JERZY MIHUŁOWICZ

GEOMETRIA ANALITYCZNA

DLA II KLASY LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCEGO
WYDZIAŁ HUMANISTYCZNY i PRZYRODNICZY

KSIĄŻNICA-ATLAS * LWÓW-WARSZAWA

JERZY MIHUŁOWICZ

GEOMETRIA ANALITYCZNA

DLA II KLASY LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCEGO
WYDZIAŁ HUMANISTYCZNY i PRZYRODNICZY

CENA WRAZ ZE ZNACZKIEM
NA TOWARZYSTWO POPIERANIA BUDOWY
PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH
WYNOSI zł 1,30

KSIĄŻNICA-ATLAS
S. A. ZJEDN. ZAKŁADY KARTOGRAF. I WYDAWNICZE T. N. S. W.
LWÓW—WARSZAWA
1938

Podręcznik zatwierdzony do użytku szkolnego pismem Ministerstwa W. R. i O. P. z 29 września 1938 nr II Pr. 16 220/38.

2982

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie

Rozdział I

PUNKT i PROSTA

§ 1. Odcinki kierunkowe na osi.

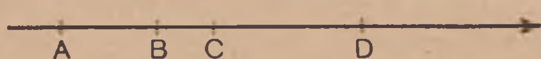
Prostą, na której jeden kierunek (zwrot) przyjmiemy za kierunek dodatni, nazywamy *osią*; kierunek przeciwny dodatniemu nazywamy ujemnym. Odcinek, któremu przypisujemy pewien kierunek (zwrot), nazywamy *odcinkiem kierunkowym* albo *wektorem*. Nazwę „odcinek" zachowamy w całej książce dla odcinków, przy których kierunku nie uwzględniamy. Jeżeli końce odcinka oznaczymy literami A i B, to odcinek oznaczamy AB lub BA. Podobnie oznaczać będziemy dwiema literami wektory, dla odróżnienia jednak od odcinków pisać będziemy nad literami kreskę poziomą. Tak np. symbol $\overline{AB}$ oznaczać będzie wektor mający początek w punkcie A a koniec w punkcie B. Porządek liter przy oznaczaniu wektorów nie jest obojętny: litera na pierwszym miejscu oznaczać będzie zawsze początek, a litera umieszczona na drugim miejscu koniec wektora. Wektor $\overline{BA}$ ma początek w punkcie B a koniec w punkcie A, różni się więc od wektora $\overline{AB}$ zwrotem.

Wektor umieszczony na osi ma zwrot zgodny albo ze zwrotem dodatnim, albo ze zwrotem ujemnym osi; w pierwszym przypadku nazwiemy wektor dodatnim, w drugim przypadku ujemnym. Dwa wektory umieszczone na osi uważamy za równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają tę samą długość i ten sam zwrot. Jeżeli chociażby jeden z tych warunków nie jest spełniony, nazywamy wektory nierównymi. W którym punkcie osi znajduje się początek wektora, jest przy porównywaniu wektorów obojętne. W tym znaczeniu mówimy, że wektor na osi wolno przesuwać. Wektory na osi, które mają tę samą długość, a różnią się zwrotem (np. $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$), nazywamy wektorami *przeciwnymi*.

Przyjąwszy pewien odcinek j za jednostkę można, jak wiadomo, przyporządkować każdemu odcinkowi jako miarę pewną liczbę bezwzględną. Na odwrót można po przyjęciu odcinka jednostkowego każdej liczbie bezwzględnej przyporządkować odcinek, którego miarą jest ta liczba. Przy tym przyporządkowaniu równym odcinkom odpowiadają równe miary, większemu z dwóch odcinków odpowiada większa miara, sumie odcinków odpowiada suma ich miar, i na odwrót.

Wektorom umieszczonym na osi przyporządkujemy jako miary liczby względne w następujący sposób: Jako miarę wektora $\overline{AB}$ umieszczonego na osi przyjmujemy liczbę względną, której wartością bezwzględną jest miara odcinka AB (przy przyjętej jednostce j), a która ma znak $+$, jeżeli wektor $\overline{AB}$ jest dodatni, a znak $-$, jeżeli wektor $\overline{AB}$ jest ujemny. Każdy wektor na osi posiada więc ściśle określoną miarę. Lecz i na odwrót: Każdą liczbę względną można przedstawić za pomocą wektora na osi. Kreślimy w tym celu na osi odcinek mający miarę równą bezwzględnej wartości danej liczby i nadajemy mu zwrot dodatni lub ujemny stosownie do znaku danej liczby. Liczbie 0 przyporządkujemy tzw. wektor zerowy, czyli punkt. Z określenia miary wektora na osi wynika, że równym wektorom odpowiadają równe miary, a nierównym wektorom odpowiadają nierówne miary, i na odwrót.

Określimy sumę i różnicę wektorów umieszczonych na osi: Aby utworzyć *sumę dwóch wektorów* umieszczonych na osi, przesuwamy je tak, aby początek drugiego wektora znajdował się w końcu pierwszego; przez sumę obu wektorów rozumiemy wektor mający początek w początku pierwszego wektora, a koniec w końcu drugiego.

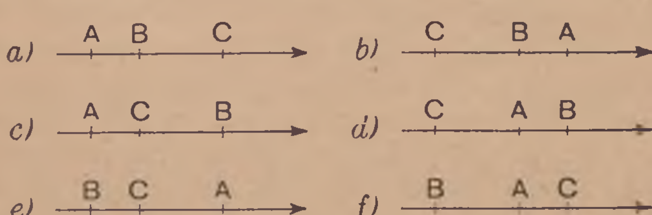


Rys. 1.

Tak np. (rys. 1): $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$; $\overline{DB} + \overline{BC} = \overline{DC}$; itp.

Sumie dwóch wektorów na osi odpowiada jako miara suma miar składników.

Aby to wykazać, weźmy pod uwagę sumę wektorów: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (rys. 2) i oznaczmy miary wektorów $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ kolejno literami: a, b, c.



Rys. 2.

Jeżeli wektory $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, a więc i ich miary a i b, mają jednakowe znaki (rys. 2 a i b), wtedy, jak widać z rysunku, jest: $|c| = |a| + |b|$. Z rysunku widzimy nadto, że $\overline{AC}$ ma taki znak jak $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, a więc c taki znak jak a i b. Przeto miarą c wektora $\overline{AC}$ jest $|a| + |b|$ ze znakiem wektorów $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ (liczb a i b). Zgodnie z definicją sumy liczb względnych o jednakowych znakach jest więc: $c = a + b$.

Jeżeli $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, a więc i ich miary a i b, mają znaki przeciwne (rys. 2 $c \div f$), wtedy, jak widać z rysunku, jest

$$|c| = |a| - |b|, \text{ jeżeli } |a| > |b| \text{ (rys. 2 } c \text{ i } e)$$
$$\text{lub } |c| = |b| - |a|, \text{ jeżeli } |a| < |b| \text{ (rys. 2 } d \text{ i } f).$$

Z rysunku odczytujemy nadto, że znak sumy $\overline{AC}$, a więc i jej miary c, jest taki, jak dłuższego z wektorów $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ (tej z liczb a i b, która ma większą wartość bezwzględną). Zgodnie z definicją sumy liczb względnych o znakach przeciwnych jest więc: $c = a + b$.

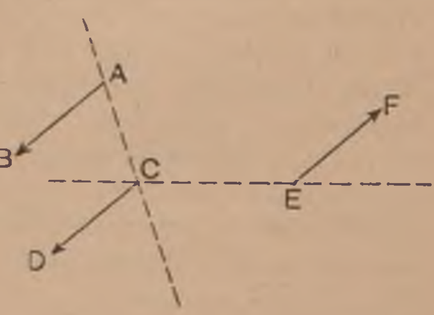
Jeżeli wreszcie wektory $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ są przeciwne, a więc $\overline{BC} = \overline{BA}$, wtedy $b = -a$; suma wektorów wynosi (jak widać z rysunku): $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$, a suma ich miar: $a + (-a) = 0$. I w tym przypadku jest więc: $c = a + b$.

Aby utworzyć *różnicę dwóch wektorów* umieszczonych na osi, przesuwamy je tak, aby oba miały wspólny początek; wektor mający początek w końcu wektora-odjemnika, a koniec w końcu wektora-odjemnej nazywamy różnicą obu wektorów.

Np. (rys. 1): $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$; $\overline{CB} - \overline{CD} = \overline{DB}$; itp.

Odjemna jest wtedy sumą odjemnika i różnicy ($\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$; $\overline{CB} = \overline{CD} + \overline{DB}$ itp.). A że tę samą własność ma także różnica liczb względnych, przeto miarą różnicy dwóch wektorów na osi jest różnica miar odjemnej i odjemnika.

W geometrii zastępuje się często odcinki ich miarami, i na odwrót. Tak np. pisze się często, że w trójkącie ABC bok $AB = a$, gdzie AB oznacza bok, a więc odcinek, zaś a jego miarę; pisze się, że pole trójkąta ABC o wysokości CD wynosi $\frac{1}{2} AB \cdot CD$, przy czym oczywiście zamiast AB i CD mamy na myśli miary tych odcinków. Podobnie zastępować będziemy często wektory na osi ich miarami i pisać będziemy $\overline{AB} = x$, jeżeli x oznacza miarę wektora $\overline{AB}$.



Rys. 3

Wektory na płaszczyźnie mogą tworzyć ze sobą różne kąty. Takimi wektorami w tej książce nie będziemy się w ogólności zajmowali. Zapamiętajmy tylko, że wektory równoległe traktujemy tak jak wektory na jednej osi. W szczególności uważamy dwa wektory równoległe za równe, jeżeli mają jednakową długość i kierunki zgodne, tj. takie, że oba wektory leżą po tej samej stronie prostej wykreślonej przez ich początki. Tak np. na rys. 3: $\overline{AB} = \overline{CD}$; $\overline{CD} \neq \overline{EF}$.

Ćwiczenia.

1. Obierz na osi 3 dowolne punkty: A, B i C; przyjąwszy 1 *cm* za jednostkę zmierz AB i BC; podaj miary wektorów: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$, $\overline{CA}$, $\overline{BC}$, $\overline{CB}$.
2. Przyjąwszy 1 *cm* za jednostkę wykreślić na osi wektory mające miary: -3; $+2{,}5$; $-1\frac{1}{2}$; 0; -4; $+3$.
3. Wykreślić na osi dwa wektory *a)* zgodnie *b)* przeciwnie skierowane i utworzyć ich sumę i różnicę.
4. Na osi pionowej obrać cztery dowolne punkty i oznaczyć je zaczynając od położonego najniżej kolejno literami: A, B, C i D. Uważając te punkty za początki lub końce wektorów przedstawić *a)* $\overline{AB}$, *b)* $\overline{DC}$, *c)* $\overline{CB}$, *d)* $\overline{AD}$ jako sumę i jako różnicę dwóch wektorów. Rozwiązać zadanie kilku sposobami.
5. Następujące dodawania i odejmowania przedstawić za pomocą wektorów:

a) $(+2) + (+3) = +5$; *b)* $(+2) + (-5) = -3$;
c) $(-2) + (+6) = +4$; *d)* $(-2) + (-4) = -6$;
e) $(+5) - (+3) = +2$; *f)* $(+2) - (+5) = -3$;
g) $(-2) - (+3) = -5$; *h)* $(-2) - (-5) = +3$.

§ 2. Współrzędne punktów na osi.

Obierzmy na danej osi X dowolny punkt O i nazwijmy ten punkt *początkiem*. Niechaj A oznacza dowolny punkt na osi X, różny od O. Przyporządkujmy punktowi A liczbę względną x_1, która jest miarą wektora $\overline{OA}$ przy przyjętej jednostce długości j. Liczba x_1 jest zupełnie określona, gdy dany jest punkt A, i nazywa się jego *współrzędną*. Aby zaznaczyć, że punkt A ma współrzędną x_1, piszemy: $A\ (x_1)$. Podobnie ma i każdy inny punkt leżący na osi X jednoznacznie określoną współrzędną; w szczególności przyporządkujemy punktowi O, któremu odpowiada wektor zerowy OO, współrzędną 0. Różne punkty: A, B, C, ... leżące na osi X mają różne współrzędne, ponieważ wtedy wektory $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, ... są różne. Na odwrót określa współrzędna punktu jednoznacznie jego położenie na osi, jeżeli oczywiście dany jest punkt O i odcinek jednostkowy j. Aby np. wyznaczyć punkt $M\ (-5)$, należy odmierzyć od punktu O w kierunku ujemnym odcinek mający $5\,j$; koniec tego odcinka będzie punktem M mającym współrzędną -5.

Ustaliliśmy tedy między punktami osi X a liczbami względnymi odpowiedniość doskonałą polegającą na tym, że każdemu punktowi na osi odpowiada ściśle oznaczona liczba względna (współrzędna tego punktu), a każdej liczbie odpowiada ściśle oznaczony punkt na osi X. Odpowiedniość ta pozwala rozwiązywać przy pomocy liczb różne zagadnienia dotyczące wzajemnego położenia punktów na osi.

Zadanie 1. Mając dane na osi X dwa punkty: $A\ (x_1)$ i $B\ (x_2)$ (rys. 4) obliczyć ich wzajemną odległość d.

Rys. 4.

Stosownie do określenia różnicy wektorów jest: $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$. Miarą wektora $\overline{BA}$ jest więc $x_1 - x_2$. Ponieważ przez wzajemną odległość punktów A i B rozumiemy długość odcinka AB, przeto: $d = |x_1 - x_2|$. Słowami:

Wzajemna odległość dwóch punktów na osi równa się bezwzględnej wartości różnicy ich współrzędnych.

Zadanie 2. Mając dane na osi X dwa punkty $A\ (x_1)$ i $B\ (x_2)$ znaleźć współrzędną x środka C odcinka AB.

Przyjmijmy najpierw, że $x_1 < x_2$ (rys. 4), a więc że punkt B leży na prawo od punktu A. Wtedy (według ostatniego twierdzenia) jest:

$$AB = x_2 - x_1, \text{ a więc } \tfrac{1}{2} AB = \tfrac{1}{2} (x_2 - x_1).$$

Współrzędna punktu C jest większa od x_1 o $\frac{1}{2} (x_2 - x_1)$, zatem:

$$x = x_1 + \tfrac{1}{2} (x_2 - x_1) = x_1 + \tfrac{1}{2} x_2 - \tfrac{1}{2} x_1 = \tfrac{1}{2} (x_1 + x_2).$$

Jeżeli $x_1 > x_2$, a więc punkt B leży na lewo od punktu A, wtedy jest:

$$AB = x_1 - x_2, \text{ a więc } \tfrac{1}{2} AB = \tfrac{1}{2} (x_1 - x_2).$$

Współrzędna x punktu C jest większa od x_2 o $\frac{1}{2} (x_1 - x_2)$; zatem:

$$x = x_2 + \tfrac{1}{2} (x_1 - x_2) = x_2 + \tfrac{1}{2} x_1 - \tfrac{1}{2} x_2 = \tfrac{1}{2} (x_1 + x_2).$$

Znajdujemy więc:

Współrzędna środka odcinka jest średnią arytmetyczną współrzędnych końców odcinka.

Ćwiczenia.

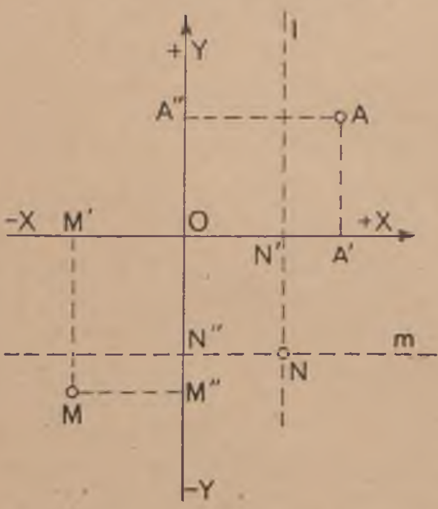
6. Wykreślić na osi punkty: $A(3)$; $B(7{,}5)$; $O(0)$; $C(-2)$; $D(-5)$ i obliczyć długości odcinków: AB; AC; OD; DC; BD.
7. Znaleźć współrzędną środka odcinka AB, jeżeli:

a) $A(1), B(7)$; *b)* $A(0)$, $B(-4)$; *c)* $A(-3)$, $B(-10)$;
d) $A(3)$, $B(-7)$; *e)* $A(-1\frac{2}{3})$, $B(-4\frac{1}{3})$; *f)* $A(1\frac{3}{4})$, $B(-2\frac{1}{4})$.

8. Na prostej obrać odcinek $AB = aj$ i podzielić go wewnętrznie punktem C na takie dwie części, aby było: $CA : CB = 3 : 2$. Następnie podzielić odcinek AB zewnętrznie punktem C' (leżącym poza B) na takie dwie części, aby było: $C'A : C'B = 3 : 2$. Obrawszy na prostej zwrot dodatni od A do B i przyjąwszy środek odcinka CC' za początek, obliczyć współrzędne punktów: C, C', A i B. Sprawdzić otrzymane wzory rysunkiem przyjmując $a = 10$, $j = 2$ *mm*.

§ 3. Współrzędne prostokątne punktów na płaszczyźnie.

Wykreślmy na płaszczyźnie dwie prostopadłe do siebie osie; tworzą one tak zwany *prostokątny układ współrzędnych*. Punkt O przecięcia się obu osi nazywamy *początkiem* układu. Na obu osiach ustalony jest pewien zwrot jako dodatni. Zwykle wyobrażamy sobie, że płaszczyzna rysunku ma położenie pionowe i że jedna oś jest pozioma a druga pionowa. Oś poziomą nazywamy osią X i obieramy na niej kierunek od strony lewej ku prawej za kierunek dodatni. Oś pionową nazywamy osią Y, a za dodatni kierunek przyjmujemy kierunek od dołu ku górze.



Rys. 5.

Osie X i Y dzielą płaszczyznę na cztery części, które nazywamy *ćwiartkami*. Umawiamy się, że ćwiartkę między $+X$ i $+Y$ nazywać będziemy ćwiartką I (pierwszą), ćwiartkę między $+Y$ i $-X$ ćwiartką II (drugą), ćwiartkę między $-X$ i $-Y$ ćwiartką III (trzecią), a ćwiartkę między $-Y$ i $+X$ ćwiartką IV (czwartą).

Niechaj A (rys. 5) oznacza dowolny punkt na płaszczyźnie, na której obraliśmy prostokątny układ współrzędnych. Wykreślmy rzut prostokątny A' punktu A na oś X oraz rzut prostokątny A'' punktu A na oś Y i obierzmy pewien odcinek j za jednostkę długości. Punkt A' ma na osi X pewną współrzędną x, która jest miarą wektora $\overline{OA'}$ (§ 2); punkt A'' ma na osi Y pewną współrzędną y, która jest miarą wektora $\overline{OA''}$ na tej osi. Liczby x i y przyporządkujemy punktowi A i nazwiemy jego *współrzędnymi prostokątnymi*. Pierwszą z nich nazywamy *odciętą* punktu A albo krótko x punktu A; drugą nazywamy *rzędną* punktu A albo krótko y punktu A. Aby zaznaczać, że punkt A ma współrzędne x i y, piszemy: A $(x; y)$, przy czym na pierwszym miejscu piszemy odciętą, na drugim rzędną.

Podobnie jak punktowi A, możemy każdemu dowolnie na płaszczyźnie rysunku obranemu punktowi M przyporządkować parę liczb (współrzędnych). Przyporządkowanie to jest jednoznaczne. Wszak punkt M posiada jednoznacznie określone rzuty M' i M'' na osie X i Y, te zaś jednoznacznie określone współrzędne na osiach.

Lecz i na odwrót: Każdej parze liczb rzeczywistych (przy czym porządek liczb nie jest obojętny) odpowiada ściśle oznaczony punkt płaszczyzny, gdy pierwszą z tych liczb uważamy za odciętą, a drugą za rzędną punktu. Niechaj bowiem dana będzie para liczb: $(x_1; y_1)$. Wyznaczmy na osi X punkt N' (x_1), a na osi Y punkt N'' (y_1); punkty takie są, jak wiemy (§ 2), jednoznacznie określone. Wykreślmy (rys. 5) przez N' prostą l prostopadłą do osi X, a przez N'' prostą m prostopadłą do osi Y. Stosownie do określenia odciętej i rzędnej wszystkie punkty mające odciętą x_1 leżą na prostej l, a wszystkie punkty mające rzędną y_1 leżą na prostej m. I na odwrót: wszystkie punkty leżące na l mają odciętą x_1, a wszystkie punkty leżące na m mają rzędną y_1. Proste l i m przecinają się w jednym i tylko jednym punkcie N. Punkt N i tylko ten punkt ma współrzędne $(x_1; y_1)$.

