JERZY MIHUŁOWICZ

ALGEBRA

DLA IV KL. GIMNAZJALNEJ

KSIĄŻNICA-ATLAS

JERZY MIHUŁOWICZ

ALGEBRA

DLA IV KLASY GIMNAZJALNEJ

CENA WRAZ ZE ZNACZKIEM
NA TOWARZYSTWO POPIERANIA BUDOWY
PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH
WYNOSI zł 1,10

KSIĄŻNICA-ATLAS
S. A. ZJEDNOCZ. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.
LWÓW — WARSZAWA
1936

2660

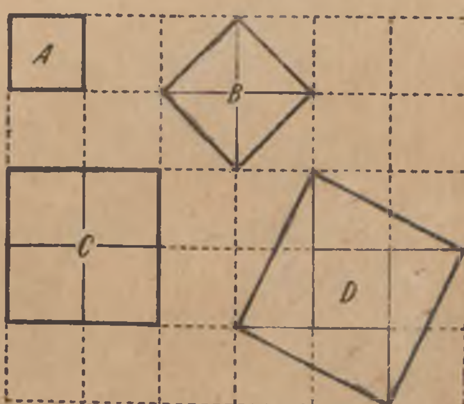
Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie

Rozdział I

Pierwiastki kwadratowe

§ 1. Pojęcie pierwiastka kwadratowego.

Pola kwadratów A, B, C i D w rys. 1 wynoszą kolejno: 1 cm^2, 2 cm^2, 4 cm^2 i 5 cm^2. Przekonamy się o tem łatwo, jeżeli zważymy, że szerokość kratek wynosi 1 cm, i obliczymy pola kwadratów i trojkątów, z których składa się każda z figur A, B, C i D. Chcemy obliczyć długości boków tych kwadratów. Widać, że bok kwadratu A ma 1 cm, a bok kwadratu C 2 cm, ponieważ $1^2 = 1$ i $2^2 = 4$. Obliczenie długości boków kwadratów B i D natrafia już na trudności, bo nie umiemy podać liczb, których kwadraty wynoszą 2, względnie 5. Uogólniając to zagadnienie, stawiamy następujące zadanie arytmetyczne:



Rys. 1.

Mając daną dodatnią liczbę a, znaleźć taką dodatnią liczbę b, której kwadrat równa się a

Np.: Chcemy znaleźć dodatnią liczbę, której kwadrat równa 144. Próbując, znajdziemy łatwo, że $12^2 = 144$. Oprócz liczby 12 niema innej liczby dodatniej, której kwadrat wynosiłby 144; kwadrat bowiem każdej liczby mniejszej niż 12 jest mniejszy niż 144, a kwadrat liczby większej niż 12 jest większy niż 144. Widzimy z tego przykładu, że może być najwyżej jedna liczba dodatnia, której kwadrat równa się danej liczbie dodatniej, i określamy:

Liczbę dodatnią b (o ile taka istnieje), której kwadrat równa się dodatniej liczbie a, nazywamy *kwadratowym* lub *drugim pierwiastkiem* liczby a i piszemy: $b = \sqrt{a}$ (czytaj: drugi pierwiastek a). Obliczyć pierwiastek kwadratowy dodatniej liczby a (inaczej mówiąc: wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z dodatniej liczby a) znaczy więc znaleźć taką dodatnią liczbę b, której kwadrat równa się a. Zatem:

$$\sqrt{a}=b, \text{ jeżeli } b^2=a \text{ i zarazem } b>0.$$

Tak np.:

$\sqrt{4}=2$, ponieważ $2^2=4$;

$\sqrt{9}=3$, „ $3^2=9$;

$\sqrt{144}=12$, „ $12^2=144$;

$\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$, „ $(\frac{3}{5})^2=\frac{9}{25}$;

$\sqrt{0{,}16}=0{,}4$, „ $0{,}4^2=0{,}16$ i t. p.

Nadto uzupełniamy powyższą definicję, przyjmując, że $\sqrt{0}=0$. Pierwiastków liczb ujemnych nie określamy.

Ćwiczenia.

1. Obliczyć przez odgadnięcie:
   a) $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{100}$.
   b) $\sqrt{121}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{10000}$.
   c) $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{0{,}49}$; $\sqrt{1{,}21}$; $\sqrt{1{,}44}$.
   d) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{1}{25}}$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\sqrt{\frac{9}{16}}$; $\sqrt{\frac{49}{81}}$; $\sqrt{\frac{25}{49}}$.
2. *a)* Obliczyć boki kwadratów, których pola wynoszą: 0,64 cm^2, $\frac{1}{4}$ dcm^2, 225 cm^2, $\frac{9}{16}$ dcm^2.
   b) Trójkąt o podstawie $a=4{,}5$ *cm* i wysokości $h=16$ *cm* zamieniono na kwadrat o takiem samem polu; obliczyć bok tego kwadratu.

§ 2. Pierwiastek kwadratowy niewymierny.

W poprzednim paragrafie podaliśmy wartości pierwiastków kwadratowych kilku liczb; były one bądź liczbami całkowitemi, bądź ułamkami. Aby rozstrzygnąć, kiedy pierwiastek kwadratowy jest liczbą całkowitą, a kiedy ułamkiem, rozważymy pewne własności kwadratów liczb całkowitych i ułamków. Znajdziemy łatwo:

Podnosząc do kwadratu liczbę całkowitą, otrzymamy zawsze liczbę całkowitą. Podnosząc do kwadratu ułamek nieprzywiedlny o mianowniku większym niż 1, otrzymujemy znów ułamek nieprzywiedlny o mianowniku różnym od 1, którego licznik i mianownik są kwadratami liczb całkowitych.

Np.: Ułamek $\frac{28}{45}$ jest nieprzywiedlny, ponieważ $28=2^2\cdot 7$ i $45=3^2\cdot 5$ nie mają żadnego wspólnego czynnika pierwszego. Podnosząc ten ułamek do kwadratu, otrzymamy: $\left(\frac{28}{45}\right)^2=\frac{28^2}{45^2}=\frac{2^4\cdot 7^2}{3^4\cdot 5^2}$, a więc znów ułamek nieprzywiedlny, bo licznik i mianownik nie mają żadnego wspólnego czynnika pierwszego. Licznik i mianownik tego ułamka są kwadratami liczb całkowitych.

Kwadrat ułamka nieprzywiedlnego o mianowniku większym niż 1 nie może być przeto nigdy liczbą całkowitą. Jeżeli więc liczba całkowita nie jest kwadratem żadnej liczby całkowitej, to nie może być też kwadratem żadnego ułamka. Ułamek zaś nieprzywiedlny wtedy tylko jest kwadratem innego ułamka, jeżeli jego licznik i mianownik są kwadratami liczb całkowitych. Z tego wynika:

Pierwiastek kwadratowy liczby całkowitej, która nie jest kwadratem żadnej liczby całkowitej, nie jest ani liczbą całkowitą ani ułamkową. Pierwiastek kwadratowy ułamka nieprzywiedlnego, którego licznik i mianownik nie są kwadratami liczb całkowitych, nie jest ani liczbą całkowitą ani ułamkową.

Np.: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ i t. p. nie są ani liczbami całkowitemi ani ułamkowemi.

Kwadrat B (rys. 1 na str. 3) ma pole 2 cm^2, a kwadrat D ma pole 5 cm^2. Miarą boku któregokolwiek z tych kwadratów nie może być ani żadna liczba całkowita ani żaden ułamek, bo kwadrat takiej liczby nie równa się nigdy ani 2 ani 5. Bok każdego z tych kwadratów jest odcinkiem niewspółmiernym z odcinkiem 1 *cm*, przyjętym za jednostkę. Odcinkom takim przypisaliśmy w nauce geometrji jako miary *liczby niewymierne*, nazwane tak w przeciwstawieniu do liczb całkowitych i ułamkowych, które nazywamy *liczbami wymiernemi*. Te liczby niewymierne, które są miarami boków kwadratów B i D, oznaczymy symbolami $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$.

Przyjmujemy bez dowodu, że podobnie jak $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$ także $\sqrt{a}$ jest liczbą niewymierną, gdy a jest liczbą dodatnią, która nie jest kwadratem żadnej liczby wymiernej; przyjmujemy więc, że istnieje taka liczba niewymierna i to jedna tylko, której kwadrat równa się a.

Na liczbach niewymiernych, jak przyjęliśmy już w nauce geometrji, można wykonywać działania, podobnie jak na liczbach wymiernych; można więc liczby niewymierne dodawać, odejmować, mnożyć, dzielić, podnosić do kwadratu i t. p. Prawa działań na liczbach niewymiernych pozostają takie same jak dla liczb wymiernych.

Liczbę niewymierną uważamy za oznaczoną, jeżeli potrafimy podać jej przybliżenia z wszelką żądaną dokładnością, a więc z dokładnością i do 0,1 i do 0,01 i do 0,001 i t. d.

Tak np. używana często liczba π, oznaczająca stosunek obwodu koła do średnicy, jest liczbą niewymierną. Pisze się często:

$$\pi = 3{,}14159\ldots$$

Znaczy to, że liczby:

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ 3{,}14159;\ \ldots$$

są przybliżeniami z niedomiarem liczby π z dokładnością kolejno do 1; 0,1; 0,01; ... tak, że liczby:

$$4;\ 3{,}2;\ 3{,}15;\ 3{,}142;\ 3{,}1416;\ 3{,}14160;\ \ldots,$$

które z poprzednich liczb powstają przez powiększenie o 1 najniższej cyfry, są już przybliżeniami liczby π z nadmiarem. Kropki po cyfrze 9 oznaczają, że po cyfrze 9 następują jeszcze dalsze cyfry. Liczbę π uważamy zą oznaczoną, ponieważ geometrja podaje sposób, pozwalający obliczać coraz dalsze cyfry następujące po 9 w dowolnej ilości. Symbol taki, jak 3,14159... nazywamy *ułamkiem dziesiętnym nieskończonym* i mówimy, że 3,14159... jest *rozwinięciem dziesiętnem* liczby π.

Zadaniem naszem w dalszej nauce będzie wyznaczanie rozwinięć dziesiętnych niewymiernych pierwiastków kwadratowych.

Ułamki dziesiętne nieskończone otrzymywaliśmy zresztą już przy zamianie ułamków zwykłych na dziesiętne. Chcąc np. zamienić ułamek $\frac{5}{3}$ na ułamek dziesiętny, wykonywamy dzielenie 5 : 3. Dzielenie nie kończy się; otrzymujemy jednak kolejno ilorazy niezupełne: 1; 1,6; 1,66; 1,666; ... Wszystkie te ilorazy niezupełne są mniejsze niż $\frac{5}{3}$. Gdybyśmy jednak w każdym z tych ilorazów ostatnią cyfrę powiększyli o 1, otrzymalibyśmy liczby 2; 1,7; 1,67; 1,667; ..., które byłyby większe niż $\frac{5}{3}$. Liczby 1; 1,6; 1,66; 1,666; ... są więc przybliżeniami ułamka $\frac{5}{3}$ z niedomiarem z dokładnością kolejno do 1; 0,1; 0,01; 0,001; ... Piszemy: $\frac{5}{3} = 1{,}666\ldots$ i nazywamy ostatni symbol rozwinięciem dziesiętnem ułamka $\frac{5}{3}$.

Ćwiczenia.

1. Wyjaśnić, że kwadraty następujących ułamków są ułamkami nieprzywiedlnemi: $\frac{3}{4}$; $\frac{32}{45}$; 0,63.
2. Które z pierwiastków kwadratowych liczb całkowitych od 1 do 20 są liczbami niewymiernemi?
3. Które z liczb: $\sqrt{200}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{0{,}1}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}09}$; $\sqrt{0{,}9}$; $\sqrt{\frac{3}{5}}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{1}{3}}$ są liczbami wymiernemi, a które niewymiernemi?

§ 3. Obliczanie kwadratowych pierwiastków liczb całkowitych, które są kwadratami liczb całkowitych.

Przykład 1. Obliczyć $\sqrt{184041}$, wiedząc, że 184041 jest kwadratem liczby całkowitej.

Ponieważ $1^2 = 1$; $10^2 = 100$; $100^2 = 10000$; i t. d., łatwo widzieć, że kwadrat liczby jednocyfrowej (a więc niemniejszej niż 1, a mniejszej niż 10) jest liczbą jednocyfrową lub dwucyfrową, kwadrat liczby dwucyfrowej jest liczbą trzycyfrową lub czterocyfrową, kwadrat liczby trzycyfrowej jest liczbą pięciocyfrową lub sześciocyfrową i t. d. Żeby więc wiedzieć, ile cyfr ma pierwiastek kwadratowy jakiejś liczby całkowitej, należy podzielić liczbę pierwiastkowaną na klasy po dwie cyfry, począwszy od strony prawej. Klasa najwyższa może mieć jedną lub dwie cyfry. Ilość klas daje ilość cyfr szukanej liczby. W naszym przykładzie mamy 3 klasy, a najwyższa klasa ma 2 cyfry. Kwadratowy pierwiastek będzie więc liczbą trzycyfrową, najwyższa cyfra będzie oznaczała setki. Nietrudno wyznaczyć tę cyfrę. Ponieważ $400^2 = 160000$, a $500^2 = 250000$, to szukana liczba jest większa od 400, a mniejsza od 500. Cyfrą setek szukanej liczby jest więc 4.

W praktycznym rachunku wyznaczymy tę cyfrę prościej. Ponieważ kwadrat setek daje dziesiątki tysięcy, a więc liczbę klasy najwyższej, to cyfrę setek znajdziemy, wyznaczając największą liczbę całkowitą, której kwadrat jest niewiększy niż 18, t. j. liczba klasy najwyższej. Liczbą tą jest 4; cyfra 4 będzie cyfrą setek zgodnie z poprzednim rachunkiem. Dotychczasowy rachunek zapiszemy tak:

$$\sqrt{18|40|41} = 4\,.\,.$$

Szukaną liczbę możemy teraz napisać w postaci $400 + x$, gdzie $x < 100$. Liczba x ma spełniać warunek:

$$(400 + x)^2 = 184041.$$

Z tego warunku staramy się wyznaczyć cyfrę dziesiątek liczby x. Przekształcamy to równanie w sposób następujący:

Wykonywamy działania: $160000 + 800\,x + x^2 = 184041.$
Odejmujemy 160 000 od obu stron: $800\,x + x^2 = 24041.$
Wyłączamy x przed nawias: $x\,(800 + x) = 24041.$ . . . (1)

Stąd: $$x = \frac{24041}{800 + x}.$$

Ponieważ $x < 100$ jest liczbą małą w porównaniu ze składnikiem 800 sumy $800 + x$ w mianowniku ostatniego ułamka, próbujemy wyznaczyć x w przybliżeniu, dzieląc 24041 nie przez $800 + x$, lecz przez 800. Pamiętajmy jednak, że znaleziona w ten sposób wartość na x będzie za wielka, bo w ilorazie $24041 : (800 + x)$ zmniejszyliśmy dzielnik. Z dzielenia $24041 : 800$ wypada iloraz większy niż 30, a mniejszy niż 40. Przyjmując $x = 30$, obliczmy lewą stronę równania (1); otrzymamy $30 \cdot 830 = 24900$. Iloczyn $x\,(800 + x)$ wypadł za wielki; widocznie więc $x < 30$. Próbujemy przyjąć $x = 20$. Lewa strona równania (1) przyjmuje teraz wartość $820 \cdot 20 = 16400$, a więc mniejszą, niż strona prawa. Z tego wynika, że $x > 20$, a że $x < 30$, przeto cyfrą dziesiątek liczby x, a więc i cyfrą dziesiątek szukanego pierwiastka kwadratowego, jest 2.

Zastanówmy się, w jaki sposób poprzedni rachunek można najpraktyczniej wykonać i zapisać. Najpierw mamy odjąć $400^2 = 160000$ od 184041. Otrzymamy to samo, jeżeli od klasy najwyższej t. j. od 18 odejmiemy $4^2 = 16$; pozostanie z klasy najwyższej $18 - 16 = 2$. Do tej liczby należałoby dopisać obie klasy następne; otrzymalibyśmy wtedy prawą stronę równania (1). Ze względu jednak na to, że klasa najniższa, jak wnet zobaczymy, niema wcale wpływu na najbliższy rachunek, dopiszemy do reszty 2 narazie tylko klasę drugą, t. j. 40. Otrzymamy:

$$\begin{array}{l} \sqrt{18|40|41} = 4\,.\,. \\ \underline{16} \\ \;\;240 \end{array}$$

W celu wyznaczenia dziesiątek kwadratowego pierwiastka należy, jak wskazuje poprzedni rachunek, wykonać dzielenie $24041 : 800$, gdzie 800 jest podwójną znalezioną liczbą setek. Ponieważ chodzi nam tylko o pierwszą cyfrę tego ilorazu, możemy powyższe dzielenie zastąpić dzieleniem $24 : 8$. Odcinamy więc w pozostałej reszcie 240 w ostatnim schemacie ostatnią cyfrę i naznaczamy zapomocą kreski pionowej dzielenie pozostałej liczby 24 przez 8 (t. j. przez podwójną liczbę po prawej stronie znaku równości). Otrzymamy:

$$\begin{array}{l} \sqrt{18|40|41} = 4\,.\,. \\ \underline{16} \\ \;\;24,0 \mid 8 \end{array}$$

Z dzielenia otrzymamy iloraz 3. Szukana cyfra dziesiątek albo równa się 3, albo jest mniejsza niż 3. Aby ostatecznie cyfrę dziesiątek wyznaczyć, należy obliczyć wartość lewej strony równania (1) dla $x = 30$, a więc wykonać mnożenie $830 \cdot 30$, gdzie 830 jest sumą 8 setek (t. j. podwójnej znalezionej liczby setek) i 3 dziesiątek. Opuszczając zera wykonywamy pomocniczy rachunek: $83 \cdot 3 = 249$. Ponieważ otrzymany iloczyn jest większy od reszty 240 (która po dopisaniu do niej ostatniej klasy przedstawia prawą stronę równania [1]), to cyfra 3 okazuje się za wielka. Przyjmujemy za cyfrę dziesiątek 2 i powtarzamy dla cyfry 2 taki sam rachunek, jak dla cyfry 3. Dopisujemy więc w naszym schemacie do podwójnej cyfry setek, t. j. do 8, cyfrę 2 i mnożymy otrzymaną liczbę 82 przez 2. Ponieważ otrzymany iloczyn $82 \cdot 2 = 164$ jest mniejszy niż 240, to 2 jest cyfrą dziesiątek szukanego pierwiastka. Piszemy więc 2 na miejscu dziesiątek po prawej stronie znaku równości, a iloczyn 164 podpisujemy pod resztą 240. Otrzymamy:

$$\begin{array}{l} \sqrt{18|40|41} = 42\,. \\ \underline{16} \\ \;\;24,0 \mid 82 \cdot 2 \\ \;\;164 \end{array}$$

W zupełnie podobny sposób wyznaczymy cyfrę jednostek pierwiastka kwadratowego $\sqrt{184041}$. Szukaną liczbę możemy teraz napisać w postaci $420 + y$, gdzie $y < 10$. Liczba y ma spełniać warunek:

$$(420 + y)^2 = 184041.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} 176400 + 840\,y + y^2 &= 184041; \\ 840\,y + y^2 &= 7641; \\ y\,(840 + y) &= 7641; \quad \ldots\ldots (2) \\ y &= \frac{7641}{840 + y}. \end{aligned}$$

I znów próbujemy wyznaczyć przybliżoną wartość y, wykonując dzielenie $7641 : 840$. Otrzymamy iloraz większy niż 9, a mniejszy niż 10. A że dzieliliśmy przez liczbę za małą, próbujemy czy 9 spełnia równanie (2). Podstawiając $y = 9$, obliczamy lewą stronę równania (2) i znajdujemy: $9 \cdot 849 = 7641$. Ponieważ prawa strona równania równa się także 7641, to równanie (2), a tem samem i każde z poprzednich, sprawdza się. Jest więc $429^2 = 184041$.

Tak znaleźliśmy, że $\sqrt{184041} = 429$.

Uzupełnijmy teraz nasz schemat. Według poprzedniego rachunku (wiersz, poprzedzający równanie [2]) należałoby teraz od liczby pierwiastkowanej 184041 odjąć 420^2. Lecz że $420^2 = (400 + 20)^2 = 400^2 + 2 \cdot 400 \cdot 20 + 20^2$, a $400^2 = 160000$ od 184041 już odjęliśmy, należy od otrzymanej reszty 24041 odjąć tylko $2 \cdot 400 \cdot 20 + 20^2 = 20\,(2 \cdot 400 + 20) = 20 \,.\, 820 = 16400$, a więc (po pominięciu końcowych zer) ostatnią liczbę w poprzednim schemacie. Jest więc:

$$\begin{array}{l} \sqrt{18|40|41} = 42\,. \\ \underline{16} \\ 24|0 \;|\; 82 \cdot 2 \\ \underline{164} \\ 76 \end{array}$$

Dalszy przebieg zapisywania rachunku jest taki sam jak przy wyznaczaniu cyfry dziesiątek. Do reszty 76 dopisujemy następną klasę (41), odcinamy ostatnią cyfrę i dzielimy pozostałą liczbę przez podwójną znalezioną liczbę, zapisaną po prawej stronie znaku równości, t. j. przez $42 \cdot 2 = 84$. Otrzymany iloraz 9 dopisujemy do 84 (w rzeczywistości dodajemy 9 do 840) i mnożymy 849 przez 9. Ponieważ iloczyn $849 \cdot 9$ równa się reszcie 7641, to cyfra 9 jest cyfrą jednostek szukanej liczby; piszemy więc 9 na miejscu jednostek po prawej stronie znaku równości, iloczyn zaś 7641 odejmujemy od reszty i otrzymujemy 0, co wskazuje, że $\sqrt{184041} = 429$. Cały rachunek tak się przedstawia:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{18|40|41} = 429 \\
\underline{16} \\
\quad 24{,}0 \mid 82 \cdot 2 \\
\quad \underline{164} \\
\qquad 764{,}1 \mid 849 \cdot 9 \\
\qquad \underline{7641} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Przykład 2. Obliczyć $\sqrt{408321}$, wiedząc, że 408321 jest kwadratem liczby całkowitej.

Wykonamy pierwiastkowanie, opisując równocześnie tok rachunku, ale już bez uzasadniania każdego kroku:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{40|83|21} = 639 \\
\underline{36} \\
\quad 48{,}3 \mid 123 \cdot 3 \\
\quad \underline{369} \\
\quad 1142{,}1 \mid 1269 \cdot 9 \\
\quad \underline{11421} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Dzielimy liczbę pierwiastkowaną na klasy po dwie cyfry, począwszy od strony prawej. Szukamy największej liczby, której kwadrat jest niewiększy od 40. Liczbą taką jest 6 (zapisujemy ją po prawej stronie znaku równości). Obliczamy: $6^2 = 36$, podpisujemy 36 pod klasą najwyższą i odejmujemy (resztę 4 zapisujemy). Do reszty 4 dopisujemy następną klasę (83), odcinamy ostatnią cyfrę (3) i dzielimy pozostałą liczbę (48) przez podwójną znalezioną już liczbę t. j. przez $6 \cdot 2 = 12$. Liczba 12 mieści się w 48 wprawdzie 4 razy, lecz pomocniczy rachunek: $124 \cdot 4 = 496 > 483$ wskazuje, że cyfra dziesiątek szukanego pierwiastka jest mniejsza niż 4. Wykonując podobną próbę dla cyfry 3, znajdujemy, że $123 \cdot 3 = 369 < 483$, a więc że cyfra 3 jest drugą cyfrą szukanego pierwiastka kwadratowego; piszemy ją zatem po prawej stronie znaku równości obok cyfry 6. Nadto dopisujemy cyfrę 3 do dzielnika 12, a otrzymaną liczbę 123 mnożymy przez 3 (zapisujemy $123 \cdot 3$). Iloczyn 369 podpisujemy pod resztą 483 i odejmujemy. Do otrzymanej reszty 114 dopisujemy następną klasę (21); odcinamy ostatnią cyfrę (1) i dzielimy pozostałą liczbę (1142) przez podwójną liczbę, zapisaną po prawej stronie znaku równości, t. j. przez $63 \cdot 2 = 126$. Dzielenie to naznaczamy, pisząc: $1142{,}1 \mid 126$. Otrzymany iloraz 9 zapisujemy po prawej stronie znaku równości jako trzecią cyfrę szukanego pierwiastka. Ten sam iloraz (9) dopisujemy do dzielnika 126, a otrzymaną li zbę 1269 mnożymy przez 9 (zapisujemy: $1269 \cdot 9$). Wykonując to mnożenie, podpisujemy iloczyn pod ostatnią resztą (11421) i odejmujemy. Ponieważ pozostaje reszta 0, rachunek jest skończony; liczba 639 jest szukanym pierwiastkiem.

Przykład 3. Obliczyć $\sqrt{2907025}$, wiedząc, że liczba pierwiastkowana jest kwadratem liczby całkowitej.

Obliczamy:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{29'07'02'5} = 1705 \\
1 \\
\overline{19{,}0} \mid 27\cdot 7 \\
189 \\
\quad\overline{17{,}0} \mid 340\cdot 0 \\
\quad\quad 0 \\
\quad\overline{1702{,}5} \mid 3405\cdot 5 \\
\quad 17025 \\
\quad\overline{\quad\quad\;\; 0}
\end{array}
$$

Ćwiczenia.

1. Obliczyć:

a) $\sqrt{361}$; *b)* $\sqrt{7569}$; *c)* $\sqrt{8281}$; *d)* $\sqrt{24649}$;
e) $\sqrt{77841}$; *f)* $\sqrt{790321}$; *g)* $\sqrt{259081}$; *h)* $\sqrt{265225}$;
i) $\sqrt{28174864}$; *j)* $\sqrt{1071225}$; *k)* $\sqrt{1162673604}$;

2. *a)* Posadzono 7056 drzewek w rzędach tak, że w każdym rzędzie jest tyle drzewek, ile jest wszystkich rzędów. Ile jest drzewek w jednym rzędzie?
b) Obliczyć bok kwadratu, którego pole wynosi $28900 m^2$. Jak wielki jest bok drugiego kwadratu, którego pole jest 25 razy większe od pola pierwszego kwadratu?

§ 4. Obliczanie pierwiastków kwadratowych liczb dziesiętnych, które są kwadratami liczb dziesiętnych.

Pierwiastkowanie liczb dziesiętnych sprowadzamy do pierwiastkowania liczb całkowitych, stosując twierdzenie:

Jeżeli w pierwiastku kwadratowym dodatniej liczby a pomnożymy liczbę pierwiastkowaną przez 100^n (gdzie n oznacza liczbę naturalną), to wartość pierwiastka zwiększy się 10^n razy. Wzorem:

$$\sqrt{100^n \cdot a} = 10^n \cdot \sqrt{a}.$$

Że wzór ten jest prawdziwy, udowodnimy, wykazując, że kwadrat liczby po prawej stronie znaku równości równa się liczbie pierwiastkowanej po stronie lewej. I rzeczywiście:

$$(10^n \cdot \sqrt{a})^2 = (10^n)^2 \cdot (\sqrt{a})^2 = (10^2)^n \cdot (\sqrt{a})^2 = 100^n \cdot a.$$

Mając obliczyć pierwiastek kwadratowy jakiejś liczby dziesiętnej, mnożymy najpierw liczbę pierwiastkowaną przez 100^n, dobierając n tak, aby otrzymać iloczyn całkowity. Następnie obliczamy pierwiastek kwadratowy tego iloczynu. Dzieląc znalezioną tak liczbę przez 10^n, otrzymamy według ostatniego twierdzenia szukany pierwiastek kwadratowy liczby dziesiętnej.

Np.: Aby obliczyć $\sqrt{18{,}4041}$, mnożymy 18,4041 przez $100^2 = 10000$; otrzymamy: 184041. Następnie obliczamy $\sqrt{184041} = 429$ (przykład 1 w § 3). Według ostatniego twierdzenia jest:

$$\sqrt{18{,}4041} = 429 : 10^2 = 4{,}29.$$

Rachunek możemy jeszcze uprościć: Mnożąc liczbę dziesiętną, którą mamy pierwiastkować, przez potęgę liczby 100, przesuwamy przecinek dziesiętny o parzystą ilość miejsc w prawo. Przy obliczaniu pierwiastka kwadratowego otrzymanej liczby całkowitej dzielimy ją na klasy po dwie cyfry, począwszy od strony prawej. Ponieważ przecinek dziesiętny przesunęliśmy o parzystą ilość miejsc, to jedna z kresek, dzielących liczbę na klasy, wypadnie koniecznie w tem miejscu, w którem znajdował się poprzednio przecinek dziesiętny. Można więc, nie mnożąc wcale liczby pierwiastkowanej przez potęgę liczby 100, podzielić ją na klasy po dwie cyfry, począwszy od przecinka dziesiętnego, i pierwiastkować jak liczbę całkowitą. Zastanowić się tylko trzeba, gdzie umieścić należy w wyniku przecinek dziesiętny.

Z rozważań na początku §-u 3 wynika bezpośrednio: Jeżeli liczba dziesiętna zawiera część całkowitą, to jej pierwiastek kwadratowy zawiera tyle cyfr całkowitych, ile jest w części całkowitej klas, na które liczbę dziesiętną według wyjaśnionej wyżej zasady podzieliliśmy.

Np.: $\sqrt{1|{,}4\,4} = 1{,}2$; $\sqrt{1\,8|4\,0|{,}4\,1} = 4\,2{,}9$ i t. p.

Zastanówmy się teraz, gdzie umieścić należy przecinek dziesiętny przy pierwiastkowaniu ułamka dziesiętnego, mniejszego niż 1. Otóż zważywszy, że:

$1^2 = 1$; $0{,}1^2 = 0{,}01$; $0{,}01^2 = 0{,}0001$; $0{,}001^2 = 0{,}000001$ i t. d, zauważymy:

Jeżeli najwyższa znacząca cyfra ułamka dziesiętnego oznacza dziesiąte (t. j. jeżeli ułamek jest mniejszy niż 1, a niemniejszy niż 0,1), to kwadrat takiego ułamka będzie niemniejszy niż 0,01, a mniejszy niż 1. Najwyższa cyfra kwadratu takiego ułamka oznaczać będzie setne lub dziesiąte. Podaj kilka przykładów.

Jeżeli najwyższa znacząca cyfra ułamka dziesiętnego oznacza setne (t. j., jeżeli ułamek jest mniejszy niż 0,1, a niemniejszy niż 0,01), to kwadrat takiego ułamka będzie niemniejszy niż 0,0001, a mniejszy niż 0,01. Najwyższa cyfra kwadratu takiego ułamka oznaczać będzie tysięczne lub dziesięciotysięczne. Podaj przykłady.

I t. d.

Chcąc tedy wiedzieć, czy najwyższa cyfra pierwiastka kwadratowego pewnego ułamka dziesiętnego, mniejszego niż 1, oznaczać będzie dziesiąte, czy setne, czy tysięczne i t. d., należy po podzieleniu pierwiastkowanego ułamka na klasy zwrócić uwagę, w której klasie na prawo od przecinka dziesiętnego znajduje się pierwsza znacząca cyfra ułamka. Jeżeli cyfry znaczące są już w pierwszej klasie po przecinku, to najwyższa cyfra kwadratowego pierwiastka ułamka oznacza dziesiąte; jeżeli cyfry znaczące są dopiero w drugiej klasie, to najwyższa cyfra pierwiastka oznacza setne; i t. d.

Np.: $\sqrt{0,01'69} = 0,1\ldots$;
$\sqrt{0,00'22'09} = 0,04\ldots$;
$\sqrt{0,00'00'02'25} = 0,001\ldots$; i t. p.

Zapamiętajmy więc, że podział na klasy należy rozpoczynać zawsze od przecinka dziesiętnego. Po podziale na klasy i wyznaczeniu, jakie jednostki oznacza najwyższa cyfra pierwiastka, obliczanie pierwiastka kwadratowego ułamka dziesiętnego nie różni się niczem od wyznaczania pierwiastka kwadratowego liczby całkowitej.

Podajemy dwa przykłady obliczania pierwiastków kwadratowych liczb dziesiętnych:

Przykład 1. $\sqrt{2,26'80'36} = 1,506$

```
1
—
1 2|6 | 25·5
1 2 5
———
    1 8|0 | 300·0
      0
    ———
    1 8 0 3|6 | 3006·6
    1 8 0 3 6
    ———
          0
```

Przykład 2. $\sqrt{0,00'02'99'29} = 0,0173$

```
1
—
1 9|9 | 27·7
1 8 9
———
  1 0 2|9 | 343·3
  1 0 2 9
  ———
        0
```

Ćwiczenia.

