Jacek Chróścielewski
Magdalena Rucka
Wojciech Witkowski

METODY DOŚWIADCZALNE

W WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ
Janusz T. Cieśliński

RECENZENT
Piotr Iwicki

PROJEKT OKŁADKI
Erwin Wojtczak

Wydanie I – 2018

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
http://www.sklep.pg.edu.pl

ISBN 978-83-7348-741-3

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Dodruk I wyd. Ark. wyd. 3,5, ark. druku 5,0, 1208/1082

Druk i oprawa: Volumina.pl Daniel Krzanowski
ul. Księcia Witolda 7-9, 71-063 Szczecin, tel. 91 812 09 08

SPIS TREŚCI

OD AUTORÓW

Niniejsza praca zawiera podstawy teoretycznie oraz instrukcje dotyczące ćwiczeń laboratoryjnych z przedmiotu Metody Doświadczalne w Wytrzymałości Materiałów. Zakres ćwiczeń jest tak dobrany, by zilustrować i pomóc zrozumieć założenia leżące u podstaw mechaniki ogólnej i wytrzymałości materiałów. Układ ćwiczeń pozwala na przedstawienie zarówno interpretacji fizycznej podstawowych stałych materiałowych materiałów konstrukcyjnych, jak i zobrazowanie różnych sposobów pracy prostych modeli konstrukcji inżynierskich.

Kolejne rozdziały opisują szczegółowo poszczególne zadania laboratoryjne zarówno od strony teoretycznej, jak i praktycznej. Podstawę teoretyczną stanowi wykład z przedmiotu Wytrzymałość Materiałów, którą rozszerzono o rozważania z literatury podanej na końcu książki. Oprócz tego w załączniku zawarto niezbędne informacje dotyczące statystycznej analizy wyników eksperymentalnych.

Należy jednak zauważyć, że samo opanowanie podstaw teoretycznych nie jest wystarczające do przeprowadzenia ćwiczeń. Dlatego każdorazowo należy zapoznać się z zawartymi tutaj instrukcjami, aby uniknąć wypadków czy zniszczenia stanowiska badawczego.

Autorzy wyrażają podziękowanie mgr. inż. Erwinowi Wojtczakowi za liczne uwagi i korekty wniesione do końcowej wersji pracy. Podziękowania kierujemy także do prof. Piotra Iwickiego za rzeczową i wnikliwą recenzję.

Wszystkim Czytelnikom będziemy wdzięczni za krytyczne uwagi i sugestie dotyczące niniejszej książki.

Jacek Chróścielewski
Magdalena Rucka
Wojciech Witkowski

Ćwiczenie 1

ZWYKŁA STATYCZNA PRÓBA ROZCIĄGANIA

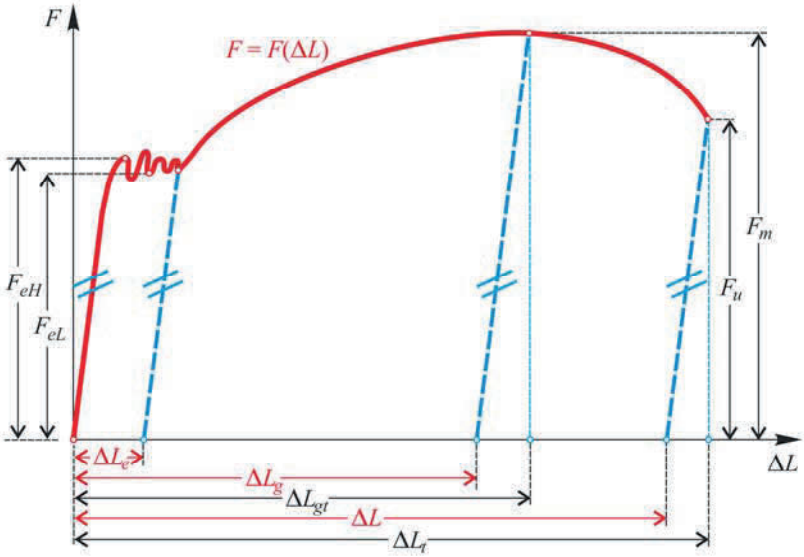
1.1. Cel szczegółowy ćwiczenia

Zwykłą statyczną próbę rozciągania przeprowadza się dla materiałów wykazujących wyraźną granicę plastyczności w próbach tzw. „zwykłych". Materiały niewykazujące wyraźnej granicy plastyczności powinny być poddane badaniom w próbach tzw. „ścisłych". W przypadku metali próba ta jest regulowana normą PN-EN ISO 6892-1:2010. *Metale – Próba rozciągania* – Część 1: *Metoda badania w temperaturze pokojowej*. W zwykłej statycznej próbie rozciągania, poza wykresem rozciągania ($F-\Delta L$, $F=F(\Delta L)$ $\Leftrightarrow$ $\sigma-\varepsilon$, $\sigma=\sigma(\varepsilon)$) i możliwym dodatkowym obliczeniem pracy zerwania L_z, wyznacza się następujące wielkości:

— wyraźną (fizyczną) granicę plastyczności R_e, lub, odpowiednio, górną granicę plastyczności R_{eH} i dolną granicę plastyczności R_{eL},
— wytrzymałość na rozciąganie R_m,
— granicę zerwania (nominalną) R_z i naprężenie rozrywające (rzeczywiste) R_u,
— wydłużenie trwałe po zerwaniu A_k,
— wydłużenie względne równomierne (dla próbek okrągłych) A_r,
— przewężenie względne po zerwaniu Z.

1.2. Podstawy teoretyczne

Z historycznego punktu widzenia, próby rozciągania są podzielone ogólnie na tzw. próbę zwykłą i próbę ścisłą. Związane jest to z wyznaczaniem różnych wielkości wymagających użycia innego sprzętu o różnych możliwościach oraz różnej dokładności i sposobach pomiaru. Próby zwykłe przeprowadzano na maszynach wytrzymałościowych (tzw. zrywarkach lub prasach) o napędzie hydraulicznym zapewniającym ciągłą zmianę obciążenia poprzez przyrost ciśnienia oleju w komorze tłokowej, bez możliwości kontrolowanego odciążania próbki, jednak, co warto podkreślić, z pomiarem aż do zerwania próbki. Ciągły wynik próby zwykłej przedstawia wykres rozciągania $F=F(\Delta L)$ (rys. 1.1) wykonany rysikiem (mechanicznie sprzężonym z ciśnieniomierzem) na przesuwającym się papierze poruszanym bębnem napędzanym ruchem trawersy maszyny. Tak przeprowadzone badania są stosunkowo proste, tanie i szybkie w wykonaniu, jednak niezbyt precyzyjne, ponieważ ruch trawersy nie odzwierciedla jednoznacznie wydłużeń ΔL bazy pomiarowej próbki L_0.

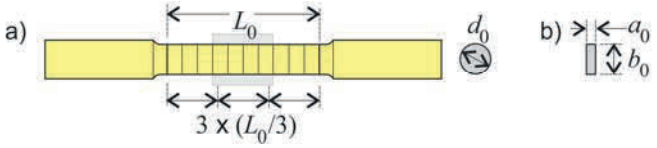


Rys. 1.1. Wykres rozciągania stali miękkiej (niskowęglowej) siła–wydłużenie ($F = F(\Delta L)$) otrzymywany bezpośrednio ze zrywarki z zaznaczonymi (wyraźnymi) punktami charakterystycznymi i odpowiadającymi im wydłużeniami ΔL (kolorem czerwonym oznaczono wydłużenia trwałe)

Próby ścisłe przeprowadzano na maszynach o mechanizmie typu wagi szalkowej z możliwością dokładnego, skokowo dawkowanego, obciążania i odciążania ($\pm i \cdot \Delta F$, $i = 1, 2, 3...$), zaś odkształcenia bazy pomiarowej (przy ustalonym poziomie obciążenia F) mierzono bezpośrednio precyzyjnymi tensometrami mechanicznymi z odpowiednim wzmacniającym układem optycznym (np. lusterkowym). Tradycyjnie dyskretne wyniki próby ścisłej ujmowano tabelarycznie zestawiając wartości przyrostów/poziomów siły $\pm i \cdot \Delta F$ i odpowiadające im wartości przyrostów wydłużeń ΔL bazy pomiarowej L_0. Oczywiście w takich pomiarach z zasady nie dopuszczano do zerwania próbki, która mogłaby uszkodzić zamocowane na niej cenne oprzyrządowania. Z punktu widzenia metodyki eksperymentu Robert Hooke (1635–1703) w roku 1660 wykonywał na badanych drutach próby ścisłe.

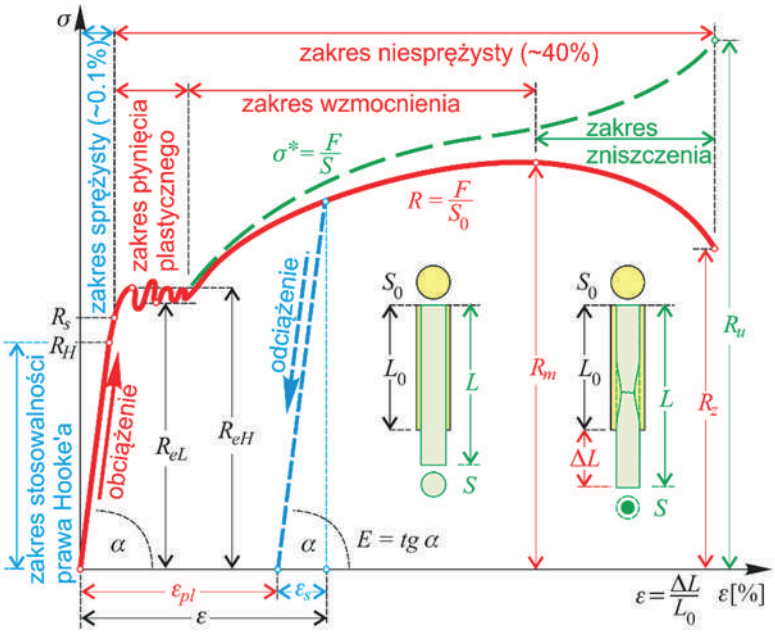
Aktualnie nowoczesne maszyny wytrzymałościowe, a także zmodernizowane stare, są sterowane elektronicznie i wyposażone w precyzyjne układy pomiaru wydłużeń (np. ekstensometry elektroniczne czy optyczne), umożliwiając na tych samych korpusach maszyn przeprowadzenie obu typów prób. Jednak, mimo tych możliwości nadal zwykła statyczna próba rozciągania pozostaje podstawowym i najpowszechniejszym z badań prowadzonych na materiałach przeznaczonych do pracy w tych strefach konstrukcyjnych, gdzie dominuje rozciąganie.

Zwykła statyczna próba rozciągania polega na rozciąganiu w sposób ciągły, aż do zerwania, z określoną prędkością przyrostu siły, zamocowanej w uchwytach zrywarki próbki przygotowanej zgodnie z normą (np. rys. 1.2) oraz rejestrowaniu w czasie trwania próby siły rozciągającej F w funkcji wydłużenia próbki ΔL (rys. 1.1). Istotą badania jest wywołanie w części pomiarowej próbki jednoosiowego stanu naprężenia.



Rys. 1.2. Przykładowa próbka kołowa pięciokrotna ($k = 5$), proporcjonalna, z bazą pomiarową $L_0 = 5d_0$ podzieloną na 10 działek i oznaczeniem kolorem szarym części środkowej (4 działki) o długości ~ $\frac{1}{3}L_0$ i z główkami (pogrubieniem) do mocowania w szczękach zrywarki (a); próbka płaskownika o przekroju prostokątnym musi spełnić dodatkowe warunki na relację pomiędzy $S_0 = a_0 b_0$ i L_0 dotyczące proporcjonalności (b)

Na podstawie zarejestrowanej krzywej $F = F(\Delta L)$ oraz danych geometrycznych próbki (długości bazy pomiarowej L_0 i pola pierwotnego przekroju próbki S_0) określa się cechy mechaniczne materiału zgodnie z zapisami odpowiedniego normatywu. W celu uniezależnienia się od wymiarów próbki, wykres rozciągania siła–wydłużenie $F = F(\Delta L)$ przeskalowuje się do układu naprężenie–odkształcenie $R = R(\varepsilon)$ i $\sigma* = \sigma(\varepsilon)$, wykorzystując relacje na naprężenia umowne (nominalne) $R = F/S_0$ i rzeczywiste $\sigma* = F/S$ oraz odkształcenia $\varepsilon = \Delta L/L_0$ (rys. 1.3).



Rys. 1.3. Wykres rozciągania stali miękkiej (niskowęglowej) po przeskalowaniu do postaci naprężenie–odkształcenie $R = R(\varepsilon)$ i $\sigma* = \sigma(\varepsilon)$ z oznaczeniem zakresów deformacji w stosunku do długości pomiarowej L_0

Dodajmy, że ze względu na sposób mocowania w uchwytach maszyny wytrzymałościowej (a więc ze względu na kształt główki), próbki o przekroju kołowym dzielą się na zwykłe o gładkich główkach do mocowania w szczękach zaciskowych, o główkach gwin-

towanych do wkręcania w głowice i o główkach w formie pierścieni oporowych. Dwa ostatnie typy, tj. próbki do wkręcania i do mocowania w pierścieniach są droższe i stosowane głównie w próbach ścisłych. Zadaniem główek z łagodnym, zaokrąglonym przejściem na bazę próbki, jest skierowanie jej zniszczenia do kontrolowanej części pomiarowej (środkowej) i w ten sposób nadanie wynikom miarodajności. Ponadto występują próbki płaskie (z cienkich blach), rurowe i o przekrojach odpowiadających kształtowi wyrobów.

Do cech mechanicznych materiału określanych w zwykłej statycznej próbie rozciągania należą zdefiniowane poniżej wielkości.

Granica plastyczności (wyraźna) R_e jest to wartość naprężenia umownego, po osiągnięciu którego następuje wyraźny wzrost wydłużenia próbki bez istotnego wzrostu lub nawet przy spadku siły rozciągającej F, obliczona z ilorazu siły F_e i pola pierwotnego przekroju poprzecznego S_0 próbki

$$R_e = \frac{F_e}{S_0} . \tag{1.1}$$

Przebieg wykresu naprężenie–odkształcenie w strefie plastycznego płynięcia może się różnić dla każdej próbki. Jest to wynik ujawniania się niejednorodności materiału, ponieważ różne fragmenty badanej próbki mogą przechodzić w stan plastyczny przy różnych wartościach naprężeń, które zależą od aktualnego zakresu powstającej strefy plastycznej. Stan ten objawia się wahaniami rejestrowanych wartości naprężeń uplastyczniających, stąd wprowadza się pojęcie górnej R_{eH} i dolnej R_{eL} granicy plastyczności.

Górna granica plastyczności R_{eH} jest to wartość naprężenia w momencie, kiedy następuje pierwszy spadek siły F (pierwsze maksimum) w trakcie płynięcia materiału, obliczona z ilorazu siły F_{eH} i pola pierwotnego przekroju poprzecznego S_0 próbki

$$R_{eH} = \frac{F_{eH}}{S_0} . \tag{1.2}$$

Dolna granica plastyczności R_{eL} jest to wartość najmniejszego naprężenia podczas płynięcia materiału, z pominięciem ewentualnego efektu przejściowego (pierwszego minimum), obliczona z ilorazu siły F_{eL} i pola pierwotnego przekroju poprzecznego S_0 próbki

$$R_{eL} = \frac{F_{eL}}{S_0} . \tag{1.3}$$

Należy zaznaczyć, iż w przypadku spadku siły przy wyznaczaniu R_{eL} na jej wartość często nakłada się niedoskonałość (bezwładność) zrywarki, stąd jeśli wystąpi więcej niż jedno minimum, pomija się pierwsze z nich jako niemiarodajne (rys. 1.3).

Wytrzymałość na rozciąganie R_m jest to wartość naprężenia odpowiadająca największej sile obciążającej F_m, uzyskanej w czasie przeprowadzania próby, odniesionej do pola pierwotnego przekroju poprzecznego S_0

$$R_m = \frac{F_m}{S_0} . \tag{1.4}$$

Granica zerwania R_z jest to wartość nominalnego naprężenia odpowiadającego sile zrywającej (na końcu próby) F_u, odniesionej do pola pierwotnego przekroju poprzecznego S_0

$$R_z = \frac{F_u}{S_0}. \tag{1.5}$$

Naprężenie rozrywające R_u jest to wartość rzeczywistego naprężenia $(\sigma * = F/S)$ w przekroju poprzecznym próbki, w miejscu przewężenia bezpośrednio przed zerwaniem obliczona z ilorazu siły w chwili zerwania F_u i najmniejszego pola przekroju próbki S_u (rzeczywistego w szyjce) po zerwaniu

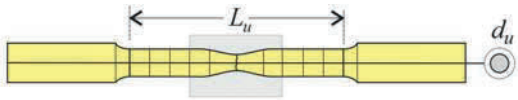
$$R_u = \frac{F_u}{S_u}. \tag{1.6}$$

Względne wydłużenie trwałe po zerwaniu A_k jest to przyrost długości pomiarowej L_u próbki o krotności k po jej zerwaniu odniesiony do jej pierwotnej długości L_0 wyrażony w procentach

$$A_k = \frac{\Delta L}{L_0} \cdot 100\% = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100\%. \tag{1.7}$$

W przypadku zerwania (złomu) próbki w części środkowej (rys. 1.4) to znaczy w części o szerokości $\sim \frac{1}{3} L_0$ (por. rys. 1.2), pomiar długości po zerwaniu L_u przeprowadza się bezpośrednio, po złożeniu i dopasowaniu obu części, pomiędzy skrajnymi kreskami podziału definiującymi długość pomiarową zgodnie z rys. 1.5.

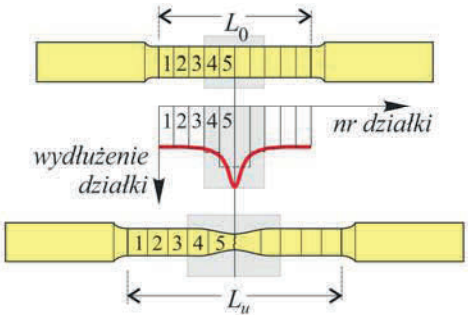
Rys. 1.4. Próbka pięciokrotna ($k = 5$) przed i po zerwaniu
(złom wystąpił w środkowej części bazy pomiarowej)



Rys. 1.5. Pomiar długości po zerwaniu L_u w przypadku złomu w części środkowej próbki, tj. odpowiadającej liczbie działek o łącznej długości pierwotnej równej $\sim \frac{1}{3} L_0$, oznaczonej kolorem szarym

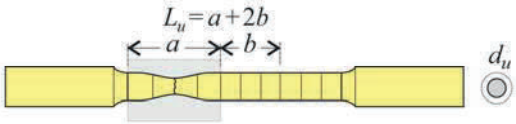
Należy zauważyć, że deformacja w obszarze miejsca zerwania (złomu, tj. szyjki) jest zdecydowanie większa niż w pozostałej części próbki (rys. 1.6). Zatem, jeśli zerwanie nastąpi poza częścią środkową (rys. 1.7), możliwość deformacji od strony znajdującej się bliżej główki będzie ograniczona jej zwiększonymi gabarytami. W przypadkach zerwania próbki poza częścią środkową, pomiar długości po zerwaniu L_u przeprowadza się poprzez

zabieg myślowej symetryzacji miejsca zerwania zgodnie z rys. 1.8, kiedy złom wystąpił na kresce lub, odpowiednio, zgodnie z rys. 1.9, gdy ma to miejsce między kreskami podziałki.

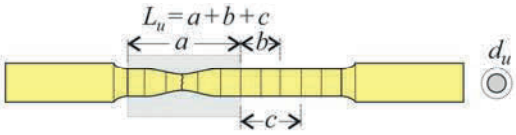


Rys. 1.6. Rozkład wydłużeń poszczególnych działek spiętrzający się w strefie zerwania

Rys. 1.7. Próbka pięciokrotna ($k = 5$) przed i po próbie rozciągania
(złom poza środkową częścią bazy pomiarowej)



Rys. 1.8. Pomiar długości po zerwaniu $L_u = a + 2b$ w przypadku złomu poza częścią środkową na kresce podziału



Rys. 1.9. Pomiar długości po zerwaniu $L_u = a + b + c$ w przypadku złomu poza częścią środkową między kreskami podziału

W przypadku próbek o innym kształcie przekroju poprzecznego niż kołowy ($S_0 = \frac{1}{4}\pi d_0^2$), np. prostokątnym ($S_0 = a_0\, b_0$, por. rys. 1.2b) w celu zachowania tzw. proporcjonalności próbki, wyznacza się dla danego S_0 próbki o dowolnym przekroju równoważną

średnicę d_0 z warunku równości pól $\frac{1}{4}\pi d_0^2 \equiv S_0 \Rightarrow d_0 = 2\sqrt{S_0/\pi} = 1.13\sqrt{S_0}$. Stąd długość bazy próbki pięciokrotnej $k=5$ i dziesięciokrotnej $k=10$ wyniesie odpowiednio $L_0 = 5d_0 = 5.65\sqrt{S_0}$ i $L_0 = 10d_0 = 11.3\sqrt{S_0}$, gdzie S_0 jest polem przekroju próbki o niekołowym kształcie.

Wydłużenie względne równomierne A_r to wydłużenie niezależne od długości pomiarowej L_0. Jest ono mierzone z wyłączeniem wpływu lokalnej deformacji próbki w pobliżu miejsca jej zerwania (szyjki) i jest wyrażone w procentach w stosunku do pierwotnej długości. W przypadku próbek o przekroju kołowym wydłużenie względne równomierne oblicza się ze wzoru przybliżonego poprzez pomiar średnic próbki przed d_0 i po zerwaniu d_r

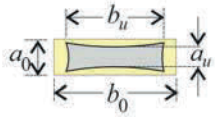
$$A_r = \frac{d_0^2 - d_r^2}{d_r^2} \cdot 100\% , \tag{1.8}$$

gdzie d_0 oznacza pierwotną średnicą próbki w części pomiarowej, zaś d_r średnicę próbki po zerwaniu. Średnica d_r mierzona jest w połowie odległości między miejscem złomu i końcem bazy pomiarowej, na dłuższej z części rozerwanej próbki. Należy zauważyć, że w przypadku próbek o różnej długości bazy pomiarowej, np. próbki pięciokrotnej ($L_0 = 5d_0$) i dziesięciokrotnej ($L_0 = 10d_0$), udział w wydłużeniu całkowitym L_u lokalnego odcinka związanego z kształtowaniem się szyjki w miejscu złomu jest tym mniejszy, im baza próbki jest dłuższa, a więc zachodzi nierówność $A_5 > A_{10}$, zaś wydłużenie równomierne powinno pozostawać takie same $A_{5r} \cong A_{10r}$.

Przewężenie względne Z jest to redukcja powierzchni przekroju poprzecznego próbki w miejscu jej zerwania po zniszczeniu S_u, odniesione do pola jej pierwotnego przekroju S_0 wyrażone w procentach

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} \cdot 100\% . \tag{1.9}$$

W przypadku próbek o formie prostokąta pole przekroju w miejscu zerwania po zniszczeniu oblicza się jako $S_u = a_u b_u$, zgodnie z rys. 1.10.



