następny — po zastąpieniu $\frac{d\vec{i}}{dt}$ przez $\vec{i} \times \vec{\omega}$ itd. — staje się identycznym z wyrażeniem $\vec{v}_w \times \vec{\omega}$. Ostatecznie więc otrzymamy:

$$\vec{p}_b = \vec{p}_u + \vec{p}_w + 2\vec{v}_w \times \vec{\omega} \qquad [109]$$

co wyraża, że przyśpieszenie bezwzględne $\vec{p}_b$ składa się z przyśpieszenia względnego $\vec{p}_w$, przyśpieszenia unoszenia $\vec{p}_u$ i przyśpieszenia dodatkowego $\vec{p}_r = 2\vec{v}_w \times \vec{\omega}$ zwanego przyśpieszeniem Coriolisa, od francuskiego inżyniera-badacza, który związek powyższy wykrył, posługując się wywodem analitycznym bez porównania dłuższym.

Przyśpieszenie Coriolisa jest jako podwójny iloczyn wektorowy prędkości względnej $\vec{v}_w$ przez prędkość kątową obrotu chwilo-

wego $\vec{\omega}$ układu względnego, prostopadłe do prędkości względnej i osi obrotu, a zatem znika w trzech przypadkach szczególnych:

1) gdy prędkość względna jest równoległa do osi obrotu układu,

2) gdy prędkość kątowa obrotu jest równa zeru, i

3) gdy prędkość względna jest równa zeru.

Wzór [106] piszemy zwykle w postaci

$$\vec{p}_b = \vec{p}_u + \vec{p}_w + \vec{p}_c, \qquad [110]$$

z którego wynika

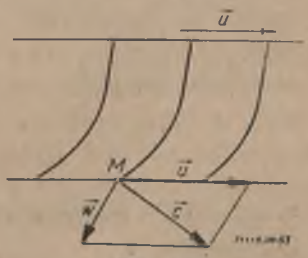
$$\vec{p}_w = \vec{p}_b + (-\vec{p}_u) + (-\vec{p}_c) \qquad [111]$$

Równanie [111] pozwala na sformułowanie twierdzenia:

Przyśpieszenie względne (tj. przyśpieszenie punktu M względem układu A o ruchu znanym względem B) jest sumą wektorową przyśpieszenia bezwzględnego (tj. przyśpieszenia punktu M względem układu B przyjętego za nieruchomy), przeciwnie wziętego przyśpieszenia unoszenia i przeciwnie wziętego przyśpieszenia (Coriolisa).

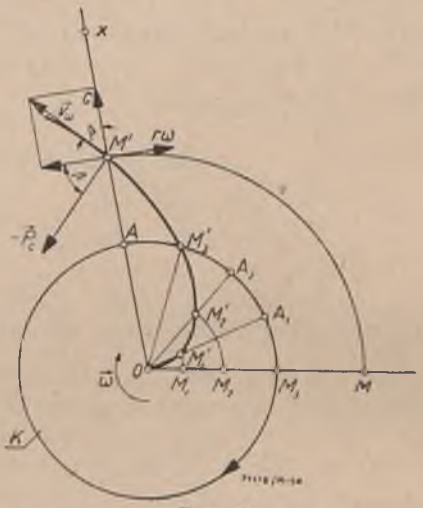
§ 35. Przykłady ruchu względnego punktu

A. Tory cząstek wody przepływającej przez wirnik turbiny o osi pionowej są wyznaczone kształtem łopatek przedstawionych na rysunku 53. Prędkością unoszenia jest tutaj prędkość obwodowa $\vec{u}$ koła turbinowego. Cząstka M wypływa dołem z prędkością względną $\vec{w}$ styczną do łopatki. A zatem prędkość bezwzględna z jaką cząstka wody opuszcza turbinę $\vec{c} = \vec{w} + \vec{u}$, co uwidoczniono na rysunku.



Rys. 53.

B. Nad krążkiem K obracającym się jednostajnie około osi pionowej z prędkością kątową $\vec{\omega}$ w kierunku wskazówek zegara (rys. 54) porusza się ze stałą prędkością c punkt M



Rys. 54.

(przedstawiony na przykład końcem ołówka dotykającym powierzchni krążka) wzdłuż prostej OX przechodzącej przez jego środek O. Prędkością bezwzględną $\vec{v_b}$ jest zatem $\vec{c}$ o kierunku OX, a wartością prędkości unoszenia w miejscu M krążka jako ruchomego układu odniesienia jest $r\omega$ przy $r = OM$. Ponieważ kierunek prędkości unoszenia jest prostopadły do promienia, przeto dodanie wektorowe prędkości bezwzględnej do przeciwnie wziętej prędkości unoszenia daje prędkość względną v_w jako przekątną prostokąta o bokach c i $r\omega$, czyli

$$v_w = \sqrt{c^2 + r^2\omega^2}. \qquad [112]$$

Równaniami ruchu względnego punktu we współrzędnych biegunowych są

$$r = ct \qquad \varphi = \omega t.$$

Rugując z nich czas znajdujemy $r = \frac{c}{\omega} \varphi$, jako równanie toru względnego. Jest nim *spiralna Archimedesa.*

Kąt β, jaki prędkość względna v_w tworzy z promieniem r, określa równanie:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r \omega}{c} = \varphi , \qquad [113]$$

z którego zarazem łatwo odczytać konstrukcję stycznej do spiralnej *Archimedesa.*

Przechodząc do przyśpieszeń widzimy, że w przypadku rozpatrywanym jest $\vec{p_b} = 0$, a więc przyśpieszenie względne $\vec{p_w}$ będzie równe sumie wektorowej przyśpieszeń unoszenia p_u i *Coriolisa* $\vec{p_c}$ wziętych w kierunku przeciwnym. Otóż przyśpieszenie unoszenia ma wartość liczbową $r \omega^2$ i jest skierowane ku O. Przyśpieszenie *Coriolisa* zaś ma wartość $2 v_w \omega$, ponieważ $\vec{v_w}$ jest prostopadłe do $\vec{\omega}$, a więc $\sin(\vec{v_w}, \vec{\omega}) = 1$ i jest skierowane wzdłuż normalnej zewnętrznej toru względnego.

Gdy odwróciwszy kierunki obu przyśpieszeń zrzutujemy je na normalną i styczną do toru względnego, to otrzymujemy:

$$p_{wn} = 2 v_w \omega - r \omega^2 \sin \beta \qquad [114]$$
$$p_{wt} = r \omega^2 \cos \beta .$$

Uwzględniając wyrażenia [112] i [113] oraz wynikające z [113] wzory:

$$\sin \beta = \frac{r \omega}{v_w} , \quad \cos \beta = \frac{c}{v_w} , \text{ znajdujemy wreszcie}$$

$$p_w^2 = p_{wn}^2 + p_{wt}^2 = \omega^2 (4 c^2 + r^2 \omega^2) . \qquad [115]$$

Ażeby jeszcze nakreślić *tor względny*, czyli miejsce punktów, które kolejno pokrywa punkt M uważajmy, że w chwilach t_1, t_2, t_3, w których punkt M zajmuje kolejno położenia M_1, M_2, M_3 ... na prostej OX, pokrywają tę prostą coraz inne promienie krążka OA_1, OA_2 ... Ich położenie początkowe znajdziemy odmierzając kąty XOA_1, A_1OA_2 . . . proporcjonalne

do przedziałów czasu t_1, $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$ . . . w kierunku przeciwnym kierunkowi obrotu krążka. Gdy te przedziały przyjmiemy dla wygody równe, to odpowiednie drogi OM_1, M_1M_2 . . . i kąty XOA_1, A_1OA_2, będą także równe. Zakreślając z O promieniami OM_1, OM_2 . . . łuki aż do przecięcia się z promieniami odpowiednimi krążka, wyznaczymy punkty M_1', M_2', . . . toru względnego w jego położeniu początkowym (względem układu odniesienia, tj. płaszczyzny rysunku). Przy kreśleniu należy oczywiście pamiętać, że odcinek $OM_1 = M_1M_2 \ldots = c\,\Delta t$, jeżeli c jest prędkością bezwzględną punktu M, a Δt odpowiednim przedziałem czasu, zaś $\sphericalangle XOA_1 = \sphericalangle A_1OA_2 = \ldots = \omega\,\Delta t$.

36. Ruch względny dwu ciał

Gdy znamy ruchy każdego z dwu ciał C_1 i C_2 względem danego układu odniesienia U, czyli jak się także wyrażamy, ich ruchy bezwzględne, to często zachodzi pytanie, jaki jest ruch ciała C_2 względem C_1, albo C_1 względem C_2. Każdy z nich nazywamy ruchem względnym. Na to pytanie odpowiemy najłatwiej w przypadku prostym a ważnym, gdy ruchy bezwzględne obu ciał są obrotami chwilowymi około osi równoległych z prędkościami kątowymi $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ w kierunkach przeciwnych. Takimi ciałami są (rys. 55) pary kół zazębionych, które mogą być rozmaitej postaci, zależnie od tego, czy stosunek $\omega_1 : \omega_2$ ma być stałym, czy też okresowo zmiennym. Szukając pól prędkości dla każdego z ciał, otrzymujemy kołowe linie prędkości $v_1 = \omega_1 r_1$ dla ciała C_1 o środkach osi O_1 i promieniach r_1 oraz kołowe linie prędkości $v_2 = \omega_2 r_2$ dla ciała C_2 o środkach na osi O_2 i promieniach r_2. Punkty leżące na prostej O w płaszczyźnie obu osi O_1 i O_2 będą miały w każdym z ciał prędkości jednakowe, jeżeli promienie r_1 i r_2 spełnia równanie $r_1\,\omega_1 = r_2\,\omega_2$. Wtedy oczywiście prędkość względna obu

Rys. 55.

ciał jest w tym miejscu (tj. we wszystkich punktach na prostej O) równa zeru. Stąd wynika, że ruch chwilowy ciała C_2 względem C_1 jest obrotem tego ciała około osi O związanej chwilowo z ciałem C_1. Prędkość kątowa tego obrotu względnego ma przeto wartość liczbową $\omega_1 + \omega_2$, a zwrot ten sam co ω_2. Nawzajem prędkość kątowa obrotu ciała C_1 względem C_2 ma wartość liczbową $\omega_1 + \omega_2$, a zwrot wspólny z ω_2.

Gdy stosunek prędkości kątowych $\omega_1 : \omega_2$ jest stały, to ruch względny ciał C_1 i C_2 jest toczeniem się po sobie centrodyj kołowych o promieniach r_1 i r_2, stykających się w danej chwili zewnętrznie w punkcie O. Ruch taki wykonywują koła zazębione zwykłe o osiach O_1 i O_2, a promieniach teoretycznych r_1 i r_2.

Rys. 56.

Przy stosunku $\omega_1 : \omega_2$ zmieniającym się z czasem, obie centrodie nie są łukami kołowymi, lecz mają postać taką, jaką nadajemy tarczom zazębiającym się nawzajem, aby wywołać stosowną zmienność prędkości kątowych. Jako przykład przytoczymy parę tarcz eliptycznych (rys. 56).

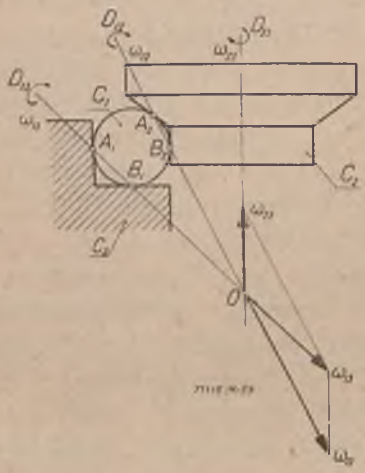
Gdy prędkości kątowe obu ciał są zgodne (rys. 57) i np. $\omega_2 > \omega_1$, to obrót chwilowy względny zachodzi około osi O równoległej do O_1 i O_2, przy czym $r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2$. Prędkością kątową względną ciała C_1 względem C_2 jest $\omega_2 - \omega_1$, a prędkością kątową ciała C_2 względem C_1 jest $\omega_1 - \omega_2$.

Rys. 57.

Przy stałym stosunku $\omega_1 : \omega_2$ jest rozpatrywany ruch względny ciał C_1 i C_2 toczeniem się po sobie centrodyj kołowych o promieniach r_1 i r_2 stykających się w chwili rozpatrywanej wewnętrznie w punkcie O. Odpowiednie koło zębate o promieniu r_1 ($> r_2$) musi mieć oczywiście zęby od strony wewnętrznej. Przy zmiennym stosunku $\omega_1 : \omega_2$ są centrodie krzywymi różnymi od okręgów. W wykonaniu praktycznym odpowiadają

im również tarcze niekołowe. Jedna z nich o mniejszej prędkości kątowej ma również zęby od strony wewnętrznej.

Jako drugi przykład weźmiemy obroty kulek stalowych C_1 (rys. 58) toczących się po panewce stałej C_2 i po czopie C_3, opatrzonym stożkiem o kącie takim, aby osie obrotu kulki względem panewki i względem czopa przecinały się na jego osi obrotu. Odpowiednie prędkości kątowe względne są uwidocznione na rysunku.



Rys. 58.

Biorąc pod uwagę ogólny przypadek ruchu względnego dwu ciał C_1 i C_2, których ruch w układzie odniesienia U jest określony polem prędkości $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, stwierdzimy bez trudności, że ruch ciała C_2 względem U może być uważany za ruch wypadkowy dwu ruchów. Jednym z nich jest ruch C_1 względem U, a drugim ruch szukany C_2 względem C_1. Pole prędkości tego drugiego ruchu oznaczymy przez $\vec{v}_{2,1}$. Stosownie do wyniku § 26 jest więc $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{2,1}$ a stąd

$$\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 . \qquad [116]$$

To równanie wyraża, że prędkość dowolnego punktu M ciała C_2 względem ciała C_1 (jako układu odniesienia) jest wypadkową dwu prędkości; jedną jest prędkość $\vec{v}_2$ tego punktu względem układu U (obranego za bezwzględny), a drugą jest przeciwnie wzięta prędkość $\vec{v}_1$ t j. taka, jaką by otrzymał punkt M, gdyby był chwilowo połączony niezmiennie z ciałem C_1 (inaczej mówiąc przeciwnie wzięta prędkość unoszenia w ciele C_1).

Stąd wynika następujące prawidło wyznaczenia ruchu względnego dwu ciał sztywnych, których ruchy bezwzględne są znane:

Udzielamy w myśli ciału C_2 ruchu chwilowego wprost przeciwnego temu, jaki posiada ciało C_1, a złożywszy go z ruchem bezwzględnym ciała C_2, otrzymujemy jako ruch wypadkowy ruch ciała C_2 względem C_1.

Część druga

DYNAMIKA

Rozdział I

PODSTAWY DYNAMIKI TEORETYCZNEJ

37. Zasada bezwładności

Przechodząc od kinematyki do dynamiki napotykamy jako pojęcie podstawowe wprowadzone już dawniej w statyce, pojęcie *siły*, a nadto pojęcie *masy* ciała określone przez *I. Newtona* jako „ilość materii" zawartej w ciele, wreszcie pojęcie elementarne *punktu materialnego*, wprowadzone na wstępie.

Pojęcie punktu materialnego upraszcza bardzo opis matematyczny ruchu. Ruch chwilowy ciał o wymiarach skończonych jest, jak wiadomo z kinematyki, ogólnie określony prędkością składowego ruchu postępowego $\vec{v}$ i prędkością kątową $\vec{\omega}$ składowego ruchu obrotowego dokoła osi, którą można zawsze tak obrać, by przechodziła przez wnętrze ciała. A więc w ogóle prędkości liniowe różnych punktów ciała są różne. Ponieważ jednak odległości punktów na powierzchni ciała od osi obrotu są zawsze mniejsze od jego największego wymiaru liniowego a, przeto wartości skrajne prędkości punktów ciała są mniejsze od $v + a\omega$, zaś większe od $v - a\omega$. Gdy więc rozmiary ciała maleją, to muszą maleć i różnice między prędkościami poszczególnych punktów ciała (oczywiście przy założeniu, że prędkość kątowa obrotu jest skończona). Z tego wynika, że stan ruchu punktu materialnego, otrzymanego przez zmniejszenie jego wymiarów do granicy zerowej bez zmiany masy m, jest dostatecznie określony jego prędkością lub przyśpieszeniem liniowym.

Uczeni z przed XVII stulecia szukali daremnie bezpośredniego związku między wielkością siły wywołującej ruch, a prędkością uzyskaną przez punkt materialny. Dopiero w epoce *Galileusza* na podstawie badań doświadczalnych i obserwacji ustaliło się przekonanie, że stan ruchu jednostajnego i prostoliniowego swobodnej cząstki materialnej nie wymaga działania żadnej siły, albo też odbywa się pod działaniem takich sił, które są w równowadze, tzn. takich, które działając na cząstkę będącą w spoczynku nie wprawiłyby jej w ruch. Wynik ten ujął *Newton* w prawo podane w początkach fizyki, noszące nazwę *zasady bezwładności materii*, która w wysłowieniu współczesnym brzmi: Punkt materialny swobodny, na który nie działają żadne siły, pozostaje w stanie ruchu jednostajnego i prostoliniowego lub w spoczynku tak długo, dopóki jakaś siła zewnętrzna stanu tego nie zmieni.

Zasadę bezwładności postawił *Newton* na czele sformułowanych przezeń *„leges motus"* tzn. *praw ruchu*, czyli *praw podstawowych dynamiki teoretycznej*, chociaż wysłowił je mniej ściśle pisząc: „Omne corpus perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare". Znaczy to dosłownie: „Każde ciało trwa w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego, dopóki siły nań działające stanu tego nie zmienią"*.

Z zasady bezwładności wynika, że gdy siła, która ze stanu spoczynku wprawiła punkt materialny w ruch i w pewnej chwili, kiedy prędkość ruchu osiągnęła wartość $\vec{c}$ przestała działać, to ten punkt materialny porusza się dalej z prędkością stałą $\vec{c}$. Tak np. kawałek lodu położony na zamarzniętej tafli gładkiej jeziora i wprawiony w ruch siłą uderzenia końcem

* Nieścisłość tego wysłowienia znika, gdy zamiast „ciała" wstawimy „punkt materialny". Zobaczymy nadto, że ciało może być w ruchu obrotowym, chociaż nań nie działają żadne siły, albo też gdy siły nań działające się równoważą.

stopy, porusza się dalej z prędkością nabytą, wprawdzie nie zupełnie jednostajnie, ale powolne i nieznaczne zmniejszanie się jego prędkości ruchu prostoliniowego objaśniamy działaniem *sił tarcia*, czyli oporu skierowanego w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu. Chociaż więc w warunkach ziemskich nie potrafimy urzeczywistnić ruchu bezwładnościowego całkiem ściśle z powodu wszechobecności oporów ruchu, to jednak doświadczenia pozwalają wykonać w myśli niejako przejście do granicy, na której opory znikają.

Zasada bezwładności domagała się kategorycznie uzupełnienia, które dostarczył *Newton*. Jest bowiem rzeczą jasną, że zasada bezwładności nie może obowiązywać w każdym układzie odniesienia. Skoro bowiem sprawdzimy ją, dajmy na to, w układzie A, to nie może być słuszną w układzie B, jeżeli układ ten porusza się względem A ruchem postępowym niejednostajnym, albo obraca się względem niego, choćby tylko jednostajnie. Ruch punktu materialnego jednostajny i prostoliniowy względem układu A przestaje być takim w ogóle gdy go odniesiemy do układu B.

Dlatego *Newton* uzupełnił prawo bezwładności postulatem *przestrzeni bezwzględnej*, grającej rolę właściwego *układu bezwzględnego*, czyli *bezwładnościowego*, tj. takiego, w którym obowiązuje prawo bezwładności. Trudności, o których była mowa na wstępie, ominięto w dalszym rozwoju dynamiki newtonowskiej założeniem, że z dokładnością wystarczającą nie tylko na ziemi, ale i w całym wszechświecie, można układ bezwładnościowy związać z układem pewnych gwiazd stałych, których wzajemne położenie, jak stwierdzają pomiary astronomiczne, nie zmienia się dostrzegalnie od wielu stuleci.

Układ odniesienia bezwładnościowy (nazwany przez *Newtona* bezwzględnym) nazywają teraz częściej *układem galileuszowym*. Znalazłszy jeden układ galileuszowy G przekonamy się łatwo, że każdy inny układ odniesienia, który względem G porusza się ruchem postępowym prostoliniowym i jednostajnym, jest również układem galileuszowym. Dlatego pod-

czas ruchu postępowego i prostoliniowego statku odbywają się wszelkie zjawiska mechaniczne dla podróżnych tak samo jak na ziemi, bez względu na to, jaka jest prędkość statku.

Zmianę dostrzegają jednak podróżni natychmiast, gdy statek „zmienia kurs", tj. zakrzywia swój tor, albo zmienia wartość prędkości.

Zarazem widzimy, że z powodu obrotu dziennego ziemi względem gwiazd stałych ziemia nie jest, biorąc ściśle, układem galileuszowym. *Galileusz* nie dostrzegł tego z powodu bardzo małej prędkości kątowej ziemi i małej dokładności pomiarów jakie wykonywał, ale *Newton* już przewidział doświadczenia, które to mogły wykazać. Doświadczenia te poznamy w dalszym ciągu.

38. Prawo podstawowe dynamiki Newtona

W podstawowym prawie dynamiki ujął *Newton* zależność przyśpieszenia $\vec{p}$ punktu materialnego od siły $\vec{P}$ nań działającej masy m w postaci

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{P}, \quad \text{albo } m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P}, \text{ albo wreszcie } m\vec{p} = \vec{P}. \quad [117]$$

Wyrażenie $m\vec{v}$ jest wektorem o kierunku prędkości $\vec{v}$ i nosiło dawniej nazwę „ilości ruchu" (quantitas motus). Teraz używamy nazwy krótszej — *pęd*. Równanie powyższe wyraża zatem, że prędkość zmiany pędu punktu materialnego jest proporcjonalna względem siły tę zmianę wywołującej.

W postaci drugiej wysłowimy prawo *Newtona* zdaniem:

Siła $\vec{P}$ jest równa iloczynowi masy m punktu materialnego swobodnego przez przyśpieszenie $\vec{p}$ jakiego udziela temu punktowi.

Prawo powyższe stoi obecnie na czele *dynamiki klasycznej*, czyli newtonowskiej (chociaż *Newton* umieścił je po zasadzie

bezwładności jako drugie prawo), gdyż prawo bezwładności wynika zeń poprostu jako wniosek. Skoro bowiem podstawimy $\vec{P} = 0$, to stosownie do równania [97] jest $\vec{p} = 0$, czyli gdy nie ma siły, to nie ma i przyśpieszenia, a więc $\vec{v} = \text{const.}$, czyli punkt materialny porusza się jednostajnie po linii prostej.

Prawo podstawowe mieści w sobie nadto ścisłe określenie masy m punktu materialnego, występującej jako współczynnik skalarowy w równaniu *Newtona*. Zważywszy bowiem, że statyka dostarczyła metody mierzenia sił, możemy obserwować działanie jednej i tej samej siły $\vec{P}$ na różne punkty materialne, a stwierdziwszy, że $\vec{P}$ udziela każdemu z nich różnego przyśpieszenia, a więc pierwszemu przyśpieszenia $\vec{p}_1$, drugiemu $\vec{p}_2$, ... itd., wyznaczymy wielkości ich mas m_1, m_2, ... z równ-

$$m_1 \vec{p}_1 = m_2 \vec{p}_2 = \ldots = \vec{P}. \qquad [118]$$

A zatem masa punktu materialnego jest skalarem dodatnim, równym ilorazowi wartości bezwzględnej siły przez wartość bezwzględną przyśpieszenia, jakie ta siła udziela temu punktowi materialnemu.

Podstawowe prawo *Newtona* pozwala również wysnuć jako wniosek znaną już ze statyki zasadę składania sił działających na dany punkt, zwaną dawniej zasadą *równoległoboku sił*, a obecnie *zasadą dodawania wektorowego* (geometrycznego) sił, działających na dany punkt*.

---

*) W piśmiennictwie naszym spotyka się zwykle zamiast powyższego wyrażenia dwa wyrażenia następujące: 1) siły *przyłożone* do danego punktu, 2) siły *zaczepiające* dany punkt, albo siły *zaczepione* w danym punkcie. Punkt zaś, na który siła działa, nazywają albo *punktem przyłożenia siły*, albo też jej *punktem zaczepienia*. Termin pierwszy powstał pod wpływem języka francuskiego (point d'application), angielskiego (point of application) i rosyjskiego (toczka priłożenja); drugi zaś o zabarwieniu militarnym, jest spolszczonym terminem niemieckim „Angriffspunkt".

Książka niniejsza unika obu terminów, jako zbyt niewolniczo tłumaczonych z języków obcych, stosując natomiast konsekwentnie zrozumiałe dla każdego bez objaśnień wyrażenia: *siła działająca na dany punkt* i punkt, na który siła działa, a w skrócie — *punkt działania siły*.

Opierając się na wynikach kinematyki, że przyśpieszenie wypadkowe $\vec{p}$ punktu, któremu udzielono jednocześnie przyśpieszeń $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots \vec{p}_n$ jest sumą wektorową (geometryczną) tych przyśpieszeń składowych, tzn.

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n,$$

mnożymy to równanie obustronnie przez masę m punktu materialnego i otrzymujemy:

$$m\vec{p} = m\vec{p}_1 + m\vec{p}_2 + \ldots + m\vec{p}_n.$$

Tutaj $m\vec{p}_1$ jest według prawa *Newtona* równe sile $\vec{P}_1$, która by działając na punkt materialny o masie m udzieliła mu przyśpieszenia $\vec{p}_1$ itd. $m\vec{p}$ zaś określa siłę $\vec{P}$, udzielającą punktowi materialnemu o masie m przyśpieszenia $\vec{p}$. A zatem

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n, \qquad [119]$$

co wyraża prawo dodawania wektorowego sił działających na dany punkt materialny.

39. Prawo działania i przeciwdziałania (prawo akcji i reakcji)

Prawo działania i przeciwdziałania umieszczone przez *Newtona* na trzecim miejscu, wyrażamy obecnie w słowach:

Jeżeli na punkt materialny m_1 działa siła $\vec{P}$, przedstawiająca działanie na ten punkt drugiego punktu materialnego m_2, to nawzajem punkt materialny m_1 działa na punkt m_2 z siłą $-\vec{P}$, tzn. równą liczbowo, a co do kierunku wprost przeciwną, przy czym wektory obu sił leżą na prostej łączącej m_1 z m_2.

Możemy to samo wyrazić zwięźlej, gdy wyróżnimy jeden z punktów materialnych m_1 i m_2 jako siedzibę sił $\vec{P}$ i $-P$, określających ich działanie wzajemne. Wtedy mówimy np., że siła $\vec{P}$ określa *działanie* punktu materialnego m_2 na m_1, a siła $-\vec{P}$ określa *przeciwdziałanie* punktu m_1 na m_2. A więc:

Każdemu działaniu odpowiada równe mu liczbowo, a wprost przeciwne co do kierunku przeciwdziałanie.

Obydwa prawa *Newtona* przedstawione powyżej, zarówno jak zasada bezwładności, mogą być ściśle ważne tylko dla układów odniesienia galileuszowych. Zobaczymy jednak, że dla *układów względnych*, tzn. takich, które posiadają przyśpieszenie ruchu postępowego, albo obracają się względem układów galileuszowych, pozwala zastosowanie praw kinematyki na uzupełnienie równań wyrażonych prawami *Newtona* do ścisłego ujęcia praw ruchu w każdym zagadnieniu dynamicznym.

40. Prawo ciążenia powszechnego (prawo grawitacji)

Obok praw podstawowych dynamiki zawdzięczamy geniuszowi *Newtona* odkrycie prawa mówiącego, że *siła ciężkości* znana nam od czasów niepamiętnych z obserwacyj na powierzchni naszej ziemi jest objawem własności wszelkich cząstek materii we wszechświecie, a mianowicie, że:

Jakikolwiek punkt materialny o masie m_1 przyciąga każdy inny punkt materialny m_2 z siłą, której wielkość jest wprost proporcjonalna względem mas obu punktów, a odwrotnie względem kwadratu ich odległości wzajemnej r. Działanie jest (stosownie do prawa wzajemności działania) wzajemne, a wektory sił przyciągania $\vec{P}$ i $-\vec{P}$ leżą na prostej łączącej oba punkty.

Newton przewidywał możliwość, że masy określone tym prawem ciążenia powszechnego mogą nie być identyczne z masami określonymi prawem podstawowym dynamiki i dlatego wykonywał staranne doświadczenia z wahadłami o głównych częściach sporządzonych z różnych materiałów. Badania te utwierdziły go w przekonaniu, że masy występujące w równaniach podstawowych dynamiki mogą być wyrażone tymi samymi liczbami co masy w równaniu wyrażającym prawo ciążenia powszechnego. Dlatego napisał je w postaci:

$$P = C \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad [120]$$

gdzie P oznacza wartość liczbową sił przyciągania punktów materialnych o masach m_1 i m_2 i wzajemnej odległości r, a C jest współczynnikiem stałym. Ten współczynnik jest konieczny ze względu na wymiar siły P różny od wymiaru wyrażenia $m_1 m_2/r^2$. *Masę* występującą w równaniu podstawowym *Newtona* nazywamy *masą bezwładną*, a masę wchodzącą w równanie grawitacyjne *Newtona* [120], *masą grawitującą (ciążącą)*. Widzimy więc, że *Newton* stwierdził identyczność obu mas, z czego dopiero w naszym stuleciu *A. Einstein* wysnuł konsekwencje wielkiej doniosłości dla mechaniki relatywistycznej.

Prawo ciążenia powszechnego tłumaczy w przeważającej części zjawisko siły ciężkości na powierzchni ziemi. Siła ta działając na swobodny punkt materialny udziela mu, jak wskazał już *Galileusz*, przyśpieszenia $\vec{g}$ skierowanego pionowo w dół, którego wartością przybliżoną w Polsce jest **981 cm/sek²**. Siła ciężkości jest bowiem głównie wypadkową z sił przyciągania punktu materialnego przez wszystkie cząstki ziemi, a jak można dowieść (zgodnie z doświadczeniami) wypadkowa ta przechodzi (z wielkim przybliżeniem) przez środek ziemi. Wobec rozmiarów kuli ziemskiej, olbrzymich w porównaniu do przestrzeni zajętej nawet przez duży gmach, uważamy w przybliżeniu kierunki siły ciężkości, tj. kierunki

pionowe * w przestrzeni np. laboratorium za równoległe, a wartość siły ciężkości za równą $m\vec{g}$. Nazywamy ją *ciężarem* punktu materialnego. Biorąc ściśle kierunek $\vec{g}$, czyli kierunek pionowy, zbacza nieco od kierunku promienia ziemi w miejscu rozpatrywanym, a to z powodu obrotu ziemi w układzie bezwzględnym (patrz § 66).

41. Mierzenie mas i sił

Poznawszy treść podstawowych praw dynamiki zajmiemy się przede wszystkim nowymi wielkościami, z jakimi nie mieliśmy do czynienia w kinematyce, tj. *masą* i *siłą*, obierzemy dla nich jednostki i podamy sposoby ich mierzenia. Ponieważ wszelkich pomiarów dokonywamy na ciałach o wymiarach skończonych, przeto wpierw należy określić, co rozumiemy przez masę takiego ciała. Otóż badania fizykalne wykazały niezbicie, że każde ciało materialne jest właściwie układem niezmiernie wielkiej, ale skończonej ilości cząstek zwanych *drobinami* (molekułami), złożonych z jeszcze mniejszych części, zwanych *atomami*. Cząstki te są przy tym bardzo małe w porównaniu do ich wzajemnej odległości i pozostają ciągle w ruchu tym szybszym, im wyższa jest temperatura ciała. Ruchy atomów w ciałach stałych i cieczach mają charakter okresowy, tak iż ich średnie odległości wzajemne pozostają przy stałej temperaturze niezmienione, dając na pozór wrażenie, że ciało stałe jest bryłą geometryczną wypełnioną w sposób ciągły materią. Z tego powodu możemy ciała materialne traktować w teorii w przybliżeniu zwykle zupełnie

---

* Linie i płaszczyzny pionowe w mowie potocznej nazywają niewłaściwie „prostopadłymi", każąc niejako domyślać się ich prostopadłości do linii i płaszczyzn poziomych. Tej dwuznaczności należy unikać stosując przymiotnik „prostopadły" tylko w znaczeniu geometrycznym kierunków tworzących ze sobą kąt prosty, a zatem nazywając ścianę skalną tak stromą, że jest prostopadłą do poziomu, ścianą pionową, a nie „prostopadłą".

wystarczającym, jako zbiory niezmiernie wielu punktów materialnych o stałych odległościach między punktami sąsiednimi, albo też, w przybliżeniu również wystarczającym, jako bryły geometryczne wypełnione materią ciągłą.

Masę ciała można więc określić albo przez sumę mas wszystkich jego drobin jako punktów materialnych, albo też jako sumę mas wszystkich elementów jego objętości, na które dzielimy w myśli całe ciało.

Ciało zwiemy *jednorodnym* *, jeżeli dowolnie obrane części tego ciała o równej objętości posiadają równą masę; w razie przeciwnym nazywamy ciało *niejednorodnym*. A zatem masa ΔM dowolnej części ciała jednorodnego jest proporcjonalna względem objętości ΔV tej części czyli iloraz $\Delta M : \Delta V$ jest dla ciała jednorodnego wielkością stałą. Iloraz ten określa zarazem masę jednostki objętości danego ciała i nazywa się jego *gęstością* μ. Znając objętość V i gęstość μ ciała jednorodnego można obliczyć jego masę M ze wzoru

$$M = \mu V. \qquad [121]$$

Jeżeli ciało (uważane za bryłę geometryczną wypełnioną materią w sposób ciągły) nie jest jednorodne, to iloraz $\Delta M : \Delta V$ nie jest wielkością stałą. Jego wartość nazywamy *gęstością średnią* w części o objętości ΔV. Skoro jednakże iloraz ten zdąża do granicy określonej, gdy objętość części otaczającej punkt obrany w ciele dąży do zera, to granicę tę pojmujemy jako gęstość ciała w punkcie rozpatrywanym. Mamy zatem równanie:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV} = \mu, \qquad [122]$$

z którego wynika:

$$dM = \mu\, dV.$$

A zatem:

$$M = \Sigma \mu\, dV.$$

---

* *A. Witkowski* używał nazwy: ciało *jednolite*.

Tutaj znak sumowania Σ zastępujemy znakiem całki $\int$ i piszemy:

$$M = \int \mu \, dV. \qquad [123]$$

Ponieważ siła ciężkości udziela każdej cząstce ciała, którego masa jest M, przyspieszenia $\vec{g}$, przeto *ciężar ciała* $\vec{Q}$, czyli siłę ciężkości działającą na masę M, określimy wartością liczbową:

$$\vec{Q} = M\vec{g} \qquad [124]$$

A zatem ciężar ciała w pewnym miejscu ziemi mierzy się iloczynem jego masy przez wartość przyśpieszenia siły ciężkości w owym miejscu.

Uzasadnienie teoretyczne tego twierdzenia zostanie podane w § 73.

Ciało materialne pozostające pod działaniem siły ciężkości nie spada jednak gdy dotyka stałej podstawy, tj. ciała nieruchomego względem ziemi, np. ciało spoczywające na stole. To dowodzi, w myśl podstawowych praw, istnienia oddziaływania podstawy na ciało, czyli siły równoważącej siłę ciężkości. Nawzajem ciało wywiera na podstawę siłę równą i skierowaną przeciwnie, którą nazywamy *naciskiem* na podstawę. Ta siła jest oczywiście identyczna z ciężarem ciała; odczuwamy ją wysiłkiem mięśniowym potrzebnym do utrzymania w spoczynku ciała trzymanego w ręku, tzn. do zapobieżenia jego spadaniu.

Jednostką masy [M] przyjętą w nauce jest masa jednego grama, jak wiadomo już z art. E wstępu. Obrawszy jednostki długości, czasu i masy możemy wszystkie inne wielkości mechaniczne mierzyć jednostkami pochodnymi, złożonymi z trzech powyższych. Przyjęty w nauce międzynarodowej układ jednostek podstawowych: centymetr, gram masy, sekunda (czasu średniego); nazywamy układem cgs. Jednostką siły w tym układzie jest zatem siła, która masie jednego grama nadaje przyśpieszenie 1 cm · sek^{-2}. Wielkość tę nazwano *dyną*. Przy zasto-

sowaniu dowolnych jednostek podstawowych jednostkę siły w ogóle określa równanie wymiarowe:

$$|P| = |M| \cdot |p| = M \cdot L \cdot T^{-2}. \qquad [125]$$

W praktyce stosujemy zwykle inny *układ jednostek podstawowych* zwany *praktycznym* albo *technicznym*. Układ ten różni się od układu c g s zasadniczo tym, że obok jednostek długości i czasu wspólnego pochodzenia, przyjmuje się jako trzecią jednostkę podstawową, jednostkę siły P zamiast masy M. W układzie tym przeto masa jest jednostką pochodną, określoną równaniem wymiarowym:

$$|M| = \frac{|P|}{|p|} = P \cdot L^{-1} \cdot T^2. \qquad [126]$$

czyli masa ma wymiar siły podzielony przez wymiar przyśpieszenia.

Jednostką techniczną siły stosowaną powszechnie w krajach należących do konwencji metrycznej jest ciężar jednego kilograma w Paryżu, albo w jakimkolwiek innym miejscu na ziemi, gdzie przyśpieszenie swobodnego spadania jest równe $g_P = 980{,}665$ cm/sek^2. Ustalenie wartości g było konieczne dla dokładnego określenia tej jednostki, ponieważ wartość przyśpieszenia g zmienia się z szerokością geograficzną miejsca na ziemi (malejąc od bieguna ku równikowi), a także z wysokością nad powierzchnią ziemi (malejąc wraz z oddalaniem się od powierzchni ziemi ku górze). W rachunkach technicznych nie wymagających najczęściej wielkiej dokładności przyjmuje się w zaokrągleniu $g = 981$ cm/sek^2.

Wymieniony wzorzec kilograma służy zatem jednocześnie do określenia tysiąca jednostek masy w układzie c g s oraz jednostki siły w układzie technicznym. Ponieważ obie te jednostki nazywano od dawna w mowie potocznej krótko *kilogramem*, a tylko w przypadkach kiedy trzeba zapobiec nieporozumieniu odróżnia się kilogramy masy od kilogramów siły, przeto przy oznaczeniach skróconych zastosujemy według Polskich Norm (PN) znak kG dla kilograma jako jednostki technicznej siły.

Z powyższego wynika, że w układzie technicznym jednostek jest jednostka masy jednostką pochodną, otrzymaną z podzielenia jednostki siły przez g_P, tj. przez ustaloną powyżej wartość przyśpieszenia ciężkości. A zatem masa ciała ważącego Q kG wyraża się w jednostkach technicznych liczbą otrzymaną z podzielenia Q przez g_P

$$M = \frac{Q}{g_P}. \qquad [127]$$

Wymiarem zaś jednostki masy w układzie technicznym jest $\frac{\text{kG}}{\text{cm/sek}^2} = \text{kG cm}^{-1}\,\text{sek}^2$, albo $\text{kG m}^{-1}\,\text{sek}^2$ itd. zależnie od tego, czy przyśpieszenie g_P wyrazimy w cm/sek², czy też w m/sek² itd.

Co się tyczy stosunku 1 kG jako jednostki technicznej siły do 1 dyny jako jednostki w układzie c g s, to ponieważ siła 1 kG nadaje masie 1000 gramów przyśpieszenie 980,665 cm/sek², przeto

$$1\ \text{kG} = 980665\ \text{dyn}. \qquad [128]$$

42. Pomiar statyczny sił — Siły ciągłe i siły chwilowe

Siły można mierzyć nie tylko przez porównywanie przyśpieszeń, jakich udzielają jednej i tej samej masie, lecz także za pomocą zrównoważenia siłami innymi wielkości znanej. Przyrządy służące do tego celu, zwane *dynamometrami*, grają bardzo ważną rolę w nauce i technice. Najprostsze dynamometry polegają na zjawisku stwierdzonym doświadczalnie, że ta sama siła wywołuje zawsze takie samo wydłużenie (lub ugięcie) sprężyny. Skoro zatem tę sprężynę rozciągamy kolejno zawieszanym ciężarem 1, 2, 3, ... kG i notujemy odpowiednie wydłużenia, to działając na tę sprężynę nieznaną siłą P i mierząc powstałe wydłużenie, wyznaczymy wielkość siły P.

Dzięki temu statycznemu pomiarowi sił równanie podstawowe dynamiki $\vec{P} = m\vec{p}$ nie przedstawia samej tylko prostej matematycznej tożsamości, lecz ma charakter fizykalny rów-

nania warunkowego. Przestrzeń, w której działają pewne siły zależne od miejsca, czyli *pole sił*, możemy badać mierząc statycznie wielkość siły działającej na pewną małą masę próbną w każdym miejscu pola; a oznaczywszy w ten sposób $\vec{P}$ jako funkcję miejsca otrzymujemy z równania podstawowego dynamiki równanie (różniczkowe) ruchu punktu materialnego w rozpatrywanym polu sił.

Z równania określającego podstawowe prawo dynamiki (§ 38) wynika:

$$\mathrm{d}\,(m\vec{v}) = \vec{P}\,\mathrm{d}t. \qquad [129]$$

Wyrażenie różniczkowe $\vec{P}\,\mathrm{d}t$ nazywamy *impulsem elementarnym* (chwilowym) siły $\vec{P}$. Równanie powyższe wyraża więc twierdzenie:

Przyrost elementarny (chwilowy) pędu punktu materialnego równa się w każdym z kolei elemencie czasu dt odpowiedniemu impulsowi elementarnemu siły wyznaczającej ruch tego punktu materialnego.

Sumując wektorowo impulsy elementarne od pewnej chwili t_o w której $\vec{v} = \vec{c}$ do chwili $t = t_o + \tau$, gdzie τ oznacza przedział czasu $t - t_o$, czyli całkując równanie [129] otrzymujemy:

$$m\vec{v} - m\vec{c} = \int_{t_o}^{t} \vec{P}\,dt \qquad [130]$$

co wyraża, że przyrost (wektorowy) pędu w przedziale czasu $\tau = t - t_o$ jest równy impulsowi całkowitemu siły $\vec{P}$ w tym czasie.

Impuls całkowity jest wektorem $\vec{\Pi}$ określonym równaniem

$$\vec{\Pi} = \vec{P}\,\mathrm{d}t. \qquad [131]$$

Siłę nazywamy *ciągłą*, jeżeli działa w ciągu całego ruchu punktu materialnego; taką siłą jest np. siła ciężkości. Niekiedy mamy do czynienia z tzw. *siłami chwilowymi*, jak np. siły uderzenia, które chociaż działają przez krótki czas τ, mogą powodować na małej drodze znaczną zmianę pędu, ponieważ ich wielkość jest znaczna. Nie znając wartości siły $\vec{P}$ ani też przedziału czasu mierzymy wtedy impuls całkowity wartością zmiany pędu pisząc:

$$\vec{\Pi} = m\vec{v} - m\vec{c}. \qquad [132]$$

43. Moment pędu czyli kręt punktu materialnego

Moment pędu względem dowolnie obranego początku C promieni wektorów $\vec{r}$ jest jak wiadomo określony iloczynem wektorowym $m\vec{v} \times \vec{r}$. Prędkość zmiany tej wielkości $\vec{K}$ czyli jej pochodna względem czasu

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v} \times \vec{r}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{r} + m\vec{v} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Ale wyraz $m\vec{v} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0$ jako iloczyn wektorowy czynników równoległych $m\vec{v}$ i $\vec{v}$. A zatem:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{r} = m\vec{p} \times \vec{r} = \vec{P} \times \vec{r} = \mathrm{Mom}_o P.$$

Mamy więc twierdzenie:

Pochodna momentu pędu (krętu) punktu materialnego, czyli jego zmiana czasowa, równa się momentowi sił działających na ten punkt względem tego samego, dowolnie obranego środka momentów.

Doniosłość tego twierdzenia wyjdzie na jaw w kinetyce układów materialnych. Tutaj podkreślimy tylko wniosek następujący:

Suma wektorowa krętów dwu punktów materialnych m_1 i m_2, które poruszają się pod wzajemnym działaniem bez udziału innych sił, jest równa zeru dla każdego środka momentów.

Dowód wynika z własności sił $\vec{P}$ i $-\vec{P}$, leżących na prostej łączącej m_1 z m_2, że ich momenty względem dowolnie obranego punktu O są liczbowo równe, a co do kierunku wprost przeciwnie, czyli, że suma wektorowa

$$\mathrm{Mom}_o \vec{P} + \mathrm{Mom}_o(-\vec{P}) = 0.$$

Jeżeli więc mamy do czynienia z układem dowolnej ilości n punktów materialnych m_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$, to suma wektorowa momentów pędów wywołanych samymi tylko siłami wewnętrznymi układu jest względem każdego dowolnego środka równa zeru.

44. Znaczenie dynamiczne środka masy układu materialnego

Dla układu złożonego z n punktów materialnych o masach $m_1, m_2 \ldots m_n$, których położenia określają współrzędne prostokątne x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$, wyrażono w statyce współrzędne środka masy układu x_o, y_o, z_o, wzorami:

$$x_o = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i} \qquad y_o = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i}$$

$$z_o = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i}. \qquad [133]$$

Wzory te określają zarazem środek sił równoległych, proporcjonalnych względem mas punktów materialnych układu. Można je zastąpić jednym wzorem wektorowym, przedstawiającym promień-wektor środka masy $\vec{r}_0$ w zależności od promieni-wektorów $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_n$, określających położenie punktów materialnych układu, tj.:

$$\vec{r}_o = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (i = 1, 2, 3, \ldots . n) \qquad [134]$$

gdzie $M = \Sigma m_i$ oznacza masę całego układu. Pisząc ten wzór w postaci:

$$M\vec{r}_o = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n \qquad [135]$$

i nazywając wektor $m_i\vec{r}_i$ momentem m_i względem początku O promieni-wektorów, odczytujemy twierdzenie:

Moment masy układu pomyślanej jako skupiona w jego środku masy względem dowolnie obranego punktu O jest sumą wektorową momentów mas wszystkich punktów materialnych układu względem O.

Gdy układ nasz się porusza, to wraz z nim porusza się i jego środek masy z prędkością $\vec{v}_o = \frac{d\vec{r}_o}{dt}$. Różniczkując równanie [135] względem czasu otrzymujemy:

$$M\frac{d\vec{r}_o}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}, \quad \text{czyli} \quad \Sigma m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_o \qquad [136]$$

co wyraża ważne następujące twierdzenie:

Suma wektorowa pędów wszystkich punktów materialnych układu jest równa pędowi całego układu skupionego w jego środku masy.

Różniczkowanie równania [136] daje:

$$M\frac{d^2\vec{r}_o}{dt^2} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}, \quad \text{albo} \quad M\frac{d\vec{v}_o}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

czyli podstawiwszy $\frac{d\vec{v}_o}{dt} = \vec{p}_o$, $\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{p}_i$

otrzymujemy

$$\sum m_i \vec{p}_i = M\vec{p}_o. \qquad [137]$$

Wektor $m_i\vec{p}_i$ określa, jak wiadomo z § 38 siłę $\vec{P}_i$, która by działając na punkt materialny m_i nadała mu przyśpieszenie $\vec{p}_i$, gdyby był swobodny. Wyobraźmy sobie siłę o wartości $-m_i p_i$. Siła ta wraz z siłą $\vec{P}_i$ równoważyłaby się na punkcie materialnym m_i. Siła $-m_i\vec{p}_i$ jest niejako miarą oporu, jaki napotykamy, chcąc udzielić punktowi materialnemu (swobodnemu) przyśpieszenia $\vec{p}_i$. Nazywamy więc tę siłę (pomyślaną tylko) *oporem bezwładności*, albo *reakcją kinetyczną*. Analogicznie pojmujemy wektor $-M\vec{p}_o$ jako *opór bezwładności punktu materialnego o masie M* (a zatem równej masie całego układu), który się porusza z tym samym przyśpieszeniem $\vec{p}_o$, co środek masy układu rozpatrywanego. Równanie [137] wyraża więc, że:

Suma wektorowa oporów bezwładności wszystkich punktów materialnych układu równa się oporowi bezwładności masy całego układu skupionego w jego środku masy.

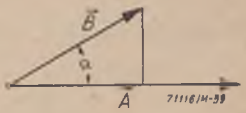
Wyniki powyższe już teraz uwydatniają realne znaczenie teorii ruchu punktu materialnego na pozór zupełnie abstrakcyjnej. Jeszcze lepiej wyjdzie to na jaw w kinetyce układów materialnych.

Rozdział II

PRACA, ENERGIA KINETYCZNA I POTENCJALNA

45. Mnożenie skalarowe dwu wektorów

Iloczyn skalarowy dwu wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ (rys. 59), oznaczony przez $\vec{A}\,\vec{B}$, albo $\vec{A} \cdot \vec{B}$, określamy jako skalar równy iloczynowi wartości bezwzględnych obu wektorów przez cosinus kąta α, oznaczonego przez $(\vec{A}, \vec{B})$, między nimi zawartego.



Rys. 59.

A zatem:

$$\vec{A}\,\vec{B} = A\,B\cos(\vec{A}\,\vec{B}) = A\,B\cos\alpha \qquad [138]$$

Z określenia tego wynika, że mnożenie skalarowe podlega prawu przemienności (w przeciwieństwie do mnożenia wektorowego), więc:

$$\vec{A}\,\vec{B} = \vec{B}\,\vec{A}. \qquad [139]$$

Łatwo się przekonać, że iloczyn skalarowy sumy wektorowej $(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \ldots + \vec{R})$ przez wektor $\vec{W}$ jest równy

$$\vec{A}\,\vec{W} + \vec{B}\,\vec{W} + \vec{C}\,\vec{W} + \ldots + \vec{R}\,\vec{W},$$

czyli, że mnożenie skalarowe podlega prawu rozdzielności.