Ustaliliśmy tedy odpowiedniość doskonałą między punktami płaszczyzny a parami liczb rzeczywistych. Każdemu punktowi płaszczyzny odpowiada jednoznacznie para liczb rzeczywistych; każdej parze liczb rzeczywistych odpowiada jednoznacznie punkt na płaszczyźnie. Odpowiedniość ta pozwoli nam związki geometryczne ujmować w postaci związków między parami liczb, i na odwrót, interpretować geometrycznie związki między parami liczb.

Zwracamy uwagę, że w celu wyznaczenia współrzędnych punktu A (rys. 5) nie potrzebujemy rysować całego prostokątu $OA'AA''$. Wystarczy z A wykreślić prostopadłą do osi X; wtedy odciętą przedstawia wektor $\overline{OA'}$, a rzędną wektor $\overline{A'A}$. Podobnie w celu wyznaczenia punktu A z jego współrzędnych wystarczy wykreślić wektory: $\overline{OA}$ i $\overline{A'A}$.

Ćwiczenia.

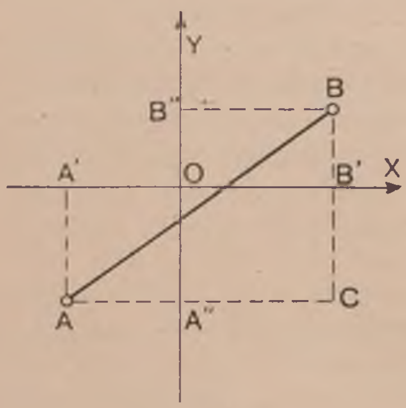
9. Promieniem $r = 4$ zakreślić okrąg dokoła początku układu współrzędnych. Wpisać w ten okrąg foremny sześciokąt obierając jeden wierzchołek w punkcie *a)* $A(4; 0)$; *b)* $B(0; 4)$. Obliczyć współrzędne wszystkich wierzchołków sześciokąta.

10. Znając odległość r punktu A od początku układu współrzędnych oraz kąt a, jaki OA tworzy z dodatnim kierunkiem osi X, obliczyć współrzędne punktu A. Wykonać rachunek, jeżeli: *a)* $r = 4$; $a = 30^0$; *b)* $r = 2$; $a = 120^0$; *c)* $r = 5$; $a = 270^0$; *d)* $r = 3$; $a = -45^0$.
11. Obliczyć odległość punktu A od początku O układu współrzędnych oraz kąt $XOA = a$, jeżeli: *a)* $A\ (4; 3)$; *b)* $A\ (-4; 2)$; *c)* $A\ (-3; -3)$; *d)* $A\ (6; -8)$.

§ 4. Odcinek.

Odcinek jest zupełnie oznaczony, gdy dane są współrzędne jego końców. Rozwiążemy kilka zagadnień dotyczących odcinka:

1) Najpierw obliczymy rzuty odcinka AB na osie układu współrzędnych mając dane współrzędne jego końców: $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$.



Rys. 6.

Oznaczmy rzuty punktu A na osie X i Y odpowiednio: A' i A'', a rzuty punktu B na te osie kolejno: B' i B'' (rys. 6). Wtedy:

Na osi X: $A'\ (x_1)$, $B'\ (x_2)$; zatem według twierdzenia w § 2, zad. 1 jest:

$$A'B' = |x_1 - x_2|.$$

Na osi Y: $A''\ (y_1)$, $B''\ (y_2)$; zatem według twierdzenia w § 2, zad. 1 jest:

$$A''B'' = |y_1 - y_2|.$$ Słowami:

Rzut odcinka na oś X równa się bezwzględnej wartości różnicy odciętych końców odcinka. Rzut odcinka na oś Y równa się bezwzględnej wartości różnicy rzędnych końców odcinka.

2) Mając dane współrzędne dwóch punktów: $A\ (x_1; y_1)$ i $B\ (x_2; y_2)$ obliczymy ich wzajemną odległość $d = AB$.

Wykreślmy rzuty punktów A i B na obie osie i oznaczmy je: A', A'', B' i B'' (rys. 6). Narysujmy przez punkt A prostopadłą do osi X, a przez punkt B równoległą do tej osi i oznaczmy literą C punkt przecięcia się tych prostych. Z trójkąta prostokątnego ABC obliczymy według tw. Pitagorasa:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Ponieważ: $AB = d$, a według ostatniego twierdzenia $AC = A'B' = |x_1 - x_2|$ i $BC = A''B'' = |y_1 - y_2|$, przeto:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \text{ a więc:}$$
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Według ostatniego wzoru obliczamy wzajemną odległość dwóch punktów, których współrzędne są dane.

Np.: Jeżeli $A\ (-2;\ 4)$, $B\ (3, -1)$, wtedy: $AB = \sqrt{(-2-3)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

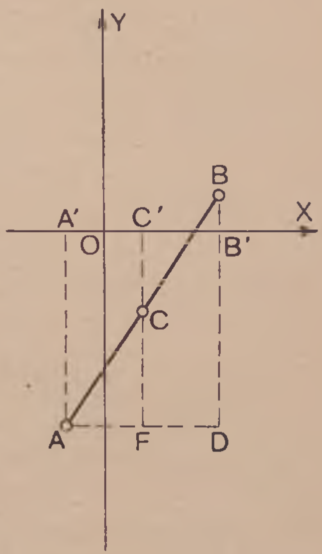
Łatwo sprawdzić, że otrzymany na d wzór jest ważny także wtedy, gdy jeden z odcinków AC i BC jest zerem.

3) Mając dane współrzędne dwóch punktów: $A\ (x_1;\ y_1)$ i $B\ (x_2;\ y_2)$ obliczymy współrzędne x' i y' środka C odcinka AB.

Niechaj A', B', C' oznaczają kolejno rzuty punktów A, B, C na oś X (rys. 7). Wykreślmy: $AD \parallel OX$, $BD \perp OX$ i $CF \perp OX$. W trójkącie ABD punkt C jest środkiem boku AB; prosta $CF \parallel BD$, połowi więc bok AD. Jest więc: $AF = FD$. A że $AF = A'C'$ i $FD = C'B'$, przeto $A'C' = C'B'$, tj. punkt C' jest środkiem odcinka $A'B'$. Ponieważ na osi X: $A'\ (x_1)$, $B'\ (x_2)$, $C'\ (x')$, przeto według twierdzenia w § 2, zad. 2 jest: $x' = \frac{1}{2}\ (x_1 + x_2)$.

Kreśląc rzuty punktów A, B, C na oś Y i rysując przez C równoległą do osi X znajdujemy w podobny sposób: $y' = \frac{1}{2}\ (y_1 + y_2)$. Zatem:

Współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych końców odcinka.



Rys. 7.

Np.: Jeżeli $A\ (-3;\ -2)$, $B\ (5;\ 3)$ i $AC = CB$, wtedy $C\ (1;\ 0{,}5)$.

Ćwiczenia.

12. Obliczyć boki trójkąta ABC, jeżeli:
 a) $A\ (-6;\ -1)$, $B\ (-2;\ +3)$, $C\ (4;\ -5)$;
 b) $A\ (0;\ -3)$, $B\ (4;\ -1)$, $C\ (-2;\ 1)$;
 c) $A\ (0;\ 1)$, $B\ (7;\ 0)$, $C\ (3;\ -3)$;
 d) $A\ (-2;\ 1{,}5)$, $B\ (-2;\ -1)$; $C\ (4;\ -1)$.
13. Obliczyć boki, a następnie za pomocą wzoru Herona pole trójkąta ABC, jeżeli: $A\ (5;\ 1)$, $B\ (-2;\ +2)$, $C\ (-4;\ -2)$.
14. Wyznaczyć na osi X punkt M równo oddalony od punktów $A\ (-2;\ +2)$ i $B\ (+1;\ +5)$.

Wskazówka: Wyznaczyć x tak, aby odległości punktu $M(x; 0)$ od A i B były równe.

15. Mając dane punkty $A(-5; -2)$ i $B(5; 3)$ wyznaczyć współrzędne takiego punktu M, aby było: $AM = 5$ i $BM = 10$.

Wskazówka: Przyjąć, że $M(x; y)$, wyrazić AM i BM za pomocą współrzędnych punktów A, B, i M i obliczyć x i y z danych w temacie warunków: $AM = 5$, $BM = 10$.

16. Wyznaczyć współrzędne punktu M równo oddalonego od punktów: $A(-4; 2)$, $B(4; 6)$ i $C(5; -1)$.

Porównaj wskazówkę do zad. 15.

17. Odcinek łączący punkty $A(-4; 0)$ i $B(3; 1)$ jest podstawą trójkąta równoramiennego, którego ramię $AM = BM = 5$. Obliczyć współrzędne wierzchołka M.

Porównaj wskazówkę do zad. 15.

18. Obliczyć współrzędne środków boków trójkąta ABC, jeżeli: $A(-3; 2)$, $B(3; 4)$, $C(-1; -3)$.

19. Obliczyć boki czworokąta, który otrzymamy łącząc środki sąsiednich boków czworokąta $ABCD$, jeżeli: $A(-3; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(3; 0)$, $D(1; -2)$.

§ 5. Pojęcie równania linii.

Wielokąt jest w zupełności określony, jeżeli mamy dane współrzędne jego wierzchołków. Możemy wtedy obliczyć jego boki, przekątne, kąty itp. Gdybyśmy chcieli w podobny sposób określić jakąś krzywą, musielibyśmy podać współrzędne nieskończonej ilości punktów tej krzywej. Wydaje się na pierwszy rzut oka, że to jest niemożliwe. A jednak algebra podaje nam sposób określenia w zwięzłej formie niezliczonej ilości par liczb. Wiadomo, że równanie o dwu zmiennych x i y (nazwijmy je: „równaniem r“) ma w ogólności nieskończoną ilość rozwiązań; nie każda jednak para liczb spełnia równanie r. Uważajmy pary wartości x i y spełniające równanie r za współrzędne punktów i pomyślmy sobie w s z y s t k i e te punkty rzeczywiście wykreślone. Otrzymany zbiór punktów tworzy na ogół pewną krzywą k. Krzywą k nazywamy *miejscem geometrycznym* równania r, a równanie r *równaniem krzywej* k. Zatem:

Równanie r zawierające dwie zmienne x i y jest równaniem krzywej k, jeżeli spełnione są następujące dwa warunki:

1) Jeżeli punkt A leży na krzywej k, to współrzędne punktu A spełniają równanie r.

2) Jeżeli punkt B nie leży na krzywej k, to współrzędne punktu B nie spełniają równania r.

Np.: Udowodnimy, że równanie: $x^2 + y^2 = 25$ (nazywać je będziemy dla krótkości „równaniem r") jest równaniem okręgu zakreślonego promieniem 5 j dokoła początku układu współrzędnych. Okrąg ten nazywać będziemy dla krótkości „okręgiem k".

Udowodnimy najpierw, że spełniony jest warunek 1):

Jeżeli A $(x_1; y_1)$ leży na okręgu k, wtedy według określenia okręgu musi być $OA = 5$. Ponieważ O (0; 0), przeto według wzoru na odległość dwóch punktów (§ 4) jest: $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 5$, a więc $x_1^2 + y_1^2 = 25$. Ostatnia równość wskazuje, że współrzędne punktu A spełniają równanie r.

Udowodnimy, że także warunek 2) jest spełniony:

Jeżeli punkt B $(x_2; y_2)$ nie leży na okręgu k, wtedy stosownie do określenia okręgu jest: $OB \neq 5$. Wyrażając OB za pomocą współrzędnych punktów O i B znajdujemy, że $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \neq 5$. A ponieważ $\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ jest liczbą nieujemną, a więc nie może równać się — 5, przeto $x_2^2 + y_2^2 \neq 25$. Nierówność ta wskazuje, że współrzędne punktu B nie spełniają równania r.

Dowiedliśmy więc, że równanie r jest równaniem okręgu k.

Wykazaliśmy, że współrzędne każdego punktu okręgu k spełniają równanie: $x^2 + y^2 = 25$, czyli: $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Łatwo widzieć, że spełniają one też równanie: $(x - y)(x^2 + y^2 - 25) = 0$, czyli równanie: $x^3 - y^3 - - x^2y + xy^2 - 25x + 25y = 0$. Ostatniego równania nie uważamy jednak za równanie okręgu k. Sprawdza się ono bowiem również, gdy zamiast x i y podstawimy współrzędne punktów: M (0; 0); N (3; 3); P (— 2; — 2) itp., które nie leżą na okręgu k.

Przykład ten wskazuje, że przy poszukiwaniu równania danej krzywej czy też miejsca geometrycznego danego równania nie wolno pomijać dowodu twierdzenia 2); wolno jednak warunek 2) zastąpić innym, jak to zaraz wyjaśnimy.

Twierdzenie 2) jest twierdzeniem *przeciwnym* do twierdzenia 1), tj. twierdzeniem, które powstaje z twierdzenia 1) przez zaprzeczenie założenia i tezy. Twierdzenie przeciwne do twierdzenia 1) można zawsze zastąpić twierdzeniem *odwrotnym* do twierdzenia 1) tj. takim, które z twierdzenia 1) powstaje przez przestawienie tezy z założeniem. Twierdzenia bowiem przeciwne i odwrotne do danego twierdzenia są, jak wiadomo, równoważne (kontrapozycja), tj. jednocześnie prawdziwe lub jednocześnie fałszywe. Zamiast twierdzenia 2) można tedy udowodnić twierdzenie następujące:

2') Jeżeli liczby x_1 i y_1 spełniają równanie r, to punkt o współrzędnych $x_1; y_1$ leży na krzywej k.

Tak np. w poprzednim przykładzie drugą część dowodu możemy zastąpić dowodem twierdzenia: Jeżeli x_1 i y_1 spełniają równanie: $x^2 + y^2 = 25$, wtedy punkt A $(x_1; y_1)$ leży na okręgu k. Podamy taki dowód:

Odległość punktu A $(x_1; y_1)$ od punktu O $(0; 0)$ wynosi: $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$. Według założenia spełniają liczby x_1 i y_1 równanie r, tak że $x_1^2 + y_1^2 = 25$. Jest więc: $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{25} = 5$. Wskazuje to, że odległość punktu A od O wynosi 5, a więc że (stosownie do określenia okręgu) punkt A $(x_1; y_1)$ jest punktem okręgu k, jak to mieliśmy udowodnić.

§ 6. Równania równoważne.[1]

W § 5 przedstawiliśmy równanie pewnego okręgu raz w postaci: $x^2 + y^2 = 25$, drugi raz w postaci: $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Można też napisać to równanie w postaci: $y^2 = 25 - x^2$ lub $\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{25}y^2 = 1$ itp. Mówimy, że wszystkie te równania są równoważne. Ograniczając się do równań o dwu zmiennych określamy:

Dwa równania o dwu zmiennych x i y nazywamy *równoważnymi*, jeżeli każda para wartości x, y spełniająca pierwsze równanie spełnia także i drugie, a każda para wartości x, y spełniająca drugie równanie spełnia także równanie pierwsze. Miejsca geometryczne równań równoważnych są oczywiście identyczne.

Wyprowadzimy kilka twierdzeń o równaniach równoważnych:

1) *Otrzymamy równanie równoważne danemu, jeżeli do obu stron równania danego dodamy lub od obu jego stron odejmiemy tę samą liczbę* (lub wyrażenie zawierające zmienne), *albo jeżeli obie strony danego równania przez tę samą liczbę różną od zera pomnożymy lub podzielimy.*

Podajemy dowód tego twierdzenia:

Równanie o dwu zmiennych możemy napisać w postaci:

$$L(x, y) = P(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gdzie $L(x, y)$ i $P(x, y)$ oznaczają jakieś wyrażenia zawierające x i y.

Dodajmy do obu stron równania (1) dowolną liczbę m; otrzymamy równanie:

$$L(x, y) + m = P(x, y) + m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wykażemy, że równania (1) i (2) są równoważne.

Przyjmijmy, że równanie (1) sprawdza się dla jakiejś pary wartości: $x = x_1$, $y = y_1$, a więc że:

$$L(x_1, y_1) = P(x_1, y_1).$$

Dodając do równych liczb $L(x_1, y_1)$ i $P(x_1, y_1)$ tę samą liczbę m otrzymamy równe sumy:

$$L(x_1, y_1) + m = P(x_1, y_1) + m.$$

Ostatnia równość wskazuje, że para wartości $x = x_1$, $y = y_1$ spełniająca równanie (1) spełnia także równanie (2).

Przyjmijmy teraz, że równanie (2) sprawdza się dla pary wartości $x = x_2$, $y = y_2$, a więc że:

$$L(x_2, y_2) + m = P(x_2, y_2) + m.$$

[1] Przerobienie tego paragrafu odłożyć można na początek rozdziału II (przed § 1).

Odejmując od tych równych liczb liczbę m otrzymamy równość:

$$L(x_2, y_2) = P(x_2, y_2),$$

która wskazuje, że para wartości $x = x_2$, $y = y_2$ spełniająca równanie (2) spełnia także równanie (1).

Równania (1) i (2) są więc równoważne.

Rozumowanie powyższe nie ulega zmianie, jeżeli m oznacza wyrażenie zawierające zmienne x i y, które jednak dla par wartości: $x = x_1$, $y = y_1$ i $x = x_2$, $y = y_2$ nie traci sensu liczbowego.

Pomnóżmy obie strony równania (1) przez liczbę $m \neq 0$; otrzymamy równanie:

$$m L(x, y) = m P(x, y) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Wykażemy, że równania (1) i (3) są równoważne.

Przyjmujemy, że para wartości $x = x_1$, $y = y_1$ spełnia równanie (1), a więc że:

$$L(x_1, y_1) = P(x_1, y_1).$$

Mnożąc równe liczby $L(x_1, y_1)$ i $P(x_1, y_1)$ przez m otrzymamy równe iloczyny:

$$m L(x_1, y_1) = m P(x_1, y_1).$$

Równość ta wskazuje, że para wartości $x = x_1$, $y = y_1$ spełniająca równanie (1) spełnia także równanie (3).

Załóżmy wreszcie, że para wartości $x = x_3$, $y = y_3$ spełnia równanie (3), a więc że:

$$m L(x_3, y_3) = m P(x_3, y_3).$$

Dzieląc obie strony tej równości przez $m \neq 0$ otrzymujemy równość:

$$L(x_3, y_3) = P(x_3, y_3),$$

która wskazuje, że para wartości $x = x_3$, $y = y_3$ spełniająca równanie (3) spełnia także równanie (1).

Równania (1) i (3) są więc równoważne.

Ponieważ każde odejmowanie zastąpić można dodawaniem liczby przeciwnej, a każde dzielenie przez liczbę różną od zera mnożeniem przez odwrotność dzielnika, przeto twierdzenie 1) jest udowodnione w zupełności.

Według tego twierdzenia wymienione na początku tego paragrafu równania są rzeczywiście równoważne.

2) Jeżeli obie strony danego równania podniesiemy do kwadratu, otrzymamy równanie, które nie musi być równoważne równaniu danemu.