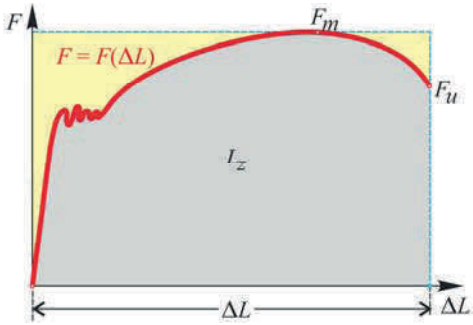
Rys. 1.10. Próbka o przekroju prostokątnym z zaznaczonym polem przekroju w miejscu zerwania po zniszczeniu

Praca zerwania L_z jest kolejnym wskaźnikiem charakteryzującym materiał. Zdefiniowana jest wzorem

$$L_z = \int_0^{\Delta L} F \cdot \mathrm{d}L . \tag{1.10}$$

Powyższa całka przedstawia pole obszaru zawartego pod krzywą rozciągania (rys. 1.11). Oczywiście wynik jest zależny od wymiarów próbki, stąd po podzieleniu pracy L_z przez jej objętość V otrzymuje się jednostkową pracę odkształcenia Φ, co dla zakresu zerwania można zapisać formalnie jako

$$\Phi_z = \int_0^{\varepsilon_z} R \cdot \mathrm{d}\varepsilon \,, \; L_z = \int_V \Phi_z \cdot \mathrm{d}V \,. \tag{1.11}$$



Rys. 1.11. Praca zerwania L_z próbki o objętości V

W uzupełnieniu zestawimy cechy materiału określane w próbie ścisłej, do których należą przytoczone dalej wielkości. Zwróćmy uwagę, że, w przeciwieństwie do wielkości wyznaczanych w próbie zwykłej, które można wyraźnie wskazać na wykresie rozciągania, parametry określane w próbie ścisłej mają charakter umowny. Co więcej, umowy takie mogą być inne dla różnych materiałów, czy w różnych krajach (ujęte w tzw. normach krajowych).

Umowna granica sprężystości $R_{0,05}$ jest to wartość naprężenia, które wywołuje w badanej próbce odkształcenie trwałe (po odciążeniu próbki) o wartości równej $0,05\%$ długości pomiarowej

$$R_{0,05} = \frac{F_{0,05}}{S_0} \,. \tag{1.12}$$

Umowna granica plastyczności $R_{0,2}$ jest to wartość naprężenia, które wywołuje w badanej próbce odkształcenie trwałe o wartości $0,2\%$ długości pomiarowej (po odciążeniu próbki, rys. 1.12)

$$R_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{S_0} \,. \tag{1.13}$$

Moduł Younga E, a właściwiej moduł sprężystości, ma wymiar naprężenia [Pa] i jest równy wartości tangensa nachylenia prostoliniowego odcinka wykresu naprężenie–odkształcenie $\sigma - \varepsilon$ (rys. 1.3 i rys. 1.12)

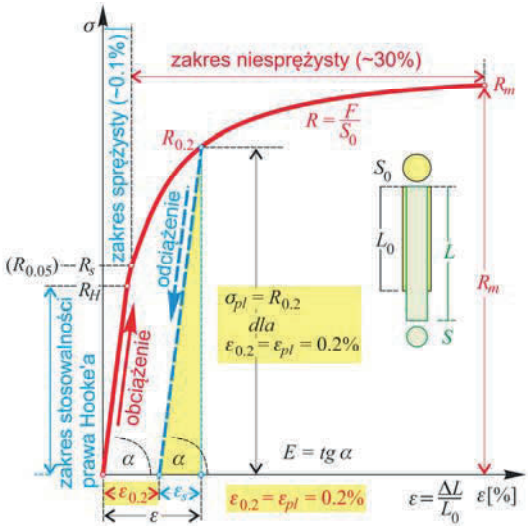
$$E = \mathrm{tg}\alpha = \left.\frac{\sigma}{\varepsilon}\right|_{na\ odcinku\ prostoliniowym} = \left.\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}\right|_{na\ odcinku\ prostoliniowym} \,. \tag{1.14}$$

Niestety jest to tylko model teoretyczny materiału liniowo-sprężystego, w rzeczywistości bowiem odcinka prostoliniowego nie ma. Wszelkie jego pomiary mają zatem odchylenia i będą miały charakter statystyczny, co będzie omówione w dalszych ćwiczeniach. Stąd wprowadzono pojęcie umownej granicy proporcjonalności R_H.

Umowna granica proporcjonalności R_H, inaczej stosowalności prawa Hooke'a, może być definiowana jako wartość naprężenia umownego, przy którym spełniona jest zależność

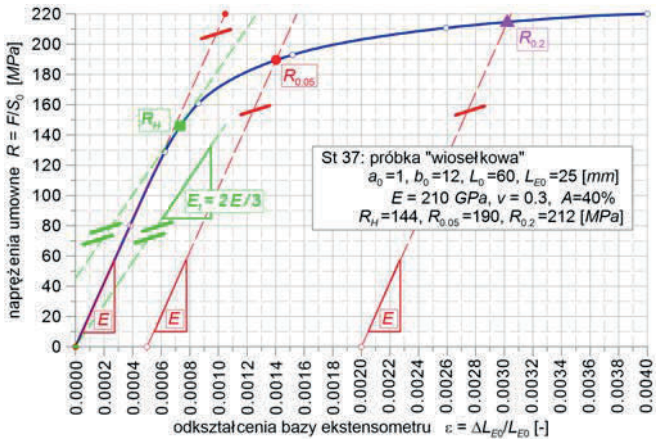
$$E_t = \tfrac{2}{3} E \,, \tag{1.15}$$

gdzie E_t jest modułem stycznym o wartości liczbowej równej tangensowi nachylenia do osi ε stycznej w punkcie o wartości naprężenia równego R_H.



Rys. 1.12. Typowy wykres rozciągania materiału bez wyraźnej granicy plastyczności (stopy, stale twarde), koncepcja wyznaczania umownej granicy plastyczności $R_{0,2}$

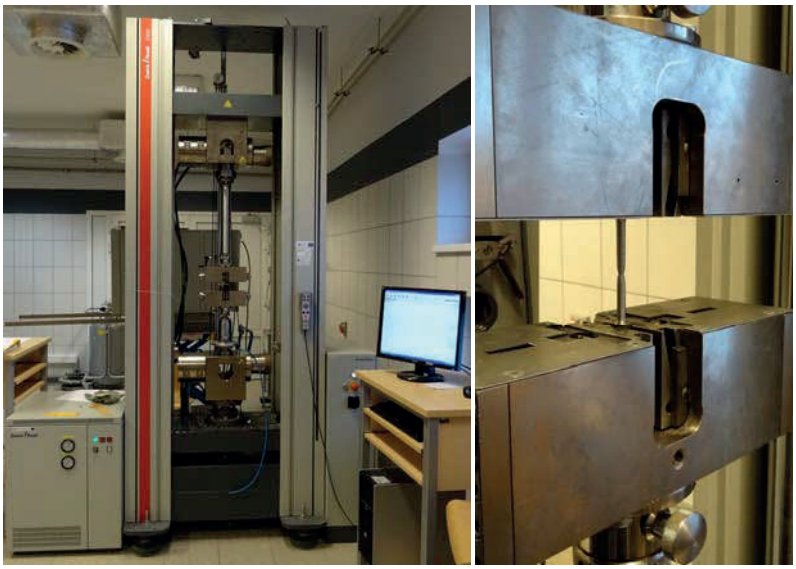
Moduł sprężystości E, moduł styczny $E_t = E\big|_{\sigma=R_H}$ oraz umowne granice naprężenia $R_{0,05}$ i $R_{0,2}$ mogą być wyznaczone dwiema metodami, bezpośrednio – techniką wykorzystującą wielokrotne obciążanie i odciążanie próbki przy określonym wzroście poziomu obciążenia $F_i = i \cdot \Delta F \le F_m$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ lub graficznie – na podstawie precyzyjnego rysunku jednej krzywej rozciągania o odpowiednim nachyleniu. Technikę graficzną na przykładzie badań próbek wiosełkowych pobranych z blach o grubości 1 mm przedstawiono na rys. 1.13. W badaniach tych wykorzystano mocowany na próbce ekstensometr elektroniczny o początkowej bazie pomiarowej $L_{E0} = 25$ mm.



Rys. 1.13. Początek krzywej rozciągania demonstrujący techniki graficzne wyznaczania wielkości umownych

1.3. Przebieg ćwiczenia

Ćwiczenie polega na rozciąganiu próbek w maszynie wytrzymałościowej (rys. 1.14). Badaniu poddane są próbki walcowe, tj. o przekroju kołowym (rys. 1.4, rys. 1.7), wykonane ze stali twardej i miękkiej. Próbka umieszczona jest w maszynie wytrzymałościowej, a następnie rozciągana aż do momentu zerwania (rys. 1.1). Przyrost siły oraz przemieszczenia trawersy są rejestrowane przez maszynę wytrzymałościową.



Rys. 1.14. Maszyna wytrzymałościowa, próbka w szczękach zaciskowych zrywarki

W ramach ćwiczenia należy:
— zmierzyć średnicę i długość pomiarową próbki,
— zamocować próbkę w maszynie wytrzymałościowej,
— obciążyć próbkę osiową siłą rozciągającą do momentu zerwania,
— wyjąć próbkę z maszyny wytrzymałościowej,
— zmierzyć odpowiednie średnice i długość bazy pomiarowej próbki po zerwaniu.

1.4. Opracowanie wyników

Sprawozdanie powinno zawierać:
— cel i zakres badania,
— opis próbek (przed rozciąganiem i po rozciąganiu), wyniki pomiarów geometrii (tablica 1.1),
— wykres roboczy rozciągania próbek stali miękkiej i twardej w układzie siła–wydłużenie oraz wykres umowny naprężenie–odkształcenie z oznaczeniem charakterystycznych jego punktów, a także charakterystykę złomu (tj. rozerwanego przekroju),
— obliczenie następujących wielkości dla próbek ze stali miękkiej i twardej (jeżeli można je wyznaczyć na podstawie wykonanej próby):

- wyraźna granica plastyczności,
- górna i dolna granica plastyczności,
- wytrzymałość na rozciąganie,
- granica zerwania,
- naprężenie rozrywające,
- wydłużenie względne trwałe,
- wydłużenie względne równomierne,
- przewężenie względne,
- praca zerwania,

oraz zestawienie uzyskanych wartości w tablicy 1.2,

— wnioski i uwagi własne, omówienie własności wytrzymałościowych i plastycznych badanego metalu.

Tablica 1.1

Tabela pomiarowa

Parametry geometryczne	Próbka nr 1	Próbka nr 2
d_0 [mm]		
L_0 [mm]		
S_0 [mm^2]		
d_u [mm]		
d_r [mm]		
L [mm]		
S_u [mm^2]		

Tablica 1.2

Zestawienie wyników

Parametry wytrzymałościowe	Próbka nr 1	Próbka nr 2
F_e [kN]		
F_{eH} [kN]		
F_{eL} [kN]		
F_m [kN]		
F_u [kN]		
R_e [MPa]		
R_{eH} [MPa]		
R_{eL} [MPa]		
R_m [MPa]		
R_z [MPa]		
R_u [MPa]		
A_k [%]		
A_r [%]		
Z [%]		
L_z [kNmm]		

PRÓBA STATYCZNA ŚCISKANIA

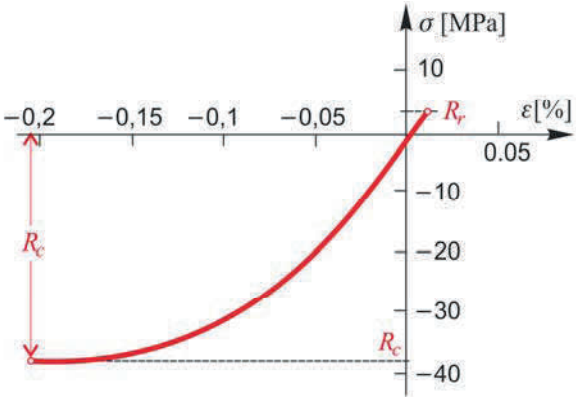
2.1. Cel szczegółowy ćwiczenia

Zwykłą statyczną próbę ściskania metali reguluje norma PN-57/H-04320:1957 *Próba statyczna ściskania metali*. Próbę tę przeprowadza się na walcach o znormalizowanych wymiarach. W próbie zwykłej, poza wykresem ściskania ($(P-\Delta h$, $P=P(\Delta h) \Leftrightarrow \sigma-\varepsilon$, $\sigma=\sigma(\varepsilon))$, wyznacza się następujące wielkości:

— wyraźną (fizyczną) granicę plastyczności przy ściskaniu (o ile istnieje) R_{ec},
— wytrzymałość na ściskanie (jeśli próbka ulegnie zniszczeniu) R_c,
— skrócenie względne po zniszczeniu a_c.

2.2. Podstawy teoretyczne

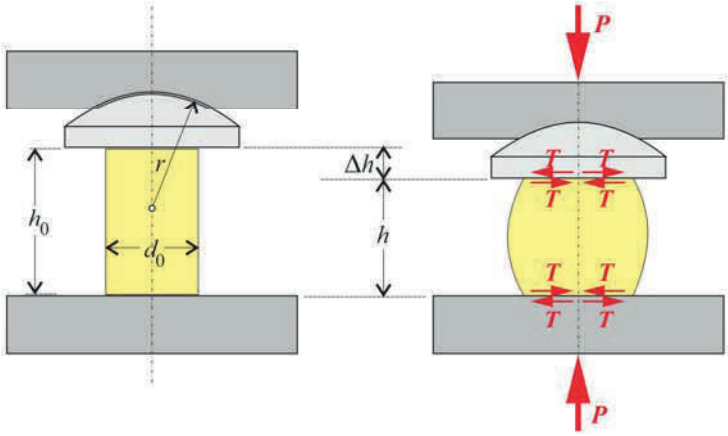
Statyczną próbę ściskania przeprowadza się dla materiałów, na które podczas eksploatacji będą działały siły ściskające. Jest ona szczególnie istotna dla materiałów niewykazujących symetrycznych cech wytrzymałościowo-odkształceniowych ze względu na stan ściskania i rozciągania (rys. 2.1), ponieważ dla materiałów symetrycznych w przypadku ściskania miarodajne są wyniki próby rozciągania.



Rys. 2.1. Typowy wykres rozciągania/ściskania tzw. materiału niesymetrycznego bez wyraźnej granicy plastyczności (beton, stopy, stale twarde)

Statyczna próba ściskania z założenia powinna być odwróceniem próby rozciągania. Niestety, nie jest ona tak jednoznaczna jak próba rozciągania. Jest to związane z trudnością wyodrębnienia bazy pomiarowej, w której, tak jak w próbie rozciągania, panowałby jedno-

osiowy stan naprężenia. Przy ściskaniu nie można bowiem stosować zbyt smukłych próbek ze względu na problem ich wczesnego wyboczenia strukturalnego (wygięcia). Wobec tego w próbach ściskania siłą *P* używa się tzw. próbek krępych (niskich), świadomie godząc się na zaburzenie wyników badań wywołane generowanymi przez warunki podparcia siłami tarcia *T* pomiędzy próbką a płytami dociskowymi prasy (rys. 2.2).



Rys. 2.2. W próbie ściskania obciążeniem *P* siły tarcia *T* generowane warunkami podparcia pomiędzy próbką a płytami dociskowymi prasy wywołują złożony stan naprężenia w badanym materiale

Badanie ściskania przeprowadza się przy użyciu prasy wytrzymałościowej lub tzw. maszyny uniwersalnej wykorzystywanej do badań różnych typów. Jedna (górna) z płyt dociskowych prasy powinna być osadzona przegubowo (rys. 2.2). Pod wpływem ściskania materiały kruche niszczą się przy znacznym efekcie akustycznym, a próbki z materiałów wykazujących cechy plastyczne ulegają spłaszczeniu/sprasowaniu (rys. 2.3).

Rys. 2.3. Próbki metalowe po próbie ściskania, z materiałów plastycznych (sprasowane) i kruchych (ze złomem)

Na podstawie zwykłej statycznej próby ściskania można wyznaczyć zdefiniowane poniżej wielkości.

Wytrzymałość na ściskanie R_c jest stosunkiem największej siły P_c uzyskanej w próbie niszczącej do pierwotnego pola przekroju poprzecznego próbki A_0

$$R_c = \frac{P_c}{A_0}, \tag{2.1}$$

przy czym jako zniszczenie rozumie się tu rozdzielenie materiału, tj. rozpadnięcie się próbki na co najmniej dwie części.

Wyraźną granicą plastyczności na ściskanie R_{ec} nazywa się naprężenie umowne, po osiągnięciu którego następuje wyraźne skrócenie próbki bez istotnego wzrostu lub nawet przy spadku siły ściskającej P, obliczone z ilorazu siły P_{ec} i pola pierwotnego przekroju poprzecznego próbki A_0

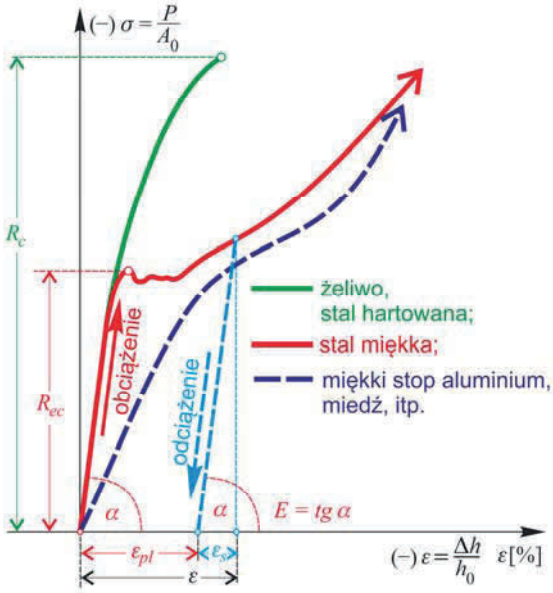
$$R_{ec} = \frac{P_{ec}}{A_0}. \tag{2.2}$$

Warto zauważyć, że próbka z materiału plastycznego nie niszczy się w sensie pęknięcia, tylko ulega sprasowaniu, stąd nie jest możliwe określenie wytrzymałości na ściskanie, a próbę na ogół przerywa się po przekroczeniu granicy plastyczności.

Skrócenie względne a_c charakteryzuje stan odkształcenia próbki zarówno w obszarze sprężystym, jak i plastycznym. Zgodnie z rys. 2.2 wyraża się wzorem

$$a_c = \frac{\Delta h}{h_0} \cdot 100\% = \frac{h_0 - h_u}{h_0} \cdot 100\%. \tag{2.3}$$

Hipotetyczne wykresy ściskania dla materiałów różnych typów zamieszczono na rys. 2.4.



Rys. 2.4. Hipotetyczne wykresy ściskania dla różnych typów materiałów

W uzupełnieniu zestawimy cechy materiału określane w próbie ścisłej. Tak jak w próbie rozciągania parametry określane w próbie ścisłej mają charakter umowny i są definiowane analogicznie.

Umowna granica sprężystości przy ściskaniu $R_{c0,01}$ jest to wartość naprężenia, po osiągnięciu którego długość pomiarowa próbki doznaje trwałego skrócenia równego $0,01\%$ początkowej długości pomiarowej (po odciążeniu próbki)

$$R_{c0,01} = \frac{P_{c0,01}}{A_0}. \tag{2.4}$$

Umowna granica plastyczności przy ściskaniu $R_{c0,2}$ jest to wartość naprężenia, które wywołuje w badanej próbce trwałe skrócenie o wartości $0,2\%$ początkowej długości pomiarowej (po odciążeniu próbki)

$$R_{c0,2} = \frac{P_{c0,2}}{A_0}. \tag{2.5}$$

Do prób ściskania używa się głównie próbek o przekroju okrągłym. Stosunek wysokości h_0 do średnicy d_0 określa tzw. krotność próbki

$$n = \frac{h_0}{d_0}. \tag{2.6}$$

W przypadku metali przyjmowane są średnice $d_0 = \{10, 20, 30\}$ mm, przy czym używa się próbek:

$n = 1,5$ – do pomiarów R_c i R_{ec} w próbie zwykłej,
$n = 3$ – do prób ścisłych, z wyłączeniem modułu sprężystości,
$n = 10$ – do wyznaczania modułu sprężystości.

W przypadku betonu, drewna czy kompozytów próbki do ściskania mogą mieć kształt kostek sześciennych.

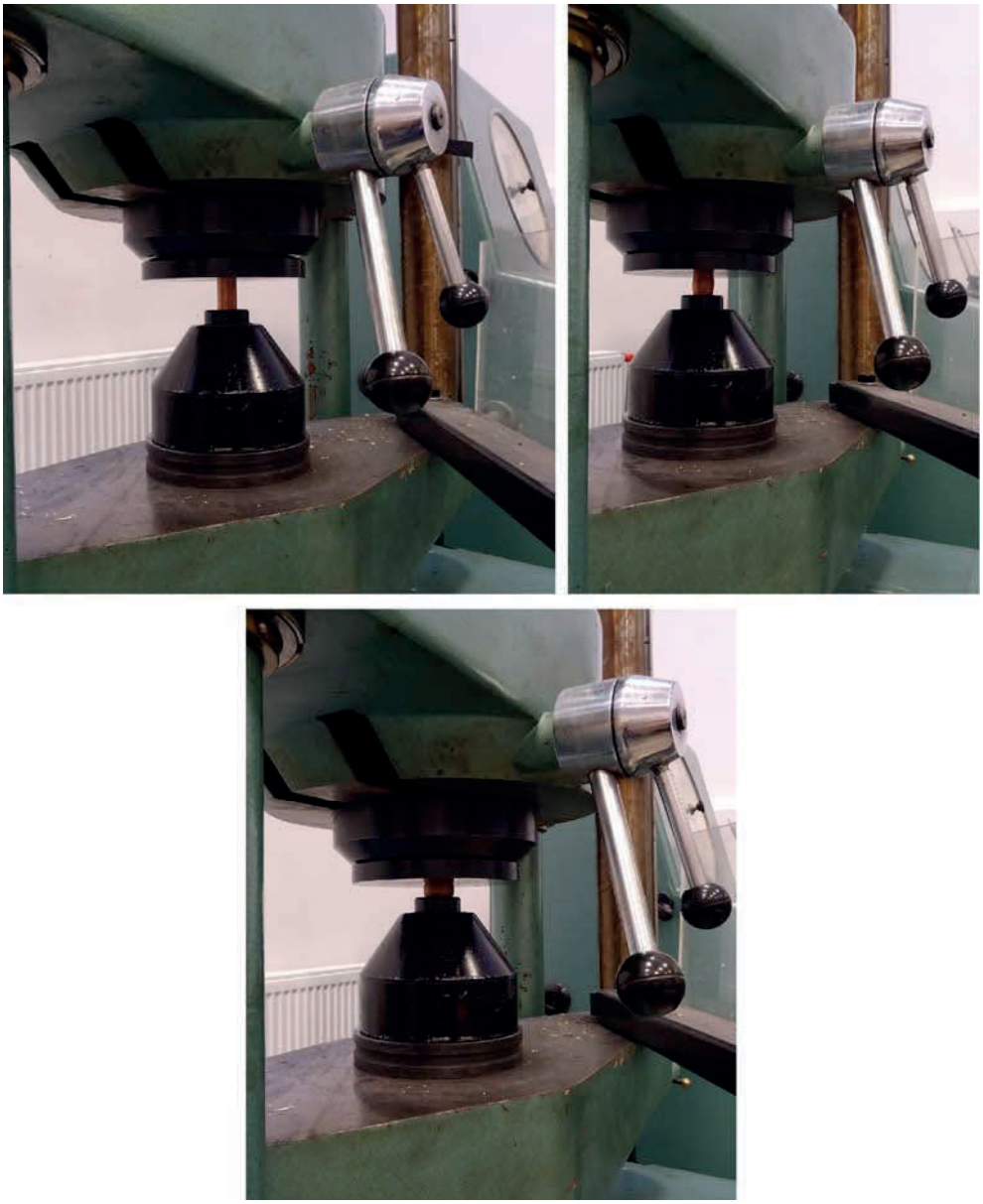
2.3. Przebieg ćwiczenia

Ćwiczenie polega na ściskaniu próbek w maszynie wytrzymałościowej. Badaniu poddane są próbki walcowe, wykonane z czterech różnych materiałów: miedzi, mosiądzu oraz aluminium twardego i miękkiego. Próbki umieszczane są centrycznie w maszynie wytrzymałościowej (rys. 2.5), a następnie ściskane aż do momentu zniszczenia lub przekroczenia granicy plastyczności (rys. 2.3). Przyrost siły oraz przemieszczenie trawersy są rejestrowane przez maszynę wytrzymałościową.

UWAGA. W czasie próby ściskania materiałów kruchych należy zachować szczególne warunki bezpieczeństwa pracy, ponieważ przy kruchym pękaniu materiału następuje uwolnienie znacznej ilości energii z powstawaniem ostrych odprysków z rozkruszanej próbki (rys. 2.3).