Dowód: Oznaczmy sumę $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \ldots$ przez $\vec{S}$ i rzutujmy wielobok wektorów dodajników oraz ich sumę na prostą wyznaczoną wek-

torem $\vec{W}$. Wtedy:

$$A \cos (\vec{A}, \vec{W}),\ B \cos (\vec{B}, \vec{W}) \ldots S \cos (\vec{S}, \vec{W})$$

przedstawiają wartości algebraiczne rzutów wektorów $\vec{A}$, $\vec{B}$, ... i $\vec{S}$ na kierunek $\vec{W}$. A zatem:

$$A \cos (\vec{A}, \vec{W}) + B \cos (\vec{B}, \vec{W}) + \ldots = S \cos (\vec{S}, \vec{W}).$$

Mnożąc obustronnie to równanie algebraiczne przez W otrzymujemy

$$A W \cos (\vec{A}, \vec{W}) + B W \cos (\vec{B}, \vec{W}) + \ldots = S W \cos (\vec{S}, \vec{W}),$$

co wyraża zarazem stosownie do określenia iloczynu skalarowego, że

$$\vec{A}\vec{W} + \vec{B}\vec{W} + \ldots = (\vec{A} + \vec{B} + \ldots)\vec{W}. \qquad [140]$$

40. Pojęcie pracy mechanicznej — Praca elementarna

W języku potocznym wyraz *praca* ma znaczenia różne, podczas gdy w mechanice ma znaczenie jedno ściśle określone matematycznie. Dlatego stosujemy często dla tego pojęcia pracy nazwę *praca mechaniczna*, aby wyłączyć nieporozumienia. Praca mechaniczna jest wielkością grającą nader ważną rolę w całej mechanice. Jest ona zależną od siły działającej na punkt materialny i od drogi jaką on opisuje. Przy tym jest rzeczą obojętną, czy punkt materialny, na który siła działa podczas jego ruchu, jest swobodny, czy też nie, np. jako należący do ciała, które się porusza. W przypadku najprostszym, który daje już pewne wyobrażenie o pojęciu pracy, tj. gdy punkt materialny odbywa drogę prostoliniową $\vec{s}$, a siła nań działająca $\vec{P}$ ma kierunek ten sam co $\vec{s}$, to pracę L siły $\vec{P}$ na

drodze $\vec{s}$ wyraża równanie

$$L = Ps, \qquad [141]$$

gdzie P i s oznaczają wartości bezwzględne siły i drogi. To określenie okaże się zgodne z określeniem ogólnym pracy siły $\vec{P}$ zmieniającej się dowolnie podczas ruchu krzywoliniowego punktu, na który działa.

Zanim to określenie sformułujemy, wprowadzimy pojęcie pomocnicze *pracy elementarnej*, tj. *pracy siły* $\vec{P}$ *na przesunięciu elementarnym* $\mathrm{d}\vec{s}$, przy czym siła $\vec{P}$ uważana za stałą jest nachylona do przesunięcia $\mathrm{d}\vec{s}$.

Otóż pracą elementarną $\mathrm{d}L$ siły $\vec{P}$ na przesunięciu $\mathrm{d}\vec{s}$ (pojmowanym jako element drogi) nazywamy iloczyn skalarowy siły przez przesunięcie, czyli:

$$\mathrm{d}L = \vec{P}\,\mathrm{d}\vec{s} = P\,\mathrm{d}s\cos(\vec{P}, \mathrm{d}\vec{s}) \qquad [142]$$

albo jeżeli kąt $(\vec{P}, \mathrm{d}\vec{s})$ oznaczymy przez α:

$$\mathrm{d}L = P\,\mathrm{d}s\cos\alpha. \qquad [143]$$

Widać z tego, że praca elementarna znika w trzech wypadkach: 1. gdy $P = 0$, 2. gdy $\mathrm{d}s = 0$ (tzn. punkt, na który siła działa pozostaje w spoczynku) albo 3. gdy siła $\vec{P}$ jest prostopadła do przesunięcia $\mathrm{d}\vec{s}$.

Gdy α jest kątem ostrym $\left(0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ to praca ele-

mentarna dL jest dodatnią, jeżeli zaś α jest kątem rozwartym $\left(\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}\right)$ to praca jest wielkością ujemną.

Gdy na punkt materialny działają siły $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, . . ., których wypadkową jest $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots$, to z określenia pracy elementarnej wynika, że praca siły wypadkowej jest sumą algebraiczną prac sił składowych.

Podobnie wynika z określenia pracy elementarnej jako iloczynu skalarowego $\vec{P}\,d\vec{s}$, że gdy przesunięcie $d\vec{s}$ jest wypadkowym z przesunięć $d\vec{s}_1$, $d\vec{s}_2$ . . ., o kierunkach różnych, czyli gdy $d\vec{s} = d\vec{s}_1 + d\vec{s}_2 + \ldots$, to

$$dL = \vec{P}\,d\vec{s} = \vec{P}\,d\vec{s}_1 + \vec{P}\,d\vec{s}_2 + \ldots \qquad [144]$$

A więc: praca elementarna siły na przesunięciu wypadkowym jest sumą algebraiczną prac na przesunięciach składowych.

Posługując się metodą analityczną określamy siłę $\vec{P}$ jej trzema rzutami (czyli składowymi) $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, a przesunięcie elementarne $d\vec{s}$ jego rzutami $d\vec{x}$, $d\vec{y}$, $d\vec{z}$. Wtedy praca elementarna dL wyraża się wzorem

$$dL = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz, \qquad [145]$$

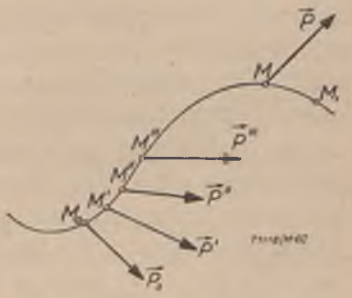
którego uzasadnienie jest bardzo proste. Siła $\vec{P}$ jest sumą wektorową sił $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, a przesunięcie $d\vec{s}$ sumą wektorową $d\vec{x} + d\vec{y} + d\vec{z}$. A zatem praca dL będzie sumą algebraiczną prac sił składowych na przesunięciach składowych. Otóż składowa $\vec{X}$ jako prostopadła do przesunięć $d\vec{y}$ i $d\vec{z}$ daje pracę $\vec{X}\,d\vec{x}$ tylko na przesunięciu $d\vec{x}$ i podobnie składowa $\vec{Y}$ daje $\vec{Y}\,d\vec{y}$, a składowa $\vec{Z}$ tylko $\vec{Z}\,d\vec{z}$.

47. Praca całkowita — Jednostki pracy — Praca w jednostce czasu — Moc

Gdy punkt materialny, na który działa siła $\vec{P}$, w ogóle zmienną, opisuje po torze dowolnym drogę skończoną $\overline{M_0 M_1}$ (rys. 60), to rozłożywszy ruch punktu na przesunięcia elementarne $M_0 M'$, $M' M''$ . . . i oznaczywszy wartości siły $\vec{P}$ na początku każdego przesunięcia, widzimy, że suma iloczynów skalarowych

$$\vec{P}_0 \vec{M_0 M'} + \vec{P'} \vec{M' M''} + \ldots$$

dąży do granicy, którą nazywamy *pracą całkowitą* lub krótko *pracą siły P na drodze* $M_0 M_1$ i określamy wyrażeniem:



Rys. 60.

$$L = \int_{M_0}^{M_1} P \, d\vec{s}, \text{ albo } \quad L = \int_{x_0 y_0 z_0}^{x_1 y_1 z_1} (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \qquad [146]$$

przedstawiającym sumowanie (całkowanie) wzdłuż toru między położeniem początkowym i końcowym. A zatem praca siły dowolnej $\vec{P}$ na drodze dowolnej $\vec{s}$ punktu materialnego rozumiemy sumę algebraiczną prac elementarnych tej siły na przesunięciach $\vec{ds}$, z których się składa tor tego punktu między jego położeniem początkowym a końcowym. Praca ta staje się np. zerem, gdy siła jest wciąż normalna do kierunku ruchu, albowiem wtedy wszystkie prace elementarne są zerami. Jeżeli

$P' = P \cos (\vec{P}, \vec{ds})$ przedstawia rzut siły na styczną do toru, to wzór [146] przyjmie postać:

$$L = \int_{M_0}^{M_1} P' \, ds. \qquad [147]$$

Oczywiście jednostką pracy jest praca jednostki siły na przesunięciu równym jednostce długości, którego kierunek jest zgodny z kierunkiem siły. W układzie jednostek cgs będzie zatem jednostką pracy praca jednej dyny na długości jednego centymetra. Jednostka ta otrzymała nazwę *erg*. Ze względu na to, że erg jest jednostką bardzo małą, wprowadzono nadto jednostkę praktyczną, równą 10 milionom ergów, którą nazwano *joule*, dla uczczenia badacza angielskiego o nazwisku *James Prescott Joule* (1818 — 1889) (brzmiącym po angielsku „dżul").

Bardzo rozpowszechnioną aż do naszych czasów praktyczną jednostką pracy wziętą z układu technicznego jest nadto 1 *kilogramometr* (kGm) tj. praca siły jednego kilograma na długości jednego metra. Ponieważ siła 1 kG = 980 665 dyn (patrz § 41), a 1 m = 100 cm, więc:

1 kGm = 98 066 500 ergów = 9, 80665 joule'ów (dżulów).

W obliczeniach praktycznych zaokrągla się wartość tę na 9,81. Niezależnie od jakichkolwiek jednostek podstawowych określa jednostkę pracy równanie wymiarowe:

$$|L| = |P| \cdot |s| = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}, \qquad [148]$$

gdzie M jest jednostką masy, L jednostką długości, a T jednostką czasu.

Mówiąc o pracy siły na pewnej drodze, wyrażamy się często, że siła wykonywa pracę wzdłuż tej drogi. Ta personifikacja siły tłumaczy się pojęciem pierwotnym pracy mechanicznej człowieka lub innych istot żywych, która polegała na zrównoważeniu siłą mięśni oporów występujących przy poruszaniu ciał. Z tego bardzo dawnego i w mechanice technicznej podstawowego pojęcia wyłoniło się z rozwojem nauki wymienione wyżej ogólne określenie matematyczne pracy siły wzdłuż drogi.

Jeżeli składowa siła wzięta w kierunku ruchu ma wartość stałą P', a ruch punktu na który siła działa jest jednostajny, to oprócz siły P' musi stosownie do prawa podstawowego dynamiki istnieć siła druga Q, równoważąca P', a więc jej równa liczbowo — a co do kierunku przeciwna. Albowiem gdyby nie było siły równoważącej daną siłę P', to ruch nie byłby jednostajny. Tak np. siła konia ciągnącego jednostajnie wóz za pośrednictwem uprzęży jest zrównoważona siłą określoną oporami ruchu, pochodzącymi na drodze poziomej od tarcia, a na drodze pochyłej nadto od odpowiedniej składowej siły ciężkości (jak to dalej rozpatrzymy szczegółowo). Wszystkie te opory sprowadzają się w przypadku ruchu jednostajnego do jednej siły Q, równoważącej siłę pociągową konia P', w punkcie, na który ta siła działa. Praca siły P' na drodze s jest wtedy równa $P's$, a praca „oporu" Q równa się $-Qs$. Suma algebraiczna obu prac jest równa 0, gdyż liczbowo jest $P' = Q$, a więc $P's = Qs$, czyli praca siły jest co do wartości bezwzględnej równa pracy oporu (zobaczymy poniżej, że równość taka zachodzi w każdej maszynie, poruszającej się ruchem jednostajnym).

W rozpatrywanym przypadku ruchu jednostajnego stała siła P' wykonywa pracę rosnącą jednostajnie z czasem t. Koń w przykładzie powyższym występuje jako *silnik* („motor"), tj. *źródło pracy*, które cenimy tym wyżej, im więcej pracy wydaje w jednostce czasu. Pracę wykonaną w jednostce czasu (sekundzie) nazywali u nas fizycy za *A. Witkowskim dzielnością*, a technicy *mocą silnika* *. W ogóle moc w chwili dowolnej t określa wyrażenie:

$$N = \frac{dL}{dt} = P' \frac{ds}{dt} = P' v , \qquad [149]$$

gdzie P' jest wartością składowej siły wziętej w kierunku prędkości ruchu $\vec{v}$ (oczywiście ruchu punktu, na który działa

* Wyraz *moc* wprowadził Komitet Redakcyjny I wydania podręcznika „Technik" (Warszawa, 1905 r.), któremu przewodniczył wybitny inżynier-badacz *Kazimierz Obrębowicz*.

siła, chociaż jak zobaczymy, punkt ten nie zawsze jest widoczny na pierwszy rzut oka).

Mówiąc o mocy silnika mamy zwykle na myśli *moc średnią*, tj. iloraz pracy wykonanej przez silnik przez czas t jego działania.

Jednostką mocy (dzielności) w układzie c g s jest *erg na sekundę*. Ponieważ jednostka ta jest zbyt mała dla celów praktycznych, przeto wprowadzono następujące wielokrotności tej jednostki jako jednostki praktyczne:

$$1 \text{ wat}^{**} = 1 \cdot \frac{\text{dżul}}{\text{sek}} = 10^7 \cdot \frac{\text{ergów}}{\text{sek}} \quad \text{i}$$

$$1 \text{ kilowat, w skrócie } 1 \text{ kW} = 10^{10} \cdot \frac{\text{ergów}}{\text{sek}} = 1000 \cdot \frac{\text{dżulów}}{\text{sek}} \qquad [150]$$

W układzie technicznym jednostek są jednostkami mocy (pracy w jednostce czasu) 1 *kilogramometr na sekundę* (w skrócie 1 kGm/sek) i 1 *koń mechaniczny* = 75 kGm/sek (skrót polski — 1 KM; angielski 1 HP, tj. „horse-power", odpowiada 550 stopo-funtom/sek, czyli 76,04 kGm/sek).

Pomiędzy jednostkami obu układów głównych zachodzą związki następujące:

$$\left.\begin{aligned} &1 \text{ kGm/sek} = 9{,}81 \text{ W}, \\ &1 \text{ KM} = 75 \cdot 9{,}81 \text{ W} = 736 \text{ W} = 0{,}736 \text{ kW}, \\ &1 \text{ W} = \frac{1}{9{,}81} \cdot \frac{\text{kGm}}{\text{sek}} = 0{,}102 \text{ kGm/sek}, \\ &1 \text{ kW} = 102 \text{ kGm/sek} = 1{,}36 \text{ KM}. \end{aligned}\right\} \qquad [151]$$

Wszystkie współczynniki liczbowe są tutaj podane w przybliżeniu stosowanym w praktyce technicznej. Gdyby zaszła potrzeba dokładności większej od 0,03 %, to należałoby 9,81 zastąpić wartością ściślejszą 9,80665 (patrz § 41). Równaniem wymiarowym mocy jest:

$$[N] = \frac{[L]}{[t]} = \text{M} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-3}. \qquad [152]$$

** Na cześć wielkiego inżyniera-badacza angielskiego, którym był *James Watt* (1736 — 1819).

Przykład 1. Ciągnik o mocy 30 KM pokonywa pewien opór z prędkością $v = 1{,}5$ m/sek. Jak wielki jest ten opór?

Odpowiedź. Moc ciągnika w kGm/sek

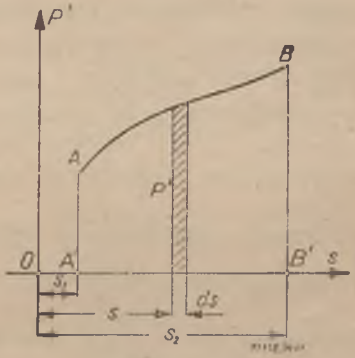
$$N = 30 \cdot 75 = 2250 \text{ kGm/sek.}$$

Wielkość oporu znajdziemy z równania $N = P \cdot v$

$$P = \frac{N}{v} = \frac{2250}{1{,}5} = 1500 \text{ kG}$$

48. Wykres pracy — Indykator

Przedstawmy odpowiadające sobie wartości P' i s (tj. rzutu siły na kierunek ruchu i drogi punktu, na który siła działa, mierzonej od jego położenia początkowego), jako rzędną i odciętą punktów na obranej płaszczyźnie współrzędnych prostokątnych (rys. 61). Punkty te tworzą linię krzywą, wyrażającą przejrzyście zmienność P' podczas ruchu. Element pola tej krzywej objęty dwiema rzędnymi nieskończenie bliskimi mierzy iloczyn $P'ds$, czyli pracę elementarną siły; pole zaś skończone, np. $A'A\ BB'$ mierzy $\int_{s_1}^{s_2} P'ds$, czyli praca całkowita na drodze $s_2 - s_1$. Nakreśloną w ten sposób figurę nazywamy *wykresem* (*diagramem*) *pracy*. Taki wykres ułatwia obliczenie pracy w przypadku, gdy siła P' jest zmienna, zwłaszcza gdy prawo zmienności nie da się ująć w formę matematyczną.



Rys. 61.

Uprzedzając wywody późniejsze wypada już tutaj zaznaczyć, że siły działające na ciała materialne nie zawsze działają na oddzielne cząstki (punkty materialne) ciała, jak np. siła ciężkości, lecz spotykamy często siły działające tylko na powierzchnię ciała, jak np. siła prężności pary, która działa

na powierzchnię wewnętrzną cylindra maszyny parowej i na tłok. *Siły* takie nazywamy *powierzchniowymi* w odróżnieniu od poprzednich, zwanych *siłami masowymi* lub *objętościowymi.*

Siły powierzchniowe są zwykle prostopadłe do powierzchni ciała, na które działają, a wtedy mogą być skierowane ku tej powierzchni, albo też od niej na zewnątrz. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z *naciskiem* na dane pole, czyli z *siłą powierzchniową cisnącą*, w drugim zaś z *siłą powierzchniową ciągnącą* którą możnaby także nazwać *naciągiem* lub *napięciem* na danym polu, chociaż dotychczas nie stosowano pierwszego z tych terminów w naszym piśmiennictwie. Prężność pary wywiera na ściany przestrzeni, w której jest zawarta, siły cisnące, które można zwykle uważać za rozłożone równomiernie co do wielkości na powierzchni, na którą działają. Wtedy określamy taką siłę jej wielkością, przypadającą na jednostkę pola płaskiego, a więc stosownie do układu c g s na 1 cm^2. Nazywamy ją *ciśnieniem* i mierzymy w dynach na cm^2, albo też w układzie technicznym w kG na cm^2. Jednostkę ciśnienia w układzie c g s tj. 1 $\frac{\text{dynę}}{\text{cm}^2}$ nazywają w meteorologii *mikrobarem;* częściej stosowana jest jednostka pochodna 10^6 $\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$, zwana *barem.*

Jednostka ciśnienia w układzie technicznym, tj. 1 $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ nazywa się *nową atmosferą*, gdyż jest zbliżona do atmosfery dawnej, określonej jak wiadomo z fizyki ciśnieniem powietrza atmosferycznego przy normalnym stanie barometrycznym (760 mm słupa rtęci), które wynosi 1,033 $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$. Nadto nowa atmosfera (skrót 1 at) jest równa 1,01325 bara.

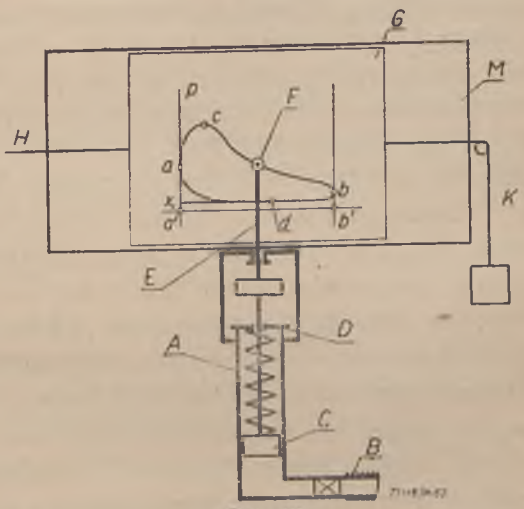
Gdy nacisk nie jest równomiernie rozmieszczony na danym polu, to ciśnienie określamy w elemencie pola dF jako stosunek nacisku elementarnego dN na to pole dF, czyli $\frac{dN}{dF} = p$. Nacisk całkowity na skończone pole płaskie F

otrzymuje się przez sumowanie, czyli całkowanie nacisków elementarnych w postaci:

$$N = \int p \, dF . \qquad [153]$$

Jest to uzasadnione założeniem, że naciski elementarne jako prostopadłe do ściany płaskiej są siłami równoległymi i zgodnie skierowanymi, których wypadkowa jest zwykłą sumą tych sił.

Przy wyznaczaniu nacisku na ścianę zakrzywioną trzeba oczywiście uwzględnić charakter wektorowy ciśnienia $\vec{p}$. Wtedy układ nacisków elementarnych jako sił o różnych kierunkach nie ma w ogóle wypadkowej, lecz sprowadza się do jednej siły i do jednej pary, jak wiadomo ze statyki*.



Rys. 62.

Wykresy pracy silników można otrzymać za pomocą przyrządów zwanych *indykatorami* (od łac. *indico* = wskazuję), które podczas biegu silnika kreślą samoczynnie wykres pracy. Pierwszy indykator zbudowany przez *J. Watta* dla parowej

* Niekiedy można słyszeć, a nawet czytać takie obliczenie. Powierzchnia ciała człowieka dorosłego ma przynajmniej 2 m^2 = 20000 cm^2. Na każdy centymetr kwadratowy naciska powietrze z siłą 1 kG/cm^2, „a więc na całe ciało przypada 20000 kG". Ten rachunek nie ma żadnego sensu naukowego, gdyż powierzchnia ciała nie jest płaszczyzną, lecz jest zakrzywiona, a więc naciski powietrza są różnokierunkowe. Gdy wektory nacisków elementarnych $\vec{p}\,dF$ powietrza atmosferycznego dodamy, jak należy, wektorowo, to otrzymamy dla powierzchni zamkniętej zero, jeżeli wartość p przyjmiemy za stałą. Uwzględniając zaś mały ubytek ciśnienia ze wzrostem wysokości, znajdziemy jako wynik sumowania wektorowego siłę skierowaną w górę równą liczbowo ciężarowi powietrza wypartego przez ciało (prawo *Archimedesa*) a więc bardzo nieznaczną.

maszyny tłokowej, przedstawia schematycznie rys. 62. Mały cylinder *A*, w którym porusza się lekko a szczelnie tłoczek *C*, jest wkręcony końcem *B* do gwintowanego otworu umieszczonego w cylindrze maszyny parowej. Otwór ten jest tak umieszczony, aby tylko przestrzeń po jednej stronie tłoka była połączona z cylindrem indykatora. Na tłoczek *C* ciśnie z dołu para, a z góry sprężyna, opierająca się drugim końcem na stałej zaporze *D*. Ponieważ odkształcenie sprężyny jest proporcjonalne względem działającej siły, więc tłoczek a z nim razem ołówek *E*, umieszczony na końcu trzonka tłokowego *F*, przesuwa się do góry o długości proporcjonalne do ciśnienia pary. Koniec ołówka dotyka tabliczki *G*, która jest połączona z tłokiem maszyny parowej za pomocą cięgna *HK* w ten sposób, aby ruch tłoka wywoływał podobny ruch tabliczki w ramce *M* tam i na powrót. Dopóki dopływ pary do cylindra indykatora jest zamknięty, ołówek zajmuje położenie odpowiadające sile równej 0 i kreśli na tabliczce linię prostą, równoległą do *a'b'* tam i z powrotem. Po otworzeniu dopływu pary przez otworzenie kurka w części *B*, ołówek podnosi się do wysokości proporcjonalnej do każdoczesnego ciśnienia pary na tłoczek indykatora. Podczas skoku tłoka na przód, tj. zgodnie z kierunkiem nacisku pary (siły) ołówek kreśli część wykresu *a c b* ; podczas zaś skoku wstecz, czyli w kierunku przeciwnym sile pary, kreśli ołówek drugą część wykresu, tj. *b d a*. Ale *a' a c b b'* przedstawia pracę dodatnią, a pole *a' a d b b'* pracę ujemną; ich suma algebraiczna, tj. pole *a c b d* jest proporcjonalne względem pracy wykonanej przez parę podczas podwójnego skoku tłoka, czyli podczas jednego obrotu wału korbowego. Aby obliczyć bezwzględną wartość tej pracy, trzeba znać współczynniki proporcjonalności dla siły i drogi. Wiedząc np., że pole przekroju cylindra maszyny wynosi F cm², a do przesunięcia ołówka o 1 cm potrzeba ciśnienia $p_1 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ widzimy, iż rzędne wykresu mierzone w cm należy pomnożyć przez F p_1 aby otrzymać siły. Jeżeli

nadto s oznacza skok tłoka maszyny a s' skok tabliczki, to jednemu cm^2 pola wykresu odpowiada:

$$F\,p_1\,\frac{s}{s'}\ \text{kG cm} = \frac{F\,p_1}{100}\,\frac{s}{s'}\ \text{kGm pracy pary.}$$

49. Praca siły ciężkości

Pracę siły ciężkości oblicza się w sposób nader prosty, gdy ograniczymy się do ruchów odbywających się w przestrzeni niezbyt wielkiej w pobliżu powierzchni ziemi, czyli gdy można przyjąć, że siła ciężkości działająca na punkt materialny o masie m jest określona wektorem stałym $m\vec{g}$, skierowanym pionowo w dół. Wtedy bowiem obrawszy oś Z prostokątnego układu współrzędnych skierowaną pionowo w górę, znajdujemy dla pracy na elemencie jakiegokolwiek toru przy ruchu punktu materialnego wyrażenie:

$$\mathrm{d}L = m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -\,mg\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}\,(-mgz) = -\,\mathrm{d}\,(mgz),\ [154],$$

gdzie $-\mathrm{d}z$ jest rzutem $\mathrm{d}\vec{s}$ na kierunek $\vec{g}$, a więc na oś Z. Jeżeli z_1 oznacza wysokość punktu początkowego toru, a z_2 wysokość punktu końcowego ponad płaszczyzną poziomą XY, przy czym $z_1 > z_2$, to praca całkowita

$$L = -\int_{z_1}^{z_2} mg\,\mathrm{d}z = mg\,(z_1 - z_2) = mgh, \qquad [155]$$

gdzie $h = z_1 - z_2$.

Gdyby ruch odbywał się od z_2 do z_1, to pracę L' siły ciężkości przedstawiałby wzór:

$$L' = -\,mgh. \qquad [156]$$

A zatem praca siły ciężkości na drodze dowolnej między dwoma punktami ustalonymi zależy tylko od różnicy wysokości tych punktów h i równa się $\pm\,mgh$, przy czym

znak + odnosi do ruchu od puntku wyższego do niższego a — do ruchu od punktu niższego do wyższego.

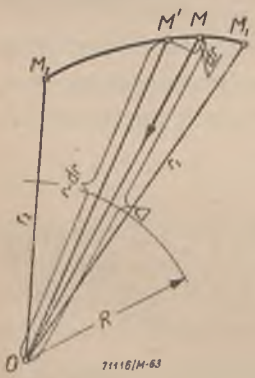
Z tego wynika wprost, że praca siły ciężkości na dowolnym torze zamkniętym punktu materialnego jest równa zeru.

Obliczymy teraz pracę siły ciężkości przy założeniu, że ziemię można uważać za kulę o masie M i promieniu R, przyciągającą każdy punkt materialny zewnętrzny o masie m, odległy od powierzchni ziemi o z, według prawa ciążenia *Newtona*, a więc siłą

$$P = C \frac{M m}{(R + z)^2}, \qquad [157]$$

której kierunek przechodzi przez środek ziemi *.

Niechaj punkt materialny m porusza się (rys. 63) po krzywej dowolnej $M_1 M_2$, np. w kierunku od M_1 do M_2. Jego położenie M w chwili t określi promień-wektor $\vec{r}$ wychodzący ze środka ziemi O. W chwili $t + dt$ określi nowe położenie M' promień $\vec{r} + d\vec{r}$. Rozłożywszy przesunięcie $d\vec{s} = \vec{MM'}$ na składowe w kierunku promienia i prostopadłe do promienia, znajdujemy — dr (z pominięciem nieskończenie małych rzędu wyższego) jako wartość pierwszej składowej. A zatem praca elementarna siły ciężkości $\vec{P}$ równa się pracy tej na samym przesunięciu — dr, albowiem drugie przesunięcie składowe jest prostopadłe do $\vec{P}$. Otrzymamy wtedy uwzględniając, że kierunek przyro-



Rys. 63.

* Pominięto tutaj wpływ obrotu ziemi w układzie bezwładnościowym, który jest stosunkowo nieznaczny.

stu dodatniego $\mathrm{d}r$ jest wprost przeciwny kierunkowi $\vec{P}$

$$\mathrm{d}L = -P\,\mathrm{d}r = -C\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r = \mathrm{d}\left(C\frac{Mm}{r}\right) =$$

$$= -\mathrm{d}\left(-C\frac{Mm}{r}\right). \qquad [158]$$

Całkując w granicach r_1 i r_2 znajdziemy pracę całkowitą L na drodze od M_1 do M_2:

$$L = C\frac{Mm}{r_2} - C\frac{Mm}{r_1} = CMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \qquad [159]$$

Praca ta jest widocznie d o d a t n i a, gdy jak to przyjęto na rysunku jest $r_1 > r_2$, natomiast byłaby ujemna, gdyby było $r_1 < r_2$; wreszcie stałaby się równą zeru, gdyby $r_1 = r_2$. Równanie [159] pozwala nam na wysunięcie analogicznych wniosków do sformułowanych na podstawie równania [156], że praca siły ciężkości jest niezależna od postaci drogi, a tylko od położenia początkowego i końcowego, a na drodze zamkniętej jest równa zeru.

50. Zasada pracy dla ruchu punktu materialnego

Z prawa podstawowego dynamiki wyprowadzimy teraz bardzo ważne twierdzenie, określające związek między ruchem punktu materialnego, a pracą siły warunkującej ten ruch przez jej działanie na rozpatrywany punkt materialny swobodny o masie m. Mamy więc:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P}.$$

Pomnożymy obie strony skalarowo przez przesunięcie elementarne $\mathrm{d}\vec{s}$, jakie punkt materialny opisuje w elemencie czasu $\mathrm{d}t$. A zatem:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \vec{P}\,\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}L$$

Wstawiwszy po stronie lewej $\vec{ds} = \vec{v}\,dt$ napiszemy

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\cdot dt = dL, \quad \text{albo} \quad m\vec{v}\,d\vec{v} = dL.$$

Ale $\vec{v}\,d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v}\right)$, jak łatwo sprawdzić przez różniczkowanie, zaś $\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2$ więc:

$$d\left(\frac{m\,v^2}{2}\right) = dL. \qquad [160]$$

Wynik ten wysłowimy po wprowadzeniu określenia następującego:

Połowę iloczynu z masy punktu materialnego i kwadratu jego prędkości nazywamy energią kinetyczną tego punktu materialnego.

Twierdzenie wyrażone równaniem [160] będzie brzmiało:

Przyrost elementarny (różniczka) energii kinetycznej punktu materialnego swobodnego jest zawsze równy pracy elementarnej sił działających nań podczas ruchu.

Ponieważ sumowanie prac elementarnych między dwoma położeniami poruszającego się punktu materialnego daje pracę całkowitą, a sumowanie przyrostów elementarnych (różniczek) enrgii kinetycznej po stronie lewej równania [160] daje przyrost (algebraiczny) wartości energii kinetycznej od położenia początkowego do końcowego, przeto napiszemy:

$$\frac{m\,v^2}{2} - \frac{m\,c^2}{2} = L, \qquad [161]$$

gdzie c oznacza prędkość początkową, a v — końcową. To równanie przekształcone na

$$\frac{m\,v^2}{2} = \frac{m\,c^2}{2} + L \qquad [162]$$

wyraża, że energia kinetyczna punktu materialnego swobodnego rośnie (lub maleje) pod-

czas ruchu o wartość pracy sił nań działających (zależnie od tego czy ta praca jest dodatnia, czy też ujemna).

Twierdzenie to nosi nazwę *zasady pracy*, albo *zasady energii* i posłuży w dalszym ciągu do rozwiązania szczegółowych zagadnień kinetyki.

51. Energia kinetyczna układów materialnych

Uważając jakikolwiek układ materialny za zbiór punktów materialnych $m_1, m_2 \ldots$, poruszających się z prędkościami $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots$, określamy energię kinetyczną układu jako sumę energii kinetycznych wszystkich punktów materialnych tego układu, co wyraża wzór

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad [163]$$

Weźmy teraz pod uwagę ciało sztywne, którego ruch chwilowy, jak wiadomo z kinetyki, jest złożony z przesunięcia i obrotu. W przypadku samego przesunięcia, względnie ruchu postępowego ciała są prędkości $\vec{v}_i$ wszystkich jego punktów jednakowe i równe np. $\vec{v}$. Wtedy jest

$$E = \tfrac{1}{2} v^2 (m_1 + m_2 + \ldots) = \tfrac{1}{2} M v^2, \quad [164]$$

gdzie M oznacza masę całego ciała.

W przypadku, gdy ruch chwilowy ciała sztywnego jest samym obrotem z prędkością kątową $\vec{\omega}$, prędkości $\vec{v}_i$ punktów tego ciała wyznaczone są co do wartości liczbowej iloczynami $r_i \omega$, jeżeli r_i oznacza długość promienia obrotu punktu m_i. Wtedy równanie [163] przekształca się na:

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2. \quad [165]$$

Występująca tutaj wielkość $\sum_i m_i r_i^2$ zależy widocznie tylko od postaci geometrycznej ciała i rozmieszczenia jego masy względ-

dem danej osi obrotu. Jest to wielkość (skalarowa) zawsze dodatnia, zwana *momentem bezwładności* I ciała względem obranej osi.

Określenie jej równaniem:

$$I = \Sigma m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots m_n r_n^2 \qquad [166]$$

ma charakter czysto geometryczny i jest niezależne od stanu ruchu ciała. W ujęciu słowami przedstawia się to określenie tak:

Moment bezwładności ciała sztywnego względem dowolnie danej prostej l, czyli osi, jest to suma iloczynów mas wszystkich punktów materialnych z jakich ciało jest złożone przez kwadraty ich odległości od tej prostej l.

Równanie [165] napiszemy przeto w postaci:

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad [167]$$

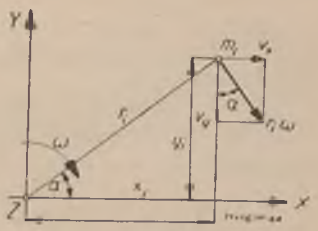
wyrażającej, że energia kinetyczna ciała sztywnego obracającego się z chwilową prędkością kątową ω jest połową iloczynu momentu bezwładności tego ciała względem osi obrotu przez ω^2.

52. Twierdzenie Koeniga o energii kinetycznej ciała sztywnego

Twierdzenie *Koeniga* odnosi się do ruchu chwilowego ogólnego, który można zawsze rozłożyć na obrót ω około osi przechodzącej przez środek masy i przesunięcie z prędkością $\vec{u}$ tegoż środka masy. Obierzmy oś obrotu za oś Z prostokątnego układu współrzędnych. Punkt dowolny m_i ciała odle-

gły od osi Z o r_i ma wskutek obrotu prędkość $r_i \omega$. Rozłożywszy ją na składowe w kierunkach osi współrzędnych (rys. 64) otrzymujemy

$$v_x = r_i \omega \sin \alpha = \omega y_i,$$
$$v_y = -r_i \omega \cos \alpha = -\omega x_i,$$
$$v_z = 0.$$



Rys. 64.

Rozłożywszy tak samo prędkość u na u_x, u_y, u_z, znajdujemy dla rzutów prędkość całkowitej punktu m_i wartości

$$w_x = u_x + \omega y_i$$
$$w_y = u_y - \omega x_i,$$
$$w_z = u_z.$$

Stąd kwadrat prędkości całkowitej punktu m_i

$$v_i^2 = (u_x + \omega y_i)^2 + (u_y - \omega x_i)^2 + u_z^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2\omega u_x y_i - 2\omega u_y x_i + \omega^2 (x_i^2 + y_i^2) = u^2 + r_i^2 \omega^2 + 2\omega (u_x y_i - u_y x_i).$$

A zatem energia kinetyczna całego ciała:

$$E = \frac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Sigma m_i u^2 + \frac{1}{2} \Sigma m_i r_i^2 \omega^2 + \omega \Sigma m_i y_i u_x - \omega \Sigma m_i x_i u_y.$$

Ale dwa wyrazy ostatnie znikają, albowiem

$$\Sigma m_i y_i u_x = u_x \Sigma m_i y_i,$$

a ta ostatnia suma jest równa zeru, gdyż według założenia środek masy leży na płaszczyźnie XZ. Z analogicznego powodu znika także $\Sigma m_i x_i$, wobec czego mamy wreszcie

$$E = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} I \omega^2. \qquad [168]$$

co wyraża, że energia kinetyczna ciała sztywnego jest sumą energii kinetycznej jego ruchu postępowego z prędkością środka masy i energii obrotu około osi przechodzącej przez środek masy.

W przypadku ogólniejszego określenia stanu ruchu ciała ruchem postępowym z prędkością $\vec{u}$ i obrotem $\vec{\omega}$ około osi nieprzechodzącej przez środek masy, otrzymujemy zamiast równania [168] wzór bardziej złożony:

$$E = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \omega \cdot (u_x \Sigma m_i y_i - u_y \Sigma m_i x_i).$$

Uwzględniając, że

$$\Sigma m_i y_i = M y_o, \qquad \Sigma m_i x_i = M x_o$$

jeżeli x_o, y_o są współrzędnymi środka masy, napiszemy wzór powyższy w postaci:

$$E = \frac{1}{2} M u^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + M \omega (u_x y_o - u_y x_o) \qquad [169]$$

wyrażającej uogólnienie wzoru *Koeniga*.

53. Potencjał — Energia potencjalna — Zasada zachowania energii

Pojęcie potencjału ma znaczenie pierwszorzędne nie tylko w mechanice, ale i w innych dziedzinach fizyki teoretycznej. To pojęcie narzuca się nieodparcie przy studiowaniu pola sił, tzn. przestrzeni, której każdy punkt ma tę własność, że umieszczona w nim masa skupiona m doznaje siły (zwanej siłą pola), zależnej najczęściej tylko od położenia punktu. W § 49 poznaliśmy już bardzo proste pola sił. Pierwsze było pole ciężkości w niewielkim obszarze nad powierzchnią ziemi określone stałą siłą pola mg. Linie sił takiego pola, tj. linie, których elementy długości wskazują kierunek siły pola, są prostymi równoległymi, a wartość liczbowa siły pola, działającej na jednostkę masy skupionej jest wszędzie równa stałej g. Takie pole nazywamy *jednorodnym*.

Drugim polem sił rozpatrywanym w § 49 było pole ciężkości w przestrzeni otaczającej ziemię uważaną w przybliżeniu za kulę. Linie sił okazały się prostymi przechodzącymi przez środek ziemi, a wartość liczbowa siły była odwrotnie proporcjonalna względem kwadratu odległości od środka ziemi. To pole nie jest więc jednorodne, ale ma z poprzednim ważną własność wspólną, że praca siły pola na drodze zamkniętej jest równa zeru, a praca na drodze między dwoma punktami stałymi jest niezależna od postaci drogi. Tę samą własność

mają jeszcze inne pola sił występujące w przyrodzie, ale nie wszystkie. Nasuwa się więc pytanie doniosłe, jaką cechę matematyczną mają pola tego rodzaju.

Otóż cechę taką nie trudno dostrzec przypatrzywszy się równaniom [154] i [158]. Każde z nich przedstawia pracę elementarną dL jako ujemnie wziętą różniczkę pewnej funkcji współrzędnych punktu. Funkcją przynależną polu pierwszemu jest $+mgz$, zaś polu drugiemu $-C\frac{Mm}{r}$, czyli $-C\frac{Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ jeżeli początek prostokątnego układu współrzędnych obierzemy w środku ziemi. Obie te funkcje mają własność wspólną, że ich różniczki zupełne, tzn. przyrosty elementarne między punktem (x, y, z) a punktem $(x + dx, y + dy, z + dz)$ są równe pracy elementarnej siły pola. Każdą funkcję tego rodzaju, w której położono $m = 1$ nazywamy *potencjałem pola sił*, a pole odpowiednie nazywamy *polem potencjalnym*. Ponieważ wymiarem takich funkcyj jest wymiar pracy a zarazem wymiar energii kinetycznej, przeto nazywamy każdą z nich także *energią potencjalną* U punktu materialnego m w danym polu sił. Mamy więc dla pól potencjalnych równanie

$$dL = -dU \qquad [170]$$

wyrażające ich własność szczególną, odróżniającą takie pola od innych *pól sił niepotencjalnych*, tj. takich, w których praca elementarna siły pola nie da się wyrazić jako różniczka funkcji współrzędnych.

Trzecim ważnym przykładem pola potencjalnego jest pole określone w układzie współrzędnych $X\ Y\ Z$ w sposób następujący: siła pola jest prostopadła do osi Z i proporcjonalna względem odległości punktu od tej osi $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta siła może być przy tym skierowana ku osi Z albo od osi Z. W przypadku pierwszym — jest ta oś niejako siedzibą sił przyciągających, a w drugim — odpychających. Wartością algebraiczną siły pola jest więc $\pm k\varrho$, gdzie k jest współ-

czynnikiem o wartości stałej. Składowe zaś siły pola wzięte w kierunkach osi współrzędnych są:

$$X = \pm k x, \quad Y = \pm k y, \quad Z = 0.$$

Dla pracy elementarnej siły pola otrzymujemy przeto wyrażenie:

$$dL = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \pm k x\,dx \pm k y\,dy =$$

$$= d\left[\pm \frac{k}{2} (x^2 + y^2)\right] = d\left(\pm \frac{k}{2} \varrho^2\right)$$

Z tego wynika, że potencjałem pola jest:

$$U = \pm \frac{k}{2} \varrho^2. \qquad [171]$$

Szukając miejsca geometrycznego punktów pola sił, w których potencjał ma wartość stałą K, widzimy, że miejscem tym jest powierzchnia, której równaniem jest $U = K$. Przyjmując różne wartości dla stałej K, otrzymujemy różne powierzchnie, zwane *powierzchniami ekwipotencjalnymi*, albo krócej *potencjalnymi*. W polu jednorodnym ciężkości (w obszarach małych) są te powierzchnie płaszczyznami poziomymi. W polu ciężkości bezwzględnej dokoła ziemi, uważanej za kulę, są powierzchnie potencjalne kulami współśrodkowymi. W polu z trzeciego przykładu są walcami współosiowymi. Z określenia powierzchni potencjalnych wynika, że siła pola jest w każdym punkcie powierzchni potencjalnej prostopadła do niej i skierowa od powierzchni potencjału wyższego do niższego. Albowiem praca siły pola na drodze jakiejkolwiek leżącej na danej powierzchni potencjalnej jest równa zeru, co dowodzi prostopadłości siły toru.

Powróciwszy teraz do równania ogólnego dla pól potencjalnych

$$dL = -dU,$$

ws awmy to wyrażenie w równanie [160], a otrzymamy

$$d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = -dU, \qquad [171]$$

czyli przyrost elementarny energii kinetycz-

nej punktu materialnego swobodnego równa się odpowiedniemu ubytkowi jego energii potencjalnej (zwanej także *energią położenia*).

Całkując obustronnie to równanie między położeniem początkowym punktu materialnego, w którym jego energią kinetyczną jest $\frac{mc^2}{2}$ i energią potencjalną U_1, a położeniem końcowym, w którym energią kinetyczną jest $\frac{mv^2}{2}$, a potencjalną U_2, znajdujemy:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = U_1 - U_2, \quad \text{czyli} \quad \frac{mc^2}{2} + U_1 = \frac{mv^2}{2} + U_2 = \text{const.}$$

To można wyrazić zwięźle równaniem

$$\frac{mv^2}{2} + U = \text{const}, \qquad [172]$$

czyli słowami:

Podczas ruchu punktu materialnego swobodnego w polu potencjalnym sił, zachowuje suma jego energii kinetycznej E i potencjalnej U wartość stałą. Wartość tę nazywamy *energią całkowitą* punktu materialnego i dlatego twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady zachowania energii*, a siły potencjalne nazywamy także *siłami zachowawczymi* (konserwatywnymi).

Wartość liczbowa potencjału nie jest w ogóle oznaczona, albowiem potencjał jest całką nieokreśloną różniczki dU, a więc wartością potencjału jest nie tylko U, lecz także $U + C$, gdzie C jest stałą dowolną. Tylko różnice potencjałów w dwu miejscach pola sił mają wartość jednoznacznie określoną. Podobnie wartość nieoznaczoną można przypisać pojęciu wysokości, a oznaczona jest tylko różnica wysokości dwu punktów.

Zasada zachowania energii upraszcza bardzo rozwiązanie wielu zadań kinetyki, jak np. następujące:

A. Punkt materialny m otrzymał prędkość pionową v skierowaną w górę, w polu siły ciężkości uważanym w przybliżeniu za jednorodne. Do jakiej wysokości wzniósłby się ten punkt, gdyby nie było oporu powietrza?

Obrawszy początek układu współrzędnych w położeniu wyjściowym punktu materialnego, znajdujemy w tym położeniu, że energią kinetyczną jest $\frac{1}{2} m v^2$, a energią potencjalną 0. Na wysokości szukanej h jest energia kinetyczna równa 0, a energia potencjalna równa $m g h$. A zatem zasada zchowania energii daje

$$\frac{m v^2}{2} = m g h, \text{ z czego } h = \frac{v^2}{2 g}$$

B. Rozwiążmy to samo zadanie w przypadku, gdy prędkość początkowa v jest tak wielka, że trzeba zastosować wyrażenie ściślejsze dla energii potencjalnej, tj. $-C\frac{M m}{r}$, gdzie $r = R + z$, przy czym R jest promieniem kuli ziemskiej, a z wysokością nad powierzchnią ziemi (patrz § 49). Zasada zachowania energii daje teraz

$$\frac{m v^2}{2} - C\frac{M m}{R + 0} = 0 - C\frac{M m}{R + z}$$

Stąd

$$v^2 = 2 C M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + z}\right). \qquad [173]$$

Ponieważ siła ciężkości na powierzchni ziemi, gdzie przyśpieszenie ciężkości $g_0 = 981$ cm/sek², ma wartość $m g_0 = C\frac{M m}{R^2}$, przeto $C M = g_0 R^2$. Wstawiwszy tę wartość w równanie [173] otrzymujemy:

$$v^2 = 2 g_0 R - \frac{2 g_0 R^2}{R + z} = 2 g_0 R \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{z}{R}}\right) =$$

$$= 2 g_0 R \frac{\frac{z}{R}}{1 + \frac{z}{R}} = \frac{2 g_0 z}{1 + \frac{z}{R}},$$

a stąd wysokość wzniesienia się

$$z = \frac{v^2}{2 g_o - \frac{v^2}{R}}. \qquad [174]$$

Przy prędkości początkowej v stosowanej np. w balistyce, a więc nie dochodzącej do 2 km/sek, jest v^2 tak małe wobec $2 g_o$, że z błędem bardzo nieznacznym można stosować wzór:

$$z = \frac{v^2}{2 g_o}$$

identyczny z otrzymanym w zadaniu *A*.

Gdybyśmy mogli udzielić punktowi materialnemu prędkości początkowej takiej, aby było $\frac{v_o^2}{R} = 2g_o$, to wysokość wzniesienia z zdążałaby do nieskończoności, czyli punkt materialny jużby na ziemię nie powrócił. Odpowiednią wartości prędkości początkowej v_o byłoby

$$v_o = \sqrt{2 g_o R} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6370\,000} = 11180 \text{ m/sek},$$

czyli w zaokrągleniu

$$v_o = 11 \text{ km/sek}.$$

Przy prędkości początkowej, większej od $v_o = 11$ km/sek traci oczywiście ważność wzór [174], gdyż wynika z tego z ujemne. W tym wypadku należy zadanie sformułować inaczej, a mianowicie szukać wartości wysokości z, w której prędkość punktu materialnego z wartości początkowej v osiągnie wartość v_1. Wtedy zasada zachowania energii daje

$$\frac{m v^2}{2} - C \frac{M m}{R} = \frac{m v_1^2}{2} - C \frac{M m}{R + z}. \quad \text{Stąd } z = \frac{v^2 - v_1^2}{2 g_o - \left(\frac{v^2 - v_1^2}{R}\right)}.$$

Przykład 1. Ważki punkt materialny o masie m spoczywa na dnie czaszy kulistej o promieniu $R = 100$ cm i brzegu poziomym. Jaką prędkość początkową nadać trzeba punktowi m, aby dosięgnął brzegu czaszy nie wylatując z niej (z pominięciem tarcia o powierzchnię czaszy)?

Odpowiedź. Jeżeli h oznacza wysokość czaszy, to stosownie do zasady pracy jest ubytek energii kinetycznej równy $\frac{1}{2} mv^2 - 0 = \frac{1}{2} mv^2$ równy przyrostowi energii potencjalnej mgh, a więc:

$$v = \sqrt{2 gh}.$$

Np. dla $h = R = 100$ cm (półkula) jest

$$v = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 100} = 443 \text{ cm/sek}.$$

Rozdział III

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI I ZBOCZENIA

54. Momenty bezwładności ciał materialnych ciągłych — Promień (ramię) bezwładności — Masa sprowadzona (zredukowana)

Podane w § 51 określenie momentu bezwładności ciała złożonego z dowolnej ilości n punktów materialnych, tj.

$$I = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2 \qquad [175]$$

musi ulec zmianie, gdy ciało materialne wyobrazimy sobie pod postacią bryły geometrycznej wypełnionej w sposób ciągły materią. Jest to oczywiście abstrakcja, która jednakże ułatwia bardzo obliczenie I ze ścisłością praktycznie wystarczającą. Podzieliwszy takie ciało w myśli w sposób dowolny na n elementów objętości o masach μ_i ($i = 1, 2, 3, \ldots n$) i oznaczywszy przez r_i odległość dowolnego punktu elementu od osi momentu, określimy *moment bezwładności* I jako granicę, do której zdąża wartość sumy $\sum_{i=1}^{i=n} \mu_i r_i^2$, gdy ilość elementów n rośnie nieograniczenie, a jednocześnie masy μ_i nieograniczenie maleją, dążąc do zera. Wyrażamy to równaniem

$$I = \lim \sum_{i=1}^{i=n} \mu_i r_i^2 , \qquad [176]$$

które stosownie do pojęć rachunku całkowego zastępujemy przez:

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}M . \qquad [177]$$

Tutaj oznacza $\mathrm{d}M$ masę elementu ciała, r jego odległość od

osi momentu, a $\int$ wyraża sumowanie, czyli całkowanie rozciągnięte na całą objętość ciała. W ten sposób sprowadza się obliczenie momentu bezwładności do zagadnienia rachunku całkowego. Zobaczymy jednak, że w wielu przypadkach złożonych można ominąć całkowanie, korzystając z wzorów całkowych znalezionych w przypadkach prostszych.

Z równań określających moment bezwładności I wynika, że wymiarem I jest [M] $[l]^2$, tzn. iloczyn wymiaru masy przez kwadrat wymiaru długości. Dlatego każdy znany moment bezwładności można przedstawić w postaci iloczynu z masy ciała M i kwadratu pewnej długości k, pisząc

$$I = Mk^2. \qquad [178]$$

Stąd *promień* (czyli *ramię*) *bezwładności*, jak nazwano k, określamy także wzorem

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}. \qquad [179]$$

Często obieramy pewien promień r, określający odległość daną od osi momentu bezwładności I i szukamy masy fikcyjnej M_{red}, która by rozłożona równomiernie wzdłuż okręgu koła o promieniu r miała moment bezwładności równy I ciała danego. M_{red} nazywamy *masą zredukowaną* albo *sprowadzoną* na odległość r. Ponieważ wszystkie cząstki masy tak określonej są w tej samej odległości r od osi danej, przeto momentem bezwładności M_{red} jest

$$M_{red} r^2 = I,$$

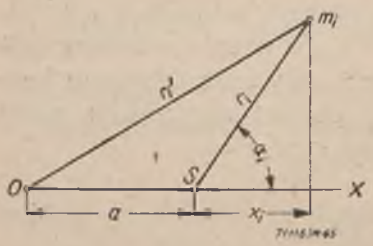
a zatem

$$M_{red} = \frac{I}{r^2}. \qquad [180]$$

Dalsze rozważania wykażą praktyczne i mnemotechniczne znaczenie promienia bezwładności i masy zredukowanej.