Np.: Podnieśmy obie strony równania: $x + y = 3$ do kwadratu. Otrzymamy równanie:

$$(x + y)^2 = 9.$$

Jeżeli pierwsze z tych równań sprawdza się dla pewnej pary wartości x, y, wtedy sprawdza się dla tej samej pary wartości także i drugie równanie; z równości dwu liczb wynika bowiem równość ich kwadratów. Natomiast jeżeli jakaś para wartości x, y spełnia drugie równanie, to dla tej pary wartości niekoniecznie sprawdzać się musi równanie pierwsze. Z równości kwadratów dwu liczb wynika bowiem tylko, że te liczby albo są równe, albo różnią się znakami (są przeciwne). Tak np. drugie równanie sprawdza się, jeżeli $x = -7$, $y = 4$, ponieważ $(-7 + 4)^2 = 9$. Dla tej pary wartości nie sprawdza się jednak równanie pierwsze, ponieważ $-7 + 4 \neq 3$; sprawdza się natomiast dla tej pary wartości równanie: $x + y = -3$. Ujmując te rozważania ogólnie powiemy:

Jeżeli podniesiemy do kwadratu obie strony równania:

$$L(x, y) = P(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

otrzymamy równanie:

$$[L(x, y)]^2 = [P(x, y)]^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

mające tę własność, że każda para wartości x,y spełniająca równanie (1) spełnia także równanie (4), każda zaś para wartości x,y spełniająca równanie (4) spełnia albo równanie (1), albo równanie:

$$L(x, y) = -P(x, y) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Równania (1) i (4) nie są przeto w ogólności równoważne. Zdarza się jednak, że równanie (5) nie ma w ogóle rozwiązań. Wtedy każde rozwiązanie równania (4) jest zarazem rozwiązaniem równania (1); zatem równania (1) i (4) są równoważne. Przypadek taki zachodzi np. wtedy, gdy $L(x, y)$ i $P(x, y)$ są takimi wyrażeniami, które dla żadnych wartości x i y nie przyjmują wartości ujemnych. Np.

1) Równania: $\sqrt{x^2 - y^2} = 5$ i $x^2 - y^2 = 25$ są równoważne.

Każde bowiem rozwiązanie pierwszego równania jest w myśl poprzednich rozważań zarazem rozwiązaniem drugiego. Para zaś wartości spełniająca drugie równanie spełnia albo równanie pierwsze, tj. $\sqrt{x^2 - y^2} = 5$, albo równanie: $\sqrt{x^2 - y^2} = -5$. Lecz ostatnie równanie nie posiada w ogóle rozwiązań, ponieważ pierwiastek kwadratowy (arytmetyczny) żadnej liczby nie jest liczbą ujemną. Wskutek tego każde rozwiązanie równania: $x^2 - y^2 = 25$ jest również rozwiązaniem równania $\sqrt{x^2 - y^2} = 5$. Równania te są przeto rzeczywiście równoważne.

2) Równania: $x^2 + y^2 = x^2 y^2$ i $(x^2 + y^2)^2 = x^4 y^4$ są równoważne.

W myśl poprzednich rozważań każde rozwiązanie pierwszego równania jest zarazem rozwiązaniem drugiego, każda zaś para wartości x,y spełniająca drugie równanie spełnia albo równanie: $x^2 + y^2 = x^2 y^2$, albo równanie: $x^2 + y^2 = -x^2 y^2$. To ostatnie równanie ma tylko jedno rozwiązanie: $x = 0$, $y = 0$. Lecz to rozwiązanie jest również rozwiązaniem równania poprzedniego, tak że każde rozwiązanie równania $(x^2 + y^2)^2 = x^4 y^4$ jest zarazem rozwiązaniem równania: $x^2 + y^2 = x^2 y^2$. Oba te równania są więc równoważne.

Ze względu na liczne zastosowania ujmujemy omówiony obecnie przypadek równoważności równań w następujące twierdzenie:

3) *Jeżeli po obu stronach danego równania znajdują się wyrażenia, które dla żadnych wartości zmiennych nie przyjmują wartości ujemnych,*

wtedy podnosząc do kwadratu obie strony danego równania otrzymamy równanie równoważne danemu.

Np.: Po obu stronach równań:

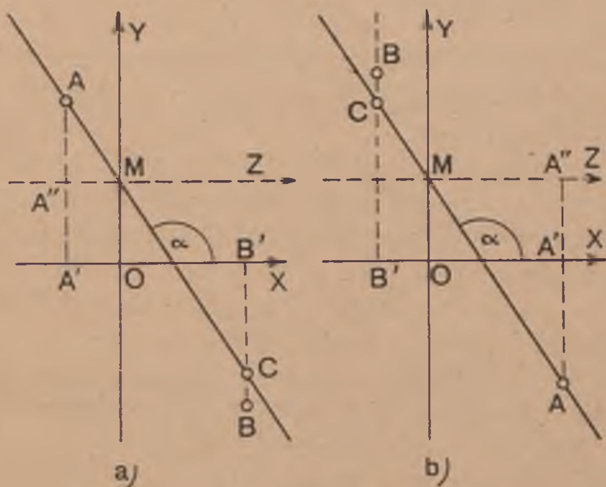
$$\sqrt{x^2+y^2}=3, \qquad \sqrt{x}+\sqrt{y+3}=7, \qquad 5+\sqrt{x+y}=\sqrt{x^2-y^2}$$

znajdują się wyrażenia, które dla żadnych wartości x i y nie przyjmują wartości ujemnych. Według twierdzenia 3) równania te są kolejno równoważne równaniom:

$$x^2+y^2=9, \qquad (\sqrt{x}+\sqrt{y+3})^2=49, \qquad (5+\sqrt{x+y})^2=x^2-y^2.$$

§ 7. Równanie prostej.

Ułożymy równanie prostej l, której położenie jest określone za pomocą następujących danych: prosta l przecina oś Y w punkcie M, którego rzędna n jest dana, i tworzy z dodatnim kierunkiem osi X dany kąt α[1] (rys. 8 *a* i *b*) różny od 90^0.



Rys. 8 *a* i *b*.

Szukamy takiego równania o dwu zmiennych x i y, które by się sprawdzało, gdy zamiast x i y podstawimy współrzędne punktu leżącego na prostej l, a nie sprawdzało się, gdy zamiast x i y podstawimy współrzędne punktu nie leżącego na prostej l.

Obierzmy na prostej l dowolny punkt A $(x; y)$ różny od M (rys.

[1] Kąty mierzymy zawsze w kierunku dodatnim, tj. w kierunku przeciwnym kierunkowi ruchu wskazówek zegarka leżącego na płaszczyźnie rysunku.

8 *a* lub *b*) i wykreślmy oś $MZ \parallel OX$. Rzuty punktu A na osie OX i OZ oznaczmy kolejno: A' i A''. Według definicji funkcji tangens jest:

$$tg \sphericalangle ZMA = \overline{A''A} : \overline{MA''}.$$

Jeżeli punkt A leży nad osią MZ (rys. 8 *a*), wtedy $\sphericalangle ZMA = a$; jeżeli punkt A leży poniżej osi MZ (rys. 8 *b*), wtedy $\sphericalangle ZMA = 180^0 + a$. Z powodu okresowości funkcji tangens jest w obu przypadkach $\operatorname{tg} \sphericalangle ZMA = \operatorname{tg} a$, tak że:

$$\operatorname{tg} a = \overline{A''A} : \overline{M''A}.$$

Z rysunku odczytujemy:

$\overline{A''A} = \overline{A'A} - \overline{A'A''} = \overline{A'A} - \overline{OM} = y - n$;
$\overline{MA''} = \overline{OA'} = x$. Zatem:
$\operatorname{tg} a = (y - n) : x$.

Stąd otrzymujemy kolejno:

$y - n = x \operatorname{tg} a$,
$y = x \operatorname{tg} a + n$, czyli:
$y = mx + n$, jeżeli $m = \operatorname{tg} a$ . . . . (1)

Stwierdzamy dodatkowo, że współrzędne punktu $M\ (0; n)$ spełniają także ostatnie równanie, tak że równanie (1) spełniają współrzędne każdego punktu prostej l.

Przyjmijmy teraz (rys. 8 *a* i *b*) punkt $B\ (x_1, y_1)$ nie leżący na prostej l i wykreślmy przez ten punkt prostą BB' prostopadłą do osi X. Ponieważ prosta l nie jest prostopadła do osi X (założyliśmy, że $a \neq 90^0$), przeto BB' przecina prostą l w jakimś punkcie C mającym taką samą odciętą x_1 jak punkt B. Rzędna natomiast punktu C (oznaczmy ją y') jest różna od rzędnej y_1 punktu B; w przeciwnym bowiem razie punkty B i C nakrywałyby się, a więc punkt B leżałby wbrew założeniu na prostej l. Ponieważ punkt $C\ (x_1; y')$ leży na prostej l, przeto współrzędne jego spełniają równanie (1), tak że $y' = mx_1 + n$. A że $y_1 \neq y'$, przeto $y_1 \neq mx_1 + n$. Nierówność ta wskazuje, że współrzędne punktu B nie leżącego na prostej l nie spełniają równania (1).

Wykazaliśmy więc, że równanie (1) jest *równaniem prostej l*. Zaznaczymy to w następujący sposób:

$$l \{ y = mx + n.$$

Równanie to zawiera dwie zmienne x i y w stopniu pierwszym oraz dwie stałe: m i n. Stałe te mają następujące znaczenie:

n oznacza wektor na osi Y od początku układu współrzędnych do punktu przecięcia się prostej l z osią Y. Jeżeli $n = 0$, wtedy prosta $l \{ y = mx$ przechodzi przez początek układu współrzędnych. Jeżeli

$n > 0$, wtedy prosta l przecina dodatnią część osi Y. Jeżeli $n < 0$, wtedy prosta przecina ujemną część osi Y.

m oznacza tangens kąta, jaki prosta l tworzy z dodatnim kierunkiem osi X. Jeżeli $m = 0$, wtedy prosta l jest do osi X równoległa, o ile $n \neq 0$, albo nakrywa oś X, jeżeli równocześnie $n = 0$. Jeżeli $m > 0$, wtedy prosta l tworzy z dodatnim kierunkiem osi X kąt ostry. Jeżeli $m < 0$, wtedy prosta l tworzy z dodatnim kierunkiem osi X kąt rozwarty. Stałą m nazywamy *współczynnikiem kątowym* lub *kierunkowym* prostej l.

Korzystając ze znaczenia współczynników m i n możemy zdać sobie sprawę z położenia prostej, której równanie jest dane. Wyjaśnimy to na kilku przykładach:

1) Ponieważ w równaniu $y = -3x$ jest $n = 0$, przeto prosta l, która jest miejscem geometrycznym tego równania, przechodzi przez początek układu współrzędnych. Ponieważ $m = -3 < 0$, przeto prosta l tworzy z dodatnim kierunkiem osi X kąt rozwarty. Prosta l przechodzi tedy przez ćwiartki: *II* i *IV*.

2) Prosta $l \{ y = 2x - 3$ przecina ujemną część osi Y (ponieważ $n = -3 < 0$), a z dodatnim kierunkiem osi X tworzy kąt ostry (ponieważ $m = 2 > 0$). Prosta l przechodzi więc przez ćwiartki: *III*, *IV*, i *I*.

3) Równanie: $y = 3$ przedstawia prostą l do osi X równoległą. Pisząc to równanie w postaci: $y = 0x + 3$ widzimy, że każdej wartości x odpowiada wartość $y = 3$. Prosta l jest tedy miejscem geometrycznym punktów mających rzędną równą 3. Prosta l przechodzi przez ćwiartki: *I* i *II*.

Sposób dokładnego kreślenia prostej, której równanie jest dane, wyjaśnimy na przykładzie: $l \{ y = \frac{3}{2} x - 2$.

Wyznaczamy najpierw dwie pary wartości x i y spełniających równanie: $y = \frac{3}{2} x - 2$, a więc np.:

x	2	-2
y	1	-5

Następnie kreślimy (wykreśl!) punkty $A\ (2; 1)$ i $B\ (-2; -5)$ oraz prostą AB. Ponieważ dwa punkty wyznaczają prostą, a punkty A i B są punktami prostej l (bo ich współrzędne spełniają równanie prostej l), przeto prosta AB jest szukaną prostą l.

Z rozważań na początku tego paragrafu wynika, że w postaci $y = mx + n$ można napisać równanie każdej prostej nieprostopadłej do osi X. Aby ułożyć równanie prostej l prostopadłej do osi X, zważmy, że wszystkie punkty takiej prostej mają tę samą odciętą, np. c. Współrzędne punktów prostej l spełniają tedy równanie: $x = c$ (przy dowolnym y). Jeżeli natomiast punkt jakiś nie leży na prostej l, to odcięta jego nie równa się c, a więc współrzędne jego nie spełniają równania $x = c$. Równanie $x = c$ jest przeto *równaniem prostej l prostopadłej do osi X.*

Ćwiczenia.

20. *a)* Napisać równania prostych, które przechodzą przez punkt M $(0;\ -3)$, a z dodatnim kierunkiem osi X tworzą kolejno kąty: 0^0; 30^0; 45^0; 60^0; 120^0; 135^0; 150^0.

b) Napisać równania prostych, które z dodatnim kierunkiem osi X tworzą taki kąt α, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, a na osi Y odcinają kolejno odcinki: -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3.

21. Orzec (bez pomocy rysunku), przez które ćwiartki przechodzą proste mające równania:

a) $y = \frac{2}{3}x + 1$; *b)* $y = -\frac{3}{4}x + 5$; *c)* $y = -x - 3$;
d) $y = 2x - 4$; *e)* $y = -1$; *f)* $y = 3\frac{1}{2}$.

22. Wykreślić proste, których równania dane są w zadaniu poprzednim.

23. *a)* Wyjaśnić, że równanie: $y = mx + 3$, w którym m oznacza parametr zmienny, oznacza pęk prostych przechodzących przez punkt A $(0;\ 3)$. Wybrać z tego pęku prostą przechodzącą przez punkt M $(3;\ -2)$. Jaką wartość dla tej prostej ma m?

b) Wyjaśnić, że równanie: $y = \frac{1}{2}x + n$ określa pęk prostych równoległych. Wybrać z tego pęku prostą przechodzącą przez punkt M $(-3;\ -1)$. Ułożyć równanie tej prostej.

§ 8. Inne postacie równania prostej.

Równanie prostej jest równaniem stopnia pierwszego. Zbadamy, czy każde równanie stopnia pierwszego o dwu zmiennych przedstawia prostą. Równanie takie ma postać:

$$Ax + By = C,$$

gdzie A, B i C oznaczają dowolne stałe.

Jeżeli $B \neq 0$, możemy dane równanie tak przekształcić:

$$By = -Ax + C,$$

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B},$$

$$y = mx + n, \text{ jeżeli } m = -\frac{A}{B},\ n = \frac{C}{B}.$$

Ostatnie równanie przedstawia prostą l nieprostopadłą do osi X. A że każda para wartości x i y spełniająca dane równanie spełnia także równanie ostatnie i na odwrót, przeto prosta l jest również miejscem geometrycznym danego równania.

Jeżeli $B = 0$, lecz $A \neq 0$, wtedy dane równanie ma postać:

$$Ax = C, \text{ a po podzieleniu przez } A \neq 0:$$

$$x = \frac{C}{A}.$$

Miejscem geometrycznym takiego równania jest, jak wyżej wykazaliśmy, prosta prostopadła do osi X.

Jeżeli $A = B = 0$, wtedy dane równanie sprawdza się dla wszelkich par wartości x i y, o ile również $C = 0$. Jeżeli natomiast $A = B = 0$ i $C \neq 0$, wtedy równanie nie spełnia się dla żadnych wartości x i y. W żadnym z tych przypadków nie przedstawia równanie: $Ax + By = C$ prostej. Zatem:

Równanie $Ax + By = C$ przedstawia prostą, jeżeli nie jest równocześnie $A = 0$ i $B = 0$.

Najchętniej sprowadzamy równanie prostej do postaci $y = mx + n$ lub $x = c$, ponieważ wtedy znamy bezpośrednio geometryczne znaczenie współczynników.

Wyprowadzimy jeszcze dwie postacie równania prostej rozwiązując dwa następujące zadania:

Zadanie 1. Znaleźć równanie prostej l przechodzącej przez dany punkt $A\ (x_1;\ y_1)$ i tworzącej z dodatnim kierunkiem osi X dany kąt $\alpha \neq 90^0$.

Równanie szukanej prostej możemy napisać w postaci:

$$y = mx + n.$$

W równaniu tym $m = tg\alpha$ jest wiadome. Należy tylko wyznaczyć n tak, aby prosta l przechodziła przez punkt A, czyli aby współrzędne tego punktu spełniały równanie prostej l. Podstawiając w równaniu prostej x_1 i y_1 zamiast x i y otrzymamy:

$$y_1 = mx_1 + n, \text{ a stąd: } n = y_1 - mx_1.$$

Podstawiając to wyrażenie zamiast n w równaniu prostej otrzymamy:

$$y = mx + y_1 - mx_1, \text{ czyli:}$$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Jest to równanie szukanej prostej l.

I rzeczywiście: Równanie (2) jest równaniem stopnia pierwszego, a więc przedstawia pewną prostą. Prosta ta przechodzi przez punkt A, ponieważ współrzędne punktu A spełniają równanie (2) (obie strony równania stają się zerami, gdy $x = x_1$, $y = y_1$). Pisząc równanie (2) w postaci: $y = mx + (y_1 - mx_1)$ widzimy, że współczynnik kątowy tej prostej wynosi m, a więc że prosta tworzy z dodatnim kierunkiem osi X dany kąt α.

Zadanie II. Znaleźć równanie prostej l przechodzące przez dane punkty: $A(x_1; y_1)$ i $B(x_2; y_2)$.

Jeżeli $x_1 = x_2$, wtedy $l\{ x = x_1$.

Jeżeli $x_1 \neq x_2$, wtedy prosta l nie jest prostopadła do osi X. Ponieważ prosta l przechodzi przez punkt A, przeto równanie jej możemy napisać (jak w zad. I) w postaci:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Współczynnik kątowy m wyznaczamy z warunku, że prosta l przechodzi przez punkt B, tj. że współrzędne punktu B spełniają równanie prostej l. Podstawiamy więc w tym równaniu x_2 i y_2 odpowiednio zamiast x i y i otrzymujemy:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1).$$

Ponieważ według założenia $x_2 \neq x_1$, a więc $x_2 - x_1 \neq 0$, obliczamy z ostatniego równania:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Prosta przechodząca przez punkty $A(x_1; y_1)$ i $B(x_2; y_2)$ ma równanie:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad \text{. . . . .} \quad (3)$$

I rzeczywiście współrzędne punktów A i B spełniają to równanie: Dla $x = x_1$ i $y = y_1$ stają się bowiem obie strony równania zerami; dla $x = x_2$ i $y = y_2$ lewa strona równania przyjmuje wartość $y_2 - y_1$, a prawa wartość $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$, obie są więc równe.

Np.: Prosta przechodząca przez punkty $A(-2; -1)$ i $B(3; 1)$ ma równanie:

$$y + 1 = \frac{1 + 1}{3 + 2}(x + 2), \text{ czyli}$$

$$y + 1 = \tfrac{2}{5}(x + 2),$$

$$y = \tfrac{2}{5}x - \tfrac{1}{5}.$$

Ćwiczenia.

24. Obliczyć (w pamięci) współczynniki kątowe prostych mających równania:

$a)$ $2x + y = 5$; $b)$ $x + 2y = 6$; $c)$ $x - y = 3$;
$d)$ $-2x + 4y = 7$; $e)$ $3y = 5$; $f)$ $-x - 2y = 7$.

Wykreślić te proste.

25. Wykreślić proste mające równania: $3x + 4y = 12$ i $4x - 3y = 3$. Obliczyć, jaki kąt tworzy każda z tych prostych z dodatnim kierunkiem osi X. Obliczywszy te kąty obliczyć przy pomocy rysunku, jaki kąt tworzą ze sobą te proste?

26. $a)$ W równaniu prostej: $Ax + 2y = 3$ wyznaczyć A tak, aby ta prosta przechodziła przez punkt $M(5; -1)$.
$b)$ W równaniu prostej: $5x + By = 3$ wyznaczyć B tak, aby ta prosta przechodziła przez punkt $M(-1; 4)$.

27. Napisać równania prostych przechodzących przez punkt $A(-2; 3)$ i tworzących z dodatnim kierunkiem osi X kolejno kąty: 0^0; 30^0; 45^0; 90^0; 135^0.

28. Ułożyć równania boków trójkąta ABC, jeżeli: $A(-5; -4)$, $B(-1; 4)$, $C(3; -2)$.

29. Ułożyć równania boków trójkąta ABC oraz równania środkowych boków, jeżeli: $A(-1; 0)$, $B(3; 2)$, $C(5; -2)$.

30. Prosta l odcina na osi X wektor $\overline{OA} = c$, a na osi Y wektor $\overline{OB} = n$. Znaleźć równanie prostej l i przekształcić je tak, aby wyrazy zawierające zmienne były po lewej stronie równania, a wyraz nie zawierający zmiennej wynosił 1 i znajdował się po prawej stronie równania. Jakie będzie równanie prostej l, jeżeli:

$a)$ $c = 3$; $n = 5$; $b)$ $c = -4$; $n = 4$;
$c)$ $c = 5$; $n = -2$; $d)$ $c = -3$; $n = -1$.