W ramach ćwiczenia należy:

— zmierzyć średnicę i wysokość próbki,
— ustawić centrycznie próbkę w maszynie wytrzymałościowej,
— obciążyć próbkę osiową siłą ściskającą do momentu zniszczenia,
— wyjąć próbkę z maszyny wytrzymałościowej
— zmierzyć średnicę i wysokość próbki po zniszczeniu.



Rys. 2.5. Próbka z materiału plastycznego podczas próby ściskania

2.4. Opracowanie wyników

Sprawozdanie powinno zawierać:

— cel i zakres badania,
— opis próbek (przed rozciąganiem i po rozciąganiu), wyniki pomiarów geometrii (tablica 2.1),

— wykres roboczy ściskania próbek w układzie siła–skrócenie, wykres umowny naprężenie–odkształcenie z oznaczeniem jego charakterystycznych punktów oraz charakterystykę złomu (tj. miejsca zniszczenia),
— obliczenie następujących wielkości (jeżeli można je wyznaczyć na podstawie wykonanej próby):
  – wyraźna granica plastyczności przy ściskaniu (o ile istnieje),
  – wytrzymałość na ściskanie (jeśli próbka ulegnie zniszczeniu),
  – skrócenie względne (jeśli próbka ulegnie zniszczeniu),
  oraz zestawienie uzyskanych wartości w tablicy 2.2,
— wnioski i uwagi własne, omówienie własności wytrzymałościowych i plastycznych badanego metalu.

Tablica 2.1

Tabela pomiarowa

Parametry geometryczne	Próbka nr 1	Próbka nr 2	Próbka nr 3	Próbka nr 4
d_0 [mm]				
h_0 [mm]				
A_0 [mm^2]				
h_u [mm]				

Tablica 2.2

Zestawienie wyników

Parametry wytrzymałościowe	Próbka nr 1	Próbka nr 2	Próbka nr 3	Próbka nr 4
P_{ec} [kN]				
P_c [kN]				
R_{ec} [MPa]				
R_c [MPa]				
a_c [%]				

Ćwiczenie 3

WYZNACZANIE MODUŁU YOUNGA I WSPÓŁCZYNNIKA POISSONA

3.1. Cel szczegółowy ćwiczenia

— doświadczalne wyznaczenie odkształceń podłużnych i poprzecznych w próbie rozciągania jednoosiowego,
— wyznaczenie modułu Younga (inaczej: modułu sprężystości podłużnej) i współczynnika Poissona.

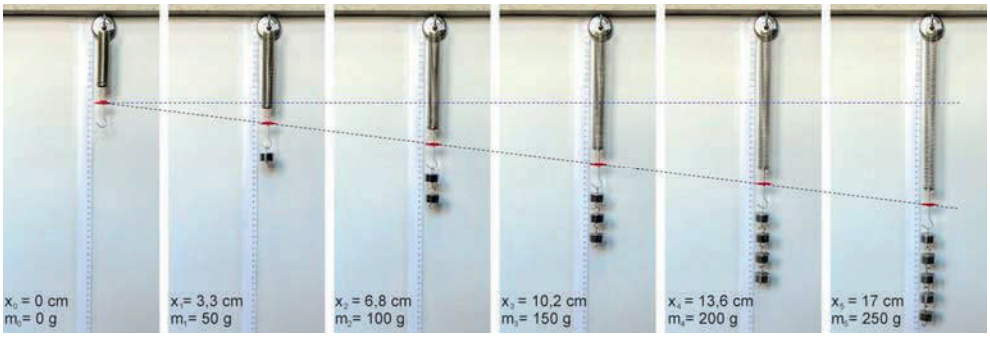
3.2. Podstawy teoretyczne

Jednorodny izotropowy materiał liniowo-sprężysty jest całkowicie określony przez dwie niezależne stałe materiałowe. Najbardziej popularnymi, tzw. inżynierskimi stałymi są:
— moduł sprężystości podłużnej E (moduł Younga) [$\mathrm{N/m^2}$] – charakteryzuje opór materiału jaki stawia on przy rozciąganiu,
— współczynnik Poissona ν [–] – charakteryzuje stosunek odkształceń poprzecznych do podłużnych.

Moduł sprężystości, oznaczany powszechnie literą E i wyrażany w [N/m^2] jest liczbowym opisem pewnej własności materiału nazywanej sprężystością. Sprężystość materiału jest istotna z punktu widzenia inżynierii, jej znajomość pozwala bowiem w sposób odpowiedzialny projektować konstrukcje inżynierskie. Moduł sprężystości występuje w wyrażeniach znanych jako sztywność na ściskanie/rozciąganie *EA* oraz sztywność na zginanie *EJ* i w ten sposób „steruje" wartościami ugięć projektowanych elementów konstrukcyjnych. W badaniach nad sprężystością materiałów szczególną rolę odegrał Robert Hooke (1635–1703), zob. np. Timoszenko (1966). Hooke w swoim traktacie „O sprężynach", będącym pierwszym dziełem dotyczącym własności sprężystych materiałów, opisał eksperyment pozwalający zaobserwować, że wydłużenie obciążanego pręta lub sprężyny jest proporcjonalne do przykładanego nań obciążenia. Opisana przez Hooke'a liniowa zależność pomiędzy siłą a odkształceniem jest obecnie znana jako prawo Hooke'a. Samo pojęcie modułu sprężystości, znanego obecnie również pod nazwą modułu Younga, wprowadził Thomas Young (1773–1829).

Na rys. 3.1 przedstawiono przykład doświadczenia polegającego na obciążaniu sprężyny przy użyciu ciężarków o masie 50 g, przeprowadzonego w pięciu etapach przyrostowych. Widoczna jest proporcjonalna (liniowa) zależność pomiędzy przyrostem masy (obciążenia/siły) a przyrostem wydłużenia (przemieszczeniem)

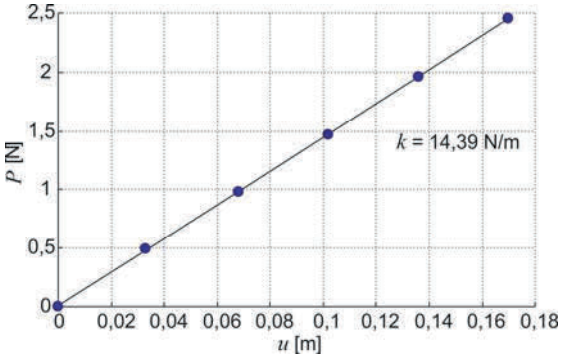
$$\frac{\Delta P}{\Delta u} \Leftrightarrow \frac{m_{i+1} - m_i}{x_{i+1} - x_i} = const \ \text{ dla } \ i = 1,2,3,4,5\,. \tag{3.1}$$



Rys. 3.1. Doświadczenie rozciągania sprężyny stałym przyrostem obciążenia o masie Δm = 50 g

Uzyskane wyniki zależności siły od przemieszczenia pokazano na rys. 3.2. Sztywność sprężyny (w zakresie liniowo-sprężystym) można zatem wyznaczyć ze wzoru

$$k = \frac{P}{u}. \tag{3.2}$$



Rys. 3.2. Wykres zależności siła–przemieszczenie w przypadku obciążania sprężyny z rys. 3.1

Ciekawostki, jak to właściwie jest?

Wartości modułu Younga są zidentyfikowane dla popularnych materiałów konstrukcyjnych takich jak beton, metale czy drewno i można je odnaleźć w literaturze. Temu zagadnieniu poświęcone jest niniejsze ćwiczenie. Można jednak spojrzeć na sprężystość w szerszym aspekcie. Wyobraźmy sobie pręt, np. metalowy (albo sprężynę), na który działa obciążenie ściskające P. Siła P skracając pręt o pewną wartość wykonała pewną pracę L_z, która została zmagazynowana wewnątrz pręta jako energia sprężysta E_s na podstawie twierdzenia Castigliano $E_s = L_z$. Tak ściśnięty pręt (sprężyna) może zostać przeniesiony w inne miejsce i, po usunięciu więzów utrzymujących go w stanie ściskania, oddać swoją energię, a więc wykonać pracę. Tym samym dochodzimy do innego ujęcia sprężystości.

W ujęciu historycznym Badur (2009) opisuje tok myśli ludzkiej prowadzący do zrozumienia, jaka cecha fizyczna dostępnych powszechnie materiałów (np. pary, powietrza) jest odpowiedzialna za konwersję ciepła (np. ze spalania węgla) w pracę. Jedną z ważniejszych dat, wartą odnotowania, jest rok 1678, kiedy Robert Hooke odkrył i pomierzył współczynnik opisujący sprężystość stali, żelaza i innych metali. Jak wykazaliśmy w do-

świadczeniu z rys. 3.1, współczynnik ten jest właśnie modułem sprężystości uwzględniającym liniową zależność pomiędzy ciężarem użytym do rozciągania sprężyny a rozciągnięciem sprężyny. Sprężystość jednak nie wystarczy, by zamieniać ciepło w pracę. Potrzebne są tutaj tzw. krzyżowe własności sprężyste, zwane również własnościami odwracalnymi, zob. Badur (2005). Przykładowo, ogrzewaniu płynu musi towarzyszyć sprężysta zmiana objętości. W odniesieniu do ciał stałych miarą tejże sprężystości jest moduł Younga. Można go zdefiniować jako pracę potrzebną, aby w 1 kg masy czynnika podnieść ciśnienie o jeden Pascal (zob. Badur, 2005 tab. 2.1).

Czy pręt metalowy wykazuje efekty krzyżowe? Okazuje się, że tak. Jest to efekt cieplno-mechaniczny opisujący obniżenie temperatury ciała sprężyście rozciąganego. Pręt stalowy rozciągnięty do granicy sprężystości obniża temperaturę o około 0,2–0,3°C. Badania w tym zakresie prowadził John Tyndall (Badur, 2009), który opisał tzw. izotermiczny moduł sprężystości E_T i adiabatyczny moduł sprężystości E_s. Zgodnie z encyklopedyczną definicją proces izotermiczny to taki, który przebiega w stałej temperaturze, a proces adiabatyczny to proces przebiegający bez wymiany ciepła z otoczeniem. W trakcie ćwiczenia w laboratorium zostanie pomierzony izotermiczny moduł sprężystości.

Co tak naprawdę stanowi istotę sprężystości ciał? Na to pytanie odpowiada atomowa struktura materii (Ashby i inni, 2011). Atomy łączą się ze sobą wiązaniami. W zależności od materiału wiązania są silniejsze bądź słabsze. Siłę wiązania określa się energią kohezji, im wyższa jej wartość, tym wiązanie jest silniejsze i wyższy moduł sprężystości. Wiązanie między atomami można zilustrować pojęciem sprężyny. Przyłożona siła powoduje albo oddalanie się atomów od siebie, albo ich zbliżanie. Energia wiązania osiąga minimum w położeniu równowagi. Zmiana odległości powoduje, niezależnie od kierunku, wzrost energii wiązania. Sztywność wiązania atomów k możemy zdefiniować odwołując się do klasycznej w mechanice budowli definicji sztywności sprężyny opisanej wzorem (3.2). I tak, np. dla metali, wartość k zawiera się w przedziale od 15 do 75 N/m co przekłada się na zakres zmienności modułu Younga rzędu 60 do 300 GPa (Ashby i inni, 2011).

Drugą stałą materiałową identyfikowaną w ćwiczeniu jest współczynnik Poissona. Obecnie przyjmujemy bez zastrzeżeń, że jest to niezależna stała materiałowa opisująca własności sprężyste materiału izotropowego. Warto jednak zaznaczyć, że w ujęciu historycznym nie zawsze tak było, zob. np. Timoszenko (1966). Navier (1785–1836) założył, iż ciało idealnie sprężyste składa się z cząsteczek. W trakcie odkształcenia między nimi pojawiają się siły na kierunkach łączących je, proporcjonalne do odległości między nimi. W ten sposób określił relacje łączące odkształcenia i siły sprężystości. Relacje te zapisane dla ciała izotropowego wyraził za pomocą jednej stałej. Dwóch stałych materiałowych użył Cauchy (1789–1857). Zakładając liniową relację naprężenie–odkształcenia oraz że kierunki główne odkształcenia pokrywają się z kierunkami głównymi naprężenia, zapisał on sześć równań z dwiema stałymi sprężystymi. Jednak powszechnie przyjmowano, że wystarczy jedna stała materiałowa. Ten punkt widzenia zmienił się dzięki pracom Greena (1793–1841). Green badał związki między naprężeniem i odkształceniem wychodząc z pojęcia energii. Według Greena i jego zwolenników potrzeba 2 stałych materiałowych dla izotropii i 21 w ogólnym przypadku. Przeciwnicy, skupieni wokół Naviera i Cauchy'ego, postulowali potrzebę zastosowania odpowiednio 1 i 15 stałych. Poisson (1781–1840) badając rozciąganie pręta izotropowego określił stosunek skrócenia poprzecznego do wydłużenia jako równy 0,25. Dopiero badania Kirchoffa (1824–1887) pokazały, że stosunek ten dla stali równy jest 0,294, a dla mosiądzu 0,387. Podważyło to argument protagonistów jednej stałej materiałowej i dało impet rozwojowi teorii sprężystości bazującej na koncepcji Greena.

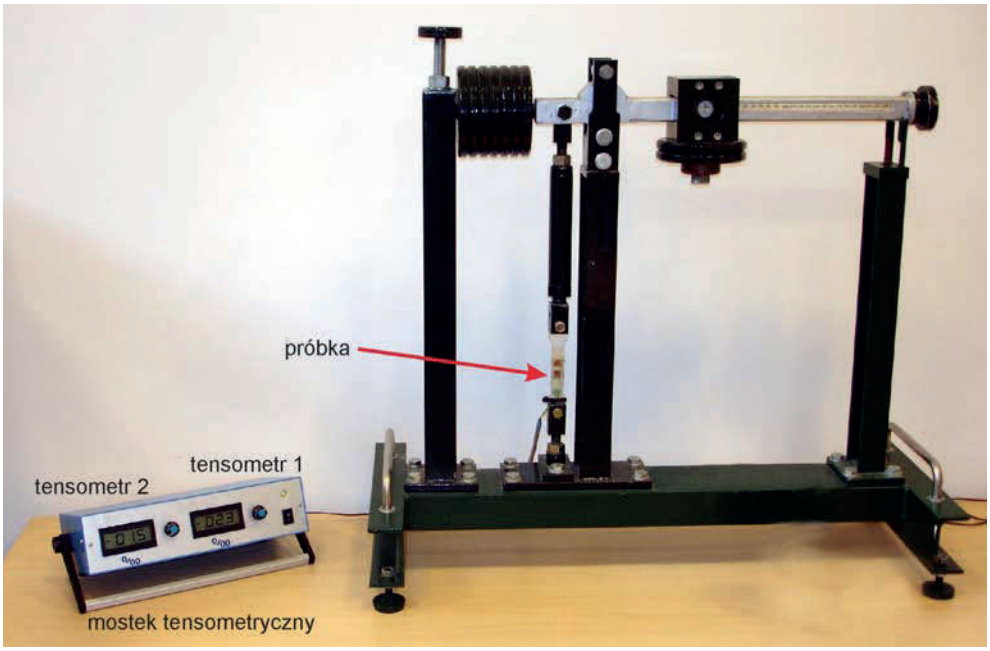
3.3. Przebieg ćwiczenia

Badanie jest przeprowadzane dla próbki o wymiarach przekroju poprzecznego 3 mm × 15 mm, wykonanej z poliwęglanu. Próbka umieszczona w ramie pokazanej na rys. 3.3 poddana jest działaniu osiowej siły rozciągającej o wartości od 0 N do 200 N. Pomiar odkształceń jest dokonywany za pomocą dwóch tensometrów elektrooporowych – jednego w kierunku podłużnym, drugiego w kierunku poprzecznym (rys. 3.4) – podłączonych do mostka tensometrycznego (rys. 3.3). Wartość na wyświetlaczu mostka pokazywana jest w ‰ (mm/m).

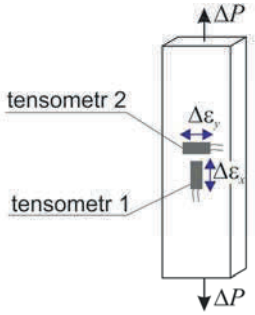
W ramach ćwiczenia należy:

— wykonać pomiary geometrii próbki,
— obciążyć próbkę zwiększając kolejno obciążenie o $\Delta P = 10$ N, od wartości 0 N do uzyskania wartości 200 N,
— dla każdego przyrostu obciążenia dokonać odczytów początkowych (OP) i końcowych (OK) wartości wyświetlonych na mostku tensometrycznym,
— odciążyć próbkę zmniejszając obciążenie o $\Delta P = 10$ N, od wartości 200 N do uzyskania wartości 0 N,
— dla każdego przyrostu obciążenia dokonać odczytów początkowych (OP) i końcowych (OK) wartości wyświetlonych na mostku tensometrycznym.

Podczas pomiarów należy pamiętać, aby zachować kilkuminutowy odstęp pomiędzy przyłożeniem/zdjęciem obciążenia a wykonaniem odczytu w celu eliminacji efektów reologicznych. Wyniki należy zanotować w tablicy 3.1, a następnie wyliczyć przyrosty odkształceń podłużnych jako $\Delta\varepsilon_{i(x)} = \mathrm{OK}_i - \mathrm{OP}_i$ i poprzecznych jako $\Delta\varepsilon_{i(y)} = \mathrm{OK}_i - \mathrm{OP}_i$.



Rys. 3.3. Stanowisko pomiarowe



Rys. 3.4. Badana próbka z zaznaczonymi tensometrami

Tablica 3.1

Tabela pomiarowa

P [N]	Tensometr 1: $\Delta\varepsilon_x$				Tensometr 2: $\Delta\varepsilon_y$			
	obciążenie		odciążenie		obciążenie		odciążenie	
	odczyt	$\Delta\varepsilon_{i(x)}^{(1)}$	odczyt	$\Delta\varepsilon_{i(x)}^{(2)}$	odczyt	$\Delta\varepsilon_{i(y)}^{(1)}$	odczyt	$\Delta\varepsilon_{i(y)}^{(2)}$
0								
10								
20								
30								
40								
50								
60								
70								
80								
90								
100								
110								
120								
130								
140								
150								
160								
170								
180								
190								
200								

Tablica 3.2

Tabela obliczeniowa

P [N]	$\Delta\varepsilon_{i(x)}^{śr}$	$\Delta\varepsilon_{i(y)}^{śr}$	E_{0i}	$E_{0i} - E_0$	$(E_{0i} - E_0)^2$
0 – 10					
10 – 20					
20 – 30					
30 – 40					
40 – 50					
50 – 60					
60 – 70					
70 – 80					
80 – 90					
90 – 100					
100 – 110					
110 – 120					
120 – 130					
130 – 140					
140 – 150					
150 – 160					
160 – 170					
170 – 180					
180 – 190					
190 – 200					
$\sum$					

Po wykonaniu pomiarów należy wykonać obliczenia umożliwiające wyznaczenie modułu Younga i współczynnika Poissona. W tym celu w tablicy 3.2 należy obliczyć następujące wielkości:

— średnie przyrosty odkształceń z uwzględnieniem wartości przyrostów odkształceń uzyskanych w procesie obciążania i odciążania

$$\Delta\varepsilon_{i(x)}^{śr} = \frac{\left|\Delta\varepsilon_{i(x)}^{(1)}\right| + \left|\Delta\varepsilon_{i(x)}^{(2)}\right|}{2}, \qquad \Delta\varepsilon_{i(y)}^{śr} = \frac{\left|\Delta\varepsilon_{i(y)}^{(1)}\right| + \left|\Delta\varepsilon_{i(y)}^{(2)}\right|}{2}, \tag{3.3}$$

— wartość modułu Younga dla danego przyrostu odkształcenia

$$E_{0i} = \frac{\Delta\sigma_0}{\Delta\varepsilon_{i(x)}^{śr}}, \qquad \text{gdzie: } \Delta\sigma_0 = \frac{\Delta P}{A}, \tag{3.4}$$

— wartość średnia modułu Younga

$$E_0 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} E_{0i}, \tag{3.5}$$

— wariancja modułu Younga

$$\sigma_{E_0}^2 = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}\left(E_{0i} - E_0\right)^2 . \tag{3.6}$$

Następnie należy obliczyć:
— odchylenie standardowe

$$\sigma_{E_0} = \sqrt{\sigma_{E_0}^2} , \tag{3.7}$$

— współczynnik Poissona

$$\nu = \frac{\Delta\varepsilon_{0y}}{\Delta\varepsilon_{0x}}, \quad \text{gdzie: } \Delta\varepsilon_{0x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\Delta\varepsilon_{i(x)}^{śr} \quad \Delta\varepsilon_{0y} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}\Delta\varepsilon_{i(y)}^{śr} . \tag{3.8}$$

3.4. Opracowanie wyników

Sprawozdanie powinno zawierać:
— cel i zakres badania,
— opis badanej próbki,
— opis aparatury pomiarowej,
— wyniki pomiarów wpisane do tablicy 3.1,
— obliczenia modułu Younga, wartości oczekiwanej modułu Younga oraz wariancji modułu Younga dla danego przyrostu obciążenia w tablicy 3.2,
— obliczenia odchylenia standardowego modułu Younga oraz współczynnika Poissona,
— wykres $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ dla obu tensometrów,
— histogram rozkładu prawdopodobieństwa modułu Younga,
— wnioski i uwagi własne.

Ćwiczenie 4

ZGINANIE PROSTE I UKOŚNE

4.1. Cel szczegółowy ćwiczenia

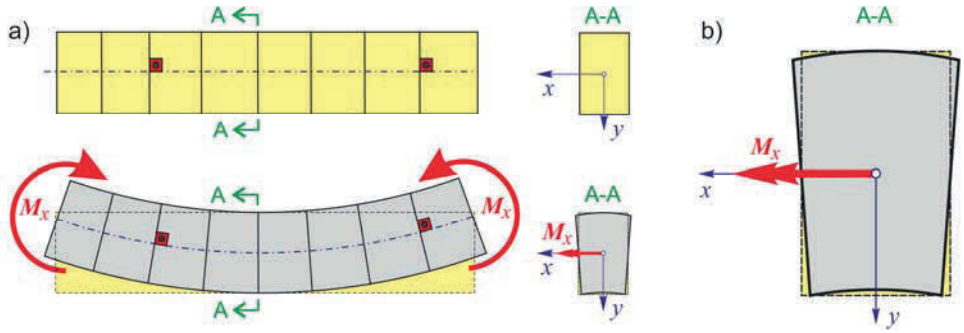
— przedstawienie różnic między zginaniem prostym a ukośnym,
— weryfikacja doświadczalna założenia o płaskich przekrojach,
— doświadczalne wyznaczenie rozkładu odkształceń,
— porównanie doświadczalnego i teoretycznego rozkładu naprężeń.

