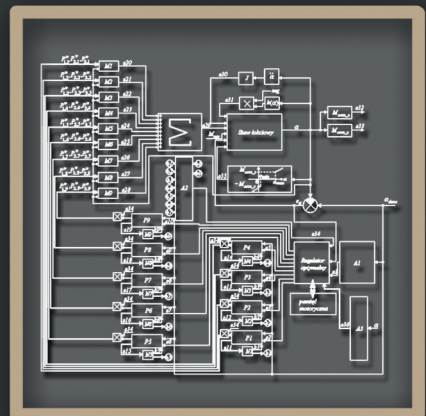
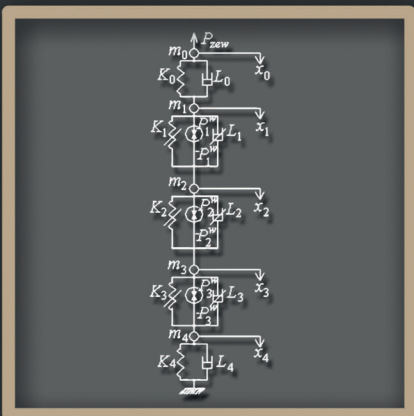
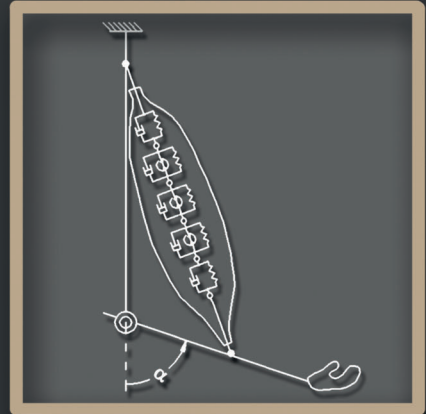


Wiktoria Wojnicz  
Edmund Wittbrodt

# MODELE DYSKRETNE W ANALIZIE DYNAMIKI MIĘŚNI SZKIELETOWYCH UKŁADU RAMIĘ-PRZEDRAMIĘ



PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

*Romuald Szymkiewicz*

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

*Janusz T. Cieśliński*

RECENZENCI

*Jan Awrejcewicz*

*Stanisław Wojciech*

PROJEKT OKŁADKI

*Krzysztof Krzempek*

Wydano za zgodą  
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem  
<http://www.pg.gda.pl/wydawnictwo/oferta>

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej  
Gdańsk 2012

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie  
i w jakikolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978-83-7348-424-5

---

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Ark. wyd. 13,9, ark. druku 13,25, 118/701

---

Druk i oprawa: *EXPOL* P. Rybiński, J. Dąbek, Sp. Jawna  
ul. Brzeska 4, 87-800 Włocławek, tel. 54 232 37 23

# SPIS TREŚCI

WYKAZ PODSTAWOWYCH SYMBOLI I OZNACZEŃ.....	5
1. WSTĘP.....	11
2. WPROWADZENIE.....	13
2.1. Opis układów mięśniowo-szkieletowych.....	13
2.1.1. Mięsień szkieletowy poprzecznie prążkowany.....	13
2.1.1.1. Budowa mięśnia.....	13
2.1.1.2. Pobudzenie i kurczenie się mięśnia.....	17
2.1.1.3. Zaburzenia funkcjonowania mięśnia.....	20
2.1.1.4. Narządy pomocnicze mięśni.....	20
2.1.2. Zespół mięśni szkieletowych w układzie ramię-przedramię.....	21
2.1.2.1. Mięśnie ramienia i przedramienia.....	21
2.1.2.2. Budowa stawu łokciowego.....	29
2.1.3. Koordynacja ruchu zespołu mięśni.....	32
2.1.4. Metody badania czynności mięśni.....	35
2.2. Opis stosowanych modeli.....	37
2.2.1. Charakterystyki mechaniczne mięśnia.....	37
2.2.2. Modelowanie zachowania mięśnia.....	39
2.2.2.1. Modele jednowymiarowe.....	40
2.2.2.2. Modele dwuwymiarowe i trójwymiarowe.....	46
2.2.3. Modelowanie zachowania zespołu mięśni.....	48
2.2.3.1. Metody oparte na pomiarze sygnałów EMG mięśni.....	49
2.2.3.2. Metody oparte na technikach optymalizacyjnych.....	53
2.2.4. Uwagi końcowe.....	61
2.3. Zakres monografii.....	62
3. KONCEPCJE NOWYCH MODELI ZACHOWANIA MIĘŚNIA I ZESPOŁU MIĘŚNI.....	66
3.1. Model mięśnia.....	66
3.1.1. Ogólne zasady modelowania.....	66
3.1.1.1. Fizjologiczna podstawa modelowania.....	66
3.1.1.2. Sposób modelowania.....	67
3.1.1.3. Modelowanie właściwości lepkosprężystych.....	70
3.1.2. Model reologiczny.....	72
3.1.3. Model matematyczny.....	75
3.1.4. Weryfikacja doświadczalna modeli.....	77
3.1.5. Wyznaczanie parametrów modelu.....	79
3.1.5.1. Parametry elementów masowych, sprężystych i lepkich.....	79
3.1.5.2. Identyfikacja właściwości lepkosprężystych.....	83
3.1.5.3. Siły wewnętrzne w elementach siłowych.....	85
3.1.5.4. Identyfikacja sił wewnętrznych.....	87
3.1.6. Ograniczenia w modelu.....	91
3.1.7. Modelowanie wybranych czynności mięśnia.....	93
3.1.7.1. Skurcz koncentryczny i ekscentryczny.....	94
3.1.7.2. Skurcz izotoniczny.....	94
3.1.7.3. Skurcz izometryczny.....	95
3.1.7.4. Skurcz auksotoniczny.....	99
3.1.7.5. Skurcz, jako zadana funkcja czasu przemieszczenia przyczepu mięśnia.....	99
3.1.8. Bilans energetyczny pracy modelu mięśnia.....	101
3.2. Model zespołu mięśni układu ramię-przedramię.....	102

3.2.1. Ogólna charakterystyka modelu .....	102
3.2.2. Model 2D .....	103
3.2.2.1. Dynamiczne równanie obrotu przedramienia .....	105
3.2.2.2. Zachowanie przedramienia w granicznych położeniach ruchu .....	107
3.2.3. Model 3D .....	108
3.2.3.1. Dynamiczne równanie obrotu przedramienia .....	108
3.2.3.2. Zachowanie przedramienia w granicznych położeniach ruchu .....	111
3.2.4. Unikanie efektu „ściskania” mięśnia .....	111
3.2.5. Obliczenie reakcji dynamicznych w stawie łokciowym .....	112
3.2.6. Modelowanie obrotu przedramienia .....	115
3.2.7. Metoda szacowania sił mięśni rzeczywistego zespołu mięśniowego .....	115
3.3. Ogólne koncepcje sterowania .....	117
3.3.1. Sterowanie zachowaniem modelu mięśnia .....	117
3.3.2. Sterowanie zachowaniem modelu zespołu mięśni .....	121
4. SYMULACJE NUMERYCZNE ORAZ WERYFIKACJA MODELU .....	129
4.1. Mięsień pojedynczy .....	129
4.1.1. Skurcz koncentryczny i ekscentryczny .....	130
4.1.2. Skurcz izotoniczny .....	134
4.1.3. Skurcz izometryczny .....	139
4.1.4. Skurcz izotoniczno-izometryczny .....	142
4.1.5. Skurcz przy zadanym przemieszczeniu przyczepu modelu mięśnia .....	144
4.1.6. Identyfikacja właściwości lepkosprężystych modelu .....	153
4.1.7. Identyfikacja sił wewnętrznych modelu .....	155
4.1.8. Bilans energetyczny pracy modelu mięśnia .....	156
4.1.9. Weryfikacja modelu mięśnia .....	158
4.2. Zespół mięśni układu ramię-przedramię .....	162
4.2.1. Dane wejściowe .....	162
4.2.2. Symulacja obrotu przedramienia .....	167
4.2.2.1. Model 2D mięśni hipotetycznych .....	168
4.2.2.2. Model 3D mięśni rzeczywistych .....	174
4.2.2.3. Model 3D mięśni hipotetycznych .....	180
4.2.3. Przykład obliczeniowy zastosowania metody oszacowania sił mięśni rzeczywistego zespołu mięśniowego .....	185
4.2.4. Uwagi końcowe .....	186
5. PODSUMOWANIE I UWAGI KOŃCOWE .....	188
5.1. Uwagi końcowe .....	189
6. DODATEK .....	191
6.1. Metoda rozwiązywania sztywnego układu równań różniczkowych .....	191
6.2. Przekształcenie układu równań różniczkowych drugiego rzędu do jednego równania różniczkowo-całkowego .....	192
6.3. Metoda rozwiązywania równania różniczkowo-całkowego .....	194
6.4. Metoda rozwiązywania odwrotnego zadania dynamiki .....	195
BIBLIOGRAFIA .....	198
Streszczenie w j. polskim .....	207
Streszczenie w j. angielskim .....	208
SKOROWIDZ .....	209

## WYKAZ PODSTAWOWYCH SYMBOLI I OZNACZEŃ

$\dot{()}$	$\equiv \frac{d()}{dt}$	– pierwsza pochodna funkcji $()$ względem czasu
$\ddot{()}$	$\equiv \frac{d^2()}{dt^2}$	– druga pochodna funkcji $()$ względem czasu
$\dddot{()}$	$\equiv \frac{d^3()}{dt^3}$	– trzecia pochodna funkcji $()$ względem czasu
$()^{(iv)}$	$\equiv \frac{d^4()}{dt^4}$	– czwarta pochodna funkcji $()$ względem czasu
$\text{Im}(\dots)$		– część urojona
$\text{Re}(\dots)$		– część rzeczywista
$\alpha$		– kąt obrotu przedramienia [rad]
$\alpha_g$		– graniczna wartość kąta obrotu przedramienia [rad]
$\alpha_{dane}$		– zadany kąt obrotu przedramienia [rad]
$\alpha_{max}$		– maksymalny kąt obrotu przedramienia [rad]
$\alpha_{min}$		– minimalny kąt obrotu przedramienia [rad]
$\kappa$		– współczynnik proporcjonalności [s]
$\theta_i$		– $i$ -ty kąt [rad]
$\rho_m$		– gęstość tkanki mięśniowej [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
$\rho_s$		– gęstość tkanki ścięgnistej [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
$\tau$		– zmienna czasu stosowana w funkcji podcałkowej [s]
$\xi_i$		– współczynnik zdrowotności $i$ -tego fragmentu brzośca mięśnia [-]
$\xi_{i,j}$		– współczynnik zdrowotności $i$ -tego fragmentu brzośca $j$ -tego mięśnia [-]
$\delta_{m,max}$		– maksymalne naprężenie tkanki mięśniowej [Pa]
$\delta_{sc,max}$		– maksymalne naprężenie tkanki ścięgnistej [Pa]
$\gamma_{x_i}, \gamma_{y_i}, \gamma_{z_i}$		– kąty zawarte pomiędzy linią działania siły kurczącej $i$ -tego mięśnia $P_{kurcz_i}$ a osiami $X, Y, Z$ [rad]
$A_{HV}^i$		– $j$ -ta amplituda siły funkcji Heavyside'a [N]
$a_{is}$		– maksymalne dodatnie $i$ -te przemieszczenie [m]
$a_{iw}$		– maksymalne ujemne $i$ -te przemieszczenie [m]
$b_{HV}$		– okres utrzymania niezmiennej amplitudy $A_{HV}^j$ [s]
$b_{is}$		– maksymalna dodatnia $i$ -ta prędkość [m/s]
$b_{iw}$		– maksymalna ujemna $i$ -ta prędkość [m/s]
$b_{izok}$		– stała prędkość skurczu izokinetycznego [m/s]
$B_{k_i}$ i $\bar{B}_{k_i}$		– $k$ -ty współczynnik $i$ -tego mięśnia i współczynnik sprzężony do współczynnika $\bar{B}_{k_i}$ [-]
$c_{ins}$		– maksymalna siła powstająca w połączeniu brzośca ze ścięgnem przyczepu mięśnia [N]
$c_{ins_i}$		– maksymalna siła powstająca w połączeniu brzośca ze ścięgnem przyczepu $i$ -tego mięśnia [N]
$C_k^i$		– $k$ -ty stały współczynnik wyznaczony w $i$ -tym kroku całkowania $t_i$ [-]
$c_{or}$		– maksymalna siła powstająca w połączeniu brzośca ze ścięgnem początku mięśnia [N]

$c_{or\_i}$	– maksymalna siła powstająca w połączeniu brzuśca ze ścięgnem początku $i$ -tego mięśnia [N]
$\Delta\alpha_i$	– $i$ -ta różnica kątów [rad]
$\Delta l$	– zmiana długości mięśnia [m]
$\Delta M(t)$	– uchyb zależny od zmiennej czasu $t$ [N·m]
$\Delta x_{ij}$	– przyrost $ij$ -tej współrzędnej $x$ [m]
$D_i$	– $i$ -ta średnica [m]
$D_{sc}$	– średnica ścięgna [m]
$e$	– mała liczba [–]
$e_\alpha$	– różnica sygnałów [rad]
$F_i^{\max}$	– maksymalna siła $i$ -tego mięśnia [N]
$F_i^{\max\_izo}$	– maksymalna siła izometryczna $i$ -tego mięśnia [N]
$F_{ins}$	– siła powstająca w połączeniu brzuśca ze ścięgnem przyczepu mięśnia [N]
$F_{ins\_i}$	– siła powstająca w połączeniu brzuśca ze ścięgnem przyczepu $i$ -tego mięśnia [N]
$F_{ins\_i}^h$	– hipotetyczna siła powstająca w połączeniu brzuśca ze ścięgnem przyczepu $i$ -tego mięśnia [N]
$F_{ins\_i}^r$	– rzeczywista siła powstająca w połączeniu brzuśca ze ścięgnem przyczepu $i$ -tego mięśnia [N]
$F_{izo}$	– siła w skurczu izometrycznym [N]
$F_{k\_i}$	– $k$ -ta funkcja pomocnicza w $i$ -tym modelu mięśnia
$F_{or}$	– siła powstająca w połączeniu brzuśca ze ścięgnem początku mięśnia [N]
$F_{or\_i}$	– siła powstająca w połączeniu brzuśca ze ścięgnem początku $i$ -tego mięśnia [N]
$F_{or\_i}^r$	– rzeczywista siła powstająca w połączeniu brzuśca ze ścięgnem początku $i$ -tego mięśnia [N]
$F_{or\_i}^h$	– hipotetyczna siła powstająca w połączeniu brzuśca ze ścięgnem początku $i$ -tego mięśnia [N]
$g_i$	– sygnał wyjściowy $i$ -tego nieliniowego elementu zamkniętego układu sterowania zachowaniem modelu mięśnia
$g_{w\_i}$	– $i$ -ty współczynnik wzmocnienia [–]
$G_m$	– siła ciężkości struktury przedramię-ręka [N]
$G(s)$	– transmitancja operatorowa obiektu
$H_w, H_{w1}, H_{w2}, H_{w3}$	– macierze lokalizacji sił wewnętrznych
$H_z$	– macierz lokalizacji sił zewnętrznych
$h_i$	– długość $i$ -tego mięśnia mierzona wzdłuż jego osi długiej [m]
$h(\alpha)$	– ramię siły zależne od kąta $\alpha$ [m]
$h_i(\alpha)$	– ramię siły $i$ -tego modelu mięśnia [m]
$J_y$	– masowy moment bezwładności struktury przedramię-ręka względem osi $Y$ [kg·m <sup>2</sup> ]
$\mathbf{K}, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$	– macierze sztywności modelu mięśnia [N/m]
$K_{ij}$	– współczynnik sztywności $ij$ -tego elementu sprężystego [N/m]
$K_{k\_i}$	– współczynnik sztywności $k$ -tego elementu sprężystego $i$ -tego mięśnia [N/m]
$K_k^p$	– $k$ -ty współczynnik sztywności elementu sprężystego dla $p$ -tego rodzaju pracy mięśnia [N/m]
$k_M(\alpha)$	– współczynnik sztywności nieliniowej sprężyny skrętnej [N·m/rad]
$l(l_i)$	– długość mięśnia ( $i$ -tego mięśnia) [m]
$\mathbf{L}$	– współczynnik tłumienia elementu lepkiego [N·s/m]
$\mathbf{L}, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$	– macierze tłumienia modelu mięśnia [N·s/m]
$l_0$	– długość spoczynkowa mięśnia [m]
$L_0^m$	– optymalna długość brzuśca mięśnia [m]
$\lambda$	– współczynnik potęgowy [–]
$l_b$	– długość brzuśca mięśnia [m]

$L_{ij}$	– współczynnik tłumienia $ij$ -tego elementu lepkiego [N·s/m]
$L_{k_i}$	– współczynnik tłumienia $k$ -tego elementu lepkiego $i$ -tego mięśnia [N·s/m]
$L_k^p$	– $k$ -ty współczynnik tłumienia elementu lepkiego dla $p$ -tego rodzaju pracy mięśnia [N·s/m]
$m$	– masa mięśnia [kg]
$\mathbf{M}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$	– macierze mas modelu mięśnia [kg]
$M_{com}$	– moment kompensacyjny [N·m]
$M_{com\_i}^{pr}$	– składowa momentu kompensacyjnego $M_{com\_r}$ $i$ -tego modelu mięśnia prostownika w modelu 2D zespołu mięśni układu ramię-przedramię [N·m]
$M_{com\_i}^{zg}$	– składowa momentu kompensacyjnego $M_{com\_r}$ $i$ -tego modelu mięśnia zginacza w modelu 2D zespołu mięśni układu ramię-przedramię [N·m]
$M_{com\_r}$	– moment kompensacyjny nieliniowej sprężyny skrętnej [N·m]
$M_{com\_x}, M_{com\_y}, M_{com\_z}$	– składowe momentu kompensacyjnego względem osi X, Y, Z [N·m]
$M_i$	– moment siły $i$ -tego mięśnia [N·m]
$m_{ij}$	– współczynnik masowy $ij$ -tego elementu masowego [kg]
$M_i^{pr}(\alpha)$	– moment siły $i$ -tego prostownika w modelu 2D [N·m]
$M_i^{zg}(\alpha)$	– moment siły $i$ -tego zginacza w modelu 2D [N·m]
$m_{k_i}$	– współczynnik masowy $k$ -tego elementu masowego $i$ -tego mięśnia [kg]
$M(R_{x_i}), M(R_{y_i}), M(R_{z_i})$	– składowe momentów sumy sił reakcji i/lub sił więzadeł $i$ -tego mięśnia względem osi X, Y, Z [N·m]
$M_{zew}$	– moment sił zewnętrznych względem osi stawu [N·m]
$M_{zew\_x}, M_{zew\_y}, M_{zew\_z}$	– składowe momentu zewnętrznego względem osi X, Y, Z [N·m]
$P$	– siła [N]
$\mathbf{P}_w, \mathbf{P}_{w1}, \mathbf{P}_{w2}$	– wektory sił wewnętrznych modelu mięśnia [N]
$P_a$	– składowa czynna siły kurczącej [N]
$P_{a_i}$	– składowa czynna siły kurczącej $i$ -tego mięśnia [N]
$P_{a_i}^{pr}$	– składowa aktywna siły kurczącej generowanej przez $i$ -ty model mięśnia prostownika w modelu 2D [N]
$P_{a_i}^{zg}$	– składowa aktywna siły kurczącej generowanej przez $i$ -ty model mięśnia zginacza w modelu 2D [N]
$P_b$	– składowa bierna siły kurczącej [N]
$P_{b_i}$	– składowa bierna siły kurczącej $i$ -tego mięśnia [N]
$P_{b_i}^{pr}(\alpha)$	– składowa pasywna siły kurczącej generowanej przez $i$ -ty model mięśnia prostownika w modelu 2D [N]
$P_{b_i}^{zg}(\alpha)$	– składowa pasywna siły kurczącej generowanej przez $i$ -ty model mięśnia zginacza w modelu 2D [N]
$PCSA (PCSA_i)$	– powierzchnia poprzecznego przekroju fizjologicznego mięśnia ( $i$ -tego mięśnia) [m <sup>2</sup> ]
$PCSA_{ins}$	– powierzchnia poprzecznego przekroju fizjologicznego ścięgna przyczepu [m <sup>2</sup> ]
$PCSA_{or}$	– powierzchnia poprzecznego przekroju fizjologicznego ścięgna początku [m <sup>2</sup> ]
$p_i$	– $i$ -ty splot funkcji
$P_{ij}^w$	– siła wewnętrzna generowana przez $ij$ -ty element kurczliwy [N]
$P_{iz}$	– siła przyczepu mięśnia w czasie skurczu izotoniczno-izometrycznego [N]
$P_{k_i}^w$	– siła wewnętrzna generowana przez $k$ -ty element kurczliwy $i$ -tego mięśnia [N]
$P_{komp}$	– siła kompensacyjna [N]

$P_{komp}^k$	– siła kompensacyjna w $k$ -tym kroku całkowania $t_k$ [N]
$P_{kurcz}$	– siła kurcząca [N]
$P_{kurcz\_i}$	– siła kurcząca $i$ -tego mięśnia [N]
$P_{kurcz\_i}^r$	– rzeczywista siła kurcząca $i$ -tego mięśnia [N]
$P_{kurcz\_i}^{zg}(\alpha)$	– siła kurcząca $i$ -tego zginacza w modelu 2D [N]
$P_{kurcz\_i}^{pr}(\alpha)$	– siła kurcząca $i$ -tego prostownika w modelu 2D [N]
$P_{max\_j}^w$	– maksymalna siła wewnętrzna generowana przez $j$ -ty fragment brzuśca [N]
$P_x(\alpha_1), P_z(\alpha_1)$	– składowa siły bezwładności względem osi $X$ i $Z$ zależna od funkcji $\alpha_1$
$P_{zew}$	– siła zewnętrzna [N]
$P_{zew\_rrc\_i}$	– $i$ -ta siła zewnętrzna obliczona z równania różniczkowo-całkowego [N]
$P_{zew\_urr\_i}$	– $i$ -ta siła zewnętrzna obliczona z układu równań różniczkowych [N]
$P_{zew\_i}$	– zewnętrzna siła działająca na $i$ -ty mięsień [N]
$R, R_x, R_y, R_z$	– siła reakcji i jej składowe względem osi $X, Y, Z$ [N]
$r_i$	– ramię działania siły $i$ -tego mięśnia [m]
$R_{x,i}, R_{y,i}, R_{z,i}$	– składowe sumy sił reakcji i/lub sił więzadeł $i$ -tego mięśnia względem osi $X, Y, Z$ [N]
$r_x^R, r_y^R, r_z^R$	– współrzędne punktu przyłożenia wypadkowej siły reakcji $R$ [m]
$\sigma_{max}$	– maksymalne naprężenie mięśnia [Pa]
$s$	– operator transformaty Laplace'a
$s_i$	– $i$ -ta wartość własna [ $s^{-1}$ ]
$S_{ins}$	– siła odrywania w punkcie przyczepu mięśnia [N]
$s_{k\_i}$	– $k$ -ta wartość własna $i$ -tego mięśnia [ $s^{-1}$ ]
$\bar{s}_k$	– sprzężona wartość własna do wartości własnej $s_k$ [ $s^{-1}$ ]
$S_{or}$	– siła odrywania w punkcie początku mięśnia [N]
$t$	– czas (zmienna czasu lub krok sterowania) [s]
$\Delta t$	– długość kroku całkowania, [s]
$t_0$	– chwila początkowa [s]
$t_i$	– $i$ -ta chwila całkowania [s]
$t_k$	– chwila końcowa [s]
$t_m$	– $m$ -ta chwila całkowania [s]
$V_b$	– objętość brzuśca mięśnia [ $m^3$ ]
$V_i$	– objętość $i$ -tego mięśnia [ $m^3$ ]
$W_E$	– praca sił sprężystych układu [J]
$W_L$	– praca sił lepkich układu [J]
$W_M$	– energia kinetyczna układu [J]
$W_{wew}$	– praca sił wewnętrznych układu [J]
$W_{zew}$	– praca siły zewnętrznej układu [J]
$w$	– współczynnik wagowy [–]
$x$	– współrzędna lub przemieszczenie [m]
$\mathbf{x}, \mathbf{x}_1$	– wektory przebiegów przemieszczeń wyznaczonych punktów modelu mięśnia [m]
$x_{dane}$	– zadane przemieszczenie przyczepu modelu mięśnia [m]
$x_{i\_obl}$	– obliczone $i$ -te przemieszczenie [m]
$x_i^h$	– $i$ -te przemieszczenie hipotetyczne [m]
$x_{ij}$	– $j$ -ta współrzędna $i$ -tego mięśnia [m]
$x_i^k$	– $i$ -ta współrzędna w $k$ -tej chwili czasu $t_k$ [m]
$x_{in\_i}, y_{in\_i}, z_{in\_i}$	– współrzędne przyczepu $i$ -tego mięśnia w układzie prostokątnym $XYZ$ [m]
$x_i^r$	– $i$ -te przemieszczenie rzeczywiste [m]
$x_{j\_i}^h$	– $j$ -te przemieszczenie hipotetyczne $i$ -tego modelu mięśnia [m]
$x_{j\_i}^h\text{dane}$	– zadane $j$ -te przemieszczenie hipotetyczne $i$ -tego modelu mięśnia [m]



---

$x'_{j_i}$	– $j$ -te przemieszczenie rzeczywiste $i$ -tego modelu mięśnia [m]
$x_{k_i}$	– $k$ -ta współrzędna $i$ -tego mięśnia [m]
$x_{or_i}, y_{or_i}, z_{or_i}$	– współrzędne początku $i$ -tego mięśnia w układzie prostokątnym XYZ [m]
$x_u$	– granica przemieszczeń dozwolonych [m]
$x_{Wxz}, y_{Wxz}, z_{Wxz}$	– współrzędne początkowe środka ciężkości struktury ramię-przedramię [m]
$x_{zi}$	– zadane $i$ -te przemieszczenie [m]
$y$	– współrzędna [m]
$y_i$	– $i$ -ta współrzędna pomocnicza [m]
$\Omega$	– funkcja celu



# 1. WSTĘP

Obecny poziom wiedzy umożliwia analizę zjawisk zachodzących w układach złożonych oraz symulowanie ich zachowania przy użyciu modelowania matematycznego. Do układów złożonych należą między innymi układy biologiczne, nazywane układami biomechanicznymi w przypadku opisanego ich funkcjonowania za pomocą zasad mechaniki.

Modelowanie zachowania złożonego układu biologicznego polega na opisanu i powiązaniu szeregu przyczynowo-skutkowych zjawisk zachodzących w tym układzie. Rodzaj uwzględnianych zjawisk i sposób modelowania ich zachowania zależy od doświadczenia i umiejętności badacza-modelarza. Uwzględnienie wszystkich zaobserwowanych zjawisk jest niemożliwe i w większości przypadków prowadzi do nadmiernej komplikacji modelu oraz braku możliwości uzyskania jego rozwiązania.

Model matematyczny układu biomechanicznego jest zbiorem równań i (lub) nierówności, które można rozwiązać metodami analitycznymi, numerycznymi lub analityczno-numerycznymi. Za pomocą metod analitycznych można uzyskać dokładne rozwiązania w postaci funkcji ciągłych, ale ich stosowanie jest ograniczone do układów mniej złożonych. Metody numeryczne umożliwiają uzyskanie rozwiązań przybliżonych, których dokładność zależy od stosowanych algorytmów i technik obliczeniowych, ale umożliwiają one analizę układów bardziej złożonych.

Opracowanie modelu rzeczywistego układu biologicznego wciąż napotyka na szereg trudności, które wynikają z braku metody pozwalającej uzyskać aktualne dane o składowych badanego układu żywego. Funkcjonowanie organów (narządów) znajdujących się w organizmie żywym znacznie się różni od wyodrębnionych z organizmu nieżywego i przechowywanych w środowisku konserwującym. W celu rozwiązania tego problemu podejmowane są próby tworzenia układów zastępczych o innej naturze, np. w postaci układów elektrycznych lub pneumatycznych, które odzwierciedlają funkcjonowanie badanego układu biologicznego. Jednak układy te nie uwzględniają wszystkich istotnych zjawisk zachodzących w rzeczywistym układzie biologicznym. Innym rozwiązaniem jest stosowanie modelowania matematycznego. Wymaga ono wstępnego sformułowania modelu matematycznego opisującego zaobserwowany wcześniej przebieg zjawisk przyczynowo-skutkowych w układzie biologicznym. Następnie model ten jest poddawany procedurze weryfikacji ilościowej i jakościowej, której wyniki są podstawą do wnioskowania o adekwatności modelu lub o potrzebie jego ulepszenia (korekcji). Należy zaznaczyć, iż w praktyce układ rzeczywisty można badać w bardzo wąskim zakresie, natomiast badania numeryczne nad jego modelem matematycznym pozwalają znacznie poszerzyć ten zakres i zaobserwować zjawiska niewidoczne w trakcie badań doświadczalnych.

Monografia jest poświęcona modelowaniu zachowania zespołu mięśni szkieletowych poprzecznie prążkowanych, które należą do aparatu ruchowego człowieka i pozwalają na wykonywanie: ruchów określanych przez świadomość lub ruchów wyuczonych (zautomatyzowanych), a także odruchów nieświadomych. Przedstawiono w niej dwa nowe modele: model zachowania mięśnia oraz model zachowania zespołu mięśni układu ramię-przedramię. Modele te mogą być używane zarówno do badania stanów dynamicznych, jak i statycznych.

Monografia bazuje na rozprawie doktorskiej W. Wojnicz „Modelowanie i symulacja zachowania zespołu mięśni szkieletowych układu ramię-przedramię” [168], której

promotorem jest prof. E. Wittbrodt. Rozprawa została wykonana w Katedrze Mechaniki i Mechatroniki Wydziału Mechanicznego Politechniki Gdańskiej, a obroniona na Wydziale Mechanicznym Politechniki Łódzkiej.

Monografia składa się z siedmiu rozdziałów. Rozdział pierwszy stanowi niniejszy wstęp. Drugi zawiera wprowadzenie do problematyki, w tym opis fizjologiczny badanych układów, analizę obecnie stosowanych w biomechanice modeli zachowania pojedynczego mięśnia oraz zespołu mięśni. W trzecim omówiono koncepcje nowych modeli zachowania mięśnia i zespołu mięśni w układzie ramię-przedramię, a także koncepcje sterowania nimi. W czwartym przedstawiono wyniki symulacji numerycznych zaproponowanych modeli, a także omówiono wyniki weryfikacji jakościowej. Piąty rozdział zawiera podsumowanie pracy. W szóstym rozdziale opisano algorytmy obliczeniowe i przekształcenia matematyczne. Siódmy rozdział zawiera wykaz literatury.

Autorzy monografii pragną podziękować prof. Dagmarze Tejszerskiej oraz prof. Janowi Awrejcewiczowi za cenne uwagi, które zostały uwzględnione przy opracowywaniu monografii.

Obliczenia numeryczne wykonano na komputerach Centrum Informatycznego Trójmiejskiej Akademickiej Sieci Komputerowej.

Monografia sfinansowana została ze środków projektu badawczego nr 3156/B/T02/2010/39, sfinansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

## 2. WPROWADZENIE

### 2.1. Opis układów mięśniowo-szkieletowych

#### 2.1.1. Mięsień szkieletowy poprzecznie prążkowany

##### 2.1.1.1. Budowa mięśnia

Mięsień długi składa się z *brzusca* i dwóch *ścięgien*. Brzusiec jest zbudowany z *włókien mięśniowych poprzecznie prążkowanych* (zwanymi dalej *włóknami mięśniowymi*), które oddziałują na układ kostny w charakterystycznych kierunkach nazywanych *aktinami mięśniowymi*. Ścięgna, oprócz funkcji mocowania, pełnią także rolę przekaźnika siły mięśnia (tzn. siły skurczu włókien mięśniowych) na układy kostne. Ścięgna są zbudowane z włókien kolagenowo-elastynowych, których przedłużeniem są *włókna Sharpeya* (*włókna wnikańca*), wtapiające się w zewnętrzne warstwy kości [114, 119, 156].

Punkt zamocowania mięśnia do stosunkowo nieruchomej części szkieletu nazywa się *początkiem mięśnia* (*origio*). Zajmuje on pozycję zawsze *proksymalną* (bliżej tułowia). Miejsce usytuowania mięśnia na ruchomej kości jest nazywane *przyczepem* (*insertio*) i znajduje się ono zawsze w pozycji *dystalnej* (dalej tułowia). Linia łącząca punkt przyczepu mięśnia z punktem początku mięśnia jest nazywana *osią długą*, zaś linia prostopadła do osi długiej jest nazywana *osią krótką*.

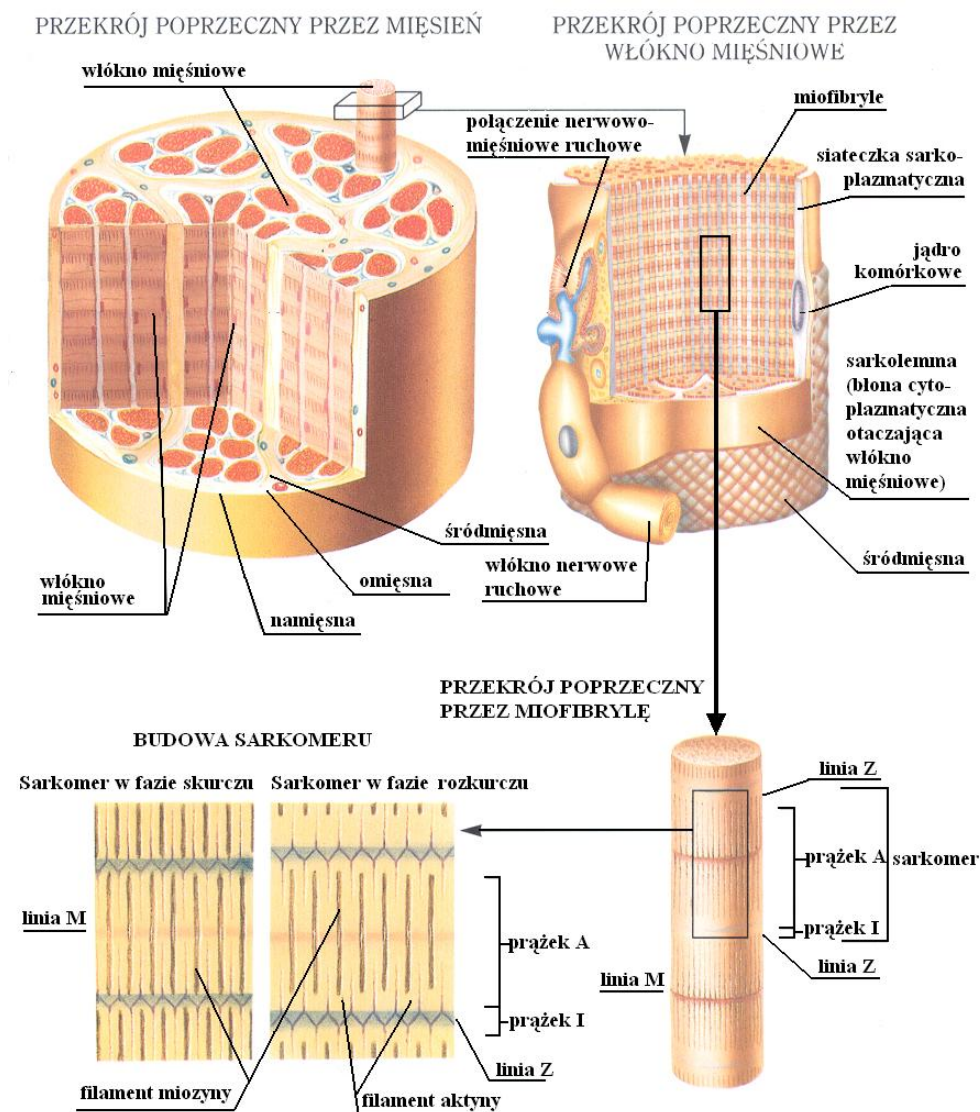
Mięsień jest otoczony osłoną, która składa się z warstwy zewnętrznej – *powięzi* (*fascie*), warstwy środkowej – *luźnej tkanki łącznej* (*paramysium*) i warstwy wewnętrznej – *namięsnej* (*epimysium*) (rys. 2.1). Luźna tkanka łączna pozwala na ślizganie się mięśnia wraz ze ściśle przylegającą namięsną wewnątrz cewki utworzonej przez powięź, która nie bierze udziału w skurczu mięśnia.

Pojedynczy mięsień zawiera liczne włókna mięśniowe, których długości wynoszą od kilku milimetrów do ponad 30 cm, zaś średnice – od 10 do 100  $\mu\text{m}$  (rys. 2.2.b) [47, 114]. Pojedyncze włókno mięśniowe jest osłonięte *warstwą tkanki łącznej* (*endomysium*), pod którą znajduje się *sarkolemma* (*błona cytoplazmatyczna*). Endomysium spaja kilka włókien mięśniowych w *pęczek mięśniowy*, który jest okryty warstewką tkanki łącznej – *śródmięsną*. Wszystkie pęczki mięśniowe są owinięte warstwą łącznotkankową – *omięsną* (*perymysium*), będącą osłoną namięsnej. Na końcach brzusca omięsna spaja się ze ścięgnami, tworząc w ten sposób połączenie mięśnia z kośćmi.

Włókno mięśniowe składa się z: *cytoplazmy* (*sarkoplazmy*) zawierającej *mitochondrie* (*sarkosomy*), w których są spalane substancje dla uzyskania energii; *sarkolemmy*; *włókienek kurczliwych* (*włókienek mięśniowych* zwanych *miofibrilami*), których liczba wynosi od kilkuset do kilku tysięcy i są one ułożone w sarkoplazmie równoległe do osi długiej włókna; licznych *jąder komórkowych*; *komórek satelitarnych*, uczestniczących w procesie regeneracji tkanki mięśniowej; połączenia z nerwowym włóknem ruchowym zwanego *synapsą nerwowo-mięśniową* (*połączeniem nerwowo-mięśniowo-ruchowym*) [6, 68, 114].

Sarkoplazma włókien mięśniowych zawiera zmienną liczbę miofibryli. Ze względu na stosunek między ilością sarkoplazmy a liczbą włókienek kurczliwych, wyróżnia się trzy

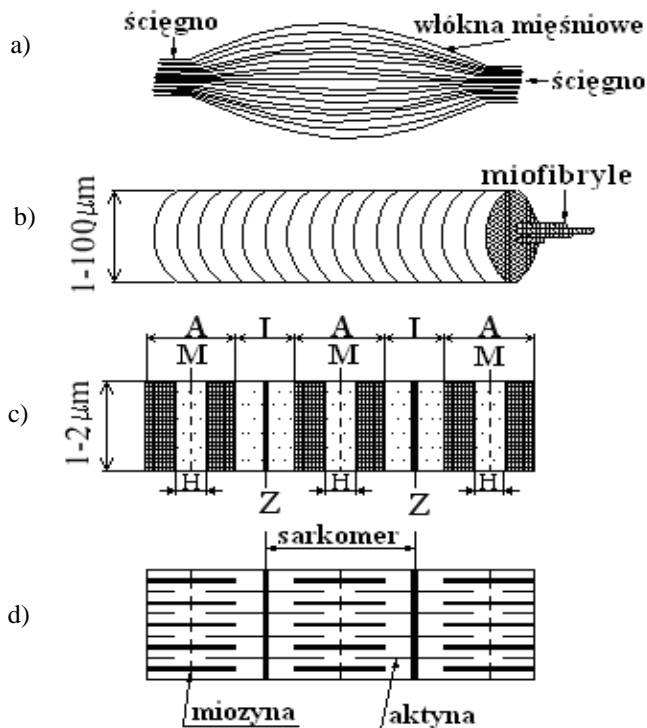
rodzaje włókien mięśniowych: *wolnokurczące* (czerwone lub *fazowe*), *szybkokurczące* (białe lub *toniczne*) i *pośrednie* [11, 114, 119, 125, 169].



Rys. 2.1. Szczegółowa budowa mięśnia szkieletowego poprzecznie prążkowanego [177]

Włókna wolnokurczące (typ *I*) charakteryzują się względnie dużą objętością sarkoplazmy, małą liczbą miofibryli oraz dużą zawartością mitochondrii. Włókna te występują głównie w mięśniach, które są stale czynne, zapewniają umiarkowany wysiłek i nie ulegają łatwo zmęczeniu. W porównaniu z włóknami białymi włókna wolnokurczące kurczą się wolniej i charakteryzują się dużą odpornością na zmęczenie. Czas narastania skurczu

w tych włóknach wynosi około 100 ms. Pobudzenie nerwowe o częstotliwości 25÷30 Hz wywołuje w nich zupełny skurcz tężcowy. Swoją barwę zawdzięczają zawartości dużej ilości *mioglobiny*, która jest odpowiednikiem hemoglobiny krwi.



Rys. 2.2. Schemat budowy:

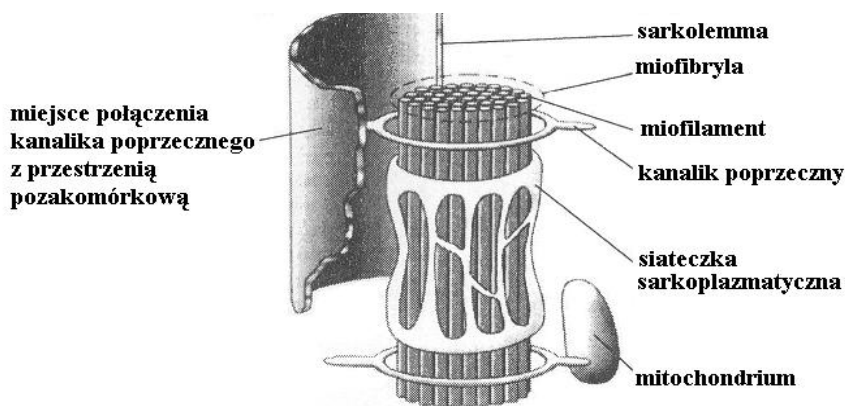
- a) mięśnia długiego, b) włókno mięśniowe,  
c) włókienka mięśniowe (miofibryle), d) sarkomera

Włókna szybko kurczące (typ *IIA*) zawierają względnie małą objętość sarkoplazmy, dużą liczbę miofibrili (co sprzyja ich gęstszemu upakowaniu) i małą liczbę mitochondrii. Znajdują się w mięśniach, które łatwo ulegają zmęczeniu i zapewniają bardzo wydajne, ale krótkotrwałe skurcze. Czas narastania skurczu we włóknach szybko kurczących wynosi około 50 ms. Impulsy nerwowe o częstotliwości 60÷80 Hz wywołują w nich zupełny skurcz tężcowy. Włókna szybko kurczące zawierają mniejszą ilość mioglobiny i dlatego są postrzegane jako włókna białe.

Własności włókien pośrednich (typ *IIB*) można scharakteryzować jako pośrednie, pomiędzy własnościami włókien wolno kurczących a szybko kurczących. Zawierają one mniejszą ilość mioglobiny i są stosunkowo jasne. Włókna te różnią się od włókien szybko kurczących tym, iż zawierają bardziej gęstą siatkę naczyń włosowatych oraz charakteryzują się większą odpornością na zmęczenie.

Z przedstawionej charakterystyki wynika, iż możliwości czynnościowe mięśnia zależą wyłącznie od zawartości poszczególnych rodzajów włókien mięśniowych.

Miofibryla (*komórka mięśniowa*) ma średnicę  $1\div 2\ \mu\text{m}$  (rys. 2.3) i składa się z: mitochondrium; *siateczki sarkoplazmatycznej* (*retikulum sarkoplazmatyczne*), która otacza całą miofibrylę i tworzy *cysterny końcowe* połączone *kanalikami poprzecznymi* (*kanalikami T*) z przestrzenią pozakomórkową; *wiązki miofilamentów*, wśród których znajdują się *filamenty grube* (zawierają białka *miozyny*) i *filamenty cienkie* (zawierają białka *aktyny*, *nebuliny*, *tropomiozyny* i *troponiny*).



Rys. 2.3. Budowa włókienek mięśniowych [114]

Miofibryle wykazują uporządkowaną strukturę zarówno wzdłuż włókien mięśniowych, jak i w przekrojach poprzecznych, w których tworzą *heksagonalny układ filamentów* [114, 119].

Włókienka mięśniowe oglądane w świetle polaryzacyjnym mikroskopu świetlnego wykazują *prążkowanie poprzeczne* (rys. 2.2.c i 2.2.d), które wynika z naprzemiennego ułożenia dwóch substancji: prążków *anizotropowych A* (podwójnie załamują światło i dlatego są widziane, jako odcinki ciemne) oraz ułożonych na tym samym poziomie prążków *izotropowych I* (pojedynczo załamują światło i dlatego są widziane, jako odcinki jasne).

Podstawową kurczliwą jednostką funkcyjną włókna mięśniowego jest *sarkomer* (*mion*), który jest powtarzającym się odcinkiem miofibryli (rys. 2.1 i rys. 2.2.d). Granicę sarkomeru wyznacza błona sarkolemma – *krążek Z*. Sarkomer jest zawarty między dwoma krążkami *Z*. Składa się on z prążka anizotropowego *A* oraz dwóch prążków izotropowych *I*. Prążek *A* jest pozornie podzielony przez *pasmo H* na dwie części. *Z* kolei pasmo to jest podzielone przez *warstwę białek stabilizujących M*.

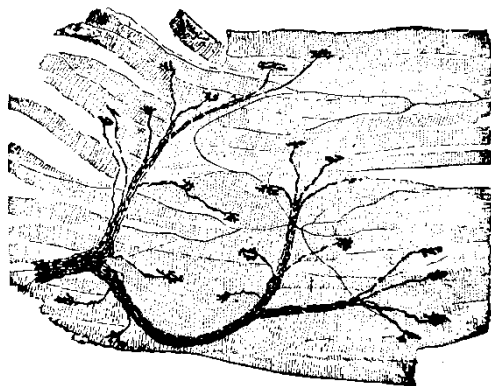
Zgodnie ze *ślizgową teorią skurczu* (nazywaną również *teorią mostków poprzecznych*, ang. *cross-bridges theory*) [114, 119], opracowaną przez H. Huxley'a, w trakcie skurczu filanty cienkie ślizgają się w kierunku środka sarkomeru (warstwy *M*) i wchodzi między filanty grube. W czasie skurczu filanty nie zmieniają swojej długości, a w stanie maksymalnego skurczu pasmo *H* zanika. Części białka miozyny (filamentu grubego) zwane „główkami”, wiążąc się z filamentami cienkimi, tworzą połączenia nazywane *mostkami* albo *mostkami poprzecznymi*. Siła skurczu mięśnia zależy od liczby i prędkości (częstości) powstania takich mostków. Wyniki omawianej teorii są jednak rozbieżne z wynikami badań doświadczalnych. *Z* tego względu proponowane są nowe modele wyjaśniające mechanizm zachodzenia skurczu mięśnia, np. model L. Skubiszak [120].



### 2.1.1.2. Pobudzenie i kurczenie się mięśnia

Bodźce nerwowe, które pobudzają włókna mięśniowe do skurczu, pochodzą od *neuronów ruchowych (motoneuronów)* znajdujących się w przednich rogach rdzenia kręgowego [11, 47, 114, 119].

Neuron ruchowy przed wejściem do mięśnia dzieli się na większą liczbę gałązek, które zaopatrują poszczególne włókna mięśniowe [6, 4, 119]. Gałązka neuronu ruchowego wraz z pobudzonymi przez nią włóknami mięśniowymi, których liczba wynosi od 3 do 2000, jest nazywana *jednostką motoryczną*. Gałązka neuronu ruchowego łączy się z okolicą środka błony włókna mięśniowego (rys. 2.4). Miejsce takiego połączenia, nazywane synapsą nerwowo-mięśniową, zawiera zgrubienia określane jako *stopki końcowe*, które tworzą *płytkę końcową* (rys. 2.5). Miejsce, w którym błona miofibryli dotyka płytki końcowej jest nazywane *płytką ruchową (płytką motoryczną)*. Synapsa nerwowo-mięśniowa jest podzielona na: część *presynaptyczną* (należy do gałązki neuronu ruchowego), część *postsynaptyczną* (należy do włókna mięśniowego) oraz *szczelinę synaptyczną* (oddziela część presynaptyczną od części postsynaptycznej).

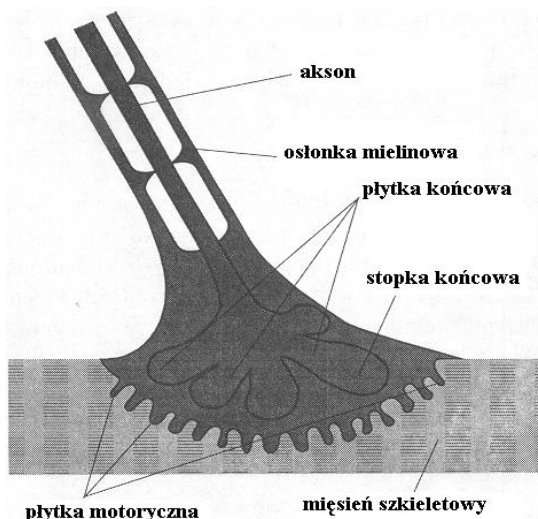


Rys. 2.4. Zakończenia nerwów ruchowych we włóknach mięśniowych mięśnia szkieletowego poprzecznie prążkowanego królika [47]

Liczba pobudzanych włókien mięśniowych zależy od czynności mięśnia. Mięśnie pełniące długotrwałe, ale mało dokładne czynności, są zaopatrywane w niewielką liczbę neuronów ruchowych, zaś mięśnie wykonujące szybkie i precyzyjne ruchy – w dużą liczbę neuronów ruchowych.

W stanie spoczynku włókna mięśniowe jego sarkolemma posiada *potencjał spoczynkowy* o wartości  $-90$  mV [6, 114, 119]. W chwili pojawienia się bodźca nerwowego (zwanego dalej bodźcem lub impulsem) następuje depolaryzacja błony presynaptycznej i uwalnianie się neuroprzekaźnika *acetylocholino* do szczeliny synaptycznej. Obecność neuroprzekaźnika inicjuje zmiany w części postsynaptycznej: pojawia się *potencjał postsynaptyczny*, który zmienia przepuszczalność jonową błony sarkolemmy i powoduje jej depolaryzację (gwałtowne odwrócenie się ładunków elektrycznych na jej błonie) [169]. Prowadzi to do obniżenia potencjału spoczynkowego włókna mięśniowego. Po przekroczeniu wartości *potencjału progowego* ( $-65$  mV) powstaje *potencjał czynnościowy*, który inicjuje uwalnianie się jonów wapnia  $Ca^{++}$  z siateczki sarkoplazmatycznej do wnętrza włókna mięśniowego. Przy odpowiednim stężeniu tych jonów filamenty cienkie zaczynają wzajemnie się

przesuwać, tworząc z filamentami grubymi mostki poprzeczne. Przy wystarczająco silnym bodźcu pobudzającym, potencjał sarkolemy włókna mięśniowego może się na krótko zmniejszyć do  $30\div 40$  mV, wywołując *potencjał iglicowy* [33, 119]. Po zaprzestaniu działania bodźca nerwowego mięsień przechodzi w *stan relaksacji*, którego mechanizm nie został jeszcze dokładnie wyjaśniony.



Rys. 2.5. Synapsa nerwowo-mięśniowa [114]

Wszystkie odcinki włókna mięśniowego kurczą się jednocześnie pod wpływem impulsu pobudzającego, który jest rozprawdany kanalikami *T* we wnętrzu komórek mięśniowych całego włókna (rys. 2.3). Zachowanie to jest określane prawem „wszystko albo nic” (*prawo Bowditcha*) i dotyczy zarówno pojedynczego włókna mięśniowego, jak i jednostki motorycznej [6, 114, 119, 176]. Prawo to oznacza, iż włókno mięśniowe zacznie się kurczyć dopiero wtedy, gdy impuls pobudzający przekroczy wartość progową bodźca. Wtedy siła skurczu tego włókna będzie rosła do maksymalnej wartości, która zależy od stanu włókna. W przypadku, gdy amplituda impulsu bodźca jest mniejsza od wartości progowej, włókno mięśniowe pozostaje w stanie spoczynku i jego siła skurczu jest zerowa. Wymiar pobudzonej jednostki motorycznej zależy od amplitudy bodźca: większa amplituda pobudzi do skurczu włókna mięśniowe o większych wymiarach, zaś mniejsza amplituda – włókna o mniejszych wymiarach. Stopniowe zwiększanie amplitudy, zaczynając od wartości zerowej, powoduje pobudzenie jednostek motorycznych o coraz większych wymiarach. Częstotliwość bodźca wyznacza częstość pobudzenia jednostki motorycznej lub włókna mięśniowego. Bodziec o amplitudzie wystarczającej do pobudzenia największej jednostki motorycznej jest nazywany *bodźcem supramaksymalnym*.

Odmienne od włókna mięśniowego, mięsień nie zachowuje się zgodnie z prawem „wszystko albo nic”, gdyż jego poszczególne włókna mięśniowe mogą znajdować się w różnych stanach pobudzenia lub spoczynku. Zachowanie to wynika z faktu, że sąsiadujące ze sobą włókna mięśniowe są pobudzane różnymi gałęziami neuronu ruchowego należącymi do różnych jednostek motorycznych, które zazwyczaj są pobudzane przez somatyczny układ nerwowy w różnych odstępach czasu [6].

Czas trwania skurczu włókna mięśniowego zależy od rodzaju włókna, jego wieku i temperatury. Od chwili zadziałania impulsu w przedziale czasu  $3\div 10$  ms nie rejestruje się żadnej siły w włóknie mięśniowym, chociaż potencjał błony komórkowej zaczyna się zmieniać. Ten przedział czasu jest nazwany *okresem utajonym (opóźniającym)* lub *opóźnieniem elektromechanicznym*. Po tym okresie rozpoczyna się faza skurczu, w którym siła włókna mięśniowego rośnie do wartości maksymalnej. Po zniknięciu bodźca rozpoczyna się faza *rozkurczu (relaksacji)* i siła włókna mięśniowego maleje do zera.

Przekazanie siły od włókien mięśniowych poprzez ścięgna do kości zachodzi dzięki *złączu mięśniowo-ścięgowemu*, które jest miejscem przechodzenia błon komórkowych włókien mięśniowych we włókna kolagenowo-elastynowe ścięgna. W miejscu tym filament aktyny połowki ostatniego sarkomeru jest połączony z włóknem ścięgna, które ma kształt stożka [11, 119]. Takie połączenia mechaniczne istnieją na końcach każdego włókna mięśniowego i są one miejscem zachodzenia procesów adaptacyjnych związanych z regulacją jego długości. Ponadto w sąsiedztwie złączy mięśniowo-ścięgowych przejawiają się skutki przeciążeń mechanicznych mięśni.

Liczba rozwiniętych *miofibrili*, znajdujących się w wybranej objętości (fragmencie) mięśnia, określa *siłę skurczu*, którą może wygenerować ta objętość. Właściwość ta jest nazywana *właściwością kurczliwą*.

Siła rozwijana przez mięsień jest proporcjonalna do poprzecznego przekroju włókien mięśniowych. Przekrój ten jest nazywany *przekrojem fizjologicznym (PCSA, ang. physiological cross section area)*. Jest on obliczany jako iloraz objętości mięśnia uzyskanej metodą wynurzenia i jego długości [31, 48]. Przekrój przechodzący poprzecznie do osi długiej i równoległy do osi krótkiej mięśnia jest nazywany *przekrojem anatomicznym*. Jeżeli przekrój fizjologiczny nie pokrywa się z przekrojem anatomicznym, to kierunek przebiegu włókien mięśniowych nie pokrywa się z kierunkiem osi długiej mięśnia. W mięśniach obłych (wrzecionowatych lub prostych) przekrój fizjologiczny pokrywa się z przekrojem anatomicznym. Natomiast w mięśniach półpierzastych i pierzastych przekrój fizjologiczny jest zawsze większy od przekroju anatomicznego.

W mięśniach obłych komórki kurczą się wzdłuż ich osi długiej. Dlatego w czasie skurczu mięsień ten staje się krótszy i grubszy, zachowując przy tym swoją objętość, a jego przyczep (połączenie z kością ruchomą) zostaje przeciągnięty w kierunku jego początku (połączenie z kością nieruchomą).

Do oszacowania siły mięśnia stosuje się *metodę skalowania siły*, która opiera się na założeniu, iż mięsień jest zbudowany z jednakowych sarkomerów o identycznych charakterystykach mechanicznych [16, 83, 91, 111, 114, 115, 119]. Metoda ta jest prosta, ale nie uwzględnia szeregu ważnych zjawisk zachodzących w mięśniu rzeczywistym [11, 78, 95]:

- 1) włókno mięśniowe zawiera sarkomery o różnych długościach, których charakterystyki statyczne i dynamiczne są odmienne;
- 2) włókna mięśniowe należące do jednej jednostki motorycznej posiadają różne długości i dlatego włókna kurczą się z różnymi prędkościami;
- 3) sąsiednie rozmieszczenie włókien mięśniowych należących do różnych jednostek motorycznych przyczynia się do wzajemnego oddziaływania, które ma wpływ na sposób kurczenia się włókien mięśniowych poszczególnych jednostek motorycznych.

Czynność mięśnia w żywym organizmie jest określana jako kombinacja „czystych” skurczy, wśród których można wyróżnić: *koncentryczny, ekscentryczny, izotoniczny (zupełny tężcowy i niezupełny tężcowy), izometryczny, auksotoniczny, izokinetyczny*. Wszystkie te skurcze szczegółowo omówiono w p. 3.1.7.

Liczne badania nad kurczliwością mięśnia potwierdzają, iż włókna mięśniowe są zdolne tylko do aktywnego kurczenia się, a ich rozkurcz jest jedynie powodowany: zmęczeniem mięśnia, oddziaływaniem siły rozciągającej (np. siły grawitacji), zanikaniem pobudzenia wewnętrznego, działaniem mięśnia lub grupy mięśni antagonistycznych [11]. Z takiego zachowania mięśnia wynika następujący wniosek: mięsień zdrowy może tylko „ciągnąć” i nie potrafi „pchać”. Z tego powodu podczas zmiany położenia kości ruchomej, która się przemieszcza w stronę skrócenia mięśni zaczepionych do niej, mięśnie niepobudzone muszą samoczynnie zmniejszać swoją długość. Takie zachowanie pozwala mięśniom unikać stanu luźnego zwisania, który nie jest właściwy dla zdrowych mięśni organizmu. Samoczynne zmniejszenie długości mięśnia wspomaga stan wstępnego rozpięcia (tzn. trwałego wydłużenia), który inicjuje jego częściowy skurcz. W fizjologii jest on nazywany *napięciem spoczynkowym (tonusem)*. Napięcie to jest utrzymywane przez całą ontogenezę organizmu ludzkiego i zapewnia szybkie przejście mięśnia w stan aktywnego skurczu bez żadnego wstępnego opóźnienia [176].

### 2.1.1.3. Zaburzenia funkcjonowania mięśnia

Klasyfikacja zaburzeń funkcjonowania mięśnia o podłożu *miogennym*, związana z chorobą tkanki mięśniowej lub *neurogennym* wynikającym z uszkodzenia nerwów, jest bardzo rozległa [68]. Poniżej omówiono kilka najczęściej występujących zaburzeń, które należałoby odzwierciedlić podczas modelowania zachowania mięśni.

Szywność mięśnia występuje po długotrwałym i intensywnym wysiłku na skutek nagromadzenia produktów ubocznych metabolizmu (głównie kwasu mlekowego). Jest ona przyczyną zmniejszenia siły i prędkości skurczu włókien mięśniowych.

*Odnierwienie mięśnia* ma miejsce, gdy przepływ bodźców ze strony układu nerwowego (obwodowego i ośrodkowego) zostaje całkowicie przerwany. Następuje wówczas szybki zanik czynności kurczliwych mięśnia i wrasta jego szywność.

Jeżeli zwiózcały mięsień przebywa w *stanie unieruchomionym*, to dochodzi do: *atrofii tkanki mięśniowej* (szczególnie widoczne zanikanie liczby sarkomerów na złączy nerwowo-mięśniowym, zmiany w omięsnej itp.), zwiększenia jej szywności i zmniejszenia właściwości kurczliwych [78]. Zaburzenie to może się pojawić w czasie zabiegu chirurgicznego, gdy przyczep mięśnia po zbliżeniu do jego początku znajdzie się w stanie luźnego zwisania. Z kolei podczas unieruchomienia mięśnia rozciągniętego będzie się zwiększała długość jego włókien mięśniowych. Spowoduje to wzrost liczby sarkomerów na złączy nerwowo-mięśniowym, przyczyniając się do wzrostu właściwości kurczliwych mięśnia.

W czasie występowania *mimowolnego i nadmiernego wzrostu napięcia mięśnia* pod wpływem różnych bodźców nerwowych może zachodzić *kurcz (spazm)* mięśnia powodujący uczucie bólu. Kurcz ten może być *toniczny* (przez pewien okres utrzymuje się wzmożone napięcie mięśni) lub *kloniczny* (szybko i naprzemiennie występujące po sobie okresy skurczu i rozkurczu).

### 2.1.1.4. Narządy pomocnicze mięśni

Dla prawidłowego funkcjonowania mięśni w organizmie człowieka znajdują się narządy pomocnicze: *powięzie, pochewki ścięgien, kaletki maziowe, trzeczszki, ciała tłuszczowe oraz bloczki* [125].

Powięzie są tkankami łącznymi, które otaczają poszczególne mięśnie, grupy mięśni oraz całą mięśniówkę. Posiadają zmienną grubość oraz mają równoległy układ włókien, zazwyczaj prostopadły do kierunku działania włókien mięśniowych. Powięzie nie biorą

udziału w ruchach mięśni, ale pozwalają oddzielić funkcjonowanie poszczególnych grup mięśniowych.

Pochewki ścięgien (*vaginae tendinum*) otaczają ścięgna i ułatwiają ich poślizg. Zbudowane są one z zewnętrznej warstwy włóknistej i wewnętrznej warstwy maziowej.

Kaletki maziowe (*bursae synoviales*) występują w miejscach, w których konieczne jest zmniejszenie tarcia i ułatwienie ślizgania się powierzchni narządów względem siebie. Składają się one z zewnętrznej warstwy włóknistej i wewnętrznej warstwy maziowej.

Trzeszczki (*ossa sesamoidea*) zmieniają kierunek przebiegu ścięgien i znajdują się obok przyczepów mięśni, których ścięgna wywierają znaczący nacisk na kości.

Ciała tłuszczowe (*corpora adiposa*) znajdują się między poszczególnymi mięśniami i zmniejszają ich tarcie.

Bloczki (*trochlea*) są to miejsca owinięcia ścięgien, które zmieniają kierunek oddziaływania mięśnia. Mogą one być zbudowane z kości lub chrząstki.

### 2.1.2. Zespół mięśni szkieletowych w układzie ramię-przedramię

W monografii są rozpatrywane zagadnienia związane z modelowaniem zachowania mięśni w czasie obrotu przedramienia względem nieruchomego ramienia w płaszczyźnie strzałkowej. Obroty te są związane z ruchami zginania (*flexio*) i prostowania (*extensio*) przedramienia w stawie łokciowym.

#### 2.1.2.1. Mięśnie ramienia i przedramienia

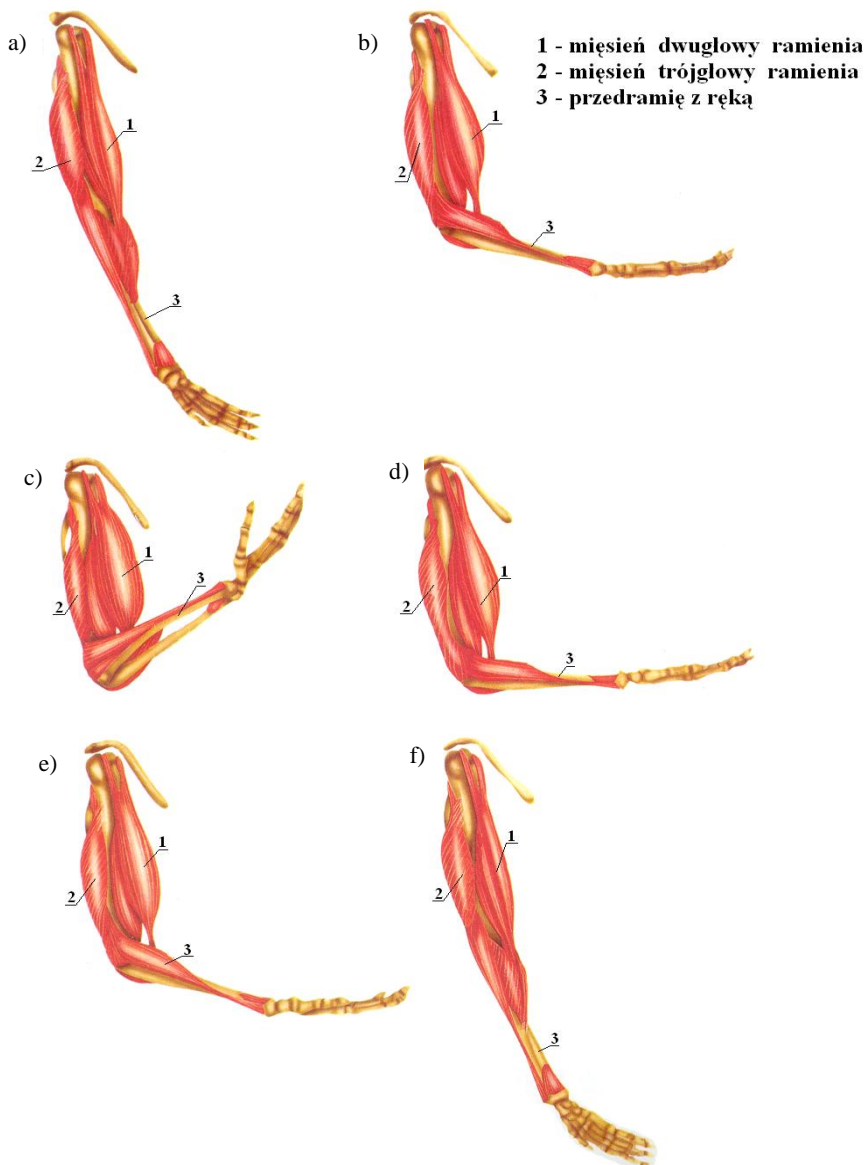
W celu zamodelowania ruchów zginania-prostowania przedramienia wykorzystano opis anatomiczny przedstawiony w [125]. Przy zginaniu przedramienia współdziałają ze sobą: *mięsień ramienny* (*musculus brachialis*), *głowa krótka* (*caput breve*) i *głowa długa* (*caput longum*) *mięśnia dwugłowego ramienia* (*musculus biceps brachii*), *mięsień nawrotny obły* (*musculus pronator teres*), *mięsień prostownik promieniowy długi nadgarstka* (*musculus extensor carpi radialis longus*) oraz *mięsień ramiennie-promieniowy* (*musculus brachioradialis*). Natomiast mniejsze znaczenie mają: *mięsień zginacz palców powierzchniowy* (*musculus flexor digitorum superficialis*), *mięsień prostownik promieniowy krótki nadgarstka* (*musculus extensor carpi radialis brevis*) i *mięsień zginacz nadgarstka promieniowy* (*musculus flexor carpi radialis*).

W czasie prostowania jedynym mięśniem, który ma znaczenie jest mięsień trójgłowy ramienia (*musculus triceps brachii*), a szczególnie jego głowa boczna (*caput laterale*) i głowa przyśrodkowa (*caput mediale*), natomiast głowa długa (*caput longum*) dopiero w dalszej kolejności. Przy tym mięsień łokciowy (*musculus anconeus*) ma bardzo mały udział w tej czynności.

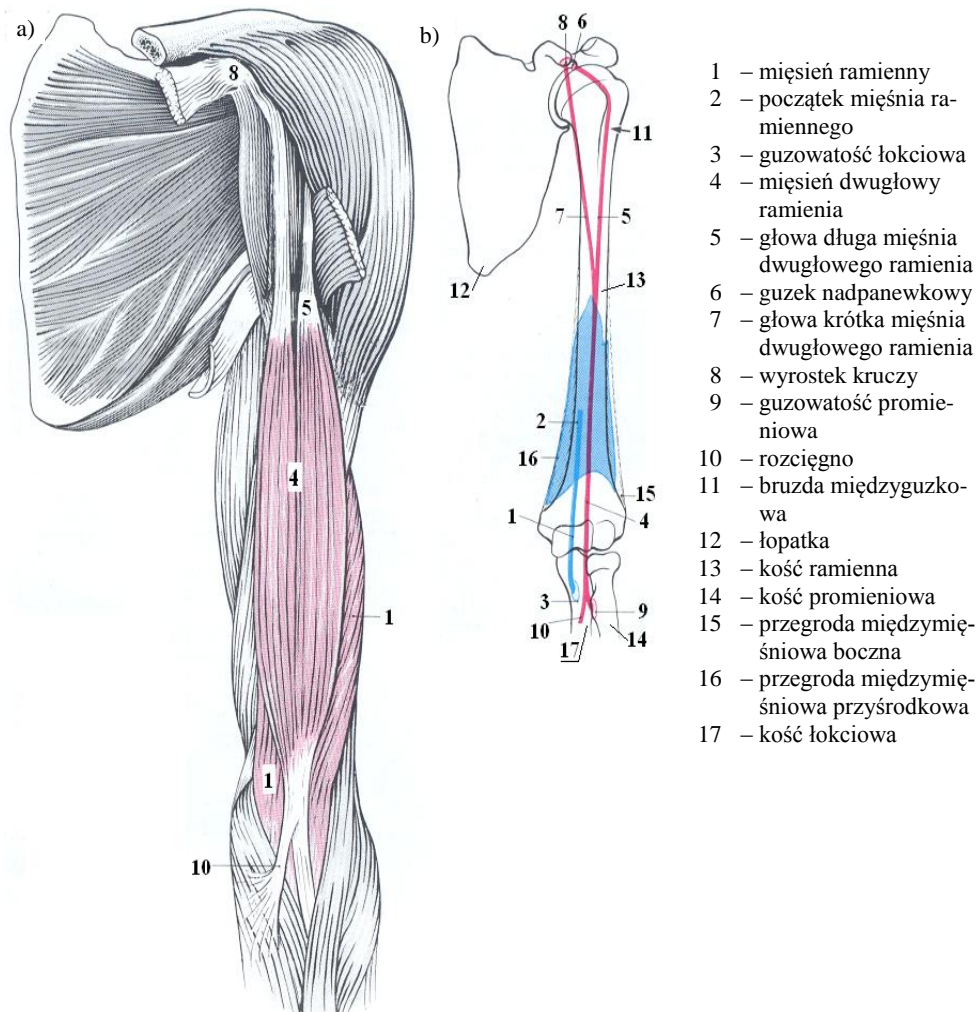
Rozpatrując obrót przedramienia względem nieruchomego ramienia (rys. 2.6), można wyróżnić najbardziej charakterystyczne etapy tego ruchu, które są spowodowane działaniem licznej grupy mięśni [177]:

- a) przedramię w spoczynku (mięsień trójgłowy ramienia i mięsień dwugłowy ramienia są w rozkurczu);
- b) przedramię w lekkim zgięciu (mięsień trójgłowy ramienia i mięsień dwugłowy ramienia są w częściowym skurczu);
- c) przedramię w maksymalnym zgięciu (mięsień trójgłowy ramienia w całkowitym rozkurczu a mięsień dwugłowy ramienia w całkowitym skurczu);
- d) przedramię w fazie prostowania (mięsień trójgłowy ramienia i mięsień dwugłowy ramienia są w częściowym skurczu);

- e) przedramię w fazie prostowania (mięsień trójgłowy ramienia silniej skurczony, a mięsień dwugłowy ramienia jest bardziej rozkurczony w porównaniu z etapem d);
- f) przedramię w spoczynku (mięsień trójgłowy ramienia i mięsień dwugłowy ramienia są w stanie spoczynku).



Rys. 2.6. Etapy obrotu przedramienia (objaśnienia w tekście) [177]



Rys. 2.7. Mięśnie ramienia lewej kończyny górnej: a) widok z przodu; b) schemat obrazujący ich początki, przebiegi i przyczepy [125]

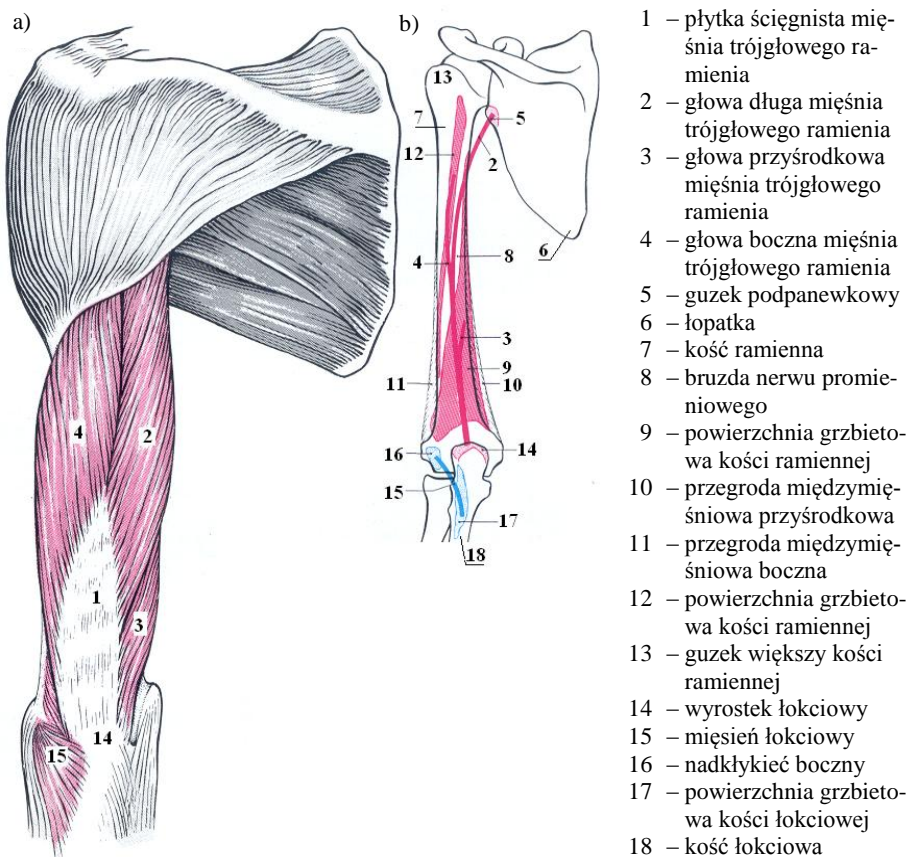
- Na rys. 2.7 przedstawiono oglądane z przodu mięśnie ramienia lewej kończyny górnej:
- początek (2) mięśnia ramiennego (1) znajduje się na dolnej połowie powierzchni przedniej *kości ramiennej (humerus)* (13), a jego przyczep jest zlokalizowany na *guzowatości łokciowej (tuberositas ulnae)* (3) *kości łokciowej (ulna)* (17) oraz na torebce stawowej; ze względu na takie rozmieszczenie jest nazywany *mięśniem stawowym (musculus articularis)*; mięsień ramienny jest mięśniem jednostawowym i najważniejszym zginaczem w *stawie łokciowym (articulatio cubiti)* [11]; jego pełne działanie uwidacznia się przy podnoszeniu ciężkich ładunków, przy czym może on powodować wystąpienie lekkiego tyłozgięcia w *stawie ramiennym (articulationis humeri)*;
  - początek głowy długiej (5) mięśnia dwugłowego ramienia (4) jest zlokalizowany na *guzku nadpanewkowym (tuberculum supraglenoidale)* (6), który znajduje się na *łopatce*

(*scapula*) (12), a początek głowy krótkiej (7) – na *wyrostku kruczym (processus coracoideus)* (8) łopatki; obie głowy w połowie długości kości ramiennej (13) spajają się brzościami, ale wytwarzają dwa osobne ścięgna przyczepu: silniejsze ścięgno głowy długiej przyczepia się pod kaletką dwugłowo-promieniową do *guzowatości promieniowej (tuberositas radii)* (9) na *kości promieniowej (radius)* (14); słabsze ścięgno płaskie (10) głowy krótkiej przechodzi w powięź przedramienia po stronie kości łokciowej (17); przy tym ścięgno płaskie (10), nazywane *rozciągnem (aponeurosis)*, przedstawia sobą zmodyfikowane ścięgno mięśniowe mające postać szerokiej i płaskiej blaszki; głowa długa przebiega przez staw ramienny i jest położona w *bruździe międzyguzkowej (sulcus intertubercularis)* (11) oraz w pochewce maziowej międzyguzkowej na kości ramiennej (13), wykorzystując *głowę tej kości (caput humeri)* jako *hypomochlion* (tzn. podpórkę zmieniającą kierunek działania sił włókien mięśniowych); mięsień dwugłowy ramienia jest mięśniem dwustawowym, gdyż działa na staw ramienny (głowa długa odwodzi ramię i obraca go do wewnątrz, zaś głowa krótka go przywodzi) i na staw łokciowy (obie głowy uczestniczą w zginaniu i odwracaniu przedramienia).