Wskazówka: Prosta odcina na osi X wektor c, jeśli przechodzi przez punkt $A(c; 0)$ itd.

§ 9. Dwie proste.

Mając dane równania dwu prostych l_1 i l_2 możemy rozstrzygnąć, jakie jest wzajemne położenie tych prostych. Jeżeli istnieje punkt M eżący i na prostej l_1 i na prostej l_2, to współrzędne punktu M muszą spełniać i równanie prostej l_1, i równanie prostej l_2. Lecz i na odwrót: Jeżeli istnieją dwie liczby x_1 i y_1, które podstawione zamiast x i y spełniają i równanie prostej l_1, i równanie prostej l_2, to punkt M mający współrzędne $(x_1; y_1)$ jest wspólnym punktem obu prostych. Liczby spełniające dwa równania z dwiema zmiennymi x i y znajdujemy rozwiązując układ tych równań ze względu na x i y. Zatem:

Współrzędne wspólnego punktu (wspólnych punktów) dwu prostych znajdujemy rozwiązując układ równań tych prostych ze względu na x i y.

Równania prostych są równaniami stopnia pierwszego. Przy rozwiązywaniu układu dwu równań stopnia pierwszego o dwu niewiadomych zajść mogą, jak wiemy, następujące trzy przypadki:

1) Układ równań ma jedno i tylko jedno rozwiązanie.

2) Układ równań nie ma rozwiązania.

3) Układ równań ma nieskończoną ilość rozwiązań; każda para wartości spełniająca jedno równanie układu spełnia także i drugie.

W pierwszym przypadku proste, które są miejscami geometrycznymi tych równań, przecinają się w jednym punkcie.

W drugim przypadku proste nie mają punktu wspólnego; mówimy: proste są równoległe.

W trzecim przypadku proste nakrywają się; każdy punkt jednej prostej jest zarazem punktem drugiej prostej.

Korzystając z powyższych rozważań ogólnych zbadamy, jak zależy wzajemne położenie prostych l_1 i l_2 nieprostopadłych do osi X i mających równania:

$$l_1 \{ y = mx + n,$$
$$l_2 \{ y = m' x + n'$$

od wartości współczynników: m, m', n i n'.

Rozwiązując układ równań prostych l_1 i l_2 np. metodą podstawiania znajdujemy kolejno:

$$mx + n = m'x + n',$$
$$(m - m')\, x = n' - n.$$

Jeżeli $m \neq m'$, wtedy: $x = \frac{n' - n}{m - m'}$. Podstawiając znalezione wyrażenie zamiast x w równaniu prostej l_1 obliczymy:

$$y = m \frac{n' - n}{m - m'} + n = \frac{mn' - mn + mn - m'n}{m - m'} = \frac{mn' - m'n}{m - m'}.$$ Zatem:

Jeżeli $m \neq m'$, wtedy układ równań ma rozwiązanie:

$$x = \frac{n' - n}{m - m'}; \quad y = \frac{mn' - m'n}{m - m'},$$

a więc proste l_1 i l_2 przecinają się w punkcie $C\left(\frac{n' - n}{m - m'}; \frac{mn' - m'n}{m - m'}\right)$.

Jeżeli $m = m'$ i $n \neq n'$, wtedy równanie: $(m - m')\,x = n' - n$ jest sprzeczne, układ równań nie ma rozwiązania; proste l_1 i l_2 nie przecinają się, a więc są równoległe.

Jeżeli $m = m'$ i $n = n'$, wtedy oba równania układu są identyczne; każda para wartości x i y spełniająca pierwsze równanie spełnia także i drugie. Proste l_1 i l_2 nakrywają się.

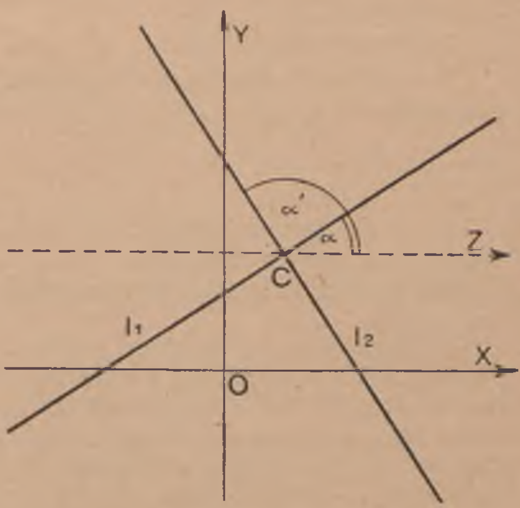
Zapamiętajmy więc:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby proste mające równania: $y = mx + n$ i $y = m'x + n'$ *przecinały się, jest:* $m \neq m'$. *Warunkiem zaś koniecznym i wystarczającym równoległości tych prostych jest:* $m = m'$, $n \neq n'$.

Wyprowadzimy jeszcze warunki prostopadłości dwu prostych, których równania są dane.

Zauważymy przede wszystkim, że proste $x = c$ i $y = n$ są do siebie prostopadłe. Jeżeli żadna z prostych l_1 i l_2 nie jest do osi X prostopadła, wtedy równania ich możemy napisać w postaci:

$$l_1 \{ y = mx + n,$$
$$l_2 \{ y = m'x + n'.$$



Rys. 9.

Przyjmijmy, że $l_1 \perp l_2$ i wykreślmy przez punkt C (rys. 9) przecięcia się prostych l_1 i l_2 oś CZ równoległą do osi X. Jedna z prostych, np. l_1, tworzy z CZ kąt ostry α, a druga kąt rozwarty α'. Łatwo widzieć, że $\operatorname{tg}\alpha = m$ i $\operatorname{tg}\alpha' = m'$. A że $\alpha' = 90^0 + \alpha$, przeto:

$$m' = \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}(90^0 + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{m}.$$

Zważywszy, że z wzoru: $m' = -\dfrac{1}{m}$ wynika: $m = -\dfrac{1}{m'}$ możemy powiedzieć:

Jeżeli dwie proste (nieprostopadłe do osi) są do siebie prostopadłe, wtedy współczynnik kątowy jednej prostej równa się odwrotności współczynnika kątowego drugiej prostej ze znakiem przeciwnym.

Udowodnimy, że i twierdzenie odwrotne jest prawdziwe:

Zakładamy, że $m' = -\frac{1}{m}$, czyli $mm' = -1$. Z ostatniej równości wnioskujemy, że $m = \operatorname{tg} \alpha$ i $m' = \operatorname{tg} \alpha'$ mają znaki przeciwne. Jeden z kątów α i α' jest przeto ostry, a drugi rozwarty. Przyjmijmy, że $\alpha < 90^0$. Z założenia otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \alpha' = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} (90^0 + \alpha).$$

Zważywszy, że tangensy dwóch kątów wypukłych mogą być tylko wtedy równe, kiedy te kąty są równe, znajdziemy:

$$\alpha' = 90^0 + \alpha.$$

Znaczy to, że $l_1 \perp l_2$.

Udowodniliśmy zatem:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby proste mające równania: $y = mx + n$ i $y = m'x + n'$ *były do siebie prostopadle, jest:* $m' = -\frac{1}{m}$.

Na przykładzie wyjaśnimy, jak korzystamy z tych twierdzeń przy rozwiązywaniu różnych zagadnień.

Przykład. Znaleźć odległość punktu $A(-1;\ 4)$ od prostej $l\{y = \frac{4}{3}x - 3$.

Kreślimy znanym sposobem prostą l i punkt A (wykreśl!). Przez odległość punktu A od prostej l rozumiemy długość odcinka AB wykreślonego z A prostopadle do l. Długość odcinka AB potrafimy obliczyć, jeżeli znać będziemy współrzędne jego końców. Ponieważ współrzędne punktu A znamy, chodzi tylko o obliczenie współrzędnych punktu B. Punkt B jest punktem przecięcia się prostej l z prostą AB wykreśloną z A prostopadle do l. Ponieważ równanie prostej l jest dane, potrafimy rozwiązać nasze zadanie, jeżeli znajdziemy równanie prostej AB. Układamy więc następujący plan rozwiązania:

1) Znaleźć równanie prostej AB.
2) Znaleźć współrzędne punktu B.
3) Obliczyć długość odcinka AB.

Rozwiązujemy kolejno te zadania:

1) Prosta AB przechodzi przez punkt $A(-1;\ 4)$, przeto równanie jej możemy (§ 8, wzór 2) tak napisać:

$$y - 4 = m(x + 1).$$

Ponieważ $AB \perp l$, przeto $m = -\frac{3}{4}$. Zatem:

$AB\{y - 4 = -\frac{3}{4}(x + 1)$, a po uporządkowaniu:
$AB\{y = -\frac{3}{4}x + 3\frac{1}{4}$.

2) Współrzędne punktu B znajdziemy rozwiązując układ równań prostych l i AB ze względu na x i y:

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{4}{3}x - 3, \\ y &= -\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{1}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{3}x - 3 &= -\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{1}{4}, \\ 16x - 36 &= -9x + 39, \\ 25x &= 75, \\ x &= 3;\ y = 1. \end{aligned}$$

Zatem: $B\,(3;\ 1)$.

3) Obliczamy AB (§ 4, ust. 2):

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Odległość punktu A od prostej l wynosi 5 j.

Ćwiczenia.

31. Zbadać, jakie wzajemne położenie mają proste:

a) $y = \frac{1}{2}x + 1,$
$y = -\frac{1}{2}x + 5;$

b) $0{,}28\,x + 0{,}5\,y = 1,$
$7x + 12{,}5\,y = -75;$

c) $3x + 4y = 4,$
$4x + 5y = 3;$

d) $2x = 7$
$y = 3x - 7{,}5.$

Wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia się tych prostych, o ile taki punkt istnieje.

32. Obliczyć współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki mają równania:

a) $y = -3,$
$y = x + 2,$
$y = -6x + 9;$

b) $2x - 3y + 1 = 0,$
$3x + 2y - 18 = 0,$
$x + 5y + 7 = 0.$

33. Punkty $A\,(5;\ 6)$, $B\,(-3;\ 8)$, $C\,(-5;\ -8)$ są wierzchołkami trójkąta. Ułożyć równania środkowych boków trójkąta ABC i znaleźć współrzędne punktu przecięcia się dwu z nich. Wykazać, że punkt ten leży także na trzeciej środkowej.

34. Napisać kilka równań prostych równoległych do prostej:

a) $y = 3x;$ *b)* $y = -x + 1;$ *c)* $y = -2;$ *d)* $x = -3.$

35. Znaleźć równanie prostej przechodzącej przez punkt $A\,(-1;\ 2)$ i równoległej do prostej $2y + 3x + 6 = 0$.

36. Punkty $A\,(-3;\ -2)$, $B\,(0;\ 4)$, $C\,(3;\ 0)$ są wierzchołkami równoległoboku. Znaleźć współrzędne czwartego wierzchołka równoległoboku wiedząc, że wierzchołek ten leży w ćwiartce I.

37. Napisać kilka równań prostych prostopadłych do prostej:

a) $y = \frac{3}{5}x$; *b)* $y = x + 1$; *c)* $y = -x + 1$;
d) $y = -2x + 3$; *e)* $y = -2$; *f)* $x = 3$.

38. *a)* Z punktu $A\,(3;\ -1)$ wykreślono prostopadłą do prostej $2x - y + 4 = 0$. Znaleźć jej równanie.

b) Przez punkt A leżący na prostej $2x + 5y = 1$ a mający odciętą $x = -2$ wykreślono prostopadłą do tej prostej. Znaleźć jej równanie.

39. Znaleźć równanie symetralnej odcinka AB, jeżeli:

a) $A\,(-2;\ -3)$, $B\,(4;\ 1)$; *b)* $A\,(-5;\ 2)$, $B\,(3;\ -1)$.

40. Znaleźć wzajemną odległość prostych mających równania: $y = \frac{1}{2}x - 2$ i $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Wskazówka: Przeciąć obie proste prostą prostopadłą do nich dobrawszy ją tak, aby rachunek był możliwie prosty.

41. Punkty $A\,(-2;\ -1)$ i $B\,(1;\ 3)$ są przeciwległymi wierzchołkami prostokąta; dwa boki prostokąta są równoległe do prostej $y = \frac{1}{2}x + 2$. Znaleźć współrzędne pozostałych wierzchołków prostokąta.
42. Punkty $A\,(-5;\ -6)$, $B\,(6;\ -8)$, $C\,(4;\ 6)$ są wierzchołkami trójkąta. Obliczyć bok AC, wysokość do niego prostopadłą i pole trójkąta ABC. Sprawdzić otrzymany wynik obliczając inny bok trójkąta i wysokość do niego prostopadłą.
43. Punkty $A\,(-6;\ 2)$, $B\,(-2\frac{2}{3};\ -4\frac{2}{3})$, $C\,(5;\ 3)$ są wierzchołkami trójkąta. Znaleźć współrzędne punktu S przecięcia się dwu wysokości. Sprawdzić, że trzecia wysokość przechodzi również przez punkt S.
44. Znaleźć współrzędne punktu M, w którym przecinają się symetralne dwóch boków trójkąta ABC, jeżeli: $A\,(-2;\ 1)$, $B\,(2{,}5;\ 2{,}5)$, $C\,(2;\ -1)$. Sprawdzić, że symetralna trzeciego boku przechodzi również przez punkt M.

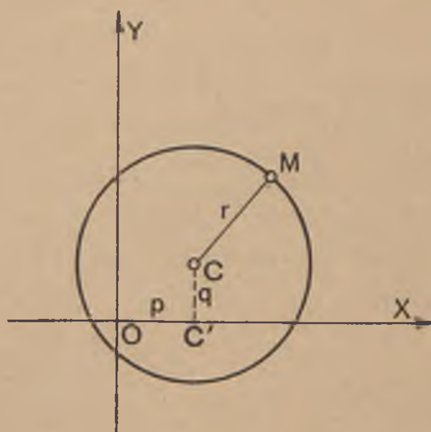
Rozdział II

KRZYWE STOPNIA DRUGIEGO

§ 1. Okrąg.

Okręgiem nazywamy, jak wiadomo, miejsce geometryczne punktów, których odległości od danego punktu C równają się danemu odcinkowi r.

Ułożymy równanie okręgu zakreślonego promieniem r dokoła punktu $C\ (p;\ q)$ (rys. 10).



Rys. 10.

Obierzmy dowolny punkt $M\ (x;\ y)$. Jeżeli M leży na okręgu, wtedy:

$$MC = r,$$

czyli, wobec tego że:

$$MC = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}:$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = r.$$

Jeżeli punkt $M\ (x;\ y)$ nie leży na okręgu, wtedy:

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} \neq r.$$

Równanie: $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = r$ jest tedy szukanym równaniem okręgu. Przekształcimy je podnosząc obie strony do kwadratu. Otrzymamy równanie równoważne (tw. 3 w § 6, rozdz. I):

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Jest to *równanie okręgu* o promieniu r, którego środek leży w punkcie $C\ (p;\ q)$.

Równanie okręgu jest równaniem stopnia drugiego o dwu zmiennych x i y. Zawiera ono 3 stałe: p, q i r. Liczby p i q są liczbami względnymi i oznaczają współrzędne środka okręgu; r oznacza promień okręgu, jest więc zawsze liczbą dodatnią.

Zależnie od wartości p, q i r ma okrąg rozmaite położenia względem osi układu współrzędnych. W szczególności:

Jeżeli $p = q = 0$, wtedy środek okręgu leży w początku układu współrzędnych, a okrąg ma równanie: $x^2 + y^2 = r^2$. Równanie to jest najprostsze ze wszystkich równań okręgu. Jeżeli więc chodzi o zbadanie własności okręgu lub jeżeli wolno nam przyjąć okrąg dowolnie, przyjmujemy jego równanie w tej właśnie postaci.

Równanie okręgu jest równaniem stopnia drugiego. Zbadamy, czy każde równanie stopnia drugiego o dwu zmiennych można uważać za równanie jakiegoś okręgu. W tym celu porządkujemy ogólne równanie okręgu:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2,$$
$$x^2 - 2\,px + p^2 + y^2 - 2\,qy + q^2 = r^2,$$
$$x^2 + y^2 - 2\,px - 2\,qy + (p^2 + q^2 - r^2) = 0.$$

Zauważymy, że w uporządkowanym ogólnym równaniu okręgu brak iloczynu obu zmiennych, a współczynniki przy x^2 i y^2 wynoszą 1. Jeżeli więc w jakimś uporządkowanym równaniu stopnia drugiego o dwu zmiennych znajduje się wyraz xy z współczynnikiem różnym od zera lub jeżeli współczynniki przy x^2 i y^2 nie są równe, możemy być pewni, że miejscem geometrycznym tego równania nie jest okrąg. W przeciwnym razie próbujemy sprowadzić dane równanie do postaci $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, jak wskazują następujące przykłady:

P r z y k ł a d 1. Zbadać, jaką krzywą przedstawia równanie:

$$4\,x^2 + 4\,y^2 + 12\,x - 32\,y + 37 = 0.$$

Dzielimy obie strony równania przez 4:

$$x^2 + y^2 + 3\,x - 8\,y + 9\tfrac{1}{4} = 0.$$

Zestawiamy razem wyrazy zawierające x i wyrazy zawierające y. Wyraz nie zawierający zmiennej przenosimy na stronę prawą:

$$(x^2 + 3\,x) + (y^2 - 8\,y) = -9\tfrac{1}{4}.$$

Dodajemy do wyrażeń w nawiasach takie liczby, aby powstały kwadraty dwumianów. Te same liczby dodajemy po stronie prawej:

$$(x^2 + 3\,x + \tfrac{9}{4}) + (y^2 - 8\,y + 16) = \tfrac{9}{4} + 16 - 9\tfrac{1}{4},$$
$$(x + \tfrac{3}{2})^2 + (y - 4)^2 = 9.$$

Równanie to jest równaniem okręgu, w którym: $p = -\tfrac{3}{2}$; $q = 4$; $r = 3$. Wykreśl ten okrąg.

Przykład 2. Zbadać, jaką krzywą przedstawia równanie:

$$x^2 + y^2 + 4y = 0.$$

Postępując jak w poprzednim przykładzie znajdziemy:

$$x^2 + (y^2 + 4y + 4) = 4,$$
$$x^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Równanie przedstawia okrąg, w którym: $p = 0$; $q = -2$; $r = 2$. Wykreśl ten okrąg.

Przykład 3. Zbadać, jaką krzywą przedstawia równanie:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 9 = 0.$$

Postępujemy jak w poprzednich przykładach:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) = -9,$$
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 4 + 1 - 9,$$
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = -4.$$

Równanie nie przedstawia okręgu, bo prawa strona jest liczbą ujemną, nie może więc równać się r^2. Łatwo zresztą widzieć, że równanie to nie przedstawia w ogóle żadnej krzywej, ponieważ nie posiada rozwiązań. Dla wszelkich wartości x i y lewa strona równania (suma dwóch kwadratów) jest liczbą nieujemną, nie może więc równać się -4.

Okażemy teraz, jak można z równania okręgu wysnuć cały szereg własności tej krzywej. Równanie okręgu przyjmiemy w postaci najprostszej, tj.

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Z równania tego znajdujemy kolejno:

$$y^2 = r^2 - x^2,$$
$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \text{ jeżeli } x^2 \leqq r^2.$$

Jeżeli $x < -r$ albo $x > r$, wtedy wartościom x nie odpowiadają żadne wartości y. Okrąg nie posiada punktów, których odcięte są mniejsze niż $-r$ lub większe niż r.

Wartościom $x = r$ i $x = -r$ odpowiada $y = 0$. Okrąg przecina oś X w punktach: $(r; 0)$ i $(-r; 0)$.

Każdej wartości x spełniającej warunek: $-r < x < r$ odpowiadają dwie wartości y o jednakowych wartościach bezwzględnych a znakach przeciwnych. Znaczy to, że okrąg jest figurą symetryczną względem osi X.