4.2. Podstawy teoretyczne

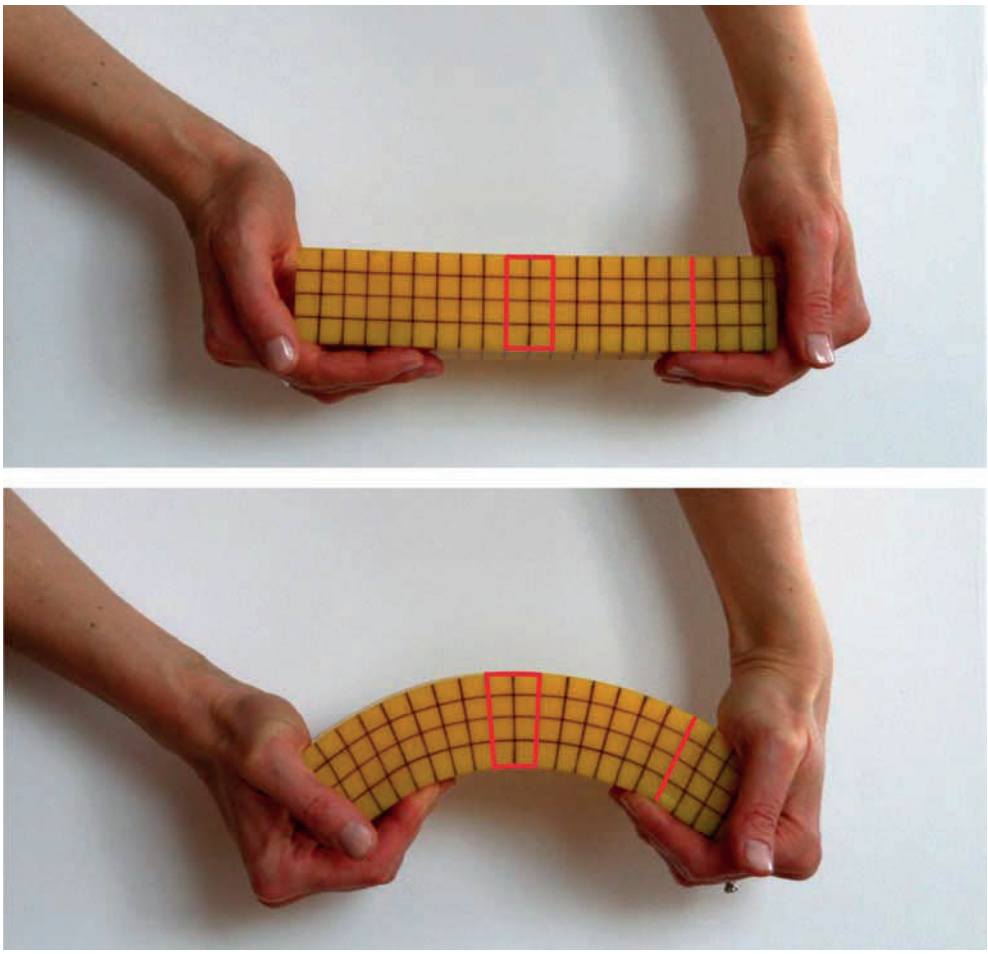
Zginanie belek od dawna zaprzątało umysły inżynierów i naukowców (zob. Timoszenko, 1966). Duży wkład w badania na ten temat wniósł Saint-Venant (1797–1886). Badał on dokładność głównych założeń leżących u podstaw teorii zginania mówiących, że przekroje poprzeczne belki pozostają płaskie po odkształceniu oraz podłużne włókna belki nie wywierają na siebie ciśnienia w czasie zginania i znajdują się w stanie prostego rozciągania lub ściskania (por. także Jastrzębski i inni, 1974). Saint-Venant wykazał słuszność tych założeń tylko w przypadku czystego zginania. Ponadto zauważył, że prostokątne przekroje belki przed obciążeniem doznają zmiany kształtu (zob. rys. 4.1). Mianowicie, wskutek poprzecznego skrócenia szerokość prostokąta ulega zmniejszeniu od strony podłużnych włókien rozciąganych i zwiększeniu od strony podłużnych włókien ściskanych. Taki efekt związany jest z liczbą Poissona. Fakt ten zaniedbuje się jednak w przypadku analizy belek niepodlegających dużym deformacjom, w których wymiary poprzeczne są małe w porównaniu z długością. Dodatkowo warto wspomnieć, że Saint-Venant udowodnił, iż wartość ugięcia pionowego wspornika wywołanego działaniem siły skupionej może zostać obliczona bez całkowania równania różniczkowego, tzn. za pomocą metody obciążeń wtórnych, znanej też dziś jako metoda Mohra.

Podstawowym założeniem zginania czystego jest hipoteza kinematyczna Bernoulliego (inaczej: hipoteza o płaskich przekrojach). Zakłada ona, że przekroje początkowo płaskie i prostopadłe do osi pręta pozostają płaskie i prostopadłe do osi pręta w trakcie całego procesu deformacji (rys. 4.1, rys. 4.2). Oznacza to, iż doznają one jedynie obrotów, a odkształcenie jednostkowe podłużne jest liniową funkcją współrzędnych (czyli opisane równaniem płaszczyzny)

$$\varepsilon(x, y) \equiv \varepsilon_z = ax + by + c\,. \tag{4.1}$$

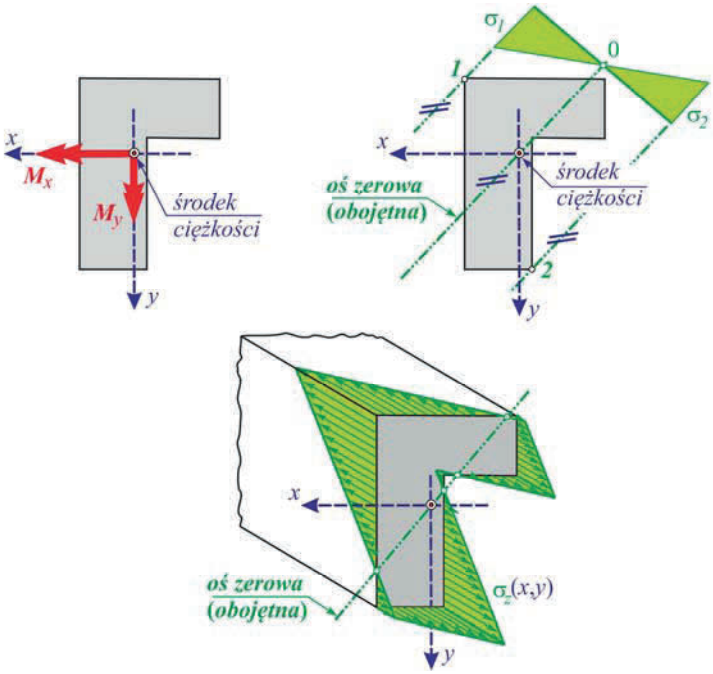


Rys. 4.1. Zobrazowanie hipotezy kinematycznej Bernoulliego
(na podstawie: Bielewicz, 2006 oraz Jastrzębski i inni, 1974):
a) belka przed i po odkształceniu; b) zbliżenie na przekrój poprzeczny po odkształceniu



Rys. 4.2. Weryfikacja doświadczalna hipotezy kinematycznej Bernoulliego

W ogólnym zginaniu ukośnym występuje tylko wektor momentu zginającego, który leży w płaszczyźnie przekroju i jest dowolnie zorientowany względem lokalnego, prostokątnego układu osi centralnych przekroju (tzn. nie pokrywa się z kierunkiem jednej z głównych centralnych osi bezwładności). Przykład ogólnego zginania ukośnego w osiach centralnych (przechodzących przez środek ciężkości figury) pokazano na rys. 4.3. Wykres naprężeń w rozważanym przekroju zaprezentowano w dwóch wariantach, tj. jako przestrzenną bryłę naprężeń normalnych do przekroju oraz, w popularniejszy sposób, jako wykres funkcji naprężeń odmierzony ortogonalnie od prostej prostopadłej do osi naprężeń zerowych, inaczej mówiąc, jako rzut bryły naprężeń na płaszczyznę ortogonalną do osi obojętnej (widzianej jako punkt 0).



Rys. 4.3. Zginanie ukośne w osiach centralnych

Przy zginaniu ukośnym w układzie osi centralnych obowiązują następujące zależności:

— wzór płaszczyzny opisującej odkształcenia (tutaj stała c jest równa zeru)

$$\varepsilon(x,y) \equiv \varepsilon_z = ax + by\,, \tag{4.2}$$

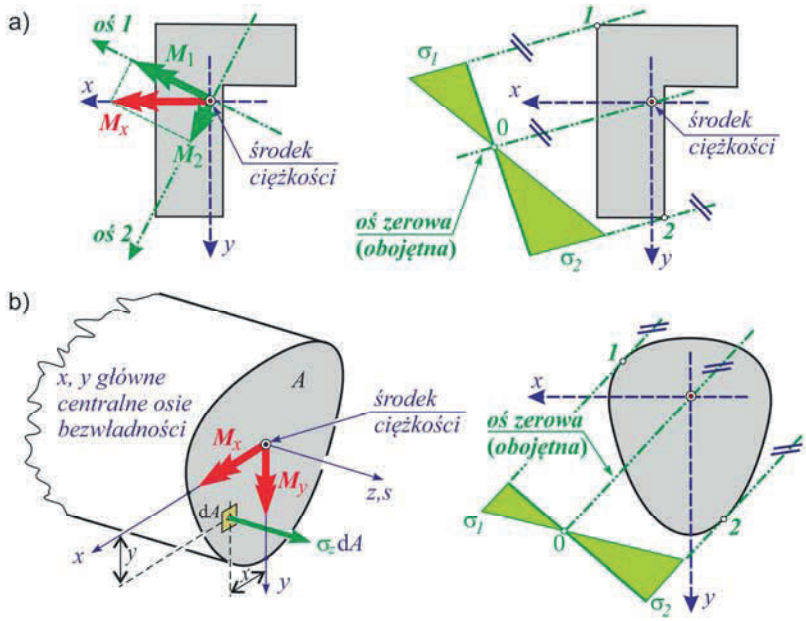
— wzór płaszczyzny opisującej naprężenia (zgodnie z liniowym prawem Hooke'a)

$$\sigma_z(x,y) = -\frac{M_y J_x + M_x J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2}\,x + \frac{M_x J_y + M_y J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2}\,y\,, \tag{4.3}$$

— równanie osi obojętnej (zerowej)

$$\sigma_z(x,y) \overset{def}{=} 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{M_y J_x + M_x J_{xy}}{M_x J_y + M_y J_{xy}}\,x\,. \tag{4.4}$$

Zauważmy, że złożone współczynniki wzorów (4.3) oraz (4.4) opisujących ogólne zginanie ukośne w osiach centralnych (x,y) ulegną uproszczeniu w dwóch przypadkach. Po pierwsze, kiedy jedna ze składowych wektora momentu (M_x,M_y) będzie równa zero, co oznacza, że wektor momentu pokryje się z kierunkiem lokalnych osi centralnych, jak na rys. 4.4a. Po drugie, kiedy moment dewiacyjny przekroju będzie równy zeru ($J_{xy} = 0$), co oznacza, że centralny układ lokalny przekroju (x,y) pokrywa się z głównymi centralnymi osiami bezwładności $(1,2)$, jak na rys. 4.4b. W obu tych przypadkach mamy do czynienia ze zginaniem ukośnym w układzie głównych centralnych osi bezwładności.



Rys. 4.4. Zginanie ukośne w głównych centralnych osiach bezwładności:
a) przypadek obciążenia, dla którego wektor momentu M_x pokrywa się z kierunkiem lokalnej osi centralnej x; b) przypadek przekroju, dla którego centralny układ lokalny przekroju (x, y) pokrywa się z głównymi centralnymi osiami bezwładności (1, 2)

Przy zginaniu ukośnym w układzie głównych centralnych osi bezwładności $(x \equiv 1, y \equiv 2)$ obowiązują następujące zależności:

— wzór płaszczyzny opisującej odkształcenia (tutaj stała c jest równa zeru)

$$\varepsilon(x,y) \equiv \varepsilon_z = ax + by\,, \tag{4.5}$$

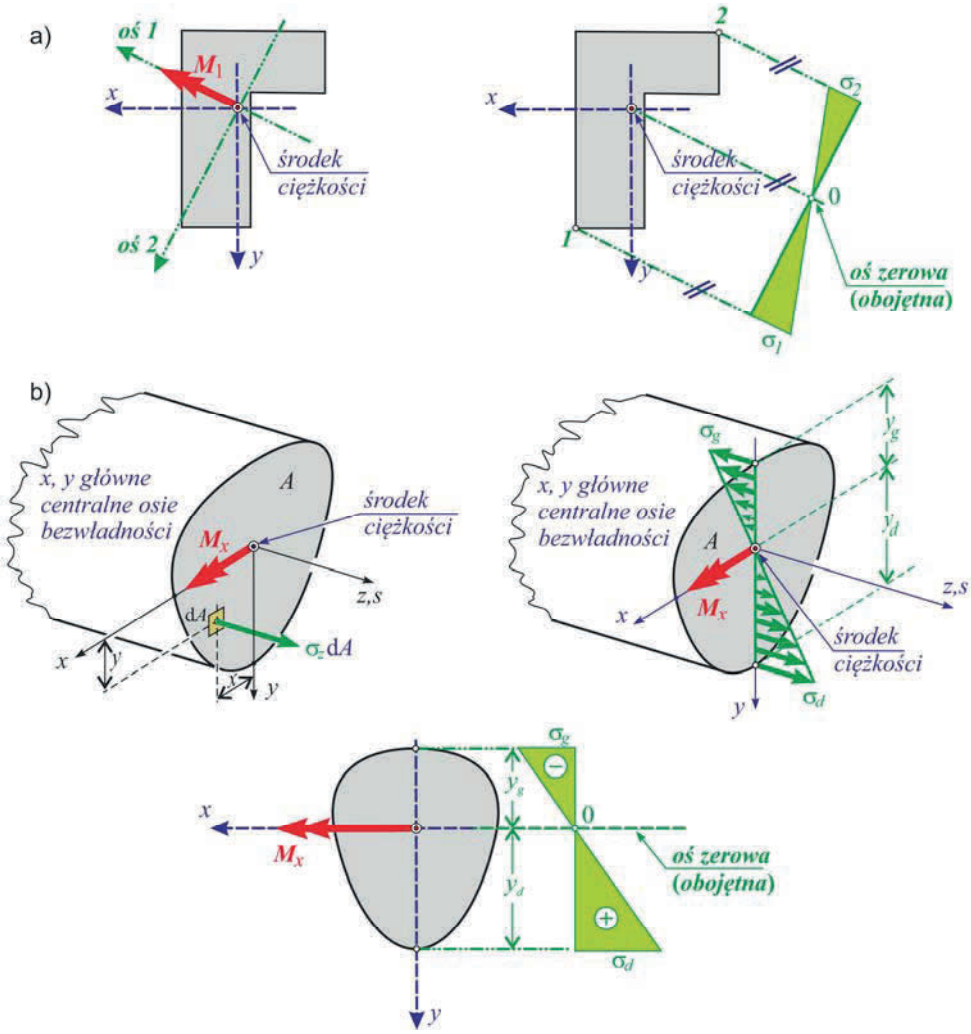
— wzór płaszczyzny opisującej naprężenia (zgodnie z liniowym prawem Hooke'a)

$$\sigma_z(x,y) = -\frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y\,, \tag{4.6}$$

— równanie osi obojętnej (zerowej)

$$\sigma_z(x,y) \overset{def}{=} 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{M_y J_x}{M_x J_y} x\,. \tag{4.7}$$

Współczynniki wzorów (4.6) oraz (4.7) opisujących zginanie ukośne w układzie głównych centralnych osi bezwładności $(x \equiv 1, y \equiv 2)$ ulegną dalszemu uproszczeniu, kiedy jedna ze składowych wektora momentu (M_x, M_y) będzie równa zero, co oznacza, że wektor momentu, a co za tym idzie oś obojętna, pokryje się z jedną z osi bezwładności głównego układu centralnego, jak na rys. 4.5b dla $M_x \neq 0$. Takie zginanie nazywamy prostym, co oznacza, że wektor momentu pokrywa się z jedną z głównych centralnych osi bezwładności.



Rys. 4.5. Zginanie proste: a) przekrój, dla którego osie główne nie pokrywają się z osiami centralnymi; b) przekrój, dla którego osie główne pokrywają się z osiami centralnymi

Przy zginaniu prostym względem osi x ($M_y = 0$), która jednocześnie jest osią zerową (obojętną), obowiązują następujące zależności:

— wzór płaszczyzny opisującej odkształcenia (tutaj stałe a i c są równe zeru)

$$\varepsilon(x, y) \equiv \varepsilon_z = by\,, \tag{4.8}$$

— wzór płaszczyzny opisującej naprężenia (zgodnie z liniowym prawem Hooke'a)

$$\sigma_z(y) = \frac{M_x}{J_x} y\,, \tag{4.9}$$

— równanie osi obojętnej (zerowej)

$$\sigma_z(y) \overset{def}{=} 0 \;\Rightarrow\; y = 0\,. \tag{4.10}$$

4.3. Przebieg ćwiczenia

Ćwiczenie jest przeprowadzane dla belki wykonanej z poliwęglanu (E = 2900 MPa), o schemacie swobodnego podparcia z obustronnym przewieszeniem. Obciążenie jest przykładane symetrycznie, po obu stronach przewieszenia. Pomiar odkształceń jest dokonywany w przekroju $\alpha - \alpha$ za pomocą pięciu tensometrów elektrooporowych (T1 do T5) podłączonych do mostka tensometrycznego. Wartość na wyświetlaczu mostka jest pokazywana w μm/m.

W przeprowadzanym ćwiczeniu są wykonywane dwa doświadczenia, tj. pomiar odkształceń w belce o przekroju dwuteowym (rys. 4.6) oraz pomiar odkształceń w belce o przekroju zetowym (rys. 4.7).

W ramach ćwiczenia należy:

— wykonać pomiary geometrii belki,
— wykonać odczyty dla belki nieobciążonej (OP = odczyt początkowy),
— obciążyć belkę zgodnie ze schematem statycznym,
— wykonać odczyty dla belki obciążonej (OK = odczyt końcowy),
— odciążyć belkę.

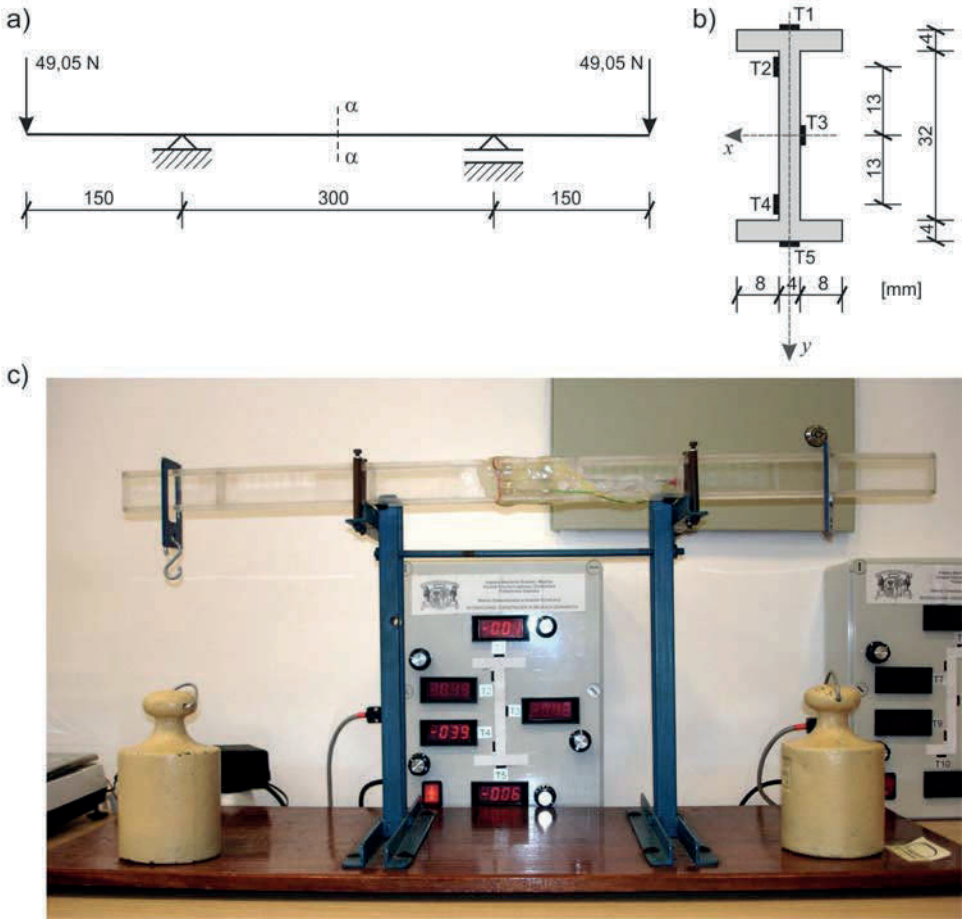
Wyniki należy zanotować w tablicy 4.1, a następnie wyliczyć przyrosty odkształceń jako $\Delta\varepsilon = \mathrm{OK} - \mathrm{OP}$. Pomiar należy wykonać trzykrotnie, a następnie wyliczyć wartości średnie przyrostów odkształceń. Podczas pomiarów należy pamiętać, aby zachować kilkuminutowy odstęp pomiędzy przyłożeniem/zdjęciem obciążenia a wykonaniem odczytu, w celu eliminacji efektów reologicznych.

Po wykonaniu pomiarów należy wykonać obliczenia teoretyczne rozkładu naprężeń normalnych dla obu belek, a następnie narysować ich wykres, z odniesieniem do przekrojów poszczególnych belek. Wykres naprężeń doświadczalnych należy wykonać na podstawie pomierzonych odkształceń.

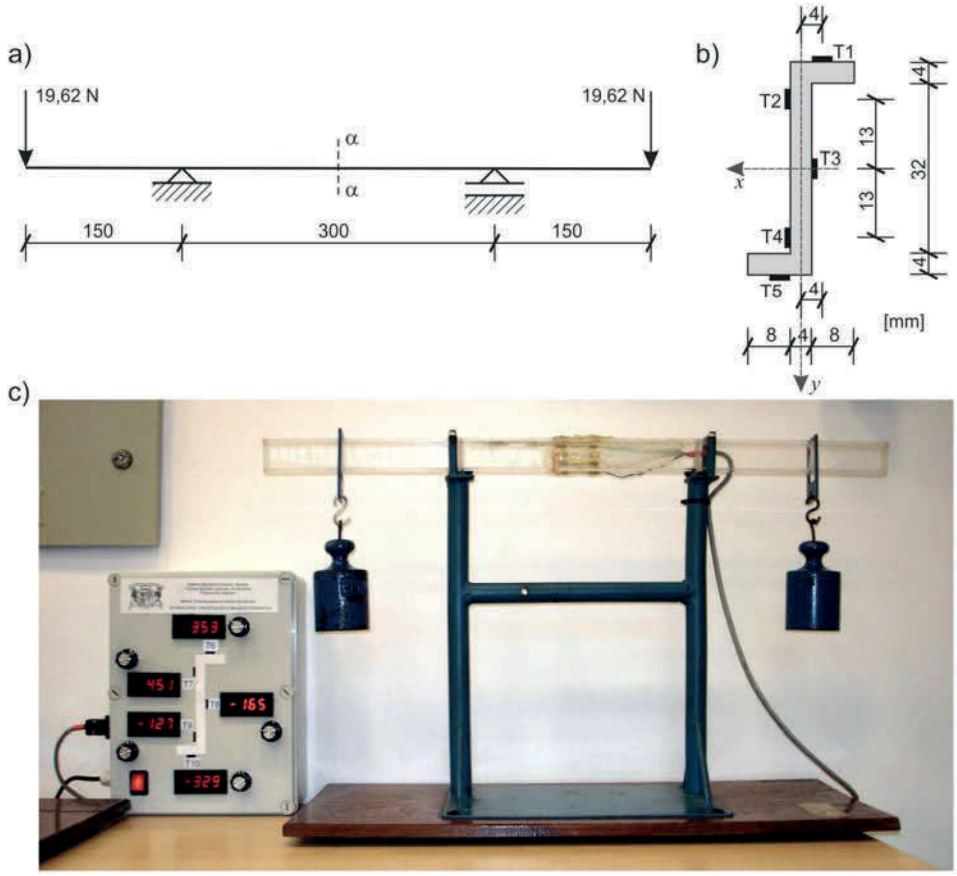
Tablica 4.1

Tabela pomiarowa

Tensometr	I pomiar			II pomiar			III pomiar			$\Delta\varepsilon_{śr}$
	OP	OK	$\Delta\varepsilon$	OP	OK	$\Delta\varepsilon$	OP	OK	$\Delta\varepsilon$	
T1										
T2										
T3										
T4										
T5										



Rys. 4.6. Belka o przekroju dwuteowym:
a) schemat statyczny; b) wymiary geometryczne; c) stanowisko pomiarowe



Rys. 4.7. Belka o przekroju zetowym:
a) schemat statyczny; b) wymiary geometryczne; c) stanowisko pomiarowe

4.4. Opracowanie wyników

Sprawozdanie powinno zawierać:

— opis badanych konstrukcji,
— cel i zakres badania,
— opis aparatury pomiarowej,
— wyniki pomiarów wpisane do tablicy 4.1,
— teoretyczne obliczenia rozkładu naprężeń normalnych w przekroju $\alpha - \alpha$,
— obliczenia naprężeń doświadczalnych (na podstawie pomierzonych odkształceń),
— wykresy naprężeń (z odniesieniem do przekrojów poszczególnych belek) wyznaczonych doświadczalnie oraz na podstawie obliczeń, porównanie uzyskanych wartości we wszystkich punktach pomiarowych z wynikami obliczeń.
— wnioski i uwagi własne.