Na rys. 2.8 przedstawiono oglądane z tyłu mięśnie ramienia lewej kończyny górnej:

- mięsień trójgłowy ramienia składa się z głowy długiej (2), głowy przyśrodkowej (3) i głowy bocznej (4); początek głowy długiej (2) znajduje się na *guzku podpanewkowym (tuberculum infraglenoidale)* (5) łopatki (6); początek głowy przyśrodkowej (3) jest zlokalizowany na grzbietowej powierzchni (9) kości ramiennej (7) pod *bruźdą nerwu promieniowego (sulcus nervus radialis)* (8), między *przegrodą między mięśniową przyśrodkową (septum intermusculare mediale)* (10), a *przegrodą między mięśniową boczną (septum intermusculare laterale)* (11); początek głowy bocznej (4) znajduje się na grzbietowej powierzchni kości ramiennej (12) poniżej jej *guzka większego (tuberculum maius)* (13); głowa przyśrodkowa (3) jest w znacznym stopniu przykryta głową boczną (4) i głową przyśrodkową (3); te trzy głowy tworzą płytkę ścięgnistą (1) przechodzącą we wspólne ścięgno przyczepu, który znajduje się na *wyrostku łokciowym (olecranon ulnae)* (14) i na tylnej ścianie torebki stawowej; w zakresie swojej głowy długiej mięsień trójgłowy ramienia jest mięśniem dwustawowym, gdyż oddziałuje na staw ramienny przy tyłozgięciu i przywodzeniu ramienia, a na staw łokciowy – jako prostownik; z kolei w zakresie głowy bocznej i głowy przyśrodkowej jest mięśniem jednostawowym, bowiem głowy te oddziałują wyłącznie na staw łokciowy jako prostowniki; część ścięgna przyczepu mięśnia trójgłowego ramienia przechodzi w powięź przedramienia i może całkowicie przykryć mięsień łokciowy (15); w pobliżu przyczepu tego mięśnia na wyrostku łokciowym występuje kilka kałek;
- początek mięśnia łokciowego (15) znajduje się na grzbietowej powierzchni *nadkłykcia bocznego (epicondylus lateralis)* (16) kości ramiennej (7) i na więzadle pobocznym promieniowym; jego przyczep jest zlokalizowany na bliższej jednej czwartej powierzchni grzbietowej (17) kości łokciowej (18); przylega do głowy przyśrodkowej mięśnia trójgłowego ramienia i wzmacnia jego działanie przy prostowaniu, dzięki napięciu torebki stawowej. Jest mięśniem jednostawowym, bowiem oddziałuje wyłącznie na staw łokciowy.





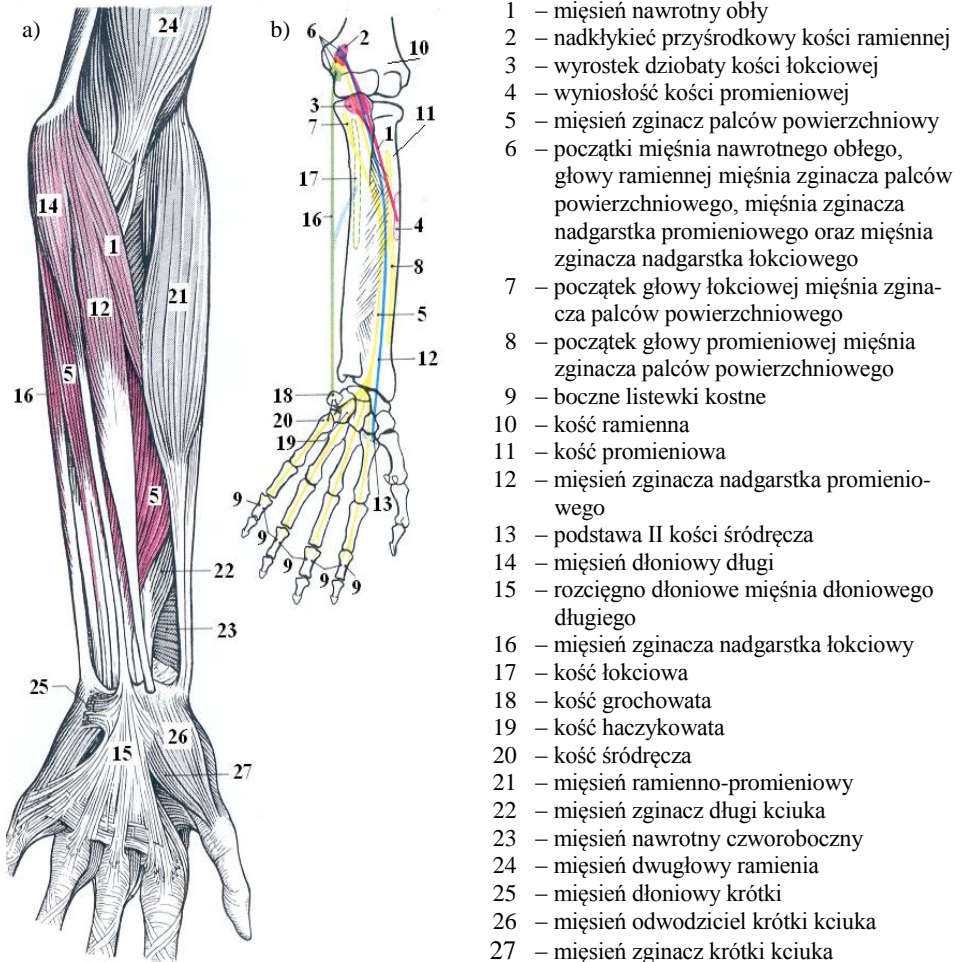
Rys. 2.8. Mięśnie ramienia lewej kończyny górnej: a) widok z tyłu; b) schemat obrazujący ich początki, przebiegi i przyczepy [125]

Na rys. 2.9 przedstawiono powierzchnię grupę mięśni przedramienia lewej kończyny górnej:

- mięsień nawrotny obły (1) składa się z *głowy ramiennej* (*caput humerale*) i *głowy łokciowej* (*caput ulnare*); początek głowy ramiennej znajduje się na *nadkłykciu przyśrodkowym* (*epicondylus medialis*) (2) kości ramiennej (10) i na przegrodzie międzymięśniowej przyśrodkowej, zaś początek głowy łokciowej – na *wyrostku dziobatym* (*processus coronoideus*) (3) kości łokciowej (17); dwie głowy spajają się w całość, której przyczep jest zlokalizowany na wyniosłości *tuberositas pronatoria* (4) kości promieniowej (11); jest mięśniem jednostawowym, bowiem współdziała z innymi mięśniami przy zginaniu kończyny w stawie łokciowym oraz nawraca przedramię; napinanie tego mięśnia blokuje rotację zewnętrzną przedramienia spowodowaną skurczem mięśnia dwugłowego ramienia;
- mięsień zginacz palców powierzchniowy (5) składa się z *głowy ramiennej* (*caput humerale*), *głowy łokciowej* (*caput ulnare*) i *głowy promieniowej* (*caput radiale*); początki trzech głów tego mięśnia znajdują się: dla głowy ramiennej – na nadkłykciu przyśrodkowym (2) kości ramiennej (10), dla głowy łokciowej – na wyrostku dziobatym (3) kości

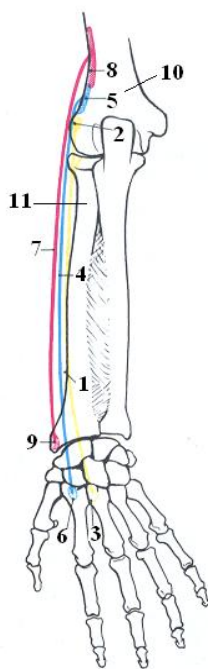
łokciowej (17), zaś dla głowy promieniowej (8) – na kości promieniowej (11); pomiędzy głowami jest rozpięty łuk ścięgniasty, który jest łącznikiem jego trzech głów oraz krzyżuje się z nerwem ośrodkowym i naczyniami łokciowymi; wspólna pochewka ścięgniasta otacza jego cztery ścięgna przyczepu; są one ułożone na bocznych listewkach kostnych (9) i pośrodku paliczków środkowych drugiego, trzeciego, czwartego i piątego palca; jest mięśniem dwustawowym, bowiem działa jako bardzo słaby zginacz na staw łokciowy oraz jako bardzo silny zginacz na staw ręki i stawy śródrečno-paliczkowe; przy maksymalnym zgięciu w stawach ręki staje się on niewydolny;

- początek *mięśnia zginacza nadgarstka promieniowego* (12) znajduje się na nadkłykciu przyśrodkowym (2) kości ramiennej (10) i na powięzi powierzchniowej przedramienia; swój przyczep posiada na powierzchni dłoniowej podstawy II *kości śródrečna* (os metacarpale) (13); jest mięśniem dwustawowym, ponieważ działa jako słaby zginacz i odwracacz w stawie łokciowym oraz współdziała jako silny zginacz dłoniowy w stawach ręki.



Rys. 2.9. Mięśnie przedramienia lewej kończyny górnej: a) widok grupy powierzchniowej; b) schemat obrazujący ich początki, przebiegi i przyczepy [125]

Na rys. 2.9 przyjęto dodatkowe oznaczenia: mięsień ramiennie-promieniowy (21); mięsień dwugłowy ramienia (24); *mięsień dłoniowy długi* (*musculus palmaris longus*) (14), który przechodzi w rozciągnięto dłoniowe (15); *mięsień zginacza nadgarstka łokciowego* (*musculus flexor carpi ulnaris*) (16), który przyczepia się do *kości grochowatej* (*os pisiforme*) (18), *kości haczykowej* (*os humatum*) (19) i do IV kości śródreżca (20); *mięsień zginacza długiego kciuka* (*musculus flexor pollicis longus*) (22); *mięsień nawrotny czworoboczny* (*musculus pronator quadratus*) (23); *mięsień dłoniowy krótki* (*musculus palmaris brevis*) (25); *mięsień odwodziciel krótki kciuka* (*musculus abductor pollicis brevis*) (26); *mięsień zginacza krótki kciuka* (*musculus flexor pollicis brevis*) (27). W zginaniu-prostowaniu przedramienia nie biorą udziału następujące mięśnie: dłoniowy długi, zginacz nadgarstka łokciowy, zginacz długi kciuka, nawrotny czworoboczny, dłoniowy krótki, odwodziciel krótki kciuka oraz zginacz krótki kciuka.



- 1 – mięsień prostownik promieniowy długi nadgarstka
- 2 – nadkłykiec boczny kości ramiennej
- 3 – podstawa III kości śródreżca
- 4 – mięsień prostownik promieniowy krótki nadgarstka
- 5 – grzebień nadkłykciowy boczny kości ramiennej
- 6 – podstawa II kości śródreżca
- 7 – mięsień ramiennie-promieniowy
- 8 – grzebień boczny kości ramiennej
- 9 – wyrostek rylcowaty kości promieniowej
- 10 – kość ramiennea
- 11 – kość promieniowa

Rys. 2.10. Schemat obrazujący początki, przebiegi i przyczepy mięśni należących do grupy promieniowej przedramienia lewej kończyny górnej [125]

Na rys. 2.10 zamieszczono schemat przedstawiający początki, przebiegi i przyczepy mięśni należących do grupy promieniowej przedramienia lewej kończyny górnej:

- początek mięśnia prostownika promieniowego długiego nadgarstka (1) znajduje się na: nadkłykiu bocznym (2) kości ramiennej (10), więzadle pobocznym promieniowym i więzadle pierścieniowym kości promieniowej; jego przyczep jest zlokalizowany na podstawie III *kości śródreżca* (*basis ossis metacarpalis III*) (3); jest mięśniem dwustawowym, bowiem oddziałuje na staw łokciowy jako słaby zginacz oraz na stawy ręki (tzn. w swoim pośrednim ustawieniu prowadzi do odwodzenia łokciowego ręki i zgina ją grzbietowo);

- początek mięśnia prostownika promieniowego krótkiego nadgarstka (4) znajduje się na *grzebieniu nadkłykciowym bocznym kości ramiennej (crista supracondylaris lateralis humeri)* (5) i na przegrodzie międzymięśniowej bocznej, która jest związana z nadkłykiem bocznym; jego przyczep jest zlokalizowany na podstawie II *kości śródrezcza (basis ossis metacarpalis II)* (6); wspólnie z mięśniem prostownikiem promieniowym krótkim nadgarstka przebiega przez drugą pochewkę ścięgien; jest mięśniem dwustawowym, ponieważ działa na staw łokciowy (jako słaby zginacz i jako słaby nawracacz przy zgiętym ramieniu oraz odwracacz przy wyprostowanym ramieniu) i na stawy ręki (powoduje zgięcie grzbietowe i odwodzenie promieniowe);
- początek mięśnia ramiennie-promieniowego (7) leży na grzebieniu bocznym kości ramiennej (8) i na przegrodzie międzymięśniowej bocznej; jego przyczep jest zlokalizowany na powierzchni *wyrostka rylcowatego (processus styloideus)* (9) kości promieniowej (11); jest mięśniem jednostawowym, gdyż działa jako zginacz w położeniu pośrednim między odwróceniem a nawróceniem. Jego czynność jest słaba przy powolnych ruchach przedramienia w położeniu odwrócenia.

Dla mięśni mających znaczący wpływ na wykonywanie ruchów zginania-prostowania przedramienia w tab. 2.1 podano dane o: typach mięśni ze względu na przebieg włókien mięśniowych odnośnie ich osi dłuższej (*P* – dla mięśnia pierzastego, *O* – dla mięśnia obłego); oddziaływaniu na poszczególne stawy (RA – na staw ramienny, ŁO – na staw łokciowy, RE – na stawy ręki) [48].

Tablica 2.1

Dane o mięśniach układu ramię-przedramię

Mięsień	Typ mięśnia	Oddziaływanie na stawy
Głowa krótka mięśnia dwugłowego ramienia	O	RA i ŁO
Głowa długa mięśnia dwugłowego ramienia	O	RA i ŁO
Mięsień ramienny	O	ŁO
Mięsień ramiennie-promieniowy	O	ŁO
Mięsień prostownik nadgarstka promieniowy długi	O	ŁO i RE
Mięsień nawrotny obły	O	ŁO
Głowa boczna mięśnia trójgłowego ramienia	P	ŁO
Głowa długa mięśnia trójgłowego ramienia	P	RA i ŁO
Głowa przyśrodkowa mięśnia trójgłowego ramienia	P	ŁO

### 2.1.2.2. Budowa stawu łokciowego

Staw jest elementem zapewniającym połączenie, utrzymanie, stabilizację i obrót kości względem siebie. Staw łokciowy jest stawem ruchowym, gdyż pozwala na zmianę położenia kąтового sąsiadujących ze sobą kości, których powierzchnie są dopasowane do siebie i zamknięte torebką stawową (będącą tkanką elastyczną i nieograniczającą ruchu w stawie). Wnętrze torebki stawowej (*jama stawowa*) jest wypełnione *mazią stawową*, która zwilża powierzchnie kości (cienkie warstwy *chrząstki szklistej*) i zmniejsza ich wzajemne tarcie. Według [11] współczynnik tarcia tkanki chrzęstnej (pokrywającej powierzchnie stawowe kości) przy typowym obciążeniu 500 kPa wynosi 0,0026, zaś zgodnie z [112] musi on posiadać wartość 0,015.

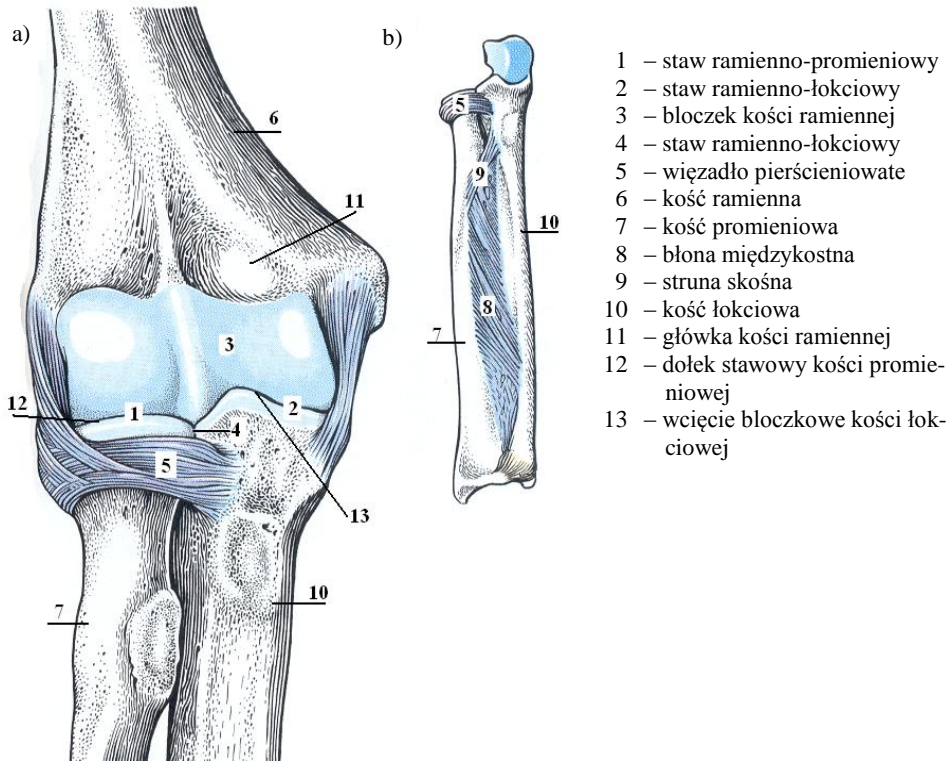
Staw łokciowy składa się z trzech kości położonych wewnątrz torebki stawowej, tworzących trzy składowe: staw ramiennie-promieniowy (*articulatio humeroradialis*), staw ramiennie-łokciowy (*articulatio humeroulnaris*) i staw promieniowo-łokciowy (*articulatio radioulnaris*) [125]. Jednocześnie, współdziałając między sobą, te trzy stawy zapewniają ruchy zginania i prostowania wraz z ruchami obrotowymi, tzn. odwracanie (*supinatio*) i nawracanie (*pronatio*) kości promieniowej wokół kości łokciowej.

Staw łokciowy jest zabezpieczony kostnie i więzadłowo. Zabezpieczenie kostne wynika z dopasowania bloczka kości ramiennej do *wcięcia bloczkowego (incisura)* kości łokciowej. Zabezpieczenie więzadłowe zachodzi poprzez *więzadło pierścieniowate kości promieniowej (ligamentum anulare radii)*, *więzadło czworoboczne (ligamentum quadratum)* oraz *więzadło poboczne (ligamenta collateralia)*, które dzieli się na *więzadło poboczne łokciowe (ligamentum collaterale ulnare)* i *więzadło poboczne promieniowe (ligamentum collaterale radiale)*. Więzadła, ze względu na swoją małą rozciągliwość i nadzwyczajną wytrzymałość, stabilizują staw, zapewniają przyleganie powierzchni stawowych oraz ograniczają zakres ruchu przedramienia [11, 176].

Na rys. 2.11.a przedstawiono widziany od przodu staw łokciowy, a na rys. 2.11.b – błonę międzykostną:

- staw ramiennie-promieniowy (1) jest utworzony przez *główkę (capitulum)* (11) *kości ramiennej* (6) i *dolek stawowy kości promieniowej (fovea articularis capitalis radii)* (12); takie przestrzenne połączenie kości tworzy staw zawiasowy oraz zapewnia ruchy zginania i prostowania przedramienia;
- staw ramiennie-łokciowy (2) jest zawarty pomiędzy *bloczkiem kości ramiennej (trochlea humeri)* (3) a *wcięciem bloczkowym kości łokciowej (incisura trochlearis ulnae)* (13); jest stawem zawiasowym i zapewnia ruchy zginania oraz prostowania przedramienia.
- staw promiennie-łokciowy (4) jest usytuowany między *obwodem stawowym kości promieniowej (circumferentia articularis radii)*, a *wcięciem promieniowym kości łokciowej (incisura radialis ulnare)* i więzadłem pierścieniowatym (5); takie połączenie kości zapewnia ruchy nawracania i odwracania przedramienia;
- pomiędzy kością promieniową (7) a łokciową (10) jest rozpięta bardzo mocna *błona międzykostna (membrana interossea)* (8), która umożliwia równoległe przesuwanie się tych kości i przeciwdziała uciskowi jednej kości na drugą; *struna skośna (chorda obliqua)* (9), stanowiąca skośnie przebiegający pęczek włókien, powoduje wzmocnienie błony międzykostnej (8).

Ramię względem przedramienia tworzy następujące kąty: maksymalny kąt zgięcia (wynosi 35°, bowiem następuje hamowanie częściami miękkimi) i maksymalny kąt wyprostowania (wynosi 168,5°).

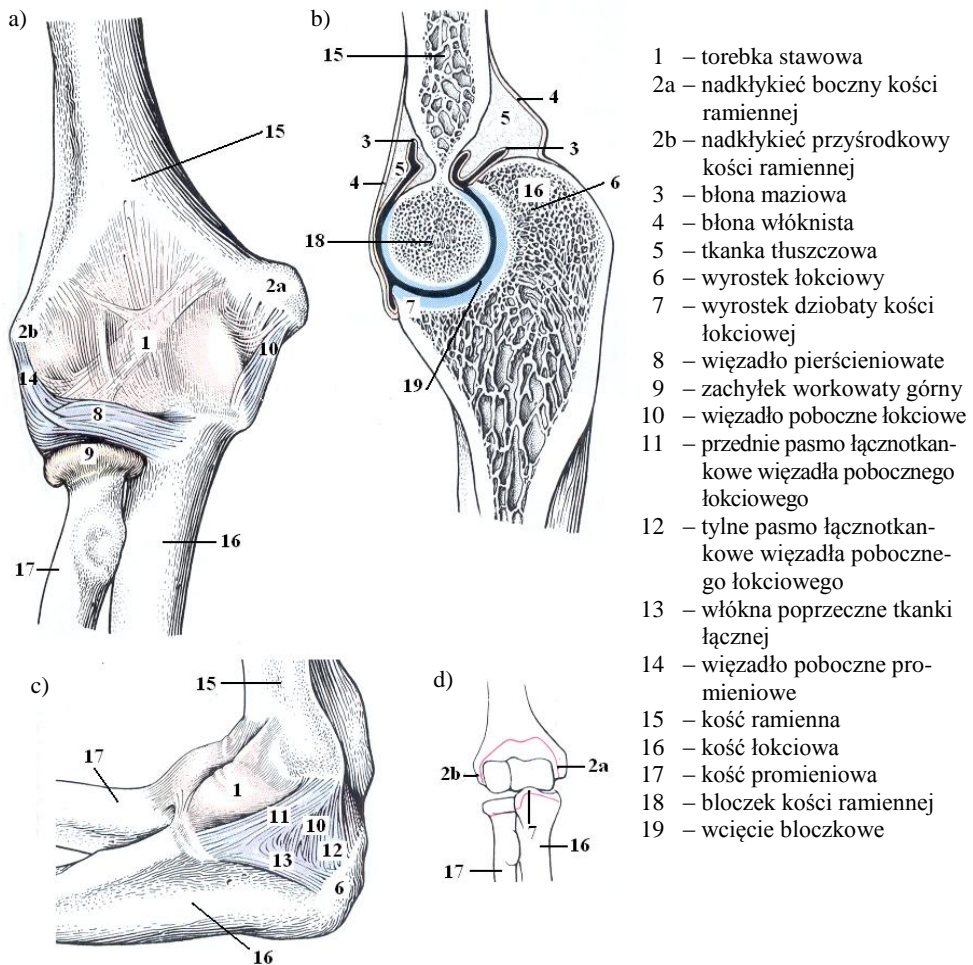


Rys. 2.11. Staw łokciowy: a) widok z przodu, b) błona międzykostna [125]

Na rys. 2.12 przedstawiono składowe stawu łokciowego:

- wiotka i cienka torebka stawowa (1) pokrywa wszystkie trzy składowe stawu łokciowego; w celu unikania wkleszczenia się torebki stawowej pomiędzy powierzchnie tworzących staw kości, do jej środka wnikają mięśnie (mięsień ramienny i ewentualnie mięsień trójgłowy ramienia), które powodują napinanie tej torebki; nadkłykiec boczny (2a) i nadkłykiec przyśrodkowy (2b) nie są pokryte torebką stawową (1); na kości łokciowej (16) torebka stawowa (1) przyczepia się do: brzegu (tzn. wzdłuż) wcięcia bloczkowego (19), wierzchołka wyrostka łokciowego (6) i wyrostka dziobatego (7), które znajdują się wewnątrz torebki (1); na kości promieniowej (17) torebka stawowa (1) przyczepia się poniżej więzadła pierścieniowatego (8), tworząc uwypuklenie *zachyłek workowaty górny (recessus sacciformis superior)* (9), który zabezpiecza ruch obrotowy tej kości;
- więzadło pierścieniowate (8) ma swój początek na kości łokciowej (16), a przyczep na głowie kości promieniowej (17).; na jego wewnętrznej powierzchni znajduje się tkanka chrzęstna, która stanowi ruchomą panewkę kości promieniowej (17);
- więzadło czworoboczne (na rys. 2.12.a znajduje się pod torebką stawową (1)) łączy szyjkę kości promieniowej (17) z wcięciem promieniowym kości łokciowej (16);
- w ścianie torebki stawowej (1) znajduje się bardzo mocne więzadło poboczne łokciowe (10), które odchodzi od nadkłykcia przyśrodkowego (2a) kości ramiennej (15); więzadło to posiada dwa silne pasma łącznotkankowe: *przednie* (11), dochodzące do wyrostka dziobatego (7) oraz *tylne* (12), zdążające w kierunku bocznego brzegu wyrostka łokciowego

- (6) i przykrywające *nerw łokciowy*; między tymi pasmami znajduje się wiotka tkanka łączna, która jest ograniczona przez *włókna poprzeczne* (13) na kości łokciowej (16);
- więzadło poboczne promieniowe (14) przebiega od nadkłykcia bocznego (2b) kości ramiennej (15) do więzadła pierścieniowatego (8) kości promieniowej, ponad którym wnika w kość łokciową (16); to więzadło jest zrośnięte z powierzchniowymi prostownikami (np. z mięśniem łokciowym);
  - torebka stawowa (1) wraz z obiema więzadłami pobocznymi (10) i (14) i wyrostkiem łokciowym (6) hamują nadmierne prostowanie przedramienia;
  - *blona maziowa* (*membrana synovialis*) (3) obejmuje dół wyrostka łokciowego (6) na kości łokciowej (16) i obydwa doły na przedniej powierzchni kości ramiennej (15); pomiędzy błoną maziową (3) a *bloną włóknistą* (*membrana fibrosa*) (4) znajduje się tkanka tłuszczowa (5), która przy krańcowym położeniu przedramienia może działać hamująco.



Rys. 2.12. Staw łokciowy: a) widok z przodu, b) widok na przekroju, c) widok od strony przyśrodkowej, d) schemat rozmieszczenia torebki stawowej [125]

### 2.1.3. Koordynacja ruchu zespołu mięśni

Z punktu widzenia neurofizjologii można określić ogólny schemat pobudzenia mięśni przez układ nerwowy do realizacji zadania ruchowego. Układ ruchowy jest rozproszonym układem wykonawczym i pozwala realizować zadanie ruchowe na wiele sposobów. Taka zdolność zwiększa możliwości wykonawcze organizmu i szybką kompensację uszkodzonego elementu na skutek przejęcia jego funkcji przez inne elementy zdrowe [11]. Złożoność układu nerwowego oraz ograniczoność zakresu badań nad żywym organizmem nie pozwalają na dokładne wyjaśnienie zjawiska koordynacji ruchu.

Pierwszą hipotezę, opisującą proces sterowania ruchami łańcucha kinematycznego, zaproponował Bernstein [178]. Zgodnie z tą hipotezą, realizacja zadania ruchowego przez układ ramię-przedramię odbywa się w sposób następujący: najpierw układ nerwowy wyobraża żądany ruch i konstruuje schemat działania, a następnie realizuje zadanie poprzez nadążające porównywanie wartości bieżącej (aktualnego kąta obrotu przedramienia) z wartością zadaną będącą funkcją czasu. W trakcie realizacji zadania układ nerwowy nie kieruje aktywnością poszczególnych mięśni ramienia-przedramienia, lecz używa modułowego sterowania skierowanego na cały łańcuch kinematyczny. Oznacza to, że do osiągnięcia zadanego obrotu przedramienia pobudza grupę zginaczy i grupę prostowników, redukując w tym samym czasie stopnie swobody składowych łańcuchów kinematycznych (np. ręki i palców) [11].

Przekazanie pobudzenia mięśniom z odpowiedniego poziomu układu nerwowego odbywa się *drogą odśrodkową (eferentną)* za pomocą nerwów ruchowych (brzusznym) przez *neurony odśrodkowe (odśrodkowe sygnały zstępujące)*. Natomiast informacja od receptorów (znajdujących się w mięśniach, ścięgnach, stawach) jest przekazywana *drogą dośrodkową (afferentną)* do wyznaczonego poziomu układu nerwowego za pomocą nerwów czuciowych (grzbietowych) przez *neurony obwodowe* [122].

Mięśnie szkieletowe są podporządkowane *somatycznemu układowi*, który jest składową układu nerwowego organizmu. Somatyczny układ nerwowy dzieli się na *układ piramidowy* i *pozapiramidowy*.

*Układ piramidowy* jest zależny od odśrodkowego układu nerwowego i kontroluje świadome ruchy dowolne układów kostnych (np. świadome poruszanie się w żądanym kierunku albo świadoma zmiana pozycji części lub całego ciała) oraz postawę ciała. *Droga piramidowa (droga korowo-rdzeniowa)*, jako część układu piramidowego, składa się z dużej wiązki nerwowych włókien ruchowych, które łączą ruchową korę mózgową z rdzeniem kręgowym. Neuron odśrodkowy z kory ruchomej mózgu biegnie do rdzenia kręgowego, gdzie w wyznaczonym segmencie rogu przedniego styka się z nerwem obwodowym poprzez komórkę ruchową. Nerw obwodowy wychodzi z rdzenia i przebiega w korzeniu rdzeniowym przednim, a następnie przed wejściem do mięśnia tworzy liczne odgałęzienia, które unerwiają poszczególne jednostki motoryczne. Uszkodzenie układu piramidowego prowadzi do stanu porażenia. W zależności od miejsca uszkodzenia porażenie może wystąpić w prawej lub lewej części ciała. Jeżeli zostanie uszkodzony neuron obwodowy, to wystąpi brak wszystkich odruchów i zniesienie tonusa mięśnia, prowadząc do jego zwiotczenia i zanikania. Jeżeli zostanie uszkodzony neuron odśrodkowy, to wystąpi niemożność wykonania świadomych ruchów. Natomiast odruchy (np. cofanie się kończyny od ognia) będą nadal wykonywane.

*Nieświadome ruchy*, które dzielą się na *odruchy bezwarunkowe* (wrodzone schematy postępowania, np. odruch ssania lub cofnięcie ręki na skutek jej oparzenia lub ułknięcia) i *odruchy warunkowe* (nabyte schematy postępowania, które zostały wyuczone i wykonują się automatycznie bez udziału świadomości), są zapewniane przez *układ pozapiramidowy*.



Składa się on z nerwowych włókien mięśniowych obwodowego układu nerwowego łączących różne segmenty rdzenia kręgowego z mięśniami. Ten układ utrzymuje napięcie mięśni i reguluje automatycznie ich pracę. Uszkodzenie tego układu prowadzi do wzmożonego napięcia mięśni (np. choroby Parkinsona i zespołów płasawicznych).

Prawidłową pracę mięśni kończyny górnej zapewnia *nerwowe sprzężenie zwrotne i czucie stawowe*. Nerwowe sprzężenie zwrotne składa się z motoneuronów, które są wysyłane w celu sterowania aktywnością poszczególnych mięśni:

1. *Motoneurony alfa* są rozmieszczone na różnych segmentach rogów przednich rdzenia kręgowego. Na skutek czaso-przestrzennego sumowania tysięcy pobudzających i hamujących sygnałów (pochodzących z kory ruchowej drogą piramidową, *interneuronów*, tzn. *neuronów wstawkowych*, rdzenia kręgowego oraz *wrzecionek mięśniowych*) pojedynczy motoneuron alfa wysyła właściwy sygnał do określonej jednostki motorycznej wyznaczonego mięśnia. Motoneurony alfa generują dla szybkich jednostek motorycznych salwę impulsów o częstotliwości 30÷60 Hz, zaś dla wolnych – ciągi impulsów o częstotliwości 10÷20 Hz. Częstotliwość pobudzenia motoneuronów alfa jest ograniczona przez hamowanie autogenne dzięki działaniu *interneuronów komórek Renshawa*, które powodują zwrotne hamowanie zarówno zakończeń włókien czuciowych *Ia*, jak i motoneuronów alfa.
2. *Motoneurony beta* jednocześnie unerwiają włókna mięśniowe oraz włókna śródwrzecionowe. Rola tych motoneuronów nie została jeszcze dokładnie zbadana.
3. *Motoneurony gamma* wywołują skurcz wyspecjalizowanych receptorów włókien mięśniowych nazywanych *wrzecionkami mięśniowymi*.

Czucie stawowe, w postaci impulsów z nerwów czuciowych, pochodzi od *proprioceptorów i receptorów czucia skórniego* [169]. Proprioceptory są receptorami czucia głębokiego i znajdują się w: mięśniach (w postaci wrzecionek mięśniowych), ścięgna (jako *narządy Golgiego*), torebkach stawowych i więzadłach (*receptory stawowe*). W czasie aktywności ruchowej impulsy czuciowe pochodzą od proprioceptorów i niosą informację o położeniu, ruchu i siłach poszczególnych elementów łańcuchów kinematycznych. Za pośrednictwem nerwów obwodowych impulsy te zostają przekazane do mózgu [11, 89].

Wrzecionka mięśniowe znajdują się we wszystkich mięśniach i są narzędziami zmysłu, które wysyłają do rdzenia kręgowego impulsy czuciowe o aktualnej długości i prędkości rozciągania włókien mięśniowych [11, 119]. Pojedynczy receptor wrzecionowy, który jest rozmieszczony równolegle do włókien mięśniowych wyznaczonego mięśnia, składa się z 3÷10 zmodyfikowanych włókien mięśniowych (nazywanych *włóknami wewnątrzwrzecionowymi*). Środkowa część tych włókien jest pozbawiona prądkowania, torebki łącznotkankowej oraz unerwienia pochodzącego od nerwów ruchowych i czuciowych. Zmodyfikowane włókna mięśniowe receptora wrzecionowego mogą aktywnie się kurczyć, gdyż posiadają własne unerwienie ruchowe, które jest sterowane przez motoneurony gamma. W połowie swojej długości wrzecionka mięśniowe posiadają zakończenia włókien czuciowych, które biegną do rdzenia kręgowego, gdzie tworzą pobudzające połączenia z motoneuronami alfa tego samego mięśnia i *interneuronami (neuronami wstawkowymi)*. Przekazując w taki sposób informację sensoryczną (tzn. do wszystkich poziomów układu nerwowego), odbywa się sterowanie aktywnością (wysokością zachodzącego skurczu) włókien mięśniowych wybranego mięśnia oraz mięśni synergicznych i antagonistycznych. Jako przykład można wspomnieć o *odruchu na rozciąganie (odruchu miotatycznym)*, który zachodzi każdorazowo bez udziału ośrodkowego układu nerwowego w łuku odruchowym przy rozciąganiu mięśnia: jak tylko mięsień zaczyna się rozciągać, to układ nerwowy otrzymuje o tym informację od wrzecionek mięśniowych przez włókna czuciowe i natychmiast pobudza włókna

mięśniowe motoneuronami alfa, co musi spowodować ich skurcz i przeszkodzić ich następnemu rozciąganiu. Proces uniemożliwiający zachodzenie zwiótczenia wrzecionek mięśniowych nazywa się *koaktywacją alfa-gamma*. Proces ten polega na jednoczesnym pobudzeniu mięśnia motoneuronami alfa i gamma.

Narządy Golgiego (receptory ścięgnowe) znajdują się w obszarze złącza nerwowo-mięśniowego w postaci pęczków 10÷15 włókien, które są połączone szeregowo z włóknami mięśniowymi [119]. Receptory ścięgnowe mięśnia są wrażliwe na naprężenia wywołane skurczem pęczka włókien mięśniowych i wysyłają impulsy włóknami czuciowymi (określanymi jako Ib) do rdzenia kręgowego. Włókna Ib, łącząc się z interneuronami rogów przednich rdzenia kręgowego, wpływają na zahamowanie aktywności motoneuronów alfa własnego mięśnia. Taka pętla sprzężenia zwrotnego, która tworzy obwód reakcji odruchowej, jest nazywana odruchem ścięgnistym (odruchem na rozciąganie) i spełnia następujące funkcje: zabezpiecza mięsień przed przeciążeniami, ograniczając maksymalną siłę mięśnia, i wyrównuje naprężenia w poszczególnych pęczkach mięśnia, które wynika z ich zróżnicowanej długości.

*Receptory stawowe* znajdują się w torebkach i więzadłach stawowych. Są one pobudzane w czasie zachodzenia deformacji struktur stawowych. Receptory te przekazują informacje przez nerwy czuciowe do układu nerwowego o: położeniu stawu, szybkości ruchu, wielkości i lokalizacji sił działających na stawy. Gdy kończyna znajdzie się na granicy ruchów dopuszczalnych receptory stawowe charakteryzują się bardzo wysoką aktywnością.

Na receptory czucia skórnoego składają się: *ciałka Meissnera* (receptory czucia dotyku, które są czułymi detektorami szybkości ruchu), *ciałka blaszkowate Vater-Pacinięgo* (receptory czucia nacisku i wibracji), *ciałka Ruffinięgo* (receptory czucia rozciągania), *ciałka Krausego* (receptory czucia zimna) oraz *zakończenia wolne nerwu* (receptory czucia bólu) [177]. Do receptorów przemieszczenia, które są związane z percepcją kształtu i rodzaju powierzchni, należą *ciałka Meissnera* oraz *krążki Merkela* (krążki dotykowe). Do receptorów prędkości odkształceń skóry odnoszą się *ciałka blaszkowate Vater-Pacinięgo* i *ciałka Ruffinięgo*. Na skutek podrażnienia receptorów czucia skórnoego, wysyłają one impulsy czuciowe do rdzenia kręgowego.

Na podstawie licznych badań neurologicznych wyznaczono, że czas obiegu informacji [11, 15]:

- w najprostszym rdzeniowym łuku odruchowym, przy zadziałaniu najprostszyc mechaniZmów obronnych bez uruchomienia zwrotnej pętli sygnałów korygujących, wynosi 60÷70 ms (wg [143] jest to 30÷50 ms); przy czym jest to czas, w którym może dojść do utraty stateczności kończyny;
- podczas wykonania ruchu balistycznego (ruchu krótko trwającego, np. kopnięcie piłki, gdy nie uruchamiają się odruchy, tzn. pętli sprzężenia zwrotnego, i nie ma możliwości wprowadzenia bodźca korygującego) wynosi 100÷200 ms;
- podczas wykonywania ruchu ciągłego (gdy jest zaangażowany ośrodkowy układ nerwowy i są prowadzone bodźce korygujące) jest dłuższy niż 200 ms.

Biorąc pod uwagę wyżej przedstawione czasy obiegu informacji oraz opóźnienie elektromechaniczne mięśnia, które trwa od kilkadziesiąt do 300 ms, można stwierdzić, że w niektórych sytuacjach układ ruchowy pracuje na granicy swoich możliwości.

Zgodnie z hipotezą opisaną w [112] proces sterowania aktywnością mięśni odbywa się w dwóch etapach. W etapie pierwszym, który trwa 60÷70 ms, ośrodkowy układ nerwowy ustala schemat realizacji zadania ruchowego i zaczyna aktywować mięśnie stabilizujące poszczególne łańcuchy kinematyczne. Po upływie 100÷130 ms zaczyna się etap drugi, w którym dochodzi do aktywacji mięśni odpowiedzialnych za wykonywanie zadania

ruchowego. Na przykład, sterując jednocześnie grupami mięśni przeciwstawnych, układ nerwowy najpierw pobudza grupę zginaczy (mięśnie agonistyczne), która wykonuje funkcję napędową, i hamuje aktywność grupy prostowników (mięśni antagonistycznych) [11]. Jeżeli proces sterowania mięśniami antagonistycznymi odbywa się na poziomie rdzenia kręgowego, tzn. obwodowo (bez udziału ośrodkowego układu nerwowego), to jest nazywany *hamowaniem recyprokalnym*. Proces ten jest zapewniany przez neurony wstawkowe, które hamują działanie motoneuronów grupy mięśni antagonistycznych. Takie hamowanie (nazywane również *sterowaniem recyprokalnym*) może zachodzić jedynie wtedy, gdy układ nerwowy posiada dokładną informację o istniejącym obciążeniu i już kiedyś miał do czynienia z realizacją zadania związanego z tym obciążeniem. Z kolei w przypadku pojawienia się nerwowych sygnałów pochodzących z ośrodkowego układu nerwowego następuje zmiana aktywności interneuronów. Powoduje to zniesienie hamowania recyprokalnego i zachodzenie okresów koaktywacji (*współskurczu*) mięśni antagonistycznych, które się nazywają okresami *współbieżnego sterowania mięśniami przeciwstawnymi*. Sterowanie to potrzebuje zużycia większej ilości energii niż sterowanie recyprokalne, ale zapewnia większą stabilność ruchu, gdyż łańcuch kinematyczny staje się mniej wrażliwy na przypadkowe zmiany obciążenia.

Z powyższego wynika, że w trakcie uczenia się wykonywania nowego zadania ruchowego (gdy obciążenie nie jest znane) układ nerwowy stosuje taktykę współbieżnego sterowania mięśniami przeciwstawnymi i korzysta ze sprzężenia zwrotnego pochodzącego od receptorów.

Należy jednak zauważyć, iż opisany proces sterowania mięśniami nie jest hipotezą uniwersalną, gdyż nie wyjaśnia, dlaczego niektóre osoby, które doznały uszkodzenia nerwów przekazujących informacje od proprioceptorów do centralnego układu nerwowego, nadal potrafią sprawnie wykonać powolne i szybkie ruchy w kierunku ustalonego celu [20].

Na koniec należy przypomnieć zasadę stosowaną przez sportowców. Do uzyskania wydajnego skurczu określonej grupy mięśni należy wyznaczyć grupę mięśni (np. grupę zginaczy) biernie rozciągnąć przy pomocy aktywacji grupy mięśni przeciwstawnych (np. grupy prostowników) [89]. Takie wstępne bierne rozciąganie podwyższa aktywność mięśni wybranej grupy i pozwala uzyskać wydajniejszy skurcz.

#### 2.1.4. Metody badania czynności mięśni

W celu określenia miejsca przyczepu mięśnia, jego początku, przebiegu oraz rozmieszczenia włókien mięśniowych względem osi długiej można zastosować *metodę anatomiczną*, która opiera się na preparowaniu mięśnia. Takie badanie można przeprowadzać tylko na zwłokach.

Do określenia czynności mięśnia w praktyce stosuje się *metodę drażnienia elektrycznego (chronoaksymetria)*, która polega na podrażnieniu mięśnia w miejscu wejścia do niego nerwu (w płycie motorycznej) [68, 122, 125, 176]. Prąd elektryczny o najmniejszej amplitudzie, który wywołuje skurcz badanego mięśnia, jest nazywany *reobazą*. Najkrótszy czas drażnienia prądem elektrycznym, który jest wyznaczony tak, ażeby wywołać skurcz mięśnia, tzn. zapewnić podwójną reobazę, jest nazywany *chronaksją*. Stosując prąd o podwójnej reobazie i mierząc chronaksję, określa się czynność badanego mięśnia od strony przewodnictwa nerwowo-mięśniowego. Jeżeli w mięśniu zachodzą zmiany patologiczne, to obserwuje się znaczne wydłużenie chronaksji. Taka metoda posiada ograniczone zastosowanie, ponieważ jest stosowana jedynie do mięśni rozmieszczonych powierzchniowo i wywołuje zawsze maksymalny skurcz drażnionego elektrycznie mięśnia, który może uszkodzić sąsiednie mięśnie albo względnie ograniczyć ich zakres działania.

Najnowszą i najczęściej stosowaną metodą jest *elektromiografia (EMG)*, która jest przykładem elektrofizjologii stosowanej. Zajmuje się ona badaniem czynności elektrycznej mięśni, a mianowicie:

- odróżnienie mięśnia zdrowego od uszkodzonego (chorobowo zmienionego) na podstawie badania zjawisk elektrofizjologicznych: ewentualnej czynności spontanicznej (spoczynkowej) mięśnia, stanu poszczególnych jednostek motorycznych oraz ich populacji, wywołanego potencjału mięśniowego;
- wyznaczenie pierwotnej przyczyny uszkodzenia mięśnia, miogennej lub neurogennej [68];
- określenie rozległości i kierunku zmian procesu chorobowego w mięśniu oraz sposobu prowadzenia jego rehabilitacji.

Zależnie od sposobu pobierania sygnałów bioelektrycznych (w żywym organizmie prąd elektryczny ma charakter jonowy, a nie elektronowy), wyróżnia się *elektromiografię powierzchniową (globalną)* i *elektromiografię elementarną (ilościową)* [6, 68, 119].

*Elektromiografia powierzchniowa* jest metodą nieinwazyjną, która polega na odbieraniu sygnałów (potencjałów czynnościowych) z powierzchni mięśnia elektrodami zewnętrznymi. Sygnał odbierany jest sumaryczną odpowiedzią wielu włókien mięśniowych, które znajdują się w pobliżu elektrod. Jeżeli pomiary są prowadzone na osobnikach żywych, to mierzenie potencjałów czynnościowych jest możliwe tylko dla mięśni położonych pod skórą. Metoda ta pozwala jedynie na ogólne określenie stanu badanego mięśnia, gdyż nie odbiera sygnału od włókien mięśniowych (lub mięśni położonych w warstwie głębokiej) znajdujących się w jego środku. Elektromiografię powierzchniową najczęściej stosuje się przy ogólnym określeniu współdziałania mięśni, w procesie rehabilitacji oraz innych zadaniach, które nie wymagają szczegółowej informacji o pobudzeniu poszczególnych włókien mięśniowych czy jednostkach motorycznych. Stosując elektromiografię powierzchniową, można przeprowadzać badania przewodzenia nerwowych włókien obwodowych.

*Elektromiografia elementarna* jest metodą inwazyjną, która określa potencjał czynnościowy sąsiadujących ze sobą włókien mięśniowych albo poszczególnych jednostek motorycznych za pomocą wkłuwanych elektrod igłowych. Ze względu na swoje możliwości metoda ta jest stosowana w diagnostyce chorób nerwowo-mięśniowych. Za pomocą elektromiografii elementarnej można również przeprowadzać badania nad przewodzeniem nerwowych włókien czuciowych.

Ocena sprawności mięśnia polega na otrzymaniu zapisu EMG i jego analizie, którą zwykle poprzedza wybrana technika obróbki sygnałów: 1) w stanie spoczynku (cisza bioelektryczna), 2) w czasie słabego wysiłku, 3) w czasie maksymalnego wysiłku.

Do określenia czynności mięśnia na podstawie badania jego siły skurczu najczęściej są stosowane dwie metody: *mechanomiografia* i *inwazyjna metoda mierzenia siły*.

*Mechanomiografia* polega na analizie natężenia dźwięku wytworzonego przez kurczące się włókna mięśniowe. Fale dźwiękowe są odbierane za pomocą mikrofonu umiejscowionego na badanym mięśniu. Siła badanego mięśnia jest obliczana na podstawie analizy natężenia dźwięku i jest przedstawiana w postaci funkcji zależnej od czasu nazywanej *mechanogramem*. Metoda ta, ze względu na swoją nieinwazyjność, jest stosowana dosyć często. Jednak nie pozwala ona na precyzyjne określenie siły wybranego mięśnia, gdyż fale dźwiękowe pochodzące od kurczenia się mięśni sąsiadujących, wpływają na wynik pomiaru, zmniejszając jego dokładność.

*Inwazyjna metoda mierzenia siły* (ze względu na ingerencję w żywy organizm nie znajduje szerokiego wsparcia w środowisku lekarskim) pozwala na określenie siły skurczu mięśnia dzięki *implantowanemu przetwornikowi siły* (ang. *implantable force transducer*). Jeden koniec tego przetwornika jest zaczepiony do ścięgna przyczepu badanego mięśnia,

a drugi – do kości przyczepu. Wprowadzenie do organizmu zwierzęcia takiego przetwornika, który jest wykonany z biogodnych materiałów, jest realizowane przy ogólnym znieczuleniu [73, 80, 119]. Przetwornik posiada nadajnik przekazujący drogą radiową dane o sile powstającej między punktem zaczepienia przetwornika a badanym mięśniem. W literaturze można znaleźć próby stosowania innych technik pomiarowych do realizacji tej metody, na przykład: dynamometrów sprzączkowych (zaczepianych do ścięgna) albo włókien optycznych (przekłutych przez ścięgno i wykazujących modulację natężenia światła w przypadku, gdy włókno to ulega ściskaniu wewnątrz ścięgna) [84].

## 2.2. Opis stosowanych modeli

### 2.2.1. Charakterystyki mechaniczne mięśnia

W ubiegłym stuleciu zaproponowano szereg metod pomiarowych, które pozwoliły na oszacowanie właściwości mechanicznych mięśni [112, 114, 157]:

- niepobudzonych (A. Levin i J. Wyman, B.C. Abott i J. Lowy, A. Morecki i inni);
- pobudzonych do skurczu stymulacją prądową lub napięciową (M. Blix, A.V. Hill).

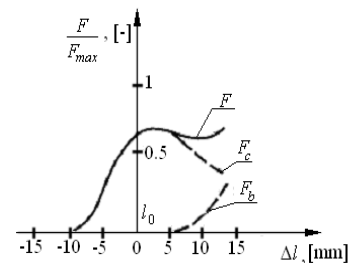
W obecnie stosowanych modelach mięśni właściwości mechaniczne są opisane za pomocą dwóch charakterystyk wyznaczonych doświadczalnie dla mięśnia izolowanego: *charakterystyki statycznej* (inaczej zwaną *krzywą Blix'a*) [57, 119, 176] i *charakterystyki dynamicznej* [11, 15, 114, 119, 176].

Dla określonej długości mięśnia  $l$  z charakterystyki statycznej mięśnia, której punkty uzyskano przy zmianie długości mięśnia o przyrost (krok)  $\Delta l$ , można wyznaczyć (rys. 2.13):

- siłę całkowitą  $F$  (dalej nazywaną skrótowo siłą), która jest rozwijana przez pobudzony mięsień będący w stanie izometrycznego zupełnego skurczu tężcowego;
- składową bierną (pasywną) siły  $F_b$  rozwijaną przez niepobudzony mięsień poddany rozciąganiu siłą zewnętrzną;
- składową czynną (aktywną) siły  $F_c$ , będącą algebraiczną różnicą między siłą całkowitą  $F$  i składową bierną  $F_b$ , tzn.  $F_c = F - F_b$ .

Długość spoczynkowa  $l_0$  odpowiada długości mięśnia, którą on osiąga w połowie zakresu ruchów dopuszczalnych kończyny [112, 114]. W celu porównania charakterystyk statycznych, które otrzymano dla różnych mięśni, siłę  $F$  oraz jej składowe  $F_b$  i  $F_c$  przedstawiano w postaci znormalizowanej tak, że siła (całkowita  $F$ , składowa bierna  $F_b$ , składowa czynna  $F_c$ ) jest podzielona przez maksymalną wartość siły całkowitej  $F_{max}$  uzyskaną w czasie pomiarów. Warto zwrócić uwagę, iż charakterystyka statyczna nie odzwierciedla zjawiska histerezy (por. p. 3.1.1.3, rys. 3.4), które zachodzi w mięśniu rzeczywistym [157].

Zależność między siłą rozwijaną przez mięsień a jego długością  $l$  proponowano opisać różnymi funkcjami analitycznymi, które ogólnie można przedstawić w postaci zależności [48, 112, 138, 169]:

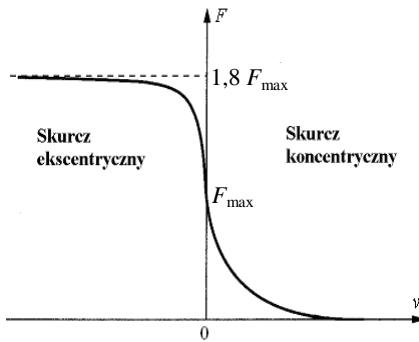


Rys. 2.13. Charakterystyka statyczna mięśnia w postaci znormalizowanej [114]

$$F(l) = F(F_{op}, l, l_{op}) = F_{op} \cdot G\left(\frac{l}{l_{op}}\right), \quad (2.1)$$

gdzie:  $l_{op}$  – długość optymalna mięśnia, na której generuje on maksymalną składową aktywną;  
 $F_{op}$  – optymalna siła całkowita mięśnia rozwijana na długości optymalnej  $l_{op}$ ;  
 $G\left(\frac{l}{l_{op}}\right)$  – funkcja zależna od stosunku aktualnej długości mięśnia  $l$  do jego długości optymalnej  $l_{op}$ .

Charakterystyka dynamiczna (rys. 2.14) wyraża zależność pomiędzy siłą całkowitą mięśnia  $F$ , który przebywa w pełnym skurczu tężcowym wywołanym stymulacją, a prędkością skracania (skurcz koncentryczny) lub wydłużania (skurcz ekscentryczny)  $v$  tego mięśnia. Należy zauważyć, że nie wszystkie punkty tej krzywej można uzyskać w trakcie



Rys. 2.14. Charakterystyka dynamiczna mięśnia [11]

badania i dlatego część punktów tej krzywej jest wyznaczana metodami aproksymacji (interpolacji i/lub ekstrapolacji). Punkt początkowy ( $v = 0$ ;  $F = F_{\max}$ ) opisuje mięsień o długości spoczynkowej  $l_0$  przebywający w stanie izometrycznego pełnego skurczu tężcowego. Skurcz ekscentryczny charakterystyki dynamicznej otrzymano poprzez gwałtowne wydłużenie mięśnia dzięki przyłożeniu do jego początku/przyczepu siły zewnętrznej. Skurcz koncentryczny charakterystyki dynamicznej uzyskano poprzez gwałtowne rozluźnienie mięśnia badanego (tzw. uwolnienie jego przyczepu lub początku), które prowadziło do niezwłocznego skracania mięśnia [11].

Charakterystyka dynamiczna w zakresie skurczu koncentrycznego została opisana przez Hilla jako zależność hiperboliczna [24, 74, 108]:

$$v = \frac{a_1^H \cdot (F_{\max} - F)}{F + a_2^H}, \quad (2.2)$$

gdzie:  $F_{\max}$  – maksymalna całkowita siła skurczu izometrycznego mierzona na długości optymalnej, przy zerowej prędkości skracania/wydłużenia mięśnia;  
 $a_1^H$  i  $a_2^H$  – stałe współczynniki wyznaczone doświadczalnie.

Zależność (2.2) otrzymano z pomiarów ciepła wydzielanego przy skracaniu mięśnia na skutek jego stymulacji [74]. Trzeba jednak zaznaczyć, że pomiary te były przeprowadzone w temperaturze  $0^\circ\text{C}$ , ponieważ tylko w tej temperaturze właściwości fizjologiczne mięśni izolowanych nie ulegają zmianom destrukcyjnym. Dlatego istotne jest pytanie o przydatność tej zależności do opisu zachowania mięśnia w wyższych temperaturach, np.  $15^\circ\text{C}$  lub  $36,6^\circ\text{C}$  [119].

W literaturze poświęconej modelowaniu zachowania mięśni można także znaleźć modele, w których charakterystyki statyczne i dynamiczne mięśnia są uzależnione od historii

jego skurczów poprzednich [46, 73, 108] i/lub uwzględniono zachodzenie procesów zmęczenia-odnawialnych [52].

Oprócz charakterystyki statycznej i dynamicznej dla niepobudzonego mięśnia doświadczalnie można uzyskać [114]:

- *charakterystykę relaksacji siły (naprężenia) mięśnia* opisującą zjawisko zmniejszania się z czasem siły (naprężenia) mięśnia poddanego skokowemu wydłużeniu, utrzymując przy tym długość mięśnia wydłużonego na stałym i niezmiennym poziomie;
- *charakterystykę relaksacji długości (odkształcenia) mięśnia* opisującą zjawisko zwiększania z czasem długości (odkształcenia) mięśnia, który w chwili początkowej wydłużono poprzez przyłożenie do jego początku (przyczepu) siły zewnętrznej o stałej i niezmiennej w czasie wartości.

Z punktu widzenia mikrostruktury zachowanie mięśnia w czasie skurczu jest skutkiem kurczenia się zawartych w nim odmiennych włókien mięśniowych (por. p. 2.1.1.1). Każdy typ włókna posiada odmiennie charakterystyki mechaniczne, których zachowanie proponowano opisać różnymi modelami matematycznymi [30, 42, 43, 77, 132, 133]. Niektóre z tych modeli odzwierciedlają współpracę pomiędzy układem nerwowym a mięśniowym [77, 81], korzystając z [89]:

- zasady rozmiaru Hennemana (1985), w której zakłada się, że układ nerwowy pobudza najpierw włókna wolnokurczące, a dopiero potem włókna szybko kurczące [98];
- teorii grup motoneuronów zadaniowych Loeba (1985), w której zakłada się, iż współpracujące grupy motoneuronów alfa i gamma oraz dośrodkowe włóknienka wrzecionowe są zaprogramowane w taki sposób, aby mogły zapewnić utrzymanie optymalnego pobudzenia motoneuronów tylko w określonym przedziale czasu, przy czym sterowanie aktywnością włókien mięśniowych (lub mięśni) jest liniowe;
- zasady wspólnego przewodzenia de Luca i Erima (1991), w której zakłada się, że centralny układ nerwowy generuje takie globalne sygnały, które sterują aktywnością mięśni jedynie w zakresie jednostek motorycznych; dlatego uzyskiwane doświadczalnie wykresy pobudzeń motoneuronów indywidualnych są odmienne od sygnału EMG mierzonego na powierzchni lub we wnętrzu mięśnia.

### 2.2.2. Modelowanie zachowania mięśnia

Modelowanie zachowania mięśnia rzeczywistego polega na sformułowaniu modelu matematycznego, który opisuje zależność pomiędzy przyczynami a skutkami zachodzącymi w badanym mięśniu, na podstawie zasad mechaniki. Do opisu zjawisk dynamicznych zależność tę można przedstawić jako proste i/lub odwrotne zadanie dynamiki [26, 39, 77].

Z punktu widzenia sposobu opisu zjawiska zachodzenia skurczu obecnie stosowane modele zachowania mięśnia można podzielić na trzy typy:

- 1) jednowymiarowe (skurcz zachodzi wzdłuż linii),
- 2) dwuwymiarowe (skurcz zachodzi w płaszczyźnie),
- 3) trójwymiarowe (skurcz zachodzi w przestrzeni).

Wyznaczenie parametrów tych modeli nadal jest problemem otwartym, ponieważ:

- mięśnie rzeczywiste można badać w bardzo ograniczonym zakresie;
- właściwości mechaniczne mięśni rzeczywistych (pracujących w organizmie żywym) są odmienne od właściwości mechanicznych mięśni wyodrębnionych (izolowanych).

Parametry modeli mięśni są określane:

- za pomocą danych literaturowych i/lub przyjęcia szeregu założeń, które wyprowadzono na podstawie pojedynczych danych doświadczalnych [37];

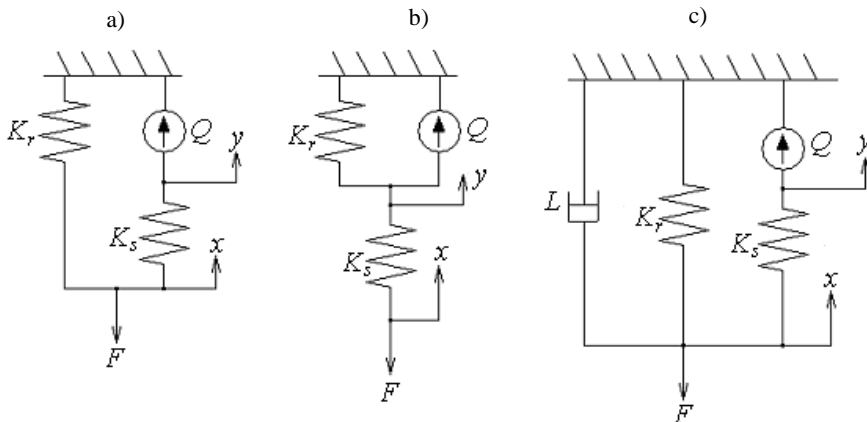
- w trakcie kalibracji i/lub pomiarów, które mogą przebiegać przy jednoczesnym zastosowaniu techniki optymalizacyjnej (stosowana do minimalizacji różnicy pomiędzy wynikami obliczeń a wynikami pomiarów);
- w trakcie stymulacji mięśnia (grupy mięśni) [87];
- poprzez stosowanie pewnej kombinacji wyżej wymienionych sposobów.

### 2.2.2.1. Modele jednowymiarowe

Modele jednowymiarowe opisują zachowanie mięśnia za pomocą jednej współrzędnej (np. przemieszczenia przyczepu lub siły całkowitej mięśnia), której wartość zależy od zmiennej czasu  $t$  i czynników wejściowych. Liczba wybranych elementów reologicznych, ich rodzaj oraz odpowiednie połączenie między tymi elementami wyznacza typ utworzonego modelu: liniowy/nieliniowy oraz prosty/złożony.

Prosty model reologiczny zawiera elementy opisujące właściwości sprężyste (współczynnik sztywności) i właściwości lepkie (współczynnik tłumienia) [11]. Szeregowe połączenie sprężyny i tłumika stanowi *model Maxwella*, zaś równoległe połączenie tych elementów – *model Kelvina-Voighta* [112, 114]. W modelu reologicznym są także stosowane elementy masowe (uwzględniają masy skupione) i/lub inne elementy nieliniowe (np. plastyczne, które opisują odkształcenia plastyczne) [140].

Na początku ubiegłego stulecia do opisu zachowania mięśnia krawieckiego żaby zaproponowano *model mięśnia typu Hilla*, którego model reologiczny najczęściej jest przedstawiany w dwóch postaciach (rys. 2.15.a i 2.15.b) [6, 11, 21, 23, 24, 26, 30, 45, 49, 91, 92, 100, 107, 109, 112, 141, 146, 154, 155, 158, 100]. Model ten składa się z kurczliwego elementu generującego siłę  $Q$ , połączonego szeregowo z elementem sprężystym o współczynniku sztywności  $K_r$ , i równoległe z elementem sprężystym o współczynniku sztywności  $K_s$ . Siła  $Q$  zależy od zmiennej czasu  $t$ ,  $Q = Q(t)$ , i jest dobierana tak, aby siła całkowita modelu mięśnia  $F = F(t)$  była równa doświadczalnie mierzonej sile mięśnia. W 1988 roku Winters i Stark zaproponowali zmodyfikowany model mięśnia typu Hilla (rys. 2.15.c). Model ten zawiera element kurczliwy generujący siłę  $Q$  połączony szeregowo z elementem sprężystym o współczynniku sztywności  $K_r$ , i równoległe z elementem sprężystym o współczynniku sztywności  $K_s$ , oraz elementem lepkiem o współczynniku tłumienia  $L$  [120].



Rys. 2.15. Modele reologiczne mięśnia typu Hilla: a) pierwsza postać; b) druga postać; c) zmodyfikowany, zaproponowany przez Wintersa i Starka



Model reologiczny mięśnia podany na rys. 2.15.a jest opisany układem równań:

$$\begin{aligned} K_s \cdot (y - x) - Q &= 0 \\ K_s \cdot (x - y) + K_r \cdot x + F &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.A)$$

model na rys. 2.15.b:

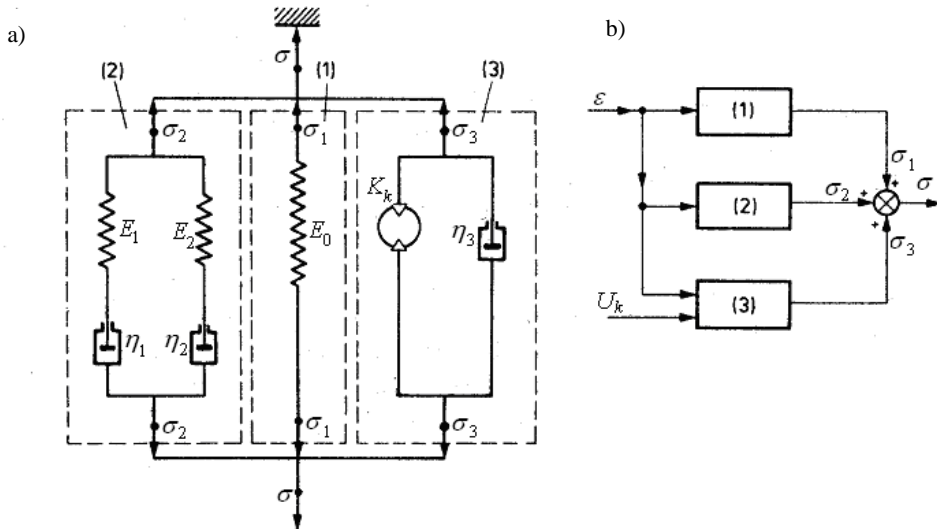
$$\begin{aligned} K_s \cdot (y - x) + K_r \cdot y - Q &= 0 \\ K_s \cdot (x - y) + F &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.B)$$

zaś model na rys. 2.15.c:

$$\begin{aligned} K_s \cdot (x - y) + Q &= 0 \\ L \cdot \dot{x} + K_r \cdot x + K_s \cdot (x - y) + F &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.C)$$

gdzie:  $x$  – przemieszczenie punktu przyłożenia siły  $F$  (zmiana długości mięśnia),  
 $y$  – współrzędna wspomagająca (pośrednia).

W modelu mięśnia typu Hilla zachowanie elementu kurczliwego uzależniano od sygnału aktywacji  $\alpha_{akt}$ , który jest skutkiem działania sygnału pobudzenia nerwowego  $\alpha_e$  przesyłanego impulsami nerwowymi  $\alpha_u$  [26, 169]. Zależność impulsów nerwowych  $\alpha_u$  od pobudzenia nerwowego  $\alpha_e$  oraz zależność pobudzenia nerwowego  $\alpha_e$  od aktywacji  $\alpha_{akt}$  jest opisana liniowymi równaniami różniczkowymi pierwszego lub drugiego rzędu.



Rys. 2.16. a) reologiczny model mięśnia Kędziora; b) regulacyjny model mięśnia Kędziora [81]

Na początku lat 70. ubiegłego stulecia K. Kędzior zaproponował złożony model mięśnia, którego działanie jest opisane za pomocą nieliniowego modelu reologicznego i modelu regulacyjnego (rys. 2.16) [81]. Model ten uwzględnia doświadczalnie uzyskane charakterystyki statyczną i dynamiczną mięśnia [81, 113]. Zachowanie mięśnia stanowi superpozycję trzech stanów, z których każdy jest opisany przez pojedynczy blok. Blok (1) modeluje składową bierną siły rozwijaną w warunkach statycznych. Blok (2) modeluje składową bierną siły

rozwijaną w warunkach dynamicznych. Blok (3) modeluje składową czynną rozwijaną w warunkach statycznych i dynamicznych. Poszczególne symbole oznaczają:  $\varepsilon$  – wydłużenie jednostkowe względne mięśnia;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma$  – naprężenia w blokach (1), (2), (3) i całego modelu;  $U_k$  – parametr proporcjonalny do amplitudy impulsów elektrycznych typu Diraca  $\delta(t)$  o częstotliwości  $f_k$ , które są używane do stymulacji mięśnia;  $E_0 = E_0(\varepsilon), E_1 = \text{const}, E_2 = \text{const}$  – moduł Younga elementów sprężystych;  $\eta_1 = \text{const}, \eta_2 = \text{const}, \eta_3 = \eta_3(U_k, \varepsilon, \dot{\varepsilon})$  – stałe materiałowe tłumienia elementów lepkich;  $K_k$  – element kurczliwy modelu mięśnia.

Równania zachowania modelu mięśnia Kędziora mają postać układu równań, w którym pierwsze opisuje zespół (1), drugie – zespół (2) i trzecie – zespół (3):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_0 \cdot \varepsilon \\ \sigma_2 + \left( \frac{\eta_1}{E_1} + \frac{\eta_2}{E_2} \right) \cdot \dot{\sigma}_2 + \frac{\eta_1}{E_1} \cdot \frac{\eta_2}{E_2} \cdot \ddot{\sigma}_2 &= (\eta_1 + \eta_2) \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 + E_2}{E_1 \cdot E_2} \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ddot{\varepsilon}, \\ \sigma_3 &= E_s(U_k, f, t) \cdot \phi(\varepsilon) - \eta_3 \cdot \dot{\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdzie:  $\phi(\varepsilon)$  – funkcja modelująca zależność składowej czynnej siły mięśnia od jego wydłużenia  $\varepsilon$  w warunkach statycznych;  $E_s(U_k, f_k, t) \cdot \phi(\varepsilon)$  – iloczyn modelujący naprężenie w elemencie kurczliwym  $K_k$ ;  $E_s(U, f_k, t)$  – funkcja opisująca zależność składowej czynnej siły od pobudzenia i jest wynikiem rozwiązania równania różniczkowego:

$$T_k^3 \cdot \ddot{E}_s + 3T_k^2 \cdot \dot{E}_s + 3 \cdot T_k \cdot E_s + E_s = \Pi(t), \quad (2.5)$$

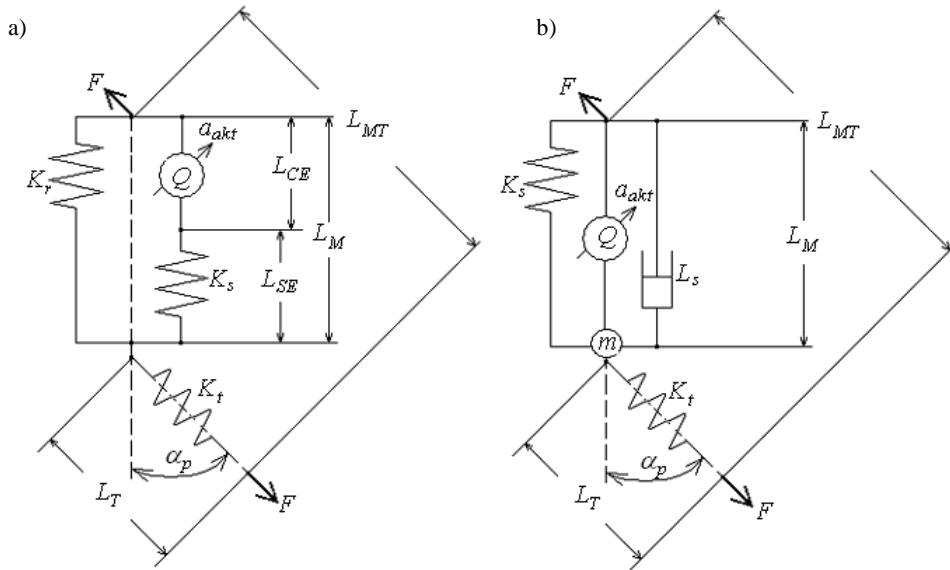
gdzie:  $T_k$  – stała czasowa mięśnia;

$\Pi(t) = F_k(U_k) \cdot \delta\left(t - \frac{n_k}{f_k}\right)$  – funkcja grzebieniowa, która zależy od funkcji  $F_k(U_k)$  i liczby impulsów  $n_k = [t \cdot f_k]$  oraz modeluje pobudzenie elektryczne mięśnia pochodzące od ośrodkowego układu nerwowego.

W zależności od rodzaju symulowanej pracy mięśnia jest wybierany odpowiedni układ równań, gdyż naprężenia  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  są niezależne (nie sprzęgają układu równań (2.4)). Model mięśnia Kędziora opisuje zachowanie mięśnia w różnych zakresach jego długości (odzwierciedla on zarówno skurcz koncentryczny, jak i skurcz ekscentryczny). Należy zauważyć, że był to pierwszy model, w którym opisano powiązanie pomiędzy naprężeniem rozwijanym przez element kurczliwy mięśnia a pobudzeniem przekazywanym od ośrodkowego układu nerwowego.

W końcu lat osiemdziesiątych ubiegłego stulecia F. Zajac zaproponował model reologiczny mięśnia (rys. 2.17.a), który opisują następujące parametry [37, 56, 107, 123, 169]:

- optymalna długość mięśnia  $L_{M,0}$  (przy tej długości mięsień generuje największą siłę całkowitą, która w praktyce jest mierzona na początku/przyczepie mięśnia w maksymalnym izometrycznym skurczu tężcowym);
- kąt pierzastości  $\alpha_p$  (jest wyznaczany przy optymalnej długości mięśnia  $L_{M,0}$ );
- długość ścięgna rozluźnionego  $L_{T,00}$  (przy której ścięgno zaczyna wytwarzać siłę oporu wywołaną jego wydłużeniem);
- powierzchnia poprzecznego przekroju fizjologicznego  $PCSA$  (obliczana jako stosunek objętości mięśnia izolowanego do jego długości);
- maksymalna prędkość skurczu mięśnia (dla stanów dynamicznych) [37].



Rys. 2.17. Modele reologiczne mięśnia F. Zajaca:  
a) podstawowy [107]; b) zmodyfikowany [86]

Dla każdego mięśnia musi być dodatkowo wyznaczona: charakterystyka statyczna „długość – składowa czynna siły całkowitej mięśnia”; charakterystyka statyczna „długość – składowa bierna siły całkowitej mięśnia”; charakterystyka statyczna „długość – siła ściągna”; charakterystyka dynamiczna „prędkość skurczu – siła całkowita mięśnia” [37]. Optymalną długość każdego mięśnia rzeczywistego zespołu mięśniowego w praktyce proponowano oszacować:

- w trakcie stymulacji mięśnia, gdy kończyna znajduje się w wyznaczonym położeniu w zakresie ruchów dopuszczalnych (na podstawie otrzymanej charakterystyki statycznej, która uzależnia kąt obrotu kończyny od momentu sił wytworzonych przez zespół mięśni badanych, wyznaczany jest moment maksymalny, a kąt jemu odpowiadający jest podstawą do oszacowania optymalnej długości badanego mięśnia) [87];
- za pomocą liniowego skalowania optymalnej długości pojedynczego sarkomeru do długości włókna mięśniowego; przy czym należy pamiętać, iż długość włókna mięśniowego zależy od położenia stawu [59, 115] oraz długości sarkomerów zawartych w pojedynczym włóknie mięśniowym znacznie się różnią między sobą [77, 96].