55. Momenty bezwładności względem osi równoległych Biegunowy moment bezwładności

Każdy układ materialny (ciało) posiada oczywiście tyle momentów bezwładności, ile jest prostych w przestrzeni nieograniczonej. Pomiędzy tymi momentami zachodzą jednak związki uproszczające znakomicie obliczenie I względem dowolnej osi, gdy znamy trzy momenty bezwładności względem osi pewnego układu prostokątnego współrzędnych, którego początek leży w środku masy ciała. Rozpatrzymy najpierw związek najprostszy, jaki zachodzi między momentami bezwładności względem osi równoległych.



Rys. 65.

Niech jedna z osi równoległych przechodzi przez środek masy ciała S (rys. 65), a druga niech leży w odległości dowolnej $a = \overline{OS}$, przy czym dla wygody za płaszczyznę rysunku przyjęto płaszczyznę prostopadłą do obu osi. Momentem bezwładności względem osi O jest

$$I = m_1 r_1'^2 + m_2 r_2'^2 + \ldots m_n r_n'^2 = \sum_i m_i r_i'^2$$

momentem zaś bezwładności względem osi S jest $I_o = \sum_i m_i r_i^2$.

Ale $r_i'^2 = r_i^2 + a^2 + 2 a r_i \cos \alpha_i = r_i^2 + a^2 + 2 a x_i$, gdzie x_i jest odległością punktu m_i od płaszczyzny przechodzącej przez oś S i prostopadłej do płaszczyzny obu osi. Wstawiwszy wartość znalezioną r'_i w wyrażenie dla I, mamy:

$$I = \Sigma m_i r_i^2 + \Sigma m_i a^2 + 2 \Sigma m_i a x_i, \quad \text{czyli}$$
$$I = \Sigma m_i r^2 + a^2 \Sigma m_i + 2 a \Sigma m_i x_i,$$

a ponieważ

$$m_i = M, \qquad \text{zaś } \Sigma m_i x_i = 0,$$

jako moment statyczny masy ciała względem płaszczyzny przechodzącej przez środek masy, więc:

$$I = I_o + M a^2, \qquad \text{albo } I_o = I - M a^2. \qquad [181]$$

Wzór ten zwany wzorem *Huygensa* (czytaj „Hajensa") pozwala bardzo prostym rachunkiem wyznaczyć moment bezwładności względem danej prostej, jeżeli znamy moment bezwładności I_o względem prostej, do niej równoległej, a przechodzącej przez środek masy ciała. Dodając mianowicie do momentu I_o iloczyn masy ciała przez kwadrat odległości osi momentu od środka masy, otrzymamy żądany moment bezwładności I.

Zważywszy, że Ma^2 jest zawsze dodatnie, widzimy że $I > I_o$. A zatem:

1. Moment bezwładności względem prostej przechodzącej przez środek masy ciała jest najmniejszym z momentów bezwładności tego ciała względem prostych do niej równoległych.

2. Osie równoległe równych momentów bezwładności ciała są tworzącymi walca obrotowego, którego oś geometryczna przechodzi przez środek masy ciała.

Obierzmy teraz dowolny punkt O w ciele za początek prostokątnego układu współrzędnych i szukajmy momentów bezwładności ciała względem osi X, Y, Z. Oznaczmy je odpowiednio przez I_x, I_y i I_z, to

$$I_x = \Sigma m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_y = \Sigma m_i (z_i^2 + x_i^2),$$
$$I_z = \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2), \qquad [182]$$

albowiem odległości r_{ix}, r_{iy}, r_{iz} punktu m_i od osi współrzędnych określają równania

$$r_{ix}^2 = y_i^2 + z_i^2 \quad \text{itd.}$$

Dodajmy obustronnie trzy równania [182], a otrzymamy

$$I_x + I_y + I_z = 2\Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = 2\Sigma m_i \varrho_i^2,$$

gdzie ϱ_i oznacza odległość punktów m_i od początku O.

Gdybyśmy przy tym samym początku O zmienili kierunki osi współrzędnych prostokątnych, to otrzymalibyśmy inne

wartości I_x, I_y, I_z, ale oczywiście tę samą wartość sumy $\Sigma m_i \varrho_i^2$. Chociaż ta suma nie ma tak prostego znaczenia dynamicznego, jak moment bezwładności I, to jednak jest dogodnie mieć dla niej osobną nazwę i znak. Niechaj więc

$$I_b = \sum_i m_i \varrho_i^2 \qquad [183]$$

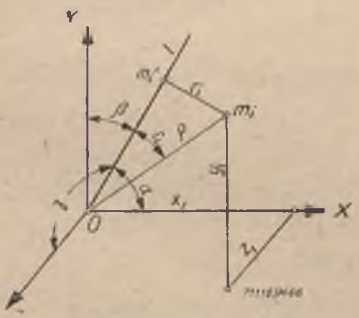
nazywa się *biegunowym momentem bezwładności*, względem „bieguna" O, a równanie poprzednie można napisać w postaci

$$I_x + I_y + I_z = 2 I_b , \qquad [184]$$

co wyraża twierdzenie, że suma trzech momentów bezwładności względem osi prostokątnego układu współrzędnych o początku stałym w ciele jest stałą i równa się podwójnemu biegunowemu momentowi bezwładności względem tego początku.

56. Momenty bezwładności względem osi przecinających się w stałym punkcie ciała — Momenty zboczenia (odśrodkowe)

Poprowadźmy przez punkt 0 w ciele osie X, Y, Z, prostokątnego układu współrzędnych i dowolną prostą l tworzącą z osiami odpowiednio kąty α, β, γ (rys. 66). Odległość r_i dowolnego punktu m_i ciała od prostej l określa równanie:



Rys. 66.

$$r_i = \varrho_i \sin(\varrho_i, l) = \varrho_i \sin \varepsilon_i$$

a zatem:

$$r_i^2 = \varrho_i^2 \sin^2 \varepsilon_i = \varrho_i^2 - \varrho_i^2 \cos^2 \varepsilon_i .$$

Oznaczmy odpowiednio przez α_i, β_i, γ_i, kąty, jakie promień ϱ_i zamyka z osiami X, Y, Z, to

$$\cos \varepsilon_i = \frac{0\,m'}{0\,m_i} = \frac{\text{rzut } 0\,m_i \text{ na } l}{\varrho_i} = \frac{1}{\varrho_i}(x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma).$$

To wynika najprościej z wzoru

$\cos \varepsilon_i = \cos \alpha \cos \alpha_i + \cos \beta \cos \beta_i + \cos \gamma \cos \gamma_i$ po podstawieniu:

$\cos \alpha_i = \frac{x_i}{\varrho_i}$ itd. Wstawiwszy tę wartość w wyrażenie powyższe dla r_i^2 znajdziemy najpierw :

$$r_i^2 = \varrho_i^2 - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \varrho)^2,$$

ze względu zaś, że $\varrho_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, a $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, otrzymamy kolejno:

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - x_i^2 \cos^2 \alpha - y_i^2 \cos^2 \beta - z_i^2 \cos^2 \gamma -$$
$$- 2 x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - 2 y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2 z_i x_i \cos \gamma \cos \alpha$$
$$r_i^2 = x_i^2 (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + y_i^2 (\cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha) + z_i^2 (\cos^2 \alpha +$$
$$+ \cos^2 \beta) - 2 x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - 2 y_i z_i \cos \beta \cos \gamma -$$
$$- 2 z_i x_i \cos \gamma \cos \alpha,$$
$$r_i^2 = (y_i^2 + \cos^2 \alpha + z_i^2)(z^2_i + x_i^2) \cos^2 \beta + (x^2_i + y^2_i) \cos^2 \gamma -$$
$$- 2 x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - 2 y_i z_i \cos \beta \cos \gamma - 2 z_i x_i \cos \gamma \cos \alpha.$$

Po wstawieniu tej wartości w wyrażenie dla momentu bezwładności względem prostej l, tj. $I = \sum m_i r_i^2$ mamy:

$$I = \cos^2 \alpha \sum m_i (y^2_i + z_i^2) + \cos^2 \beta \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) +$$
$$+ \cos^2 \gamma \sum m_i (x^2_i + y^2_i) - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m_i x_i y_i -$$
$$- 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m_i y_i z_i - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum m_i z_i x_i.$$

Znaczenie sum występujących w pierwszych wyrazach po stronie prawej znamy już z paragrafu poprzedniego (równanie [182]); w trzech następnych widzimy jednak inne sumy, a mianowicie sumy iloczynów mas punktów materialnych ciała i ich odległości od dwóch płaszczyzn współrzędnych. Nazwano je z powodu pewnego, ważnego znaczenia w kinetyce *momentami zboczenia*, albo *momentami odśrodkowymi* względem tych płaszczyzn, albo też względem osi, w której się te płaszczyzny przecinają. Momenty zboczenia mają oczywiście ten sam wymiar, co moment bewładności, wszelako ich wartości mogą być w ogóle ujemne lub dodatnie, a w szczególności mogą dla każdego ciała stać się równe zeru. Momenty zboczenia oznaczają często przez I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}, przy czym wskaźnik podwójny składa się z tych samych liter, którymi oznaczamy współrzędne mnożone przez siebie w każdym wyrazie sumy. Znakowanie nieco prostsze przedstawiają równania:

$$D_x = \sum m_i y_i z_i, \qquad D_y = \sum m_i z_i x_i, \qquad D_z = \sum m_i x_i y_i. \qquad [185]$$

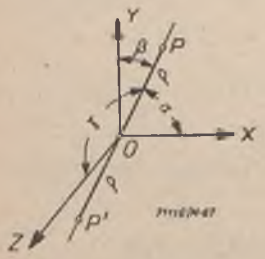
Wskaźnik momentu zboczenia oznacza tutaj odpowiednią oś. Moment bezwładności I względem prostej l przechodzącej przez początek współrzędnych i nachylonej do osi pod kątami α, β, γ, określa zatem równanie

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2 D_x \cos \beta \cos \gamma -$$
$$- 2 D_y \cos \gamma \cos \alpha - 2 D_z \cos \alpha \cos \beta, \qquad [186]$$

które wyraża, że moment bezwładności jest funkcją kwadratową jednorodną dostaw kierunkowych osi momentu, a współczynniki tej funkcji są odpowiednio trzema momentami bezwładności i trzema momentami zboczenia względem osi współrzędnych.

57. Elipsa bezwładności — Główne osie bezwładności

Zależność momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez punkt stały w ciele danym od zmiany kierunku tejże osi (względem ciała), da się uzmysłowić geometrycznie przy pomocy równania [186] i to w sposób wieloraki. Najważniejszy, zastosowany po raz pierwszy przez *Poinsota*, polega na tym, że na każdej osi przechodzącej przez *0* (rys. 67) odmierzamy długość $\varrho = \overline{OP} = \overline{OP'}$ odwrotnie proporcjonalną do ramienia bezwładności k dla tej osi, czyli



Rys. 67.

$$\varrho = C' \frac{1}{k} = C \frac{1}{\sqrt{I}}, \qquad [187]$$

gdzie C i C' oznaczają stosowne współczynniki proporcjonalności. Powierzchnia utworzona przez punkty P i P' przedstawi geometrycznie zależność I od kierunku osi l. Będzie to oczywiście powierzchnia ze środkiem w O, którą każda prosta l przecina w dwu punktach, a więc powierzchnia rzędu drugiego. Ze względu zaś na to, że $\varrho = C/\sqrt{I}$ może mieć tylko wartości skończone, będzie ta powierzchnia elipsoidą (w ogóle). Wynik ten otrzymamy także z dochodzenia analitycznego. Oznaczmy w tym celu współrzędne punktu P przez ξ, η, ζ, to $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ będą współrzędnymi punktu P', a

$$\cos\alpha = \frac{\xi}{\varrho} = \xi \frac{\sqrt{I}}{C}, \quad \cos\beta = \eta \frac{\sqrt{I}}{C}, \quad \cos\gamma = \zeta \frac{\sqrt{I}}{C}.$$

Po wstawieniu tych wartości w równanie [186] i uproszczeniu otrzymamy:

$$C^2 = I_x\xi^2 + I_y\eta^2 + I_z\zeta^2 - 2D_x\eta\zeta - 2D_y\zeta\xi - 2D_z\xi\eta \qquad [188]$$

jako równanie miejsca geometrycznego punktów P i P'. Jest to równanie stopnia drugiego względem współrzędnych ξ, η, ζ, określa zatem powierzchnię rzędu drugiego. Jej przekrój płaszczyzną $\zeta = 0$ jest *elipsą*

$$C^2 = I_x\xi^2 + I_y\eta^2 - 2D_z\xi\eta.$$

gdyż I_x *i* I_y są dodatnie i podobnie są elipsami przekroje płaszczyznami $\xi = 0$ i $\eta = 0$. Powierzchnia przedstawiona równaniem [187] jest przeto elipsoidą trójosiową, która w przypadkach szczególnych może się stać elipsoidą obrotową (sferoidą), albo wreszcie kulą. Dany punkt *0* jest środkiem elipsoidy, nazwanej *elipsoidą bezwładności* (*Poinsota*) dla punktu *0*. Ponieważ wartość stałej *C* jest dowolna, przeto równanie [188] określa właściwie układ nieskończenie wielu elipsoid współśrodkowych i homotetycznych (tzn. podobnych i podobnie położonych). Każda z nich jest elipsoidą bezwładności ciała dla punktu 0. Elipsoidę bezwładności dla środka masy ciała *S* nazywamy *elipsoidą centralną* tego ciała. Wiadomo, że elipsoida posiada w ogólności jeden układ tzw. *osi głównych*, tj. trzech średnic sprzężonych i wzajemnie prostopadłych, z których jedna jest najmniejsza, a jedna z dwu innych największa ze wszystkich średnic tej powierzchni. Z tego wynika, że w każdym punkcie ciała danego (układu materialnego) można wystawić jeden układ trzech prostych wzajemnie prostopadłych, spośród których jedna jest osią największego i jedna najmniejszego momentu bezwładności danego ciała z pomiędzy wszystkich prostych przechodzących przez ten punkt (rozpatrywany punkt może oczywiście leżeć i zewnątrz ciała).

Trzy osie główne elipsoidy bezwładności dla punktu danego nazywamy *głównymi osiami bezwładności* ciała w tym punkcie. Najdłuższa oś elipsoidy jest osią najmniejszego, oś zaś najkrótsza osią największego momentu bezwładności. Osie główne centralnej elipsoidy bezwładności nazywamy *głównymi centralnymi osiami bezwładności.*

Analogicznie mówimy o głównych momentach bezwładności dla danego punktu ciała i o *centralnych głównych momentach bezwładności* danego ciała. Główne momenty bezwładności będziemy oznaczali zwykle wskaźnikami *1*, *2*, *3* zamiast *x*, *y*, *z*. Z twierdzenia wyrażonego wzorem [181] (*Huygensa*) wypływa, że każda średnica elipsoidy centralnej jest dłuższa, niż średnica równoległa elipsoidy bezwładności dla dowolnego punktu. Stąd wynika, że najmniejszy z głównych centralnych momentów bezwładności ciała jest zarazem najmniejszym ze wszystkich momentów bezwładności tego ciała.

Gdy obierzemy główne osie bezwładności w punkcie *0* za osie współrzędnych, to równanie [188] przekształci się, jak wiadomo z geometrii analitycznej, na

$$I_1 \xi^2 + I_2 \eta^2 + I_3 \zeta^2 = C^2, \qquad [189]$$

z czego wnosimy, że trzy momenty zboczenia ciała względem osi prostokątnego układu współrzędnych stają

się zerami, gdy osie układu są głównymi osiami bezwładności tego ciała.

Oznaczywszy przez a, b, c długość półosi głównych elipsoidy bezwładności, leżących odpowiednio na osiach X, Y, Z, napiszemy równanie elipsoidy w postaci:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad [190]$$

a z porównania wzorów [188] i [189] wynika

$$a = \frac{C}{\sqrt{I_1}}, \quad b = \frac{C}{\sqrt{I_2}}, \quad c = \frac{C}{\sqrt{I_3}}.$$

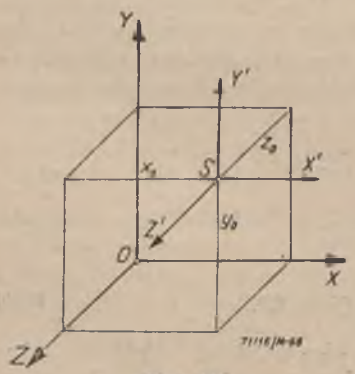
Zarazem równanie [186] przekształci się na następujące:

$$I = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma. \qquad [192]$$

Równanie to służy do obliczenia momentu bezwładności względem prostej dowolnej, przechodzącej przez dany punkt O, jeżeli znamy osie główne i momenty bezwładności dla tego punktu.

Gdy w szczególności dwa główne momenty bezwładności są równe, to elipsoida bezwładności staje się obrotową, a zatem każda prosta prostopadła do trzeciej osi głównej i przechodząca przez O jest wtedy osią główną. Wreszcie w przypadku równych wszystkich trzech głównych momentów bezwładności, elipsoida zamienia się na kulę, a wszystkie proste przechodzące przez jej środek O są głównymi osiami bezwładności.

58. Twierdzenie o momentach zboczenia — Położenie głównych osi bezwładności w przypadkach symetrii



Rys. 68.

Wystawmy w dowolnym punkcie ciała O układ kartezjański X, Y, Z (rys. 68), a w środku masy S układ X', Y', Z' o osiach zgodnie równoległych z tamtymi. Oznaczając przez x_0, y_0, z_0 współrzędne punktu S względem układu pierwszego, mamy oczywiście

$$x = x' + x_0, \; y = y' + y_0, \; z = z' + z_0.$$

A zatem moment zboczenia dla którychkolwiek dwóch płaszczyzn układu pierwszego np.:

$$I_{xy} = \sum m_i x_i y_i = \sum m_i (x'_i + x_o)(y'_i + y_o) = \sum m_i x'_i y'_i +$$
$$+ x_o \sum m_i y'_i + y_o \sum m_i x'_i + x_o y_o \sum m_i.$$

Ale wiadomo z teorii środka masy, że $\sum m_i x'_i = 0$ i $\sum m_i y'_i = 0$, wobec czego

$$I_{xy} = I_{x',y'} + M x_o y_o,$$

podobnie

$$I_{yz} = I_{y',z'} + M y_o z_o, \qquad [193]$$
$$I_{zx} = I_{z',x'} + M z_o x_o.$$

Przy pomocy tych wzorów można bardzo łatwo wyznaczyć momenty zboczenia I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} dla dowolnego układu współrzędnych, jeżeli znamy momenty zboczenia $I_{x',y'}$, $I_{y',z'}$, $I_{z',x'}$ dla układu o tych samych kierunkach osi, którego początek leży w środku masy ciała.

Gdy jedna z płaszczyzn układu, np. YZ jest wspólna, to oczywiście $x_o = 0$, przeto $I_{xy} = I_{x',y'}$, $I_{xz} = I_{x',z'}$, a tylko $I_{yz} = I_{y',z'} + M y_o z_o$.

Skoro zaś jedna z osi układu, np. X, jest wspólna, to $y_o = 0$ i $z_o = 0$, a zatem wszystkie momenty zboczenia dla obu układów są wtedy odpowiednio równe. Z tego wysnuwamy następujące ważne wnioski.

1. Układ trzech głównych osi bezwładności dla punktu leżącego na jednej z głównych osi centralnych jest do nich równoległy.

2. Jedna z głównych osi bezwładności dla każdego punktu leżącego na płaszczyźnie dwu głównych osi centralnych jest równoległa do trzeciej osi.

Twierdzenia powyższe ułatwiają często szukanie głównych osi bezwładności. Dalszych ułatwień dostarcza twierdzenie następujące:

Głównymi osiami bezwładności są (między innymi):

a. każda oś symetrii,

b. każda prosta prostopadła do płaszczyzny symetrii i

c. każda prosta na której leżą środki masy warstw elementarnych, otrzymanych przez podział ciała płaszczyznami prostopadłymi do tej prostej.

Dowód wynika łatwo z rozważania momentów zboczenia.

Jeżeli ciało (układ materialny) posiada oś symetrii, to uważając ją za oś Z układu kartezjańskiego, widzimy że:

$$\sum m_i x_i z_i = 0 \quad \text{i} \quad \sum m_i y_i z_i = 0,$$

albowiem każdemu punktowi m_i *ciała* o współrzędnych x_i, y_i z_i odpowiada

punkt symetryczny o masie $m'_i = m_i$, a współrzędnych $-x_i, -y_i, z_i$. Odpowiednie dwa wyrazy sumy znoszą się przeto nawzajem, np.:

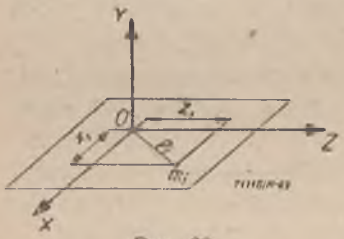
$$m_i x_i z_i + m_i' (-x_i) z_i = 0.$$

A skoro $D_y = I_{xz} = \sum m_i x_i z_i = 0$ i $D_x = I_{yz} = \sum m_i y_i z_i = 0$, to oś Z jest główną osią bezwładności dla każdego swego punktu.

Podobnie przeprowadzamy dowód dla drugiego przypadku, przy trzecim zaś opieramy się na ważnym twierdzeniu pomocniczym, że każda prosta prostopadła do płaskiej figury materialnej jest główną osią bezwładności tej figury, co staje się oczywiste, gdy osie współrzędnych X i Z obierzemy na płaszczyźnie figury (rys. 69). Wówczas bowiem jest $y_i = 0$ dla każdego punktu m_i, czyli

$$\sum m_i x_i y_i = 0, \qquad \sum m_i z_i y_i = 0.$$

Ponieważ obliczenia szczegółowe geometrycznych momentów bezwładności figur płaskich znajdują się w podręcznikach „Wytrzymałości materiałów", przeto tutaj przytoczymy jeszcze z § 54 wzór ogólny dla brył z materii ciągłej



Rys. 69.

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}M, \qquad [194]$$

gdzie $\mathrm{d}M$ oznacza masę elementu objętości dającą się wyrazić przez iloczyn gęstości σ i objętości elementu $\mathrm{d}V$. Wzór ten można bezpośrednio zastosować do obliczenia I powierzchni materialnej lub płaskiej figury materialnej, wstawiając za $\mathrm{d}M$ iloczyn z gęstości powierzchniowej, oznaczonej w ciągu dalszym również przez σ i elementu $\mathrm{d}F$ pola figury.

59. Momenty bezwładności i zboczenia jednolitych ciał, powierzchni lub linii materialnych — Geometryczne momenty bezwładności i zboczenia

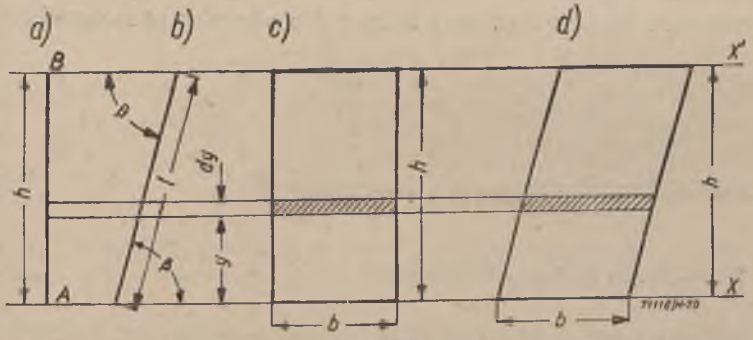
Dla wymienionych układów materialnych znajdujemy ze wzoru [194] przyjmując $\mathrm{d}M = \sigma \, \mathrm{d}V$

$$J = \int r^2 \sigma \, \mathrm{d}V = \sigma \int r \, \mathrm{d}V, \qquad [195]$$

gdzie σ oznacza gęstość objętościową, powierzchniową lub liniową, a odpowiednio dV oznacza element objętości, powierzchni lub długości. Oznaczywszy całkę $\int r^2 \, dV$ przez J, widzimy, że J jest już tylko wielkością geometryczną niezależną od masy ciała, lecz jedynie od jego postaci i wielkości geometrycznej. Nazywamy ją *momentem bezwładności geometrycznym*, a do oznaczenia stosujemy często również literę I, jeżeli nie ma obawy nieporozumienia. Jego wymiarem są oczywiście cm^5, cm^4, cm^3, zależnie od tego, czy mamy do czynienia z bryłą, powierzchnią, czy też linią.

60. Proste przykłady obliczenia J i D ciał jednorodnych

A. Odcinek, prostokąt i równoległobok. Niech proste równoległe X i X' (rys. 70 a) ograniczają odcinek do nich prostopadły o długości h, odcinek pochyły (rys. 70 b) o długości $l = h/\sin\beta$, prostokąt (rys. 70 c) i równoległobok



Rys. 70.

(rys. 70 d) o podstawach b i wysokościach h. Gdy na wszystkich czterech figurach geometrycznych rozłożymy równomiernie tę samą masę M, to ich momenty bezwładności względem osi X będą oczywiście równe. Albowiem dzieląc je na elementy prostymi równoległymi do X, otrzymujemy równe masy elementów w równych odległościach y od osi X. Wspólną wartością momentu bezwładności jest zatem:

$I_x = \int y^2 \, dM$, a ponieważ $dM : M = dy : h$, czyli $dM = \frac{M}{h} dy$,

więc $I_x = \frac{M}{h} \int_0^h y^2 \, dy = \frac{M}{h} \cdot \frac{h^3}{3}$, a wreszcie

$$I_x = M \cdot \frac{h^2}{3}. \qquad [196]$$

Ramię bezwładności określa przeto równanie:

$$k = h / \sqrt{3}, \qquad [197]$$

masę zaś zredukowaną, np. na odległość h, wzór

$$M_{h\,red} = \frac{M}{3}. \qquad [198]$$

Odpowiednie geometryczne momenty bezwładności znajdziemy podstawiając dla odcinka prostopadłego (rys. 70 a): $M = \sigma h$, dla odcinka pochyłego (rys. 70 b): $M = \sigma l$, dla prostokąta zaś (rys. 70 c) i równoległoboku (rys. 70 d): $M = \sigma bh$, a następnie dzieląc J przez σ mamy dla odcinka prostopadłego:

$$J_x = \frac{h^3}{3}, \qquad [199]$$

dla odcinka pochyłego: $J_x = \frac{l^3}{3} \sin^3 \beta$, [200]

dla prostokąta i równoległoboku: $J_x = \frac{b h^3}{3}$. [201]

Obliczymy teraz D dla wszystkich figur powyższych względem układu osi przedstawionego na rys. 71. Geometryczny moment zboczenia odcinka l (rys. 71 a) jest określony sumą:

$$\int x y \, dl = \int x_o y \, dy = x_o \int y \, dy,$$

a ponieważ $\int y \, dy = l y_o$, jeżeli x_o, y_o są współrzędnymi środka masy, więc:

$$D = l \cdot x_o y_o. \qquad [202]$$

Dla odcinka l nachylonego do osi X pod kątem β (rys. 71 b) mamy

$$d l = \frac{d y}{\sin \beta}, \qquad x = y \operatorname{ctg} \beta, \qquad \text{a zatem}$$

$$D = \int x y \, d l = \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \int_0^h y^2 \, d y = \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \cdot \frac{h^3}{3} =$$

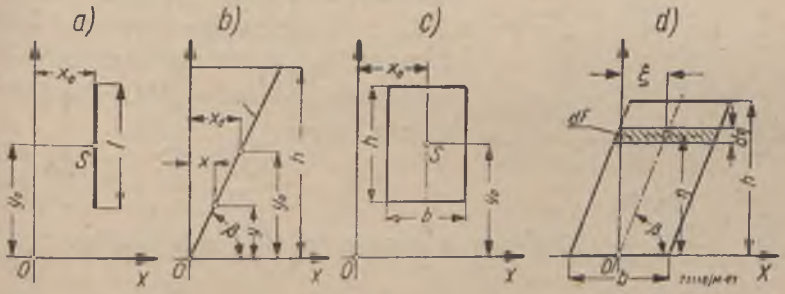
$$= \sin \beta \cos \beta \cdot \frac{l^3}{3},$$

wreszcie

$$D = \frac{l^3}{6} \sin 2\beta . \qquad [203]$$

Materialny moment zboczenia można łatwo przedstawić w formie:

$$D = \frac{4}{3} M x_o y_o. \qquad [204]$$



Rys. 71.

Geometryczny moment zboczenia prostokąta o polu $F = bh$ (rys. 71 c) względem osi równoległych do boków prostokąta określa równanie

$$D = F \cdot x_o y_o \qquad [205]$$

wynikające wprost z wzoru ogólnego [193] i położenia osi symetrii tej figury.

Równoległobok (rys. 71 d) dzielimy na paski elementarne $d F$ prostymi równoległymi do osi X. Moment zboczenia ta-

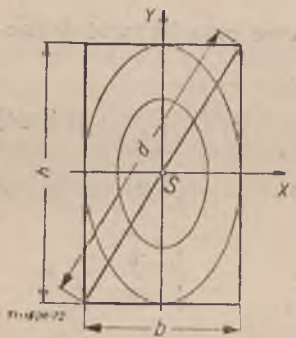
kiego paska $\mathrm{d}D = \xi\eta\ \mathrm{d}F$, przy czym $\mathrm{d}F = b\,\mathrm{d}\eta$, zaś $\xi = \eta \operatorname{ctg}\beta$. A zatem:

$$D = \int \xi\eta\,\mathrm{d}F = b \operatorname{ctg}\beta \int_0^h \eta^2\,\mathrm{d}\eta,$$

czyli

$$D = \frac{b\,h^3}{3} \operatorname{ctg}\beta = I_x \operatorname{ctg}\beta. \qquad [206]$$

B. Centralne główne momenty bezwładności prostokąta (rys. 72).



Rys. 72.

Trzy wzajemne prostopadłe osie symetrii prostokąta X, Y, Z są oczywiście zarazem jego osiami głównymi dla środka masy S. Wyznaczymy zatem odpowiednie momenty bezwładności przy pomocy wzoru [181] i obliczonego powyżej geometrycznego momentu bezwładności względem podstawy [201]. Dla osi X będzie zatem

$$J_1 = \frac{b\,h^3}{3} - b\,h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

czyli, oznaczywszy pole prostokąta $bh = F$ znajdziemy

$$J_1 = \frac{b\,h^3}{12} = F \cdot \frac{h^2}{12} \qquad [207]$$

i analogicznie

$$J_2 = \frac{b^3 h}{12} = F \cdot \frac{b^2}{12} \text{ (względem osi } Y) \qquad [208]$$

Na koniec dla osi Z jest $J_3 = J_1 + J_2$ jako moment biegunowy. A więc:

$$J_3 = F \cdot \frac{b^2 + h^2}{12} = F \cdot \frac{d^2}{2} \qquad [209]$$

gdzie d oznacza przekątną.

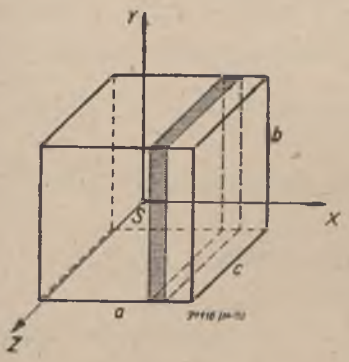
Odpowiednimi zaś momentami materialnymi bezwładności są oczywiście:

$$I_1 = \frac{M h^2}{12}, \qquad I_2 = \frac{M b^2}{12}, \qquad I_3 = M \cdot \frac{b^2 + h^2}{12} \qquad [210]$$

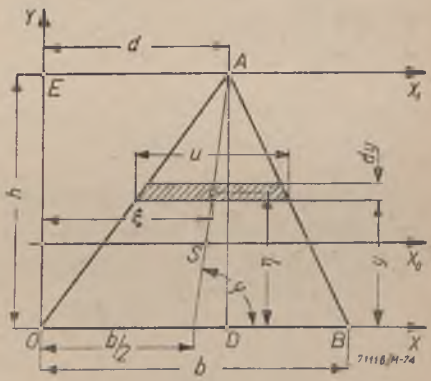
Długości a_1, a_2 osi głównych elipsy bezwładności wyznaczamy z proporcji $a_1 : a_2 = \frac{1}{\sqrt{I_1}} : \frac{1}{\sqrt{I_2}}$, czyli $a_1 : a_2 = \frac{1}{h} : \frac{1}{b} =$ $= b : h$. A zatem elipsa wpisana w prostokąt lub jakakolwiek współśrodkowa i homotetyczna z nią jest elipsą bezwładności prostokąta.

C. Prostopadłościan (rys. 73).

Główne centralne osie bezwładności są równoległe do krawędzi. Moment bezwładności I_1 względem osi X równoległej



Rys. 73.



Rys. 74.

do krawędzi a znajdujemy dzieląc prostopadłościan na warstwy elementarne o masie dM płaszczyznami prostopadłymi do X. Moment bezwładności takiej warstwy przedstawia oczywiście wzór:

$$dI_1 = \frac{b^2 + c^2}{12} \cdot dM$$

według trzeciego z równań [210]. A więc:

$$I_1 = M \cdot \frac{b^2 + c^2}{12}. \qquad [211]$$

Analogicznie jest dla osi Y i Z:

$$I_z = M \cdot \frac{c^2 + a^2}{12}. \qquad [212]$$

$$I_z = M \cdot \frac{a^2 + b^2}{12}. \qquad [213]$$

D. Trójkąt (rys. 74).

Moment bezwładności względem podstawy

$$J_x = \int y^2 u \, dy,$$

przy czym

$$u = \frac{b\,(h - y)}{h},$$

a zatem

$$J_x = \frac{b}{h}\int^h y^2 (h - y)\, dy = \frac{b}{h}\int^h \left(h\,\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \quad \text{z czego}$$

$$J_x = \frac{b\,h^3}{12}, \quad \text{zaś} \quad I_x = M\,\frac{h^2}{6}. \qquad [214]$$

Względem osi X_o równoległej do podstawy i przechodzącej przez środek masy będzie:

$$I_o = I_x - M\left(\frac{h}{3}\right)^2 = M\left(\frac{h^2}{6} - \frac{h^2}{9}\right), \quad \text{czyli}$$

$$I_o = M \cdot \frac{h^2}{18}. \qquad [215]$$

Względem osi X' równoległej do podstawy i przechodzącej przez wierzchołek przeciwległy znajdujemy:

$$I_{x'} = I_o + M\left(\frac{2}{3}\,h\right), \quad \text{czyli}$$

$$I_{x'} = M\,\frac{h^2}{2}. \qquad [216]$$

Obliczmy teraz J_y. Najprędzej dojdziemy do celu korzystając z wzorów już wyprowadzonych i rozkładając trójkąt według schematu:

$\triangle AOB$ = prostokąt $OEAD$ + $\triangle ABD$ — $\triangle OEA$, czyli po wprowadzeniu zrozumiałych oznaczeń

$$F = F' + F'' - F'''. \quad \text{A zatem}$$
$$J_y = J_y' + J_y'' - J_y'''.$$

Moment bezwładności prostokąta F' względem podstawy h (według wzoru [196])

$$J'_y = F' \frac{d^2}{3}.$$

Moment bezwładności trójkąta F''

$$J_y'' = F'' \frac{(b - d)^2}{18} + F'' \left[b - \frac{2}{3}(b - d) \right] =$$
$$= \frac{F''}{6} (b^2 + 2bd + 3d^2),$$

zaś moment bezwładności trójkąta F''':

$J_y''' = F''' \frac{d^2}{6}$. Wstawiwszy wartość $F' = d \cdot h$, $F'' = (b-d)\frac{h}{2}$, $F''' = \frac{dh}{2}$, znajdziemy:

$$J_y = \frac{d^3 h}{3} + (b - d)(b^2 + 2bd + 3d^2) \frac{h}{12} - \frac{d^3 h}{12},$$

czyli po redukcji:

$$J_y = \frac{bh}{12} (b^2 + bd + d^2) = F \frac{b^2 + bd + d^2}{6}. \quad [217]$$

Wyznaczymy jeszcze $J_{xy} = D = \int \xi \eta \, dF$, gdzie ξ, η oznaczają współrzędne środka paska elementarnego $dF = u \, dy$. Ponieważ, pomijając wielkości nieskończenie małe, $\eta = y$, $\xi = \frac{b}{2} + y \operatorname{ctg} \varphi$, *więc*

$$D = \int \left(\frac{b}{2} + y \operatorname{ctg} \varphi \right) y \, dF = \frac{b}{2} \int y \, dF + \operatorname{ctg} \varphi \int y^2 \, dF,$$

czyli: $$D = \frac{b}{2} F \cdot y_o + \operatorname{ctg}\varphi \cdot J_x, \qquad [218]$$

a po wstawieniu wartości $y_o = \frac{h}{3}, J_x = \frac{bh^3}{12}$, otrzymamy:

$$D = \frac{b\,h^2}{12}(b + h \operatorname{ctg}\varphi),$$

albo zważywszy, że $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{d - b/2}{h} = \frac{2d - b}{2h}$,

$$D = F(b + 2d)\frac{h}{12}. \qquad [219]$$

Na koniec moment zboczenia D_o dla układu X_o, Y_o znajdziemy z równania $D = D_o + F x_o y_o$, podstawiając w nim $x_o = \frac{b}{2} + \frac{1}{3}\left(d - \frac{b}{2}\right) = \frac{b + d}{3}$, $y_o = \frac{h}{3}$. Po uproszczeniu otrzymamy:

$$D_o = F(2d - b)\frac{h}{36}, \quad \text{albo} \quad D_o = \frac{b\,h^3}{36}\operatorname{ctg}\varphi, \qquad [220]$$

E. Moment bezwładności okręgu o masie M i promieniu R względem osi symetrii Z prostopadłej do płaszczyzny okręgu (rys. 75) jest oczywiście równy $M R^2$, gdyż wszystkie punkty okręgu są w tej samej odległości R od osi momentu. Moment ten równa się, jak wiadomo, sumie momentów względem dwu średnic prostopadłych. A zatem moment bezwładności okręgu względem średnicy określa równanie:

Rys. 75.

$$I = M\frac{R^2}{2}. \qquad [221]$$

F. Moment bezwładności koła (rys. 75) względem którejkolwiek średnicy znajdziemy najprościej rozkładając koło na współśrodkowe pierścienie elementarne o promieniu dr i masie $dM = \sigma 2r\pi\,dr$ (σ = gęstość powierzchniowa).

Moment bezwładności takiego pierścienia staje się w granicy momentem okręgu materialnego o promieniu r, a więc (według wzoru [220]):

$$\mathrm{d}I = \frac{r^2}{2}\,\mathrm{d}M,$$

skąd: $$I = \int \frac{r^2}{2}\,\mathrm{d}M = \sigma\pi \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \sigma\pi\,\frac{R^4}{4},$$

czyli $$I = M \cdot \frac{R^2}{4}, \quad \text{zaś} \quad J = \frac{\pi R^4}{4}. \qquad [222]$$

Biegunowy moment bezwładności I_b dla środka będzie oczywiście dwa razy większy, a zatem:

$$I_b = M\frac{R^2}{2}, \quad J_b = \frac{\pi R^4}{2}, \quad M_{R\,red} = \frac{M}{2}, \quad k = \frac{R}{\sqrt{2}} \qquad [223]$$

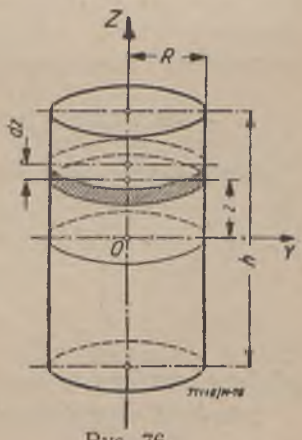
G. Walec obrotowy pełny.

Moment bezwładności względem osi geometrycznej Z (rys. 76) jest sumą momentów $\mathrm{d}I_z$ warstw elementarnych o grubości $\mathrm{d}z$, na które dzielimy walec płaszczyznami prostopadłymi do osi. Moment $\mathrm{d}I_z$ staje się w granicy momentem biegunowym koła materialnego o masie $\mathrm{d}M$, a więc:

$$\mathrm{d}I_z = \frac{R^2}{2}\,\mathrm{d}M,$$

skąd:

$$I_z = M \cdot \frac{R^2}{2}. \qquad [224]$$



Rys. 76.

Moment bezwładności warstewki $\mathrm{d}M$ względem osi Y przechodzącej przez środek walca równa się (według równania [181] i [222]):

$$\frac{R^2}{4}\,\mathrm{d}M + z^2\,\mathrm{d}M.$$

A zatem: $$I_y = \int \left(\frac{R^2}{4} + z^2\right) \mathrm{d}M .$$

Wstawiwszy wartość $\mathrm{d}M = \sigma R^2 \pi \, \mathrm{d}z$, mamy:

$$I_y = \sigma R^2 \pi \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\frac{R^2}{4} + z^2\right) \mathrm{d}z, \quad \text{czyli:}$$

$$I_y = \sigma \frac{R^2 \pi h}{4} \left(R^2 + \frac{1}{3} h^2\right) = \frac{M}{4} \left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right) \quad [225]$$

I_y i I_z są oczywiście głównymi centralnymi momentami bezwładności walca. Gdy jego wymiary dobierzemy tak, aby było: $I_y = I_z$, czyli $\frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}$, z czego wynika $h = R\sqrt{3}$, to elipsoida bezwładności walca staje się kulą.

H. Kula.

Ze względu na symetrię, główne centralne momenty bezwładności są sobie równe tak dla powłoki kulistej jak i dla kuli pełnej i wydrążonej. Wystarczy zatem obliczyć moment bezwładności I_o względem dowolnej średnicy kuli. Według twierdzenia końcowego z § 54 jest $3 I_o = 2 I_b$, czyli $I_o = \frac{2}{3} I_b$. Związek ten pozwala na proste obliczenie I_o kuli. Wiemy, że dla powłoki kulistej o promieniu r, a masie m jest $I_b = m r^2$, bo wszystkie punkty powłoki leżą w tej samej odległości r od środka kuli.

A zatem dla tejże powłoki kulistej:

$$I_o = \frac{2}{3} r^2 m = \frac{8}{3} \sigma \pi r^4, \quad [226]$$

gdzie σ oznacza gęstość powierzchniową.

Dla kuli wydrążonej o promieniu zewnętrznym R, wewnętrznym R_w i masie $M = \sigma\left(\frac{4}{3} R^3 \pi - \frac{4}{3} R_w^3 \pi\right)$ mamy:

$I_k = \int_{R_w}^{R} \mathrm{d}M \cdot r^2$, przy czym $\mathrm{d}M$ oznacza masę warstwy ele-

mentarnej o grubości dr ograniczonej dwiema kulami współśrodkowymi o promieniach r i $r + dr$, czyli:

$$dM = \sigma \cdot 4\pi r^2\, dr. \quad \text{Stąd} \quad I_b = 4\pi\sigma \int_{R_w}^{R} r^4\, dr =$$

$$= \frac{4}{5}\, \pi\sigma\, (R^5 - R_w^5),$$

a więc:

$$I_o = \frac{8}{15}\, \pi\sigma\, (R^5 - R_w^5) = \frac{2}{5}\, \frac{R^5 - R_w^5}{R^3 - R_w^3}\, M. \qquad [227]$$

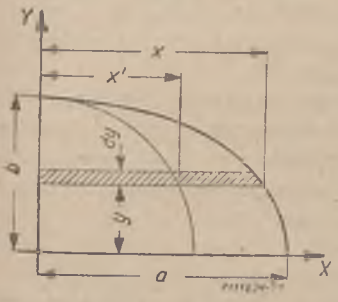
Podstawiając w tym wzorze $R_w = 0$ znajdziemy moment bezwładności kuli pełnej o promieniu R

$$I_o = \frac{8}{15}\, \pi\sigma R^5 = \frac{2}{5} R^2 M. \qquad [228]$$

J. Elipsa.

Obrawszy osie główne elipsy za osie X i Y prostokątnego układu współrzędnych (rys. 77), podzielmy figurę na paski elementarne o polu $dF = x\, dy$, a momentem bezwładności całej elipsy będzie:

$$I_x = 4 \int y^2 x\, dy,$$



Rys. 77.

przy czym całkowanie rozciąga się na jedną ćwiartkę uwidocznioną na rysunku. Należałoby teraz wyrazić x przez y z równania elipsy i wykonać całkowanie w granicach od $y = 0$ do $y = b$. Atoli prędzej dojdziemy do celu wpisując w elipsę koło o promieniu b i wyrażając odciętą x punktu elipsy przez odciętą x' punktu koła przynależną do tej samej rzędnej y.

Wtedy, jak wiadomo, $x = \frac{a}{b}\, x'$, a więc:

$$I_x = 4 \int y^2 \frac{a\, x'}{b} dy = \frac{a}{b} \cdot 4 \int y^2 x'\, dy = \frac{a}{b} I'_{x'},$$

jeżeli przez I'_x oznaczymy odpowiedni moment bezwładności koła o promieniu b. Wiemy jednak, że $I_x' = \pi \frac{b^4}{4}$, a zatem:

$$I_x = \pi \frac{a b^3}{4} = F \frac{b^2}{4}, \qquad [229]$$

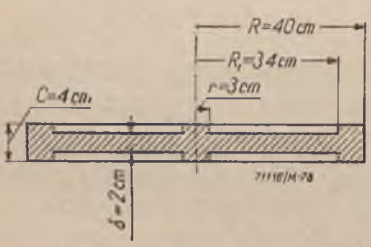
gdzie $F = \pi a b$ oznacza pole elipsy. Podobnie będzie:

$$I_y = \pi \frac{a^3 b}{4} = F \cdot \frac{a^2}{4}, \qquad [230]$$

$$I_z = I_b = F \cdot \frac{a^2 + b^2}{4} \qquad [231]$$

Momenty bezwładności ciał o postaci nie dającej się określić matematycznie (nieregularnej) wyznacza się doświadczalnie, korzystając z praw dynamiki ciał stałych, traktowanych jako sztywne (patrz § 77).

Przykład 1. Obliczyć moment bezwładności tarczy żeliwnej z rysunku 78 oraz ramię bezwładności i masę zredukowaną na promień zewnętrzny R względem osi symetrii tarczy.



Rys. 78.

Rozwiązanie. Ponieważ piasta i pierścień zewnętrzny mają taką samą grubość $c = 4$ cm, można obliczenie uprościć, odejmując od momentu bezwładności krążka o promieniu R i grubości c, moment bezwładności pierścienia o promieniu wewnętrznym $r = 3$ cm i zewnętrznym $R_1 = 34$ cm, a grubości $s = c - v = 4 - 2 = 2$ cm. A zatem geometryczny moment bezwładności:

$$J = \frac{R^4}{2} c - \frac{R_1^4 - r^4}{2} s = \frac{\pi}{2}(R^4 c - R_1^4 \cdot s + r^4 \cdot s) =$$

$$= \frac{\pi}{2}(40^4 \cdot 4 - 34^4 \cdot 2 + 3^4 \cdot 2) = \frac{\pi}{2}(10240000 - 2672672 + 162) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 7567490 = 11887000 \text{ cm}^5 = 118{,}87 \text{ dm}^5.$$

Pomnożywszy J przez gęstość żeliwa $= \frac{\gamma}{g} = 7{,}25$ kG/dm³: 98,1 dm/sek² $= 0{,}0739$ kG . sek²/dm⁴ otrzymamy: . . . .

$I = 118{,}87 \cdot 0{,}0739 = 8{,}784$ kGdm sek² $= 0{,}8784$ kGm sek²,

albo też po zamianie 1 kG $= 98{,}1$ (dm/sek²) kg $= 9{,}81$ m kg/sek²

$$I = 8{,}617 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

A zatem masa zredukowana na promieniu $R = 0{,}4$ m

$$M_{R\,red} = I/0{,}16 \text{ m}^2 = 53{,}8 \text{ kg}.$$

Masa całej tarczy:

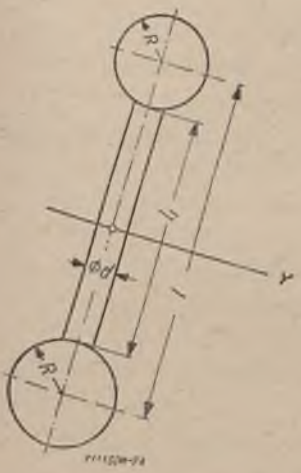
$$M = \frac{\gamma}{g}[c\,R^2\pi - s\,(R_1^2 - r^2)] =$$

$$= 0{,}0739\,[0{,}4 \cdot 16 - 0{,}2\,(3{,}4^2 - 0{,}3^2)]\,\pi \;\frac{\text{kG sek}^2}{\text{dm}^4} \cdot \text{dm}^3 =$$

$$= 0{,}0739 \cdot 4{,}106 \cdot \pi \cdot \frac{\text{kG}}{\text{dm}} \text{ sek}^2 =$$

$$= 0{,}0739 \cdot 4{,}106 \cdot \pi \cdot 98{,}1 \text{ kg} = 93{,}5 \text{ kg}.$$

A więc ramię bezwładności $k = \sqrt{\frac{I}{M}} = \frac{8{,}617}{93{,}5} = 0{,}3036$ m.



Rys. 79.

Przykład 2. Dwie kule (rys. 79) o promieniu $R = 8$ cm i odległości $l = 91$ cm, połączono trzonem okrągłym z tego samego materiału o promieniu $r = \frac{d}{} = 1$ cm.

Obliczyć moment bezwładności układu względem osi Y prostopadłej do osi trzonu i równoodległej od obu kul, z pominięciem bardzo małej masy części trzonu między jego przekrojem dotykającym kuli, a kulą.