Ponieważ wzór $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ zawiera tylko kwadrat zmiennej x, przeto ujemnym i dodatnim wartościom x o jednakowych wartościach bezwzględnych niewiększych niż r odpowiadają jednakowe wartości y. Znaczy to, że okrąg jest figurą symetryczną względem osi Y.

Z powodu symetrii okręgu względem osi X i Y wystarczy zbadać przebieg tej krzywej w ćwiartce I. Podstawiajmy tedy zamiast x wartości od 0 do r i uwzględniajmy tylko dodatnie wartości y. Znajdziemy: Jeżeli $x = 0$, wtedy $y = r$. Gdy x rośnie, wtedy x^2 rośnie również, zaś $r^2 - x^2$, a więc i $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ maleje. Gdy $x = r$, wtedy $y = 0$. Znaczy to, że łuk krzywej w ćwiartce I opada od punktu $(0; r)$ do punktu $(r; 0)$.

Ogólne równanie okręgu zawiera 3 parametry stałe: p, q i r. Stałe te można tak wyznaczyć, aby okrąg spełniał trzy dane warunki, a więc np. przechodził przez 3 dane punkty, miał dany promień i przechodził przez 2 dane punkty, przechodził przez dwa dane punkty i stykał się z osią X itp. Np.:

Przykład 4. Znaleźć równanie okręgu przechodzącego przez punkty: $A\,(2; 6)$, $B\,(-1; -3)$ i $C\,(-5; +5)$.

Szukany okrąg ma równanie:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Ponieważ punkty A, B i C leżą na okręgu, przeto współrzędne ich spełniają równanie okręgu. Podstawiając tedy w równaniu okręgu zamiast x i y kolejno współrzędne punktów A, B i C otrzymujemy układ równań:

$$\begin{gathered}(2 - p)^2 + (6 - q)^2 = r^2,\\ (-1 - p)^2 + (-3 - q)^2 = r^2,\\ (-5 - p)^2 + (5 - q)^2 = r^2,\end{gathered}$$

z którego obliczymy p, q i r. Wykonywamy najpierw zaznaczone działania:

$$\begin{gathered}4 - 4p + p^2 + 36 - 12q + q^2 = r^2,\\ 1 + 2p + p^2 + 9 + 6q + q^2 = r^2,\\ 25 + 10p + p^2 + 25 - 10q + q^2 = r^2.\end{gathered}$$

Porządkujemy:

$$\begin{gathered}p^2 + q^2 - 4p - 12q + 40 = r^2,\\ p^2 + q^2 + 2p + 6q + 10 = r^2,\\ p^2 + q^2 + 10p - 10q + 50 = r^2.\end{gathered}$$

W celu wyrugowania r^2 odejmujemy od pierwszego równania najpierw stronami równanie drugie, a potem trzecie. Otrzymamy:

$$\begin{gathered}-6p - 18q + 30 = 0,\\ -14p - 2q - 10 = 0,\end{gathered}$$

a po uproszczeniu:

$$\begin{gathered}p + 3q - 5 = 0,\\ 7p + q + 5 = 0.\end{gathered}$$

Mnożąc drugie równanie przez 3 i odejmując stronami od pierwszego znajdziemy: $-20p - 20 = 0$, a stąd: $p = -1$. Przy pomocy tej wartości obliczamy: $q = 2$.

Niewiadomą r wyznaczymy z równania: $(2-p)^2 + (6-q)^2 = r^2$. Znajdziemy: $r^2 = 9 + 16 = 25$; a że r jest liczbą dodatnią przeto: $r = 5$.

Rachunek wskazuje, że istnieje tylko jeden okrąg, przechodzący przez punkty A, B i C; ma on równanie:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

Przykład 5. Znaleźć równanie okręgu stykającego się z osiami X i Y oraz przechodzącego przez punkt $A\ (1;\ 2)$.

Równanie szukanego okręgu możemy napisać w postaci:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Okrąg styka się z osią X wtedy i tylko wtedy, jeżeli odległość jego środka od osi X równa się promieniowi, a więc jeżeli $q = \pm r$. Ponieważ punkt A okręgu znajduje się nad osią X, przeto i środek okręgu stykającego się z osią X musi leżeć nad osią; jest więc: $q = +r$. Podobnie znajdujemy z warunku, że okrąg styka się z osią Y, że musi być: $p = +r$. Równanie okręgu przyjmuje postać:

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2.$$

Ponieważ punkt A leży na okręgu, a więc współrzędne jego spełniają równanie okręgu, przeto podstawiając w ostatnim równaniu zamiast x i y współrzędne punktu A otrzymamy równanie:

$$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2.$$

Z równania tego obliczamy r:

$$1 - 2r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2,$$
$$r^2 - 6r + 5 = 0,$$
$$\Delta = 36 - 20 = 16;\quad \sqrt{\Delta} = 4;$$
$$r_1 = \frac{6-4}{2} = 1;\quad r_2 = \frac{6+4}{2} = 5.$$

Istnieją tedy dwa okręgi spełniające warunki zadania; mają one równania:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1;$$
$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25.$$

Ćwiczenia.

45. Wykreślić miejsca geometryczne równań:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 4$; *b)* $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 6$;
c) $x^2 + y^2 + 5x - y + 2{,}5 = 0$; *d)* $3x^2 + 3y^2 - 4x + 3y = 8$;
e) $x^2 + y^2 = 5$; *f)* $x^2 + y^2 - 2x = 8$;
g) $2x^2 + 2y^2 + 3y = 2$; *h)* $x^2 + y^2 - 10x = 0$;
i) $2x^2 + 2y^2 - 5y = 0$; *j)* $x^2 - 6x + y^2 + 8y = 0$.

46. Znaleźć równanie okręgu przechodzącego przez punkty:

a) $A\,(2;\ 3)$, $B\,(4;\ -1)$, $C\,(-5;\ -4)$;
b) $A\,(0;\ 1)$, $B\,(-5{,}4;\ -0{,}8)$, $C\,(-3;\ 4)$.

47. Środek okręgu leży na prostej $y = 2x + 1$, a okrąg przechodzi przez punkty: $A\,(1;\ 1)$, $B\,(3;\ 3)$. Znaleźć jego równanie.

48. Środek okręgu o promieniu $r = 5$ leży na prostej $x - 7y = 7$, a okrąg przechodzi przez punkt $A\,(-4;\ 2)$. Znaleźć jego równanie.

49. Okrąg przechodzi przez punkt $A\,(-1;\ 2)$ i styka się z osiami X i Y. Znaleźć jego równanie.

Wskazówka: Ponieważ A leży w ćwiartce II, przyjąć należy: $p = -r$, $q = r$.

50. Okrąg przechodzi przez punkty: $A\,(2;\ 1)$ i $B\,(3;\ 2)$ oraz styka się z osią X. Znaleźć jego równanie.

51. Okrąg o promieniu $r = 6{,}5$ styka się z osią Y i przechodzi przez punkt $A\,(4;\ -2)$. Znaleźć jego równanie.

§ 2. Okrąg i prosta.

Jeżeli dana prosta l ma z danym okręgiem k punkt wspólny, to współrzędne tego punktu muszą spełniać i równanie prostej l, i równanie okręgu k. Jeżeli na odwrót pewna para wartości x i y spełnia i równanie prostej l, i równanie okręgu k, to wartości te są współrzędnymi wspólnego punktu prostej l i okręgu k. Chcąc tedy znaleźć współrzędne wspólnego punktu prostej l i okręgu k, należy rozwiązać układ równań prostej l i okręgu k. Wartości x i y spełniające ten układ równań (i tylko takie wartości) są współrzędnymi wspólnego punktu prostej i okręgu. Jeżeli układ równań nie ma rozwiązania, wtedy prosta l i okrąg k nie mają żadnego punktu wspólnego.

Niechaj dane będą: okrąg k i prosta l. Chcąc zbadać ogólnie, jakie położenie może mieć prosta l względem okręgu k, obierzmy tak układ współrzędnych, aby początek układu leżał w środku okręgu, a oś X nie była prostopadła do prostej l. Wtedy okrąg ma równanie: $x^2 + y^2 = r^2$, a prosta: $y = mx + n$. Rozwiążmy układ równań:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$
$$y = mx + n.$$

Otrzymamy kolejno:

$$x^2 + (mx + n)^2 = r^2,$$
$$x^2 + m^2 x^2 + 2\,mnx + n^2 = r^2,$$
$$(1 + m^2)\,x^2 + 2\,mnx + (n^2 - r^2) = 0;$$
$$\Delta = 4\,m^2 n^2 - 4\,(1 + m^2)\,(n^2 - r^2) = 4\,(r^2 + r^2 m^2 - n^2).$$

Jeżeli $\Delta < 0$, wtedy układ równań nie ma rozwiązania. Prosta l nie ma z okręgiem k żadnego punktu wspólnego.

Jeżeli $\Delta > 0$, wtedy układ równań ma dwa rozwiązania. Prosta l przecina okrąg k w dwóch punktach. Taka prosta nazywa się *sieczną*.

Jeżeli $\Delta = 0$, wtedy układ równań ma tylko jedno rozwiązanie. Prosta l ma z okręgiem k tylko jeden punkt wspólny. Prosta taka nazywa się *styczną*, a wspólny punkt prostej i okręgu *punktem styczności*.

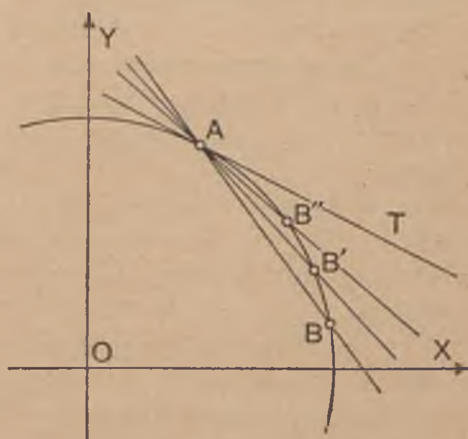
Dochodzimy więc jedynie na podstawie rozważania własności równań okręgu i prostej do znanego twierdzenia:

Prosta może mieć względem okręgu trojakie położenie: albo nie ma z okręgiem żadnego punktu wspólnego, albo przecina okrąg w dwóch punktach, albo styka się z okręgiem w jednym punkcie.

Powyższe rozważania wskazują, że położenie prostej względem okręgu zależy od wartości wyróżnika równania, które otrzymamy przez wyrugowanie jednej zmiennej z równań okręgu i prostej. Napiszmy takie równanie w postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0.$$

Wyróżnikiem tego równania jest: $\Delta = b^2 - 4\,ac.$



Rys. 11.

Załóżmy, że $\Delta \geqq 0$, a więc że równanie ma dwa pierwiastki x_1 i x_2, różne, gdy $> \Delta$ 0, a równe, gdy $\Delta = 0$. Pierwiastki te są oczywiście odciętymi punktów A i B (rys. 11), w których prosta przecina okrąg. Wiadomo, że: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$; stąd otrzymujemy: $b = -a\,(x_1 + x_2)$, $c = ax_1 x_2$. Przy pomocy tych wzorów możemy przekształcić wyróżnik Δ w następujący sposób:

$$\Delta = b^2 - 4\,ac = a^2\,(x_1 + x_2)^2 - 4\,ax_1\,x_2 = a^2\,[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = \\ = a^2\,(x_1{}^2 + 2\,x_1\,x_2 + x_2{}^2 - 4\,x_1\,x_2) = a^2\,(x_1{}^2 - 2\,x_1\,x_2 + x_2{}^2) = \\ = a^2\,(x_1 - x_2)^2.$$

Wzór ten wskazuje, że wyróżnik Δ jest proporcjonalny do kwadratu różnicy odciętych punktów A i B. Jeżeli punkt A położenia swego nie zmienia, a punkt B zbliża się po okręgu coraz bardziej do A przyjmując położenia B, B', B'' ... (rys. 11), wtedy $(x_1 - x_2)^2$, a więc i wyróżnik Δ maleje i zbliża się coraz bardziej do zera. Pogląd wskazuje, że wtedy sieczna obracając się dokoła punktu A zbliża się coraz bardziej do stycznej AT. Gdy Δ stanie się zerem, wtedy $x_1 = x_2$, punkt B pada na punkt A, a sieczna AB przechodzi w styczną AT. Rzeczywiście prosta AT, dla której $\Delta = 0$, ma jak wyżej wykazaliśmy, z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, jest więc (według znanej definicji stycznej okręgu) jego styczną.

Oprócz okręgu rozpatrywać będziemy w tej książce także inne krzywe, których równania są równaniami stopnia drugiego, czyli tzw. *krzywe stopnia drugiego*. Okaże się, że istnieją czasem proste, które mają z taką krzywą jeden punkt wspólny, ale z krzywą się nie stykają, lecz przecinają ją przechodząc z jednej strony krzywej na drugą. Zajdzie tedy potrzeba określenia stycznej takiej krzywej. Określenie to uzyskamy zgodnie z poglądem w następujący sposób: Rugując z równania krzywej stopnia drugiego i równania prostej jedną zmienną (np. y) otrzymujemy na ogół równanie mające postać: $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$. Powtarzając dosłownie poprzednie rozważania o wyróżniku Δ tego równania i jego znaczeniu geometrycznym znajdujemy, że gdy punkt B (rys. 11) zbliża się do punktu A, wtedy Δ zbliża się do zera, a sieczna AB do prostej AT, która odpowiada wartości $\Delta = 0$ i ma z krzywą tylko jeden punkt wspólny. Zgodnie z poglądem nazwiemy prostą AT styczną krzywej przyjmując następujące określenie:

Styczną krzywej stopnia drugiego nazywamy prostą mającą takie równanie, że rugując z równania prostej i równania krzywej jedną zmienną otrzymujemy równanie stopnia drugiego, którego wyróżnik jest zerem.

Przykład 1. Znaleźć równanie prostej, która z okręgiem $x^2 + y^2 - 3\,x - 4\,y = 0$ styka się w punkcie M (3; 4).

Prosta przechodząca przez punkt M ma równanie (rozdział I, § 8, wzór 2): $y - 4 = m\,(x - 3)$. Współczynnik kątowy m należy tak wyznaczyć, aby układ równań okręgu i prostej, tj. układ:

$$x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0,$$
$$y - 4 = m(x - 3),$$

miał tylko jedno rozwiązanie.

Wyrażając z drugiego równania y za pomocą x i podstawiając znalezione wyrażenie zamiast y w równaniu pierwszym otrzymamy:

$$y = mx - 3m + 4,$$
$$x^2 + (mx - 3m + 4)^2 - 3x - 4(mx - 3m + 4) = 0,$$
$$x^2 + m^2x^2 + 9m^2 + 16 - 6m^2x + 8mx - 24m - 3x - 4mx + 12m -$$
$$- 16 = 0,$$
$$(1 + m^2)x^2 - (6m^2 - 4m + 3)x + (9m^2 - 12m) = 0.$$

Równanie to ma jeden tylko pierwiastek, a więc układ równań jedno rozwiązanie, jeżeli wyróżnik ostatniego równania jest zerem, a więc jeżeli:

$$\Delta = (6m^2 - 4m + 3)^2 - 4(1 + m^2)(9m^2 - 12m) = 0.$$

Porządkujemy i rozwiązujemy to równanie:

$$36m^4 + 16m^2 + 9 - 48m^3 + 36m^2 - 24m - 36m^2 +$$
$$+ 48m - 36m^4 + 48m^3 = 0,$$
$$16m^2 + 24m + 9 = 0,$$
$$(4m + 3)^2 = 0,$$
$$m = -\tfrac{3}{4}.$$

Szukana styczna ma więc równanie:

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3), \text{ czyli:}$$
$$y = -\tfrac{3}{4}x + 6\tfrac{1}{4}.$$

P r z y k ł a d 2. Z punktu $A(7; 1)$ wykreślono styczne do okręgu: $x^2 + y^2 = 25$. Znaleźć ich równania.

Szukana styczna przechodzi przez punkt A, ma więc równanie:

$$y - 1 = m(x - 7).$$

Współczynnik m należy tak wyznaczyć, aby układ równań:

$$x^2 + y^2 = 25,$$
$$y - 1 = m(x - 7)$$

miał tylko jedno rozwiązanie.

Postępując jak w przykładzie 1 znajdujemy kolejno:

$$y = mx - 7m + 1$$
$$x^2 + m^2x^2 + 49m^2 + 1 - 14m^2x + 2mx - 14m = 25,$$
$$(1 + m^2)x^2 - 2m(7m - 1)x + (49m^2 - 14m - 24) = 0;$$
$$\Delta = 4m^2(7m - 1)^2 - 4(1 + m^2)(49m^2 - 14m - 24) = 0.$$

Po uproszczeniu przez 4 i wykonaniu działań otrzymamy:

$$49m^4 - 14m^3 + m^2 - 49m^2 + 14m + 24 - 49m^4 + 14m^3 + 24m^2 = 0,$$
$$- 24m^2 + 14m + 24 = 0,$$
$$12m^2 - 7m - 12 = 0.$$

Rozwiązujemy to równanie:

$$\Delta' = 49 + 576 = 625; \quad \sqrt{\Delta'} = 25;$$

$$m = \frac{7 \pm 25}{24}.$$

Równanie ma dwa pierwiastki:

$$m_1 = \tfrac{4}{3}; \quad m_2 = -\tfrac{3}{4}.$$

Istnieją zatem dwie styczne z punktu $A\ (7; 1)$ do okręgu: $x^2 + y^2 = 25$. Mają one równania:

$$y - 1 = \tfrac{4}{3}(x - 7), \text{ czyli: } y = \tfrac{4}{3}x - 8\tfrac{1}{3}$$

$$\text{i} \quad y - 1 = -\tfrac{3}{4}(x - 7), \text{ czyli: } y = -\tfrac{3}{4}x + 6\tfrac{1}{4}.$$

Ćwiczenia.

52. *a)* Ile wspólnych punktów z okręgiem: $4x^2 + 4y^2 = 169$ ma każda z prostych: $2x + 10y = 13$; $x + y = 10$; $2y = 13$?
b) Ile punktów wspólnych z okręgiem: $x^2 + 6x + y^2 = 0$ ma każda z prostych: $y = x + 6$; $y = \frac{3}{4}x + 6$; $x = 1$?
53. Wyznaczyć n tak, aby prosta $y = x + n$ stykała się z okręgiem: $2x^2 + 2y^2 + 4x = 7$.
54. Jeden wierzchołek kwadratu leży w punkcie $A\ (2; -1)$, a okrąg opisany na nim ma równanie: $x^2 + y^2 - x + 6y + 3 = 0$. Obliczyć współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.
55. W okrąg $x^2 + y^2 = 25$ wpisano prostokąt, którego dwa wierzchołki leżą na prostej: $7y - x = 25$. Znaleźć współrzędne wierzchołków prostokąta.
56. W równaniu okręgu: $x^2 + y^2 = r^2$ wyznaczyć r tak, aby okrąg ten stykał się z prostą: $4x + 3y = 25$.
57. Obliczyć długość cięciwy okręgu: $4x^2 + 4y^2 = 25$ leżącej na prostej: $x + 2y = 5$.
58. Znaleźć równanie stycznej okręgu: $x^2 + y^2 = 25$ równoległej do prostej: $y = -\frac{3}{4}x$.
59. Jak wielki musi być promień okręgu leżącego w pierwszej ćwiartce i stykającego się z osiami X i Y, aby ten okrąg stykał się z prostą: $y = -\frac{4}{3}x + 4$?

§ 3. Poszukiwanie miejsc geometrycznych.

Podobnie jak równanie okręgu znajdujemy także równania innych krzywych na podstawie ich określeń jako miejsc geometrycznych punktów o pewnych własnościach. Znalezione równania pozwalają zbadać własności odpowiednich miejsc geometrycznych. Zdarza się, że poszukując miejsca geometrycznego punktów o pewnej własności W otrzymujemy równanie znanej już krzywej. Wtedy znajdujemy już wyczerpującą odpowiedź na postawione pytanie w postaci: Miejscem geometrycznym punktów o własności W jest okrąg, prosta, elipsa itp.; badanie własności znalezionego miejsca geometrycznego staje się już zbędnym. Wyjaśnimy to na kilku przykładach.

Przykład 1. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, których odległości od punktu $A\,(-1;\,-2)$ pozostają do odległości ich od punktu $B\,(2;\,2)$ w stosunku $3:2$.