Siła całkowita modelu mięśnia Zajaca jest oznaczona jako  $F$  (rys. 2.17). Powstaje ona na skutek współdziałania: elementu kurczliwego generującego siłę  $Q$  pod wpływem sygnału aktywacji  $a_{akt}$ ; elementu sprężystego o współczynniku sztywności  $K_s$ ; elementu sprężystego o współczynniku sztywności  $K_r$ ; elementu sprężystego o współczynniku sztywności  $K_t$ , który odzwierciedla zachowanie ścięgna mięśnia pierzastego. W modelu tym danymi geometrycznymi są: długość mięśnia ze ścięgnem  $L_{MT}$ ; długość ścięgna  $L_T$ ; długość mięśnia  $L_M$ ; długość części pasywnej mięśnia  $L_{SE}$ ; długość części aktywnej mięśnia  $L_{CE}$ . Wychodząc z zależności geometrycznych (tzn. strukturalnych) i reologicznych, równanie różniczkowe opisujące pochodną względem czasu siły  $F$  w modelu mięśnia Zajaca ma postać:

$$\dot{F} = \frac{\left[ (K_s + K_r) \cdot \cos(a_p) + \frac{F}{L_M} \cdot \operatorname{tg}^2(a_p) \right] \cdot K_t \cdot \cos(a_p)}{\left[ (K_s + K_r) \cdot \cos(a_p) + \frac{F}{L_M} \cdot \operatorname{tg}^2(a_p) \right] \cdot \cos(a_p) + K_t} \cdot \left[ \dot{L}_{MT} - \frac{\dot{L}_{CE} \cdot K_s}{(K_s + K_r) \cdot \cos(a_p) + \frac{F}{L_M} \cdot \operatorname{tg}^2(a_p)} \right]. \quad (2.6)$$

Do rozwiązania powyższego równania przyjęto następujące założenia upraszczające:

- 1) współczynnik sztywności elementu sprężystego  $K_r$  jest wyznaczany z przebiegu składowej biernej  $F_b$  podanej na charakterystyce statycznej mięśnia (rys. 2.13);
- 2) współczynnik sztywności elementu odzwierciedlającego zachowanie ścięgnię mięśnia pierzastego  $K_t$  jest równy ilorazowi maksymalnej siły składowej czynnej mięśnia  $F_{c-0}$  (generowanej przy optymalnej długości  $L_{M,0}$ ) i różnicy między długością ścięgnię  $L_{T,0}$ , którą ścięgnię osiąga przy tej sile, a długością ścięgnię rozluźnionego  $L_{T,00}$ :

$$K_t = \frac{F_{c-0}}{L_{T-0} - L_{T-00}}; \quad (2.7)$$

- 3) współczynnik sztywności elementu sprężystego  $K_s$  uzyskano z przyjętej przez Zajacę analitycznej zależności, którą opisano równaniem różniczkowym pierwszego rzędu uzależniającym siłę  $F_{SE}$  generowaną przez ten element, maksymalną siłę składowej czynnej  $F_{c-0}$  i optymalną długość mięśnia  $L_{M,0}$ :

$$K_s = \dot{F}_{SE} = \frac{100 \cdot F_{SE} + 10 \cdot F_{c-0}}{L_{M-0}}; \quad (2.8)$$

element kurczliwy generuje siłę  $Q$ , która jest równa iloczynowi sygnału aktywacji mięśnia  $a_{akt} = a_{akt}(t)$  i siły  $F_{CE,A}(L_M)$ . Siła  $F_{CE,A}(L_M)$  jest równa doświadczalnie zmierzonej sile mięśnia całkowicie pobudzonego i przebywającego w skurczu izometrycznym, którego długość wynosi  $L_M$ ; sygnał aktywacji mięśnia  $a_{akt}$  opisano równaniem różniczkowym pierwszego rzędu i uzależniono od sygnału pobudzenia nerwowego  $a_e = a_e(t)$ :

$$\dot{a}_{akt} + \left\{ \frac{1}{\tau_{rise}} \cdot [\tau_z + (1 - \tau_z) \cdot a_e] \right\} \cdot a_{akt} = \frac{a_e}{\tau_{rise}}, \quad (2.9)$$

gdzie:  $\tau_z$  i  $\tau_{rise}$  – stałe czasowe;

do obliczeń praktycznych zamiast równania (2.9) można zastosować uproszczony układ równań:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{akt} &= \frac{1 - a_{akt}}{\tau_{rise}}, & \text{dla} & \quad a_e = 1 \\ \dot{a}_{akt} &= \frac{a_{akt\_min} - a_{akt}}{\tau_{fall}}, & \text{dla} & \quad a_e = 0; \end{aligned} \quad (2.10)$$

gdzie:  $a_{akt\_min}$  – dolna granica sygnału aktywacji  $a_{akt}$ , która jest związana z charakterystyką dynamiczną mięśnia (rys. 2.14);  $\tau_{fall}$  – stała czasowa;

w literaturze można także znaleźć propozycje innych modeli uzależniających aktywację  $a_{akt}$  od pobudzenia nerwowego  $a_e$  [4, 151];

- 4) składową aktywną siłę rozwijaną przez element kurczliwy przedstawiono w następującej postaci:

$$F_{CE} = \left( \frac{a_{akt} \cdot F_{CE\_A}(L_M)}{F_{c\_0}} \right) \cdot F_{CE}(\dot{L}_{CE}). \quad (2.11)$$

W oparciu o powyższe założenia równanie (2.6) można przedstawić w ogólnej postaci:

$$\dot{F} = f_z(F, L_{MT}, \dot{L}_{MT}, a_{akt}). \quad (2.12)$$

Model Zajaca odzwierciedla zachowanie zarówno mięśnia pierzastego, jak i mięśnia długiego, uwzględniając jednocześnie pobudzenia pochodzące od układu nerwowego. Używanie parametrów niezbędnych do korzystania z tego modelu wymaga przyjęcia szeregu założeń upraszczających.

W kolejnych latach zaproponowano szereg zmodyfikowanych modeli mięśni Zajaca. W [86, 87] opisano zmodyfikowany model, który przedstawiono na rys. 2.17.b. Model ten zawiera część elementów uwzględnionych w modelu podstawowym (rys. 2.17.a) oraz dwa dodatkowe elementy: element masowy  $m$ , który opisuje masę mięśnia, oraz element lepki o współczynniku tłumienia  $L_s$ . Zachowanie tego modelu jest opisane równaniem:

$$m \cdot \ddot{L}_M \cdot \cos(\alpha_p) = F_{Kt} - F_{Ks} - F_{Ls} - \underbrace{\left[ \sigma_{max} \cdot PCSA \cdot f_L(L_M) \cdot f_V(\dot{L}_M) \cdot a_{akt} \right]}_{F_Q}, \quad (2.13)$$

w którym siła ściągna  $F_{Kt}$  jest równoważona przez sumę siły bezwładności  $m \cdot \ddot{L}_M \cdot \cos(\alpha_p)$  pochodzącej od elementu masowego  $m$  oraz sił oddziaływania elementu szeregowego  $F_{Ks}$ , elementu lepkiego  $F_{Ls}$  i elementu kurczliwego  $F_Q$ . W równaniu tym oznaczono:  $\sigma_{max}$  – maksymalne naprężenie mięśnia;  $f_L(L_M)$  – zależność między siłą całkowitą mięśnia, a jego długością (charakterystyka statyczna);  $f_V(L_M)$  – zależność między siłą całkowitą mięśnia a jego prędkością kurczenia się (charakterystyka dynamiczna).

W [136] zaproponowano zmodyfikowaną postać modelu Zajaca, w którym nie uwzględniono kąta pierzastości, a charakterystykę statyczną i charakterystykę dynamiczną przyjęto w postaci funkcji analitycznych. Siłę  $F$  modelu mięśnia uzależniono od iloczynu siły całkowitej mięśnia w skurczu izometrycznym  $F_{izo}$ , sygnału aktywacji mięśnia  $a_{akt}$ , charakterystyki statycznej  $f_{L1}(L_{MT} - L_M)$  mającej postać funkcji hiperbolicznej (2.15) i charakterystyki dynamicznej  $f_v(L_{MT})$ , w postaci zależności:

$$F = F_{izo} \cdot f_{L1}(L_{MT} - L_T) \cdot f_v(\dot{L}_{MT}) \cdot a_{akt}, \quad (2.14)$$

gdzie:

$$f_{L1}(L_{MT} - L_T) = 1 - \left( \frac{L_{MT} - L_T - L_{M\_0}}{a_1^z \cdot L_{M\_0}} \right)^2, \quad (2.15)$$

$$\frac{a_3^z + f_v(\dot{L}_{MT})}{\frac{\dot{L}_{MT}}{a_2^z} + a_f} = (a_3^z + 1) \cdot a_3^z, \quad (2.16)$$

zaś  $a_i^z$  ( $i = 1, 2, 3$ ) –  $i$ -ty współczynnik ( $a_1^z = 0,65$ ,  $a_2^z = 7 \cdot L_{M_0}$ ,  $a_3^z = 0,25$ ).

Do rozwiązywania odwrotnego zadania dynamiki w [11, 16, 22, 52, 75, 87, 114] zaproponowano także obliczanie całkowitej siły mięśnia, jako iloczynu jego *siły właściwej* oraz maksymalnej powierzchni poprzecznego przekroju fizjologicznego PCSA, przy czym siłę właściwą należy przyjmować z przedziału 20÷40 N/cm<sup>2</sup>. Metoda ta dotyczy wytrzymałości tkanki mięśniowej i z pewnym przybliżeniem może ona być stosowana tylko do stanów ustalonych (np. stabilizacja przedramienia przy zadanym kącie obrotu), w których siła całkowita mięśnia nie ulega zmianie zarówno pod wpływem pobudzeń pochodzących ze strony układu nerwowego, jak i współpracy pozostałych mięśni zespołu.

### 2.2.2.2. Modele dwuwymiarowe i trójwymiarowe

Pierwszy model mięśnia o parametrach rozłożonych w płaszczyźnie zaproponował twórca ślizgowej teorii skurczu H. Huxley (por. p. 2.1.1.1). Odpowiedzią tego modelu jest funkcja  $n_H$ , która opisuje rozkład mostków poprzecznych (tzn. połączeń aktynowo-miozynowych) w pojedynczym sarkomerze i pozwala na obliczenie siły rozwijanej przez mięsień [120, 170]. Poszukiwanie funkcji rozkładu mostków poprzecznych  $n_H = n_H(x_H, t)$ , która zależy od zmiennej czasu  $t$  i przemieszczenia mostków (tzn. skurczu połówki sarkomeru)  $x_H$ , opiera się na rozwiązaniu różniczkowego równania cząstkowego:

$$\frac{\partial n_H(x_H, t)}{\partial t} = \frac{\partial n_H(x_H, t)}{\partial t} - \dot{x}_H(t) \cdot \frac{\partial n_H(x_H, t)}{\partial x_H}, \quad (2.17)$$

gdzie:  $\dot{x}_H(t)$  – prędkość kurczenia się połówki sarkomeru.

W celu rozwiązania równania (2.17) Huxley przyjął założenie, że prędkość funkcji rozkładu mostków poprzecznych  $\dot{n}_H(x_H, t)$  zależy wyłącznie od funkcji uwzględniającej dwa niezależne parametry – prędkość łączenia się mostków  $f_H(x_H)$  (związaną z energią metaboliczną [16, 152]) i prędkość ich rozłączenia  $g_H(x_H)$ :

$$\frac{\partial n_H(x_H, t)}{\partial t} - \dot{x}_H(t) \cdot \frac{\partial n_H(x_H, t)}{\partial x} = f_H(x_H) \cdot [1 - n_H(x_H, t)] - g_H(x_H) \cdot n_H(x_H, t). \quad (2.18)$$

Po otrzymaniu niezadowolających wyników Huxley w roku 1975 zaproponował uzależnienie prędkości funkcji rozkładu mostków poprzecznych  $\dot{n}_H(x_H, t)$  od czterech parametrów:

$$\begin{aligned} \dot{n}_H(x_H, t) = & f_H(x_H) \cdot [1 - n_H(x_H, t)] - g_H(x_H) \cdot n_H(x_H, t) - \\ & - \dot{f}_H(x_H) \cdot n_H(x_H, t) + \dot{g}_H(x_H) \cdot [1 - n_H(x_H, t)]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dodatkowo przyjęto, iż prędkość łączenia się mostków  $f_H(x_H)$  nie zależy od prędkości ich rozłączenia  $g_H(x_H)$ . Uwzględniając (2.19), zależność pomiędzy prędkościami [ $f_H(x_H)$  lub  $g_H(x_H)$ ] a ich pierwszymi pochodnymi [ $\dot{f}_H(x_H)$  lub  $\dot{g}_H(x_H)$ ] przedstawiono w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{f_H(x_H)}{\dot{f}_H(x_H)} &= \exp\left[\frac{-(A_{1H} - A_{0H})}{K_B T_H}\right] \\ \frac{g_H(x_H)}{\dot{g}_H(x_H)} &= \exp\left[\frac{-(A_{0H} - A_{1H} - \varpi)}{K_B T_H}\right], \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdzie:  $A_{0H}$  – zmiana energii stanu rozłączenia się mostków;  
 $A_{1H}$  – zmiana energii stanu łączenia się mostków;  
 $T_H$  – temperatura absolutna;  
 $K_B$  – stała Boltzmana;  
 $\varpi$  – energia uwalniana podczas hydrolizy jednej molekuly ATP (adenozynotrifosforanu) do ADP (adenozynodifosforanu).

Zmodyfikowany model zachodzenia skurczu (2.20) pozwala uzyskiwać wyniki tylko częściowo zgodne z wynikami doświadczalnymi i dlatego nadal są podejmowane próby jego ulepszenia [146, 170].

Uwzględniając sprzęgające się ze sobą procesy mechaniczne, chemiczne i termiczne, P.I. Usik zaproponował *trójwymiarowy model mięśnia* [120]. Do wyprowadzenia związków konstytutywnych i bilansów energetycznych wykorzystano w nim zasady: mechaniki continuum, przebiegów procesów chemicznych i termodynamiki procesów nieodwracalnych. Tkankę mięśniową potraktowano jako nieściśliwy ośrodek ciągły (objętość mięśnia nie ulega zmianie) i wieloskładnikowy o jednorodnych właściwościach materiałowych. Jest on opisany w postaci dwóch faz (podlegających równym i bardzo małym odkształceniom): fazy pierwszej, obejmującej otoczenie włókienek kurczliwych, i fazy drugiej, obejmującej włókienka kurczliwe. Ponadto założono, iż ośrodek jest nieruchliwy (o bardzo małej prędkości poruszania się), który podlega działaniu pola grawitacyjnego i jest opisany za pomocą teorii bezmomentowej. Oprócz tego założono, iż posiada on izotropowe właściwości poprzeczne oraz lepkosprężyste właściwości podłużne: faza pierwsza posiada właściwości sprężyste, zaś faza druga – lepkosprężyste (uwzględniono zachodzące w miofibrylach reakcje chemiczne, w których energia jest zamieniana na pracę skurczu). Na granicy faz może dochodzić do przechodzenia niektórych składników, które posiadają równe prędkości. Mogą one zmieniać swoją masę na skutek: wymiany między fazą pierwszą a otoczeniem (mięsień nie jest izolowany cieplnie); wymiany międzyfazowej; reakcji chemicznych w fazie drugiej. Ściągną mięśnia potraktowano jako materiał o nieskończenie dużych współczynnikach sztywności, które przekazują do mięśnia oddziaływanie skupionych sił zewnętrznych. Ściągną nie ograniczają zmian postaci mięśnia. Właściwości ośrodka są opisane z wykorzystaniem rachunku tensorowego. Przedstawiony przez Usika model matematyczny wymaga sformułowania warunków początkowych i brzegowych, które są niezbędne do uzyskania odpowiedzi modelu na zadane wymuszenie.

Intensywny rozwój technik obliczeniowych w ostatnich latach umożliwił wykorzystanie metody elementów skończonych (MES) do modelowania zachowania mięśni [39]. Model matematyczny mięśnia jest tu przedstawiony jako układ o bardzo dużej liczbie równań różniczkowych. Na etapie rozwiązywania układ ten jest przekształcany do układu równań algebraicznych. Modele MES mięśnia w większości przypadków opisują zachowanie mięśnia w stanach statycznych. Do modelowania stanów dynamicznych są stosowane modele quasi-statyczne. Podstawowym problemem jest trudność w uzyskaniu wiarygodnych stałych materiałowych, które opisują właściwości mechaniczne przekrojów wzdłużnych i poprzecznych modelu mięśnia.

W [79] zachowanie mięśnia potraktowano jako zdyskretyzowane continuum materialne opisane za pomocą MES. Elementy skończone modelują włókna mięśniowe umieszczone równolegle do długiej osi mięśnia. W stanie pasywnym zachowanie tych elementów

opisano modelem hipersprężystym, zaś w stanach aktywnych uzależniono od mechanicznych właściwości włókien kurczliwych. Z kolei w [12-14] model zachowania mięśnia przedstawiono jako zdyskretyzowaną strukturę kompozytową zawierającą umocnione włókna, będące włóknami mięśniowymi. Elementy skończone modelujące włókna mięśniowe przedstawiono jako struktury quasi-nieściśliwe o izotropowych właściwościach poprzecznych i hipersprężystych właściwościach podłużnych. Należy zwrócić uwagę, iż dla omawianych trójwymiarowych modeli zachowania mięśnia przeprowadzono jedynie symulacje numeryczne dla stanów statycznych. Parametry modelu przyjmowano na podstawie charakterystyki statycznej włókna mięśniowego oraz szeregu upraszczających założeń, np. metodę liniowego skalowania wielkości. Z kolei w [93] do opisu charakterystyk statycznych i dynamicznych włókien mięśniowych trójwymiarowego modelu mięśnia zastosowano ciągłe funkcje analityczne, których przebieg w wyznaczonym zakresie jest zbliżony do charakterystyki statycznej i dynamicznej mięśnia rzeczywistego (lub włókien mięśniowych).

Do badań w zakresie biomechaniki zderzeń w [100] zaproponowano dwa trójwymiarowe modele mięśnia niepobudzonego. W oparciu o zasady MES modele te utworzono jako połączenie: elementów hipersprężystych (Model 1) i liniowych elementów sprężystych o współczynnikach Younga nieliniowo zależnych od odkształceń (Model 2). Poprzeczne przekroje modelu mięśnia potraktowano jako obszary o właściwościach izotropowych. Weryfikację tych modeli przeprowadzono za pomocą statycznej próby osiowego ściskania mięśni świńskich i wołowych, uzyskując zgodność pomiędzy wynikami symulacji zachowania Modelu 1 a wynikami badań doświadczalnych.

Warto zwrócić uwagę, że w wyniku badań numerycznych z wykorzystaniem trójwymiarowego modelu MES mięśnia stwierdzono, iż siła przyczepu jest większa od siły początku mięśnia [172-174]. Kolejne badania doświadczalne potwierdziły ten fakt oraz pozwoliły wyjaśnić, dlaczego sarkomery rozmieszczone proksymalnie są krótsze od sarkomerów rozmieszczonych dystalnie.

### 2.2.3. Modelowanie zachowania zespołu mięśni

Modelowanie zachowania zespołu mięśni polega na rozwiązaniu odwrotnego i/lub prostego zadania dynamiki. Głównym problemem jest tu określenie udziałów poszczególnych mięśni zespołu [70, 119] i/lub współpracy między układem mięśniowym a układem nerwowym człowieka [49, 65, 106].

Wśród metod stosowanych do modelowania zachowania zespołu mięśni można wyróżnić metody:

- 1) oparte na mierzeniu sygnałów EMG (por. p. 2.3.1);
- 2) oparte na technikach optymalizacyjnych (por. p. 2.3.2);
- 3) oparte na redukcji lub doborze niewiadomych [142]; w pierwszym podejściu kilka niewiadomych sił mięśni jest zastępowanych jedną siłą lub wprowadza się związki analityczne pomiędzy tymi siłami; w drugim podejściu niektórym składowym mięśniom modelu są przypisywane pewne wartości sił, co pozwala na otrzymanie układu równań posiadającego jednoznaczne rozwiązanie;
- 4) mieszane, będące kombinacją metod 1), 2) i 3);
- 5) opracowane na bazie założeń teorii sieci neuronowych, logice rozmytej itp.

Podczas modelowania zachowania zespołu mięśniowego akton mięśniowy (opisujący siłę mięśnia) może być przedstawiony w postaci siły:

- niezależnej od wewnętrznych i zewnętrznych czynników [128];
- będącej skutkiem działania szeregu czynników zależnych od właściwości mechanicznych mięśni i pochodzących od układu nerwowego (por. p. 2.2.2).



Oddziaływanie aktora rozmieszczonego w przestrzeni można opisać za pomocą [56, 70, 92, 123, 128, 129]:

- jednej siły, która jest skierowana wzdłuż linii łączącej przyczep i początek mięśnia;
- kilku sił  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), które są skierowane wzdłuż linii łączących  $i$ -ty pseudoprzyczep z  $i$ -tym pseudopoczątkiem, przy czym zakłada się całkowity brak tarcia pomiędzy powierzchnią kości a dotykającą ją powierzchnią części mięśnia.

Ramię działania siły aktora mięśniowego ma duży wpływ na wyniki rozwiązania równania dynamiki zespołu mięśni. Do jego określenia najczęściej są używane dwie metody:

- 1) metoda przemieszczenia ścięgna (ang. *tendon displacement method*) [116, 117], w której mierzone jest przemieszczenie nici przymocowanej do mięśnia w różnych położeniach zginania/prostowania i odwracania/nawracania przedramienia. Stosując metodę najmniejszych kwadratów, pomiary te są aproksymowane wielomianem trzeciego lub czwartego stopnia (wielomian wyższego stopnia pozwala uzyskać charakterystykę wyglądzoną). Na końcu długość ramienia jest obliczana jako pierwsza pochodna wielomianu pomnożonego przez minus jeden [37]. Warto zwrócić uwagę, że mięśnie posiadające zerowe ramiona (w niektórych położeniach przedramienia) rozpatrywano jako mięśnie o kilku segmentach działania, wprowadzając punkty owinięcia, będące punktami pseudopoczątków lub pseudoprzyczepów;
- 2) metoda obrazowania [5, 12-14], która pozwala na wyznaczenie ramion działania sił aktonów mięśniowych (kierunki sił są zgodne z przebiegami włókien mięśniowych) ze zdjęć wykonanych metodą tomografii komputerowej, rezonansu magnetycznego, prześwietlenia rentgenowskiego lub innych technik obrazowania.

W celu dokładnego odtworzenia przebiegów włókien mięśniowych albo mięśni wielostawowych w [29, 37, 54] zaproponowano model matematyczny, w którym uwzględniono geometrię lub stereometrię powierzchni omijanych lub owijanych przez mięśnie. Przedstawiono je jako proste figury płaskie i bryły przestrzenne (walec lub sfera).

### 2.2.3.1. Metody oparte na pomiarze sygnałów EMG mięśni

Metody opisane w niniejszym punkcie opracowano przy następujących założeniach:

- sygnał EMG można precyzyjnie zmierzyć na każdym mięśniu za pomocą elektrod wkłuwanych lub elektrod powierzchniowych;
- zmierzony sygnał EMG charakteryzuje się niezakłóconą wartością, która świadczy o sile skurczu badanego mięśnia i/lub stopniu jego aktywacji  $a_{akt}$  [86, 106].

W 1966 roku zespół autorów (A. Morecki, J. Ekiel, K. Fidelus, K. Nazarczuk) zaproponował *metodę określenia udziałów mięśni* [48], która opiera się na dwóch założeniach:

- siła  $i$ -tego mięśnia  $F_i$  jest obliczana jako iloczyn stałego współczynnika  $k_i$  (wyznaczonego doświadczalnie) i bieżącej wartości scałkowanego EMG  $i$ -tego mięśnia  $U_i$ ;
- suma momentów sił rozwijanych przez poszczególne mięśnie jest równoważona z zewnętrznym momentem  $M_{zew}$  działającym na ten staw; na moment ten składa się: moment zewnętrznych sił obciążających  $M_G$ , moment sił ciężkości przedramienia z ręką  $M_Q$ , moment pasywny  $M_{pas}$  pochodzący od sił rozciąganych włókien mięśniowych mięśni nieaktywnych oraz tkanek miękkich (więzadeł, powięzi, torebki stawowej, skóry itp.), moment sił bezwładności  $M_b$  oraz moment sił tarcia w stawie i mięśniach  $M_t$ .

Moment pasywny  $M_{pas}$  ma największą wartość w krańcowych położeniach kończyny, zaś w połowie kąta zakresu ruchów dopuszczalnych wartość tego momentu jest przyjmowana jako zerowa. Moment sił tarcia  $M_t$  jest pomijany, gdyż jego wartość jest mała w porównaniu z wartościami innych momentów [112]. Zgodnie z omawianą metodą, równanie udziałów mięśni przy określonym kącie obrotu  $\alpha$  kończyny ma postać:

$$M_{zew} = \sum_{i=1}^n F_i \left( \frac{l_i(\alpha)}{l_{op}} \right) \cdot \frac{r_i(\alpha)}{F_{op}} \cdot k_i \cdot U_{zi}(\alpha), \quad (2.21)$$

$$U_{zi}(\alpha) = \frac{U_i(\alpha)}{U_0}, \quad (2.22)$$

gdzie:  $U_0$  – stała wartość scałkowanego sygnału EMG;  
 $r_i(\alpha)$  – ramię działania siły  $i$ -tego mięśnia  $F_i$ , która jest rozwijana przy kącie  $\alpha$ ;  
 $F_i \left( \frac{l_i(\alpha)}{l_{op}} \right)$  – funkcja uzależniająca siłę rozwijaną przez  $i$ -ty mięsień  $F_i$  od jego długości  $l_i(\alpha)$  i długości optymalnej, na której jest rozwijana siła optymalna  $F_{op}$ .

Za pomocą zależności (2.21) i (2.22) nie uzyskano jednak zgodności pomiędzy wynikami obliczeń a wynikami badań doświadczalnych. Z tego względu w 1971 roku K. Fidelus zaproponował inne równanie opisujące udziały mięśni:

$$M_{zew} = \sigma \cdot \sum_{i=1}^n r_i(\alpha) \cdot PCSA_i \cdot F_i \left( \frac{l_i(\alpha)}{l_{op}} \right) \cdot \frac{U_i}{F_{op} \cdot U_{i \max}}, \quad (2.23)$$

gdzie:  $\sigma$  – naprężenie mięśnia;  
 $PCSA_i$  – powierzchnia poprzecznego przekroju fizjologicznego  $i$ -tego mięśnia;  
 $U_{i \max}$  – zmierzona maksymalna wartość bieżąca scałkowanego EMG  $i$ -tego mięśnia;  
 $F_i \left( \frac{l_i(\alpha)}{l_{op}} \right)$  – funkcja  $i$ -tego modelu mięśnia, która ma różne postaci dla mięśnia obłego i pierzastego.

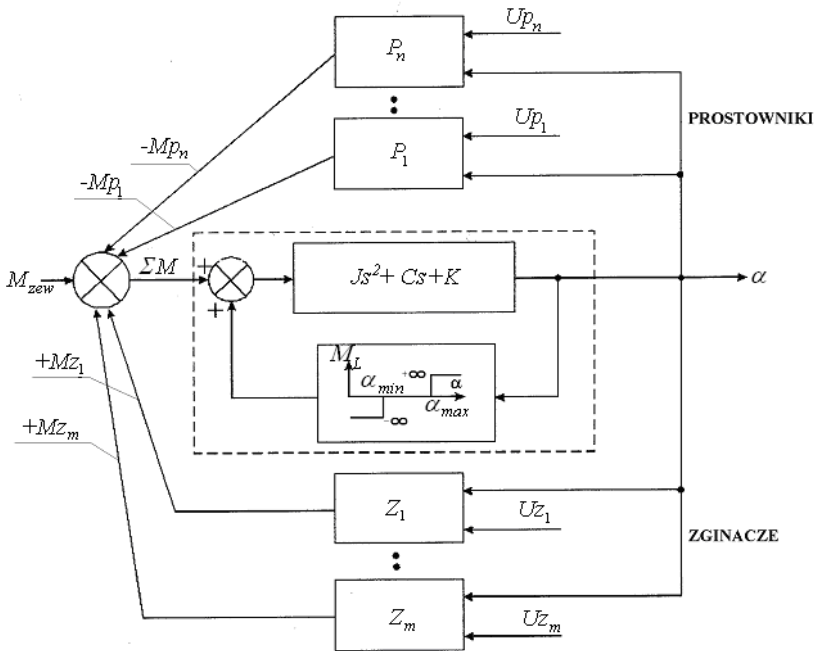
Zmodernizowana metoda określenia udziałów mięśni (2.23) pozwala na oszacowanie udziałów mięśni w stanach ustalonych (stabilizacji kąta kończyny względem wybranej osi obrotu stawu), po uprzednim zmierzeniu i opracowaniu danych o: zewnętrznej sile rozwijanej przez badany zespół mięśni, ramieniu tej siły oraz scałkowanych EMG tych mięśni, które mają największy udział w wykonywaniu wybranej czynności ruchowej.

Podczas zastosowania tej metody do opisu stanów dynamicznych uzyskano wyniki niezadowolające [112]. Z tego względu na początku lat siedemdziesiątych ubiegłego stulecia K. Kędzior zaproponował nowy *model współdziałania mięśni*, który opisuje dynamikę stawu łokciowego w oparciu o następujące założenia (rys. 2.18). Zachowanie każdego mięśnia stawu, który zawiera  $m$  zginaczy i  $n$  prostowników, zamodelowano zgodnie z [81]. Model mięśnia  $j$ -tego zginacza oznaczono  $Z_j$ , a  $i$ -tego prostownika –  $P_i$ . Parametrami wejściowymi modelu mięśnia są: kąt obrotu przedramienia  $\alpha$  i pobudzenie, które oszacowano jako amplitudę scałkowanych potencjałów mięśniowych (dla  $j$ -tego zginacza amplitudę oznaczono  $U_{Z_j}$ , zaś dla  $i$ -tego prostownika –  $U_{n_i}$ ). Parametrem wyjściowym każdego modelu mięśnia jest rozwijany przez niego moment:  $Mz_j$  – przez  $j$ -ty zginacz oraz  $Mp_i$  – przez  $i$ -ty prostownik. Staw opisano jako obiekt regulacji, w którym parametrem wyjściowym jest suma momentów:

$$\Sigma M = -\sum_{i=1}^n Mp_i + \sum_{j=1}^m Mz_j + M_{zew}, \quad (2.24)$$

zaś parametrem wyjściowym – kąt obrotu stawu  $\alpha$ .

Staw potraktowano jako połączenie dwóch członów (rys. 2.18). Pierwszy człon przedstawiono w postaci układu drugiego rzędu, który opisano wielkościami zredukowanymi do osi obrotu stawu: momentem bezwładności części ruchomych kończyny  $J = J(\alpha)$ ; współczynnikiem tłumienia stawu  $C$  i współczynnikiem sztywności stawu  $K$ . Drugi nieliniowy człon ulokowano w pętli dodatniego sprzężenia zwrotnego. Człon ten opisano jako trójpołożeniowy przekaźnik, który zapewnia ruch przedramienia w zakresie ruchów dopuszczalnych. W przypadku, gdy kąt stawu wykracza poza przedział dopuszczalny  $[\alpha_{\min}; \alpha_{\max}]$  (gdzie:  $\alpha_{\min}$  jest minimalny, a  $\alpha_{\max}$  – maksymalny kąt obrotu), to na wejście członu drugiego rzędu jest podawany moment blokujący  $M_L$  o bardzo dużej wartości. W trakcie badań identyfikacyjnych określono moment bezwładności  $J$  i współczynnik tłumienia  $C$ , zaś współczynnik sztywności  $K$  przyjęto jako zerowy [81].



Rys. 2.18. Schemat blokowy modelu współdziałania mięśni zginaczy stawu łokciowego [81]

Równanie opisujące *model współdziałania mięśni Kędzióra* ma postać:

$$J \cdot \ddot{\alpha} + \frac{1}{2} \cdot (\dot{\alpha})^2 \cdot \frac{dJ}{d\alpha} + \underbrace{C(\alpha) \cdot \dot{\alpha} + K(\alpha) \cdot \alpha + M_{zew}}_{M_{pas}} = - \underbrace{\sum_{i=1}^n Mp_i + \sum_{j=1}^m Mz_j}_{M_c}, \quad (2.25)$$

gdzie:  $\frac{dJ}{d\alpha}$  – pierwsza pochodna momentu bezwładności  $J$  względem kąta  $\alpha$ ;

$M_c$  – moment czynny, który napędza staw i jest sumą składowych momentów pochodzących od sił czynnych zginaczy i prostowników;

$M_{pas}$  – moment pasywny będący sumą momentów sił sprężystości  $K(\alpha) \cdot \alpha$  i sił tłumienia  $C(\alpha) \cdot \dot{\alpha}$ .

Określenie udziału każdego mięśnia modelu oparto na dwóch założeniach:

- 1) w warunkach statycznych siła czynna mięśnia jest wprost proporcjonalna do pobudzenia, które jest obliczane jako bezwymiarowa amplituda scałkowanego EMG [81, 112];
- 2) w warunkach dynamicznych siła czynna mięśnia zależy od siły czynnej obliczonej dla warunków statycznych oraz od prędkości skracania się tego mięśnia.

Wychodząc z przyjętych założeń, moment czynny  $i$ -tego mięśnia  $M_{ci}$  zaproponowano obliczać z zależności:

$$M_{ci} = k_i(\alpha) \cdot U_i^0(\alpha) \cdot f_{ci}(\dot{\alpha}) \cdot r_i^c(\alpha) \cdot PCSA_i \cdot \sigma_{\max} \cdot r_{\max} \cdot \chi_i, \quad (2.26)$$

gdzie:  $U_i^0(\alpha)$  – bezwymiarowa amplituda scałkowanego EMG  $i$ -tego mięśnia;

$f_{ci}(\dot{\alpha})$  – funkcja uzależniająca siłę czynną  $i$ -tego mięśnia od prędkości kątowej  $\dot{\alpha}$ ;

$r_i^c(\alpha)$  – współczynnik stosunku ramienia siły  $i$ -tego mięśnia przy kącie  $\alpha$  do ramienia siły, przy którym moment osiąga wartość maksymalną względem osi obrotu w stawie w warunkach statycznych;

$r_{\max}$  – ramię maksymalnego momentu siły względem osi obrotu w stawie w warunkach statycznych;

$\chi_i$  – współczynnik zależny od powierzchni poprzecznego przekroju fizjologicznego  $i$ -tego mięśnia  $PCSA_i$ .

Lewą stronę równania (2.25) można określić za pomocą doświadczalnie wyznaczonych danych kinematycznych, zaś prawa strona zawiera kilka niewiadomych zmiennych. Ta nadmiarowość świadczy o braku jednoznacznego rozwiązania. Z tego względu w [81] do rozwiązania równania zaproponowano techniki optymalizacyjne.

W ostatnich latach zaproponowano także szereg innych modeli opisujących zachowanie zespołu mięśni, w których sumę momentów sił mięśni uzależniono od charakterystyk sygnałów EMG mierzonych:

— wewnątrz mięśni przy różnych kątach badanej kończyny (metoda inwazyjna) [18];

— na powierzchniach mięśni (metoda nieinwazyjna) [127]:

$$M = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{EMG_i}{EMG_{i\_max}} \cdot F_i^{\max} \cdot r_i \right], \quad (2.27)$$

gdzie:  $M$  – moment zespołu  $n$  mięśni działający na badany staw;

$EMG_i$  – chwilowa wartość obwiedni sygnału EMG  $i$ -tego mięśnia;

$EMG_{i\_max}$  – maksymalna wartość obwiedni sygnału EMG  $i$ -tego mięśnia podczas 85% realizacji zadania ruchowego przez układ;

$F_i^{\max}$  – maksymalna siła  $i$ -tego mięśnia działająca na ramieniu  $r_i$ .

Sygnały EMG zmierzone na mięśniach (lub wewnątrz mięśni) stosowano także do weryfikacji jakościowej. Na przykład w [49] weryfikację modelu matematycznego zespołu mięśniowego wykonano poprzez porównanie obliczonych sygnałów aktywacji  $n$  mięśni z przebiegami sygnałów EMG zmierzonych na powierzchni mięśni żywych.

W celu określenia wpływu układu nerwowego na układ mięśniowy zaproponowano wirtualny model kończyny górnej, który symuluje quasi-statyczne ruchy stawu łokciowego podczas skurczów izometrycznych mięśni [106]. Sygnałami wejściowymi są sygnały EMG mierzone na powierzchniach mięśni, które znajdują się w stanie skurczu izometrycznego podczas zginania-prostowania. Na podstawie sygnałów wejściowych są obliczane siły w mięśniach, a następnie moment sił wywierany na staw łokciowy. Na końcu jest obliczany ruch wirtualnego modelu kończyny górnej. Do wyznaczania współczynników nieliniowego

modelu aktywacji zastosowano technikę optymalizacyjną, która polega na minimalizacji kwadratu różnicy pomiędzy momentem mierzonym a momentem obliczonym.

Należy też wspomnieć o modelu nerwowo-mięśniowo-szkieletowym (ang. *neuromusculoskeletal model*) [86, 87]. W modelu tym oszacowanie sił mięśni stawu łokciowego i trajektorii ruchu przedramienia odbywa się poprzez uzyskanie: sygnału EMG (przetworzonego do postaci sygnału informacyjnego dzięki zastosowaniu odpowiednich technik przetwarzania sygnałów, np.: filtrowania, wyznaczania obwiedni, wygładzania, normalizacji); początkowego położenia oraz początkowej prędkości stawu łokciowego. Dane liczbowe do takiego modelu można uzyskać na drodze kolejnych pomiarów realizowanych podczas maksymalnych izometrycznych skurczów mięśni przy zginaniu/prostowaniu w stawie łokciowym, a następnie zastosowania technik optymalizacyjnych do aproksymacji wybranej zależności [105]. Podstawą zamodelowania „przejścia” sygnału EMG w sygnał aktywacji  $a_{akt}$  jest założenie, że skurcz mięśnia jest skutkiem skurczów poszczególnych jednostek motorycznych zawartych w mięśniu.

W literaturze można także znaleźć próby zastosowania analizy statystycznej do badania wpływu prędkości oraz rodzaju ruchu na siłę i EMG mięśni [80].

Należy zwrócić uwagę, że obecnie w praktyce nie można zrealizować założeń podanych na początku niniejszego podpunktu, ponieważ istnieje zbyt wiele czynników niepołączanych, których wpływu nie można zminimalizować podczas mierzenia sygnału EMG na mięśniach (lub wewnątrz mięśni) w organizmie żywym. Z tego względu podczas mierzenia sygnałów EMG, będących podstawą do oszacowania udziału mięśni, trzeba wziąć pod uwagę, że [101, 102, 153]:

- 1) sygnał EMG ma charakter stochastyczny i dlatego wyznaczenie na jego podstawie sygnału informacyjnego (odpowiadającego zachowaniu badanego mięśnia) jest niejednoznaczne;
- 2) zastosowanie elektromiografii powierzchniowej do wyznaczenia sygnału EMG mięśni w stanach dynamicznych jest obciążone dużymi błędami, będącymi skutkami przesunięć mięśni pod skórą, na której są umieszczone elektrody zewnętrzne;
- 3) zastosowanie elektrod wkłuwanych może doprowadzić do uszkodzenia nerwu zaopatrującego jednostki motoryczne mięśnia i wywołać przejściową lub trwałą niewydolność mięśnia; ponadto elektrody wkłuwane pozwalają oszacować kurczliwość mięśnia jedynie w miejscu wkłucia elektrody;
- 4) sygnał EMG mierzony na mięśniu (lub wewnątrz mięśnia) jest zakłócany przez sygnały EMG mięśni sąsiednich;
- 5) do przenoszenia obciążeń i wykonywania ruchów każdy żywy osobnik korzysta z wcześniej wyćwiczonych schematów sterowania mięśniami; stąd wyznaczenie wzorcowych schematów pobudzeń mięśni w poszczególnych czynnościach motorycznych pozwala na oszacowanie jedynie wyników przykładowych;
- 6) opublikowane przez różnych autorów wyniki pomiarów sygnałów EMG mięśni uzyskano za pomocą różnych technik pomiarowych; z tego względu można je stosować wyłącznie do porównawczej analizy jakościowej.

### 2.2.3.2. Metody oparte na technikach optymalizacyjnych

Dynamika zespołu mięśni działających na określony staw jest opisana modelem matematycznym, w którym liczba niewiadomych jest większa od liczby równań lub związków konstytutywnych. Oznacza to, że odpowiedź takiego modelu na zadane wymuszenie jest niejednoznaczna i dlatego trudno jest go zweryfikować doświadczalnie. Dla uzyskania jednoznacznego rozwiązania stosowane są odpowiednie techniki matematyczne (np. optymalizacyjne) lub układ równań jest uzupełniany taką liczbą równań, które pozwalają przekształcić

go w układ jednoznacznie wyznaczalny. Trzeba zwrócić uwagę, że wyjaśnienie, czy przyjęte kryterium optymalizacyjne jest zgodne z fizjologią badanego układu rzeczywistego, wymaga kolejnych badań.

Techniki optymalizacyjne stosowane do rozwiązywania równań modelu zespołu mięśni polegają na poszukiwaniu rozwiązania za pomocą minimalizacji lub maksymalizacji zadanej funkcji celu  $\Omega$  przy przyjętych ograniczeniach, wśród których są zarówno ograniczenia równościowe:

$$M_b = \sum_{i=1}^n F_i \cdot r_i + M_{zew} + M_Q, \quad (2.28)$$

jak i nierównościowe [85]:

$$0 \leq F_i \leq F_{i\_max}. \quad (2.29)$$

Do rozwiązania równań opisujących dynamikę kończyny najczęściej są stosowane:

- *metody optymalizacji statycznej*, która opiera się na minimalizacji lub maksymalizacji zadanej funkcji celu w każdym kroku całkowania; w większości przypadków są stosowane do rozwiązywania odwrotnego zadania dynamiki;
- *metody optymalizacji dynamicznej*, która polega na minimalizacji lub maksymalizacji zadanej funkcji celu w określonym przedziale czasu; często są stosowane do rozwiązywania prostego zadania dynamiki;
- *metody pozwalające na określenie funkcji regresji*, którymi są metody statystyczne polegające na określeniu funkcji regresji, tzn. analitycznej zależności, dla zbioru punktów uzyskanych drogą doświadczalną; przy czym funkcja regresji często jest wyznaczana za pomocą metody najmniejszych kwadratów [24];
- *metody mieszane*, które łączą cechy optymalizacji quasistatycznej, optymalizacji dynamicznej i metod pozwalających na określenie funkcji regresji.

Należy wspomnieć, że są stosowane także metody optymalizacji wielokryterialnej, które łączą kryteria optymalizacji statycznej i/lub optymalizacji dynamicznej [109, 133, 142, 158].

Uwzględniając ograniczenia (2.28) i (2.29) w metodach *optymalizacji statycznej*, najczęściej są używane poniższe funkcje celu  $\Omega$ :

- 1) *kryterium najmniejszej sumy sił* [25, 43, 110, 142, 147]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n F_i \rightarrow \min; \quad (2.30)$$

- 2) *kryterium najmniejszej sumy momentów sił* [138, 142]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n F_i \cdot r_i \rightarrow \min; \quad (2.31)$$

- 3) *kryterium najmniejszej sumy ważonych prac mięśni*, będących sumą iloczynów siły  $i$ -tego składowego mięśnia  $F_i$  i wartości bezwzględnej wydłużenia/skrócenia jego długości  $\Delta x_i$  w określonej pozycji zespołu mięśni [110, 142]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n w_i \cdot (F_i \cdot |\Delta x_i|) \rightarrow \min, \quad (2.32)$$

gdzie:  $w_i$  –  $i$ -ty współczynnik wagowy;

4) *kryterium najmniejszej sumy sił reakcji i/lub sił więzadeł w stawach* [35, 142]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{ls} (|R_{x\_i}| + |R_{y\_i}| + |R_{z\_i}|) \rightarrow \min, \quad (2.33)$$

gdzie:  $R_{x\_i}, R_{y\_i}, R_{z\_i}$  – składowe sił reakcji i/lub sił więzadeł  $i$ -tego mięśnia względem osi  $X, Y, Z$ ;  
 $ls$  – liczba stawów;

5) *kryterium najmniejszej sumy momentów sił reakcji i/lub sił więzadeł w stawach* [142]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{ls} [|M(R_{x\_i})| + |M(R_{y\_i})| + |M(R_{z\_i})|] \rightarrow \min, \quad (2.34)$$

gdzie:  $M(R_{x\_i}), M(R_{y\_i}), M(R_{z\_i})$  – składowe momentów sił reakcji i/lub sił więzadeł  $i$ -tego mięśnia względem osi  $X, Y, Z$ ;

6) *kryterium najmniejszej sumy sił ważonych podniesionych do potęgi  $\lambda$*  [43, 62, 63, 131, 142]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n c_i \cdot F_i^\lambda \rightarrow \min, \quad (2.35)$$

albo wg [128,129,130]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n c_i \cdot |F_i|^\lambda \rightarrow \min, \quad \text{przy } \lambda > 1, \quad (2.36)$$

lub zgodnie z [1, 27, 35, 44, 126, 127, 134]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \left( \frac{F_i}{w_i} \right)^\lambda \rightarrow \min, \quad (2.37)$$

gdzie:  $c_i$  – współczynnik wagowy  $i$ -tego mięśnia (jak  $w_i$  w (2.32));

7) *kryterium maksymalnej wytrzymałości Crowninshilda i Branda*, na podstawie którego opracowano kryterium najmniejszej sumy  $n$  sił ważonych podniesionych do potęgi  $\lambda$  [10, 31, 32, 36, 42, 43, 94, 135, 171]:

$$\Omega = \sqrt[\lambda]{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{F_i}{PCSA_i} \right]^\lambda} = \sqrt[\lambda]{\sum_{i=1}^n [\sigma_i]^\lambda} \rightarrow \min, \quad (2.38)$$

gdzie:  $\sigma_i$  – naprężenie  $i$ -tego mięśnia;

8) *kryterium łagodnego nasycenia* [135, 147, 148]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \left[ 1 - \sqrt{1 - F_i^2} \right] \rightarrow \min; \quad (2.39)$$

9) *kryterium energetyczne (I postać)*, które minimalizuje pracę sił sprężystych mięśnia [39, 82]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{l_i \cdot F_i^2}{E_i \cdot PCSA_i} \right] \rightarrow \min, \quad (2.40)$$

- 10) *kryterium minimalizujące wydatek metaboliczny*, w którym stosunek składowej czynnej siły całkowitej  $i$ -tego mięśnia  $F_i$  do siły maksymalnej  $F_i^{\max}$  wyraża wydajność energetyczną mięśnia [64]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n V_i \cdot \left[ \frac{F_i}{F_i^{\max}} \right]^2 \rightarrow \min, \quad (2.41)$$

gdzie:  $V_i$  – objętość  $i$ -tego mięśnia, która w tym kryterium pełni rolę współczynnika wagowego  $i$ -tego mięśnia;

- 11) *kryterium najmniejszej sumy kwadratów aktywacji mięśni* [136, 151]:

$$\sum_{i=1}^n a_{akt\_i}^2(t) \rightarrow \min, \quad (2.42)$$

$$0 \leq a_{akt\_i}(t) \leq 1, \quad (2.43)$$

gdzie:  $a_{akt\_i}$  – sygnał aktywacji  $i$ -tego mięśnia;

- 12) *kryterium minimalizacji zmęczenia mięśni podczas realizacji wyuczonyj aktywności zespołu mięśni*, w którym zakłada się, że układ nerwowo-mięśniowy obciąża zespół mięśniowy w taki sposób, aby zmaksymalizować czas utrzymania jego aktywności [10, 42]. Kryterium to jest stosowane dla ruchów powolnych i wymaga wprowadzenia dla każdego  $i$ -tego mięśnia analitycznej zależności pomiędzy jego siłą aktualną  $F_i$ , jego siłą maksymalną  $F_i^{\max}$  a czasem utrzymania tej siły  $T_i$ , który zależy od liczby i rodzaju włókien zawartych w tym mięśniu. Maksymalizacja czasu realizacji wyuczonyj aktywności wytrzymałościowej zespołu mięśni jest zapewniana poprzez obciążenie w pierwszej kolejności tych mięśni, które posiadają najmniejszy czas utrzymania siły:

$$\Omega = \max[\min(T_i)] = \max \left\{ \min \left[ \lambda_{1\_i} \cdot \left( \frac{100 \cdot F_i}{F_i^{\max}} \right)^{\lambda_{2\_i}} \right] \right\} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.44)$$

gdzie:  $\lambda_{1\_i}$  i  $\lambda_{2\_i}$  – współczynniki zależne od procentowej zawartości włókien wolnokurczących się w  $i$ -tym mięśniu;

- 13) *kryterium energetyczne (II postać)*, w którym zakłada się, że siły mięśni  $\{F\}$  oraz siły kontaktowe  $\{F_C\}$  należy tak obliczyć, aby zminimalizować wskaźnik energetyczny [52]:

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot \{F\}^T \cdot [W]^F \cdot \{F\} + \frac{1}{2} \cdot e \cdot \{F_C\}^T \cdot [W]^C \cdot \{F_C\} \rightarrow \min, \quad (2.45)$$

$$0 \leq F_C \leq F_C^{\max}, \quad (2.46)$$

gdzie:  $\{F\}^T$  i  $\{F_C\}^T$  – macierze transponowane sił mięśni  $\{F\}$  i sił kontaktowych  $\{F_C\}$ ,  
 $[W]^F$  i  $[W]^C$  – macierze współczynników wagowych sił mięśni  $\{F\}$  i sił kontaktowych  $\{F_C\}$ ,  
 $F_C^{\max}$  – maksymalna siła kontaktowa,  
 $e$  – mała liczba, która zapewnia, iż drugi składnik funkcji celu (2.45) jest zbieżny;



- 14) *kryterium zapewniające stabilność układu (kończyny)* zawiera dodatkowy parametr  $F_s$  (parametr przesunięcia), który powoduje, że obliczone optymalne siły mięśni  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) nie prowadzą do destabilizacji kończyny [50]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n (F_i - F_s)^2 \rightarrow \min; \quad (2.47)$$

- 15) *kryterium uwzględniające procesy metaboliczne* (rozłączanie się mostków poprzecznych i ponowny pobór wapnia do inicjacji skurczu) [126]:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \left[ m_i \cdot \left( \frac{c_{1a} \cdot F_i}{PCSA_i} + \frac{c_{2a} \cdot F_i}{F_{i\_max}(l, i)} \right) \right] \rightarrow \min, \quad (2.48)$$

gdzie:  $m_i$  – masa  $i$ -tego mięśnia;  
 $c_{1a}$  i  $c_{2a}$  – stałe współczynniki;

- 16) *kryterium min/max* zakłada, iż w układzie  $n$  mięśni największa siła  $F_i$  każdego  $i$ -tego mięśnia, którą podzielono przez  $i$ -ty współczynnik wagowy  $w_i$ , ma najmniejszą wartość [135]:

$$\Omega = \max \left\{ \frac{F_i}{w_i} \right\} \rightarrow \min \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.49)$$

Jeżeli do rozwiązania prostego zadania dynamiki są stosowane *metody optymalizacji dynamicznej*, to w większości przypadków polegają one na obliczeniu takich pobudzeń nerwowych mięśni  $a_e$  (lub ich aktywacji  $a_{akt}$ ), które minimalizują lub maksymalizują wybrane kryterium  $\Omega$ . Na podstawie tych pobudzeń można obliczyć siły mięśni i wyznaczyć ruch kończyny, który jest podstawą do weryfikacji modelu zachowania zespołu mięśni [86].

Wśród kryteriów stosowanych do optymalizacji dynamicznej znajdują się:

- 1) *kryterium minimalno-czasowe* stosowane do obliczania sygnałów aktywacji każdego  $i$ -tego mięśnia  $a_{akt\_i}(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) zespołu  $n$  mięśni spełniających zależność (2.43) i zapewniających szybkie ruchy kończyny, które zaczynają się oraz kończą w punktach opisanych zerową prędkością i zerowym przyspieszeniem kończyny [58]:

$$\Omega = \int_{t_0}^{t_k} d\tau \rightarrow \min, \quad (2.50)$$

gdzie:  $t_0$  – chwila początkowa,  
 $t_k$  – chwila końcowa;

- 2) *kryterium maksymalizujące pionową współrzędną  $Y_{cm}$* , którą osiąga środek masy ciała w chwili końcowej  $t_k$ , i ograniczające nadmierny obrót ciała poprzez ograniczenie momentów sił w  $g_l$  więzadłach, jest stosowane do rozwiązania problemu skoku [3]:

$$\Omega = Y_{cm}(t_k) + \frac{[Y_{cm}(t_f)]^2}{2 \cdot g} + w \cdot \int_0^{t_k} \left[ \sum_{j=1}^{g_1} M_{lig\_j}^2 \right] \cdot d\tau \rightarrow \max \quad (2.51)$$

gdzie:  $g$  – przyspieszenie ziemskie,  
 $M_{lig\_j}$  – moment siły działający w  $j$ -tym więzadle,  
 $w$  – współczynnik wagowy;

- 3) kryterium minimalizujące zużycie energii metabolicznej na jednostkę odległości przebytej w przedziale czasu od zera do chwili końcowej  $t_k$  wraz z ograniczeniem momentów sił w  $g_1$  więzadłach pozwala na rozwiązanie problemu kroczenia i obliczania optymalnych pobudzeń nerwowych mięśni  $a_e$  [3, 4]:

$$\Omega = \frac{\int_0^{t_k} \dot{E}_{total} \cdot d\tau}{X_{cm}(t_k) - X_{cm}(0)} + w \cdot \int_0^{t_k} \left[ \sum_{j=1}^{g_1} M_{lig-j}^2 \right] \cdot d\tau \rightarrow \min, \quad (2.52)$$

$$\dot{E}_{total} = \dot{E}_{total-1} + \sum_{i=1}^n (\dot{E}_{total-1-i} + \dot{E}_{total-2-i} + \dot{E}_{total-3-i} + \dot{E}_{total-4-i}), \quad (2.53)$$

gdzie:  $E_{total}$  – prędkość zużycia energii metabolicznej,  $E_{total-1}$  – prędkość przebiegu podstawowego metabolizmu (przemiany materii i energii) całego ciała,  
 $E_{total-1-i}$  – prędkość przebiegu procesu cieplnego w  $i$ -tym mięśniu podczas aktywacji,  
 $E_{total-2-i}$  – prędkość podtrzymania przebiegu procesu cieplnego w  $i$ -tym mięśniu,  
 $E_{total-3-i}$  – prędkość przebiegu procesu cieplnego podczas skracania się  $i$ -tego mięśnia,  
 $E_{total-4-i}$  – moc  $i$ -tego mięśnia,  
 $X_{cm}$  – współrzędna pozioma środka masy ciała;

- 4) kryterium minimalizujące drgania pochodnej przyspieszenia [107];  
 5) kryterium minimalizujące zużycie energii [107];  
 6) kryterium minimalizujące odchylenia od trajektorii ruchu kończyny [107].

W celu rozwiązania prostego zadania dynamiki w [171] zastosowano metodę optymalizacji mieszanej. Łącząc metodę pseudoodwracalną (ang. *pseudoinverse method*) [18] i kryterium maksymalnej wytrzymałości Crowinshielda i Branda (2.38), poszukiwanie rozwiązania oparto na założeniu, że składowa przyspieszenia układu wywołana momentami sił mięśni jest skutkiem superpozycji przyspieszeń rozwijanych przez poszczególne mięśnie układu. Rozwiązanie otrzymane tą metodą zapewnia osiągnięcie zadanej trajektorii ruchu kończyny przy jednocześnie zminimalizowanych naprężeniach składowych mięśni.

Podjęto też próbę określenia, którą z metod optymalizacji, statyczną czy dynamiczną, należy stosować do dokładnego zamodelowania dynamiki wybranej kończyny (tzn. zachowań poszczególnych mięśni i trajektorii ruchu kończyny). Odpowiedź na to pytanie jest możliwa poprzez realizację dwóch etapów obliczeń [4, 123]:

- 1) etap pierwszy (optymalizacja dynamiczna) polega na znalezieniu takich pobudzeń nerwowych mięśni układu, które w wyznaczonym przedziale czasu  $t \in [0; t_k]$  minimalizują kryterium (2.52) oraz spełniają szereg ograniczeń co do wielkości kinematycznych (przyspieszenie, prędkość i kąt obrotu) i pobudzeń nerwowych. Na początku obliczeń są przyjmowane takie początkowe pobudzenia nerwowe mięśni układu, które zapewniają zbieżność numeryczną modelu matematycznego. W obliczeniach przyjęto, iż pobudzenie nerwowe  $a_e(t)$  każdego składowego mięśnia jest związane z jego aktywacją  $a_{akt}(t)$  w następujący sposób (oznaczenia symboli jak w (2.9) i (2.10)):

$$\dot{a}_{akt}(t) = \frac{[a_e(t)]^2 - a_e(t) \cdot a_{akt}(t)}{\tau_{rise}} + \frac{a_e(t) - a_{akt}(t)}{\tau_{fall}}; \quad (2.54)$$

- 2) etap drugi (optymalizacja statyczna, na wejście modelu podawane są wartości wielkości kinematycznych otrzymane w etapie pierwszym) polega na wyznaczeniu w każdym

kroku całkowania  $t$  (gdzie  $t \in [0; t_k]$ ) takich aktywacji każdego  $i$ -tego składowego mięśnia  $a_{akt\_i}(t)$ , które minimalizują kryterium (2.53), przy jednoczesnym spełnieniu szeregu ograniczeń co do wartości momentów sił mięśni:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{w_i \cdot F_i(t)}{PCSA_i} \right]^2 \rightarrow \min, \quad (2.55)$$

przy tym siłę  $i$ -tego mięśnia  $F_i(t)$  zaproponowano zamodelować jako:

- zależną od aktywacji  $a_{akt\_i}(t)$  tego mięśnia oraz funkcji (2.12), która zależy od maksymalnej siły izometrycznej  $F_i^{\max\_izo}$  tego mięśnia oraz jego charakterystyki statycznej  $l_{m\_i}$  i dynamicznej  $v_{m\_i}$ :

$$F_i(t) = a_{akt\_i}(t) \cdot f_z(F_i^{\max\_izo}, l_{m\_i}, v_{m\_i}); \quad (2.56)$$

- zależną wyłącznie od aktywacji  $a_{akt\_i}(t)$  tego mięśnia i jego maksymalnej siły izometrycznej  $F_i^{\max\_izo}$ :

$$F_i(t) = a_{akt\_i}(t) \cdot F_i^{\max\_izo}. \quad (2.57)$$

Z porównania wyników obliczeń aktywacji składowych mięśni uzyskanych metodą optymalizacji dynamicznej i optymalizacji statycznej wynika, że z punktu widzenia dynamiki są one równoważne, tzn. prowadzą do takich samych wyników [4, 123]. Jednak wnioski ten oparto jedynie na symulacji jednego rodzaju ruchu, co oznacza, że nie można go uważać za ogólny. Ponadto autorzy nie podają, jaki wpływ mają błędy numeryczne (powstałe ze stosowania metod przybliżonych do rozwiązania równań różniczkowych i problemów optymalizacji) na wyniki obliczeń.

Zastosowanie do rozwiązania równań dynamiki układu metody optymalizacji statycznej lub dynamicznej wymaga dodatkowo przeprowadzenia analizy wrażliwości. Polega ona na oszacowaniu wpływu zmian parametrów (np.:  $PCSA$ , ramienia działania siły  $i$ -tego mięśnia) ujętych w kryterium (tzn. funkcji celu) na wyniki obliczeń [92, 134].

Kolejną techniką optymalizacyjną, stosowaną do rozwiązania niejednoznacznego zadania dynamiki, jest metoda pozwalająca na określenie funkcji regresji. Metoda ta polega na wyznaczeniu współczynników w przyjętej uprzednio analitycznej zależności pomiędzy przyczynami a skutkami zachodzącymi w układach mięśniowych. Wyniki tej metody są sprawdzane za pomocą testów statystycznych na wyznaczonym poziomie ufności [7, 20, 97÷99, 116]. Stosując tę metodę do oszacowania udziału mięśni zespołu w badanej czynności, warto pamiętać, że metody statystyczne stosowane do opracowywania danych pomiarów opierają się na założeniach, które nie mogą być zweryfikowane doświadczalnie. Przyczyną jest brak ostrych kryteriów wnioskowania, które pozwalają stwierdzić, czy zbiór otrzymanych zmiennych losowych jest rzeczywiście zależny od pewnego parametru (parametrów) lub innego zbioru danych losowych [150].

Do oszacowania udziału mięśni oraz wyznaczania niewiadomych parametrów modelu często stosuje się metodę najmniejszych kwadratów do minimalizacji:

- 1) kwadratu różnicy pomiędzy  $j$ -tym kątem mierzonym  $\Theta_{mierz\_j}$  a  $j$ -tym kątem obliczonym  $\Theta_{obl\_j}$  w  $n$  stawach badanej kończyny [24, 26]:

$$\Omega = \sum_{j=1}^n (\Theta_{mierz\_j} - \Theta_{obl\_j})^2 \rightarrow \min; \quad (2.58)$$

- 2) kwadratu różnicy pomiędzy  $j$ -tym momentem mierzonym  $M_{mierz\_j}$  a  $j$ -tym momentem obliczanym  $M_{obl\_j}$  dla  $n$  mięśni badanej kończyny [2, 56, 105, 106]:

$$\Omega = \sum_{j=1}^n (M_{mierz\_j} - M_{obl\_j})^2 \rightarrow \min. \quad (2.59)$$

Udział mięśni w ruchu lub obrocie układu można również uzyskać poprzez minimalizację funkcji celu  $\Omega$ , która jest pierwiastkiem kwadratowym sumy różnic pomiędzy każdym  $i$ -tym parametrem mierzonym  $M_i^{mierz}$  i obliczanym  $M_i^{obl}$  [87]:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (M_i^{mierz} - M_i^{obl})^2}{n}} \rightarrow \min. \quad (2.60)$$

Każdy zbiór  $n$  parametrów jest aproksymowany funkcją wielomianową stopnia co najmniej drugiego, a sprawdzenie uzyskanych wyników jest przeprowadzane za pomocą testów statystycznych na poziomie istotności nie większym niż 0,05%.

Metody określania funkcji regresji można także zastosować do wyznaczania związków konstytutywnych pomiędzy wielkościami mierzonymi lub do oszacowania parametrów modelu, na przykład:

- 1) w [126] opisano poszukiwanie zależności między poborem tlenu, a kryterium optymalizacyjnym uwzględniającym dwa najważniejsze procesy metaboliczne i kryterium najmniejszej sumy sił ważonych podniesionych do  $m$ -tej potęgi;
- 2) w [2], do weryfikacji hipotezy o liniowej zależności sygnału EMG od momentu siły mięśnia, zastosowano metodę najmniejszych kwadratów i wyznaczono współczynniki modelu w oparciu o zależność między sygnałami EMG mięśni a ich momentami sił;
- 3) w [56] za pomocą metody najmniejszych kwadratów wyznaczano parametry modeli mięśnia typu Hilla (długość rozluźnienia ścięgna, największą siłę izometryczną oraz optymalną długość mięśnia) dla stanów ustalonych kończyny przy założeniu, że część parametrów tych modeli (objętości mięśni, minimalne i maksymalne długości ścięgniomyśsień) została już wcześniej oszacowana;
- 4) w [104] zastosowano metodę najmniejszych kwadratów do określenia analitycznej funkcji (mającej postać krzywej potęgowej) charakterystyki statycznej i charakterystyki dynamicznej mięśnia.

Do rozwiązania zadania optymalnego sterowania mięśniami zastosować można *metodę mieszaną* [151]. Polega ona na: optymalizacji quasistatycznej (stosowanej do rozwiązania odwrotnego zagadnienia dynamiki); optymalizacji dynamicznej (używanej do rozwiązania prostego zagadnienia dynamiki); określeniu funkcji regresji za pomocą zerowania różnicy pomiędzy mierzonymi i obliczanymi wielkościami kinematycznymi (przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie kończyny).

Proces modelowania zachowania zespołu mięśni może być realizowany metodami optymalizacji kilkietapowej (każdy etap może polegać na optymalizacji innej funkcji celu). Na wejście każdego etapu optymalizacji są przekazywane dane, z których część jest obliczona w etapach poprzednich, zaś pozostałe tworzą zbiór zmiennych niewiadomych, jakie muszą być obliczone na tym etapie. Ponadto podczas każdego etapu optymalizacji część parametrów wejściowych można potraktować w postaci wartości zadanych, zaś pozostałą część – w postaci parametrów poszukiwanych [87].

W ostatnich latach prowadzone są badania nad wyjaśnieniem sposobu współdziałania układu nerwowego z układem mięśniowym [60, 61, 143, 144]. Polegają one na pomiarach

sygnału EMG u osób zdrowych i cierpiących na choroby układu mięśniowego (nerwowo-mięśniowego), z których każda wykonuje określone zadanie ruchowe. Wyniki tych badań świadczą, iż osoba zdrowa inaczej steruje mięśniami niż osoba z chorym narządem ruchu. Przypuszcza się, że odmiennosc ta jest skutkiem takiego działania układu nerwowego, który prowadzi do minimalizacji czynników mogących doprowadzić do uszkodzenia narządów organizmu [85]. Dlatego w przypadku modelowania dynamiki wybranego stawu za pomocą metod bazujących na technikach optymalizacyjnych zachowanie mięśni zdrowych i chorych należy opisać odmiennymi kryteriami optymalizacyjnymi [31, 71, 72].

Należy też wspomnieć o modelu neuromyodynamicznym, który odzwierciedla zależność między układem nerwowym a dynamiką kończyn [66]. W modelu tym uwzględniono wpływ sygnałów proprioceptorów, receptorów narządów zmysłu oraz różnych poziomów układu nerwowego na proces sterowania mięśniami. Model układu nerwowego przedstawiono jako układ poddany sterowaniu stochastycznemu, a funkcja rozkładu sygnałów nerwowych ma postać rozkładu Gaussa. Z kolei częstotliwość pobudzenia włókien mięśniowych jest sygnałem sterującym zachowaniem każdego składowego modelu mięśnia.

#### 2.2.4. Uwagi końcowe

Biorąc pod uwagę przedstawiony opis stosowanych modeli zachowania oraz fizjologię mięśni rzeczywistych (por. p. 2.1.1), podczas modelowania dynamiki zespołu mięśni należy pamiętać, że:

1. Mięsień rzeczywisty (pracujący w żywym organizmie) zachowuje się inaczej, niż izolowany mięsień badany w warunkach laboratoryjnych [77, 78]. Fakt ten jest potwierdzony wynikami badań (uzyskanymi podczas inwazyjnego mierzenia siły), które wskazują, iż:
  - a) charakterystyka dynamiczna mięśnia żywego jest inna niż przedstawiona na rys. 2.14 [84];
  - b) charakterystyka statyczna mięśnia (rys. 2.13) nie uwzględnia wpływu historii skurczu mięśnia na jego aktualne zachowanie, zjawiska histerezy oraz procesu zmęczenia, który nie został jeszcze do końca wyjaśniony i ma wpływ zarówno na zachowanie układu nerwowego, jak i układu mięśniowego [7, 8].
2. W obecnie stosowanych modelach parametry mięśni wyznaczano w stanach maksymalnych izometrycznych skurczów tężcowych lub w stanach pełnej aktywacji (wg (2.43) sygnał aktywacji  $a_{akt}$  jest równy „1”). Z punktu widzenia fizjologii takie podejście nie znajduje uzasadnienia, gdyż stany te:
  - a) są energetycznie bardzo kosztowne, ponieważ wzrasta szybkość reakcji chemicznych, która prowadzi do szybkiego zużycia zapasów energetycznych;
  - b) mogą doprowadzić do utraty stabilności układu ruchu oraz urazów jego składowych części.
3. Zastosowanie modelu mięśnia typu Hilla nie pozwala na uwzględnienie zróżnicowanych właściwości mechanicznych, jakie posiada mięsień rzeczywisty [78].
4. Kierunki działania sił badanego mięśnia zależą od przebiegu jego włókien mięśniowych. Niektóre mięśnie są tak rozmieszczone, że oddziałują jednocześnie na dwa (mięśnie dwustawowe) lub więcej stawów (mięśnie wielostawowe). W tym przypadku należy określić wpływ, jaki wywierają mięśnie na każdy ze stawów [131].
5. W niektórych przypadkach dokładne wyznaczenie punktów przyczepu i początku mięśnia jest bardzo trudne, bowiem ścięgna niektórych mięśni zawierają się wokół kości albo mają zmieniony kierunek oddziaływania na skutek omijania narządów

- pomocniczych (np. bloczków). W przypadku modelowania ruchu przedramienia względem ramienia należy wziąć pod uwagę pozycję przedramienia (nawrócona, środkowa lub odwrócona), która ma duży wpływ na dynamikę zespołu mięśni ramienia-przedramienia [58].
6. Niezbędne do modelowania dane geometryczne można otrzymać w czasie pomiarów na osobnikach żywych lub na zwłokach:
    - a) wykonanie pomiarów na osobnikach żywych wiąże się z trudnością znalezienia takiej techniki pomiarowej, która umożliwiłaby prowadzenie nieinwazyjnych i nieszkodliwych dla organizmu badań, będących podstawą do określenia przebiegów włókien mięśniowych oraz punktów zaczepienia badanych mięśni do układu kostnego. Najczęściej stosowane są techniki oparte na badaniach tomograficznych i ultrasonograficznych, rzadziej badania rentgenologiczne oraz metody inwazyjne (rozcięcie skóry i obeerzenie mięśni na żywo u osobnika przebywającego w stanie znieczulenia). Jednak ze względu na niekorzystny wpływ, jaki wywierają te techniki na żywy organizm, posiadają one ograniczony czas stosowania;
    - b) wykonanie pomiarów na zwłokach umożliwia stosowanie metod inwazyjnych, które pozwalają ujawniać kierunki przebiegów włókien mięśniowych i lokalizacji punktów zaczepienia mięśni w układzie kostnym. Jednak właściwości mechaniczne jego tkanek (mięśniowej, kostnej itp.) ulegają zmianie: mięśnie sztywnieją i zmienia się przebieg ich włókien mięśniowych; zaprzestanie odżywiania ścięgien prowadzi do ich wysuszenia, odrywania od kości i przesunięcia punktów ich zaczepienia; zmiany w strukturze torebki stawowej, więzadłach i chrząstkach stawowych oraz brak płynu stawowego zmieniają zakres obrotu kończyny.
  7. Uzyskane w trakcie pomiarów dane geometryczne najpierw muszą być poddane obróbce statystycznej. Dopiero potem można je zastosować do symulacji modelu zachowania zespołu mięśni. Z reguły dane te pochodzą od małego grona osobników i mogą prowadzić do błędnych wyników w przypadku zastosowania do innego grona osobników.
  8. Podczas modelowania ruchów w stawie łokciowym należy uwzględniać wpływ biernych składowych ograniczających ruchy przedramienia, a w niektórych przypadkach pomagających unikać uszkodzenia kończyny górnej. Szczególny ich wpływ przejawia się: podczas przybliżania się przedramienia do granicy ruchów dopuszczalnych i przebywania na tej granicy; przy dużych prędkościach obrotu i wystąpieniu nagłego hamowania z zewnątrz; w czasie uczenia się nowych ruchów.
  9. Sposób, w jaki ośrodkowy (związany ze świadomością) i obwodowy (niezwiązany ze świadomością) układ nerwowy zarządza mięśniami ramienia-przedramienia, w chwili obecnej nie został jeszcze do końca zbadany [40].
  10. Metody numeryczne stosowane w obliczeniu zachowania układów biomechanicznych pozwalają na uzyskiwanie wyłącznie wyników przybliżonych. Przy ocenie wpływu błędów numerycznych na wynik rozwiązania należy podać, jaki algorytm obliczeniowy wykorzystano w symulacjach numerycznych modelu [66, 67].

### 2.3. Zakres monografii

Monografia jest poświęcona modelowaniu zachowania zespołu mięśni ramienia-przedramienia w oparciu o zasady mechaniki, biomechaniki i modelowania matematycznego. Z punktu widzenia mechaniki i biomechaniki, zespół mięśni działający na układ kostny

ramienia-przedramienia jest układem nadmiarowym, bowiem liczba niewiadomych sił mięśni działających na poszczególne stawy przewyższa liczbę równań. Z jednej strony pozwala to zrealizować zadanie ruchowe na wiele sposobów oraz zapewnia szybką kompensację uszkodzonego mięśnia poprzez przejęcie jego funkcji przez inne zdrowe mięśnie układu, zaś z drugiej strony – stanowi podstawowy problem biomechaniki, gdyż nie pozwala na jednoznaczne określenie udziałów poszczególnych mięśni w czynności wykonywanej przez kończynę górną.

Do modelowania zachowania mięśnia szkieletowego poprzecznie prążkowanego na poziomie makroskopowym lub mikroskopowym najczęściej są używane modele fenomenologiczne, np. modele typu Hilla (por. p. 2.2.2). Na poziomie makroskopowym mięsień rzeczywisty jest traktowany jako całość, a jego model matematyczny odzwierciedla działania elementów sprężystych, lepkich i siłowych. Zastosowanie modelu typu Hill'a wymaga znajomości danych liczbowych o: szczytowej sile w skurczu izometrycznym, optymalnej długości włókien mięśniowych, kącie pierzaści, długości ścięgna w stanie nienapiętych i maksymalnej wewnętrznej prędkości skracania mięśnia [38, 56]. Są one określane dzięki przyjęciu odpowiednich założeń i wykorzystaniu liczbowych danych uzyskanych z pomiarów na zwłokach. Dodatkowo wymagana jest znajomość charakterystyk statycznych i dynamicznych każdego mięśnia należącego do rzeczywistego zespołu mięśniowego. Ze względu na brak możliwości wyznaczenia tych charakterystyk na mięśniach żywych wprowadzano je w postaci funkcji analitycznych [24, 93, 136].

W ostatnich latach zaproponowano kilka modeli mięśnia utworzonych w oparciu o MES (por. p. 2.2.2.2). Opisują one zachowanie mięśnia na poziomie mikroskopowym, traktując go jako obszar zdyskretyzowanego kontinuum. Takie podejście wymaga określenia stosunkowo dużej liczby stałych materiałowych, których nie można bezpośrednio oszacować dla mięśnia żywego mającego właściwości anizotropowe. Do opisu właściwości lepkosprężystych elementu skończonego wykorzystywane są charakterystyki statyczne i dynamiczne mięśnia izolowanego, których dopasowanie z poziomu makroskopowego do mikroskopowego nadal pozostaje problemem otwartym.

Modelowanie funkcjonowania zespołu mięśni wybranej kończyny bazuje na danych anatomicznych opisujących przestrzenne rozmieszczenie mięśni. Można je uzyskać z pomiarów na zwłokach [83, 91, 116, 154, 155, 172] albo przy stosowaniu nowoczesnych technik obrazowania, np. tomografii komputerowej lub rezonansu magnetycznego [36, 87]. Wśród tych danych są m. in.: współrzędne początków oraz kierunki osi układów współrzędnych, w których są opisywane ruchy badanych stawów; współrzędne początków i przyczepów mięśni; ramiona sił mięśni niezbędne do obliczenia ich momentów. Dane te stanowią podstawę do utworzenia modelu matematycznego zespołu mięśniowego. W modelu tym funkcjonowanie każdego składowego mięśnia może być opisane w postaci siły niezależnej od jakichkolwiek czynników wewnętrznych czy zewnętrznych lub siły będącej odpowiedzią modelu mięśnia typu Hilla. Rozwiązując proste lub odwrotne zadanie dynamiki, można uzyskać symulacje numeryczne zachowania zespołu mięśni wybranej kończyny. W zadaniu prostym przyczynami są siły mięśni, a skutkiem jest trajektoria ruchu kończyny. Z kolei w zadaniu odwrotnym przyczyną jest trajektoria ruchu kończyny, zaś skutkami są siły mięśni. Do jednoznacznego rozwiązania odwrotnego zadania dynamiki są używane wyłącznie techniki optymalizacyjne [1, 24, 69, 87, 107]. Wynika to z braku wystarczającej liczby związków przyczynowo-skutkowych niezbędnych do jednoznacznego rozwiązania odwrotnego zadania dynamiki. W chwili obecnej podejście to nadal pozostaje bez uzasadnienia fizjologicznego.