Odpowiedź. Moment bezwładności kuli względem jej średnicy $I_0 = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{8\pi R^5}{15}$

Względem osi Y, odległej o $l/2$ od środka kuli jest $I_y =$

$$= \frac{\gamma}{g}\left[\frac{8\pi R^5}{15} + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{3} R^3\right].$$

Dla trzonu jest według wzoru [225]

$$I'_y = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\pi r^2 l_1}{4} \left(r^2 + \frac{1}{3} l_1^2 \right) \quad \text{gdzie } l_1 = l - 2R = 91 - 2.8 = 75 \text{ cm}$$

A zatem moment bezwładności układu.

$$I = \frac{2\gamma}{g} \left[\frac{8\pi R^5}{15} + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 \right] + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\pi}{} \cdot r^2 l_1 \left(r^2 + \frac{}{} l_1^2 \right) =$$

$$= \frac{\gamma}{g} \cdot \pi \left\{ \left[\frac{16}{15} \cdot R^5 + \frac{8}{3} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \cdot R^3 \right] + \frac{r^2 l_1}{4} \left(r^2 + \frac{1}{3} l_1^2 \right) \right\} =$$

$$= \frac{\gamma}{g} \cdot \pi \left(\frac{16}{15} \cdot 8^5 + \frac{8}{3} \cdot 45{,}5^2 \cdot 8^3 + \frac{1}{4} \cdot 75 \right) 1 + \frac{1}{3} \cdot 75^2 \Big) -$$

$$= \frac{\gamma}{g} \cdot \pi \left[\left(\frac{16 \cdot 8^3}{15} + \frac{8}{3} \cdot 45{,}5^2 \right) \cdot 512 + \left(\frac{75}{4} + \frac{1}{12} \cdot 75^3 \right) \right]$$

$$I = \frac{\gamma}{g} \quad (91) \text{ dm}^5$$

Gdy na przykład materiałem jest stal o ciężarze właściwym 7,85 kG/dm³.

to $\frac{\gamma}{g} = 7{,}85$ kG/dm³: 98,1 dm/sek², a więc:

$$I = \frac{7{,}85}{98{,}1} \cdot 91 \text{ kG/dm} \cdot \text{sek}^2 = 7{,}28 \text{ kG/dm} \cdot \text{sek}^2.$$

Rachując w układzie c.g.s. otrzymalibyśmy:

$$I = 7{,}85 \frac{\text{kg}}{(10 \text{ cm})^3} \cdot 91 \cdot (10 \text{ cm})^5 = 7{,}85 \cdot 91 \cdot 10^2 \text{ kgcm}^2 = 71435 \text{ kgcm}^2$$

Rozdział IV

KINETYKA PUNKTU MATERIALNEGO NIESWOBODNEGO

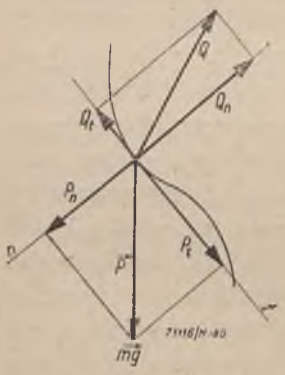
61. Ruch nieswobodny — Reakcja linii lub powierzchni ograniczającej swobodę punktu materialnego

Już w kinematyce ciała sztywnego mieliśmy do czynienia z ruchem nieswobodnym punktu materialnego jako jednego z punktów ciała, które porusza się w sposób określony. Tak np. punkt ciała obracającego się dokoła osi stałej jest zmuszony do pozostawania na okręgu koła; punkt ciała kręcącego się dokoła stałego punktu może poruszać się tylko po powierzchni kuli itd. Uogólniając te najprostsze sposoby ograniczenia swobody punktu materialnego, rozróżniamy *ruch nieswobodny* takiego punktu *na danej krzywej* i *ruch nieswobodny na danej powierzchni* geometrycznej. Modelem uzmysławiającym ruch pierwszy jest kula nawleczona na zakrzywiony drut albo poruszająca się wewnątrz zakrzywionej rury, której przekrój wypełnia z małym luzem, umożliwiającym jej przesuwanie się wzdłuż rury. Ruch takiego rodzaju odbywa np. ciężka kulka na powierzchni wklęsłego dna naczynia, gdy jej udzielimy stosownej prędkości początkowej (w obu modelach nie bierzemy pod uwagę możliwości obrotu kulki, grającego rolę podrzędną, gdy kulka jest bardzo mała w porównaniu do rozmiarów toru, który opisuje).

Punkt materialny nieswobodny, na który działa dana siła $\vec{P}$ (np. siła ciężkości) nie może w ogóle poruszać się z przyśpieszeniem $\vec{p} = \frac{\vec{P}}{m}$, jakie by otrzymał w ruchu swobodnym

według prawa podstawowego dynamiki, lecz będzie się poruszał z przyśpieszeniem $\vec{q}$ różnym od $\vec{p}$. W myśl podstawowego prawa dynamiki można ten punkt materialny traktować jako swobodny, lecz pozostający pod działaniem nie tylko samej siły $\vec{P}$, ale nadto jeszcze siły $\vec{Q}$ takiej, że wypadkowa obu sił $\vec{P} + \vec{Q}$ udziela mu przyśpieszenia $\vec{q}$ równego $\frac{\vec{P}+\vec{Q}}{m}$. Tę siłę dodatkową nazywamy *reakcją* (także *oporem* lub *oddziaływaniem*) krzywej lub powierzchni ograniczającej swobodę ruchu.

Reakcje nieruchomej krzywej lub powierzchni zaliczamy do kategorii *sił oporowych*, zwanych krótko *oporami*, a także *siłami biernymi*, tj. takimi, które same nie mogą udzielić ruchu punktowi materialnemu, gdy tenże spoczywa. Do tego jest niezbędna siła należąca do kategorii *sił czynnych*, jakimi są wszelkie siły określone polem sił, jak np. siła ciężkości. Skoro jednakże punkt materialny posiada już prędkość w ruchu nieswobodnym, to reakcja — jak zobaczymy — obejmuje rolę siły czynnej, powodując zmianę wektora prędkości bez udziału innych sił czynnych.



Rys. 80.

Weźmy teraz pod uwagę jeden z najprostszych przypadków ruchu nieswobodnego obserwowanych w przyrodzie, tj. ruch ciężkiego punktu materialnego po danym torze krzywoliniowym, leżącym w płaszczyźnie pionowej (rys. 80). Poprowadźmy w miejscu gdzie się znajduje chwilowo punkt materialny m styczną do toru t i normalną n. Rozłóżmy następnie daną siłę ciężkości $\vec{P} = m\vec{g}$ na składową styczną $\vec{P}_t$ i normalną $\vec{P}_n$. Podobnie rozłóżmy nieznaną jeszcze reakcję $\vec{Q}$ na $\vec{Q}_t$

i $\vec{Q}_n$. Przyśpieszenie $\vec{q}$, wywołane działaniem obu sił $\vec{P}$ i $\vec{Q}$, ma — jak wiadomo z kinematyki — składową styczną $\frac{d^2s}{dt^2}$ i składową normalną $\frac{v^2}{\varrho}$. Mamy więc stosownie do prawa podstawowego:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = P_t + Q_t \text{ (sile wypadkowej z } \vec{P}_t \text{ i } \vec{Q}_t)$$

$$m \frac{v^2}{\varrho} = P_n + Q_n \text{ (sile wypadkowej z } P_n \text{ i } Q_n).$$

Przyjąwszy na osiach T i N kierunki dodatnie jak na rysunku 80 i oznaczywszy przez P_t, P_n, Q_t, Q_n wartości algebraiczne składowych, napiszemy *:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = P_t + Q_t \qquad [232]$$

$$\frac{m v^2}{\varrho} = P_n + Q_n. \qquad [233]$$

Te dwa równania zawierają obok szukanych elementów ruchu (tj. prędkości v i przyśpieszenia stycznego $\frac{dy}{dt}$), które razem stanowią jedną niewiadomą, jeszcze dwie, tj. Q_n i Q_t. Do rozwiązania trzeba zatem jeszcze jednego równania warunkowego. To równanie może mieć postać różną, zależnie od sposobu w jaki urzeczywistniamy ograniczenie swobody punktu materialnego. Doświadczenie poucza, że w przypadkach realnych jest składowa styczna reakcji z przybliżeniem, zwykle bardzo znacznym, proporcjonalna względem składowej normalnej, czyli:

$$Q_t = \mu Q_n. \qquad [234]$$

Wtedy nazywamy składową styczną *oporem tarcia* lub *tarciem*, a liczbę stałą dodatnią μ (dającą się wyznaczyć tylko doświad-

* Dwuznaczność litery t, którą oznaczono czas po lewej stronie równania, a po prawej kierunek stycznej do toru, nie daje powodu do nieporozumień.

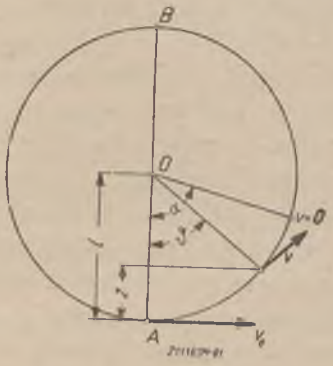
czalnie) zowiemy *współczynnikiem oporu*, albo *współczynnikiem tarcia*. Niekiedy jest współczynnik oporu tak mały, że dla uzyskania rozwiązania dostatecznie przybliżonego możemy go uważać za zero, a więc przyjąć, że $Q_t = 0$. To założenie upraszczające wyrażamy w wielu przypadkach, mówiąc że krzywa lub powierzchnia ograniczająca swobodę punktu materialnego jest *doskonale gładka*. Wtedy równania powyższe upraszczają się do postaci:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = P_t; \qquad Q_n = \frac{m v^2}{\varrho} - P_n. \qquad [235]$$

Gdy uda się rozwiązać pierwsze z tych równań, to znajdziemy zależność współrzędnej drogi s od czasu t, po czym obliczymy $v = \frac{ds}{dt}$, a z równania drugiego możemy obliczyć reakcję toru Q_n jako sumę składowej normalnej siły czynnej wziętej w kierunku przeciwnym (czyli siły równoważącej P_n) i siły $\frac{m v^2}{\varrho}$, zwanej siłą dośrodkową. Q_n przedstawia siłę, jaką wywiera tor na punkt materialny podczas jego ruchu. Nawzajem tor doznaje nacisku normalnego R o wartości tej samej lecz skierowanej przeciwnie, czyli złożonego z siły odśrodkowej o wartości liczbowej $\frac{m v^2}{\varrho}$ i składowej normalnej siły P_n. Wyniki te przedstawiają się jeszcze jaśniej w świetle rozwiązania bardzo ważnego zadania w paragrafie następnym. Podkreślimy jeszcze, że reakcja toru występuje także wtedy, gdy nie ma sił czynnych, a punkt materialny otrzymał prędkość początkową v_o. Ta reakcja jest wówczas samą siłą dośrodkową o wielkości $m v^2/\varrho$. Jeżeli tor jest gładki, a więc praca reakcji równa 0, to prędkość v zachowuje wartość stałą v_o. Gdy jednakże zachodzi tarcie, to wielkość początkowej energii kinetycznej $m \frac{v_o^2}{2}$ zmniejsza się, ponieważ praca tarcia jako praca składowej stycznej reakcji o kierunku przeciwnym do kierunku ruchu jest ujemna. Dlatego punkt materialny po przebyciu pewnej długości drogi przejdzie w stan spoczynku.

62. Wahadło matematyczne proste

Prostym wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny zmuszony do poruszania się pod działaniem siły ciężkości po łuku koła pionowego przy założeniu, że tor jest doskonale gładki (rys. 81). Wahadło matematyczne jest wyidealizonym modelem ciężkiej kulki zawieszonej na nici nierozciągliwej, której koniec górny jest ustalony i pobudzonej do ruchu z pionowego położenia równowagi przez lekkie potrącenie w kierunku poziomym, przy czym masa nici jest tak mała, że można ją pominąć wobec masy kulki. Odległość l środka kulki od punktu zawieszenia jest *długością wahadła matematycznego*, a zarazem promieniem koła, którego łuk jest torem punktu materialnego i to torem doskonale gładkim. Mimo to zachodzi opór na torze w doświadczeniu laboratoryjnym, ale opór ten jest innego rodzaju aniżeli opór tarcia w przykładach z § 61. Jest nim opór powietrza, który jest zupełnie niezależny od reakcji normalnej toru, a tylko zależny od prędkości ruchu i podobnie jak tarcie, skierowany jest w tym przypadku przeciwnie niż ta prędkość. Opór ten pominiemy na razie w teorii jako zwykle bardzo mały, zwłaszcza gdy wahadło umieścimy pod kloszem pompy powietrznej i powietrze wypompujemy. Zależnie od wielkości prędkości początkowej, z jaką wytrącono kulkę z położenia równowagi, może ona podczas ruchu oddalić się od tego położenia, jednakże z powodu ograniczenia swobody długością nici nie może wyjść poza okręg koła pionowego o promieniu l. Zadanie uprościmy zastępując nić prętem sztywnym, nieważkim, zdolnym do przeniesienia nie tylko, jak nić, siły ciągnącej, ale także siły ściskającej pręt podłużnie, jaka np. odpowiada położeniu kulki wahadła ponad punktem zawieszenia. To położenie bowiem jest położeniem równowagi



Rys. 81.

tylko wtedy, gdy ciężar kulki jest zrównoważony reakcją pręta skierowaną do góry, czyli pręt jest ściskany podłużnie.

Ale i w tych warunkach uproszczonych ruch wahadła, jak łatwo zauważyć, może być dwojakiego rodzaju. Zależnie od wielkości prędkości początkowej v_o jakiej udzielono kulce wahadła z położenia (dolnego) równowagi, może kulka opisywać cały okręg w tym samym kierunku nieustannie, albo też wznosić się i opadać kolejno w obu kierunkach. W obu przypadkach jest *ruch* wahadła *okresowy*, tzn. powtarza się identycznie w równych przedziałach czasu T. Jednakże tylko w przypadku drugim nazywamy *ruch wahadłowym*. Ażeby zbadać przy jakich wartościach v_o zachodzi ruch typu pierwszego lub drugiego, zastosujemy zasadę pracy (albo zasadę zachowania energii), obrawszy jako poziom porównawczy płaszczyznę poziomą przechodzącą przez dolne położenie równowagi. W położeniu tym jako początkowym, energia kinetyczna wahadła równa się $\frac{m v_o^2}{2}$. W położeniu odchylonym o kąt ϑ (rys. 81) znajdzie się kulka wahadła na wysokości $z = l - l\cos\vartheta = 2\,l\sin^2\frac{\vartheta}{2}$, a odpowiednia energia kinetyczna

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{m v_o^2}{2} - m g z,$$

stąd

$$v^2 = v_o^2 - 4 g l \sin^2\frac{\vartheta}{2}. \qquad [236]$$

Ażeby kulka wahadła przeszła przez punkt najwyższy okręgu B, dla którego $\vartheta = \pi$, a więc $\sin\frac{\vartheta}{2} = 1$, musi prędkość v_1 w tym punkcie spełnić równanie:

$$v_1^2 = v_o^2 - 4 g l,$$

co jest możliwe tylko wtedy, gdy $v_o^2 > 4 g l$, albowiem przy $v_o^2 < 4 g l$ równanie powyższe nie ma pierwiastka rzeczywistego dla niewiadomej v_1.

Z tego wynika, że *ruch* wahadła będzie *jednozwrotnym*, czyli *obrotowym* albo *wahadłowym*, tj. *dwuzwrotnym*, zależnie od tego czy prędkość w punkcie najniższym v_o jest większa od $2\sqrt{g\,l}$, czy też mniejsza.

W dalszym ciągu zajmiemy się tylko ruchem wahadłowym, oznaczając przez α największą wartość kąta odchylenia ϑ nici, przy której prędkość odwracając kierunek staje się zerem. A zatem z równania ogólnego [236] wynika:

$$0 = v_o^2 - 4\,g\,l\,\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

a podstawiwszy stąd wartość v_o^2 w [236] mamy:

$$v^2 = 4\,g\,l\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Z równania tego przez podstawienie $v = \frac{ds}{dt} = \frac{l\,d\vartheta}{dt}$

znajdujemy $l^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right) = 4\,g\,l\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$,

a więc:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}}. \qquad [237]$$

Jest to ścisłe równanie różniczkowe ruchu wahadłowego, którego rozwiązanie wykracza poza ramy niniejszego podręcznika. Poprzestaniemy przeto na rozwiązaniu przybliżonym w zastosowaniu do wahań o bardzo małej *amplitudzie* α. W tym celu napiszemy równanie ruchu według prawa podstawowego, rozłożywszy ciężar mg kulki wahadła na składową normalną $-mg\cos\vartheta$ i składową styczną o wartości liczbowej $mg\sin\vartheta$. Stosownie do drugiego z równań [235] jest reakcja normalna, a więc napięcie nici równe

$$mg\cos\vartheta + \frac{mv^2}{l}.$$

Pierwsze zaś z tych równań daje:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\vartheta.$$

Znak — tłumaczy się tym, że siła $m g \sin \vartheta$ jest skierowana przeciwnie niż kierunek, w którym rośnie kąt ϑ, a zarazem s. Podstawiwszy z powrotem $\vartheta = s/l$, otrzymamy po uproszczeniu:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = - g \sin \frac{s}{l} \qquad [238]$$

jako równanie różniczkowe ruchu wahadłowego równoważne z równaniem [237], a więc nastręczające te same trudności.

Skoro jednakże założymy, że $\vartheta = \frac{s}{l}$ nie przewyższa podczas ruchu wartości odpowiadających bardzo małej amplitudzie α, to bez popełnienia znaczniejszego błędu można $\sin \frac{s}{l}$ zastąpić przez $\frac{s}{l}$ i napisać:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = - \frac{g}{l} s \ , \qquad [239]$$

jako przybliżone równanie różniczkowe małych wahnień wahadła matematycznego. To równanie ma postać analityczną tę samą co równanie różniczkowe ruchu harmonicznego, którego rozwiązaniem jest wyrażenie:

$$s = a \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

albowiem dwukrotne różniczkowanie tego równania daje kolejno:

$$\frac{d s}{d t} = \frac{2 a \pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a \sin \frac{2\pi}{T} t = - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot s \ , \qquad [240]$$

a więc istotnie równanie tego samego typu co [238].
Z porównania obu wynika, że

$$\frac{g}{l} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 ,$$

a zatem:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \qquad [241]$$

W ten sposób stwierdziliśmy, że bardzo małe wahnienia wahadła matematycznego prostego można uważać za proste ruchy harmoniczne, których okres T przedstawiony wzorem powyższym nie zależy od amplitudy.

Stopień przybliżenia ocenimy przez porównanie z wzorem ścisłym na okres wahnienia, otrzymanym z rozwiązania ścisłego równania [237] lub [238] w postaci szeregu nieskończonego zbieżnego dla wartości $\alpha < \pi$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha}{2} + \cdots\right] \quad [242]$$

Jeżeli T_o oznacza okres wahnień nieskończenie małych równy $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, to wzór ścisły daje np. dla $\alpha = 8^0$

$$T = 1{,}0012\ T_o.$$

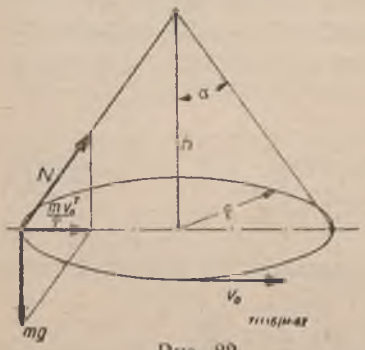
Wahnienia o amplitudzie mniejszej od 8^0 można więc uważać za izochroniczne z błędem nie dochodzącym 1,2 $^0/_{00}$. Przy $\alpha = 4^0$ jest ten błąd prawie 4 razy mniejszy.

63. Wahadło stożkowe i sferyczne

Gdy kulkę m wahadła „matematycznego" odchylimy od położenia równowagi i udzielimy jej prędkości początkowej v_o nie leżącej w płaszczyźnie pionowej nici, ale np. prostopadłej do tej płaszczyzny, to nazywamy *wahadło sferycznym*, ponieważ torem kulki jest wówczas krzywa przestrzenna, leżąca na powierzchni kuli o promieniu l. Ruch wahadła sferycznego jest w ogóle bardziej złożony od ruchu wahadła prostego rozpatrywanego w paragrafie poprzednim, atoli łatwo zauważyć możliwość prostego przypadku szczególnego, kiedy kulka wahadła opisuje okrąg poziomy, a nić opisuje pobocznicę stożka obrotowego. Wtedy wartość prędkości początkowej v_o jest zarazem stałą wartością prędkości kulki i musi

być taka, aby wypadkowa z napięcia nici i ciężaru kulki mg (rys. 82) była równa sile dośrodkowej $\frac{mv^2}{\varrho}$. Ponieważ $\varrho = h \operatorname{tg} \alpha$, gdzie h jest wysokością stożka opisywanego przez wahadło, a α kątem nachylenia do pionu nici wahadła, przeto

$$\frac{m v_o^2}{\varrho} = \frac{m v_o^2}{h \operatorname{tg} \alpha}.$$



Rys. 82.

Z drugiej strony wynika z równoległoboku sił wymienionych powyżej, że:

$$\frac{m v_o^2}{\varrho} = m g \operatorname{tg} \alpha.$$

Z porównań prawych stron tych równań otrzymujemy:

$$v_o^2 = g h \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

czyli $v_o = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{g h} = \varrho \sqrt{\frac{g}{h}}$. Taką wartość musi mieć v_o, aby wahadło opisywało stożek obrotowy. Okres T jednego obrotu znajdziemy dzieląc $2 \varrho \pi$ przez v_o, a więc

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{h}{g}} \qquad [243]$$

czyli:

trwanie T jednego obrotu wahadła stożkowego o długości l równa się okresowi wahnień nieskończenie małych wahadła prostego o długości równej wysokości stożka $h = l \cos \alpha$. T będzie zatem tym mniejsze, a v_o tym większe, im większy jest kąt α. Przy bardzo małej wartości α jest $\cos \alpha$ prawie równe 1, a więc $T \cong 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, czyli czas obrotu wahadła stożkowego dąży do zrównania się z okresem wahnień prostych nieskończenie małych. Wartość α nie może osiągnąć $\frac{\pi}{2}$ (tj. 90^0), gdyż wtedy byłoby $T = 0$, a $v_o = \infty$.

Przykład 1. Wahadło stożkowe (rys. 83) o długości $l = 60$ cm jest podczas ruchu (jednostajnego) nachylone do poziomu pod kątem $\beta = 10^0$, 15^0, 30^0. Obliczyć odpowiednie prędkości kulki wahadła.

Rozwiązanie. Z wywodu w § 63 wynika, że szukana prędkość $v_0 =$

$$= \operatorname{tg}\alpha \sqrt{gh} = \operatorname{ctg}\beta \sqrt{gl \sin\beta} = \cos\beta \sqrt{\frac{gl}{\sin\beta}}$$

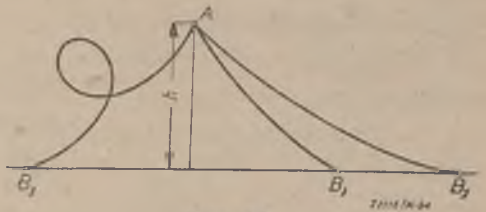
wartość $\sqrt{gl} = \sqrt{981 \cdot 60} = 242$ cm/sek, a więc

dla	$\alpha =$	10^0	15^0	30^0
jest	$\frac{\cos\beta}{\sqrt{\sin\beta}} =$	2,36	1,90	1,23
	$v_0 =$	571 cm/sek	460 cm/sek	298 cm/sek.

64. Ruch puktu materialnego ciężkiego po torach różnej postaci

Dajmy na to, że z punktu A, leżącego nad ziemią (rys. 84), prowadzą różne tory krzywoliniowe AB_1, AB_2, ... nie mające punktów wyższych od A, do poziomu B niższego od A o wysokość h. Zakładamy przy tym, że tory nie mają załamań (czyli, że ich krzywizna ma wszędzie wartość skończoną). Gdy

Rys. 83.



Rys. 84.

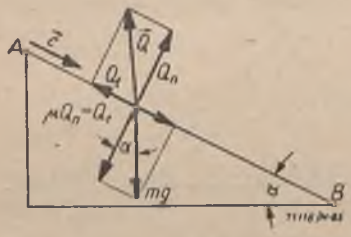
w punkcie A umieścimy na każdym z torów cząstkę o ciężarze mg, to wszystkie te cząstki będą spadały, dążąc ku punktom leżącym w poziomie niższym. Jeżeli tory dane są doskonale gładkie, to praca reakcyj jako prostopadłych do toru jest równa zeru, a więc stosownie do zasady energii jest przyrost energii kinetycznej dla każdej cząstki równy ubytkowi mgh energii potencjalnej. Wtedy wszystkie cząstki osiągają w poziomie B tę samą prędkość końcową $v = \sqrt{2gh}$.

Gdy jednak przyjmiemy, że zachodzi tarcie, to równanie energii przybierze postać:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh + L_t,$$

gdzie L_t jest pracą tarcia.

Otóż praca tarcia jest zawsze ujemna i zależna w zadaniu rozpatrywanym przede wszystkim od długości drogi (przy danym współczynniku tarcia). Wobec tego prędkości końcowe cząstek na poziomie niższym B będą mniejsze od $\sqrt{2gh}$ i to tym więcej, im dłuższy jest ich tor. Obliczenie ogólne napotyka na poważne trudności rachunkowe z wyjątkiem przypadku toru prostoliniowego, który zresztą jest praktycznie bardzo ważny. Taki tor nachylony do poziomu pod kątem α łączymy w myśli z płaszczyzną tak samo nachyloną, zwaną *równią pochyłą*. Zbadamy ten ruch cząstki (punktu materialnego) na takim torze z uwzględnieniem tarcia o współczynniku μ (stałym), niezależnym od prędkości, przyjmując najpierw, że cząstka w położeniu A (rys. 85) otrzymała prędkość początkową $\vec{c}$ skierowaną ku dołowi.



Rys. 85.

Wtedy przyśpieszenie $\vec{p}$ ma kierunek toru i powstaje pod wpływem składowej stycznej ciężaru $mg \sin\alpha$ skierowanej w dół i tarcia o wielkości μQ_n skierowanego przeciwnie, przy czym Q_n oznacza składową normalną reakcji toru. Ponieważ nie ma przyśpieszenia normalnego do toru, przeto Q_n musi równoważyć składową normalną ciężaru $mg \cos\alpha$, czyli

$$\mu Q_n = \mu mg \cos\alpha.$$

A zatem:

$$mp = mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha, \quad \text{a stąd}$$

$$p = g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha). \qquad [244]$$

To równanie wyraża, że przyśpieszenie p ruchu w dół jest stałe i mniejsze od $g \sin\alpha$ o wielkość $\mu g \cos\alpha$. Wobec tego to przyśpieszenie może także być równe 0, gdy $g \sin\alpha = \mu g \cos\alpha$, czyli gdy $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. Ale wzór z § 61:

$$Q_t = \mu Q_n$$

wskazuje, że kąt nachylenia reakcji całkowitej do normalnej, zwany *kątem tarcia* φ jest określony równaniem:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q_t}{Q_n} = \mu.$$

Stąd wniosek, że spadanie po równi pochyłej z uwzględnieniem tarcia staje się ruchem jednostajnym, gdy kąt nachylenia równi α jest równy kątowi tarcia φ.

Wynik ten daje wskazówkę, jak znaleźć doświadczalnie wartość współczynnika tarcia.

W przypadku, kiedy $\mu\cos\alpha > \sin\alpha$, czyli $\alpha < \varphi$, staje się przyśpieszenie p ujemnym, a ruch odbywa się z prędkością zmniejszającą się aż do zera, po czym oczywiście ustaje.

Rozpatrzmy teraz ruch w kierunku odwrotnym, tj. w górę. Wtedy kierunek tarcia jest zgodny z kierunkiem składowej stycznej ciężaru $mg\sin\alpha$ i otrzymujemy:

$$p = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha), \qquad [245]$$

co wyraża, że ruch w górę jest zawsze opóźniony.

Wzory [244] i [245] można jeszcze uprościć, wprowadzając $\mu = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$. Wtedy wzór [242] przyjmie postać:

$$p = g\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} = -g\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\varphi}. \qquad [246]$$

zaś wzór [245] postać:

$$p = -g\frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\cos\varphi}. \qquad [247]$$

Oba wzory można przeto zastąpić jednym:

$$p = -g\frac{\sin(\varphi \mp \alpha)}{\cos\varphi} \qquad [248]$$

ze znakiem podwójnym $\mp$, przy czym znak górny odnosi się do ruchu w dół, a dolny do ruchu w górę.

65. Stałość równowagi (stateczność) punktu materialnego w potencjalnym polu sił

Wiadomo ze statyki, że w położeniu równowagi punktu materialnego swobodnego jest wypadkowa z wszystkich sił nań działających równa zeru; zaś dla punktu nieswobodnego zmuszonego do pozostawania na gładkiej krzywej lub płaskiej powierzchni wypadkowa z sił czynnych winna być w położeniu równowagi prostopadła do krzywej lub powierzchni. Wszystkie te przypadki obejmuje *zasada prac przygotowanych* (*wirtualnych*), która wyraża, że w położeniu równowagi jest suma algebraiczna prac przygotowanych sił czynnych równa 0. Każde z tych twierdzeń dotyczy warunków równowagi koniecznych i wystarczających, jednakże ze stanowiska dynamiki rozróżniamy nadto różne rodzaje równowagi, a mianowicie:

Równowagę punktu materialnego nazywamy *stałą* lub *stateczną*, gdy udzieliwszy mu ze stanu spoczynku w położeniu równowagi prędkości dostatecznie małej wywołujemy ruch tego punktu materialnego zawarty w otoczeniu najbliższym położenia równowagi *.

Prostego przykładu dostarcza punkt materialny m zastępujący małą ciężką kulkę, położoną w miejscu najniższym półkuli wydrążonej, która wytrącona lekko z położenia równowagi waha się około tego położenia, a amplituda tego wahania jest tym mniejsza, im mniejsza była prędkość początkowa v_0, jakiej udzieliliśmy kulce.

Natomiast nazywamy *równowagę niestałą* (*niestateczną*) lub *chwiejną*, gdy nawet dowolnie mała ale różna od zera prędkość v_0, udzielona punktowi materialnemu w jego położeniu równowagi powoduje ruch oddalający ten punkt materialny

* To określenie rodzajów równowagi stosuje się do wszelkich układów materialnych.

z tego położenia na zawsze. Przykładem jest punkt materialny położony na szczycie gładkiej kopuły.

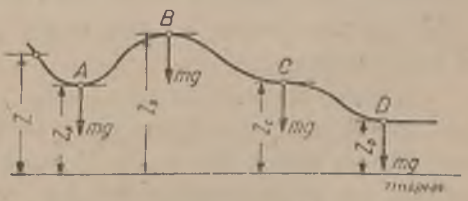
Prócz powyższych dwu rodzajów równowagi odróżniamy jeszcze jako przypadek szczególny równowagi niestatecznej tzw. *równowagę obojętną*, która zachodzi wtedy, gdy przesunąwszy punkt materialny z położenia równowagi do miejsca pobliskiego natrafimy znowu na położenie równowagi. Taki przypadek zachodzi np. gdy punkt materialny spoczywa na gładkiej płaszczyźnie poziomej.

Gdy dany punkt materialny znajduje się w potencjalnym polu sił, to kryterium stateczności w jego położeniu równowagi wyraża twierdzenie *Mindinga i Dirichleta*:

Równowaga punktu materialnego w polu potencjalnym sił jest stała w położeniu odpowiadającym minimum energii potencjalnej.

Natomiast w położeniu odpowiadającym maximum energii potencjalnej jest równowaga punktu materialnego w polu sił potencjalnym niestateczna (niestała).

Poza tym można dowieść w bardzo licznych przypadkach, że we wszystkich położeniach równowagi, w których energia potencjalna nie osiąga minimum, równowaga jest niestała. Słuszność twierdzeń powyższych łatwo wykazać na prostym szczególnym przypadku punktu materialnego w jednorodnym polu sił ciężkości, kiedy punkt ten jest zmuszony do pozostawania na krzywej leżącej w płaszczyźnie pionowej (rys. 86). Uwidocznione na rysunku cztery miejsca *A*, *B*, *C* i *D*, w którym styczna do krzywej jest



Rys. 86.

pozioma, są oczywiście położeniami równowagi punktu materialnego. Atoli równowaga stała zachodzi tylko w punkcie A, gdzie energia potencjalna $m g z_A$, jest mniejsza od energii potencjalnej $m g z$, odpowiadającej sąsiednim punktom toru. Gdy bowiem udzielimy punktowi materialnemu z tego położenia bardzo małej energii kinetycznej $\frac{1}{2} m v_o^2$, to rozpocznie on ruch, dla którego zasada zachowania energii daje równanie:

$$\frac{1}{2} m v_o^2 + m g z_A = \frac{1}{2} m v^2 + m g z .$$

stąd

$$v^2 = v_o^2 - 2 g (z - z_A),$$

co dowodzi, że ruch jest opóźniony, a punkt materialny zatrzyma się w miejscu A', dla którego $z - z_1 = \frac{v_o^2}{2 g}$, po czym rozpocznie się ruch powrotny ku A, który prowadzi punkt materialny do A'', gdzie również jest $z - z_1 = \frac{v_o^2}{2 g}$ itd. Powstający ruch jest więc ruchem okresowym o amplitudzie tym mniejszej, im mniejszej energii kinetycznej udzielono punktowi materialnemu z położenia równowagi, które zatem jest położeniem równowagi stałej.

Natomiast punkt B, w którym energia potencjalna jest maksimum, jest położeniem równowagi niestałej, ponieważ równanie energii daje przy $z < z_B$

$$v^2 = v_o^2 + 2 g (z_B - z),$$

co dowodzi, że prędkość się zwiększa, a punkt materialny oddala się na zawsze od położenia równowagi przy dowolnie małej wartości v_o.

To samo zachodzi w położeniu C, gdzie linia toru ma punkt przegięcia o stycznej poziomej, przy udzieleniu punktowi materialnemu prędkości v_o w kierunku na prawo, gdzie tor się obniża. Na koniec punkt D leżący na poziomej prostej części toru jest widocznie położeniem równowagi obojętnej, albowiem po przesunięciu punktu materialnego na prawo lub lewo znajdzie się znowu w położeniu równowagi.

Należy pamiętać, że w wywodach powyższych wyłączyliśmy tarcie. Otóż nie trudno zauważyć, że istnienie tarcia wywołałoby we wszystkich czterech przypadkach, biorąc ściśle, ten sam rodzaj równowagi, tj. równowagę stałą. Albowiem dzięki tarciu (o stałym współczynniku μ) punkt materialny, wytrącony z któregokolwiek położenia równowagi przy dostatecznie małej prędkości początkowej v_0, musi się zatrzymać w niewielkiej odległości od położenia równowagi. Mimo to stosujemy zwykle kryteria stałości równowagi z pominięciem tarcia także w zagadnieniach mechaniki technicznej, ponieważ działanie tarcia zawodzi, jak uczy doświadczenie przy wstrząśnieniach, które pobudzają do drgań sprężystych każde ciało stałe ograniczające swobodę ruchu rozpatrywanego punktu materialnego.

Wypada jeszcze zaznaczyć, że w polu siły ciężkości, uważanym za jednorodne, można kryterium stateczności wyrazić twierdzeniem sformułowanym przez *Torricellego* o dwa wieki wcześniej zanim *Minding* i *Dirichlet* podali twierdzenie ogólniejsze powyżej przytoczone. Twierdzenie *Torricellego* w odniesieniu do punktu materialnego brzmi:

P u n k t m a t e r i a l n y j e s t t y l k o w t e d y w r ó w n o w a d z e s t a ł e j , g d y z a j m u j e p o ł o ż e n i e m o ż l i w i e n a j n i ż s z e .

To twierdzenie jest zresztą tylko wnioskiem z zasady *Torricellego* wypowiedzianej przezeń dla układów materialnych, o których będzie dalej mowa.

Rozdział V

KINETYKA WZGLĘDNA PUNKTU MATERIALNEGO

66. Siła bezwzględna i względna

Rozpatrując w rozdziałach poprzednich ruchy punktu materialnego, przyjmowaliśmy milcząco, że odnosimy je do układu bezwzględnego, czyli galileuszowego (bezwładnościowego). Wiemy jednak, że i ziemia nasza będąca naturalnym układem odniesienia mechaniki technicznej nie jest układem bezwładnościowym, lecz posiada względem takiego układu znane przyśpieszenie ruchu postępowego i prędkość kątową obrotu. Tylko dzięki temu, że przyśpieszenie ruchu postępowego ziemi jest nadzwyczaj małe wobec przyśpieszenia ciężkości $\vec{g}$ na jej powierzchni, gdyż wynosi średnio 0,596 cm/sek^2, podczas gdy $g = 981$ cm/sek^2, można uważać ruch postępowy ziemi za jednostajny z prędkością 29846 m/sek. Ale wpływu obrotu ziemi, odbywającego się z prędkością kątową $\omega = 0{,}0000729$ sek^{-1} już często pomijać nie można, gdyż powoduje on na powierzchni ziemi przyśpieszenie unoszenia $p_u = r\,\omega^2$, gdzie r jest promieniem równoleżnika, a więc np. na równiku, gdzie r staje się równe 6378 km = 6378000 m jest $p_u = 0{,}0339$ m/sek^2 = 3,39 cm/sek^2. Zanim zbadamy dokładniej skutki tego przyśpieszenia, rozpatrzmy sprawę ogólnie.

W tym celu przyjmiemy, że dany swobodny punkt materialny otrzymał w układzie bezwzględnym (galileuszowym) *przyśpieszenie* $\vec{p}_b$, które nazwiemy *bezwzględnym*. To dowodzi, w myśl prawa podstawowego, że działa nań siła $m\vec{p}_b = \vec{P}_b$, którą nazywamy *siłą bezwzględną* (taką jest np. grawi-

tacja). Otóż w układzie względnym, (jak np. ziemia) tj. takim, którego ruch w układzie galileuszowym cechuje w ogóle przyśpieszenie przesunięcia i prędkość kątowa obrotu, przedstawia się ten sam ruch punktu materialnego, jak uczy kinematyka, inaczej. Jego przyśpieszeniem względem tego układu jest $\vec{p}_w$ różne od $\vec{p}_b$, a więc przedstawia się tak, jakby na punkt materialny działała inna siła $\vec{P}_w = m\vec{p}_w$, zwana *siłą względną*. Związek między obu siłami znajdziemy ze związku między przyśpieszeniami wyprowadzonego w kinematyce (§ 35), tj.

$$\vec{p}_w = \vec{p}_b - \vec{p}_u - \vec{p}_c,$$

gdzie $\vec{p}_u$ oznacza *przyśpieszenie unoszenia* (§ 27), a $\vec{p}_c = 2\vec{v}_w \times \vec{\omega}$ *przyśpieszenie Coriolisa*, równe podwójnemu iloczynowi wektorowemu prędkości względnej $\vec{v}_w$ i prędkości kątowej obrotu układu $\vec{\omega}$. Pomnożywszy obustronnie przez masę m punktu materialnego, otrzymamy

$$\vec{P}_w = \vec{P}_b - m\vec{p}_u - m\vec{p}_c, \text{ albo}$$

$$\vec{P}_w = \vec{P}_b + (-m\vec{p}_u) + (-m\vec{p}_c). \qquad [249]$$

Wektor $m\vec{p}_u = \vec{P}_u$ nazywamy *siłą unoszenia*, zaś $m\vec{p}_c = \vec{P}_c$ *siłą Coriolisa*. Równanie zaś [249] wyraża:

Siła względna jest wypadkową z siły bezwzględnej, przeciwnie wziętej siły unoszenia i przeciwnie wziętej siły *Coriolisa**.

Wprowadzenie siły względnej ujętej wzorem [249] pozwala zagadnienia ruchu i równowagi punktu materialnego w ukła-

---

*) W myśl praw podstawowych *Newtona* nadajemy zwykle tylko sile bezwzględnej cechę *siły rzeczywistej*, uważając $\vec{P}_w$, $\vec{P}_u$ i $\vec{P}_c$ za *siły pozorne*. To rozróżnienie nie ma jednakże znaczenia praktycznego, a nadto straciło dużo ze znaczenia filozoficznego, wskutek powstania mechaniki relatywistycznej obchodzącej się bez pojęcia siły.

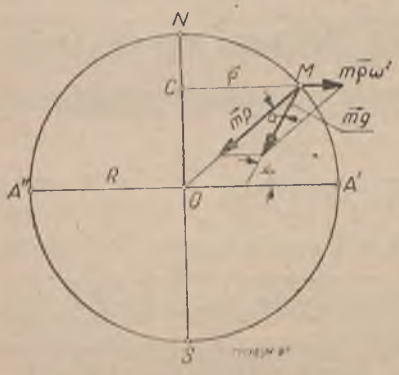
dzie względnym traktować tak samo, jak w układzie bezwzględnym.

Przypadek *równowagi względnej* zachodzi gdy $v_w = 0$. Wtedy siła *Coriolisa* znika, a pozostaje tylko siła unoszenia, a więc:

W przypadku równowagi względnej punktu materialnego jest siła względna wypadkową z siły bezwzględnej i przeciwnie wziętej siły unoszenia.

67. Pole ciężkości względnej

Obserwowany w miejscu dowolnym M powierzchni ziemi (rys. 87) ciężar ciał nie jest siłą bezwzględną, określoną newtonowskim prawem powszechnego ciążenia, albowiem według tego prawa kierunek siły przyciągania ziemi, uważanej w przybliżeniu za kulę, przechodzi przez jej środek O, tymczasem jak wykazują pomiary geodezyjne, kierunek ciężkości wskazany pionem zbacza w ogóle od promienia ziemi MO ku równikowi AA' i to znacznie więcej niżby odpowiadało odchyleniu rzeczywistego kształtu ziemi od kulistości. Zboczenie to tłumaczy się w części przeważającej obrotem ziemi w układzie bezwzględnym określonym *układem gwiazd „stałych"*. Czas trwania jednego obrotu wynosi $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ sek czasu gwiazdowego, czyli 86164 sek czasu średniego słonecznego, co odpowiada prędkości kątowej obrotu ziemi $\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}0000729\ \text{sek}^{-1}$. Przyśpieszeniem unoszenia jest przyśpie-



Rys. 87.

szenie dośrodkowe $-\vec{\varrho}\,\omega^2$, przy czym wektor $\vec{\varrho} = \vec{CM}$ przedstawia promień równoleżnika punktu M. Przeciwnie wzięta siła unoszenia $m\vec{\varrho}\,\omega^2$ jest zatem skierowana od środka równoleżnika i przedstawia się wektorem tym samym, co siła odśrodkowa określona w § 61, wywołana ruchem punktu materialnego po danym torze o promieniu ϱ z prędkością $v = \varrho\,\omega$. Z tego powodu stosuje się w ogóle nazwę *siła odśrodkowa* także do określenia przeciwnie wziętej siły unoszenia, wywołanej prędkością kątową układu względnego. Mamy więc tutaj do czynienia z drugim znaczeniem wyrażenia „siła odśrodkowa", odmiennym od stosowanego w § 61. Obserwowana ciężkość względna $m\vec{g}$ jest przeto wypadkową z przyciągania $m\vec{p}$ (ciężkości bezwzględnej) i siły odśrodkowej $m\vec{\varrho}\,\omega^2$. Oznaczmy przez φ *szerokość geograficzną* punktu M, tj. kąt, jaki kierunek ciężkości względnej wskazany pionem tworzy z płaszczyzną równika, a przez α kąt odchylenia tego kierunku od promienia OM; rzutując wektory z równania $\vec{mg} = \vec{mp} + \vec{m\varrho}\,\omega^2$ na kierunek pionu i doń prostopadły, znajdziemy

$$\left.\begin{aligned} m\,p\,\cos\alpha &= m\,g + m\,\varrho\,\omega^2\cos\varphi \\ m\,p\,\sin\alpha &= m\,\varrho\,\omega^2\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad [250]$$

Z równań tych można obliczyć kąt odchylenia α i przyśpieszenie ciężkości względnej dla każdego położenia punktu M, gdy znamy przyciąganie ziemi. Kąt α staje się widocznie zerem dla $\varphi = 0$, czyli na równiku i dla $\varrho = 0$, tj. na biegunach, gdzie nadto, jak poucza równanie pierwsze, jest $g = p$.

Uważając w pierwszym przybliżeniu ziemię za kulę o promieniu $R = 6378$ km, znajdujemy $R\,\omega^2 = 3{,}39$ cm/sek^2, co wynosi około 1/289 wartości przyśpieszenia bezwzględnego $p = 982$ cm/sek^2. Kąt α jest zatem tak mały, iż bez wielkiego błędu można w równaniu pierwszym podstawić 1 zamiast $\cos\alpha$

i $R \cos \varphi$ zamiast $\varrho = R \cos (\varphi - \alpha)$. Po tych uproszczeniach otrzymujemy

$$g = p\ 1 - \left(\frac{\cos^2 \varphi}{289}\right) = p \left[1 - \left(\frac{\cos \varphi}{17}\right)^2\right] \qquad [251]$$

Podobnie wynika z drugiego równania [250]

$$\sin \alpha = \frac{1}{289} \sin \varphi \cos \varphi \,. \qquad [252]$$

Równanie [251] wyraża, że ciężkość względna na powierzchni ziemi maleje od biegunów ku równikowi, gdzie staje się o 1/289 mniejsza niż na biegunach; zaś równanie [252] wskazuje, że odchylenie ciężkości względnej od kierunku odpowiedniego promienia ziemi osiąga największą wartość w szerokości geograficznej $\varphi = 45^0$. Wtedy $\sin \alpha = 1/578$.

Pole ciężkości względnej jest polem potencjalnym, albowiem tak przyciąganie, jak i siła odśrodkowa mają potencjał.

W § 53 obliczyliśmy już potencjał przyciągania ziemi:

$$U_1 = C \frac{Mm}{r}.$$

gdzie C oznacza *stałą grawitacji*, M masę ziemi, a r odległość punktu materialnego o masie m od środka ziemi uważanej za kulę. Potencjał siły odśrodkowej $m \varrho \omega^2$ określi według § 53 wyrażenie:

$$U_2 = - m \frac{\omega^2 \varrho^2}{2} \,. \qquad [253]$$

Potencjałem ciężkości względnej będzie zatem następująca funkcja r i ϱ:

$$U = - C \frac{Mm}{r} - \frac{m}{2} \omega^2 \varrho^2.$$

To wyrażenie można jeszcze napisać w innej postaci, zważywszy, że siła przyciągania na powierzchni ziemi

$mp = C \frac{Mm}{R^2}$, czyli $C M = p R^2$.

A zatem

$$U = - \frac{m p R^2}{r} - \frac{1}{2} m \omega^2 \varrho^2 \qquad [254]$$

Wzór ten jest ważny dla punktów leżących nad powierzchnią ziemi w odległości $r \geqslant R$ od jej środka i odległości ϱ od jej osi obrotu dziennego.

Siła *Coriolisa*, jako zależna od prędkości względnej, nie ma potencjału, wobec czego zasada zachowania energii (mechanicznej) nie stosuje się ściśle do ruchu punktu materialnego w polu ciężkości względnej. Atoli z powodu bardzo małej wartości ω można najczęściej pominąć siłę *Coriolisa* wobec siły ciężkości względnej z wyjątkiem przypadków, w których bądź to wskutek wielkiej prędkości względnej v_w, bądź też z powodu znacznej długości drogi punktu materialnego, staje się wpływ siły *Coriolisa* dostrzegalnym. Najważniejszymi zagadnieniami, w których takie przypadki zachodzą, zajmiemy się w dalszym ciągu. Na razie przyjmiemy w przybliżeniu, że siłę *Coriolisa* można pominąć, a ziemię uważać za układ bezwładnościowy (galileuszowy). Prócz tego można oczywiście, dzięki rozmiarom ziemi, uważać z wielkim przybliżeniem pole ciężkości w obrębie niewielkiej przestrzeni za pole jednorodne określone wartością g, która u nas wynosi okrągło 981 cm/sek^2.

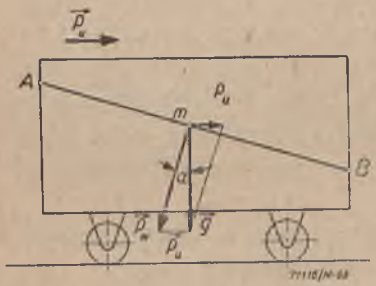
68. Równowaga względna ciężkiego punktu materialnego w układzie poruszającym się względem ziemi

Takim układem jest np. klatka dźwigu, wóz kolejowy, okręt, samolot itp. Rozpatrzmy najważniejsze przypadki szczególne:

a) Układ posiada ruch postępowy po linii pionowej z przyśpieszeniem p_u. Wtedy ciężar punktu materialnego $Q = mg$ i siła unoszenia dają siłę względną $P_w = Q \pm m p_u$, przy czym wszystkie symbole oznaczają liczby bezwzględne, a znak + lub — stosuje się do tego, czy przyśpieszenie unoszenia jest skierowane do góry czy w dół. Człowiek znajdujący się w takim układzie względnym nie odczuwa ciężaru bezwzględnego swego ciała, lecz siłę względną P_w. Przy wznoszeniu się dźwigiem doznajemy przeto zrazu wrażenie zwiększonego ciężaru, które znika w miarę jak ruch staje się jednostajny, kiedy zaś dźwig zwalnia swą

prędkość przed zatrzymaniem, to odczuwamy pozorne zmniejszenie się ciężaru. Gdyby przyśpieszenie p_u w stadium zatrzymywania dźwigu osiągnęło wartość większą od g, to siła względna byłaby wtedy skierowana do góry, a człowiek stojący w klatce uniósłby się ponad podłogę. Mogłoby się to zdarzyć przy zbyt gwałtownym zahamowaniu jazdy w górę.

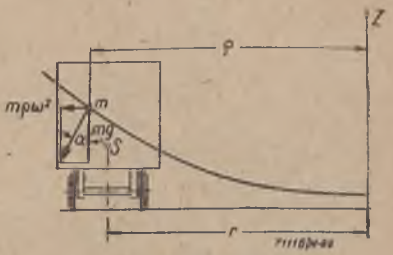
b. Układ posiada ruch postępowy poziomy z przyśpieszeniem $\vec{p_u}$. Takim układem jest np. wóz kolejowy (rys. 88), jadący na torze prostym poziomym. Siła względna $\vec{P_w} = \vec{Q} - m\vec{p_u}$ odchyla się od kierunku pionowego o kąt α określony równaniem $\operatorname{tg}\alpha = p_u/g$. Pion zawieszony w wozie będzie przy tym odchyleniu w równowadze względnej, albowiem wtedy siła względna znosi się z napięciem nici. Podobnie będą w równowadze względnej punkty materialne, spoczywające na gładkiej płaszczyźnie AB, nachylonej do kierunku ruchu pod kątem α. W odniesieniu do kierunku prędkości wozu zajdzie odchylenie α wstecz lub naprzód, zależnie od tego, czy kierunek przyśpieszenia $\vec{p_u}$ jest zgodny z kierunkiem prędkości, czy też nie. Przy ruszaniu z miejsca odchyla się zatem pion wstecz, w miarę jak ruch staje się jednostajny — odchylenie znika, a przy zwalnianiu jazdy występuje odchylenie w przód.



Rys. 88.

c. Układ obraca się jednostajnie około osi pionowej z prędkością kątową ω. Tak zachowuje się np. wóz kolejowy, jadący jednostajnie po łuku poziomym. Jeżeli oznaczymy przez v_o wartość prędkości

środka wozu S (rys. 89), a przez r wielkość promienia łuku, po którym ten środek się porusza, to prędkość kątowa wozu $\omega = v_o/r$. Siłą unoszenia dla punktu materialnego m jest tutaj siła dośrodkowa $m\varrho\omega^2$, przy czym ϱ oznacza promień punktu m. Siła względna jest wypadkową ciężaru mg i „siły odśrodkowej", a więc odchyla się od kierunku pionowego na zewnątrz o kąt α określany równaniem



Rys. 89.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\varrho\omega^2}{g}. \qquad [255]$$

Przy takim odchyleniu będzie pion zawieszony w wozie w położeniu równowagi względnej. Zarazem widzimy, że odchylenie α nie jest stałe, jak w przypadku poprzednim, lecz rośnie wraz z promieniem ϱ. Wartość kąta α nie zmienia się tylko dla punktów leżących na tej samej linii pionowej.