1. Obliczyć:

a) $\sqrt{56,25}$; b) $\sqrt{0,002601}$; c) $\sqrt{0,0289}$;
d) $\sqrt{0,516961}$; e) $\sqrt{3340,84}$; f) $\sqrt{55601,64}$;
g) $\sqrt{177156,81}$; h) $\sqrt{9,048064}$; i) $\sqrt{0,00000729}$.

2. a) Prostokąt o bokach: $a = 19,2$ *cm* i $b = 14,7$ *cm* zamieniono na kwadrat o takiem samem polu. Obliczyć bok kwadratu.
b) Pole pewnego kwadratu równa się sumie pól kwadratów o bokach: $a = 5,1$ *cm* i $b = 6,8$ *cm*. Obliczyć bok tego kwadratu.
c) Pole pewnego kwadratu równa się różnicy pól kwadratów o bokach: $a = 18,2$ *cm* i $b = 7$ *cm*. Obliczyć bok tego kwadratu.

§ 5. Obliczanie przybliżeń niewymiernych pierwiastków kwadratowych.

Obliczanie pierwiastka kwadratowego liczby dziesiętnej sposobem opisanym w § 3 i § 4 polega na kolejnem wyznaczaniu jego cyfr, począwszy od najwyższej. Tak np. przy obliczeniu $\sqrt{2{,}268036} = 1{,}506$ (przykład 1 w § 4) wyznaczyliśmy najpierw cyfrę jednostek 1. Gdybyśmy dalej rachunku nie prowadzili, wiedzielibyśmy już, że:

$1 < A < 2$, jeżeli dla krótkości literą A oznaczymy $\sqrt{2{,}268036}$.

Gdybyśmy rachunek przerwali po wyznaczeniu drugiej cyfry, wiedzielibyśmy, że: $$1{,}5 < A < 1{,}6.$$

Po wyznaczeniu trzeciej cyfry wiedzielibyśmy, że:

$$1{,}50 < A < 1{,}51.$$

Otrzymane kolejno liczby 1; 1,5; 1,50 są więc przybliżeniami liczby A z niedomiarem z dokładnością kolejno do 1; 0,1; 0,01. Liczba 1,506 jest dokładną wartością A.

Popróbujmy teraz zastosować poznany mechanizm pierwiastkowania do obliczenia pierwiastka kwadratowego liczby dziesiętnej, która nie jest kwadratem żadnej liczby dziesiętnej. Jako przykład weźmy $\sqrt{3}$. Napiszmy liczbę pierwiastkowaną w postaci 3,0000, gdzie ilość zer jest dowolna. Gdy liczbę tę podzielimy na klasy po dwie cyfry, począwszy od przecinka dziesiętnego, zauważymy, że klasę najwyższą stanowi liczba 3, a każda następna klasa składa się z dwóch zer. Ilość klas jest nieograniczona. Pamiętając o tem, obliczamy:

```
√3 = 1,732....
1
‾‾‾‾
2 0|0 | 27 · 7
1 8 9
‾‾‾‾‾‾‾
  1 1 0|0 | 343 · 3
  1 0 2 9
  ‾‾‾‾‾‾‾‾‾
      7 1 0|0 | 3462 · 2
      6 9 2 4
      ‾‾‾‾‾‾‾
        1 7 6
```

Pierwiastkowanie nie skończyło się; wiemy nawet, że nie skończy się nigdy, bo $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną (§ 2), nie może więc równać się żadnej liczbie dziesiętnej. Rachunek powyższy dostarczył nam jednak kolejno liczb:

$$1;\ 1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732,\ \ldots..,$$

które są przybliżeniami z niedomiarem liczby niewymiernej $\sqrt{3}$ z dokładnością kolejno do:

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots...$$

Tak uzyskujemy rozwinięcie dziesiętne (patrz końcowy ustęp § u 2):

$\sqrt{3} = 1{,}732\ldots.$ Zatem:

Opisany w § 3 i § 4 algorytm obliczania pierwiastka kwadratowego daje nam możność obliczenia dowolnej ilości cyfr rozwinięcia dziesiętnego każdego niewymiernego pierwiastka kwadratowego liczby dziesiętnej.

Przyjmujemy (bez dowodu), że w taki sam sposób obliczać można przybliżenia dziesiętne kwadratowych pierwiastków wszelkich liczb, których rozwinięcia dziesiętne znamy. Np.:

1) $$\sqrt{\tfrac{5}{6}} = \sqrt{0{,}8333\ldots};$$

```
√0,8 3 3 3 3 3... = 0,9 1 2...
  8 1
  ---
    2 3 3 | 1 8 1 · 1
    1 8 1
    -----
      5 2 3 3 | 1 8 2 2 · 2
      3 6 4 4
      -------
      1 5 8 9
```

Zatem: $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{0{,}833\ldots} = 0{,}912\ldots$

2) Aby obliczyć $\sqrt{\sqrt{2}}$, obliczamy najpierw $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, a następnie $\sqrt{1{,}4142\ldots} = 1{,}18\ldots$ Otrzymamy

$$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{1{,}4142\ldots} = 1{,}18\ldots$$

Ćwiczenia.

1. Obliczyć z dokładnością do 0,001:

a) $\sqrt{17{,}7}$; *b)* $\sqrt{46{,}723}$; *c)* $\sqrt{0{,}037}$; *d)* $\sqrt{0{,}83}$;
e) $\sqrt{0{,}0007}$; *f)* $\sqrt{2}$; *g)* $\sqrt{5}$; *h)* $\sqrt{10}$;
i) $\sqrt{0{,}5}$; *j)* $\sqrt{1{,}012}$; *k)* $\sqrt{0{,}2511}$; *l)* $\sqrt{0{,}8}$.

2. Obliczyć z dokładnością do 0,01:

a) $\sqrt{100{,}5}$; *b)* $\sqrt{6000}$; *c)* $\sqrt{257{,}5}$; *d)* $\sqrt{734{,}3}$;
e) $\sqrt{1000}$; *f)* $\sqrt{1001}$; *g)* $\sqrt{1010}$; *h)* $\sqrt{483{,}523}$.

3. Porównać ze sobą następujące liczby, utworzywszy ich rozwinięcia dziesietne:

a) 2[illegible] i $\sqrt{7}$; *b)* $2\frac{1}{4}$ i $\sqrt{5}$; *c)* $6\frac{1}{4}$ i $\sqrt{39}$;
d) $8\frac{8}{9}$ i $\sqrt{79}$; *e)* $3\frac{7}{8}$ i $\sqrt{15}$; *f)* $6\frac{19}{30}$ i $\sqrt{44}$.

4. Obliczyć z dokładnością do 0,01:

a) $\sqrt{\frac{17}{9}}$; *b)* $\sqrt{\frac{12}{11}}$; *c)* $\sqrt{\frac{7}{6}}$; *d)* $\sqrt{1\frac{2}{3}}$;
e) $\sqrt{5\frac{5}{6}}$; *f)* $\sqrt{\sqrt{8}}$; *g)* $\sqrt{\sqrt{2{,}4}}$; *h)* $\sqrt{\sqrt{\frac{8}{7}}}$.

§ 6. Obliczanie wartości liczbowej wyrażeń zawierających pierwiastki kwadratowe.

W rachunkach praktycznych zastępujemy niewymierne pierwiastki kwadratowe ich przybliżeniami. Dokładność wyniku zależy oczywiście od dokładności przybliżeń. Jeżeli jednak w rachunku mamy do czynienia obok liczb dokładnych także z liczbami otrzymanemi z doświadczenia (np. z pomiarów, obliczeń statystycznych i t. p.), które są zawsze obarczone pewnemi błędami, nie należy w rozwinięciach dziesiętnych liczb niewymiernych zatrzymywać zbyt wielu cyfr dziesiętnych. Dokładność przybliżeń liczb niewymiernych należy dostosować do dokładności innych przybliżeń; przez zwiększenie bowiem dokładności przybliżeń liczb niewymiernych nie poprawimy wyniku, jeżeli inne liczby są obarczone wielkiemi błędami.

Aby uzyskać wskazówki, z jaką dokładnością obliczać należy w poszczególnych przypadkach przybliżenia niewymiernych pierwiastków kwadratowych, powtórzymy niektóre wiadomości o przybliżeniach liczbowych, znane z dawniejszej nauki.

Przybliżenia liczbowe podaje się zwykle w postaci liczb dziesiętnych. Jeżeli przybliżenie takie ma n cyfr znaczących, to mówimy, że ma n-ty *stopień dokładności.*

Przybliżenia dziesiętne dodajemy tak, jak liczby dokładne, a następnie zaokrąglamy otrzymaną sumę tak, aby miała tylko tyle cyfr dziesiętnych, ile posiada składnik, mający najmniej cyfr dziesiętnych. Podobnie postępujemy przy odejmowaniu przybliżeń.

Np.: Wykonajmy dodawanie: $4{,}728 + 13{,}66 + 4{,}8 = 23{,}188$. Ponieważ w trzecim składniku niema setnych, pozostawimy w sumie tylko dziesiąte, które zaokrąglimy (ze względu na odrzuconych przeszło 8 setnych) do 2. Suma powyższa wynosi w przybliżeniu 23,2.

Podobnie w różnicy $18{,}43 - 12{,}6 = 5{,}83$ pozostawimy tylko dziesiąte i powiemy, że różnica wynosi 5,8.

Przy obliczaniu iloczynów i ilorazów przyjmujemy zasadę: Stopień dokładności iloczynu (ilorazu) równa się stopniowi dokładności czynnika (dzielnej lub dzielnika), mającego najniższy stopień dokładności.

Tak np. w iloczynie $4{,}53 \cdot 6{,}183 = 28{,}0089$ zatrzymamy tylko 3 cyfry, bo pierwszy czynnik ma tylko trzeci stopień dokładności. Powiemy, że iloczyn ten wynosi 28,0.

Podobnie obliczymy iloraz $4{,}8 : 6{,}17$ tylko do trzech cyfr (otrzymamy 0,777) a następnie trzecią cyfrę skreślimy, bo dzielna ma tylko drugi stopień dokładności. Otrzymamy: 0,78.

Wymienione wyżej reguły, znane z klas niższych, mają ten cel, aby w wynikach nie zatrzymywać niepotrzebnie wielu cyfr, które jako niepewne, a często nawet fałszywe, są zupełnie bez znaczenia.

Dla oznaczania równości przybliżonej używać będziemy znaku $\doteq$ (t. j. znaku równości z kropką); czytać ten znak należy „równa się w przybliżeniu“. Tak np. napiszemy w powyższych przykładach:

$$
\begin{aligned}
4{,}728 + 13{,}66 + 4{,}8 &\doteq 23{,}2\,;\\
16{,}43 - 12{,}6 &\doteq 5{,}8\,;\\
4{,}53 \cdot 6{,}183 &\doteq 28{,}0\,;\\
4{,}8 : 6{,}17 &\doteq 0{,}78.
\end{aligned}
$$

Na przykładach wyjaśnimy zastosowanie tych reguł.

Przykład 1. Obliczyć w trzecim stopniu dokładności wartość wyrażenia: $\frac{2}{3} + \sqrt{3}$.

Ponieważ $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$; $\sqrt{3} = 1{,}732\ldots$, a w wyniku chcemy mieć 3 cyfry znaczące, zaokrąglimy ostatnie dwie liczby do tysięcznych, wykonamy dodawanie, a wynik zaokrąglimy tak, aby miał żądany stopień dokładności. Otrzymamy:

$$\frac{2}{3} + \sqrt{3} = 0{,}666\ldots + 1{,}732\ldots \doteq 0{,}666 + 1{,}732 = 2{,}398 \doteq 2{,}40.$$

Przykład 2. Obliczyć $x = \frac{4{,}83 \cdot \sqrt{3}}{1{,}315}$, jeżeli liczby 4,83 i 1,315 są przybliżeniami.

Ponieważ liczba 4,83 ma trzeci, a liczba 1,315 czwarty stopień dokładności, to wynik otrzymamy w trzecim stopniu dokładności; $\sqrt{3}$ wystarczy więc obliczyć w trzecim stopniu dokładności, a więc przyjąć $\sqrt{3} \doteq 1{,}73$. Większy stopień dokładności liczby $\sqrt{3}$ nie zwiększyłby stopnia dokładności wyniku. Obliczamy więc:

$$4{,}83 \cdot 1{,}73 = 8{,}3559\,; \qquad 8{,}3559 : 1{,}315 \doteq 6{,}35.$$

Dzielenie zakończyliśmy po otrzymaniu trzech cyfr ilorazu, bo wynik ma trzeci stopień dokładności. Jest więc: $x \doteq 6{,}35$.

Przykład 3. Obliczyć $x = \sqrt{4{,}86^2 + 3{,}14^2}$, jeżeli liczby 4,85 i 3,14 są przybliżeniami w trzecim stopniu dokładności.

Obliczamy w trzecim stopniu dokładności:

$$4{,}86^2 \doteq 23{,}6\,; \qquad 3{,}14^2 \doteq 9{,}86.$$

Wykonywamy dodawanie i zaokrąglamy wynik:

$$4{,}86^2 + 3{,}14^2 \doteq 23{,}6 + 9{,}86 = 33{,}46 \doteq 33{,}5.$$

Obliczamy:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{33{,}50'00} \doteq 5{,}78\\
\;25\\
\;\;\;850 \mid 107 \cdot 7\\
\;\;\;749\\
\;\;\;10100 \mid 1148 \cdot 8\\
\;\;\;\;\;9184\\
\;\;\;\;\;\;916
\end{array}
$$

Znaleźliśmy zatem: $x \doteq 5{,}78$.

Przy obliczaniu pierwiastków kwadratowych przybliżeń przestrzegać będziemy następującej reguły:

Stopień dokładności pierwiastka kwadratowego równa się stopniowi dokładności liczby pierwiastkowanej.

W ostatnim przykładzie obliczyliśmy tylko trzy cyfry pierwiastka kwadratowego, ponieważ liczba pierwiastkowana miała trzeci stopień dokładności.

Ćwiczenia.

1. Obliczyć w trzecim stopniu dokładności wartości następujących wyrażeń:

a) $6{,}8 + \sqrt{1{,}5}$; *b)* $\frac{5}{6} + \sqrt{0{,}7}$; *c)* $\sqrt{3} + \sqrt{5}$;
d) $\frac{5}{3} - \sqrt{2}$; *e)* $10\sqrt{7}$; *f)* $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}$;
g) $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$: *h)* $\frac{2}{3} : \sqrt{5}$; *i)* $\sqrt{0{,}5} \cdot \sqrt{2}$;
j) $(3 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{3})$; *k)* $(2 - \sqrt{2})^2$; *l)* $(1 + \sqrt{\frac{5}{6}})^2$;
m) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$; *n)* $\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$; *o)* $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$;
p) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; *r)* $\sqrt{1 + \sqrt{\frac{3}{4}}}$;

2. Obliczyć w przybliżeniu wartości następujących wyrażeń, uważając liczby dziesiętne za przybliżenia, a liczby całkowite za liczby dokładne:

a) $4{,}85 \cdot \sqrt{3}$; *b)* $0{,}73 \cdot \sqrt{5}$; *c)* $4{,}27 : \sqrt{2}$;
d) $\frac{4{,}82}{2{,}83 - \sqrt{2}}$; *e)* $\frac{6{,}30 \cdot \sqrt{3}}{8{,}26 - \sqrt{30}}$; *f)* $\frac{4{,}7 + \sqrt{3}}{2{,}8 + \sqrt{2}}$;
g) $\sqrt{42{,}7}$; *h)* $\sqrt{1{,}327}$; *i)* $\sqrt{37{,}5^2 - 26{,}3^2}$;
j) $\sqrt{\frac{5{,}83}{6{,}12 - \sqrt{3}}}$; *k)* $\frac{4{,}26}{\sqrt{1 - 0{,}243^2}}$; *l)* $\frac{1 + \sqrt{3{,}512}}{\sqrt{6{,}40^2 + 5{,}12^2}}$.

Rozdział II

Pierwiastki o wykładnikach naturalnych

§ 1. Pojęcie pierwiastka w ogólności.

Uogólniając pojęcie pierwiastka kwadratowego, określamy: Niechaj n oznacza dowolną liczbę naturalną. Przez n-ty *pierwiastek* nieujemnej liczby a rozumiemy taką nieujemną liczbę b, której n-ta potęga równa się liczbie pierwiastkowanej a.

n-ty pierwiastek liczby a oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{a}$; liczba a nazywa się *liczbą pierwiastkowaną*, liczba naturalna n nazywa się *wykładnikiem pierwiastkowym*; n-ty pierwiastek nazywamy też *pierwiastkiem stopnia* n-tego. Stosownie do określenia pierwiastka jest:

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ jeżeli } b^n = a, \text{ a nadto: } a \geqq 0 \text{ i } b \geqq 0.$$

Pierwiastek drugi czyli kwadratowy otrzymamy, przyjmując $n = 2$. Umawiamy się, że przy oznaczaniu pierwiastka kwadratowego wykładnik pierwiastkowy 2 będziemy opuszczać, a więc zamiast $\sqrt[2]{a}$ pisać będziemy $\sqrt{a}$; naodwrót, w razie braku wyraźnie zaznaczonego wykładnika pierwiastkowego domyślać się będziemy zawsze wykładnika 2. Pierwiastek trzeci nazywamy także sześciennym.

Przykłady:

$$\sqrt[3]{64} = 4, \text{ ponieważ } 4^3 = 64;$$
$$\sqrt[7]{1} = 1, \quad „ \quad 1^7 = 1;$$
$$\sqrt[4]{81} = 3, \quad „ \quad 3^4 = 81;$$
$$\sqrt[5]{0} = 0, \quad „ \quad 0^5 = 0;$$
$$\sqrt[3]{a^6} = a^2 \quad „ \quad (a^2)^3 = a^6; \text{ i t. p.}$$

Z szczególnych przypadków pierwiastkowania zapamiętajmy:

$$\sqrt[n]{0} = 0, \text{ ponieważ } 0^n = 0;$$
$$\sqrt[n]{1} = 1, \quad „ \quad 1^n = 1;$$
$$\sqrt[1]{a} = a, \quad „ \quad a^1 = a; \ (a \geqq 0).$$

Z określenia n-tego pierwiastka wynikają bezpośrednio wzory:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \text{ i } \sqrt[n]{a^n} = a, \text{ jeżeli } a \geqq 0.$$

Wyraź słowami twierdzenia zawarte w tych równościach!

Mając obliczyć $\sqrt[n]{a}$, gdzie $a > 0$, szukamy liczby dodatniej b, spełniającej warunek: $b^n = a$. Jeżeli taka liczba wymierna b istnieje, to żadna inna liczba rzeczywista nie spełnia tego warunku; n-ta potęga bowiem liczby większej niż b jest większa niż $b^n = a$, a n-ta potęga liczby dodatniej mniejszej niż b jest mniejsza niż $b^n = a$. Jeżeli niema takiej dodatniej wymiernej liczby b, którąby spełniała warunek $b^n = a$, wtedy przyjmujemy (bez dowodu), że $\sqrt[n]{a}$ jest liczbą niewymierną taką, że $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Nietrudno nawet podać metodę, która pozwala wyznaczyć dowolną ilość przybliżeń niewymiernej liczby $\sqrt[n]{a}$, jeżeli $a > 0$.

Chcąc np. znaleźć przybliżenia liczby $\sqrt[3]{10}$, tworzymy sześciany liczb całkowitych: $0^3 = 0$; $1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$. Ponieważ $2^3 < 10 < 3^3$, to $2 < \sqrt[3]{10} < 3$.

Dzielimy przedział między 2 i 3 na 10 równych części liczbami: 2,1; 2,2; 2,3; 2,4... i podnosimy te liczby do sześcianu. Otrzymamy: $2{,}1^3 = 9{,}261$; $2{,}2^3 = 10{,}648$; zauważymy już, że: $2{,}1^3 < 10 < 2{,}2^3$, zatem: $2{,}1 < \sqrt[3]{10} < 2{,}2$.

Dzielimy przedział między 2,1 i 2,2 na 10 równych części liczbami: 2,11; 2,12; 2,13; 2,14;... i podnosimy te liczby do sześcianu. Otrzymamy: $2{,}11^3 = 9{,}393931$; $2{,}12^3 = 9{,}528128$; $2{,}13^3 = 9{,}663597$; $2{,}14^3 = 9{,}800344$; $2{,}15^3 = 9{,}938375$; $2{,}16^3 = 10{,}077696$. Zauważymy, że $2{,}15^3 < 10 < 2{,}16^3$; zatem $2{,}15 < \sqrt[3]{10} < 2{,}16$. I t. d. Liczby 2; 2,1; 2,15; ... są przybliżeniami z niedomiarem, a liczby: 3; 2,2; 2,16;... przybliżeniami z nadmiarem liczby $\sqrt[3]{10}$. A że tą drogą można znaleźć i dalsze przybliżenia liczby $\sqrt[3]{10}$, możemy napisać: $\sqrt[3]{10} = 2{,}15\ldots$.

Metoda powyższa ma tylko znaczenie teoretyczne. Wskazuje ona, że można zawsze uzyskać rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej $\sqrt[n]{a}$.

W praktyce obliczanie pierwiastków tym sposobem byłoby zbyt żmudne. Istnieją algorytmy, podobne do algorytmu, służącego do obliczania pierwiastków kwadratowych, pozwalające obliczać pierwiastki trzecie, czwarte i t. d. liczb dziesiętnych, lecz zwykle używamy do obliczania przybliżeń pierwiastków o wykładnikach większych niż 2 tablic.

Tablica przy końcu książki podaje sześcienne pierwiastki liczb całkowitych od 1 do 1000 z dokładnością do 0,0005. I tak znajdujemy na pierwszej stronicy tych tablic w kolumnach oznaczonych literą n liczby od $0 \div 100$, a obok nich w kolumnach z napisem $\sqrt[3]{n}$ pierwiastki sześcienne tych liczb. Tak znajdziemy np.: $\sqrt[3]{70} \doteq 4{,}121$. Jak szukać należy przybliżeń pierwiastków sześciennych liczb całkowitych trzycyfrowych wyjaśnimy na przykładach.

Aby znaleźć przybliżenie liczby $\sqrt[3]{457}$, opuszczamy w liczbie pierwiastkowanej cyfrę jednostek i szukamy w kolumnie z napisem n liczby 45. W wierszu, w którym znaleźliśmy liczbę 45, a w kolumnie z napisem 0 znajdujemy część całkowitą szukanego przybliżenia, a więc 7,... Część dziesiętną znajdujemy w tym samym wierszu w kolumnie z napisem 7 (opuszczona cyfra jednostek); znajdziemy tam: 703. Jest więc: $\sqrt[3]{457} \doteq 7{,}703$.

Jeżeli przy znalezionej części dziesiętnej zauważymy znaczek *, należy część całkowitą przybliżenia przyjąć z wiersza następnego. Tak np. $\sqrt[3]{517} \doteq 8{,}026$, a nie 7,026.

Później wyjaśnimy, jak można przy pomocy tych tablic i krótkiego rachunku znaleźć przybliżenie pierwiastka sześciennego każdej liczby dziesiętnej, mającej niewięcej niż 3 cyfry znaczące.

Próbujmy rozszerzyć pierwiastkowanie także na liczby ujemne. Niechaj a oznacza liczbę dodatnią. Jeżeli wykładnik pierwiastkowy n jest liczbą parzystą, to $\sqrt[n]{-a}$ nie istnieje w sensie naszej definicji; niema bowiem takiej liczby ani dodatniej, ani ujemnej, której potęga parzysta byłaby liczbą ujemną. Należy o tem pamiętać zwłaszcza przy pierwiastkowaniu wyrażeń, zawierających litery; pierwiastek o wykładniku parzystym takiego wyrażenia ma tylko dla takich wartości liter sens liczbowy, dla których wyrażenie pod pierwiastkiem ma wartość nieujemną. Zastrzeżenie to należy zawsze zaznaczać. Tak np. przy wyrażeniu $\sqrt{a - b}$ należy zaznaczyć: $a - b \geqq 0$, albo $a \geqq b$. Nadto należy pamiętać, że n-ty pierwiastek określiliśmy jako liczbę nieujemną. Dlatego przy następujących równościach konieczne są napisane obok nich zastrzeżenia:

$$\sqrt{x^2} = x, \text{ jeżeli } x \geqq 0; \text{ natomiast } \sqrt{x^2} = -x, \text{ jeżeli } x \leqq 0.$$

Tak np. $\sqrt{(-2)^2} = +2$; $\sqrt[4]{(-3)^4} = +3$ i t. p.

Podobnie: $\sqrt{(a-b)^2} = a - b$, jeżeli $a \geq b$; natomiast $\sqrt{(a-b)^2} = b - a$, jeżeli $a \leq b$.

Jeżeli wykładnik pierwiastkowy n jest liczbą nieparzystą, mówi się czasem o pierwiastkach liczb ujemnych. Pierwiastek o wykładniku nieparzystym n liczby ujemnej $-a$ określa się jako liczbę (oczywiście ujemną), której n-ta potęga równa się $-a$. Łatwo widzieć, że wtedy $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, ponieważ $\left(-\sqrt[n]{a}\right)^n = -a$ (n liczba nieparzysta). Możemy więc powiedzieć: Jeżeli wykładnik pierwiastkowy jest nieparzysty, można znak — liczby pierwiastkowanej wyłączyć przed pierwiastek, zmieniając równocześnie liczbę pierwiastkowaną na przeciwną.

Np.: $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$; $\sqrt[5]{-1} = -\sqrt[5]{1} = -1$; $\sqrt[3]{a-b} = -\sqrt[3]{b-a}$.

Wskutek ostatniego twierdzenia pierwiastek o wykładniku nieparzystym liczby ujemnej sprowadza się do pierwiastka liczby dodatniej. Dlatego w dalszym ciągu nauki o pierwiastkach zajmować się będziemy tylko pierwiastkami liczb nieujemnych, trzymając się ściśle definicji, podanej na początku paragrafu.

Ćwiczenia.

1. Obliczyć:

a) $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[5]{32}$; $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[4]{10000}$; $\sqrt[3]{0{,}001}$; $\sqrt[4]{0{,}0001}$;

b) $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[3]{1\,000\,000}$; $\sqrt[3]{1\,000\,000\,000}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$; $\sqrt[3]{0{,}008}$.

2. Korzystając z tablic przy końcu książki, podać:

a) $\sqrt[3]{7}$; *b)* $\sqrt[3]{80}$; *c)* $\sqrt[3]{81}$; *d)* $\sqrt[3]{100}$;

e) $\sqrt[3]{256}$; *f)* $\sqrt[3]{675}$; *g)* $\sqrt[3]{218}$; *h)* $\sqrt[3]{720}$;

i) $\sqrt[3]{128}$; *j)* $\sqrt[3]{343}$; *k)* $\sqrt[3]{920}$; *l)* $\sqrt[3]{517}$.

3. Dla jakich wartości liter mają sens liczbowy następujące wyrażenia:

a) $\sqrt{m}$; *b)* $\sqrt{-m}$; *c)* $\sqrt{a-3}$; *d)* $\sqrt{1-a}$;

e) $\sqrt{a^2}$; *f)* $\sqrt{m+5}$; *g)* $\sqrt{a^2-1}$; *h)* $\sqrt{a^2-b^2}$;

i) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; *j)* $\sqrt{\frac{4}{a-1}}$; *k)* $\sqrt{\frac{a^2}{a+5}}$; *l)* $\sqrt{\frac{-5}{5-a}}$.

§ 2. Iloczyn pierwiastków; pierwiastek iloczynu.

Pierwiastka sumy kilku liczb lub różnicy nie można w ogólności przekształcić na wyrażenie prostsze.

Przekonaj się, że $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, o ile żadna z liczb a i b nie jest zerem.

Natomiast $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = a + b$, jeżeli $a + b \geqq 0$.

Podobnie nie można w ogólności przedstawić w prostszej postaci sumy lub różnicy wyrażeń, zawierających pierwiastki różnych liczb, lub pierwiastki o różnych wykładnikach pierwiastkowych. Jeżeli jednak wyrazy sumy zawierają jako czynniki pierwiastki tych samych liczb, można sumę taką zredukować, wyłączając wspólny czynnik za nawias.

Np.: $3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = (3 + 2 - 1)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$;

$$5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt{2} = (5-2)\sqrt[3]{2} + (3-2)\sqrt{2} = 3\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}.$$

Niech a, b, c oznaczają dowolne liczby nieujemne, a n dowolną liczbę naturalną. Podnosząc do n-tej potęgi iloczyn $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$, otrzymamy:

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n \cdot (\sqrt[n]{c})^n = abc.$$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$ jest tedy liczbą nieujemną, której n-ta potęga równa się abc. Według określenia pierwiastka jest więc:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}.$$ Słowami:

Iloczyn pierwiastków o jednakowych wykładnikach równa się pierwiastkowi (o takim samym wykładniku) iloczynu liczb pierwiastkowanych.

Np.: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$;

$\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 8} = \sqrt{144} = 12$;

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{0{,}2} \cdot \sqrt{0{,}5} = \sqrt{4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5} = \sqrt{0{,}4}$;

$\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a-b} = \sqrt{a^2 - b^2}$; $(a + b \geqq 0,\ a - b \geqq 0)$.

Ponieważ każda liczba nieujemna da się w myśl wzoru $a = \sqrt[n]{a^n}$ (§ 1) napisać w postaci n-tego pierwiastka, to na podstawie ostatniego twierdzenia można czynnik nieujemny znajdujący się przed pierwiastkiem *włączyć pod pierwiastek.*

Np.: $5\sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50}$;

$\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{(\frac{3}{2})^3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{\frac{27}{8} \cdot 4} = \sqrt[3]{13{,}5}$;

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$; $(a \geqq 0,\ b \geqq 0)$.

Czasem korzystamy ze wzoru: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$, gdzie a, b, i c oznaczają liczby nieujemne, w kierunku przeciwnym (t. j. od strony prawej ku lewej), a więc zastępujemy pierwiastek iloczynu liczb nieujemnych iloczynem pierwiastków (o tym samym wykładniku) wszystkich czynników iloczynu.

Np.: $\sqrt[3]{a^6 b^3} = \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^3} = a^2 b$;

$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}$; $(a \geqq 0,\ b \geqq 0)$.

W ostatnim przykładzie *wyłączyliśmy przed pierwiastek liczbę* a, która znajdowała się przedtem pod pierwiastkiem. W podobny sposób można postąpić zawsze, jeżeli liczba pierwiastkowana da się rozłożyć na dwa czynniki dodatnie, z których jeden daje się pierwiastkować.

Np.: $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;

$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$;

$\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2 \cdot a} = a\sqrt{a}$; $(a \geqq 0)$;

$\sqrt[3]{a^5 b^3} = \sqrt[3]{(ab)^3 \cdot a^2} = \sqrt[3]{(ab)^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = ab\sqrt[3]{a^2}$.

Wyłączanie liczby przed pierwiastek pozwala czasem zredukować sumę kilku pierwiastków. Wyjaśnij następujące przekształcenia:

$$\sqrt{a^3} - \sqrt{a} = \sqrt{a^2 a} - \sqrt{a} = a\sqrt{a} - \sqrt{a} = (a-1)\sqrt{a}; \quad (a \geqq 0);$$

$$\sqrt{8} + 3\sqrt{18} - \sqrt{50} = \sqrt{4 \cdot 2} + 3\sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{25 \cdot 2} = 2\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (2 + 9 - 5)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}.$$

Ćwiczenia.

1. Zredukować:

a) $\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{2} - \sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{2}$;

c) $(7 - 2\sqrt{2}) - (6 - 3\sqrt{2})$;

d) $\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{5}{6}\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}$;

e) $\frac{1}{2}(2 + \sqrt{7}) - \frac{3}{4}(8 - 2\sqrt{7})$;

e) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

2. Wykonać mnożenia:

a) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}$; b) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$; c) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}$;

d) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{6}$; e) $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}$; f) $\sqrt[3]{ab^2}\cdot\sqrt[3]{a^2b}$;

g) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot\sqrt{a^2-b^2}$; h) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}\cdot\sqrt[3]{ab}$; i) $\sqrt{b^3}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$.

3. Włączyć pod pierwiastki liczby, stojące przed pierwiastkami:

a) $3\sqrt{2}$; b) $\frac{2}{3}\sqrt{4,5}$; c) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{54}$;

d) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}$; e) $\frac{a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^5}}$; f) $a\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$;

g) $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}$; h) $(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$;

i) $(a-b)\sqrt[3]{\frac{1}{(a-b)^2}}$; j) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$;

k) $(a-1)\sqrt[3]{\frac{a+1}{a^2-2a+1}}$; l) $\frac{1}{a+1}\sqrt{a^3+3a^2+3a+1}$.