Za pomocą stosowanych obecnie modeli zachowania zespołów mięśniowych, w których oddziaływanie każdego mięśnia jest opisane modelem utworzonym na poziomie makroskopowym, nie można uwzględnić szeregu ważnych czynników mających znaczący wpływ na dynamikę ruchu badanej kończyny. Są to:

- 1) zmiana rozkładu mas poszczególnych fragmentów mięśni wskutek przesuwania się brzuśców mięśni pod skórą, która zmienia moment bezwładności kończyny względem przyjętego środka obrotu [81]; zjawisko to ma znaczący wpływ na dynamikę ruchu obrotowego kończyny;
- 2) w czasie obrotu kończyny ze stałą prędkością kątową włókna mięśniowe zespołu mięśni zginaczy i prostowników nie kurczą się ze stałą prędkością [119]; wynika to z faktu, że długości mięśni są nieliniowymi funkcjami kąta obrotu kończyny, stąd prędkości zmiany tych długości też są nieliniowymi funkcjami kąta obrotu oraz prędkości kątowej kończyny;
- 3) badania z zakresu neurofizjologii dowodzą, że w celu realizacji zadania ruchowego układ nerwowy (ośrodkowy lub obwodowy) steruje aktywnością zespołu mięśni z uwzględnieniem informacji zwrotnej o procesach zachodzących w każdym mięśniu; na informację składają się bieżące długości włókien mięśniowych i prędkości ich odkształcenia oraz siły powstające w ścięgnach początku i przyczepu oraz w biernych elementach stawu (w więzadłach, torebce stawowej, skórze), na które oddziałują zespół mięśni [11];
- 4) włókna mięśniowe mięśnia przyczepionego do kości za pośrednictwem ścięgien są zdolne do rozwijania skurczów z różnymi prędkościami, przy czym od długości ścięgien zależy zakres w jakim mogą się zmieniać prędkości włókien mięśniowych brzuśca [137]; ponadto ścięgna, hamując włókna mięśniowe od przeciążenia i urazów, wpływają na zachowanie poszczególnych mięśni i na dynamikę ruchu obrotowego całego zespołu mięśniowego.

Z analizy literatury poświęconej modelowaniu zachowania zespołu mięśni rzeczywistych wynika, iż istnieje potrzeba:

- 1) opracowania takich modeli zachowania zespołu mięśni, które pozwalają dokładniej i bardziej jednoznacznie oszacować siłę każdego mięśnia działającego w rzeczywistym zespole mięśniowym;
- 2) opracowania takiej metody oszacowania parametrów modelu zachowania zespołu mięśni, którą można zrealizować na mięśniach żywych, bowiem stosowanie w obliczeniach danych uzyskanych na mięśniach martwych nie pozwala na prawdziwie odzwierciedlenie zachowania zespołu mięśni rzeczywistych;
- 3) rozwiązania podstawowego problemu biomechaniki bez stosowania technik optymalizacyjnych w celu wyjaśnienia, które kryteria optymalizacyjne są fizjologicznie poprawne.

Z powyższych powodów w monografii podjęto próbę opracowania nowych koncepcji modelowania zachowania mięśnia i zespołu mięśni działających na staw łokciowy. Do realizacji tego zadania sformułowano następujące cele:

1. Opracowanie nowego modelu zachowania mięśnia (modelu mięśnia), który umożliwia:
  - a) otrzymywanie informacji o zachowaniu poszczególnych jego fragmentów;
  - b) symulowanie różnych czynności wykonywanych przez mięsień rzeczywisty.
2. Opracowanie prostego sposobu identyfikacji parametrów modelu mięśnia, który można przeprowadzać na mięśniach żywych.
3. Opracowanie nowego modelu zachowania zespołu mięśni układu ramienia-przedramienia (modelu zespołu mięśni układu ramienia-przedramienia), który można zastosować do oszacowania udziałów mięśni, należących do zespołu mięśni rzeczywistych, w wykonywanej czynności bez stosowania podejścia optymalizacyjnego.



4. Sformułowanie koncepcji sterowania zachowaniem modelu pojedynczego mięśnia jak i zespołu mięśni.

Monografia obejmuje:

- 1) analizę stanu wiedzy na temat fizjologii i neurofizjologii pojedynczego mięśnia oraz zespołu mięśni ramienia-przedramienia;
- 2) przegląd stosowanych modeli mięśnia oraz modeli zespołu mięśni opisujących ruchy zginania-prostowania w stawie łokciowym;
- 3) uzasadnienie celowości podjęcia próby opracowania nowego modelu mięśnia;
- 4) opracowanie nowego modelu mięśnia i takiej metody identyfikacji jego parametrów, którą można realizować na mięśniu rzeczywistym;
- 5) symulacje numeryczne nowego modelu mięśnia i porównanie ich wyników z wynikami otrzymanymi doświadczalnie przez innych autorów;
- 6) opracowanie nowego modelu zespołu mięśni ramienia-przedramienia oraz określenie sposobu weryfikacji tego modelu;
- 7) symulacje numeryczne modelu zespołu mięśni rzeczywistych i hipotetycznych, których siły działania leżą w przestrzeni (model 3D) i na płaszczyźnie (model 2D);
- 8) opracowanie koncepcji sterowania zaproponowanymi modelami mięśnia i zespołu mięśni ramienia-przedramienia;
- 9) sformułowanie wniosków o przydatności zaproponowanego nowego modelu mięśnia i modelu zespołu mięśni ramienia-przedramienia.

## 3. KONCEPCJE NOWYCH MODELI ZACHOWANIA MIĘŚNIA I ZESPOŁU MIĘŚNI

### 3.1. Model mięśnia

#### 3.1.1. Ogólne zasady modelowania

Funkcjonowanie mięśnia pojedynczego można opisać za pomocą kilku *aktonów mięśniowych* (*sił mięśniowych*), które określają charakterystyczne kierunki, zwroty i moduły sił włókien mięśniowych, przebiegających nad osią obrotu wybranego stawu [28, 48]. Liczba wybranych aktonów mięśniowych zależy wyłącznie od budowy i rozmieszczenia mięśnia w żywym organizmie.

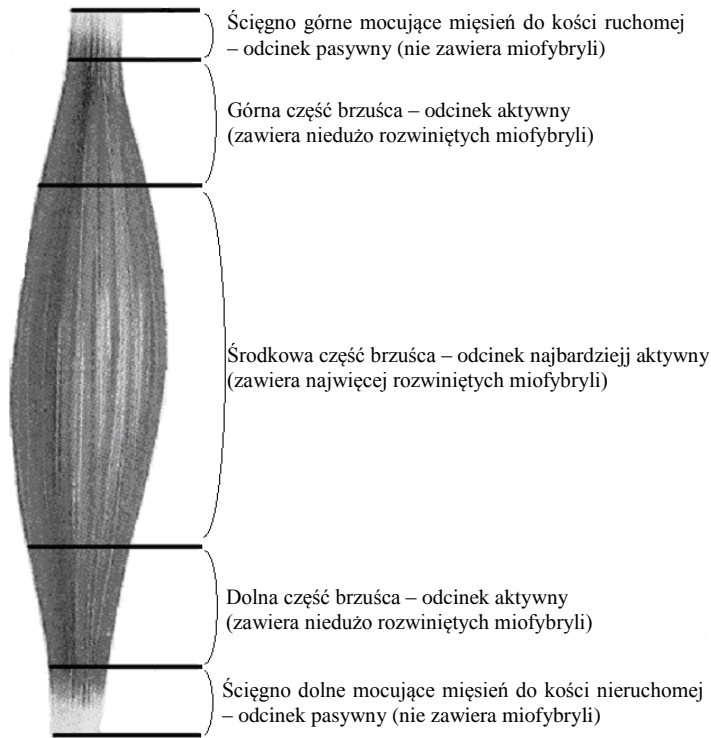
W niniejszej monografii przedstawiono matematyczny model funkcjonowania pojedynczego aktonu mięśniowego, który bazuje na zasadach mechaniki klasycznej.

##### 3.1.1.1. Fizjologiczna podstawa modelowania

W układzie ramię-przedramię znajdują się mięśnie długie, które ze względu na budowę można podzielić na pierzaste i obłe (wrzecionowate) (por. p. 2.1.1.1). Mięsień pierzasty charakteryzuje się skomplikowanym zachowaniem, które można opisać za pomocą jednego albo kilku aktonów mięśniowych. Z kolei zachowanie mięśnia obłego można odzwierciedlić w postaci jednego aktonu mięśniowego, ponieważ kierunek działania jego włókien mięśniowych jest równoległy do osi długiej tego mięśnia.

Do zamodelowania obrotu przedramienia wokół nieruchomego ramienia (por. p. 3.2) przyjęto założenie, że mięśnie działające na staw łokciowy są mięśniami obłymi, które w czasie skurczu nie wywierają na siebie uścisku. Funkcjonowanie mięśnia obłego zamodelowano w postaci jednego aktonu mięśniowego, który działa wzdłuż osi długiej mięśnia i jest zwrócony od przyczepu (*insertio*) mięśnia do jego początku (*origio*).

Fizjologiczna budowa mięśnia obłego charakteryzuje się tym, że wzdłuż jego osi długiej można wyróżnić trzy szeregowo połączone fragmenty o różnych właściwościach mechanicznych, a mianowicie: ścięgno przyczepu (ścięgno górne lub ścięgno dystalne), brzusiec oraz ścięgno początku (ścięgno dolne lub ścięgno proksymalne) (rys. 3.1) [160–168]. Ścięgna są fragmentami przymocowującymi mięsień do kości. Nie posiadają one właściwości kurczliwych. Z kolei brzusiec mięśnia wzdłuż swojej osi długiej jest fragmentem o zmiennych właściwościach kurczliwych. Można go przedstawić w postaci trzech charakterystycznych części: środkowej, górnej i dolnej. Kształt wrzeciona wskazuje na to, iż środkowa część brzusca posiada największą liczbę rozwiniętych miofibryli i dlatego może wygenerować największą siłę skurczu. Część górna (znajduje się bliżej przyczepu wraz z połączeniem ścięgno-brzusiec) i dolna (jest rozmieszczona bliżej początku wraz z połączeniem ścięgno-brzusiec) generują mniejszą siłę skurczu w porównaniu z częścią środkową brzusca.



Rys. 3.1. Fizjologiczna budowa mięśnia obłego

W niniejszej monografii ścięgna nazwano *odcinkami pasywnymi*, bowiem nie biorą one udziału w skurczu mięśnia. Natomiast części brzośca nazwano *odcinkami aktywnymi*, ponieważ aktywnie uczestniczą one w skurczu mięśnia.

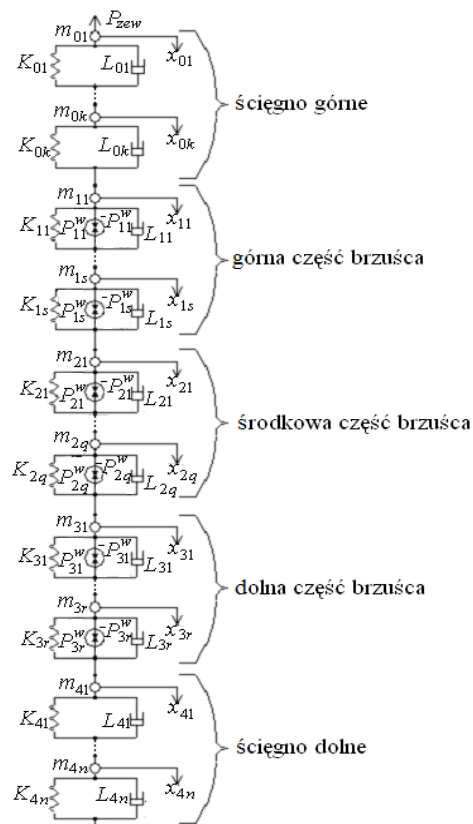
Biorąc pod uwagę podstawowe założenie i zróżnicowaną fizjologiczną budowę mięśnia obłego, do zamodelowania zachowania mięśnia przyjęto dodatkowe założenia:

- 1) reologiczny model mięśnia odzwierciedla działanie rzeczywistego mięśnia obłego, którego siłę (siłę całkowitą) zamodelowano w postaci *siły kurczącej*;
- 2) reologiczny model mięśnia jest złożony z szeregowo połączonych ze sobą odcinków pasywnych, które opisują fragmenty mięśnia nie posiadające właściwości kurczliwych, i odcinków aktywnych, modelujących części z właściwościami kurczliwymi;
- 3) dobierając odpowiednią liczbę szeregowo połączonych odcinków aktywnych i pasywnych oraz określając kolejność ich połączenia, można otrzymać pożądane zachowanie mięśnia przy zadaniu odpowiednich sił wewnętrznych generowanych w odcinkach aktywnych.

### 3.1.1.2. Sposób modelowania

Ogólna zasada modelowania polega na opisanu zachowania mięśnia rzeczywistego, jako układu o zróżnicowanych właściwościach lepkosprężystych (mięsień zawiera dużą ilość płynów wewnątrztkankowych) oraz składającego się z odcinków pasywnych i aktywnych, które mogą się kurczyć pod wpływem przyłożonych do nich sił wewnętrznych.

W modelu mięśnia (rys. 3.2) uwzględniono następujące właściwości mechaniczne: *sprężyste* (w postaci elementów sprężystych o współczynnikach sztywności  $K_{ij}$ ), *lepkie* (w postaci elementów lepkich o współczynnikach tłumienia wiskotycznego  $L_{ij}$ , które w dalszej części monografii nazywa się współczynnikami tłumienia), *masowe* (w postaci elementów o elementach masowych  $m_{ij}$ , które odpowiadają masom wybranych fragmentów mięśnia) i *kurczliwe* (w postaci elementów siłowych generujących dwie siły wewnętrzne  $P_{ij}^w$  i  $-P_{ij}^w$ ). Do przyczepu mięśnia może być przyłożona siła zewnętrzna  $P_{zew}$ , która jest zwrócona w stronę wydłużenia mięśnia i nie może powodować jego aktywnego skurczu. Połączenie ścięgna dolnego z nieruchomym podłożem modeluje zamocowanie mięśnia rzeczywistego do kości nieruchomej. Ogólny model reologiczny mięśnia (rys. 3.2) składa się z szeregowo połączonych odcinków odpowiadających ścięgnu górnemu (części pasywnej mięśnia), górnej części brzusca mięśnia wraz z połączeniem ścięgno-brzusiec (mniej aktywnej części mięśnia), środkowej części brzusca mięśnia (najbardziej aktywnej części mięśnia), dolnej części brzusca mięśnia wraz z połączeniem ścięgno-brzusiec (mniej aktywnej części mięśnia) oraz ścięgna dolnego (części pasywnej mięśnia).



Rys. 3.2. Ogólny model reologiczny mięśnia

Odcinki pasywne, które odzwierciedlają zachowanie niekurczliwych części mięśnia (ścięgna przyczepu i ścięgna początku), zamodelowano jako szeregowe połączenie reologicznych modeli Kelvina-Voighta:

- 1) ścięgno górne, mocujące mięsień do kości ruchomej, zamodelowano w postaci szeregowego połączenia  $k$  odcinków pasywnych. Każdy odcinek składa się z elementu sprężystego o współczynniku sztywności  $K_{0j}$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), elementu lepkiego o współczynniku tłumienia  $L_{0j}$  i elementu masowego o masie  $m_{0j}$ . Przemieszczenie elementu masowego opisuje współrzędna  $x_{0j}$ , natomiast zmianę położenia przyczepu mięśnia – współrzędna  $x_{01}$ . Do masy  $m_{01}$  może być przyłożona zewnętrzna siła rozciągająca  $P_{zew}$ ;
- 2) ścięgno dolne, przytwierdzające mięsień do kości nieruchomej, opisano jako model o szeregowym połączeniu  $n$  odcinków pasywnych. Każdy odcinek składa się z elementu sprężystego o współczynniku sztywności  $K_{4j}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), elementu lepkiego o współczynniku tłumienia  $L_{4j}$  i elementu masowego o masie  $m_{4j}$ . Przemieszczenie elementu masowego opisuje współrzędna  $x_{4j}$ .

Odcinki aktywne, które opisują zachowanie kurczliwych części mięśnia (górną, środkową i dolną część brzusca), zamodelowano jako szeregowe połączenie modeli Kelvina-Voighta. Zawierają one dodatkowe elementy siłowe, które modelują zachodzenie skurczu we fragmentach kurczliwych modelu mięśnia (rys. 3.2). Każdy element siłowy generuje dwie przeciwne zwrócone siły wewnętrzne o takiej samej wartości (tzn. dwójką zerową sił), które działają w kierunku środka odcinka kurczliwego. Fragmenty brzusca o różnej kurczliwości zamodelowano w następujący sposób:

- 1) górną część brzusca mięśnia (część mniej aktywna) zamodelowano za pomocą szeregowego połączenia  $s$  odcinków aktywnych; każdy odcinek składa się z elementu sprężystego o współczynniku sztywności  $K_{1j}$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ), elementu siłowego generującego siły wewnętrzne  $P^w_{1j}$  i  $-P^w_{1j}$ , elementu lepkiego o współczynniku tłumienia  $L_{1j}$  i elementu masowego o masie  $m_{1j}$ ; przemieszczenie elementu masowego opisuje współrzędna  $x_{1j}$ ;
- 2) środkową część brzusca mięśnia (część najbardziej aktywna) zamodelowano jako szeregowe połączenie  $q$  odcinków aktywnych; każdy odcinek składa się z elementu sprężystego o współczynniku sztywności  $K_{2j}$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ), elementu siłowego generującego siły wewnętrzne  $P^w_{2j}$  i  $-P^w_{2j}$ , elementu lepkiego o współczynniku tłumienia  $L_{2j}$  i elementu masowego o masie  $m_{2j}$ ; przemieszczenie elementu masowego opisuje współrzędna  $x_{2j}$ ;
- 3) dolną część brzusca mięśnia (część mniej aktywna) zamodelowano za pomocą szeregowego połączenia  $r$  odcinków aktywnych; każdy odcinek składa się z elementu sprężystego o współczynniku sztywności  $K_{3j}$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ), elementu siłowego generującego siły wewnętrzne  $P^w_{3j}$  i  $-P^w_{3j}$ , elementu lepkiego o współczynniku tłumienia  $L_{3j}$  i elementu masowego o masie  $m_{3j}$ ; przemieszczenie elementu masowego opisuje współrzędna  $x_{3j}$ .

Siłę kurczącą modelu mięśnia, która odzwierciedla całkowitą siłę mięśnia rzeczywistego, można zamodelować przez odpowiedni dobór sił wewnętrznych generowanych w elementach siłowych odcinków aktywnych modelu. Uszkodzony fragment kurczliwy, który utracił możliwość generowania siły kurczliwej, można zamodelować jako odcinek aktywny, którego element siłowy nie generuje żadnej siły wewnętrznej, albo jako odcinek pasywny. Uzależniając współczynniki masowe, sztywności i tłumienia od zmiennych czasu i danych kinematycznych (przemieszczenia, prędkości, przyspieszenia), można zamodelować zmienne właściwości mechaniczne mięśnia.

Fragmenty mięśnia, charakteryzujące się występowaniem równoległe położonych części o różnych właściwościach mechanicznych (np. włókna mięśniowe zdrowe i chorobowo zmienione), można zamodelować w postaci równoległe połączonych modeli Kelvina-Voighta. Sposób modelowania takiego przypadku wyjaśniono na przykładzie odcinka pasywnego ścięgna i odcinka aktywnego brzusca mięśnia. Na rys. 3.3.a przedstawiono model reologiczny dla  $k$ -tego odcinka pasywnego ścięgna górnego: lepko-sprężyste właściwości jednej części odcinka są opisane współczynnikami sztywności  $K_{0k1}$  i tłumienia  $L_{0k1}$ , nato-

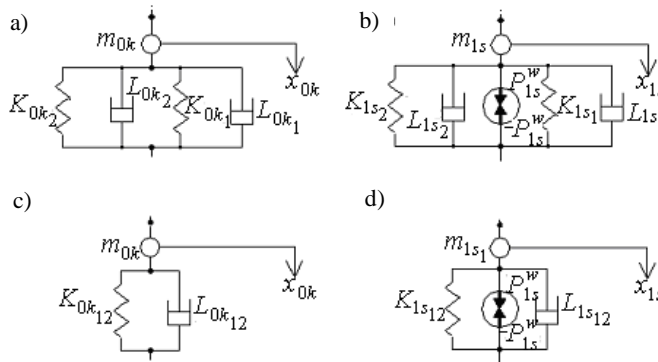
miast lepkosprężyste właściwości drugiej części odcinka – współczynnikami sztywności  $K_{0k2}$  i tłumienia  $L_{0k2}$ . Na rys. 3.3.b zaprezentowano model reologiczny dla  $s$ -tego odcinka aktywnego brzuśca górnego: lepkosprężyste właściwości jednej części odcinka są opisane współczynnikami sztywności  $K_{1s1}$  i tłumienia  $L_{1s1}$ , natomiast lepkosprężyste właściwości drugiej części odcinka – współczynnikami sztywności  $K_{1s2}$  i tłumienia  $L_{1s2}$ .

Równolegle położone elementy sprężyste  $K_{0k1}$  i  $K_{0k2}$  (rys. 3.3.A) lub  $K_{1s1}$  i  $K_{1s2}$  (rys. 3.3.b), a także elementy lepkie  $L_{0k1}$  i  $L_{0k2}$  (rys. 3.3.a) lub  $L_{1s1}$  i  $L_{1s2}$  (rys. 3.3.b) można przedstawić w postaci równoważnego jednego elementu: sprężystego  $K_{0k12}$  (rys. 3.3.c) lub  $K_{1s12}$  (rys. 3.3.d) oraz lepkiego  $L_{0k12}$  (rys. 3.3.c) lub  $L_{1s12}$  (rys. 3.3.d). Dla  $k$ -tego odcinka pasywnego ścięga górnego zachodzi równość:

$$\begin{aligned} K_{0k12} &= K_{0k1} + K_{0k2} \\ L_{0k12} &= L_{0k1} + L_{0k2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

zaś dla  $s$ -tego odcinka aktywnego brzuśca górnego:

$$\begin{aligned} K_{1s12} &= K_{1s1} + K_{1s2} \\ L_{1s12} &= L_{1s1} + L_{1s2} \end{aligned} \quad (3.2)$$



Rys. 3.3. Modele fragmentów mięśnia, charakteryzujące się występowaniem równolegle położonych części o różnych właściwościach mechanicznych: a) i c)  $k$ -tego odcinka pasywnego ścięga górnego, b) i d)  $s$ -tego odcinka aktywnego górnej części brzuśca

Z powyższych wzorów wynika, że metoda modelowania wybranych fragmentów mięśnia o równolegle połączonych częściach (rys. 3.3), charakteryzujących się różnymi właściwościami mechanicznymi, jest zgodna z ogólną zasadą modelowania przedstawioną na początku tego podrozdziału.

### 3.1.1.3. Modelowanie właściwości lepkosprężystych

Z charakterystyki statycznej mięśnia niepobudzonego (rys. 3.4) wynika, że właściwości mechaniczne mięśnia są różne w czasie wydłużania i skracania jego długości [57]. Przyjęto zatem, że odcinki pasywne i aktywne modelu mięśnia podczas wydłużania i skracania są opisane odmiennymi właściwościami lepkosprężystymi.

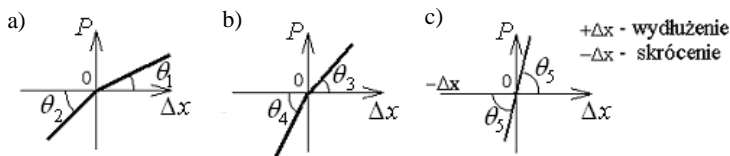
Ze względu na fakt, że mięśnie układu ramię-przedramię podlegają małym wydłużeniom bezwzględny, przyjęto, że lepkosprężyste właściwości odcinka modelu mięśnia nie zmieniają się podczas wykonywania jednego rodzaju pracy (skurcz ekscentryczny/koncentryczny).

Skurcz koncentryczny mięśnia jest bardziej energochłonny niż jego rozciąganie spowodowane działaniem siły zewnętrznej  $P_{zew}$  przyłożonej do przyczepu mięśnia. Właściwość tę uwzględniono, przyjmując założenie, że współczynniki sztywności i tłumienia, opisujące właściwości lepkosprężyste poszczególnych części modelu brzuśca, są większe podczas jego skracania niż wydłużania.

Z badań doświadczalnych wynika, iż wydłużenie bezwzględne ścięgni jest bardzo małe w porównaniu z jego długością. Dlatego przyjęto liniową i jednoznaczną zależność pomiędzy zmianą długości ścięgni a przyłożoną do niego siłą. Oznacza to, że ścięgna mięśnia w czasie swojego skracania i wydłużania posiadają jednakowe właściwości lepkosprężyste.

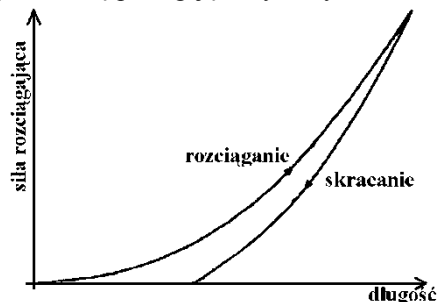
Na skutek pracy mięśnia zachodzą w nim zmiany chemiczne: rośnie stężenie kwasu mlekowego, którego jedna część zostaje wypłukana, a druga zalega w mięśniach [176]. Wyczerpanie się zapasów energetycznych mięśnia prowadzi do stanu zmęczenia, który przejawia się zmniejszeniem siły skurczu w porównaniu z siłą skurczu mięśnia wypoczętego. W zaproponowanym modelu przyjęto zatem, że stany zmęczenia części brzuśca modelu mięśnia są modelowane za pomocą zwiększonych co do wartości współczynników sztywności i tłumienia. Oznacza to, że jeżeli model mięśnia generuje siły wewnętrzne o stałej wartości, to zwiększanie tych współczynników doprowadzi do zmniejszenia jego siły kurczącej.

Niejednoznaczną charakterystykę statyczną „wydłużenie względne ( $\Delta x$ ) – siła ( $P$ )”  $j$ -tej części brzuśca mięśnia zamodelowano w postaci dwóch funkcji liniowych (rys. 3.5.a i rys. 3.5.b), w których tangens kąta nachylenia charakterystyki  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) (stosunek siły  $P$  do wydłużenia względnego  $\Delta x$ ) jest współczynnikiem sztywności. Na rys. 3.5.a przedstawiono nieliniową statyczną charakterystykę  $j$ -tej części brzuśca mięśnia wypoczętego:  $\text{tg}(\theta_1)$  – współczynnik sztywności w czasie wydłużania,  $\text{tg}(\theta_2)$  – współczynnik sztywności w czasie skracania. Natomiast na rys. 3.5.b przedstawiono nieliniową statyczną charakterystykę  $j$ -tej części brzuśca mięśnia zmęczonego:  $\text{tg}(\theta_3)$  – współczynnik sztywności w czasie wydłużania,  $\text{tg}(\theta_4)$  – współczynnik sztywności w czasie skracania.



Rys. 3.5. Statyczna charakterystyka: a)  $j$ -tej części brzuśca mięśnia wypoczętego, b)  $j$ -tej części brzuśca mięśnia zmęczonego, c) ścięgni mięśnia

Dla kroku całkowania  $t_i$  współczynnik sztywności  $K_j$   $j$ -tego odcinka brzuśca mięśnia wypoczętego obliczany jest ze wzoru:



Rys. 3.4. Charakterystyka statyczna mięśnia niepobudzonego [114]

$$K_j(t_i) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\theta_1) & \text{dla } \Delta\dot{x}_j(t_{i-1}) > 0 \text{ i } \left[ \Delta\dot{x}_j(t_{i-1}) = 0 \text{ i } K_j(t_{i-2}) = \operatorname{tg}(\theta_1) \right] \\ \operatorname{tg}(\theta_2) & \text{dla } \Delta\dot{x}_j(t_{i-1}) < 0 \text{ i } \left[ \Delta\dot{x}_j(t_{i-1}) = 0 \text{ i } K_j(t_{i-2}) = \operatorname{tg}(\theta_2) \right] \end{cases}, \quad (3.3)$$

zaś dla mięśnia zmęczonego:

$$K_j(t_i) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\theta_3) & \text{dla } \Delta\dot{x}_j(t_{i-1}) > 0 \text{ i } \left[ \Delta\dot{x}_j(t_{i-1}) = 0 \text{ i } K_j(t_{i-2}) = \operatorname{tg}(\theta_3) \right] \\ \operatorname{tg}(\theta_4) & \text{dla } \Delta\dot{x}_j(t_{i-1}) < 0 \text{ i } \left[ \Delta\dot{x}_j(t_{i-1}) = 0 \text{ i } K_j(t_{i-2}) = \operatorname{tg}(\theta_4) \right] \end{cases}, \quad (3.4)$$

gdzie:  $K_j(t_{i-2})$  – współczynnik sztywności w kroku całkowania  $t_{i-2}$ ;

$\Delta\dot{x}_j(t_{i-1})$  – prędkość wydłużenia bezwzględnego  $j$ -tego odcinka modelu mięśnia, która jest obliczana jako:

$$\Delta\dot{x}_j(t_{i-1}) = \dot{x}_j(t_{i-1}) - \dot{x}_{j-1}(t_{i-1}). \quad (3.5)$$

Właściwości sprężyste ścięga mięśnia zamodelowano w postaci charakterystyki liniowej:

$$K_i = \operatorname{tg}(\theta_5) = \operatorname{const}, \quad (3.6)$$

gdzie:  $K_i$  – współczynnik sztywności ścięga;

$\theta_5$  – kąt nachylenia charakterystyki ścięga (rys. 3.5.c).

Przyjęto, iż współczynnik tłumienia  $L_i$  jest proporcjonalny do współczynnika sztywności odpowiedniego odcinka modelu mięśnia:

$$L_i = \kappa \cdot K_i, \quad (3.7)$$

gdzie:  $\kappa$  – współczynnik proporcjonalności,  $\kappa \in \langle 0; 1 \rangle$  [s] (przyjęto  $\kappa = 0,1$  s).

Zaproponowany model mięśnia, opisujący właściwości lepkosprężyste w postaci nieliniowych funkcji zależnych od rodzaju wykonywanej czynności fragmentów brzuśca, umożliwia uwzględnienie jednocześnie skracanych i wydłużanych odcinków brzuśca, które występują w mięśniu rzeczywistym [6].

Występowanie w mięśniu różnego rodzaju włókien kurczących (wolnokurczących, szybko kurczących i pośrednich, por. p. 2.1.1.1) można zamodelować w postaci odcinka brzuśca, który posiada równoległe połączone elementy sprężysto-lepkie o różnych właściwościach (por. p. 3.1.1.2). Wtedy ich współczynniki sztywności i tłumienia należy dobrać, uwzględniając:

- 1) współczynniki sztywności włókien szybko kurczących są mniejsze w porównywaniu ze współczynnikami sztywności włókien wolnokurczących, gdyż pierwsze posiadają możliwość generacji skurczów wydajniejszych;
- 2) współczynniki tłumienia włókien szybko kurczących są mniejsze od współczynników tłumienia włókien wolnokurczących, ponieważ te pierwsze kurczą się szybciej;
- 3) siły wewnętrzne generowane przez włókna szybko kurczące są większe, ale bardziej krótkotrwałe w porównaniu z siłami wewnętrznymi włókien wolnokurczących.

W przypadku uwzględnienia w modelu nieliniowych właściwości lepkosprężystych, które występują przy zamodelowaniu zmiany długości mięśnia w większym zakresie albo w celu dokładniejszego opisanego jego właściwości mechanicznych, można posłużyć się metodą linearyzacji. W metodzie tej charakterystyki nieliniowe są zastępowane zbiorem charakterystyk zlinearyzowanych na małych odcinkach długości. Pozwala to zachować liniowy model mięśnia i uprościć obliczenia numeryczne.

### 3.1.2. Model reologiczny

W celu uzyskania prostego dynamicznego modelu zachowania mięśnia, który może być przedstawiony w postaci jednego aktonu mięśniowego, zachowanie każdego jego



fragmentu opisano za pomocą jednego odcinka aktywnego lub pasywnego. Wynika to z faktu, że zamodelowanie odpowiednich fragmentów mięśnia za pomocą dużej liczby pasywnych lub aktywnych odcinków prowadzi do problemów obliczeniowych (nawet braku rozwiązania), co więcej z koniecznością stosowania specjalistycznych metod matematycznych.

Przyjęto więc reologiczny model mięśnia, który zawiera szeregowo połączone dwa odcinki pasywne i trzy odcinki aktywne (rys. 3.6.b):

1. Ścięgno górne (część pasywna mięśnia) jest zamodelowane za pomocą jednego odcinka pasywnego, który składa się z elementu masowego (współczynnik masowy  $m_0$  opisuje masę ścięgna przyczepu) i równoległego połączenia dwóch elementów: elementu sprężystego o współczynniku sztywności  $K_0$  oraz elementu lepkiego o współczynniku tłumienia  $L_0$ . Na masę  $m_0$  może oddziaływać zewnętrzna siła rozciągająca  $P_{zew} = P_{zew}(t)$ . Współrzędna  $x_0 = x_0(t)$  opisuje przemieszczenie masy  $m_0$  i odpowiada za zmianę położenia przyczepu mięśnia.
2. Górną część brzuśca (część aktywna mięśnia) zamodelowano za pomocą jednego elementu aktywnego, który składa się z elementu masowego (współczynnik masowy  $m_1$  jest równy masie górnej części brzuśca, włączając połączenie ścięgno-brzusiec) i równoległego połączenia trzech elementów: elementu sprężystego (o zmiennym współczynniku sztywności  $K_1$ ), elementu lepkiego (o zmiennym współczynniku tłumienia  $L_1$ ) oraz elementu siłowego, który generuje dwie równe, ale przeciwnie skierowane wewnętrzne siły  $P_1^w = P_1^w(t)$  i  $-P_1^w = -P_1^w(t)$ . Przemieszczenie masy  $m_1$  opisuje współrzędna  $x_1 = x_1(t)$ .
3. Środkowa część brzuśca (część najbardziej aktywna mięśnia) jest zamodelowana za pomocą jednego elementu aktywnego, który składa się z elementu masowego (współczynnik masowy  $m_2$  jest równy masie środkowej części brzuśca) i równoległego połączenia trzech elementów: elementu sprężystego (o zmiennym współczynniku sztywności  $K_2$ ), elementu lepkiego (o zmiennym współczynniku tłumienia  $L_2$ ) oraz elementu siłowego, który generuje dwie równe, ale przeciwnie skierowane wewnętrzne siły  $P_2^w = P_2^w(t)$  i  $-P_2^w = -P_2^w(t)$ . Przemieszczenie masy  $m_2$  opisuje współrzędna  $x_2 = x_2(t)$ .
4. Dolną część brzuśca (część aktywna mięśnia) zamodelowano za pomocą jednego elementu aktywnego, który składa się z elementu masowego (współczynnik masowy  $m_3$  jest równy masie dolnej części brzuśca, włączając połączenie ścięgno-brzusiec) i równoległego połączenia trzech elementów: elementu sprężystego (o zmiennym współczynniku sztywności  $K_3$ ), elementu lepkiego (o zmiennym współczynniku tłumienia  $L_3$ ) oraz elementu siłowego, który generuje dwie równe, ale przeciwnie skierowane wewnętrzne siły  $P_3^w = P_3^w(t)$  i  $-P_3^w = -P_3^w(t)$ . Przemieszczenie masy  $m_3$  opisuje współrzędna  $x_3 = x_3(t)$ .
5. Ścięgno dolne (część pasywna mięśnia) jest zamodelowane za pomocą jednego elementu pasywnego, który składa się z elementu masowego (współczynnik masowy  $m_4$  jest równy masie ścięgna początku) i równoległego połączenia dwóch elementów: elementu sprężystego (o współczynniku sztywności  $K_4$ ) i elementu lepkiego (o współczynniku tłumienia  $L_4$ ). Element sprężysty i element lepki połączone są z nieruchomym podłożem. Połączenie to odpowiada zamocowaniu ścięgna dolnego do kości nieruchomej. Przemieszczenie masy  $m_4$  opisuje współrzędna  $x_4 = x_4(t)$ .

Na podstawie tak przyjętego modelu zachowania mięśnia można śledzić przebiegi jego wybranych charakterystycznych odcinków, które są określane przez przemieszczenia punktów (rys. 3.6):

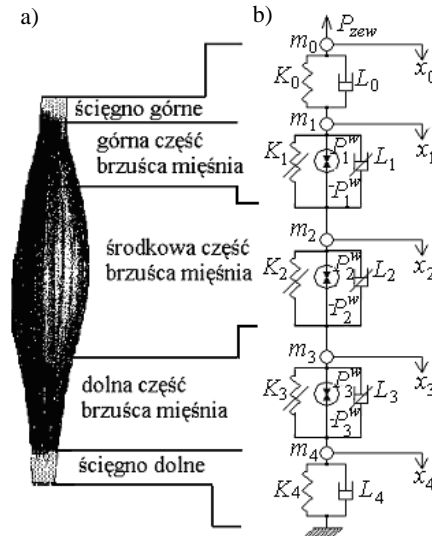
$x_0(t)$  – przyczepu mięśnia,

$x_1(t)$  – pomiędzy ścięgiem górnym a górną częścią brzuśca (powyżej połączenia ścięgno-brzusiec),

$x_2(t)$  – pomiędzy górną a środkową częścią brzuśca,

$x_3(t)$  – pomiędzy środkową a dolną częścią brzuśca,

$x_4(t)$  – pomiędzy dolną częścią brzuśca a ścięgnem dolnym (poniżej połączenia ścięgno-brzusiec).



Rys. 3.6. Model mięśnia: a) podział mięśnia na fragmenty, b) reologiczny model mięśnia

Zaproponowany model zachowania mięśnia uwzględnia odmienne lepkościowe właściwości odcinków brzuśca mięśnia w czasie ich skracania i wydłużania, co pozwala na zamodelowanie ośmiu różnych stanów mięśnia (tab. 3.1).

**Tablica 3.1**

Modelowane stany mięśnia

Nr stanu brzuśca	Górna część brzuśca	Środkowa część brzuśca	Dolna część brzuśca	Opis stanu
1	+	+	+	mięsień jest całkowicie wydłużony
2	+	+	-	odcinek dolny brzuśca się skraca, a jego odcinki środkowy i górny są wydłużane
3	+	-	+	środkowy odcinek brzuśca się skraca a jego odcinki dolny i górny są wydłużane
4	+	-	-	odcinki dolny i środkowy brzuśca się skracają a jego górny odcinek jest wydłużony
5	-	+	+	odcinek górny brzuśca się skraca, a jego odcinki środkowy i dolny są wydłużane
6	-	+	-	odcinki górny i dolny brzuśca się skracają, a jego środkowy odcinek jest wydłużony
7	-	-	+	odcinki dolny i środkowy brzuśca się skracają, a jego dolny odcinek jest wydłużony
8	-	-	-	mięsień całkowicie się skraca

Oznaczenia: „-” – skracanie; „+” – wydłużanie

### 3.1.3. Model matematyczny

Model matematyczny opisujący zachowanie mięśnia (rys. 3.6.b) jest układem pięciu równań różniczkowych drugiego rzędu:

$$\begin{aligned}
 m_0 \cdot \ddot{x}_0 + L_0 \cdot (\dot{x}_0 - \dot{x}_1) + K_0 \cdot (x_0 - x_1) &= -P_{zew}(t) \\
 m_1 \cdot \ddot{x}_1 + L_0 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + K_0 \cdot (x_1 - x_0) + L_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_1 \cdot (x_1 - x_2) &= P_1^w(t) \\
 m_2 \cdot \ddot{x}_2 + L_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_1 \cdot (x_2 - x_1) + L_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + K_2 \cdot (x_2 - x_3) &= P_2^w(t) - P_1^w(t) \\
 m_3 \cdot \ddot{x}_3 + L_2 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + K_2 \cdot (x_3 - x_2) + L_3 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + K_3 \cdot (x_3 - x_4) &= P_3^w(t) - P_2^w(t) \\
 m_4 \cdot \ddot{x}_4 + L_3 \cdot (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + K_3 \cdot (x_4 - x_3) + L_4 \cdot \dot{x}_4 + K_4 \cdot x_4 &= -P_3^w(t),
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

które można przedstawić w zapisie macierzowym w postaci:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{P}_{zew} \cdot \mathbf{H}_z + \mathbf{H}_w \cdot \mathbf{p}_w,$$

gdzie:  $\mathbf{M}$  – macierz mas:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{L}$  – macierz tłumienia:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_0 & -L_0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_0 & L_0 + L_1 & -L_1 & 0 & 0 \\ 0 & -L_1 & L_1 + L_2 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & -L_2 & L_2 + L_3 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & -L_3 & L_3 + L_4 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{K}$  – macierz sztywności:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_0 & -K_0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_0 & K_0 + K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 \end{bmatrix},$$

$\ddot{\mathbf{x}}$  – wektor (macierz kolumnowa) przebiegów przyspieszeń wyznaczonych punktów modelu mięśnia:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \text{col}[\ddot{x}_0 = \ddot{x}_0(t), \ddot{x}_1 = \ddot{x}_1(t), \ddot{x}_2 = \ddot{x}_2(t), \ddot{x}_3 = \ddot{x}_3(t), \ddot{x}_4 = \ddot{x}_4(t)],$$

$\dot{\mathbf{x}}$  – wektor (macierz kolumnowa) przebiegów prędkości wyznaczonych punktów modelu mięśnia:

$$\dot{\mathbf{x}} = \text{col}[\dot{x}_0 = \dot{x}_0(t), \dot{x}_1 = \dot{x}_1(t), \dot{x}_2 = \dot{x}_2(t), \dot{x}_3 = \dot{x}_3(t), \dot{x}_4 = \dot{x}_4(t)],$$

$\mathbf{x}$  – wektor (macierz kolumnowa) przemieszczeń wyznaczonych punktów modelu mięśnia:

$$\mathbf{x} = \text{col}[x_0 = x_0(t), x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t), x_4 = x_4(t)],$$

$\mathbf{p}_w$  – wektor (macierz kolumnowa) sił wewnętrznych modelu mięśnia:

$$\mathbf{p}_w = \text{col}[P_1^w = P_1^w(t), P_2^w = P_2^w(t), P_3^w = P_3^w(t)],$$

$\mathbf{H}_z$  – wektor (macierz kolumnowa) lokalizacji sił zewnętrznych modelu mięśnia:

$$\mathbf{H}_z = \text{col}[-1, 0, 0, 0, 0],$$

$\mathbf{H}_w$  – macierz lokalizacji sił wewnętrznych modelu mięśnia:

$$\mathbf{H}_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Do zamodelowania zachowania zespołu mięśni w układzie ramię-przedramię (por. p.3.2), model matematyczny mięśnia zredukowano do układu o jednym stopniu swobody w punkcie przyczepu (por. p. 6.3). W wyniku redukcji otrzymano równanie różniczkowo-całkowe zależne jedynie od przemieszczenia przyczepu mięśnia  $x_0(t)$ :

$$\begin{aligned} & A_2 \cdot \ddot{x}_0(t) + A_1 \cdot \dot{x}_0(t) + A_0 \cdot x_0(t) + \int_0^t \left( \sum_{i=0}^7 B_i \cdot e^{s_i \cdot (t-\tau)} \right) \cdot x_0(\tau) d\tau = \\ & = -P_{zew}(t) + \sum_{j=1}^3 \left[ \int_0^t \left( \sum_{i=0}^7 C_{ij} \cdot e^{s_i \cdot (t-\tau)} \right) \cdot P_j^w(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

gdzie:  $P_j^w(t)$  – wewnętrzna siła generowana przez  $j$ -ty element siłowy;

$A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, \dots, B_7, C_{01}, C_{11}, \dots, C_{71}, C_{02}, C_{12}, \dots, C_{72}, C_{03}, C_{13}, \dots, C_{73}$  – współczynniki zależne od parametrów elementów masowych, sprężystych i lepkich oraz od rodzaju stanu mięśnia (skrócenia czy wydłużenia jego poszczególnych fragmentów);

$s_0, \dots, s_7$  – wartości własne zależne od elementów masowych, sprężystych i lepkich oraz od rodzaju pracy mięśnia;

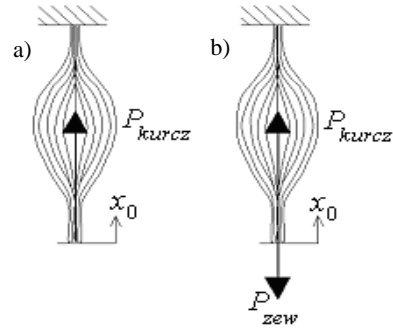
$\tau$  – zmienna czasu stosowana w funkcji podcałkowej.

Równanie (3.9) opisuje przypadek, gdy współczynniki  $A_i, B_i, C_{ik}$  są rzeczywiste i wartości własne  $s_i$  ( $i = 0, \dots, 7; k = 1, 2, 3$ ) są rzeczywiste i jednokrotne. Natomiast w p. 6.3 opisano przypadki występowania zespolonych wartości własnych  $s_i$ .

Zgodnie z fizjologią mięśnia rzeczywistego (może on tylko się kurczyć) siła kurcząca  $P_{kurcz} = P_{kurcz}(t)$  musi równoważyć w każdej chwili czasu  $t$  siłę zewnętrzną  $P_{zew} = P_{zew}(t)$  (rys. 3.7.b):

$$-P_{zew} + P_{kurcz} = 0. \quad (3.10)$$

Oznacza to, że siła kurcząca  $P_{kurcz}$  powinna przyczynić się tylko do skurczu modelu mięśnia. Z tego względu siła ta musi być zwrócona od miejsca przyczepu mięśnia na kości ruchomej do miejsca jego przymocowania na kości nieruchomej. W celu wyjaśnienia zwrotu działania siły kurczącej  $P_{kurcz}$ , na rys. 3.7 przedstawiono pojedynczy mięsień przymocowany do kości nieruchomej. Współrzędna  $x_0$  opisuje przemieszczenie przyczepu przymocowanego do kości ruchomej. Na rys. 3.7.a przedstawiono przypadek zachowania modelu, w którym generowane są siły wewnętrzne, zaś na rys. 3.7.b – przypadek generowania sił wewnętrznych oraz działania dodatkowej siły zewnętrznej  $P_{zew}$ , która jest równoważona przez siłę kurczącą  $P_{kurcz}$  zgodnie z (3.10).



Rys. 3.7. Kierunek działania siły kurczącej  $P_{kurcz}$  modelu mięśnia:  
a) bez obciążenia siłą zewnętrzną,  
b) przy obciążeniu siłą zewnętrzną  $P_{zew}$

Wydzielając osobno przyczyny i skutki, siłę kurczącą  $P_{kurcz}(t)$  przedstawiono w postaci różnicy pomiędzy składową czynną  $P_a(t)$  i składową bierną  $P_b(t)$ :

$$P_{kurcz}(t) = P_a(t) - P_b(t). \quad (3.11)$$

*Składowa czynna (aktywna) siły*  $P_a = P_a(t)$  modeluje działanie wszystkich sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$ ,  $P_3^w(t)$  wygenerowanych w elementach siłowych odcinków aktywnych względem przyczepu modelu mięśnia od chwili początkowej do chwili  $t$ :

$$P_a = \sum_{j=1}^3 \left[ \int_0^t \left( \sum_{i=0}^7 C_{ij} \cdot e^{s_i \cdot (t-\tau)} \right) \cdot P_j^w(\tau) d\tau \right]. \quad (3.12)$$

*Składowa bierna (pasywna) siły*  $P_b = P_b(t)$  modeluje działanie sił oporu wszystkich odcinków modelu mięśnia względem jego przyczepu od chwili początkowej do chwili  $t$ :

$$P_b = A_2 \cdot \ddot{x}_0(t) + A_1 \cdot \dot{x}_0(t) + A_0 \cdot x_0(t) + \int_0^t \left( \sum_{i=0}^7 B_i \cdot e^{s_i \cdot (t-\tau)} \right) \cdot x_0(\tau) d\tau. \quad (3.13)$$

Znając siłę kurczącą  $P_{kurcz}(t)$ , można wyznaczyć, w jakim stanie znajduje się model mięśnia w każdej chwili czasu  $t$ :

- $P_{kurcz}(t) > 0$  oznacza, że mięsień ciągnie;
- $P_{kurcz}(t) < 0$  wskazuje, że mięsień powinien pchać, ale stan ten jest sprzeczny z funkcją mięśni w żywym organizmie. Dlatego w celu uniknięcia efektu ściskania mięśnie rzeczywiste znajdują się w stanie wstępnego rozpięcia;
- $P_{kurcz}(t) = 0$  oznacza, że mięsień znajduje się w stanie równowagi dynamicznej.

### 3.1.4. Weryfikacja doświadczalna modeli

Weryfikacja doświadczalna modeli polega na analizie jakościowej i ilościowej wielkości mierzonych na mięśniu rzeczywistym i obliczanych numerycznie, które są odpowiedzią modelu zachowania mięśnia na zadane wymuszenie (por. p. 3.1.7). Przyjęto, że podstawą

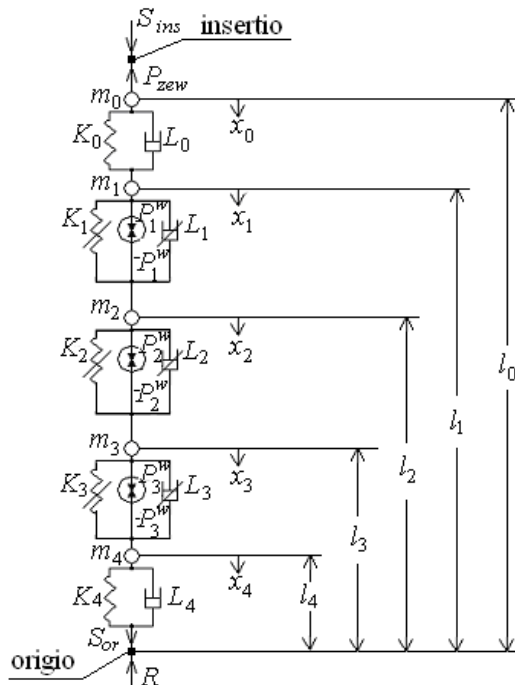
weryfikacji modelu mięśnia są dane kinematyczne, na które składają się przebiegi przemieszczeń wyznaczonych punktów  $x_i$ , ich prędkości  $\dot{x}_i$  i przyspieszenia  $\ddot{x}_i$ , dla  $i = 0, 1, \dots, 4$ . Mogą one być wyznaczone metodą śledzenia przebiegów przemieszczeń poszczególnych markerów, które przyklejono w odpowiednich punktach na powierzchni mięśnia rzeczywistego [19, 41, 77, 93].

Do weryfikacji doświadczalnej można także wykorzystać przebiegi sił odrywania mięśnia od powierzchni: kości ruchomej  $S_{ins}(t)$ , która jest równa sile kurczącej mięśnia  $P_{kurcz}(t)$ , i kości nieruchomej  $S_{or}(t)$ . W tym celu mogą być zastosowane implantowane przetworniki siły (por. p. 2.1.4).

W celu porównania danych kinematycznych mięśnia rzeczywistego i jego modelu należy śledzić zmiany czasowe geometrycznych wymiarów całego modelu oraz jego fragmentów. Przyjęto je w postaci prostoliniowych odcinków, które są równoległe do osi długiej mięśnia i łączą początek mięśnia z wybranym punktem modelu:  $l_i = l_i(t)$  dla  $i = 0, \dots, 4$  (rys. 3.8).

W chwili początkowej  $t_0$  (przyjęto  $t_0 = 0$ ) całkowita długość modelu mięśnia, która jest odległością pomiędzy jego przyczepem a początkiem, wynosi  $l_0(t_0)$ , zaś odległości między pozostałymi punktami a jego początkiem wynoszą odpowiednio:  $l_i = l_i(t)$  dla  $i = 1, \dots, 4$ . W dowolnej chwili czasu  $t$  pod wpływem działania sił wewnętrznych oraz siły zewnętrznej wyznaczone punkty modelu mięśnia doznają przemieszczeń  $x_i$  i zmieniają się odpowiadająco im odległości (rys. 3.8):

$$l_i(t) = l_i(t_0) - x_i(t) \quad \text{dla } i = 0, \dots, 4. \quad (3.14)$$



Rys. 3.8. Charakterystyczne odległości w modelu mięśnia

Na podstawie przebiegów przemieszczeń  $x_i(t)$  punktów wyznaczonych modelu można obliczyć wydłużenia bezwzględne (zmianę długości)  $\Delta x_i(t)$  oraz prędkości tych wydłużeń  $\Delta \dot{x}_i(t)$ :

— dla ścięgna przyczepu ( $i = 0$ ), górnej ( $i = 1$ ), środkowej ( $i = 2$ ) i dolnej ( $i = 3$ ) części brzuśca:

$$\Delta x_i = \Delta x_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t), \quad (3.15)$$

$$\Delta \dot{x}_i = \Delta \dot{x}_i(t) = \dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t), \quad (3.16)$$

— dla ścięgna początku:

$$\Delta x_4 = \Delta x_4(t) = -x_4(t), \quad (3.17)$$

$$\Delta \dot{x}_4 = \Delta \dot{x}_4(t) = -\dot{x}_4(t). \quad (3.18)$$

Znak  $\Delta x_i$  świadczy o:

$\Delta x_i > 0$  – wydłużaniu odcinka,

$\Delta x_i < 0$  – skracaniu odcinka,

$\Delta x_i = 0$  – zachowaniu niezmienniej długości odcinka.

W niniejszej monografii miejsce zaczepienia mięśnia do kości potraktowano jako punkt środkowy powierzchni ścięgna, wnikaącego w powierzchniowe warstwy kości. W czasie skurczu mięśnia w punktach zaczepienia do kości powstają reakcje, które w modelu mięśnia są zależne od zmiennej czasu  $t$  w postaci (rys. 3.8):

— siły odrywania od powierzchni kości ruchomej (w punkcie przyczepu)  $S_{ins}(t)$ :

$$S_{ins}(t) = P_{kurcz}(t), \quad (3.19)$$

— siły odrywania od powierzchni kości nieruchomej (w punkcie początku)  $S_{or}(t)$ :

$$-S_{or}(t) = L_4 \cdot \dot{x}_4(t) + K_4 \cdot x_4(t). \quad (3.20)$$

Siły te mają różne wartości, co jest zgodne z wynikami badań doświadczalnych opisanych w [173].

### 3.1.5. Wyznaczanie parametrów modelu

Zaproponowany sposób modelowania zachowania mięśnia wymaga szczegółowych danych anatomicznych. Nie są one publikowane w ogólnodostępnej literaturze, gdyż obecnie stosowane modele zachowania mięśnia nie wymagają ich znajomości. Z tego względu w celu przeprowadzenia symulacji numerycznych proponowanego modelu zastosowano dane przykładowe, które uzyskano z danych pomiarowych podanych przez innych autorów oraz rysunków mięśni zamieszczonych w atlasach i podręcznikach z fizjologii. Opisany sposób obliczenia tych danych dotyczy wyłącznie kształtu mięśnia obłego. W przypadku modelowania zachowania mięśnia o innej budowie (np. pierzastego) należałoby opracować inny model geometryczny oraz sposób oszacowania jego parametrów.

#### 3.1.5.1. Parametry elementów masowych, sprężystych i lepkich

Poszczególne części brzuśca oraz ścięgna mięśnia charakteryzują się zmiennymi właściwościami mechanicznymi, które zależą od stanu zmęczenia mięśnia, wieku osobnika i stanu jego mięśni, rodzaju obciążenia oraz zdolności mięśni do regenerowania zasobów energetycznych. Dla zamodelowania zachowania mięśnia obłego w krótkich odstępach czasu (do 5 s) przyjęto, iż właściwości tkanki mięśniowej oraz ścięgna są niezmiennie

w czasie. W celu obliczenia współczynników masowych modelu, mięsień potraktowano w sposób uproszczony jako bryłę obrotową. Podejście to wynika z braku dokładnych danych o geometrii składowych mięśni zespołu ramię-przedramię (por. p. 3.2), a sporadycznie spotykane dane dotyczą pomiarów wykonanych na różnych osobnikach.

Na rys. 3.9.a przedstawiono mięsień rzeczywisty, który opisano za pomocą następujących parametrów: długość brzuśca  $l_b$  ( $l_b = h_1 + h_2 + h_3$ ); długość ścięgna  $l_s$  ( $l_s = h_0 + h_4$ ); gęstość tkanki ścięgnistej  $\rho_s$  i tkanki mięśniowej  $\rho_m$ ; objętość brzuśca mięśnia  $V_b$  albo jego masa  $m_b$  ( $m_b = m_1 + m_2 + m_3$ ); powierzchnia poprzecznego przekroju fizjologicznego mięśnia  $PCSA$  (por. p. 2.1.1.2). Powierzchnię fizjologiczną przekroju można doświadczalnie wyznaczyć podczas bezpośrednich pomiarów na zwłokach albo przyjęć jako iloraz wcześniej wyznaczonej objętości brzuśca i jego optymalnej długości.

Kształty geometryczne poszczególnych fragmentów mięśnia przyjęto dzięki wprowadzeniu dwóch współczynników pomocniczych. Otrzymano w ten sposób mięsień hipotetyczny (rys. 3.9.b). Ścięgno przyczepu i ścięgno początku potraktowano jako walce *obrotowe*. Współczynnik masowy  $m_0$  jest równy masie ścięgna przyczepu mięśnia, która jest rozłożona na długości  $h_0$  (między miejscem wnikania włókien mięśniowych w kość ruchomą, a połączeniem ścięgno-brzusiec). Współczynnik masowy  $m_4$  jest równy masie ścięgna początku mięśnia, która jest rozłożona na długości  $h_4$  (między połączeniem brzusiec-ścięgno a miejscem wnikania włókien mięśniowych w powierzchniowe warstwy kości nieruchomej). Do oszacowania wielkości współczynników masowych przyjęto pierwszy współczynnik pomocniczy  $a_1^m$ , którego wartość zmienia się w granicach  $a_1^m \in <0;1>$ . Określa on, jaka część długości ścięgna  $l_s$  przypada na ścięgno przyczepu:

$$h_0 = a_1^m \cdot l_s, \quad (3.21)$$

a jaka na ścięgno początku:

$$h_4 = (1 - a_1^m) \cdot l_s. \quad (3.22)$$

Z danych anatomicznych wynika, że ścięgno przyczepu jest krótsze od ścięgna początku. Z tego względu w obliczeniach symulacyjnych przyjęto  $a_1^m = 1/3$ . Na podstawie gęstości tkanki ścięgnistej  $\rho_s$  oraz powierzchni poprzecznego przekroju fizjologicznego ścięgna przyczepu  $PCSA_{ins}$  i ścięgna początku  $PCSA_{or}$  (potraktowanych jako koła o średnicach  $D_1$  i  $D_3$ ), obliczono współczynnik masowy  $m_0$ :

$$m_0 = PCSA_{ins} \cdot h_0 \cdot \rho_s = PCSA_{ins} \cdot a_1^m \cdot l_s \cdot \rho_s, \quad (3.23)$$

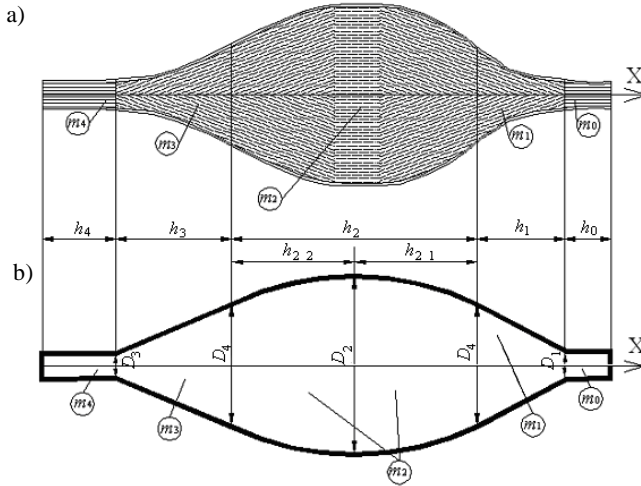
i współczynnik masowy  $m_4$ :

$$m_4 = PCSA_{or} \cdot h_4 \cdot \rho_s = PCSA_{or} \cdot (1 - a_1^m) \cdot l_s \cdot \rho_s. \quad (3.24)$$

Górną i dolną część brzuśca opisano jako połączenie „ścięty stożek-beczka-ścięty stożek”:

1. Współczynnik masowy  $m_1$  jest równy masie górnej części brzuśca, która ma postać obrotowego stożka ściętego o wymiarach: wysokość  $h_1$ , średnica podstawy  $D_4$ , średnica powierzchni ściętej  $D_1$  (równa średnicy ścięgna przyczepu).
2. Współczynnik masowy  $m_2$  jest równy masie środkowej części brzuśca, zamodelowanej jako beczka o łuku paraboli kwadratowej, o wymiarach: wysokość  $h_2$ , średnica przekroju środkowego  $D_2$  (podstawa do obliczenia  $PCSA$ ), średnica podstawy  $D_4$ , przy tym równe są długości  $h_{2,1} = h_{2,2}$ .
3. Współczynnik masowy  $m_3$  jest równy masie dolnej części brzuśca, która jest przedstawiona w postaci obrotowego stożka ściętego o wymiarach: długość  $h_3$ , średnica podstawy  $D_4$ , średnica powierzchni ściętej  $D_3$  (równa średnicy ścięgna początku).





Rys. 3.9. a) Podział mięśnia rzeczywistego na fragmenty,  
b) geometryczny model mięśnia (mięsień hipotetyczny)

Do obliczenia współczynników masowych modelu brzuśca przyjęto, że:

— długość środkowej części brzuśca stanowi zadaną część długości brzuśca  $l_b$ :

$$h_2 = a_2^m \cdot l_b, \quad (3.25)$$

gdzie:  $a_2^m$  – drugi współczynnik pomocniczy, którego wartość zmienia się w przedziale

$a_2^m \in \langle 0; 1 \rangle$ , w symulacjach przyjęto  $a_2^m = 1/2$ ;

— średnica podstawy beczki  $D_4$  stanowi zadaną część  $a_3^m$  (przyjęto  $a_3^m = 9/10$ ) średnicy przekroju środkowego  $D_2$ :

$$D_4 = a_3^m \cdot D_2. \quad (3.26)$$

W czasie skurczu objętość mięśnia, na którą się składają objętości brzuśca  $V_b$  i ściętna, pozostaje niezmienna [78]. W celu zapewnienia stałości wstępnie zadanej objętości brzuśca  $V_b$ , oszacowanie objętości (mas) poszczególnych fragmentów brzuśca sprowadzono do poszukiwania średnicy przekroju środkowego beczki  $D_2$ . Jednak brak długości bocznych fragmentów brzuśca nie pozwala na uzyskanie rozwiązania jednoznacznego. Dlatego wstępnie przyjmuje się długość górnej części brzuśca  $h_1$ , a długość dolnego fragmentu mięśnia  $h_3$  jest obliczana z następującego wzoru:

$$h_3 = l_b - h_2 - h_1. \quad (3.27)$$

Następnie średnica przekroju środkowego  $D_2$  jest obliczana z rozwiązania równania kwadratowego:

$$D_2^2 \cdot \left[ \frac{\pi \cdot (a_3^m)^2 \cdot (h_1 + h_3)}{12} + \frac{\pi \cdot h_2 \cdot [2 + a_3^m + 0,75 \cdot (a_3^m)^2]}{12} \right] + D_2 \cdot \left[ \frac{\pi \cdot a_3^m \cdot (D_1 \cdot h_1 + D_3 \cdot h_3)}{12} \right] + \left[ \frac{\pi \cdot (h_1 \cdot D_1^2 + h_3 \cdot D_3^2)}{12} - V_b \right] = 0. \quad (3.28)$$

Zatem masy poszczególnych fragmentów brzośca są obliczane z odpowiednich wzorów:  
— dla górnej części brzośca:

$$m_1 = \rho_m \cdot \frac{\pi \cdot h_1}{12} \cdot (D_1^2 + D_1 \cdot D_4 + D_4^2), \quad (3.29)$$

— dla środkowej części brzośca:

$$m_2 = \rho_m \cdot \frac{\pi \cdot h_2}{15} \cdot (2 \cdot D_2^2 + D_2 \cdot D_4 + D_4^2), \quad (3.30)$$

— dla dolnej części brzośca:

$$m_3 = \rho_m \cdot \frac{\pi \cdot h_3}{12} \cdot (D_3^2 + D_3 \cdot D_4 + D_4^2). \quad (3.31)$$

Trzeba zauważyć, że z obliczonej średnicy beczki  $D_2$  można łatwo uzyskać powierzchnię poprzecznego przekroju fizjologicznego mięśnia, którą można porównać z danymi podanymi w literaturze.

Opisana metoda obliczania mas poszczególnych fragmentów mięśnia może być doświadczalnie zweryfikowana za pomocą techniki tomografii komputerowej, metody rezonansu magnetycznego albo USG. Pozwalają one łatwo uzyskać niezbędne dane geometryczne i fizyczne (gęstość tkanki brzośca i ścięgien).

Metodę doświadczalnego wyznaczenia współczynników sztywności i tłumienia wyznaczonych fragmentów mięśnia opisano w p. 3.1.5.2. Natomiast do symulacji numerycznych zachowania modelu mięśnia współczynnik sztywności  $j$ -tego fragmentu mięśnia  $K_j$  oszacowano za pomocą wzoru:

$$K_j = \frac{\sigma_j \cdot PCSA_j}{|\Delta x_j|}, \quad (3.32)$$

gdzie:  $\sigma_j$  – naprężenie normalne  $j$ -tego fragmentu mięśnia;  
 $PCSA_j$  – powierzchnia poprzecznego przekroju fizjologicznego  $j$ -tego fragmentu mięśnia;  
 $|\Delta x_j|$  – zadane wydłużenie bezwzględne  $j$ -tego fragmentu mięśnia.

Do obliczenia współczynnika sztywności fragmentu ścięgna (fragmentu brzośca) przyjęto takie naprężenie, które jest mniejsze od naprężenia maksymalnego tkanki ścięgnistej  $\sigma_{\max\_sc}$  (tkanki mięśniowej  $\sigma_{\max\_m}$ ). Wynika to z faktu, że zmiana długości mięśni pracujących w zespole mięśniowym nie odbywa się na granicy wytrzymałości tkanki ścięgnistej (mięśniowej). Dodatkowo założono, iż w przypadku skracania i wydłużania tkanki ścięgnistej (mięśniowej) przyjęte do obliczeń wartości naprężenia  $\sigma_j$  i poprzecznego przekroju fizjologicznego  $PCSA_j$  pozostają stałe. Wychodząc z założeń opisanych w p. 3.1.1.3, przyjmowane do obliczeń bezwzględne wydłużenie/skrócenie fragmentu brzośca jest większe od bezwzględnego wydłużenia/skrócenia fragmentu ścięgna.

Przy obliczaniu współczynników sztywności i tłumienia modelu mięśnia dodatkowo przyjęto następujące założenia:

1. Ścięgno górne i ścięgno dolne mają podobne właściwości fizjologiczne, ponieważ składają się z nieelastycznych włókien kolagenu i elastycznych włókien elastyny oraz pełnią tą samą funkcję – przymocowują mięsień do kości. W związku z tym w modelu przyjęto, że lepkosprężyste właściwości ścięgna przyczepu i ścięgna początku są podobne i są

opisane jednakowymi współczynnikami sztywności ( $K_0 = K_4$ ) i współczynnikami tłumienia ( $L_0 = L_4$ ).

2. Dolna i górna część brzuśca mięśnia zawierają w przybliżeniu jednakową liczbę jednostek motorycznych, co świadczy o zbliżonych właściwościach mechanicznych. Zatem przyjęto, że ich współczynniki sztywności oraz współczynniki tłumienia są sobie równe:  $K_1 = K_3$  i  $L_1 = L_3$ . Wychodząc z obserwacji, że wydłużenie bezwzględne dolnego i górnego fragmentu brzuśca mięśnia jest większe w porównaniu z wydłużeniem bezwzględnym ścięgien, muszą być spełnione nierówności:  $K_1 < K_0$  i  $K_1 < K_4$  oraz  $K_3 < K_0$  i  $K_3 < K_4$ .
3. Środkowa część brzuśca mięśnia jest częścią najbardziej kurczliwą (zawiera ona największą liczbę jednostek motorycznych) i ulega największym wydłużeniom bezwzględnym. Z tego względu każdy z współczynników sztywności  $K_2$  i tłumienia  $L_2$  tej części brzuśca musi spełniać nierówności:  $K_2 < K_1$  i  $K_2 < K_3$  oraz  $L_2 < L_1$  i  $L_2 < L_3$ .

Współczynniki tłumienia są obliczane z (3.7), przy czym współczynniki proporcjonalności  $\kappa$  są dobierane w taki sposób, aby zasymulowane przebiegi modelu mięśnia były zbliżone do otrzymywanych na drodze doświadczalnej. Do modelowania stanów zmęczenia należy przyjąć większy współczynnik sztywności albo większy współczynnik proporcjonalności  $\kappa$  niż dla mięśnia wypoczętego. Należy zauważyć, że uwzględnienie zróżnicowanych co do wartości współczynników masowo-sprężysto-tłumiących powoduje uzyskanie bardzo sztywnego układu równań różniczkowych, który jest modelem matematycznym zachowania mięśnia (por. p. 6.1).

### 3.1.5.2. Identyfikacja właściwości lepkosprężystych

Proces identyfikacji pozwala na oszacowanie struktury modelu (identyfikacja strukturalna) i jego parametrów (identyfikacja parametryczna). Ponieważ struktura modelu mięśnia już została sformułowana (por. p. 3.1.2), niezbędne jest oszacowanie jego parametrów.

Identyfikacja parametryczna modelu mięśnia polega na wyznaczaniu jedynie współczynników sztywności i tłumienia, gdyż współczynniki masowe ( $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4$ ) są określane z zasad opisanych w p. 3.1.5.1. Przyjęto, że właściwości lepkosprężyste dla modelu mięśnia niepobudzonego są takie same jak dla modelu mięśnia pobudzonego. W czasie każdego małego wydłużania/skracania długości badanego mięśnia rzeczywistego jego właściwości lepkosprężyste pozostają niezmiennie. Współczynniki lepkosprężyste muszą być wyznaczone w zakresie zmian długości mięśnia, który jest składową rzeczywistego zespołu mięśni ramienia-przedramienia.

W celu wyznaczania współczynników sprężysto-tłumiących modelu zespołu mięśni ramienia-przedramienia przyjęto, że w *stanie początkowym* mięsień rzeczywisty (zaczepiony do kości) posiada najmniejszą długość  $l_0$ . Oznacza to, że mięśnie zginaczy zespołu powinny znajdować w stanie odpowiadającym maksymalnemu zgięciu przedramienia względem ramienia, natomiast mięśnie prostowniki – w stanie maksymalnego wyprostu w stawie łokciowym. W stanie końcowym każdy mięsień zespołu osiąga długość maksymalną  $l_k$ . Danymi wejściowymi procesu identyfikacji parametrycznej są: przebiegi przemieszczeń wybranych (charakterystycznych) punktów mięśnia rzeczywistego  $x_i$ , prędkości  $\dot{x}_i$  i przyspieszenia  $\ddot{x}_i$ , dla  $i = 0, 1, \dots, 4$  oraz zewnętrzna siła rozciągająca  $P_{zew}(t)$ .

Identyfikacja parametryczna odbywa się w dwóch etapach. W pierwszym badany mięsień jest kilkakrotnie skokowo wydłużany od stanu początkowego do stanu końcowego, dzięki przyłożeniu do jego przyczepu zewnętrznej siły  $P_{zew}(t)$  o charakterze „schodkowej” funkcji rosnącej. W etapie drugim następuje kilkakrotne skokowe skracanie tego mięśnia

od stanu końcowego do stanu początkowego, co zapewnia przyłożona do jego przyczepu zewnętrzna siła  $P_{zew}(t)$  o charakterze „schodkowej” funkcji malejącej. Na podstawie pojedynczego skokowego wydłużenia/skrócenia mięśnia wyznacza się współczynniki sztywności i tłumienia. Liczba wydłużeń/skróceń mięśnia ma wpływ na dokładność opisanego jego właściwości lepkosprężystych, które zależą od długości i rodzaju pracy wykonywanej przez badane fragmenty mięśnia. Ponadto właściwości te zależą od dokładności zapisu mierzonych danych kinematycznych i siłowych.

Pojedyncze  $i$ -te skokowe wydłużenie/skrócenie mięśnia odbywa się w przedziale czasu  $[t_{i-1}; t_i]$  i powoduje zmianę jego długości od  $l_{i-1}$  do  $l_i$ , dzięki przyłożeniu w chwili  $t_{i-1}$  do jego przyczepu siły zewnętrznej  $P_{zew}(t)$ , której wartość jest skokowo zwiększana/zmniejszana od  $P_{zew}(t_{i-1})$  do  $P_{zew}(t_i)$ . W granicznych chwilach czasowych  $t_{i-1}$  i  $t_i$  w badanym mięśniu zachodzą ustalone procesy dynamiczne: przebiegi przemieszczeń wyznaczonych punktów przybierają stałe wartości, a ich prędkości oraz przyspieszenia stają się równe zeru, tzn.

$$\left[ x_k(t_{i-1}) = C_k^{i-1} \right] \wedge \left[ x_k(t_i) = C_k^i \right] \wedge \left[ \dot{x}_k(t_{i-1}) = 0 \right] \wedge \left[ \dot{x}_k(t_i) = 0 \right] \wedge \left[ \ddot{x}_k(t_{i-1}) = 0 \right] \wedge \left[ \ddot{x}_k(t_i) = 0 \right]$$

dla  $k = 0, \dots, 4$ , gdzie  $(C_k^{i-1} = \text{const}) \wedge (C_k^i = \text{const})$ . Z kolei w przedziale czasu  $(t_{i-1}; t_i)$  zachodzi proces przejściowy. Pozwala to w chwili czasu  $t_i$  wyznaczyć współczynniki sztywności  $K_i^p$  dla  $i = 0, \dots, 4$ , które opisują właściwości sprężyste badanego mięśnia w wyznaczonym przedziale jego długości  $(l_{i-1}, l_i)$ , korzystając z poniższego układu równań:

$$\begin{aligned} K_0^p &= \frac{-P_{zew}(t_i)}{x_0(t_i) - x_1(t_i)} \\ K_1^p &= \frac{K_0^p \cdot [x_0(t_i) - x_1(t_i)]}{x_1(t_i) - x_2(t_i)} \\ K_2^p &= \frac{K_1^p \cdot [x_1(t_i) - x_2(t_i)]}{x_2(t_i) - x_3(t_i)} \\ K_3^p &= \frac{K_2^p \cdot [x_2(t_i) - x_3(t_i)]}{x_3(t_i) - x_4(t_i)} \\ K_4^p &= \frac{K_3^p \cdot [x_3(t_i) - x_4(t_i)]}{x_4(t_i)} \end{aligned} \quad (3.33)$$

gdzie:  $K_k^p$  – współczynnik sztywności,

$p$  – rodzaj pracy mięśnia.