Obliczmy jeszcze potencjał siły względnej obrawszy oś obrotu za oś Z prostokątnego układu współrzędnych. W § 67 znaleźliśmy dla potencjału siły odśrodkowej wyrażenie $-\frac{1}{2} m \varrho^2 \cdot \omega^2$; wiemy zaś, że potencjał siły względnej

$$U = -\frac{1}{2} m\varrho^2\omega^2 + mgz, \qquad [256]$$

Dzieląc przez m znajdujemy równanie powierzchni potencjalnych w postaci

$$\omega^2\varrho^2 - 2gz = \text{const.}$$

przy czym $\varrho^2 = x^2 + y^2$.

Jest to równanie paraboloid obrotowych o wspólnym parametrze $p = \frac{g}{\omega^2}$ i wspólnej osi leżącej na osi Z i skierowanej w górę (rys. 89).

d. Układ obraca się jednostajnie około osi poziomej. Obierzmy oś obrotu (rys. 90) prostopadłą do płaszczyzny rysunku w punkcie O za oś X układu prostokątnego o poziomej osi Y, a pionowej Z; wówczas potencjał siły odśrodkowej

$$U_c = -\frac{1}{2} m\omega^2\varrho^2 = -\frac{1}{2} m(y^2 + z^2)\omega^2. \qquad [257]$$

A zatem potencjał siły względnej złożonej z siły ciężkości i siły odśrodkowej:

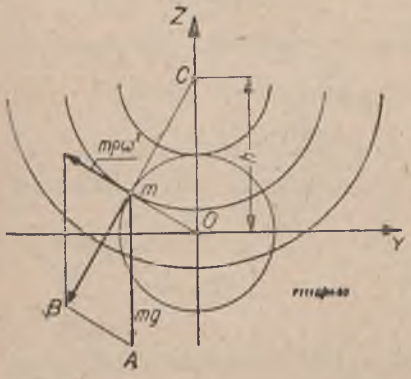
$$U = mgz - \tfrac{1}{2} m \omega^2 (y^2 + z^2) . \qquad [258]$$

Stąd równanie powierzchni potencjalnych:

$$y^2 + z^2 - \frac{2g}{\omega^2} z = \text{const.}$$

albo

$$y^2 + \left(z - \frac{g}{\omega^2} \right)^2 = \text{const.} \qquad [259]$$



Rys. 90.

co wyraża, że powierzchnie potencjalne są walcami obrotowymi o wspólnej osi poziomej leżącej w wysokości $h = \frac{g}{\omega^2}$ nad osią obrotu układu.

Ten sam wynik łatwo otrzymać z podobieństwa trójkątów ABm i COm dającego proporcję

$$mg : m\varrho\omega^2 = \overline{CO} : \varrho ,$$

z której wynika $CO = \frac{g}{\omega^2} = \text{const}$. Znaczy to, że kierunek siły względnej w płaszczyźnie rysunku przechodzi przez punkt stały C, że przeto okrąg o środku C jest śladem powierzchni potencjalnej na płaszczyźnie rysunku.

69. Równowaga względna ciężkiego punktu materialnego na krzywej obracającej się jednostajnie około osi pionowej

Niech dana krzywa leży w płaszczyźnie przechodzącej przez oś obrotu ZZ' (rys. 91). Wtedy punkt m zmuszony do pozostawania na tej krzywej będzie w równowadze względnej, jeżeli wypadkowa ciężaru mg i siły odśrodkowej $m\varrho\omega^2$ jest normalna do krzywej, czyli gdy

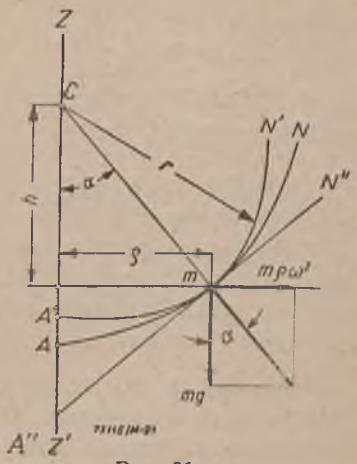
$$\frac{m\varrho\omega^2}{mg} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\varrho}{h},$$

przy czym h oznacza długość podnormalnej krzywej na osi Z. Z równania powyższego wynika jako warunek równowagi względnej

$$h = \frac{g}{\omega^2} . \qquad [260]$$

co wystarcza do znalezienia położenia równowagi.

Ażeby teraz zbadać stałość równowagi w położeniu znalezionym m poprowadźmy przez punkt m parabolę AN o parametrze g/ω^2. Parabola ta jest oczywiście śladem powierzchni potencjalnej na płaszczyźnie rysunku. Ponieważ podnormalną paraboli jest również h, więc obie krzywe stykają się w punkcie m. W punktach leżących po stronie wklęsłej paraboli jest potencjał siły względnej wyższy, a po stronie wypukłej niższy od potencjału na samej paraboli. Rozpatrywane na danej krzywej położenie równowagi będzie przeto położeniem równowagi *stałej*, jeżeli parabola obejmuje krzywą; jeżeli zaś krzywa przecina parobolę w punkcie m, albo leży cała po stronie *wypukłej*, to punkt materialny znajduje się w równowadze *niestałej*.



Rys. 91.

Przypadek równowagi stałej zajdzie np. gdy krzywa dana $A'N'$ jest okręgiem o środku C, leżącym na osi obrotu. Oznaczmy przez r promień tego okręgu, wówczas $h = r \cos \alpha$, a położenie równowagi określa równanianie

$$r \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2} . \qquad [261]$$

Ponieważ dla wartości kąta α leżących między 0 a $\pi/2$ jest $\cos \alpha < 1$, więc aby dla takiego kąta istniało położenie równowagi, musi być $r > \frac{g}{\omega^2}$. Najniższy punkt okręgu A jest wówczas położeniem równowagi niestałej (chwiejnej) i to jedynym przy danej prędkości kątowej ω.

Przykładu równowagi niestałej dostarczy nadto punkt materialny zmuszony do pozostawania na prostej $A''N''$; w równo-

wadze obojętnej będzie punkt materialny na paraboli AN o parametrze

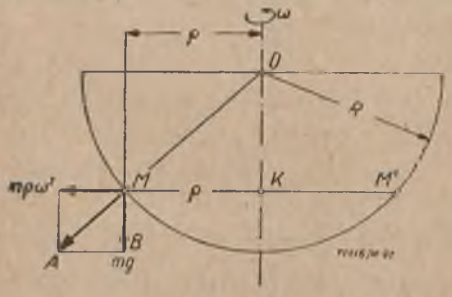
$$h = \frac{g}{\omega^2}.$$

Wyniki te mają ważne zastosowanie w teorii regulatorów odśrodkowych.

Przykład 1. W polu ciężkości uważanym za jednorodne porusza się punkt materialny połączony nicią doskonale giętką i nierozciągliwą o długości l z punktem stałym. Jakiej najmniejszej prędkości początkowej c należy udzielić temu punktowi z położenia jego równowagi, aby opisał cały okrąg koła o promieniu l? Jaki będzie przebieg ruchu, gdy prędkość początkowa jest mniejsza od obliczonej z warunku powyższego?

Przykład 2. Po okręgu koła o promieniu a, którego płaszczyzna jest nachylona do poziomu pod kątem α, porusza się bez tarcia punkt materialny ważki, któremu w położeniu najniższym udzielono prędkości początkowej c. Zbadać warunki osiągnięcia przez punkt materialny najwyższego punktu toru i wyznaczyć w każdym miejscu reakcję toru.

Przykład 3. Punkt materialny jest zmuszony do pozostawania na powierzchni sferoidy obracającej się jednostajnie około osi symetrii obrotowej ustawionej pionowo w polu jednorodnym ciężkości. Znaleźć położenie równowagi względnej punktu materialnego i zbadać jej rodzaj.



Rys. 92.

Przykład 4. Jaką prędkość końcową uzyskałby punkt materialny, spadający swobodnie na ziemię z bardzo wielkiej wysokości, gdyby nie było oporu powietrza? (Promień ziemi uważanej za kulę = 6370 km).

Przykład 5. Naczynie półkuliste o promieniu $R = 120$ cm (rys. 92) wiruje około pionowej osi symetrii z prędkością kątową ω. Jak wielkie musi być ω, aby zachodziła równowaga względna punktu materialnego, znajdującego się wewnątrz naczynia nie tylko w punkcie najniższym, jeśli pominiemy tarcie?

Odpowiedź. W położeniu równowagi musi wypadkowa z ciężaru mg i siły odśrodkowej $m\varrho\omega^2$ (gdzie ϱ jest odległością od osi obrotu) mieć kierunek promienia R kuli. Miejscem takich położeń jest równoleżnik MM', odległy o $z = \overline{OK}$ od środka kuli. Z podobieństwa trójkątów MAB i MOK wynika

$$m\varrho\omega^2 : mg = \varrho : z,$$

a stąd

$$z = \frac{g}{\omega^2}$$

Ażeby obliczona wartość z odpowiadała warunkom zadania musi być oczywiście $\frac{g}{\omega^2} < R$, czyli

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{981}{120}} = 2{,}859 \text{ sek}^{-1},$$

co odpowiada liczbie obrotów

$$n = \frac{30 \cdot \omega}{\pi} = 27{,}3 \text{ obr/min.}$$

A więc przy liczbie obrotów na minutę $n > 27{,}3$ może zajść równowaga względna punktu materialnego na równoleżniku położonym w odległości $z = \frac{g}{\omega^2}$ poniżej środka kuli. Równowaga ta jest stateczna, albowiem jak łatwo się przekonać, każde małe przesunięcie z położenia określonego wartością $z = \frac{g}{\omega^2}$ w górę lub w dół wywołuje składową styczną reakcji ściany skierowaną ku położeniu równowagi i rosnącą wraz z wielkością przesunięcia, natomiast jeszcze jedno oczywiste położenie równowagi w najniższym punkcie kuli odpowiada równowadze niestatecznej, każde bowiem małe przesunięcie powoduje składową reakcji skierowaną od położenia równowagi.

W przypadku gdy $\frac{g}{\omega^2} > R$, to punkt najniższy kuli jest jedynym położeniem równowagi punktu materialnego i to położeniem równowagi statecznej.

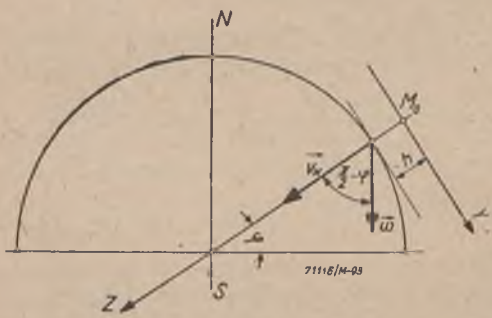
70. Spadanie swobodne punktu materialnego z uwzględnieniem obrotu ziemi i oporu powietrza

Przyjąwszy, że droga punktu materialnego, spadającego bez prędkości początkowej, nie przewyższa kilkuset metrów,

możemy linię siły ciężkości względnej uważać z przybliżeniem dostatecznym za prostą wyznaczoną pionem danego miejsca nad powierzchnią ziemi, oraz pominąć zmianę wraz z wysokością ponad powierzchnią ziemi, wartości przyśpieszenia ciężkości względnej g. Za to należy uwzględnić wpływ siły *Coriolisa*, która zakrzywi nieco tor ciała spadającego (wpływ oporu powietrza uwzględnimy osobno). Z powodu małej wartości tej siły w porównaniu do ciężkości względnej, możemy się spodziewać tylko nieznacznych odchyleń od ruchu prostoliniowego jednostajnie przyśpieszonego, określonego równaniem

$$z = \tfrac{1}{2} g t^2,$$

jeżeli oś Z układu współrzędnych kartezjańskich poprowadzimy od położenia początkowego M_o (rys. 93) w kierunku pionowym, a więc w przybliżeniu — ku środkowi ziemi, oś Y w płaszczyźnie południka, a zarazem w płaszczyźnie rysunku ku równikowi, zaś oś X ku wschodowi (poza płaszczyznę rysunku). W pierwszym przybliżeniu można więc przyjąć,



Rys. 93.

że prędkość względna $\vec{v_w}$ jest pionowa i ma wartość $\frac{dz}{dt} = gt$. Wtedy kąt między $\vec{\omega}$ a $\vec{v_w}$ jest równy $\frac{\pi}{2} - \varphi$, jeżeli φ oznacza szerokość geograficzną, a zatem przyśpieszenie *Coriolisa* ma wartość $2 v_w \omega \cos\varphi$ i kierunek prostopadły do płaszczyzny rysunku. Odpowiednia siła dodatkowa $-\vec{P_c}$ ma przeto kierunek dodatni na osi X, wskazujący na wschód. Wsta-

wiwszy przybliżoną wartość $v_w = g\,t$, mamy równanie różniczkowe ruchu składowego w kierunku osi X:

$$\frac{d^2 z}{d\,t^2} = 2\,g\,t\,\omega\,\cos\varphi\,,$$

a całkując je dwukrotnie z uwzględnieniem warunków początkowych (dla $t = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$, $x = 0$) otrzymamy

$$x = \frac{1}{3}\,g\,t^3\,\omega\,\cos\varphi\,, \qquad [262]$$

jako przybliżoną wartość teoretyczną zboczenia wschodniego od pionu przy swobodnym spadaniu ciał ciężkich na ziemię. To zboczenie, przewidywane już w r. 1679 przez *I. Newtona*, odkrył doświadczalnie *I. Gugliemini* w Bolonii w r. 1790, zgodnie z obliczeniem w granicach błędów pomiaru bardzo trudnego.

Co się tyczy oporu powietrza, to opór ten może być właściwie określony tylko dla ciał o wymiarach skończonych. Wtedy zależy od prędkości ruchu postępowego i postaci geometrycznej ciała w sposób zwykle bardzo zawiły. Zastąpienie ciała punktem materialnym odpowiada tylko przypadkowi najprostszemu symetrii ciała względem pionowego ruchu postępowego w powietrzu spokojnym. Biorąc pod uwagę tylko ten przypadek możemy dla wartości prędkości v leżących między kilku decymetrami a około 200 metrami na sekundę przyjąć opór $\vec{R}$ jako wprost przeciwny kierunkowi $\vec{v}$ i proporcjonalny względem v^2, czyli napisać

$$R = a\,v^2,$$

gdzie a jest współczynnikiem stałym. Jeżeli dodatnie z mierzymy pionowo w dół od miejsca rozpoczęcia ruchu bez prędkości początkowej, to równaniem ruchu (z pominięciem siły *Coriolisa*) będzie

$$m\,\frac{d^2 z}{d\,t^2} = m\,g - a\,v^2 \qquad [263]$$

przy czym $v = \frac{d\,z}{d\,t}$. Już z tego równania łatwo odczytać pewną

ważną cechę spadania w powietrzu lub innym ośrodku (o innej wartości współczynnika oporu a). Gdyby bowiem prędkość v, która musi wzrastać, osiągnęła wartość c taką, że $mg - ac^2 = 0$, to przyśpieszenie ruchu stałoby się równe zeru i ruch dalszy byłby jednostajny. Stwierdzamy to istotnie na kroplach deszczu i innych drobnych ciałach spadających. Prędkość c nazywają *prędkością graniczną* albo *asymptotyczną*. Jej wartość

$$c = \sqrt{\frac{mg}{a}} \qquad [264]$$

wzrasta z wartością stosunku ciężaru punktu materialnego do współczynnika oporu. Ponieważ współczynnik ten rośnie z polem przekroju ciała, a więc z kwadratem jego wymiarów liniowych, a ciężar mg z sześcianem tych wymiarów, przeto stosunek mg/a jest proporcjonalny względem pierwszej potęgi wymiaru liniowego, dlatego też prędkość c ciał bardzo drobnych jest bardzo mała, jak to widać na drobniutkich kropelkach mgły, w przeciwieństwie do dużych kropli deszczu.

Równanie ruchu [263] możemy łatwo przedstawić w postaci

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Mnożąc obustronnie przez $v\,dt = dz$, otrzymamy

$$v\,dv = g\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)dz,$$

albo

$$\frac{-2\frac{v}{c}\,d\left(\frac{v}{c}\right)}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = -\frac{2g}{c^2}\,dz.$$

Całkując teraz stronę lewą w granicach 0 do v, a prawą odpowiednio w granicach od 0 do z, znajdziemy

$$ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -\frac{2g}{c^2}z,$$

a stąd

$$v = c\sqrt{1 - e^{-2gz/c^2}}. \qquad [265]$$

Z wzoru tego widać, że prędkość spadania rośnie wraz z drogą spadania z, zbliżając się coraz bardziej do wartości c, którą jednakże osiąga dopiero gdy $z \to \infty$. To tłumaczy nazwę: *prędkość asymptotyczna.*

Wstawiwszy we wzór [264] wartości liczbowe np. $c = 10$ m/sek (prędkość dużych kropel deszczu), otrzymamy:

$$v = 10\sqrt{1 - e^{-z/5}} \quad \text{i} \quad \frac{dv}{dz} = \frac{c^2}{10} \cdot \frac{e^{-z/5}}{v}$$

Dla $z = 25$ m jest więc

$$v = c\sqrt{1 - e^{-5}} = c\left(1 - \frac{1}{300}\right); \quad \frac{dv}{dz} = \sim \frac{c}{1500}.$$

A zatem spadanie z wysokości 25 m wywołuje prędkość różniącą się od granicznej tylko o 1/3 % i rosnącą dalej zaledwie o $\frac{1}{1500}$ część na 1 m ubytku wysokości.

71. Inne skutki siły Coriolisa

W paragrafie poprzednim rozważaliśmy skutek siły *Coriolisa* w ruchu pionowym punktu materialnego w polu ciężkości względnej nad powierzchnią ziemi. Teraz zbadamy skutek siły *Coriolisa* w ruchach poziomych. W tym celu pomyślmy sobie w danym miejscu na powierzchni ziemi układ współrzędnych prostokątnych, przy czym osią X jest kierunek styczny do południka wskazujący ku południowi; osią Y pion miejsca skierowany w górę, a osią Z styczna do równoleżnika skierowana na wschód. Wtedy wektor prędkości kątowej ziemi ω, leżący w płaszczyźnie pionowej XY, tworzy z osią X kąt równy szerokości geograficznej φ ma więc składowe

$$\omega_x = \omega \cos\varphi, \quad \omega_y = -\omega \sin\varphi, \quad \omega_z = 0.$$

Dana prędkość (względna) pozioma $\vec{v}$ jako prostopadła do ω_y daje poziomą składową siły *Coriolisa* równą $2mv\omega_y = -2mv\omega\sin\varphi$, przeto niezależną od kierunku $\vec{v}$. Tylko składowa pionowa jest zależna od kierunku $\vec{v}$ i równa się

$2mv\cos\alpha \cdot \omega_x$, jeżeli α oznacza kąt nachylenia $\vec{v}$ do osi Z. A zatem przeciwnie wzięta siła *Coriolisa* jest równa

$$2mv\omega\sin\varphi$$

i jest skierowana dla człowieka patrzącego w kierunku prędkości na prawo. Wskutek tego pocisk wystrzelony poziomo lub pod małym kątem elewacji zbacza nieco na naszej półkuli na prawo. Gdy punkt materialny jest zmuszony do pozostawania na prostej poziomej, np. wagon kolejowy jadący po szynach ułożonych poziomo, to siła *Coriolisa* przejawia się naciskiem na prawą szynę toru. Obliczmy jego wartość w szerokości geograficznej $\varphi = 50^0$ dla pociągu pośpiesznego, jadącego z prędkością 30 m/sek czyli 108 km/godz. Odpowiednie przyśpieszenie *Coriolisa* jest równe

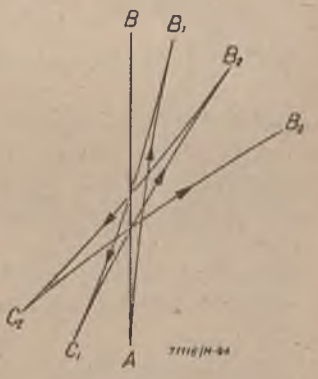
$$2 \cdot 30 \cdot 0{,}000073 \cdot 0.766 = 0{,}00336 \text{ m/sek}^2.$$

Ponieważ przyśpieszenie ciężkości $g = 9{,}81$ m/sek^2, więc nacisk na prawą szynę spowodowany obrotem ziemi w stosunku do ciężaru równa się $0{,}00336 : 9{,}81 = \frac{1}{3000}$, a więc jest on tak mały, że wobec sił poziomych wywołanych innymi przyczynami nie gra roli w praktyce.

72. Wahadło Foucaulta

Tak nazywamy wahadło zawieszone w ten sposób, aby mogło wykonywać wahnienia proste w każdej płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez stały punkt zawieszenia. Wyobraźmy sobie takie wahadło zawieszone nad biegunem północnym ziemi w punkcie leżącym na jej osi obrotu. Jeżeli je odchylimy z położenia równowagi i puścimy swobodnie bez prędkości początkowej, to płaszczyzna jego wahnienia nie zmieni kierunku w układzie bezwzględnym, bo nie ma siły bezwzględnej o składowej prostopadłej do tej płaszczyzny. Jednakże pod punktem zawieszenia ziemia obraca się z prędkością kątową ω i dokonywa jednego pełnego obrotu w układzie bezwzględnym (bezwładnościowym) w 24 godzinach cza-

su gwiazdowego równych 86164 sek czasu średniego słonecznego. Dla obserwatora stojącego na ziemi sprawa się przedstawia tak, jak gdyby ziemia była w spoczynku, a płaszczyzna wahania obracała się jednostajnie z prędkością kątową liczbowo równą, a wprost przeciwną $\omega = 0{,}000073$ sek^{-1}. Ten sam wynik musimy oczywiście otrzymać traktując zjawisko jako zagadnienie ruchu względnego i wprowadzając obok ciężkości względnej, leżącej w płaszczyźnie wahadła jeszcze siłę dodatkową, określoną przyśpieszeniem *Coriolisa*. Tutaj wchodzi w grę tylko pozioma składowa tego przyśpieszenia, która jak wiadomo, jest prostopadłą do prędkości punktu materialnego i do ω. Ta składowa zaś jest równa $2v_w\omega \sin\varphi$, a więc na biegunie ($\varphi = 90^0$) ma wartość $2v_w\omega$. Odpowiednia składowa siły *Coriolisa* (wziętej przeciwnie) powoduje, że rzut poziomy pierwszego pół - wahnienia na powierzchnię ziemi nie tworzy prostej AB (rys. 94), lecz krzywą AB_1 odchyloną na prawo; że następnie drugie półwahnienie daje taką samą krzywą B_1C_1 i t. d. W okresach wahnień kolejnych obraca się niejako płaszczyzna wahnienia o równe kąty, a prędkość kątowa tego obrotu jest co do wartości liczbowej równa prędkości obrotu ziemi, lecz skierowana odwrotnie (od wschodu na zachód). W innych szerokościach geograficznych różni się zjawisko jedynie wartością liczbową poziomej składowej przyśpieszenia *Coriolisa*, tak że zamiast $2v_w\omega$ mamy $2v_w\omega \sin\varphi$. Stąd wniosek, że zamiast prędkości kątowej obrotu płaszczyzny wahnienia o wartości ω, otrzymamy w innych miejscach ziemi prędkość kątową $\omega \sin\varphi$, gdyż składowa siły *Coriolisa* wywołująca obrót zmniejszyła się w stosunku $\sin\varphi : 1$. Na równiku, gdzie $\sin\varphi = 0$ nie ma obrotu płaszczyzny wahnienia wahadła *Foucaulta*.



Rys. 94.

Ten ważny wynik, że płaszczyzna wahnień wahadła o dwu stopniach swobody obraca się w kierunku przeciwnym osio-

wemu obrotowi ziemi z prędkością kątową $\omega \sin \varphi$, jeżeli ω jest wartością prędkości kątowej ziemi, stwierdził *Foucault* doświadczeniami w kopule Panteonu Paryskiego w r. 1852, uważając go słusznie za jeden z najoczywistszych dowodów obrotu ziemi w bezwładnościowym układzie odniesienia. Taki sam wynik dostarcza wprawdzie i zboczenie wschodnie ciała swobodnie spadającego na ziemię, ale doświadczenie *Foucaulta* jest bez porównania łatwiejsze i możliwe do wykonania w każdej sali wykładowej.

Rozdział VI

KINETYKA UKŁADÓW MATERIALNYCH

73. Zasada ruchu środka masy

Weźmy pod uwagę np. ruch komety jako roju cząstek poruszających się w próżni pod działaniem sił ciążenia powszechnego. Siły te są przede wszystkim określone przyciąganiem przez słońce i dla komety całej stanowią główne siły zewnętrzne. Prócz tego działają między cząsteczkami oddzielnymi również siły ciążenia; te jednak stanowią siły wewnętrzne. Każda z cząstek komety m_i ($i = 1, 2, 3, \ldots n$) porusza się zatem pod wpływem wypadkowej z siły zewnętrznej $\vec{P}_i$ i sił wewnętrznych $\vec{Q}_k$, gdzie wskaźnik k oznacza również jedną z wartości 1, 2, 3, . . . n, wyjąwszy oczywiście i. $\vec{Q}_k$ przedstawia siłę, z jaką cząstka m_k działa na cząstkę m_i. Siłę działania wzajemnego m_i na m_k oznaczamy przez $\vec{Q}_{ki}$. Żadna z cząstek tego układu nie jest w swobodzie swojej ograniczona warunkami niezależnymi od wymienionych sił.

Tego rodzaju *układ materialny* nazywamy *swobodnym*. Innego przykładu dostarcza samolot unoszący się w powietrzu. Tutaj siłami zewnętrznymi są: siła ciężkości i napory otaczającego powietrza, siłami zaś wewnętrznymi są siły działające między silnikiem a śmigłem, oraz siły międzycząsteczkowe, określone sprężystością i wytrzymałością materiałów konstrukcyjnych samolotu. Siły te utrzymują w równowadze względnej części składowe kadłuba i skrzydeł, które zarazem zapewniają całości pożądany stopień sztywności.

Podobnie układem swobodnym jest pocisk armatni, kiedy opuści lufę, a nawet kiedy wybuchając rozpada się na rój odłamków.

Natomiast wszelkie poruszające się części maszyn są z reguły *układami materialnymi nieswobodnymi*, albowiem liczne ich cząstki są niezależnie od działania sił zewnętrznych zmuszone do poruszania się po określonych liniach lub powierzchniach.

Rozpatrując wyłącznie układy swobodne, widzimy, że w najogólniejszym znaczeniu takie układy można zawsze pojmować jako układy n punktów materialnych m_i ($i = 1, 2, 3, \ldots . n$), z których każdy porusza się pod działaniem siły zewnętrznej $\vec{P}_i$ oraz sił wewnętrznych Q_{ik} ($k = 1, 2, 3, \ldots . n$). Równanie ruchu takiego punktu ma tedy postać:

$$m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \vec{P}_i + \Sigma \vec{Q}_{ik}$$

Dodajmy geometrycznie równania ruchu wszystkich punktów materialnych układu, a otrzymamy:

$$\Sigma m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = \Sigma \vec{P}_i + \Sigma \Sigma \vec{Q}_{ik}.$$

Ale jak wiadomo jest $\sum_i \sum_k Q_{ik} = 0$, gdyż siły wewnętrzne czynią zadość równaniu $\vec{Q}_{ik} + \vec{Q}_{ki} = 0$, a równanie

$$M \vec{r}_o = \sum_i m_i \vec{r}_i$$

określające promień wektor $\vec{r}_o$ środka masy układu materialnego o masie całkowitej $M = \sum_i m_i$ daje po dwukrotnym różniczkowaniu względem czasu

$$\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_i}{\mathrm{d}t^2} = M \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_o}{\mathrm{d}t^2}.$$

A zatem

$$M \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_o}{\mathrm{d}t^2} = \Sigma \vec{P}_i \cdot \qquad [266]$$

Równanie to wyraża ogólną *zasadę ruchu środka masy:* Ruch środka masy układu materialnego swobodnego jest niezależny od jego sił wewnętrznych i odbywa się tak, jakby w nim była skupiona cała masa układu, a działały nań wszystkie siły zewnętrzne przeniesione do tego środka.

Z tego wynika, że gdy np. wyrzucimy pocisk, to jego środek masy opisuje parabolę (o ile można pominąć opór powietrza). Kiedy w pewnym miejscu toru pocisk wybuchnie, to niepodobna przewidzieć, jakie będą ruchy jego odłamków, ale to jest pewne, że dopóki żaden z nich nie natrafi na przeszkodę (realizującą nową siłę zewnętrzną), to ich wspólny środek masy porusza się dalej po paraboli. Podobnie porusza się po krzywej stożkowej masy środek komety pod wpływem siły przyciągania słońca.

Równanie [266] pozwala zbadać stopień ścisłości równania $Q = Mgz$ § 42 (ciężar ciała jest równy iloczynowi jego masy przez przyśpieszenie ciężkości g w danym miejscu ziemi).

Jeżeli bowiem $\frac{d^2 r_c}{dt^2}$ oznacza przyśpieszenie środka masy ciała, na którego cząstki działają siły ciężkości $\vec{P}_i = m_i \vec{g}_i$, to $\sum_i \vec{P}_i$ przedstawia sumę wektorową tych sił, która określa ciężar ciała. Tylko więc przy założeniu, że przyśpieszenie wszystkich cząstek ciała można uważać za stałe i równe $\vec{g}$ otrzymujemy równanie $\sum \vec{P}_i = \vec{Q} = M\vec{g}$. Dla ciała o rozmiarach bardzo wielkich nie są wektory przyśpieszeń $\vec{g}_i$ ściśle równe, nie tylko z powodu nierównej odległości cząstek od przyciągającej je ziemi, ale także z powodu różnych nieco kierunków, które w ogóle nawet się nie przecinają w środku ziemi, chyba że ciało znajduje się nad równikiem lub jednym z biegunów, kiedy zachodzi przypadek symetrii. Mimo to jest dokładność równania przytoczonego z § 42 aż nadto wystarczająca dla ciał o wymiarach np. największego budynku.

Zasadę ruchu środka masy stosujemy często i do układów nieswobodnych, które można zawsze traktować jako swobodne po zastąpieniu warunków ograniczających swobodę odpowiednimi reakcjami jako dodatkowymi siłami zewnętrznymi. Taki

przypadek zachodzi np. w parowozie jadącym po szynach ograniczających jego swobodę.

W epoce pierwszych usiłowań konstrukcji pojazdów mechanicznych znaleźli się poważni inżynierowie, którzy interpretując mylnie zasadę ruchu środka masy, przepowiadali wynalazcom, że takie wozy z miejsca nie ruszą z powodu braku sił zewnętrznych. Tymczasem sił zewnętrznych dostarcza *tarcie statyczne (sczepne)* kół. Jakkolwiek bowiem tarcie takie bywa zwykle siłą bierną, tj. taką, która sama nie wywołuje ruchu, a tylko pojawia się jako składowa styczna reakcji na działanie sił czynnych, to jednak w tym przypadku np. w parowozie, gdy siły wewnętrzne nacisku trzonu korbowego na parę kół napędowych powodują składową styczną reakcji w miejscu stykania się kół z szynami, składowa ta przybiera charakter siły czynnej, rozstrzygającej o wielkości siły pociągowej parowozu. Tylko w odniesieniu do samych kół toczących się (bez ślizgania) gra tarcie rolę siły biernej, gdyż przy toczeniu się prędkość tego punktu koła (uważanego za ciało sztywne), który dotyka szyny w każdej chwili ruchu, jest równa zeru.

Zasada ruchu środka masy uwydatnia dopiero w całej pełni znaczenie kinetyczne środka masy i wartość praktyczną kinetyki punktu materialnego. Można ją jeszcze wyrazić w postaci następującej:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i \vec{v}\right) = \sum_i \vec{P}_i \qquad [267]$$

czyli słowami:

Prędkość zmiany (tj. pochodna względem czasu) sumy wektorowej pędów układu materialnego równa się sumie wektorowej sił zewnętrznych układu.

74. Zasada d'Alemberta

Zagadnienie ruchu układu materialnego swobodnego lub też nieswobodnego pod wpływem danych sił działających na jego oddzielne punkty materialne, można sprawdzić formalnie

(matematycznie) do zagadnienia równowagi tego układu na podstawie rozumowania następującego: jeżeli siły działające udzielają punktom materialnym m układu przyśpieszeń $\vec{p}_i$, to każdy rozpatrywany oddzielnie punkt materialny układu zachowuje się tak, jak gdyby był swobodny, a nań działała tylko siła określona wektorem $m_i \vec{p}_i$. Wyobraźmy sobie teraz, że na punkty materialne układu działają oprócz danych sił rzeczywistych (tak wewnętrznych jak i zewnętrznych) jeszcze siły pomyślane, określone wektorami — $m_i \vec{p}_i$, to siły te zniosłyby oczywiście działanie sił danych i żaden z punktów materialnych układu nie otrzymałby przyśpieszenia. Krótko mówiąc, siły pomyślane — $m_i \vec{p}_i$ zrównoważyłyby siły dane. Takie siły pomyślane — $m_i \vec{p}_i$ nazywamy *siłami bezwładności* lub *oporami bezwładności*, a także *siłami d'Alemberta* od nazwiska słynnego matematyka francuskiego z epoki poprzedzającej Wielką Rewolucję, który je wprowadził do dynamiki.

Wynik rozumowania powyższego wyraża zwięźle zdanie:

Siły rzeczywiste działające na punkty dowolnego układu materialnego będącego w ruchu równoważą się w każdej chili z siłami *d' Alemberta* tego układu.

To nader ważne twierdzenie ogólne nosi nazwę *zasady d'Alemberta*. Jej zastosowanie przy rozwiązywaniu zagadnień kinetycznych przedstawia w ogóle korzyści polegające na wyzyskaniu znanych ze statyki równań równowagi. Korzyści te wychodzą na jaw zwłaszcza w przypadkach, gdy same siły wewnętrzne układu nawzajem się znoszą. Tak jest przede wszystkim w ciałach sztywnych i w układach złożonych z ciał sztywnych, połączonych przegubami i t p. Wówczas możemy zupełnie pominąć siły wewnętrzne i napisać tylko warunki równowagi sił zewnętrznych $\vec{P}_i$ wraz z pomyślanymi siłami *d'Alemberta*. Do sił zewnętrznych należy przy tym zaliczyć

i reakcje wywołane ograniczeniem swobody badanego układu przez inne układy. Takie właśnie przypadki miał *d'Alembert* na uwadze przy formułowaniu swego twierdzenia.

75. Ruch ogólny ciała sztywnego swobodnego — Warunki ruchu postępowego

Niech na ciało dane o masie M działa układ sił nie będących w równowadze. Zachodzi pytanie pod jakimi warunkami będzie ruch tego ciała ruchem postępowym.

Oznaczmy przez $\vec{p}$ przyśpieszenie ruchu postępowego ciała. Opory bezwładności $-m_i\vec{p}_i$, jako równoległe i proporcjonalne do mas punktów materialnych m_i, z których to ciało jest złożone, mają jak wiadomo ze statyki wypadkową przechodzącą przez środek masy S tego ciała. Ta wypadkowa równa $\sum_i (-m_i\vec{p}) = -M\vec{p}$ stosownie do zasady *d'Alemberta* musi być w równowadze z siłami działającymi na ciało, a zatem:

Ruch postępowy ciała sztywnego pod wpływem danego układu sił zewnętrznych może zachodzić tylko wtedy, gdy siły te mają wypadkową $\vec{R}$ o linii działania przechodzącej przez środek masy ciała. Przyśpieszenie tego ruchu wynika z równania równowagi

$$-M\vec{p} + \vec{R} = 0$$

jest więc określone wzorem

$$\vec{p} = \vec{R}/M. \qquad [268]$$

Warunek znaleziony jest konieczny, ale jak zobaczymy, w dalszym ciągu nie wystarczający. Skoro jednak w chwili początkowej działania sił danych ciało było w spoczynku lub w ruchu postępowym, to oczywiście mamy do czynienia z przypadkami szczególnymi, w których warunek powyższy jest za-

razem wystarczający. Wówczas ruch ciała sztywnego jest zupełnie określony ruchem jego środka masy. Zagadnienie ruchu ciała sztywnego sprowadza się w tych przypadkach do zagadnienia ruchu (pomyślanego) punktu materialnego o masie M równej masie, skupionej w jego środku masy S.

W dalszych rozważaniach jeszcze wybitniej wyjdzie na jaw znaczenie kinetyczne środka masy, chociaż już teraz widzimy ważność i znaczenie fizykalne kinetyki punktu materialnego, której wyniki stosowaliśmy już kilkakrotnie do ruchu ciał o wymiarach skończonych uprzedzając uzasadnienie teoretyczne tego postępowania.

Jeżeli teraz zapytamy, jaki będzie ruch ciała sztywnego pod wpływem sił zewnętrznych $\vec{P}_i$, które przy ich redukcji do środka masy ciała S dają w ogóle siłę $\vec{R}$ działającą na punkt S i parę sił o momencie $\vec{\mathfrak{M}}$, to z zasady ruchu środka masy, w połączeniu z określeniami kinematyki wynika, że ruch ciała będzie złożony z ruchu postępowego odbywającego się z prędkością i przyśpieszeniem środka masy, wyznaczonymi przez samą siłę $\vec{R}$ i warunki początkowe, oraz z ruchu około środka masy zależnego tylko od momentu $\vec{\mathfrak{M}}$ i warunków początkowych.

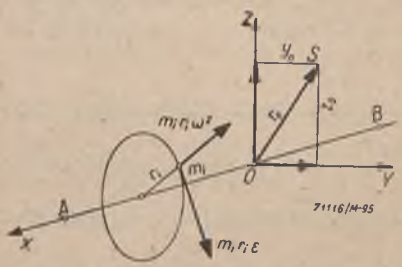
Warunki początkowe są określone: 1. położeniem początkowym, 2. prędkością początkową ruchu postępowego, 3. prędkością początkową obrotu chwilowego około osi przechodzącej przez S. Jest rzeczą jasną, że ruch złożony ciała sztywnego swobodnego może się odbywać także w przypadku, gdy $\vec{R} = 0$ i $\vec{\mathfrak{M}} = 0$, a więc bez udziału sił zewnętrznych. Taki *ruch* nazywamy *bezwładnościowym* albo *inercyjnym*. Zajmiemy się nim bliżej, odpowiadając przed tym na pytanie, w jaki ruch zostanie wprawione swobodne ciało sztywne z jego stanu spoczynku, gdy na to ciało działa para sił o momencie $\vec{\mathfrak{M}}$

różnym od zera. Zagadnienie to podzielimy na dwie części. W pierwszej przyjmiemy, że oś obrotu jest ustalona np. w łożyskach. W drugiej będziemy szukać osi obrotu ciała sztywnego swobodnego, na które działa para sił.

76. Obrót ciała sztywnego około osi stałej

Niech A i B (rys. 95) oznaczają punkty ustalone ciała sztywnego, które wskutek tego może tylko obracać się dokoła osi AB obranej za oś X prostokątnego układu współrzędnych. Płaszczyzna osi Y Z, złączonych niezmiennie z ciałem, niech przechodzi przez środek masy S ciała o współrzędnych 0, y_o, z_o. Jak wiadomo ze statyki, warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu sił działających na takie ciało jest, aby suma algebraiczna momentów wszystkich tych sił względem osi obrotu była równa zeru. Sumę tę przedstawioną wektorem $\vec{\mathfrak{M}}$ leżącym na osi obrotu, nazywamy *momentem układu sił względem osi obrotu*. W przypadku, gdy $\vec{\mathfrak{M}} = 0$, to ciało albo spoczywa, albo też obraca się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$; gdy zaś $\vec{\mathfrak{M}} \neq 0$, to siły udzielą ciału przyśpieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$, którego wartość znajdziemy stosując zasadę *d'Alemberta*. Jej wysłowienie przyjmuje w tym przypadku postać:

$\mathfrak{M}$ + suma algebraiczna momentów oporów bezwładności względem osi obrotu $X = 0$.



Rys. 95.

Napiszemy więc wyrażenia dla oporów bezwładności i ich momentów względem X.

Każda cząstka ciała sztywnego, której masą jest m_i, odległa od osi obrotu o r_i ma, jak wiadomo z kinematyki, przyśpieszenie styczne $r_i \varepsilon$, prostopadłe do r_i i do osi obrotu, oraz

przyśpieszenie normalne $r_i \omega^2$, także prostopadłe do osi obrotu, ale mające kierunek promienia r_i od punktu m_i ku osi obrotu. Odpowiednie opory bezwładności są określone wartościami liczbowymi:

$m_i r_i \varepsilon$ — styczne opory bezwładności,

$m_i r_i \omega^2$ — siły odśrodkowe,

i mają kierunki przeciwne kierunkowi przyśpieszeń *.

Momenty sił odśrodkowych jako przecinających oś momentu X są równe zeru, a tylko momenty stycznych oporów bezwładności na ramieniach prostopadłych r_i dają sumę różną od zera

$$-\Sigma m_i r_i^2 \varepsilon = -\varepsilon \Sigma m_i r_i^2 = -\varepsilon I$$

gdzie I oznacza moment bezwładności ciała względem osi obrotu. Mamy więc stosownie do zasady *d'Alemberta*

$$\mathfrak{M} - \varepsilon I = 0, \text{ a stąd}$$

$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{\mathfrak{M}}{I}, \text{ a zarazem } \vec{\varepsilon} = \frac{\vec{\mathfrak{M}}}{I} \qquad [269]$$

jako równanie, określające obrót około osi stałej pod wpływem sił o momencie $\vec{\mathfrak{M}}$ względem osi obrotu. A zatem chwilowe przyśpieszenie kątowe ε obrotu pod wpływem momentu $\mathfrak{M}$ sił zewnętrznych ma zwrot zgodny z tym momentem, a wartość liczbową równą ilorazowi $\mathfrak{M}$ przez moment bezwładności ciała I względem osi obrotu.

Widzimy tutaj ułatwiającą spamiętanie wzoru analogię z równaniem ruchu punktu materialnego

$$\vec{p} = \frac{\vec{P}}{m}.$$

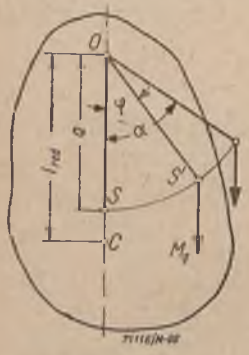
Zamiast przyśpieszenia $\vec{p}$, siły $\vec{P}$ i masy m mamy teraz odpo-

*) Przypominamy, że wielkości $\mathfrak{M}$, ε, ω i φ (kąt obrotu) trzeba uważać za dodatnie lub ujemne, zależnie od kierunku (zwrotu) wskazanego przez ich wektory.

wiednio przyśpieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$, moment $\vec{\mathfrak{M}}$ i moment bezwładności I.

77. Wahadło „fizyczne"

Wahadłem fizycznym nazywane jest ciało stałe, uważane za sztywne, obracalne około osi stałej, zwykle poziomej, nie przechodzącej przez jego środek masy, jeżeli pozostając pod działaniem samej tylko siły ciężkości, może wykonywać ruchy okresowe około położenia równowagi stałej. W tym położeniu leży środek masy S i oś obrotu O wahadła na tej samej płaszczyźnie pionowej (rys. 96). Po odchyleniu wahadła o kąt $\alpha < \pi$ przy pomocy siły dodatkowej i po usunięciu tej siły, rozpocznie wahadło ruch obrotowy w kierunku przeciwnym do tego, jaki przyjmiemy za dodatni dla kąta obrotu φ. Momentem $\mathfrak{M}$ siły ciężkości Mg względem osi obrotu, działającym na wahadło podczas jego ruchu jest $Mg \cdot a \sin\varphi$, jeżeli a oznacza odległość środka masy S od osi obrotu. Równanie ruchu wahadła przyjmie więc (stosownie do § 76) postać ogólną



Rys. 96.

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mga\sin\varphi}{I}, \qquad [270]$$

gdzie $I = Mi^2$ oznacza moment bezwładności wahadła względem osi obrotu (i jest ramieniem bezwładności). Zestawiwszy równanie [270] z równaniem ruchu wahadła matematycznego z § 62

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g\sin\frac{s}{l},$$

które po podstawieniu $\frac{s}{l} = \varphi$ przybiera postać

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \qquad [271]$$

widzimy, że prawa obu ruchów będą identyczne, gdy współczynniki przy $\sin\varphi$ po prawej stronie równań [270] i [271] będą równe. A zatem:

$$\frac{g}{l} = \frac{M g a}{I},$$

czyli

$$l = \frac{I}{M a}. \qquad [272]$$

Równanie to określa długość l wahadła matematycznego, którego ruch odbywa się według tego samego prawa ilościowego, co ruch wahadła fizycznego o masie M, momencie bezwładności I (względem osi obrotu) i odległości a środka masy od osi obrotu. Długość wyrażoną równaniem [272] nazywamy dlatego *długością sprowadzoną* (zredukowaną) i oznaczamy przez l_{red}. Znając l_{red} obliczamy okres wahania wzorami [240] i [241] wstawiwszy w nie $l_{red} = I/Ma$ zamiast l.

Dowiedźmy teraz, że długość sprowadzona jest zawsze większa od a i to tym bardziej im a jest mniejsze. W tym celu wyrazimy moment bezwładności I jako sumę z momentu bezwładności $I_o = M i_o^2$ względem osi równoległej do O i przechodzącej przez środek ciężkości S i wyrazu Ma^2 (stosownie do wzoru [181]). A więc:

$$l_{red} = \frac{M a^2 + M i_o^2}{M a} = a + \frac{i_o^2}{a}. \qquad [273]$$

Widać stąd, iż istotnie jest $l_{red} > a$, i dla $a \to 0$, $l_{red} \to \infty$.

Gdy na prostej $O S$ odmierzymy $O C = l_{red}$, to punkt C nazywamy *środkiem wahania*. Możemy go określić jako taki punkt wahadła fizycznego, który porusza się niezależnie od innych punktów tego wahadła tak, jakby stanowił oddzielne wahadło matematyczne (własności te posiadają widocznie także wszystkie punkty leżące na prostej przechodzącej przez C równoległej do osi wahadła).

Gdy znamy okres wahadła fizycznego dla danej osi obrotu, a więc i jego l_{red}, a szukamy odległości a jego środka masy

S od osi obrotu, to wprowadziwszy a jako niewiadomą x do równania [273] otrzymamy:

$$l = x + \frac{i_o^2}{x}, \qquad \text{czyli } x^2 - l\,x = -\,i_o^2 .$$

To równanie ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2. Ich suma $x_1 + x_2 = l$ (jak wiadomo z teorii równania kwadratowego). Skoro więc $x_1 = a$, to $x_2 = l - a$.

Z tego wynika, że okres wahnienia wahadła fizycznego nie ulegnie zmianie, gdy je zawiesimy na osi przechodzącej przez środek wahania C, równoległej do osi pierwotnej. Jest także rzeczą oczywistą, że oprócz tych dwu osi jest jeszcze w ogóle nieskończenie wiele takich osi, którym odpowiada ten sam okres wahania T. Osie te są tworzącymi walców obrotowych o promieniach a i $l_{red} - a$. Wspólna oś symetrii tych walców przechodzi przez środek masy S.

Na dowiedzionej zamienności środka wahnienia C i punktu zawieszenia O polega tzw. *wahadło rewersyjne (Katera* i *Bohnenbergera*), służące do pomiaru g, tj. natężenia siły ciężkości, za pośrednictwem pomiaru długości $OC = l$ i okresu wahnień bardzo małych $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Albowiem z wzoru tego wynika

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 l \qquad [274]$$

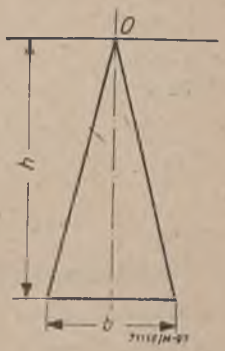
jako wartość przyśpieszenia siły ciężkości w miejscu pomiaru.

Rozmieszczenie wartości g na powierzchni ziemi pozwala, jak uczy geodezja, poznać dokładnie jej postać geometryczną, jako powierzchni ekwipotencjalnej, której pierwszym przybliżeniem jest sferoida spłaszczona.

Z wzoru $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mga}}$ dla bardzo małych wahnień wahadła symetrycznego wynika $I = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 Mga$, co pozwala obliczyć moment bezwładności I ciała stałego o postaci nieregularnej, np. samolotu, po zawieszeniu go na danej osi,

pobudzeniu do wahań i zmierzeniu okresu T oraz po wyznaczeniu (doświadczalnym) środka masy w sposób znany ze statyki.

Przykład 1. Obliczyć okres wahnienia cienkiej płyty jednorodnej o kształcie trójkąta równoramiennego (rys. 97), którego podstawa $b = 20$ cm, a wysokość $h = 40$ cm, jeżeli oś wahnienia przechodzi przez wierzchołek trójkąta i jest równoległa do podstawy.



Rys. 97.

Rozwiązanie: Moment bezwładności płyty względem osi wahania jest według wzoru [216] $I = M \frac{h^2}{2}$ Odpowiednia długość sprowadzona wahadła jest więc wg wzoru [272] równa

$$l = \frac{I}{Ma} = \frac{I}{M} \cdot \frac{2}{3} h = \frac{3}{4} h.$$

Odpowiadającym tej długości okresem wahadła matematycznego jest wg wzoru [241]

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{h}{g}} = \pi \sqrt{\frac{120}{981}} = 0{,}346 \text{ sek.}$$

Przykład 2. Obliczyć okres wahania cienkiej płyty jednorodnej w kształcie prostokąta o wymiarach $b = 50$ cm i $h = 100$ cm.

Rozwiązanie: Momentem bezwładności płyty prostokątnej względem np. boku b jest

$$I = M \cdot \frac{h^2}{3}.$$

Odległość środka ciężkości od osi obrotu $a = \frac{h}{2}$. A zatem długość sprowadzona wahadła

$$l = \frac{I}{Ma} = \frac{2}{3} h = \frac{200}{3} \text{ cm} = 66\frac{2}{3} \text{ cm},$$

okres zaś wahnienia

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{h}{g}} = 2\pi \sqrt{0{,}0679} = 2\pi \cdot 0{,}2606 = 1{,}64 \text{ sek.}$$

Przykład 3. Obliczyć okres wahnienia cienkościennego cylindra o promieniu średnim $R = 50$ cm zawieszonego na jednej z tworzących.