4. Wyłączyć stosowne czynniki przed pierwiastki:

a) $\sqrt{a^7}$; b) $\sqrt{5a^2}$; c) $\sqrt{8a^4b}$;

d) $\sqrt[3]{16a^4b^3}$; e) $\sqrt[3]{2x^3}$; f) $\sqrt[4]{x^4y^5}$;

g) $\sqrt{50a^3}$; h) $\sqrt{(a+b)^3}$; i) $\sqrt{a^3-2a^2+a}$.

5. Zredukować:

a) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}$; b) $3\sqrt{8}-2\sqrt{18}+\sqrt{50}$;

c) $2\sqrt{45}-\sqrt{125}+3\sqrt{20}-\sqrt{80}$; d) $2\sqrt{300}-5\sqrt{108}+3\sqrt{27}$;

e) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{54}$; f) $\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{500}$.

6. Wykonać działania:

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})$; b) $(2+\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})$;

c) $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$; d) $(2-\sqrt{3})^2$;

e) $(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$; f) $(3\sqrt{5}+\sqrt{3})(3\sqrt{5}-\sqrt{3})$;

g) $(5-\sqrt{5}+\sqrt{2})(5-\sqrt{5}-\sqrt{2})$; h) $(5-2\sqrt{2})^2-(5+2\sqrt{2})^2$;

i) $(2-\sqrt{2})^3$; j) $(\sqrt{3}-1)^3$;

k) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$; l) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{4}}\right)^2$;

m) $\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b}}-\sqrt{a-\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b}}\right)^2$.

§ 3. Iloraz pierwiastków; pierwiastek ilorazu.

Podnosząc do n-tej potęgi ułamek $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, gdzie $a \geqq 0$ i $b > 0$; otrzymamy:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}.$$

Ułamek $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ jest tedy liczbą, której n-ta potęga równa się $\frac{a}{b}$.

Zatem: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Słowami:

Iloraz pierwiastków o jednakowych wykładnikach równa się pierwiastkowi (o tym samym wykładniku) ilorazu liczb pierwiastkowanych.

Np.:
$$\sqrt{18} : \sqrt{6} = \sqrt{18 : 6} = \sqrt{3};$$
$$\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^2 : a} = \sqrt[3]{a}; \quad (a \neq 0).$$

Jeżeli tylko licznik (dzielna) lub tylko mianownik (dzielnik) ułamka (ilorazu) ma postać pierwiastka, można cały ułamek przedstawić w postaci pierwiastka, *włączając mianownik względnie licznik pod wspólny pierwiastek.* Wystarczy (podobnie jak przy mnożeniu w § 2) skorzystać ze wzoru $a = \sqrt[n]{a^n}$ i zastosować twierdzenie o ilorazie pierwiastków.

Np.:
$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{9}{2}} = \sqrt{4{,}5};$$
$$\frac{\sqrt[3]{4}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{\tfrac{4}{8}} = \sqrt[3]{0{,}5};$$
$$a : \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^4} : \sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^4 : a} = \sqrt[4]{a^3}; \quad (a > 0).$$

Ze wzoru $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, gdzie $a \geqq 0$, $b > 0$, korzystamy często w kierunku przeciwnym (t. j. od strony prawej ku lewej), zastępując pierwiastek ułamka ilorazem pierwiastka licznika przez pierwiastek mianownika.

Np.:

$$\sqrt[3]{\tfrac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \tfrac{2}{3};$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; \quad a \geq 0.$$

Korzystając z twierdzeń o pierwiastkowaniu iloczynu i ilorazu, możemy przy pomocy tablicy, umieszczonej przy końcu książki, obliczyć w czwartym stopniu dokładności (rozdz. I, § 6) przybliżenia trzecich pierwiastków wszelkich liczb dziesiętnych, zawierających niewięcej niż 3 znaczące cyfry.

Wyjaśnimy to na kilku przykładach:

Przykład 1. Obliczyć: $\sqrt[3]{4850}$.

Przekształcamy $\sqrt[3]{4850}$ w następujący sposób:

$$\sqrt[3]{4850} = \sqrt[3]{10 \cdot 485} = \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{485} \doteq 2{,}154 \cdot 7{,}857 \doteq 16{,}92.$$

Wartości $\sqrt[3]{10}$ i $\sqrt[3]{485}$ wyznaczono z tablic.

Przykład 2. Obliczyć: $\sqrt[3]{1{,}68}$.

Przekształcamy $\sqrt[3]{1{,}68}$ w następujący sposób:

$$\sqrt[3]{1{,}68} = \sqrt[3]{\frac{168}{100}} = \frac{\sqrt[3]{168}}{\sqrt[3]{100}} \doteq \frac{5{,}518}{4{,}642} \doteq 1{,}189.$$

Wartości $\sqrt[3]{168}$ i $\sqrt[3]{100}$ wyznaczono z tablic.

Ćwiczenia.

1. Wykonać dzielenia:

a) $\sqrt{24} : \sqrt{6}$; *b)* $\sqrt{6} : \sqrt{3}$; *c)* $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2}$;

d) $\sqrt[4]{18} : \sqrt[4]{6}$; *e)* $\sqrt{a^3} : \sqrt{a}$; *f)* $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[3]{a}$;

g) $\sqrt{a^5} : \sqrt{a^3}$; *h)* $\sqrt{2} : \sqrt{0{,}4}$; *i)* $\sqrt{2a^3b} : \sqrt{2ab}$;

j) $\sqrt{x^2-1} : \sqrt{x+1}$; *k)* $\sqrt[3]{2a^3 - 2ab^2} : \sqrt[3]{a^2 - ab}$.

2. Stosując włączanie pod pierwiastek, przedstawić następujące wyrażenia w postaci pierwiastka jednej liczby (jednego wyrażenia):

a) $\frac{\sqrt{8}}{2}$; *b)* $\frac{2}{\sqrt{2}}$; *c)* $\frac{\sqrt[3]{40}}{2}$; *d)* $\frac{\sqrt{18}}{3}$;

e) $\frac{9}{\sqrt[3]{3}}$; *f)* $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; *g)* $\frac{\sqrt{a^3}}{a}$; *h)* $\frac{a}{\sqrt{a}}$;

i) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$; *j)* $\frac{a}{\sqrt[3]{a}}$; *k)* $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}}$; *l)* $\frac{a^2}{\sqrt{a^3}}$;

m) $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$; *n)* $\frac{a-b}{\sqrt{a-b}}$; *o)* $\frac{a+1}{\sqrt[3]{a+1}}$;

p) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}$; *r)* $\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$; *s)* $\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

3. Wykonać działania:

a) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; *b)* $\sqrt{\frac{9}{16}}$; *c)* $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$; *d)* $\sqrt{0,64}$;

e) $\sqrt[3]{0,125}$; *f)* $\sqrt{\frac{4a^2}{9}}$; *g)* $\sqrt[3]{\frac{a^6}{8b^3}}$; *h)* $\sqrt{\frac{16}{9x^2}}$.

4. Wyłączyć stosowne czynniki przed pierwiastki:

a) $\sqrt{\frac{8a^2}{9}}$; *b)* $\sqrt{\frac{3r^2}{16}}$; *c)* $\sqrt{\frac{3(a-b)^2}{4}}$;

d) $\sqrt{\frac{2r^3\pi^2}{9}}$; *e)* $\sqrt[3]{\frac{8a^2}{27}}$; *f)* $\sqrt[3]{\frac{54a^3}{8}}$.

5. Korzystając z tablic trzecich pierwiastków, obliczyć w czwartym stopniu dokładności:

a) $\sqrt[3]{7480}$; *b)* $\sqrt[3]{5190}$; *c)* $\sqrt[3]{20700}$; *d)* $\sqrt[3]{34800}$;

e) $\sqrt[3]{60000}$; *f)* $\sqrt[3]{700000}$; *g)* $\sqrt[3]{8230000}$; *h)* $\sqrt[3]{2400000}$;

i) $\sqrt[3]{5,48}$; *j)* $\sqrt[3]{2,8}$; *k)* $\sqrt[3]{24,5}$; *l)* $\sqrt[3]{12,9}$;

m) $\sqrt[3]{0,517}$; *n)* $\sqrt[3]{0,6}$; *o)* $\sqrt[3]{0,0175}$; *p)* $\sqrt[3]{0,0025}$.

§ 4. Pierwiastek pierwiastka.

Symbol $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ (m i n liczby naturalne; $a \geqq 0$) oznacza, że należy obliczyć $\sqrt[m]{a}$, a z otrzymanej liczby wyciągnąć n-ty pierwiastek.

Oznaczmy wynik tych działań literą p tak, że $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = p$. Liczba p ma tę własność, że gdy ją podniesiemy do n-tej potęgi, a otrzymaną wartość zkolei do m-tej potęgi, wtedy otrzymamy liczbę a; czyli: $(p^n)^m = a$. Lecz ponieważ $(p^n)^m = p^{mn}$, to $p^{mn} = a$, czyli $p = \sqrt[mn]{a}$. Porównując tę wartość p z poprzednią $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, otrzymamy:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$ Słowami:

Pierwiastek o wykładniku n pierwiastka o wykładniku m liczby nieujemnej równa się pierwiastkowi tej samej liczby, mającemu za wykładnik iloczyn wykładników m i n.

Np.:
$$\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}; \quad a \geqq 0.$$

Czasem wygodniej jest naodwrót zastąpić pierwiastek, którego wykładnik daje się rozłożyć na czynniki, pierwiastkiem pierwiastka.

Np.:
$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[2 \cdot 3]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}; \quad (a \geqq 0);$$
$$\sqrt[4]{1444} = \sqrt{\sqrt{1444}} = \sqrt{38} = 6{,}164\ldots$$

Ostatni przykład wskazuje, że umiejąc obliczać pierwiastki kwadratowe liczb, potrafimy obliczyć także pierwiastki o wykładnikach 4; 8 i t. d. Korzystając nadto z tablic pierwiastków sześciennych, możemy obliczać także przybliżenia pierwiastków o wykładnikach 6, 9, 12 i t. d.

Ponieważ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ i $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, to $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

Ostatni wzór wskazuje, że przy pierwiastkowaniu pierwiastka, można pierwiastkowania wykonywać w dowolnym porządku.

Np.:
$$\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt{\sqrt[3]{27}} = \sqrt{3} \doteq 1{,}73.$$

Ćwiczenia.

1. Przekształcić następujące wyrażenia tak, by zawierały tylko jeden pierwiastek:

a) $\sqrt{\sqrt{3}}$; *b)* $\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}$; *c)* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^7}}$; *d)* $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$;

e) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$; *f)* $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$; *g)* $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$; *h)* $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$

i) $\sqrt{3\sqrt{3}}$; *j)* $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; *k)* $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}}}$; *l)* $\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{a}}}$.

2. Obliczyć z dokładnością do 0,01:

a) $\sqrt[4]{2}$; *b)* $\sqrt[4]{100}$; *c)* $\sqrt[4]{20736}$; *d)* $\sqrt[8]{625}$;

e) $\sqrt[6]{27}$; *f)* $\sqrt[6]{7}$; *g)* $\sqrt[6]{5{,}76}$; *h)* $\sqrt[9]{512}$.

3. Obliczyć bok kwadratu, którego pole równa się
a) polu trójkąta równobocznego o boku $a = 5$ *cm*.
b) polu sześciokąta foremnego o boku $a = 3$ *cm*.

§ 5. Przekształcanie pierwiastka potęgi.

Stosując określenie potęgi i twierdzenie o pierwiastku iloczynu (§ 2), otrzymamy:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots}_{m \text{ czynników}}} = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots}_{m \text{ czynników}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \text{ jeżeli } a \geqq 0.$$

Otrzymany wzór:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \text{ gdzie } a \geqq 0,$$

możemy wraz z ostatnim wzorem w §-ie 4, oraz ze wzorem: $(a^n)^m = (a^m)^n$, znanym z nauki o potęgach, tak odczytać:

Naznaczone kolejne potęgowania i pierwiastkowania można wykonywać w dowolnym porządku.

Np.: $$\sqrt{4^3} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8;$$

$$\sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{a^2}\right)^5} = \sqrt[3]{a^5} = a\sqrt[3]{a^2}; \; (a \geqq 0).$$

Według określenia pierwiastka jest: $x = \sqrt[p]{x^p}$, jeżeli $x \geqq 0$.

Podstawiając w tym wzorze: $x = \sqrt[n]{a^m}$, gdzie $a \geqq 0$, otrzymamy:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p}.$$

Przekształcamy ostatnie wyrażenie w następujący sposób:

$$\sqrt[p]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p}=\sqrt[p]{\sqrt[n]{(a^m)^p}}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

Jest więc: $$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

Oczywiście oznaczają litery m, n i p liczby naturalne. Odczytując ten wzór w obu kierunkach (od strony lewej ku prawej i od prawej ku lewej), otrzymujemy twierdzenie:

Wartość pierwiastka potęgi nie zmienia się, jeżeli wykładnik potęgowy i pierwiastkowy przez tę samą liczbę naturalną pomnożymy, lub przez wspólny podzielnik wykładników podzielimy.

Np.: $\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{a}$; $\sqrt{a^8}=\sqrt[1]{a^4}=a^4$; $(a \geqq 0)$.

Mnożenie wykładnika potęgowego i pierwiastkowego przez tę samą liczbę pozwala dwa pierwiastki o różnych wykładnikach sprowadzić do wspólnego wykładnika pierwiastkowego.

Np.: Chcąc sprowadzić $\sqrt{a}$ i $\sqrt[3]{a^2}$ $(a \geqq 0)$ do wspólnego wykładnika pierwiastkowego, mnożymy wykładnik potęgowy i pierwiastkowy w pierwszem wyrażeniu przez 3 (pamiętając, że $a=a^1$), a w drugiem przez 2. Otrzymamy:

$$\sqrt{a}=\sqrt[6]{a^3};\quad \sqrt[3]{a^2}=\sqrt[6]{a^4}.$$

Nietrudno zauważyć, że wspólny wykładnik pierwiastkowy musi być wspólną wielokrotnością obu wykładników pierwiastkowych.

Sprowadzanie pierwiastków do wspólnego wykładnika pierwiastkowego pozwala przekształcać iloczyny i ilorazy pierwiastków o różnych wykładnikach.

Np.: $$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{32};$$

$$\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt{a}=\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[4]{a^5}=a\sqrt[4]{a};\ (a \geqq 0);$$

$$\sqrt[6]{a^5}:\sqrt[4]{a}=\sqrt[12]{a^{10}}:\sqrt[12]{a^3}=\sqrt[12]{a^7};\ (a > 0).$$

Ćwiczenia.

1. Przedstawić w prostszej postaci:

a) $\sqrt[4]{a^6}$; *b)* $\sqrt[9]{a^6}$; *c)* $\sqrt{a^4}$; *d)* $\sqrt[3]{a^6}$;

e) $(\sqrt{a})^6$; *f)* $(\sqrt[4]{a})^2$; *g)* $(\sqrt{a})^4$; *h)* $(\sqrt[6]{a})^3$;

i) $(\sqrt[6]{a})^4$; *j)* $\sqrt{(\sqrt[3]{a^2})^3}$; *k)* $\sqrt{(\sqrt{a})^4}$; *l)* $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}\right)^3$.

2. Wykonać działania:

a) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a}$; b) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a}$; c) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^5}$;

d) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a}$; e) $\sqrt[6]{a^5} : \sqrt[9]{a^2}$; f) $\sqrt{x} : \sqrt[4]{x}$;

g) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}$; h) $\dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[12]{x^5}}{\sqrt[4]{x}}$; i) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}}$.

3. Wykonać działania:

a) $a\sqrt{\dfrac{b}{a}}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$; b) $\dfrac{a^2}{b}\sqrt[4]{\dfrac{b^3}{a^3}}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$; c) $\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a}}$;

d) $\sqrt{\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}}$; e) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt[4]{a}}}$; f) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{\sqrt{a}}}$;

g) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{\sqrt{x}}} : \sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x}}$; h) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x}}} : \sqrt{\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}$.

§ 6. Przekształcanie wyrażeń, zawierających pierwiastki.

Przykłady w poprzednich paragrafach wskazują, że wyrażenie algebraiczne zawierające pierwiastki można często przedstawić w rozmaitych postaciach. Która z tych postaci jest prostsza, trudno ogólnie powiedzieć; zależy to od celu, do jakiego dane wyrażenie ma służyć. Najczęściej chodzi o obliczenie wartości liczbowej danego wyrażenia w postaci liczby dziesiętnej. Wtedy należy uwzględnić, że najżmudniejszem ze wszystkich działań jest pierwiastkowanie; wyrażenie uważać będziemy za tem prostsze, im mniej pierwiastkowań zawiera.

Tak np.: $\sqrt{13+4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}+1$. (Przekonaj się o równości tych wyrażeń, podnosząc oba do kwadratu). Wyrażenie $2\sqrt{3}+1$ uważamy za prostsze niż $\sqrt{13+4\sqrt{3}}$, bo do obliczenia jego wartości trzeba tylko raz wykonać pierwiastkowanie.

Nadto należy pamiętać, że pierwiastki liczb wymiernych są najczęściej liczbami niewymiernemi i że liczby takie zastępuje się w rachunkach praktycznych ich przybliżeniami, a więc liczbami, mającemi dość znaczną ilość cyfr, jeżeli chodzi o znaczną dokładność. O ile dodawanie, odejmowanie i mnożenie takich liczb wykonać można bez trudu, o tyle dzielenie przez liczbę wielocyfrową jest żmudne. Dlatego staramy się każde wyrażenie ułamkowe, zawierające pierwiastki, tak przekształcić, aby w mianowniku nie było pierwiastka.

Np.: Chcąc obliczyć $\frac{6}{\sqrt{2}}$, mielibyśmy obliczyć w przybliżeniu $\sqrt{2}$, a następnie wykonać dzielenie $6 : \sqrt{2}$. Gdy jednak licznik danego ułamka włączymy pod pierwiastek, otrzymamy:

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{36}{2}} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}.$$

Obliczenie wartości ostatniego wyrażenia wymaga tylko obliczenia przybliżenia liczby $\sqrt{2}$ i pomnożenia go przez 3. Wykonaj rachunek obu sposobami.

Omówimy na przykładach kilka przekształceń szczególnie ważnych w praktyce.

1) Mając obliczyć wartość wyrażenia $\frac{3}{2\sqrt{5}}$, zauważymy, że trudność sprawiać będzie dzielenie przez liczbę niewymierną $\sqrt{5}$. Aby usunąć z mianownika $\sqrt{5}$, mnożymy licznik i mianownik danego ułamka przez $\sqrt{5}$; otrzymamy:

$$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{3\sqrt{5}}{10} = 0{,}3 \cdot \sqrt{5}.$$

Chcąc mieć wynik w czwartym stopniu dokładności, obliczamy:

$$\sqrt{5} \doteq 2{,}236; \quad 2{,}236 \cdot 0{,}3 = 0{,}6708; \quad \frac{3}{2\sqrt{5}} = 0{,}3\sqrt{5} \doteq 0{,}6708.$$

Tak postępujemy zawsze, jeżeli mianownik zawiera jako czynnik niewymierny pierwiastek kwadratowy. Mnożymy mianowicie licznik i mianownik ułamka przez ten pierwiastek, wskutek czego mianownik staje się liczbą wymierną. Ogólnie:

$$\frac{b}{c\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{c(\sqrt{a})^2} = \frac{b\sqrt{a}}{ac}; \quad (a > 0, \ c \neq 0).$$

2) Aby usunąć niewymierną liczbę z mianownika ułamka $\frac{6}{5\sqrt[3]{2}}$, należy licznik i mianownik ułamka pomnożyć przez $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$. Otrzymamy:

$$\frac{6}{5\sqrt[3]{2}} = \frac{6\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{5\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{6\sqrt[3]{4}}{5 \cdot 2} = 0{,}6 \cdot \sqrt[3]{4}.$$

3) Aby usunąć niewymierną liczbę z mianownika ułamka $\frac{5}{2\sqrt[3]{4}}$, wystarczy licznik i mianownik ułamka pomnożyć przez $\sqrt[3]{2}$; otrzymamy:

$$\frac{5}{2\sqrt[3]{4}}=\frac{5\sqrt[3]{2}}{2\sqrt[3]{8}}=\frac{5\sqrt[3]{2}}{4}.$$

4) Nie można usunąć liczby niewymiernej z mianownika ułamka $\frac{6}{2+\sqrt{2}}$ przez pomnożenie licznika i mianownika przez $\sqrt{2}$ (wykonaj próbę). Można jednak to uzyskać, mnożąc licznik i mianownik ułamka przez $2-\sqrt{2}$. Otrzymamy:

$$\frac{6}{2+\sqrt{2}}=\frac{6(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})\,(2-\sqrt{2})}=\frac{6\,(2-\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{6\,(2-\sqrt{2})}{4-2}=3\,(2-\sqrt{2}).$$

5) Liczbę niewymierną z mianownika ułamka $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ można usunąć, mnożąc licznik i mianownik ułamka przez $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$. Otrzymamy:

$$\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})\,(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}=\frac{18+12\sqrt{6}+12}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}=$$

$$=\frac{30+12\sqrt{6}}{18-12}=\frac{30+12\sqrt{6}}{6}=5+2\sqrt{6}.$$

Zapamiętajmy:

Jeżeli w mianowniku ułamka znajduje się suma lub różnica wyrażeń, zawierających jako czynniki pierwiastki kwadratowe, należy w celu usunięcia z mianownika liczby niewymiernej pomnożyć licznik i mianownik ułamka przez różnicę, względnie sumę tych wyrażeń.

6) Czasem upraszcza się wyrażenie, zawierające pierwiastki kwadratowe, jeżeli podniesiemy je do kwadratu, a z wyniku wyciągniemy pierwiastek kwadratowy. Np:

$$\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{7+2\sqrt{6}-2\sqrt{(7+2\sqrt{6})\,(7-2\sqrt{6})}+7-2\sqrt{6}}=$$

$$=\sqrt{14-2\sqrt{49-24}}=\sqrt{14-10}=\sqrt{4}=2.$$

Ćwiczenia.

1. Następujące ułamki zamienić na ułamki o wymiernych mianownikach i obliczyć ich przybliżone wartości liczbowe:*

a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$; *b)* $\frac{12}{\sqrt{6}}$; *c)* $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$; *d)* $\frac{5(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}}$;

* Pierwiastki obliczać w czwartym stopniu dokładności.

e) $\frac{4(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$; f) $\frac{6}{\sqrt[3]{3}}$; g) $\frac{3}{\sqrt[3]{9}}$; h) $\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}$;

i) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; j) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; k) $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$;

l) $\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; m) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; n) $\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

o) $\frac{2}{\sqrt{4\sqrt{2}}}$; p) $\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$; r) $\frac{4}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}$;

s) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; t) $\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3-\sqrt{6}}}$; u) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}$;

2. Następujące wyrażenia przedstawić w prostszej postaci i obliczyć ich przybliżone wartości liczbowe* dla podanych wartości liter:

a) $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$; $a=1\frac{5}{6}$; $b=1\frac{1}{2}$;

b) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; $a=3$; $b=2$;

c) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $a=7{,}3$; $b=6{,}8$;

d) $\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; $x=6{,}25$; $y=2{,}5$;

e) $\frac{2x}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$; $a=8$; $x=2$;

f) $\sqrt{\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}}$; $a=6$; $b=4$;

g) $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}$; $a=7{,}5$; $b=1{,}5$;

h) $\frac{a\sqrt{1-a^2}+b\sqrt{1-b^2}}{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}}$; $a=\frac{2}{3}$; $b=\frac{1}{2}$;

i) $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}}$; $a=5$; $b=4$;

* Pierwiastki obliczać w czwartym stopniu dokładności.

j) $\dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$; $a=1{,}5$.

3. Stwierdzić, że w następujących przykładach każda z liczb podanych w nawiasie obok równania spełnia to równanie:

a) $x^2-6x+4=0$; $(3+\sqrt{5};\ 3-\sqrt{5})$;

b) $\dfrac{1}{x}=2(x-1)$; $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$;

c) $\dfrac{3x-1}{x-3}-x=0$; $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}};\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)$;

d) $\dfrac{x^2-1}{4x-3}=\frac{1}{4}$; $\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$;

e) $\dfrac{x^2+1}{2x}=\sqrt{3}$; $(\sqrt{3}+\sqrt{2};\ \sqrt{3}-\sqrt{2})$;

f) $\dfrac{6}{x^2}=x+5$; $(-3+\sqrt{3};\ -3-\sqrt{3})$.

4. Rozwiązać i sprawdzić następujące równania i układy równań:

a) $\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{x-1}$;

b) $\dfrac{2x+2\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}+\dfrac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}=3$;

c) $\dfrac{x\sqrt{2}}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}=\sqrt{2}$;

d) $x+\sqrt{5}-\dfrac{x^2+7}{x+\sqrt{5}}=2$;

e) $x-2y=-3$,
$5x+2y\sqrt{3}=7$;

f) $x-2y=3$,
$x\sqrt{3}-4y=5$;

g) $2x\sqrt{3}-y\sqrt{2}=4$,
$3x+y\sqrt{3}=3\sqrt{3}$;

h) $x\sqrt{2}+y=5$,
$3x-2y=7\sqrt{2}$.

5. *a)* Jeżeli r oznacza promień koła, zaś a_n bok foremnego wielokąta mającego n boków wpisanego w to koło, wtedy według zasad geometrji: $a_3=r\sqrt{3}$; $a_4=r\sqrt{2}$; $a_6=r$; $a_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $a_{12}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Obliczyć z tych wzorów r, uważając a_n za wiadome; przekształcić każdy z otrzymanych wzorów na wzór wygodny do rachunku.

b) Jeżeli c oznacza cięciwę w kole o promieniu r, a d jej odległość od środka, wtedy: $d=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}c^2}$. Obliczyć według tego wzoru odległość od środka koła boku foremnego trójkąta, czworokąta, sześciokąta, ośmiokąta i dwunastokąta, wpisanych w koło o danym promieniu r.

Korzystać ze wzorów, podanych w zad. *a)*.

c) Korzystając ze wzorów podanych w zad. *a)* i otrzymanych w zad. *b)*, obliczyć pola foremnych wielokątów wpisanych w koło o danym promieniu *r*, mających 3; 4; 6; 8; 12 boków.

d) Sprawdzić otrzymane w poprzedniem zadaniu wzory na pole sześciokąta, ośmiokąta i dwunastokąta, obliczając te pola w następujący sposób: Łączymy środek koła z wierzchołkami wielokąta, przyczem wielokąt rozpada się na przystające trójkąty. Pole jednego takiego trójkąta obliczamy, uważając za podstawę promień koła; wysokością trójkąta jest wtedy połowa boku wielokąta wpisanego w koło, a mającego 2 razy mniej boków. I t. d.

e) Korzystając ze wzorów otrzymanych w zad. *a)* i *c)* obliczyć, jak wielki musi być bok wielokąta foremnego, mającego 3; 4; 6; 8; 12 boków, aby pole jego wynosiło 1 m^2.

f) Jeżeli A_n oznacza bok foremnego wielokąta opisanego na kole o promieniu *r*, a mającego *n* boków, zaś a_n ma znaczenie takie jak w zad. *a)*, wtedy między A_n, a_n i r zachodzi związek: $A_n : a_n = r : \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a_n^2}$. Uważając r za wiadome i korzystając z ostatniego wzoru oraz ze wzorów podanych w zad. *a)* obliczyć: A_3, A_4, A_6, A_8 i A_{12}.

g) W pewnem łożysku kulkowem oś, mająca kształt walca o promieniu $r = 1\ cm$, otoczona jest wieńcem 12 równych kul, stykających się z osią i ze sobą tak, że środki ich tworzą dwunastokąt foremny. Wiedząc, że bok *a* dwunastokąta foremnego, wpisanego w koło o promieniu *R*, dany jest wzorem: $a = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, obliczyć promienie kul.

Rozdział III.

Równania kwadratowe.

§ 1. Stopień równania.

Równanie takie, w którem po lewej stronie znajduje się wielomian stopnia drugiego ze względu na niewiadomą, a po stronie prawej 0, nazywa się *równaniem stopnia drugiego* czyli *równaniem kwadratowem* z jedną niewiadomą.

Np.: Równaniami stopnia drugiego są równania:

$x^2 - 3x + 2 = 0$; $2x^2 - x + 3 = 0$; $x^2 - 7 = 0$; $2x^2 + 3x = 0$; i t. p.

Ogólną postacią równania kwadratowego z jedną niewiadomą jest:

$$ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0.$$

Równanie takie zawiera x^2 z jakimś współczynnikiem a różnym od zera, dalej x z jakimś współczynnikiem b, oraz wyraz c, nie zawierający niewiadomej, t. zw. wyraz wolny. Przyjęliśmy, że $a \neq 0$; w przeciwnym razie bowiem równanie nie zawierałoby kwadratu niewiadomej, byłoby więc równaniem stopnia pierwszego.

Podobnie określamy: Jeżeli po prawej stronie równania znajduje się wielomian stopnia trzeciego (w ogólności n-tego) ze względu na niewiadomą, a po stronie prawej 0, to równanie takie nazywa się równaniem stopnia trzeciego (n-tego).

Stopień równania określamy dopiero po uporządkowaniu t. j. po uwolnieniu od nawiasów i ułamków, po przeniesieniu wszystkich wyrazów na stronę lewą i po zredukowaniu wyrazów podobnych. Z faktu, że równanie jakieś zawiera kwadrat niewiadomej, nie można jeszcze wnioskować, że równanie takie prowadzi do równania kwadratowego. Tak np. równanie $x^2 + 7x - 2 = x^2 + 3x - 5$ zawiera kwadrat niewiadomej, lecz po uporządkowaniu prowadzi do równania stopnia pierwszego: $4x + 3 = 0$.

Ćwiczenia.

1. *a)* Napisz kilka dowolnych równań stopnia trzeciego i kilka dowolnych równań stopnia czwartego.
b) Napisz ogólną postać równania stopnia trzeciego i równania stopnia czwartego z jedną niewiadoną.
2. Oznacz po uporządkowaniu stopnie następujących równań:
a) $(x-3)^2 = x^2 + 10$; *b)* $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 7$;
c) $(x-2)^3 + (1-x)^3 = 6$; *d)* $(x^2-1)^2 + x^3 = x^2(x+2)^2$;
e) $(x^2-x)^3 = (x^3+1)^2$; *f)* $(x^2+3)(x-1) = x(2x+1)(x^2+1)$.

§ 2. Równanie: $x^2 = m$.

Zajmiemy się najpierw rozwiązaniem równań $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, w tym szczególnym przypadku, kiedy $b = 0$, t. j. kiedy równanie zawiera tylko kwadrat niewiadomej i wyraz wolny od niewiadomej, a nie zawiera niewiadomej w potędze pierwszej. Ogólną postacią takiego równania jest:

$$ax^2 + c = 0; \quad a \neq 0.$$

Sposób rozwiązania wyjaśnimy najpierw na przykładach.

P r z y k ł a d 1. Rozwiązać równanie: $4x^2 + 9 = 0$.

Jakąkolwiek wartość przyjmiemy zamiast x, wyraz $4x^2$ nie będzie miał nigdy wartości ujemnej, bo kwadrat liczby tak dodatniej jak i ujemnej jest liczbą dodatnią, a $0^2 = 0$. Gdy do $4x^2$ dodamy 9, otrzymamy dla wszelkich wartości x liczbę dodatnią; $4x^2 + 9$ nie może zatem stać się zerem dla żadnej wartości x. Równanie: $4x^2 + 9 = 0$ nie ma pierwiastka.

P r z y k ł a d 2. Rozwiązać równanie: $2x^2 - 8 = 0$.

Uważając w równaniu za niewiadomą x^2, znajdujemy:

$$x^2 = 4.$$

Dane równanie sprawdza się dla takiej wartości x, której kwadrat równa się 4. Jak wiemy, liczbą taką jest $\sqrt{4} = 2$. Łatwo widzieć jednak, że nietylko $2^2 = 4$, lecz także $(-2)^2 = 4$. Równanie dane ma więc dwa pierwiastki: $x_1 = +2$ i $x_2 = -2$.

Może jednak nasunąć się pytanie, czy dane równanie nie posiada jeszcze więcej pierwiastków. Że dane równanie ma t y l k o te dwa pierwiastki, które wyżej wyznaczyliśmy, wykażemy, rozkładając lewą stronę danego równania na czynniki w następujący sposób:

$$2x^2 - 8 = 0;$$
$$2(x^2 - 4) = 0;$$
$$2(x-2)(x+2) = 0;$$

Lewa strona ostatniego równania ma postać iloczynu. Ponieważ iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy, jeżeli przynajmniej jeden z jego czynników jest zerem, i ponieważ pierwszy czynnik $2 \neq 0$, to dane równanie sprawdza się tylko wtedy, jeżeli:

$$\text{albo } x - 2 = 0, \text{ albo } x + 2 = 0.$$

Z tego widzimy, że pierwiastkami danego równania są tylko wartości: $x_1 = 2$ i $x_2 = -2$. Więcej pierwiastków równanie mieć nie może, bo dla innych wartość x żaden z czynników $x - 2$ i $x + 2$ nie staje się zerem.