Współczynniki sztywności  $K_k^p$  dla  $p = w$  są współczynnikami przy wydłużeniu mięśnia, zaś dla  $p = s$  przy skracaniu mięśnia.

Do obliczania współczynników tłumienia w przedziale czasu  $[t_{i-1}; t_i]$ , gdy podczas każdego  $i$ -tego skokowego wydłużenia/skrócenia mięśnia następuje zmiana jego długości od  $l_{i-1}$  do  $l_i$ , należy w chwili  $t_m$ , gdzie  $t_m \in (t_{i-1}; t_i)$ , określić dane kinematyczne i siłowe. Współczynniki tłumienia mogą być wyznaczone tylko wtedy, gdy prędkości wyznaczonych punktów mięśnia rzeczywistego przyjmują niezerowe wartości, tzn. wyłącznie w czasie trwania nieustalonego procesu dynamicznego. Wtedy w chwili  $t_m$  można określić współczynniki tłumienia  $L_i^p$  dla  $i = 0, \dots, 4$ , które opisują właściwości lepkie badanego mięśnia w określonym przedziale jego długości  $(l_{i-1}, l_i)$ , stosując następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
L_0^p &= \frac{-P_{zew}(t_m) - K_0^p \cdot [x(t_m) - x_1(t_m)] - m_0 \cdot \ddot{x}(t_m)}{\dot{x}_0(t_m) - \dot{x}_1(t_m)} \\
L_1^p &= \frac{K_0^p \cdot [x_0(t_m) - x_1(t_m)] - K_1^p \cdot [x_1(t_m) - x_2(t_m)] + L_0^p \cdot [\dot{x}_0(t_m) - \dot{x}_1(t_m)] - m_1 \cdot \ddot{x}_1(t_m)}{\dot{x}_1(t_m) - \dot{x}_2(t_m)} \\
L_2^p &= \frac{K_1^p \cdot [x_1(t_m) - x_2(t_m)] - K_2^p \cdot [x_2(t_m) - x_3(t_m)] + L_1^p \cdot [\dot{x}_1(t_m) - \dot{x}_2(t_m)] - m_2 \cdot \ddot{x}_2(t_m)}{\dot{x}_2(t_m) - \dot{x}_3(t_m)} \quad (3.34) \\
L_3^p &= \frac{K_2^p \cdot [x_2(t_m) - x_3(t_m)] - K_3^p \cdot [x_3(t_m) - x_4(t_m)] + L_2^p \cdot [\dot{x}_2(t_m) - \dot{x}_3(t_m)] - m_3 \cdot \ddot{x}_3(t_m)}{\dot{x}_3(t_m) - \dot{x}_4(t_m)} \\
L_4^p &= \frac{K_3^p \cdot [x_3(t_m) - x_4(t_m)] - K_4^p \cdot x_4(t_m) + L_3^p \cdot [\dot{x}_3(t_m) - \dot{x}_4(t_m)] - m_4 \cdot \ddot{x}_4(t_m)}{\dot{x}_4(t_m)},
\end{aligned}$$

gdzie:  $L_k^p$  – współczynnik tłumienia,  
 $p$  – rodzaj pracy mięśnia.

Współczynniki tłumienia  $L_k^p$  dla  $p = w$  są współczynnikami przy wydłużeniu mięśnia, zaś dla  $p = s$  przy skracaniu mięśnia.

Ze względu na zmiany fizjologiczne w mięśniu rzeczywistym (zmęczenie, zmiana właściwości, np. na skutek relaksacji jego siły i relaksacji długości) identyfikację parametryczną modelu mięśnia należy przeprowadzać w odpowiednich warunkach otoczenia (temperatura, wilgotność, ciśnienie) i w możliwie krótkim czasie.

### 3.1.5.3. Siły wewnętrzne w elementach siłowych

Model mięśnia zawiera odcinki aktywne, które odzwierciedlają zachowanie fragmentów brzośca. W odcinkach tych umieszczono elementy siłowe, generujące siły wewnętrzne  $[P_1^w(t), P_2^w(t), P_3^w(t)]$ , z których każda podlega ograniczeniu:

$$0 \leq P_j^w(t) \leq P_{\max\_j}^w, \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.35)$$

gdzie:  $P_{\max\_j}^w$  – maksymalna siła wewnętrzna, która może być wygenerowana przez  $j$ -ty fragment brzośca.

Dla oszacowania maksymalnej siły wewnętrznej  $P_{\max\_j}^w$  najpierw rozważano zastosowanie metody skalowania siły (por. p. 2.1.1.2). W tym celu należałoby uzyskać charakterystykę statyczną pojedynczego sarkomeru i wyznaczyć, jaką maksymalną siłę generuje on na długości optymalnej. Wtedy maksymalna siła mięśnia byłaby wynikiem mnożenia liczby sarkomerów znajdujących się w mięśniu i siły maksymalnej pojedynczego sarkomeru. Biorąc pod uwagę, że:

- sarkomery zawarte w mięśniu posiadają odmienne długości optymalne i generują różne siły maksymalne;
  - bardzo trudno jest w praktyce określić dokładną liczbę sarkomerów zawartych w wyznaczonej objętości brzośca oraz ich optymalne i aktualne długości;
  - sąsiadujące ze sobą włókna mięśniowe zazwyczaj należą do różnych jednostek motorycznych i są pobudzane w różnych odstępach czasowych,
- zrezygnowano z metody skalowania siły i zaproponowano nowe sposoby określenia maksymalnej wielkości siły wewnętrznej  $P_j^w(t)$ , które opisano w p. 3.1.5.4.

Odzwierciedlając zachowanie mięśnia rzeczywistego,  $j$ -tą siłę wewnętrzną  $P_j^w(t)$  zamodelowano jako funkcję zależną od czasu  $t$  i działającą w przedziale czasu  $[t_0; t_k]$ :

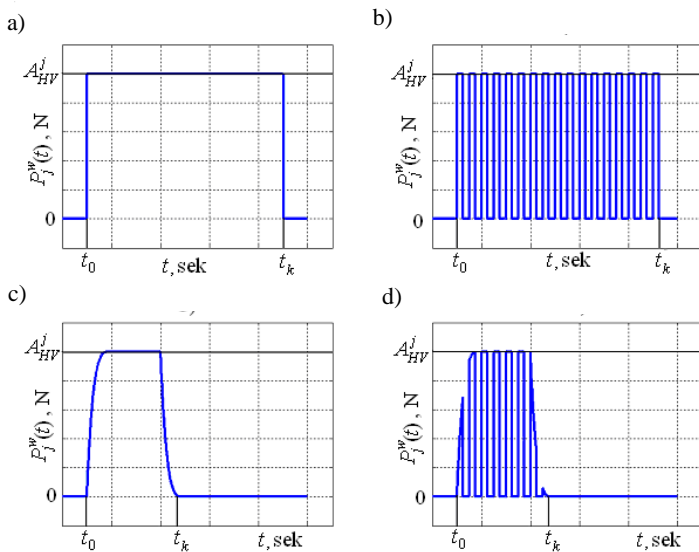
— funkcja jednego impulsu prostokątnego (rys. 3.10.a):

$$P_j^w(t) = A_{HV}^j \cdot [\sigma_{HV}(t - t_0) - \sigma_{HV}(t - t_k)], \quad (3.36)$$

gdzie:  $A_{HV}^j$  – amplituda funkcji,  
 $\sigma_{HV}(t)$  – funkcja Heaviside'a;

— funkcja pobudzenia serią  $n$ -prostokątnych impulsów symetrycznych (rys. 3.10.b):

$$P_j^w(t) = \sum_{i=1}^n \left\{ A_{HV}^j \cdot \left[ \sigma_{HV}(t - t_{i-1}) - \sigma_{HV}\left(t - \frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) \right] \right\}; \quad (3.37)$$



Rys. 3.10. Siła wewnętrzna  $P_j^w(t)$  w postaci funkcji: a) jednego impulsu prostokątnego, b) pobudzenia serią  $n$ -prostokątnych impulsów symetrycznych, c) o złożonym kształcie, d) o złożonym kształcie z pobudzeniem serią  $n$ -prostokątnych impulsów symetrycznych

— funkcja o złożonym kształcie, której okres narastania  $a_{HV}$  jest równy okresowi opadania, przy czym okresy te zamodelowano w postaci krzywej czwartego stopnia (rys. 3.10.c):

$$P_j^w(t) = \frac{A_{HV}^j}{a_{HV}^4} \cdot \left\{ \left[ a_{HV}^4 - (t - t_0 - a_{HV})^4 \right] \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t - t_0) - \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV}) \right] + \right. \\
+ a_{HV}^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV}) - \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV} - b_{HV}) \right] + \\
+ (t - t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV})^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV} - b_{HV}) - \right. \\
\left. \left. - \sigma_{HV}^j(t - t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV}) \right] \right\}, \quad (3.38)$$

gdzie:  $b_{HV}$  – okres utrzymania niezmienniej amplitudy  $A_{HV}^j$ , której czas trwania wynosi:

$$t_k = 2 \cdot a_{HV} + b_{HV}; \quad (3.39)$$

— funkcja o złożonym kształcie z pobudzeniem serią  $n$ -prostokątnych impulsów symetrycznych (rys. 3.10.d):

$$P_j^w(t) = \frac{A_{HV}^j}{a_{HV}^4} \cdot \left\{ \left[ a_{HV}^4 - (t - t_0 - a_{HV})^4 \right] \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t - t_0) - \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV}) \right] + \right. \\ \left. + a_{HV}^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV}) - \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV} - b_{HV}) \right] + \right. \\ \left. + (t - t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV})^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV} - b_{HV}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_{HV}^j(t - t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV}) \right] \right\} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \left[ \sigma_{HV}(t - t_{i-1}) - \sigma_{HV}\left(t - \frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) \right] \right]. \quad (3.40)$$

W przypadku, gdy  $P_j^w(t)$  ma wartość zerową,  $j$ -ty fragment brzośca jest pasywny. Jeżeli wszystkie trzy siły wewnętrzne są zerowe, to mięsień jest nazywany mięśniem biernym (pasywnym). Do rozwiązywania prostych zadań dynamiki zastosowano siły wewnętrzne  $[P_1^w(t), P_2^w(t), P_3^w(t)]$  w postaci funkcji (3.37) i (3.38).

Z kolei do rozwiązywania odwrotnych zadań dynamiki poszukiwano tych sił w postaci funkcji schodkowych, w których schodek jest funkcją (3.36) o stałej amplitudzie  $A_{HV}^j$  w każdym kroku całkowania.

#### 3.1.5.4. Identyfikacja sił wewnętrznych

Celem identyfikacji sił wewnętrznych generowanych przez elementy siłowe aktywnych fragmentów modelu mięśnia jest wyznaczenie ich wartości. Identyfikację sił wewnętrznych modelu mięśnia można przeprowadzić po uprzednim oszacowaniu współczynników masowych i lepkościowych.

Proces identyfikacji sił wewnętrznych polega na określeniu ich wartości dla modelu mięśnia o zrównoważonych siłach wewnętrznych (zasada 1). Jeżeli nie da się jednoznacznie wyznaczyć tych sił, to trzeba je oszacować dla modelu mięśnia o niezrównoważonych siłach wewnętrznych (zasada 2). Danymi wejściowymi są przebiegi przemieszczeń charakterystycznych punktów mięśnia  $x_i$ , ich prędkości  $\dot{x}_i$  i przyspieszenia  $\ddot{x}_i$ , dla  $i = 0, 1, \dots, 4$ . Na ich podstawie są wyznaczane stany poszczególnych fragmentów mięśnia (wydłużanie/skracanie) i odpowiadające im współczynniki sztywności i tłumienia.

Podczas działania zewnętrznej siły rozciągającej  $P_{zew}(t)$ , musi być spełnione pierwsze z równań układu (3.8). Jeżeli nie jest ono spełnione, to należy sprawdzić czy jest spełniona nierówność:

$$|m_0 \cdot \ddot{x}_0(t) + L_0 \cdot [\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)] + K_0 \cdot [x_0(t) - x_1(t)] + P_{zew}(t)| \leq \varepsilon_d, \quad (3.41)$$

gdzie:  $\varepsilon_d$  – uchyb dopuszczalny, np.  $\varepsilon_d = 0,0001$  N.

Gdy nierówność (3.41) jest spełniona, należy kontynuować proces identyfikacji sił wewnętrznych, zaś gdy nie – należy przeanalizować, czy metody pomiaru prędkości i przyspieszenia oznaczonych punktów mięśnia nie są obciążone dużymi błędami pomiarowymi. Po przeprowadzeniu identyfikacji sił wewnętrznych można określić zależności pomiędzy sygnałami układu nerwowego a generowanym skurczem modelu mięśnia. Warto zwrócić uwagę, iż sygnał EMG mierzony z powierzchni mięśnia badanego można zastosować wyłącznie do

analizy jakościowej, np. określenia okresu aktywności badanego mięśnia. Powodem jest fakt, iż sygnał EMG zależy wyłącznie od stanu pobudzenia włókien mięśniowych znajdujących się w pobliżu miejsca przyłożenia elektrody powierzchniowej lub wkłuwanej. Zatem nie dostarcza on informacji o zachowaniu wszystkich włókien mięśniowych badanego fragmentu mięśnia.

### Zasada 1: model mięśnia o zrównoważonych siłach wewnętrznych

Model mięśnia, w którym każdy element siłowy generuje dwie jednakowe co do wartości siły wewnętrzne, tzn.  $[P_1^w(t) = P_{11}^w(t) = P_{12}^w(t)] \wedge [P_2^w(t) = P_{21}^w(t) = P_{22}^w(t)] \wedge [P_3^w(t) = P_{31}^w(t) = P_{32}^w(t)]$ , nazwano modelem mięśnia o zrównoważonych siłach wewnętrznych (rys. 3.11).

Podczas identyfikacji do uzyskania trzech niewiadomych sił wewnętrznych  $P_i^w$ , dla  $i = 1, 2, 3$ , poszukuje się jednoznacznego rozwiązania układu czterech równań:

$$\begin{aligned} P_1^w(t) &= m_1 \cdot \ddot{x}_1 + L_0 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + K_0 \cdot (x_1 - x_0) + L_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_1 \cdot (x_1 - x_2) \\ P_2^w(t) - P_1^w(t) &= m_2 \cdot \ddot{x}_2 + L_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_1 \cdot (x_2 - x_1) + L_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + K_2 \cdot (x_2 - x_3) \\ P_3^w(t) - P_2^w(t) &= m_3 \cdot \ddot{x}_3 + L_2 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + K_2 \cdot (x_3 - x_2) + L_3 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + K_3 \cdot (x_3 - x_4) \\ -P_3^w(t) &= m_4 \cdot \ddot{x}_4 + L_3 \cdot (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + K_3 \cdot (x_4 - x_3) + L_4 \cdot \dot{x}_4 - K_4 \cdot x_4, \end{aligned} \quad (3.42)$$

które w prostym zapisie macierzowym mają postać:

$$\mathbf{H}_{w1} \cdot \mathbf{p}_w = \mathbf{M}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{L}_1 \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{x},$$

gdzie:  $\mathbf{M}_1$  – macierz mas:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{L}_1$  – macierz tłumienia:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} -L_0 & L_0 + L_1 & -L_1 & 0 & 0 \\ 0 & -L_1 & L_1 + L_2 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & -L_2 & L_2 + L_3 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & -L_3 & L_3 + L_4 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{K}_1$  – macierz sztywności:

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} -K_0 & K_0 + K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{H}_{w1}$  – macierz lokalizacji sił wewnętrznych modelu mięśnia:



$$\mathbf{H}_{w1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$  – wektory przebiegów przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń wyznaczonych punktów modelu mięśnia, jak w (3.8),  $\mathbf{p}_w$  – wektor sił wewnętrznych modelu mięśnia, jak w (3.8).

W powyższych równaniach współczynniki sztywności i tłumienia fragmentów modelu mięśnia zależą od rodzaju pracy (koncentryczna, ekscentryczna czy izometryczna). Jeżeli nie można uzyskać jednoznacznego rozwiązania tego układu (liczba równań jest większa od liczby niewiadomych) należy zastosować identyfikację sił wewnętrznych modelu mięśnia o niezrównoważonych siłach wewnętrznych (zasada 2).

### Zasada 2: model mięśnia o niezrównoważonych siłach wewnętrznych

Model mięśnia, w którym każdy element siłowy generuje różne co do wartości siły wewnętrzne, tzn.:  $P_{11}^w(t), P_{12}^w(t), P_{21}^w(t), P_{22}^w(t), P_{31}^w(t), P_{32}^w(t)$ , nazwano modelem mięśnia o niezrównoważonych siłach wewnętrznych (rys. 3.11.b). Jego model matematyczny stanowi układ pięciu równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} -P_{zew}^w(t) &= m_0 \cdot \ddot{x}_0 + L_0 \cdot (\dot{x}_0 - \dot{x}_1) + K_0 \cdot (x_0 - x_1) \\ P_{11}^w(t) &= m_1 \cdot \ddot{x}_1 + L_0 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + K_0 \cdot (x_1 - x_0) + L_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_1 \cdot (x_1 - x_2) \\ P_{21}^w(t) - P_{12}^w(t) &= m_2 \cdot \ddot{x}_2 + L_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_1 \cdot (x_2 - x_1) + L_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + K_2 \cdot (x_2 - x_3) \\ P_{31}^w(t) - P_{22}^w(t) &= m_3 \cdot \ddot{x}_3 + L_2 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + K_2 \cdot (x_3 - x_2) + L_3 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + K_3 \cdot (x_3 - x_4) \\ -P_{32}^w(t) &= m_4 \cdot \ddot{x}_4 + L_3 \cdot (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + K_3 \cdot (x_4 - x_3) + L_4 \cdot \dot{x}_4 + K_4 \cdot x_4, \end{aligned} \quad (3.43)$$

które w prostym zapisie macierzowym mają postać:

$$\mathbf{H}_{w2} \cdot \mathbf{p}_{w1} + P_{zew}^w \cdot \mathbf{H}_z = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{L} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x},$$

gdzie:  $\mathbf{M}, \mathbf{L}, \mathbf{K}$  – macierze mas, tłumienia i sztywności, jak w (3.8);

$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$  – wektory w postaci kolumny przebiegów przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń wyznaczonych punktów modelu mięśnia, jak w (3.8);

$\mathbf{H}_z$  – macierz lokalizacji sił zewnętrznych, jak w (3.8);

$\mathbf{p}_{w1}$  – wektor (macierz kolumnowa) sił wewnętrznych modelu mięśnia;

$$\mathbf{p}_{w1} = \text{col} \left[ P_{11}^w = P_{11}^w(t), P_{12}^w = P_{12}^w(t), P_{21}^w = P_{21}^w(t), P_{22}^w = P_{22}^w(t), P_{31}^w = P_{31}^w(t), P_{32}^w = P_{32}^w(t) \right],$$

$\mathbf{H}_{w2}$  – macierz lokalizacji sił wewnętrznych:

$$\mathbf{H}_{w2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

W celu jednoznacznego wyznaczenia sześciu sił wewnętrznych przyjęto, że w elementach siłowych górnej i dolnej części brzusca (rys. 3.11) są generowane nierównoważone siły wewnętrzne  $[P_{11}^w(t) \neq P_{12}^w(t)] \wedge [P_{31}^w(t) \neq P_{32}^w(t)]$ . Założenie to opiera się na fakcie, iż boczne części brzusca rzeczywistego posiadają więcej włókien kurczliwych rozmieszczonych bliżej środkowego fragmentu brzusca niż połączenia ścięgno-brzusiec. W elementach siłowych środkowej części brzusca modelu mięśnia są generowane siły wewnętrzne o takiej samej wartości  $P_{21}^w(t) = P_{22}^w(t) = P_2^w(t)$  (liczba włókien mięśniowych w górnej i dolnej części w przybliżeniu jest taka sama).



Rys. 3.11. Model mięśnia: a) podział mięśnia na fragmenty, b) reologiczny model mięśnia o nierównoważonych siłach wewnętrznych

Do uzyskania pięciu niewiadomych sił wewnętrznych  $[P_{11}^w(t), P_{12}^w(t), P_2^w(t), P_{31}^w(t), P_{32}^w(t)]$  należy zatem rozwiązać następujący układ pięciu równań:

$$\begin{aligned}
 P_a(t) &= P_a[P_{11}^w(t), P_{12}^w(t), P_2^w(t), P_{31}^w(t), P_{32}^w(t)] = P_b(t) - P_{zew}(t) \\
 P_{11}^w(t) &= m_1 \cdot \ddot{x}_1 + L_0 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + K_0 \cdot (x_1 - x_0) + L_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_1 \cdot (x_1 - x_2) \\
 P_2^w(t) - P_{12}^w(t) &= m_2 \cdot \ddot{x}_2 + L_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_1 \cdot (x_2 - x_1) + L_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + K_2 \cdot (x_2 - x_3) \\
 P_{31}^w(t) - P_2^w(t) &= m_3 \cdot \ddot{x}_3 + L_2 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + K_2 \cdot (x_3 - x_2) + L_3 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + K_3 \cdot (x_3 - x_4) \\
 -P_{32}^w(t) &= -m_4 \cdot \ddot{x}_4(t) - L_3 \cdot (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) - K_3 \cdot (x_4 - x_3) - L_4 \cdot \dot{x}_4 - K_4 \cdot x_4,
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

które przy zastosowaniu zapisu macierzowego przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 P_a(t) &= P_a[P_{11}^w(t), P_{12}^w(t), P_2^w(t), P_{31}^w(t), P_{32}^w(t)] = P_b(t) - P_{zew}(t) \\
 H_{w3} \cdot p_{w2} &= M_1 \cdot \ddot{x} + L_1 \cdot \dot{x} + K_1 \cdot x,
 \end{aligned}$$

przy czym:

$$\begin{aligned}
 P_a(t) = & \int_0^t \left( \sum_{i=0}^7 D_{i1} \cdot e^{s_i \cdot (t-\tau)} \right) \cdot P_{11}^w(\tau) d\tau + \int_0^t \left( \sum_{i=0}^7 D_{i2} \cdot e^{s_i \cdot (t-\tau)} \right) \cdot P_{12}^w(\tau) d\tau + \\
 & + \int_0^t \left( \sum_{i=0}^7 D_{i3} \cdot e^{s_i \cdot (t-\tau)} \right) \cdot P_2^w(\tau) d\tau + \int_0^t \left( \sum_{i=0}^7 D_{i4} \cdot e^{s_i \cdot (t-\tau)} \right) \cdot P_{31}^w(\tau) d\tau + \\
 & + \int_0^t \left( \sum_{i=0}^7 D_{i5} \cdot e^{s_i \cdot (t-\tau)} \right) \cdot P_{32}^w(\tau) d\tau, \tag{3.45}
 \end{aligned}$$

zaś:  $P_b(t)$  – składowa pasywna wyznaczona z (3.13) na podstawie zmierzonych danych kinematycznych (przemieszczenia przyczepu  $x_0(t)$ , jego prędkości  $\dot{x}_0(t)$  i przyspieszenia  $\ddot{x}_0(t)$ );  $P_a(t)$  – składowa aktywna zależna od pięciu wyznaczanych sił wewnętrznych i obliczana ze wzoru (3.45);  $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, \dots, B_7, s_i, D_{i1}, D_{i2}, \dots, D_{i5}$  – współczynniki zależne od parametrów elementów masowych, sprężystych i lepkich oraz od rodzaju pracy fragmentów mięśnia (skracania czy wydłużania);  $\mathbf{M}_1, \mathbf{L}_1, \mathbf{K}_1$  – macierze mas, tłumienia i sztywności jak w (3.42);  $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$  – wektory w postaci kolumny przebiegów przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń wyznaczonych punktów modelu mięśnia, jak w (3.8);  $\mathbf{p}_{w2}$  – wektor (macierz kolumnowa) sił wewnętrznych modelu mięśnia, gdzie:

$$\mathbf{p}_{w2} = \text{col} \left[ P_{11}^w = P_{11}^w(t), \quad P_{12}^w = P_{12}^w(t), \quad P_2^w = P_2^w(t), \quad P_{31}^w = P_{31}^w(t), \quad P_{32}^w = P_{32}^w(t) \right],$$

$\mathbf{H}_{w3}$  – macierz lokalizacji sił wewnętrznych :

$$\mathbf{H}_{w3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

### 3.1.6. Ograniczenia w modelu

Proces sterowania mięśniami organizmu żywego jest nazywany *koordynacją ruchową*. Dzięki proprioreceptorom rozmieszczonym w brzuścach i ścięgnach mięśni, układ nerwowy przez nerwy czuciowe otrzymuje informacje o zachowaniu wszystkich mięśni organizmu. Informacja ta zawiera aktualne dane o: długościach mięśni, prędkościach ich zmiany oraz siłach przenoszonych przez ścięgna początków i przyczepów mięśni. W każdej chwili układ nerwowy sprawdza, czy sygnały te nie przekraczają pewnych granic, tworząc w taki sposób pętlę sprzężenia zwrotnego. W chwili przekroczenia co najmniej jednej granicy układ nerwowy natychmiast uruchamia taki program sterowania, który odciąża zagrożone przeciążeniem składowe zespołu mięśniowego.

W oparciu o powyższe przyjęto, że zgodność proponowanego modelu mięśnia z fizjologią jest zapewniona dzięki ograniczeniu:

— przebiegów przemieszczeń:

$$a_{iw}(t) \leq x_i(t) \leq a_{is}(t), \quad \text{dla } i = 0, \dots, 4, \tag{3.46}$$

gdzie:  $a_{iw}(t)$  – przebieg maksymalnego ujemnego  $i$ -tego przemieszczenia;  
 $a_{is}(t)$  – przebieg maksymalnego dodatniego  $i$ -tego przemieszczenia;

— przebiegów prędkości przemieszczeń:

$$b_{iw}(t) \leq \dot{x}_i(t) \leq b_{is}(t), \text{ dla } i = 0, \dots, 4, \quad (3.47)$$

gdzie:  $b_{iw}(t)$  – przebieg maksymalnej ujemnej  $i$ -tej prędkości;  
 $b_{is}(t)$  – przebieg maksymalnej dodatniej  $i$ -tej prędkości;

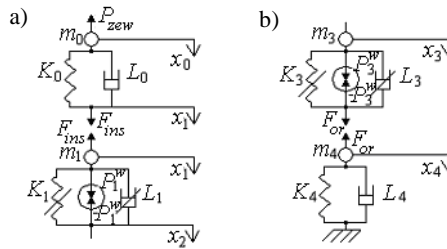
— sił w połączeniu brzusca ze ścięgnem przyczepu  $F_{ins} = F_{ins}(t)$  i ścięgnem początku  $F_{or} = F_{or}(t)$  (rys. 3.12):

$$[F_{ins}(t) \leq c_{ins}(t)] \wedge [F_{or}(t) \leq c_{or}(t)], \quad (3.48)$$

$$F_{ins} = -L_0 \cdot \Delta \dot{x}_0(t) - K_0 \cdot \Delta x_0(t), \quad (3.49)$$

$$F_{or} = -L_4 \cdot \Delta \dot{x}_3(t) - K_4 \cdot \Delta x_3(t) + P_3^w, \quad (3.50)$$

gdzie:  $c_{ins}(t)$ ,  $c_{or}(t)$  – przebiegi maksymalnych sił w połączeniu brzusca ze ścięgnem przyczepu i ścięgnem początku.



Rys. 3.12. Schemat działania: a) siły  $F_{ins}$  występującej pomiędzy ścięgnem górnym a brzuscem górnym; b) siły  $F_{or}$  występującej pomiędzy brzuscem dolnym a ścięgnem dolnym

Sprawdzając spełnienie ograniczeń (3.46), (3.47) i (3.48) można wnioskować o stanie modelu mięśnia:

1. „*Stan dopuszczalny*” występuje, gdy jednocześnie są spełnione wszystkie wskazane ograniczenia. Oznacza to, że zachowanie modelu mięśnia jest zgodne z fizjologią mięśnia rzeczywistego.
2. „*Stan niepewny*” ma miejsce, gdy w krótkim czasie nie są spełnione niektóre z podanych ograniczeń. W takim stanie nie dochodzi jeszcze do uszkodzenia struktury mięśnia rzeczywistego.
3. „*Stan niedopuszczalny*” zachodzi, gdy jednocześnie nie są spełnione wskazane ograniczenia albo, gdy długi jest czas trwania „stanu niepewnego”. Normalnie funkcjonujący mięsień rzeczywisty unika takiego stanu, gdyż może w nim dojść do uszkodzenia.

Przy szacowaniu ograniczeń (3.46), (3.47) i (3.48) występuje problem określenia parametrów charakteryzujących *maksymalny skurcz mięśnia*. Ponadto każdy rodzaj skurczu (koncentryczny, ekscentryczny, izotoniczny, auktotoniczny, tężcowy całkowity, niecałkowity oraz ich kombinacje) przebiega w sposób odmienny i zależy od wielu czynników, z których największe znaczenie ma historia mięśnia (czas trwania poprzedniego skurczu i jego postać) i jego kondycja (zmęczony czy wypoczęty).

W niniejszej monografii do określenia ograniczeń, które opisują parametry wybranego maksymalnego skurczu modelu mięśnia, zaproponowano metodę doświadczalną i metodę teoretyczną. Metody te opierają się na założeniu, że znane są właściwości masowo-sprężysto-tłumiące badanego mięśnia.

### Metoda doświadczalnego określenia ograniczeń

Metoda doświadczalnego określenia ograniczeń dla wybranego rodzaju skurczu mięśnia rzeczywistego polega na zarejestrowaniu przebiegów: danych kinematycznych (przemieszczenia  $x_i$ , prędkości  $\dot{x}_i$  i przyspieszenia  $\ddot{x}_i$ , dla  $i = 0, 1, \dots, 4$ ) oraz siły całkowitej mięśnia  $P_{zew}(t)$  mierzonej za pomocą dynamometru przymocowanego do przyczepu mięśnia badanego. Dodatkowo przyjmuje się, iż przed rejestracją mięsień znajduje się w stanie wypoczętym, a wybrane na nim punkty są w położeniu wejściowym i zrównoważonym. Wtedy wyznaczone doświadczalnie przebiegi danych kinematycznych są traktowane jako przebiegi maksymalne, które należy zastosować do obliczenia przebiegów:

- maksymalnych sił wewnętrznych  $[P_{\max\_1}^w(t), P_{\max\_2}^w(t), P_{\max\_3}^w(t)]$  (por. p. 3.1.5.4);
- granicznych wartości sił w połączeniu brzuśca ze ścięgnem przyczepu  $F_{ins}(t)$  i ścięgnem początku  $F_{or}(t)$ , zgodnie z (3.49) i (3.50).

### Metoda teoretycznego określenia ograniczeń

Metoda teoretycznego określenia ograniczeń jest stosowana, gdy doświadczalnie nie można określić ograniczeń (3.46), (3.47) i (3.48). W metodzie tej zakłada się, że charakterystyka statyczna (rys. 2.13) opisuje zarówno skurcz ekscentryczny, jak i skurcz koncentryczny mięśnia, a ponadto, że znane są następujące dane: maksymalna wartość siły kurczącej, maksymalna wartość przemieszczenia przyczepu, przebiegi siły kurczącej i przemieszczenia przyczepu mięśnia.

Maksymalna wartość siły kurczącej jest wyznaczana z charakterystyki statycznej. Jest ona równa sile całkowitej rozwijanej podczas wydłużeniu mięśnia przy maksymalnej wartości przemieszczenia przyczepu.

Przyjęte przebiegi siły kurczącej i przemieszczenia przyczepu mięśnia określają skurcz maksymalny. Na podstawie tych danych kolejno są obliczane przebiegi:

- składowej pasywnej siły  $P_b(t)$ , zgodnie z (3.13);
- składowej aktywnej siły  $P_a(t)$ , zgodnie z (3.11), uwzględniając (3.10);
- maksymalnych sił wewnętrznych  $P_{\max\_1}^w(t), P_{\max\_2}^w(t), P_{\max\_3}^w(t)$ , zgodnie z p. 3.1.7.5, i odpowiadające im graniczne przebiegi kinematyczne wyznaczonych punktów mięśnia  $x_i$  i prędkości  $\dot{x}_i$ , dla  $i = 0, 1, \dots, 4$ , jak w (3.8);
- granicznych wartości sił w połączeniu brzuśca ze ścięgnem przyczepu  $F_{ins}(t)$  i ścięgnem początku  $F_{or}(t)$ , zgodnie z (3.49) i (3.50).

#### 3.1.7. Modelowanie wybranych czynności mięśnia

Opisując zachowanie wybranych fragmentów mięśnia za pomocą odpowiednio dobranych modeli reologicznych, można w prosty sposób zamodelować różne stany mięśnia, a w szczególności: skurcz ekscentryczny i skurcz koncentryczny; skurcz izotoniczny (niecałkowity tężcowy i całkowity tężcowy); skurcz izometryczny; skurcz aukstotoniczny, skurcz izokinetyczny; zachowanie się mięśnia wypoczętego i zmęczonego; uszkodzenie odcinka brzuśca prowadzące do zmniejszenia albo zanikania jego właściwości kurczliwych; przyrost tkanki mięśniowej zachodzący podczas ćwiczeń fizycznych, który powoduje zwiększanie siły całkowitej mięśnia.

Zadanie zamodelowania wybranych zachowań mięśnia polega na wyznaczeniu danych wejściowych i wyjściowych modelu oraz określeniu funkcji przejścia. Stosując zasady dynamiki, można przebieg skurczu zamodelować jako proste lub odwrotne zadanie dynamiki. Rozwiązanie zadania prostego polega na zadaniu przebiegów sił wewnętrznych  $P_i^w$ , dla  $i = 1, 2, 3$ , oraz siły zewnętrznej  $P_{zew}(t)$  i obliczaniu przebiegów przemieszczeń charakterystycznych punktów mięśnia  $x_i$ , dla  $i = 0, 1, \dots, 4$ . Zadanie to posiada jednoznaczne rozwiązanie, gdyż liczba równań jest równa liczbie niewiadomych (3.8).

Rozwiązanie zadania odwrotnego polega na początkowym zadaniu przebiegów przemieszczeń przyczepu mięśnia  $x_0(t)$  i siły zewnętrznej  $P_{zew}(t)$  a następnie obliczeniu przebiegów sił wewnętrznych  $P_i^w$ , dla  $i = 1, 2, 3$ . Nie można tego zadania rozwiązać w sposób jednoznaczny, bowiem liczba niewiadomych obliczanych z (3.8) i (3.9) jest mniejsza lub większa od liczby równań. Zadanie tego typu można rozwiązać na dwa sposoby:

- sformułować dodatkowe zależności pomiędzy obliczanymi zmiennymi (tzn. doprowadzić do uzyskania liczby równań równej liczbie szukanych niewiadomych);
- zastosować techniki optymalizacyjne.

Istnieją również zadania, w których liczba niewiadomych jest mniejsza od liczby równań. W tym przypadku równania nadliczbowe można zastosować do sprawdzenia prawidłowości rozwiązania.

W kolejnych punktach monografii omówiono modelowanie następujących skurczy mięśnia: koncentrycznego, ekscentrycznego, izotonicznego, izometrycznego, auksotonicznego, izokinetycznego, a także zachowanie mięśnia przy skokowej zmianie jego całkowitej długości. Przykładowe symulacje zamodelowanych czynności mięśnia przedstawiono w rozdz. 4.

### 3.1.7.1. Skurcz koncentryczny i ekscentryczny

*Skurcz koncentryczny* zachodzi, gdy mięsień pobudzony ulega skróceniu. Do jego realizacji mięsień musi posiadać taką siłę całkowitą, która przewyższa siłę zewnętrzną przyłożoną do jego przyczepu (siła zewnętrzna działa wyłącznie w kierunku wydłużenia mięśnia, por. p. 3.1.1.2).

*Skurcz ekscentryczny* występuje, gdy mięsień pobudzony ulega wydłużeniu. Skurcz ten zachodzi na skutek przeważającego działania siły zewnętrznej nad całkowitą siłą mięśnia.

W niniejszej monografii skurcz koncentryczny (ekscentryczny) zamodelowano w postaci prostego zadania dynamiki, które opisane jest układem równań różniczkowych (3.8).

### 3.1.7.2. Skurcz izotoniczny

Skurcz izotoniczny występuje, gdy pobudzenie mięśnia nie ulega zmianie. Skurcz ten może zachodzić, gdy przyczep mięśnia się przemieszcza ( $x_0(t) \neq 0$ ) (przypadek A) lub jest unieruchomiony ( $x_0(t) = 0$ ) (przypadek B).

#### Przypadek A

Na skutek pobudzenia wystarczającego do inicjacji skurczu koncentrycznego przyczep mięśnia się przemieszcza i osiąga pewną wartość, wokół której oscyluje. Ze względu na postać oscylacji można wyróżnić *niezupelny skurcz tężcowy* (widoczne oscylacje) lub *zupelny skurcz tężcowy* (mało widoczne oscylacje).

Skurcz ten zamodelowano jako proste zadanie dynamiki, które opisano układem równań różniczkowych (3.8). Wewnętrzne siły  $P_i^w$ , dla  $i = 1, 2, 3$ , zadano w postaci bodźców o niezmienniej amplitudzie i stałej częstotliwości (rys. 3.10.b).

### Przypadek B

Na skutek pobudzenia mięśnia, który posiada unieruchomiony przyczep, zmienia się jego siła całkowita. Z tego względu skurcz ten jest nazywany skurczem izotoniczno-izometrycznym, gdyż jego długość pozostaje stała.

Ze względu na oscylacje siły całkowitej mięśnia wyróżnia się zupełny skurcz tężcowy i niezupełny skurcz tężcowy. Skurcz ten zamodelowano zgodnie z zasadami opisanymi w p. 3.1.7.3 (przypadek II).

#### 3.1.7.3. Skurcz izometryczny

- Skurcz izometryczny zachodzi, gdy długość mięśnia nie ulega zmianie. Ma on miejsce gdy:
- równoważą się działania siły zewnętrznej i siły całkowitej mięśnia izolowanego (przypadek I);
  - początek i przyczep mięśnia są zamocowane do kości unieruchomionych (przypadek II);
  - wybrana kończyzna przebywa na granicy obszaru ruchów dopuszczalnych (przypadek III).

### Przypadek I

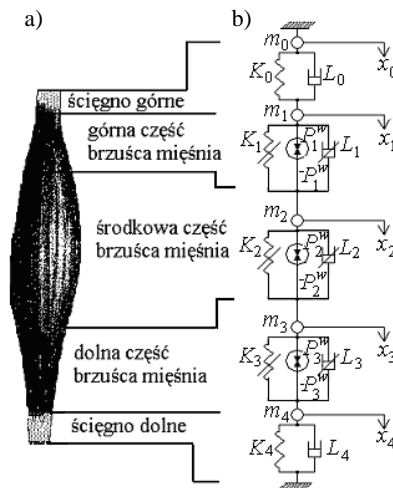
Długość mięśnia nie ulega zmianie, jeżeli równoważą się działania siły zewnętrznej i siły całkowitej mięśnia zależnej od pobudzenia pochodzącego z układu nerwowego. Oznacza to, że przemieszczenie przyczepu mięśnia  $x_0(t)$  oraz jego prędkość  $\dot{x}_0(t)$  są zerowe:

$$x_0(t) = \text{const} \wedge \dot{x}_0(t) = 0. \quad (3.51)$$

Przypadek ten opisano w p. 3.1.2.

### Przypadek II

Długość mięśnia pobudzonego nie ulega zmianie, jeżeli jego początek i przyczep są przymocowane do kości unieruchomionych [ $x_0(t) = 0$  oraz  $P_{zew}(t) = 0$ ]. Wtedy w czasie skurczu poszczególne części mięśnia ulegają deformacji. Ściągnięta ulegają bardzo małym odkształceniom w porównaniu z deformacjami fragmentów brzusca. Z kolei środkowa część brzusca ulega największemu odkształceniom w porównaniu z deformacjami jego fragmentów bocznych.



Rys. 3.13. Model mięśnia: a) podział mięśnia na fragmenty, b) reologiczny model mięśnia w czasie skurczu izometrycznego

Na rys. 3.13.b przedstawiono model reologiczny mięśnia przebywającego w skurczu izometrycznym. Jego elementy reologiczne (masowe  $m_i$ , sprężyste  $K_i$ , lepkie  $L_i$ , siłowe  $P_i^w$ ) są identyczne z modelem opisanym w p. 3.1.2. Ze względu na fakt, iż przemieszczenie przyczepu jest zerowe  $x_0(t) = 0$ , model matematyczny upraszcza się do układu o czterech stopniach swobody:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + L_0 \cdot \dot{x}_1 + K_0 \cdot x_1 + L_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_1 \cdot (x_1 - x_2) &= P_1^w(t) \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 + L_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_1 \cdot (x_2 - x_1) + L_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + K_2 \cdot (x_2 - x_3) &= P_2^w(t) - P_1^w(t) \\ m_3 \cdot \ddot{x}_3 + L_2 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + K_2 \cdot (x_3 - x_2) + L_3 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + K_3 \cdot (x_3 - x_4) &= P_3^w(t) - P_2^w(t) \\ m_4 \cdot \ddot{x}_4 + L_3 \cdot (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + K_3 \cdot (x_4 - x_3) + L_4 \cdot \dot{x}_4 + K_4 \cdot x_4 &= -P_3^w(t). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Równania (3.54) w zapisie macierzowym mają postać:

$$\mathbf{M}_2 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{L}_2 \cdot \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{H}_{w1} \cdot \mathbf{p}_w$$

gdzie:  $\mathbf{M}_2$  – macierz mas:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{L}_2$  – macierz tłumienia:

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} L_0 + L_1 & -L_1 & 0 & 0 \\ -L_1 & L_1 + L_2 & -L_2 & 0 \\ 0 & -L_2 & L_2 + L_3 & -L_3 \\ 0 & 0 & -L_3 & L_3 + L_4 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{K}_2$  – macierz sztywności:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} K_0 + K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 \end{bmatrix},$$

$\ddot{\mathbf{x}}_1$  – wektor (macierz kolumnowa) przebiegów przyspieszeń wyznaczonych punktów modelu mięśnia:

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 = \text{col}[\ddot{x}_1 = \ddot{x}_1(t), \quad \ddot{x}_2 = \ddot{x}_2(t), \quad \ddot{x}_3 = \ddot{x}_3(t), \quad \ddot{x}_4 = \ddot{x}_4(t)],$$

$\dot{\mathbf{x}}_1$  – wektor (macierz kolumnowa) przebiegów prędkości wyznaczonych punktów modelu mięśnia:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \text{col}[\dot{x}_1 = \dot{x}_1(t), \quad \dot{x}_2 = \dot{x}_2(t), \quad \dot{x}_3 = \dot{x}_3(t), \quad \dot{x}_4 = \dot{x}_4(t)],$$

$\mathbf{x}_1$  – wektor (macierz kolumnowa) przebiegów przemieszczeń wyznaczonych punktów modelu mięśnia:

$$\mathbf{x}_1 = \text{col}[x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t), \quad x_4 = x_4(t)],$$



$p_w$  – wektor sił wewnętrznych modelu mięśnia, jak w (3.8);  $H_{w1}$  – macierz lokalizacji sił wewnętrznych modelu mięśnia, jak w (3.42).

### Przypadek III

W przypadku, gdy wybrana kończyna przebywa na granicy obszaru ruchów dopuszczalnych, długości składowych mięśni pozostają niezienne. Do zamodelowania skurczu izometrycznego mięśnia kończyny przyjęto następującą zasadę: jeżeli w  $i$ -tej chwili czasu przemieszczenie  $x_0(t_i)$  przyczepu mięśnia przekracza granicę przemieszczeń dozwolonych  $x_u$ , to zaczyna działać siła kompensacyjna  $P_{komp}$ , która utrzymuje przyczep na tej granicy. Siła kompensacyjna modeluje działania biernych części stawu i wszystkich jego mięśni oraz chroni kończynę przed urazem, utrzymując przyczep mięśnia w obszarze przemieszczeń dopuszczalnych. W algorytmie obliczeniowym granicę przemieszczeń dozwolonych zdefiniowano jako przedział, który w przypadku skrócenia ma następującą postać:

$$(x_u - e \cdot x_u) \leq x_0(t_i) \leq x_u, \quad (3.53)$$

a w przypadku wydłużenia mięśnia:

$$x_u \leq x_0(t_i) \leq (x_u + e \cdot x_u), \quad (3.54)$$

gdzie:  $e$  – mała liczba (przyjęto  $e = 0,001$ ).

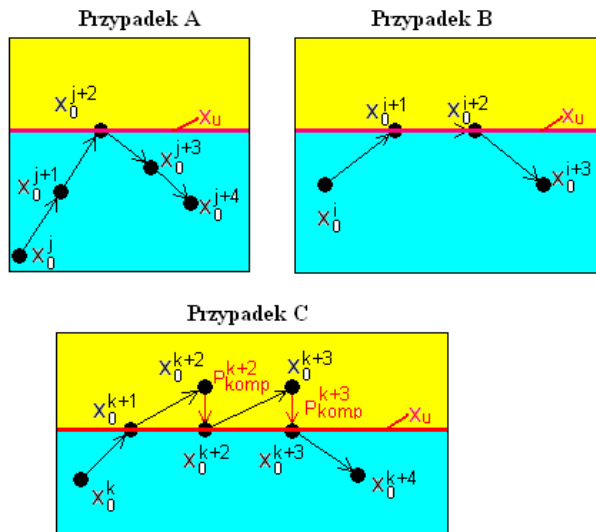


Rys. 3.14. Model mięśnia: a) podział mięśnia na fragmenty, b) reologiczny model mięśnia w czasie skurczu izometrycznego z uwzględnieniem działania siły kompensacyjnej  $P_{komp}$

Model reologiczny mięśnia uwzględniający działanie siły kompensacyjnej  $P_{komp}$  przedstawiono na rys. 3.14.b. Jego współczynniki (masowe  $m_i$ , sztywności  $K_i$ , tłumienia  $L_i$ ) i elementy siłowe  $P_i^w$  są identyczne z opisanymi w p. 3.1.2. Podany na rysunku zwrot działania siły kompensacyjnej  $P_{komp}$  oznacza, że siła ta nie pozwala na zmniejszenie długości mięśnia.

Analizując przekroczenie granicy przemieszczeń dozwolonych  $x_u$ , wyróżniono następujące przypadki (rys. 3.15):

1. **Przypadek A** zachodzi, gdy w kroku  $j+2$  przemieszczenie przyczepu  $x_0^{j+2}$  najpierw wkracza na granicę przemieszczeń dozwolonych  $x_u$ , a w kroku kolejnym  $j+3$  przemieszczenie przyczepu  $x_0^{j+3}$  wraca do obszaru przemieszczeń dopuszczalnych. Przypadek ten nie jest traktowany jako skurcz izometryczny i dlatego siła kompensacyjna ma wartość zerową.
2. **Przypadek B** zachodzi, gdy w kolejnych krokach  $i+1$  i  $i+2$  przemieszczenia  $x_0^{i+1}$  i  $x_0^{i+2}$  znajdują się na granicy  $x_u$ . W przedziale  $[i+1; i+2]$  zachodzi skurcz izometryczny, a siła kompensacyjna jest zerowa, gdyż przemieszczenie przyczepu nie wkracza w obszar przemieszczeń niedozwolonych.
3. **Przypadek C** zachodzi, gdy w kroku  $k+1$  przemieszczenie przyczepu  $x_0^{k+1}$  najpierw wkracza na granicę, a w następnym kroku  $k+2$  przemieszczenie przyczepu  $x_0^{k+2}$  wchodzi w obszar przemieszczeń niedozwolonych. W tym przypadku w kroku  $k+1$  zaczyna działać siła kompensacyjna  $P_{komp}^{k+2}$ , która zapewnia, że w kroku  $k+2$  przemieszczenie  $x_0^{k+2}$  powraca na granicę  $x_u$ . Przypadek ten powtórzy się w kroku  $k+3$ , gdy przemieszczenie  $x_0^{k+3}$  wkroczy w obszar przemieszczeń niedozwolonych (w kroku  $k+2$  zadziałała siła kompensacyjna  $P_{komp}^{k+3}$ , która spowoduje, że w kroku  $k+3$  przemieszczenie przyczepu  $x_0^{k+3}$  znajdzie się na granicy  $x_u$ ). W przedziale  $[k+1; k+3]$  zachodzi skurcz izometryczny modelu mięśnia.



Rys. 3.15. Przypadki A, B i C przekroczenia granicy przemieszczeń dozwolonych  $x_u$  (dolny obszar jest obszarem przemieszczeń dozwolonych, górny obszar – obszarem przemieszczeń niedozwolonych; przemieszczenia przyczepu  $x_0$  podane są w postaci kropek, prawy górny indeks ( $i, j, k$ ) przy  $x_0$  oznaczającym krok całkowania)

Rozważając przypadek C i przedział  $[k+1; k+2]$  (rys. 3.15.c), wyznaczenie siły kompensacyjnej  $P_{komp}^{k+2}$ , która zapewni powrót przemieszczenia przyczepu do obszaru przemieszczeń dopuszczalnych, oparto na następujących rozważaniach. Działanie siły  $P_{komp}^{k+2}$

w kroku  $k+1$  musi spowodować w kroku  $k+2$  powrót przemieszczenia przyczepu mięśnia  $x_0^{k+2}$  na granicę  $x_u$ . Zatem w kroku tym muszą być spełnione warunki:

$$(x_0^{k+2} = x_u) \wedge (\dot{x}_0^{k+2} = 0) \wedge (\ddot{x}_0^{k+2} = 0). \quad (3.55)$$

Wtedy dla modelu matematycznego mięśnia (3.8) siła kompensacyjna  $P_{komp}^{k+2}$  jest równa:

$$P_{komp}^{k+2} = - \left[ m_0 \cdot \ddot{x}_0^{k+2} + L_0 \cdot \dot{x}_0^{k+2} + K_0 \cdot (x_0^{k+2} - x_u) \right]. \quad (3.56)$$

W przypadku stosowania modelu matematycznego mięśnia opisanego równaniem różniczkowo-całkowym (3.9), siła kompensacyjna  $P_{komp}^{k+2}$  jest obliczana z zależności:

$$P_{komp}^{k+2} = - \left[ A_2 \cdot \ddot{x}_0^{k+2} + A_1 \cdot \dot{x}_0^{k+2} + A_0 \cdot (x_0^{k+2} - x_u) + \int_0^{t_{k+2}} \left( \sum_{i=0}^7 B_i \cdot e^{s_i \cdot (t_{k+2} - \tau)} \right) \cdot x(\tau) d\tau + \sum_{i=0}^7 \frac{B_i \cdot x_u}{s_i} \cdot (1 - e^{s_i \cdot t_{k+2}}) \right]. \quad (3.57)$$

Dokładność obliczeń siły kompensacyjnej  $P_{komp}^{k+3}$  ma duży wpływ na wartość przemieszczenia przyczepu  $x_{k+4}$ , który znajdzie się w obszarze przemieszczeń dozwolonych.

#### 3.1.7.4. Skurcz auksotoniczny

*Skurcz auksotoniczny* występuje w przypadku jednoczesnej zmiany zarówno siły mięśnia pobudzonego, jak i jego długości.

W przypadku symulacji numerycznych skurcz auksotoniczny można zaobserwować wtedy, gdy przemieszczenie przyczepu modelu mięśnia pobudzonego oraz jego siła kurcząca są zmiennymi w czasie funkcjami:  $x_0(t) \neq \text{const}$  oraz  $P_{kurcz}(t) \neq \text{const}$ .

#### 3.1.7.5. Skurcz, jako zadana funkcja czasu przemieszczenia przyczepu mięśnia

Wyznaczenie zachowania modelu mięśnia przy zadanym przemieszczeniu przyczepu  $x_0(t)$  polega na rozwiązaniu odwrotnego zadania dynamiki. Dodatkowe zadanie przebiegów przemieszczeń pozostałych punktów, które wyznaczono w modelu mięśnia pobudzonego, sprowadza problem określenia zachowania modelu do identyfikacji sił wewnętrznych (por. p. 3.1.5.4).

Jeżeli jest badane zachowanie modelu mięśnia biernego, to przemieszczenia wyznaczonych punktów modelu mięśnia  $x_i$ , dla  $i = 1, 2, \dots, 4$  są odpowiedzią na zadany przebieg przemieszczenia jego przyczepu  $x_0(t)$ . Zadanie to posiada jednoznaczne rozwiązania.

W przypadku badania zachowania modelu mięśnia pobudzonego wymagane jest określenie: wewnętrznych sił generowanych w elementach siłowych  $P_i^w$ , dla  $i = 1, 2, 3$  oraz przemieszczeń poszczególnych odcinków modelu mięśnia. W tym przypadku liczba niewiadomych przewyższa liczbę równań, co świadczy o braku rozwiązania jednoznacznego. W niniejszej monografii do uzyskania rozwiązania jednoznacznego zaproponowano metodę rozdzielania składowej aktywnej na poszczególne siły, którą opisano poniżej.

Przy jednoczesnym zadaniu przemieszczenia przyczepu mięśnia  $x_0(t)$  oraz siły kurczącej  $P_{kurcz}(t)$  w obliczaniach sił wewnętrznych  $P_i^w$ , dla  $i = 1, 2, 3$  i parametrów kinematycznych wybranych punktów modelu mięśnia (przemieszczenia, ich prędkości i przyspieszenia) należy uwzględniać ograniczenia wartości tych wielkości (por. p. 3.1.6).

### Metoda rozdzielenia składowej aktywnej na poszczególne siły

W celu wyznaczenia sił wewnętrznych  $P_i^w$ , dla  $i = 1, 2, 3$ , tworzących składową aktywną modelu mięśnia  $P_a(t)$ , zaproponowano dwa podejścia:

- wprowadzanie liniowych związków pomiędzy szukanymi zmiennymi,
- zastosowanie technik optymalizacyjnych.

#### Podejście 1: wprowadzanie liniowych związków pomiędzy szukanymi zmiennymi

Wprowadzenie liniowych związków pomiędzy szukanymi zmiennymi oparto na fakcie, że każdy aktywny odcinek modelu mięśnia ma niezmienną w czasie skurczu objętość. Określa ona, jaką maksymalną siłę wewnętrzną może wygenerować jej element siłowy przy jednoczesnym utrzymaniu modelu mięśnia w „stanie dopuszczalnym” (por. p. 3.1.6). Oprócz tego kształt mięśnia obłego świadczy, że środkowa część jego brzuśca ma największą objętość  $V_2$  i dlatego może wygenerować większą siłę wewnętrzną  $P_2^w(t)$  w porównaniu ze swoimi bocznymi fragmentami: częścią górną o objętości  $V_1$  i wewnętrzną siłą  $P_1^w(t)$  oraz częścią dolną o objętości  $V_3$  i wewnętrzną siłą  $P_3^w(t)$ . Zakładając, że siła  $P_2^w(t)$  ma maksymalną wartość, przyjęto ją jako parametr wejściowy modelu mięśnia. Wprowadzając współczynnik zdrowotności  $\xi_i$  dla  $i$ -tego fragmentu brzuśca mięśnia, który przedstawia stosunek objętości  $i$ -tej części  $V_i$  do części środkowej  $V_2$ , można obliczyć wewnętrzne siły wygenerowane przez część górną  $P_1^w(t)$  i część dolną  $P_3^w(t)$  brzuśca:

$$\begin{aligned} P_1^w(t) &= P_2^w(t) \cdot \frac{V_1}{V_2} = P_2^w(t) \cdot \xi_1 \\ P_2^w(t) &= P_2^w(t) \cdot \frac{V_2}{V_2} = P_2^w(t) \cdot \xi_2 \\ P_3^w(t) &= P_2^w(t) \cdot \frac{V_3}{V_2} = P_2^w(t) \cdot \xi_3, \end{aligned} \quad (3.58)$$

gdzie:  $\xi_1$  – współczynnik zdrowotności górnego fragmentu brzuśca;  
 $\xi_2$  – współczynnik zdrowotności środkowego fragmentu brzuśca ( $\xi_2 = 1$ );  
 $\xi_3$  – współczynnik zdrowotności dolnego fragmentu brzuśca.

W obliczeniach przyjęto, że współczynniki zdrowotności  $\xi_1$  i  $\xi_3$  muszą spełniać następujący warunek:

$$0 \leq \xi_i \leq 0,5, \quad i = 1, 3. \quad (3.59)$$

Algorytm obliczeniowy omawianego podejścia opisano w p. 6.4.

#### Podejście 2: zastosowanie technik optymalizacyjnych

Techniki optymalizacyjne stanowią skuteczne narzędzie do rozwiązania niejednoznacznego problemu inżynierskiego, jednak wymagają określenia ograniczeń i wyznaczenia funkcji celu. Dla wyznaczenia sił wewnętrznych  $[P_1^w(t), P_2^w(t), P_3^w(t)]$ , zapewniających zadane przemieszczenie przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$ , można zastosować następujące funkcje celu:

- kryterium minimalnej sumy sił wewnętrznych (podniesionych do potęgi  $\lambda$ ):

$$\sum_{j=1}^3 w_j \cdot \left[ \int_0^t \left( \sum_{i=0}^7 C_{ij} \cdot e^{s_i \cdot (t-\tau)} \right) \cdot P_j^w(\tau) d\tau \right]^\lambda \rightarrow \min, \quad (3.60)$$

gdzie:  $w_j$  – współczynnik wagowy  $j$ -tej siły wewnętrznej  $P_j^w$ ;

- kryterium minimalnej sumy pracy sił wewnętrznych (podniesionych do potęgi  $\lambda$ ):

$$\sum_{j=1}^3 \left\{ \int_{t_0}^{t_k} P_j^w(\tau) \cdot [\dot{x}_j(\tau) - \dot{x}_{j+1}(\tau)] d\tau \right\}^2 \rightarrow \min. \quad (3.61)$$

Dodatkowo należy zapewnić, aby model mięśnia był w „stanie dopuszczalnym” (por. p. 3.1.6). Ma to miejsce wtedy, gdy łącznie są spełnione ograniczenia nierównościowe (3.46), (3.47) i (3.48), ograniczenie równościowe (3.8) oraz nierówność:

$$(P_1^w < \zeta_1 \cdot P_2^w) \wedge (P_3^w < \zeta_2 \cdot P_2^w), \quad (3.62)$$

gdzie:  $\zeta_1, \zeta_2$  – współczynniki określające jaka część siły wewnętrznej części środkowej modelu brzośca może być wygenerowana przez jego części boczne.

W przypadku, gdy siły wewnętrzne są wyznaczane za pomocą:

- kryterium (3.60), zadanie należy rozwiązać na drodze optymalizacji statycznej (rozwiązanie jest poszukiwane w każdym kroku całkowania);
- kryterium (3.61), zadanie należy rozwiązać na drodze optymalizacji dynamicznej (rozwiązanie jest poszukiwane w zadanym przedziale czasowym).

### Skurcz izokinetyczny

Skurcz izokinetyczny zachodzi, gdy przyczep mięśnia w czasie  $t$  przemieszcza się ze stałą prędkością  $b_{izok} \neq 0 = \text{const}$  ( $b$ ):

$$[x_0(t) = b_{izok} \cdot t] \wedge [\dot{x}_0(t) = b_{izok}] \wedge [\ddot{x}_0(t) = 0] \wedge \dots \wedge [x_0^{(n)}(t) = 0], \quad (3.63)$$

gdzie:  $n$  – rząd pochodnej.

Warto zwrócić uwagę, iż podczas obrotu kończyny (górnej lub dolnej) ze stałą prędkością, składowe mięśnie nie przebywają w skurczach izokinetycznych, ponieważ długości tych mięśni są nieliniowymi funkcjami kąta obrotu kończyny (por. p. 3.2).

W niniejszej monografii skurcz izokinetyczny opisano jako odwrotne zadanie dynamiki.

### Skurcz przy skokowej zmianie długości mięśnia

W [74, 112] opisano metodę badania zachowania izolowanego mięśnia rzeczywistego, która polega na skokowej zmianie jego długości. Jest ona stosowana do otrzymania charakterystyki statycznej i dynamicznej mięśnia izolowanego (por. p. 2.2.1).

W niniejszej monografii skokową zmianę długości modelu mięśnia biernego zamodelowano jako odpowiedź na działanie siły zewnętrznej  $P_{zew}(t)$ , która powoduje zadane wcześniej przemieszczenie przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$ . Należy przy tym wziąć pod uwagę, iż:

- zastosowanie funkcji Heaviside’a do opisu skoku jednostkowego nie odzwierciedla czynności, którą można zrealizować doświadczalnie („wymiaru” nie można zmienić skokowo), a ponadto pojawia się problem analitycznego opisanie pochodnych tej funkcji;
- zastosowanie kombinacji kilku funkcji ciągłych prowadzi do nieciągłości pochodnych, tzn. w punkcie przejścia jednej funkcji w drugą obserwuje się gwałtowną zmianę prędkości i/lub przyspieszenia przyczepu, co utrudnia rozwiązanie.

### 3.1.8. Bilans energetyczny pracy modelu mięśnia

Przyrost energii kinetycznej modelu mięśnia  $W_M$  w przedziale czasu  $[t_0, t_k]$  jest równy sumie: pracy sił wewnętrznych ( $W_{wew}$ ), pracy siły zewnętrznej ( $W_{zew}$ ), pracy sił sprężystych ( $W_E$ ) i pracy sił lepkich ( $W_L$ ):

$$W_M = W_{wew} + W_{zew} + W_E + W_L, \quad (3.64)$$

gdzie:

$$W_{zew} = \int_{t_0}^{t_k} \{ P_1^w(\tau) \cdot \dot{x}_1(\tau) + [P_2^w(\tau) - P_1^w(\tau)] \cdot \dot{x}_2(\tau) + \\ + [P_3^w(\tau) - P_2^w(\tau)] \cdot \dot{x}_3(\tau) - P_3^w(\tau) \cdot \dot{x}_4(\tau) \} d\tau, \quad (3.65)$$

$$W_{zew} = - \int_{t_0}^{t_k} P_{zew}(\tau) \cdot \dot{x}_0(\tau) d\tau, \quad (3.66)$$

$$W_E = - \int_{t_0}^{t_k} \{ K_0 \cdot [x_0(\tau) - x_1(\tau)] \cdot [\dot{x}(\tau) - \dot{x}_1(\tau)] + K_1 \cdot [x_1(\tau) - x_2(\tau)] \cdot [\dot{x}_1(\tau) - \dot{x}_2(\tau)] + \\ + K_2 \cdot [x_2(\tau) - x_3(\tau)] \cdot [\dot{x}_2(\tau) - \dot{x}_3(\tau)] + K_3 \cdot [x_3(\tau) - x_4(\tau)] \cdot [\dot{x}_3(\tau) - \dot{x}_4(\tau)] + \\ + K_4 \cdot x_4(\tau) \cdot \dot{x}_4(\tau) \} d\tau, \quad (3.67)$$

$$W_L = - \int_{t_0}^{t_k} \{ L_0 \cdot [\dot{x}_0(\tau) - \dot{x}_1(\tau)]^2 + L_1 \cdot [\dot{x}_1(\tau) - \dot{x}_2(\tau)]^2 + L_2 \cdot [\dot{x}_2(\tau) - \dot{x}_3(\tau)]^2 + \\ + L_3 \cdot [\dot{x}_3(\tau) - \dot{x}_4(\tau)]^2 + L_4 \cdot [\dot{x}_4(\tau)]^2 \} d\tau, \quad (3.68)$$

$$W_M = \int_{t_0}^{t_k} [m_0 \cdot \ddot{x}_0(\tau) \cdot \dot{x}_0(\tau) + m_1 \cdot \ddot{x}_1(\tau) \cdot \dot{x}_1(\tau) + m_2 \cdot \ddot{x}_2(\tau) \cdot \dot{x}_2(\tau) + \\ + m_3 \cdot \ddot{x}_3(\tau) \cdot \dot{x}_3(\tau) + m_4 \cdot \ddot{x}_4(\tau) \cdot \dot{x}_4(\tau)] d\tau. \quad (3.69)$$

Model zachowania mięśnia jest układem niezachowawczym, w którym praca sił lepkich odzwierciedla wewnętrzne opory mięśnia powodujące nieodwracalne straty energetyczne. Praca sił sprężystych modeluje natychmiastową odpowiedź mięśnia na działanie wewnętrznego (zewewnętrznego) pobudzenia, a praca sił bezwładności (energia kinetyczna układu) odzwierciedla wpływ mas fragmentów mięśnia na dynamikę modelowanego skurczu.

## 3.2. Model zespołu mięśni układu ramię-przedramię

### 3.2.1. Ogólna charakterystyka modelu

Model zespołu mięśni opisuje ruchy zginania/prostowania przedramienia względem nieruchomego ramienia w płaszczyźnie strzałkowej, przy czym przedramię znajduje się w ustalonej pozycji nawracania/odwracania. Nie uwzględniono w nim zjawiska wzajemnego uścisku składowych mięśni, które zachodzi na skutek zmiany kształtów mięśni generujących skurcz. Zachowanie  $i$ -tego mięśnia należącego do modelu zespołu mięśniowego jest zgodne z zasadami podanymi w p. 3.1 (rys. 3.16.b).

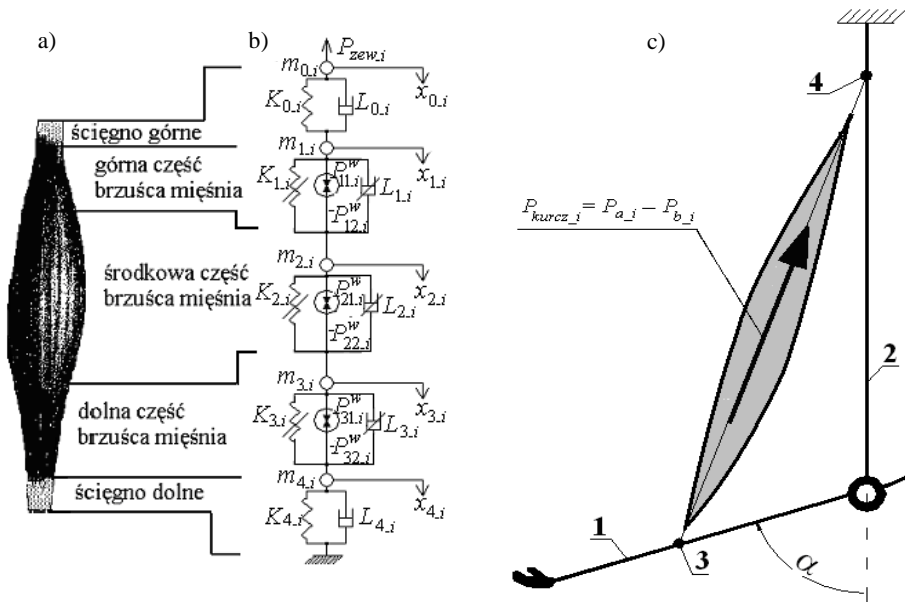
Model  $i$ -tego mięśnia opisują współczynniki sztywności ( $K_{j,i}$ ), współczynniki tłumienia ( $L_{j,i}$ ), współczynniki masowe ( $m_{j,i}$ ) dla  $j = 0, \dots, 4$ , a także siły wewnętrzne  $[P_{11\_i}^w = P_{11\_i}^w(t)] \wedge [-P_{12\_i}^w = -P_{12\_i}^w(t)]$  oraz  $[P_{21\_i}^w = P_{21\_i}^w(t)] \wedge [-P_{22\_i}^w = -P_{22\_i}^w(t)]$ ,

$[P_{31\_i}^w = P_{31\_i}^w(t)] \wedge [-P_{32\_i}^w = -P_{32\_i}^w(t)]$  i siła zewnętrzna  $P_{zew\_i} = P_{zew\_i}(t)$ . Przeszyczenia elementów masowych modelu mięśnia  $x_{0\_i}(t) \wedge [\{x_j\} = \{x_{j\_i}, j = 1, \dots, 4\}]$  odpowiadają przeszczeniom punktów wyznaczonych na mięśniu rzeczywistym. Przeszczenie przyczepu  $i$ -tego mięśnia  $x_{0\_i}$  jest nieliniową funkcją kąta obrotu w stawie łokciowym  $\alpha = \alpha(t)$ , będącego kątem zginania/prostowania przedramienia względem nieruchomego ramienia (rys. 3.16.c):

$$x_{0\_i}(t) = l_i[\alpha(t_0)] - l_i[\alpha(t)] \quad , \quad (3.70)$$

gdzie:  $l_i[\alpha(t_0)]$  i  $l_i[\alpha(t)]$  – długości  $i$ -tego mięśnia w początkowej chwili czasu  $t_0$  i w dowolnej chwili czasu  $t$ .

Siła kurcząca  $P_{kurcz\_i} = P_{kurcz\_i}[\alpha(t)]$   $i$ -tego modelu mięśnia jest zwrócona od jego przyczepu do początku. Jest ona różnicą pomiędzy składową czynną  $P_{a\_i} = P_{a\_i}[\alpha(t)]$  i składową bierną  $P_{b\_i} = P_{b\_i}[\alpha(t)]$  (por. p. 3.1.3).



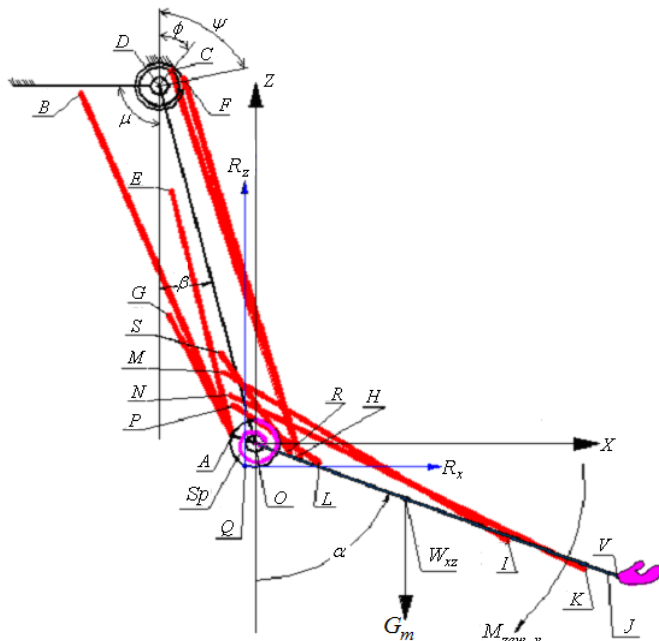
Rys. 3.16. Model  $i$ -tego mięśnia: a) podział mięśnia na fragmenty; b) reologiczny model mięśnia; c) rozmieszczenie aktonu mięśniowego w stawie łokciowym (1 – długa oś przedramienia, 2 – długa oś ramienia, 3 – przyczep mięśnia, 4 – początek mięśnia,  $\alpha$  – kąt obrotu przedramienia względem nieruchomego ramienia)

### 3.2.2. Model 2D

Model 2D (model płaski) opisuje ruchy zginania/prostowania w stawie łokciowym, uwzględniając działania sił mięśni w strzałkowej płaszczyźnie ruchu XZ (rys. 3.17).

Staw łokciowy potraktowano jako staw zawiasowy. W jego środku geometrycznym  $O$  przyjęto początek globalnego nieruchomego układu współrzędnych XYZ (rys. 3.17), który jest równoległy do głównych osi ciała [53, 125]. Oś X jest równoległa do osi strzałkowej

ciała i jest zwrócona od tylnej do przedniej powierzchni ciała. Oś  $Y$  jest równoległa do osi poprzecznej ciała i jest zwrócona: dla lewej kończyny górnej – od płaszczyzny pośrodkowej, a dla prawej kończyny górnej – do płaszczyzny pośrodkowej. Oś  $Z$  jest równoległa do osi długiej ciała i jest zwrócona od części ogonowej do części czaszkowej ciała.



Rys. 3.17. Płaski model zespołu mięśni ramienia-przedramienia

Dla zasymulowania ruchów zginania/prostowania w stawie łokciowym przyjęto, iż ramię  $DO$  jest unieruchomione i znajduje się w położeniu odwodzenia o stały kąt  $\beta$  od osi  $Z$  (rys. 3.17).

Przedramię z ręką potraktowano jako nieruchomą strukturę przedramię-ręka  $OV$ , której masowy moment bezwładności względem osi  $Y$  wynosi  $J_y$ , a jej siła ciężkości  $G_m$  jest przyłożona w punkcie  $W$  (rys. 3.17). Kąt  $\alpha$  pomiędzy osią  $Z$  a odcinkiem  $OW_{xz}$  (punkt  $W_{xz}$  jest rzutem punktu  $W$  na płaszczyznę  $XZ$ ) jest miarą ruchu zginania/prostowania w stawie łokciowym. Dodatkowo przyjęto, że struktura przedramię-ręka  $OV$  nie wykonuje ruchów nawracania/odwracania w stawie łokciowym. Wykonuje ona wyłącznie ruchy płaskie w płaszczyźnie strzałkowej  $XZ$  względem stałej osi obrotu  $Y$ . Oznacza to, że w czasie obrotu przedramienia współrzędne  $y$  wszystkich składowych mięśni są stałe.

W modelu uwzględniono działanie sił dziewięciu mięśni:

- głowy bocznej  $AE$ , głowy długiej  $AB$  i głowy przyśrodkowej  $AG$  mięśnia trójgłowego ramienia; mięśnia prostownika promieniowego długiego nadgarstka  $KN$ ;
- mięśnia ramienno-promieniowego  $IM$ ;
- mięśnia nawrotnego obłego  $RS$ ;
- mięśnia ramiennego  $LP$ ;
- głowy krótkiej  $HF$  i głowy długiej  $HC$  mięśnia dwugłowego ramienia.

Na rys. 3.17 podano także oznaczenia kątów  $\mu = 90^\circ$ ,  $\psi$  i  $\phi$ .



Ze względu na brak danych o przemieszczeniach przyczepów i początków mięśni względem składowych kości w czasie obrotu przedramienia, przyjęto, że miejsca zaczepienia mięśni są trwale związane z powierzchniami odpowiednich kości.

Na model zespołu mięśni może działać zewnętrzny moment obciążający  $M_{zew\_y} = M_{zew\_y}(t)$ .