Rozwiązanie: Moment bezwładności względem osi symetrii $J = M \cdot R^2$, jeżeli M jest masą, a R średnim promieniem cienkiej powłoki cylindrycznej. Względem tworzącej jako osi wahania moment przyrasta o $M \cdot R^2$ według wzoru *Huygensa*. A zatem długość sprowadzona wahadła

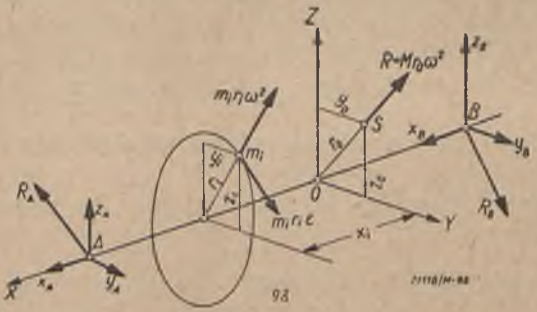
$$l = \frac{2M \cdot R^2}{M \cdot R} = 2R.$$

Stąd okres

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{100}{981}} = 2{,}085 \text{ sek.}$$

78. Reakcje łożysk stałej osi obrotu

Rozłóżmy każdą z reakcyj punktów A i B (rys. 98 i 99) ustalających oś obrotu na składowe X_A, Y_A, Z_A; x_B, y_B, z_B. W paragrafie poprzednim stosując zasadę *d'Alemberta* w postaci warunków równowagi ciała sztywnego wyzyskaliśmy tylko jeden z warunków, jako wystarczający do ustawienia równania ru-



Rys. 98.

chu o jednym stopniu swobody, jakim jest ruch rozpatrywany. Wprowadziwszy teraz reakcje łożysk jako siły zewnętrzne działające oprócz danych sił $\vec{P_j}$ ($j = 1, 2, 3, \ldots m$) o składowych x_j, y_j, z_j, których punkty działania m_i mają współrzędne x_i, y_i, z_i, sprowadzamy zagadnienie do ustawienia równań równowagi dla ciała swobodnego. Ponieważ takich równań mamy 6, a to jedno, które dało równanie ruchu, nie zawiera wcale niewiadomych składowych reakcyj łożysk, przeto do

wyznaczenia tych sześciu niewiadomych rozporządzamy tylko pięciu równaniami: trzema warunkami rzutów i dwoma warunkami momentów względem osi Y i Z. Zobaczymy jednak, że wynikająca stąd nieoznaczoność rozwiązania zwykle nie zachodzi w przypadkach spotykanych w praktyce. Dla większej przejrzystości obliczenia wykonamy najpierw redukcję oporów bezwładności (sił *d'Alemberta*) do początku układu O, pamiętając, że płaszczyznę $Y\,Z$ przesunęliśmy przez środek masy ciała S o współrzędnych (O, y_o, z_o). Przy tym zredukujemy osobno siły odśrodkowe i styczne opory bezwładności.

A. Siły odśrodkowe cząstek ciała o masach m_i i o współrzędnych x_i, y_i, z_i mają tylko składowe w kierunkach osi Y i Z. Tymi składowymi są:

$$m_i r_i \omega^2 \cos(r_i, y) = m_i y_i \omega^2$$
$$m_i r_i \omega^2 \cos(r_i, z) = m_i z_i \omega^2$$

Ich momenty względem osi X są:

$+ m_i y_i \omega^2 z_i$, $- m_i z_i \omega^2 y_i$, a więc razem dają 0.

Momenty względem osi Y są odpowiednio

$$0,\ m_i z_i \omega^2 x_i,$$

zaś względem osi Z

$$-m_i y_i \omega^2 x_i,\ 0$$

Zsumowawszy te wielkości dla wszystkich punktów ciała, otrzymujemy najpierw

$$\left.\begin{aligned} Y &= \Sigma\, m_i y_i \omega^2 = \omega^2 \Sigma\, m_i y_i = \omega^2 M y_o \\ Z &= \Sigma\, m_i z_i \omega^2 = \omega^2 \Sigma\, m_i z_i = \omega^2 M z_o \end{aligned}\right\} \quad [275]$$

ponieważ stosownie do określenia środka masy i oznaczenia $M = \Sigma\, m_i$, jest $\Sigma\, m_i y_i = M y_o$ oraz $\Sigma\, m_i z_i = M z_o$.

Dalej mamy:

Moment ogólny względem osi Y

$$\mathfrak{M}_y = \Sigma\, m_i x_i z_i \omega^2 = \omega^2 \Sigma\, m_i x_i z_i = \omega^2 D_y \quad [276]$$

a względem osi Z:

$$\mathfrak{M}_z = \Sigma - m_i x_i y_i \omega^2 = -\omega^2 \Sigma\, m_i x_i y_i = \omega^2 D_z \quad [277]$$

gdzie D_y i D_z są znanymi z teorii momentów bezwładności momentami zboczenia.

Wypadkowa z Y i Z ma wartość

$$R = \sqrt{Y^2 + Z^2} = \omega^2 M \sqrt{y_o^2 + z_o^2} = M r_o \omega^2 \qquad [278]$$

i jest do osi Y nachylona pod kątem α, przy czym $\operatorname{tg} \alpha = \frac{Z}{Y} = \frac{z_o}{y_o}$, co wyraża, że wypadkowa ta przechodzi przez środek masy ciała i ma wartość taką, jak gdyby cała masa M była skupiona w tym środku. Z tego jednakże nie wynika, aby siły odśrodkowe sprowadzały się zawsze do takiej wypadkowej, albowiem powyższa redukcja daje nadto moment

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2} = \omega^2 \sqrt{D_y^2 + D_z^2}, \qquad [279]$$

którego wektor jest nachylony do Y pod kątem β, przy czym

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}_y} = -\frac{D_z}{D_y}. \qquad [280]$$

W ogóle zatem sprowadzają się siły odśrodkowe do jednej siły $\vec{R}$ i jednej pary sił o momencie $\vec{\mathfrak{M}}$*, przy czym siła nie leży w tej samej płaszczyźnie co para. Wobec tego można siły odśrodkowe sprowadzić w ogóle do dwu sił skośnych, które obracają się razem z ciałem zajmując w nim niezmienne położenie.

W ważnym przypadku szczególnym, gdy środek masy leży na osi obrotu, jest $r_o = 0$, a więc $\vec{R} = 0$, a pozostaje tylko para $\vec{\mathfrak{M}}$. Ta para zaś znika wtedy i tylko wtedy, gdy $D_y = D_z = 0$, tzn. gdy oś obrotu jest główną osią bezwładności ciała.

Pod powyższymi dwoma warunkami siły odśrodkowe ciała sztywnego obracającego się około danej osi znoszą się nawzajem nie powodując żadnych reakcji osi obrotu, która dlatego nosi nazwę *swobodnej osi obrotu*. A zatem:

Osią swobodną obrotu jest każda z głównych centralnych osi bezwładności ciała.

---

* Parę tę uzmysłowiono na rysunku siłami R_A i R_B.

B. Wykonamy teraz redukcję stycznych oporów bezwładności, jakie występują w obrocie niejednostajnym z przyśpieszeniem kątowym ε. Ich składowymi są (rys. 98 i 99)

w kierunku Y . . . . . $-m_i r_i \varepsilon \sin(r_i, y) = -m_i r_i \varepsilon$,

w kierunku Z . . . . . $-m_i r_i \varepsilon \sin(r_i, y) = m_i y_i \varepsilon$.

Dla momentów względem osi Y i Z znajdujemy

$$m_i y_i \varepsilon x_i; \qquad m_i z_i \varepsilon x_i$$

Sumując powyższe wyrażenia, otrzymamy

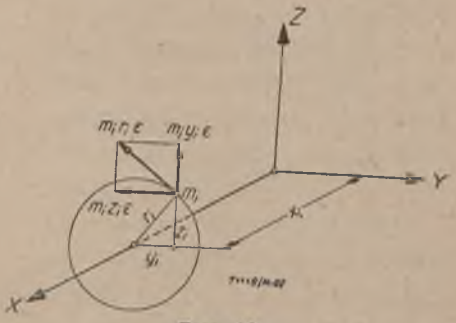
$$\left.\begin{aligned} Y &= -\Sigma m_i z_i \varepsilon = -\varepsilon M z_o \\ Z &= \Sigma m_i y_i \varepsilon = \varepsilon M y_o \end{aligned}\right\} \quad [281]$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_y &= \Sigma m_i x_i y_i \varepsilon = \varepsilon D_z \\ \mathfrak{M}_z &= \Sigma m_i x_i z_i \varepsilon = \varepsilon D_y \end{aligned}\right\} \quad [282]$$

Na koniec momenty względem osi X

$$\mathfrak{M}_x = -\Sigma m_i z_i^2 \varepsilon - \Sigma m_i y_i^2 \varepsilon = -\varepsilon \Sigma m_i (y_i^2 + z_i^2) = -\varepsilon I_x . \quad [283]$$

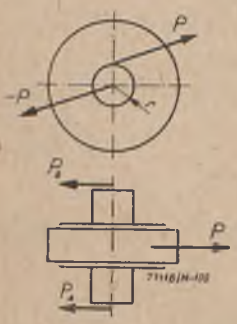
Styczne opory bezwładności różnią się zasadniczo od sił odśrodkowych tym, że występują tylko przy istnieniu sił zewnętrznych dających względem osi obrotu moment $\mathfrak{M}_o$ różny od zera, podczas gdy siły odśrodkowe, jako zależne tylko od prędkości kątowej ω, nie wymagają do zrównoważenia żadnych sił zewnętrznych czynnych prócz reakcji łożysk.



Rys. 99.

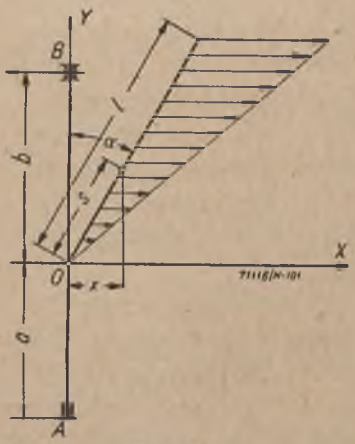
Z równań powyższych czytamy, że reakcje łożysk odpowiadające stycznym oporom bezwładności są względem ciała również stałe co do wielkości i kierunku. Te reakcje obracają się więc razem z ciałem mając wartości proporcjonalne względem ε. Tak samo jak reakcje wywołane siłami odśrodkowymi również znikają w ogóle reakcje spowodowane

stycznymi oporami bezwładności, gdy oś obrotu przechodzi przez środek masy ciała i jest jego główną osią bezwładności. Wyjątek pozorny stanowi tzw. *kołowrót*, tj. ciało o symetrii obrotowej osadzone na wale i wprawione w obrót przyśpieszony siłą ciągnącą sznur nawinięty na tym wale w kierunku stałym (rys. 100). Wtedy bowiem kierunek siły $\vec{P}$ nie jest oczywiście ustalony względem ciała, a siła poruszająca tworzy wraz z odpowiednimi reakcjami łożysk parę sił, której moment (obracający kołowrót) ma wartość Pr, gdzie r jest promieniem wału (zwiększonym o połowę grubości sznura). Reakcje łożysk są przy tym poziomie i mają ten sam kierunek, co siła $\vec{P}$, a zwrot przeciwny.



Rys. 100.

Przykład 1. Do osi AB, której masę pomijamy, jest sztywno przytwierdzony pod kątem α (rys. 101) pręt jednorodny o długości l i ciężarze jednostki długości q. Wyznaczyć reakcje łożysk wywołane obrotem jednostajnym tej osi z prędkością kątową ω przy założeniu łożyska stopowego w A i szyjnego w B. Dane liczbowe są: $\alpha = 60^0$, $a = 75$ cm, $b = 100$ cm, $l = 50$ cm, $n = 100$ obr/min.



Rys. 101.

Rozwiązanie: Niech s oznacza odległość dowolnego elementu ds długości pręta l, a $y = s\cos\alpha$ rzędną tego elementu w obranym na rysunku układzie współrzędnych. Siłę odśrodkową dP_l działającą na ten element przedstawia wyrażenie

$$dP_l = \frac{q}{g} \cdot ds \cdot s \cdot \sin\alpha \cdot \omega^2 = \frac{q}{g} \cdot \frac{dy}{\cos\alpha} \cdot \frac{y}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha \cdot \omega^2.$$

Z tego wynika, że wykres tych sił ma postać trójkąta zakreskowanego o podstawie równej

$$\frac{q}{g} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}(y)_{y=l}\,\omega^2 = \frac{q}{g} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot l \cdot \omega^2.$$

Wypadkowa sił odśrodkowych jako równa polu tego wykresu wyrazi się wzorem

$$P_l = \frac{1}{2} l \cos\alpha \cdot \frac{q}{g} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot l \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{g} \cdot \sin\alpha \cdot l^2 \cdot \omega^2$$

a jej moment względem punktu O

$$\mathfrak{M}_o = \frac{2}{3} \cos\alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{q} \sin\alpha \cdot l^2 \cdot \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{3} \cos\alpha \sin\alpha \frac{q}{g} \cdot l^3 \omega^2 .$$

Obliczywszy jeszcze moment tych sił względem A, tj.

$$\mathfrak{M}_A = P\left(a + \frac{2}{3} l \cos\alpha\right),$$

znajdziemy z warunku momentów reakcyj poziomych w A i B

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{g} \sin\alpha \cdot l^2 \cdot \omega^2 \left(\frac{b - \frac{2}{3} \cdot l \cos\alpha}{a + b}\right)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{g} \sin\alpha \cdot l^2 \cdot \omega^2 \frac{a + \frac{2}{3} l \cos\alpha}{a + b}$$

gdy $\alpha = 90^0$ (pręt l jest prostopadły do osi). Wtedy $\mathfrak{M}_o = 0$, a

$$P_l = \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{g} l^3 \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} \cdot l\,\omega^2, \text{ gdzie } Q = q\,l$$

jest ciężarem pręta.

Podstawienie danych liczbowych daje

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{10}{3}\,\pi = 10{,}47 \text{ sek}^{-1}.$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{981} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 50 \cdot \omega^2 \cdot \frac{100 - \frac{100}{3} \cdot \frac{1}{2}}{175} =$$

$$= 0{,}000126 \cdot 83{,}33\, Q\, \omega^2.$$

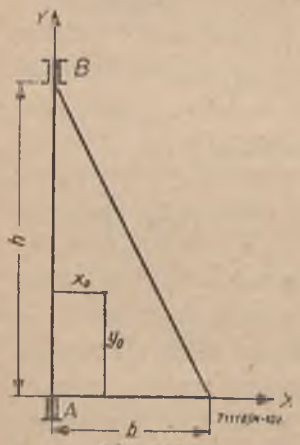
$$B = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{981} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 50 \cdot \omega^2 \cdot \frac{75 + \frac{100}{3} \cdot \frac{1}{2}}{175} +$$

$$+ 0{,}000126 \cdot 91{,}67\, Q\, \omega^2.$$

$$A = 0{,}01050\, Q\, \omega^2, \quad B = 0{,}01155\, Q\, \omega^2$$

$$A = 11{,}51\, Q \text{ kG}, \quad B = 12{,}67\, Q \text{ kG}$$

Przykład 2. Cienka płyta trójkąta z mosiądzu wykonuje n obrotów na minutę około osi pionowej ustalonej w łożyskach A i B (rys. 102). Obliczyć reakcje łożysk z danych następujących: $n = 30$, $b = 40$ cm, $h = 80$ cm, grubość płyty $\delta = 1$ cm, ciężar właściwy $\gamma = 8{,}5$ kG/dcm^3.



Rys. 102.

Rozwiązanie. Ciężar płyty $Q =$

$$= \frac{b \cdot h}{2} \cdot \delta \cdot \gamma = \frac{40 \cdot 80}{2} \cdot 1 \cdot \frac{8{,}5}{100} =$$

$$= 136 \text{ kG}.$$

Współrzędne środka ciężkości $x_0 = \frac{}{3}$ cm, $y_0 = \frac{80}{3}$ cm.

Jeżeli łożysko A jest stopowe, to cała składowa pionowa reakcji A_y równa się ciężarowi Q. Składową poziomą zaś da warunek momentów względem B. A zatem

$$Q \frac{b}{3} - A_x h = 0, \text{ skąd } A_x = Q \frac{b}{3h} = \frac{1}{6} Q,$$

zaś $$B_x = -A_x = -\frac{1}{6} Q.$$

Do tych reakcyj statycznych od ciężaru płyty dołączają się reakcje kinetyczne, których wielkość znajdujemy dzieląc płytę na elementarne paski poziome, dla których siła odśrodkowa według rozwiązania zadania poprzedniego da się przedstawić wzorem:

$$dP_i = \delta \, . \, x \, . \, dy \, . \, \frac{\gamma}{g} \, . \, \frac{1}{2} \, x \, \omega^2.$$

Ponieważ $x = y \, \frac{b}{h}$, przeto

$$dP_l = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \delta \cdot \omega^2 y^2 \, dy.$$

Całkując między granicami $y = 0$ i $y = h$ otrzymujemy

$$P_l = \frac{1}{6} \, b^2 h \, \delta \, \frac{\gamma}{g} \, \omega^2.$$

Biorąc teraz moment dP_l względem B, napiszemy

$$d\mathfrak{M}_B = dP_l \, . \, y = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{h^2} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \delta \cdot \omega^2 y^2 \, dy.$$

a więc

$$\mathfrak{M}_b = \int_0^h y \, dP_l = \frac{1}{8} \, b^2 h^2 \, . \, \delta \, \frac{\gamma}{g} \, \omega^2.$$

Wypadkowa sił odśrodkowych leży zatem w odległości od B równej

$$y_1 = \frac{\mathfrak{M}_B}{P_l} = \frac{3}{4} \, h$$

Stąd $B'_x = -\frac{1}{4} \, P_l$ $\qquad A'_x = -\frac{3}{4} \, P_l.$

Reakcje wypadkowe statyczne i kinetyczne wyrażają przeto wzory:

$$A_x = -\frac{3}{4} \, P_l + Q \, \frac{b}{3h}; \; B_x = -\frac{1}{4} \, P_l - \frac{1}{6} \, Q.$$

Wstawiwszy wartości liczbowe znajdujemy:

$$P_l = \frac{1}{6} \cdot \frac{Q_1}{g} \cdot b \, \omega^2 = \frac{136}{6} \cdot \frac{40}{981} \cdot \frac{\pi^2}{30^2} \cdot 30^2 = 9{,}12 \text{ kG}$$

$$A_x = -\frac{3}{4} \cdot 9{,}12 + \frac{1}{6} \cdot 136 = -6{,}84 + 22{,}67 = 15{,}83 \text{ kG}$$

$$B_x = -\frac{1}{4} \, 9{,}12 - \frac{1}{6} \cdot 136 = -2{,}28 - 22{,}67 = -24{,}95 \text{ kG}$$

$$A_y = 136 \text{ kG}.$$

Przykład 3. Środek pręta jednorodnego o długości $2l$ jest sztywno połączony z osią pionową wirującą z prędkością kątową ω. Obliczyć bezpośrednio reakcje kinetyczne w łożyskach (rys. 103).

Rys. 103.

Rozwiązanie: Stosownie do rozważania w przykładzie 1 układ sił odśrodkowych jest równoważny parze sił o momencie $\mathfrak{M} = \frac{2}{3} \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{q}{g} \cdot l^3 \omega^2$ i ramieniu $= \frac{4}{3} l \cos\alpha$. Odpowiednie reakcje łożysk muszą więc również tworzyć parę złożoną z sił o wielkości $\frac{\mathfrak{M}}{2a}$. Moment $\mathfrak{M}$ staje się największym, gdy $\alpha = 45^0$ i równa się wtedy

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{3} \cdot \frac{q}{g} \, l^3 \cdot \omega^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{g} (a\omega)^2.$$

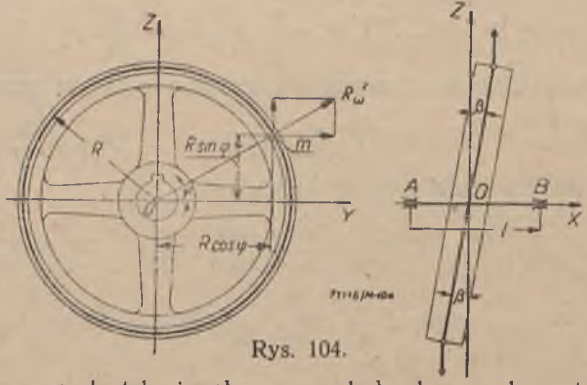
$$Q = 2lq.$$

Gdy np. $l = 50$ cm, $a = 60$ cm, $Q = 10$ kG, $\omega = 10$ sek^{-1}, $\alpha = 45^0$ to $\mathfrak{M} = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{981} 500^2 = 425$ kG cm.

Odpowiednie reakcje poziome łożysk obracające się razem z osią mają wartość

$$A_x = -B_x = \frac{\mathfrak{M}}{2a} = \frac{435}{120} = 3{,}5 \text{ kG}.$$

Przykład 4. Koło (rys. 104) składające się z wieńca o promieniu średnim $R = 75$ oraz ramion i piasty, których bezwładność pominiemy,



Rys. 104.

zaklinowano na wale tak, że płaszczyzna koła zbacza od prostopadłej do osi wału o mały kąt β. Jakie reakcje kinetyczne powstaną wskutek tego w łożyskach?

Rozwiązanie: Ponieważ oś obrotu nie leży na jednej z głównych osi bezwładności koła, przeto reakcje kinetyczne w łożyskach można obliczyć stosując wzory ogólne z § 78 punkt A. Tutaj jednakże obierzemy z korzyścią drogę bezpośrednią redukcji układu sił odśrodkowych działających na elementy wieńca. Obrawszy w tym celu układ współrzędnych prostokątnych z początkiem O w środku koła, osią obrotu jako X, osią Y jako prostą przecięcia się płaszczyzny symetrii koła z płaszczyzną YZ, obliczymy składowe siły odśrodkowej działającej na element wieńca. Jeżeli q oznacza ciężar jednostki długości wieńca, to ciężar jego elementu wyciętego kątem środkowym $d\varphi$ równa się $qRd\varphi$, zaś masa równa $\frac{q}{g} \cdot R \cdot d\varphi$. Promieniem obrotu elementu nie jest w ogóle R, z wyjątkiem elementów leżących na osi Y, ale najmniejszy promień $= R \cos\beta$, zamiast czego przy małym kącie β można z wystarczającym przybliżeniem przyjąć R. Wobec tego można jako wartość siły odśrodkowej przyjąć:

$$\frac{q}{g} \cdot R \cdot d\varphi \cdot R\omega^2 = \frac{q}{g} R^2 \omega^2 d\varphi$$

Jej kierunek względem osi układu jest określony (z tym samym przybliżeniem) kątem φ zmieniającym się dla kolejnych elementów wieńca od 0 do 2π. A zatem rzutami siły odśrodkowej na kierunki osi Y i Z są odpowiednio:

$$dY = \frac{q}{g} (R\omega)^2 d\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$dZ = \frac{q}{g} (R\omega)^2 d\varphi \cdot \sin\varphi$$

Rzuty na kierunek osi X są oczywiście równe 0. Suma tych rzutów dla każdej z osi jest równa 0. Natomiast suma momentów znika tylko dla osi X i Z z powodu symetrii, a dla osi Y ma wartość:

$$-\mathfrak{M}_y = \int (x\,dZ - z\,dX) = \int z\,dZ$$

Współrzędne $x = R \sin\varphi \cdot \sin\beta \cong \beta \cdot \sin\varphi$, a zatem

$$-\mathfrak{M}_y = \int_0^{2\pi} \beta \cdot R \sin\varphi \cdot \frac{q}{g} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi =$$

$$= \frac{q}{g} \cdot R^3 \omega^2 \beta \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot d\varphi = \frac{q}{g} \cdot 2\pi R \cdot \frac{R^2\omega^2\beta}{2}.$$

a ponieważ $2\pi R q = Q$ jest ciężarem wieńca, przeto

$$-\mathfrak{M}_a = \frac{Q}{g} \cdot \beta \cdot \frac{R^2 \omega^2}{2}.$$

Odpowiednie reakcje łożysk A_x i B_x tworzą parę ($A_z + B_z = 0$) o momencie $\mathfrak{M}_y$, a więc

$$A_z = -B_z = \frac{\mathfrak{M}y}{l} = \frac{Q}{g} \cdot \beta \cdot \frac{R^2 \omega^2}{2 l}$$

Gdy np. $Q = 400$ kG, $R = 70$ cm, $l = 50$ cm, $\omega = 18$ sek^{-1}

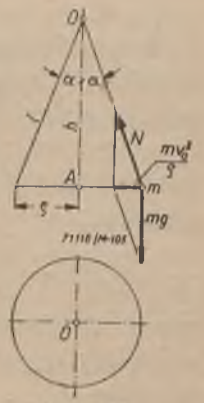
$$\beta = 1^0, \text{ to } A_z = \frac{400}{981} \; 0{,}01746 \; \frac{70^2 \, 18^2}{100} = 1{,}4 \text{ kG}.$$

79. O różnych znaczeniach nazwy „siła odśrodkowa"

Z nazwą tą spotkaliśmy się już niejednokrotnie, dobrze więc będzie zdać sobie dokładnie sprawę z trojakiego jej znaczenia. Najpierw określiliśmy siłę odśrodkową w § 61 jako siłę, którą na mocy prawa wzajemności działania wywiera punkt materialny na tor krzywoliniowy ograniczający swobodę jego ruchu. Jest to siła rzeczywista, której działanie objawia się np. przesuwaniem się szyn tramwajowych w stronę wypukłości łuku (na zewnątrz).

Po raz drugi użyliśmy tej nazwy przy rozpatrywaniu ruchu względnego swobodnego, jeżeli układ odniesienia obraca się w układzie bezwładnościowym. Siła, którą nazywaliśmy wtedy siłą odśrodkową, ma charakter siły pozornej, pomyślanej, wprowadzonej w rachunek dla uproszczenia rozpatrywania ruchu względnego. Z siłą odśrodkową w znaczeniu pierwszym ma ta pomyślana siła tylko wspólne wyrażenie matematyczne, a zresztą nic więcej. Siła ta istnieje w rzeczywistości tylko wtedy, gdy się odnosi do punktów materialnych ciała stanowiącego układ względny, lub do punktów materialnych, połączonych z nim niezmiennie i to oczywiście dla obserwatora w układzie bezwzględnym, albowiem ruch bezwzględny tych punktów jest nieswobodny. Wówczas jednak nazwa „siła odśrodkowa" odzyskuje pierwsze znaczenie.

Na koniec przy zastosowaniu zasady *d'Alemberta* ma składowa oporu bezwładności, nazwana siłą odśrodkową, znowu ogólne znaczenie siły pomyślanej, jakkolwiek np. w odniesieniu do cząstek ciała obracającego się nabywa ta siła charakteru rzeczywistego przedstawiając zarazem nacisk, jaki te cząstki wywierają na otaczającą masę ciała. Charakter realny nabywa nasza trzecia siła znowu dzięki temu, że ruch punktu materialnego należącego do ciała sztywnego jest nieswobodny. Z powodu małej spójności lub zbyt wielkiej wielkiej prędkości kątowej może ten nacisk (jak pouczają doświadczenia z kamieniami szlifierskimi, kołami zamachowymi itp.) wywołać niebezpieczne rozluźnienie cząstek, które prowadzi do pęknięcia ciała.



Rys. 105.

Ale chociaż zasada *d' Alemberta* ma niezwykle szerokie zastosowanie szczególnie do zagadnień ruchu ciał stałych, to jednak jej ważność ogólna nie ulega wątpliwości. Tak np. przy rozpatrywaniu wahadła stożkowego (rys. 105) zamiast mówić: „ciężar mg punktu materialnego i napięcie nici dają wypadkową ku środkowi okręgu opisywanego przez punkt materialny, która przeto musi mieć wartość $\frac{mv^2}{\varrho}$", możemy powiedzieć: „pomiędzy ciężarem mg, napięciem nici i siłą odśrodkową $-\frac{mv^2}{\varrho}$ zachodzi równowaga w myśl zasady *d'Alemberta*". W obu przypadkach dochodzimy oczywiście do tej samej wartości prędkości szukanej v i napięcia nici. Atoli siła odśrodkowa nie ma tutaj bytu realnego i jest tylko pomocniczym pojęciem rachunkowym.

W tym miejscu wypada jeszcze zwrócić uwagę na pewien szczegół rozpowszechniony bardzo w nauczaniu elementarnym. Mówi się tam, że odrywanie się cząstek błota od szybko toczących się kół pojazdów jest skutkiem siły odśrodkowej, ale rzadko dodaje się jednocześnie, że w chwili oderwania się cząstki siła odśrodkowa znika. To zaniedbanie prowadzi u po-

czątkujących do błędnego mniemania, że cząstki błota odrywają się w kierunku promienia, podczas gdy one poruszają się po oderwaniu w kierunkach swej prędkości przed oderwaniem, tj. prostopadłej od promienia.

80. Zasada pracy i energii

Tak nazywamy twierdzenie nader ważne, które jest uogólnieniem twierdzenia wyprowadzonego w § 50 dla jednego punktu materialnego. Stosując je do każdego z punktów materialnych m_i danego układu materialnego z osobna, otrzymamy tyle równań, ile jest punktów materialnych w układzie o postaci:

$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} m_i c_i^2 = L_{iz} + L_{iw} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots : : n).$$

Tutaj oznacza c_i wartość liczbową prędkości punktu m_i w chwili obranej za początkową i odpowiadającej położeniu początkowemu układu. Podobnie v_i jest prędkością tego punktu w chwili późniejszej, w której układ poruszający się zajął nowe położenie. L_{iz} oznacza pracę sił zewnętrznych, a L_{iw} pracę sił wewnętrznych działających na punkt materialny m_i na drodze między obu położeniami. Z dodania stronami wszystkich równań wynika:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i c_i^2 = \sum_i L_{iz} + \sum_i L_{iw} \qquad [284]$$

albo po oznaczeniu przez E i E_o energii kinetycznej układu w położeniu końcowym i początkowym, zaś przez L_z i L_w pracy całkowitej sił zewnętrznych i wewnętrznych na drogach punktów materialnych układu między obu położeniami.

$$E - E_o = L_z + L_w \qquad [285]$$

Równanie to wyrażamy:

Energia kinetyczna układu materialnego wzrasta lub ubywa podczas ruchu o wartość liczbową pracy wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych układu między jego

dwoma położeniami, zależnie od tego, czy praca ta jest dodatnia czy też ujemna.

To twierdzenie stosuje się i do układu nieswobodnego, jeżeli obok danych sił zewnętrznych wprowadzimy jeszcze reakcje zastępujące ograniczenie swobody jako dodatkowe siły zewnętrzne.

Przy pomocy zasady energii można w niektórych przypadkach wyznaczyć łatwo ruch układu jaki zachodzi pod wpływem danych sił czynnych. Takie przypadki zachodzą w zadaniach, z których jedno, bardzo proste i ważne, rozpatrzymy jako pierwszy przykład, a mianowicie:

Znaleźć równanie ruchu obrotowego ciała sztywnego osadzonego na osi stałej w łożyskach bez tarcia, jaki powstaje, gdy siły czynne działające na to ciało nie są w równowadze, czyli gdy ich moment ogólny $\mathfrak{M}_x$ względem osi obrotu X nie jest równy zeru. Energię kinetyczną E takiego ciała określi jak wiadomo z § 51 wzór

$$E = \frac{1}{2} I_x \omega^2 .$$

gdzie I_x oznacza moment bezwładności ciała względem osi obrotu X, a ω — jego prędkość kątową. Przyrostem tej energii w elemencie czasu $\mathrm{d}t$ będzie więc

$$\mathrm{d}E = I_x \omega \, \mathrm{d}\omega = I_x \omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t .$$

W czasie $\mathrm{d}t$ obróci się ciało o kąt $\mathrm{d}\varphi = \omega \, \mathrm{d}t$, a siły zewnętrzne $\vec{P}_i$ wykonają pracę elementarną $\mathrm{d}L = \Sigma \vec{P}_i \, \mathrm{d}s_i$. Ale $\mathrm{d}s_i = r_i \, \mathrm{d}\varphi$, jeżeli r_i oznacza tutaj promień obrotu punktu, na który działa siła $\vec{P}_i$, a ponieważ kąt między $\vec{P}$ a $\vec{\mathrm{d}s}$ jest kątem dopełniającym kąta α_i między siłą a osią obrotu, przeto $\vec{P}_i \cdot \vec{\mathrm{d}s}_i = P_i \sin \alpha_i \, r_i \, \mathrm{d}\varphi$. Tutaj jest $P_i \sin \alpha_i \, r_i = \mathrm{Mom}_x \vec{P}_i$, a więc

$$\mathrm{d}L = (\Sigma \, Mom_x \vec{P}_i) \, \mathrm{d}\varphi = \mathfrak{M}_x \omega \, \mathrm{d}t .$$

Praca reakcyj łożysk jest z powodu założonego braku tarcia równa zeru. Dlatego znajomość reakcyj nie jest tutaj potrzebna do wyznaczenia ruchu. Tak samo znika praca sił wewnętrznych z powodu założenia sztywności ciała. Według zasady energii jest teraz:

$$\mathrm{d}L = \mathrm{d}E$$

czyli

$$I_x \omega \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \mathfrak{M}_x \omega \mathrm{d}t,$$

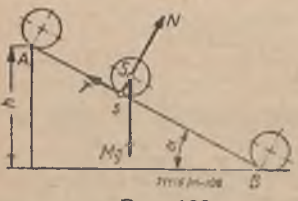
a stąd przyśpieszenie kątowe

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \varepsilon = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x} \qquad [286]$$

To równanie ruchu obrotowego otrzymaliśmy już w § 77 stosując zasadę *d'Alemberta*.

81. Ruch ciężkiego walca jednolitego lub kuli po płaszczyźnie pochyłej

Rozpatrzymy ten ruch jako drugi przykład zastosowania zasady energii, ograniczając się przy tym do przypadku staczania się jednego z tych ciał ze spoczynku, przy założeniu uproszczonym, że oś walca jest pozioma (rys. 106), a więc prostopadła do płaszczyzny rysunku. Przyjmiemy nadto, że opór toczenia się ciała można pominąć i że tarcie statyczne (sczepne) między ciałem a płaszczyzną jest dostatecznie wielkie, aby uniemożliwić ślizganie się ciała. W jakich warunkach można liczyć na spełnienie tego założenia, zobaczymy poniżej.



Rys. 106.

Toczenie się jest, jak wiadomo z kinematyki, ruchem złożonym z ruchu postępowego z prędkością v i obrotowego około osi, która w naszym zadaniu przechodzi przez środek masy S, z prędkością kątową $\omega = v/r$, gdzie r oznacza promień walca (lub kuli). Oba te ruchy są równoważne jednemu, tj. obrotowi

chwilowemu z tą samą prędkością kątową ω około osi równoległej do poprzedniej i przechodzącej przez punkty styczności s ciała z płaszczyzną. Dla energii kinetycznej napiszemy przeto wyrażenie

$$E = \frac{1}{2} I_s \omega^2 = \frac{1}{2} (I_o + M r^2) \omega^2.$$

gdzie I_s oznacza moment bezwładności względem osi s, a I_o względem osi do niej równoległej, a przechodzącej przez środek S masy M ciała.

Wyraziwszy I_o w postaci $M_{red} r^2$, napiszemy:

$$E = \frac{1}{2} (M + M_{red}) v^2, \text{ ponieważ } r\omega = v.$$

Siłami zewnętrznymi działającymi na ciało są: jego ciężar Mg, reakcja N prostopadła do płaszczyzny pochyłej i reakcja T styczna do tej płaszczyzny, stanowiąca tarcie sczepne (statyczne). Ponieważ wyłączyliśmy na razie możliwość ślizgania, więc reakcje N i T nie dają pracy, gdyż ich punkt działania na ciele ma w każdej chwili prędkość równą zeru; pozostaje tylko siła ciężkości Mg, która przy obniżeniu się środka masy ciała o h wykona pracę $M g h$. Ta praca jest według zasady energii równa przyrostowi energii kinetycznej ciała. Przyjąwszy zatem w położeniu początkowym $v = 0$, mamy

$$M g h = \frac{1}{2} (M + M_{red}) v^2, \text{ a stąd}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 g h}{1 + M_{red}/M}} \qquad [287]$$

Wynik ten poucza, że walec stacza się tym wolniej, im większe jest M_{red} wobec M. Dlatego walec wydrążony stacza się wolniej od walca pełnego. Ponieważ przy zsuwaniu się ciała po równi pochyłej bez tarcia byłaby prędkość końcowa równa $\sqrt{2hg}$, a przyśpieszenie ruchu równałoby się $g \sin \alpha$, przeto

widzimy, że przyśpieszenie staczania się bez ślizgania musi być równe

$$g \sin \alpha \frac{1}{1 + M_{red}/M}$$

A zatem przyśpieszenie kątowe walca (kuli) określi wzór

$$\varepsilon = \frac{g \sin \alpha}{r} \cdot \frac{1}{1 + M_{red}/M}. \qquad [288]$$

Ale to przyśpieszenie kątowe jest wywołane momentem Tr czyli

$$\varepsilon = \frac{T r}{I_o} = \frac{T r}{M_{red} r^2} = \frac{T}{M_{red} r}.$$

Z porównania obu wartości ε otrzymujemy równanie warunkowe

$$\frac{g \sin \alpha}{r} \cdot \frac{1}{1 + M_{red}/M} = \frac{T}{M_{red} r}$$

z którego znajdujemy

$$T = M g \sin \alpha \frac{M_{red}}{M + M_{red}}$$

jako wartość siły T konieczną do czystego toczenia się.

Z drugiej strony T musi czynić zadość warunkowi

$$T \leqq N \mu = Mg \cos \alpha \cdot \mu.$$

gdzie μ jest współczynnikiem tarcia. Z obu związków ostatnich wynika przeto, że

$$M g \sin \alpha \frac{M_{red}}{M + M_{red}} \leqq \mu M g \cos \alpha \text{ , a stąd}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \leqq \mu (1 + M/M_{red}). \qquad [289]$$

Gdy α jest większe od górnej granicy tym związkiem określonej, to czyste toczenie się jest niemożliwe, a ruch będzie złożony z toczenia się wraz ze ślizganiem. Wtedy przyśpieszenie kątowe walca określi również wzór $\varepsilon = \frac{T}{M_{red} r}$, z wartością $T = N \mu = \mu Mg \cos \alpha$, atoli przyśpieszeniem ruchu postępowego nie będzie już $r \varepsilon$.

Znajdziemy je najprościej stosując zasadę *d'Alemberta* wraz z zasadą ruchu środka masy. Piszemy więc rzutowy warunek równowagi wszystkich sił zewnętrznych i oporów bezwładności na oś równoległą do równi. Oś ta jest bowiem kierunkiem przyśpieszenia $\vec{p}$ ruchu postępowego ciała. Mamy więc

$$M p = M g \sin \alpha - T = M g \sin \alpha - N \mu =$$
$$= M g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

czyli

$$p = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \qquad [290]$$

pod warunkiem, że:

$$\operatorname{tg} \alpha > \mu (1 + M/M_{red}). \qquad [291]$$

Przykład 1. Walec jednorodny o promieniu r i ciężarze Q (rys. 107), spoczywający na chropowatej płaszczyźnie poziomej wprawiamy w ruch stałą siłą P działającą symetrycznie na oś walca. Jaka ma być wartość P, aby walec toczył się bez ślizgania przy danym współczynniku tarcia sczepnego (statycznego) μ_o i jaki będzie wtedy ruch walca?

Rys. 107.

Odpowiedź. Największa możliwa wartość reakcji stycznej w miejscu podparcia walca jest $\mu_o Q$. Ażeby więc nie zachodziło ślizganie, to winno być

$$P \leqslant \mu_o Q$$

Wtedy bowiem od chwili działania siły P rozpocznie się obrót chwilowy około tworzącej styczności C walca z przyśpieszeniem kątowym ε pod wpływem momentu $P r$, jeżeli pominiemy zwykle bardzo mały moment tarcia tocznego (oporu przeciw toczeniu się). A zatem $\varepsilon = \frac{P a}{I_c}$, gdzie I_c jest momentem bezwładności walca względem tworzącej C. Nadto jest stosownie do wzoru Huygensa

$$I_c = \frac{Q}{g} \cdot \frac{r^2}{2} + \frac{Q}{g} r^2 = \frac{3}{2} \frac{Q}{g} r^2 .$$

Przyśpieszeniem liniowym osi walca w jego ruchu postępowym będzie

$$p = r \varepsilon = \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{Q} g .$$

Znaczy to, że przyśpieszenie ruchu postępowego walca toczącego się bez ślizgania wynosi $\frac{2}{3}$ tego przyspieszenia, któreby otrzymało ciało o tej samej masie pod wpływem tej samej siły, gdyby jego ruch był ślizganiem bez tarcia.

Atoli w przypadku, gdy $P > \mu_o Q$ znajdzie wprawdzie również ruch złożony z postępowego i obrotowego, ale przyśpieszeniem ruchu postępowego jest teraz

$$p_1 = \frac{P - \mu_o Q}{Q/g},$$

a przyśpieszeniem kątowym około osi walca

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu_o Q \cdot r}{\frac{Q}{g} \cdot \frac{r^2}{2}} = 2\,\mu_o \frac{g}{r}.$$

Te obliczenia polegają na przyjęciu, że wartość współczynnika tarcia sczepnego μ_o staje się równą wartości współczynnika tarcia kinetycznego z chwilą rozpoczęcia ślizgania, co jest tylko w przybliżeniu słuszne, ale dla wielu zagadnień technicznych wystarczające.

Gdy np. $\mu_o = 0{,}2$, $Q = 1000$ kG, to $\mu_o = 200$ kG, a więc siła $P < 200$ kG wywoła toczenie się walca z przyśpieszeniem stałym ruchu postępowego

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{1000} (981 \text{ cm/sek}^2).$$

Skoro jednakże jest $P > 200$ kG, np. $P = 500$ kG, to przyśpieszenie ruchu postępowego

$$p_1 = \frac{500 - 200}{1000} g = 0{,}3\,g,$$

a więc również nie zależy od promienia walca.
Natomiast przyśpieszenie kątowe jest w pierwszym przypadku

$$\varepsilon = \frac{p}{r} = \frac{2}{3} \frac{981}{1000} \cdot \frac{P}{r} \text{ sek}^{-2},$$

w drugim zaś

$$\varepsilon_1 = \frac{p_1}{r} = 0{,}3 \frac{g}{r}.$$

Jeżeli np. P jest w pierwszym przypadku = 100 kG, a w drugim 400 kG, to przy $r = 40$ cm otrzymujemy

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{100}{1000} \cdot 981 = 65{,}4 \text{ cm/sek}^2, \quad \varepsilon = 1{,}63 \text{ sek}^{-2},$$

$$p_1 = 0{,}3 \cdot 981 = 294{,}3 \text{ cm/sek}^2, \quad \varepsilon_1 = 2 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{981}{40} = 9{,}81 \text{ sek}^{-2}.$$

Przykład 2. Ciało obrotowe jednorodne o ciężarze Q wirującym około swej osi w położeniu poziomym z daną prędkością kątową, położono w chwili $t = 0$ na chropowatej płaszczyźnie poziomej. Jaki będzie dalszy ruch ciała przy pominięciu bardzo małego oporu przeciw toczeniu się?

Odpowiedź. W chwili początkowej zaczyna działać tarcie kinetyczne $T = \mu Q$ w kierunku poziomym przeciwnym kierunkowi prędkości obwodowej $r\omega_0$. Siła T sprowadzona do osi ciała udzieli mu przyśpieszenia ruchu postępowego $p = \frac{T}{M} = \frac{\mu Q}{\frac{Q}{g}} = \mu g$ i przyśpieszenia ujemnego jego ruchu obrotowego

$$\varepsilon = \frac{T \cdot r}{I} = -\frac{Q \cdot r\mu}{M_{red} r^2} = -\frac{M \cdot \mu}{M_{red}} \frac{g}{r}.$$

Przyjąwszy, że μ jest stałe, otrzymujemy ruch postępowy ciała i jednostajnie opóźniony ruch obrotowy. Dla pierwszego napiszemy równanie prędkości

$$v = p \cdot t = \mu g \cdot t.$$

Dla drugiego zaś

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t = \omega_0 - \frac{g \cdot t\mu}{r} \frac{M}{M_{red}}.$$

Taki stan ruchu trwa tak długo, aż prędkość v zrówna się z prędkością obwodową $r\omega$, gdyż wtedy skończy się ślizganie, a rozpocznie czyste toczenie się. Mamy więc równanie

$$\mu \cdot g \cdot t = \omega_0 r - \mu g \cdot t \frac{M}{M_{red}},$$

skąd

$$t = \frac{r \cdot \omega_0}{(1 + M/M_{red})\mu g}.$$

Odpowiednia długość drogi

$$s = \frac{1}{2} p \cdot t^2 = \frac{1}{2} \mu g \cdot t^2 = \frac{(r \cdot \omega_0)^2}{2\mu g (1 + M/M_{red})}.$$

Po odbyciu tej drogi będzie ruch dalszy jednostajnym z prędkością postępową

$$v_1 = \frac{r \cdot \omega_o}{1 + M/M_{red}}$$

i z prędkością kątową obrotu

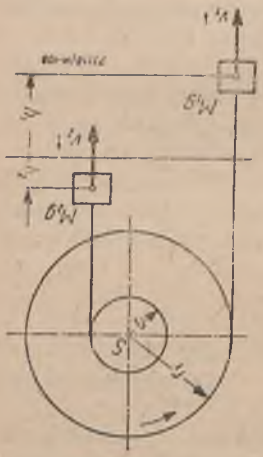
$$\omega_1 = \frac{\omega_o}{1 + M/M_{red}}.$$

Np. w przypadku walca jest $M_{red} = M/2$, a więc $v_1 = \frac{r \cdot \omega_o}{3}$

$$s = \frac{v_1^2}{2\mu g} = \frac{(r \cdot \omega_o)^2}{18\mu g}.$$

82. Ruch kołowrotu z ciężarami

Ruch kołowrotu z ciężarami jest trzecim przykładem zastosowania zasady energii. Oznaczmy przez I moment bezwładności kołowrotu (rys. 108) względem osi obrotu S przez $M_1 g$ ciężar wiszący na sznurze nawiniętym na kole o promieniu r_1, a przez $M_2 g$ ciężar wiszący na sznurze nawiniętym na walec o promieniu $r_2 < r_1$ i przyjmijmy, że cały układ był w chwili początkowej w spoczynku, a środki masy obu ciężarów na jednej wysokości. Uczyńmy nadto założenie upraszczające, że sznury są nieważkie, nierozciągliwe i doskonale giętkie, a $M_1 g r_1 > M_2 g r_2$, nie zachodzi więc równowaga. Wtedy od chwili początkowej rozpocznie się obrót kołowrotu w kierunku oznaczonym strzałką, masa M_1 zacznie spadać, a M_2 wznosić się. Gdy pierwsza obniży się o h_1, to druga podniesie się jednocześnie o $h_2 = h_1 \frac{r_2}{r_1}$. Przyrost energii kinetycznej układu określi wyrażenie



Rys. 108.

$$\frac{I\omega^2}{2} + \frac{M_1 v_1^2}{2} + \frac{M_2 v_2^2}{2} \quad \text{przy czym} \quad v_1 = r_1 \omega$$
$$v_2 = r_2 \omega.$$

zaś pracę sił zewnętrznych wyrażenie

$$M_1 g h_1 - M_2 g h_2.$$

Praca sił wewnętrznych i reakcyj osi z pominięciem tarcia w łożyskach jest stosownie do założeń poprzednich równa zeru. Zasada energii daje tedy równanie

$$\frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = M_1 g h_1 - M_2 g h_2.$$

Po wyrażeniu v_1 i v_2 przez ω i rozwiązaniu otrzymujemy

$$\omega = \sqrt{\frac{2 g (M_1 h_1 - M_2 h_2)}{I + M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}}, \qquad [292]$$

albo po uwzględnieniu proporcji $h_1 : h_2 = r_1 : r_2$

$$\left.\begin{aligned} v_1 = r_1 \omega &= \sqrt{\frac{2 g h_1 r_1 (M_1 r_1 - M_2 r_2)}{I + M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}} \\ v_2 = r_2 \omega &= \sqrt{\frac{2 g h_2 r_2 (M_1 r_1 - M_2 r_2)}{I + M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}} \end{aligned}\right\} \qquad [293]$$

Te wyniki wskazują, że wszystkie trzy ruchy są jednostajnie przyśpieszone. Przyśpieszeniem masy M_1 jest

$$p_1 = g \frac{r_1 (M_1 r_1 - M_2 r_2)}{I + M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}, \qquad [294]$$

zaś masy M_2

$$p_2 = g \frac{r_2 (M_1 r_1 - M_2 r_2)}{I + M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2}. \qquad [295]$$

Stąd znajdujemy przyśpieszenie kątowe kołowrotu

$$\varepsilon = \frac{p_1}{r_1} = \frac{p_2}{r_2}.$$

Z przykładów podanych w poprzednich paragrafach widać jasno, że zasada energii wystarcza do wyznaczenia ruchu układu pod wpływem danych sił, gdy ten układ składa się bądź to z ciał sztywnych połączonych przegubami bez tarcia lub sznurami idealnymi, bądź też z ciał sztywnych osadzonych na

osiach bez tarcia, przy czym ruch układu posiada tylko jeden stopień swobody. Mogą to być zresztą i ciała niesztywne, byleby tylko tak praca sił wewnętrznych, jako też praca reakcyj była podczas ruchu równa zeru.

Zdawałoby się na pozór, że nie będzie można korzystać z zasady energii przy rozwiązywaniu zadań mechaniki technicznej, które nie pozwalają najczęściej na pominięcie tarcia i innych oporów zużywających pracę i nie rzadko liczyć się muszą z odkształcalnością ciał stałych. Okazuje się, że zadania te są prawie zawsze wielce złożone i dopuszczają tylko rozwiązanie przybliżone. Do takich rozwiązań przybliżonych, poprawionych współczynnikami doświadczalnymi nadaje się bardzo dobrze zastosowanie zasady energii, przede wszystkim jako droga najprostsza.

83. Zasada krętu, czyli momentu ogólnego pędów cząstek układu materialnego swobodnego

Niech m_i oznacza masę dowolnego punktu materialnego danego układu, na który to punkt działają dane siły zewnętrzne o wypadkowej P_i, oraz siły wewnętrzne pochodzące od innych punktów materialnych tegoż układu, tj. siły W_{i1}, W_{i2} ... itd., które oznaczymy ogólnie przez W_{ik}, przy czym wskaźnik i oznacza którąkolwiek z wartości 1, 2 ... n, wyjąwszy oczywiście k.

Napiszmy teraz równanie dla krętów wszystkich punktów materialnych układu według § 43, a zatem dla punktu m_i i odpowiedniego krętu K_i:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{K}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_i \vec{v}_i \times \vec{r}_i) = \vec{P}_i \times \vec{r}_i + \sum_i (\vec{W}_{ik} \times \vec{r}_i),$$

Oznaczywszy przez $K = \sum_i \vec{K}_i$ kręt całego układu, otrzymamy z dodania wszystkich n równań powyższych

$$\frac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sum_i (m_i \vec{v}_i \times \vec{r}_i)] = \sum_i \vec{P}_i \times \vec{r}_i + \sum_i \sum_k \vec{W}_{ik} \times \vec{r}_i.$$

Ponieważ suma podwójna na końcu znika, jak to wykazano już w § 43, więc

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_i (\vec{P}_i \times \vec{r}_i), \qquad \text{albo} \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = \sum Mom_o \vec{P}_i = \vec{\mathfrak{M}} \qquad [296]$$

co wyraża, że zmiana czasowa (pochodna względem czasu) wektora krętu układu materialnego względem dowolnie obranego punktu O jest równa ogólnemu momentowi sił zewnętrznych układu względem tego punktu O.