Punkt $M\,(x;\,y)$ jest wtedy i tylko wtedy punktem szukanego miejsca geometrycznego, jeżeli $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{2}$, czyli (po wyrażeniu MA i MB za pomocą współrzędnych punktów A, B i M):

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}}=\frac{3}{2}.$$

Ponieważ obie strony tego równania są liczbami dodatnimi, wolno obie strony podnieść do kwadratu (tw. 3 w § 6 rozdz. I). Otrzymamy:

$$\frac{(x+1)^2+(y+2)^2}{(x-2)^2+(y-2)^2}=\frac{9}{4}.$$

Po uwolnieniu tego równania od ułamków i po uporządkowaniu otrzymamy:

$$5\,x^2-44\,x+5\,y^2-52\,y+52=0.$$

Aby się przekonać, czy równanie to przedstawia okrąg, przekształcamy je tak, jak w przykładzie 1 w § 1. Otrzymamy:

$$x^2-8{,}8\,x+y^2-10{,}4\,y=-10{,}4,$$

$$(x-4{,}4)^2+(y-5{,}2)^2=4{,}4^2+5{,}2^2-10{,}4,$$

$$(x-4{,}4)^2+(y-5{,}2)^2=36.$$

Jest to równanie okręgu o promieniu $r=6$, którego środek leży w punkcie $C(4{,}4;\,5{,}2)$. Okrąg ten jest miejscem geometrycznym punktów, których odległości od A i od B pozostają do siebie w takim stosunku jak $3:2$.

Przykład 2. Dany jest odcinek $AB=2\,a$. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, których odległości od A i od B pozostają do siebie w danym stałym stosunku $m:n$.

Chcąc do rozwiązania tego zadania zastosować metodę geometrii analitycznej należy przede wszystkim obrać układ współrzędnych. Od stosownego obrania układu współrzędnych zależy w znacznym stopniu przejrzystość rachunku. Obierzmy początek układu współrzędnych w środku odcinka AB, a za oś X przyjmijmy prostą AB. Wtedy: $A(-a;\,0)$, $B(a;\,0)$.

Punkt M jest punktem szukanego miejsca geometrycznego wtedy i tylko wtedy, jeżeli:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}, \text{ czyli: } \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{m}{n}.$$

Po uporządkowaniu przyjmuje ostatnie równanie postać:

$$(m^2 - n^2)\,x^2 - 2\,a\,(m^2 + n^2)\,x + (m^2 - n^2)\,y^2 + (m^2 - n^2)\,a^2 = 0.$$

Aby rozstrzygnąć, co jest miejscem geometrycznym tego równania, rozróżnimy dwa przypadki:

1) Jeżeli $m = n$, wtedy ostatnie równanie przyjmuje postać:

$$-\,2\,a\,(m^2 + n^2)\,x = 0, \text{ czyli } x = 0.$$

Jest to równanie osi Y. A że oś Y jest symetralną odcinka AB, przeto: Miejscem geometrycznym punktów równo oddalonych (przyjęliśmy, że $m = n$) od końców odcinka AB jest symetralna tego odcinka.

2) Jeżeli $m \neq n$, przekształcamy równanie tak jak w przykładzie 1:

$$x^2 - 2a\,\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}\,x + y^2 = -\,a^2,$$

$$\left(x - \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}\,a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}\right)^2 a^2 - a^2.$$

Po wykonaniu działań po stronie prawej otrzymamy:

$$\left(x - \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}\,a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2\,m\,n}{m^2 - n^2}\right)^2.$$

Równanie to jest równaniem okręgu, którego środek leży w punkcie $C\left(\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2}\,a;\ 0\right)$, a którego promień $r = \left|\frac{2\,m\,n}{m^2 - n^2}\right|$. Okrąg ten jest miejscem geometrycznym punktów, których odległości od końców A i B odcinka $AB = 2\,a$ pozostają do siebie w stosunku $m : n$, gdzie $m \neq n$.

Jeżeli chodzi o konstrukcję tego okręgu, to najłatwiej wykreślić najpierw punkty D i E, w których okrąg przecina oś X. Obliczyć współrzędne tych punktów można z równania okręgu.

P r z y k ł a d 3. Punkt A ma w pewnej chwili współrzędne: $x = 8\,cm$, $y = 5\,cm$ i porusza się tak, że odcięta jego rośnie proporcjonalnie do czasu t wzrastając o $4\,cm$/sek., a rzędna maleje proporcjonalnie do t zmniejszając się o $2\,cm$/sek. Jaką linię kreśli punkt A?

Jeżeli czas t zaczniemy mierzyć od chwili, w której punkt A ma współrzędne $(8;\ 5)$, to po t sekundach punkt A będzie miał współrzędne:

$$x = 8 + 4\,t;\quad y = 5 - 2\,t.$$

Te dwa równania dają już pośrednio odpowiedź na postawione pytanie przydzielając każdej wartości x pewną wartość y. Przyjmijmy bowiem na x pewną wartość; pierwsze równanie pozwala obliczyć wartość t odpowiadającą tej wartości x. Podstawiając tę wartość zamiast t w drugim równaniu możemy obliczyć wartość y odpowiadającą przyjętej wartości x. Powyższe dwa równania przedstawiają tedy rzeczywiście *przy pomocy parametru* t miejsce geometryczne różnych położeń punku A w ciągu ruchu.

Poprzednie rozważania wskazują również, że równanie szukanego miejsca geometrycznego można otrzymać łatwo w postaci zwykłej (bez parametru); wystarczy w tym celu z obu równań wyrugować parametr t. Mnożąc drugie równanie przez 2 i dodając stronami do pierwszego otrzymamy:

$$x + 2y = 18, \text{ a stąd:}$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 9.$$

Znajdujemy więc, że punkt A porusza się po prostej mającej równanie: $y = -\frac{1}{2}x + 9$.

Przykład 4. Dany jest odcinek $AB = 2a$. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, w których przecinają się proste wykreślone przez punkt A z prostymi wykreślonymi do nich prostopadle z punktu B.

Obieramy prostą AB za oś X, a początek układu przyjmujemy w środku odcinka AB. Wtedy: $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$.

Przede wszystkim zauważymy, że punkty A i B są punktami szukanego miejsca geometrycznego. Kreśląc bowiem przez A prostą AB, a z punktu B do niej prostopadłą, otrzymamy jako punkt przecięcia się tych prostopadłych punkt B. Kreśląc zaś z A równoległą do osi Y, a z B prostą AB prostopadłą do tamtej, otrzymamy jako punkt przecięcia się tych prostopadłych punkt A.

Wykreślmy teraz przez punkt A prostą l różną od AB i nieprostopadłą do AB. Równanie takiej prostej możemy napisać w postaci:

$$y = m(x + a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gdzie $m \neq 0$. Prosta l' wykreślona z B prostopadle do l ma równanie:

$$y = -\frac{1}{m}(x - a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Punkt, którego współrzędne spełniają układ równań (1) i (2), a więc punkt przecięcia się prostych l i l' jest oczywiście punktem szukanego miejsca geometrycznego. Przyjmując na m różne wartości wyznaczyć możemy dowolną ilość punktów szukanej krzywej. Jeżeli na odwrót punkt C jest punktem szukanego miejsca geometrycznego, różnym od A i od B, wtedy $AC \perp BC$. Przyjmując $tg \sphericalangle CAB = m$ widzimy, że przy tej wartości m współrzędne punktu C spełniać muszą równania (1) i (2). Układ równań (1) i (2) przedstawia tedy przy pomocy parametru m szukane miejsce geometryczne (z wyjątkiem punktów A i B). Rugując z tych równań parametr m możemy, jak w poprzednim przykładzie, otrzymać równanie szukanego miejsca geometrycznego w postaci równania z dwiema zmiennymi bez parametru. Najłatwiej wyrugujemy m z równań (1) i (2) mnożąc stronami oba równania. Otrzymamy kolejno:

$$y^2 = -(x^2 - a^2),$$

$$y^2 = -x^2 + a^2,$$

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Współrzędne punktów szukanego miejsca geometrycznego spełniające równania (1) i (2) spełniają oczywiście także równanie (3); to ostatnie jest także spełnione dla współrzędnych punktów $A(-a, 0)$ i $B(a, 0)$, co łatwo stwierdzić bezpośrednio. Lecz i na odwrót: Przyjmijmy na x i y parę wartości spełniających równanie (3). Jeżeli $y = 0$, wtedy $x = \pm a$; są to współrzędne punktów A i B należących do szukanego miejsca geometrycznego. Jeżeli $y \neq 0$, wyznaczmy taką liczbę m, aby przy przyjętych wartościach x i y spełnione było równanie (2); przyjmijmy więc $m = -\frac{x-a}{y}$. Wtedy z równania (3) wynika:

$$y^2 = a^2 - x^2 = (a + x)(a - x), \text{ a więc:}$$

$$y = (a + x)\frac{a - x}{y} = m(a + x) \text{ zgodnie z równaniem (1).}$$

Wskazuje to, że para wartości x i y spełniająca równanie (3) spełnia także równania (1) i (2), a więc przedstawia współrzędne punktu szukanego miejsca geometrycznego.

$x^2 + y^2 = a^2$ jest więc równaniem szukanego miejsca geometrycznego. Jest to równanie okręgu zakreślonego na AB jako na średnicy.

Ćwiczenia.

60. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od punktu $A(-1; 3)$ i od punktu $B(3; 1)$.
61. Dany jest odcinek $AB = 2a$. Znaleźć miejsce geometryczne punktów mających tę własność, że kwadrat odległości każdego z tych punktów od punktu A jest od kwadratu jego odległości od punktu B większy o c^2, gdzie c oznacza dany odcinek.
62. Na danej wspólnej podstawie $AB = 2a$ budujemy takie trójkąty, w których suma kwadratów pozostałych dwóch boków wynosi c^2, gdzie c oznacza dany odcinek. Znaleźć miejsce geometryczne wierzchołków takich trójkątów.
63. Kreślimy odcięte punktów prostej $y = -\frac{4}{3}x + 6$, a przy ich końcach rzędne. Znaleźć miejsce geometryczne środków rzędnych.
64. Z punktu $M(7; 1)$ kreślimy do punktów prostej $y = \frac{3}{4}x + 2$ odcinki. Znaleźć miejsce geometryczne środków tych odcinków.
65. Osie X i Y układu współrzędnych przecinamy prostymi równoległymi do prostej $y = mx$, gdzie $m \neq 0$. Znaleźć miejsce geometryczne środków odcinków tych prostych zawartych między osiami układu.
66. Dany jest bok $OA = a$ trójkąta i kąt γ przy O leżący. Trzeci wierzchołek B trójkąta porusza się po lewym ramieniu kąta γ. Jaką linię kreśli środek boku AB?
67. Statek płynie z punktu O (początek układu współrzędnych) w kierunku dodatniej osi Y z prędkością 36 km/godz., a równo-

cześnie wiatr znosi statek w kierunku dodatniej osi X z prędkością 18 km/godz. Po jakiej linii porusza się statek?

68. Punkt M porusza się tak, że po t sek. odcięta jego $x = a \sin \alpha t$, a rzędna $y = a \cos \alpha t$, gdzie a i α oznaczają dane liczby. Jaką linię kreśli punkt M?

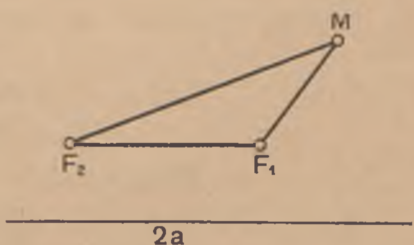
Wskazówka: t można wyrugować przy pomocy wzoru: $\sin^2 \alpha t + \cos^2 \alpha t = 1$.

69. W równoległoboku przegubowym dane są dwa boki: $OA = a$ i $OB = b$. Bok a położenia swego nie zmienia, a bok b obraca się dokoła punktu O. Jaką linię kreśli punkt przecięcia się przekątnych równoległoboku?

§ 4. Elipsa.

Elipsą nazywamy miejsce geometryczne punktów mających tę własność, że suma odległości każdego z nich od dwóch danych punktów jest wielkością stałą.

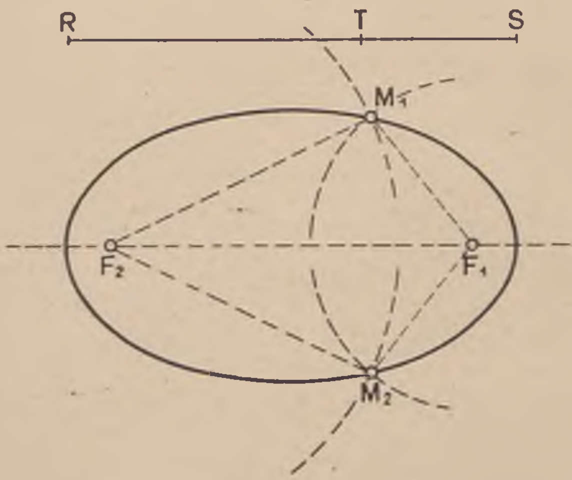
Niechaj dane będą (rys. 12) dwa punkty F_1 i F_2 oraz stały odcinek $2a$. Punkt M jest punktem elipsy wtedy i tylko wtedy, gdy $MF_1 + MF_2 = 2a$. Punkty F_1 i F_2 nazywamy *ogniskami* elipsy, a połowę ich wzajemnej odległości *mimośrodem*. Mimośród elipsy oznaczać będziemy literą c, tak że $F_1F_2 = 2c$. Jeżeli w ogóle istnieć mają punkty elipsy, musi być $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$, a więc $2a > 2c$, czyli $a > c$. Odcinki MF_1 i MF_2 nazywamy *promieniami wodzącymi*. Do każdego punktu elipsy należą dwa promienie wodzące; suma ich wynosi $2a$.



Rys. 12.

Mając dany odcinek $RS = 2a$ oraz ogniska F_1 i F_2 (rys. 13) elipsy można wyznaczyć konstrukcyjnie dowolną ilość punktów tej krzywej w następujący sposób: Dzielimy RS dowolnie obranym punktem T na dwie części i kreślimy promieniem RT okrąg dokoła punktu F_2, a promieniem ST okrąg dokoła punktu F_1. Punkty przecięcia się obu okręgów M_1 i M_2 są punktami elipsy, ponieważ $M_1F_2 + M_1F_1 = RT + ST = 2a$ i $M_2F_2 + M_2F_1 = RT + ST = 2a$. Dzieląc odcinek RS na inne dwie części i powtarzając poprzednią konstrukcję możemy otrzymać dowolną ilość punktów elipsy.

Nie trudno też wyjaśnić następujący mechaniczny sposób rysowania elipsy: Na nitce wiążemy dwa węzły w odległości $2a$ od siebie i przytwierdzamy te węzły szpilkami: jeden w punkcie F_1, drugi w punkcie F_2. Ostrzem ołówka wyprężamy nitkę i posuwając je po papierze baczymy, aby nitka była zawsze wyprężona. Ostrze ołówka zakreśli elipsę.



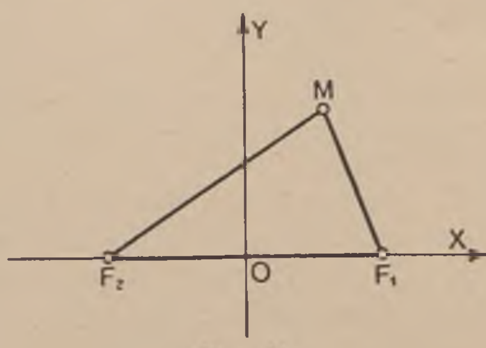
Rys. 13.

Ułożymy równanie elipsy obierając (rys. 14) za oś X układu prostą $F_1 F_2$, a za początek układu środek odcinka $F_1 F_2$. Wtedy F_1 $(c; 0)$, F_2 $(-c; 0)$. Jeżeli punkt M $(x; y)$ jest punktem elipsy, wtedy:

$$MF_2 + MF_1 = 2a, \text{ czyli:}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Jeżeli punkt M nie jest punktem elipsy, wtedy ostatnie równanie nie jest spełnione. Równanie to jest więc równaniem elipsy. Przekształ-



Rys. 14.

cimy je tak, aby nie zawierało pierwiastków. W tym celu podnosimy obie strony równania do kwadratu. Ponieważ obie strony równania są dodatnie, otrzymamy równanie równoważne (tw. 3 w § 6, rozdz. I.):

$$(x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{[(x+c)^2+y^2][(x-c)^2+y^2]} + \\ + (x-c)^2 + y^2 = 4a^2.$$

Po wykonaniu zaznaczonych działań, uproszczeniu przez 2 i przeniesieniu pierwiastka na lewą stronę równania a pozostałych wyrazów na stronę prawą otrzymamy:

$$\sqrt{x^4 - 2c^2x^2 + c^4 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 + y^4} = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2.$$

Podnieśmy obie strony tego równania do kwadratu. Ponieważ (po stronie prawej) $a^2 > c^2$ i (jak niżej wykażemy) $a^2 \geqq x^2 + y^2$, przeto prawa strona równania jest dodatnia; a że strona lewa równania jest również dodatnia, otrzymujemy równanie równoważne:

$$x^4 - 2c^2x^2 + c^4 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 + y^4 = 4a^4 + c^4 + x^4 + y^4 - \\ - 4a^2c^2 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 + 2c^2x^2 + 2c^2y^2 + 2x^2y^2.$$

Po uporządkowaniu otrzymamy:

$$4(a^2 - c^2)x^2 + 4a^2y^2 = 4a^2(a^2 - c^2).$$

Uprośćmy równanie przez 4 i oznaczmy dodatnią liczbę $a^2 - c^2$ przez b^2; otrzymamy:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

To równanie jest równoważne poprzednim, jak wyżej zaznaczyliśmy, jeżeli $x^2 + y^2 \leqq a^2$. Wykażemy, że warunek ten jest spełniony dla wszystkich wartości x spełniających ostatnie równanie. Dzieląc obie strony tego równania przez b^2, znajdujemy:

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2; \text{ a że } a^2 = b^2 + c^2, \text{ przeto:}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2}{b^2}y^2 = a^2.$$

Ostatnie równanie wskazuje, że do $x^2 + y^2$ należy dodać nieujemną liczbę $\frac{c^2}{b^2}y^2$, aby otrzymać a^2. Dla wszelkich więc wartości spełniających ostatnie równanie jest: $x^2 + y^2 \leqq a^2$. Zatem:

Równanie: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *jest równaniem elipsy.* $2a$ *jest stałą sumą promieni wodzących;* b *wprowadziliśmy na podstawie wzoru:* $b^2 = a^2 - c^2$, *w którym* c *oznacza mimośród.*

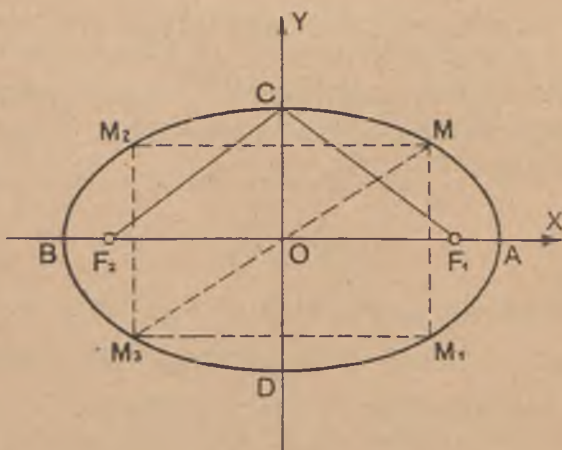
Często wygodniejsza jest inna postać równania elipsy, którą otrzymamy z ostatniego równania dzieląc obie jego strony przez a^2b^2.

Otrzymamy: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Przy pomocy równania elipsy: $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ poznamy niektóre własności tej krzywej.