### 3.2.2.1. Dynamiczne równanie obrotu przedramienia

Wychodząc z założenia, że przyczepy i początki mięśni umieszczone są wyłącznie w płaszczyźnie strzałkowej  $XZ$  oraz znane są ich odległości do środka obrotu  $O$  ( $IO, MO, NO, KO, RO, SO, LO, PO, HO, FD, CD, DO, AO, EO, GO, BO, DO$ ), równanie dynamiki stawu łokciowego w granicach dopuszczalnych  $\alpha_{\min} \leq [\alpha = \alpha(t)] \leq \alpha_{\max}$  przyjmuje postać:

$$J_y \cdot \ddot{\alpha} = \sum_{i=1}^6 M_i^{zg} - \sum_{i=7}^9 M_i^{pr} - M_{zew\_y} - G_m \cdot OW_{xz} \cdot \sin(\alpha), \quad (3.71)$$

gdzie:

$$M_i^{zg} = P_{kurcz\_i}^{zg}(\alpha) \cdot h_i(\alpha), \quad (3.72)$$

$$M_i^{pr} = P_{kurcz\_i}^{pr}(\alpha) \cdot h_i(\alpha), \quad (3.73)$$

$$h_1(\alpha) = \frac{MO \cdot IO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_1)}{\sqrt{IO^2 + MO^2 + 2 \cdot IO \cdot MO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_1)}}, \quad (3.74)$$

$$h_2(\alpha) = \frac{KO \cdot NO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_2)}{\sqrt{KO^2 + NO^2 + 2 \cdot KO \cdot NO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_2)}}, \quad (3.75)$$

$$h_3(\alpha) = \frac{SO \cdot RO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_3)}{\sqrt{SO^2 + RO^2 + 2 \cdot SO \cdot RO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_3)}}, \quad (3.76)$$

$$h_4(\alpha) = \frac{LO \cdot PO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_4)}{\sqrt{LO^2 + PO^2 + 2 \cdot LO \cdot PO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_4)}}, \quad (3.77)$$

$$h_5(\alpha) = \frac{HO \cdot FO \cdot \sin(\alpha + \rho_1 + \Delta\alpha_5)}{\sqrt{HO^2 + FO^2 + 2 \cdot HO \cdot FO \cdot \cos(\alpha + \rho_1 + \Delta\alpha_5)}}, \quad (3.78)$$

$$h_6(\alpha) = \frac{HO \cdot CO \cdot \sin(\alpha + \rho + \Delta\alpha_6)}{\sqrt{HL^2 + CL^2 + 2 \cdot HL \cdot CL \cdot \cos(\alpha + \rho + \Delta\alpha_6)}}, \quad (3.79)$$

$$h_7(\alpha) = \frac{AO \cdot BO \cdot \sin(\alpha - \rho_2)}{\sqrt{AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos(\alpha - \rho_2)}}, \quad (3.80)$$

$$h_8(\alpha) = \frac{AO \cdot EO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_8)}{\sqrt{AO^2 + EO^2 - 2 \cdot AO \cdot EO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_8)}}, \quad (3.81)$$

$$h_9(\alpha) = \frac{AO \cdot GO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_9)}{\sqrt{AO^2 + GO^2 - 2 \cdot AO \cdot GO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_9)}}, \quad (3.82)$$

zaś:  $M_i^{zg}$  i  $M_i^{pr}$  – moment siły zginania i prostowania wytwarzany przez  $i$ -ty model mięśnia zginacza/prostownika ( $i = 1$  oznacza mięsień  $IM$ ,  $i = 2$  – mięsień  $KN$ ,  $i = 3$  – mięsień  $RS$ ,  $i = 4$  – mięsień  $LP$ ,  $i = 5$  – mięsień  $HF$ ,  $i = 6$  – mięsień  $HC$ ,  $i = 7$  – mięsień  $AB$ ,  $i = 8$  – mięsień  $AE$ ,  $i = 9$  – mięsień  $AG$ );  $h_i(\alpha)$  – ramię siły  $i$ -go modelu mięśnia;  $\Delta\alpha_i$  – różnica kątów pomiędzy prostą łączącą przyczep  $i$ -tego modelu mięśnia ze środkiem obrotu  $O$ , a odcinkiem  $OW_{xz}$ ;  $P_{kurcz\_i}^{zg}(\alpha)$  i  $P_{kurcz\_i}^{pr}(\alpha)$  – siły kurczące generowane przez  $i$ -ty model mięśnia zginacza lub prostownika;  $\rho, \rho_1, \rho_2$  – kąty pomocnicze:

$$\rho_1 = \arcsin\left(\frac{FD \cdot \sin(\psi)}{FO}\right) \wedge FO = \sqrt{DO^2 + FD^2 + 2 \cdot DO \cdot FD \cdot \cos(\psi)},$$

$$\rho = \arcsin\left(\frac{CD \cdot \sin(\varphi)}{CO}\right) \wedge CO = \sqrt{DO^2 + CD^2 + 2 \cdot DO \cdot CD \cdot \cos(\varphi)},$$

$$\rho_2 = \arcsin\left(\frac{BD \cdot \sin(\mu)}{BO}\right) \wedge BO = \sqrt{DO^2 + BD^2 + 2 \cdot DO \cdot BD \cdot \cos(\mu)}.$$

Kurczliwe siły  $i$ -tego modelu mięśnia zginacza lub prostownika  $P_{kurcz\_i}^{zg}(\alpha)$  i  $P_{kurcz\_i}^{pr}(\alpha)$  są wyznaczane z (3.104), gdzie składowe aktywne  $P_{a\_i}^{zg}(t)$  i  $P_{a\_i}^{pr}(t)$  są obliczane z (3.106), a składowe pasywne  $P_{b\_i}^{zg}(\alpha)$  i  $P_{b\_i}^{pr}(\alpha)$  z następujących wzorów:

$$P_{b\_i}^{zg}(\alpha) = A_{2\_i} \cdot \left[ \ddot{\alpha} \cdot h_i(\alpha) + \dot{h}_i(\alpha) \cdot (\dot{\alpha})^2 \right] + A_{1\_i} \cdot h_i(\alpha) \cdot \dot{\alpha}(t) + A_{0\_i} \cdot x_{0\_i}(\alpha) + \int_0^t \left( \sum_{j=0}^7 B_{j\_i} \cdot e^{s_{j\_i} \cdot (t-\tau)} \right) \cdot x_{0\_i}[\alpha(\tau)] d\tau, \quad (3.83)$$

$$P_{b\_i}^{pr}(\alpha) = -A_{2\_i} \cdot \left[ \ddot{\alpha} \cdot h_i(\alpha) + \dot{h}_i(\alpha) \cdot (\dot{\alpha})^2 \right] - A_{1\_i} \cdot h_i(\alpha) \cdot \dot{\alpha}(t) + A_{0\_i} \cdot x_{0\_i}(\alpha) + \int_0^t \left( \sum_{j=0}^7 B_{j\_i} \cdot e^{s_{j\_i} \cdot (t-\tau)} \right) \cdot x_{0\_i}[\alpha(\tau)] d\tau, \quad (3.84)$$

gdzie:  $x_{0\_i}$  – przemieszczenie przyczepu  $i$ -tego mięśnia obliczane jako:

$$x_{0\_1}(\alpha) = \sqrt{IO^2 + MO^2 + 2 \cdot IO \cdot MO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_1)} - \sqrt{IO^2 + MO^2 + 2 \cdot IO \cdot MO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_1)}, \quad (3.85)$$

$$x_{0\_2}(\alpha) = \sqrt{KO^2 + NO^2 + 2 \cdot KO \cdot NO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_2)} - \sqrt{KO^2 + NO^2 + 2 \cdot KO \cdot NO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_2)}, \quad (3.86)$$

$$x_{0\_3}(\alpha) = \sqrt{SO^2 + RO^2 + 2 \cdot SO \cdot RO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_3)} - \sqrt{SO^2 + RO^2 + 2 \cdot SO \cdot RO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_3)}, \quad (3.87)$$

$$x_{0\_4}(\alpha) = \sqrt{LO^2 + PO^2 + 2 \cdot LO \cdot PO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_4)} - \sqrt{LO^2 + PO^2 + 2 \cdot LO \cdot PO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_4)}, \quad (3.88)$$

$$x_{0\_5}(\alpha) = \sqrt{FO^2 + HO^2 + 2 \cdot FO \cdot HO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_5 + \rho_1)} - \sqrt{FO^2 + HO^2 + 2 \cdot FO \cdot HO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_5 + \rho_1)}, \quad (3.89)$$

$$x_{0\_6}(\alpha) = \sqrt{CO^2 + HO^2 + 2 \cdot CO \cdot HO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_6 + \rho)} - \sqrt{CO^2 + HO^2 + 2 \cdot CO \cdot HO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_6 + \rho)}, \quad (3.90)$$

$$x_{0\_7}(\alpha) = \sqrt{AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_7 + \rho_2)} - \sqrt{AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_7 + \rho_2)}, \quad (3.91)$$

$$x_{0\_8}(\alpha) = \sqrt{AO^2 + EO^2 - 2 \cdot AO \cdot EO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_8)} - \sqrt{AO^2 + EO^2 - 2 \cdot AO \cdot EO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_8)}, \quad (3.92)$$

$$x_{0\_9}(\alpha) = \sqrt{AO^2 + GO^2 - 2 \cdot AO \cdot GO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_9)} - \sqrt{AO^2 + GO^2 - 2 \cdot AO \cdot GO \cdot \cos(\alpha_0 + \Delta\alpha_9)}, \quad (3.93)$$

zaś  $\alpha_0 = \alpha(t=0)$ .

### 3.2.2.2. Zachowanie przedramienia w granicznych położeniach ruchu

Przypadek przekroczenia granicy dolnej kąta obrotu  $\alpha_{\min}$  lub granicy górnej kąta obrotu  $\alpha_{\max}$  zamodelowano w sposób następujący. Osiągnięcie jednej z tych granic w modelu zespołu mięśni 2D powoduje wygenerowanie w płaszczyźnie strzałkowej XZ momentu kompensacyjnego  $M_{com\_y} = M_{com\_y}(t)$  [166]. Moment ten pochodzi od oddziaływania więzadeł i torebki stawowej w granicznych położeniach ruchu przedramienia, które chronią rzeczywisty staw łokciowy przed uszkodzeniem. Moment kompensacyjny  $M_{com\_y}$  generuje nieliniowa sprężyna skrętna  $Sp$  o zmiennej sztywności  $k_M(\alpha)$  (rys. 3.17):

$$k_M(\alpha) = \begin{cases} \frac{+ M_{com\_y}}{\alpha_{\min}} & \text{dla } \alpha < \alpha_{\min} \\ 0 & \text{dla } \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max} \\ \frac{- M_{com\_y}}{\alpha_{\min}} & \text{dla } \alpha > \alpha_{\max} \end{cases} \quad (3.94)$$

Działanie momentu kompensacyjnego powoduje powrót przedramienia na bliższą granicę ( $\alpha_{\min}$  lub  $\alpha_{\max}$ ) i utrzymanie stałej granicznej wartości kąta obrotu przedramienia ( $\alpha = \alpha_g = \text{const}$ )  $\wedge$  ( $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha} = 0$ ). Dokładność obliczenia wartości momentu kompensacyjnego  $M_{com\_y}$  w  $n$ -tym kroku całkowania, który poprzedza krok powrotu z granicy do obszaru ruchów dozwolonych przedramienia ( $n+1$ ), ma wpływ na obliczaną w następnym kroku  $t_{n+1}$  wartość kąta  $\alpha(t_{n+1})$ .

Jeżeli w  $(r-1)$  kroku całkowania kąt obrotu przedramienia  $\alpha(t_{r-1})$  znajduje się jeszcze w obszarze ruchów dopuszczalnych [ $\alpha_{\min} \leq \alpha(t_{r-1}) \leq \alpha_{\max}$ ], a w kroku kolejnym  $r$  dochodzi do przekroczenia jednej z granic [ $\alpha(t_r) < \alpha_{\min}$ ]  $\vee$  [ $\alpha(t_r) > \alpha_{\max}$ ] z prędkością kątową  $\dot{\alpha}(t_r)$  i przyspieszeniem kątowym  $\ddot{\alpha}(t_r)$ , to sprężyna  $Sp$  generuje moment kompensacyjny:

$$M_{com\_r} = \sum_{j=1}^6 M_{com\_i}^{zg} - \sum_{i=7}^9 M_{com\_i}^{pr} + G_m \cdot OW_{xz} \cdot \{\sin(\alpha_g) - \sin[\alpha(t_r)]\} - J \cdot \ddot{\alpha}(t_r) + M_{zew\_y}(t_r), \quad (3.95)$$

gdzie:  $M_{com\_i}^{zg}$  – składowa momentu kompensacyjnego  $M_{com\_r}$  wygenerowana przez  $i$ -ty model mięśnia zginacza:

$$M_{com\_i}^{zg} = h_i[\alpha(t_r)] \cdot P_{kurcz\_i}^{zg}[\alpha(t_r)] - h_i(\alpha_g) \cdot \left\langle P_{a\_i}^{zg}(t_r) - A_{0\_i} \cdot x_i(\alpha_g) - \sum_{j=0}^7 \left\{ \frac{B_{j\_i} \cdot x_i(\alpha_g)}{-s_{j\_i}} \cdot [1 - \exp(s_{j\_i} \cdot t_r)] \right\} \right\rangle, \quad (3.96)$$

gdzie:  $M_{com\_i}^{pr}$  – składowa momentu kompensacyjnego  $M_{com\_r}$  wygenerowana przez  $i$ -ty model mięśnia prostownika:

$$M_{com\_i}^{pr} = h_i[\alpha(t_r)] \cdot P_{kurcz\_i}^{pr}[\alpha(t_r)] - h_i(\alpha_g) \cdot \left\langle P_{a\_i}^{pr}(t_r) - A_{0\_i} \cdot x_i(\alpha_g) - \sum_{j=0}^7 \left\{ \frac{B_{j\_i} \cdot x_i(\alpha_g)}{-s_{j\_i}} \cdot [1 - \exp(s_{j\_i} \cdot t_r)] \right\} \right\rangle. \quad (3.97)$$

### 3.2.3. Model 3D

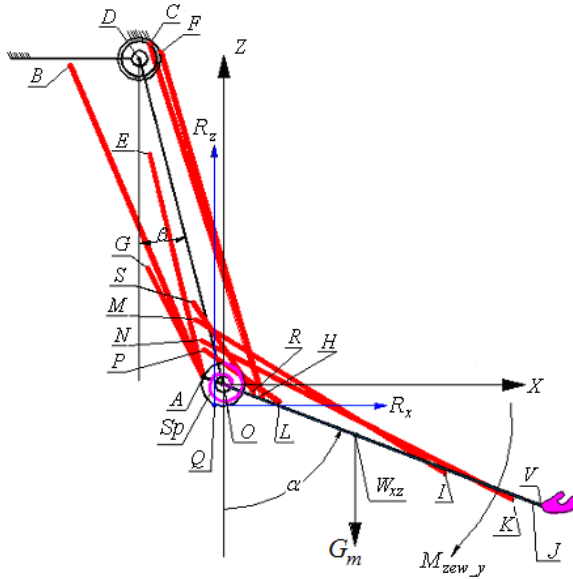
Model 3D opisuje ruchy zginania/prostowania w stawie łokciowym, uwzględniając działanie sił mięśni rozmieszczonych w przestrzeni. Model ten odzwierciedla funkcjonowanie takich samych mięśni, jak w modelu 2D (por. p. 3.2.2). Na rys. 3.18 przedstawiono widok 2D, zaś na rys. 3.19 – widok 3D. Na model zespołu mięśni może działać zewnętrzny moment obciążający  $M_{zew} = M_{zew}(t)$  o składowych:  $M_{zew\_x} = M_{zew\_x}(t)$ ,  $M_{zew\_y} = M_{zew\_y}(t)$ ,  $M_{zew\_z} = M_{zew\_z}(t)$ .

#### 3.2.3.1. Dynamiczne równanie obrotu przedramienia

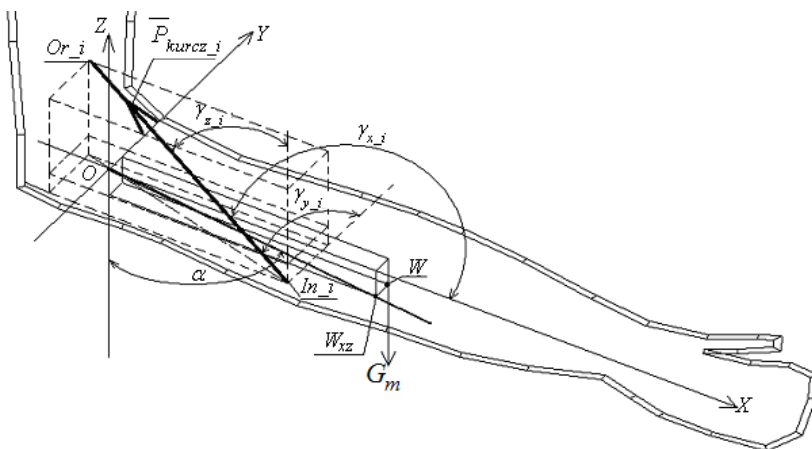
Zakres ruchów dopuszczalnych przedramienia w płaszczyźnie strzałkowej XZ wynosi  $\alpha \in [\alpha_{\min}; \alpha_{\max}]$ , gdzie dolna granica  $\alpha_{\min} = 5^\circ$  odpowiada położeniu struktury przedramię-ręka  $OV$  przy pełnym wyproście, a górna granica  $\alpha_{\max} = 150^\circ$  – przy maksymalnym zgięciu.

W równaniu, które opisuje ruchy zginania/prostowania przedramienia w stawie łokciowym w płaszczyźnie strzałkowej XZ w obszarze ruchów dozwolonych, oddziaływanie

$i$ -tego mięśnia przedstawiono w postaci siły kurczącej  $P_{kurcz_i}$  (rys. 3.19). Siła ta jest zwrócona od przyczepu  $In_i$  o współrzędnych  $\{x_{in_i}, y_{in_i}, z_{in_i}\} = \{x_{in_i}[\alpha(t)], y_{in_i}, z_{in_i}[\alpha(t)]\}$  (na przedramieniu) do początku  $Or_i$  o współrzędnych  $(x_{or_i}, y_{or_i}, z_{or_i})$  (na ramieniu). Na rysunku dodatkowo przedstawiono: globalny układ współrzędnych  $XYZ$  z początkiem  $O$ ; położenie środka masy struktury przedramię-ręka (o ciężarze  $G_m$ ) w punkcie  $W$  oraz jego rzut na płaszczyznę  $XZ$  –  $W_{xz}$ ; kąt zginania/prostowania w stawie łokciowym –  $\alpha = \alpha(t)$ ; kąt pomiędzy linią działania siły kurczącej  $P_{kurcz_i}$  a osią  $X$  –  $\gamma_{x_i} = \gamma_{x_i}(\alpha)$ ; kąt pomiędzy linią działania siły kurczącej  $P_{kurcz_i}$  a osią  $Y$  –  $\gamma_{y_i} = \gamma_{y_i}(\alpha)$ ; kąt między linią działania siły kurczącej  $P_{kurcz_i}$  a osią  $Z$  –  $\gamma_{z_i} = \gamma_{z_i}(\alpha)$ .



Rys. 3.18. Model zespołu mięśni ramienia-przedramienia



Rys. 3.19. Rozmieszczenie pojedynczego mięśnia modelu w układzie ramię-przedramię (kończyna lewa)

Po uwzględnieniu dziewięciu sił mięśni (rys. 3.18 i rys. 3.19) oraz przyjęciu, że współrzędna środka masy struktury przedramię-ręka o ciężarze  $G_m$  względem osi  $Y$  ( $W_{xz}$ ) jest dodatnia, równanie dynamiki zespołu mięśni ramienia-przedramienia ma postać:

$$J_y \cdot \ddot{\alpha} = \sum_{i=1}^9 P_{kurcz_{z_i}} \cdot [\cos(\gamma_{x_{-i}}) \cdot z_{in_{-i}} - \cos(\gamma_{z_{-i}}) \cdot x_{in_{-i}}] - G_m \cdot OW_{xz} \cdot \sin(\alpha) - M_{zew_{-y}}, \quad (3.98)$$

gdzie:

$$x_{in_{-i}} = \left( \sqrt{[x_{in_{-i}}(t=0)]^2 + [z_{in_{-i}}(t=0)]^2} \right) \cdot \sin(\alpha), \quad (3.99)$$

$$z_{in_{-i}} = - \left( \sqrt{[x_{in_{-i}}(t=0)]^2 + [z_{in_{-i}}(t=0)]^2} \right) \cdot \cos(\alpha), \quad (3.100)$$

$$\cos(\gamma_{x_{-i}}) = \frac{x_{or_{-i}} - x_{in_{-i}}}{\sqrt{(x_{or_{-i}} - x_{in_{-i}})^2 + (y_{or_{-i}} - y_{in_{-i}})^2 + (z_{or_{-i}} - z_{in_{-i}})^2}}, \quad (3.100)$$

$$\cos(\gamma_{y_{-i}}) = \frac{y_{or_{-i}} - y_{in_{-i}}}{\sqrt{(x_{or_{-i}} - x_{in_{-i}})^2 + (y_{or_{-i}} - y_{in_{-i}})^2 + (z_{or_{-i}} - z_{in_{-i}})^2}}, \quad (3.102)$$

$$\cos(\gamma_{z_{-i}}) = \frac{z_{or_{-i}} - z_{in_{-i}}}{\sqrt{(x_{or_{-i}} - x_{in_{-i}})^2 + (y_{or_{-i}} - y_{in_{-i}})^2 + (z_{or_{-i}} - z_{in_{-i}})^2}}, \quad (3.103)$$

$$P_{kurcz_{z_i}}(t) = P_{a_{-i}}(t) - P_{p_{-i}}(t), \quad (3.104)$$

$$P_{b_{-i}}(t) = A_{2_{-i}} \cdot \frac{d^2 \{l_i[\alpha(t_0)] - l_i[\alpha(t_0)]\}}{dt^2} + A_{1_{-i}} \cdot \frac{d \{l_i[\alpha(t_0)] - l_i[\alpha(t_0)]\}}{dt} +$$

$$+ A_{0_{-i}} \cdot \{l_i[\alpha(t_0)] - l_i[\alpha(t_0)]\} + \int_0^t \left( \sum_{j=0}^7 B_{j_{-i}} \cdot e^{s_{j_{-i}}(t-\tau)} \right) \cdot \{l_i[\alpha(t_0)] - l_i[\alpha(\tau)]\} d\tau, \quad (3.105)$$

$$P_{a_{-i}}(t) = \int_0^t \left( \sum_{j=0}^7 C_{j1_{-i}} \cdot e^{s_{j_{-i}}(t-\tau)} \right) \cdot P_{11_{-i}}^w(\tau) d\tau + \int_0^t \left( \sum_{j=0}^7 C_{j2_{-i}} \cdot e^{s_{j_{-i}}(t-\tau)} \right) \cdot P_{12_{-i}}^w(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \left( \sum_{j=0}^7 C_{j3_{-i}} \cdot e^{s_{j_{-i}}(t-\tau)} \right) \cdot P_{2_{-i}}^w(\tau) d\tau + \int_0^t \left( \sum_{j=0}^7 C_{j4_{-i}} \cdot e^{s_{j_{-i}}(t-\tau)} \right) \cdot P_{31_{-i}}^w(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t \left( \sum_{j=0}^7 C_{j5_{-i}} \cdot e^{s_{j_{-i}}(t-\tau)} \right) \cdot P_{32_{-i}}^w(\tau) d\tau, \quad (3.106)$$

gdzie:  $P_{b_{-i}}(t)$  – składowa bierna siły kurczącej  $i$ -tego modelu mięśnia;

$P_{a_{-i}}(t)$  – składowa czynna siły kurczącej  $i$ -tego modelu mięśnia, która dla modelu mięśnia o niezrównoważonych siłach wewnętrznych  $P_{21_{-i}}^w(t) = P_{22_{-i}}^w(t) = P_{2_{-i}}^w(t)$  zależy od pięciu sił wewnętrznych  $P_{11_{-i}}^w(t)$ ,  $P_{12_{-i}}^w(t)$ ,  $P_{2_{-i}}^w(t)$ ,  $P_{31_{-i}}^w(t)$ ,  $P_{32_{-i}}^w(t)$  (por. p. 3.1.5.4);

- $OW_{xz}$  – odcinek łączący punkt  $O$  z punktem  $W_{xz}$ ;  
 $A_{0,i}, A_{1,i}, A_{2,i}, B_{j,i}, C_{j1,i}, C_{j2,i}, C_{j3,i}, C_{j4,i}, C_{j5,i}$  ( $j = 0, 1, \dots, 7$ ) – współczynniki  $i$ -tego modelu mięśnia zależne od parametrów elementów masowych, sprężystych i lepkich oraz rodzaju pracy mięśnia (koncentryczna czy ekscentryczna);  
 $s_{j,i}$  ( $j = 0, 1, \dots, 7$ ) – wartości własne  $i$ -tego modelu mięśnia, które zależą od współczynników masowych  $\{m_i\}$ , współczynników sztywności  $\{K_i\}$  i współczynników tłumienia  $\{L_i\}$  oraz rodzaju pracy mięśnia (koncentryczna czy ekscentryczna).

Więzadła stawu łokciowego i jego torebka stawowa ograniczają ruchy zginania/prostowania przedramienia do pewnego zakresu (por. p. 2.1.2.2). W rozważanym modelu wpływ tych czynników zamodelowano w postaci momentów kompensacyjnych  $\bar{M}_{com} = \bar{M}_{com}(t)$ . Obrót przedramienia odbywa się wyłącznie w płaszczyźnie strzałkowej  $XZ$  dzięki działaniu w płaszczyźnie czołowej  $YZ$  i poprzecznej  $XY$  momentów kompensacyjnych  $M_{com_x} = M_{com_x}(t)$  i  $M_{com_z} = M_{com_z}(t)$ :

$$M_{com_x} = \sum_{i=1}^9 P_{kurcz_{-i}} \cdot [\cos(\gamma_{z_{-i}}) \cdot y_{in_{-i}} - \cos(\gamma_{y_{-i}}) \cdot z_{in_{-i}}] - G_m \cdot WW_{xz} + M_{zew_{-x}}, \quad (3.107)$$

$$M_{com_z} = \sum_{i=1}^9 P_{kurcz_{-i}} \cdot [\cos(\gamma_{y_{-i}}) \cdot x_{in_{-i}} - \cos(\gamma_{x_{-i}}) \cdot y_{in_{-i}}] + M_{zew_{-z}}, \quad (3.108)$$

gdzie:  $WW_{xz}$  – odcinek łączący punkt  $W$  z punktem  $W_{xz}$ .

### 3.2.3.2. Zachowanie przedramienia w granicznych położeniach ruchu

W przypadku przekroczenia granicy dolnej kąta obrotu  $\alpha_{min}$  lub granicy górnej kąta obrotu  $\alpha_{max}$  model zespołu mięśni 3D zachowuje się podobnie jak model zespołu mięśni 2D (por. p. 3.2.2.2). Jeżeli w  $(r-1)$  kroku całkowania kąt obrotu przedramienia  $\alpha(t_{r-1})$  znajduje się jeszcze w obszarze ruchów dopuszczalnych  $[\alpha_{min} \leq \alpha(t_{r-1}) \leq \alpha_{max}]$ , a w kroku kolejnym  $r$  dochodzi do przekroczenia jednej z granic  $[\alpha(t_r) < \alpha_{min}] \vee [\alpha(t_r) > \alpha_{max}]$ , to sprężyna  $Sp$  generuje moment kompensacyjny  $M_{com_r}$ . Moment ten w  $r$ -tym kroku jest równy:

$$M_{com_y} = - \sum_{i=1}^9 P_{kurcz_{-i}} [\alpha(t_r)] \cdot \left\{ \cos[\gamma_{x_{-i}}(t_r)] \cdot z_{in_{-i}}(t_r) - \cos[\gamma_{z_{-i}}(t_r)] \cdot x_{in_{-i}}(t_r) \right\} - \\ - G_m \cdot OW_{xz} \cdot \left\{ \sin[\alpha(t_r)] - \sin(\alpha_g) \right\} - M_{zew_{-y}}(t_r) - J_y \cdot \ddot{\alpha}(t_r) + \\ + \sum_{i=1}^9 P_{kurcz_{-i}}(\alpha_g) \cdot \left\{ \cos[\gamma_{x_{-i}}(\alpha_g)] \cdot z_{in_{-i}}(\alpha_g) - \cos[\gamma_{z_{-i}}(\alpha_g)] \cdot x_{in_{-i}}(\alpha_g) \right\}, \quad (3.109)$$

gdzie:  $\dot{\alpha}(t_r)$  i  $\ddot{\alpha}(t_r)$  – prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe w  $r$ -tym kroku całkowania  $t_r$ .

### 3.2.4. Unikanie efektu „ściskania” mięśnia

Analizując wartość siły kurczącej  $P_{kurcz_{-i}}$   $i$ -tego modelu mięśnia, można wyznaczyć funkcję, jaką pełni ten mięsień:

- 1) jeżeli  $(P_{kurcz_{-i}} > 0) \wedge (P_{a_i} > 0)$ , to  $i$ -ty mięsień jest pobudzony i bierze aktywny udział w obrocie przedramienia;
- 2) jeżeli  $(P_{kurcz_{-i}} \leq 0) \wedge (P_{a_i} > 0)$ , to  $i$ -ty mięsień jest pobudzony i uczestniczy pośrednio w ruchu, gdyż wartość siły kurczącej jest niewystarczająca do aktywnego udziału w obrocie przedramienia;

- 3) jeżeli  $(P_{kurcz\_i} > 0) \wedge (P_{a\_i} = 0)$ , to  $i$ -ty mięsień jest niepobudzony i aktywnie uczestniczy w ruchu. Takie zachowanie zachodzi, gdy wydłużony mięsień zaczyna się skracać, przyczyniając się do aktywnego udziału w ruchu przedramienia;
- 4) jeżeli  $(P_{kurcz\_i} \leq 0) \wedge (P_{a\_i} = 0)$ , to  $i$ -ty mięsień jest niepobudzony i „ściskany” przez pozostałe mięśnie zespołu mięśniowego.

W oparciu o zasadę „minimum energii” można stwierdzić, że funkcja 4 nie może być zrealizowana przez mięsień rzeczywisty, gdyż prowadzi do strat energetycznych sąsiednich mięśni. Ponadto każdy zdrowy mięsień przebywa w stanie wstępnego rozpięcia, który zapewnia utrzymanie początkowego skurczu (tonusa) mięśnia i jego samoczynne skracanie się w przypadku, gdy oddziaływanie sąsiednich mięśni zespołu powoduje przybliżanie przyczepu tego mięśnia do jego początku.

W modelach zespołu mięśni nie uwzględniono występowania początkowych skurczy (sił) z dwóch powodów. Po pierwsze, brak jest sposobów i narzędzi do doświadczalnego oszacowania początkowych sił w mięśniach rzeczywistych. Po drugie, stosowanie optymalizacji statycznej, która pozwoliłaby oszacować te siły przy pewnych założeniach, nie znajduje uzasadnienia fizjologicznego. Z tego względu do zamodelowania modelu zespołu mięśni przyjęto następującą zasadę: na dynamikę stawu łokciowego nie mają wpływu te mięśnie, które jednocześnie są niepobudzone (nie generują sił wewnętrznych) i skracane (ich długości zostają pomniejszone dzięki działaniu innych mięśni pobudzonych).

### 3.2.5. Obliczenie reakcji dynamicznych w stawie łokciowym

Wskutek tarcia pomiędzy składowymi stawu łokciowego (kością ramienną, promieniową, łokciową, torebką stawową i więzadłami) powstają siły reakcji, które wpływają na dynamikę zespołu mięśni układu ramię-przedramię. Ze względu na brak danych doświadczalnych, które umożliwiłyby dokładny opis tego zjawiska, przyjęto następujące założenia upraszczające.

#### Model 2D

Składowe siły reakcji  $R_x$  i  $R_y$  są przyłożone w punkcie  $Q$  o współrzędnych  $(r_x^R, r_y^R)$  i tworzą wzajemnie redukujące się momenty sił względem punktu  $O$  (rys. 3.17):

$$R_x \cdot r_x^R - R_z \cdot r_y^R = 0, \quad (3.110)$$

gdzie:

$$R_x(t) = \sum_{i=1}^6 P_{kurcz\_i}^{zg}(\alpha) \cdot wr_i(\alpha) - \sum_{i=7}^9 P_{kurcz\_i}^{pr}(\alpha) \cdot wr_i(\alpha) + \frac{G_m}{g} \cdot OW_{xz} \cdot [\cos(\alpha) \cdot \ddot{\alpha} - \sin(\alpha) \cdot (\dot{\alpha})^2], \quad (3.111)$$

$$R_y(t) = -\sum_{i=1}^6 P_{kurcz\_i}^{zg}(\alpha) \cdot pr_i(\alpha) - \sum_{i=7}^9 P_{kurcz\_i}^{pr}(\alpha) \cdot pr_i(\alpha) + G_m + \frac{G_m}{g} \cdot OW_{xz} \cdot \{\sin[\alpha(t)] \cdot \ddot{\alpha}(t) + \cos[\alpha(t)] \cdot [\dot{\alpha}(t)]^2\}, \quad (3.112)$$

$$wr_1(\alpha) = \frac{IO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_1)}{\sqrt{IO^2 + MO^2 + 2 \cdot IO \cdot MO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_1)}}, \quad (3.113)$$



$$wr_2(\alpha) = \frac{KO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_2)}{\sqrt{KO^2 + NO^2 + 2 \cdot KO \cdot NO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_2)}}, \quad (3.114)$$

$$wr_3(\alpha) = \frac{RO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_3)}{\sqrt{SO^2 + RO^2 + 2 \cdot SO \cdot RO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_3)}}, \quad (3.115)$$

$$wr_4(\alpha) = \frac{LO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_4)}{\sqrt{LO^2 + PO^2 + 2 \cdot LO \cdot PO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_4)}}, \quad (3.116)$$

$$wr_5(\alpha) = \frac{[HO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_5 + \rho_1) - FD \cdot \sin(\psi)]^2}{[FO^2 + HO^2 + 2 \cdot FO \cdot HO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_5 + \rho_1)] \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_5 + \rho_1)}, \quad (3.117)$$

$$wr_6(\alpha) = \frac{[HO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_6 + \rho_1) - CD \cdot \sin(\varphi)]^2}{[CO^2 + HO^2 + 2 \cdot CO \cdot HO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_6 + \rho)] \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_6 + \rho)}, \quad (3.118)$$

$$wr_7(\alpha) = \frac{\left[ AO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_7) - BD \cdot \cos\left(\mu - \frac{\pi}{2}\right) \right]^2}{\sqrt{AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_7 - \rho_2)}}, \quad (3.119)$$

$$wr_8(\alpha) = \frac{AO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_8)}{\sqrt{AO^2 + EO^2 - 2 \cdot AO \cdot EO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_8)}}, \quad (3.120)$$

$$wr_9(\alpha) = \frac{AO \cdot \sin(\alpha + \Delta\alpha_9)}{\sqrt{AO^2 + GO^2 - 2 \cdot AO \cdot GO \cdot \cos(\alpha + \Delta\alpha_9)}}, \quad (3.121)$$

$$pr_i(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{1 - [wr_i(\alpha)]^2} \cdot \text{sign}\langle \cos\{\arcsin[wr_i(\alpha)]\} \rangle & \text{dla } i = 1, 2, 3, 4 \\ \sqrt{1 - [wr_i(\alpha)]^2} & \text{dla } i = 5, 6, 7, 8, 9. \end{cases} \quad (3.122)$$

Jeżeli składowe siły reakcji  $R_x$  i  $R_y$  nie spełniają warunku (3.110), to równanie dynamiki modelu 2D (3.71) przybiera następującą postać:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} \cdot \left\{ J_y + \frac{G_m}{g} \cdot OW_{xz} \cdot [-\cos(\alpha) \cdot r_x^R + \sin(\alpha) \cdot r_z^R] \right\} = \\ = \sum_{i=1}^6 P_{kurcz\_i}^{zg}(\alpha) \cdot [h_i(\alpha) + r_x^R \cdot wr_i(\alpha) + r_z^R \cdot pr_i(\alpha)] + \\ + (-1) \cdot \sum_{i=7}^9 P_{kurcz\_i}^{Pr}(\alpha) \cdot [h_i(\alpha) + r_x^R \cdot wr_i(\alpha) - r_z^R \cdot pr_i(\alpha)] + \\ + (-M_{zew\_y}) + \frac{G_m}{g} \cdot OW_{xz} \cdot (\dot{\alpha})^2 \cdot [-\sin(\alpha) \cdot r_x^R - \cos(\alpha) \cdot r_z^R] + \\ + (-G_m) \cdot [OW_{xz} \cdot \sin(\alpha) + r_z^R]. \end{aligned} \quad (3.123)$$

**Model 3D**

Wypadkowa siły reakcji  $R$  jest przyłożona w punkcie  $Q$  o współrzędnych  $(r_x^R, r_y^R, r_z^R)$ , a jej składowe  $[R_x = R_x(t), R_y = R_y(t), R_z = R_z(t)]$  tworzą wzajemnie redukujące się momenty sił względem osi  $X, Y$  i  $Z$  (rys. 3.18):

$$(R_y \cdot r_z^R - R_z \cdot r_y^R = 0) \wedge (R_x \cdot r_z^R - R_z \cdot r_x^R = 0) \wedge (R_x \cdot r_y^R - R_y \cdot r_x^R = 0), \quad (3.124)$$

gdzie:

$$R_x = R_x(t) = -\sum_{i=1}^9 P_{kucz_{-i}}(\alpha_1) \cdot \cos[\gamma_{x_{-i}}(\alpha_1)] - P_x(\alpha_1), \quad (3.125)$$

$$R_y = R_y(t) = -\sum_{i=1}^9 P_{kucz_{-i}}(\alpha_1) \cdot \cos[\gamma_{y_{-i}}(\alpha_1)], \quad (3.126)$$

$$R_z = R_z(t) = -\sum_{i=1}^9 P_{kucz_{-i}}(\alpha_1) \cdot \cos[\gamma_{z_{-i}}(\alpha_1)] - P_z(\alpha_1) - G_m, \quad (3.127)$$

$\alpha_1 = \alpha_1(t) = 2 \cdot \pi - \alpha$  – kąt zawarty pomiędzy osią  $X$  i prostą  $OW_{xz}$  odliczany w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara;

$P_x(\alpha_1)$  i  $P_z(\alpha_1)$  – składowe sił bezwładności struktury przedramię-ręka, które są obliczane:

– dla  $\ddot{\alpha}_1(t) = 0$ :

$$P_x(\alpha_1) = \frac{G_m}{g} \cdot OW_{xz} \cdot \cos(\alpha_1) \cdot (\dot{\alpha}_1)^2, \quad (3.128)$$

$$P_z(\alpha_1) = \frac{G_m}{g} \cdot OW_{xz} \cdot \sin(\alpha_1) \cdot (\dot{\alpha}_1)^2, \quad (3.129)$$

– dla  $[\dot{\alpha}_1(t) \geq \dot{\alpha}_1(t - \Delta t)] \vee \{[\dot{\alpha}_1(t) = \dot{\alpha}_1(t - \Delta t)] \wedge [\ddot{\alpha}_1(t) > 0]\}$ :

$$P_x(\alpha_1) = \frac{G_m}{g} \cdot OW_{xz} \cdot [\sin(\alpha_1) \cdot \ddot{\alpha}_1 + \cos(\alpha_1) \cdot (\dot{\alpha}_1)^2], \quad (3.130)$$

$$P_z(\alpha_1) = \frac{G_m}{g} \cdot OW_{xz} \cdot [-\cos(\alpha_1) \cdot \ddot{\alpha}_1 + \sin(\alpha_1) \cdot (\dot{\alpha}_1)^2], \quad (3.131)$$

– dla  $[\dot{\alpha}_1(t) \leq \dot{\alpha}_1(t - \Delta t)] \vee \{[\dot{\alpha}_1(t) = \dot{\alpha}_1(t - \Delta t)] \wedge [\ddot{\alpha}_1(t) < 0]\}$ :

$$P_x(\alpha_1) = \frac{G_m}{g} \cdot OW_{xz} \cdot [-\sin(\alpha_1) \cdot \ddot{\alpha}_1 + \cos(\alpha_1) \cdot (\dot{\alpha}_1)^2], \quad (3.132)$$

$$P_z(\alpha_1) = \frac{G_m}{g} \cdot OW_{xz} \cdot [\cos(\alpha_1) \cdot \ddot{\alpha}_1 + \sin(\alpha_1) \cdot (\dot{\alpha}_1)^2], \quad (3.133)$$

gdzie:  $g$  – przyspieszenie ziemskie;

$\Delta t$  – krok całkowania.

### 3.2.6. Modelowanie obrotu przedramienia

Zaproponowany model zachowania zespołu mięśni układu ramię-przedramię można zastosować do rozwiązywania prostego i odwrotnego zadania dynamiki. Proste zadanie dynamiki polega na obliczaniu kąta obrotu struktury ramię-przedramię  $\alpha$  przy danych siłach wewnętrznych generowanych w elementach siłowych każdego  $i$ -tego mięśnia  $(P_{11\_i}^w, P_{12\_i}^w, P_{21\_i}^w, P_{22\_i}^w, P_{31\_i}^w, P_{32\_i}^w)$ .

W zadaniu odwrotnym należy określić, jakie siły wewnętrzne musi wygenerować każdy  $i$ -ty mięsień  $(P_{11\_i}^w, P_{12\_i}^w, P_{21\_i}^w, P_{22\_i}^w, P_{31\_i}^w, P_{32\_i}^w)$ , aby zapewnić zadany kąt obrotu struktury ramię-przedramię  $\alpha$  („*output tracking problem*” [136]). Jeżeli zadane są również przebiegi kinematyczne wyznaczonych punktów  $i$ -tego mięśnia (przemieszczenia  $x_i$ , prędkości  $\dot{x}_i$  i przyspieszenia  $\ddot{x}_i$  dla  $i = 0, 1, \dots, 4$ ), wtedy jego siły wewnętrzne należy obliczyć za pomocą metod identyfikacji sił wewnętrznych (por. p. 3.1.5.4).

Przy zadaniu wyłącznie kąta obrotu przedramienia, odwrotne zadanie dynamiki jest rozwiązywane w dwóch etapach. W etapie pierwszym, za pomocą techniki optymalizacyjnej, wyznaczone są siły kurczące poszczególnych mięśni, przy czym funkcja celu  $\Omega = \Omega(P_{kurcz\_1}, P_{kurcz\_2}, \dots, P_{kurcz\_n})$  przyjmuje jedną z postaci opisanych wzorami (2.30)÷(2.52). W etapie drugim są wyznaczone poszczególne siły wewnętrzne każdego składowego mięśnia modelu, zgodnie z metodami opisanymi w p. 3.1.7.5.

Rozwiązując proste/odwrotne zadanie dynamiki, udział  $i$ -tego mięśnia w dowolnej chwili czasu jest wyznaczany na podstawie obliczenia siły kurczliwej  $P_{kurcz\_i}(t)$  z równania (3.104). Ponadto wymagane jest, aby zadane/obliczone siły wewnętrzne każdego składowego mięśnia zapewniały pracę w „stanie dopuszczalnym” (por. p. 3.1.6) i jednocześnie powodowały unikanie stanu „biernego ściskania”, tzn. realizacji funkcji 4 (por. p. 3.2.4).

### 3.2.7. Metoda szacowania sił mięśni rzeczywistego zespołu mięśniowego

Model zachowania zespołu mięśni łatwo można zastosować do określenia siły każdego mięśnia rzeczywistego, będącego składową zespołu mięśni działających na staw łokciowy. Określenie tych sił w procesach dynamicznych odbywa się w dwóch etapach.

Etap pierwszy polega na identyfikacji właściwości mechanicznych składowych mięśni, które należą do badanego zespołu mięśniowego. Zakłada się, iż właściwości mechaniczne mięśni niepobudzonych i pobudzonych są takie same. Należy zauważyć, że mięsień może być wprowadzony w stan niepobudzony dzięki działaniu środka medycznego, który blokuje przepływ impulsów nerwowych i czuciowych. Na początku tego etapu, stosując technikę obrazowania (np. tomografię komputerową, rezonans magnetyczny, USG), uzyskuje się obrazy trójwymiarowe badanego mięśnia i dane o wymiarach, masie, objętości i gęstości poszczególnych jego części [118]. Dane te są podstawą do: 1) wirtualnego podziału każdego  $i$ -tego mięśnia na fragmenty; 2) oszacowania współczynników masowych  $m_i$ ; 3) określenia punktów, będących granicami pomiędzy wybranymi fragmentami. Przemieszczenia tych punktów  $x_i$  wraz z ich prędkościami  $\dot{x}_i$  i przyspieszeniami  $\ddot{x}_i$  są rejestrowane w czasie pierwszego i drugiego etapu szacowania siły  $i$ -tego mięśnia rzeczywistego. Do rejestracji przebiegów wybranych punktów można zastosować markery (np. polistyrenowe kulki fluorescencyjne albo dźwiękowe kryształy), które przymocowuje się do powierzchni badanego mięśnia za pomocą kleju [41, 77]. Na końcu tego etapu, korzystając z metody opisanej w p. 3.1.5.2, uzyskuje się współczynniki sztywności  $K_i$  i tłumienia  $L_i$  dla każdego  $i$ -tego modelu mięśnia. Trzeba zwrócić uwagę na fakt, iż oszacowanie właściwości

lepkosprężystych  $i$ -tego mięśnia zależy od dokładności rejestracji działającej na niego siły zewnętrznej  $P_{zew\_i}$ . Siłę tę można zmierzyć za pomocą dynamometru, który trzeba zaczepić do odzepionego ścięgna przyczepu mięśnia. Stosowanie takiego podejścia ma dwie przyczyny. Pierwsza wynika z braku możliwości oszacowania udziału momentu zewnętrznego  $M_{zew}$ , który powoduje wydłużenie/skrócenie badanego mięśnia (moment działa jednocześnie na cały zespół mięśni rzeczywistych), zaś druga – z wpływu powięzi, która, łącząc wszystkie sąsiadujące mięśnie w całość, przyczynia się do wzajemnego oddziaływania tych mięśni.

Etap drugi polega na oszacowaniu udziału poszczególnych mięśni (ich sił całkowitych modelowanych jako siły kurczące) w ruchu rzeczywistego zespołu. Na początku tego etapu trzeba ustawić przedramię w granicznym położeniu (pełny wyprost albo maksymalne zgięcie w stawie łokciowym), które jest traktowane jako położenie początkowe. Za pomocą wybranej techniki obrazowania wyznacza się współrzędne zaczepów mięśni względem kości ramiennej, promieniowej i łokciowej, przy czym pozycja przedramienia (nawrócona, odwrócona lub neutralna) musi być utrzymana bez zmian. Jeżeli jest wymagane szczególne uwzględnienie przemieszczeń zaczepów mięśni w czasie ruchu, to należy oszacować współrzędne modelowanych mięśni dla wszystkich położenia układu ramię-przedramię. Następnie należy wyznaczyć masowy moment bezwładności struktury przedramię-ręka  $J_y$  względem osi obrotu  $Y$ , jej ciężar  $G_m$  i współrzędne środka masy. Po wykonaniu powyższych czynności, z położenia początkowego jest wykonywany obrót przedramienia i rejestrowane są przebiegi: kąta obrotu  $\alpha(t)$ , prędkości kątowej  $\dot{\alpha}(t)$ , przyspieszenia kątowego  $\ddot{\alpha}(t)$ , przemieszczenia punktów na każdym  $i$ -tym badanym mięśniu  $x_i$  oraz ich prędkości  $\dot{x}_i$  i przyspieszenia  $\ddot{x}_i$ ; momentu zewnętrznego  $M_{zew\_y}(t)$  działającego w płaszczyźnie strzałkowej  $XZ$ . W celu określenia siły  $i$ -tego mięśnia zespołu badanego najpierw jest obliczany przebieg siły zewnętrznej  $P_{zew\_i} = P_{zew\_i}(t)$  działającej na przyczep tego mięśnia:

$$-P_{zew\_i} = m_{0\_i} \cdot \frac{d^2 \{l_i[\alpha(t_0)] - l_i[\alpha(t_0)]\}}{dt^2} + L_{0\_i} \cdot \left( \frac{d \{l_i[\alpha(t_0)] - l_i[\alpha(t_0)]\}}{dt} - \dot{x}_{1\_i} \right) + K_{0\_i} \cdot \langle \{l_i[\alpha(t_0)] - l_i[\alpha(t_0)]\} - x_{1\_i} \rangle. \quad (3.134)$$

Następnie, po obliczeniu z (3.105) przebiegu składowej pasywnej  $P_{b\_i}(t)$ , należy skorzystać z zależności (3.106) i rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{aligned} P_{a\_i}(t) &= P_{a\_i} [P_{11\_i}^w(t), P_{12\_i}^w(t), P_{2\_i}^w(t), P_{31\_i}^w(t), P_{32\_i}^w(t)] = P_{b\_i}(t) - P_{zew\_i}(t) \\ P_{11\_i}^w &= m_{1\_i} \cdot \ddot{x}_{1\_i} + L_{0\_i} \cdot \left\langle \dot{x}_{1\_i} - \frac{d \{l_i[\alpha(t_0)] - l_i[\alpha(t_0)]\}}{dt} \right\rangle + \\ &+ K_{0\_i} \cdot \langle x_{1\_i} - \{l_i[\alpha(t_0)] - l_i[\alpha(t_0)]\} \rangle + L_{1\_i} \cdot (\dot{x}_{1\_i} - \dot{x}_{2\_i}) + K_{1\_i} \cdot (x_{1\_i} - x_{2\_i}) \\ P_{2\_i}^w - P_{12\_i}^w &= m_{2\_i} \cdot \ddot{x}_{2\_i} + L_{1\_i} \cdot (\dot{x}_{2\_i} - \dot{x}_{1\_i}) + K_{1\_i} \cdot (x_{2\_i} - x_{1\_i}) + \\ &+ L_{2\_i} \cdot (\dot{x}_{2\_i} - \dot{x}_{3\_i}) + K_{2\_i} \cdot (x_{2\_i} - x_{3\_i}) \\ P_{31\_i}^w - P_{2\_i}^w &= m_{3\_i} \cdot \ddot{x}_{3\_i} + L_{2\_i} \cdot (\dot{x}_{3\_i} - \dot{x}_{2\_i}) + K_{2\_i} \cdot (x_{3\_i} - x_{2\_i}) + \\ &+ L_{3\_i} \cdot (\dot{x}_{3\_i} - \dot{x}_{4\_i}) + K_{3\_i} \cdot (x_{3\_i} - x_{4\_i}) \\ P_{32\_i}^w &= -m_{4\_i} \cdot \ddot{x}_{4\_i} - L_{3\_i} \cdot (\dot{x}_{4\_i} - \dot{x}_{3\_i}) - K_{3\_i} \cdot (x_{4\_i} - x_{3\_i}) - L_{4\_i} \cdot \dot{x}_{4\_i} - \\ &- K_{4\_i} \cdot x_{4\_i}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Rozwiązanie tego układu pozwala określić przebiegi składowej aktywnej siły  $P_{a_i}(t)$  oraz sił wewnętrznych  $[P_{11_i}^w(t), P_{12_i}^w(t), P_{2_i}^w(t), P_{31_i}^w(t), P_{32_i}^w(t)]$ . Następnie z (3.104) jest obliczana siła kurcząca  $i$ -tego mięśnia  $P_{kurcz_i}(t)$ , która odzwierciedla przebieg siły badanego mięśnia rzeczywistego.

Na podstawie zmierzonego przebiegu składowej momentu zewnętrznego  $M_{zew_i}(t)$  można oszacować uchyb:

$$\Delta M(t) = M_{zew_y}(t) - \left\{ \sum_{i=1}^9 P_{kurcz_i}(t) \cdot [\cos(\gamma_{x_i}) \cdot z_{in_i} - \cos(\gamma_{z_i}) \cdot x_{in_i}] + G_m \cdot OW_{xz} \cdot \sin[\alpha(t)] - J_y \cdot \ddot{\alpha} \right\}. \quad (3.136)$$

Jest on podstawą do weryfikacji ilościowej zaproponowanego modelu zespołu mięśni.

### 3.3. Ogólne koncepcje sterowania

Podane w niniejszym punkcie ogólne koncepcje sterowania modelami zachowania mięśni i zespołu mięśni określono wykorzystując następujące zasady fizjologii i psychologii:

1. Ciało człowieka zawiera dużą liczbę receptorów, które dostarczają układowi nerwowemu informacje o oddziaływaniu bodźców zewnętrznych (otaczającego świata) oraz bodźców wewnętrznych (wewnątrz ciała). Analizując te informacje, układ nerwowy steruje ruchami ciała w taki sposób, aby zabezpieczyć stabilność i unikać uszkodzenia jego części.
2. Podczas uczenia się rozpoznawania określonego zjawiska (zewnątrz lub wewnątrz ciała) układ nerwowy uczy się pamiętać jedynie kilka bodźców identyfikujących to zjawisko.
3. Różnica pomiędzy informacją uzyskaną od receptorów a informacją idealną (traktowaną przez układ nerwowy za wzorcową) jest podstawą uczenia się nowych ruchów i doskonalenia ruchów wyuczonych.
4. Jeżeli układ nerwowy realizuje nowy ruch, to próbuje go wykonać w sposób losowy. Jeżeli realizacja tego ruchu nie zakłóca homeostazy organizmu, to wykonany losowo ruch zostaje przyjęty jako schemat wzorcowy. W czasie kolejnych prób układ nerwowy może trafić na bardziej optymalną realizację nowego ruchu. Wtedy aktualny schemat wzorcowy zostaje zastąpiony nowym.
5. Do realizacji nowego ruchu świadomość musi go „hipotetycznie przeżyć” i uzyskane z tego „przeżycia” informacje przekazać do podświadomości, która zaczyna „szukać” schematu wykonania tego zadania hipotetycznego. Jeżeli podświadomość nie znajdzie właściwego schematu postępowania, to na podstawie schematów obecnych zaczyna tworzyć schematy nowe i sprawdzać je pod kątem przydatności do realizacji nowego ruchu. W przypadku, gdy właściwy schemat nie będzie zbudowany, podświadomość przekazuje świadomości sygnał o braku możliwości wykonania nowego ruchu.

#### 3.3.1. Sterowanie zachowaniem modelu mięśnia

Dla modelu mięśnia (por. p. 3.1) zaproponowano trzy układy sterowania: dwa otwarte i jeden zamknięty (układ regulacji). Do realizacji sterowania jako rozwiązania prostego i odwrotnego zadania dynamiki utworzono dwa schematy otwartych układów sterowania zachowaniem modelu mięśnia:

1. Na schemacie przedstawiono układ sterowania zachowaniem modelu mięśnia realizujący rozwiązanie prostego zadania dynamiki (rys. 3.20.a). Regulator A w każdym kroku

sterowania  $t$  generuje siły wewnętrzne [ $P_1^w = P_1^w(t)$ ,  $P_2^w = P_2^w(t)$ ,  $P_3^w = P_3^w(t)$ ], które wraz z siłą zewnętrzną  $P_{zew} = P_{zew}(t)$  są sygnałami wejściowymi obiektu sterowania o transmitancji operatorowej  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A_2 \cdot s^2 + A_1 \cdot s + A_0 + \sum_{j=0}^7 \frac{B_j}{s - s_j}}{P_{zew}(s) + \sum_{k=1}^3 \left[ \left( \sum_{j=0}^7 \frac{C_{jk}}{s - s_{jk}} \right) \cdot P_k^w(s) \right]}, \quad (3.137)$$

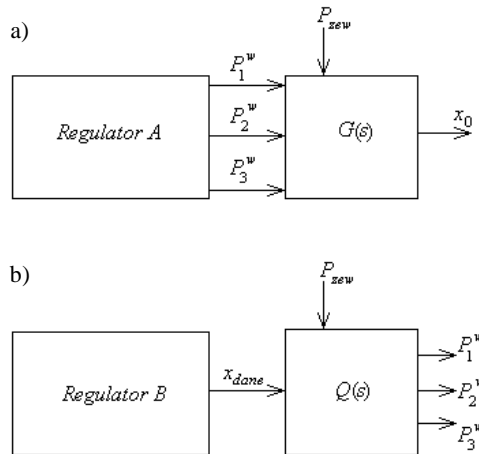
gdzie:  $s$  – operator transformaty Laplace'a;

$P_{zew}(s)$  – transformata Laplace'a funkcji pobudzenia zewnętrznego  $P_{zew}$ ;

$P_k^w(s)$  – transformata Laplace'a  $k$ -tej siły wewnętrznej  $P_k^w$ ;

$A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, \dots, B_7, C_{01}, C_{11}, \dots, C_{71}, C_{02}, C_{12}, \dots, C_{72}, C_{03}, C_{13}, \dots, C_{73}, s_{01}, \dots, s_{73}$  – współczynniki zależne od elementów masowych, elementów sprężystych i elementów lepkich oraz od rodzaju pracy modelu mięśnia (por. p. 3.1).

Sygnałem wyjściowym układu sterowania jest przemieszczenie przyczepu  $x_0 = x_0(t)$ .



Rys. 3.20. Schematy otwartych układów sterowania zachowaniem modelu mięśnia, które realizują rozwiązanie: a) prostego zadania dynamiki, b) odwrotnego zadania dynamiki

2. Na schemacie przedstawiono układ sterowania zachowaniem modelu mięśnia realizujący rozwiązanie odwrotnego zadania dynamiki (rys. 3.20.b). Regulator B w każdym kroku sterowania  $t$  generuje zadane przemieszczenie przyczepu  $x_{dane} = x_{dane}(t)$ , które wraz z siłą zewnętrzną  $P_{zew} = P_{zew}(t)$  są sygnałami wejściowymi obiektu sterowania o transmitancji  $Q(s)$ :

$$Q(s) = \frac{\sum_{k=1}^3 \left[ \left( \sum_{j=0}^7 \frac{D_{jk}}{s - s_{jk}} \right) \cdot P_k^w(s) \right]}{P_{zew}(s) + F_{dane}(s)}, \quad (3.138)$$

gdzie:  $F_{dane}(s) = \mathcal{L}\{f_{dane}(t)\}$  – transformata Laplace'a funkcji  $f_{dane}(t)$ , która jest obliczana na podstawie zadanego przemieszczenia przyczepu mięśnia  $x_{dane}$ :

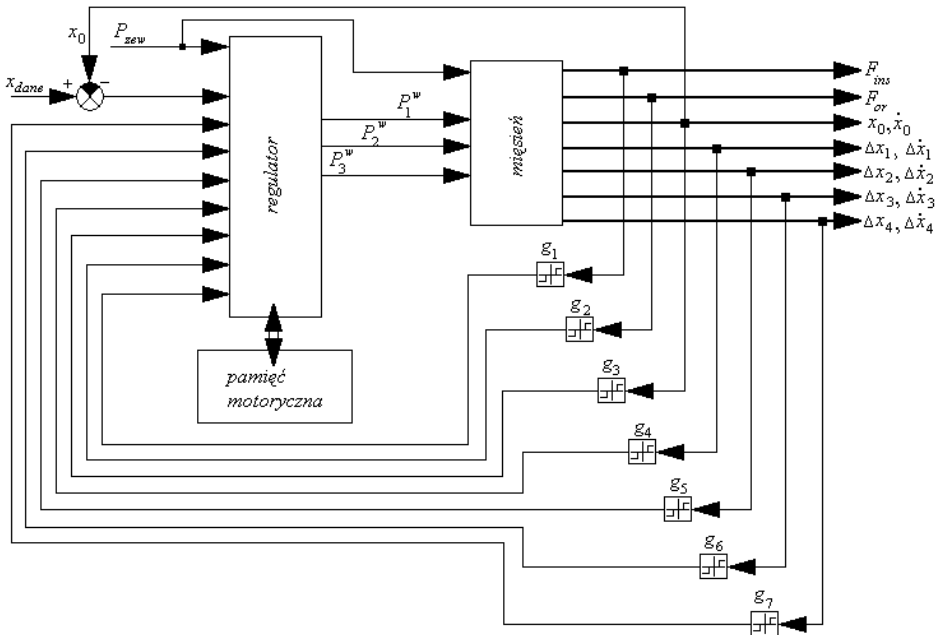
$$f_{dane}(t) = A_2 \cdot \ddot{x}_{dane}(t) + A_1 \cdot \dot{x}_{dane}(t) + A_0(t) \cdot x_{dane}(t) + \int_0^t \left( \sum_{j=0}^7 B_j \cdot e^{s_j \cdot (t-\tau)} \right) \cdot x_{dane}(\tau) d\tau . \quad (3.139)$$

Sygnalami wyjściowymi tego układu sterowania są przebiegi sił wewnętrznych [ $P_1^w = P_1^w(t)$ ,  $P_2^w = P_2^w(t)$ ,  $P_3^w = P_3^w(t)$ ].

W obu opisanych otwartych układach sterowania przebiegi przemieszczeń pozostałych punktów modelu mięśnia  $x_i = x_i(t)$ , dla  $i = 1, \dots, 4$  mogą być obliczone z rozwiązania (3.8).

Zamknięty układ sterowania zachowaniem modelu mięśnia utworzono, przyjmując następujące założenia (rys. 3.21):

- w każdym kroku sterowania  $t$  parametrem sterowanym jest przemieszczenie przyczepu modelu zachowania mięśnia  $x_0 = x_0(t)$ ;
- układ realizuje sterowanie, jako rozwiązanie problemu optymalizacji dynamicznej (zapewnia znalezienie takiego rozwiązania, które minimalizuje wybrany wskaźnik jakości sterowania  $\Phi$  mający postać funkcjonału);
- dane są warunki początkowe i warunki końcowe, które z punktu widzenia klasycznego rachunku wariacyjnego sprowadzają układ regulacji optymalnej do rozwiązania problemu Bolzy [139].



Rys. 3.21. Schemat zamkniętego układu sterowania zachowaniem modelu mięśnia

Sygnalami wejściowymi układu sterowania zachowaniem modelu mięśnia są: siła zewnętrzna  $P_{zew} = P_{zew}(t)$ ; różnica sygnałów ( $x_{dane} - x_0$ ) pomiędzy zadanym przemieszczeniem przyczepu modelu mięśnia  $x_{dane}$ , a przemieszczeniem bieżącym  $x_0$ ; sygnały pochodzące od elementów nieliniowych:  $g_1, \dots, g_7$ . Na sygnały wyjściowe składają się: siły generowane

w połączeniu brzośca ze ścięgnem przyczepu  $F_{ins} = F_{ins}(t)$  i ścięgnem początku  $F_{or} = F_{or}(t)$ ; przemieszczenie przyczepu  $x_0$  i jego prędkość  $\dot{x}_0 = \dot{x}_0(t)$ ; wydłużenia bezwzględne poszczególnych odcinków mięśnia ( $\Delta x_i = \Delta x_i(t)$  dla  $i = 1, \dots, 4$ ) oraz ich prędkości ( $\Delta \dot{x}_i = \Delta \dot{x}_i(t)$  dla  $i = 1, \dots, 4$ ) (oznaczenia są zgodne z (3.15)÷(3.18)). Układ sterowania (rys. 3.21) zawiera „regulator”, obiekt sterowania „mięsień” oraz element modelujący pamięć motoryczną mięśnia „pamięć motoryczna”. Zadanie „regulatora” polega na obliczeniu takich przebiegów sił wewnętrznych [ $P_1^w = P_1^w(t)$ ,  $P_2^w = P_2^w(t)$ ,  $P_3^w = P_3^w(t)$ ], które w przedziale czasu  $t \in [t_0; t_k]$  zapewniają otrzymanie na wyjściu „mięśnia” zadanego przemieszczenia przyczepu  $x_{dane}(t_k) = x_0(t_k)$  i zminimalizowanie wskaźnika jakości sterowania  $\Phi$ . Przyjęto, iż wskaźnik ten ma postać (3.68), tzn.  $\Phi = W_L$ , i pozwala zminimalizować straty energetyczne modelu mięśnia. „Mięsień” jest opisany układem pięciu równań różniczkowych (3.8). Obliczane przebiegi sił wewnętrznych [ $P_1^w = P_1^w(t)$ ,  $P_2^w = P_2^w(t)$ ,  $P_3^w = P_3^w(t)$ ] zależą od: sygnałów wyjściowych elementów nieliniowych znajdujących w pętli sprzężenia zwrotnego:  $g_1, \dots, g_7$ ; siły zewnętrznej  $P_{zew}$ ; sygnału „pamięci motorycznej”. Sygnałem wejściowym  $r$ -tego elementu nieliniowego  $g_r$  ( $r = 1, \dots, 7$ ) jest:  $F_{ins}$  dla  $g_1$ ;  $F_{or}$  dla  $g_2$ ;  $(x_0 \wedge \dot{x}_0)$  dla  $g_3$ ;  $(\Delta x_1 \wedge \Delta \dot{x}_1)$  dla  $g_4$ ;  $(\Delta x_2 \wedge \Delta \dot{x}_2)$  dla  $g_5$ ;  $(\Delta x_3 \wedge \Delta \dot{x}_3)$  dla  $g_6$ ;  $(\Delta x_4 \wedge \Delta \dot{x}_4)$  dla  $g_7$ . Zgodnie z zasadami podanymi w p. 3.1.6,  $r$ -ty element  $g_r$  realizuje nieliniową funkcję, której wartość może być zerowa lub równa współczynnikowi wzmocnienia tego elementu  $g_{w_r} = \text{const}$ :

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } F_{ins}(t) \leq c_{ins} \\ g_{w_1} & \text{dla } F_{ins}(t) > c_{ins} \end{cases}, \quad (3.140)$$

$$g_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } F_{or}(t) \leq c_{or} \\ g_{w_2} & \text{dla } F_{or}(t) > c_{or} \end{cases}, \quad (3.141)$$

$$g_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } [a_{0w} \leq x_0(t) \leq a_{0s}] \wedge [b_{0w} \leq \dot{x}_0(t) \leq b_{0s}] \\ g_{w_3} & \text{dla } [a_{0w} > x_0(t)] \vee [x_0(t) > a_{0s}] \vee [b_{0w} > \dot{x}_0(t)] \vee [\dot{x}_0(t) > b_{0s}] \end{cases}, \quad (3.142)$$

oraz dla  $k = 4, 5, 6, 7$ :

$$g_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \left\{ [a_{(k-2)w} - a_{(k-3)w}] \leq \Delta x_{(k-3)}(t) \leq [a_{(k-2)s} - a_{(k-3)s}] \right\} \wedge \\ & \wedge \left\{ [b_{(k-2)w} - b_{(k-3)w}] \leq \Delta \dot{x}_{(k-3)}(t) \leq [b_{(k-2)s} - b_{(k-3)s}] \right\} \\ g_{w_r} & \text{dla } \left\{ [a_{(k-2)w} - a_{(k-3)w}] > \Delta x_{(k-3)}(t) \right\} \vee \\ & \vee \left\{ \Delta x_{(k-3)}(t) > [a_{(k-2)s} - a_{(k-3)s}] \right\} \vee \\ & \vee \left\{ [b_{(k-2)w} - b_{(k-3)w}] > \Delta \dot{x}_{(k-3)}(t) \right\} \vee \\ & \vee \left\{ \Delta \dot{x}_{(k-3)}(t) > [b_{(k-2)s} - b_{(k-3)s}] \right\} \end{cases} \quad (3.143)$$

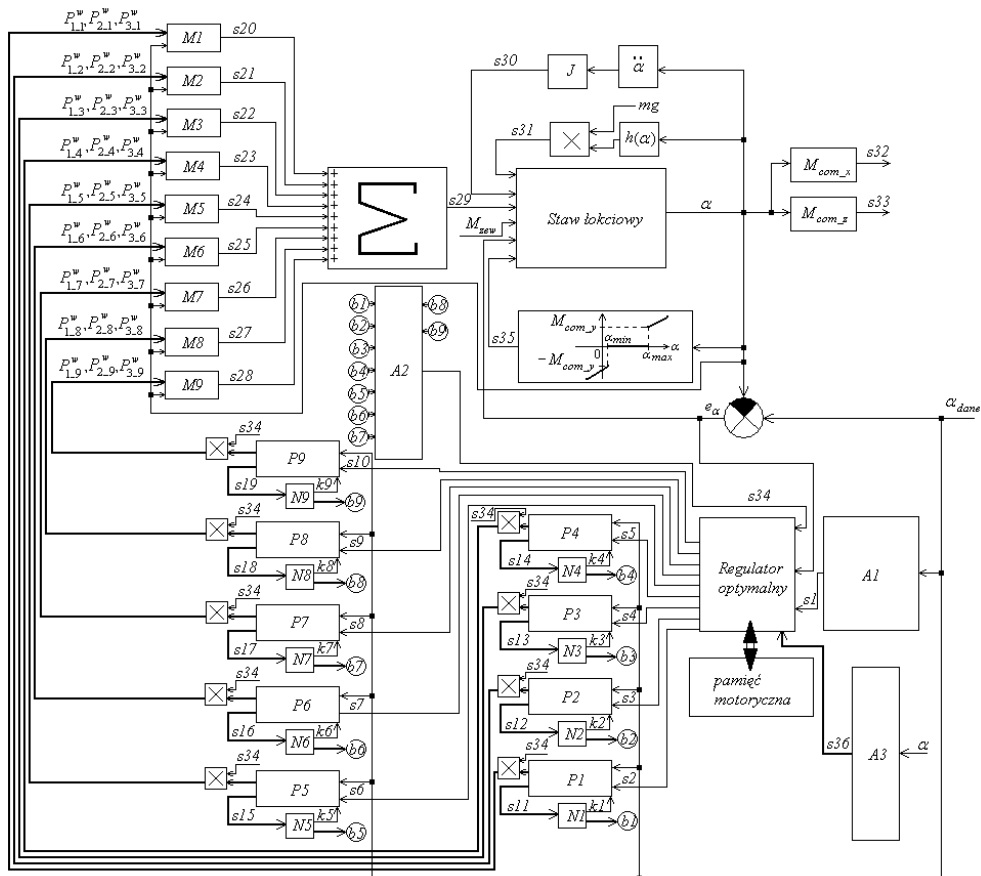
„Pamięć motoryczna” jest elementem przechowującym dane o „stanach dopuszczalnych” (por. p. 3.1.6), którymi są: zadane przemieszczenie przyczepu modelu mięśnia  $x_{dane}$  i jego bieżący przebieg  $x_0$ ; przebieg siły zewnętrznej  $P_{zew}(t)$ ; obliczone przez „regulator” przebiegi sił wewnętrznych [ $P_1^w = P_1^w(t)$ ,  $P_2^w = P_2^w(t)$ ,  $P_3^w = P_3^w(t)$ ]. Odtwarzanie wybranego stanu polega na pobraniu danych z „pamięci motorycznej” i wprowadzeniu ich na wejście



„mięśnia”. Warto zwrócić uwagę, iż podczas rozwiązywania problemu optymalizacji dynamicznej, ograniczenia  $g_r$  ( $r = 1, 2, \dots, 7$ ) są ograniczeniami nierównościami, zaś układ równań (3.8), który opisuje „mięsień”, jest układem pięciu ograniczeń równościowych.

### 3.3.2. Sterowanie zachowaniem modelu zespołu mięśni

Dla modelu zachowania zespołu mięśni (por. p. 3.2) zaproponowano zamknięty układ sterowania optymalnego, który zapewnia pracę składowych mięśni w stanach dopuszczalnych oraz realizuje kąt obrotu przedramienia w określonych granicach (rys. 3.22). Obiektem sterowania jest zespół mięśni, które realizują płaski ruch zginania/prostowania w stawie łokciowym. Obiekt ten oznaczono jako „staw łokciowy”. Kąt obrotu przedramienia  $\alpha = \alpha(t)$  jest sygnałem wyjściowym układu sterowania, zaś jego sygnałami wejściowymi są zadany kąt obrotu przedramienia  $\alpha_{dane} = \alpha_{dane}(t)$  i obciążenie zewnętrzne mające postać momentu zewnętrznego  $M_{zew} = M_{zew}(t)$ . W każdym kroku sterowania  $t$  sygnał kąta obrotu przedramienia  $\alpha$  jest porównywany z zadaniem kątem obrotu przedramienia  $\alpha_{dane}$ , a różnica tych sygnałów  $e_\alpha(t) = e_\alpha = (\alpha_{dane} - \alpha)$  inicjuje lub kontynuuje proces regulacji. Proces ten trwa od chwili początkowej  $t_0$ , aż do osiągnięcia zadanego kąta obrotu przedramienia  $\alpha(t_k)$  w chwili końcowej  $t_k$ , a zatem  $t \in [t_0; t_k]$ .



Rys. 3.22. Schemat zamkniętego układu sterowania zachowaniem modelu zespołu mięśni

Działanie układu sterowania zachowaniem modelu zespołu mięśni polega na rozwiązywaniu w każdym kroku sterowania dwóch zadań dynamiki: zadania odwrotnego i zadania prostego. Zadanie odwrotne jest rozwiązywane na elementach:  $A1$ , „pamięć motoryczna”,  $P1, P2, \dots, P9, N1, N2, \dots, N9, A2$  oraz „regulator optymalny”. Z kolei rozwiązywanie zadania prostego jest realizowane na elementach:  $M1, M2, \dots, M9, A3, M_{com_x}, M_{com_y}, M_{com_z}, J, \ddot{\alpha}, h(\alpha)$  oraz obiekcie sterowania „staw łokciowy”. W tym układzie regulacji zastosowano dwa typy elementów wspomagających: element realizujący dodawanie sygnałów „ $\Sigma$ ” oraz element realizujący mnożenie sygnałów „ $\times$ ”.

Rozwiązanie zadania odwrotnego jest wykonywane na elementach będących modelami mięśni realizujących rozwiązanie odwrotnego zadania dynamiki ( $P1, P2, \dots, P9$ ). Sygnałami wyjściowymi tych elementów są siły wewnętrzne, które następnie są wprowadzane na wejścia elementów będących modelami mięśni realizujących rozwiązanie prostego zadania dynamiki (ich działanie jest opisane elementem  $A3$ ). Każdy z modeli mięśnia posiada właściwości mechaniczne opisane w p. 3.1.2 i jest modelem o zrównoważonych siłach wewnętrznych (por. p. 3.1.5).

W procesie sterowania najpierw są wyznaczane zachowania modeli mięśni realizujących rozwiązanie odwrotnego zadania dynamiki, a następnie – zachowania modeli mięśni realizujących rozwiązanie prostego zadania dynamiki. Każdy z wymienionych modeli funkcjonuje wg następującego schematu.

### 1. Model mięśnia realizujący rozwiązanie odwrotnego zadania dynamiki

Działanie  $i$ -tego modelu mięśnia  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ), który realizuje rozwiązanie odwrotnego zadania dynamiki, zależy od współczynników zdrowotności  $\zeta_{1_i}$  i  $\zeta_{3_i}$ , przy czym  $\zeta_{2_i} = 1$  (podejście 1, por. p. 3.1.7.5). Sygnałami wejściowymi  $i$ -tego modelu mięśnia są:

- hipotetyczne przemieszczenie przyczepu  $i$ -tego modelu mięśnia  $x_{0_i}^h = x_{0_i}^h(t)$  obliczane z (3.70) dla zadanego kąta obrotu przedramienia  $\alpha_{dane} = \alpha_{dane}(t)$ ;
- siła kurcząca  $P_{kurcz_i} = P_{kurcz_i}(t)$  obliczana przez „regulator optymalny”;
- sygnał  $ki$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ), którego wartość zależy od stanu pracy modelu  $i$ -tego mięśnia (tzn. czy model pracuje w stanie dopuszczalnym czy niedopuszczalnym, por. p. 3.1.6); sygnał ten może przyjmować wartość logiczną „1” (zezwała na rozpoczęcie obliczeń) lub „0” (wstrzymuje obliczenia); na początku każdego cyklu obliczeń wartość logiczna sygnału  $ki$  jest równa „1”.