Przykład 3. Rozwiązać równananie: $3x^2 = 0$.

Lewa strona równania jest iloczynem: $3 \cdot x \cdot x$; równanie żąda, aby ten iloczyn był zerem. Wiemy, że iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden czynnik jego jest zerem. Równanie $3x^2 = 0$ sprawdza się zatem tylko wtedy, jeżeli $x = 0$, a więc ma jedyny pierwiastek $x = 0$.

Rozwiążmy równanie: $ax^2 + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

Obliczamy z tego równania: $x^2 = -\frac{c}{a}$.

Oznaczmy $-\frac{c}{a}$ literą m tak, że $m = -\frac{c}{a}$. Równanie przyjmuje postać:

$$x^2 = m.$$

Rozróżnimy trzy przypadki:

1) Jeżeli m jest liczbą ujemną, to równanie nie ma pierwiastka. Niema bowiem liczby, której kwadrat jest liczbą ujemną, która więc podstawiona zamiast x spełnia równanie.

2) Jeżeli $m = 0$, a więc równanie ma postać $x^2 = 0$, wtedy równanie ma jedyny pierwiastek $x = 0$. Kwadrat bowiem żadnej innej liczby nie równa się 0.

3) Jeżeli m jest liczbą dodatnią, wtedy równanie ma dwa pierwiastki: $x_1 = \sqrt{m}$ i $x_2 = -\sqrt{m}$, ponieważ $(\sqrt{m})^2 = m$ i $(-\sqrt{m})^2 = m$.

Więcej pierwiastków równanie to mieć nie może. Aby się o tem przekonać, napiszmy w równaniu $(\sqrt{m})^2$ zamiast m, przenieśmy wszystkie wyrazy równania na stronę lewą i rozłóżmy stronę lewą na czynniki. Otrzymamy kolejno:

$$x^2 = (\sqrt{m})^2;$$

$$x^2 - (\sqrt{m})^2 = 0;$$

$$(x - \sqrt{m})(x + \sqrt{m}) = 0.$$

Ponieważ iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy, jeżeli przynajmniej jeden z czynników jego jest zerem, to równanie ostatnie (a więc i dane) sprawdza się tylko wtedy, jeżeli:

$$\text{albo } x - \sqrt{m} = 0, \quad \text{albo } x + \sqrt{m} = 0,$$

czyli jeżeli albo $x_1 = \sqrt{m}$, albo $x_2 = -\sqrt{m}$.

Żadna inna liczba nie spełnia równania; równanie ma tylko dwa pierwiastki o równych wartościach bezwzględnych, a znakach przeciwnych.

Przykład 4. Rozwiązać równanie: $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x^2-1} = m.$

Ułamki w tem równaniu tracą sens liczbowy, gdy $x = 1$, a drugi z nich także wtedy, gdy $x = -1$. Zakładamy, że $x \neq 1$ i $x \neq -1$ i mnożymy obie strony równania przez $x^2 - 1$. Otrzymamy:

$$x(x+1) - x = m(x^2 - 1);$$
$$x^2 + x - x = mx^2 - m;$$
$$(m-1)x^2 = m.$$

Jeżeli $m = 1$, to równanie jest sprzeczne (dlaczego?).
Jeżeli $m - 1 \neq 0$, wtedy:

$$x^2 = \frac{m}{m-1}.$$

Jeżeli $\frac{m}{m-1} > 0$, to równanie ma dwa pierwiastki:

$$x_1 = \sqrt{\frac{m}{m-1}} \text{ i } x_2 = -\sqrt{\frac{m}{m-1}}.$$

Zwracamy przytem uwagę, że na x nie otrzymamy nigdy wykluczonych powyżej wartości $+1$ lub -1, ponieważ dla żadnej wartości m nie może być $\frac{m}{m-1} = 1$ (dlaczego?).

Jeżeli $\frac{m}{m-1} = 0$, to równanie ma jeden pierwiastek: $x = 0$.

Jeżeli $\frac{m}{m-1} < 0$, to równanie nie ma pierwiastków.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać równania:

a) $4x^2 = 361$; *b)* $2x^2 = 9$; *c)* $0{,}16x^2 = 44{,}89$;

d) $x^2 = 8427 + (\frac{1}{2}x)^2$; *e)* $x^2 = 16{,}2 - (\frac{1}{2}x)^2$;

f) $1 + \frac{x-3}{5} = \frac{1}{x-2}$; *g)* $x + 3 = 1 - \frac{x-10}{x-3}$;

h) $\frac{2x+5}{2x-3} + 2(x+1) = 0$; *i)* $3x - 2 + \frac{4}{3x+2} = 0$;

j) $\frac{2x+3}{x-1} - \frac{3x+8}{x+1} = 1\frac{1}{2}$; (po rozwiązaniu sprawdzić).

k) $(x-3)^2 - \frac{(x-2)^3}{x-1} = 3$; (po rozwiązaniu sprawdzić).

l) $(x+3)^3 - 31(x+1) = x(x^2-4)$.

2. *a)* Jaka liczba jest dziewięciokrotnością, a jaka pięciokrotnością swej odwrotności?

b) W pewnym trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna jest o 1 *cm* większa, a druga o 1 *cm* mniejsza niż $\frac{2}{3}$ przeciwprostokątnej. Obliczyć przeciwprostokątną.

c) W pewnym prostokącie podstawa wynosi 9 *cm*, a wysokość wynosi $\frac{4}{5}$ przekątnej. Obliczyć przekątną.

d) Pewien oddział wojska ustawiono w szeregi, przyczem szeregów było o 7 więcej niż ludzi w szeregu. Aby ustawić oddział w 7 szeregach, trzeba było powiększyć ilość ludzi w każdym szeregu o 28. Ilu ludzi było pierwotnie w szeregu?

Wskazówka: Ludzi w szeregu było x, a szeregów $x+7$; i t. d. Po przegrupowanu liczba ludzi nie zmieniła się.

e) Dwie pompy wypróżniają zbiornik wody w pewnym czasie. Gdy czynna jest tylko pierwsza pompa, wypróżnianie trwa o 40 godz. dłużej, a gdy czynna jest tylko druga pompa o $22\frac{1}{2}$ godz. dłużej, niż wtedy, gdy pracują obie pompy razem. W jakim czasie wypróżnia się zbiornik, gdy pracują obie pompy?

Wskazówka: Obie pompy wypróżniają zbiornik w x godz., pierwsza w $x+40$ godz., druga w $x+22\frac{1}{2}$ godz. W jednej godzinie wypróżnia pierwsza $\frac{1}{x+40}$ zbiornika, a druga $\frac{1}{x+22\frac{1}{2}}$ zbiornika. W x godz. pierwsza wypróżni... i t. d.

3. Rozwiązać równania:

a) $x^2=a^2-x^2$; *b)* $x^2=a^2+(\frac{1}{2}x)^2$; *c)* $x^2=a^2-(\frac{1}{2}x)^2$;

d) $\frac{3}{2}x^2=6a^2+x^2$; *e)* $2a^2-x^2=\frac{1}{2}x^2$; *f)* $(\frac{2}{3}x)^2=x^2-5a^2$;

g) $(a+b):x=x:(a-b)$; *h)* $(a+x):x=x:2(a-x)$;

i) $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=1$; *j)* $\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x-b}$;

k) $\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x+b}=1$; *l)* $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{3}{x-(a+b)}$.

4. *a)* Przeciwprostokątna w pewnym trójkącie prostokątnym jest średnią arytmetyczną dwóch danych odcinków m i n, a jedna przyprostokątna jest średnią geometryczną tych odcinków. Obliczyć drugą przyprostokątną.

b) O ile powiększyć należy podstawę kwadratu o danym boku a, aby po zmniejszeniu wysokości o taki sam odcinek otrzymać prostokąt o polu n razy mniejszem, niż pole kwadratu?

Po otrzymaniu ogólnego wzoru obliczyć x dla $n=2$ i dla $n=4$.

§ 3. Przykłady na rozwiązanie równania kwadratowego.

Przykład 1. Rozwiązać równanie $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Zauważymy, że lewa strona równania jest kwadratem dwumianu. Możemy więc dane równanie napisać w postaci:

$$(x - 3)^2 = 0, \text{ czyli:}$$
$$(x - 3)(x - 3) = 0.$$

Ponieważ iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy, jeżeli przynajmniej jeden z czynników jego jest zerem, przeto dane równanie sprawdza się (wobec równości obu czynników) tylko wtedy, jeżeli:

$$x - 3 = 0, \text{ czyli jeżeli:}$$
$$x = 3.$$

Równanie dane ma tylko jeden pierwiastek: $x = 3$.

Przykład 2. Rozwiązać równanie: $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Uzupełniamy pierwsze dwa wyrazy równania takim składnikiem, aby otrzymać kwadrat dwumianu. Pierwszym składnikiem tego dwumianu będzie niewątpliwie x; drugi składnik należy tak dobrać, aby $-6x$ było podwójnym iloczynem pierwszego i drugiego składnika. Ponieważ pierwszym składnikiem jest x, to -6 jest podwójnym drugim składnikiem. Za drugi składnik przyjąć należy $(-6):2 = -3$. I rzeczywiście: $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$. Dodajemy zatem do $x^2 - 6x$ liczbę 9 i odejmujemy równocześnie 9. Otrzymamy:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 8 = 0, \text{ czyli:}$$
$$(x - 3)^2 - 1 = 0.$$

Rozkładamy różnicę kwadratów po lewej stronie równania na czynniki:

$$(x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = 0, \text{ czyli:}$$
$$(x - 4)(x - 2) = 0.$$

Iloczyn po lewej stronie równania jest wtedy i tylko wtedy zerem, jeżeli:

$$\text{albo } x - 4 = 0, \text{ albo } x - 2 = 0.$$

Stąd otrzymujemy $\qquad x_1 = 4, \qquad x_2 = 2,$

jako pierwiastki ostatniego, a więc i danego równania. Sprawdź!

Przykład 3. Rozwiązać równanie: $2x^2 + 9x + 10 = 0$.

Dzielimy przez 2 obie strony równania: $x^2 + \frac{9}{2}x + 5 = 0$.

Uzupełniamy pierwsze dwa wyrazy takim składnikiem, aby pierwsze dwa wyrazy wraz z dodanym utworzyły kwadrat dwumianu. Rozumując jak w przykładzie 2, znajdujemy, że pierwszym wyrazem dwumianu jest x, a podwójnym drugim $\frac{9}{2}$; drugi wyraz wynosi więc $\frac{9}{2} : 2 = \frac{9}{4}$. Chcąc uzyskać po lewej stronie równania wyrażenie: $(x + \frac{9}{4})^2 = x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{81}{16}$, dodajemy $+\frac{81}{16} - \frac{81}{16}$ i otrzymujemy:

$$x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{81}{16} - \frac{81}{16} + 5 = 0, \text{ czyli:}$$
$$(x + \frac{9}{4})^2 - \frac{1}{16} = 0.$$

Ponieważ $\frac{1}{16} = (\frac{1}{4})^2$, to lewa strona równania jest różnicą kwadratów. Rozkładamy ją na czynniki. Otrzymamy:

$$(x + \tfrac{9}{4} - \tfrac{1}{4})(x + \tfrac{9}{4} + \tfrac{1}{4}) = 0, \text{ czyli:}$$
$$(x + 2)(x + \tfrac{5}{2}) = 0.$$

Iloczyn po lewej stronie równania staje się zerem wtedy i tylko wtedy, jeżeli:

$$\text{albo } x + 2 = 0, \text{ albo } x + \tfrac{5}{2} = 0.$$

Stąd otrzymujemy pierwiastki równania: $x_1 = -2$ i $x_2 = -\frac{5}{2}$. Innych pierwiastków równanie posiadać nie może, bo dla innych wartości x iloczyn $(x+2)(x+\frac{5}{2})$, stanowiący lewą stronę równania, nie staje się zerem.

P r z y k ł a d 4. Rozwiązać równanie: $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Przekształcając lewą stronę równania tak jak w poprzednich przykładach, otrzymamy:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 5 = 0,$$
$$(x-2)^2 + 1 = 0.$$

Lewa strona równania jest sumą dwóch składników. Pierwszy składnik $(x-2)^2$ jest jako kwadrat dla wszelkich wartości x liczbą nieujemną; drugi składnik $+1$ jest liczbą dodatnią. Suma takich składników jest zawsze dodatnia i zerem stać się nie może dla żadnej wartości x. Dane równanie nie sprawdza się dla żadnej wartości x, a więc nie ma pierwiastków.

Ćwiczenia.

Rozwiązać sposobem wyjaśnionym w tym paragrafie równania:

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$; *b)* $x^2 + 6x + 9 = 0$;
c) $x^2 - 8x + 15 = 0$; *d)* $x^2 + 6x + 8 = 0$;
e) $x^2 + 2x - 8 = 0$; *f)* $x^2 - 2x - 8 = 0$;
g) $x^2 - 5x + 6 = 0$; *h)* $x^2 - 3x - 4 = 0$;
i) $x^2 - x - 2 = 0$; *j)* $x^2 + x - 6 = 0$;
k) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; *l)* $4x^2 - 4x - 3 = 0$;
m) $3x^2 - 8x + 5 = 0$; *n)* $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

§ 4. Rozwiązanie ogólnego równania kwadratowego.

Rozwiążemy ogólne równanie stopnia drugiego:

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0.$$

Dzielimy przez a obie strony równania, co wolno, bo $a \neq 0$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Staramy się uzupełnić dwa pierwsze wyrazy takim wyrazem, aby dwa pierwsze wraz z dodanym utworzyły kwadrat dwumianu. Pierwszym składnikiem tego dwumianu jest x. Podwójnym iloczynem obu składników jest $\frac{b}{a}x$; a że pierwszym składnikiem jest x, to $\frac{b}{a}$ jest podwójnym drugim składnikiem; drugim składnikiem dwumianu będzie przeto $\frac{b}{a} : 2 = \frac{b}{2a}$. Ponieważ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$, dodajemy do lewej strony równania $+\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}$, przez co oczywiście nie zmieniamy jej wartości. Otrzymamy:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0.$$

Zastępujemy sumę trzech pierwszych wyrazów kwadratem dwumianu, a z pozostałych wyrazów wyłączamy znak — przed nawias; otrzymamy:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0, \text{ czyli:}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

Oznaczmy dla krótkości licznik ostatniego ułamka literą Δ (czytaj: delta); otrzymamy:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0, \text{ gdzie } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Rozróżnimy trzy przypadki:

1) Jeżeli $\Delta < 0$, wtedy $-\frac{\Delta}{4a^2}$ jest liczbą dodatnią. Lewa strona równania jest sumą dwóch składników. Pierwszy z nich, jako kwadrat dwumianu, jest dla wszelkich wartości x liczbą nieujemną; drugi, jak zauważyliśmy, jest liczbą dodatnią. Suma ich jest zawsze liczbą dodatnią, a więc nie może być zerem. Równanie dane nie ma pierwiastka.

2) Jeżeli $\Delta = 0$, wtedy równanie przyjmuje postać:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0, \text{ czyli:}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0.$$

Ponieważ iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z jego czynników jest zerem, przeto równanie sprawdza się wtedy i tylko wtedy, jeżeli:

$$x + \frac{b}{2a} = 0.$$

Stąd znajdujemy pierwiastek równania: $x = -\frac{b}{2a}$. Więcej pierwiastków równanie nie posiada.

3) Jeżeli $\Delta > 0$, wtedy istnieje taka liczba (wymiernia lub niewymierna) $\sqrt{\Delta}$, że $(\sqrt{\Delta})^2 = \Delta$. Równanie można napisać w postaci:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0.$$

Rozkładając na czynniki różnicę kwadratów po lewej stronie równania, otrzymamy:

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0.$$

Iloczyn po lewej stronie równania staje się zerem wtedy i tylko wtedy, jeżeli jeden z jego czynników staje się zerem. Równanie sprawdza się zatem, jeżeli:

$$\text{albo: } x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0, \text{ albo } x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0.$$

Z równań tych otrzymujemy dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ i } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Więcej pierwiastków dane równanie mieć nie może, bo dla innych wartości x żaden z czynników, na które lewą stronę równania rozłożyliśmy, nie staje się zerem, nie może więc stać się zerem ich iloczyn.

Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$, od którego wartości zależy rozwiązalność równania kwadratowego, nazywamy *wyróżnikiem* równania.

Zbierzmy wyniki tych rozważań:

Aby rozwiązać równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$, obliczamy najpierw jego wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac$. Jeżeli wyróżnik jest ujemny, to równanie nie ma pierwiastków. Jeżeli wyróżnik jest zerem, to równanie ma tylko jeden pierwiastek: $x = \frac{-b}{2a}$. Jeżeli wyróżnik jest dodatni, to równanie ma dokładnie dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Drugi przypadek można zresztą uważać za szczególny przypadek trzeciego. Jeżeli bowiem we wzorach na x_1 i x_2 przyjmiemy $\Delta = 0$, otrzymamy: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. Dlatego mówi się często, że równanie kwadratowe ma w przypadku, gdy $\Delta = 0$, dwa równe pierwiastki.

Warunek rozwiązalności równania piszemy zwykle w postaci

$\Delta \geq 0$, pamiętając, że w przypadku $\Delta > 0$ równanie ma dwa różne pierwiastki, a w przypadku $\Delta = 0$ dwa równe pierwiastki.

P r z y k ł a d 1. Rozwiązać równanie: $x^2 + 3x + 6 = 0$.

Obliczamy: $\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$.

Równanie nie ma pierwiastka.

P r z y k ł a d 2. Rozwiązać równanie: $3x^2 - 7x - 20 = 0$.

Obliczamy:

$$\Delta = 49 - 12 \cdot (-20) = 49 + 240 = 289; \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{289} = 17;$$

$$x_1 = \frac{7 + 17}{6} = 4; \quad x_2 = \frac{7 - 17}{6} = \frac{-10}{6} = -1\tfrac{2}{3}.$$

P r z y k ł a d 3. Rozwiązać równanie: $4x^2 + 2x + 0{,}25 = 0$.

Obliczamy: $\Delta = 4 - 4 \cdot 4 \cdot 0{,}25 = 0$;

$$x_1 = x_2 = \frac{-2}{8} = -\tfrac{1}{4}.$$

Ponieważ przy rozwiązaniu ogólnego równania nie czyniliśmy żadnych założeń (oprócz $a \neq 0$), to powyższe rozważania są ważne także i w przypadku, gdy $b = 0$. Wtedy jednak stosujemy prostszy sposób rozwiązania, wyjaśniony w § 2.

Również w przypadku, gdy $b \neq 0$ i $c = 0$, stosujemy zwykle prostszy sposób rozwiązywania. Wyjaśnimy to na przykładzie.

P r z y k ł a d 4. Rozwiązać równanie: $5x^2 - 6x = 0$.

Wyłączamy x przed nawias: $x(5x - 6) = 0$.

Stosując twierdzenie, że iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy, jeżeli przynajmniej jeden z jego czynników jest zerem, znajdujemy, że równanie sprawdza się tylko wtedy, jeżeli:

albo $x = 0$, albo $5x - 6 = 0$.

Stąd znajdujemy pierwiastki równania: $x_1 = 0$; $x_2 = 1\tfrac{1}{5}$.

W tym przypadku równanie ma zawsze dwa pierwiatki. Skoro bowiem $c = 0$ i $b \neq 0$, to $\Delta = b^2 > 0$. Jednym z pierwiastków jest zawsze 0, ponieważ dla $x = 0$ wobec braku wyrazu wolnego od niewiadomej wszystkie wyrazy równania stają się zerami, a więc równanie sprawdza się.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać równania:

a) $x^2 + 7x - 18 = 0$; *b)* $x^2 - 15x + 56 = 0$;
c) $x^2 + x - 132 = 0$; *d)* $x^2 + 19x + 84 = 0$;
e) $x^2 - 6x = 0$; *f)* $x^2 + x = 0$;
g) $2x^2 - 7x - 130 = 0$; *h)* $6x^2 - 13x + 6 = 0$;

i) $10x^2+33x+20=0$; *j)* $5x^2+4x=0$;
k) $2x^2-4x+1=0$; *l)* $x^2-2x-2=0$;
m) $x^2+4x-1=0$; *n)* $4x^2-8x-9=0$.

2. Rozwiązać równania:

a) $(x^2-x+1)^2-(x^2+x-1)^2=4(1-x)^3$;

b) $(x^2-x+2)^2-(x^2-x+1)^2=15$;

c) $(x-2)(x^2+3x-5)-(x-1)(x^2-5x+2)=x^2$;

d) $(x+2)^3-(x+1)^3=(x+7)^2$;

e) $\frac{x}{15}-\frac{5}{6x}=\frac{7}{12}$; *f)* $\frac{5}{2x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{6}$;

g) $1:\left(x-\frac{6}{x}\right)=1$; *h)* $10:\left(x+\frac{1}{x}\right)=3$;

i) $\frac{3}{2x-2}-\frac{5}{4x+4}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$; *j)* $\frac{x^2+3}{x^2-1}-\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+6}{2x-2}$;

k) $4\cdot\frac{x-4}{x-5}+\frac{x+1}{5-x}=11\cdot\frac{x-5}{x+5}$;

l) $\frac{2}{x^2-1}+\frac{x-1}{4x+4}-\frac{x}{6x+6}=\frac{1}{4}$;

m) $\frac{15}{(x+1)^3}-\frac{4}{(x+1)^2}+\frac{x-2}{x+1}=1$;

n) $\frac{x^2}{x^2-1}-\frac{2x-1}{x^2+2x+1}=1$.

3. Rozwiązać i sprawdzić równania:

a) $(x-4)(x-2)=1$; *b)* $(x+5)(x-7)+16=0$;
c) $2x^2-2x\sqrt{6}=3$; *d)* $x^2-2x\sqrt{2}=1$;
e) $\frac{2x}{x+1}-\frac{x-1}{3x}=2$; *f)* $\frac{x+3}{x+2}-\frac{x-3}{x+5}=1$.

4. Obliczyć w przybliżeniu pierwiastki równań:

a) $2x^2-30{,}5x=250$; *b)* $2{,}5x^2-x=32{,}8$;
c) $x^2-4{,}5x+4{,}4=0$; *d)* $x^2-42{,}7x+453{,}2=0$.

§ 5. Przykłady i zastosowania równań kwadratowych.

Przykład 1. Rozwiązać równanie: $b^2x^2-2ax+1=0$.

Jeżeli $b^2=0$, wtedy dane równanie jest równaniem stopnia pierwszego sprzecznem, gdy także $a=0$, a mającem pierwiastek $x=\frac{1}{2a}$, jeżeli $a\neq 0$.

Zakładamy, że $b^2\neq 0$ i rozwiązujemy równanie kwadratowe; obliczamy:
$$\Delta=4a^2-4b^2=4(a^2-b^2).$$

Jeżeli $\Delta=4(a^2-b^2)\geqq 0$, wtedy $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{a^2-b^2}$ i dane równanie ma pierwiastki:

$$x_1 = \frac{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}}{2b^2} = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} \text{ i } x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b^2}.$$

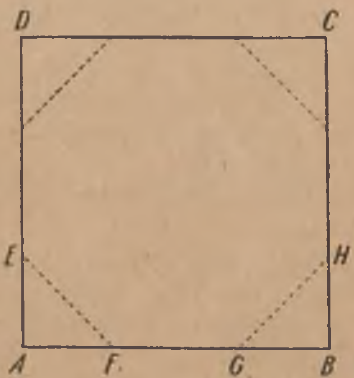
Pierwiastki te są równe, jeżeli $\Delta = 4(a^2 - b^2) = 0$.
Jeżeli $\Delta = 4(a^2 - b^2) < 0$, wtedy równanie nie ma pierwiastków.

Przykład 2. Kupiec sprowadził za 144 *zł* pewną ilość *kg* towaru. Drugim razem sprowadził również za 144 *zł* taki sam towar. Ponieważ jednak towar podrożał na każdym kilogramie o 20 *gr*, otrzymał drugim razem o 3 *kg* towaru mniej, niż pierwszym razem. Ile *kg* towaru sprowadził kupiec pierwszym razem?

Kupiec sprowadził pierwszym razem x *kg*, płacąc za każdy *kg* $\frac{144}{x}$ *zł*; drugim razem sprowadził $(x - 3)$ *kg*, płacąc za każdy *kg* $\frac{144}{x-3}$ *zł*. Ponieważ różnica w cenie 1 *kg* wynosi według tematu 0,2 *zł*, to:
$$\frac{144}{x-3} - \frac{144}{x} = 0{,}2.$$

Równanie to ma pierwiastki: $x_1 = 48$; $x_2 = -45$.
Oba pierwiastki spełniają równanie; warunkom zadania odpowiada tylko pierwszy, bo stosownie do znaczenia x ujemne rozwiązanie niema żadnego znaczenia.

Sprawdzenie: Kupiec sprowadził pierwszym razem 48 *kg* towaru za 144 *zł*; za 1 *kg* płacił więc 3 *zł*. Drugim razem otrzymał za 144 *zł* 45 *kg*; 1 *kg* kosztował więc 3,2 *zł*, a więc rzeczywiście o 20 *gr* więcej.



Rys. 2.

Przykład 3. Dany jest kwadrat oboku a. Mamy odciąć od tego kwadratu przy każdym wierzchołku taki trójkąt równoramienny, aby powstał ośmiokąt foremny.

Rys. 2 przedstawia figurę, o którą chodzi. Zadanie będzie rozwiązane, jeżeli obliczymy ramię trójkąta równoramiennego AFE. Oznaczmy je literą x tak, że $AF = AE = x$. Odcinek x musi być tak dobrany, aby było: $FE = FG = a - 2x$. Stosując do trójkąta AFE twierdzenie Pitagorasa, otrzymamy: $AF^2 + AE^2 = EF^2$, czyli:
$$2x^2 = (a - 2x)^2.$$

Rozwiązujemy to równanie: $2x^2 = a^2 - 4ax + 4x^2$,
$$2x^2 - 4ax + a^2 = 0;$$
$$\Delta = 16a^2 - 8a^2 = 8a^2 > 0; \sqrt{\Delta} = 2a\sqrt{2} \text{ (ponieważ } a > 0).$$
$$x_1 = \frac{4a + 2a\sqrt{2}}{4} = a + \tfrac{1}{2}a\sqrt{2};\ x_2 = a - \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

Równanie ma zawsze dwa pierwiastki; z tych jednak tylko drugi stanowi rozwiązanie zadania geometrycznego. Ze znaczenia x wynika bowiem, że musi być $x < a$, a warunek ten spełnia tylko x_2. Jest więc:

$$x = a - \tfrac{1}{2} a \sqrt{2} = a\left(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) \doteq 0{,}29\, a.$$

Znaleziony wzór na x pozwala rozwiązać zadanie konstrukcyjnie. Ponieważ, jak wiadomo, $a\sqrt{2}$ jest przekątną kwadratu $ABCD$, to $\frac{1}{2} a\sqrt{2}$ jest połową tej przekątnej. Stąd wynika następująca konstrukcja ośmiokąta foremnego:

Kreślimy kwadrat wraz z przekątnemi. Od każdego wierzchołka kwadratu odkładamy na każdym boku pół przekątnej kwadratu. W ten sposób otrzymujemy na bokach kwadratu 8 punktów, a punkty te są wierzchołkami ośmiokąta foremnego.

W przykładzie tym równanie miało dwa pierwiastki, a tylko jeden z nich dawał rozwiązanie zadania geometrycznego. Nie będzie nas to dziwić, jeżeli zważymy, że przy układaniu równania rozumowaliśmy w następujący sposób: Jeżeli istnieje figura, o której jest mowa w temacie zadania, to odcinek x spełnia równanie $2x^2 - 4ax + a^2 = 0$. Nie wolno z tego wnioskować, że naodwrót pierwiastek tego równania daje zawsze rozwiązanie zadania geometrycznego. Gdyby jednak ułożone równananie nie miało pierwiastka, wskazywałoby to na nierozwiązalność zadania geometrycznego.

Dla ułatwienia konstrukcji wyrażeń algebraicznych zestawiamy następujące wskazówki:

Jeżeli a i b oznaczają odcinki, względnie ich miary, wtedy:

1) $\sqrt{a^2 + b^2}$ przedstawia przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątnemi są a i b.

2) $\sqrt{a^2 - b^2}$ przedstawia przyprostokątną w trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątną jest a, a drugą przyprostokątną b; oczywiście musi być $a > b$.

3) $\sqrt{ab}$ przedstawia średnią geometryczną odcinków a i b; konstrukcja jej znana jest z nauki geometrji.

4) Do tych konstrukcyj sprowadza się konstrukcje takich wyrażeń, jak np.:

$$a\sqrt{2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{a^2 + a^2};$$
$$a\sqrt{3} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2};$$
$$a\sqrt{5} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2};$$
$$a\sqrt{6} = \sqrt{6a^2} = \sqrt{(2a)(3a)} \text{ i t. p.}$$

5) Aby zbudować np. $\sqrt{2a^2 - b^2}$, kreślimy najpierw taki odcinek m, aby było: $m^2 = 2a^2$, czyli $m = a\sqrt{2}$, a następnie $\sqrt{m^2 - b^2}$.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać równania:

$a)$ $x^2 - (a - b)x - ab = 0$; $b)$ $x^2 - 2ax + (a^2 - b^2) = 0$;
$c)$ $x^2 - 2(2a - 1)x + 3(a^2 - 1) = 0$; $d)$ $a^2x^2 - a^2x + (a - 1) = 0$;
$e)$ $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2) = 0$;
$f)$ $abx^2 - (a + b)^2 x + (a + b)^2 = 0$;

g) $x^2 - 2ax + (a^2 - 2b^2) = 0$; *h)* $ax^2 - 2a^2x + (a^3 - 1) = 0$;
i) $x^2 - (a + b)x = 0$; *j)* $(a - 1)x^2 + (a^2 - 1)x = 0$;
k) $x^2 + (2m - 3)x + (m - 2)^2 = 0$; *l)* $x^2 - 6x + m^2 = 0$;
m) $(n - 1)x^2 + (2n - 1)x - 1 = 0$; *n)* $x^2 - 2(s - 2)x + 4 = 0$;
o) $(x - 3a)^3 + (2a - x)^3 + a^3 = 0$; *p)* $x + \frac{1}{x} = m + \frac{1}{m}$;
r) $\frac{x}{(a + 1)^2} + \frac{2a - 1}{4x} = \frac{a}{a + 1}$; *s)* $\frac{x + r}{x - r} - \frac{x - r}{x + r} = \frac{2r^2}{r^2 - 1}$.

2. Zbadać, dla jakiej wartości m mają następujące równania dwa równe pierwiastki:
a) $x^2 - mx + (m - \frac{3}{4}) = 0$; *b)* $x^2 - 2(m - 1)x + (2m^2 - 7) = 0$;
c) $x^2 - 4mx + 1 = 0$; *d)* $x^2 - 2mx + (m + 1) = 0$;
e) $(m - 1)x^2 + x + m = 0$; *f)* $x^2 - 4x - m^2 = 0$.
Sprawdzić!

3. Zbadać, dla jakich wartości a nie ma rozwiązania następujący układ równań:
a) $ax + y = 1$, $x + ay = -1$; *b)* $(a - 1)x + ay = 3$, $(a + 1)x - 2ay = 5$;
c) $ax + y = a$, $2x + (2a + 3)y = 8a^2$; *d)* $3x - ay = 2a + 3$, $(a - 2)x - y = a$;
e) $ax - 2y = 1$, $(a + 4)x - ay = 3$; *f)* $ax + 2y = 3$, $(a - 1)x + ay = 2$.

Rozstrzygnąć, czy dla znalezionych wartości a układ równań jest nieoznaczony, czy sprzeczny.

Wskazówka: Omówimy zadanie *a)*. Rozwiązujemy dany układ równań np. metodą podstawienia. Z pierwszego równania znajdziemy: $y = 1 - ax$. Podstawiając to wyrażenie zamiast x w drugiem równaniu, otrzymamy dla wyznaczenia x równanie: $x + a(1 - ax) = 1$, czyli (po uporządkowaniu): $(1 - a^2)x = 1 - a$. Równanie to ma pierwiastek, a układ równań rozwiązanie, jeżeli $1 - a^2 \neq 0$. Układ równań nie ma rozwiązania, jeżeli $1 - a^2 = 0$. Wartości a, dla których układ równań nie ma rozwiązania, wyznaczymy, rozwiązując równanie: $1 - a^2 = 0$; znajdziemy $a_1 = 1$; $a_2 = -1$. Wartości te należy kolejno podstawić zamiast a w danym układzie równań i zbadać, czy otrzymane układy równań są nieoznaczone, czy sprzeczne.