Z równania wynika, że gdy $y = 0$, wtedy $x = \pm a$. Znaczy to, że elipsa przecina oś X w dwóch punktach: A $(a; 0)$ i B $(-a; 0)$ (rys. 15). Jeżeli natomiast $x = 0$, wtedy wynika z równania: $y = \pm b$. Znaczy to, że elipsa przecina oś Y w dwóch punktach: C $(0; b)$ i D $(0; -b)$. Punkty A, B, C i D nazywamy *wierzchołkami* elipsy; odcinek $AB = 2a$ nazywamy *osią wielką*, a odcinek $CD = 2b$ *osią małą* elipsy. Ponieważ $2a$ oznacza także sumę promieni wodzących, znajdujemy twierdzenie: *Suma promieni wodzących elipsy równa się jej osi wielkiej.*

Liczba b, którą wprowadziliśmy przyjmując, że $b^2 = a^2 - c^2$, ma teraz pewne znaczenie geometryczne. Równa się ona połowie osi małej elipsy. Związek $a^2 - c^2 = b^2$ można również geometrycznie interpretować. Połączmy punkt C (rys. 15) z ogniskami F_1 i F_2. Ponieważ $CF_1 + CF_2 = 2a$ i $CF_1 = CF_2$, przeto $CF_1 = CF_2 = a$. W trójkącie prostokątnym OF_1C jest więc: $OF_1 = c$, $OC = b$ i $CF_1 = a$. Twierdzenie Pitagorasa daje natychmiast powyższy związek między a, b i c. Zapamiętajmy, że *odległość ogniska od końca osi małej elipsy równa się połowie osi wielkiej.* Twierdzenie to służyć może do konstrukcyjnego wyznaczania ognisk elipsy, gdy dane są jej osie.



Rys. 15.

Z równania elipsy widać bezpośrednio, że gdy x i y spełniają równanie elipsy, to również x i $-y$, $-x$ i y oraz $-x$ i $-y$ spełniają to równanie. Jeżeli więc punkt M $(x; y)$ leży na elipsie (rys. 15), to również punkty: $M_1\,(x;\ -y)$, $M_2\,(-x;\ y)$ i $M_3\,(-x;\ -y)$ leżą na elipsie. Punkty M i M_1 leżą symetrycznie względem osi X, punkty M i M_2 leżą symetrycznie względem osi Y, a punkty M i M_3 leżą symetrycznie względem punktu O. *Elipsa jest* więc *symetryczna względem osi X, osi Y i punktu O.* Wskutek symetrii elipsy względem punktu O każdy odcinek łączący dwa punkty elipsy i przechodzący przez punkt O jest w punkcie O przepołowiony. Punkt O nazywamy dlatego *środkiem* elipsy. Odcinek łączący dwa punkty elipsy i przechodzący przez jej środek nazywa się *średnicą* elipsy; osie elipsy są oczywiście również jej średnicami.

Z powodu zauważonej symetrii elipsy zajmiemy się tylko łukiem tej krzywej przebiegającym w ćwiartce I. Obliczmy z równania elipsy dodatnią wartość y odpowiadającą danej dodatniej wartości x. Znajdziemy kolejno:

$$a^2 y^2 = b^2 (a^2 - x^2),$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Zauważymy przede wszystkim, że wartości x większej niż a nie odpowiada żadna wartość y. Elipsa nie ma punktów o odciętych większych niż a. Jeżeli $0 \leqq x \leqq a$, wtedy:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Z tego wzoru odczytujemy: Jeżeli $x = 0$, wtedy $y = b$. Gdy x rośnie, wtedy y maleje. Jeżeli $x = a$, wtedy $y = 0$. Łuk elipsy znajdujący się w ćwiartce I jest krzywą opadającą od punktu $C\,(0;\ b)$ do punktu $A\,(a;\ 0)$. Uwzględniając symetrię elipsy znajdujemy, że elipsa jest krzywą ograniczoną prostokątem, którego boki mają równania: $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$.

Jeżeli w równaniu elipsy przyjmiemy, że $a = b$, a więc $c = 0$, wtedy równanie to przyjmie po uproszczeniu przez a^2 postać $x^2 + y^2 = a^2$, a więc postać równania okręgu. Okrąg można tedy uważać za szczególny przypadek elipsy, w której oś mała równa się osi wielkiej.

Możemy z łatwością napisać równanie elipsy, gdy dane są jej osie. Tak np. jeżeli $2a = 12$, a $2b = 8$, równaniem elipsy jest: $16x^2 + 36y^2 = 576$, a po uproszczeniu: $4x^2 + 9y^2 = 144$.

Gdybyśmy mieli na odwrót wyznaczyć osie elipsy z jej równania: $4x^2 + 9y^2 = 144$, najpraktyczniej będzie sprowadzić to równanie do postaci: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. W tym celu dzielimy obie strony równania przez 144 i otrzymujemy: $\frac{4x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = 1$, a po uproszczeniu ułamków: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; stąd znajdujemy natychmiast: $a = 6$, $b = 4$.

Podobnie postąpimy z równaniem: $18x^2 + 49y^2 = 392$. Dzielimy obie strony równania przez 392 i upraszczamy oba ułamki. Otrzymamy: $\frac{9x^2}{196} + \frac{y^2}{8} = 1$, a po podzieleniu przez 9 licznika i mianownika pierwszego ułamka: $\frac{x^2}{\frac{196}{9}} + \frac{y^2}{8} = 1$. Stąd znajdujemy: $a = \sqrt{\frac{196}{9}} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$; $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Chcąc zbadać, jakie położenie może mieć prosta nieprostopadła do osi X względem elipsy, rozwiązujemy układ równań prostej i elipsy (porównaj § 2):

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$
$$y = mx + n.$$

Otrzymujemy kolejno:

$$b^2 x^2 + a^2 (mx + n)^2 = a^2 b^2,$$
$$b^2 x^2 + a^2 m^2 x^2 + 2a^2 mnx + a^2 n^2 = a^2 b^2,$$
$$(b^2 + a^2 m^2) x^2 + 2a^2 mnx + a^2 (n^2 - b^2) = 0$$

Współczynnik przy x^2 jest różny od zera (suma dwóch kwadratów, z których jeden (b^2) jest większy od zera), przeto istnienie pierwiastków równania zależy od wyróżnika:

$$\Delta = 4a^4 m^2 n^2 - 4a^2 (b^2 + a^2 m^2)(n^2 - b^2).$$

Jeżeli $\Delta < 0$, wtedy równanie nie ma pierwiastków, a prosta nie ma z elipsą punktu wspólnego.

Jeżeli $\Delta > 0$, wtedy równanie ma dwa pierwiastki, a prosta przecina elipsę w dwóch punktach.

Jeżeli $\Delta = 0$, wtedy równanie ma jeden pierwiastek, a prosta ma z elipsą jeden punkt wspólny. Stosownie do definicji stycznej krzywej stopnia drugiego (§ 2, str. 36) prosta taka jest styczną elipsy.

Prosta może więc mieć względem elipsy trojakie położenie: może nie mieć z elipsą żadnego punktu wspólnego, może mieć z elipsą dwa punkty wspólne *(sieczna)* albo może mieć z elipsą jeden punkt wspólny *(styczna)*.

Również trojakie położenie względem elipsy może mieć prosta prostopadła do osi X. Rozwiązując bowiem układ równań elipsy i takiej prostej:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$
$$x = p,$$

znajdujemy kolejno:

$$b^2 p^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

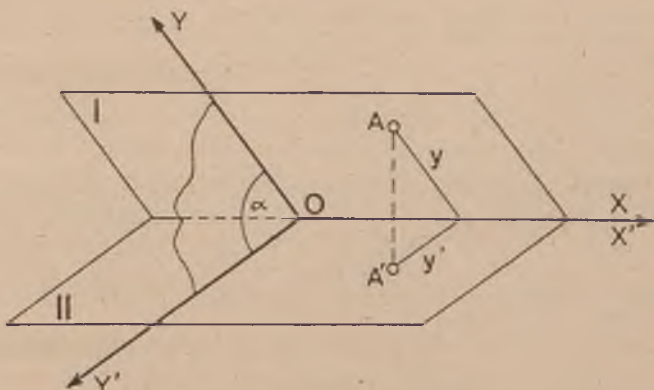
$$a^2 y^2 - b^2 (a^2 - p^2) = 0;$$

$$\Delta = 4 a^2 b^2 (a^2 - p^2).$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku znajdujemy, że zależnie od tego, czy $\Delta < 0$, czy $\Delta > 0$, czy $\Delta = 0$, prosta albo nie ma z elipsą punktu wspólnego, albo przecina elipsę w dwóch punktach, albo styka się z elipsą w jednym punkcie.

W przyrodzie spotykamy często elipsy (tory planet i komet, przekrój Ziemi płaszczyzną przesuniętą przez oś itp.); również wiele zagadnień geometrycznych prowadzi do elipsy.

Przykład. Na płaszczyźnie I dany jest układ współrzędnych i okrąg k mający równanie: $x^2 + y^2 = r^2$. Płaszczyzna I jest nachylona do płaszczyzny II przecinającej płaszczyznę I wzdłuż osi X pod danym kątem α. Znaleźć rzut prostokątny okręgu k na płaszczyznę II, tj. miejsce geometryczne rzutów prostokątnych punktów okręgu k na płaszczyznę II.



Rys. 16.

Na płaszczyźnie II obieramy układ współrzędnych w następujący sposób: Za oś X' przyjmujemy wspólną krawędź płaszczyzn I i II (rys. 16), a więc oś X układu współrzędnych przyjętego na płaszczyźnie I. Rzut osi Y na płaszczyznę II jest prostopadły do osi X; płaszczyzna bowiem przesunięta przez oś Y prostopadle do płaszczyzny II (a więc płaszczyzna rzutująca oś Y) przecina płaszczyznę II w prostej Y' prostopadłej do wspólnej krawędzi X. Tę prostą Y' przyjmujemy za oś rzędnych układu współrzędnych na płaszczyźnie II. Oczywiście także rzut każdej prostej równoległej do osi Y na płaszczyznę II będzie prostopadły do osi X.

Niechaj punkt $A(x;\ y)$ będzie punktem okręgu k, zaś A' niechaj oznacza rzut punktu A na płaszczyznę II. Rzędna y' punktu A' w układzie $X'Y'$ jest rzutem y na płaszczyznę II. Punkt A' ma tedy współrzędne:

$$x' = x;\ y' = y\cos\alpha = \pm\cos\alpha\cdot\sqrt{r^2 - x^2} = \pm\cos\alpha\cdot\sqrt{r^2 - x'^2}.$$

Współrzędne x' i y' spełniają tedy równanie:

$y' = \pm\cos\alpha\cdot\sqrt{r^2 - x'^2}$, czyli (po podniesieniu do kwadratu):
$y'^2 = (r^2 - x'^2)\cos^2\alpha$. Przekształcamy to równanie:
$y'^2 = r^2\cos^2\alpha - x'^2\cos^2\alpha$,
$x'^2\cos^2\alpha + y'^2 = r^2\cos^2\alpha$,
$$\frac{x'^2}{r^2} + \frac{y'^2}{r^2\cos^2\alpha} = 1.$$

Znajdujemy więc, że rzut okręgu k na płaszczyznę II jest elipsą o osiach: $2r$ i $2r\cos\alpha$.

Ćwiczenia.

70. Ułożyć równanie elipsy, jeżeli:

a) $a = 5;\ b = 2{,}5;$ *b)* $a = 4;\ c = 3;$ *c)* $b = 2;\ c = 4.$

71. Wyznaczyć osie elipsy mającej równanie:

a) $4x^2 + 9y^2 = 36;$ *b)* $x^2 + 4y^2 = 16;$ *c)* $x^2 + 4y^2 = 36;$
d) $9x^2 + 36y^2 = 64;$ *e)* $x^2 + 8y^2 = 16;$ *f)* $r^2x^2 + s^2y^2 = t^2;$
g) $x^2 + 8y^2 = 4s^2;$ *h)* $x^2 + 5y^2 = 450;$ *i)* $4x^2 + 10y^2 = 225.$

72. Wyprowadzić równanie elipsy przyjmując, że ogniska jej leżą w punktach $F_1(0;\ c)$, $F_2(0;\ -c)$, a suma promieni wodzących wynosi $2a$.

73. Wykreślić 3 elipsy o wspólnych ogniskach a różnych osiach.

74. Elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ przechodzi przez punkty $A(4;\ 1{,}5)$ i $B(-3;\ -2)$; obliczyć jej osie.

75. Ułożyć równanie elipsy, której ogniska leżą w punktach: $F_1(4;0)$ i $F_2(-4;0)$, a elipsa przechodzi przez punkt $A(4;\ 1{,}8)$.

76. Promienie wodzące wykreślone do pewnego punktu elipsy wynoszą $5+\sqrt{13}$ i $5-\sqrt{13}$, a kąt między nimi zawarty 60^0. Napisać równanie takiej elipsy.

77. Jakie położenie względem elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$ ma każda z prostych: $x - y = 5;\ 2y = 7;\ 2x - 7y = 8$?

78. Obliczyć długość cięciwy elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ przechodzącej przez ognisko i prostopadłej do osi wielkiej.

79. Znaleźć równanie stycznej elipsy $x^2 + 4y^2 = 25$ równoległej do prostej $y = -\frac{3}{8}x$.

80. *a)* Na elipsie $9x^2 + 25y^2 = 225$ znaleźć taki punkt, aby promienie wodzące wykreślone do tego punktu były do siebie prostopadłe.

Wskazówka: Korzystać z przykładu 4 w § 3.

b) Na elipsie $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ znaleźć taki punkt, aby promienie wodzące wykreślone do tego punktu były do siebie prostopadłe.

81. Ile wspólnych punktów ma elipsa $x^2 + 9y^2 = 81$ z każdym z okręgów: $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 - 16x + 63 = 0$; $x^2 + y^2 = 9$; $x^2 + y^2 - 8x = 9$; $x^2 - 14{,}4x + y^2 = 9$; $x^2 + y^2 = 27$?

82. Na elipsie $9x^2 + 25y^2 = 225$ znaleźć taki punkt, aby jeden z promieni wodzących wykreślonych do tego punktu był 2 razy większy od drugiego.

83. *a)* Znaleźć miejsce geometryczne środków rzędnych punktów okręgu: $x^2 + y^2 = r^2$.

b) Znaleźć miejsce geometryczne środków rzędnych punktów elipsy: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

84. Na danym odcinku $AB = 2k$ jako na wspólnej podstawie budujemy takie trójkąty, w których suma pozostałych dwóch boków wynosi $2s$. Znaleźć miejsce geometryczne wierzchołków tych trójkątów. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka C tego z tych trójkątów, którego kąt przy C jest prosty.

§ 5. Hiperbola.

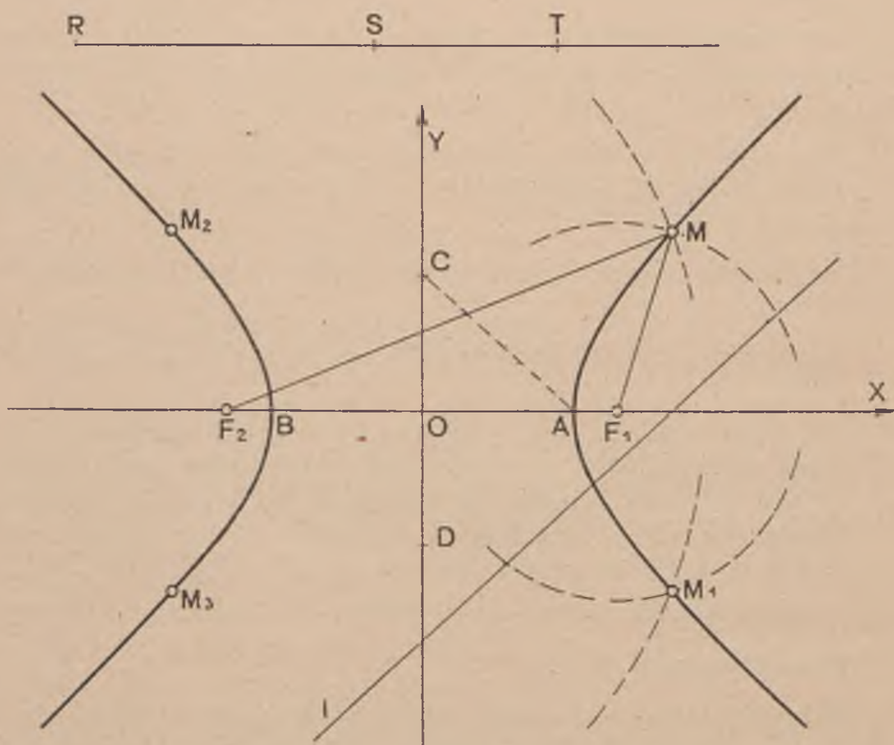
Hiperbolą nazywamy miejsce geometryczne punktów mających tę własność, że różnica odległości każdego z nich od dwóch danych punktów jest wielkością stałą.

Owe dane punkty nazywamy *ogniskami* hiperboli i oznaczamy F_1 i F_2. Ich wzajemną odległość oznaczamy $F_1F_2 = 2c$; odcinek c nazywamy *mimośrodem* hiperboli. Odcinki łączące punkt hiperboli z ogniskami nazywamy *promieniami wodzącymi*; stałą różnicę promieni wodzących oznaczać będziemy $2a$.

Opierając się na określeniu hiperboli możemy wykreślić dowolną ilość jej punktów, gdy dane są ogniska F_1 i F_2 (rys. 17) oraz stała różnica $RS = 2a$ promieni wodzących. W tym celu obieramy na prostej

RS poza punktem S dowolny punkt T i kreślimy promieniem RT okrąg dokoła jednego ogniska np. F_2, a promieniem ST okrąg dokoła F_1. Punkty M i M_1, w których okręgi się przecinają, są punktami hiperboli, ponieważ $F_2 M - F_1 M = RT - ST = 2a$ i $F_2 M_1 - F_1 M_1 = RT - ST = 2a$. Obierając inny punkt T na prostej RS i powtarzając poprzednią konstrukcję otrzymujemy dalsze punkty hiperboli.

Z trójkąta $F_1 F_2 M$ zauważymy, że $MF_2 - MF_1 < F_1 F_2$. Jest więc dla hiperboli $2a < 2c$, czyli $a < c$.



Rys. 17.

Wyprowadzimy równanie hiperboli. Układ współrzędnych obieramy tak, aby oś X przechodziła przez F_1 i F_2 i aby początek układu leżał w środku odcinka $F_1 F_2$. Wtedy: $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$. Punkt $M(x; y)$ jest stosownie do określenia hiperboli punktem hiperboli wtedy i tylko wtedy, jeżeli

$$\text{albo } MF_1 - MF_2 = 2a, \text{ albo } MF_2 - MF_1 = 2a.$$

Oba warunki razem możemy tak napisać:

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$$

Wyrażając MF_1 i MF_2 za pomocą współrzędnych punktów M, F_1 i F_2 otrzymamy dwa równania:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Współrzędne punktu hiperboli spełniają jedno z tych równań. Lecz i na odwrót: Jeżeli współrzędne x; y jakiegoś punktu M spełniają jedno z tych równań, wtedy $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$, co wskazuje, że punkt M leży na hiperboli. Podnieśmy do kwadratu obie strony każdego z tych równań. Ponieważ $(+2)^2 = (-2)^2$, otrzymamy z obu równań:

$$(x-c)^2 + y^2 - 2\sqrt{[(x-c)^2+y^2][(x+c)^2+y^2]} + (x+c)^2 + y^2 = 4a^2.$$

Każda para wartości x i y spełniająca jedno z równań (1) spełnia także ostatnie równanie; każda para wartości x i y spełniająca ostatnie równanie spełnia także jedno z równań (1). Na podstawie poprzednich rozważań dochodzimy więc do wniosku, że ostatnie równanie jest równaniem hiperboli. Uporządkujmy je wykonując zaznaczone działania, upraszczając przez 2 i przenosząc pierwiastek na prawą stronę równania a pozostałe wyrazy na lewą. Otrzymamy:

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = \sqrt{x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2c^2x^2 + 2c^2y^2 + c^4} \; . \; . \; . \; (2)$$

Lewą stronę tego równania możemy tak napisać: $[(x^2+y^2) - a^2] + (c^2 - a^2)$. Ponieważ $c > a$, a więc $c^2 > a^2$, zaś $x^2 + y^2 \geqq a^2$ (jak wykażemy niżej), przeto lewa strona ostatniego równania jest dodatnia. A że i strona prawa jest dodatnia, to podnosząc obie strony tego równania do kwadratu otrzymamy równanie równoważne (tw. 3 w § 6, rozdz. I):

$$x^4 + y^4 + c^4 + 4a^4 + 2x^2y^2 + 2c^2x^2 - 2a^2x^2 + 2c^2y^2 - 4a^2y^2 - \\ - 4a^2c^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2c^2x^2 + 2c^2y^2 + c^4.$$

Po uporządkowaniu równanie przyjmuje postać:

$$4c^2x^2 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 = 4c^2a^2 - 4a^4, \text{ czyli}$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2).$$

Oznaczmy dodatnią liczbę $c^2 - a^2$ dla krótkości przez b^2, tak że $c^2 - a^2 = b^2$. Otrzymamy:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Aby wykazać, że to równanie jest równoważne równaniu (2), należy jeszcze udowodnić, że $x^2 + y^2 \geqq a^2$ dla wszelkich par wartości x i y spełniających to równanie. Otóż z ostatniego równania znajdujemy kolejno:

$$b^2 x^2 = a^2 b^2 + a^2 y^2,$$

$$x^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2, \text{ a po dodaniu } y^2 \text{ do obu stron:}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 + y^2.$$

Stąd widzimy, że dla $y = 0$ jest $x^2 + y^2 = a^2$; jeżeli zaś $y \neq 0$, wtedy $x^2 + y^2 > a^2$. Zatem:

Równanie: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ *jest równaniem hiperboli, przy czym* $2a$ *oznacza stałą różnicę promieni wodzących, zaś* b *taką liczbę, że* $b^2 = c^2 - a^2$, *gdzie* c *oznacza mimośród.*

Podobnie jak przy elipsie nadajemy często temu równaniu przez podzielenie obu stron przez $a^2 b^2$ następującą postać:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Z równania hiperboli: $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ wyprowadzimy kilka własności tej krzywej.