Sygnałami wyjściowymi  $i$ -tego modelu mięśnia  $P_i$  są:

- przemieszczenia hipotetyczne

$$x_i^h = x_i^h(t) \in \{x_{j_i}^h = x_{j_i}^h(t), \text{ dla } j = 1, \dots, 4\},$$

- prędkości hipotetyczne

$$\dot{x}_i^h = \dot{x}_i^h(t) \in \{\dot{x}_{j_i}^h = \dot{x}_{j_i}^h(t), \text{ dla } j = 1, \dots, 4\},$$

- przyspieszenia hipotetyczne

$$\ddot{x}_i^h = \ddot{x}_i^h(t) \in \{\ddot{x}_{j_i}^h = \ddot{x}_{j_i}^h(t), \text{ dla } j = 1, \dots, 4\},$$

- siły wewnętrzne  $[P_{1_i}^w = P_{1_i}^w(t), P_{2_i}^w = P_{2_i}^w(t), P_{3_i}^w = P_{3_i}^w(t)]$  określone z następujących równań:

$$L_{0_i} \cdot \dot{x}_{1_i}^h + K_{0_i} \cdot x_{1_i}^h = F_{1_i}, \quad (3.144)$$

$$\begin{aligned}
& m_{2\_i} \cdot \ddot{x}_{2\_i}^h + \left( L_{2\_i} + \frac{L_{1\_i}}{\xi_{1\_i}} \right) \cdot \dot{x}_{2\_i}^h + \left( K_{2\_i} + \frac{K_{1\_i}}{\xi_{1\_i}} \right) \cdot x_{2\_i}^h - L_{2\_i} \cdot \dot{x}_{3\_i}^h - K_{2\_i} \cdot x_{3\_i}^h = \\
& = L_{1\_i} \cdot \dot{x}_{1\_i}^h + K_{1\_i} \cdot x_{1\_i}^h + \left( \frac{1 - \xi_{1\_i}}{\xi_{1\_i}} \right) \cdot F_{2\_i} \\
& m_{3\_i} \cdot \ddot{x}_{3\_i}^h + (L_{2\_i} + L_{3\_i}) \cdot \dot{x}_{3\_i}^h + (K_{2\_i} + K_{3\_i}) \cdot x_{3\_i}^h - L_{3\_i} \cdot \dot{x}_{4\_i}^h - K_{3\_i} \cdot x_{4\_i}^h + \\
& + \left( L_{1\_i} \cdot \frac{\xi_{3\_i} - 1}{\xi_{1\_i}} - L_{2\_i} \right) \cdot \dot{x}_{2\_i}^h + \left( K_{1\_i} \cdot \frac{\xi_{3\_i} - 1}{\xi_{1\_i}} - K_{2\_i} \right) \cdot x_{2\_i}^h = \left( \frac{\xi_{3\_i} - 1}{\xi_{1\_i}} \right) \cdot F_{2\_i} \\
& m_{4\_i} \cdot \ddot{x}_{4\_i}^h + (L_{3\_i} + L_{4\_i}) \cdot \dot{x}_{4\_i}^h + (K_{3\_i} + K_{4\_i}) \cdot x_{4\_i}^h - L_{3\_i} \cdot \dot{x}_{3\_i}^h - K_{3\_i} \cdot x_{3\_i}^h - \\
& - \frac{\xi_{3\_i}}{\xi_{1\_i}} \cdot L_{1\_i} \cdot \dot{x}_{2\_i}^h - \frac{\xi_{3\_i}}{\xi_{1\_i}} \cdot K_{1\_i} \cdot x_{2\_i}^h = - \frac{\xi_{3\_i}}{\xi_{1\_i}} \cdot F_{2\_i},
\end{aligned} \tag{3.145}$$

gdzie:

$$F_{1\_i} = m_{0\_i} \cdot \ddot{x}_{0\_i\_dane}^h + L_{0\_i} \cdot \dot{x}_{0\_i\_dane}^h + K_{0\_i} \cdot x_{0\_i\_dane}^h + P_{kurcz\_i}, \tag{3.146}$$

$$\begin{aligned}
F_{2\_i} = & m_{1\_i} \cdot \ddot{x}_{1\_i}^h + (L_{0\_i} + L_{1\_i}) \cdot \dot{x}_{1\_i}^h + (K_{0\_i} + K_{1\_i}) \cdot x_{1\_i}^h - \\
& - L_{0\_i} \cdot \dot{x}_{0\_i\_dane}^h - K_{0\_i} \cdot x_{0\_i\_dane}^h,
\end{aligned} \tag{3.147}$$

$$\dot{x}_{1\_i}^h = \frac{F_{1\_i} - K_{0\_i} \cdot x_{1\_i}^h}{L_{0\_i}}, \tag{3.148}$$

$$\ddot{x}_{1\_i}^h = \frac{\dot{F}_{1\_i} - K_{0\_i} \cdot \dot{x}_{1\_i}^h}{L_{0\_i}}, \tag{3.149}$$

$$\dot{F}_{1\_i} = m_{0\_i} \cdot \ddot{x}_{0\_i\_dane}^h + L_{0\_i} \cdot \dot{x}_{0\_i\_dane}^h + K_{0\_i} \cdot x_{0\_i\_dane}^h + \dot{P}_{kurcz\_i}. \tag{3.150}$$

Wtedy siła wewnętrzna  $P_{2\_i}^w$  jest obliczana ze wzoru:

$$P_{2\_i}^w = \frac{F_{2\_i} - \dot{x}_{2\_i}^h \cdot L_{1\_i} - K_{1\_i} \cdot x_{2\_i}^h}{\xi_{1\_i}}, \tag{3.151}$$

a pozostałe dwie siły  $P_{1\_i}^w$  i  $P_{3\_i}^w$  – z zależności (3.58).

Na początku każdego cyklu obliczeń wartości współczynników zdrowotności  $\xi_{1\_i}$  i  $\xi_{3\_i}$  są ustawiane jako wartości maksymalne ( $\xi_{1\_i} = 0,5$ )  $\wedge$  ( $\xi_{3\_i} = 0,5$ ).

Pracą  $i$ -tego modelu mięśnia  $P_i$  steruje  $i$ -ty element  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ), który sprawdza, czy przemieszczenia hipotetyczne  $x_i^h$  i prędkości hipotetyczne  $\dot{x}_i^h$  wyznaczonych punktów mięśnia oraz siły hipotetyczne rozwijane między brzuszkiem a ścięgnem przyczepu  $F_{ins\_i}^h = F_{ins\_i}^h(t)$  i ścięgnem początku  $F_{or\_i}^h = F_{or\_i}^h(t)$  znajdują się w określonych granicach:

$$\begin{aligned}
F_{ins-i}^h &= \left[ m_{0-i} \cdot \ddot{x}_{0-i}^h - L_{0-i} \cdot (\dot{x}_{1-i}^h - \dot{x}_{0-i}^h) - K_{0-i} \cdot (x_{1-i}^h - x_{0-i}^h) \right] \leq c_{ins-i} \\
F_{or-i}^h &= \left[ m_{4-i} \cdot \ddot{x}_{4-i}^h + L_{4-i} \cdot \dot{x}_{4-i}^h + K_{4-i} \cdot x_{4-i}^h \right] \leq c_{or-i} \\
\left[ a_{(k-4)w-i} &\leq x_{(k-4)}^h \leq a_{(k-4)s-i} \right], \quad k = 5, 6, 7, 8 \\
\left[ b_{(k-4)w-i} &\leq \dot{x}_{(k-4)}^h \leq b_{(k-4)s-i} \right], \quad k = 5, 6, 7, 8,
\end{aligned} \tag{3.152}$$

gdzie:  $c_{ins-i}$ ,  $c_{or-i}$ ,  $a_{(k-4)w-i}$ ,  $a_{(k-4)s-i}$ ,  $b_{(k-4)w-i}$ ,  $b_{(k-4)s-i}$ , ( $k = 5, \dots, 8$ ) – granice przyjęte dla każdego  $i$ -tego mięśnia zgodnie z zasadami podanymi w p. 3.1.6.

Jeżeli nierówności (3.152) są spełnione, to sygnał  $ki$  przyjmuje wartość logiczną „0”, a do elementu A2 doprowadzany jest sygnał  $bi$  o wartości logicznej „1”. W przypadku, gdy chociaż jedna nierówność nie jest spełniona (np.  $i$ -ta, oznacza to, że  $i$ -ty model mięśnia funkcjonuje w stanie niedopuszczalnym) sygnał  $ki$  przyjmuje wartość logiczną „1”, a do elementu A2 jest doprowadzany sygnał  $bi$  o wartości logicznej „0”.

Omawiany układ sterowania działa w taki sposób, aby zapewnić pracę każdego modelu mięśnia w stanie dopuszczalnym. Jeżeli  $i$ -ty model mięśnia znajduje się w stanie niedopuszczalnym, to układ sterowania zmienia wartości jego współczynników zdrowotności  $\xi_{1-i}$  i  $\xi_{3-i}$ , ( $\xi_{1-i} \in [0; 0,5]$ )  $\wedge$  ( $\xi_{3-i} \in [0; 0,5]$ ), i zleca ponowne określenie jego sił wewnętrznych ( $P_{1-i}^w$ ,  $P_{2-i}^w$ ,  $P_{3-i}^w$ ). W przypadku, gdy po zrealizowaniu skończonej liczby takich obliczeń nie uzyskano takich sił wewnętrznych, które zapewniłyby pracę każdego  $i$ -tego modelu mięśnia w stanie dopuszczalnym, na wyjściu elementu A2, realizującym funkcję logiczną „AND”, pozostaje sygnał  $s34$  o wartości logicznej „0”. Powoduje to zakończenie pracy „regulatora optymalnego”.

W celu uniknięcia komplikacji matematycznych, gdy współczynnik zdrowotności  $\xi_i$  przybiera wartość zerową, tzn. ( $\xi_1 = 0$ )  $\wedge$  ( $\xi_3 \in [0; 0,5]$ ), do obliczeń są przyjmowane następujące równania:

$$\begin{aligned}
L_{0-i} \cdot \dot{x}_{1-i}^h + K_{0-i} \cdot x_{1-i}^h &= F_{1-i} \\
L_{1-i} \cdot \dot{x}_{2-i}^h + K_{1-i} \cdot x_{2-i}^h &= F_{2-i},
\end{aligned} \tag{3.153}$$

$$\begin{aligned}
m_{3-i} \cdot \ddot{x}_{3-i}^h + (\xi_{3-i} \cdot L_{2-i} + L_{3-i}) \cdot \dot{x}_{3-i}^h + (\xi_{3-i} \cdot K_{2-i} + K_{3-i}) \cdot x_{3-i}^h - \\
- L_{3-i} \cdot \dot{x}_{4-i}^h - K_{3-i} \cdot x_{4-i}^h = (\xi_{3-i} - 1) \cdot F_{3-i} + L_{2-i} \cdot \dot{x}_{2-i}^h - K_{2-i} \cdot x_{2-i}^h \\
m_{4-i} \cdot \ddot{x}_{4-i}^h + (L_{3-i} + L_{4-i}) \cdot \dot{x}_{4-i}^h + (K_{3-i} + K_{4-i}) \cdot x_{4-i}^h - \\
- \xi_{3-i} \cdot L_{2-i} \cdot \dot{x}_{3-i}^h - \xi_{3-i} \cdot K_{2-i} \cdot x_{3-i}^h = -\xi_{3-i} \cdot F_{3-i},
\end{aligned} \tag{3.154}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
F_{3-i} = m_{2-i} \cdot \ddot{x}_{2-i}^h + (L_{2-i} + L_{1-i}) \cdot \dot{x}_{2-i}^h + (K_{2-i} + K_{1-i}) \cdot x_{2-i}^h - \\
- L_{1-i} \cdot \dot{x}_{1-i}^h - E_{1-i} \cdot x_{1-i}^h,
\end{aligned} \tag{3.155}$$

$$\dot{x}_{2-i}^h = \frac{F_{2-i} - K_{1-i} \cdot x_{2-i}^h}{L_{1-i}}, \tag{3.156}$$

$$\ddot{x}_{2-i}^h = \frac{\dot{F}_{2-i} - K_{1-i} \cdot \dot{x}_{2-i}^h}{L_{1-i}}, \tag{3.157}$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_{2-i} = m_{1-i} \cdot \ddot{x}_{1-i}^h + (L_{0-i} + L_{1-i}) \cdot \dot{x}_{1-i}^h + (K_{0-i} + K_{1-i}) \cdot x_{1-i}^h - \\ - L_{0-i} \cdot \dot{x}_{0-i-dane}^h - K_{0-i} \cdot x_{0-i-dane}^h, \end{aligned} \quad (3.158)$$

$$\ddot{x}_{1-i}^h = \frac{\dot{F}_{1-i} - K_{0-i} \cdot x_{1-i}^h}{L_{0-i}}, \quad (3.159)$$

$$\ddot{F}_{1-i} = m_{0-i} \cdot x_{0-i-dane}^{(IV)h} + L_{0-i} \cdot \ddot{x}_{0-i-dane}^h + K_{0-i} \cdot \dot{x}_{0-i-dane}^h + \ddot{P}_{kucz-i}. \quad (3.160)$$

Wtedy siła wewnętrzna  $P_{2-i}^w$  jest obliczana z poniższego wzoru:

$$P_{2-i}^w = F_{3-i} - \dot{x}_{3-i}^h \cdot L_{2-i} - K_{2-i} \cdot x_{3-i}^h, \quad (3.161)$$

zaś siła wewnętrzna  $P_{3-i}^w$  – z (3.58).

## 2. Model mięśnia realizujący rozwiązanie prostego zadania dynamiki

Funkcjonowanie  $i$ -tego modelu mięśnia realizującego rozwiązanie prostego zadania dynamiki jest opisane następującym układem czterech równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} m_{1-i} \cdot \ddot{x}_{1-i}^r + L_{0-i} \cdot [\dot{x}_{1-i}^r - \dot{x}_{0-i}^r(\alpha)] + K_{0-i} \cdot [x_{1-i}^r - x_{0-i}^r(\alpha)] + \\ + L_{1-i} \cdot (\dot{x}_{1-i}^r - \dot{x}_{2-i}^r) + K_{1-i} \cdot (x_{1-i}^r - x_{2-i}^r) = P_{1-i}^w \\ m_{2-i} \cdot \ddot{x}_{2-i}^r + L_{1-i} \cdot (\dot{x}_{2-i}^r - \dot{x}_{1-i}^r) + K_{1-i} \cdot (x_{2-i}^r - x_{1-i}^r) + \\ + L_{2-i} \cdot (\dot{x}_{2-i}^r - \dot{x}_{3-i}^r) + K_{2-i} \cdot (x_{2-i}^r - x_{3-i}^r) = P_{2-i}^w - P_{3-i}^w \\ m_{3-i} \cdot \ddot{x}_{3-i}^r + L_{2-i} \cdot (\dot{x}_{3-i}^r - \dot{x}_{2-i}^r) + K_{2-i} \cdot (x_{3-i}^r - x_{2-i}^r) + \\ + L_{3-i} \cdot (\dot{x}_{3-i}^r - \dot{x}_{4-i}^r) + K_{3-i} \cdot (x_{3-i}^r - x_{4-i}^r) = P_{3-i}^w - P_{2-i}^w \\ m_{4-i} \cdot \ddot{x}_{4-i}^r + L_{3-i} \cdot (\dot{x}_{4-i}^r - \dot{x}_{3-i}^r) + K_{3-i} \cdot (x_{4-i}^r - x_{3-i}^r) + \\ + L_{4-i} \cdot \dot{x}_{4-i}^r + K_{4-i} \cdot x_{4-i}^r = -P_{3-i}^w, \end{aligned} \quad (3.162)$$

gdzie:  $\alpha = \alpha(t)$  – kąt obrotu przedramienia w stawie łokciowym;

$x_i^r = x_i^r(t) \in \{x_{j-i}^r = x_{j-i}^r(t), \text{ dla } j = 1, \dots, 4\}$  – przebiegi przemieszczeń rzeczywistych;

$\dot{x}_i^r = \dot{x}_i^r(t) \in \{\dot{x}_{j-i}^r = \dot{x}_{j-i}^r(t), \text{ dla } j = 1, \dots, 4\}$  – przebiegi prędkości rzeczywistych;

$\ddot{x}_i^r = \ddot{x}_i^r(t) \in \{\ddot{x}_{j-i}^r = \ddot{x}_{j-i}^r(t), \text{ dla } j = 1, \dots, 4\}$  – przebiegi przyspieszeń rzeczywistych.

Na wyjściu elementu A3 pojawia się sygnał  $s36$ , który zależy od stanu pracy wszystkich składowych modeli mięśni realizujących rozwiązanie prostego zadania dynamiki. Wartość logiczna sygnału  $s36$  wynosi „1”, gdy każdy  $i$ -ty składowy model mięśnia spełnia następujący układ nierówności:

$$\begin{aligned} F_{ins-i}^r = [m_{0-i} \cdot \ddot{x}_{0-i}^r - L_{0-i} \cdot (\dot{x}_{1-i}^r - \dot{x}_{0-i}^r) - K_{0-i} \cdot (x_{1-i}^r - x_{0-i}^r)] \leq c_{ins-i} \\ F_{or-i}^r = (m_{4-i} \cdot \ddot{x}_{4-i}^r + L_{4-i} \cdot \dot{x}_{4-i}^r + K_{4-i} \cdot x_{4-i}^r) \leq c_{or-i} \\ [a_{(k-4)w-i} \leq x_{(k-4)}^r \leq a_{(k-4)s-i}] , \text{ dla } k = 5, 6, 7, 8 \\ [b_{(k-4)w-i} \leq \dot{x}_{(k-4)}^r \leq b_{(k-4)s-i}] , \text{ dla } k = 5, 6, 7, 8, \end{aligned} \quad (3.163)$$

gdzie:  $F_{ins\_i}^r = F_{ins\_i}^r(t)$  i  $F_{or\_i}^r = F_{or\_i}^r(t)$  – siły rzeczywiste rozwijane między brzuścem a ścięgnem przyczepu i ścięgnem początku  $i$ -tego mięśnia.

W przypadku, gdy chociaż jeden ze składowych modeli mięśnia nie spełnia układu (3.163), sygnał  $s36$  przyjmuje wartość logiczną „0”. Do zapoczątkowania obliczeń w początkowym kroku sterowania  $t_0$  sygnał logiczny  $s36$  przyjmuje wartość „1”.

### 3. Realizacja procesu sterowania

W początkowym kroku sterowania  $t_0$  wszystkie modele mięśnia mają zerowe warunki początkowe. W bieżącym kroku sterowania  $t$ , gdy jest sukcesywnie realizowany proces sterowania zespołem mięśni, stan początkowy każdego modelu mięśnia realizującego rozwiązanie odwrotnego zadania dynamiki równy jest stanowi końcowemu, który uzyskuje w kroku poprzednim odpowiedni model mięśnia realizujący rozwiązanie prostego zadania dynamiki.

„Regulator optymalny” realizuje optymalne sterowanie modelem zespołu dziewięciu mięśni poprzez obliczanie takich wartości sił kurczących  $P_{kurcz\_i}(i = 1, 2, \dots, 9)$  wszystkich składowych modeli mięśni, które minimalizują zadany wskaźnik jakości sterowania:

$$\Phi = \Phi(P_{kurcz\_1}, \dots, P_{kurcz\_9}) \rightarrow \min, \quad (3.164)$$

gdzie:

$$\Phi = sI - \sum_{i=1}^9 w_i \cdot P_{kurcz\_i} \cdot \left\{ \cos[\gamma_{x\_i}(\alpha_{dane})] \cdot z_{in\_i}(\alpha_{dane}) - \cos[\gamma_{z\_i}(\alpha_{dane})] \cdot x_{in\_i}(\alpha_{dane}) \right\}, \quad (3.165)$$

$w_i$  – współczynnik wagowy siły kurczącej  $P_{kurcz\_i}$   $i$ -tego modelu mięśnia, który może przyjmować wartości z przedziału  $w_i \in [0; 1]$ ;

$sI$  – sygnał obliczany z (3.166).

W zależności od wartości logicznych sygnałów  $s34$  i  $s36$  „regulator optymalny” może realizować cztery stany obliczeniowe:

1.  $(s34 = 1) \wedge (s36 = 1)$  – stan dopuszczalny, który świadczy o poprawnej realizacji sterowania zespołem mięśni. Oznacza to, że zadane i obliczone wartości zapewniają pracę dziewięciu składowych mięśni zespołu w stanach dopuszczalnych. W celu przyszłego odtworzenia tego stanu wszystkie zadane i obliczone wartości oraz współczynniki wagowe sił kurczących wraz z postacią wskaźnika jakości sterowania  $\Phi$  są zapisywane do „pamięci motorycznej”.
2.  $(s34 = 1) \wedge (s36 = 0)$  – stan przejściowy, który oznacza, że modele mięśnia realizujące rozwiązanie odwrotnego zadania dynamiki funkcjonują w stanach dopuszczalnych, zaś modele mięśnia realizujące rozwiązanie zadania prostego pracują w stanach niedopuszczalnych (są przeciążone). Regulator próbuje zmienić sygnał  $s36$  z wartości „0” na „1” w sposób następujący. Najpierw są zmieniane współczynniki wagowe poszczególnych modeli mięśni realizujących rozwiązanie prostego zadania dynamiki i są wyznaczone rozwiązania wszystkich składowych modeli mięśni. Jeżeli sygnał  $s36$  nadal pozostaje „0”, to jest zmieniany wskaźnik jakości sterowania  $\Phi$  i obliczenia prowadzone są od początkowego kroku sterowania  $t_0$ .
3.  $(s34 = 0) \wedge (s36 = 1)$  – stan początkowy, który występuje tylko w początkowym kroku sterowania  $t_0$ .
4.  $(s34 = 0) \wedge (s36 = 0)$  – stan przejściowy, który oznacza, że wszystkie modele mięśnia realizujące rozwiązanie odwrotnego i prostego zadania dynamiki przebywają w stanach niedopuszczalnych. Regulator dąży najpierw do uzyskania wartości sygnału  $s34$  równej

„1”, a następnie – wartości sygnału  $s36$  równej „1”, postępując zgodnie z metodą dla stanu obliczonego ( $s34 = 1$ )  $\wedge$  ( $s36 = 0$ ).

Jeżeli żaden z zaimplementowanych wskaźników jakości sterowania  $\Phi$  nie pozwala na uzyskanie zadowalających wyników, to pojawia się komunikat o braku rozwiązania dla zadanego przebiegu kąta obrotu przedramienia  $\alpha_{dane}$ .

Realizacja procesu sterowania zachowaniem modelu zespołu mięśni układu ramię-przedramię przebiega w sposób następujący. Na wejście „regulatora optymalnego” są podawane cztery sygnały:

- 1) sygnał różnicy  $e_\alpha$ , którego niezerowa wartość uruchamia regulator;
- 2) sygnał  $s1$  z elementu  $A1$  o wartości zależnej od zadanego kąta obrotu przedramienia  $\alpha_{dane}$  i składowej  $M_{zew\_y}$  obciążenia zewnętrznego  $M_{zew}$ :

$$s1 = J_y \cdot \ddot{\alpha}_{dane} + G_m \cdot OW_{xz} \cdot \sin(\alpha_{dane}) + M_{zew\_y}; \quad (3.166)$$

- 3) sygnał  $s34$  z elementu  $A2$ ;
- 4) sygnał  $s36$  z elementu  $A3$ .

W zależności od wartości logicznych sygnałów  $s34$  i  $s36$  wyznaczany jest stan pracy „regulatora optymalnego”. Następnie regulator oblicza siły kurczące każdego  $i$ -tego mięśnia  $P_{kurcz\_i}$  i przekazuje ich wartości na wyjście w postaci dziewięciu sygnałów  $s2, s3, \dots, s10$ :

$$\begin{aligned} P_{kurcz\_1} &= s2 & P_{kurcz\_4} &= s5 & P_{kurcz\_7} &= s8 \\ P_{kurcz\_2} &= s3 & P_{kurcz\_5} &= s6 & P_{kurcz\_8} &= s9 \\ P_{kurcz\_3} &= s4 & P_{kurcz\_6} &= s7 & P_{kurcz\_9} &= s10. \end{aligned} \quad (3.167)$$

Regulator w każdym kroku sterowania sprawdza czy istnieje  $i$ -ty model mięśnia, który znajduje się w stanie biernego ściskania (por. p. 3.2.4). Jeżeli istnieje, to ustawia jego współczynnik wagowy  $w_i$  na wartość zerową. Następnie każdy  $i$ -ty sygnał  $P_{kurcz\_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ) wspólnie z sygnałem o zadanym kącie  $\alpha_{dane}$ , jest przekazywany na wejście  $i$ -tego elementu  $P_i$ , który realizuje rozwiązanie odwrotnego zadania dynamiki:  $s2$  ( $P_{kurcz\_1}$ ) na wejście elementu  $P1$ ,  $s3$  ( $P_{kurcz\_2}$ ) –  $P2$ ,  $s4$  ( $P_{kurcz\_3}$ ) –  $P3$ ,  $s5$  ( $P_{kurcz\_4}$ ) –  $P4$ ,  $s6$  ( $P_{kurcz\_5}$ ) –  $P5$ ,  $s7$  ( $P_{kurcz\_6}$ ) –  $P6$ ,  $s8$  ( $P_{kurcz\_7}$ ) –  $P7$ ,  $s9$  ( $P_{kurcz\_8}$ ) –  $P8$ ,  $s10$  ( $P_{kurcz\_9}$ ) –  $P9$ . Po uzyskaniu sygnału  $s34$  o logicznej wartości „1” siły wewnętrzne ( $P_{1\_i}^w, P_{2\_i}^w, P_{3\_i}^w$ ) każdego  $i$ -tego modelu mięśnia realizującego rozwiązanie odwrotnego zadania dynamiki są przekazywane na wejście odpowiedniego elementu  $Mi$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ), który oblicza  $i$ -tą rzeczywistą siłę kurczącą  $P_{kurcz\_i}^r$  z zależności (3.104). Wtedy na wyjściach elementów  $M1, M2, \dots, M9$  pojawiają się sygnały odpowiadające poszczególnym siłom kurczącym:

$$\begin{aligned} P_{kurcz\_1}^r &= s20 & P_{kurcz\_4}^r &= s23 & P_{kurcz\_7}^r &= s26 \\ P_{kurcz\_2}^r &= s21 & P_{kurcz\_5}^r &= s24 & P_{kurcz\_8}^r &= s27 \\ P_{kurcz\_3}^r &= s22 & P_{kurcz\_6}^r &= s25 & P_{kurcz\_9}^r &= s28. \end{aligned} \quad (3.168)$$

Wszystkie sygnały ( $s20, s21, \dots, s28$ ) są dodawane w elemencie sumującym „ $\Sigma$ ”, a ich suma w postaci sygnału  $s29$  jest przekazywana na wejście „stawu łokciowego”. Oprócz tego sygnału na wejście tego elementu są przekazywane:

- sygnał różnicy  $e_\alpha$ ;
- sygnał o zadanym obciążeniu zewnętrznym  $M_{zew}$ ;

- sygnał  $s30$ , będący iloczynem przyspieszenia kąowego kąta obrotu przedramienia  $\ddot{\alpha}$  i momentu bezwładności przedramienia  $J$ ;
- sygnał  $s31$ , będący momentem siły pochodzącej od ciężaru struktury przedramię-ręka  $G_m$  znajdującej się na ramieniu  $h(\alpha)$  od środka obrotu;
- sygnał  $s35$ , którego wartość logiczna w obszarze ruchów dopuszczalnych wynosi „0”, zaś na granicach jego wartość jest obliczana z uwzględnieniem elementu nieliniowego  $M_{com_y}$ , który działa zgodnie z zasadami przedstawionymi w p. 3.2.2.2 (model 2D) lub p. 3.2.3.2 (model 3D).

Jeżeli do obliczeń jest używany model 3D zespołu mięśni, to elementy  $M_{com_x}$  (z sygnałem wyjściowym  $s32$ ) i  $M_{com_z}$  (z sygnałem wyjściowym  $s33$ ) zapewniają realizację płaskich ruchów zginania-prostowania przedramienia w płaszczyźnie  $XZ$  (por. p. 3.2.3).

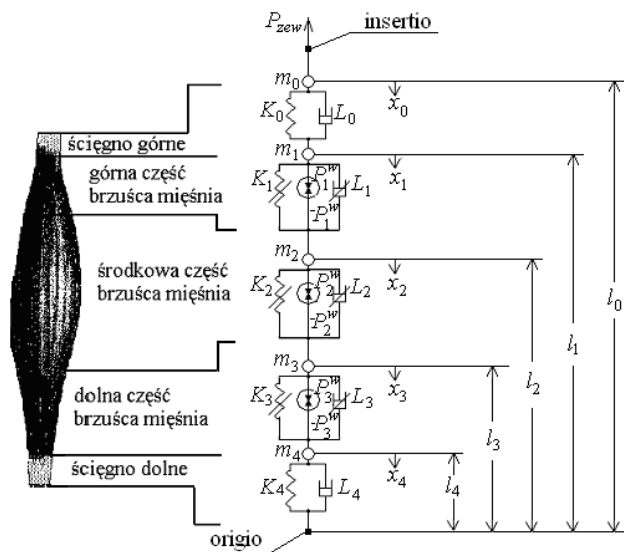


## 4. SYMULACJE NUMERYCZNE ORAZ WERYFIKACJA MODELU

W niniejszym rozdziale przedstawiono wyniki numerycznych symulacji modeli matematycznych mięśnia (por. p. 3.1) i zespołu mięśni (por. p. 3.2). Przeprowadzono je dla modeli przebywających w zrównoważonych stanach początkowych, tzn. przy zerowych warunkach początkowych.

### 4.1. Mięsień pojedynczy

Do symulacji przyjęto model reologiczny mięśnia (rys. 4.1) opisany w p. 3.1. Współczynniki masowe  $m_i$ , współczynniki sztywności  $K_i$  i współczynniki tłumienia  $L_i$ , dla  $i = 0, 1, \dots, 4$ , obliczono wg założeń podanych w p. 3.1.1.3 i p. 3.1.5. Współczynniki sztywności oszacowano według (3.32), przyjmując, że maksymalne naprężenie tkanki mięśniowej  $\delta_{\max_m}$  i tkanki ścięgnistej  $\delta_{\max_{sc}}$  nie przekracza wartości [9]:  $\delta_{\max_m} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$  i  $\delta_{\max_{sc}} = 40 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ .



Rys. 4.1. Reologiczny model mięśnia

W celu określenia długości wyznaczonych fragmentów mięśnia wyznaczono pięć charakterystycznych punktów (rys. 4.1):

- $x_0 = x_0(t)$  przemieszczenie punktu przyczepu mięśnia,
- $x_1 = x_1(t)$  przemieszczenie punktu pomiędzy ścięgnem górnym a górną częścią brzośca,
- $x_2 = x_2(t)$  przemieszczenie punktu pomiędzy górną częścią a środkową częścią brzośca,

- $x_3 = x_3(t)$  przemieszczenie punktu pomiędzy środkową częścią a dolną częścią brzuśca,
- $x_4 = x_4(t)$  przemieszczenie punktu pomiędzy dolną częścią brzuśca a ścięgnem dolnym.

#### 4.1.1. Skurcz koncentryczny i ekscentryczny

##### Przykład 1: Modelowanie zachowania mięśnia zdrowego

Na rys. 4.2 i rys. 4.3 przedstawiono wyniki symulacji skurczów modelu mięśnia zdrowego o stałych i zmiennych współczynnikach sztywności i tłumienia. Są to położenia charakterystycznych punktów, będących sumą długości i przemieszczenia  $l_i + x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 4$ ). Wyróżniono trzy etapy skurczu: koncentryczny (I), ekscentryczny (II) i koncentryczno-ekscentryczny (III) (por. p. 3.1.7.1). Wyniki uzyskano przy kroku całkowania  $\Delta t = 10^{-7}$  s.

Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe:

- $\{l_i(t=0), i = 0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i = 0, \dots, 4\} = \{0,01; 0,1; 0,3; 0,1; 0,01\}$  [kg];
- $P_{zew}(t) = 50 \cdot [\sigma_{HV}(t-1) - \sigma_{HV}(t-2)]$  [N];

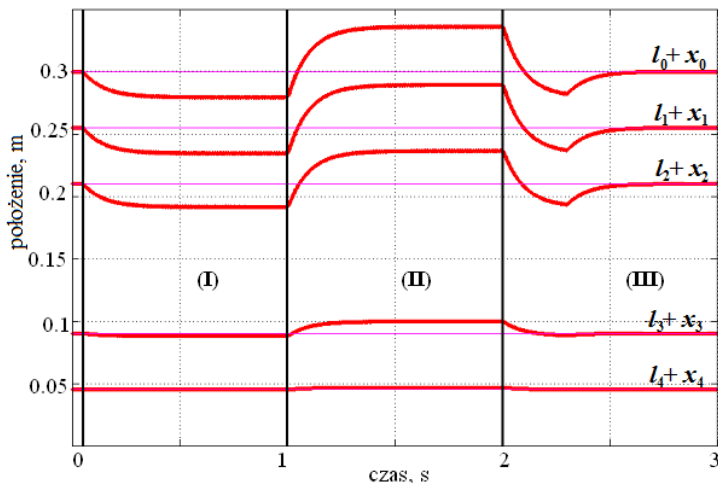
gdzie  $\sigma_{HV}$  – funkcja Heaviside'a; siły wewnętrzne  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  zadano w postaci następujących funkcji:

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \notin [0,05; 2,3] \\ \sum_{i=1}^{n=180} \left[ 20 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-1}{80} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-0,5}{80} \right) \right] & \text{dla } t \in [0,05; 2,3], \end{cases}$$

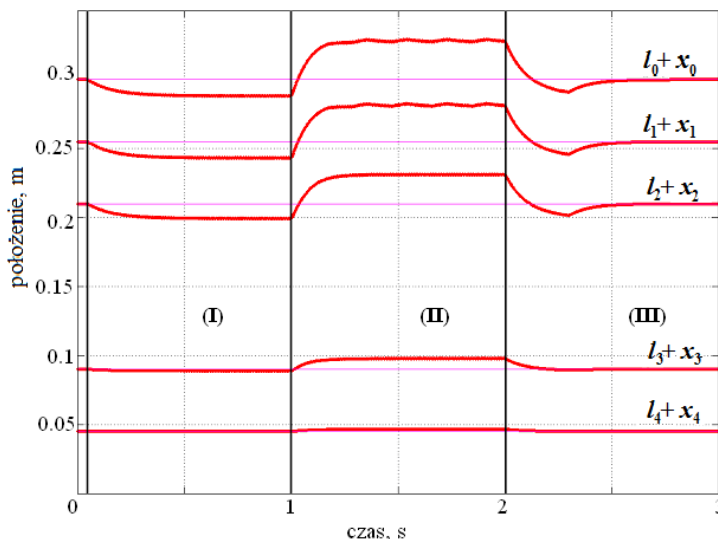
$$P_2^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \notin [0,05; 2,3] \\ \sum_{i=1}^{n=180} \left[ 50 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-1}{80} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-0,5}{80} \right) \right] & \text{dla } t \in [0,05; 2,3]. \end{cases}$$

W modelu mięśnia o stałych współczynnikach wartości współczynników sztywności  $K_i$  i tłumienia  $L_i$  są jednakowe dla każdego rodzaju pracy:  $\{K_i, i = 0, \dots, 4\} = \{31000; 5000; 1500; 5000; 31000\}$  [N/m] oraz  $\{L_i, i = 0, \dots, 4\} = \{3100; 500; 150; 500; 3100\}$  [N·s/m]. W modelu mięśnia o zmiennych współczynnikach ich wartości zależą od rodzaju pracy odcinków brzuśca, zgodnie z (3.3):

- w stanie całkowitego wydłużania modelu mięśnia (stan 1, tab. 3.1) współczynniki sztywności  $K_i$  i tłumienia  $L_i$  przyjmują wartości:  $\{K_i, i = 0, \dots, 4\} = \{31000; 5000; 1500; 5000; 31000\}$  [N/m] oraz  $\{L_i, i = 0, \dots, 4\} = \{3100; 500; 150; 500; 3100\}$  [N·s/m];
- w stanie całkowitego skurczenia modelu mięśnia (stan 8, tab. 3.1) współczynniki sztywności  $K_i$  i tłumienia  $L_i$  są równe:  $\{K_i, i = 0, \dots, 4\} = \{31000; 10000; 3000; 10000; 31000\}$  [N/m] oraz  $\{L_i, i = 0, \dots, 4\} = \{3100; 1000; 300; 1000; 3100\}$  [N·s/m];
- w pozostałych stanach (stan 2, stan 3, ..., stan 7, tab. 3.1) współczynniki sztywności  $K_i$  i tłumienia  $L_i$  są zależne od rodzaju pracy odcinków brzuśca.



Rys. 4.2. Położenie  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia zdrowego o stałych współczynnikach w skurczu koncentryczno-ekscentrycznym



Rys. 4.3. Położenie  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia zdrowego o zmiennych współczynnikach w skurczu koncentryczno-ekscentrycznym

### Przykład 2: Modelowanie zachowania mięśnia zmęczonego

Na rys. 4.4 przedstawiono wyniki symulacji skurczów modelu mięśnia zmęczonego. Są to położenia  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów. Podobnie jak w przykładzie 1, wyróżniono tu trzy etapy: I – skurcz koncentryczny, II – skurcz ekscentryczny, III – skurcz koncentryczno-ekscentryczny (por. p. 3.1.7.1). Wyniki uzyskano przy kroku całkowania  $\Delta t = 10^{-7}$  s.

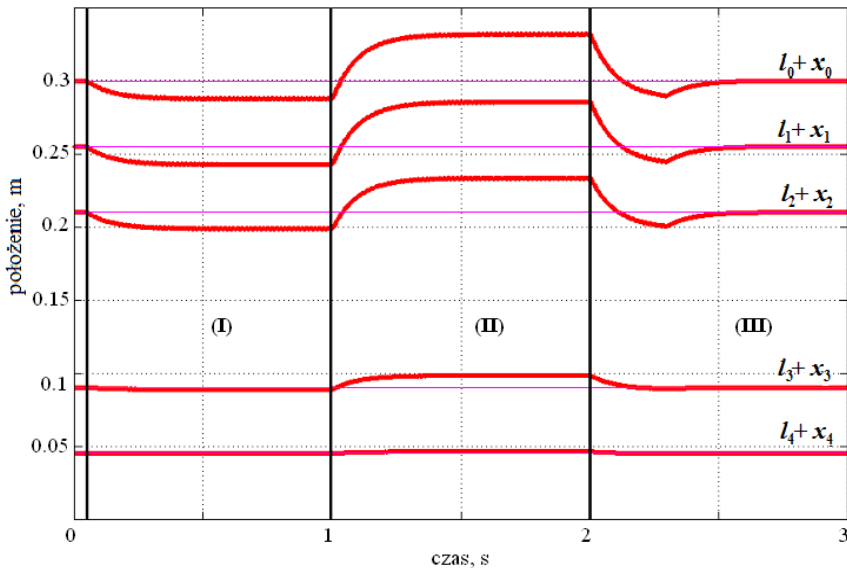
Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe:

- $\{l_i(t = 0), i = 0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i = 0, \dots, 4\} = \{0,01; 0,1; 0,3; 0,1; 0,01\}$  [kg];

- $\{K_i, i = 0, \dots, 4\} = \{40000; 6000; 200; 6000; 40000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i = 0, \dots, 4\} = \{4000; 600; 200; 600; 4000\}$  [N·s/m];
- $P_{zew}(t) = 50 \cdot [\sigma_{HV}(t-1) - \sigma_{HV}(t-2)]$  [N];
- siły wewnętrzne  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  zadano w postaci następujących funkcji, [N]:

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \notin [0,05; 2,3] \\ \sum_{i=1}^{n=135} \left[ 15 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-1}{60} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-0,5}{60} \right) \right] & \text{dla } t \in [0,05; 2,3], \end{cases}$$

$$P_2^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \notin [0,05; 2,3] \\ \sum_{i=1}^{n=135} \left[ 40 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-1}{60} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-0,5}{60} \right) \right] & \text{dla } t \in [0,05; 2,3]. \end{cases}$$



Rys. 4.4. Położenie  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia zmęczonego w skurczu koncentryczno-ekscentrycznym

### Przykład 3: Modelowanie zachowania mięśnia uszkodzonego

Na rys. 4.5 przedstawiono symulację skurczów modelu mięśnia uszkodzonego. Są to położenia  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów. Podobnie jak w przykładzie 1, wyróżniono tu trzy etapy: I – skurcz koncentryczny, II – skurcz ekscentryczny, III – skurcz

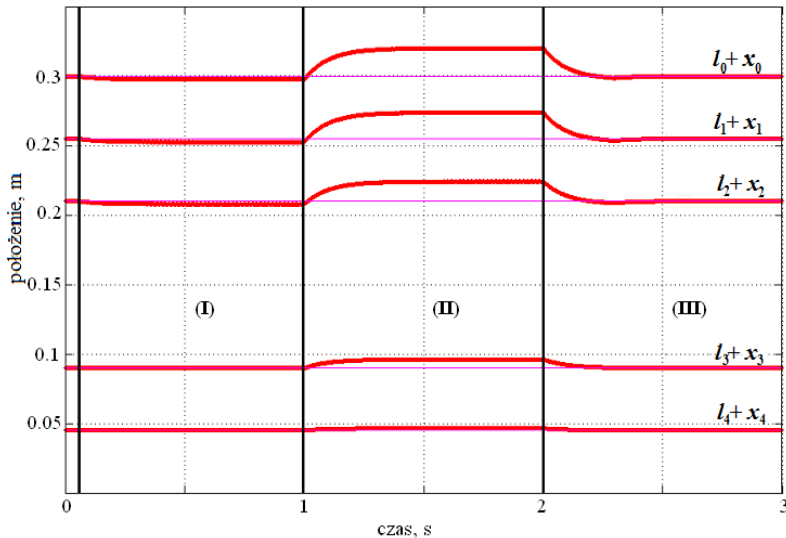
koncentryczno-ekscentryczny (por. p. 3.1.7.1). Wyniki uzyskano przy kroku całkowania  $\Delta t = 10^{-7}$  s

Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe:

- $\{l_i(t=0), i=0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i=0, \dots, 4\} = \{0,01; 0,1; 0,3; 0,1; 0,01\}$  [kg];
- $\{K_i, i=0, \dots, 4\} = \{40000; 10000; 5000; 10000; 40000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i=0, \dots, 4\} = \{4000; 1000; 500; 1000; 4000\}$  [N·s/m];
- $P_{zew}(t) = 50 \cdot [\sigma_{HV}(t-1) - \sigma_{HV}(t-2)]$  [N];
- siły wewnętrzne  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  zadano w postaci następujących funkcji, [N]:

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \notin [0,05; 2,3] \\ \sum_{i=1}^{n=135} \left[ 5 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-1}{60} \right) + \right. \\ \quad \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-0,5}{60} \right) \right] & \text{dla } t \in [0,05; 2,3], \end{cases}$$

$$P_2^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \notin [0,05; 2,3] \\ \sum_{i=1}^{n=135} \left[ 20 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-1}{60} \right) + \right. \\ \quad \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,05 - \frac{i-0,5}{60} \right) \right] & \text{dla } t \in [0,05; 2,3]. \end{cases}$$



Rys. 4.5. Położenie  $l_i + x_i$  ( $i=0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia uszkodzonego w skurczu koncentryczno-ekscentrycznym

### 4.1.2. Skurcz izotoniczny

Wyniki symulacji przedstawione w niniejszym podpunkcie uzyskano dla następujących danych liczbowych:

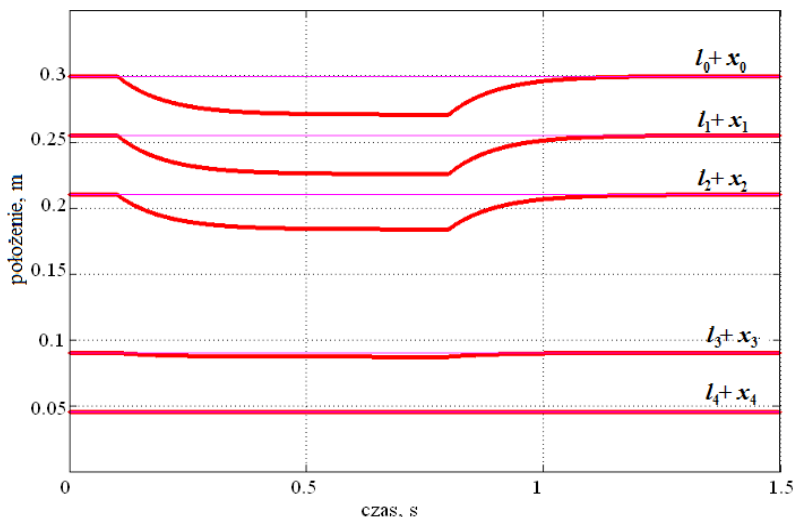
- $\{l_i(t=0), i=0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i=0, \dots, 4\} = \{0,001; 0,01; 0,05; 0,01; 0,001\}$  [kg];
- $\{K_i, i=0, \dots, 4\} = \{30000; 5000; 1500; 5000; 30000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i=0, \dots, 4\} = \{3000; 500; 150; 500; 3000\}$  [N·s/m];
- $P_{zew} = 0$ ; krok całkowania  $\Delta t = 10^{-8}$  s.

#### Przykład 1: Odpowiedź modelu mięśnia na pobudzenie funkcją Heaviside'a

Na rys. 4.6 przedstawiono wyniki symulacji w postaci położenia  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów, uzyskane przy zadaniu sił wewnętrznych w postaci:

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = 15 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,1) - \sigma_{HV}(t - 0,8)] \text{ [N]} \text{ oraz}$$

$$P_2^w(t) = 35 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,1) - \sigma_{HV}(t - 0,8)] \text{ [N]}.$$



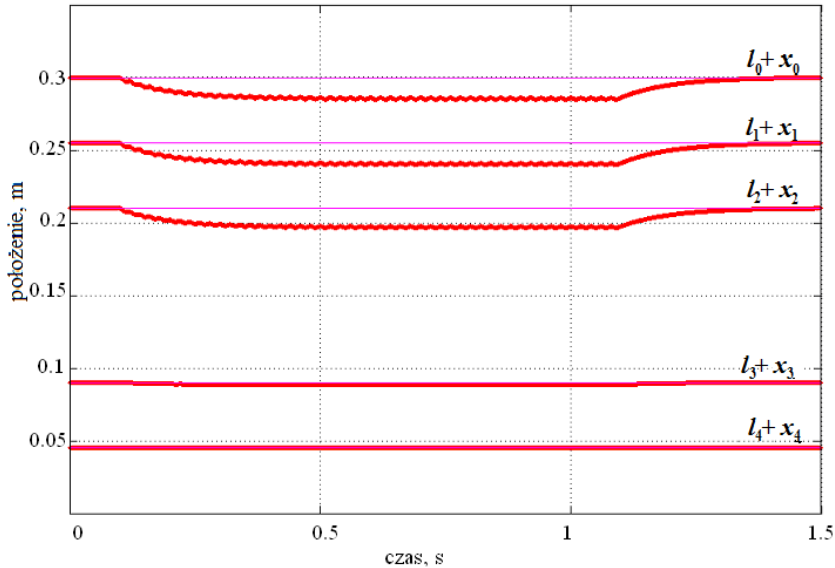
Rys. 4.6. Położenie  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia w skurczu izotonicznym wywołanym pobudzeniem w postaci funkcji Heaviside'a

#### Przykład 2: Odpowiedź modelu mięśnia na pobudzenie funkcją $n$ -impulsów prostokątnych

Na rys. 4.7 przedstawiono wyniki symulacji w postaci położenia  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów, uzyskane przy zadaniu następujących sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  [N]:

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \notin [0,1; 1,1] \\ \sum_{i=1}^{n=50} \left[ 15 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,1 - \frac{i-1}{50} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,1 - \frac{i-0,5}{50} \right) \right] & \text{dla } t \in [0,05; 2,3], \end{cases}$$

$$P_2^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \notin [0,1; 1,1] \\ \sum_{i=1}^{n=50} \left[ 35 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,1 - \frac{i-1}{50} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 0,1 - \frac{i-0,5}{50} \right) \right] & \text{dla } t \in [0,05; 2,3]. \end{cases}$$



Rys. 4.7. Położenie  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia w skurczu izotonicznym wywołanym pobudzeniem w postaci funkcji  $n$ -impulsów prostokątnych

### Przykład 3: Odpowiedź modelu mięśnia na pobudzenie funkcją o złożonym kształcie

Na rys. 4.8 przedstawiono wyniki symulacji w postaci położenia  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów.

Przebiegi uzyskano przy zadaniu następujących sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  [N]:

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = \frac{15}{a_{HV}^4} \cdot \left\{ \left[ a_{HV}^4 - (t - t_0 - a_{HV})^4 \right] \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t - t_0) - \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV}) \right] + \right. \\ \left. + a_{HV}^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV}) - \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV} - b_{HV}) \right] + \right. \\ \left. + (t - t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV})^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t - t_0 - a_{HV} - b_{HV}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_{HV}^j(t - t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV}) \right] \right\}$$

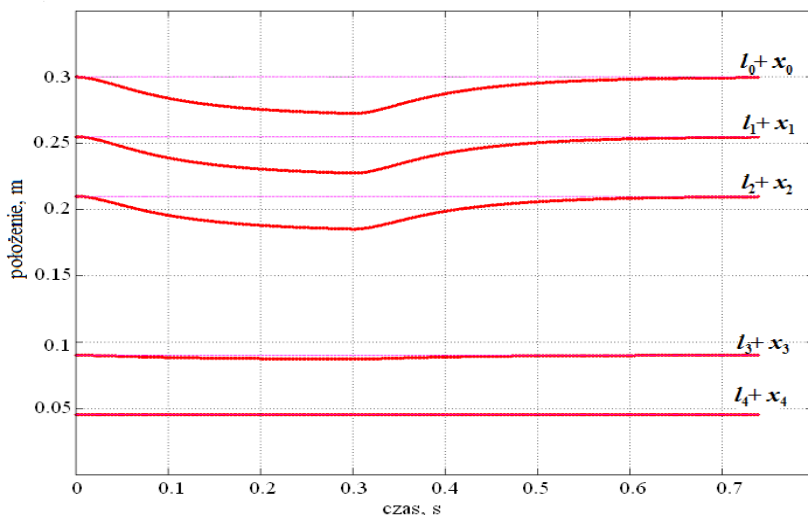
$$P_2^w(t) = \frac{35}{a_{HV}^4} \cdot \left\{ \left[ a_{HV}^4 - (t-t_0 - a_{HV})^4 \right] \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) \right] \right\} +$$

$$+ a_{HV}^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) \right] +$$

$$+ (t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV})^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) - \right.$$

$$\left. - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV}) \right\},$$

gdzie:  $a_{HV} = 0,1$  s,  
 $b_{HV} = 0,2$  s,  
 $t_0 = 0$ .



Rys. 4.8. Położenie  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia w skurczu izotonicznym wywołanym pobudzeniem w postaci funkcji o złożonym kształcie

#### Przykład 4: Odpowiedź modelu mięśnia na pobudzenie funkcją $n$ -impulsów prostokątnych posiadających obwiednie o złożonym kształcie

Na rys. 4.9 przedstawiono wyniki symulacji w postaci położen  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów.

Przebiegi uzyskano przy zadaniu następujących sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  [N]:

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = \frac{15}{a_{HV}^4} \cdot \left\{ \left[ a_{HV}^4 - (t-t_0 - a_{HV})^4 \right] \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) \right] \right\} +$$

$$+ a_{HV}^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) \right] + (t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV})^4 \cdot$$

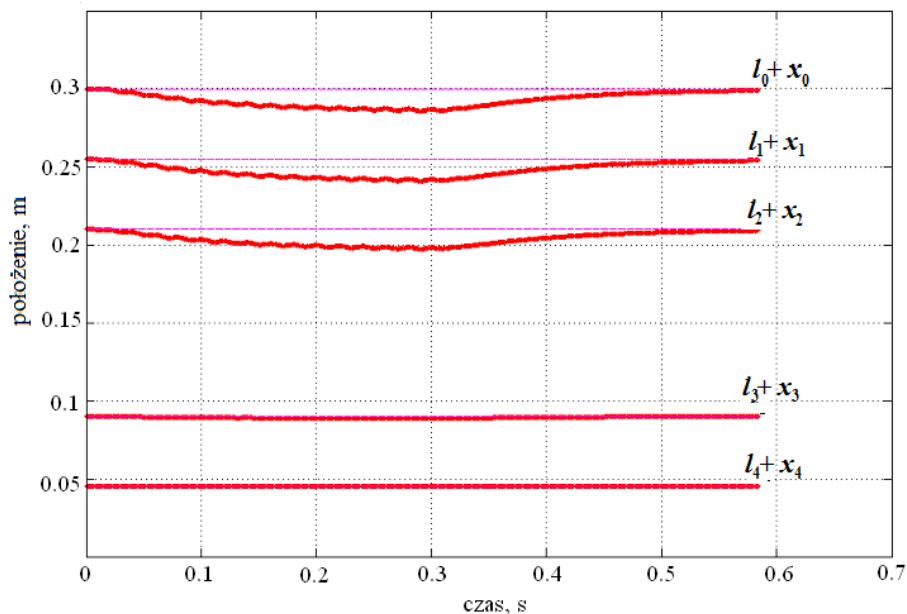
$$\cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV}) \right] \left\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i=1}^{20} \left[ \sigma_{HV} \left( t-t_0 - \frac{i-1}{50} \right) - \sigma_{HV} \left( t-t_0 - \frac{i-0,5}{50} \right) \right] \right\},$$



$$\begin{aligned}
 P_2^w(t) = & \frac{35}{a_{HV}^4} \cdot \left\{ \left[ a_{HV}^4 - (t-t_0 - a_{HV})^4 \right] \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) \right] + \right. \\
 & + a_{HV}^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) \right] + \\
 & + (t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV})^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) - \right. \\
 & \left. \left. - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV}) \right] \right\} \cdot \\
 & \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{20} \left[ \sigma_{HV} \left( t-t_0 - \frac{i-1}{50} \right) - \sigma_{HV} \left( t-t_0 - \frac{i-0,5}{50} \right) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

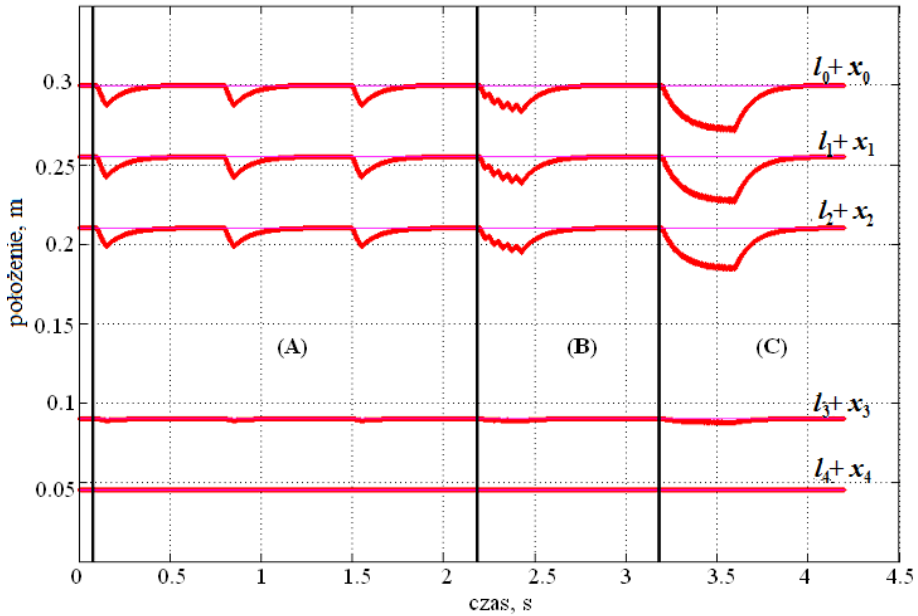
gdzie:  $a_{HV} = 0,1$  s,  
 $b_{HV} = 0,2$  s,  
 $t_0 = 0$ .



Rys. 4.9. Położenie  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia w skurczu izotonicznym wywołanym pobudzeniem w postaci funkcji  $n$ -impulsów prostokątnych posiadających obwiednie o złożonym kształcie

### Przykład 5: Symulacja niepełnych i pełnych skurczów tężcowych

Na rys. 4.10 przedstawiono wyniki symulacji w postaci położenia  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów przeprowadzonych dla: trzech pojedynczych skurczów (A); niepełnego skurczu tężcowego (B); pełnego skurczu tężcowego (C). Wyniki te uzyskano przy zadaniu następujących sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  [N]:



Rys. 4.10. Położenie  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia w skurczu złożonym z: A) trzech pojedynczych skurczy, B) niepełnego skurczu tężowego, C) pełnego skurczu tężowego

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = \begin{cases} 15 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,1) - \sigma_{HV}(t-0,15) + \sigma_{HV}(t-0,8) - \\ - \sigma_{HV}(t-0,85) + \sigma_{HV}(t-1,5) - \sigma_{HV}(t-1,55)] \text{ dla } t \in [0; 2,2) \\ \sum_{i=1}^{n=5} \left[ 15 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 2,201 - \frac{i-1}{20} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 2,201 - \frac{i-0,5}{20} \right) \right] \text{ dla } t \in [2,2; 3,2) \\ \sum_{i=1}^{n=32} \left[ 25 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 3,201 - \frac{i-1}{80} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 3,201 - \frac{i-0,5}{80} \right) \right] \text{ dla } t \in [3,2; 4,2), \end{cases}$$

$$P_2^w(t) = \begin{cases} 40 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,1) - \sigma_{HV}(t-0,15) + \sigma_{HV}(t-0,8) - \\ - \sigma_{HV}(t-0,85) + \sigma_{HV}(t-1,5) - \sigma_{HV}(t-1,55)] \text{ dla } t \in [0; 2,2) \\ \sum_{i=1}^{n=5} \left[ 40 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 2,201 - \frac{i-1}{20} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 2,201 - \frac{i-0,5}{20} \right) \right] \text{ dla } t \in [2,2; 3,2) \\ \sum_{i=1}^{n=32} \left[ 70 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 3,201 - \frac{i-1}{80} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 3,201 - \frac{i-0,5}{80} \right) \right] \text{ dla } t \in [3,2; 4,2). \end{cases}$$

### 4.1.3. Skurcz izometryczny

Wyniki symulacji skurczu izometrycznego uzyskano dla następujących danych liczbowych: przemieszczenie przyczepu  $x_0$  nie przekracza wartości 0,1 mm;

$$\{l_i(t=0), i=0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\} \text{ [m];}$$

$$\{m_i, i=0, \dots, 4\} = \{0,001; 0,01; 0,05; 0,01; 0,001\} \text{ [kg];}$$

$$\{K_i, i=0, \dots, 4\} = \{30000; 5000; 1500; 5000; 30000\} \text{ [N/m];}$$

$$\{L_i, i=0, \dots, 4\} = \{3000; 500; 150; 500; 3000\} \text{ [N}\cdot\text{s/m],}$$

$$\text{krok całkowania } \Delta t = 10^{-8} \text{ s.}$$

#### Przykład 1: Odpowiedź modelu mięśnia, którego przyczep i początek są unieruchomione

##### Przypadek 1 (pobudzenie funkcją o złożonym kształcie)

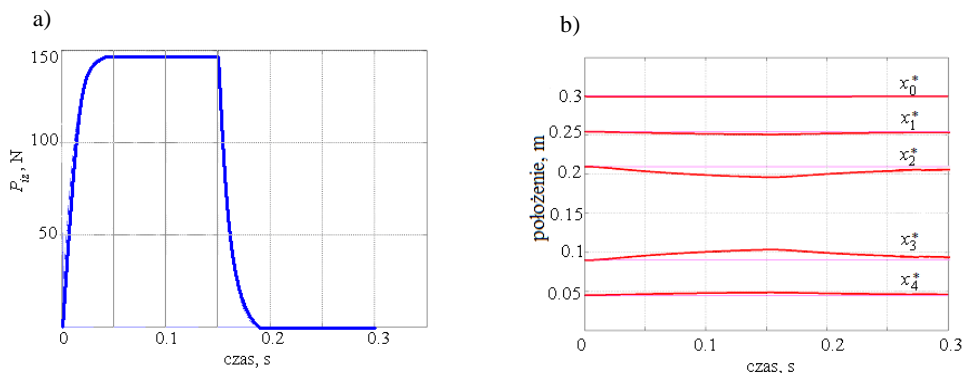
Na rys. 4.11 przedstawiono wyniki symulacji w postaci położenia  $l_i + x_i$  ( $i=0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów skurczu izometrycznego.

Uzyskano je przy zadaniu następujących sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  [N]:

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = \frac{80}{a_{HV}^4} \cdot \left\{ \left[ a_{HV}^4 - (t-t_0 - a_{HV})^4 \right] \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) \right] + \right. \\ \left. + a_{HV}^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) \right] \right\} + \\ \left. + (t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV})^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV}) \right] \right\} ,$$

$$P_2^w(t) = \frac{200}{a_{HV}^4} \cdot \left\{ \left[ a_{HV}^4 - (t-t_0 - a_{HV})^4 \right] \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) \right] + \right. \\ \left. + a_{HV}^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) \right] + \right. \\ \left. + (t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV})^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV}) \right] \right\},$$

gdzie:  $a_{HV} = 0,05$  s,  
 $b_{HV} = 0,1$  s,  
 $t_0 = 0,000001$  s.



Rys. 4.11. Wyniki zasymulowanego skurczu izometrycznego:

- a) przebieg siły  $P_{tz}$  mierzonej na przyczepie mięśnia;  
b) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia

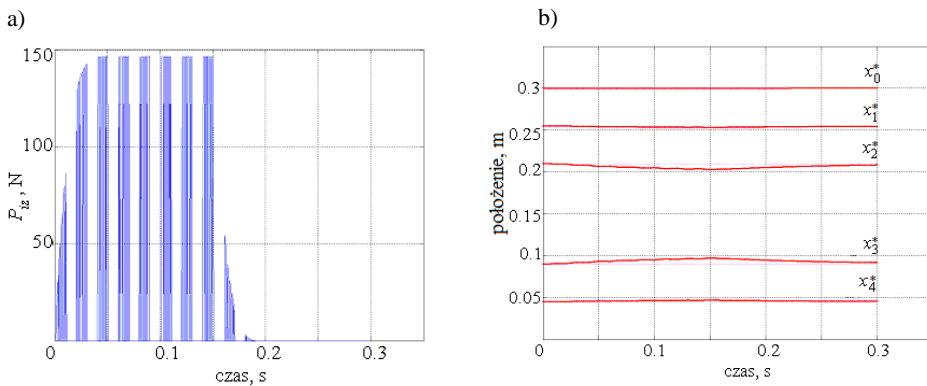
### Przypadek 2 (pobudzenie funkcją $n$ -impulsów prostokątnych posiadających obwiednie o złożonym kształcie)

Na rys. 4.12 przedstawiono wyniki symulacji w postaci położen  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów skurczu izometrycznego uzyskane przy zadaniu następujących sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  [N]:

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = 80 \cdot \left\{ \left[ a_{HV}^4 - (t-t_0 - a_{HV})^4 \right] \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) \right] + \right. \\ \left. + a_{HV}^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) \right] + \right. \\ \left. + (t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV})^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV}) \right] \right\} \cdot \\ \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{20} \left[ \sigma_{HV} \left( t-t_0 - \frac{i-1}{50} \right) - \sigma_{HV} \left( t-t_0 - \frac{i-0,5}{50} \right) \right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
 P_2^w(t) = & \frac{200}{a_{HV}^4} \cdot \left\{ \left[ a_{HV}^4 - (t-t_0 - a_{HV})^4 \right] \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) \right] + \right. \\
 & + a_{HV}^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV}) - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) \right] + \\
 & + (t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV})^4 \cdot \left[ \sigma_{HV}^j(t-t_0 - a_{HV} - b_{HV}) - \right. \\
 & \left. \left. - \sigma_{HV}^j(t-t_0 - 2 \cdot a_{HV} - b_{HV}) \right] \right\} \cdot \\
 & \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{20} \left[ \sigma_{HV} \left( t-t_0 - \frac{i-1}{50} \right) - \sigma_{HV} \left( t-t_0 - \frac{i-0,5}{50} \right) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie:  $a_{HV} = 0,05$  s,  
 $b_{HV} = 0,1$  s,  
 $t_0 = 0,000001$  s.



Rys. 4.12. Wyniki zasymulowanego skurczu izometrycznego:

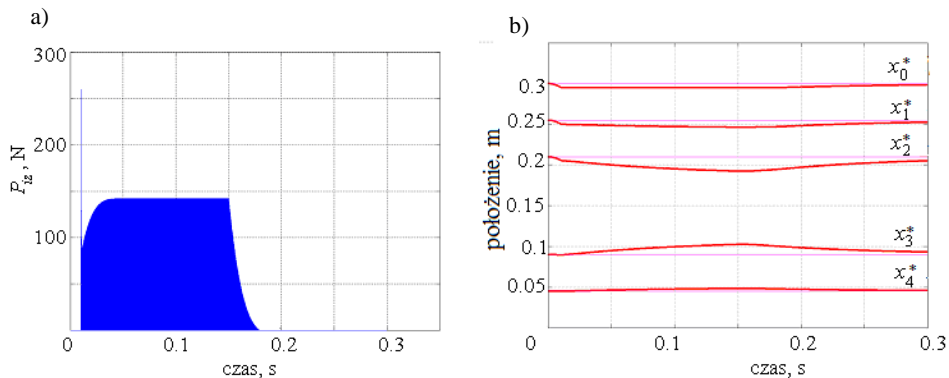
- a) przebieg siły  $P_{iz}$  mierzonej na przyczepie mięśnia;  
b) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia

### Przykład 2: Odpowiedź modelu mięśnia z uwzględnieniem ograniczenia przemieszczenia jego przyczepu

W przeprowadzonych symulacjach założono, iż przemieszczenie przyczepu  $x_0$  nie przekracza 5 mm.

#### Przypadek 1 (pobudzenie funkcją o złożonym kształcie)

Na rys. 4.13 przedstawiono wyniki symulacji w postaci położenia  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów skurczu izometrycznego, uzyskane przy zadaniu takich samych sił wewnętrznych jak w przykładzie 1, przypadek 1.

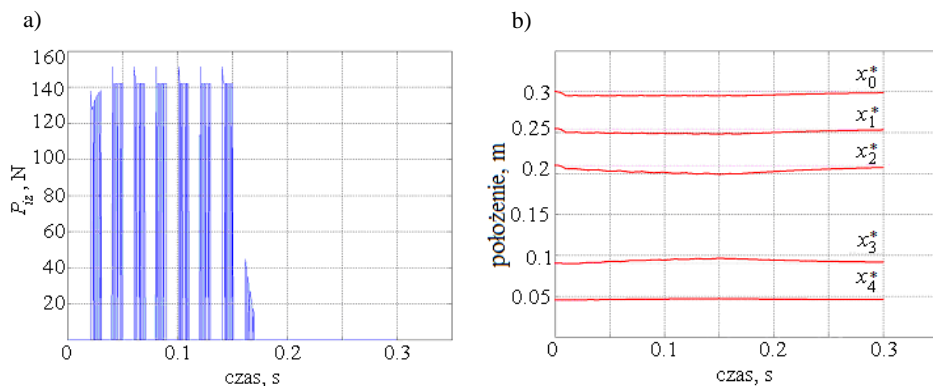


Rys. 4.13. Wyniki zasymulowanego skurczu izometrycznego:

- a) przebieg siły  $P_{iz}$  mierzonej na przyczepie mięśnia;  
 b) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia

### Przypadek 2 (pobudzenie funkcją $n$ -impulsów prostokątnych posiadających obwiednie o złożonym kształcie)

Na rys. 4.14 przedstawiono wyniki symulacji w postaci położen  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów skurczu izometrycznego uzyskane przy zadaniu takich samych sił wewnętrznych jak w przykładzie 1, przypadek 2.



Rys. 4.14. Wyniki zasymulowanego skurczu izometrycznego:

- a) przebieg siły  $P_{iz}$  mierzonej na przyczepie mięśnia;  
 b) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia

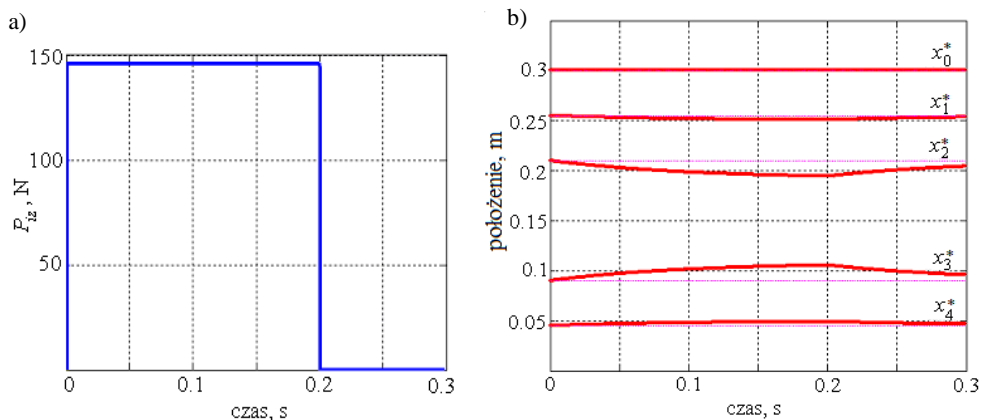
#### 4.1.4. Skurcz izotoniczno-izometryczny

Na rys. 4.15 i 4.16 przedstawiono wyniki symulacji w postaci położen  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów skurczów izotoniczno-izometrycznych modelu zachowania mięśnia o stałych i zmiennych współczynnikach sztywności i tłumienia. Wyniki te uzyskano przy założeniu, iż przemieszczenie przyczepu  $x_0$  nie przekracza wartości 0,1 mm. Krok całkowania numerycznego przyjęto  $\Delta t = 10^{-8}$  s. Wyniki uzyskano dla następujących danych liczbowych:

- $\{l_i(t=0), i=0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i=0, \dots, 4\} = \{0,001; 0,01; 0,05; 0,01; 0,001\}$  [kg];
- $P_1^w(t) = P_3^w(t) = 80 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,000001) - \sigma_{HV}(t - 0,2)]$  [N];
- $P_2^w(t) = 200 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,000001) - \sigma_{HV}(t - 0,2)]$  [N].

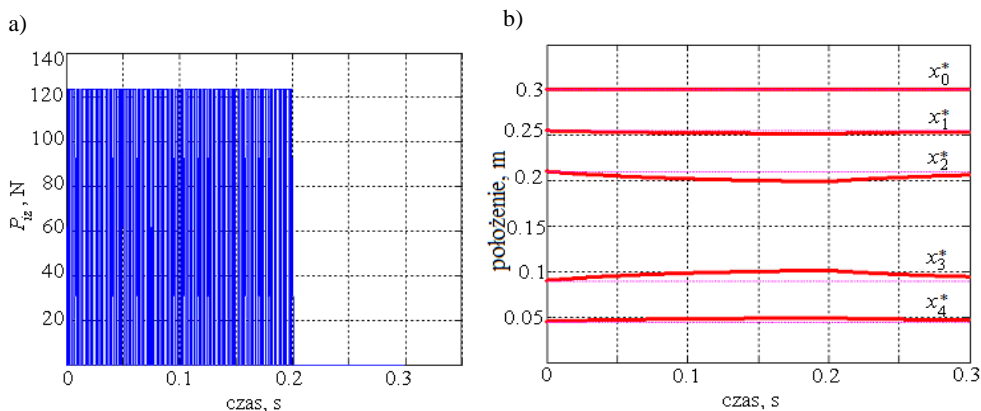
Wartości współczynników sztywności  $K_i$  i tłumienia  $L_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) przyjęto jak w przykładzie 1 (por. p. 4.1.1).

W czasie skurczu izotoniczno-izometrycznego siła przyczepu mięśnia  $P_{iz}$  była nieco większa na początku ( $t = 0,000001$  s) niż na końcu ( $t = 0,200000$  s). Różnica ta wynosiła  $10^{-1}$  N i dlatego jest niezauważalna na rys. 4.15.a.



Rys. 4.15. Wyniki zasymulowanego skurczu izotoniczno-izometrycznego modelu mięśnia o stałych współczynnikach sztywności i tłumienia:

- a) przebieg siły  $P_{iz}$  mierzonej na przyczepie mięśnia,
- b) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia



Rys. 4.16. Wyniki zasymulowanego skurczu izotoniczno-izometrycznego modelu mięśnia o zmiennych współczynnikach sztywności i tłumienia:

- a) przebieg siły  $P_{iz}$  mierzonej na przyczepie mięśnia,
- b) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia

#### 4.1.5. Skurcz przy zadanym przemieszczeniu przyczepu modelu mięśnia

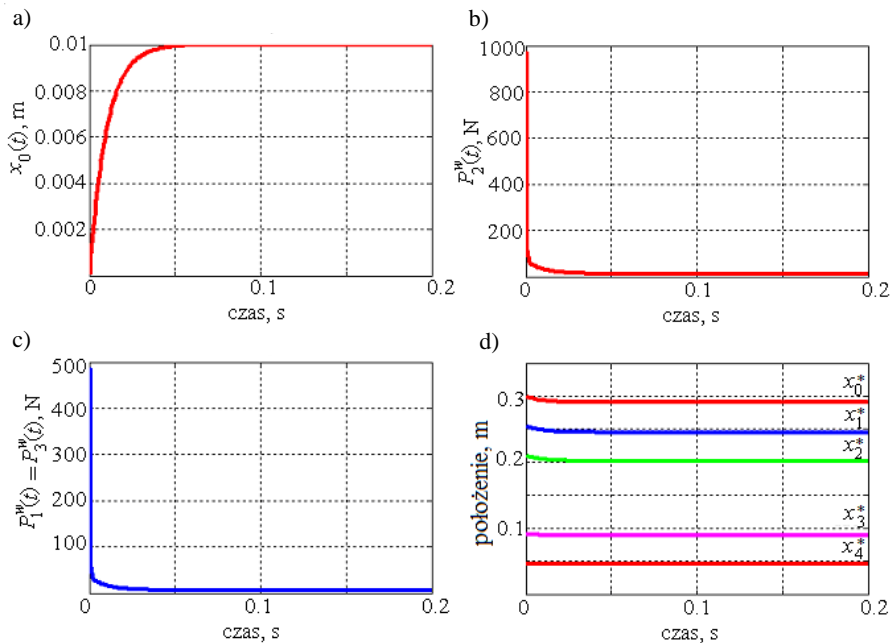
##### Przykład 1: Zastosowanie metody rozdzielania składowej aktywnej na poszczególne składowe (podejście 1)

W przykładzie tym przedstawiono wyniki symulacji sił wewnętrznych modelu mięśnia  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ , które realizują przemieszczenie przyczepu  $x_0(t)$  w postaci funkcji analitycznej:  $x_0(t) = 0,01 \cdot (1 - e^{-100t})$  [m]. Na rys. 4.17 i rys. 4.18 podano wyniki symulacji dla następujących danych liczbowych:

- $\{l_i(t=0), i=0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i=0, \dots, 4\} = \{0,01; 0,1; 0,3; 0,1; 0,01\}$  [kg];
- $\{K_i, i=0, \dots, 4\} = \{31000; 5000; 1500; 5000; 31000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i=0, \dots, 4\} = \{3100; 500; 150; 500; 3100\}$  [N·s/m];
- $P_{zew}(t) = 0$ ; krok całkowania  $\Delta t = 10^{-7}$  s.

Na rys. 4.19 i rys. 4.20 podano wyniki symulacji dla następujących danych liczbowych:

- $\{l_i(t=0), i=0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i=0, \dots, 4\} = \{0,001; 0,01; 0,05; 0,01; 0,001\}$  [kg];
- $\{K_i, i=0, \dots, 4\} = \{30000; 5000; 1500; 5000; 30000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i=0, \dots, 4\} = \{3000; 500; 150; 500; 3000\}$  [N·s/m];
- $P_{zew}(t) = 0$ ;
- krok całkowania  $\Delta t = 10^{-8}$  s.