Ćwiczenie 5

SKRĘCANIE SWOBODNE PRĘTA O PRZEKROJU PIERŚCIENIOWYM

5.1. Cel szczegółowy ćwiczenia

— przedstawienie różnic między pracą na skręcanie pręta o przekroju pierścieniowym otwartym i zamkniętym,
— porównanie doświadczalnego i teoretycznego kąta skręcenia.

5.2. Podstawy teoretyczne

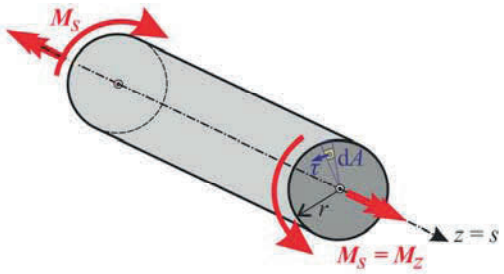
Ze skręcaniem swobodnym (rys. 5.1) mamy do czynienia, gdy w przekroju działa wyłącznie moment skręcający M_s. W takim przypadku w przekroju powstają jedynie naprężenia styczne. Przy skręcaniu swobodnym prętów o kołowych przekrojach poprzecznych stan przemieszczenia polega na sztywnym obrocie poszczególnych przekrojów (przekroje pozostają płaskie), a linie proste na powierzchni, równoległe do tworzącej walca pozostają proste (rys. 5.2). Wzajemny kąt skręcenia pomiędzy przekrojem *a* oraz *b* (rys. 5.3) można zapisać jako:

$$\varphi|_{a-b} = \int_a^b \mathrm{d}\varphi = \int_a^b \frac{M_s(z)}{GJ_0(z)}\mathrm{d}z\,, \tag{5.1}$$

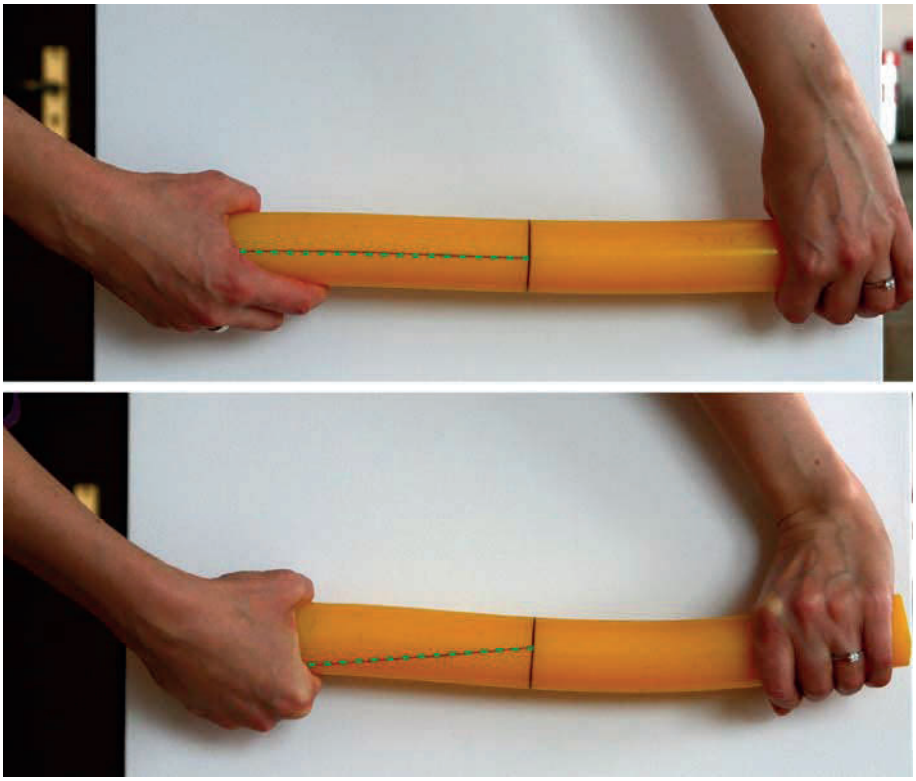
gdzie G oznacza moduł odkształcenia postaciowego (ścinania), natomiast J_0 jest biegunowym momentem bezwładności. W szczególnym przypadku, gdy M_s / GJ_0 = *const* otrzymujemy:

$$\varphi|_{a-b} = \frac{M_s\, l_{a-b}}{G\,J_0}\,, \tag{5.2}$$

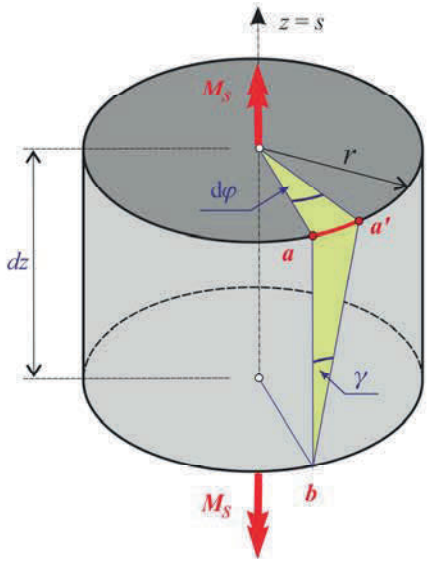
gdzie l_{a-b} jest odległością pomiędzy przekrojami *a* oraz *b*.



Rys. 5.1. Zobrazowanie skręcania swobodnego dla prętów o kołowych przekrojach poprzecznych



Rys. 5.2. Skręcanie pręta o przekroju okrągłym



Rys. 5.3. Zobrazowanie kąta skręcenia

W pręcie o przekroju kołowym o promieniu r biegunowy moment bezwładności wyznaczamy ze wzoru

$$J_0 = \frac{\pi r^4}{2}. \tag{5.3}$$

Z własności addytywności momentu biegunowego (jest to całka), biegunowy moment bezwładności dla przekroju rurowego o promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym r można wyznaczyć jako różnicę

$$J_0 = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2}. \tag{5.4}$$

Biegunowy moment bezwładności dla przekroju rurowego o promieniu linii środkowej przekroju r i grubości ścianki d otrzymuje się ze wzoru (5.4) podstawiając $R = r + d$

$$J_0 = \frac{\pi\left((r+d)^4 - r^4\right)}{2} = \frac{\pi}{2}\left[\left(\binom{4}{0}r^4 + \binom{4}{1}r^3 d + \binom{4}{2}r^2 d^2 + \binom{4}{3}r d^3 + \binom{4}{4}d^4\right) - r^4\right]. \tag{5.5}$$

Ponieważ d jest wartością małą, można pominąć wyrazy zawierające wyższe niż pierwsza potęga d. Wtedy uzyskuje się

$$J_0 = \frac{\pi\left((r+d)^4 - r^4\right)}{2} \approx \frac{\pi}{2}\binom{4}{1}r^3 d = \frac{\pi}{2}\frac{4!}{1!(4-1)!}r^3 d = 2\pi r^3 d. \tag{5.6}$$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie określany jest za pomocą wzoru

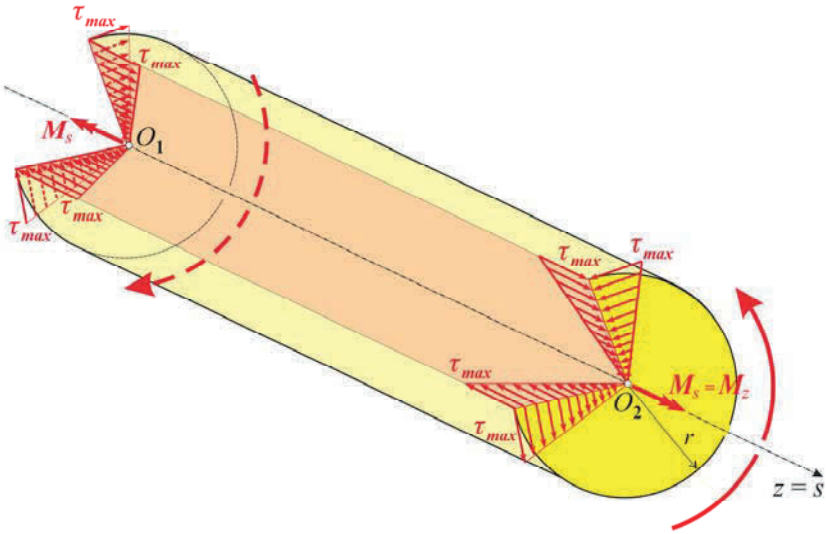
$$W_s = \frac{J_0}{\rho_{\max}} = \frac{J_0}{R}, \tag{5.7}$$

natomiast rozkład naprężeń stycznych i ich wartość ekstremalna opisane są, odpowiednio, wzorami

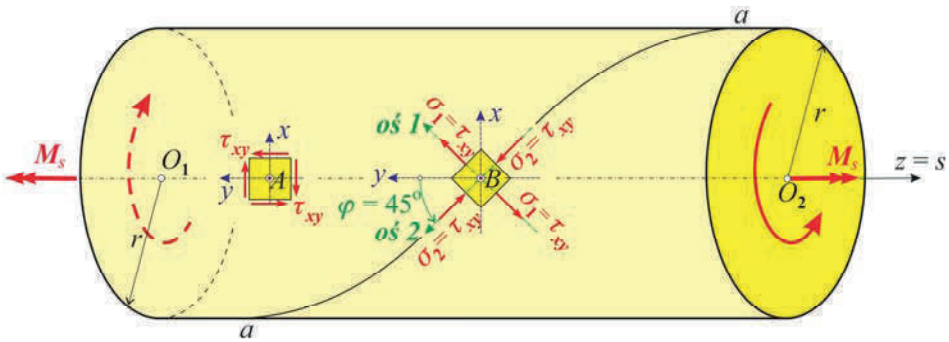
$$\tau(\rho) = \frac{M_s}{J_0}\rho, \tag{5.8}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_s} = \frac{M_s}{J_0}\rho_{\max}. \tag{5.9}$$

Jest to funkcja liniowa względem ρ. Interpretacja graficzna rozkładu naprężeń na powierzchni przekroju przedstawiona jest na rys. 5.4. W punkcie leżącym na osi pręta naprężenia są zerowe i rosną do wartości maksymalnej na obwodzie przekroju. Zgodnie z symetrią naprężeń stycznych muszą powstać także naprężenia styczne wzdłuż długości pręta. Fakt ten zobrazowano na rys. 5.4. Nie oznacza to jednak, że w skręcaniu swobodnym prętów o przekroju kołowym nie wystąpią naprężenia normalne. Rozpatrzmy bowiem punkt A leżący na pobocznicy (rys. 5.5). Panuje w nim stan czystego ścinania. Na podstawie koła Mohra w stanie tym naprężenia główne wynoszą odpowiednio $\sigma_1 = +\tau$ i $\sigma_2 = -\tau$, a ich kierunki przestawiono na rys. 5.5. Dodatnie naprężenia główne mogą spowodować powstawanie rys w prętach wykonanych z materiałów kruchych.



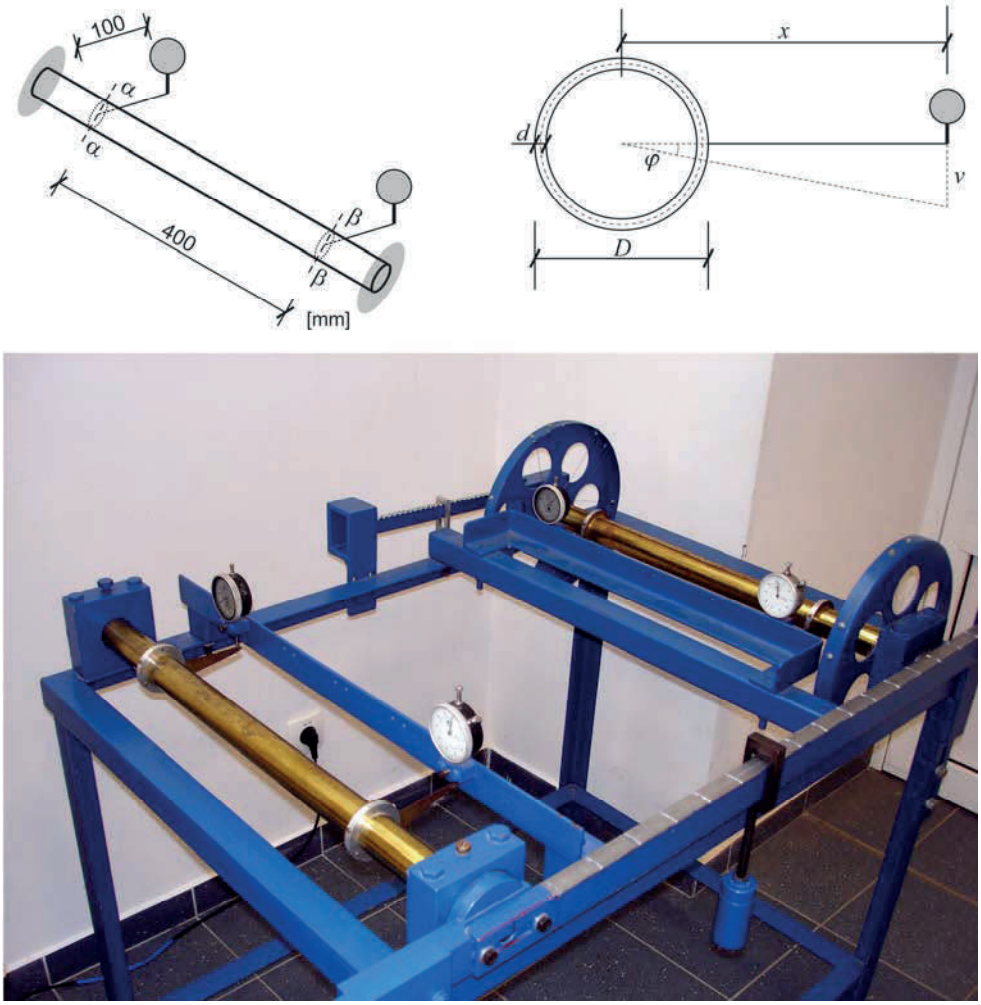
Rys. 5.4. Skręcanie pręta o przekroju okrągłym, rozkład naprężeń stycznych w przekrojach pręta



Rys. 5.5. Skręcanie pręta o przekroju okrągłym, rozkład naprężeń normalnych na powierzchni pręta

5.3. Przebieg ćwiczenia

Ćwiczenie jest przeprowadzane dla prętów wykonanych z mosiądzu (G = 35 000 MPa), pracujących w schemacie obustronnego utwierdzenia (rys. 5.6). W ćwiczeniu badane są dwa pręty: o przekroju pierścieniowym zamkniętym (średnica zewnętrzna D = 39 mm, grubość ścianki d = 1 mm) oraz o przekroju pierścieniowym otwartym (średnica zewnętrzna D = 40 mm, grubość ścianki d = 2 mm). Pręty są poddane działaniu stałego momentu skręcającego, przykładanego poprzez przesuwanie obciążnika wzdłuż ramienia (siła P = 9,81 N dla przekroju pierścieniowego zamkniętego oraz P = 0,981 N dla przekroju pierścieniowego otwartego). Pomiar względnego kąta skręcenia wykonywany jest pośrednio, przy użyciu dwóch czujników zegarowych (rys. 5.7) mierzących przemieszczenia v końców wsporników przymocowanych na sztywno do badanego pręta w przekrojach α oraz β (rys. 5.6).



Rys. 5.6. Pręty o przekroju pierścieniowym, poddane skręcaniu swobodnemu: schemat statyczny, wymiary geometryczne oraz stanowisko pomiarowe

W ramach ćwiczenia należy:

— wykonać pomiary geometrii prętów,
— obciążyć pręt momentem skręcającym M_1 poprzez przyłożenie siły P na ramieniu początkowym r_1,
— wykonać odczyty początkowe (OP) czujników zegarowych,
— obciążyć pręt momentem skręcającym M_2 poprzez przyłożenie siły P na ramieniu końcowym r_2,
— wykonać odczyty końcowe (OK) czujników zegarowych,
— odciążyć pręt.

Pomiar należy wykonać trzykrotnie, a wyniki zanotować w tablicy 5.1, wyliczając następnie przemieszczenie $v = \mathrm{OP} - \mathrm{OK}$ oraz względny kąt skręcenia φ pomiędzy przekrojem α i β, odpowiadający przyrostowi momentu skręcającego od M_1 do M_2 (z zależ-

ności geometrycznych pomiędzy v i φ, zakładając małe przemieszczenia). Po wykonaniu pomiarów należy wykonać obliczenia teoretyczne względnego kąta skręcenia dla obu prętów i porównać wyniki doświadczeń z obliczeniami teoretycznymi.

Rys. 5.7. Czujnik zegarowy do pomiaru przemieszczeń (pokazuje odczyt 6,81 mm)

Tablica 5.1

Tabela pomiarowa

Numer punktu	I pomiar			II pomiar			III pomiar			$v_{śr}$ [mm]
	OP	OK	v [mm]	OP	OK	v [mm]	OP	OK	v [mm]	
1										
2										

5.4. Opracowanie wyników

Sprawozdanie powinno zawierać:

— opis badanych konstrukcji,
— cel i zakres badania,
— opis aparatury pomiarowej,
— wyniki pomiarów wpisane do tablicy 5.1 oraz obliczenie względnego kąta skręcenia,
— obliczenie teoretyczne względnego kąta skręcenia,
— porównanie wyników doświadczeń z obliczeniami teoretycznymi,
— wnioski i uwagi własne.

ŚRODEK ZGINANIA

6.1. Cel szczegółowy ćwiczenia

— doświadczalne wyznaczenie położenia środka zginania przekroju kątowego i rurowego,
— porównanie doświadczalnego i teoretycznego położenia środka ścinania.

6.2. Podstawy teoretyczne

Zagadnienie środka zginania (inaczej: środka ścinania, środka skręcania, środka sił poprzecznych) dotyczy cienkościennych przekrojów poddanych zginaniu. W przypadku gdy obciążenie działające na belkę leży w płaszczyźnie zawierającej oś belki i jedną z głównych centralnych osi bezwładności przekroju, a oś ta jest jednocześnie osią symetrii przekroju mamy do czynienia ze stanem zginania ze ścinaniem. Możliwa jest też sytuacja, że główna centralna oś bezwładności nie jest osią symetrii przekroju poprzecznego belki. Wówczas przyłożone obciążenie powoduje nie tylko zginanie ze ścinaniem, ale także skręcanie.
Środek zginania jest to punkt w płaszczyźnie przekroju (cecha geometryczna), w którym winna działać siła tnąca, aby pręt był tylko zginany i ścinany. Z powyższych rozważań wynika, że środek zginania:
— dla przekrojów o jednej osi symetrii leży na tej osi,
— dla przekrojów o dwóch osiach symetrii pokrywa się ze środkiem ciężkości,
— dla przekrojów gwiaździstych pokrywa się ze środkiem gwiazdy.

Wyznaczenie teoretyczne środka zginania zilustrujemy na przykładzie przekroju ceowego pokazanego na rys. 6.1a. Obliczenia rozpoczynamy od wyznaczenia rozkładu naprężeń stycznych na półce dolnej, zgodnie z rys. 6.1b

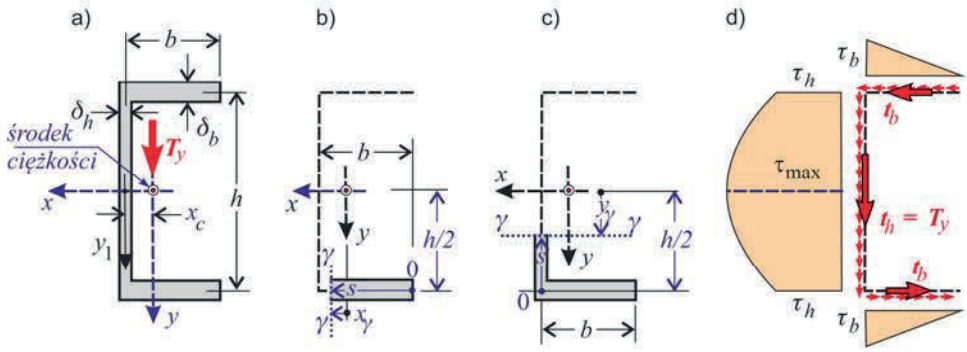
$$S_x^{\gamma} = \frac{1}{2} h \delta_b s \Rightarrow \tau_{\gamma} \delta_{\gamma} = -\frac{T_y h s \delta_b}{2 J_x} . \tag{6.1}$$

Dwie wartości charakterystyczne funkcji liniowej (6.1) występują na brzegu

$$\tau_b^{(0)} = \tau|_{s=0} = 0 , \tag{6.2}$$

oraz w narożu

$$\tau_b^{(1)} = \tau|_{s=b} = -\frac{T_y h b}{2 J_x} . \tag{6.3}$$



Rys. 6.1. Przekrój ceowy (a); wyznaczenie rozkładu naprężeń stycznych w półce dolnej (b); wyznaczenie rozkładu naprężeń stycznych w środniku (c); strumienie naprężeń stycznych w przekroju ceowym (d)

Kolejno przechodzimy do środnika (rys. 6.1c), gdzie moment statyczny obliczamy według wzoru

$$S_x^\gamma = S_x^{\text{półki}} + \int_{y_\gamma}^{h/2} \delta_h y \mathrm{d}y = \frac{1}{2} hb\delta_b + \frac{1}{8}\delta_h h^2 - \frac{1}{2}\delta_h (y_\gamma)^2 . \tag{6.4}$$

Ze wzoru (6.4) uzyskujemy wartości charakterystyczne paraboli drugiego stopnia względem h – w narożu

$$\tau_h^{(1)} = \tau\big|_{y_\gamma = \frac{h}{2}} = \frac{\delta_b}{\delta_h}\tau_b^{(1)} , \tag{6.5}$$

oraz wartość maksymalną dla całego przekroju

$$\tau_{\max} = \tau\big|_{y_\gamma = 0} = \tau_h^{(1)} - \frac{T_y h^2}{8J_x} . \tag{6.6}$$

Obliczenia półki górnej pomijamy ze względu na symetrię rozważanego przekroju względem osi y. W kolejnym kroku (rys. 6.1d) obliczamy wypadkowe naprężeń stycznych z półki

$$t_b = \frac{\tau_b^{(1)}\delta_b b}{2} = \frac{T_y hb^2\delta_b}{4J_x} , \tag{6.7}$$

oraz ze środnika, co wynika z równowagi sił pionowych

$$t_h = T_y . \tag{6.8}$$

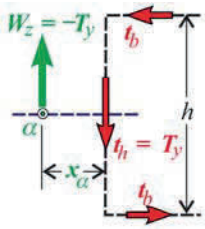
Następnie traktujemy układ sił (wypadkowe z naprężeń (6.7) i (6.8) oraz siłę tnącą T_y) jako płaski i zapisujemy warunek równowagi momentów od $\tau(s_\gamma)$ względem wybranego punktu α (rys. 6.2)

$$t_b h - t_h x_\alpha = 0 . \tag{6.9}$$

Poszukiwane położenie środka zginania wyznaczamy ze wzoru

$$x_\alpha = \frac{t_b h}{t_h} = \frac{h^2 b^2 \delta_b}{4J_x}, \tag{6.10}$$

gdzie x_α odmierzamy od linii środkowej środnika.