Z tego wynika bezpośrednio, że gdy nie ma sił zewnętrznych, albo gdy ogólny moment tych sił względem punktu O jest równy 0, to wektor krętu ma wartość stałą w czasie. Jeżeli więc kręt układu był w pewnej chwili zerem, to pozostaje nadal równy zeru dopóki $\vec{\mathfrak{M}} = 0$. Poszczególne, a nawet wszystkie punkty materialne układu mogą być wtedy w ruchu, ale takim, że pewna ilość punktów krąży w jednym kierunku dokoła punktu O, a reszta w kierunku odwrotnym. Objaśni to dobrze następujący prosty przykład. Na spokojnej wodzie płynie okrągła tratwa wraz z stojącymi na niej wzdłuż całego obwodu ludźmi. Tak tratwa jak i ludzie są w chwili początkowej w spoczynku. Na dany znak rozpoczynają ludzie marsz dokoła z prędkością w względem tratwy np. w kierunku wskazówek zegara. Jednocześnie musi tratwa rozpocząć obrót w kierunku przeciwnym o prędkości takiej, przy której wartość liczbowa krętu tratwy jest ta sama, co wartość liczbowa krętu ludzi maszerujących, ażeby kręt ogólny, który na początku był równy zeru, nie zmienił tej wartości wobec braku sił zewnętrznych. Albowiem siły ciężkości są zniesione wyporem hydrostatycznym tratwy, a opory ruchu można pominąć jako bardzo małe przy niezbyt wielkich prędkościach.

Wykonajmy odnośne proste obliczenie do końca. Oznaczywszy przez ω prędkość kątową bezwzględną obrotu tratwy znajdujemy prędkość liniową jej cząstki dM leżącej w odległości

r od środka $v = r\omega$, a dla momentu pędu względem tegoż środka $\mathrm{d}M\, r\omega r = \omega r^2\, \mathrm{d}M$. A zatem kręt tratwy $K' = \int \omega r^2\, \mathrm{d}M = \omega \int r^2\, \mathrm{d}M = \omega I$, gdzie I jest momentem bezwładności tratwy, dającym się wyrazić jako $M \cdot \frac{R^2}{2}$, jeżeli R jest promieniem tratwy, a M jej masą. Prędkość bezwzględna v_1 ludzi o masie łącznej M_1 poruszających się po okręgu koła o promieniu R_1 jest wypadkową z prędkością względnej w i prędkości unoszenia równej $-R_1\omega$, czyli $v_1 = w - R_1\omega$. A zatem krętem ludzi jest $M_1 (w - R_1\omega) R_1$ *.

Zasada krętu daje przeto równanie

$$M \cdot \frac{R^2}{2}\, \omega = M_1 (w - R_1\omega) R_1 ,$$

z którego obliczamy

$$\omega = \frac{w}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{M R^2}{M_1 R_1^2}} .$$

Widzimy stąd, że prędkość kątowa tratwy rośnie i maleje wraz z prędkością względną w masy M_1 poruszającej się po niej dokoła (w kierunku przeciwnym) tak, iż gdy masa ta się zatrzyma, to i tratwa także. W ten sposób można obrócić tratwę ze stanu spoczynku o dowolny kąt, chociaż na nią nie działają czynne siły zewnętrzne.

Zasada krętu tłumaczy także znany fakt, że kot, chociażby go zrzucić z pewnej wysokości bez udzielenia mu obrotu początkowego, potrafi spaść „na równe nogi", a więc obrócić się odpowiednio w powietrzu, dzięki wielkiej łatwości znacznych ruchów względnych różnych części ciała i niepojętemu instynktowi zwierzęcemu, który te ruchy automatyzuje. Mechanizm ruchu spadającego kota zbadano dokładnie kinematograficznie z inicjatywy Akademii Nauk w Paryżu w r. 1894. Okazało się, że kot obraca najpierw tylnymi od-

* Przy założeniu upraszczającym, że tratwa jest tak wielka, że ludzi na jej obwodzie można traktować jako punkty materialne.

nożami z ogonem, aby przednia część ciała otrzymała obrót w pożądanym kierunku, oczywiście przeciwnym, zgodnie z zasadą krętu. Zmieniając następnie momenty bezwładności każdej z obu części przez kurczenie lub prostowanie odnóży przy odpowiednim zginaniu i skręcaniu kręgosłupa, doprowadza wreszcie całe ciało do położenia takiego, że dosięga ziemi wszystkimi łapkami prawie jednocześnie.

84. Ruch obrotowy ciała sztywnego swobodnego — Ruch bezwładnościowy ciała sztywnego około punktu stałego

Gdy na ciało sztywne swobodne będące w spoczynku działa para sił o momencie $\vec{\mathfrak{M}}$, to stosownie do zasady ruchu środka masy i zasady *d'Alemberta* (§ 73) środek masy ciała musi pozostać w spoczynku, a ciało rozpocznie obrót około osi przechodzącej przez środek masy. Z rozważań § 79 wynika, że obrót zajdzie około jednej z osi swobodnych ciała wtedy, gdy wektor momentu pary sił $\vec{\mathfrak{M}}$ (jako wektor swobodny) leży na jednej z tych osi. Oś obrotu jest wówczas prostopadła do płaszczyzny pary sił działającej na ciało. Zachodzi więc pytanie, jak się rzecz będzie miała przy dowolnym kierunku wektora $\vec{\mathfrak{M}}$? Aby odpowiedzieć na to pytanie, zastosujemy zasadę krętu do ciała sztywnego. Przed tym jednak obliczymy kręt odpowiadający obrotowi chwilowemu $\vec{\omega}$ około osi przechodzącej przez środek masy S. Obrawszy osie główne elipsoidy bezwładności dla środka S za osie X, Y, Z, możemy obrót $\vec{\omega}$ rozłożyć na składowe $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$ około tych osi. Kręt odpowiadający obrotowi składowemu $\vec{\omega}_1$ jest oczywiście równy $I_1\vec{\omega}_1$, jeżeli I_1 oznacza moment bezwładności ciała względem osi X. Podobnie przedstawia $I_2\vec{\omega}_2$ i $I_3\vec{\omega}_3$ kręty odpowiadające

obrotom składowym $\vec{\omega}_2$ i $\vec{\omega}_3$. A zatem kręt $\vec{K}$ przynależny obrotowi $\vec{\omega}$ przedstawi równanie

$$\vec{K} = \vec{i} I_1 \omega_1 + \vec{j} I_2 \omega_2 + \vec{k} I_3 \omega_3, \qquad [297]$$

gdzie i, j, k oznaczają wektory jednostkowe na osiach X, Y, Z.

Stąd wartość liczbowa

$$K^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2, \qquad [298]$$

Aby teraz znaleźć kąt zawarty między wektorami $\vec{K}$ i $\vec{\omega}$ napiszemy

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = \vec{i}\,\omega_1 + \vec{j}\,\omega_2 + \vec{k}\,\omega_3 \qquad [299]$$

i pomnożymy równania [297] i [299] wektorowo.
Mamy więc

$$\vec{K} \times \vec{\omega} = (\vec{i} I_1 \omega_1 + \vec{j} I_2 \omega_2 + \vec{K} I_3 \omega_3) \times (\vec{i}\,\omega_1 + \vec{j}\,\omega_2 + \vec{k}\,\omega_3) =$$
$$= \vec{i} \times \vec{i} I_1 \omega_1^2 + \vec{j} \times \vec{i} I_2 \omega_1 \omega_2 + \vec{k} \times \vec{i} I_3 \omega_1 \omega_3 +$$
$$+ \vec{i} \times \vec{j} I_1 \omega_1 \omega_2 + \vec{j} \times \vec{j} I_2 \omega_2^2 + \vec{k} \times \vec{j} I_3 \omega_2 \omega_3 +$$
$$+ \vec{i} \times \vec{k} I_1 \omega_1 \omega_3 + \vec{j} \times \vec{k} I_2 \omega_2 \omega_3 + \vec{k} \times \vec{k} I_3 \omega_3^2.$$

Ale według określenia iloczynu wektorowego jest

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad \text{a nadto}$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}.$$

Uwzględniając te związki, napiszemy

$$\vec{K} \times \vec{\omega} = (I_2 - I_3)\,\omega_2 \omega_3 \vec{i} + (I_3 - I_1)\,\omega_3 \omega_1 \vec{j} +$$
$$+ (I_1 - I_2)\,\omega_1 \omega_2 \vec{k}.$$

Stąd

$$\vec{K}\,\omega \sin(\vec{K}, \omega) =$$

$$\sqrt{(I_1 - I_2)^2 \omega_1^2 \omega_2^2 + (I_2 - I_3)^2 \omega_2^2 \omega_3^2 + (I_3 - I_1)^2 \omega_3^2 \omega_1^2}$$

$$\sin(\vec{K}, \vec{\omega}) = \frac{1}{\omega}$$

$$\sqrt{\frac{(I_1 - I_2)^2 \omega_1^2 \omega_2^2 + (I_2 - I_3)^2 \omega_2^2 \omega_3^2 + (I_3 - I_1)^2 \omega_3^2 \omega_1^2}{I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2}} \cdot \quad [300]$$

Ten wynik dowodzi, że kręt $\vec{K}$ przynależny obrotowi $\vec{\omega}$ około prostej nie leżącej na jednej z głównych osi bezwładności nie ma kierunku $\vec{\omega}$, lecz tworzy z nim kąt ostry określony wzorem [300]. Tylko w przypadku szczególnym, gdy $I_1 = I_2 = I_3$, to $\sin(\vec{K}, \vec{\omega}) = 0$. Jeżeli więc elipsoida bezwładności ciała jest kulą, to kręt ma kierunek ten sam co $\vec{\omega}$ i wtedy jest $\vec{K} = I\vec{\omega}$ dla każdej osi obrotu. W przypadku ogólnym jest kręt określony wzorami [297] i [298]. Skoro więc na ciało działa para sił o momencie $\vec{\mathfrak{M}}$, to stosownie do zasady krętu jest

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\mathfrak{M}}.$$

Wstawiwszy tutaj za $\vec{K}$ wyrażenie [297] znajdujemy z uwzględnieniem zmienności wersorów $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ w układzie bezwzględnym

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{i} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \vec{j} I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \vec{k} I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + I_1 \omega_1 \frac{d\vec{i}}{dt} +$$

$$+ I_2 \omega_2 \frac{d\vec{j}}{dt} + I_3 \omega_3 \frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Ponieważ, jak wiadomo z § 33 jest $\frac{\mathrm{d}\vec{i}}{\mathrm{d}t} = \vec{i} \times \vec{\omega} =$

$$= \vec{i} \times (i\vec{\omega}_1 + j\vec{\omega}_2 + k\vec{\omega}_3) = k\vec{\omega}_2 - j\vec{\omega}_3$$

i podobnie

$$\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t} = \vec{i}\omega_3 - \vec{k}\omega_1, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t} = \vec{j}\omega_1 - \vec{i}\omega_2,$$

przeto

$$\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t} = \vec{i}I_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + \vec{j}I_2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} + \vec{k}I_3\frac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}t} + I_1\omega_1(\vec{k}\omega_2 -$$

$$- \vec{j}\omega_3) + I_2\omega_2(\vec{i}\omega_3 - \vec{k}\omega_1) + I_3\omega_3(\vec{j}\omega_1 - \vec{i}\omega_2) =$$

$$= \vec{i}\left[I_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3\right] + \vec{j}\left[I_2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} +\right.$$

$$\left.(I_3 - I_1)\ \omega_3\omega_1\right] + \vec{k}\left[I_3\frac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}t} + (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2\right] = \vec{\mathfrak{M}} =$$

$$= \vec{i}\mathfrak{M}_1 + \vec{j}\mathfrak{M}_2 + \vec{k}\mathfrak{M}_3 .$$

Tutaj $\mathfrak{M}_1$; $\mathfrak{M}_2$; $\mathfrak{M}_3$ są momentami sił pary względem odpowiednich głównych osi ciała. Równanie powyższe jest więc równoważne trzem równaniom niewektorowym:

$$\begin{aligned} I_1\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} &= (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2 + \mathfrak{M}_1, \\ I_2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} &= (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 + \mathfrak{M}_2, \\ I_3\frac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}t} &= (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1 + \mathfrak{M}_3 . \end{aligned} \qquad [301]$$

Są to *równania różniczkowe Eulera*, według których odbywa się ruch ciała sztywnego nie tylko około jego środka masy (gdy ciało jest swobodne), ale także ruch ciała sztywnego około jakiegokolwiek punktu stałego, dla którego głównymi momentami bezwładności są I_1, I_2, I_3.

Z równań [301] otrzymamy oczywiście jako przypadek szczególny równanie ruchu obrotowego około jednej z głównych osi bezwładności, np. pierwszej, gdy przyjmiemy $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3 = 0$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$. Wtedy bowiem pozostaje tylko z równania pierwszego

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = \mathfrak{M}_1.$$

Podobnie odczytujemy z tych równań, że w przypadku szczególnym gdy $I_1 = I_2 = I_3$ jest

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = \mathfrak{M}_1, \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \mathfrak{M}_2, \quad I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = \mathfrak{M}_3,$$

co wyraża, że przy stałym wektorze momentu $\vec{\mathfrak{M}}$ zachodzi obrót około osi stałej, przy czym $\vec{\omega} \parallel \vec{\mathfrak{M}}$. W tym przypadku ciało, któremu udzielono obrotu $\vec{\omega}$ zatrzymuje ten obrót jako jednostajny na zawsze, gdy nie ma sił zewnętrznych, któreby go zmieniły. Albowiem gdy $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3 = 0$, to

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt} = 0,$$

Atoli w przypadku ogólnym, gdy elipsoida bezwładności ciała jest trójosiowa, a nie ma sił zewnętrznych, czyli gdy $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_3 = 0$, to ruch ciała sztywnego zwany *ruchem bezwładnościowym* zachodzi według równań

$$\left.\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} &= (I_3 - I_2)\,\omega_3\,\omega_2 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} &= (I_1 - I_3)\,\omega_1\,\omega_3 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} &= (I_2 - I_1)\,\omega_2\,\omega_1 \end{aligned}\right\} \qquad [302]$$

których rozwiązania ogólne wyrażają się funkcjami eliptycznymi.

85. Reakcje wywołane zmianą kierunku osi nieswobodnej obrotu — Działanie girostatyczne

Weźmy pod uwagę ciało sztywne, którego jedna z głównych centralnych osi bezwładności jest ustalona jako oś obrotu w łożyskach idealnych (bez tarcia). Niech to ciało obraca się około tej osi ze stałą prędkością kątową ω. W przypadkach praktycznych mamy zwykle do czynienia z ciałami o symetrii obrotowej względem osi, jak np. koła maszyn, wagonów itp. toteż przede wszystkim te przypadki zostały rozpatrzone w dalszych rozwiązaniach. Z § 79 wynika, że przy powyższych założeniach nie powstaną w łożyskach żadne inne reakcje oprócz tych, jakie zachodzą także w spoczynku np. dla zrównoważenia ciężaru ciała. Krótko mówiąc niema wtedy reakcyj kinetycznych, a jedynie same statyczne. Doświadczenie potwierdza całkowicie ten wniosek, ale zarazem poucza, że reakcje kinetyczne pojawiają się natychmiast przy każdym usiłowaniu zmiany kierunku osi obrotu. Dajmy na to, że oba łożyska są osadzone w sztywnym pierścieniu, który możemy dowolnie przemieszczać w przestrzeni. Model takiego układu stosowany do doświadczeń nosi nazwę *giroskopu* (rys. 109).

Rys. 109.

Ciało wirujące ma tutaj postać masywnego krążka ze zgrubieniem obwodowym. Udzielając giroskopowi dowolnego ruchu postępowego nie odczuwamy żadnych reakcyj prócz tych, jakie powstałyby bez obrotu własnego krążka, natomiast przy każdym ruchu obrotowym giroskopu około osi nierównoległej do osi obrotu krążka występują reakcje tym większe, im większą wartość ma prędkość kątowa ω i moment bezwładności I krążka względem jego osi obrotu. Reakcje objawiają się przy tym najsilniej, gdy giroskop obracamy około osi prostopadłej do osi obrotu własnego krążka.

Wymienione zjawisko objaśnia najlepiej zasada krętu. Ciało wirujące około swej głównej centralnej osi bezwładności

posiada, jak wiadomo z § 84 kręt, określony bez względu na obiór środka momentów stałym wektorem $\vec{K} = I\vec{\omega}$, który przeto można umieścić na osi obrotu. Jeżeli ciału temu udzielimy nadto obrotu jednostajnego około innej z osi głównych, to kręt zmieni swoje położenie i wielkość w ciele zbaczając od kierunku osi obrotu pierwotnego $\vec{\omega}$. Gdy jednakże rozważania nasze ograniczymy do najprostszego, a bardzo ważnego przypadku, kiedy ω jest bardzo wielkie w porównaniu do prędkości kątowych innych obrotów składowych, to kręt zboczy w ciele tak mało od kierunku pierwotnego, że w pierwszym przybliżeniu możemy przyjąć jego wartość liczbową za niezmienioną, a kierunek za zlewający się z kierunkiem $\vec{\omega}$ na osi geometrycznej ciała. Innymi słowy: kręt giroskopu (bąka itp.) posiadającego bardzo szybki obrót własny, leży z wielkim przybliżeniem na osi tego obrotu (czyli osi geometrycznej) wirującego krążka i porusza się wraz z nią w przestrzeni pod wpływem sił zewnętrznych.

Zapytajmy się teraz, jakich sił zewnętrznych potrzeba, aby geometryczna oś naszego krążka wirującego, pomyślana poziomo (rys. 109) obracała się jednostajnie około pionowej osi z małą prędkością $\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}$ (jeżeli ψ oznacza odpowiedni kąt obrotu). Otóż kręt $\vec{K} = I\vec{\omega}$ (rys. 110) przyrasta w czasie dt o $d\vec{K}$. Przyrost ten jest jak widać prostopadły do pierwotnego kierunku $\vec{K}$ i ma wartość liczbową $K\,d\psi = I\omega\,d\psi = I\omega\dot{\psi}\,dt$. Według zasady krętu jest $\frac{d\vec{K}}{dt}$ równe momentowi sił działających, którego wartość $\vec{\mathfrak{M}}$ musi być niezależna od środka momentów. A zatem $\vec{\mathfrak{M}}$ jest momentem pary sił

Rys. 110.

leżących w płaszczyźnie pionowej i działających na oba końce osi krążka, przy czym

$$\mathfrak{M} = I\omega \frac{d\psi}{dt} = I\omega\dot{\psi}. \qquad [303]$$

Siły tej pary jako prostopadłe do kierunku ruchu ich punktów działania (zaczepienia) w łożyskach osi, nie dają pracy. Równoważą one tylko w każdej chwili opory bezwładności, te zaś tworzą nawzajem parę sił o momencie $\vec{\mathfrak{G}} = -\vec{\mathfrak{M}}$, który przedstawia tzw. *działanie girostatyczne krążka* szybko wirującego przy obrocie wymuszonym jego osi geometrycznej.

Co się tyczy kierunku działania girostatycznego, to z rozumowania powyższego uzmysłowionego rysunkiem 110, gdzie $\vec{P}$, $-\vec{P}$ przedstawia parę o momencie $\vec{\mathfrak{M}}$, można odczytać następującą regułę (*Foucaulta*):

Para sił określająca działanie girostatyczne oporów bezwładności powstałych przy obracaniu osi własnej giroskopu (bąka itp.) około innej osi w przestrzeni układu bezwładnościowego ma wektor momentu taki, że gdyby nie była zrównoważona reakcjami łożysk lub innymi siłami zewnętrznymi, to zdążałaby do sprowadzenia na drodze najkrótszej osi pierwszej do zgodnej równoległości z osią drugą*.

Prócz tego równanie [303] wyraża, że moment tej pary ma wartość równą iloczynowi z krętu pierwszego obrotu (własnego) przez prędkość kątową obrotu drugiego (przy założeniu prostopadłości osi obu obrotów).

Należy jeszcze zwrócić uwagę, że dla materialnej osi krążka giroskopu jest moment $\vec{\mathfrak{M}}$ momentem zginającym w przekrojach, którymi ta oś wychodzi z krążka. Z tego wynika, że

* Osie obrotów nazywamy zgodnie równoległymi lub niezgodnie, stosownie do tego, czy ich wektory są zgodnie lub niezgodnie równoległe.

wartość tego momentu zginającego nie zależy od odległości łożysk, w przeciwieństwie do wartości momentu zginającego wskutek ciężaru krążka, który rośnie wraz z odległością łożysk. Natomiast wielkości reakcyj girostatycznych obu łożysk są odwrotnie proporcjonalne do ich odległości wzajemnej (podczas gdy reakcje statyczne są od tej odległości niezależne).

Takimi giroskopami na dużą skalę są np. koła turbin parowych, lub wirniki prądnic umieszczonych na statku. Ilekroć statek zmienia „kurs", a więc obraca się dokoła osi pionowej, pojawiają się w łożyskach tych maszyn reakcje tworzące parę o wartości liczbowej momentu $I\,\omega\,\dot{\psi}$, przy czym ω jest wartością prędkości kątowej maszyny, a $\dot{\psi}$ prędkości kątowej obrotu statku. Kołysania statku wytwarzają również odpowiednie reakcje girostatyczne łożysk, które w statkach małych (torpedowce) mogą nawet przewyższać poprzednie, albowiem prędkość kątowa kołysań jest tym większa, im statek jest mniejszy.

Przykład 1. Obliczamy moment reakcji girostatycznych turbiny okrętowej przy następujących danych, zaczerpniętych z praktyki:

Ciężar koła turbinowego — 18.000 kG, promień bezwładności — 1,5 m, liczba obrotów na minutę — 250, prędkość sterowania statku lub jego kołysania się — 12^0 na sekundę. A zatem:

$$I = \frac{18\,000 \text{ kG}}{9{,}81 \text{ (m/sek}^2\text{)}} (1{,}5 \text{ m})^2 = 4130 \text{ kG m sek}^2$$

$$\omega = 250 \cdot \frac{2\pi}{60} = 26{,}2 \text{ sek}^{-1}; \quad \dot{\psi} = \frac{12^0 \pi}{180^0} = 0{,}209 \text{ sek}^{-1},$$

a więc $\mathfrak{M} = I\,\omega\,\dot{\psi} = 4130 \cdot 26{,}2 \cdot 0{,}209 = 22600$ kG.

Przy odstępie łożysk 5 m wypada na łożysko reakcja 22600 : 5 = = 4520 kG, czyli około 50% reakcji statycznej (od ciężaru) wynoszącej 9000 kG. Obciążenie wypadkowe jednego łożyska waha się przeto między 9000 + 4520 = 13520 kG, a 9000 — 4520 = 4480 kG. Przy odległości łożysk 2 m osiągnęłaby reakcja girostatyczna dla jednego łożyska wartość 22600 : 2 = 11300 kG, czyli przewyższałaby wartość reakcji statycznej, wobec czego obciążenie wypadkowe jednego łożyska zmieniałoby się od + 20300 kG do — 2300 kG. Taki wynik nie może oczywiście pozostać bez wpływu na konstrukcję łożysk.

Ważną rolę gra działanie girostatyczne w lotnictwie z powodu wielkiej prędkości kątowej śmigieł, a jednocześnie znacznej szybkości obrotów całego samolotu, zwłaszcza przy „akrobacji". Mniejszej wagi jest dotychczas działanie girostatyczne w kolejnictwie. Jako przykład pouczający rozpatrzymy jednak działanie girostatyczne pary kół wagonu kolejowego jadącego po łuku o promieniu R (rys. 111). Niech v oznacza prędkość jazdy, r promień toczny kół, a m masę pary kół (wraz z osią) sprowadzoną na promień r. Wtedy $I = m r^2$, $\omega = v/r$, a więc kręt pary kół

Rys. 111.

$$K = m r v. \qquad [304]$$

Na łuku o promieniu R obraca się wagon, a z nim i kręt $\vec{K}$ około osi pionowej przechodzącej przez środek krzywizny łuku, z prędkością kątową $\dot{\psi} = v/R$ (małą wobec ω). A zatem bezwzględna wartość momentu girostatycznego z uwzględnieniem, że $r\omega = v$ jest:

$$|\vec{\mathfrak{G}}| = |\vec{\mathfrak{M}}| = K \cdot \dot{\psi} = m v^2 \cdot \frac{r}{R}. \qquad [305]$$

Widzimy, że moment ten dąży tak samo jak siła odśrodkowa do przewrócenia wagonu na zewnątrz łuku. Moment siły odśrodkowej względem osi leżącej w środku między szynami na płaszczyźnie podparcia wagonu jest wyznaczony z dokładnością wystarczającą wzorem

$$\mathfrak{M}_c = \frac{M v^2}{R} \cdot h, \qquad [306]$$

gdzie M oznacza masę wagonu, a h ramię momentu (przy założeniu równej wysokości szyn). Stosunek obu momentów

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_c} = \frac{m}{M} \cdot \frac{r}{h} \qquad [307]$$

jest jak widać niezależny od prędkości jazdy, jako też od krzywizny łuku i przedstawia się małym ułamkiem nawet wtedy,

gdy np. na osi jest osadzony silnik elektryczny. Przykłady wzięte z praktyki dowodzą, że $\mathfrak{M}$ jest kilkanaście razy mniejsze od $\mathfrak{M}_c$, a ponieważ działanie siły odśrodkowej unieszkodliwia się, jak wiadomo, przez pochylenie toru wyznaczone z warunku, aby moment siły odśrodkowej znosił się z momentem ciężaru, przeto działanie girostatyczne można by w razie potrzeby skompensować również środkiem tym samym, tj. przez stosowne zwiększenie przechylenia toru.

86. Działanie girostatyczne w przypadku ogólniejszym — Precesja regularna i pseudoregularna ciężkiego bąka

W poprzednim paragrafie rozpatrywaliśmy działanie girostatyczne (a zarazem reakcje łożysk giroskopu) przy założeniu, że stała w przestrzeni oś obrotu powolnego udzielonego pierścieniowi giroskopu jest prostopadła do osi ruchomej szybkiego obrotu własnego jego krążka.

Rys. 112.

Teraz weźmy pod uwagę przypadek ogólniejszy, kiedy oś obrotu pierścienia tworzy z osią krążka dany dowolnie kąt ϑ (rys. 112). Pomyślmy sobie, bez ujmy dla ogólności rozważań, pierwszą oś jako pionową. Oś geometryczna krążka opisuje wtedy pobocznicę stożka obrotowego o kącie wierzchołkowym 2ϑ i tenże sam ruch wykonywa w przybliżeniu wektor $\vec{K} = I\vec{\omega}$. Jego koniec opisuje okrąg o promieniu $K \sin\vartheta$, a zatem przyrost geometryczny $\mathrm{d}\vec{K}$ w elemencie $\mathrm{d}t$ jest styczny do tego okręgu, a więc prostopadły do obu osi i ma wartość liczbową

$$|\mathrm{d}\vec{K}| = K \sin\vartheta \cdot \dot{\psi} \cdot \mathrm{d}t.$$

Stąd wielkość momentu reakcyj łożysk

$$\mathfrak{M} = \frac{|\mathrm{d}\vec{K}|}{\mathrm{d}t} = I\omega\dot{\psi}\sin\vartheta, \qquad [308]$$

Kierunek wektora $\vec{\mathfrak{M}}$ jest taki, że w porządku $\vec{\mathfrak{M}}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\dot{\psi}}$

tworzą te wektory układ prawy. Posługując się symboliką rachunku wektorowego możemy napisać:

$$\vec{\mathfrak{M}} = I\omega \times \vec{\psi} = K \times \vec{\psi}, \qquad [309]$$

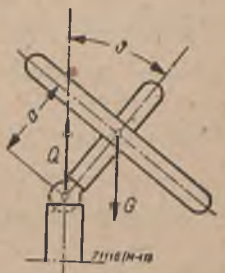
$$\text{zaś} \quad \vec{\mathfrak{G}} = -\vec{\mathfrak{M}} = \vec{\psi} \times I\omega, \qquad [310]$$

czyli słowami: Przy określonym wektorem $\vec{\psi}$ powolnym obrocie giroskopu, którego krążek wiruje z wielką prędkością kątową $\vec{\omega}$, powstaje działanie girostatyczne tworzące parę o momencie równym iloczynowi wektorowemu prędkości kątowej $\vec{\omega}$ przez kręt $\vec{K}$ giroskopu. Moment ten $\vec{\mathfrak{G}}$ obraca się wraz z pierścieniem giroskopu również z prędkością kątową $\vec{\psi}$ i przy stałych wartościach liczbowych ω i $\dot{\psi}$ ma także wartość stałą $I\omega\dot{\psi}\sin\vartheta$.

Prawie zbytecznym jest przypomnienie, że wyniki te są przybliżone i to tym bardziej, im większe jest ω wobec $\dot{\psi}$.

Przy wymuszonym obrocie $\vec{\psi}$ moment działania girostatycznego $\vec{\mathfrak{G}}$ równoważy się z momentem reakcyj $\vec{\mathfrak{M}}$ obu łożysk osi krążka (w myśl zasady *d' Alemberta*).

Nie trudno zauważyć, że w przypadku bąka (rys. 113) osadzonego jednym końcem osi w przegubie kulistym, można moment reakcyj $\vec{\mathfrak{M}}$ zastąpić momentem pary utworzonej przez ciężar bąka G i reakcję Q przegubu podpierającego. Jego wartością jest $Ga\sin\vartheta$,



Rys. 113.

a z warunku równowagi sił zewnętrznych z oporami bezwładności, tj.

$$Ga\sin\vartheta = I\omega\dot{\psi}\sin\vartheta$$

znajdujemy

$$\dot{\psi} = \frac{Ga}{I\omega} = \frac{Mga}{Mk^2\omega} = \frac{a}{k^2} \cdot \frac{g}{\omega}, \qquad [311]$$

(gdzie M jest masą bąka, a k — jego ramieniem bezwładności) jako prędkość swobodnego obrotu bąka około osi pionowej pod wpływem siły ciężkości przy odpowiednio dobranych warunkach początkowych. Ten powolny, jednostajny ruch osi geometrycznej bąka opisującej pobocznicę stożka obrotowego nazywamy *precesją regularną*. Zjawisko precesji bąka zastanawiało od wieków każdego interesującego się prawami przyrody, zwłaszcza, że po dłuższym ruchu bąka z osią pochyło ustawioną jego środek ciężkości nietylko nie opada, ale nawet podnosi się zrazu (bąk „wstaje") w miarę jak wskutek oporów ubywa prędkość kątowa obrotu własnego, a według równania [311] prędkość precesji $\dot{\psi}$ rośnie. Dopiero później, gdy wartość ω spadnie poniżej pewnej granicy, zaczyna się kołysanie osi bąka połączone z opadaniem środka ciężkości, które nakoniec prowadzi do jego upadku. Ponieważ daleko częściej obserwowano, że pod działaniem siły ciężkości niezrównoważonej reakcjami podporowymi środek ciężkości ciała się obniża, przeto upatrywano w zjawiskach bąka wirującego sprzeczność ze zwykłymi prawami mechaniki, czyli tzw. „paradoks" podobny wielu znanym w dawnej fizyce. Dziś wiemy, że paradoks bąka jest tylko pozorny, czyli, że nie należy do rzędu zjawisk, któreby wymagały rewizji lub uzupełnienia podstawowych praw dynamiki ustalonych przez *Newtona*. Albowiem ruch bąka i inne zjawiska girostatyczne odbywają się najściślej według tych praw, a tylko zawiłość matematyczna tych zjawisk czyni je trudno dostępnymi dla wyjaśnienia elementarnego. Toteż i powyższe uzasadnienie precesji regularnej bąka nie jest zupełnie zadowalające, już choćby z tego powodu, że opiera się na rachunku przybliżonym, a co ważniejsze dlatego, ponieważ nie określa ściśle warunków powstania ruchu tego rodzaju. Skoro bowiem, po udzieleniu bąkowi wielkiej prędkości kątowej ω, ustawimy go pochyło opierając jeden koniec osi w łożysku kulistym i puścimy swobodnie dru-

gi koniec bez prędkości początkowej, to ruch wytwarzający się następnie pod wpływem siły ciężkości i reakcji owego łożyska, jako jedynych sił zewnętrznych (tworzących parę sił), nie może być oczywiście, biorąc ściśle, precesją regularną, jakkolwiek na oko tak wygląda. Przy dokładniejszej obserwacji ułatwionej w doświadczeniach przez stosowne zmniejszanie ω widzimy, że w pierwszej chwili oswobodzenia drugiego końca osi, koniec ten opada poruszając się jednocześnie w kierunku precesji, po czym bardzo szybko znów się podnosi do wysokości pierwotnej (z pominięciem oporów ruchu) i ten ruch osi w kierunku poprzecznym do precesji, zwany *nutacją*, powtarza się następnie w równych przedziałach czasu, tym krótszych im większa jest prędkość kątowa obrotu własnego ω. Przy wielkiej wartości ω jest amplituda tego ruchu tak mała, że staje się niewidoczną, a nutacja zdradza się tylko drganiem akustycznym podstawy bąka. Ponieważ wtedy ruch bąka jest pozornie bardzo zbliżony do precesji regularnej, przeto nazwano go *precesją pseudo-regularną*. Można ją pojmować jako ruch złożony z precesji regularnej i nutacji. Przy objaśnieniu nutacji nie wystarcza oczywiście poprzestawać, jak poprzednio, na pierwszym przybliżeniu, przyjmując, że wektor obrotu chwilowego, kręt $\vec{K}$ i oś geometryczna bąka prawie się zlewają, ale trzeba uwzględnić zboczenie od tej osi dwu wektorów. To prowadzi do dłuższego rachunku, dającego równania różniczkowe ruchu, praktycznie całkowalne tylko w pewnych prostych przypadkach.

87. Zagadnienia dynamiczne w maszynach

Z pojęciem *maszyny* łączymy w mowie potocznej znane nam dobrze urządzenia służące do wykonywania pracy mechanicznej dla potrzeb praktycznych. Wszystkie maszyny można objąć następującym określeniem ogólnym:

Maszyną nazywamy zespół ciał przeważnie stałych, który czerpiąc z zasobu energii dostarczonego przez przyrodę (bezpośrednio lub za pośrednictwem innej maszyny) wykonywa

pracę mechaniczną użytkową, w sposób podyktowany celem praktycznym (technicznym). Gdy działanie maszyny służy tylko do zmiany energii dostarczanej przez przyrodę na pracę mechaniczną w ogóle, bez względu na spożytkowanie tej pracy, to maszynę nazywamy *silnikiem* („motorem"). Skoro zaś maszyna służy do spożytkowania pracy dostarczonej przez silnik w sposób określony jej celem, to nazywamy ją *maszyną roboczą*. Stosownie do określeń powyższych należałoby zaliczyć do maszyn nie tylko np. dźwignice służące do podnoszenia ciężarów, obrabiarki służące do wykonania pracy skrawania, tłoczenia itp., silniki wodne, parowe, spalinowe, elektryczne itp., ale także rozliczne drobne urządzenia uruchamiane przez człowieka dla ułatwienia pracy rąk oraz zegary. Chociaż bowiem zadaniem głównym zegara jest mierzenie czasu, a nie wykonywanie pracy mechanicznej, to jednak praca ta jest w zegarach niezbędna do pokonania tarcia w częściach składowych mechanizmu zegarowego.

Z tego powodu niektórzy inżynierowie - badacze próbowali zwęzić zakres pojęcia maszyny podnosząc jako cechę istotną ruch obrotowy przynajmniej jednej z głównych części maszyny. Ale w takim razie wypadałoby spośród uświęconych dawną tradycją tzw. „maszyn prostych" wyłączyć równię pochyłą i klin. Ruch obrotowy, jakkolwiek najdogodniejszy ze względów konstrukcyjnych i bardzo powszechnie stosowany, nie jest więc najistotniejszą cechą maszyny.

Natomiast nader ważną cechą główną wszelkich maszyn jest możliwość teoretyczna ich działania powtarzającego się rytmicznie w równych przedziałach czasu (okresach), czyli *działania okresowego*. Tak np. maszyna parowa tłokowa wykonywa przy każdym ruchu tłoka tam i napowrót jeden obrót wału głównego, a obrót ten powtarzałby się identycznie, gdyby praca pary była w każdym okresie równa liczbowo pracy oporów maszyny. Jest to oczywiście ideał teoretyczny, do którego jednakże budowa maszyn dąży zawsze przy pomocy urządzeń regulujących. Najprostszym z nich jest *koło zamachowe*, którego zadaniem jest ujednostajnienie każdego obrotu wału

głównego. Do ustalenia zaś trwania obrotów kolejnych, również pożądanego, służą *regulatory*.

W ruchu każdej maszyny zwanym często w praktyce *biegiem*, albo *chodem*, rozróżniamy trzy stadia: a) *rozruch* tj. wprawienie w bieg normalny maszyny w spoczynku, b) *bieg (ruch) normalny*, praktycznie jednostajny (równomierny) c) *bieg zanikający* (*wybieg*), czyli zatrzymanie maszyny przez zamknięcie dopływu energii i w razie potrzeby zahamowanie.

Zagadnienia dynamiczne zachodzą przede wszystkim w stadiach a) i c), aczkolwiek występują także w stadium b), zwłaszcza jeżeli trzeba uwzględnić odkształcalność wałów, osi itp. części maszyn. Wtedy jednakże stają się te zagadnienia nieraz bardzo trudne i wymagają głębszej znajomości teorii sprężystości i wytrzymałości. Tutaj poprzestaniemy na założeniu upraszczającym, że można uważać maszynę za zespół części sztywnych. Wtedy w biegu normalnym uważanym za jednostajny energia kinetyczna maszyny się nie zmienia, a więc przynajmniej w przedziałach czasu równych wielokrotności okresu ruchu jest praca wszystkich sił działających równa zeru. Praca ta jest sumą algebraiczną z pracy włożonej w maszynę L (w maszynie parowej np. jest nią praca pary przesuwającej tłok) i pracy oporów użytkowych o bezwzględnej wartości L_u oraz pracy oporów szkodliwych, czyli pracy „straconej" o wartości bezwzględnej L_s. Mamy więc równanie

$$L = L_u + L_s. \qquad [312]$$

Ale to równanie wyraża zarazem, że siły poruszające P, opory użytkowe Q i opory szkodliwe T czynią zadość zasadzie prac przygotowanych (wirtualnych), że zatem w każdej chwili biegu normalnego maszyny zachodzi równowaga sił P, Q i T. Tak postawione zagadnienie biegu normalnego maszyny należy do statyki, gdzie się je traktuje wyczerpująco. Do dynamiki należy jednak nie tylko rozruch i zatrzymanie maszyny, ale także odpowiedź na pytanie, jakie ma być koło zamachowe maszyny, aby niejednostajność ruchu w obrębie jednego obrotu nie przewyższała wartości uznanej za dopuszczalną.

88. Obliczenie koła zamachowego

Obliczanie koła zamachowego ma na celu wyznaczenie momentu bezwładności I tego koła z warunku, aby *stopień niejednostajności obrotu* nie przewyższał danej wartości. Określamy go wartością β stosunku różnicy między prędkością kątową największą ω_{max} i najmniejszą ω_{min} do prędkości średniej ω_{st} *. A zatem:

$$\beta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{st}} \qquad [313]$$

Prędkość średnią zaś określa ściśle równanie

$$\omega_{st} = \frac{1}{T} \int_0^T \omega \, dt. \qquad [314]$$

(gdzie T oznacza okres jednego obrotu), jednakże ze względu na ułatwienie obliczenia można stopień niejednostajności obrotu określić także wzorem przybliżonym

$$\beta' = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\frac{1}{2}(\omega_{max} + \omega_{min})}, \qquad [315]$$

Rzecz jasna, że wartość β i β' są w ogóle nierówne, ale ich różnica jest stosunkowo bardzo nieznaczna, jak wykazały obliczenia praktyczne. W dalszym ciągu zastosujemy przeto określenie ujęte wzorem [315], oznaczając wartość mianownika przez ω. A zatem

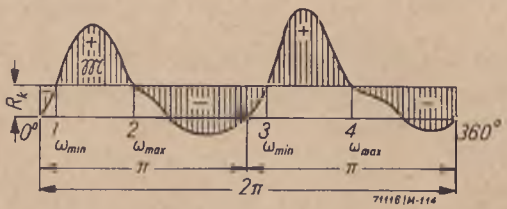
$$\beta' = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega}; \quad \omega = \frac{1}{2}(\omega_{max} + \omega_{min}). \qquad [316]$$

Przyjmujemy nadto, że okres T jednego obrotu nie ulega zmianie, że więc energia kinetyczna koła zamachowego wraz z innymi częściami poruszającymi się (np. tłoki, trzony, korbowody i korby w maszynie parowej) ma wartość powtarzającą się okresowo po każdym obrocie koła. Z zasady energii wynika, że praca wszystkich sił działających na drogach odpo-

* Praktyka ustaliła wartość β od 1/40, gdy silnik porusza obrabiarki, do $\frac{1}{300}$, gdy porusza prądnicę elektryczną.

wiadających jednemu obrotowi korby musi być w sumie algebraicznej równa zeru.

Przy pomocy wykresu indykatorowego możemy sporządzić wykres pracy sił czynnych na drodze $2\pi k$, jeżeli k oznacza długość teoretyczną korby. Będzie to zarazem wykres momentów tych sił względem osi obrotu, jako proporcjonalnych względem rzędnych (rys. 114). Postać wykresu zależy oczy-



Rys. 114.

wiście od rodzaju maszyny. Na rysunku przedstawiono wykres w pewnych granicach dowolny, jako wystarczający do przedstawienia zasady obliczenia. Momenty oporów (użytkowych i innych) uważane za stałe i ujemne dają wykres prostokątny. W każdej fazie obrotu określonej kątem obrotu korby φ (lub drogą $k\varphi$) jest moment wypadkowy przedstawiony różnicą rzędnych obu wykresów, uwidocznioną na rysunku przez zakreskowanie. Równanie ruchu koła zamachowego

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{I}$$

(bez uwzględnienia innych mas ruchomych jako małych wobec masy tego koła) wskazuje, że od *0* do *1* jest ruch opóźniony następnie od *1* do *2* przyśpieszony, po czym znowu opóźniony od 2 do 3 itd. A zatem prędkość kątowa ω jest równa ω_{min} w chwili odpowiadającej punktowi *1*, tj. wartości zerowej momentu wypadkowego $\mathfrak{M}$. Punktowi *2* odpowiada również wartość zerowa $\mathfrak{M}$, a zarazem ω_{max}. Podobnie w punkcie *3* zachodzi drugie ω_{min}, a w punkcie *4* drugie ω_{max}. Wybierając przeto te wartości, które dają największą różnicę, znajdujemy stopień niejednostajności ruchu według podanych wzorów, do czego jest jeszcze potrzebny rachunek następujący:

Przy założeniu, że w wyrażeniu dla energii kinetycznej układu materialnego, jaki stanowi maszyna parowa tłokowa, można pominąć energię innych części ruchomych, a uwzględnić tylko energię kinetyczną koła zamachowego wraz z wałem i korbą, zasada energii daje

$$\frac{I\omega^2_{max}}{2} - \frac{I\omega^2}{2} = \int_{\varphi}^{\varphi_2} \mathfrak{M}\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

$$\frac{I\omega^2}{2} - \frac{I\omega^2_{min}}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \mathfrak{M}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Z dodania obu tych równań wynika:

$$\frac{I}{2}(\omega^2_{max} - \omega^2_{min} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathfrak{M}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Lewą stronę równania przekształcimy łatwo na

$$\frac{I}{2}\ (\omega_{max} - \omega_{min})\ (\omega_{max} + + \omega_{min}) = I\beta'\overline{\omega^2}.$$

A zatem

$$\beta'\overline{\omega^2}\,I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathfrak{M}\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

stąd zaś szukana niższa granica momentu bezwładności

$$I = \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathfrak{M}\,\mathrm{d}\varphi}{\beta'\overline{\omega^2}}. \qquad [317]$$

Całkę określoną w liczniku łatwo wyznaczyć przez planimetrowanie wykresu.

Obliczenie *I* upraszcza się jeszcze bardziej, gdy w obu półobrotach wału można przyjąć tę samą linię wykresu i zastąpić ją w przybliżeniu połową fali sinusoidy (rys. 115). To odpowiada założeniom przybliżonym stałego nacisku średniego pary na tłok i bardzo wielkiej długości korbowodu. Pole takiej półfali przedstawia pracę dodatnią równą liczbowo pracy oporów. Pierwszą wyraża

Rys. 115.

$$L_p = \int_0^{\pi} \mathfrak{M}\,\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi\,,$$

gdzie $\mathfrak{M}\varphi = \mathfrak{M}_1 \sin\varphi$, jeżeli $\mathfrak{M}_1$ oznacza największą wartość momentu. A zatem

$$L_p = \mathfrak{M}_1 \int_0^{\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\,\varphi = 2\,\mathfrak{M}_1\,.$$

Pracę oporów *R* przedstawia pole prostokąta o wysokości $\mathfrak{M}_o$ i podstawie π. Napiszemy więc

$$L_R = -\,\mathfrak{M}_o\,\pi = -\,R\,k\,\pi$$

Ponieważ suma algebraiczna $L_p + L_R = 0$, więc $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_o \dfrac{\pi}{2}$, moment zaś wypadkowy, wyrazi wzór

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \sin\varphi - \mathfrak{M}_o = \mathfrak{M}_o\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi - 1\right).$$

Teraz znajdziemy wartość φ_1 i φ_2 z warunku

$$\frac{\pi}{2}\sin\varphi - 1 = 0,$$

a więc $\varphi_1 = 0{,}690$; $\cos\varphi_1 = 0{,}772$;
$\varphi_2 = 2{,}452$; $\cos\varphi_2 = 0{,}772$.

Przy pomocy tych wartości obliczymy wreszcie całkę

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathfrak{M}\,\mathrm{d}\,\varphi = \mathfrak{M}_o \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi - 1\right)\mathrm{d}\,\varphi$$

Całką nieokreśloną po prawej stronie jest $-\frac{\pi}{2}\cos\varphi - \varphi$.

A zatem

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathfrak{M}\, d\varphi = \mathfrak{M}_0 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(-\frac{\pi}{2}\cos\varphi - \varphi = \mathfrak{M}_0\right) \left(\frac{\pi}{2}\cos\varphi_1 + \varphi_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{2} \cos\varphi_2 - \varphi_2\right),$$

a po wstawieniu wartości powyższych za φ_1 i φ_2 znajdujemy $0{,}664\ \mathfrak{M}_0 = 0{,}664\ R\,k$. Stąd wzór do obliczenia przybliżonego momentu bezwładności I koła zamachowego

$$I \geqq \frac{0{,}664\ R\,k}{\beta'\omega^2}. \qquad [318]$$

Wprowadziwszy moc użytkową silnika $N = \mathfrak{M}_0\,\omega_{sr} = R\,k\,\omega_{sr}$ wyrażoną przez N koni mechanicznych, napiszemy wzór powyższy w postaci

$$I \geqq \frac{0{,}664\ N}{\beta'\omega^2\,\omega_{sr}} = \frac{0{,}664\ N}{7500\ \beta'\omega^2\,\omega_{sr}}. \qquad [319]$$

Zastąpiwszy tutaj w przybliżeniu ω przez ω_{sr} i wstawiwszy $\omega_{sr} = \frac{n\pi}{30}$ (gdzie n oznacza liczbę obrotów na minutę) otrzymamy wzór

$$I \geqq \frac{0{,}07711\ N}{\beta' n^3}\ (\mathrm{kGcmsek^2}), \qquad [320]$$

gdzie N wyrażono w KM.

Obliczona wartość przybliżona I może posłużyć do obliczenia dokładniejszej wartości przy uwzględnieniu energii kinetycznej tłoka z trzonem i korbowodu. Rachunki te są bardzo uciążliwe, a przy tym niekiedy nie wystarczające, jako oparte na założeniu sztywności wału i innych części składowych. Albowiem zwłaszcza odkształcalność sprężysta wału może być źródłem jego drgań skrętnych przyczyniających się do niejednostajności obrotu.

Wzór [320] wyraża, że potrzebny moment bezwładności koła zamachowego jest wprost proporcjonalny do mocy silnika (którym jest np tłokowa maszyna parowa), a odwrotnie względem żądanej wartości β' stopnia niejednostajności ruchu i trzeciej potęgi z liczby obrotów n (na minutę).

Część trzecia

TEORIA UDERZENIA

89. Określenia i rozważania ogólne

Gdy cząstka lub układ materialny poruszając się napotka inną cząstkę lub układ materialny tak, iż ruchy obu doznają zmiany wskutek wzajemnego działania przy zetknięciu, to mówimy o *uderzeniu cząstek* lub *układów materialnych* (ciał, brył itp.). Siły wywarte przy uderzeniu na miejsca zetknięcia się obu ciał nazywamy *siłami uderzenia.*

Uderzenie trwa od chwili t pierwszego dotknięcia się obu ciał. W chwili tej powstaje siła uderzenia P rosnąca najpierw od wartości 0 do pewnego maksimum, a następnie malejąca znowu do zera, którą to wartość osiąga w chwili końcowej trwania uderzenia (przy założeniu najprostszym, że uderzenie zachodzi w jednym tylko miejscu każdego z ciał). Czas τ trwania uderzenia zależy oczywiście od rozmiarów i własności mechanicznych ciał, a także od prędkości względnych ich ruchu. W krańcowym abstrakcyjnym przypadku ciał doskonale sztywnych sprowadzałoby się trwanie uderzenia do zera, a skutek uderzenia objawiłby się bezczasowym skokiem wartości prędkości obu ciał. Toteż przy rozważaniu teoretycznym uderzenia ciał rzeczywistych (realnych) musimy uwzględnić ich odkształcalność, czyli ich niedoskonałą sztywność, jako odporność na siły odkształcające. W wielu wypadkach wskutek dużej sztywności ciał stałych jest trwanie uderzenia tak małe, że siły uderzenia można z wielkim przybliżeniem traktować jako siły chwilowe.

Jeżeli siłę uderzenia trafiającą określony punkt ciała oznaczymy przez $\vec{P}$, przy czym $\vec{P}$ pojmujemy jako funkcję czasu, a uderzenie rozpoczyna się w chwili t, to *impuls uderzenia* $\vec{\Pi}$ określa równanie

$$\vec{\Pi} = \int_{t}^{t+\tau} \vec{P}\, dt \,. \qquad [321]$$

Rozważając tutaj tylko uderzenia ciał stałych przyjmiemy, że przy uderzeniu ciała te dotykają się nawzajem ścianami regularnie zakrzywionymi (a nie krawędziami lub wierzchołkami ostrymi, co skomplikowałoby zagadnienie). Wtedy w chwili początkowej trwania uderzenia obie ściany stykają się w jednym punkcie lub wyjątkowo wzdłuż pewnej linii. Przez ten punkt przechodzi płaszczyzna styczna, wspólna do powierzchni obu ciał i wspólna normalna zwana normalną *uderzenia*.

Przy dalszym założeniu ograniczającym, że ruch względny ciał jest ruchem postępowym, rozróżniamy *uderzenie proste*, gdy kierunek ruchu postępowego w chwili uderzenia jest równoległy do normalnej uderzenia, od *uderzenia ukośnego*, gdy te kierunki są nachylone.

Jeżeli normalna uderzenia przechodzi przez środek masy ciała, to nazywamy *uderzenie środkowym*, jeśli nie — *mimośrodkowym*. Stąd wynika, że uderzenie może być mimośrodkowe dla jednego z ciał a dla drugiego środkowe, albo też bądź to środkowe, bądź też mimośrodkowe dla obu ciał.