4. *a)* Znaleźć liczbę, której podwójny kwadrat jest o 18 mniejszy od jej 15-krotności.
b) Jaką liczbę należy odjąć od następnika stosunku 3 : 5, aby wykładnik stosunku o tyle się powiększył, o ile zmniejszy się następnik?
c) Rozłożyć 2331 na dwa czynniki, których suma wynosi 100.

d) Rozłożyć 342 na dwa czynniki, różniące się o 1.

e) Liczbę 25 przedstawić jako sumę kwadratów dwu liczb, różniących się o 1.

5. *a)* Ile boków ma wielokąt, mający 90 przekątnych?

b) Kąt foremnego wielokąta zwiększył się o 12^0, gdy liczbę boków jego powiększono o 1. Ile boków miał wielokąt?

6. *a)* Kupiłem za 6 *zł* 24 *gr* paczkę zeszytów. Gdyby kupiec był zniżył cenę każdego zeszytu o 1 *gr*, otrzymałbym za tę samą kwotę o 4 zeszyty więcej. Ile zeszytów było w paczce?

b) Kupiłem 2 sztuki płótna; jedno było o 40 *gr* na metrze droższe od drugiego. Za każdą sztukę zapłaciłem 24 *zł*. Ile kosztował 1 *m* każdego gatunku płótna, jeżeli droższego płótna było w sztuce o 10 *m* mniej, niż tańszego?

c) Koszta wycieczki pewnej klasy wynosiły 120 *zł*. Ponieważ sześciu niezamożnych uczniów jechało kosztem wszystkich innych, to każdy z tych ostatnich musiał zapłacić o 1 *zł* więcej, niż przypadałoby na niego przy równym podziale kosztów między wszystkich uczniów. Ilu uczniów było w klasie?

d) Na wykonanie pewnej roboty przeznaczono 357 *zł*. Zamówiono stosowną ilość robotników, z których jednak 7 nie stanęło do pracy. Pozostali wykonali pracę sami i rozdzielili kwotę przeznaczoną dla nieobecnych na równe części między siebie; wskutek tego otrzymał każdy o 1,7 *zł* więcej. Ile *zł* przeznaczono pierwotnie dla każdego robotnika?

7. *a)* Dwóch uczniów podjęło się przepisania rękopisu za pewnem wynagrodzeniem. Pierwszy z nich, pisząc sam, potrzebowałby na przepisanie całego rękopisu o 9 godz. więcej czasu, niż drugi. Pracowali jednak razem i skończyli pracę w 20 godz. W ilu godzinach przepisałby rękopis każdy z nich pracując sam? W jakim stosunku podzielą się zarobkiem?

b) Zbiornik można napełnić wodą dwiema rurami; pierwszą o 2 godz. prędzej, niż drugą. Gdy otworzymy obie rury, zbiornik napełnia się w 2 godz. 55 min. W ilu godzinach napełni się zbiornik, jeżeli woda dopływa tylko pierwszą rurą?

8. *a)* Przy zmianie rozkładu jazdy wprowadzono zamiast jednego pociągu inny, jadący z prędkością większą o 80 *m*/min. Nowy pociąg potrzebuje do przebycia 144 *km* o 20 min. czasu mniej, niż poprzedni. Obliczyć prędkości obu pociągów.

Wskazówka: Prędkość dawnego pociągu jest x m/min., nowego $(x+80)$ m/min. Do przebycia jednego km potrzebuje pierwszy pociąg $\frac{1000}{x}$ min., a drugi $\frac{1000}{x+80}$ i t. d.

b) Statek przebywa na rzece drogę od A do B i zpowrotem do A, wynoszącą razem 45 km, w 4 godz. Prędkość prądu rzeki wynosi 3 km/godz. Jaka jest prędkość statku?

Wskazówka: (Czas potrzebny do przebycia drogi od A do B) + (czas potrzebny do przebycia drogi od B do A) = 4 godz.

9\. *a)* Gospodarz posiał 5 kg żyta. Zebrany plon posiał po raz drugi i zebrał w następnym roku 720 kg. Ile kg żyta otrzymywał przy jednym zbiorze z 1 kg zasiewu, jeżeli przyjmiemy, że urodzaj był w obu latach jednakowy?

b) Z dwóch kg złota zabrano pewną ilość g złota i zastąpiono je taką samą ilością g miedzi. Drugim razem wzięto o 100 g więcej tej mieszaniny, niż złota pierwszym razem, i zastąpiono ją taką samą ilością g miedzi. Ile złota wzięto pierwszym razem, jeżeli pozostały przy końcu stop był próby 680‰?

c) Do $7\frac{1}{2}$ kg soli wlano 3 wiadra wody. Z roztworu tego zaczerpnięto 20 kg i dodano do nich 2 wiadra wody. Otrzymany roztwór zawierał 10% soli. Ile kg wody było w jednem wiadrze?

Wskazówka: W 1 wiadrze było x kg wody. W $3x+7\frac{1}{2}$ kg pierwszego roztworu było $7\frac{1}{2}$ kg soli. Obliczyć, ile soli było w 20 kg tego roztworu. Tyle samo soli było w $20+2x$ kg drugiego roztworu. I t. d.

10\. *a)* Miary boków trójkąta prostokątnego są następującemi po sobie liczbami naturalnemi. Obliczyć boki.

b) Pole trapezu wynosi 48 cm^2, a jeden z boków równoległych 10 cm. Obliczyć drugi bok równoległy, wiedząc, że jest on równy wysokości trapezu.

c) Objętość sześcianu wzrasta o 218 cm^3, gdy każdą jego krawędź powiększymy o 2 cm. Obliczyć krawędź tego sześcianu.

d) Gdy każdą krawędź przypodstawną pewnego sześcianu powiększono o 4 cm, a wysokość zmniejszono o 3 cm, objętość bryły nie zmieniła się. Jaka była krawędź sześcianu?

e) W pewnym trójkącie prostokątnym o danej przeciwprostokątnej c większa przyprostokątna jest średnią arytmetyczną między przeciwstokątną a mniejszą przyprostokątną. Obliczyć mniejszą przyprostokątną.

f) W prostokącie $ABCD$ wykreślono przekątną AC i odcinek EF równoległy do podstawy prostokąta. Odcinek ten przecina przekątną w punkcie G. Przekątna AC i odcinek EF dzielą prostokąt na dwa trójkąty i dwa trapezy tak, że suma pól obu trójkątów wynosi $\frac{5}{16}$ pola całego prostokąta. Znając podstawę a i wysokość b prostokąta, obliczyć odległość $x = AE$ odcinka EF od podstawy.

Wskazówka: Wyraź najpierw przy pomocy twierdzenia Talesa odcinki EG i GF przez a, b i x.

11. Rozwiązać następujące zadania i podać na podstawie znalezionego wzoru konstrukcję szukanego odcinka:

a) Jak wysoki musi być prostokąt o podstawie a, aby powiększony o kwadrat zbudowany na wysokości miał pole tak wielkie, jak kwadrat o danym boku b?

b) Jak wysoki musi być prostokąt o podstawie a, aby zmniejszony o kwadrat zbudowany na wysokości miał pole tak wielkie, jak kwadrat o danym boku b?

c) Jak wielki musi być bok kwadratu, aby po zmniejszeniu jego wysokości o a pozostał prostokąt, mający pole tak wielkie, jak kwadrat o danym boku b?

d) Dany odcinek a podzielono na takie dwie części, że większa część jest średnią geometryczną proporcjonalną między częścią mniejszą a odcinkiem a. Obliczyć część większą.

e) Podstawę i wysokość prostokąta o danych bokach a i b zmniejszono o ten sam odcinek x, wskutek czego pole prostokąta zmniejszyło się o połowę. Obliczyć x.

f) W kwadrat o boku a wpisano kwadrat o boku b tak, że wierzchołki drugiego kwadratu leżą na bokach pierwszego. Obliczyć części x i $a - x$, na jakie wierzchołek drugiego kwadratu dzieli bok pierwszego.

§ 6. Związki między współczynnikami a pierwiastkami równania kwadratowego.

Przyjmijmy, że w równaniu

$$a x^2 + b x + c = 0 \text{ jest: } a \neq 0 \text{ i } \Delta = b^2 - 4ac \geq 0.$$

Wtedy równanie ma dwa różne lub dwa równe pierwiastki zależnie od tego, czy $\Delta > 0$, czy $\Delta = 0$. Pierwiastkami są:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ i } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Utwórzmy najpierw sumę $x_1 + x_2$, a następnie iloczyn $x_1 x_2$ obu pierwiastków. Otrzymamy:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Znajdujemy więc:

Jeżeli w równaniu $ax^2+bx+c=0$ *jest* $a \neq 0$ *i* $\Delta = b^2-4ac \geq 0$, *wtedy równanie ma dwa piewiastki* x_1 *i* x_2, *a między pierwiastkami i współczynnikami równania zachodzą związki:* $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ *i* $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Lecz i naodwrót:

Jeżeli dane jest równanie $ax^2+bx+c=0$, *przyczem* $a \neq 0$, *i jeżeli istnieją takie dwie liczby* x_1 *i* x_2, *że* $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ *i* $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, *wtedy te liczby są pierwiastkami danego równania.*

Dowód: Z założenia wynika, że: $b = -a(x_1+x_2)$ i $c = ax_1x_2$. Pisząc te wartości zamiast b i c w lewej stronie danego równania, otrzymamy kolejno:

$$ax^2+bx+c = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2 =$$
$$= a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2] = a[x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2] =$$
$$= a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)] = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Przekształciwszy w ten sposób lewą stronę równania, widzimy, że staje się ona zerem, albo gdy $x = x_1$, albo gdy $x = x_2$. Rzeczywiście więc liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami danego równania.

Twierdzenia te mają liczne zastosowania. Niektóre z nich wyjaśnimy na przykładach.

Przykład 1. Napisać równanie kwadratowe, mające pierwiastki: $x_1 = -3$; $x_2 = 5$.

Szukane równanie ma postać:

$$ax^2+bx+c=0; \; a \neq 0.$$

Wskutek przedostatniego twierdzenia musi być:

$$-\frac{b}{a} = 2; \; \frac{c}{a} = -15. \text{ Stąd:}$$

$$b = -2a; \; c = -15a.$$

Jeżeli te warunki będą spełnione, to według ostatniego twierdzenia -3 i 5 będą pierwiastkami równania. Szukanem równaniem będzie więc:

$$ax^2 - 2ax - 15a = 0.$$

Współczynnik a pozostał dowolny. Widzimy jednak, że a występuje jako czynnik we wszystkich wyrazach; można więc równanie przez $a \neq 0$ uprościć. Otrzymamy:

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Inne równania stopnia drugiego, mające te same pierwiastki, powstają z tego równania przez pomnożenie obu jego stron przez dowolną liczbę różną od zera. Znajdujemy więc:

Równania kwadratowe, mające jednakowe pierwiastki, mogą różnić się od siebie tylko czynnikiem, przez który obie strony równania pomnożono; poza tem równanie kwadratowe jest zupełnie oznaczone, gdy dane są jego pierwiastki.

Przykład 2. Sprawdzić, czy liczby $-3\frac{1}{4}$ i 4 są pierwiastkami równania: $4x^2 - 3x - 52 = 0$.

Zamiast zwykłego sprawdzania można skorzystać z ostatniego twierdzenia i obliczyć:

$$x_1 x_2 = \left(-3\tfrac{1}{4}\right) \cdot 4 = -13; \qquad \frac{c}{a} = \frac{-52}{4} = -13;$$

$$x_1 + x_2 = -3\tfrac{1}{4} + 4 = \tfrac{3}{4}; \qquad -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

Ponieważ $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ i $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, to warunki ostatniego twierdzenia są spełnione, a więc liczby $-3\frac{1}{4}$ i 4 są rzeczywiście pierwiastkami danego równania.

Rachunek taki, który wykonać można bardzo często w pamięci, stosować należy zawsze dla kontroli, czy przy rozwiązywaniu równania kwadratowego nie popełniono błędu.

Przykład 3. Liczba 1 jest jednym z pierwiastków równania: $3x^2 - 5x + 2 = 0$; obliczyć drugi pierwiastek tego równania.

Można dane równanie rozwiązać i wyznaczyć w ten sposób oba jego pierwiastki. Łatwiej jednak obliczyć pozostały pierwiastek równania, stosując twierdzenie: $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Ponieważ $x_1 = 1$; $c = 2$; $a = 3$, znajdziemy natychmiast: $x_2 = \frac{2}{3}$. Dla sprawdzenia równania, wystarczy zbadać, czy $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Sprawdź!

Przykład 4. Wiedząc, że wyróżniki podanych niżej równań są dodatnie, zbadać, jakie znaki mają pierwiastki tych równań.

a) $4x^2 + 6{,}4x - 2{,}5 = 0$; *b)* $3x^2 - 13x + 7{,}5 = 0$;
c) $x^2 + 6{,}8x + 3{,}2 = 0$; *d)* $x^2 - 7x = 0$; *e)* $3x^2 - 8 = 0$.

a) Rzut oka na równanie pozwala zauważyć, że iloczyn $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

jest ujemny, ponieważ c i a mają różne znaki. Z tego wynika, że jeden z pierwiastków równania jest dodatni, a drugi ujemny.

b) Iloczyn pierwiastków równania jest dodatni, bo a i c mają znaki jednakowe. A że suma obu pierwiastków $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{13}{3}$ jest również dodatnia, to oba pierwiastki są dodatnie.

c) Iloczyn obu pierwiastków jest dodatni, bo a i c mają znaki jednakowe; zatem oba pierwiastki mają znaki jednakowe. A że suma obu pierwiastków wynosi $(-6{,}8) : 1 = -6{,}8$, a więc jest ujemna, przeto oba pierwiastki równania są ujemne.

d) Iloczyn obu pierwiastków jest zerem. Jeden pierwiastek równania jest zerem; a że suma obu pierwiastków $\left(-\frac{b}{a} = 7\right)$ jest dodatnia, to drugi pierwiastek równania jest dodatni.

e) Iloczyn obu pierwiastków jest ujemny; zatem jeden pierwiastek równania jest dodatni, a drugi ujemny. A że suma ich wynosi 0 (bo $b = 0$), przeto pierwiastki równania są liczbami przeciwnemi.

P r z y k ł a d 5. Kwadrat o boku a zamieniono na prostokąt o obwodzie $2s$; obliczyć boki prostokąta.

Oznaczając boki prostokąta literami x i y, otrzymamy układ równań:

$$x + y = s,$$
$$xy = a^2.$$

Zauważymy, że chodzi tu o znalezienie dwu liczb, których suma wynosi s, a iloczyn a^2. Liczby takie spełniają równanie:

$$z^2 - sz + a^2 = 0.$$

Równanie to ma pierwiastki tylko wtedy, jeżeli:

$$\Delta = s^2 - 4a^2 \geq 0.$$

Gdy ten warunek jest spełniony, wtedy:

$$z_1 = \tfrac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2 - 4a^2}\right); \qquad z_2 = \tfrac{1}{2}\left(s - \sqrt{s^2 - 4a^2}\right).$$

Przyjmując $x = z_1$; $y = z_2$, albo $x = z_2$; $y = z_1$, mamy rozwiązanie naszego zadania. Widzimy, że oba rozwiązania dają jeden i ten sam prostokąt.

Jeżeli s i a oznaczają dane odcinki, możemy na podstawie powyższych wzorów zbudować szukany prostokąt. Wykonaj konstrukcję, zważywszy, że $\sqrt{s^2 - 4a^2}$ jest przyprostokątną w trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątną jest s, a drugą przyprostokątną $2a$.

Zarazem poznaliśmy na tym przykładzie bardzo prosty sposób rozwiązywania układu dwu równań, których lewe strony mają postać: $x + y$ i xy, a prawe są liczbami wiadomemi.

Ćwiczenia.

1. Ułożyć równania kwadratowe, mające pierwiastki:

a) $3;\ 5;$ *b)* $4;\ -6;$ *c)* $7;\ -2;$ *d)* $-3;\ -2;$
e) $0;\ 2;$ *f)* $-2;\ +2;$ *g)* $-3;\ -3;$ *h)* $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};$

i) $\frac{1}{2}(m+n)$; $\frac{1}{2}(m-n)$; *j)* $1+\frac{1}{2}n$; $1-\frac{1}{2}n$;
k) $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$; *l)* $-1-\sqrt{2}$; $-1+\sqrt{2}$;
m) $\frac{1}{2}(m+\sqrt{n})$; $\frac{1}{2}(m-\sqrt{n})$; *n)* $m+\sqrt{m^2-n^2}$; $m-\sqrt{m^2-n^2}$.

2. W równaniu $ax^2+bx+c=0$, mającem pierwiastki x_1 i x_2, wyznaczyć a, b i c tak, aby spełnione były następujące warunki:

a) $a=2$; $x_1=-\frac{3}{2}$; $x_2=1$; *b)* $a=1$; $x_1=1+\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $x_2=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$;
c) $b=2$; $x_1=3$; $x_2=-1$; *d)* $b=1$; $x_1=0$; $x_2=-5$;
e) $c=8$; $x_1=4$; $x_2=-6$; *f)* $c=1$; $x_1=10$; $x_2=0{,}1$.

3. *a)* Różnica pierwiastków równania: $2x^2-5x+c=0$ wynosi 2. Obliczyć c. Rozwiązać otrzymane równanie.
b) Między pierwiastkami x_1 i x_2 równania: $6x^2+11x+c=0$ zachodzi związek: $3x_1-2x_2=7$. Obliczyć c. Sprawdzić wynik, rozwiązując znalezione równanie.
c) Jaką wartość musi mieć b w równaniu: $x^2+bx+8=0$, aby jeden piarwiastek tego równania wynosił -4?
d) Wyznaczyć w równaniu: $x^2+bx+2=0$ współczynnik b tak, aby równanie to miało dwa dodatnie pierwiastki, z których jeden byłby dwa razy większy od drugiego.
e) Jeden pierwiastek równania: $2x^2+bx+c=0$ jest odwrotnością drugiego; oba pierwiastki są dodatnie, a różnica ich wynosi $1\frac{1}{2}$. Obliczyć b i c.

4. *a)* Równanie $x^2-x-1=0$ ma dwa pierwiastki: x_1 i x_2. Nie obliczając tych pierwiastków, obliczyć wartości następujących wyrażeń:

$$x_1^2x_2^2;\quad x_1^2+x_2^2;\quad x_1^2+x_1x_2+x_2^2;\quad x_1^3+x_2^3.$$

Wskazówka: Przekształcić każde z tych wyrażeń tak, aby zawierało tylko sumy i iloczyny pierwiastków. Np.:

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2.$$

b) Zakładamy, że równanie $ax^2+bx+c=0$ ma dwa pierwiastki: x_1 i x_2. Nie rozwiązując równania, wyrazić zapomocą współczynników a, b i c następujące wyrażenia:

$$x_1^2+x_2^2;\quad (x_1-x_2)^2;\quad x_1^2x_2+x_1x_2^2;\quad x_1^4x_2^2+x_1^2x_2^4;$$

$$x_1^3+y_1^3;\quad x_1^4+y_1^4;\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2};\quad \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}.$$

5. Wyróżniki podanych niżej równań są dodatnie. Rozstrzygnąć, nie rozwiązując równań, jakie znaki mają ich pierwiastki:

a) $7x^2-12{,}3x+4=0$; *b)* $2x^2+3{,}4x+0{,}3=0$;
c) $3x^2+6{,}2x-8{,}3=0$: *d)* $x^2-3{,}4x-6{,}2=0$;

e) $-2x^2+3{,}4x+5=0$; *f)* $-x^2+7{,}2x-3=0$;
g) $-3x^2+8=0$; *h)* $4{,}3x^2-5x=0$;
i) $7x^2+6{,}2x=0$; *j)* $-7x^2+5{,}2x=0$.

6. *a)* Rozwiązać układ równań: $x-y=a$; $xy=b$.

Wskazówka: Ułożyć równanie, którego pierwiastkami są liczby x i $(-y)$, których suma jest a, a iloczyn $(-b)$.

b) Pole prostokąta wynosi 1260 m^2, a boki jego różnią się o 17 m. Obliczyć boki prostokąta.

c) Pole pewnego trójkąta równoramiennego równa się polu kwadratu o boku a, różnica zaś podstawy i wysokości wynosi m. Obliczyć podstawę i wysokość trójkąta.

W otrzymanym ogólnym wzorze podstawić: $a=9$ *cm*; $m=4{,}2$ *cm* i obliczyć podstawę i wysokość trójkąta.

7. Rozwiązać w pamięci równania:

a)
$x^2-5x+6=0$;
$x^2-7x+10=0$;
$x^2-7x+12=0$;
$x^2-8x+15=0$;
$x^2-x-2=0$;
$x^2+x-2=0$;
$x^2-3x-10=0$;
$x^2+2x-3=0$;

b)
$x^2-5x=0$;
$x^2+3x=0$;
$2x^2-x=0$;
$3x^2+2x=0$;
$x^2-ax=0$;
$x^2+ax=0$;
$ax^2+bx=0$;
$ax^2-bx=0$;

c)
$x^2-(a+b)x+ab=0$;
$x^2-(a-b)x-ab=0$;
$x^2+(a-b)x-ab=0$;
$x^2+(a+b)x+ab=0$;
$x^2-(a+1)x+a=0$;
$x^2-(a-1)x-a=0$;
$x^2-ax-(a+1)=0$;

d)
$x^2-\left(m+\frac{1}{m}\right)x+1=0$;
$x^2-2\tfrac{1}{2}x+1=0$;
$x^2-3\tfrac{1}{3}x+1=0$;
$x^2-\left(m-\frac{1}{m}\right)x-1=0$;
$x^2-2\tfrac{2}{3}x-1=0$;
$x^2-3\tfrac{3}{4}x-1=0$.

§ 7. Trójmian kwadratowy.

Wielomian stopnia drugiego ze względu na x nazywać będziemy krótko *trójmianem kwadratowym* i oznaczać literą y. Ogólną postacią trójmianu kwadratowego jest:

$$y=ax^2+bx+c.$$

W celu zbadania niektórych własności trójmianu kwadratowego, przekształcimy go w podobny sposób, jak przekształciliśmy lewą stronę równania kwadratowego (§ 4).

Zakładamy, że $a \neq 0$, i wyłączamy a przed nawias:

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Dodajemy i odejmujemy wewnątrz nawiasu $\frac{b^2}{4a^2}$ i otrzymujemy kolejno:

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right];$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right];$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Podobnie jak w równaniu kwadratowem wprowadzamy oznaczenie: $\Delta = b^2 - 4ac$; wyrażenie to nazywamy *wyróżnikiem* trójmianu kwadratowego. Rozróżnimy 3 przypadki:

1) Jeżeli $\Delta > 0$, wtedy istnieje $\sqrt{\Delta}$. Pisząc $(\sqrt{\Delta})^2$ zamiast Δ, otrzymamy:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right].$$

Rozkładamy różnicę kwadratów w nawiasie graniastym na czynniki:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right);$$

$$y = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Wprowadzając oznaczenia: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, otrzymamy:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Łatwo widzieć że x_1 i x_2 są to miejsca zerowe trójmianu kwadratowego, t. j. wartości, które podstawione zamiast x sprawiają, że trójmian kwadratowy staje się zerem. Więcej miejsc zerowych trójmian kwadratowy nie posiada, bo dla innych wartości x żaden z czynników, na które trójmian rozłożyliśmy, nie staje się zerem. Zatem:

Jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego jest dodatni, wtedy trójmian kwadratowy ma dokładnie dwa miejsca zerowe i da się rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego. Czyli dokładniej:

Jeżeli $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ i $a \neq 0$, wtedy $ax^2 + bx + c$ ma miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, a nadto: $ax^2 + bx + c =$ $= a(x - x_1)(x - x_2)$.

2) Jeżeli $\Delta = 0$, wtedy:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Trójmian kwadratowy staje się zerem tylko wtedy, gdy $x + \frac{b}{2a} = 0$, czyli gdy $x = -\frac{b}{2a}$; ma więc tylko jedno miejsce zerowe. Oznaczając je symbolem x_1, a więc przyjmując $x_1 = -\frac{b}{2a}$, otrzymamy: $y = a(x - x_1)^2$. Zatem:

Jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego jest zerem, wtedy trójmian kwadratowy ma tylko jedno miejsce zerowe, a po wyłączeniu stałego czynnika przed nawias da się przedstawić jako kwadrat dwumianu. Czyli dokładniej:

Jeżeli $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ i $a \neq 0$, wtedy $ax^2 + bx + c$ ma tylko jedno miejsce zerowe: $x_1 = -\frac{b}{2a}$, a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

3) Jeżeli $\Delta < 0$, wtedy $-\frac{\Delta}{4a^2}$ jest liczbą dodatnią. A że $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ ma jako kwadrat dla wszelkich wartości x wartość nieujemną, to wyrażenie w graniastym nawiasie: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ ma zawsze wartość dodatnią. Ponieważ $a \neq 0$, to trójmian kwadratowy nie staje się zerem dla żadnej wartości x, a więc nie ma miejsc zerowych. Nie da się też trójmian kwadratowy w tym przypadku rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego. Gdyby bowiem istniał taki rozkład, to miejsca zerowe tych czynników stopnia pierwszego (a takie istnieją zawsze) byłyby zarazem miejscami zerowemi trójmianu kwadratowego wbrew dowiedzionemu twierdzeniu, że trójmian kwadratowy w tym przypadku miejsc zerowych nie ma. — Udowodniliśmy twierdzenie:

Jeżeli wyróżnik trójmianu kwadratowego jest ujemny, wtedy trójmian kwadratowy nie ma miejsc zerowych i nie da się rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego.

P r z y k ł a d. Rozłożyć na czynniki: $8x^2 + 2x - 3$.

Ponieważ $\Delta = 4 + 96 = 100$, istnieją miejsca zerowe. Obliczamy je:

$$x_1 = \frac{-2 + 10}{16} = \tfrac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{-2 - 10}{16} = -\tfrac{3}{4}.$$

Według twierdzenia 1) otrzymamy:

$$8x^2+2x-3=8\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\left(x+\tfrac{3}{4}\right)=2\left(x-\tfrac{1}{2}\right)\cdot 4\left(x+\tfrac{3}{4}\right)=$$
$$=(2x-1)(4x+3).$$

Ćwiczenia.

1. Rozłożyć na czynniki:

a) $2x^2+x-3$; *b)* $3x^2+4x-4$; *c)* $5x^2-12x+2$;
d) $6x^2-x-1$; *e)* x^2-3; *f)* $2x^2-10$;
g) $x^2-x-a(a+1)$; *h)* $x^2-2ax+(a^2-1)$.

2. Wyznaczyć w następujących trójmianach m tak, aby po wyłączeniu stałego czynnika przed nawias trójmian kwadratowy dał się przedstawić w postaci kwadratu dwumianu:

a) $x^2-2(m+1)x+4$; *b)* $mx^2+2(m+2)x+(2m+1)$;
c) $(m+1)x^2-4mx+3m$; *d)* $x^2+(m+2)x+3(m-1)$;
e) $(m-3)x^2-2(m-1)x+(m+3)$;
f) $(m-1)x^2-2(2m+1)x-(m+5)$.

Wskazówka: Trójmian kwadratowy da się przedstawić w postaci $a(x-x_1)^2$, jeżeli $\Delta=0$. Należy więc dla danego w zadaniu trójmianu znaleźć Δ, a następnie obliczyć m z równania $\Delta=0$. Znalezione wartości m należy podstawić kolejno w danym trójmianie i rozłożyć otrzymane trójmiany na czynniki.

3. Uprościć następujące ułamki po rozłożeniu licznika i mianownika na czynniki:

a) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$; *b)* $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}$; *c)* $\dfrac{x^2-5x}{x^2-x-20}$;

d) $\dfrac{4x^2-1}{6x^2+x-1}$; *e)* $\dfrac{8x^2+2x-3}{2x^2+x-1}$; *f)* $\dfrac{3x^2+4x}{3x^2+x-4}$;

g) $\dfrac{4x^2-4ax+(a^2-b^2)}{4x^2-4bx-(a^2-b^2)}$; *h)* $\dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a+c)x+ac}$.

4. Rozwiązać równania:

a) $\dfrac{x^2-3x-3}{x^2-x-6}+\dfrac{x+16}{3x^2+3x-36}=1$;

b) $\dfrac{2x^2-3}{2x^2-3x-2}-\dfrac{3x-1}{6x^2+7x+2}=1$.

Rozdział IV

Układy równań z dwiema niewiadomemi, z których jedno jest stopnia drugiego, a drugie stopnia pierwszego

§ 1. Rozwiązanie układu równań.

Równanie z dwiema niewiadomemi, mające taką postać, że po lewej stronie równania znajduje się wielomian stopnia drugiego (n-tego) ze względu na niewiadome, a po stronie prawej 0, nazywa się *równaniem stopnia drugiego* (n-tego) *z dwiema niewiadomemi.*

Np.: Równania: $x^2 - 3y^2 + 2xy - 5x + 6y - 7 = 0$; $x^2 - 3y + 2 = 0$; $xy - 3 = 0$; $x^2 + y^2 - 5x = 0$ są równaniami stopnia drugiego. — Równanie: $x^2y - 5y^2 - 3 = 0$ jest równaniem stopnia trzeciego, bo wielomian po lewej stronie równania jest ze względu na x i y wielomianem stopnia trzeciego.

Równanie stopnia drugiego z dwiema niewiadomemi musi zawierać przynajmniej jeden wyraz stopnia drugiego ze względu na niewiadome, t. j. przynajmniej jeden z wyrazów: Ax^2, By^2, Cxy, gdzie A, B i C oznaczają dowolne współczynniki różne od zera. Oprócz tego może równanie takie zawierać wyrazy stopnia pierwszego, t. j. Dx i Ey, gdzie D i E oznaczają dowolne współczynniki, oraz wyraz F, wolny od niewiadomej. Innych wyrazów równanie takie nie zawiera.

Przyjmując w równaniu: $x^2 - y^2 + 9 = 0$ dla x kolejno wartości: -1; 0; $+1$; $+2$; $+3$ i t. d. i rozwiązując otrzymane równanie ze względu na y, znajdziemy dla y kolejno wartości: $\pm\sqrt{10}$; ± 3; $\pm\sqrt{10}$; $\pm\sqrt{13}$; 0; i t. d. Te wartości y wraz z przyjętemi odpowiedniemi wartościami x spełniają dane równanie. Widzimy więc, że równanie $x^2 - y^2 + 9 = 0$ ma niezliczoną ilość rozwiązań; mówimy, że równanie to jest równaniem nieoznaczonem.

Równanie stopnia drugiego z dwiema niewiadomemi jest naogół równaniem nieoznaczonem.

W powyższem zdaniu użyliśmy wyrazu „naogół“, aby zaznaczyć, że nie brak wyjątków od tej reguły. Tak np. równanie $x^2+y^2+5=0$ nie sprawdza się dla żadnej pary wartości x i y; x^2 i y^2 są bowiem dla wszelkich wartości x liczbami nieujemnemi, suma zatem x^2+y^2+5 ma zawsze wartość dodatnią i nie staje się nigdy zerem. — Równanie zaś $x^2+y^2=0$ sprawdza się tylko wtedy, gdy $x=0$ i $y=0$; suma bowiem liczb nieujemnych x^2 i y^2 jest zerem tylko wtedy, jeżeli oba składniki są zerami.

Dołączymy teraz do równania stopnia drugiego z dwiema niewiadomemi x i y równanie stopnia pierwszego z temi samemi niewiadomemi i będziemy próbowali ten układ równań rozwiązać t. j. znaleźć wszystkie pary liczb, które podstawione odpowiednio zamiast x i y spełniają oba równania.