Z równania wynika, że gdy $y = 0$, wtedy $x = \pm a$. Znaczy to, że hiperbola przecina oś X w dwóch punktach: $A\ (a;\ 0)$ i $B\ (-a;\ 0)$. Punkty A i B nazywamy *wierzchołkami*, a odcinek $AB = 2a$ *osią główną* hiperboli. Ze znaczenia $2a$ wynika, że *różnica promieni wodzących hiperboli równa się jej osi głównej.*

Ponieważ wartości $x = 0$ nie odpowiada w równaniu hiperboli żadna wartość y, przeto osi Y hiperbola nie przecina. Niemniej przez analogię do elipsy kreśli się na osi Y punkty $C\ (0;\ b)$ i $D\ (0;\ -b)$ i nazywa odcinek $CD = 2b$ *osią urojoną* hiperboli. Pamiętać jednak należy, że punkty C i D nie leżą na hiperboli. Łącząc punkt C z punktem A (rys. 17) otrzymujemy trójkąt prostokątny AOC. W trójkącie tym $OA = a$, $OC = b$, zaś $AC = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. Z tego spostrzeżenia, że $AC = c$, korzystamy, aby wyznaczyć c (a więc i położenie ognisk), gdy znamy a i b.

Równanie hiperboli zawiera tylko kwadraty zmiennych. Jeżeli więc jakaś para wartości x i y spełnia równanie hiperboli, to także i pary wartości: x i $-y$, $-x$ i y, $-x$ i $-y$ spełniają to równanie. Jeżeli więc punkt $M\ (x;\ y)$ jest punktem hiperboli, wtedy także i punkty: $M_1\ (x;\ -y)$ leżący symetrycznie do M względem osi X, $M_2\ (-x;\ y)$

leżący symetrycznie do M względem osi Y, oraz $M_3(-x; -y)$ leżący symetrycznie do M względem punktu O są punktami hiperboli. *Hiperbola jest* więc *symetryczna względem osi X, względem osi Y i względem punktu O.* Wskutek tego każdy odcinek łączący dwa punkty hiperboli, a przechodzący przez punkt O, jest w tym punkcie przepołowiony. Punkt O nazywa się dlatego *środkiem* hiperboli, a odcinek łączący dwa punkty hiperboli i przechodzący przez środek *średnicą* hiperboli. Oś główna hiperboli jest jedną z takich średnic.

Z powodu zauważonej symetrii hiperboli zajmiemy się teraz tylko jej częścią leżącą w ćwiartce I. Przyjmować będziemy na x tylko wartości nieujemne i uwzględniać tylko odpowiadające im nieujemne wartości y. Z równania hiperboli znajdziemy przy tym założeniu:

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2,$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Jeżeli $x < a$, wtedy na y nie otrzymujemy żadnej wartości rzeczywistej. Uwzględniając symetrię hiperboli względem osi Y możemy więc powiedzieć: W części płaszczyzny między prostymi $x = -a$ i $x = a$ nie ma punktów hiperboli.

Jeżeli $x \geqq a$, wtedy $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

Jeżeli $x = a$, wtedy $y = 0$. Gdy x rośnie począwszy od wartości a, wtedy y rośnie również i może przyjąć każdą dodatnią (dowolnie wielką) wartość w. Z równania hiperboli znajdujemy bowiem, że $y = w$, jeżeli $x = \frac{a}{b}\sqrt{a^2 + w^2}$. Hiperbola jest więc krzywą składającą się z dwu oddzielnych gałęzi ciągnących się w nieskończoność.

Rozwiązując równanie hiperboli $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ i prostej $x = p$ (rozwiąż!) znajdujemy, że prosta ta albo nie ma z hiperbolą żadnego punktu wspólnego, albo styka się z hiperbolą w jednym punkcie (wierzchołku), albo przecina hiperbolę w dwóch punktach.

Aby zbadać, jakie położenie ma prosta:

$$y = mx + n \text{ względem hiperboli:}$$

$$b^2 x^2 - a y^2 = a^2 b^2,$$

rozwiązujemy układ ich równań. Znajdziemy:

$$b^2 x^2 - a^2 m^2 x^2 - 2 a^2 mnx - a^2 n^2 = a^2 b^2,$$

$$(b^2 - a^2 m^2) x^2 - 2 a^2 mnx - a^2 (n^2 + b^2) = 0.$$

Jeżeli $b^2 - a^2 m^2 \neq 0$, wtedy hiperbola (podobnie jak okrąg w § 2 lub elipsa w § 4) albo nie ma z prostą punktów wspólnych, albo styka się z prostą w jednym punkcie, albo przecina prostą w dwóch punktach, zależnie od tego, czy wyróżnik ostatniego równania jest ujemny, czy równy zeru, czy też dodatni.

Gdy jednak $b^2 - a^2 m^2 = 0$, wtedy ostatnie równanie staje się równaniem stopnia pierwszego:

$$- 2 a^2 mnx - a^2 (n^2 + b^2) = 0, \text{ czyli}$$

$$2 mnx + a^2 (n^2 + b^2) = 0$$

Zauważymy, że $m \neq 0$ (wynika to z założenia: $b^2 - a^2 m^2 = 0$). Jeżeli $n = 0$, wtedy ostatnie równanie (wobec $a^2 [n^2 + b^2] \neq 0$) nie ma pierwiastka; prosta nie ma z hiperbolą punktu wspólnego. Jeżeli $n \neq 0$, wtedy ostatnie równanie ma jeden pierwiastek, a układ równań jedno rozwiązanie. Prosta ma wtedy z hiperbolą jeden punkt wspólny; nie nazywamy jej jednak styczną hiperboli, lecz mówimy, że przecina hiperbolę w jednym punkcie (prosta l na rys. 17; porównaj także zad. 90 w ćwiczeniach przy końcu tego paragrafu).

Mamy więc tutaj przykład prostej, która ma z krzywą jeden tylko punkt wspólny, a nie styka się z nią, o czym wspominaliśmy już na str. 36.

Ćwiczenia.

85. Ułożyć równanie hiperboli mając dane:

a) $a = 4$; $b = 2$; *b)* $a = 2$; $c = 3$; *c)* $b = 3$; $c = 5$.

86. Wyznaczyć osie i ogniska hiperbol mających równania:

a) $9x^2 - 16y^2 = 144$; *b)* $16x^2 - 9y^2 = 144$; *c)* $x^2 - 6\frac{1}{4} y^2 = 625$;
d) $x^2 - y^2 = 9$; *e)* $4 x^2 - y^2 = 9$; *f)* $9 x^2 - 4 y^2 = 64$;
g) $x^2 - 2 y^2 = 1$; *h)* $x^2 - 8 y^2 = 2$; *i)* $4 x^2 - 5 y^2 = 80$.

87. Wyprowadź równanie hiperboli, której oś główna wynosi $2a$, a ogniska leżą w punktach: $F_1 (0; c)$, $F_2 (0; -c)$.

88. Wyznaczyć osie hiperboli $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ tak, aby ta hiperbola przechodziła przez punkty: $A (5; 1{,}5)$ i $B (-6\frac{2}{3}; -2\frac{2}{3})$.

89. Jakie położenie względem hiperboli: $x^2 - 4 y^2 = 4$ ma każda z następujących prostych: $y = x + 1$; $3 x + 2 y + 6 = 0$; $5 x - 6 y = 8$; $y = \frac{1}{2} x - 2$; $y = - \frac{1}{2} x$?

90. Wykreślić hiperbolę: $9x^2 + 16y^2 = 144$ oraz proste: $y = \frac{3}{4}x - 2$; $y = \frac{3}{4}x - 1$; $y = \frac{3}{4}x$; $y = \frac{3}{4}x + 1$; $y = \frac{3}{4}x + 2$; $y = -\frac{3}{4}x - 2$; $y = -\frac{3}{4}x$; $y = -\frac{3}{4}x + 2$. Zbadać rachunkiem, jakie położenie względem hiperboli ma każda z tych prostych.

91. Mając dane równanie hiperboli: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ obliczyć długość cięciwy prostopadłej do osi głównej i przechodzącej przez ognisko.

92. Cztery punkty hiperboli: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ są wierzchołkami kwadratu. Obliczyć ich współrzędne. Kiedy zadanie nie ma rozwiązania?

93. Hiperbola: $x^2 - a^2y^2 = a^2$ styka się z prostą: $x + y = 1$. Obliczyć osie hiperboli.

94. Wyznaczyć m tak, aby prosta: $y = mx + 1$ przecinała hiperbolę: $9x^2 - 4y^2 = 36$ tylko w jednym punkcie.

95. Znaleźć miejsce geometryczne środków okręgów stykających się zewnętrznie z okręgami: $x^2 + y^2 + 6x = 0$ i $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$.

Wskazówka. Jeżeli A, B i C oznaczają kolejno środki okręgów danych i okręgu stycznego do nich, zaś r_1, r_2 i r kolejno ich promienie, wtedy: $AC = r_1 + r$; $BC = r_2 + r$ itd.

§ 6. Parabola.

Parabolą nazywamy miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od danej prostej l i danego punktu F nie leżącego na tej prostej.

Prostą l nazywamy *kierownicą*, a punkt F *ogniskiem* paraboli. Odległość AF (rys. 18) punktu F od prostej l oznaczać będziemy literą p i nazywać będziemy $2p$ *parametrem* paraboli.

Aby konstrukcyjnie wyznaczyć punkt paraboli, kreślimy dowolną prostą l_1 równoległą do l i zakreślamy dokoła punktu F promieniem równym odległości l_1 od l okrąg. Punkty, w których okrąg przecina prostą l_1 (punkty M i M_1 na rys. 18), są punktami paraboli. Tak można otrzymać dowolną ilość punktów paraboli.

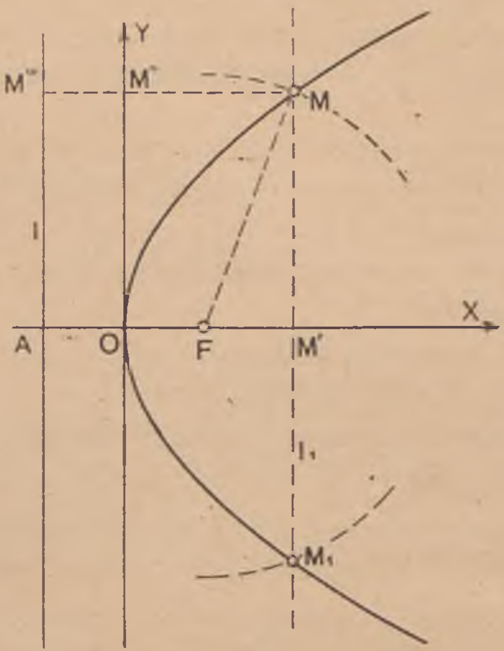
Ułożymy równanie paraboli. Za oś X obieramy prostą wykreśloną przez F prostopadle do l; początek układu współrzędnych przyjmujemy w środku odcinka AF. Wtedy:

$$l\{x = -\tfrac{1}{2}p;\ F(\tfrac{1}{2}p;\ 0);\ A(-\tfrac{1}{2}p;\ 0).$$

Obierzmy dowolny punkt $M(x;\ y)$ i oznaczmy: M' rzut punktu

M na oś X, M'' rzut punktu M na oś Y i M''' rzut punktu M na kierownicę l. Punkt M jest punktem paraboli wtedy i tylko wtedy, jeżeli:

$$MF = MM'''.$$



Rys. 18.

Wyraźmy MF i MM''' za pomocą współrzędnych punktów M, F oraz punktu M''' $(-\frac{1}{2}p;\ y)$. Otrzymamy:

$$MF = \sqrt{(x - \tfrac{1}{2}p)^2 + y^2};\quad MM''' = M'A = \left|x + \tfrac{1}{2}p\right|.$$

Zatem:
$$\sqrt{(x - \tfrac{1}{2}p)^2 + y^2} = \left|x + \tfrac{1}{2}p\right|.$$

Po podniesieniu do kwadratu obu stron otrzymamy:

$$(x - \tfrac{1}{2}p)^2 + y^2 = (x + \tfrac{1}{2}p)^2, \text{ czyli:}$$
$$x^2 - px + \tfrac{1}{4}p^2 + y^2 = x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2,$$
$$y^2 = 2px.$$

Takie równanie spełniają współrzędne każdego punktu paraboli. Lecz i na odwrót: jeżeli współrzędne jakiegoś punktu M spełniają ostatnie równanie, wtedy spełniają i wszystkie równania poprzednie; musi więc być $MF = MM'''$, co wskazuje, że punkt M jest punktem paraboli. Zatem:

Równanie: $y^2 = 2px$ *jest równaniem paraboli.*

Na podstawie tego równania wyprowadzimy niektóre własności paraboli.

Przede wszystkim zauważymy, że ujemnym wartościom x nie odpowiadają żadne rzeczywiste wartości y. Znaczy to, że w ćwiartkach II i III nie ma punktów paraboli; cała krzywa przebiega w ćwiartkach I i II.

Jeżeli $x = 0$, wtedy $y = 0$. Parabola przecina oś X w początku układu współrzędnych. Punkt ten nazywamy *wierzchołkiem* paraboli.

Jeżeli x ma wartość dodatnią, wtedy $y = \pm\sqrt{2px}$. Każdej dodatniej wartości x odpowiadają więc dwie wartości y, równe co do wartości bezwzględnych, a różniące się znakami. Parabola jest więc symetryczna względem osi X. Prostą tę, tj. prostą przechodzącą przez ognisko i prostopadłą do kierownicy, nazywamy *osią paraboli.*

Ograniczając się do ćwiartki pierwszej, tj. przyjmując, że $y = \sqrt{2px}$, zauważymy, że ze wzrostem x rośnie również y. Rzędna y może przyjąć każdą, nawet dowolnie wielką wartość w, wystarczy w tym celu przyjąć $x = \frac{w^2}{2p}$. Parabola jest więc krzywą nieograniczoną od strony prawej i wznoszącą się ciągle. Części paraboli nad osią X odpowiada symetrycznie względem osi X położona część krzywej poniżej osi X, w ćwiartce IV.

Zbadamy jeszcze, jakie położenie może mieć prosta względem paraboli: $y^2 = 2px$.

Jeżeli prosta jest do osi X prostopadła, a więc ma równanie: $x = c$, wtedy rozwiązując układ równań prostej i paraboli znajdziemy: $y^2 = 2pc$. Jeżeli $c < 0$, wtedy wartości $x = c$ nie odpowiada żadna wartość y; prosta nie ma z parabolą żadnego punktu wspólnego. Jeżeli $c = 0$, wtedy wartości $x = c = 0$ odpowiada wartość $y = 0$; prosta ma z parabolą jeden tylko punkt O (0; 0) wspólny i jest styczną paraboli w jej wierzchołku. Jeżeli $c > 0$, wtedy wartości $x = c$ odpowiadają dwie wartości y, a mianowicie: $y_1 = \sqrt{2pc}$ i $y_2 = -\sqrt{2pc}$; prosta przecina parabolę w dwóch punktach.

Jeżeli prosta nie jest do osi X prostopadła, możemy jej równanie przyjąć w postaci: $y = mx + n$. Aby zbadać, jakie położenie może mieć taka prosta względem paraboli: $y^2 = 2px$, rozwiązujemy układ równań prostej i paraboli. Otrzymamy:

$$(mx + n)^2 = 2\,px,$$
$$m^2 x^2 + 2\,(mn - p)\,x + n^2 = 0.$$

Jeżeli $m = 0$, wtedy ostatnie równanie przyjmuje postać:

$$-\,2\,px + n^2 = 0.$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie:

$$x = \frac{n^2}{2p};\quad y = m \cdot \frac{n^2}{2p} + n = \frac{n}{2p}\,(mn + 2p).$$ Zatem:

Prosta równoległa do osi paraboli ($m = 0$) przecina parabolę w jednym tylko punkcie.

Jeżeli $m \neq 0$, wtedy ilość rozwiązań układu równań zależy od wartości wyróżnika $\varDelta$ ostatniego równania. Jeżeli $\varDelta < 0$, wtedy układ równań nie ma rozwiązania; prosta nie ma z parabolą punktu wspólnego. Jeżeli $\varDelta = 0$, wtedy układ równań ma jedno rozwiązanie; prosta styka się z parabolą w jednym punkcie. Jeżeli $\varDelta > 0$, wtedy układ równań ma dwa rozwiązania; prosta przecina parabolę w dwóch punktach.

Ćwiczenia.

96. Wykreślić na jednym rysunku trzy parabole o wspólnym wierzchołku, a parametrach: 2; 8; 12.
97. Wyprowadzić równanie paraboli, której ognisko znajduje się w punkcie F, a której kierownicą jest prosta l, jeżeli:

    a) $F\,(-\,\frac{1}{2}\,p;\ 0);\ l\,\{\,x = \frac{1}{2}\,p;$ *b)* $F\,(0;\ \frac{1}{2}\,p);\ l\,\{\,y = -\,\frac{1}{2}\,p;$ *c)* $F\,(0;\ -\,\frac{1}{2}\,p);\ l\,\{\,y = \frac{1}{2}\,p.$
98. Wyznaczyć ognisko i kierownicę paraboli mającej równanie:

    a) $y^2 = 4\,x;$ *b)* $y^2 = x;$ *c)* $y = x^2;$ *d)* $y^2 = -\,x;$ *e)* $4\,y^2 = 9\,x;$ *f)* $4\,x^2 = 25\,y;$ *g)* $9\,y^2 + 16\,x = 0.$
99. Wyznaczyć p tak, aby parabola: $y^2 = 2\,px$ przechodziła przez punkt $A\,(2;\ -\,4)$.
100. Jakie położenie względem paraboli: $y^2 = 2\,x$ ma każda z następujących prostych: $y = x + 2;\ x + 2\,y + 2 = 0;\ 5\,x - 6\,y = 16;$ $y = -\,4;\ x = 0$?
101. Obliczyć długość cięciwy paraboli: $y^2 = 2\,px$ wykreślonej przez ognisko paraboli prostopadle do jej osi.

102. Z punktu A $(-4; +1)$ wykreślono styczne do paraboli: $y^2 = 2x$; znaleźć ich równania.

Wskazówka: Porównaj przykład 2 w § 2.

103. Kula karabinowa wystrzelona z punktu O w kierunku dodatnim osi X porusza się ruchem jednostajnym z prędkością c m/sek., a równocześnie opada w t sekundach o $y = -\frac{1}{2}gt^2$. Jaką linię kreśli kula?

104. Znaleźć miejsce geometryczne środków okręgów stykających się zewnętrznie z okręgiem: $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ i z prostą $x = -1$.

Wskazówka: Dwa okręgi stykają się zewnętrznie, jeżeli odległość ich środków równa się sumie ich promieni.

SPIS TREŚCI