Chociaż teoria uderzenia nie wyróżnia jednego z ciał uderzających się nawzajem, gdyż obydwa podlegają tym samym prawom, a w szczególności na każde z nich działają siły uderzenia o tej samej wartości liczbowej, to jednak często dla wygody opisu nazywamy jedno z tych *ciał uderzającym*, a drugie *uderzonym*, zwłaszcza gdy pierwsze jest w ruchu, a drugie przed uderzeniem spoczywa.

Jeżeli w miejscu uderzenia zachodzą odkształcenia ciał w znacznym stopniu sprężyste, to mówimy o *uderzeniu sprężystym*. W przypadkach zaś, gdy odkształcenia są przeważnie plastyczne (trwałe) nazywamy *uderzenie niesprężystym*.

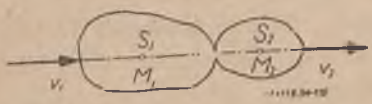
Nazwy: *uderzenie doskonale sprężyste* lub *doskonale plastyczne*, czyli *doskonale niesprężyste* tłumaczą się jasno jako odnoszące się do najprostszych wyidealizowanych przypadków końcowych. Uderzenie dobrych kul bilardowych zbliża się bardzo do uderzenia doskonale sprężystego; zaś uderzenie dwóch brył z mokrej gliny garncarskiej do uderzenia doskonale plastycznego. Cechy uderzenia sprężystego posiadają w stopniu znacznym zderzenia wagonów kolejowych przy manewrowaniu nimi na stacjach, a to dzięki zderzakom sprężynowym, w jakie wagony są zaopatrzone.

Przy zderzeniu zachodzi zawsze pewna strata energii, tzn. suma energii kinetycznych obu ciał po uderzeniu jest mniejsza od takiejże sumy przed uderzeniem. Na stratę składa się przede wszystkim praca odkształceń plastycznych, a nadto energia drgań akustycznych dających zjawisko nieodłączne od uderzenia nawet wtedy, gdy mamy do czynienia z ciałami wybitnie plastycznymi. Dlatego nawet przy uderzeniu ciał o wysokim stopniu sprężystości nie da się uniknąć rozproszenia energii w postaci fal głosowych; tą nieznaczną wprawdzie, ale dostrzegalną stratę energii nazywamy krótko *stratą akustyczną*. Stratę tę zwykle pomijamy, jako bardzo małą.

90. Uderzenie proste środkowe

Aby uprościć rozważania teoretyczne przyjmiemy, że w otoczeniu miejsca uderzenia się są ciała ograniczone powierzchniami obrotowymi, których osie leżą na normalnej uderzenia. Przyjmiemy dalej, że siła uderzenia $\vec{P}$ rozkłada się kołowo-symetrycznie względem punktu przebicia powierzchni stykania z normalną uderzenia. Niechaj M_1, M_2 oznaczają masy obu ciał (rys. 116), a v_1 i v_2 ich odpowiednie

prędkości ruchu postępowego jednokierunkowego. Jeżeli v_1 i v_2 mają ten sam znak, wtedy wzajemne siły uderzenia o wielkości zmiennej P, rosnącej od zera w chwili początkowego zetknięcia obu ciał, zmniejszają prędkość v_1 (przy założeniu oczywistym, że $v_1 > v_2$) zaś zwiększają v_2. Ta zmiana prędkości pod wpływem siły uderzenia P zachodzi przy wzroście P tak długo, aż oba ciała przybiorą wspólną prędkość u. Ten okres czasu nazwiemy *pierwszym aktem uderzenia.*



Rys. 116.

a. W przypadku (oderwanym) uderzenia doskonale niesprężystego siła P maleje z końcem aktu pierwszego do zera i oba ciała poruszają się dalej z wspólną prędkością u.

W tym przypadku kończy się jednocześnie całe zjawisko uderzenia, a wspólną prędkość u znajdujemy z równań dynamicznych wyrażających, że zmiana pędu ciała równa się impulsowi siły uderzenia wywołującej tę zmianę, a więc

$$M_1 v_1 - M_1 u = \vec{\Pi} = M_2 u - M_2 v_2 ,$$

stąd

$$u = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2} . \qquad [322]$$

Do tego wyniku można dojść także stosując do układu materialnego złożonego z obu ciał twierdzenie dynamiki, że siły wewnętrzne układu nie zmieniają jego pędu ogólnego, który przed uderzeniem był określony sumą $M_1 v_1 + M_2 v_2$, a po uderzeniu sumą $M_1 u + M_2 u$.

Natomiast energia kinetyczna obu ciał po uderzeniu, tj.

$$E' = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) u^2$$

jest mniejsza od energii przed uderzeniem, tj. od

$$E_0 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 .$$

Różnica $E_o - E'$ przedstawia stratę energii E_{str}, zamienioną niemal w całości na pracę odkształcenia plastycznego. Tę stratę wyraża równanie

$$E_{str} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2},$$

co łatwo sprawdzić podstawiwszy ze wzoru [322] wartość u w wyrażenie $E_o - E'$. Ale poniżej wyprowadzimy wzór dla E_{str} w postaci ogólniejszej, gdyż dla uderzenia częściowo niesprężystego

$$E_{str} = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (M_1 + M_2) u^2.$$

Teraz uzasadnimy inną postać wyrażenia dla E_{str} w sposób następujący:

Wyrazy $\frac{1}{2} M_1 v_1^2$ i $\frac{1}{2} M_2 v_2^2$ są oczywiście odpowiednio równe

$$\frac{1}{2} M_1 (v_1 - u)^2 + M_1 v_1 u - \frac{1}{2} M_1 u^2,$$

oraz $$\frac{1}{2} M_2 (u - v_2)^2 + M_2 v_2 u - \frac{1}{2} M_2 u^2.$$

A zatem:

$$E_{str} = \frac{1}{2} M_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} M_2 (u - v_2)^2 + (M_1 v_1 + M_2 v_2) \cdot u -$$

$$- \frac{1}{2} (M_1 + M_2) u^2 - \frac{1}{2} (M_1 + M_2) u^2,$$

a ponieważ $M_1 v_1 + M_2 v_2 = (M_1 + M_2) u$, przeto ostatnie trzy wyrazy dają w sumie zero, a pozostaje równanie:

$$E_{str} = \frac{1}{2} M_1 (v_1 - u)^2 + \frac{1}{2} M_2 (u - v_2)^2, \qquad [323]$$

wyrażające ważne twierdzenie *L. Carnota* o znaczeniu ogólniejszym, a mianowicie: Strata energii kinetycznej układu przy zderzeniu niesprężystym jest równa energii kinetycznej odpowiadającej zmianom prędkości wszystkich punktów układu wywołanym przez uderzenie.

b. W przypadku uderzenia doskonale sprężystego przyjmiemy stosownie do rozważań poprzedniego paragrafu, że siła uderzenia (która rosnąc w pierwszym akcie uderzenia od zera aż do końcowej wartości P_1 wytworzyła impuls $\Pi_1 = \int P\,dt$ i wywołała wyrównanie prędkości do wartości wspólnej u) od chwili ukończenia aktu pierwszego maleje, gdyż ciała odkształcone sprężyście w akcie pierwszym, powracają do postaci pierwotnej w akcie drugim. Przyjmując w pierwszym przybliżeniu, często zupełnie wystarczającym, że spadek siły uderzenia z upływem czasu w akcie drugim odbywa się według tego samego prawa, co wzrost tej siły w akcie pierwszym, dochodzimy do wniosku, że impuls uderzenia w drugim akcie jest równy impulsowi w akcie pierwszym, a więc $= \Pi_1$. Jeżeli więc z chwilą ukończenia drugiego aktu uderzenia, tj. kiedy siła P stała się równą zeru, ciało M_1 uzyskało prędkość w_1, a ciało M_2 prędkość w_2, to możemy napisać równania:

$$\text{(a)} \qquad M_1 v_1 - M_1 u = \Pi_1 = M_1 u - M_1 w_1$$
$$M_2 u - M_2 w_2 = \Pi_2 = M_2 w_2 - M_2 u.$$

Z obu równań wynika

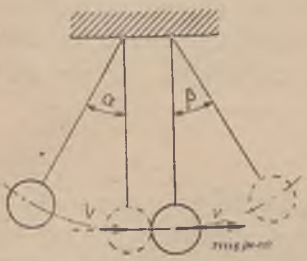
$$\left.\begin{aligned} w_1 &= 2u - v_1 = \frac{(M_1 - M_2)\,v_1 + 2\,M_2 v_2}{M_1 + M_2} \\ w_2 &= 2u - v_2 = \frac{(M_2 - M_1)\,v_2 + 2\,M_1 v_1}{M_1 + M_2} \end{aligned}\right\} \quad [324]$$

Gdy np. obie masy są równe $M_1 = M_2 = M$, to z wzorów ogólnych znajdujemy

$$u = \frac{1}{2}(v_1 + v_2);\ w_1 = v_2,\ w_2 = v_1.$$

Wynik ostatni łatwo sprawdzić doświadczalnie w przypadku szczególnym, gdy $v_2 = 0$. Wtedy masa M_2 będąca w spoczynku uderzona taką samą masą z prędkością v otrzymuje po uderzeniu doskonale sprężystym prędkość v, podczas gdy masa uderzająca zatrzymuje się tracąc całkowicie swą prędkość początkową. Słuszność tego można sprawdzić wie-

szając na nitkach możliwie lekkich dwie kule z materiału bardzo sprężystego tak, aby się dotykały bez nacisku tworząc dwa wahadła o równej długości (rys. 117). Następnie odchylamy jedno wahadło o kąt α i puszczamy kulę swobodnie. Kula ta uderzy drugą będącą w spoczynku z prędkością v zależną od wysokości spadku, po czym stwierdzimy, że kula uderzająca zatrzymała się, a kula uderzona odskoczyła tak, że jej nitka odchyliła się o kąt β bardzo bliski α, co dowodzi, że otrzymała po uderzeniu prędkość prawie równą v. Mała różnica tłumaczy się wpływami poprzednio omówionymi, a nie uwzględnionymi w teorii elementarnej.



Rys. 117.

Podobne doświadczenie na większą skalę czyni często maszynista parowozu przy przetaczaniu wagonów. Jeżeli wagon o masie M uderza z prędkością v drugi wagon o takiej samej masie będący w spoczynku, to pierwszy się zatrzymuje, a drugi rozpoczyna ruch z prędkością v.

Drugi praktycznie interesujący przypadek szczególny zachodzi, gdy masa M_2 uderzonego ciała będącego w spoczynku jest bardzo wielka w porównaniu do masy uderzającej M_1. Wtedy z równania [322] otrzymujemy

$$u = \lim \frac{v_1}{1 + M_2/M_1} = 0 \quad (\text{dla } M_2/M_1 \to \infty),$$

a z [324]

$$w_1 = -v_1,$$

co wyraża, że ciało uderzające nieruchomą masywną ścianę traci prędkość całkowicie, jeżeli uderzenie było doskonale niesprężyste, a odskakuje od ściany z prędkością równą liczbowo prędkości uderzenia, gdy uderzenie ma cechę doskonale sprężystego. Te wyniki potwierdza doświadczenie: kula z miękkiej gliny, rzucona tak, że uderza poziomo o pionowy mur, traci zupełnie prędkość przylepiając się zwykle do muru; na-

tomiast dobra piłka gumowa odbija się z prędkością co do wielkości równą prędkości uderzenia, a tak samo wagon opatrzony zderzakami sprężystymi odskakuje od zapory zamykającej ślepy tor kolejowy.

c. W przypadku uderzenia niezupełnie sprężystego przyjmujemy w teorii przybliżonej (*Newton*), że impuls uderzenia w akcie drugim oznaczony przez Π_2, który oczywiście musi być mniejszy od impulsu Π_1 w akcie pierwszym, da się wyrazić równaniem

$$\Pi_2 = k\,\Pi_1,$$

gdzie k oznacza *współczynnik uderzenia*, cechujący jego stopień sprężystości. Przy uderzeniu doskonale niesprężystym jest widocznie $k = 0$, przy doskonale sprężystym $k = 1$. W ogóle więc będzie k ułamkiem właściwym, o którym zakładamy, że jest niezależny od prędkości uderzenia, a jedynie zależny od właściwości materiału i postaci obu ciał. Jest to oczywiście grube przybliżenie, które jednakże oddaje zwykle dobre usługi w zadaniach praktycznych. Ponieważ

$$\Pi_1 = M_1 (v_1 - u) = M_2 (u - v_2)$$
$$\Pi_2 = M_1 (u - w_1) = M_2 (w_2 - u),$$

przeto

$$\frac{\Pi_2}{\Pi_1} = k = \frac{u - w_1}{v_1 - u} = \frac{w_2 - u}{u - v_2} = \frac{w_2 - w_1}{v_1 - v_2}. \qquad [325]$$

Obliczymy teraz stratę energii wskutek uderzenia. Energię kinetyczną przed uderzeniem określa wyrażenie

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2,$$

a po uderzeniu [a]

$$\frac{1}{2} M_1 w_1^2 + \frac{1}{2} M_2 w_2^2.$$

Stratę energi przedstawi zatem równanie

$$E_{str} = \frac{1}{2} M_1 (v_1^2 - w_1^2) + \frac{1}{2} M_2 (v_2^2 - w_2^2) \qquad [b]$$

Wstawiwszy tutaj stosownie do wzoru [325]

$w_1 = (1 + k) \cdot u - k v_1$; $\quad w_2 = (1 + k) \cdot u - k v_2$, [c]

a następnie wartość u według wzoru [322], a więc

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2 - k M_2 (v_1 - v_2)}{M_1 + M_2} \\ w_2 &= \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2 + k M_1 (v_1 - v_2)}{M_1 + M_2} \end{aligned}\right\} \quad [326]$$

znajdujemy najpierw

$$v_1 - w_1 = \frac{M_2 (1 + k)(v_1 - v_2)}{M_1 + M_2};$$

$$v_2 - w_2 = \frac{-M_1 (1 + k)(v_1 - v_2)}{M_1 + M_2}.$$

Te wyrażenia wstawiamy w równanie [b] przekształcone na

$$E_{str} = \frac{1}{2} M_1 (v_1 - w_1)(v_1 + w_1) + \frac{1}{2} M_2 (v_2 - w_2)(v_2 + w_2)$$

otrzymując

$$E_{str} = \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (1 + k)(v_1 - v_2)(v_1 - v_2 + w_1 - w_2),$$

a ponieważ

$w_1 - w_2 = -k (v_1 - v_2)$, według [325], przeto

$v_1 - v_2 + w_1 - w_2 = (1 - k)(v_1 - v_2)$, czyli

$$E_{str} = (1 - k^2) \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}. \quad [327]$$

W przypadku szczególnym uderzenia masy M_1 z prędkością v_1 o wielką masę spoczywającą ($v_2 = 0$), znajdujemy

$$E_{str} = (1 - k^2) \frac{M_1 v_1^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + M_1/M_2}. \quad [328]$$

Równanie to wyjaśnia warunki, w których zamieniamy z korzyścią praktyczną stratę energii przy uderzeniu na pracę użyteczną, np. przy kuciu, wbijaniu gwoździ itp. Przy kuciu jest pracą użyteczną praca odkształcenia plastycznego przedmiotu kutego. Przy danej energii uderzenia młota $^1/_2 M_1 v_1^2$ stosownie do wyrażenia [328] praca ta będzie tym większa im M_2 jest większe od M_1. Za masę M_2 można w dobrym przybliżeniu uważać masę złożoną z przedmiotu kutego, kowadła i jego

fundamentu. Gdy młot nie odskakuje, to dowodzi, że $k = 0$, a prawie całkowita jego energia kinetyczna zamienia się na pracę odkształcenia przedmiotu kutego. Przy wbijaniu gwoździa w deskę, lub pala w grunt, mamy nadto do czynienia oprócz stosunkowo nieznacznej pracy odkształcenia przedmiotu z pracą odkształcenia materiału, w który gwóźdź jest wbijany oraz tarciem o ściany otworu.

Jest rzeczą jasną, że pewna część energii idzie na odkształcenie młota. Aby ona była możliwie mała, winien młot być dość ciężki i z materiału trudno odkształcalnego (twardego).

Przykład 1. Wagon kolejowy o ciężarze $Q_1 = 10$ t uderza z prędkością $v_1 = 5$ km/godz. drugi wagon spoczywający o ciężarze $Q_2 = 5$ t, znaleźć prędkość obu wagonów po uderzeniu uważanym w przybliżeniu za doskonale sprężyste, pomijając energię kinetyczną obrotu zestawów kołowych.

Rozwiązanie. Według wzoru [324] napiszemy uwzględniając, że ciężary są proporcjonalne do mas, a $v_2 = 0$:

$$w_1 = \frac{(Q_1 - Q_2)v_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{5}{15} \cdot 5 = 5/3 \text{ km/godz.}$$

$$w_2 = \frac{2Q_1 v_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{20 \cdot 5}{15} = 20/3 \text{ km/godz.}$$

Energia kinetyczna uderzenia $E = \frac{1}{2} \frac{Q_1}{g} v_1^2$ rozdzieliła się na dwie części

$E_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1}{g} w_1^2$ i $E_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_2}{g} w_2^2$, które razem winny dać całkowitą energię kinetyczną E. To może posłużyć do sprawdzenia powyższego rozwiązania.

Przykład 2. Tzw. „baba" kafara o ciężarze $Q = 500$ kG uderza w pal spadając z wysokości $h = 3$ m, przy czym zagłębia go w podłoże o 2 mm. Uważając w przybliżeniu pal za ciało sztywne i pomijając sprężystość podłoża obliczyć opór R, jaki grunt stawia przy tym uderzeniu.

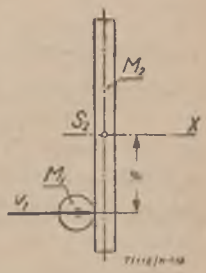
Rozwiązanie. Wartość liczbowa pracy tego oporu jest prawie równa energii uderzenia, a więc

$$R \cdot 0{,}002 = Q \cdot h = 500 \cdot 3 = 1500 \text{ kGm,}$$

stąd $R = 750000$ kG $= 750$ t.

91. Uderzenie proste mimośrodkowe

Przy założeniu upraszczającym, że płaszczyzna przechodząca przez normalną uderzenia i środek masy ciała jest prostopadła do jego głównej centralnej osi bezwładności, a oba ciała były przed uderzeniem w ruchu postępowym, będzie skutek uderzenia taki, że ciało uderzone mimośrodkowo otrzyma ruch złożony z postępowego i obrotowego około wymienionej osi bezwładności. Niechaj masą uderzającą z prędkością v_1 będzie M_1 (rys. 118), a uderzoną mimośrodkowo M_2 o momencie bezwładności $M_2 i_2^2$ i prędkości ruchu postępowego v_2 ($< v_1$). Impuls uderzenia Π sprawi, że na końcu pierwszego aktu uderzenia, tj. kiedy miejsce zetknięcia się obu ciał otrzyma wspólną prędkość u, jest



Rys. 118.

$$M_1 v_1 - M_1 u = \Pi . \qquad [a]$$

Oznaczmy przez e mimośród uderzenia, przez u_o prędkość postępową środka S_2 masy M_2, a przez ω prędkość kątową jej obrotu na końcu pierwszego aktu uderzenia. Dalsze równania dynamiczne przyjmą zatem postać :

$$M_2 (u_o - v_2) = \Pi ; \qquad \Pi e = M_2 i_2^2 \omega . \qquad [b]$$

Rugując z równań [a] i [b] impuls Π, mamy

$$M_1 v_1 - M_1 u = M_2 u_o - M_2 v_2 \qquad [c]$$

$$u_o = v_2 + \frac{i_2^2}{e} \omega . \qquad [d]$$

Z równań [c] i [d] oraz z równania kinematycznego

$$u = u_o + e \omega \qquad [e]$$

można teraz obliczyć trzy niewiadome u, u_o i ω. W tym celu rugujemy najpierw ω z równań [d] i [e] otrzymując

$$u - u_o = \frac{e^2}{i_2^2} (u_o - v_2) ,$$

skąd $$u_o = u\,\frac{i_2^2}{e^2 + i_2^2} + v_2\,\frac{e^2}{e^2 + i_2^2}\,. \qquad [f]$$

Wstawiwszy zaś to wyrażenie w równanie [c] znajdujemy

$$M_1 v_1 + M_2\,\frac{i_2^2}{e^2 + i_2^2}\,v_2 = \left(M_1 + \frac{M_2 i_2^2}{e^2 + i_2^2}\right)\cdot u\,.$$

Porównawszy ten wynik z odpowiednim równaniem uderzenia środkowego, tzn. z równaniem

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = (M_1 + M_2)\cdot u\,,$$

widzimy, że równanie dla uderzenia mimośrodkowego można napisać w tej samej postaci, jeżeli masę M_2 ciała trafionego mimośrodkowo zastąpić masą zredukowaną (zastępczą) M_2', określoną wzorem

$$M'_2 = M_2\,\frac{i_2^2}{e^2 + i_2^2}\,. \qquad [329]$$

A zatem $$u = \frac{M_1 v_1 + M'_2 v_2}{M_1 + M'_2}\,. \qquad [330]$$

Dla $e = 0$ wzór ten przekształca się na wzór [322]. Znając u obliczymy u_o z równania [f], a po tym ω z [d] i otrzymamy

$$u_o = \frac{M_1\,\dfrac{v_1 i_2^2 + v_2 e^2}{e^2 + i_2^2} + M'_2 v_2}{M_1 + M'_2}\,, \qquad [331]$$

$$\omega = \frac{e}{e^2 + i_2^2}\cdot\frac{M_1 (v_1 - v_2)}{M_1 + M'_2}\,. \qquad [332]$$

W przypadku gdy uderzenie jest mimośrodkowe dla obu ciał, łatwo przewidzieć następującą postać wzoru dla u:

$$u = \frac{M'_1 v_1 + M'_2 v_2}{M'_1 + M'_2}\,, \quad \text{przy czym} \qquad [333]$$

$$M'_1 = \frac{M_1 i_1^2}{e_1^2 + i_1^2}; \qquad M'_2 = \frac{M_2 i_2^2}{e_2^2 + i_2^2}\,. \qquad [334]$$

Jeżeli uderzenie jest bodaj częściowo sprężyste to po wyrównaniu prędkości w miejscu zetknięcia ciał do wartości u określonej równaniem [330], względnie [333], zajdzie w akcie drugim zmiana prędkości w tym miejscu na w_1 i w_2. Przy po-

mocy pojęcia masy zastępczej można te prędkości obliczyć od razu z wzorów [326] po wprowadzeniu M'_2 zamiast M_2, jeżeli tylko ciało M_2 jest uderzone mimośrodkowo, a więc

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{M_1 v_1 + M'_2[(1+k)v_2 - k v_1]}{M_1 + M'_2}, \\ w_2 &= \frac{M_1[(1+k)v_1 - k v_2] + M'_2 v_2}{M_1 + M'_2}. \end{aligned}\right\} \qquad [335]$$

Podobnie napiszemy wzory dla w_1 i w_2 w przypadkach, gdy tylko M_1 jest uderzone mimośrodkowo, zastępując M_1 przez M'_1. Wreszcie w przypadku mimośrodkowego uderzenia obu mas M_1 i M_2 zastępujemy obie przez M'_1 i M'_2 w odpowiednich wzorach uderzenia środkowego.

92. Uderzenie ciała obracalnego dokoła osi stałej

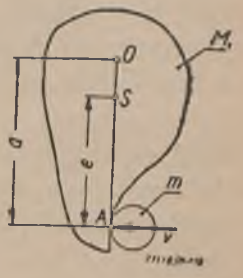
Przyjąwszy poziomą oś obrotu, której śladem na płaszczyźnie rys. 119 jest O, pomyślmy sobie ciało o masie M_1 w spoczynku. Jego środek masy S leży wtedy na pionowej $O\,S\,A$. Niechaj drugie ciało o masie m poruszające się postępowo z prędkością poziomą v trafia ciało M_1 w punkcie A, a więc mimośrodkowo. Wtedy po pierwszym akcie uderzenia dają równania dynamiczne pędu dla ciała uderzającego

$$\Pi = M_1 v - M_1 u, \qquad [a]$$

zaś dla ciała uderzonego

$$\Pi \cdot a = I \cdot \omega. \qquad [b]$$

przy czym $\omega = \frac{u}{a}$.



Rys. 119.

Tutaj I oznacza moment bezwładności ciała M względem osi obrotu. Rugując z obu równań Π otrzymujemy:

$$u = \frac{M_1 v}{M_1 + \frac{I}{a^2}} = \frac{M_1 v}{M_1 + M_{red}}, \qquad [336]$$

gdzie $M_{red} = \frac{I}{a^2}$ oznacza masę *sprowadzoną* do promienia a.

Wzór ten jest identyczny z wzorem dla uderzenia prostego i środkowego dwu ciał swobodnych, z których pierwsze o masie M_1 i prędkości v uderza drugie o masie M i prędkości 0. Impuls uderzenia spowoduje w ogóle reakcję łożysk ustalonej osi obrotu. Tej reakcji nie będzie tylko wówczas, gdy ciało M oswobodzone zupełnie obraca się pod wpływem takiego samego uderzenia około prostej 0 jako osi swobodnej. Stosując więc wyniki paragrafu poprzedniego i podstawiając $i_z = i$, napiszemy według wzorów [330] do [332]:

$$u = \frac{M_1 v}{M_1 + M\frac{i^2}{e^2 + i^2}}; \qquad u_o = \frac{M_1 v \cdot i^2}{e^2 + i^2} \cdot \frac{1}{M_1 + \frac{M i^2}{e^2 + i^2}}$$

$$\omega = \frac{e}{e^2 + i^2} \cdot \frac{M_1 v}{M_1 + \frac{M i^2}{e^2 + i^2}}. \qquad [337]$$

Prędkość punktu 0 ciała swobodnego po uderzeniu jest równa

$$u_o - (a - e)\omega.$$

Gdy ta prędkość stanie się zerem, to obrót złożony z ruchu postępowego z prędkością u_o i obrotu około osi centralnej z prędkością kątową ω zajdzie około prostej 0. A zatem

$$u_o = (a - e)\omega$$

jest warunkiem, aby łożyska osi materialnej, na której osadziliśmy ciało M, nie doznały reakcji przy uderzeniu prostopadłym do promienia $OA = a$ na jego końcu. Warunek ten daje $i^2 = (a - e)e$, a stąd

$$a = e + \frac{i^2}{e}. \qquad [338]$$

Równanie to określa zarazem, jak wynika z teorii wahadła fizycznego, tzw. długość sprowadzoną tego wahadła, odpowiadającą punktowi A jako punktowi zawieszenia *.

* Postacią najprostszą wzoru na długość sprowadzoną l wahadła fizycznego o masie M, momencie bezwładności I względem osi obrotu O i promieniu obrotu r środka masy jest

Punkt O nazywamy wtedy *środkiem wahania*. Gdy obierzemy punkt O jako punkt zawieszenia, to długość sprowadzona określi wyrażenie

$$a - e + \frac{i^2}{a - e}$$

które, jak łatwo dowieść, ma tę samą wartość a. Pisząc bowiem równanie:

$$a = x + \frac{i^2}{x}, \quad \text{czyli} \quad x^2 - ax + i^2 = 0,$$

widzimy, że suma pierwiastków x_1 i x_2 tego równania jest równa a. Skoro więc $x_1 = e$, to $x_2 = a - e$.

Gdy uderzenie prostopadłe do nieswobodnej osi obrotu ciała nie wywołuje reakcyj tej osi, to punkt, w którym najkrótsza odległość osi obrotu od normalnej uderzenia trafia tę normalną nazywamy *środkiem uderzenia*. Z obliczeń powyższych wynikają ważne prawidła następujące:

a. Środek uderzenia jest zarazem środkiem wahania ciała traktowanego jako wahadło na danej osi obrotu.

b. Ciało swobodne i spoczywające uderzone mimośrodkowo wzdłuż prostej prostopadłej do jednej z głównych centralnych osi bezwładności, obraca się około osi chwilowej do niej równoległej. Najkrótsza odległość tej osi od normalnej uderzenia jest równą długości sprowadzonej wahadła fizycznego, jakieby ciało tworzyło, gdyby ta oś była ustalona. Końce najkrótszej odległości tej osi od normalnej uderzenia są więc za-

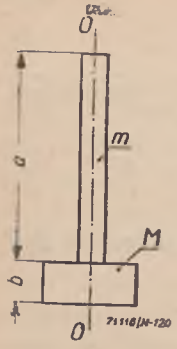
---

$$l = \frac{I}{Mr}.$$

Ponieważ $I = Mr^2 + I_o$, gdzie $I_o = Mi^2$, oznacza moment bezwładności względem osi równoległej do O i przechodzącej przez środek masy, przeto po podstawieniu tych wartości otrzymamy:

$$l = r + \frac{i^2}{r}.$$

mienne tak samo, jak środek wahania i punkt zawieszenia wahadła.



Rys. 120.

Przykład 1. Znaleźć środek uderzenia płyty prostokątnej o wymiarach $b = 40$ cm, $h = 80$ cm, wiszącej na osi poziomej bokiem b.

Odpowiedź. Odległość środka uderzenia od osi obrotu jest według twierdzenia [a] (§ 92) określona wzorem

$$l = \frac{I}{Mr} = \frac{k^2}{r},$$

gdzie k jest ramieniem bezwładności płyty względem osi obrotu, a

$r = \frac{h}{2}$ odległością środka masy płyty od tej osi.

Według wzoru [197] jest $k^2 = \frac{h^2}{3}$, a więc

$$l = \frac{h^2}{3h/2} = \frac{2}{3}h = \frac{160}{3} = 53\frac{1}{3} \text{ cm}.$$

Przykład 2. Wyznaczyć środek uderzenia młota wahadłowego zawieszonego na osi poziomej i złożonego z trzonu o długości a i masie m, oraz bijaka prostopadłościennego o wysokości b i masie M (rys. 120).

Rozwiązanie. Odległość środka masy od osi OO jest równa

$$r = \frac{M\left(a + \frac{b}{2}\right) + m\frac{a}{2}}{M + m} = a + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\frac{(a+b)\,m/M}{1 + m/M}.$$

Moment bezwładności wahadła

$$I = \frac{m \cdot a^2}{3} + M\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + M\frac{b^2}{12}.$$

A więc długość sprowadzona wahadła

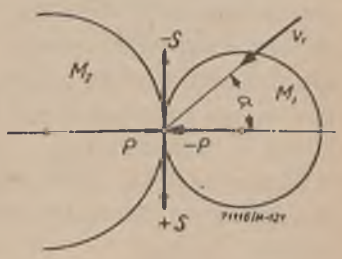
$$l = \frac{I}{(M + m)\,r} = \frac{M\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + M\frac{b^2}{12} + \frac{m\,a^2}{3}}{M\left(a + \frac{b}{2}\right) + m\frac{a}{2}}.$$

Gdy np. $a = 100$ cm, $b = 6$ cm, $M = 50$ kg, $m = 2$ kg, to

$$l = \frac{50 \cdot 103^2 + 50 \cdot 36/12 + 2\frac{100^2}{3}}{50 \cdot 103 + 2 \cdot 50} = 102{,}3 \text{ cm}.$$

93. Uderzenie ukośne

Gdy ciała uderzające się wzajemnie odbywały przed uderzeniem ruch postępowy, to uderzenie ukośne zachodzi, jeżeli kierunek ruchu przynajmniej jednego z ciał nie jest równoległy do normalnej uderzenia. Obierzmy tę normalną za oś X układu odniesienia. Niechaj środki mas obu ciał leżą na normalnej uderzenia. Dla uproszczenia przyjmujemy, że ciało M_2 jest w spoczynku, a ciało M_1 (rys. 121) uderza je ukośnie z prędkością v_1, nachyloną do narmalnej pod kątem α_1. Wtedy rozłożywszy v_1 na składową normalną $v_{1x} = v_1 \cos \alpha_1$, i $v_{1y} = v_1 \sin \alpha_1$ widzimy, że sama składowa v_{1y} nie dałaby powodu do powstania sił wzajemnego działania na siebie obu ciał, gdyby nie było składowej normalnej v_{1x}. Ta składowa określa pęd $M_1 v_1 \cos \alpha_1$, którego zmiana na $M_1 u_x$ po pierwszym akcie uderzenia mierzy odpowiedni impuls siły uderzenia



Rys. 121.

$$\Pi = M_1 (v_1 \cos \alpha_1 - u_x). \qquad [339]$$

Ale przez u_x oznaczono składową normalną prędkości po pierwszym akcie uderzenia. Zachodzi więc pytanie, jaka jest druga składowa u_y. Gdyby można było przyjąć (co niekiedy zachodzi w przybliżeniu), że w miejscu zetknięcia obu ciał nie zachodzi tarcie, to nie byłoby reakcji stycznej i ciało M_1 zachowałoby składową prędkości $v_{1y} = v_1 \sin \alpha_1$, bez zmiany (tj. $u_y = v_1 \sin \alpha_1$), czyli po pierwszym akcie uderzenia otrzymałoby prędkość równą

$$\sqrt{u_x^2 + (v_1 \sin \alpha_1)^2}.$$

natomiast ciało M_2 otrzymałoby tylko prędkość normalną

$$u_x = \frac{M_1 v_1 \cos \alpha_1}{M_1 + M_2}. \qquad [340]$$

Z uwzględnieniem tarcia sprawa przedstawia się inaczej, albowiem z powodu tarcia musi obok normalnej siły uderzenia P i jej impulsu pojawiać się także siła styczna o wielkości S, której impuls oznaczymy przez

$$\Pi' = \int S \, dt .$$

Impuls ten w odniesieniu do ciała M_1 zmniejsza składową prędkości $v_1 \sin\alpha_1$ jego ruchu postępowego, a zarazem działając nań mimośrodkowo udziela mu obrotu w kierunku wskazówek zegara. Natomiast impuls — Π' działający na ciało M_2 udziela mu prędkości ruchu postępowego u_y prostopadłej do normalnej uderzenia, oraz prędkości kątowej ω_1 o kierunku również zgodnym z wskazówkami zegara. Wobec tego zajdzie w czasie trwania nacisku normalnego ślizganie w miejscu zetknięcia, a więc $S = P\mu$ i $\Pi' = \Pi\mu$, jeżeli μ oznacza współczynnik tarcia.

Stosownie do tego znajdziemy teraz:

1. Składową prędkości postępowej u_{1y} ciała M_1 po pierwszym akcie uderzenia, pisząc równanie pędu

$$M_1 v_1 \sin\alpha_1 - M_1 u_{1y} = = \Pi' = \mu = M_1 (v_1 \cos\alpha_1 - u_x)\mu ,$$

a stąd po wstawieniu wyrażenia dla u_x (wg równania [340])

$$u_{1y} = v_1 \left(\sin\alpha_1 - \frac{M_2}{M_1 + M_2} \mu \cos\alpha_1 \right) \qquad [341]$$

2. Równanie ruchu obrotowego daje

$$I_1 \omega_1 = \Pi' r_1 ,$$

jeżeli I_1 oznacza moment bezwładności masy M_1 względem osi obrotu (o której przyjmujemy, że jest osią główną), a r_1 ramieniem momentu impulsu Π' względem tej osi. Wstawiwszy za Π' wartość z wzorów poprzednich i rozwiązawszy względem ω_1 mamy

$$\omega_1 = \frac{M_1 v_1 \cos\alpha_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{M_2 r_1}{I_1} \mu . \qquad [342]$$

A zatem składowa styczna prędkości liniowej tego miejsca ciała M_1, które uderza o M_2, ma po pierwszym akcie uderzenia wartość

$$u_{1y} - \omega_1 r_1 = v_1 \sin \alpha_1 - v_1 \cos \alpha_1 \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2}\left(1 + \frac{r_1^2}{i_1^2}\right)\mu \,, \quad [343]$$

jeżeli $I_1 = M_1 i_1^2$.

3. Ciało M_2 otrzymuje po pierwszym akcie uderzenia oprócz składowej u_x prędkości postępowej już poprzednio obliczonej, jeszcze składową u_{2y}, powstałą wskutek impulsu siły tarcia i skierowaną (rys. 121) w dół. Jej wartość bezwzględną znajdziemy z równania

$$M_2 \cdot |u_{2y}| = \Pi' = \Pi \mu \,, \quad \text{a więc}$$

$$|u_{2y}| = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \mu v_1 \cos \alpha_1 \,.$$

4. Impuls Π' udziela nadto ciału M_2 prędkości kątowej ω_2, stosownie do równania dynamicznego

$$I_2 \omega_2 = \Pi' r_2 \,, \quad \text{z czego}$$

$$\omega_2 = \frac{M_1 v_1 \cos \alpha_1}{I_2} \cdot \frac{M_2 r_2}{M_1 + M_2} \mu \,. \quad [344]$$

A zatem składowa styczna prędkości liniowej uderzonego miejsca ciała M_2 ma po pierwszym akcie uderzenia wartość

$$u_{2y} + \omega_2 r_2 = \frac{M_1 v_1 \cos \alpha_1}{M_1 + M_2} (1 + r_2^2/i_2^2)\mu, \quad [345]$$

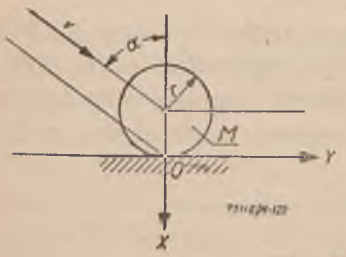
gdzie $i_2^2 = I_2/m_2$.

W przypadku uderzenia zupełnie niesprężystego wzory [340] do [345] określają zarazem prędkości po uderzeniu. Przy uderzeniu częściowo lub zupełnie sprężystym pojawia się drugi akt uderzenia i trzeba badać dalej zmiany zachodzące od chwili wyrównania prędkości normalnych do chwili rozłączenia się ciał.

Ze względu na niewielkie znaczenie techniczne odnośnych obliczeń teoretycznych poprzestajemy na rozpatrzeniu w następnym paragrafie tylko jednego ważnego przypadku szczególnego.

94. Uderzenie kuli o ścianę płaską

Niech kula jednorodna o masie M porusza się postępowo z prędkością v, nachyloną pod kątem $90^0 - \alpha$ do ściany poziomej wielkiego ciała nieruchomego. Kula uderza ścianę w punkcie 0 (rys. 122).



Rys. 122.

1. Dla uderzenia doskonale niesprężystego otrzymujemy ze wzoru [340] $u_x = 0$, jeżeli przyjmiemy, że ściana działa jak ciało o masie nieskończenie wielkiej. Przy pominięciu tarcia, a więc przy braku reakcji stycznej w miejscu zetknięcia 0, pozostaje niezmienioną składowa pędu $M v \sin \alpha$, dzięki czemu po uderzeniu rozpoczęłaby kula ruch postępowy poziomy z prędkością $v \sin \alpha$. Uwzględniając tarcie napotykamy na pewną trudność wobec tego, że bezpośrednio po ukończeniu uderzenia może zajść ślizganie w miejscu 0, które hamuje obrót kuli od chwili rozpoczęcia jej czystego toczenia się. Przyjąwszy czas tego ślizgania jako bardzo krótki, możemy obliczyć prędkość v_1 toczenia się kuli po uderzeniu z warunku, że energia kinetyczna $\frac{M}{2}(v \sin \alpha)^2$ pozostała w kuli zamienia się na sumę energii kinetycznej ruchu postępowego $\frac{1}{2} M v_y^2$ i energii ruchu obrotowego równej iloczynowi momentu bezwładności kuli $I = M i^2$ przez połowę kwadratu jej prędkości kątowej $\omega = \frac{v_y}{r}$, jeżeli r jest promieniem kuli. A zatem

$$\frac{1}{2} M (v \sin \alpha)^2 = \frac{1}{2} M v_y^2 + I \left(\frac{v_y}{r} \right)^2,$$

stąd

$$v_y^2 = \frac{(v \sin \alpha)^2}{1 + \frac{i^2}{r^2}} \qquad [346]$$

2. W przypadku uderzenia częściowo sprężystego zastosujemy założenie przybliżone *Newtona*, że impuls siły uderzenia w akcie drugim zmniejsza się w stosunku $k : 1$ i wykonamy obliczenie następujące:

Impuls Π normalnej siły uderzenia Π w akcie pierwszym zmniejsza składową normalną pędu $M v \cos \alpha$ do zera, czyli

$$M v \cos \alpha - 0 = \pi .$$

W akcie drugim działa impuls o wartości liczbowej k Π udzielając masie M kuli pędu w kierunku odwrotnym o wartości liczbowej $M \mid w_x \mid = k \Pi = k M v \cos \alpha$, czyli

$$\mid w_x \mid = k v \cos \alpha .$$

Prędkość w_x jest skierowana w górę i razem z niezmienioną składową poziomą $v \sin \alpha$ daje skierowaną ukośnie prędkość

$$w = \sqrt{k^2 v^2 \cos^2 \alpha + v^2 \sin^2 \alpha}, \qquad [347]$$

nachyloną do pionu pod kątem β wyznaczonym równaniem

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v \sin \alpha}{k v \cos \alpha} = \frac{1}{k} \cdot \operatorname{tg} \alpha . \qquad [348]$$

Tylko więc w przypadku $k = 1$, tj. uderzenia doskonale sprężystego jest $\beta = \alpha$, czyli *kąt padania* kuli równa się *kątowi odbicia* się jej od ściany.

Przy uderzeniu częściowo sprężystym musi być kąt odbicia β większy od α i to tym bardziej, im współczynnik uderzenia k jest mniejszy. Przy $k \to 0$, tj. dla uderzenia zupełnie niesprężystego bezpośrednio otrzymujemy zgodnie ze znalezionym wynikiem $\beta = 90^0$, tzn. kula nie odbija się wcale, lecz toczy się po ścianie.

Wyniki te mają dość ważne zastosowania techniczne. Tak np. przy sortowaniu samoczynnym hartowanych stalowych kulek łożyskowych pozwala się kulkom spadać pod stosownie dobranym kątem na bardzo twardą i jednolitą płytę. Zależnie od kąta odbicia wpadają potem kulki do różnych rynienek, które je prowadzą do oddzielnych naczyń. Kulki w każdym

z naczyń mają tę samą wartość k z czego wnosimy o ich jednakowej twardości.

Gdy kulka uderza płaską ścianę normalnie, jak np. w skleroskopie *Shore'a*, to $\alpha = 0$, a więc stosownie do wzoru [347] jest

$$w = k v .$$

Przy spadaniu swobodnym jest jak wiadomo $v = \sqrt{2 g h}$, gdzie h oznacza wysokość spadania. Gdy więc kula po odbiciu się osiąga wysokość $h_1 < h$, to

$$\sqrt{2 g h_1} = k \sqrt{2 g h}, \qquad \text{czyli}$$

$$k = \sqrt{\frac{h_1}{h}} \qquad [349]$$

Posługując się tym wzorem wyznaczono doświadczalnie wartość k i znaleziono np. dla

szkła,	kości słoniowej,	stali	i	drewna
$k = 0{,}94$,	0,89,	0,56,		0,50.

Stosowano przy tym kulę i płytę z tego samego materiału, udzielając kuli nieznacznej prędkości uderzenia. Przy większych prędkościach otrzymywano jednak różne wartości k w zależności od prędkości uderzenia, co dowodzi niedoskonałości założenia *Newtona* określającego k jako stałą materiału, ale jak dotąd nie znaleziono założenia lepszego a równie prostego.

BIBLIOTEKA POLITECHNIKI GDAŃSKA K. C. N.

Prof. dr inż. M. T. Huber — Kinematyka i dynamika

Ważniejsze błędy dostrzeżone w druku

Str.	Wiersz	Jest	Powinno być
VII	13 od dołu	chociażby	chociaż
IX	5 „ „	p_n	$\vec{p}_n$
IX	4 „ „	p_t	$\vec{p}_t$
X	9 „ „	J	L_u
X	8 „ „	s	L_s
1	5 „ „	żórawia, żóraw	żurawia, żuraw
3	11 „ góry	poruszającego	poruszającego się
13	5 „ „	odbierając	obierając
17	3 „ „	c^2	c
27	7 „ „	$+ \frac{d^2s}{dt^2}$	$\frac{d^2s}{dt^2}$
27	6 „ dołu	$\frac{d\tau}{ds}$	$\frac{d\vec{\tau}}{ds}$
37	5 „ „	$a_2 \sin \varphi_1$	$a_1 \sin \varphi_1$
44	3 „ „	doniosłością	donośnością
58	1 „ „	$\frac{\vartheta}{\omega}$	$\frac{c}{\omega}$
59	17 „ „	$v = \alpha \omega$	$v = r \omega$
69	7 „ góry	$k \sin 2 \omega t$	$\frac{k}{l} \sin 2 \omega t$
71	17 „ dołu	jest toczeniem	toczeniem

Str.	Wiersz	Jest	Powinno być
79	11 od dołu	$\vec{p} = \vec{p_b} + \vec{p_\omega}$	$\vec{p} = \vec{p_p} + \vec{p_\omega}$
82	14 „ „	$\widehat{AB}$	$\overline{AB}$
84	3 „ góry	$\omega = \omega_1 - \omega_2$	$\vec{\omega} = \vec{\omega_1} - \vec{\omega_2}$
84	13 od dołu	ω dzieli l między ω_1 a $\vec{\omega_2}$	$\vec{\omega}$ dzieli l między $\vec{\omega_1}$ a $\vec{\omega_2}$
86	2 „ „	$R_2 = \frac{n_2 \cdot l}{n_2 - n_1}$	$R_2 = \frac{n_1 \cdot l}{n_2 - n_1}$
86	1 „ „	$R_2 = \frac{n_1 \cdot l}{n_1 + r_2}$	$R_2 = \frac{n_1 \cdot l}{n_1 + n_2}$
87	6 „ „	Tak samo	To samo
97	7 „ „	$\vec{i} \cdot \vec{\omega}$	$\vec{i} \times \vec{\omega}$
97	5 „ „	$j \cdot \vec{\omega} \frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t} = k \cdot \vec{\omega}$.	$\vec{j} \times \vec{\omega}, \frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}t} = \vec{k} \times \vec{\omega}$.
113	2 „ góry	$\vec{P}$ i $-P$	$\vec{P}$ i $-\vec{P}$
124	9 „ „	$-m_i p_i$	$-m_i \vec{p_i}$
141	13 „ „	$\sum_{i=1}^{n}$	$\sum_{i=1}^{i=n}$
141	3 „ dołu	$\Sigma \frac{!}{2}$	$\sum_i \frac{1}{2}$
146	11 „ „	skierowa	skierowana
148	2 „ dołu	$\left(- \frac{}{1 + \frac{z}{R}} \right)$	$\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{z}{R}} \right)$
152	4 „ „	$m_i = M$,	$\Sigma m_i = M$,

Str.	Wiersz	Jest	Powinno być
153	9 od dołu	Σm_i	$\sum_i m_i$
155	3 „ góry	$\cos \varrho$	$\cos \gamma$
156	17 „ „	$C \frac{1}{I}$	$C \sqrt{\frac{1}{I}}$
160	3 od góry	$m i_i$	m_i
160	1 „ dołu	r	r^2
164	3 „ góry	$\int^h$	$\int_o^h$
166	10 „ „	$\int^h$	$\int_o^h$
166	10 „ „	$\int^h$	I_o^h
166	5 „ dołu	$\left(\frac{2}{3} h\right)$	$\left(\frac{2}{3} h\right)^2$
173	11 „ „	$\frac{\mathrm{d}}{\quad}$	$\frac{\mathrm{d}}{2}$
174	2 „ góry	$\frac{\quad}{3}$	$\frac{1}{3}$
174	4 „ „	$\frac{\pi}{\quad}$	$\frac{\pi}{4}$
174	4 „ „	$- l_1^2$	$\frac{1}{3} l_1^2$
177	6 „ „	P_n i Q_n	$\vec{P}_n$ i $\vec{Q}_n$
180	8 „ dołu	$\frac{\theta}{2}$	$\frac{\vartheta}{2}$
183	10 „ góry	$\frac{\mathrm{i}}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Str.	Wiersz	Jest	Powinno być
211	12 od góry	$\vec{Q_k}$,	$\vec{Q_{ik}}$,
212	9 „ dołu	Σ	$\sum_i$
212	9 „ „	$\Sigma\ \Sigma$	$\sum_i\ \sum_k$
212	7 „ „	$Q_{ik} + Q_{ki}$	$Q_{ik} + Q_{ki}$
212	1 od dołu	Σ	$\sum_i$
213	12 „ „	$\Sigma \vec{P_i} = \vec{Q} = \vec{M} g$	$\Sigma P_i = Q = M g$
214	10 „ „	Σ	$\sum_i$
219	1 „ góry	r,	r_i
224	10 „ „	x_B, y_B, z_B	X_B, Y_E, Z_B
225	9 „ „	O	0
225	3 „ dołu	$\Sigma - m$	$-\Sigma m$
225	3 „ „	$= \omega^2$	$= -\omega^2$
227	4 „ góry	r_i	z_i
227	5 „ „	$- m_i$	m_i
227	5 „ „	y) = =	z) =
229	5 „ dołu	$\omega^2 \left(b - \frac{2}{3} \cdot l \cos\alpha \right)$ / $a + b$	ω^2 $b - \frac{2}{3} \cdot l \cos\alpha$ / $a + b$
230	8 „ „	$\frac{}{3}$	$\frac{40}{3}$
231	11 „ „	$\int$	$\int_0^h$
235	11 „ góry	wielkiej wielkiej	wielkiej
236	15 „ dołu	L_{ix}	L_{iz}
237	6 „ „	ds_i	$\vec{ds_i}$

Str.	Wiersz	Jest	Powinno być
242	5 „ góry	znajdzie	zajdzie
243	1 „ dołu	$M/M_{red})$	$M/M_{red})^2$
244	rys. 108		odwrócić o 180°
247	3 od góry	Σ	$\frac{\Sigma}{i}$
251	2 „ „	$\omega_2^2\,\omega_1^2$	$\omega_2^2\,\omega_1^2$
257	10 „ dołu	kG	kGm
265	10 „ góry	$\int^t$	$\int_0^{t_1}$
268	11 „ „	$\mathfrak{M}\varphi$	$\mathfrak{M}_\varphi$
268	12 „ „	$\mathfrak{M}\varphi$	$\mathfrak{M}_\varphi$
269	3 „ „	$\varphi = \mathfrak{M}_o)$	$\varphi) = \mathfrak{M}_o$
272	5 „ „	$\int^{t+\tau}$	$\int_t^{t+\tau}$
274	1 „ dołu	$\frac{}{2}$	$\frac{1}{2}$
275	11 „ „	$E_{II} = \frac{}{2}$	$E_{kI} = \frac{1}{2}$
276	13 „ „	Π_2	Π_1
278	2 „ „	$\frac{1}{2}\ M_2 (v_2^2 - w_2^2)$	$\frac{1}{2}\ M_2 (v_2^2 - w_2^2)$
281	9 „ „	$) \Pi$	$) = \Pi$
288	11 „ „	$= \Pi' = \mu$	$= \Pi' = \Pi\,\mu$
291	7 „ góry	Λ	Π

NIE POŻYCZA SIĘ
DO DOMU

PEDAGOGICZNA
BIBLIOTEKA
WOJEWÓDZKA
Gdańsk-Wrzeszcz
Al.Gen.J.Hallera 14

5574