Rys. 6.2. Warunek równowagi naprężeń i położenie środka zginania

6.3. Przebieg ćwiczenia

Ćwiczenie jest przeprowadzane dla dwóch belek pracujących w schemacie jednostronnego utwierdzenia. W przeprowadzanym ćwiczeniu są badane dwie belki: o przekroju kątowym oraz rurowym (rys. 6.3). Obciążenie jest przykładane poprzez szalkę, przesuwaną w zakresie od –5 do 5 cm za pomocą pokrętła. Pomiar względnego kąta skręcenia jest wykonywany pośrednio, przy użyciu dwóch czujników zegarowych ustawionych w odległości a = 20 cm. Czujniki te mierzą przemieszczenia blachy czołowej przymocowanej na sztywno do czoła belki wspornikowej (por. rys. 6.4).

W ramach ćwiczenia należy:

— wykonać pomiary geometrii belek,
— ustawić szalkę bez obciążenia w punkcie o współrzędnej x = 0 cm,
— odczytać wskazania początkowe obu czujników zegarowych (O_L^{01}, O_P^{01}),
— obciążyć szalkę siłą 49,05 N,
— przesuwać szalkę w zakresie od x = –5 cm do x = 5 cm (z krokiem 1 cm), dla poszczególnych pozycji odczytać wskazania obu czujników zegarowych (O_L, O_P),
— odciążyć szalkę,
— ustawić szalkę bez obciążenia w punkcie o współrzędnej x = 0 cm,
— odczytać wskazania początkowe obu czujników zegarowych (O_L^{02}, O_P^{02}).

Wyniki pomiarów należy zanotować w tablicy 6.1, a następnie wyliczyć:

— średnie odczyty początkowe

$$O_L^0 = \frac{O_L^{01} + O_L^{02}}{2}, \quad O_P^0 = \frac{O_P^{01} + O_P^{02}}{2}, \tag{6.11}$$

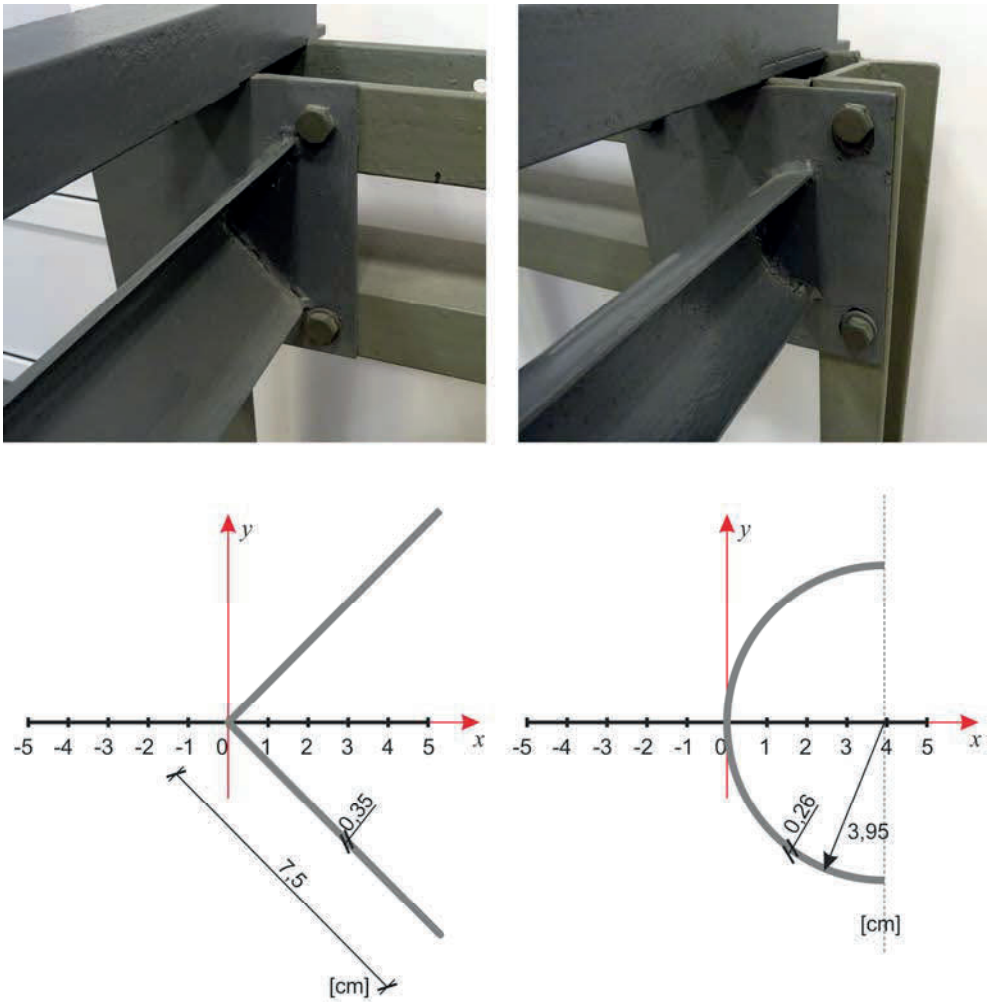
— ugięcia punktów v_L i v_P

$$v_L = O_L - O_L^0, \quad v_P = O_P - O_P^0, \tag{6.12}$$

— kąt skręcenia φ

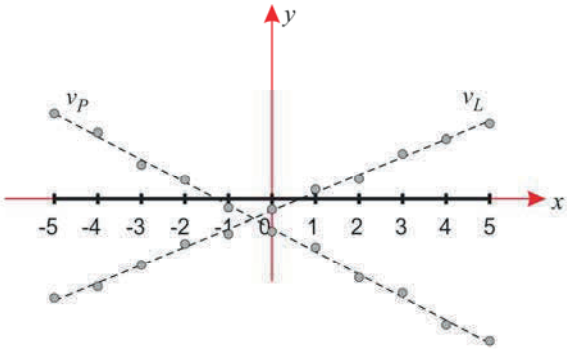
$$\varphi = \frac{v_L - v_P}{a}, \tag{6.13}$$

oraz narysować wykresy ugięć v_L i v_P dla poszczególnych współrzędnych x położenia szalki. Następnie na podstawie wykresu należy wyznaczyć środek zginania (rys. 6.5). Po wykonaniu pomiarów należy wykonać obliczenia teoretyczne położenia środków zginania dla obu przekrojów oraz obliczenia kąta skręcenia dla przypadku obciążenia siłą przyłożoną w środku ciężkości przekroju poprzecznego, a następnie porównać wyniki doświadczeń z obliczeniami teoretycznymi.



Rys. 6.3. Przekroje belek: kątowy i rurowy

Rys. 6.4. Stanowisko pomiarowe



Rys. 6.5. Wyznaczanie środka zginania

Tablica 6.1

Tabela pomiarowa

Położenie siły [mm]	Wskazania czujników		Ugięcie punktów		Kąt skręcenia φ
	lewego O_L	prawego O_P	lewego v_L	prawego v_P	
–50					
–40					
–30					
–20					
–10					
0					
10					
20					
30					
40					
50					

6.4. Opracowanie wyników

Sprawozdanie powinno zawierać:

— opis badanych konstrukcji,
— cel i zakres badania,
— opis aparatury pomiarowej,
— wyniki pomiarów wpisane do tablicy 6.1,
— wykresy umożliwiające wyznaczenie położenia środka zginania,
— teoretyczne obliczenia (wraz z wyprowadzeniami wzorów) środków zginania,
— porównanie wyników doświadczeń z obliczeniami teoretycznymi,
— obliczenie położenia środka ciężkości przekroju poprzecznego belki,
— pomiar kąta skręcenia dla przypadku obciążenia siłą przyłożoną w środku ciężkości przekroju poprzecznego,
— wnioski i uwagi własne.

Ćwiczenie 7

LINIA UGIĘCIA BELKI ZGINANEJ

7.1. Cel szczegółowy ćwiczenia

— doświadczalne wyznaczenie przemieszczeń,
— wyznaczanie linii ugięcia na podstawie danych pomiarowych,
— teoretyczne obliczenie przemieszczeń w sprężystym belkowym układzie statycznie wyznaczalnym,
— porównanie doświadczalnej i teoretycznej wartości przemieszczenia.

7.2. Podstawy teoretyczne

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie przemieszczeń w sprężystym układzie belkowym. Układy sprężyste, takie jak belki czy ramy są pewnym przybliżeniem (idealizacją) istniejących konstrukcji inżynierskich. Przybliżenie to jednak w zupełności wystarcza w praktyce projektowej, bowiem nakładane na wymiarowanie konstrukcji wymagania stanów granicznych nośności (SGN) i stanów granicznych użytkowalności (SGU) powodują, że mamy do czynienia ze sprężystą pracą materiału. Znajomość przemieszczeń w projektowanym układzie jest konieczna ze względu na spełnienie warunków SGU. W praktyce mamy do czynienia ze złożonymi układami statycznie niewyznaczalnymi, gdzie obliczanie przemieszczeń (a także sił wewnętrznych i naprężeń) realizowane jest za pomocą programów metody elementów skończonych. W przypadku prostych układów statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych znane są metody analityczne takie jak: metoda Eulera, metoda Mohra czy zastosowanie zasady prac wirtualnych.

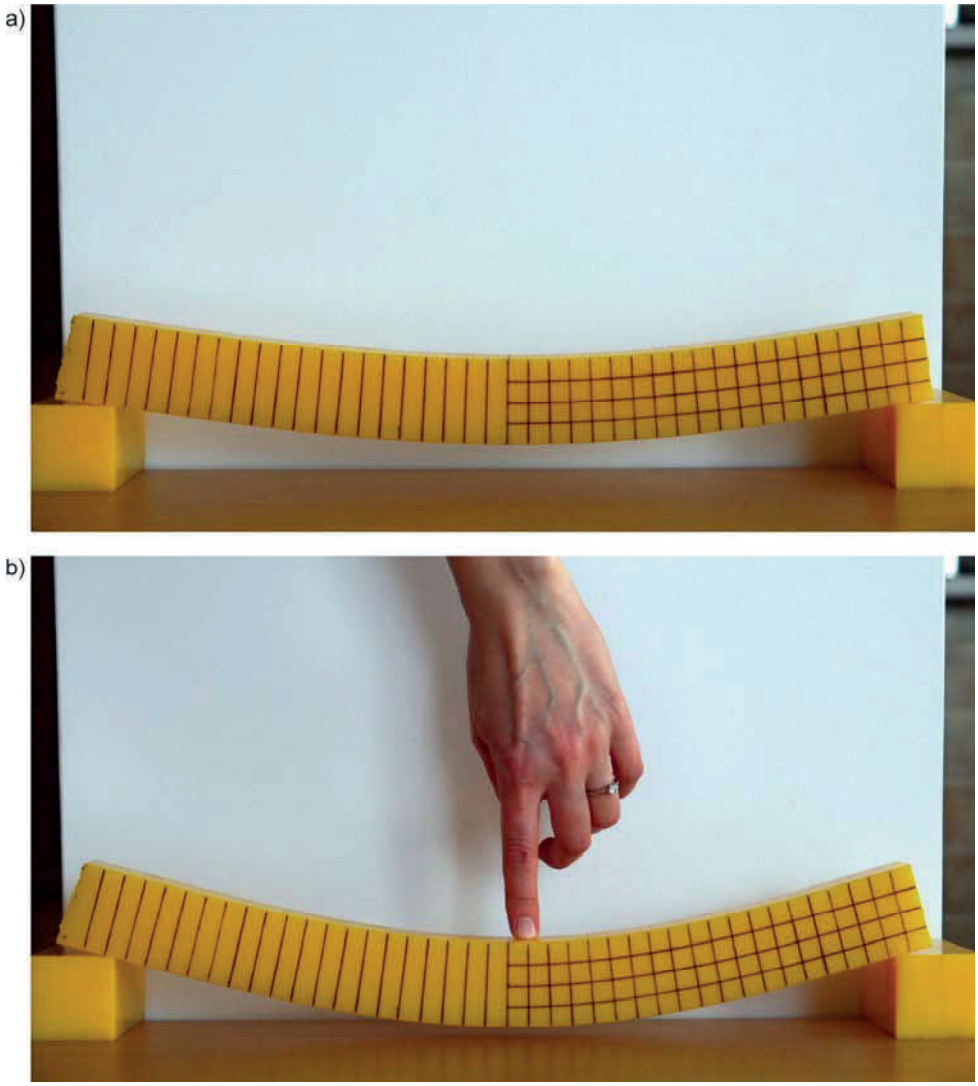
Nawiązując do krótkiego opracowania historycznego z ćwiczenia 4, rozwiązanie równań różniczkowych belek pryzmatycznych przypisuje się Eulerowi (1707–1783). Euler przyjął wynik Jakuba Bernoulliego o proporcjonalności krzywizny do momentu zginającego i zastosował do rozwiązania metody rachunku wariacyjnego. Otrzymał w ten sposób równanie różniczkowe ugięcia belki utwierdzonej na jednym brzegu i obciążonej siłą skupioną na drugim brzegu, zapisane jako

$$v = \frac{Pl^3}{3C} . \tag{7.1}$$

Warto odnotować, że równanie (7.1) zawiera pewną stałą C. Dziś wiemy, że jest to sztywność giętna belki EJ. Jednak, jak wynika z wprowadzenia do ćwiczenia 3, termin modułu sprężystości wprowadził Young (1773–1829), który urodził się 10 lat przed śmiercią Eulera. Euler nie posługiwał się więc modułem sprężystości. Znaną nam postać równania, zawierającą sztywność giętną, otrzymał Saint-Venant (1797–1886). Euler udowodnił

także, że w przypadku belki obciążonej ciężarem własnym lub obciążeniem hydrostatycznym stosowne równanie różniczkowe linii ugięcia belki będzie zawierało pochodne czwartego rzędu.

Celem niniejszego ćwiczenia jest wyznaczenie przemieszczeń w belce statycznie wyznaczalnej, a następnie porównanie wyników doświadczalnych z otrzymanymi za pomocą metody Eulera i Mohra. Obie metody korzystają bezpośrednio z funkcji momentów zginających $M_x(z)$, którą zapisujemy jak na kursie Mechaniki Ogólnej. Jeśli trzeba, określenie funkcji $M_x(z)$ przeprowadza się dla wygodnie dobranych podprzedziałów na długości belki. Należy zauważyć, że w rozważaniach ciągle posługujemy się hipotezą płaskich przekrojów (zob. rys. 7.1).



Rys. 7.1. Ilustracja hipotezy płaskich przekrojów podczas zginania belki:
a) ugięcie od ciężaru własnego; b) ugięcie od ciężaru własnego i siły skupionej

W metodzie Eulera, w wariancie zapisanym dla układów statycznie wyznaczalnych, funkcję przemieszczeń pionowych $v(z)$ punktu osi belki uzyskuje się rozwiązując równanie

$$v'' = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} . \tag{7.2}$$

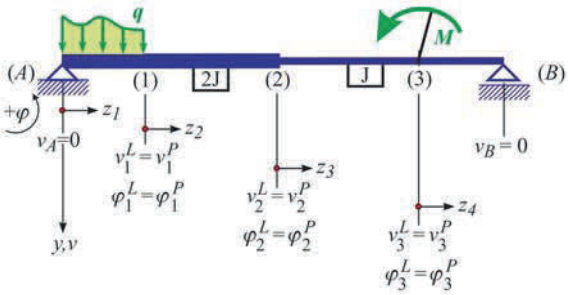
Rozwiązanie równania (7.2) polega na bezpośrednim całkowaniu z wprowadzeniem stałych całkowania, które określa się na podstawie warunków brzegowych

$$v'' = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} = \mathbf{f}(z) , \tag{7.3}$$

$$v' = \int \mathbf{f}(z) dz + C_1 , \tag{7.4}$$

$$v = \int \left[\int \mathbf{f}(z) dz \right] dz + C_1 z + C_2 . \tag{7.5}$$

Równanie (7.4) interpretuje się jako kąt obrotu prostej stycznej do osi belki $v' = -\mathrm{tg}\varphi_x \cong -\varphi_x$. Jeśli $\mathbf{f}(z)$ ma odcinkowo różne postaci analityczne, wynikające z przebiegu wykresu momentów zginających, wtedy całkowanie przeprowadza się w podprzedziałach (zob. rys. 7.2). Należy mieć wtedy na uwadze odpowiednie warunki ciągłości funkcji przemieszczeń $v(z)$ i jej pochodnej $v'(z)$. Jak wspomniano, przedziały do określania funkcji $M_x(z)$ dobiera się dowolnie, tak aby łatwo było zapisać postać funkcji. Przy zmianie zwrotu osi $(z = -\bar{z})$ należy uwzględnić, że przyrównując na brzegach przedziału wartości funkcji nieparzystych zmieniamy znak na przeciwny tj. $v'(\cong -\varphi_x)$.



Rys. 7.2. Zobrazowanie zasady uzgadniania stałych całkowania w równaniu Eulera linii ugięcia belki

W metodzie Mohra wyznaczamy wartości przemieszczeń i kątów obrotu stycznej w wybranych punktach belki tzn. nie zapisujemy funkcji $v(z)$ i $v'(z)$, lecz obliczamy ich wartości dla ustalonego $z = z^*$. Metoda ta jest efektywna do obliczania ugięć w układach statycznie wyznaczalnych.

Przed przystąpieniem do obliczeń należy wyznaczyć wykres momentów zginających w rozpatrywanym zadaniu. Następnie wprowadza się tzw. schemat zastępczy, w którym dokonuje się zamiany względem schematu wyjściowego warunków brzegowych (zob. rys. 7.3). Tak powstałą belkę obciąża się obciążeniem wtórnym

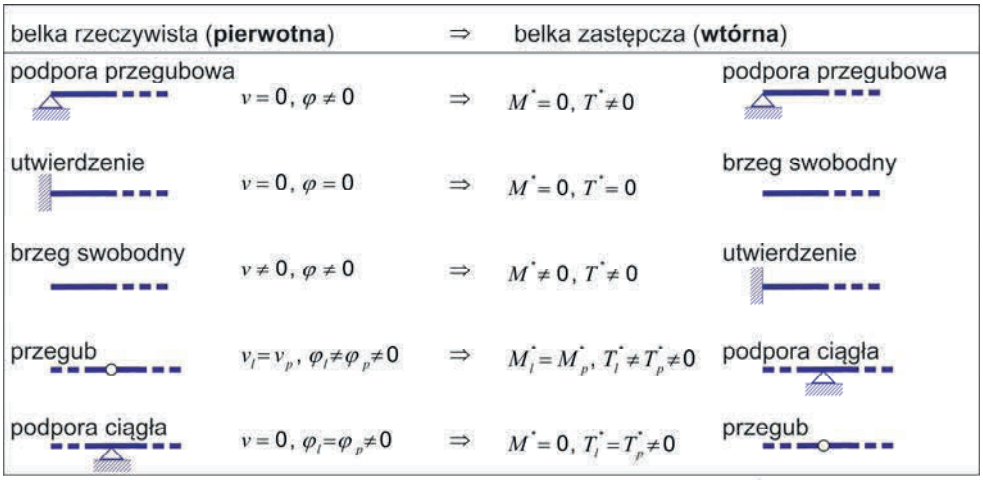
$$q_y^* \equiv \frac{M_x}{EJ_x} . \tag{7.6}$$

Jeżeli wykres momentów M_x miał dodatnie rzędne, to strzałki obciążenia kierujemy w dół, w przeciwnym przypadku kierujemy je do góry, pamiętając o wynikającej z równania (7.6) konieczności podzielenia rzędnych wykresu momentów przez sztywność giętną belki w danym przedziale. W tak powstałym układzie wyznaczamy wartości sił tnących T_y^* i momentów zginających M_x^* w ustalonych punktach $z = z^*$. Wartości te interpretujemy jako

$$T_y^* \equiv v' \ (\cong -\varphi_x) \ - \text{kąty obrotu stycznej do przekroju w punkcie } z = z^*, \tag{7.7}$$

$$M_x^* \equiv v \ - \text{ugięcia w punkcie } z = z^*. \tag{7.8}$$

Metoda Mohra może służyć więc jako sprawdzenie obliczeń wykonanych za pomocą metody Eulera. Należy jednak mieć na uwadze, że obie metody wymagają poprawnie narysowanego wykresu momentów zginających.



Rys. 7.3. Metoda Mohra, zobrazowanie reguł zamiany warunków brzegowych

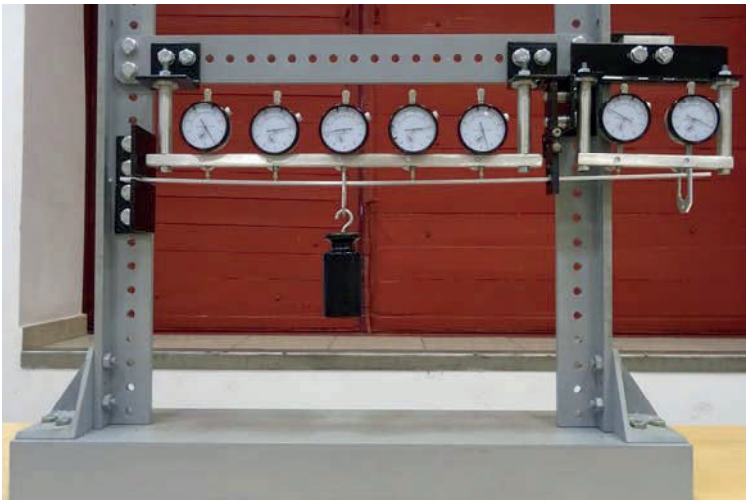
7.3. Przebieg ćwiczenia

Pomiar ugięć jest wykonywany na przykładzie belki swobodnie podpartej (rys. 7.4) z przewieszeniem. Belka ma przekrój prostokątny o wymiarach 20 mm × 4 mm i jest wykonana z aluminium (E = 70 GPa). Na belkę działa obciążenie skupione P_1 lub P_2, przykładane w trzech schematach obciążenia pokazanych na rys. 7.5 (schemat I: siła P_1, schemat II: siła P_2, schemat III: siła $P_1 + P_2$). Pomiar ugięć jest wykonywany przy użyciu czujników zegarowych, zamocowanych w punktach pomiarowych od 1 do 7.

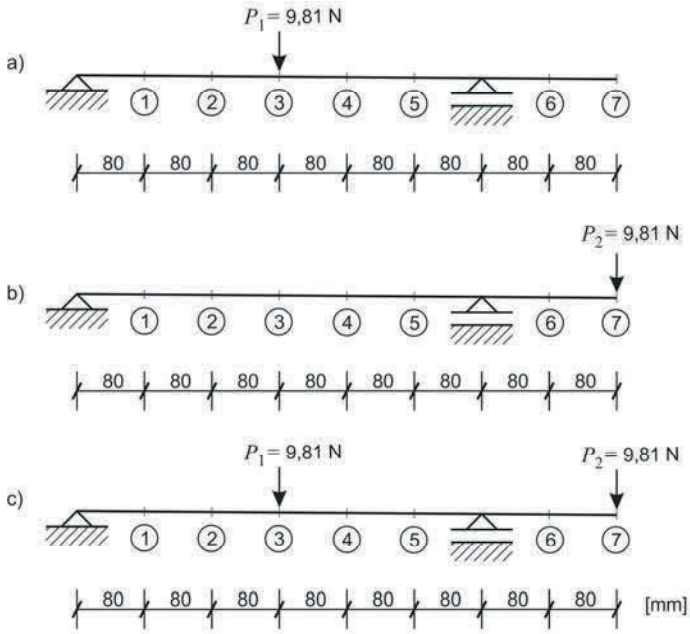
W ramach ćwiczenia należy:

— wykonać pomiary geometrii,
— wykonać odczyty początkowe (OP) czujników zegarowych,
— obciążyć belkę,
— wykonać odczyty końcowe (OK) czujników zegarowych,
— odciążyć belkę.

Wyniki należy zanotować w tablicy 7.1, a następnie wyliczyć przemieszczenia jako $v = \mathrm{OP} - \mathrm{OK}$. Pomiar należy wykonać trzykrotnie, a następnie wyliczyć wartości średnie przemieszczeń. Po przeprowadzeniu pomiarów należy wykonać obliczenia teoretyczne przemieszczeń poszczególnych punktów i porównać wyniki doświadczeń z obliczeniami teoretycznymi.