Układ dwu równań z dwiema niewiadomemi, z których jedno jest równaniem stopnia drugiego, a drugie równaniem stopnia pierwszego rozwiązuje się łatwo przy pomocy równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą. Metodę rozwiązywania takiego układu równań wyjaśnimy na przykładzie, rozwiązując układ równań:

$$\begin{aligned} 2x^2+3xy-y^2+3x&=7,\\ 2x+3y&=1. \end{aligned}$$

Zakładamy, że rozwiązanie układu równań istnieje. Wtedy dla wartości x i y, spełniających ten układ równań, jest według drugiego równania:

$$y=\frac{1-2x}{3}.$$

Ponieważ ta wartość y spełnia także pierwsze równanie, to podstawiając $\frac{1-2x}{3}$ zamiast y w pierwszem równaniu, otrzymamy:

$$2x^2+3x\cdot\frac{1-2x}{3}-\left(\frac{1-2x}{3}\right)^2+3x=7.$$

Takie równanie spełnia x, o ile dany układ równań ma rozwiązanie. Rozwiązujemy ostatnie równanie:

$$\begin{aligned} 2x^2+x-2x^2-\frac{1-4x+4x^2}{9}+3x&=7;\\ 4x-\tfrac{1}{9}(1-4x+4x^2)&=7;\\ 36x-1+4x-4x^2&=63;\\ -4x^2+40x-64&=0;\\ x^2-10x+16&=0;\\ \Delta=100-64=36;\ \sqrt{\Delta}&=6;\\ x_1=\frac{10+6}{2}=8;\quad x_2=\frac{10-6}{2}&=2. \end{aligned}$$

Z równania $y = \frac{1-2x}{3}$ obliczymy: $y_1 = -5$; $y_2 = -1$.

Doszliśmy do następującego wyniku: Jeżeli dany układ ma rozwiązania, to mogą niemi być tylko pary wartości:

$$x_1 = 8;\ y_1 = -5 \quad \text{i} \quad x_2 = 2;\ y_2 = -1.$$

Innych rozwiązań dany układ równań mieć nie może. Należy jednak stwierdzić, czy nasze założenie jest spełnione, a to przez sprawdzenie.

Oznaczmy w tym celu lewą stronę pierwszego równania literą L, a prawą literą P; lewą i prawą stronę drugiego równania oznaczmy kolejno L' i P'. Jeżeli zamiast x i y podstawimy wartości x_1 i y_1, to wartości, jakie przyjmują wyrażenia L, P, L' i P' oznaczymy: L_1, P_1, L_1', P_1'. Podobnie oznaczać będą symbole L_2, P_2, L_2' P_2' wartości wyrażeń L, P, L' i P', gdy w nich zamiast x i y podstawimy odpowiednio x_2 i y_2.

Stosując te oznaczenia, sprawdzamy układ równań:

$$\begin{array}{lll}
L_1 = 2 \cdot 64 - 120 - 25 + 24 = 7; & P_1 = 7; & L_1 = P_1; \\
L_1' = 16 - 15 = 1; & P_1' = 1; & L_1' = P_1'; \\
L_2 = 2 \cdot 4 - 6 - 1 + 6 = 7; & P_2 = 7; & L_2 = P_2; \\
L_2' = 4 - 3 = 1; & P_2' = 1; & L_2' = P_2'.
\end{array}$$

Przekonaliśmy się, że dany układ równań ma istotnie dokładnie dwa rozwiązania: $x_1 = 8$; $y_1 = -5$ i $x_2 = 2$; $y_2 = -1$.

Zatem:

Układ dwu równań z dwiema niewiadomemi, z których jedno jest równaniem stopnia drugiego, a drugie równaniem stopnia pierwszego, rozwiązujemy w następujący sposób: Z równania stopnia pierwszego wyrażamy jedną niewiadomą przez drugą, a znalezione wyrażenie podstawiamy zamiast pierwszej niewiadomej w równaniu stopnia drugiego. Rozwiązując otrzymane równanie, znajdujemy (o ile równanie to ma pierwiastki) wartości jednej niewiadomej; podstawiając je w równaniu stopnia pierwszego, wyznaczamy z otrzymanych równań wartości pozostałej niewiadomej. Sprawdzamy, czy znalezione pary wartości spełniają dany układ równań. Innych rozwiązań układ równań nie posiada.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać układy równań:

a) $x^2 + y^2 = 6{,}76$, $\quad y + 2{,}4x = 0$;

b) $4x - 3y^2 = 0$, $\quad y + 2x = 4$;

c) $9x^2 + y^2 = 25,$ $x + y = 3;$

d) $x^2 + y^2 - 2y = 3,$ $x - y = 1;$

e)* $x + y = 7\frac{1}{2},$ $xy = 14;$

f)* $x - y = 1,$ $4xy = 35;$

g) $(x + 2)(3 - y) = 2,$ $x + y = 2;$

h) $x^2 + y^2 + xy = 7,$ $x + 2y = 1.$

2. Rozwiązać układy równań:

a) $\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 4,$ $x + y + 1 = 0;$

b) $\frac{1}{x-2} + \frac{4}{y+3} = 1,$ $3x - 2y = 2;$

c) $\frac{2x+1}{4y+1} - \frac{y+1}{x-5} = 2,$ $x - 5y = 2;$

d) $\frac{x+3}{y+3} + \frac{x-y}{x+1} = 1,$ $y = 3x - 2;$

e) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{y}{x+1} = 1,$ $3x - 2y = 4;$

f) $\frac{3x-1}{x^2-y^2} - \frac{3y+1}{x+y} = 2,$ $(x + y + 1)^2 - (x + y - 1)^2 = 8;$

g) $\frac{2x-y}{2-y} - \frac{2x^2-11}{4-y^2} = 2,$ $x + y = 3;$

h) $\frac{3-y}{x+y} + \frac{xy+5y+2}{x^2-y^2} = 3,$ $x + 2y = 3.$

§ 2. Szczególne przypadki.

Przykład 1. Rozwiązać układ równań:

$$x^2 - 3xy + 2x + 15 = 0;$$
$$2x + y = 7.$$

Postępujemy jak w poprzednim paragrafie:

$$y = 7 - 2x;$$
$$x^2 - 21x + 6x^2 + 2x + 15 = 0;$$
$$7x^2 - 19x + 15 = 0;$$
$$\Delta = 361 - 420 = -59.$$

Wyróżnik ostatniego równania kwadratowego jest ujemny; równanie to nie ma pierwiastka.

Zastanówmy się, jaki stąd można wysnuć wniosek o rozwiązaniu danego układu równań. Założyliśmy, że dany układ równań ma rozwiązanie; stwierdziliśmy, że gdyby x i y stanowiły takie rozwiązanie, to liczba x musiałaby spełniać równanie: $7x^2 - 19x + 15 = 0$. Lecz to równanie nie ma pierwiastka, t. j. żadna liczba nie spełnia tego równania. Założenie nasze jest widocznie fałszywe; zatem dany układ nie ma rozwiązania.

---

* Rozwiązać także sposobem, wyjaśnionym w przykładzie 5 w § 6 rozdz. III.

P r z y k ł a d 2. Rozwiązać układ równań:

$$x^2 - xy - 2y^2 + x = 14;$$
$$x + y = 5.$$

Stosując metodę, wyjaśnioną w poprzednim paragrafie, otrzymamy kolejno:

$$y = 5 - x;$$
$$x^2 - x(5 - x) - 2(5 - x)^2 + x = 14;$$
$$x^2 - 5x + x^2 - 50 + 20x - 2x^2 + x = 14;$$
$$16x = 64;$$
$$x = 4;$$
$$y = 1.$$

Rozwiązanie układu równań sprowadziło się do rozwiązania równania stopnia pierwszego. Układ równań ma tylko jedno rozwiązanie. Sprawdź.

P r z y k ł a d 3. Rozwiązać układ równań:

$$x^2 + y^2 - 2x = 1;$$
$$x + y = 3.$$

Postępując jak w poprzednich przykładach, otrzymamy:

$$y = 3 - x;$$
$$x^2 + 9 - 6x + x^2 - 2x = 1;$$
$$2x^2 - 8x + 8 = 0;$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0;$$
$$\Delta = 16 - 16 = 0;$$
$$x_1 = x_2 = 2;$$
$$y_1 = y_2 = 1.$$

Układ równań ma jedno rozwiązanie (dwa równe rozwiązania). Sprawdź.

P r z y k ł a d 4. Rozwiązać układ równań:

$$9x^2 - 4y^2 + 28y = 49;$$
$$3x + 2y = 7.$$

Otrzymamy kolejno:

$$y = \frac{7 - 3x}{2};$$
$$9x^2 - 4 \cdot \frac{49 - 42x + 9x^2}{4} + 28 \cdot \frac{7 - 3x}{2} = 49;$$
$$9x^2 - 49 + 42x - 9x^2 + 98 - 42x = 49;$$
$$49 = 49.$$

Rozwiązania nie otrzymaliśmy. Jeżeli jednak pomyślimy sobie zamiast x d o w o l n ą wartość, a y dobierzemy tak, aby równanie stopnia pierwszego spełniało się i podstawimy te wartości w równaniu stopnia drugiego, wtedy równanie stopnia drugiego, jak wskazuje rachunek, sprawdza się również. Układ równań ma niezliczoną ilość rozwiązań; mówimy, że układ równań jest nieoznaczony.

P r z y k ł a d 5. Zmieńmy nieco ostatni przykład, pisząc w równaniu stopnia drugiego po prawej stronie 50 zamiast 49. Rachunek taki jak poprzednio, oparty na założeniu istnienia rozwiązań, prowadzi do niedorzecznego wyniku: $49 = 50$. Znaczy to: Jeżeli przyjmiemy zamiast x jakąkolwiek wartość i dobierzemy y tak, aby równanie stopnia pierwszego sprawdzało się, to dla tych wartości x i y równanie stopnia drugiego nie będzie nigdy spełnione. Układ równań jest sprzeczny.

Przykłady te wskazują, że:

Układ równań z dwiema niewiadomemi, z których jedno jest równaniem stopnia drugiego, a drugie równaniem stopnia pierwszego może:

albo mieć dwa rozwiązania,

albo mieć jedno rozwiązanie,

albo mieć niezliczoną ilość rozwiązań (wtedy nazywa się *układem nieoznaczonym*),

albo nie mieć wcale rozwiązań (wtedy nazywa się *układem sprzecznym*).

Ze względu na różne możliwości, jakie zdarzają się przy rozwiązywaniu układu równań pierwszego i drugiego stopnia z dwiema niewiadomemi, należy zachować szczególną ostrożność, jeżeli w równaniach znajdują się współczynniki literowe. Może się zdarzyć, że dla pewnych wartości liter układ ma rozwiązania, a dla innych nie. Należy więc warunek rozwiązalności układu zawsze wyraźnie zaznaczać. Wyjaśnimy to na przykładach.

P r z y k ł a d 6. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 4x &= 3(m^2 - 1), \\ y - x &= m - 1. \end{aligned}$$

Postępując jak przy równaniach o współczynnikach szczegółowych, znajdziemy kolejno:

$$\begin{gathered} y = x + m - 1, \\ x^2 + x^2 + mx - x - 4x = 3(m^2 - 1), \\ 2x^2 + (m - 5)x - 3(m^2 - 1) = 0; \\ \Delta = m^2 - 10m + 25 + 24m^2 - 24 = \\ = 25m^2 - 10m + 1 = \\ = (5m - 1)^2. \end{gathered}$$

Ponieważ $(5m - 1)^2 \geqq 0$, to równanie ma zawsze pierwiastki. Za $\sqrt{\Delta}$ przyjąć należy albo $5m - 1$, albo $-(5m - 1)$ zależnie od tego, czy $5m - 1$ jest liczbą dodatnią, czy ujemną. Ponieważ jednak we wzorach na pierwiastki równania występuje raz $\sqrt{\Delta}$, drugi raz $-\sqrt{\Delta}$, otrzymamy w obu przypadkach te same wzory:

$$x_1 = \frac{-(m-5)+(5m-1)}{4} = \frac{4m+4}{4} = m+1;$$

$$x_2 = \frac{-(m-5)-(5m-1)}{4} = \frac{-6m+6}{4} = -\tfrac{3}{2}(m-1);$$

$$y_1 = m+1+m-1 = 2m;$$
$$y_2 = -\tfrac{3}{2}(m-1)+m-1 = -\tfrac{1}{2}(m-1).$$

Układ równań ma zawsze dwa rozwiązania; rozwiązania te są równe, jeżeli $5m-1=0$. Sprawdź.

P r z y k ł a d 7. Rozwiązać układ równań:

$$xy+4x+2y+m=0,$$
$$y=mx.$$

Podstawiając w pierwszem równaniu mx zamiast y, otrzymamy:

$$mx^2+4x+2mx+m=0,$$
$$mx^2+2(m+2)x+m=0.$$

Zakładając, że $m \neq 0$, obliczamy: $\Delta = 4(m^2+4m+4)-4m^2 =$
$= 16(m+1)$.

Równanie ma pierwiastki tylko wtedy, gdy $m+1 \geqq 0$.

Wtedy: $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{m+1}$.

$$x_1 = \frac{-(m+2)+2\sqrt{m+1}}{m};\quad x_2 = \frac{-(m+2)-2\sqrt{m+1}}{m};$$

$$y_1 = -(m+2)+2\sqrt{m+1};\quad y_2 = -(m+2)-2\sqrt{m+1}.$$

Sprawdź.

Wzory te są ważne tylko wtedy, gdy $m+1 \geqq 0$ i $m \neq 0$. W przypadku $m+1<0$, układ równań niema rozwiązania; w przypadku $m=0$ układ równań sprawdza się wówczas tylko, jeżeli $x=0$ i $y=0$. Łatwo o tem przekonać się, podstawiając w danym układzie 0 zamiast m.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać następujące układy równań:

a) $x^2=y+1,$
$y=4x-5;$

b) $x^2+2xy+y^2-4x=0,$
$x+y+2=0;$

c) $2x^2+xy+5=0,$
$x+y=2;$

d) $x^2+xy+x-1=0,$
$x+y-1=0;$

e) $x^2+2x-y^2=0,$
$y=x+1;$

f) $xy=2,$
$x+2y=4;$

g) $x^2+y^2=10,$
$x+y=5;$

h) $x^2-y^2-6x+5=0,$
$x-y-1=0;$

i) $x^2-y^2+x+y=0,$
$y=x+1;$

j) $xy-2x^2=2,$
$y=2x.$

2. Rozwiązać następujące układy równań:

$a)\ x^2 + y = 4x, \quad y = mx + 1;$ $\qquad b)\ x^2 - y = 4, \quad y = 2x + m;$ $\qquad c)\ xy = a^2, \quad x - y = b;$

$d)\ xy = a^2, \quad x + y = b;$ $\qquad e)\ xy = 6, \quad 3x + 2y = 4m;$ $\qquad f)\ x^2 - my = 4r^2, \quad y = 2x + m;$

$g)\ x^2 - y^2 - 2y = 1, \quad 2x + 4y = 3m - 1;$ $\qquad h)\ x^2 + xy + x + 1 = 0, \quad y = (m-1)x + 2;$

$i)\ xy - 2my = 1, \quad x + y = 4m;$ $\qquad j)\ 4x^2 + y^2 - 4y = 4(6m^2 - 1), \quad 2x + y = 4m + 2.$

§ 3. Zastosowania.

Przykład 1. Ze stacyj A i B, oddalonych od siebie o 34 *km*, wyjeżdżają równocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi i spotykają się po 24 min. Pierwszy pociąg potrzebuje do przebycia jednego *km* o 10 sek. więcej, niż drugi. Obliczyć prędkości obu pociągów.

Prędkość pierwszego pociągu wynosi x *km*/min., a prędkość drugiego y *km*/min. W 24 min. przebywa pierwszy pociąg $24x$ *km*, a drugi $24y$ *km*. Ponieważ suma obu dróg wynosi 34 *km*, przeto:

$$24x + 24y = 34.$$

Do przebycia 1 *km* potrzebuje pierwszy pociąg $\frac{1}{x}$ min., a drugi $\frac{1}{y}$ min. Ponieważ pierwszy czas jest o 10 sek. $= \frac{1}{6}$ min. dłuższy od drugiego, to:

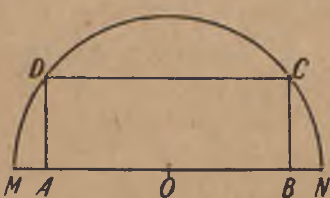
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}.$$

Rozwiązując ten układ równań (rozwiąż!), znajdziemy:

$$x_1 = 12\tfrac{3}{4}; \quad x_2 = \tfrac{2}{3};$$
$$y_1 = -11\tfrac{1}{3}; \quad y_2 = \tfrac{3}{4}.$$

Tylko druga para wartości x i y stanowi rozwiązanie zadania, bo ujemna wartość: $y_1 = -11\frac{1}{3}$ nie odpowiada warunkom zadania; zatem: Prędkości pociągów wynoszą: $\frac{2}{3}$ *km*/min. i $\frac{3}{4}$ *km*/min. Sprawdź!

Przykład 2. W półkole o średnicy $2r$ ma być wpisany prostokąt o obwodzie $2s$ w ten sposób, aby podstawa leżała na średnicy półkola, a końce boku przeciwległego podstawie na półokręgu. Obliczyć boki tego prostokąta.



Rys. 3.

Rys. 3 przedstawia prostokąt $ABCD$ wpisany w półkole. Oznaczamy:

$$OM = ON = r; \quad BC = x; \quad AB = y.$$

Według znanego twierdzenia geometrji jest:

$$BC^2 = MB \cdot BN, \text{ czyli:}$$
$$x^2 = (r + \tfrac{1}{2}y)(r - \tfrac{1}{2}y).$$

Porządkujemy to równanie: $x^2 = r^2 - \frac{1}{4}y^2$,

$$4x^2 + y^2 = 4r^2.$$

Z warunku, że obwód prostokąta wynosi $2s$, otrzymujemy:

$$x + y = s.$$

Rozwiązujemy układ równań: $4x^2 + y^2 = 4r^2$; $x + y = s$.

Otrzymujemy kolejno: $y = s - x$,

$$4x^2 + s^2 - 2sx + x^2 = 4r^2,$$
$$5x^2 - 2sx + (s^2 - 4r^2) = 0;$$
$$\Delta = 4s^2 - 20(s^2 - 4r^2) = 80r^2 - 16s^2 = 16(5r^2 - s^2).$$

Jeżeli $\Delta < 0$, to układ równań, a także i zadanie nie ma rozwiązania (porównaj uwagi do przykładu 3 w § 5 rozdz. III).

Układ równań ma rozwiązania tylko wtedy, jeżeli $\Delta = 16(5r^2 - s^2) \geqq 0$, czyli jeżeli $5r^2 - s^2 \geqq 0$. Wtedy: $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{5r^2 - s^2}$, a więc:

$$x_1 = \frac{s + 2\sqrt{5r^2 - s^2}}{5}; \qquad x_2 = \frac{s - 2\sqrt{5r^2 - s^2}}{5};$$

$$y_1 = \frac{4s - 2\sqrt{5r^2 - s^2}}{5}; \qquad y_2 = \frac{4s + 2\sqrt{5r^2 - s^2}}{5}.$$

Rozwiązanie układu równań niezawsze jest także rozwiązaniem danego zagadnienia. Wyjaśnimy to na kilku szczegółowych przykładach.

1) Jeżeli $r = 5$; $2s = 22$, wtedy $5r^2 - s^2 = 125 - 121 = 4 > 0$ i układ równań ma dwa rozwiązania:

$$x_1 = \tfrac{1}{5}(11 + 4) = 3; \qquad x_2 = \tfrac{1}{5}(11 - 4) = \tfrac{1}{5} \cdot 7 = 1{,}4;$$
$$y_1 = \tfrac{1}{5}(44 - 4) = 8; \qquad y_2 = \tfrac{1}{5}(44 + 4) = \tfrac{1}{5} \cdot 48 = 9{,}6.$$

Oba rozwiązania układu równań są zarazem rozwiązaniami zadania; istnieją dwa prostokąty spełniające warunki zadania. Wykreśl je!

2) Jeżeli $r = 5{,}2$; $2s = 17{,}6$, wtedy $5r^2 - s^2 = 135{,}2 - 77{,}44 = 57{,}76 > 0$ i układ równań ma dwa rozwiązania.

Ponieważ $\sqrt{57{,}76} = 7{,}6$, to:

$$x_1 = \tfrac{1}{5}(8{,}8 + 15{,}2) = 4{,}8; \qquad x_2 = \tfrac{1}{5}(8{,}8 - 15{,}2) = -6{,}6;$$
$$y_1 = \tfrac{1}{5}(35{,}2 - 15{,}2) = 4; \qquad y_2 = \tfrac{1}{5}(35{,}2 + 15{,}2) = 10{,}08.$$

Ponieważ x_2 jest ujemne, to drugiego rozwiązania nie możemy uważać za rozwiązanie zadania geometrycznego. To ostatnie ma więc tylko jedno rozwiązanie; istnieje tylko jeden prostokąt spełniający warunki zadania. Wykreśl ten prostokąt według znalezionych wymiarów!

3) Jeżeli $r = 5$; $2s = 4$, wtedy $5r^2 - s^2 = 125 - 4 = 121 > 0$ i układ równań ma dwa rozwiązania. Ponieważ $\sqrt{5r^2 - s^2} = 11$, to:

$$x_1 = \tfrac{1}{5}(2 + 22) = 4{,}8; \qquad x_2 = \tfrac{1}{5}(2 - 22) = -4;$$
$$y_1 = \tfrac{1}{5}(8 - 22) = -2{,}8; \qquad y_2 = \tfrac{1}{5}(8 + 22) = 6.$$

Rozwiązań tych nie można interpretować geometrycznie, ponieważ $y_1 < 0$ i $x_2 < 0$. Zadanie geometryczne nie ma w tym przypadku rozwiązania.

4) Jeżeli $r = 5$; $2s = 20$, wtedy $5r^2 - s^2 = 125 - 100 = 25 > 0$ i układ równań ma dwa rozwiązania. Ponieważ $\sqrt{5r^2 - s^2} = 5$, to:

$$x_1 = \tfrac{1}{5}(10 + 10) = 4; \qquad x_2 = \tfrac{1}{5}(10 - 10) = 0;$$
$$y_1 = \tfrac{1}{5}(40 - 10) = 6; \qquad y_2 = \tfrac{1}{5}(40 + 10) = 10.$$

Istnieje jeden prostokąt spełniający warunki zadania, odpowiadający wartościom x_1 i y_1 (wykreśl go!). Drugie rozwiązanie trudno interpretować geometrycznie; chyba że zgodzimy się uważać za prostokąt o wysokości 0 figurę złożoną z dwóch odcinków nakrywających wzajemnie siebie i średnicę półkola.

Znalezione na x wzory pozwalają rozwiązać zadanie konstrukcyjnie, jeżeli r i s są danemi odcinkami. W tym celu kreślimy najpierw odcinek $z = r\sqrt{5} = \sqrt{(2r)^2 + r^2}$; jest on przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych $2r$ i r. Następnie kreślimy odcinek $u = \sqrt{5r^2 - s^2} = \sqrt{z^2 - s^2}$ jako przyprostokątną w trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątna równa się z, a druga przyprostokątna s. Konstrukcja wyrażeń: $x_1 = \frac{1}{5}(s + 2u)$ i $x_2 = \frac{1}{5}(s - 2u)$ nie sprawia już trudności. y_1 i y_2 znajdziemy najłatwiej z warunku, że $x + y = s$. Wykonaj konstrukcję, przyjąwszy $r = 5$ *cm* i $s = 11$ *cm*. Porównaj z wynikami w przypadku 1).

Ćwiczenia.

1. *a)* Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej wynosi 5. Iloczyn tej liczby przez liczbę, która z niej powstaje przez przestawienie cyfry jednostek z cyfrą dziesiątek, wynosi 574. Znaleźć tę liczbę.

b) Różnica dwu liczb dodatnich wynosi 2, a różnica ich odwrotności $\frac{1}{12}$. Znaleźć te liczby.

Uważać, że odwrotność liczby większej jest mniejsza od odwrotności liczby większej.

c) Jeżeli do licznika pewnego ułamka dodamy 2, a od mianownika odejmiemy 2, otrzymamy odwrotność tego ułamka; jeżeli zaś od licznika odejmiemy 2, a do mianownika dodamy 2, otrzymamy to samo, jakgdybyśmy licznik pozostawili niezmieniony, a mianownik powiększyli o 8. Znaleźć ten ułamek.

2. *a)* Do przebycia drogi, wynoszącej 18 *km*, potrzebuje jeden podróżny o $\frac{1}{2}$ godz. więcej czasu, niż drugi, który przebywa w 1 godz. o $\frac{1}{2}$ *km* więcej, niż pierwszy. Ile godzin potrzebuje każdy z nich do przebycia tej drogi?

   b) Ktoś przebył 18 *km* rowerem i $2\frac{1}{2}$ *km* piechotą. Cała podróż trwała 2 godz. Z jaką prędkością szedł, a z jaką jechał, jeżeli prędkość jazdy rowerem jest o 7 *km*/godz. większa od prędkości podróży pieszej?

3. *a)* Prawe ramię dźwigni dwuramiennej ma 40 *cm*, a na końcu jego zawieszony jest ciężar 3 *kg*. Na końcu lewego ramienia zawieszony jest taki ciężar, że dźwignia jest w równowadze. Gdy ciężary przestawimy, należy w celu uzyskania równowagi oś dźwigni przesunąć o 16 *cm* w prawo. Jak długie było pierwotnie lewe ramię dźwigni i jaki ciężar był zawieszony na jego końcu?

   b) Do szybu kopalni opuszczono kamień. Uderzenie kamienia o dno szybu usłyszano po n sek. od chwili opuszczenia kamienia. Ile sekund spadał kamień, a ile sekund potrzebowała fala głosowa, wywołana uderzeniem kamienia o dno szybu, aby dotrzeć do naszego ucha? Jak głęboki był szyb?

   Wskazówka: Droga s przebyta przez ciało spadające wolno w t sek. wynosi $s = bt^2$, gdzie b oznacza wiadomą liczbę stałą. Prędkość głosu c należy uważać za wiadomą. Po otrzymaniu ogólnego wzoru, obliczyć w przybliżeniu głębokość szybu, przyjmując: $b = 4{,}90$; $c = 333$; $n = 5$.

4. *a)* O ile należy powiększyć podstawę prostokąta, wynoszącą 6 *cm*, a o ile zmniejszyć jego wysokość, wynoszącą 4 *cm*, aby pole prostokąta nie zmieniło się, a obwód jego powiększył się o 2 *cm*?

   b) Jeżeli każdą krawędź prostopadłościanu o podstawie kwadratowej powiększymy o 3 *cm*, to objętość jego wzrośnie o 1890 cm^3, a pole całkowitej powierzchni o 522 cm^2. Obliczyć krawędzie tego prostopadłościanu.

   c) Pole pobocznicy prostopadłościanu o podstawie kwadratowej wynosi m, a różnica krawędzi bocznej i przypodstawnej d. Obliczyć krawędzie prostopadłościanu.

5. *a)* W półkole o średnicy $2r$ wpisano trapez, mający za podstawę średnicę półkola. Na boku trapezu równoległym do podstawy zbudowano trójkąt równoramienny, którego wierzchołek leży na półokręgu. Znając pole p pięciokąta, złożonego z tego

trapezu i trójkąta równoramiennego, obliczyć wysokość trapezu i podstawę trójkąta.

Wykonać rachunek przyjmując: 1) $p = r^2$; 2) $p = r^2\sqrt{2}$; 3) $p = 1{,}4\,r^2$. Wyjaśnić przy pomocy rysunku.

Wskazówka: Oznaczyć wysokość trapezu x, a podstawę trójkąta $2y$.

b) Na kole o promieniu r opisano trapez równoramienny. Znając pole p tego trapezu, obliczyć jego boki równoległe x i y.

Wykonać rachunek, przyjmując: 1) $p = 4r^2$; 2) $p = 5r^2$.

Wskazówka: Wykazać najpierw, że ramię trapezu wynosi $\frac{1}{2}(x + y)$.

c) Obliczyć przyprostokątne trójkąta prostokątnego, znając jego przeciwprostokątną c i promień r koła wpisanego.

Obliczyć przyprostokątne, jeżeli $c = 10\,cm$, $r = 2\,cm$.

6. *a)* W trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h wpisano prostokąt w ten sposób, że podstawa prostokąta leży na podstawie trójkąta, a końce boku przeciwległego podstawie na ramionach trójkąta. Wiedząc, że pole prostokąta pozostaje do pola trójkąta w stosunku $1 : n$, obliczyć boki prostokąta.

Wykonać rachunek, jeżeli: 1) $n = 2$; 2) $n = 2\frac{2}{3}$.

b) Trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h przecięto prostą równoległą do podstawy. Punkty, w których ta prosta przecina ramiona trójkąta, połączono ze środkiem podstawy trójkąta i otrzymano drugi trójkąt równoramienny, którego pole wynosi $\frac{m}{n}$ pola trójkąta danego. Obliczyć podstawę i wysokość drugiego trójkąta.

Wykonać obliczenie, jeżeli: 1) $\frac{m}{n} = \frac{2}{9}$; 2) $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}$; 3) $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$.

7. *a)* Jeden wierzchołek trójkąta równobocznego leży w wierzchołku A kwadratu $ABCD$ o danym boku a; dwa pozostałe wierzchołki trójkąta leżą na bokach BC i CD. Na jakie części dzieli wierzchołek trójkąta leżący na boku BC ten bok?

Na podstawie otrzymanego wzoru podać konstrukcję trójkąta.

b) Wierzchołki trójkąta równobocznego o boku b leżą na bokach trójkąta równobocznego o boku a. Na jakie części (x i y) dzieli wierzchołek pierwszego trójkąta bok a drugiego trójkąta?

Podać konstrukcję figury na podstawie znalezionego wzoru.

Wskazówka: Do trójkąta o bokach b, x, y zastosować uogólnione twierdzenie Pitagorasa, pamiętając, że kąt między x i y ma 60^0, wskutek czego rzut x na y równa się $\frac{1}{2}x$. Przy konstrukcji zbudować najpierw odcinki: $m = b\sqrt{3}$ i $n = a\sqrt{3}$.

8. *a)* W koło o promieniu r wpisano prostokąt o obwodzie $2s$. Obliczyć boki prostokąta. Podać na podstawie znalezionego wzoru konstrukcję figury, jeżeli r i s oznaczają dane odcinki.

b) W kole o promieniu r wykreślono taką cięciwę, że suma tej cięciwy i odległości jej od środka koła równa się danemu odcinkowi s. Obliczyć cięciwę i odległość jej od środka koła. Wykonać na podstawie znalezionego wzoru konstrukcję cięciwy.

Wskazówka: Przy konstrukcji przyjąć: $r = 5$ *cm*; $s = 10{,}5$ *cm*.

c) W koło o danym promieniu r wpisano trójkąt równoramienny, w którym suma podstawy i wysokości wynosi s. Obliczyć podstawę i wysokość trójkąta.

Wykonać rachunek w przypadkach: 1) $s = 3r$; 2) $s = 1{,}4r$ i wyjaśnić przy pomocy przybliżonego rysunku.

d) W półkole o średnicy $2r$ wpisano trapez tak, że średnica półkola jest jego podstawą. Suma pozostałych trzech boków wynosi s. Obliczyć boki trapezu.

Wykonać rachunek, przyjmując $r = 5$, a nadto: 1) $s = 13{,}2$; 2) $s = 14{,}2$; 3) $s = 15$.

Rozdział V

Niektóre szczególne równania i układy równań

§ 1. Równania niewymierne.

Równanie, w którem znajdują się pierwiastki wyrażeń, zawierających niewiadomą, nazywamy *równaniem niewymiernem.*

Równaniami niewymiernemi są np. następujące równania:

$$x + 2\sqrt{x} - 3 = 0; \quad \sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x-4} = 1; \text{ i t. p.}$$

Nie nazwiemy natomiast niewymiernem równania: $x^2 - x\sqrt{2} + \sqrt{3} = 0$, ponieważ nie zawiera pierwiastka wyrażenia, w którem znajduje się x.

Na przykładach wyjaśnimy sposób rozwiązywania niektórych prostszych równań niewymiernych.

Przykład 1. Rozwiązać równanie: $\sqrt{3x-2} = 10 - x$.

Zakładamy, że równanie ma pierwiastek. Jeżeli równanie dane sprawdza się dla jakiejś wartości x, to sprawdzać się będzie dla tej samej wartości x także równanie, które otrzymamy, podnosząc do kwedratu obie strony danego równania, a więc równanie: $3x - 2 = 100 - 20x + x^2$.

Rozwiązujemy to równanie: $x^2 - 23x + 102 = 0$;

$$\Delta = 529 - 408 = 121; \quad \sqrt{\Delta} = 11;$$

$$x_1 = \frac{23+11}{2} = 17; \quad x_2 = \frac{23-11}{2} = 6.$$

Doszliśmy do wyniku, że tylko liczby 17 i 6 mogą być pierwiastkami danego równania, o ile równanie to ma wogóle pierwiastki. Sprawdźmy, czy są niemi rzeczywiście:

$$L_1 = \sqrt{51-2} = \sqrt{49} = 7; \quad P_1 = 10 - 17 = -7; \quad L_1 \neq P_1.$$

$$L_2 = \sqrt{18-2} = \sqrt{16} = 4; \quad P_2 = 10 - 6 = 4; \quad L_2 = P_2.$$

Znaleźliśmy, że tylko wartość $x_2 = 6$ jest pierwiastkiem danego równania niewymiernego.