Rys. 7.4. Stanowisko pomiarowe



Rys. 7.5. Schemat statyczny belki swobodnie podpartej wraz ze schematami obciążenia: a) schemat I; b) schemat II; c) schemat III

Tablica 7.1

Tabela pomiarowa

Numer punktu	I pomiar			II pomiar			III pomiar			$v_{śr}$ [mm]
	OP	OK	v [mm]	OP	OK	v [mm]	OP	OK	v [mm]	
1										
2										
3										
4										
5										
6										

7.4. Opracowanie wyników

Sprawozdanie powinno zawierać:

— opis badanych konstrukcji,
— cel i zakres badania,
— opis aparatury pomiarowej,
— wyniki pomiarów wpisane do tablicy 7.1,
— rysunek linii ugięcia,
— obliczenia teoretyczne: dla każdego z schematów obciążenia zapisanie równań linii ugięcia oraz obliczenie przemieszczenia wybranego punktu za pomocą metody Eulera i Mohra,
— porównanie obliczonych i pomierzonych wartości,
— wnioski i uwagi własne.

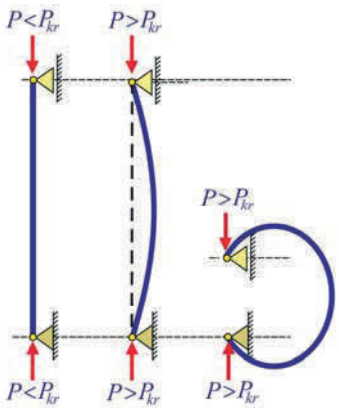
STATECZNOŚĆ PRĘTÓW

8.1. Cel szczegółowy ćwiczenia

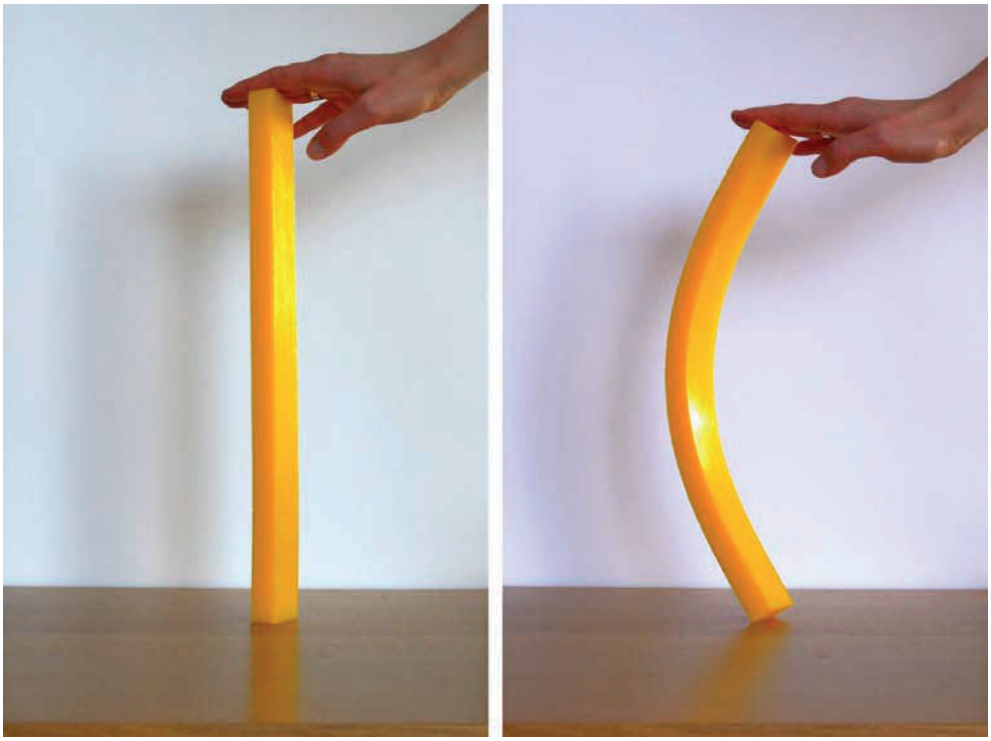
— przedstawienie różnic między postaciami wyboczenia dla prętów o różnych warunkach podparcia,
— doświadczalne wyznaczenie zależności między siłą ściskającą a przemieszczeniem,
— porównanie doświadczalnej i teoretycznej wartości siły krytycznej.

8.2. Podstawy teoretyczne

Projektowanie elementów ściskanych wg SGN i SGU nie pozwala wykształtować w pełni „bezpiecznej" konstrukcji. Ściskane elementy konstrukcyjne takie jak słupy ram czy pręty kratownic płaskich i przestrzennych mogą bowiem stracić równowagę stateczną. Wiąże się to ze zmianą kształtu osi pręta (zob. rys. 8.1). Zjawisko to nazywamy wyboczeniem, a siłę ściskającą powodującą utratę stateczności nazywamy siłą krytyczną wyboczenia P_{kr}. Realizację doświadczalną zjawiska wyboczenia pręta o przekroju prostokątnym zobrazowano na rys. 8.2. Warto tu zwrócić uwagę na płaszczyznę wyboczenia, która jest prostopadła do osi mniejszego z momentów bezwładności testowanego przekroju.



Rys. 8.1. Ilustracja wyboczenia pręta ściskanego



Rys. 8.2. Realizacja doświadczalna wyboczenia pręta ściskanego

Z punktu widzenia konstrukcji jako całości wyboczenie jednego z elementów konstrukcyjnych może powodować konieczność wyłączenia jej z eksploatacji lub, co gorsza, katastrofę budowlaną. Konieczne jest zatem oszacowanie siły krytycznej. W ćwiczeniu skupimy się na wyznaczeniu tej siły w odniesieniu do pojedynczych elementów ściskanych. Zagadnienia stateczności ram i innych elementów konstrukcyjnych takich, jak na przykład powłoki, będą przedmiotem rozważań dalszych kursów.

W odniesieniu do pojedynczego pręta, wartość $n-$tej siły krytycznej oblicza się ze wzoru Eulera

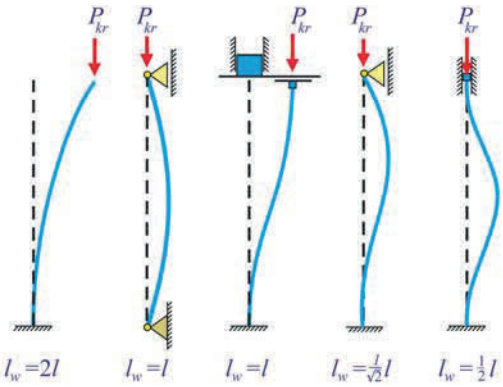
$$P_E = n^2 \frac{\pi^2 EJ}{L^2}. \tag{8.1}$$

Niezależnie od rozpatrywanej konstrukcji należy mieć świadomość, że zagadnienie wyboczenia jest zjawiskiem przestrzennym. To znaczy, że zmiana kształtu pręta (powłoki) formalnie może zachodzić w dowolnym kierunku przestrzeni. Odpowiednie przyjęcie warunków brzegowych w postaci na przykład podpór pośrednich, usztywnień czy warunków podparcia i symetrii może spowodować, że w wybranych kierunkach wyboczenie nie zajdzie wcale, albo pojawi się przy kolejnych siłach krytycznych tzn. $n > 1$. W odniesieniu do prętów wpływ ujęcia różnych warunków podparcia uwzględnia się poprzez zapisanie wzoru (8.1) w postaci

$$P_{kr} \equiv P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2}, \tag{8.2}$$

gdzie l_w jest tzw. długością wyboczeniową, zależną od sposobu zamocowania belki (rys. 8.3).

Należy mieć na uwadze, że powyższe rozważania dotyczą sprężystego układu idealnego. W praktyce mamy do czynienia z układami z tzw. imperfekcjami wywołanymi niedoskonałościami kształtu, niejednorodnością materiału czy mimośrodem przekazywania obciążenia. Temat ten będzie szerzej ujęty w innych kursach specjalistycznych poświęconych projektowaniu konstrukcji.



Rys. 8.3. Długość wyboczeniowa pojedynczego pręta

8.3. Przebieg ćwiczenia

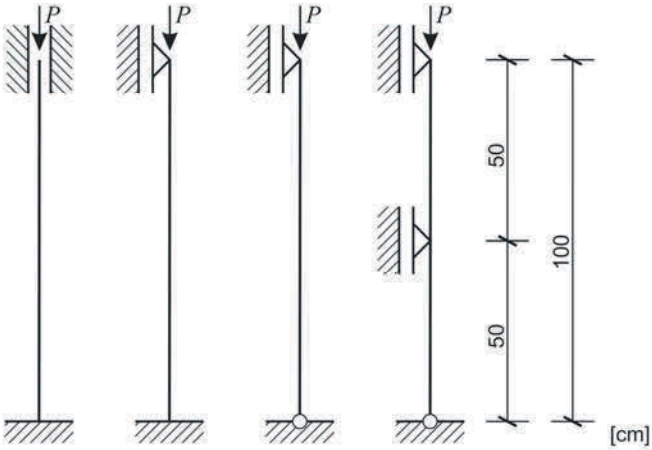
Ćwiczenie jest przeprowadzane na stanowisku (rys. 8.4) umożliwiającym ściskanie prętów o czterech różnych schematach statycznych (rys. 8.5). Badane pręty są wykonane ze stali (E = 210 GPa) i mają prostokątny przekrój poprzeczny o wymiarach 2,3 mm × 40 mm. Pomiar przemieszczeń u w cm jest dokonywany w środku wysokości za pomocą liniału. Siła ściskająca P jest przykładana za pośrednictwem dźwigni, poprzez układanie obciążników na szalce (rys. 8.6). Badane jest wyboczenie w zakresie sprężystym.

W ramach ćwiczenia należy:

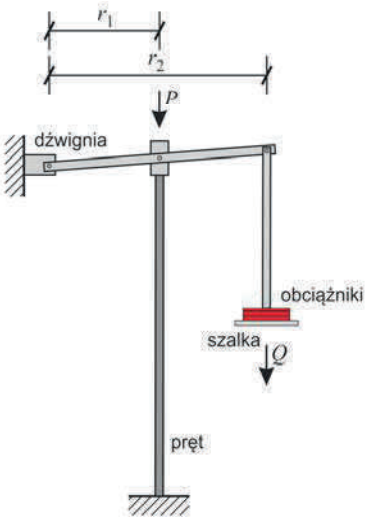
— wykonać pomiary geometrii belki oraz odległości r_1 i r_2,
— wykonać odczyt początkowy u_0 dla pręta nieobciążonego,
— obciążyć pręt kolejno ciężarami Q_1, Q_2, Q_3…, jednocześnie wykonując dla każdego z przyłożonych ciężarów odczyty przemieszczeń u_1, u_2, u_3 …,
— odciążyć pręt.

Pomiar należy wykonać trzykrotnie, notując jego wyniki w tablicy 8.1, a następnie wyliczyć średnie wartości przemieszczeń. Po wykonaniu pomiarów należy wykonać obliczenia teoretyczne wartości sił krytycznych dla wszystkich przypadków prętów oraz wykresy zależności $P - u$ wraz z zaznaczeniem wartości siły krytycznej (rys. 8.7).

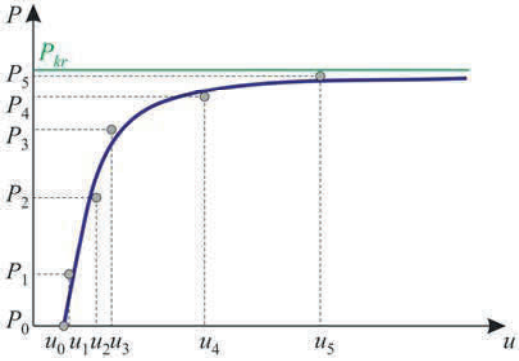
Rys. 8.4. Stanowisko pomiarowe



Rys. 8.5. Schematy statyczne badanych prętów



Rys. 8.6. Schemat dźwigni



Rys. 8.7. Wykres zależności $P - u$

Tablica 8.1

Tabela pomiarowa

Obciążenie szalki Q [N]	Siła ściskająca P [N]	I pomiar	II pomiar	III pomiar	$u_{śr}$ [cm]
		u [cm]	u [cm]	u [cm]	
$Q_0 = 0$	$P_0 = 0$				
Q_1	P_1				
Q_2	P_2				
Q_3	P_3				
Q_4	P_4				
Q_5	P_5				

8.4. Opracowanie wyników

Sprawozdanie powinno zawierać:

— opis badanych konstrukcji,
— cel i zakres badania,
— opis aparatury pomiarowej,
— schemat statyczny dźwigni zastosowanej w modelu doświadczalnym z wyprowadzeniem wzoru uzależniającego siłę ściskającą P od ciężaru obciążników układanych na szalkach Q,
— wyniki pomiarów wpisane do tablicy 8.1,
— teoretyczne obliczenia wartości sił krytycznych dla wszystkich badanych prętów,
— doświadczalne wykresy zależności $P-u$ wraz z naniesieniem wyliczonych wartości sił krytycznych, porównanie wyników doświadczeń z obliczeniami teoretycznymi,
— wnioski i uwagi własne.

NOŚNOŚĆ GRANICZNA

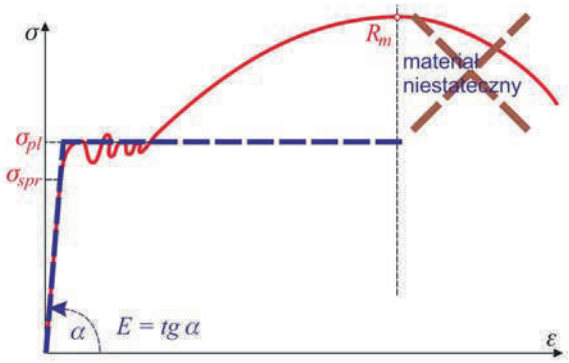
9.1. Cel szczegółowy ćwiczenia

— wyznaczenie maksymalnego momentu niszczącego,
— porównanie otrzymanego rezultatu z wynikiem otrzymanym dla ciała idealnie sprężysto-plastycznego.

9.2. Podstawy teoretyczne

Nośnością graniczną przekroju nazywamy maksymalną przekrojową siłę wewnętrzną, tj. siłę normalną, tnącą lub moment zginający, którą jest w stanie przenieść dany przekrój. Osiągnięcie przez siłę wartości granicznej wyczerpuje nośność przekroju i następuje nieograniczony wzrost odkształceń przy stałym obciążeniu. Proces ten nazywamy płynięciem. *Nośność graniczna przekroju* jest wielkością lokalną w tym sensie, że wyczerpanie nośności może, ale nie musi, powodować wyczerpania *nośności granicznej konstrukcji*, która jest wielkością globalną. O tym, czy tak się stanie, decyduje stopień statycznej niewyznaczalności. W ćwiczeniu analizujemy statycznie wyznaczalny element konstrukcyjny, pracujący w schemacie swobodnego podparcia.

W celu wyznaczenia teoretycznej wartości nośności granicznej przekroju zakładamy model ciała idealnie sprężysto-plastycznego. Oznacza to, że rzeczywistą krzywą rozciągania próbki stalowej *przybliżamy* za pomocą dwóch prostych (zob. rys. 9.1). Zakładamy stan zginania prostego w osiach głównych centralnych i materiał o jednakowej wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie.

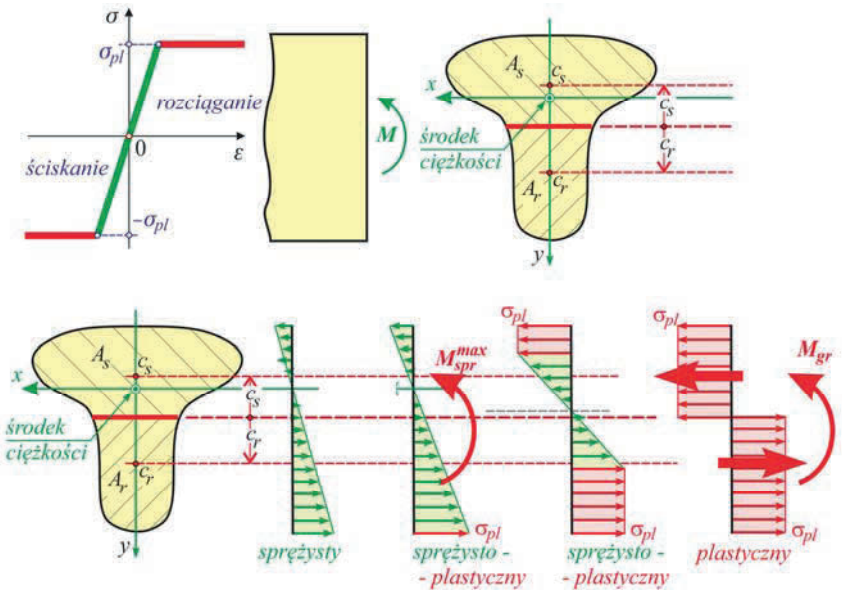


Rys. 9.1. Idealizacja krzywej rozciągania stali w modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznego

Przy tych założeniach mechanizm uplastycznienia polega na „wędrówce” osi obojętnej (rys. 9.2). Załóżmy, że obciążenie działające na belkę powoduje powstanie w wybranym przekroju momentu zginającego M i stowarzyszonego rozkładu naprężeń w stanie sprężystym. Następnie myślowo zwiększamy obciążenie. Przy pewnej jego wartości naprężenia ekstremalne w górnych (dolnych) punktach przekroju osiągną wartość σ_{pl}. Zgodnie z przyjętym modelem ciała idealnie sprężysto-plastycznego dochodzi do uplastycznienia przekroju w tym punkcie. Maksymalny moment sprężysty wynosi

$$M_{spr}^{\max} = \sigma_{pl} W_{spr} \,, \tag{9.1}$$

Gdzie W_{spr} jest sprężystym wskaźnikiem wytrzymałości. Dalsze zwiększanie obciążenia powoduje uplastycznianie w kolejnych punktach przekroju aż do wytworzenia się przegubu plastycznego.



Rys. 9.2. Zmiana położenia osi obojętnej w przekroju zginanym i przejście do stanu granicznego

Rozpatrujemy teraz przekrój w stanie całkowitego uplastycznienia (rys. 9.2). Wyznaczamy wypadkowe naprężeń i zapisujemy warunek równowagi

$$N \equiv \int_A \sigma \mathrm{d}A = 0 \Rightarrow -\sigma_{pl} A_s + \sigma_{pl} A_r = 0 \,. \tag{9.2}$$

W ten sposób uzyskuje się związek

$$A_s = A_r = \frac{A}{2} \,. \tag{9.3}$$

Drugi warunek równowagi zapisujemy dla momentów wypadkowych naprężeń, co prowadzi do wyrażenia na moment graniczny

$$M_{gr} \equiv \int_A \sigma y \mathrm{d}A = -\sigma_{pl} A_s (-c_s) + \sigma_{pl} A_r c_r = \tfrac{1}{2} A \sigma_{pl} (c_s + c_r) \,. \tag{9.4}$$

Wprowadzając pojęcie plastycznego wskaźnika wytrzymałości

$$W_{pl} = \frac{M_{gr}}{\sigma_{pl}} = \frac{A}{2}(c_s + c_r) = S_x^s + S_x^r, \tag{9.5}$$

wzór na moment graniczny (9.4) zapisać można w równoważnej postaci

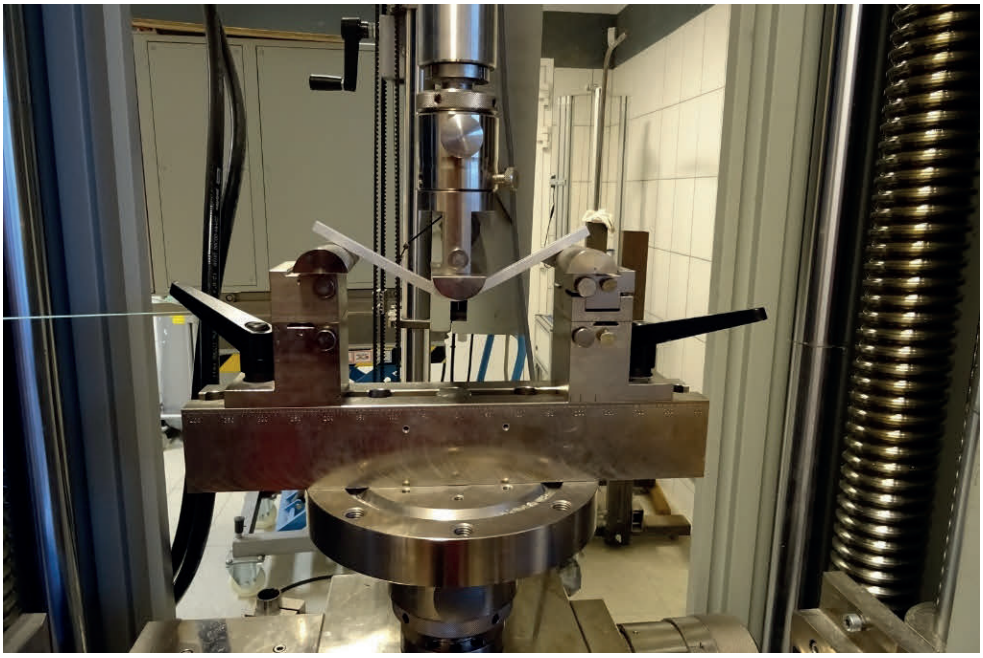
$$M_{gr} = \sigma_{pl} W_{pl}. \tag{9.6}$$

9.3. Przebieg ćwiczenia

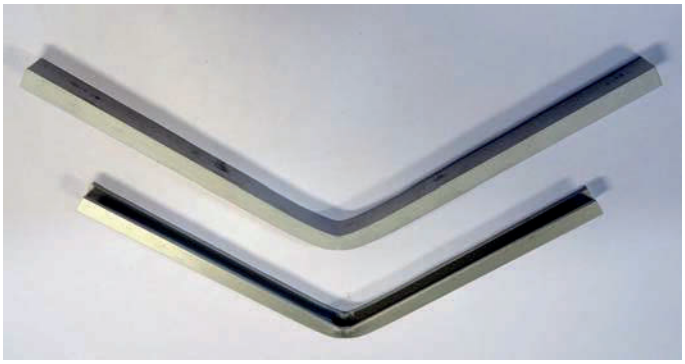
Badanie polega na przeprowadzeniu testu 3-punktowego zginania (rys. 9.3). Przedmiotem badań są elementy cienkościenne (np. o przekroju ceowym jak na rys. 9.4) pracujące w schemacie swobodnego podparcia. Próbka jest umieszczana w maszynie wytrzymałościowej, a następnie zginana aż do całkowitego uplastycznienia. Przyrost siły oraz przemieszczenia trawersy są rejestrowane przez maszynę wytrzymałościową.

W ramach ćwiczenia należy:

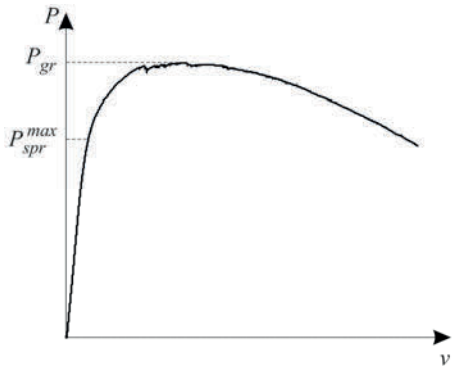
— wykonać pomiary geometrii próbki,
— umieścić próbkę w maszynie wytrzymałościowej, na stoliku do zginania,
— obciążyć próbkę do momentu osiągnięcia 80-procentowego spadku siły względem wartości maksymalnej,
— odciążyć próbkę,
— wyjąć próbkę z maszyny wytrzymałościowej.