Z przykładu tego wysnujemy pewną ogólną wskazówkę:

Jeżeli podniesiemy do kwadratu obie strony danego równania, to otrzymamy równanie, które sprawdza się dla każdego pierwiastka danego równania. Naodwrót jednak pierwiastek nowego równania niezawsze jest zarazem pierwiastkiem równania danego. Pochodzi to stąd, że z równości kwadratów dwu liczb nie wolno wnioskować, że te liczby są równe; mogą one rożnić się znakiem.

Np.: $3^2 = 3^2$, lecz także $3^2 = (-3)^2$.

Niechaj dane będzie równanie:

$$L = P,$$

gdzie L i P oznaczają wyrażenia zawierające x, znajdujące się po lewej, względnie po prawej stronie równania. Jeżeli dla pewnej wartości x równanie to jest spełnione, to dla tej samej wartości x jest także spełnione równanie: $L^2 = P^2$.

Z tego wynika już, że gdy ostatnie równanie nie ma pierwiastka, to nie ma pierwiastka także równanie $L = P$. Jeżeli zaś dla jakiejś wartości x spełnione jest równanie $L^2 = P^2$, to dla tej samej wartości x spełnione jest albo równanie: $L = P$, albo równanie: $L = -P$.

Może się więc zdarzyć, że: 1) niektóre pierwiastki równania $L^2 = P^2$ spełniają równanie $L = P$, a pozostałe spełniają równanie $L = -P$. 2) wszystkie pierwiastki równania $L^2 = P^2$ spełniają tylko jedno z równań: $L = P$ i $L = -P$, a wtedy pozostałe równanie nie ma pierwiastka. 3) Tylko w tym przypadku, gdyby dla pewnej wartości x, spełniającej równanie $L^2 = P^2$, było $P = -P = 0$, sprawdzałyby się dla tej wartości x oba równania: $L = P$ i $L = -P$.

W przykładzie 1 miało równanie $3x - 2 = (10 - x)^2$ dwa pierwiastki: 6 i 17. Pierwszy z nich spełniał dane równanie: $\sqrt{3x-2} = 10 - x$; drugi spełnia równanie $\sqrt{3x-2} = -(10 - x)$. Sprawdź!

Z tego wynika, że przy rozwiązywaniu równań niewymiernych nie wolno pomijać sprawdzania; sprawdzanie stanowi istotną część rozwiązywania.

Przykład 2. Rozwiązać równanie: $x + \sqrt{x^2 - 3x} = 2$.

Aby móc uwolnić równanie od pierwiastka przez podniesienie obu stron równania do kwadratu, przeniesiemy najpierw pierwiastek na jedną stronę równania, a resztę wyrazów na drugą:

$$\sqrt{x^2 - 3x} = 2 - x.$$

Dalej postępujemy, jak w przykładzie 1:

$$x^2 - 3x = 4 - 4x + x^2;$$
$$x = 4.$$

Sprawdzenie: $L = 4 + \sqrt{16 - 12} = 4 + 2 = 6$; $P = 2$; $L \neq P$.

Liczba 4 nie jest pierwiastkiem danego równania; dane równanie nie ma pierwiastka.

Przykład 3. Rozwiązać równanie: $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+2}=2$.

Nie wystarczy raz tylko podnieść do kwadratu obie strony równania, aby uwolnić równanie od pierwiastków. Lewa strona równania jest bowiem różnicą; podnosząc ją do kwadratu, otrzymamy jeszcze w podwójnym iloczynie obu wyrazów znów pierwiastek kwadratowy, od którego trzeba będzie równanie uwolnić, jak w przykładzie 2. Można też, przenosząc kolejno każdy pierwiastek kwadratowy na jedną stronę, uwalniać równanie stopniowo od pierwiastków. Obierzemy tę drugą drogę; otrzymamy:

$$\sqrt{2x+3}=2+\sqrt{x+2},$$
$$2x+3=4+4\sqrt{x+2}+x+2,$$
$$x-3=4\sqrt{x+2},$$
$$x^2-6x+9=16x+32,$$
$$x^2-22x-23=0;$$
$$\Delta=484+92=576; \qquad \sqrt{\Delta}=24;$$
$$x_1=\frac{22+24}{2}=23; \qquad x_2=\frac{22-24}{2}=-1.$$

Sprawdzenie:

$$L_1=\sqrt{46+3}-\sqrt{23+2}=7-5=2; \quad P_1=2; \quad L_1=P_1;$$
$$L_2=\sqrt{-2+3}-\sqrt{-1+2}=1-1=0; \quad P_2=2; \quad L_2\neq P_2.$$

Piewiastkiem danego równania jest $x=23$.

Przykład 4. Rozwiązać równanie: $\sqrt{4x+3}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{2x-2}$.

Podnosimy najpierw do kwadratu obie strony równania, a potem postępujemy, jak w przykładzie 2. Otrzymujemy kolejno:

$$4x+3-2\sqrt{8x^2+6x+4x+3}+2x+1=2x-2,$$
$$4x+6=2\sqrt{8x^2+10x+3},$$
$$2x+3=\sqrt{8x^2+10x+3},$$
$$4x^2+12x+9=8x^2+10x+3,$$
$$-4x^2+2x+6=0,$$
$$2x^2-x-3=0;$$
$$\Delta=1+24=25; \qquad \sqrt{\Delta}=5;$$
$$x_1=\frac{1+5}{4}=\frac{3}{2}; \qquad x_2=\frac{1-5}{4}=-1.$$

Tylko $x=\frac{3}{2}$ jest pierwiastkiem danego równania. (Sprawdź!). Dla $x=-1$ przyjmują wyrażenia pod znakami pierwiastkowania wartości ujemne, a pierwiastki kwadratowe liczb ujemnych nie mają sensu liczbowego; liczba -1 nie jest pierwiastkiem danego równania.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać równania:

a) $3+\sqrt{2x-1}=5$; *b)* $3-\sqrt{x-5}=1$;

c) $\sqrt{3x+4}=2-x$; *d)* $\sqrt{2x-5}=20-x$;

e) $x+\sqrt{x^2-x-2}=5$; *f)* $4+\sqrt{x^2-2x-2}=x$;
g) $\sqrt{x^2-5}=3x-7$; *h)* $\sqrt{2x^2+1}=2x-7$;
i) $3+\sqrt{4x^2-2x-11}=2x$; *j)* $2x+\sqrt{x^2-3x+3}=3$;
k) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=3$; *l)* $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5$;
m) $\sqrt{6x+5}-\sqrt{3x-1}=2$; *n)* $\sqrt{5-x}-\sqrt{2x-1}=1$;
o) $\sqrt{2x-1}=1+\sqrt{x-1}$; *p)* $\sqrt{4x+1}=1+\sqrt{3x-2}$;
r) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}=\sqrt{4x+13}$; *s)* $\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+4}$;
t) $\sqrt{10x-1}-\sqrt{4x+5}=\sqrt{x-1}$; *u)* $\sqrt{1-3x}-\sqrt{4-x}=\sqrt{2x+11}$;
*w)** $\sqrt{x+5}+\sqrt{9-x}=4$; *z)** $\sqrt{x+1}-\sqrt{5-x}=2$.

2. *a)* Obwód pewnego trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna wynosi 10 *cm*, jest cztery razy większy od jednej z przyprostokątnych. Obliczyć tę przyprostokątną.

Wskazówka: Jeżeli szukaną przyprostokątną oznaczymy literą x, to druga przyprostokątna jest $\sqrt{100-x^2}$ i t. d.

b) Obwód pewnego trójkąta równoramiennego o wysokości 12 *cm* jest o 6 *cm* większy od trzykrotności podstawy. Obliczyć podstawę.

Wskazówka: Jeżeli x oznacza podstawę, to ramię wynosi $\sqrt{144+\frac{1}{4}x^2}$; i t. d.

c) Dwa kwadratowe podwórza wyłożono płytami kamiennemi, których 9 wypada na 1 m^2. Płyt wyszło 900. Ile płyt wyszło na każde podwórze, jeżeli jedno jest o 2 *m* szersze od drugiego?

Wskazówka: Na pierwsze podwórze wyszło x płyt, na drugie $900-x$. Pole powierzchni pierwszego podwórza wynosi $\frac{x}{9}$ m^2, a bok $\sqrt{\frac{x}{9}}$ *m* i t. d.

§ 2. Niektóre równania stopnia trzeciego i czwartego.

Przykład 1. Rozwiązać równanie: $x^3=16$.

Równanie żąda znalezienia liczby, której sześcian wynosi 16. Jedną taką liczbę możemy natychmiast podać; jest nią $\sqrt[3]{16}$. Ponieważ sześcian liczby większej niż $\sqrt[3]{16}$ jest większy niż 16, a sześcian liczby dodatniej mniejszej niż $\sqrt[3]{16}$ jest mniejszy niż 16, to dane równanie ma tylko jeden

* Przy sprawdzaniu korzystać z przykładu 6 w §-ie 6, rozdz. II.

pierwiastek dodatni: $\sqrt[3]{16}$. Ujemnego pierwiastka równanie dane mieć nie może, bo sześcian liczby ujemnej jest zawsze liczbą ujemną. Również 0 nie jest pierwiastkiem danego równania, bo $0^3 = 0$. Równanie dane ma więc jedyny pierwiastek:

$$x = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}.$$

Przykład 2. Rozwiązać równanie: $x^3 = -16$.

Równanie to sprowadza się do poprzedniego, gdy w nim zmienimy znaki wszystkich wyrazów na przeciwne i uważamy za niewiadomą $-x$. Otrzymamy kolejno:

$$-x^3 = +16;$$
$$(-x)^3 = 16;$$
$$-x = \sqrt[3]{16};$$
$$x = -\sqrt[3]{16} = -2\sqrt[3]{2}.$$

Równanie ma tylko jeden pierwiastek.

Przykład 3. Rozwiązać równania:

$$a)\ x^4 = 7; \qquad b)\ x^4 = -7.$$

a) Łatwo widzieć, że pierwiastkami tego równania są wartości:

$$x_1 = \sqrt[4]{7} \quad \text{i} \quad x_2 = -\sqrt[4]{7}.$$

Że równanie nie ma więcej pierwiastków, wykażemy, przenosząc wszystkie wyrazy równania na stronę lewą i rozkładając lewą stronę równania na czynniki. Otrzymamy kolejno:

$$x^4 - 7 = 0;$$
$$x^4 - \left(\sqrt[4]{7}\right)^4 = 0;$$
$$\left[x^2 + \left(\sqrt[4]{7}\right)^2\right]\left[x^2 - \left(\sqrt[4]{7}\right)^2\right] = 0;$$
$$\left[x^2 + \left(\sqrt[4]{7}\right)^2\right]\left(x - \sqrt[4]{7}\right)\left(x + \sqrt[4]{7}\right) = 0.$$

Pierwszy czynnik iloczynu po lewej stronie równania nie staje się zerem dla żadnej wartości x; drugi czynnik staje się zerem dla $x = \sqrt[4]{7}$, a trzeci dla $x = -\sqrt[4]{7}$. Dla innych wartości x żaden z czynników nie staje się zerem. Równanie ma więc tylko dwa pierwiastki.

b) Równanie nie ma pierwiastka, ponieważ parzysta potęga żadnej liczby rzeczywistej nie jest liczbą ujemną.

Przykład 4. Rozwiązać równanie: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Jest to równanie czwartego stopnia, zawierające tylko parzyste potęgi niewiadomej; brak w niem wyrazów, zawierających x^3 i x. Równanie takie nazywamy *równaniem dwukwadratowem*. Rozwiązujemy je, uważając za niewiadomą $x^2 = z$. Równanie przyjmuje postać:

$$z^2 - 3z - 4 = 0.$$

Rozwiązujemy je: $\Delta = 9 + 16 = 25$; $\sqrt{\Delta} = 5$;

$$z_1 = \frac{3+5}{2} = 4; \quad z_2 = \frac{3-5}{2} = -1.$$

Ponieważ $z = x^2$, dochodzimy do wyniku, że dane równanie sprawdza się wtedy i tylko wtedy, jeżeli:

$$x^2 = 4, \text{ albo } x^2 = -1.$$

Pierwsze z tych równań daje pierwiastki:

$$x_1 = 2; \; x_2 = -2;$$

drugie nie ma pierwiastków. Zatem dane równanie ma dwa pierwiastki.

Przykład 5. Rozwiązać równanie: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Postępujemy podobnie jak w przykładzie 4:

$$x^2 = z;$$
$$z^2 - 5z + 4 = 0;$$
$$\Delta = 25 - 16 = 9; \; \sqrt{\Delta} = 3;$$
$$z_1 = \frac{5+3}{2} = 4; \quad z_2 = \frac{5-3}{2} = 1.$$
$$x^2 = 4; \qquad\qquad x^2 = 1;$$
$$x_1 = 2; \; x_2 = -2; \; x_3 = 1; \; x_4 = -1.$$

Dane równanie ma cztery pierwiastki.

Przykład 6. Rozwiązać równanie: $x(x-2)(2x+3) = 0$.

Lewa strona jest iloczynem i staje się zerem tylko wtedy, jeżeli:

albo: $x = 0$, albo $x - 2 = 0$, albo $2x + 3 = 0$.

Stąd otrzymujemy pierwiastki danego równania:

$$x_1 = 0; \; x_2 = 2; \; x_3 = -\tfrac{3}{2}.$$

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać równania:

a) $(x+2)^2 + \dfrac{37}{x-4} + 12 = 0$; *b)* $\dfrac{x^2+1}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} + 2 = 0$;

c) $\dfrac{x^2+x}{x+2} - \dfrac{x-4}{x+1} = 1$; *d)* $\dfrac{5x^2-12}{4x-8} - \dfrac{x^2+x+1}{x} = 1$;

e) $\dfrac{4}{x^2-1} - \dfrac{4}{x^2+1} = 1$; *f)* $\dfrac{x^2+19x}{x^2-1} - \dfrac{20(x+2)}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1}{2}$.

2. *a)* Wykazać (jak w przykładzie 1), że jedynym pierwiastkiem równania $x^5 = 32$, jest 2.

b) Znaleźć wszystkie pierwiastki równania: $x^6 = 64$.

Wskazówka: Przenieść 64 na stronę lewą, rozłożyć różnicę kwadratów po stronie lewej na czynniki, zbadać przy pomocy przykładu 1 i 2, kiedy każdy czynnik staje się zerem.

3. Rozwiązać równania:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; *b)* $x^4 + x^2 = 2$; *c)* $x^4 = 9x^2$;
d) $4(x^4 + 1) = 17x^2$; *e)* $(x^2 - 6) : 30 = 5 : (x^2 - 1)$;
f) $(x + 1)^2 : (\sqrt{3} + x) = (\sqrt{3} - x) : (x - 1)^2$;
g) $\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^2 + 2} = \frac{8x^2 - 1}{x^4 - 4}$;
h) $\frac{x^2 + 4}{2} + \frac{17}{2x^2 - 8} = \frac{x - 2}{x + 2} + \frac{4}{x - 2}$.

4. *a)* W sześcianie foremnym ścięto naroża płaszczyznami, odcinającemi przy każdym wierzchołku $\frac{1}{n}$ część krawędzi. Objętość sześcianu ze ściętemi narożami wynosi $p\%$ objętości całego sześcianu. Obliczyć n. W otrzymanym wzorze podstawić $p = 83\frac{1}{3}$.

Wskazówka: Krawędź a sześcianu uważać za wiadomą.

b) Mając dane pole p trójkąta oraz 2 jego boki, obliczyć ze wzoru Herona bok trzeci.

c) Ramię trapezu równoramiennego wynosi 5 *cm*, a jego pole 36 cm^2. Obliczyć równoległe boki trapezu, wiedząc, że jeden z nich jest 2 razy większy od drugiego.

Wskazówka: Jeden bok równoległy jest x, drugi $2x$, wysokość $\sqrt{25 - (\frac{1}{2}x)^2}$ i t. d.

5. Rozwiązać równania:

a) $(x - 2)(x + 3)(4x - 5) = 0$; *b)* $(x - 1)(x^2 + 6x - 5) = 0$;
c) $(x^2 - 4)(2x^2 - 7x - 4) = 0$; *d)* $x^3 - x^2 - 6x = 0$;
e) $(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - ab) = 0$; *f)* $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$.

§ 3. Układy równań stopnia drugiego lub wyższego niż drugi.

Jeżeli z układu dwu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomemi wyrugujemy jedną niewiadomą, otrzymamy zazwyczaj równanie stopnia czwartego (porównaj przykład 1). Podobnie otrzymujemy zwykle równanie stopnia wyższego niż drugi, rugując jedną niewiadomą z układu dwu równań, z których jedno jest stopnia wyższego niż drugi. Równanie takie bywa jednak czasami tak proste, że można je bez trudności rozwiązać. Czasem można znów przez zręczne przekształcenie sprowadzić rozwiązanie danego układu równań do rozwiązania równania stopnia drugiego. Przykłady podobnych przekształceń podajemy niżej.

Aby uniknąć przy każdym przykładzie długich rozważań, zaznaczamy, że przy rozwiązywaniu układów równań, stosować będziemy zawsze następującą metodę:

Zakładamy, że dany układ równań (nazwijmy go dla krótkości układem A) ma rozwiązanie i myślimy sobie, że zamiast x i y podstawiliśmy te wartości, które układ A spełniają. Równania możemy wtedy przekształcać tak, jak równości. Możemy do obu stron każdego równania dodawać równe liczby, możemy od obu stron równania odejmować równe liczby, możemy obie strony przez równe liczby mnożyć lub dzielić (unikając tylko dzielenia przez 0), możemy obie strony podnosić do kwadratu i t. p. Możemy też oba równania układu dodawać, odejmować, mnożyć lub dzielić stronami, bacząc tylko, aby dzielnik nie był zerem. Wszystkie równania otrzymane tym sposobem mają tę własność, że wartości x i y, spełniające układ A, spełniają te równania. Jeżeli przy pomocy takich przekształceń uzyskamy układ równań (nazwijmy go układem B), który potrafimy rozwiązać, to pośród rozwiązań układu B znajdują się **wszystkie** rozwiązania układu A. Zapomocą sprawdzania należy rozstrzygnąć, które rozwiązania układu B są rozwiązaniami układu A. Jeżeli żadna ze znalezionych par wartości, spełniających układ B, nie spełnia układu A, to układ A nie ma rozwiązania. Tak samo nie ma rozwiązania układ A, jeżeli układ B jest sprzeczny; założenie bowiem nasze, że układ A ma rozwiązanie, doprowadziło do sprzeczności.

Przykład 1. Rozwiązać układ równań:

$$2x^2 + y^2 = 34;$$
$$xy = 12.$$

Stwierdziwszy, że $x \neq 0$ (ponieważ $x = 0$ nie spełnia drugiego równania), wyrażamy z drugiego równania y przez x i podstawiamy znalezione wyrażenie zamiast y w pierwszem równaniu. Otrzymamy:

$$y = \frac{12}{x},$$

$$2x^2 + \frac{144}{x^2} = 34,$$

$$2x^4 - 34x^2 + 144 = 0.$$

Otrzymaliśmy równanie dwukwadratowe. Rozwiązując je (rozwiąż!), znajdziemy:

$$x_1 = 3;\; x_2 = -3;\; x_3 = 2\sqrt{2};\; x_4 = -2\sqrt{2}.$$

Ze wzoru $y = \frac{12}{x}$ obliczymy odpowiednie wartości y:

$$y_1 = 4;\; y_2 = -4;\; y_3 = 3\sqrt{2};\; y_4 = -3\sqrt{2}.$$

Sprawdź, że wszystkie cztery pary znalezionych wartości stanowią rozwiązania danego układu równań.

P r z y k ł a d 2. Rozwiązać układ równań:

$$x^2 + xy = 10,$$
$$xy + y^2 = 15.$$

Zauważymy, że dodając stronami oba równania, otrzymamy po lewej stronie kwadrat dwumianu. Jest więc:

$$(x + y)^2 = 25, \text{ a stąd:}$$
$$x + y = 5, \text{ albo } x + y = -5.$$

Ponieważ dane równania można napisać w postaci:

$$x(x + y) = 10,$$
$$y(x + y) = 15,$$

to wskutek znalezionych wartości $x + y$ otrzymamy:

$$5x = 10, \quad \text{albo:} \quad -5x = 10,$$
$$5y = 15, \quad\quad\quad -5y = 15.$$

a stąd:

$$x_1 = 2;\ y_1 = 3; \quad \text{albo:} \quad x_2 = -2;\ y_2 = -3.$$

Obie pary wartości spełniają dany układ równań. Sprawdź w pamięci!

P r z y k ł a d 3. Rozwiązać układ równań:

$$x^2 - 2xy + 4y^2 = 21,$$
$$xy = 10.$$

Zauważymy, że lewa strona pierwszego równania byłaby kwadratem dwumianu $x - 2y$ albo $x + 2y$, gdyby zamiast wyrazu $-2xy$ był wyraz $-4xy$ albo $+4xy$. Możemy to uzyskać, mnożąc obie strony drugiego równania raz przez -2, drugi raz przez $+6$ i dodając każdym razem stronami do pierwszego równania. Otrzymamy:

$$\begin{array}{r} x^2 - 2xy + 4y^2 = 21, \\ -2xy = -20; \\ \hline (x - 2y)^2 = 1; \\ x - 2y = \pm 1; \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2 - 2xy + 4y^2 = 21, \\ 6xy = 60; \\ \hline (x + 2y)^2 = 81; \\ x + 2y = \pm 9. \end{array}$$

Zamiast danego układu równań mamy rozwiązać cztery następujące:

$$\begin{array}{llll} x - 2y = 1, & x - 2y = 1, & x - 2y = -1, & x - 2y = -1, \\ x + 2y = 9; & x + 2y = -9; & x + 2y = 9; & x + 2y = -9. \end{array}$$

Dają one kolejno:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 5, & x_2 = -4, & x_3 = 4, & x_4 = -5, \\ y_1 = 2; & y_2 = -2\tfrac{1}{2}; & y_3 = 2\tfrac{1}{2}; & y_4 = -2. \end{array}$$

Sprawdź, że wszystkie 4 pary wartości spełniają dany układ równań!

P r z y k ł a d 4. Rozwiązać układ równań:

$$x^3 + y^3 = 37,$$
$$x + y = 1.$$

Wzór: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, czyli

$$(x+y)^3 = (x^3+y^3) + 3xy\,(x+y)$$

wskazuje, że znając $x+y$ i x^3+y^3 można obliczyć xy. Korzystając z danych równań, znajdziemy:

$$\begin{aligned} 1 &= 37 + 3xy, \text{ a stąd:} \\ -3xy &= 36, \\ xy &= -12. \end{aligned}$$

Łącząc ostatnie równanie z drugiem równaniem danego układu, otrzymamy układ równań: $xy = -12$; $x+y=1$.

Rozwiązując ten układ równań (rozwiąż!), znajdziemy:

$$x_1 = 4;\ y_1 = -3;\ x_2 = -3;\ y_2 = 4.$$

Sprawdzenie:

$L_1 = 64 - 27 = 37$; $P_1 = 37$; $L_1 = P_1$. $L'_1 = 1$; $P'_1 = 1$; $L'_1 = P'_1$.
$L_2 = -27 + 64 = 37$; $P_2 = 37$; $L_2 = P_2$. $L'_2 = 1$; $P'_2 = 1$; $L'_2 = P'_2$.

Obie pary wartości spełniają dany układ równań.

Nie jest to jedyny sposób, pozwalający rozwiązać dany układ równań. Można np. z drugiego równania wyrazić y przez x i podstawić znalezione wyrażenie zamiast y w pierwszem równaniu. Można też, jeżeli ktoś zauważy, że dwumian x^3+y^3 jest podzielny przez $x+y$, podzielić stronami pierwsze równanie przez drugie i w ten sposób zamiast równania stopnia trzeciego w danym układzie otrzymać równanie stopnia drugiego. Wogóle należy pamiętać, że nie istnieje jakaś ogólna reguła, według której rozwiązywać należy dany układ równań; to samo zadanie rozwiązać można często różnemi sposobami.

Przykład 5. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= 82, \\ x - y &= 4. \end{aligned}$$

Ze wzorów: $(x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

i $x^2+y^2 = (x-y)^2 + 2xy$ otrzymamy:

$$[(x-y)^2 + 2xy]^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2.$$

A że według tematu: $x-y=4$; $x^4+y^4=82$, otrzymamy równanie:

$$(16 + 2xy)^2 = 82 + 2x^2y^2.$$

Z tego równania obliczymy xy. Znajdziemy kolejno:

$$\begin{aligned} 256 + 64xy + 4x^2y^2 &= 82 + 2x^2y^2, \\ 2x^2y^2 + 64xy + 174 &= 0, \\ x^2y^2 + 32xy + 87 &= 0; \end{aligned}$$

$$\Delta = 1024 - 348 = 676;\ \sqrt{\Delta} = 26;$$

$$xy = \frac{-32+26}{2} = -3, \text{ albo: } xy = \frac{-32-26}{2} = -29.$$

Znaleźliśmy (przy założeniu, że dany układ równań ma rozwiązanie), że wartości x i y, spełniające dany układ równań, spełniają również

albo równanie: $xy = -3$, albo równanie: $xy = 3$.

Dołączając do tych równań drugie równanie danego układu, otrzymamy układy równań:

$$\begin{aligned} xy &= -3, \\ x - y &= 4; \end{aligned} \qquad \text{i} \qquad \begin{aligned} xy &= -29, \\ x - y &= 4. \end{aligned}$$

Każda para wartości, która spełnia dany układ równań, spełnia równocześnie i jeden z ostatnich dwóch układów. Sprowadziliśmy więc rozwiązanie danego układu równań do rozwiązania dwóch układów prostszych.

Rozwiązując pierwszy z tych układów (rozwiąż!) znajdziemy:

$$x_1 = 1;\ y_1 = -3 \ \text{ i } \ x_2 = 3;\ y_2 = -1.$$

Stwierdź, że drugi układ równań nie ma rozwiązania.

Znalezione dwie pary wartości stanowią rozwiązania danego układu równań. Stwierdź to zapomocą sprawdzenia!

P r z y k ł a d 6. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x^3y - xy &= 10, \\ x^4y + x^3y &= 45. \end{aligned}$$

Dzielimy stronami oba równania;

$$\frac{x^3y - xy}{x^4y + x^3y} = \tfrac{10}{45}.$$

Upraszczamy ułamki, rozłożywszy licznik i mianownik na czynniki:

$$\frac{xy\,(x^2 - 1)}{x^3y\,(x + 1)} = \tfrac{2}{9},$$

$$\frac{x - 1}{x^2} = \tfrac{2}{9}.$$

Rozwiązując to równanie i podstawiając znalezione wartości zamiast x w pierwszem równaniu, znajdziemy:

$$x_1 = 3;\ y_1 = \tfrac{5}{12} \ \text{ i } \ x_2 = \tfrac{3}{2};\ y_2 = 5\tfrac{1}{3}.$$

Stwierdź rachunkiem, że obie pary wartości spełniają dany układ równań.

P r z y k ł a d 7. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} xy - x - y &= 1, \\ 3\,xy - 5\,x - y &= 5. \end{aligned}$$

Zauważymy, że w każdem z obu równań jest tylko jeden wyraz stopnia drugiego, a mianowicie wyraz zawierający xy. Możemy wyraz ten wyrugować np. metodą równych współczynników. W tym celu mnożymy pierwsze równanie przez 3 i odejmujemy od niego stronami drugie. Otrzymamy równanie stopnia pierwszego:

$$2\,x - 2\,y = -2.$$

Łącząc to równanie z pierwszem równaniem układu, otrzymamy układ równań, z których jedno jest równaniem stopnia pierwszego a drugie stopnia drugiego. Rozwiązując ten układ równań jak w § 1 rozdz. IV (rozwiąż!), znajdziemy:

$$x_1 = -1;\ y_1 = 0 \ \text{ i } \ x_2 = 2;\ y_2 = 3.$$

Obie pary wartości spełniają dany układ równań. Sprawdź!

Przykład 8. Rozwiązać układ równań:

$$24y^2 - 7xy = 0,$$
$$12x^2 - 12y^2 + 7xy = 300.$$

Zauważymy, że pierwsze z tych równań sprawdza się dla wszelkich wartości x, jeżeli $y = 0$. Podstawiając $y = 0$ w drugiem równaniu, znajdziemy $x = \pm 5$. Znaleźliśmy więc dwa rozwiązania:

$$x_1 = 5;\ y_1 = 0 \ \text{ i } \ x_2 = -5;\ y_2 = 0.$$

Zbadajmy teraz, czy układ równań nie ma rozwiązań, dla których $y \neq 0$. Zakładając, że $y \neq 0$, możemy pierwsze równanie przez y uprościć; otrzymamy:

$$24y - 7x = 0.$$

Zestawiając to równanie z drugiem równaniem danego układu i rozwiązując otrzymany układ równań (rozwiąż!), znajdziemy jeszcze dwie pary rozwiązań:

$$x_3 = 4{,}5;\ y_3 = 1{,}4 \ \text{ i } \ x_4 = -4{,}5;\ y_4 = -1{,}4.$$

W podobny sposób, jak w tym przykładzie, postępować należy zawsze przy upraszczaniu równania przez niewiadomą.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać układy równań:

a) $x - y^2 = 1,\quad x^2 - 3y^2 = 13;$ *b)* $x^2 - 3y^2 + 3 = 0,\quad x = y^2 - 1;$

c) $2y^2 - 3x^2 = 6,\quad xy + 6 = 0;$ *d)* $x^2 + 3y^2 - 5xy = -3,\quad xy = 12;$

e) $x^2 + y^2 = 29,\quad xy = 10;$ *f)* $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy,\quad xy = 8;$

g) $x^2 + y^2 + xy = 3,\quad x^2 + y^2 = 5;$ *h)* $(x^2 + y^2) : (x^2 - y^2) = 5 : 4,\quad xy + 3 = 0;$

i) $x^2 + xy = 5,\quad xy + y^2 = -1;$ *j)* $x^2 + xy + y^2 = 39,\quad xy = 10;$

k) $x^2 - 3xy + 5y^2 = 11,\quad xy + y^2 = 10;$ *l)* $9x^2 - 5xy + 2y^2 = 7,\quad xy + y^2 = 6.$

2. Rozwiązać układy równań:

a) $x^3 - y^3 = 61,\quad x - y = 1;$ *b)* $8x^3 + y^3 = 63,\quad 2x + y = 3;$

c) $x^4 + y^4 = 17,$
$x + y = 1;$

d)* $x^3 + y^3 = 19,$
$(x + y)^2 + 3 = 4(x + y);$

e)** $x^2 y + x y^2 + 6 = 0,$
$x^3 y^3 = 8;$

f)** $x^3 y + x y^3 = 10,$
$x^2 y^2 = 4;$

g)** $x^3 y - 4xy = 48,$
$x^2 y^2 + 16 = 8xy;$

h) $x^4 y - 2x^3 y + x^2 y = 36,$
$x^3 y - xy = 24.$

3. Rozwiązać układy równań:

a) $\frac{6}{x} - \frac{1}{y} = -1,$
$xy = \frac{1}{2};$

b) $\frac{x}{y} = \frac{3x-5}{y+4},$
$\frac{y+2}{y-2} - \frac{2x}{y+1} = 1;$

c) $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{y+2} = 1,$
$\frac{6}{x-2} - \frac{4}{y+2} = 1;$

d) $\frac{4}{x+3} - \frac{3}{y-1} = 1,$
$\frac{1}{x+2} + \frac{4}{y} = 2;$

e) $4x^2 - y^2 + 2y = 2,$
$6x^2 + 5y = 6\frac{1}{2};$

f) $2x^2 - 3y^2 + 4x - 18 = 0,$
$x^2 - 2y^2 + 6x + 13 = 0;$

g) $y^2 - 4xy + y = 0,$
$x^2 - y^2 + 3xy + 3x = 4;$

h) $x^2 - 5xy + x = 0,$
$x^2 + y^2 - 3xy - 4y = 1;$

i) $x^2 + y^2 = 25$
$6x^3 - 3xy^2 - 2x^2 = 0;$

j) $x^2 y + x y^2 + 2xy = 0,$
$2x - xy = 21.$

4. a) Układ równań: $xy = 1$; $x^2 + y^2 = 14$ rozwiązać dwoma sposobami: 1) Mnożąc pierwsze równanie przez 2 i raz dodając, a drugi raz odejmując je stronami od drugiego i obliczając $x + y$ i $x - y$ (porównaj przykład 3 w §-ie 3). 2) Wyrażając z pierwszego równania y przez x i podstawiając znalezione wyrażenie zamiast y w drugiem równaniu. Porównaj otrzymane wyniki.

b) Postąpić podobnie, jak w zadaniu poprzedniem, z układem równań: $xy = \frac{1}{2}$; $x^2 + y^2 = 3$.

§ 4. Rozwiązywanie układów równań przez wprowadzenie nowej niewiadomej.

Często można ułatwić sobie rozwiązanie układu równań, uważając za niewiadome nie x i y, lecz pewne wyrażenia, zawierające niewiadome.

---

* Z drugiego równania oblicz najpierw $x + y$.

** Oblicz najpierw xy z drugiego równania.

P r z y k ł a d 1. Rozwiązać układ równań:

$$x^2 + 2y^2 = 27,$$
$$x^2 - 3y^2 = 22.$$

Uważamy za niewiadome x^2 i y^2 i rozwiązujemy, jak układ równań stopnia pierwszego. Otrzymujemy:

$$x^2 = 25; \quad y^2 = 1, \text{ a stąd: } x = \pm 5; \quad y = \pm 1.$$

Kombinując te wartości, otrzymujemy następujące rozwiązania:

$$x_1 = +5; \quad x_2 = +5; \quad x_3 = -5; \quad x_4 = -5;$$
$$y_1 = +1; \quad y_2 = -1; \quad y_3 = +1; \quad y_4 = -1.$$

Sprawdź!

P r z y k ł a d 2. Rozwiązać układ równań:

$$\frac{x}{y-1} - \frac{y-1}{x} = 1\tfrac{1}{2},$$
$$x^2 - 2y = 10.$$

Przekształcamy najpierw pierwsze równanie, wprowadzając nową niewiadomą $z = \frac{x}{y-1}\cdot$ Otrzymamy:

$$z - \frac{1}{z} = 1\tfrac{1}{2}, \text{ a po uporządkowaniu:}$$

$$2z^2 - 3z - 2 = 0.$$

Rozwiązując to równanie, znajdziemy: $z_1 = 2$; $z_2 = -\frac{1}{2}$.
Pierwsze równanie danego układu sprawdza się, jeżeli:

albo $\frac{x}{y-1} = 2$, czyli po uporządkowaniu: $x - 2y = -2$,

albo $\frac{x}{y-1} = -\frac{1}{2}$, czyli po uporządkowaniu: $2x + y = 1$.

Rozwiązanie danego układu równań sprowadza się (podobnie jak w przykładzie 5 w § 4) do rozwiązania układów:

$$x - 2y = -2, \qquad 2x + y = 1,$$
$$x^2 - 2y = 10; \qquad x^2 - 2y = 10.$$

Rozwiązując te układy równań, otrzymamy:

z pierwszego: $x_1 = 4$; $y_1 = 3$ i $x_2 = -3$; $y_2 = -\frac{1}{2}$;
z drugiego: $x_3 = -6$; $y_3 = 13$ i $x_4 = 2$; $y_4 = -3$.

Wszystkie cztery pary wartości spełniają dany układ równań. Sprawdź!

P r z y k ł a d 3. Rozwiązać układ równań:

$$\sqrt{x+y} - \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 2,$$
$$x + y - \frac{1}{\sqrt{x-y}} = 8.$$

Wprowadzamy nowe niewiadome:

$$\sqrt{x+y}=a; \quad \frac{1}{\sqrt{x-y}}=b$$

Dane równania przyjmują postać:

$$a-b=2,$$
$$a^2-b=8.$$

Rozwiązując ten układ równań, znajdziemy:

$$a_1=3; \qquad a_2=-2;$$
$$b_1=1; \qquad b_2=-4.$$

x i y wyznaczamy z układów równań:

$$\sqrt{x+y}=3, \qquad \sqrt{x+y}=-2.$$
$$\frac{1}{\sqrt{x-y}}=1, \qquad \frac{1}{\sqrt{x-y}}=-4.$$

Z pierwszego układu równań znajdziemy: $x_1=5$; $y_1=4$;
z drugiego: $x_2=2\frac{1}{32}$; $y_2=1\frac{31}{32}$.
Tylko pierwsza para wartości spełnia dany układ równań. Sprawdź!

P r z y k ł a d 4. Rozwiązać układ równań:

$$x^2+21=3y+7\sqrt{x^2-3y+9},$$
$$3x^2+21=16y.$$

Uwolnienie od kwadratowego pierwiastka pierwszego równania nie doprowadziłoby do celu, bo otrzymalibyśmy równanie stopnia czwartego. Napiszmy jednak pierwsze równanie w postaci:

$$(x^2-3y+9)+12=7\sqrt{x^2-3y+9}$$

i podstawmy: $\sqrt{x^2-3y+9}=a.$

Otrzymamy:

$$a^2+12=7a \quad \text{czyli}$$
$$a^2-7a+12=0.$$

Rozwiązując to równanie, znajdziemy: $a_1=3$; $a_2=4$.
Pierwsze równanie układu sprawdza się, jeżeli:

$$\sqrt{x^2-3y+9}=3 \quad \text{lub} \quad \sqrt{x^2-3y+9}=4.$$

Uwalniając każde z tych równań od pierwiastka i łącząc je z drugiem równaniem danego układu, otrzymamy następujące dwa układy równań:

$$x^2-3y+9=9, \qquad x^2-3y+9=16,$$
$$3x^2+21=16y; \qquad 3x^2+21=16y.$$

Każda para wartości x, y, spełniająca dany układ równań, spełnia jeden z tych układów. Wszystkie więc rozwiązania danego układu równań znajdziemy wśród rozwiązań ostatnich dwóch układów. Rozwiązując je, znajdziemy:

z pierwszego układu: $x_1 = 3$; $y_1 = 3$ i $x_2 = -3$; $y_2 = 3$;
z drugiego układu: $x_3 = 5$; $y_3 = 6$ i $x_4 = -5$; $y_4 = 6$.

Wszystkie cztery pary wartości spełniają dany układ równań. Sprawdź!

P r z y k ł a d 5. Rozwiązać układ równań:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = 8,$$
$$x^2 + 2xy - 5y^2 = 12.$$

Zamiast y wprowadzamy nową niewiadomą t, podstawiając: $y = tx$, a niewiadomą x pozostawiamy bez zmiany. Otrzymamy:

$$x^2 - 2tx^2 + 2t^2x^2 = 8,$$
$$x^2 + 2tx^2 - 5t^2x^2 = 12,$$

Dzielimy stronami oba równania; otrzymamy:

$$\frac{x^2 - 2tx^2 + 2t^2x^2}{x^2 + 2tx^2 - 5t^2x^2} = \frac{8}{12},$$ a po uproszczeniu ułamków:

$$\frac{1 - 2t + 2t^2}{1 + 2t - 5t^2} = \frac{2}{3}.$$

Porządkujemy i rozwiązujemy to równanie:

$$3 - 6t + 6t^2 = 2 + 4t - 10t^2,$$
$$16t^2 - 10t + 1 = 0;$$
$$\Delta = 100 - 64 = 36; \quad \sqrt{\Delta} = 6;$$
$$t_1 = \frac{10 + 6}{32} = \frac{1}{2}; \quad t_2 = \frac{10 - 6}{32} = \frac{1}{8}.$$

Wskutek znaczenia t jest:

$$y = \frac{1}{2}x, \quad \text{albo} \quad y = \frac{1}{8}x.$$

Łącząc każde z tych równań np. z pierwszem równaniem układu, mamy do rozwiązania układy równań:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 = 8, \qquad x^2 - 2xy + 2y^2 = 8,$$
$$y = \frac{1}{2}x; \qquad y = \frac{1}{8}x.$$

Rozwiązując te układy równań (rozwiąż!), znajdujemy:

dla pierwszego układu: $x_1 = 4$; $y_1 = 2$; i $x_2 = -4$; $y_2 = -2$;
dla drugiego układu: $x_3 = \frac{16}{5}$; $y_3 = \frac{2}{5}$; i $x_4 = -\frac{16}{5}$; $y_4 = -\frac{2}{5}$.

Wszystkie cztery pary znalezionych wartości spełniają dany układ równań. Sprawdź!

Sposób rozwiązywania układów równań, wyjaśniony na tym przykładzie, prowadzi zawsze do celu, jeżeli równania zawierają oprócz wyrazów wiadomych tylko wyrazy stopnia drugiego.

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać układy równań:

a) $x^2 + y^2 = 25,$
$x^2 - y^2 = 7;$

$x^2 = a$
$y^2 = b$

b) $5x^2 - 6y^2 = 26,$
$7x^2 - 6y^2 = 58;$

$x^2 = a$
$y^2 = b$

c) $4(2x-1)^2 - 15(y-3)^2 = 21,$
$6(2x-1)^2 + 25(y-3)^2 = 79;$

d) $x^2 + y^2 - x - y = 4,$
$xy + 2 = 0;$

e) $x^2 + xy + x + y = 8,$
$xy + y^2 + 2 = 0;$

f) $(x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0,$
$2x^2 - y^2 + xy + 10 = 0;$

g) $x^2 - y^2 + x + y = 20,$
$x^2 - y^2 - (x - y) = 12;$

h) $x^2 - 2xy + 2y^2 = 13,$
$y(x - y) = 6;$

i) $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{10}{3},$
$x^2 + y^2 = 5;$

j) $\dfrac{x^2}{y^2} - 7\dfrac{x}{y} + 12 = 0,$
$x^2 + 11y^2 + 12y + 1 = 0;$

k) $\dfrac{x^2 + 2y}{3x} - \dfrac{3x}{x^2 + 2y} = \dfrac{8}{3},$
$x^2 + y = 5;$

l) $\dfrac{x^2 - 3y}{2y} + \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - 3} = \dfrac{7}{2},$
$\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - 3} - \dfrac{x^2 - 3y}{2y} = \dfrac{5}{2};$

m) $2x^2 + xy = 2,$
$xy + y^2 = 3;$

n) $x^2 + xy = 4,$
$y^2 - xy = 21;$

o) $x^2 + xy + y^2 = 3,$
$3x^2 - y^2 = 11;$

p) $2x^2 - 4xy + y^2 = 7;$
$3x^2 - 6xy + y^2 = 10.$

2. Rozwiązać układy równań:

a) $x + y = 5,$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3;$

b) $x - y = 5,$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5;$

c) $x = 3\sqrt{x+y},$
$y = \sqrt{x+y};$

d) $81 : x = y : 4,$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9;$

e) $\dfrac{5}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{x-y} = 2,$
$2\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 9;$

f) $\sqrt{\dfrac{3x}{x-12y}} + \sqrt{\dfrac{x-12y}{3x}} = 2,$
$2y - x\left(y + \frac{1}{6}\right) = 18;$

g) $x^2 + 2y^2 + 2 = 4\sqrt{x^2 + 2y^2 - 2},$
$x^2 + 4xy = 12;$

h) $x^2 + 2\sqrt{x^2 - y + 1} = y + 14,$
$x^2 + 2(x - y) = 13;$

i) $\sqrt{x + \dfrac{1}{y}} - \sqrt{x + y - 3} = 1,$
$2x + y + \dfrac{1}{y} = 8;$

j) $2\sqrt{x+y} - \dfrac{7}{\sqrt{x+y}} = \dfrac{4}{\sqrt{(x+y)^3}},$
$3x^2 + 2y = y^2;$

$k)^*\ x+y+\dfrac{9}{x-y}=6\dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x-y}},$
$xy+y^2=36;$

$l)^*\ \dfrac{\sqrt{x-y}}{8\sqrt{x+y}}+\dfrac{2}{(x+y)\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{1}{x+y},$
$x^2+y^2=34.$

§ 5. Zastosowania.

Ćwiczenia.

1. *a)* Pociąg przebył 72 *km* w pewnym czasie. Gdyby prędkość pociągu była większa o 12 *km*/godz., to drogę tę przebyłby w czasie o $\frac{1}{2}$ godz. krótszym. Jaka była prędkość pociągu i w jakim czasie przebył całą drogę?

b) W sali szkolnej jest w ławkach miejsc dla 32 uczniów. Gdyby dodano 2 ławki, a w każdej ławce umieszczono o jednego ucznia więcej, zmieściłoby się w sali 50 uczniów. Ile ławek jest w sali i ilu uczniów w każdej ławce?

c) Kupiec sprowadził za 351 *zł* pewną ilość cukru. Gdy cukier potaniał o 6 *gr* na *kg*, otrzymał za tę samą kwotę o 9 *kg* cukru więcej. Ile *kg* cukru sprowadził pierwszym razem i po ile *zł* płacił za *kg*?

d) W pewnej fabryce wypłacano robotnikom 98 *zł* dziennie. Po rozszerzeniu fabryki donajęto 6 robotników i podwyższono każdemu płacę o 20 *gr* dziennie. Wypłacano wtedy robotnikom 123 *zł* dziennie. Ilu robotników było zajętych pierwotnie w fabryce i ile *zł* pobierał każdy dziennie?

e) Kapitał 750 *zł* oddany na procent prosty przyniósł po pewnym czasie 150 *zł* dochodu. Taki sam dochód przyniósłby ten kapitał w czasie krótszym o rok, gdyby go oddano na procent wyższy o 1. Obliczyć na jaki procent i na ile lat złożony był kapitał.

f) *A* i *B* zawiązali spółkę, przyczem *A* włożył w przedsiębiorstwo o 500 *zł* mniej niż *B*. Przy rozwiązaniu spółki okazało się, że przedsiębiorstwo przyniosło 1400 *zł* zysku, i wtedy otrzymał *A* 2100 *zł* kapitału wraz z dochodem. Ile włożył w przedsiębiorstwo *A*, a ile *B* i jaki procent włożonego kapitału wynosił zysk?

---

* Ponieważ pierwsze równanie zawiera $\sqrt{x+y}$ i $\sqrt{x-y}$, musi być dla wartości x i y spełniających układ równań: $x+y\geq 0$ i $x-y\geq 0$.

Wskazówka: A włożył w przedsiębiorstwo x *zł*, zaś B $(x + 500)$ *zł*; zysk z przedsiębiorstwa wynosił y % włożonego kapitału i t. d.

g) Przebyłem 72 *km* koleją, a 16 *km* rowerem w 4 godz. Zpowrotem przebyłem tę samą drogę w $3\frac{1}{2}$ godz., bo rowerem jechałem wprawdzie z prędkością o 2 *km*/godz. mniejszą, ale pociąg jechał z prędkością większą o 18 *km*/godz. Z jaką prędkością jechałem rowerem, a z jaką poruszał się pociąg?

h) Jeżeli od licznika i mianownika pewnego ułamka odejmiemy 3, ułamek zmniejszy się o $\frac{1}{6}$; jeżeli zaś od licznika i mianownika odejmiemy 2, ułamek zmniejszy się o $\frac{1}{12}$. Jaki to ułamek?

i) Pompa, usuwająca wodę z kopalni, poruszana jest silnikiem o mocy 150 *kgm*/sek., przyczem 12% pracy silnika zużywa się na pokonanie tarcia i innych oporów. Gdy poziom wody w kopalni obniżył się o 2 *m*, pompa wydobywała o 30 *kg* wody na 1 minutę (!) mniej, niż poprzednio. Na jaką wysokość podnosiła pompa wodę i ile *kg* wody na minutę wydobywała?

j) Pewien obwód eklektryczny składa się z jednego ogniwa o sile elektromotorycznej 1,8 wolta, a o oporze wewnętrznym 0,4 ohma i z oporu zewnętrznego. Gdy do obwodu włączono w szereg jeszcze jedno takie samo ogniwo, natężenie prądu wzrosło o $\frac{3}{4}$ amp. Jakie było pierwotnie natężenie prądu i jaki opór zewnętrzny?

2. *a)* Wyznaczyć m i n tak, aby równanie

$$x^2 + 3mnx + (m^2 + n^2) = 0$$

miało pierwiastki: $x_1 = 1$; $x_2 = 5$.

b) Trójmian kwadratowy: $y = x^2 - (m^2 + n^2)x + 3mn$ przyjmuje dla $x = 2$ wartość $y = -7$, a wartość $x = 1$ jest jego miejscem zerowem. Obliczyć m i n.

c) Trójmian kwadratowy: $y = (m^2 + n^2)x^2 - 2mnx + (m^2 - n^2)$ przyjmuje dla $x = -1$ wartość $y = 8$, a dla $x = 2$ wartość $y = 20$. Obliczyć m i n.

d) Wyznaczyć m i n tak, aby trójmian kwadratowy:

$$y = x^2 - (m + 2n)x + (m^2 + n^2)$$

był kwadratem dwumianu, a dla $x = 2$ przyjmował wartość $y = 1$.

3. *a)* Znając przeciwprostokątną c w trójkącie prostokątnym oraz

wysokość h prostopadłą do niej, obliczyć obie przyprostokątne.

Wskazówka: Jedno z równań układu znajdziemy, obliczając w dwojaki sposób pole trójkąta.

b) Na kole o danym promieniu r opisano trójkąt równoramienny o danej wysokości h. Obliczyć podstawę $2x$ i ramię y trójkąta.

c) W kole o danym promieniu r wykreślono taką cięciwę, że pole trójkąta równoramiennego, mającego tę cięciwę za podstawę, a wierzchołek w środku koła, wynosi mr^2, gdzie m oznacza daną liczbę. Obliczyć tę cięciwę oraz odległość jej od środka koła. Po otrzymaniu ogólnych wzorów wykonać rachunek, przyjmując: 1) $m = \frac{1}{2}$; 2) $m = \frac{12}{25}$.

d) Kwadrat o danym boku a ma być zamieniony na trójkąt równoramienny o takiem samem polu i danem ramieniu r. Obliczyć podstawę i wysokość tego trójkąta i podać na podstawie otrzymanych wzorów jego konstrukcję.

4. *a)* Wysokość pewnego prostopadłościanu jest średnią arytmetyczną jego krawędzi przypodstawnych; przekątna prostopadłościanu wynosi $5\sqrt{2}$ *cm*, a pole całkowitej powierzchni 94 cm^2. Obliczyć krawędzie przypodstawne.

Wskazówka: Jeżeli x i y oznaczają boki podstawy, to wysokość jest $\frac{1}{2}(x+y)$.

b) Znając przekątną d prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i pole p jednej ściany bocznej, obliczyć krawędzie. Po otrzymaniu ogólnych wzorów obliczyć krawędzie, przyjmując $d = 9$ *cm* i $p = 28$ cm^2.

c) Pole ściany bocznej prostopadłościanu o podstawie kwadratowej jest o 12 cm^2 większe od pola podstawy; przekątna prostopadłościanu ma 9 *cm*. Obliczyć krawędzie tej bryły.

d) Stożek o promieniu podstawy r i wysokości $2r$ przecięto taką płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek, że pole trójkątnego przekroju wynosi mr^2, gdzie m oznacza daną liczbę. Obliczyć podstawę i wysokość figury przekroju. Po uzyskaniu ogólnych wzorów wykonać rachunek, przyjmując $m = 2$.

e) W kulę o danym promieniu r wpisano walec. Pole całkowitej powierzchni walca pozostaje do pola powierzchni kuli w stosunku 1) 4 : 5; 2) 1 : 2. Obliczyć promień podstawy i wysokość walca.

f) W półkulę o promieniu r wpisano taki walec, że pole całkowitej powierzchni walca równa się polu powierzchni półkuli (bez podstawy). Obliczyć promień podstawy i wysokość walca.

5 *a)* Pole pobocznicy prostopadłościanu o podstawie kwadratowej wynosi m, a jego objętość v. Obliczyć krawędzie.

b) Pole pobocznicy foremnego ostrosłupa o podstawie kwadratowej jest n razy większe od pola jego podstawy. Znając objętość v tego ostrosłupa, obliczyć krawędź przypodstawną x i wysokość y ściany bocznej. Po znalezieniu ogólnych wzorów obliczyć x i y, jeżeli $n = 1\frac{2}{3}$; $v = 48\ cm^3$.

Wskazówka: Wysokość ostrosłupa wynosi $\sqrt{y^2 - \frac{1}{4}x^2}$.

c) Między krawędziami pewnego prostopadłościanu, schodzącemi się w jednem narożu, zachodzi taki związek, że stosunek trzeciej krawędzi do drugiej równa się stosunkowi drugiej do pierwszej. Obliczyć ten stosunek oraz krawędź pierwszą, jeżeli objętość prostopadłościanu wynosi 27 cm^3, a pole całkowitej jego powierzchni 57 cm^2.

Wskazówka: Jeżeli x oznacza pierwszą krawędź, a y wykładnik stosunku, o którym mowa w zadaniu, wtedy druga krawędź jest xy, a trzecia xy^2.

d) Walec o danym promieniu podstawy r i wysokości $2r$ zamieniono na walec o takiej samej objętości, w którym jednak stosunek wysokości do promienia podstawy równa się n. Obliczyć promień podstawy i wysokość tego walca.

e) Przekrój przez oś stożka obrotowego jest trójkątem równoramiennym o danem polu p; pole pobocznicy stożka równa się polu koła o promieniu r. Obliczyć promień x podstawy i wysokość y stożka.

Wskazówka: Tworząca stożka jest $\sqrt{x^2 + y^2}$.

f) Znając stosunek n pola pobocznicy stożka obrotowego do pola jego podstawy i wiedząc, że objętość stożka równa się objętości kuli o danym promieniu r, obliczyć promień x podstawy i wysokość y stożka.

Wskazówka: Jak w poprzedniem zadaniu.

g) Trójkąt prostokątny o danej przyprostokątnej a wykonał zupełny obrót dokoła tej przyprostokątnej. Pole powierzchni powstałej w ten sposób bryły obrotowej równa się polu koła o danym promieniu r. Obliczyć boki trójkąta.

h) Podstawy dwóch stożków o wspólnej wysokości są współśrodkowemi kołami, których promienie różnią się od d. Wspólna wysokość obu stożków równa się sumie promieni podstaw. Znając nadto różnicę v objętości obu stożków, obliczyć promienie ich podstaw.

i) Promienie dwu kul różnią się o $d = 2$ *cm*, a ich objętości o tyle, ile wynosi objętość trzeciej kuli o promieniu $r = 2\sqrt[3]{7}$ *cm*. Obliczyć promienie kul.

j) Podstawę posągu tworzą dwa sześciany, z których mniejszy ustawiony jest na większym. Wysokość obu sześcianów razem wynosi 3,2 *m*, a objętość 9,728 m^3. Obliczyć krawędzie tych sześcianów.

k) Stożek o wysokości 10 *cm* przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy. Promień przekroju jest o 3 *cm* mniejszy od promienia podstawy; stożek odcięty przez tę płaszczyznę ma objętość o 78π cm^3 mniejszą od objętości całego stożka. Obliczyć promień podstawy i promień przekroju.

Wskazówka: Należy najpierw wyrazić zapomocą obu niewiadomych wysokość stożka odciętego.

6. *a)* W kole o promieniu 5 *cm* wykreślono dwie równoległe cięciwy, których wzajemna odległość wynosi 1 *cm*. Obliczyć te cięciwy, jeżeli wiadomo, że różnica ich wynosi 2 *cm*.

Wskazówka: Jeżeli jedna cięciwa jest $2x$, a druga $2y$, to odległości ich od środka koła wynoszą: $\sqrt{25 - x^2}$ i $\sqrt{25 - y^2}$ i t. d.

b) Znając obwód $2s = 30$ *cm* i pole $p = 30$ cm^2 trójkąta prostokątnego, obliczyć jego przyprostokątne.

Wskazówka: Jeżeli x i y oznaczają przyprostokątne, to przeciwprostokątna wynosi $\sqrt{x^2 + y^2}$, a obwód $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2s$ i t. d.

c) Na kole o promieniu $r = 1{,}6$ *cm* opisano trójkąt prostokątny o obwodzie $2s = 24$ *cm*. Obliczyć przyprostokątne tego trójkąta.

d) Suma obu przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym wynosi 35 *cm*, a wysokość, wykreślona z wierzchołka kąta prostego 12 *cm*. Obliczyć obie przyprostokątne x i y.

Wskazówka: Pole trójkąta można w dwojaki sposób wyrazić zapomocą x i y, zważywszy, że przeciwprostokątna równa się $\sqrt{x^2 + y^2}$.

e) Suma obu przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym jest o 1 *cm* większa od przeciwprostokątnej; wysokość wykreślona z wierzchołka kąta prostego wynosi 1,2 *cm*. Obliczyć przyprostokątne.

f) W pewnym trójkącie prostokątnym suma przyprostokątnych wynosi 7 *cm*, pole zaś powierzchni, zakreślonej przy obrocie tego trójkąta dokoła przeciwprostokątnej, wynosi 16,8 π cm^2. Obliczyć obie przyprostokątne x i y.

Wskazówka: Wyrazić najpierw wysokość h trójkąta wykreśloną z wierzchołka kąta prostego przez x i y, obliczając w dwojaki sposób pole trójkąta.

g) Pole przekroju ostrosłupa foremnego o podstawie kwadratowej płaszczyzną, przechodzącą przez przekątną podstawy i przez wierzchołek ostrosłupa, wynosi $3\sqrt{14}$ cm^2, pole zaś ściany bocznej ostrosłupa 12 cm^2. Obliczyć krawędzie ostrosłupa.

Wskazówka: Jeżeli x oznacza krawędź przypodstawną, a y krawędź boczną, to przekątna podstawy wynosi $x\sqrt{2}$, wysokość ostrosłupa $\sqrt{y^2 - \left(\frac{1}{2}x\sqrt{2}\right)^2}$, a wysokość ściany bocznej $\sqrt{y^2 - (\frac{1}{2}x)^2}$.

Tablica
trzecich pierwiastków liczb.

n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$
0	0,000	**20**	2,714	**40**	3,420	**60**	3,915	**80**	4,309
1	1,000	21	2,759	41	3,448	61	3,936	81	4,327
2	1,260	22	2,802	42	3,476	62	3,958	82	4,344
3	1,442	23	2,844	43	3,503	63	3,979	83	4,362
4	1,587	24	2,884	44	3,530	64	4,000	84	4,380
5	1,710	25	2,924	45	3,557	65	4,021	85	4,397
6	1,817	26	2,962	46	3,583	66	4,041	86	4,414
7	1,913	27	3,000	47	3,609	67	4,062	87	4,431
8	2,000	28	3,037	48	3,634	68	4,082	88	4,448
9	2,080	29	3,072	49	3,659	69	4,102	89	4,465
10	2,154	**30**	3,107	**50**	3,684	**70**	4,121	**90**	4,481
11	2,224	31	3,141	51	3,708	71	4,141	91	4,498
12	2,289	32	3,175	52	3,733	72	4,160	92	4,514
13	2,351	33	3,208	53	3,756	73	4,179	93	4,531
14	2,410	34	3,240	54	3,780	74	4,198	94	4,547
15	2,466	35	3,271	55	3,803	75	4,217	95	4,563
16	2,520	36	3,302	56	3,826	76	4,236	96	4,579
17	2,571	37	3,332	57	3,849	77	4,254	97	4,595
18	2,621	38	3,362	58	3,871	78	4,273	98	4,610
19	2,668	39	3,391	59	3,893	79	4,291	99	4,626
20	2,714	**40**	3,420	**60**	3,915	**80**	4,309	**100**	4,642
n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt[3]{n}$

	$\sqrt[3]{n}$									
n	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
10	4,642	657	672	688	703	718	733	747	762	777
11	4,791	806	820	835	849	863	877	891	905	919
12	4,932	946	960	973	987	*000	*013	*027	*040	*053
13	5,066	079	092	104	117	130	143	155	168	180
14	5,192	205	217	229	241	254	266	278	290	301
15	5,313	325	337	348	360	372	383	395	406	418
16	5,429	440	451	463	474	485	496	507	518	529
17	5,540	550	561	572	583	593	604	615	625	636
18	5,646	657	667	677	688	698	708	718	729	739
19	5,749	759	769	779	789	799	809	819	828	838
20	5,848	858	867	877	887	896	906	915	925	934
21	5,944	953	963	972	981	991	*000	* 009	*018	*028
22	6,037	046	055	064	073	082	091	100	109	118
23	6,127	136	145	153	162	171	180	188	197	206
24	6,214	223	232	240	249	257	266	274	283	291
25	6,300	308	316	325	333	341	350	358	366	374
26	6,383	391	399	407	415	423	431	439	447	455
27	6,463	471	479	487	495	503	511	519	527	534
28	6,542	550	558	565	573	581	589	596	604	611
29	6,619	627	634	642	649	657	664	672	679	687
30	6,694	702	709	717	724	731	739	746	753	761
31	6,768	775	782	790	797	804	811	818	826	833
32	6,840	847	854	861	868	875	882	889	896	903
33	6,910	917	924	931	938	945	952	959	966	973
34	6,980	986	993	*000	*007	*014	*020	*027	*034	*041
35	7,047	054	061	067	074	081	087	094	101	107
36	7,114	120	127	133	140	147	153	160	166	173
37	7,179	186	192	198	205	211	218	224	230	237
38	7,243	250	256	262	268	275	281	287	294	300
39	7,306	312	319	325	331	337	343	350	356	362
40	7,368	374	380	386	393	399	405	411	417	423
	0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***

	$\sqrt[3]{n}$									
n	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
40	7,368	374	380	386	393	399	405	411	417	423
41	7,429	435	441	447	453	459	465	471	477	483
42	7,489	495	501	507	513	518	524	530	536	542
43	7,548	554	560	565	571	577	583	589	594	600
44	7,606	612	617	623	629	635	640	646	652	657
45	7,663	669	674	680	686	691	697	703	708	714
46	7,719	725	731	736	742	747	753	758	764	769
47	7,775	780	786	791	797	802	808	813	819	824
48	7,830	835	841	846	851	857	862	868	873	878
49	7,884	889	894	900	905	910	916	921	926	932
50	7,937	942	948	953	958	963	969	974	979	984
51	7,990	995	*000	*005	*010	*016	*021	*026	*031	*036
52	8,041	047	052	057	062	067	072	077	082	088
53	8,093	098	103	108	113	118	123	128	133	138
54	8,143	148	153	158	163	168	173	178	183	188
55	8,193	198	203	208	213	218	223	228	233	238
56	8,243	247	252	257	262	267	272	277	282	286
57	8,291	296	301	306	311	316	320	325	330	335
58	8,340	344	349	354	359	363	368	373	378	382
59	8,387	392	397	401	406	411	416	420	425	430
60	8,434	439	444	448	453	458	462	467	472	476
61	8,481	486	490	495	499	504	509	513	518	522
62	8,527	532	536	541	545	550	554	559	564	568
63	8,573	577	582	586	591	595	600	604	609	613
64	8,618	622	627	631	636	640	645	649	653	658
65	8,662	667	671	676	680	685	689	693	698	702
66	8,707	711	715	720	724	729	733	737	742	746
67	8,750	755	759	763	768	772	776	781	785	789
68	8,794	798	802	807	811	815	819	824	828	832
69	8,837	841	845	849	854	858	862	866	871	875
70	8,879	883	887	892	896	900	904	909	913	917
	0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***

	$\sqrt[3]{n}$									
n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
70	8,879	883	887	892	896	900	904	909	913	917
71	8,921	925	929	934	938	942	946	950	955	959
72	8,963	967	971	975	979	984	988	992	996	*000
73	9,004	008	012	016	021	025	029	033	037	041
74	9,045	049	053	057	061	065	069	073	078	082
75	9,086	090	094	098	102	106	110	114	118	122
76	9,126	130	134	138	142	146	150	154	158	162
77	9,166	170	174	178	182	185	189	193	197	201
78	9,205	209	213	217	221	225	229	233	237	240
79	9,244	248	252	256	260	264	268	272	275	279
80	9,283	287	291	295	299	302	306	310	314	318
81	9,322	326	329	333	337	341	345	348	352	356
82	9,360	364	368	371	375	379	383	386	390	394
83	9,398	402	405	409	413	417	420	424	428	432
84	9,435	439	443	447	450	454	458	462	465	469
85	9,473	476	480	484	488	491	495	499	502	506
86	9,510	513	517	521	524	528	532	535	539	543
87	9,546	550	554	557	561	565	568	572	576	579
88	9,583	586	590	594	597	601	605	608	612	615
89	9,619	623	626	630	633	637	641	644	648	651
90	9,655	658	662	666	669	673	676	680	683	687
91	9,691	694	698	701	705	708	712	715	719	722
92	9,726	729	733	736	740	743	747	750	754	758
93	9,761	764	768	771	775	778	782	785	789	792
94	9,796	799	803	806	810	813	817	820	824	827
95	9,830	834	837	841	844	848	851	855	858	861
96	9,865	868	872	875	879	882	885	889	892	896
97	9,899	902	906	909	913	916	919	923	926	930
98	9,933	936	940	943	946	950	953	956	960	963
99	9,967	970	973	977	980	983	987	990	993	997
	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*

Spis treści