Rys. 9.3. Próba 3-punktowego zginania



Rys. 9.4. Próbki o przekroju ceowym po badaniu: próbka ułożona środnikiem do góry oraz próbka ułożona środnikiem do dołu



Rys. 9.5. Wykres zależności $P - v$

9.4. Opracowanie wyników

Sprawozdanie powinno zawierać:

— cel i zakres badania,
— dane materiałowe i geometryczne belek, schemat statyczny,
— wykres roboczy zginania belek w układzie współrzędnych $P - v$ z oznaczeniem charakterystycznych punktów,
— wyznaczenie na postawie krzywej doświadczalnej maksymalnej siły w zakresie sprężystym $P_{spr}^{\max}$ oraz siły granicznej P_{gr},
— obliczenie na postawie krzywej doświadczalnej momentów zginających $M_{spr(d)}^{\max}$ oraz $M_{gr(d)}$ odpowiadających siłom $P_{spr}^{\max}$ oraz P_{gr},
— obliczenie wskaźników wytrzymałości W_{spr} oraz W_{pl},
— obliczenie granicy plastyczności σ_{pl} przy założeniu, że $M_{spr}^{\max} = M_{spr(d)}^{\max}$,
— obliczenie momentu granicznego M_{gr} dla ciała idealnie sprężysto-plastycznego.
— ocena poprawności przyjęcia dla badanego materiału modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznego,
— wnioski i uwagi własne.

LINIA ZWISU CIĘGNA

10.1. Cel szczegółowy ćwiczenia

— przedstawienie różnic w kształcie cięgna dla różnych schematów obciążenia,
— doświadczalne wyznaczenie siły poziomej w cięgnie.

10.2. Podstawy teoretyczne

Modelem fizycznym konstrukcji wiszących (wiotkich), np.: lin, łańcuchów, kabli czy want jest cięgno. Cięgno pracuje tylko na rozciąganie, jedyna siła wewnętrzna to siła normalna (styczna do osi cięgna). W klasycznym podejściu zakłada się, że cięgna są nierozciągliwe, tj. długość $L = const$. Zasadniczymi problemami w analizie statycznej cięgien są:
— wyznaczenie kształtu cięgna,
— wyznaczenie reakcji utrzymujących,
— wyznaczenie siły normalnej w cięgnie.

Rozważmy cięgno o małej strzałce zwisu, zawieszone na tej samej wysokości w punktach A i B, znajdujących się w odległości l (rys. 10.1). Na cięgno działa dowolne obciążenie pionowe z założeniem, że punkty przyłożenia obciążenia pionowego doznają jedynie przemieszczeń pionowych, tj. ich przestrzenna linia działania nie ulega zmianie. Z porównania równań tak samo obciążonych układów, tzn.: momentów belki swobodnie podpartej

$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = -q \tag{10.1}$$

i postaci przybliżonej linii zwisu cięgna

$$H\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = -q\,, \tag{10.2}$$

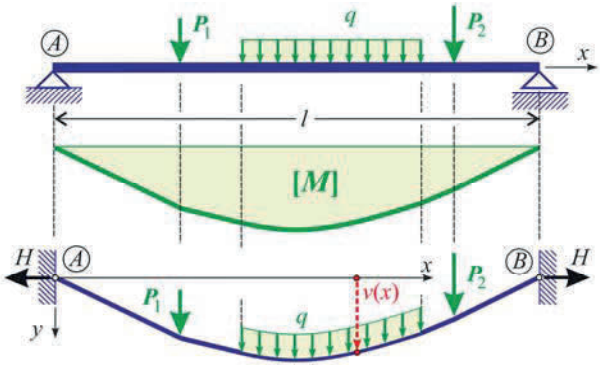
można otrzymać związek

$$Hv = [M]\,, \tag{10.3}$$

umożliwiający obliczenie linii zwisu i jej pochodnej jako

$$v = \frac{[M]}{H}\,,\ v' = \frac{1}{H}\frac{\mathrm{d}[M]}{\mathrm{d}x} = \frac{[T]}{H}\,, \tag{10.4}$$

gdzie $[M]$ oraz $[T]$ są funkcjami momentów zginających oraz sił tnących dla belki swobodnie podartej obciążonej jak cięgno natomiast H oznacza składową poziomą siły normalnej w cięgnie.



Rys. 10.1. Cięgno o małym zwisie pod działaniem obciążenia pionowego

Wykorzystując związek na długość cięgna

$$L = l + \tfrac{1}{2}\int_0^l (v')^2\,\mathrm{d}x = l + \frac{1}{2H^2}\int_0^l [T]^2\,\mathrm{d}x\,, \tag{10.5}$$

można obliczyć wartość siły poziomej H

$$H = \sqrt{\frac{1}{2(L-l)}\int_0^l [T]^2\,\mathrm{d}x}\,. \tag{10.6}$$

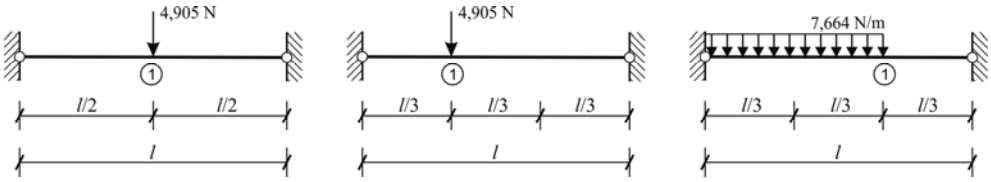
10.3. Przebieg ćwiczenia

Przedmiotem badań jest cięgno łańcuchowe o długości L = 100 cm. Odległość między podporami wynosi l = 96 cm. Łańcuch poddany jest działaniu trzech schematów obciążeń, jak na rys. 10.2. Obciążanie jest realizowane za pomocą odważników o masie 50 g. Pomiar rzędnych linii zwisu jest wykonywany przy użyciu liniału.

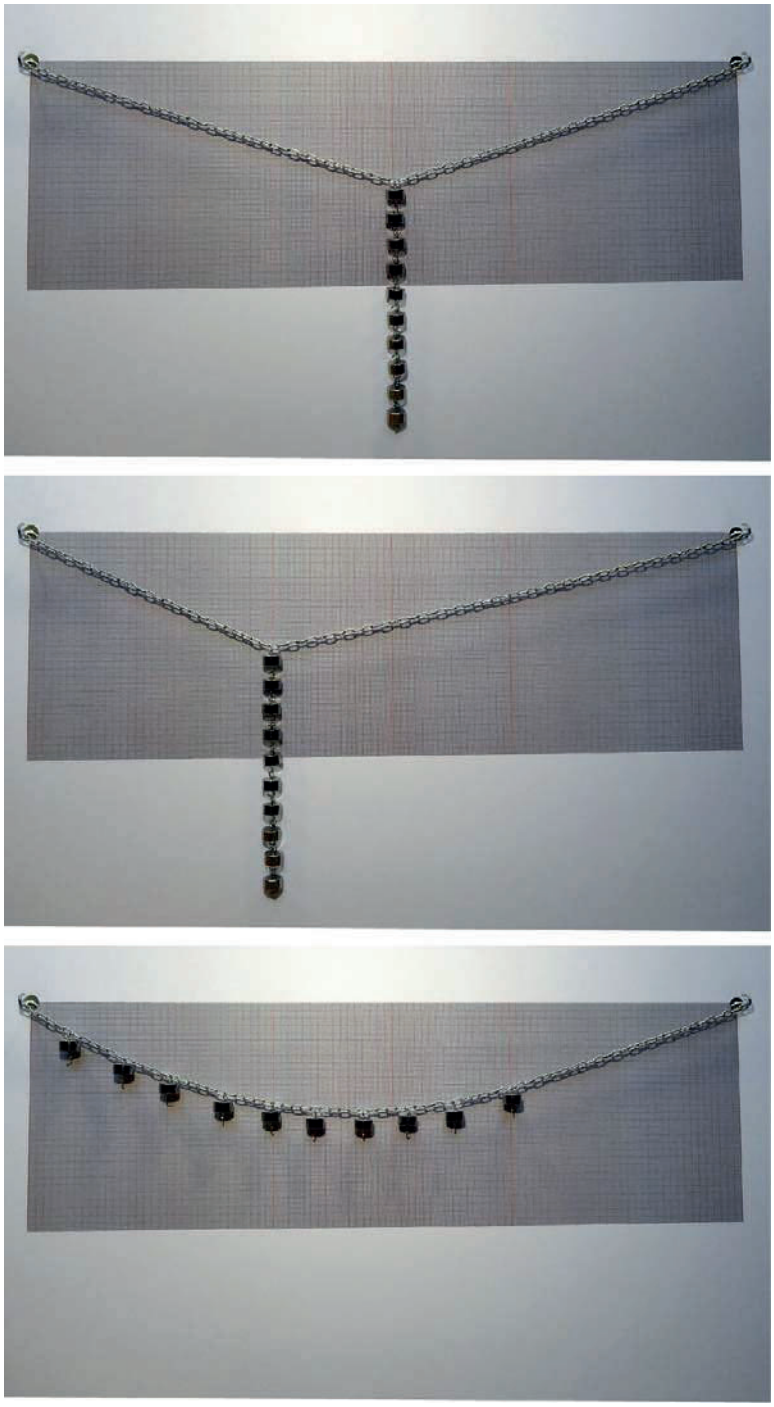
W ramach ćwiczenia należy:

— obciążyć łańcuch zgodnie ze schematami obciążenia I, II, III (rys. 10.2, rys. 10.3),
— pomierzyć rzędną linii zwisu w punkcie nr 1,
— odciążyć łańcuch.

Wyniki zanotować w tablicy 10.1. Po wykonaniu pomiarów należy naszkicować linię zwisu oraz wykonać obliczenia teoretyczne siły poziomej H.



Rys. 10.2. Schematy obciążenia cięgna: I, II, III



Rys. 10.3. Realizacja doświadczalna obciążania cięgna łańcuchowego w schematach I, II, III

Tablica 10.1

Tabela pomiarowa

Numer punktu	I schemat obciążenia	II schemat obciążenia	III schemat obciążenia
	v [mm]	v [mm]	v [mm]
1			

10.4. Opracowanie wyników

Sprawozdanie powinno zawierać:

— opis badanych konstrukcji,
— cel i zakres badania,
— opis aparatury pomiarowej,
— wyniki pomiarów rzędnej linii zwisu wpisane do tablicy 10.1,
— rysunek linii zwisu cięgna,
— obliczenie siły H ze wzoru (10.3) z wykorzystaniem pomierzonej rzędnej linii zwisu oraz ze wzoru (10.6) na podstawie obliczeń teoretycznych, porównanie obu wartości,
— wnioski i uwagi własne.

Załącznik A

METODY ANALIZY WYNIKÓW DOŚWIADCZALNYCH

A.1. Błędy pomiarów

Celem badań przeprowadzonych w ramach ćwiczeń omówionych w niniejszej książce jest weryfikacja podstawowych wzorów i założeń wytrzymałości materiałów. Chcielibyśmy zatem odnieść wynik uzyskany doświadczalnie do pewnego rozwiązania odniesienia, którym będzie wynik obliczeń teoretycznych, uzyskany w ramach przyjętych założeń. W tym celu możemy zdefiniować dwa pojęcia, tj. błędu bezwzględnego i względnego. Błąd bezwzględny jest różnicą pomiędzy wartością pomierzoną (doświadczalną) y_d a wartością obliczoną (teoretyczną) y_t

$$\Delta y = \left| y_d - y_t \right| . \tag{A.1}$$

Błąd względny natomiast definiujemy jako iloraz błędu bezwzględnego i wartości teoretycznej. Jest to zatem wielkość bezwymiarowa

$$e = \frac{\Delta y}{y_t} = \frac{\left| y_d - y_t \right|}{y_t} , \tag{A.2}$$

która może być także wyrażona w procentach

$$e = \frac{\Delta y}{y_t} = \frac{\left| y_d - y_t \right|}{y_t} \cdot 100\% . \tag{A.3}$$

A.2. Analiza statystyczna danych pomiarowych

Analiza statystyczna danych pomiarowych ma na celu określenie ich rozkładu (por. Sharpe 2008, Ochelski 2004). Załóżmy, że pomierzyliśmy ugięcie belki wspornikowej na jej swobodnym końcu. Próba ta została powtórzona 20 razy. Dysponujemy zatem zbiorem danych pomiarowych (y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, gdzie n jest liczbą pomiarów (tablica A.1).

Podstawową miarą głównych wartości jest średnia z n przeprowadzonych prób

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i , \tag{A.4}$$

gdzie y_i oznacza wartość pomierzoną w i-tej próbie.

Oprócz miary głównej można zdefiniować różne miary rozrzutu, np. odchylenie standardowe, wariancję czy też współczynnik zmienności. Miary te ujmują stopień rozproszenia wyników względem średniej arytmetycznej. Wariancję dla zbioru ograniczonego definiujemy jako

$$s_y^2 = \frac{S_t}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 , \tag{A.5}$$

gdzie S_t jest sumą kwadratów odchyleń wartości y_i od wartości średniej $\overline{y}$

$$S_t = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 . \tag{A.6}$$

Odchylenie standardowe jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji

$$s_y = \sqrt{\frac{S_t}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2} \tag{A.7}$$

i określa ono bezwzględne zróżnicowanie mierzonych wartości. Aby porównać rozrzut wyników z ich wartością średnią, można wykorzystać współczynnik zmienności

$$V = \frac{s_y}{\overline{y}} \cdot 100\% . \tag{A.8}$$

W tablicy A.1 podano dane pomiarów ugięć, uszeregowane od wartości najmniejszej do największej. Obliczenia miary głównej i miar rozrzutu podano w tablicy A.2.

Tablica A.1

Ugięcia belki wspornikowej

Numer pomiaru	Ugięcie [mm]
1	194,9
2	196,2
3	197,4
4	197,8
5	198,1
6	198,3
7	199,2
8	199,7
9	200,2
10	200,4
11	200,5
12	200,8
13	201,3
14	201,9
15	202,1
16	202,8
17	203,1
18	204,3
19	205,6
20	206,9

Tablica A.2

Miara główne i miary rozrzutu dla danych z tablicy A.1

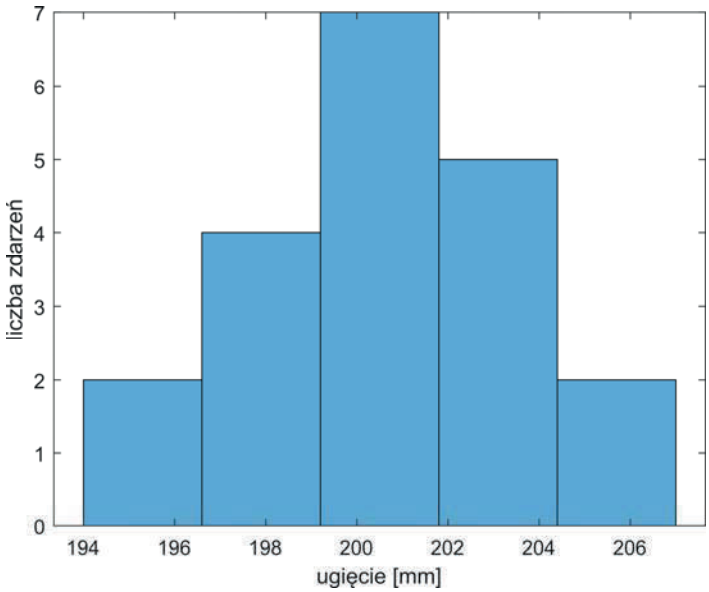
Miara	Wartość
Średnia	200,575 [mm]
Wariancja	9,3883 [mm^2]
Odchylenie standardowe	3,064 [mm]
Współczynnik zmienności	1,53%

Dane pomiarowe przedstawione w tablicy A.1 można przedstawić graficznie w postaci histogramu (rys. A.1), dającego informację o częstości występowania danej wartości. W tablicy A.3 podzielono dane pomiarowe na 5 grup, o szerokości 2,6 mm.

Tablica A.3

Rozkład częstości danych z tablicy A.1

Wartości na brzegach przedziałów [mm]	Liczba wyników	Częstość względna [%]
194,0–196,6	2	5
196,6–199,2	4	20
199,2–201,8	7	35
201,8–204,4	5	35
204,4–207,0	2	5



Rys. A.1. Histogram

A.3. Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów

W wielu doświadczeniach z zakresu wytrzymałości materiałów dokonuje się pomiaru jednej wielkości (np. y_i), która może zależeć od zmiennej niezależnej x_i. Aby opisać zależność między tymi zmiennymi można w dane wpisać pewną funkcję aproksymującą, na przykład wielomianową (por. Chapra i Canale 1985, Ochelski 2004).

Aproksymacja liniowa polega na wpasowaniu prostej o równaniu

$$y = a_0 + a_1 x + e \tag{A.9}$$

w zbiór danych pomiarowych (x_i, y_i), i = 1, 2, …, n, gdzie n jest liczbą punktów pomiarowych, zaś e oznacza błąd między wartością pomierzonej funkcji a wartością funkcji aproksymującej.

W metodzie najmniejszych kwadratów przyjmujemy kryterium minimalizacji sumy kwadratów błędu e

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i \right)^2 \to \min. \tag{A.10}$$

Aby wyznaczyć wartości współczynników a_0 oraz a_1, należy obliczyć pochodne z wyrażenia S_r i przyrównać ich wartości do zera

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_r}{\partial a_0} &= -2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i \right) = 0, \\ \frac{\partial S_r}{\partial a_1} &= -2\sum_{i=1}^{n} \left[\left(y_i - a_0 - a_1 x_i \right) x_i \right] = 0. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Przekształcając układ równań (A.11) do postaci

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 &= 0, \end{aligned} \tag{A.12}$$

i uwzględniając zależność

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 = n a_0, \tag{A.13}$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} n a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i + \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i. \end{aligned} \tag{A.14}$$

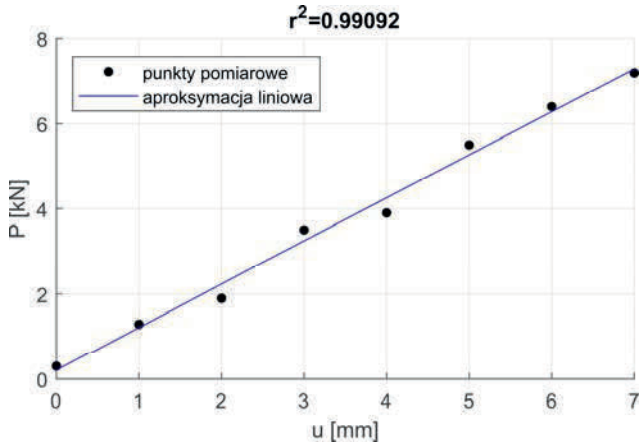
Z układu równań (A.14) można wyznaczyć współczynniki a_0 oraz a_1 jako

$$a_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad a_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i a_1 = \overline{y} - a_1\overline{x}, \tag{A.15}$$

gdzie $\overline{y}$ oraz $\overline{x}$ oznaczają wartości średnie

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \ . \tag{A.16}$$

Wykres przykładowych danych pomiarowych zależności siły i przemieszczenia pokazano na rys. A.2. W dane pomiarowe wpisano prostą aproksymującą.



Rys. A.2. Przykładowe wyniki pomiarów i ich aproksymacja liniowa

Oceny dokładności aproksymacji dokonuje się poprzez:

— standardowy błąd przybliżenia

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} \ , \tag{A.17}$$

— współczynnik determinacji

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}, \tag{A.18}$$

— współczynnik korelacji

$$r = \sqrt{r^2} = \sqrt{\frac{S_t - S_r}{S_t}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}} \ . \tag{A.19}$$

Standardowy błąd przybliżenia opisuje stopień rozproszenia wyników względem prostej aproksymującej. Współczynnik determinacji jest miarą jakości dopasowania prostej. Może on przyjmować wartości od 0 (brak dopasowania) do 1 (idealne dopasowanie). Mała wartość współczynnika determinacji może oznaczać, że zjawiska nie powinno się aproksymować z zastosowaniem funkcji liniowej.

Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów może być rozszerzona na wariant z wykorzystaniem dowolnej funkcji wielomianowej stopnia m

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + e\,. \tag{A.20}$$

Sumę kwadratów błędu, którą należy zminimalizować, zapisujemy jako

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m \right)^2 \to \min. \tag{A.21}$$

W kolejnym kroku obliczamy pochodne cząstkowe z wyrażenia S_r względem szukanych współczynników wielomianu i przyrównać ich wartości do zera

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m \right) = 0,\\
&\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m \right) = 0,\\
&\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m \right) = 0,\\
&\ldots\\
&\frac{\partial S_r}{\partial a_m} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^m \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m \right) = 0.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Z przekształconego układu równań (A.22)

$$\begin{aligned}
&n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^m = \sum_{i=1}^{n} y_i,\\
&a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\\
&a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i,\\
&\ldots\\
&a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

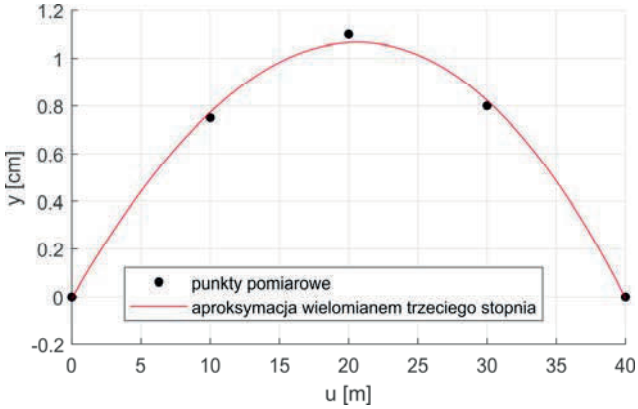
można wyznaczyć wartości współczynników a_0, a_1, a_2, …, a_m.

Standardowy błąd przybliżenia obliczamy według wzoru

$$s_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-(m+1)}}\,, \tag{A.24}$$

natomiast współczynnik determinacji liczymy jak w wariancie liniowym ze wzoru (A.18).

Wykres przykładowych danych pomiarowych ugięcia pomierzonego w pięciu punktach pomiarowych pokazano na rys. A.3. W dane pomiarowe wpisano funkcję wielomianową trzeciego stopnia.



Rys. A.3. Przykładowe wyniki pomiarów i ich aproksymacja wielomianem trzeciego stopnia

LITERATURA

Ashby M., Shercliff H., Cebon D.: *Inżynieria materiałowa*, T. 1. Łódź: Wydawnictwo Galaktyka 2011. ISBN 987-83-7579-191-4.

Badur J.: *Pięć wykładów ze współczesnej termomechaniki płynów*. Gdańsk: Instytut Maszyn Przepływowych PAN, 2005, https://www.imp.gda.pl/fileadmin/doc/o2/z3/publications/2005_piecwykladow.pdf

Badur J.: *Rozwój pojęcia energii*. Gdańsk: Wydawnictwo Instytutu Maszyn Przepływowych Polskiej Akademii Nauk 2009. ISBN 978-83-8823-756-0.

Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 2013. ISBN 978-83-7926-048-5.

Bielewicz E.: *Wytrzymałość materiałów*. Gdańsk: Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej 2013. ISBN 978-83-7348-508-2.

Burczyński T., Beluch W., John A. (red): *Laboratorium z wytrzymałości materiałów*. Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Śląskiej 2002. ISBN 83-7335-086-1.

Chapra S.C., Canale R.P.: *Numerical Methods for Engineers*. New York: McGraw-Hill, Inc. 1985. ISBN 0-07-079984-9.

Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z.: *Wytrzymałość materiałów*, T. I–II. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 2003. ISBN 978-83-204-2815-5.

Górski J., Iwicki P., Mikulski T.: *Metody doświadczalne w analizie konstrukcji*. Gdańsk: Politechnika Gdańska 2008.

Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W.: *Wytrzymałość Materiałów*. Warszawa: Arkady 1974.

Katarzyński S., Kocańda S., Zakrzewski M.: *Badania własności mechanicznych metali*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 1969.

Kujawa M., Skowronek M., Szymczak Cz., Witkowski W.: *Wytrzymałość materiałów, zadania*. Gdańsk: Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej 2017. ISBN 978-83-7348-538-9.

Ochelski S.: *Metody doświadczalne mechaniki kompozytów*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 2004. ISBN 83-204-2890-4.

Sharpe W. (red): *Springer Handbook of Experimental Mechanics*. New York: Springer 2008. ISBN 978-0-387-26883-5.

Szczepiński W. (red): *Metody doświadczalne mechaniki ciała stałego*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe 1984.

Timoszenko S.P.: *Historia wytrzymałości materiałów*. Warszawa: Arkady 1966.