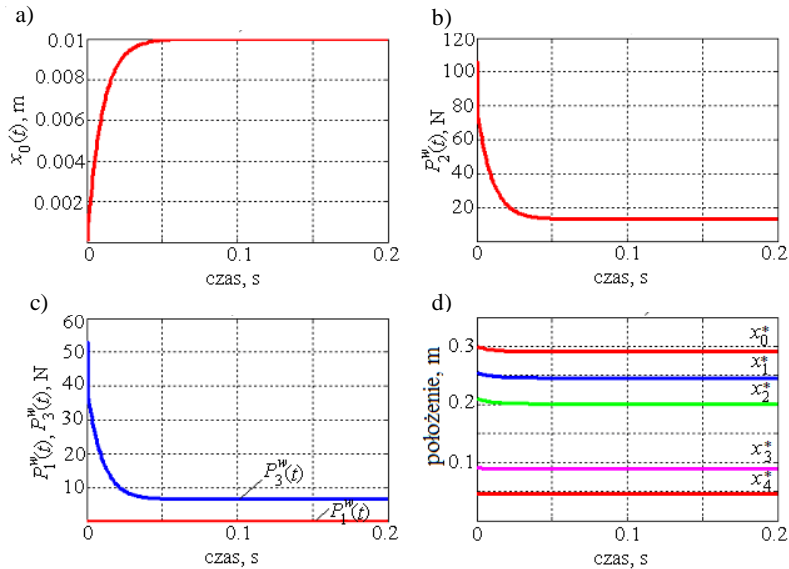


Rys. 4.17. Wyniki zasymulowanego skurczu modelu mięśnia uzyskane dla współczynników zdrowotności  $\xi_1 = \xi_3 = 0,5$ : a) zadany przebieg przemieszczenia przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$ ;

b) przebieg siły wewnętrznej  $P_2^w(t)$ ; c) przebieg sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ ;

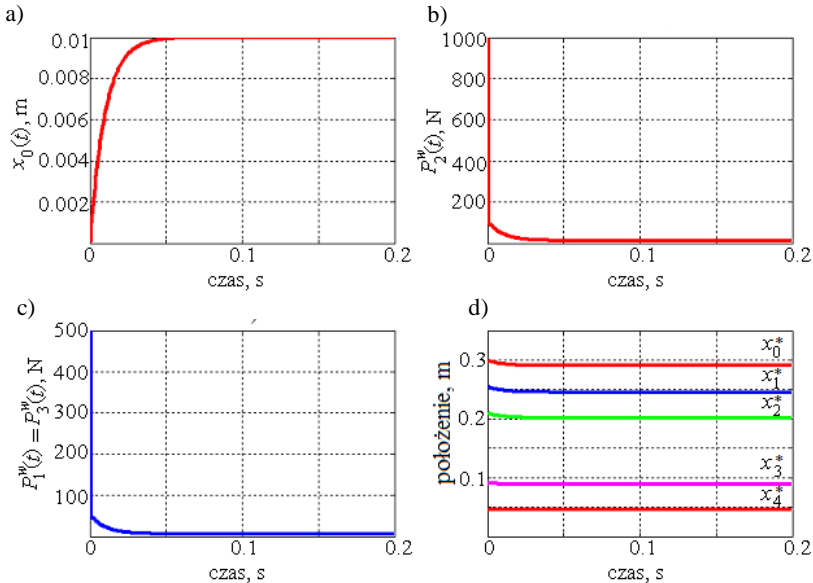
d) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i=0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia





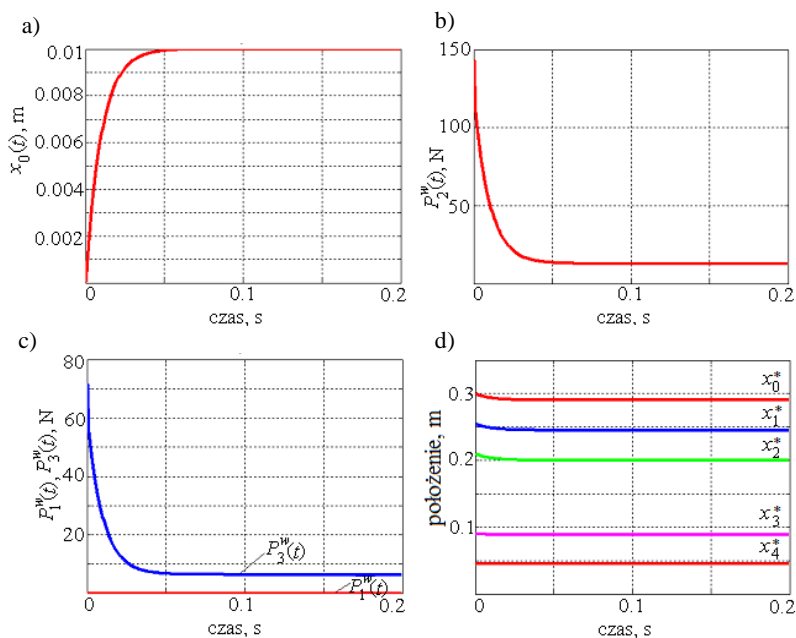
Rys. 4.18. Wyniki zasymulowanego skurczu modelu mięśnia uzyskane dla współczynników zdrowotności  $\xi_1 = 0$  i  $\xi_3 = 0,5$ :

- a) zadany przebieg przemieszczenia przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$ ;  
 b) przebieg siły wewnętrznej  $P_2^w(t)$ ; c) przebieg sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ ;  
 d) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia



Rys. 4.19. Wyniki zasymulowanego skurczu modelu mięśnia uzyskane dla współczynników zdrowotności  $\xi_1 = \xi_3 = 0,5$ :

- a) zadany przebieg przemieszczenia przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$ ;  
 b) przebieg siły wewnętrznej  $P_2^w(t)$ ; c) przebieg sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ ;  
 d) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia



Rys. 4.20. Wyniki zasymulowanego skurczu modelu mięśnia uzyskane dla współczynników zdrowotności  $\xi_1 = 0$  i  $\xi_3 = 0,5$ :

- a) zadany przebieg przemieszczenia przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$ ;  
 b) przebieg siły wewnętrznej  $P_2^w(t)$ ; c) przebieg sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ ;  
 d) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia

Z wyników przedstawionych na rys. 4.17, rys. 4.18, rys. 4.19 i rys. 4.20 wynika, iż realizacja przemieszczenia przyczepu mięśnia  $x_0(t) = 0,01 \cdot (1 - e^{-100t})$  [m] powoduje, że w chwili początkowej elementy kurczące muszą wygenerować bardzo duże siły wewnętrzne, które następnie powinny gwałtownie zmaleć. Odzwierciedla to zjawisko początkowego spadku siły, które zostało zaobserwowane podczas quasi-izokinetycznego skurczu mięśnia rzeczywistego [74, 112].

### Przykład 2: Zastosowanie metody rozdzielania składowej aktywnej na poszczególne składowe (podejście 2)

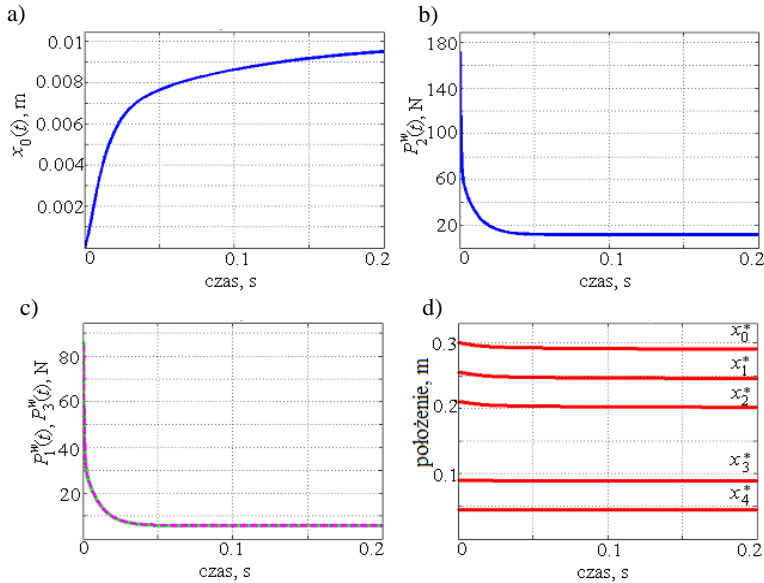
W niniejszym przykładzie przedstawiono wyniki symulacji uzyskane z rozwiązania problemu optymalizacji statycznej (podejście 2, p. 3.1.7.5). Są nimi przebiegi sił wewnętrznych modelu mięśnia  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ , które realizują przemieszczenie przyczepu mięśnia  $x_0(t)$  podane w postaci funkcji  $x_0(t) = 0,01 \cdot (1 - e^{-100t})$  [m]. Stała czasowa  $\tau_0 (\tau_0 > 0)$  zapobiega powstaniu pochodnych o nieskończonych wartościach w pierwszych krokach całkowania sztywnego układu równań różniczkowych (3.8) z krokiem całkowania  $10^{-7}$  s lub  $10^{-8}$  s. Do wyznaczenia sił wewnętrznych modelu mięśnia przyjęto następującą funkcję celu:

$$\Omega = \sum_{j=1}^3 \left\{ \int_0^t \left[ \sum_{i=0}^7 C_{ij} \cdot e^{s_i(t-\tau)} \right] \cdot P_j^w(\tau) d\tau \right\}^4 \rightarrow \min ,$$

i ograniczenia:  $0 \leq P_1^w(t) \leq \frac{P_2^w(t)}{2}$  i  $0 \leq P_3^w(t) \leq \frac{P_2^w(t)}{2}$ ,

$$A_2 \cdot \ddot{x}_0 + A_1 \cdot \dot{x}_0 + A_0 \cdot x_0 + \int_0^t \left[ \sum_{i=0}^7 B_i \cdot e^{s_i(t-\tau)} \right] \cdot x_0(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^3 \left\{ \int_0^t \left[ \sum_{i=0}^7 C_{ij} \cdot e^{s_i(t-\tau)} \right] \cdot P_j^w(\tau) d\tau \right\}.$$

Zadanie to potraktowano jako problem programowania nieliniowego i rozwiązano za pomocą zaimplementowanej funkcji Matlab – *fmincon*.



Rys. 4.21. Wyniki zasymulowanego skurczu modelu mięśnia uzyskane z zadania optymalizacji:

- zadany przebieg przemieszczenia przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$ ;
- przebieg siły wewnętrznej  $P_2^w(t)$ ; c) przebieg sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ ;
- położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia

Na rys. 4.21 podano wyniki symulacji w postaci położenia  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów, uzyskane dla następujących danych liczbowych:

- $\{l_i(t=0), i = 0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i = 0, \dots, 4\} = \{0,01; 0,1; 0,3; 0,1; 0,01\}$  [kg];
- $\{K_i, i = 0, \dots, 4\} = \{31000; 5000; 1500; 5000; 31000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i = 0, \dots, 4\} = \{3100; 500; 150; 500; 3100\}$  [N·s/m];
- $P_{zew}(t) = 0$ ; krok całkowania  $\Delta t = 10^{-7}$  s;
- stała czasowa  $\tau_0 = 0,001$  s.

### Przykład 3: Symulacja skurczu izokinetycznego

W niniejszym przykładzie podano wyniki symulacji sił wewnętrznych modelu mięśnia  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ , które realizują przemieszczenie przyczepu  $x_0(t)$  opisane dwoma funkcjami:

$$x_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0 \\ 0,01 \cdot t & \text{dla } t \in (0; 1] \\ 0,01 & \text{dla } t > 1 \end{cases}, \quad (4.1)$$

oraz

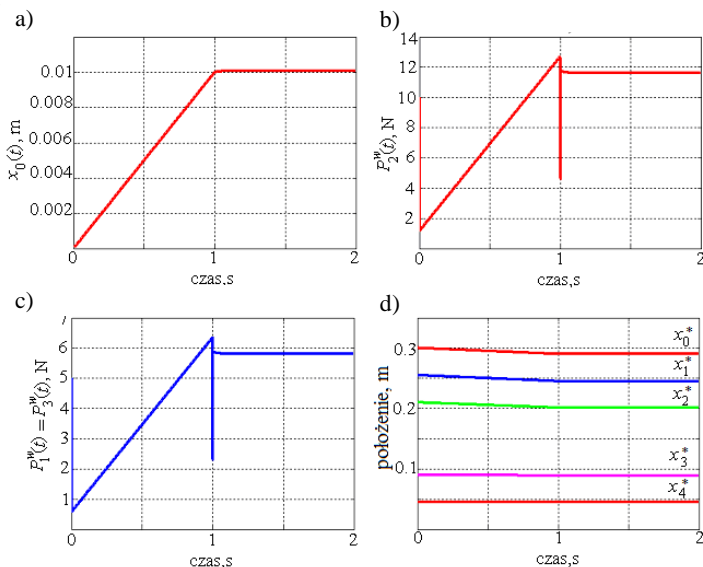
$$x_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0 \\ 0,01 \cdot t & \text{dla } t \in (0; 1) \\ 0,01 + 0,2^6 - (t-1,2)^6 & \text{dla } t \in [1; 1,2] \\ 0,01 + 0,2^6 & \text{dla } t > 1,2 \end{cases} \quad (4.2)$$

Na rys. 4.22 podano wyniki symulacji przemieszczenia przyczepu w postaci położen  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów według zależności (4.1), zaś na rys. 4.23 – dla (4.2). Symulacje przeprowadzono dla następujących danych liczbowych:

- $\{l_i(t=0), i = 0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i = 0, \dots, 4\} = \{0,01; 0,1; 0,3; 0,1; 0,01\}$  [kg];
- $\{K_i, i = 0, \dots, 4\} = \{31000; 5000; 1500; 5000; 31000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i = 0, \dots, 4\} = \{3100; 500; 150; 500; 3100\}$  [N·s/m];
- $P_{zew}(t) = 0$ ;
- krok całkowania  $\Delta t = 10^{-7}$  s.

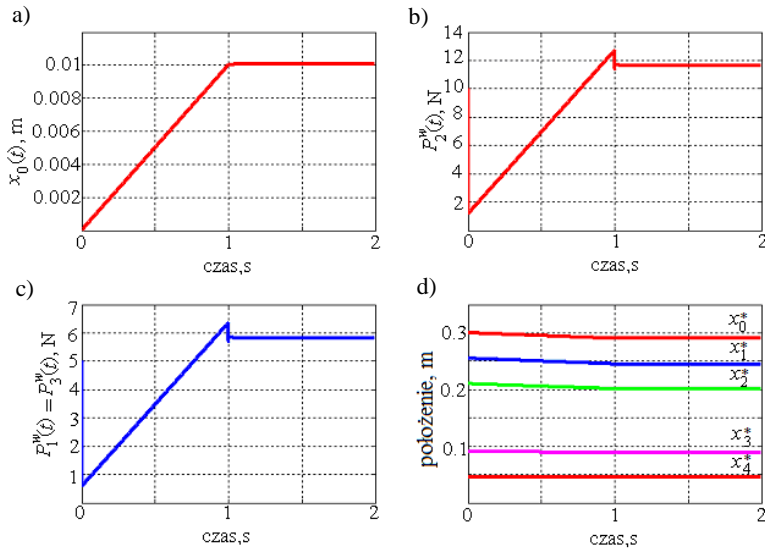
Na rys. 4.24 podano wyniki symulacji przemieszczenia przyczepu według zależności (4.1), zaś na rys. 4.25 – dla (4.2). Wyniki otrzymano przy następujących danych liczbowych:

- $\{l_i(t=0), i = 0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i = 0, \dots, 4\} = \{0,001; 0,01; 0,05; 0,01; 0,001\}$  [kg];
- $\{K_i, i = 0, \dots, 4\} = \{30000; 5000; 1500; 5000; 30000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i = 0, \dots, 4\} = \{3000; 500; 150; 500; 3000\}$  [N·s/m];
- $P_{zew}(t) = 0$ ;
- krok całkowania  $\Delta t = 10^{-8}$  s.



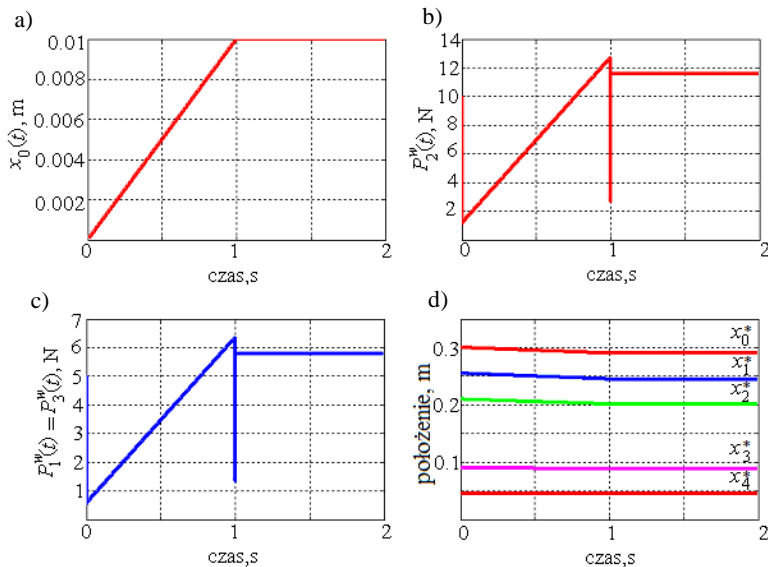
Rys. 4.22. Wyniki zasymulowanego skurczu modelu mięśnia uzyskane dla współczynników zdrowotności  $\xi_1 = \xi_3 = 0,5$ :

- a) zadany przebieg przemieszczenia przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$ ;
- b) przebieg siły wewnętrznej  $P_2^w(t)$ ; c) przebieg sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ ;
- d) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i, i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia



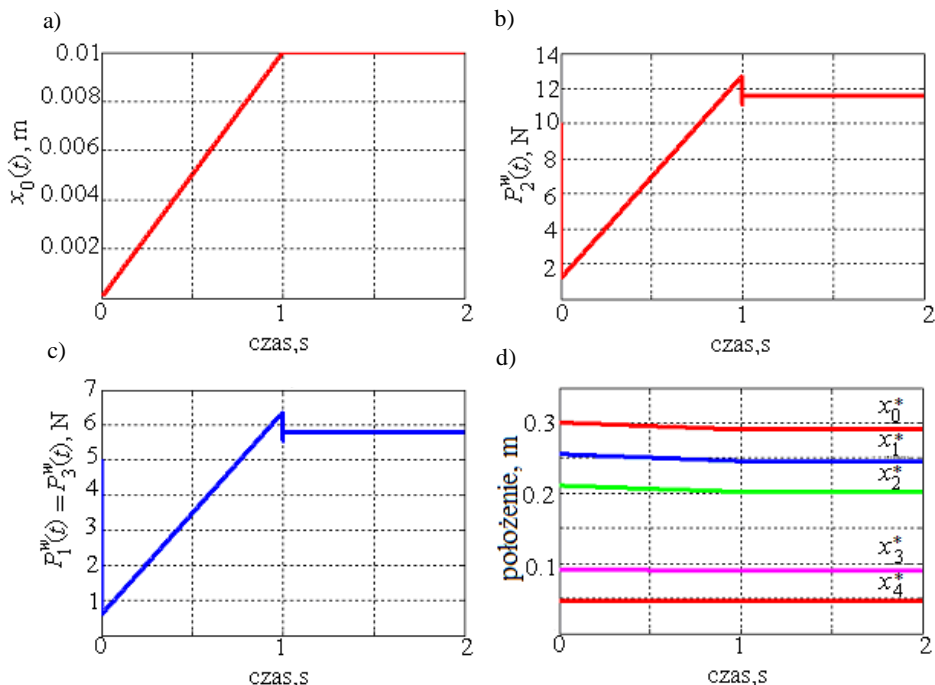
Rys. 4.23. Wyniki zasymulowanego skurczu modelu mięśnia uzyskane dla współczynników zdrowotności  $\xi_1 = \xi_3 = 0.5$ :

- a) zadany przebieg przemieszczenia przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$ ;  
 b) przebieg siły wewnętrznej  $P_2^w(t)$ ; c) przebieg sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ ;  
 d) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia



Rys. 4.24. Wyniki zasymulowanego skurczu modelu mięśnia uzyskane dla współczynników zdrowotności  $\xi_1 = \xi_3 = 0.5$ :

- a) zadany przebieg przemieszczenia przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$ ;  
 b) przebieg siły wewnętrznej  $P_2^w(t)$ ; c) przebieg sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ ;  
 d) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia



Rys. 4.25. Wyniki zasymulowanego skurczu modelu mięśnia uzyskane dla współczynników zdrowotności  $\xi_1 = \xi_3 = 0,5$ :

- a) zadany przebieg przemieszczenia przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$ ;  
 b) przebieg siły wewnętrznej  $P_2^w(t)$ ; c) przebieg sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$  i  $P_3^w(t)$ ;  
 d) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia

Z uzyskanych przebiegów sił wewnętrznych  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  przedstawionych na rys. 4.22, rys. 4.23, rys. 4.24 i rys. 4.25, wynika, że w czasie przejścia mięśnia w stan skurczu izokinetycznego zachodzi zjawisko szybkiego spadku sił (podobnie jak w przykładzie 1).

#### Przykład 4: Symulacja skurczu przy skokowej zmianie długości mięśnia

W tym przykładzie przedstawiono wyniki symulacji skokowej zmiany długości mięśnia biernego, które opisano zależnością eksponentyjną, [m]:

$$x_0(t) = -0,01 \cdot (1 - e^{-100t}). \quad (4.3)$$

Na rys. 4.26 i rys. 4.27 przedstawiono wyniki w postaci położenia  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów, które otrzymano dla następujących danych liczbowych:

- $\{l_i(t=0), i = 0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i = 0, \dots, 4\} = \{0,01; 0,1; 0,3; 0,1; 0,01\}$  [kg];
- $\{K_i, i = 0, \dots, 4\} = \{31000; 5000; 1500; 5000; 31000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i = 0, \dots, 4\} = \{3100; 500; 150; 500; 3100\}$  [N·s/m];
- $P_1^w(t) = P_2^w(t) = P_3^w(t) = 0$ ;
- krok całkowania  $\Delta t = 10^{-7}$  s.

Na rys. 4.28 i rys. 4.29 przedstawiono wyniki symulacji w postaci położenia  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów skokowej zmiany długości mięśnia biernego, które uzyskano dla następujących danych liczbowych:

- $\{l_i(t=0), i = 0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i = 0, \dots, 4\} = \{0,001; 0,01; 0,05; 0,01; 0,001\}$  [kg];
- $\{K_i, i = 0, \dots, 4\} = \{30000; 5000; 1500; 5000; 30000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i = 0, \dots, 4\} = \{3000; 500; 150; 500; 3000\}$  [N·s/m];
- $P_1^w(t) = P_2^w(t) = P_3^w(t) = 0$ ;
- krok całkowania  $\Delta t = 10^{-8}$  s.

Zakładając, iż przemieszczenie przyczepu modelu mięśnia  $x_0(t)$  zmienia się zgodnie z (4.3), wyniki symulacji skokowej zmiany długości mięśnia biernego uzyskano z rozwiązania układu równań (3.8), w postaci:

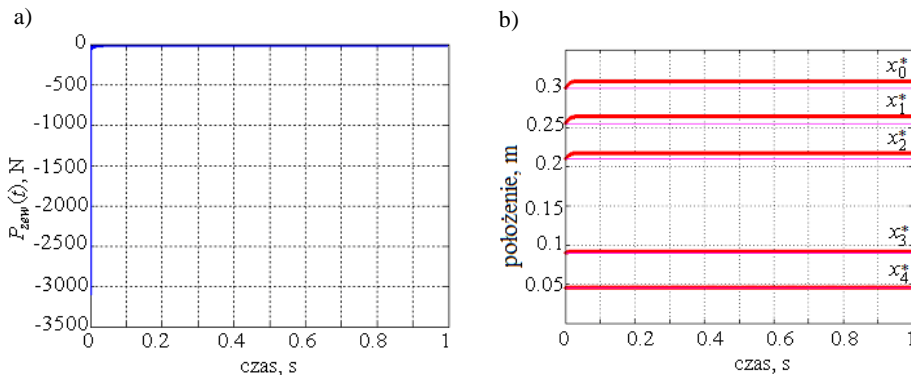
- układu czterech równań:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + L_0 \cdot [\dot{x}_1 - \dot{x}_0(t)] + K_0 \cdot [x_1 - x_0(t)] + L_1 \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_1 \cdot (x_1 - x_2) &= P_1^w(t) \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 + L_1 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_1 \cdot (x_2 - x_1) + L_2 \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + K_2 \cdot (x_2 - x_3) &= P_2^w(t) - P_1^w(t) \\ m_3 \cdot \ddot{x}_3 + L_2 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + K_2 \cdot (x_3 - x_2) + L_3 \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + K_3 \cdot (x_3 - x_4) &= P_3^w(t) - P_2^w(t) \\ m_4 \cdot \ddot{x}_4 + L_3 \cdot (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + K_3 \cdot (x_4 - x_3) + L_4 \cdot \dot{x}_4 + K_4 \cdot x_4 &= -P_3^w(t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

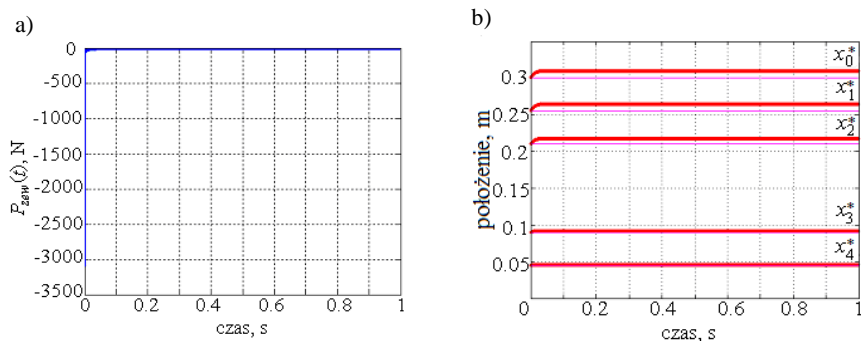
w którym siłę zewnętrzną  $P_{zew}(t)$  obliczano z zależności:

$$P_{zew}(t) = m_0 \cdot \ddot{x}_0(t) + L_0 \cdot [\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1] + K_0 \cdot [x_0(t) - x_1]; \quad (4.5)$$

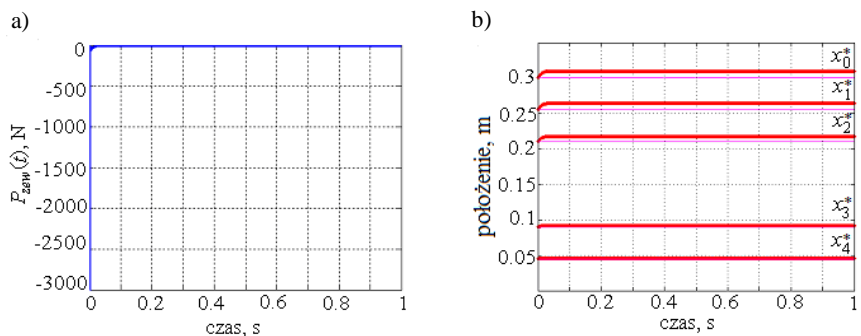
- układu pięciu równań (3.8), pobudzonych siłą zewnętrzną  $P_{zew}(t)$  obliczoną z (3.9) przy  $P_1^w(t) = P_2^w(t) = P_3^w(t) = 0$ .



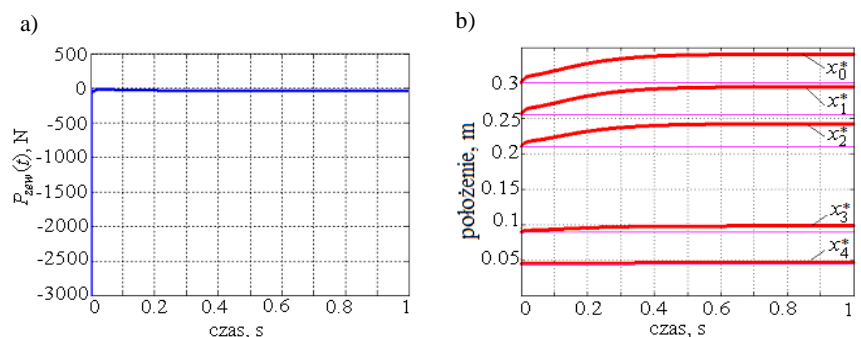
Rys. 4.26. Wyniki zasymulowanego skokowego skurczu modelu mięśnia opisanego (4.4): a) przebieg siły zewnętrznej  $P_{zew}(t)$  obliczony z (4.5), która w czasie  $t = 1$  s jest równa  $P_{zew\_urr-1} = 8,8403$  N; b) położenie  $x_i$  ( $x_i^* = l_i + x_i, i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia obliczonych z (4.4)



Rys. 4.27. Wyniki zasymulowanego skokowego skurczu modelu mięśnia uzyskane z rozwiązania (3.8) przy pobudzeniu siłą zewnętrzną  $P_{zew}(t)$  obliczoną z (3.9) i  $P_1^w(t) = P_2^w(t) = P_3^w(t) = 0$ :  
 a) przebieg siły zewnętrznej  $P_{zew}(t)$ , która w czasie  $t = 1$  s jest równa  $P_{zew\_rrc\_1} = 8,8413$  N;  
 b) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia (przemieszczenie przyczepu  $x_0 = x_{0\_obl}(t) = x_{0\_obl}$  uzyskano z (3.8))

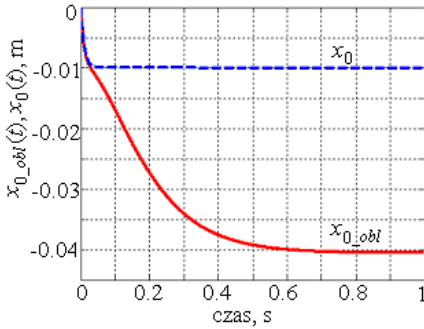


Rys. 4.28. Wyniki zasymulowanego skokowego skurczu modelu mięśnia opisane (4.4):  
 a) przebieg siły zewnętrznej  $P_{zew}(t)$  obliczony z (4.5), która w czasie  $t = 1$  s jest równa  $P_{zew\_urr\_2} = 8,8235$  N; b) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia obliczonych z (4.4)



Rys. 4.29. Wyniki zasymulowanego skokowego skurczu modelu mięśnia uzyskane z rozwiązania (3.8) przy pobudzeniu siłą zewnętrzną  $P_{zew}(t)$  obliczoną z (3.9) i  $P_1^w(t) = P_2^w(t) = P_3^w(t) = 0$ :  
 a) zadany przebieg siły zewnętrznej  $P_{zew}(t)$ , która w czasie  $t = 1$  s jest równa  $P_{zew\_rrc\_2} = 35,7720$  N;  
 b) położenie  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia (przemieszczenie przyczepu  $x_0 = x_{0\_obl}(t) = x_{0\_obl}$  uzyskano z (3.8))





Rys. 4.30. Przebieg przemieszczenia przyczepu obliczony  $x_{0,obl}(t)$  i zadany  $x_0(t)$  według (4.3)

Na rys. 4.26 i 4.27 przedstawiono wyniki symulacji modelu mięśnia, który jest układem sztywnym i posiada jedynie rzeczywiste wartości własne  $s_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 7$ ). Porównując te wyniki, można stwierdzić, że są one identyczne, a wartości sił zewnętrznych obliczone dla 1s są bardzo zbliżone. Z kolei na rys. 4.28 i 4.29 przedstawiono wyniki symulacji modelu mięśnia, który posiada sześć rzeczywistych wartości własnych  $s_i$  ( $i = 0, \dots, 4, 7$ ) oraz dwie zespolone i sprzężone wartości własne  $s_i$  ( $i = 5, 6$ ). Z ich porównania wynika, iż są one różne. Siła zewnętrzna  $P_{zew\_urr\_2}$  dla 1s jest prawie czterokrotnie mniejsza od siły  $P_{zew\_rrc\_2}$ . W celu wyjaśnienia tej różnicy przeprowadzo-

no dodatkowe badania numeryczne. Stwierdzono, iż różnica ta nie występuje, gdy układ równań różniczkowych jest układem mało sztywnym (wartość bezwzględna stosunku maksymalnej wartości własnej do minimalnej wartości własnej nie przekracza liczby 100) oraz posiada zarówno rzeczywiste, jak i zespolone wartości własne. Na tej podstawie wywnioskowano, że:

- dla modelu mięśnia, który jest układem sztywnym i posiada jedynie rzeczywiste wartości własne, błędy zaokrążeń, pojawiające się podczas przekształcenia układu równań różniczkowych (3.8) do jednego równania różniczkowo-całkowego (3.9) (por. p. 6.2), nie mają wpływu na wyniki uzyskiwane z rozwiązania tego równania;
- dla modelu mięśnia, który jest układem sztywnym oraz posiada zarówno rzeczywiste, jak i zespolone wartości własne, błędy zaokrążeń, pojawiające się podczas przekształcenia układu równań różniczkowych (3.8) do jednego równania różniczkowo-całkowego (3.9), zmieniają wyniki otrzymywane z rozwiązania tego równania.

#### 4.1.6. Identyfikacja właściwości lepkosprężystych modelu

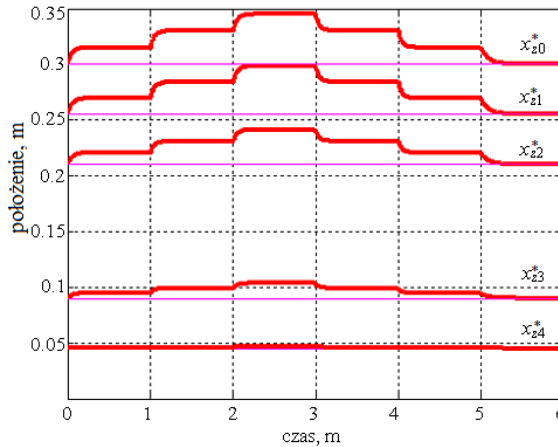
W niniejszym podpunkcie przedstawiono wyniki identyfikacji właściwości lepkosprężystych modelu mięśnia, którą przeprowadzono zgodnie z p. 3.1.5.2. Przyjęto, iż badany model mięśnia posiada następujące współczynniki masowe:  $\{m_i, i = 0, \dots, 4\} = \{0,001; 0,01; 0,03; 0,01; 0,001\}$  [kg], a model mięśnia biernego, tzn.  $P_1^w(t) = P_2^w(t) = P_3^w(t) = 0$ , pobudzono siłą zewnętrzną w postaci:

$$P_{zew}(t) = 20 \cdot \sigma_{HV}(t) + 20 \cdot \sigma_{HV}(t-1) + 40 \cdot \sigma_{HV}(t-2) - 40 \cdot \sigma_{HV}(t-3) - 20 \cdot \sigma_{HV}(t-4) - 20 \cdot \sigma_{HV}(t-5) \text{ [N]}.$$

Otrzymano przebiegi przemieszczeń wyznaczonych punktów modelu mięśnia  $x_z = x_z(t)$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) (rys. 4.31), z których każdy opisano następującą funkcją analityczną, [m] :

$$x_{zi}(t) = \left\{ -a_{0i} \cdot [1 - e^{-b_{oi} \cdot t}] \cdot \sigma_{HV}(t) - a_{0i} \cdot [1 - e^{-b_{oi} \cdot (t-1)}] \cdot \sigma_{HV}(t-1) + (-1) \cdot a_{0i} \cdot [1 - e^{-b_{oi} \cdot (t-2)}] \cdot \sigma_{HV}(t-2) + a_{0i} \cdot [1 - e^{-b_{oi} \cdot (t-3)}] \cdot \sigma_{HV}(t-3) + a_{0i} \cdot [1 - e^{-b_{oi} \cdot (t-4)}] \cdot \sigma_{HV}(t-4) + a_{0i} \cdot [1 - e^{-b_{oi} \cdot (t-5)}] \cdot \sigma_{HV}(t-5) \right\},$$

gdzie:  $a_{0i}$  – współczynnik  $i$ -tego przebiegu o wartości, [m]:  $a_{00} = 0,0150$ ,  $a_{01} = 0,0145$ ,  $a_{02} = 0,0105$ ,  
 $a_{03} = 0,0045$ ,  $a_{04} = 0,0005$ ;  
 $b_{0i}$  – współczynnik  $i$ -tego przebiegu o wartości:  $b_{00} = b_{01} = b_{02} = b_{03} = b_{04} = 20 \text{ s}^{-1}$ .



Rys. 4.31. Zadane przebiegi położenia  $x_{zi}^*$  ( $x_{zi}^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia

Wyniki identyfikacji właściwości lepkosprężystych modelu mięśnia podano w tab. 4.1. Należy zauważyć, iż w przedziale czasu (5; 6] s nie wyznaczono współczynników sztywności i tłumienia, gdyż brak obciążenia w tym przedziale nie pozwala na oszacowanie współczynników modelu mięśnia według (3.33) i (3.34).

**Tablica 4.1**

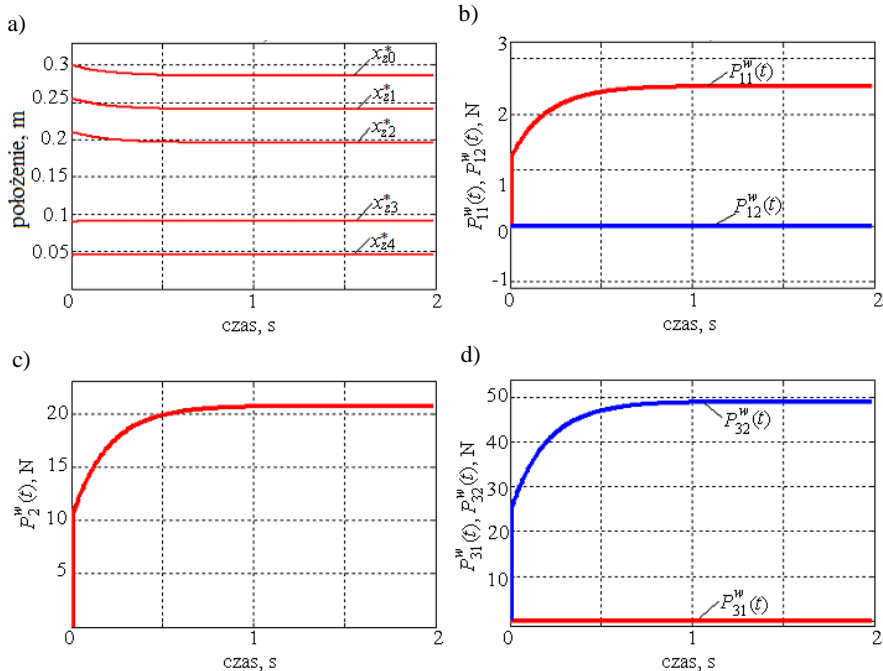
Wyniki identyfikacji właściwości lepkosprężystych modelu mięśnia

Przedział długości mięśnia [m] rodzaj pracy	[0,300; 0,3150] rozciąganie	(0,315; 0,330] rozciąganie	(0,330; 0,345] rozciąganie	[0,330; 0,345] ściskanie	(0,315; 0,330] ściskanie
Czas wyznaczenia współczynników tłumienia $t_m$ , [s]	0,04	1,03	2,03	3,04	4,04
$\{K_0^w, K_1^w, K_2^w, K_3^w, K_4^w\}$ [N/m]	{-40000, -5000, -3333, -5000, -40000}	{-40000, -5000, -3333, -5000, -40000}	{-53333, -6667, -4444, -6667, -53333}	{-}	{-}
$\{K_0^s, K_1^s, K_2^s, K_3^s, E_4^s\}$ [N/m]	{-}	{-}	{-}	{-40000, -5000, -3333, -5000, -40000}	{-40000, -5000, -3333, -5000, -40000}
$\{L_0^w, L_1^w, L_2^w, L_3^w, L_4^w\}$ [N·s/m]	{6903, 864, 577, 65, 13051}	{12578, 1573, 1050, 1575, 25819}	{26488, 3312, 2209, 3314, 56284}	{-}	{-}
$\{L_0^s, L_1^s, L_2^s, L_3^s, L_4^s\}$ [N·s/m]	{-}	{-}	{-}	{-19804, -2475, -1649, -2473, -47039}	{-10902, -1362, -907, -1360, -27009}

#### 4.1.7. Identyfikacja sił wewnętrznych modelu

W tym podpunkcie przedstawiono wyniki identyfikacji sił wewnętrznych modelu mięśnia, który opisano następującymi parametrami:

- $\{l_i(t=0), i=0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i=0, \dots, 4\} = \{0,01; 0,1; 0,3; 0,1; 0,01\}$  [kg];
- $\{K_i, i=0, \dots, 4\} = \{31000; 5000; 1500; 5000; 31000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i=0, \dots, 4\} = \{3100; 500; 150; 500; 3100\}$  [N·s/m];
- $P_{zew}(t) = 0$ .



Rys. 4.32. Wyniki identyfikacji sił wewnętrznych modelu mięśnia:

a) zadane przebiegi położeń  $x_{zi}^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i=0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia; b) siły wewnętrzne  $P_{11}^w(t)$  i  $P_{12}^w(t)$ ; c) siła wewnętrzna  $P_2^w(t)$ ;

d) siły wewnętrzne  $P_{31}^w(t)$  i  $P_{32}^w(t)$

Przebiegi przemieszczeń charakterystycznych punktów modelu mięśnia  $x_{zi} = x_{zi}(t)$  ( $i=0, \dots, 4$ ) zadano w postaci następujących funkcji analitycznych:  $x_{zi}(t) = a_{0i} \cdot [1 - e^{-b_{0i}t}] \cdot \sigma_{HV}(t)$  [m], gdzie:  $a_{0i}$  – współczynniki  $i$ -tego przebiegu o wartości, [m]:  $a_{00} = 0,015$ ,  $a_{01} = 0,015$ ,  $a_{02} = 0,0145$ ,  $a_{03} = -0,001$ ,  $a_{04} = -0,0015$ ;  $b_{0i}$  – współczynnik  $i$ -tego przebiegu o wartości:  $b_{00} = b_{01} = b_{02} = b_{03} = b_{04} = 5 \text{ s}^{-1}$ .

W oparciu o zasady procesu identyfikacji (por. p. 3.1.5.4) uzyskano siły wewnętrzne  $P_{11}^w(t)$ ,  $P_{12}^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$ ,  $P_{31}^w(t)$ ,  $P_{32}^w(t)$  (rys. 4.32), które spełniają następujące nierówności:  $[P_{11}^w(t) \neq P_{12}^w(t)] \wedge [P_{31}^w(t) \neq P_{32}^w(t)]$  oraz  $P_{21}^w(t) = P_{22}^w(t) = P_2^w(t)$ .

#### 4.1.8. Bilans energetyczny pracy modelu mięśnia

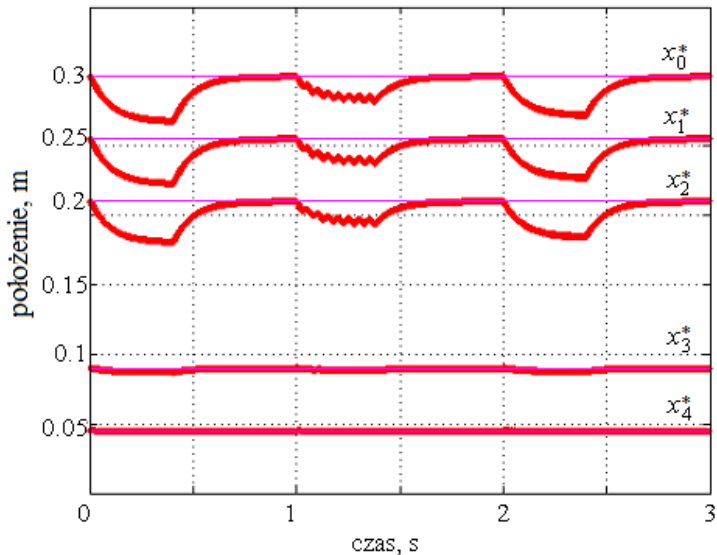
Obliczenia energetyczne przeprowadzono dla zasymulowanych skurczów koncentrycznych modelu mięśnia (rys. 4.33), które otrzymano przy następujących danych liczbowych:

- $\{l_i(t=0), i=0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i=0, \dots, 4\} = \{0,01; 0,1; 0,3; 0,1; 0,01\}$  [kg];
- $\{K_i, i=0, \dots, 4\} = \{31000; 5000; 1500; 5000; 31000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i=0, \dots, 4\} = \{3100; 500; 150; 500; 3100\}$  [N·s/m];
- $P_{zew}(t) = 0$ ;
- krok całkowania  $\Delta t = 10^{-7}$  s.

Siły wewnętrzne  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  zadano w postaci funkcji, [N]:

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = \begin{cases} 15 \cdot [\sigma_{HV}(t) - \sigma_{HV}(t-0,4)] & \text{dla } t \in [0; 1) \\ \sum_{i=1}^{n=8} \left[ 15 \cdot \sigma_{HV} \left( t-1 - \frac{i-1}{20} \right) + \right. \\ \quad \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t-1 - \frac{i-0,5}{20} \right) \right] & \text{dla } t \in [1; 2) \\ \sum_{i=1}^{n=32} \left[ 25 \cdot \sigma_{HV} \left( t-2 - \frac{i-1}{80} \right) + \right. \\ \quad \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t-2 - \frac{i-0,5}{80} \right) \right] & \text{dla } t \in [2; 3) \end{cases}$$

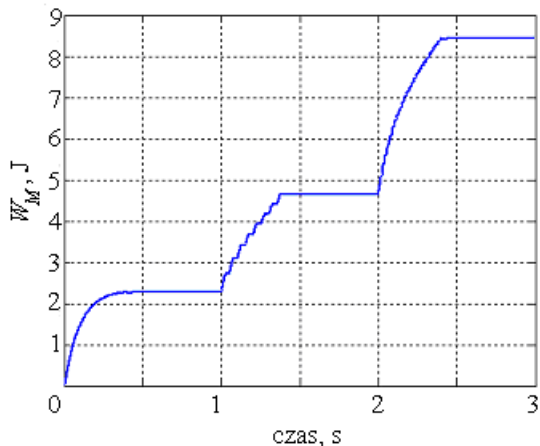
$$P_2^w(t) = \begin{cases} 40 \cdot [\sigma_{HV}(t) - \sigma_{HV}(t-0,4)] & \text{dla } t \in [0; 1) \\ \sum_{i=1}^{n=8} \left[ 40 \cdot \sigma_{HV} \left( t-1 - \frac{i-1}{20} \right) + \right. \\ \quad \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t-1 - \frac{i-0,5}{20} \right) \right] & \text{dla } t \in [1; 2) \\ \sum_{i=1}^{n=32} \left[ 70 \cdot \sigma_{HV} \left( t-2 - \frac{i-1}{80} \right) + \right. \\ \quad \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t-2 - \frac{i-0,5}{80} \right) \right] & \text{dla } t \in [2; 3) \end{cases}$$



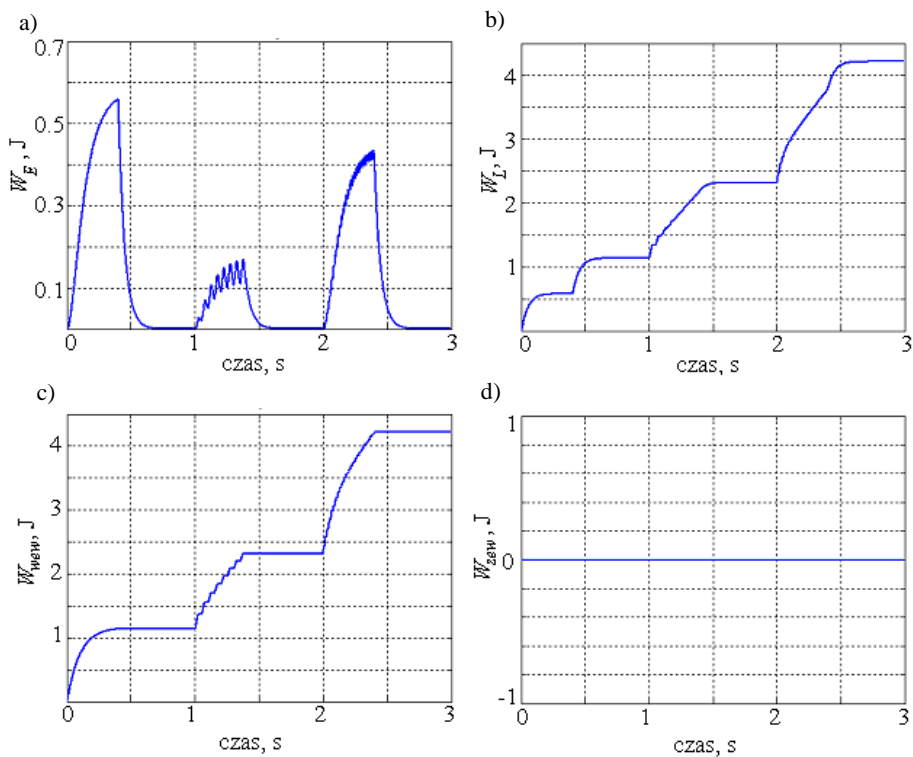
Rys. 4.33. Zasymlowane skurcze koncentryczne położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia wykorzystane do obliczeń energetycznych

Dla zasymlowanych skurczów mięśnia (rys. 4.33) pracę sił wewnętrznych  $W_{wew}$ , pracę sił sprężystych  $W_E$  i pracę sił lepkich  $W_L$  obliczono z (3.65), (3.67), (3.68). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4.35.a, 4.35.b i 4.35.c. Praca sił zewnętrznych  $W_{zew}$  wynosi zero.

Wychodząc z bilansu energetycznego, przyrost energii kinetycznej modelu mięśnia  $W_M$  obliczono jako sumę pracy sił wewnętrznych  $W_{wew}$ , pracy sił sprężystych  $W_E$  i pracy sił lepkich  $W_L$  (rys. 4.34). Całkowanie analityczne (stosowane do obliczenia pracy sił w zadanym przedziale czasowym) zastąpiono całkowaniem numerycznym opartym na metodzie trapezów [51].



Rys. 4.34. Przyrost energii kinetycznej modelu mięśnia  $W_M$



Rys. 4.35. Wyniki obliczeń energetycznych: a) praca sił sprężystych  $W_E$ ; b) praca sił lepkich  $W_L$ ; c) praca sił wewnętrznych  $W_{wew}$ ; d) praca siły zewnętrznej  $W_{zew}$

#### 4.1.9. Weryfikacja modelu mięśnia

Zaproponowany model mięśnia można ilościowo zweryfikować za pomocą metody opisanej w p. 3.1.4. Ponadto można przeprowadzić weryfikację jakościową, która polega na porównaniu przebiegów sił wewnętrznych modelu mięśnia z mierzonymi na powierzchni brzośca sygnałami EMG.

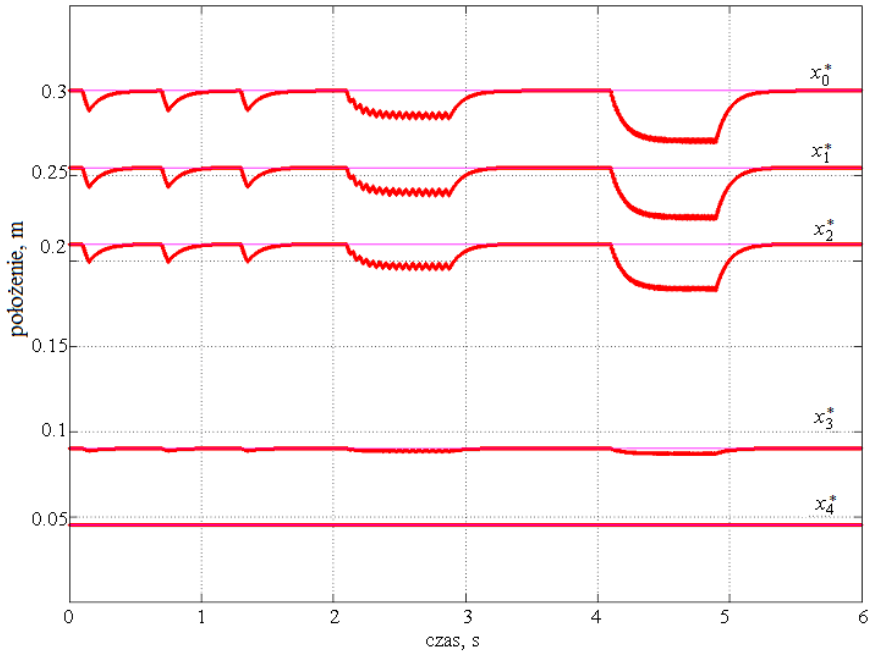
W monografii opisano jedynie dwie weryfikacje jakościowe, których wyniki uznano za zadowalające. Pierwsza polegała na porównywaniu uzyskanego doświadczalnie przebiegu przemieszczenia przyczepu izolowanego mięśnia rzeczywistego (rys. 4.38) [47] z zasympulowanym przebiegiem modelu mięśnia (rys. 4.36 i rys. 4.37). Wyniki w postaci położen  $l_i + x_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów uzyskano dla następujących danych liczbowych:

- $\{l_i(t=0), i = 0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i = 0, \dots, 4\} = \{0,001; 0,01; 0,05; 0,01; 0,001\}$  [kg];
- $\{K_i, i = 0, \dots, 4\} = \{30000; 5000; 1500; 5000; 30000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i = 0, \dots, 4\} = \{3000; 500; 150; 500; 3000\}$  [N·s/m];
- $P_{zew} = 0$ ;
- krok całkowania  $\Delta t = 10^{-8}$  s.

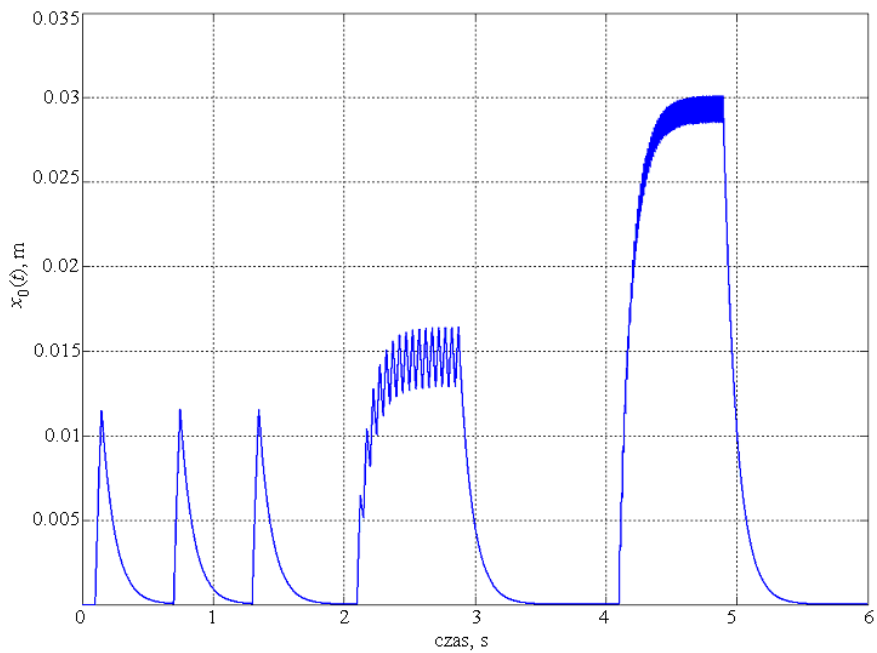
Do symulacji skurczów koncentrycznych zadano następujące siły wewnętrzne  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$  i  $P_3^w(t)$  [N]:

$$P_1^w(t) = P_3^w(t) = \begin{cases} 15 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,1) - \sigma_{HV}(t-0,15) + \sigma_{HV}(t-0,7) - \\ - \sigma_{HV}(t-0,75) + \sigma_{HV}(t-1,3) - \sigma_{HV}(t-1,35)] & \text{dla } t \in [0; 2) \\ \sum_{i=1}^{n=16} \left[ 15 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 2,1 - \frac{i-1}{20} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 2,1 - \frac{i-0,5}{20} \right) \right] & \text{dla } t \in [2; 4) \\ \sum_{i=1}^{n=64} \left[ 30 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 4,1 - \frac{i-1}{80} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 4,1 - \frac{i-0,5}{80} \right) \right] & \text{dla } t \in [4; 6) \end{cases}$$
  

$$P_2^w(t) = \begin{cases} 35 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,1) - \sigma_{HV}(t-0,15) + \sigma_{HV}(t-0,7) - \\ - \sigma_{HV}(t-0,75) + \sigma_{HV}(t-1,3) - \sigma_{HV}(t-1,35)] & \text{dla } t \in [0; 2) \\ \sum_{i=1}^{n=16} \left[ 35 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 2,1 - \frac{i-1}{20} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 2,1 - \frac{i-0,5}{20} \right) \right] & \text{dla } t \in [2; 4) \\ \sum_{i=1}^{n=64} \left[ 70 \cdot \sigma_{HV} \left( t - 4,1 - \frac{i-1}{80} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \cdot \sigma_{HV} \left( t - 4,1 - \frac{i-0,5}{80} \right) \right] & \text{dla } t \in [4; 6) \end{cases}$$

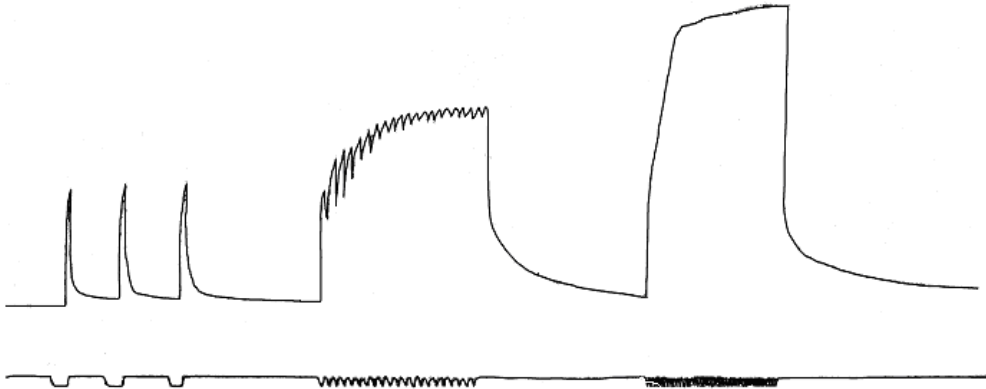


Rys. 4.36. Zasymulowane przebiegi położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów modelu mięśnia



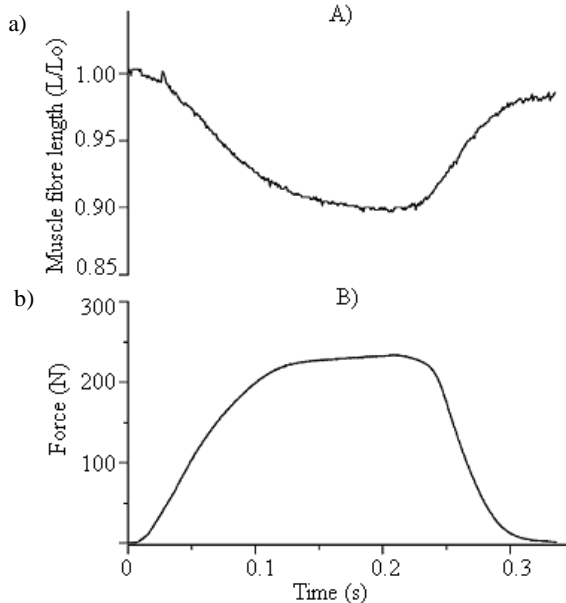
Rys. 4.37. Zasymulowany przebieg przemieszczenia przyczepu modelu mięśnia





Rys. 4.38. Doświadczalnie uzyskany przebieg przemieszczenia przyczepu mięśnia rzeczywistego [47]

Druga weryfikacja polegała na porównywaniu jakościowym uzyskanego doświadczalnie skurczu izometrycznego mięśnia indyka (rys. 4.39) [137] i zasymulowanych skurczy izometrycznych opisanych w p. 4.1.3 i p. 4.1.4. Podczas rejestracji doświadczalnego przebiegu skurczu izometrycznego długość włókien mięśniowych mierzono za pomocą wszczepionych kryształów naddźwiękowych, zaś siłę na przyczepie ścięgna mięśnia – za pomocą dynamometru przyklejonego do tego ścięgna.



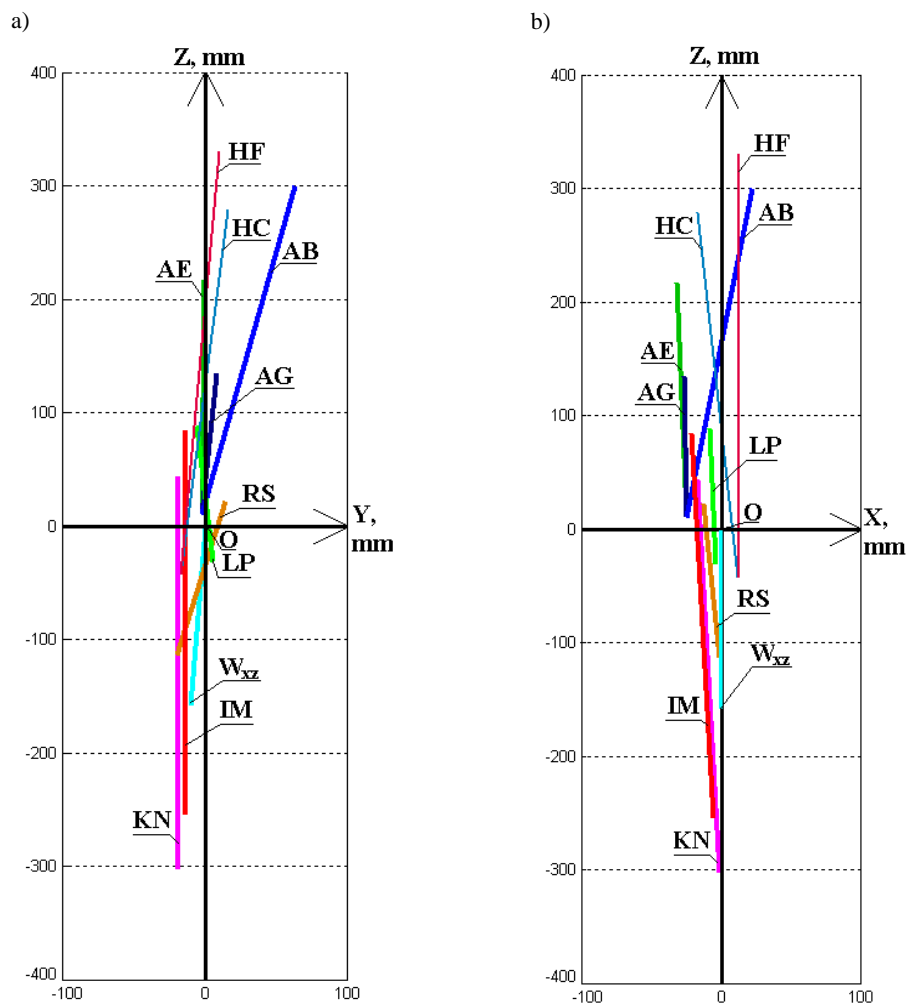
Rys. 4.39. Przykład skurczu izometrycznego mięśnia indyka:

- a) przebieg przemieszczenia przyczepu mięśnia podany w postaci stosunku długości włókien brzośca mięśnia przebywającego w skurczu do długości tych włókien przed skurczem ( $L/L_0$ );
- b) przebieg siły rozwijanej na ścięgnie przyczepu mięśnia [137]

## 4.2. Zespół mięśni układu ramię-przedramię

### 4.2.1. Dane wejściowe

Na podstawie danych przedstawionych w [53, 55] przyjęto współrzędne przyczepów i początków mięśni prawej kończyny górnej, której staw łokciowy znajduje się w stanie całkowitego wyprostowania. Założono, że przedramię jest zupełnie odwrócone a dłoń ręki jest otwarta do przodu. Dane te przyjęto, jako zbiór współrzędnych przyczepów i początków mięśni początkowego globalnego nieruchomego układu współrzędnych XYZ, którego początek umieszczono w środku obrotu połączenia ramię-kość łokciowa (rys. 4.40.a, rys. 4.40.b i tab. 4.2) [53]. Kierunki poszczególnych osi wybrano zgodnie z opisem podanym w p. 3.2.



Rys. 4.40. Rozmieszczenie mięśni prawej kończyny górnej znajdującej w pozycji początkowej:  
 a) płaszczyzna czołowa YZ (początkowy i zmodyfikowany globalny nieruchomy układ współrzędnych XYZ), b) płaszczyzna strzałkowa XZ (początkowy globalny nieruchomy układ współrzędnych XYZ)

Tablica 4.2

Współrzędne przyczepów i początków mięśni początkowego oraz modyfikowanego nieruchomego globalnego układu współrzędnych XYZ

Nazwa mięśnia (symbol mięśnia i oznaczenie jego siły kurczliwej $P_{kurcz_i}$ )	Współrzędne początkowego globalnego nieruchomego układu współrzędnych XYZ: początek mięśnia [X; Y; Z] przyczep mięśnia [X; Y; Z] [mm]	Współrzędne zmodyfikowanego globalnego nieruchomego układu współrzędnych XYZ: początek mięśnia [X; Y; Z] przyczep mięśnia [X; Y; Z] [mm]
Głowa boczna mięśnia trójkątowego ramienia (AE, $P_{kurcz_8}$ )	[-31,92; -0,34; 216,22] [-24,89; -2,60; 9,65]	[-18,07; -0,34; 216,22] [-11,04; -2,60; 9,65]
Głowa długa mięśnia trójkątowego ramienia (AB, $P_{kurcz_7}$ )	[22,14; 63,59; 300,09] [-24,89; -2,60; 9,65]	[35,99; 63,59; 300,09] [-11,04; -2,60; 9,65]
Głowa przyśrodkowa mięśnia trójkątowego ramienia (AG, $P_{kurcz_9}$ )	[-26,27; 8,11; 133,85] [-24,89; -2,60; 9,65]	[-12,42; 8,11; 133,85] [-11,04; -2,60; 9,65]
Mięsień prostownik promieniowy długi nadgarstka (KN, $P_{kurcz_2}$ )	[-17,12; -18,87; 43,49] [-0,92; -19,51; -302,99]	[-3,27; -18,87; 43,49] [12,93; -19,51; -302,99]
Mięsień ramiennie-promieniowy (IM, $P_{kurcz_1}$ )	[-21,06; -13,86; 83,87] [-5,74; -14,08; -254,95]	[-7,21; -13,86; 83,87] [8,11; -14,08; -254,95]
Mięsień nawrotny obły (RS, $P_{kurcz_4}$ )	[-12,66; 14,83; 21,53] [-1,22; -19,88; -114,41]	[1,19; 14,83; 21,53] [12,63; -19,88; -114,41]
Mięsień ramienny (LP, $P_{kurcz_3}$ )	[-8,16; -5,55; 87,86] [-3,67; 5,61; -31,17]	[5,69; -5,55; 87,86] [10,18; 5,61; -31,17]
Głowa krótka mięśnia dwugłowego ramienia (HF, $P_{kurcz_5}$ )	[13,01; 9,80; 329,94] [11,82; -17,21; -42,88]	[26,86; 9,80; 329,94] [25,67; -17,21; -42,88]
Głowa długa mięśnia dwugłowego ramienia (HC, $P_{kurcz_6}$ )	[-16,89; 15,90; 278,69] [11,82; -17,21; -42,88]	[-3,04; 15,90; 278,69] [25,67; -17,21; -42,88]

W [53, 55] nie podano danych o charakterystykach bezwładnościowych oraz danych niezbędnych do oszacowania położenia środków ciężkości poszczególnych części ciała. Wyznaczono je zatem metodami przybliżonymi. W celu uzyskania charakterystyk bezwładnościowych dla ciała płci męskiej o masie  $m = 84$  kg i wysokości  $LL = 185$  cm z przedramieniem o długości 26,5 cm i ręką o długości 18 cm zastosowano metodę opisaną w [15]. Uzyskano następujące dane liczbowe:  $J_y = 0,059745$  kg·m<sup>2</sup>,  $G_m = 1,549$  kg · 9,80665 m/s = 15,1905 N,  $OW_{xz} = 0,1589$  m.

Współrzędne początkowe środka ciężkości struktury ramię-przedramię oszacowano jako  $W_{xz} = \{x_{Wxz}; y_{Wxz}; z_{Wxz}\} = \{0; -0,01152; -OW_{xz}\}$ , [m], gdzie współrzędna  $y_{Wxz}$  jest równa połowie odcinka leżącego na osi poprzecznej ciała, łączącego początek układu kości łokciowej z początkiem układu kości promieniowej [53].

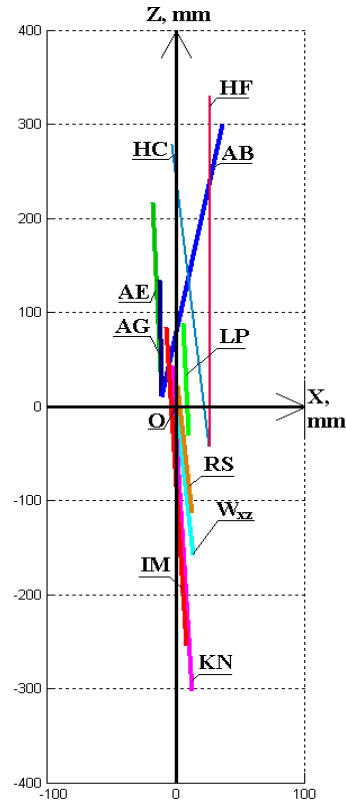
Z analizy modelu zespołu mięśni (rys. 4.40.b) wynika, iż tak wybrane położenie początku  $O$  globalnego układu współrzędnych  $XYZ$  oraz początkowy kąt obrotu struktury przedramię-ręka równy  $\alpha_0 = 0^\circ$  (kąt zawarty między osią  $Z$  a promieniem  $OW_{xz}$ , na końcu którego znajduje się środek ciężkości struktury przedramię-ręka  $mg$ ) przyczyniają się do niewłaściwego zachowania mięśni-zginaczy  $LP$ ,  $IM$ ,  $KN$   $RS$ . W tak wybranym układzie współrzędnych wspomniane mięśnie będą funkcjonować jako prostowniki stawu łokciowego, co jest sprzeczne z prawidłową fizjologią tego stawu. Ponadto przy pełnym wyproście zdrowej kończyny górnej kąt  $\alpha_0$  nigdy nie osiąga wartości zerowej. W celu zapewnienia prawidłowej fizjologii stawu łokciowego przesunięto początek globalnego układu współrzędnych  $XYZ$  w kierunku ujemnych wartości osi  $X$  o wielkość, która jest równa  $OW_{xz} \cdot \sin(5^\circ) \approx 0,013859$  m. Otrzymano zmodyfikowany globalny nieruchomy układ współrzędnych  $XYZ$  (rys. 4.41 i tab. 4.2). Warto zwrócić uwagę, iż obrót struktury przedramię-ręka powinien odbywać się w płaszczyźnie strzałkowej  $YZ$ , która jest obrócona w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara o kąt  $\arctg\left(\frac{0,040203}{0,999192}\right) \approx 2^\circ$  [53]. Ze względu na bardzo małą wartość tego kąta w modelu zespołu mięśni ramię-przedramię nie uwzględniono takiego obrotu.

Do symulacji obrotu przedramienia utworzono trzy modele:

- model 3D mięśni rzeczywistych,
- model 3D mięśni hipotetycznych,
- model 2D mięśni hipotetycznych.

W modelu 3D mięśni rzeczywistych współczynniki masowe każdego  $i$ -tego mięśnia  $m_i$  oszacowano na podstawie danych liczbowych podanych w tab. 4.3, wg metody opisanej w p. 3.1.5.1. Dane o objętości mięśni, optymalnych długościach brzuśców  $L_0^m$ , optymalnych długościach ścięgien  $L_s^t$  oraz  $PCSA$  zaczerpnięto z [55, 76, 115], zaś dane o średnicach ścięgien  $D_{sc}$  z [91]. Należy zwrócić uwagę, iż za pomocą danych  $L_0^m$  i  $L_s^t$  nie można określić dokładnej długości brzuśców, ścięgien początków i ścięgien przyczepów, ponieważ danych tych nie uzyskano dla zespołu mięśni podanego w [55]. Z tego względu do obliczenia sumarycznej długości ścięgna początku i przyczepu każdego składowego mięśnia wprowadzono współczynnik  $L_{sc}$  (tab. 4.3). W tab. 4.4.a podano zbiór współczynników masowych  $\{m_i, i = 0, \dots, 4\}$ , sztywności  $\{K_i, i = 0, \dots, 4\}$  i tłumienia  $\{L_i, i = 0, \dots, 4\}$ , które zastosowano do opisu właściwości dynamicznych każdego  $i$ -tego mięśnia modelu 3D mięśni rzeczywistych.

W celu wyznaczenia wpływu charakterystyk masowo-sprężysto-tłumiących mięśni na zachowanie modelu zespołu mięśni utworzono dodatkowe dwa modele hipotetyczne: 3D i 2D mięśni hipotetycznych. Każdy z nich składa się z jednakowych hipotetycznych modeli mięśni, które opisano parametrami podanymi w tab. 4.4.b (dla modelu 3D mięśni hipotetycznych) i tab. 4.4.c (dla modelu 2D mięśni hipotetycznych).



Rys. 4.41. Płaszczyzna strzałkowa  $XZ$  prawej kończyny górnej znajdującej w pozycji początkowej (zmodyfikowany globalny nieruchomy układ współrzędnych  $XYZ$ )

W czasie rozwiązywania prostego zadania dynamiki zarówno dla 3D modelu mięśni hipotetycznych, jak i 2D modelu mięśni hipotetycznych uzyskano nieprawidłowe przebiegi przemieszczeń punktów czterech składowych mięśni (*KN*, *RS*, *HF* i *HC*). Przebiegi te wykazywały nadmierne odkształcenia fragmentów ich brzośców i dlatego zmieniono wartości współczynników  $L_{sc}$  wskazanych mięśni.

Tablica 4.3

Dane mięśni rzeczywistych prawej kończyny górnej

Mięsień	Objętość [cm <sup>3</sup> ]	$L_0^m$ [cm]	$L_s^t$ [cm]	PCSA [cm <sup>2</sup> ]	$D_{sc}$ [mm]	$L_{sc} = \frac{L_s^t}{L_s^t + L_0^m}$ [-]
<b>AE</b>	237,28	6,17	19,67	38,45	6	0,76
<b>AB</b>	290,67	15,24	19,05	19,07	6	0,56
<b>AG</b>	92,04	4,90	12,19	18,78	6	0,70
<b>KN</b>	72,87	8,96	26,80	8,13	4	0,75
<b>IM</b>	83,19	27,03	6,04	3,08	4	0,18
<b>RS</b>	80,41	4,48	11,58	17,96	4	0,72
<b>LP</b>	143,70	21,20	11,60	14,40	4	0,35
<b>HF</b>	182,92	13,07	22,98	13,98	5	0,64
<b>HC</b>	182,92	15,36	22,93	11,91	5	0,60

Tablica 4.4.a

Współczynniki masowe, tłumienia i sprężystości składowych mięśni rzeczywistych modelu 3D

Mięsień	$\{m_i, i = 0, \dots, 4\}$ [g]	$\{L_i, i = 0, \dots, 4\}$ [N·s/m]	$\{K_i, i = 0, \dots, 4\}$ [N/m]
<b>AE</b>	{1,658, 15,971, 205,338, 15,971, 3,316}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}
<b>AB</b>	{1,783, 20,209, 250,253, 20,209, 3,565}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}
<b>AG</b>	{0,921, 6,362, 79,315, 6,362, 1,842}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}
<b>KN</b>	{1,220, 5,106, 62,659, 5,106, 2,441}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}
<b>IM</b>	{0,286, 6,285, 70,619, 6,285, 0,573}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}
<b>RS</b>	{0,475, 5,420, 69,703, 5,420, 0,951}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}
<b>LP</b>	{0,196, 9,720, 124,261, 9,720, 0,393}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}
<b>HF</b>	{1,754, 12,792, 157,336, 12,792, 3,507}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}
<b>HC</b>	{1,427, 12,768, 157,384, 12,768, 2,855}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}

**Tablica 4.4.b**

Współczynniki masowe, tłumienia i sprężystości składowych mięśni hipotetycznych modelu 3D

Mięsień	$\{m_i, i = 0, \dots, 4\}$ [kg]	$\{L_i, i = 0, \dots, 4\}$ [N·s/m]	$\{K_i, i = 0, \dots, 4\}$ [N/m]	$L_{sc}$ , [-]
<b>AE</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,76
<b>AB</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,56
<b>AG</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,70
<b>KN</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,40
<b>IM</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,18
<b>RS</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,40
<b>LP</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,35
<b>HF</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,30
<b>HC</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,30

**Tablica 4.4.c**

Współczynniki masowe, tłumienia i sprężystości składowych mięśni hipotetycznych modelu 2D

Mięsień	$\{m_i, i = 0, \dots, 4\}$ [kg]	$\{L_i, i = 0, \dots, 4\}$ [N·s/m]	$\{K_i, i = 0, \dots, 4\}$ [N/m]	$L_{sc}$ , [-]
<b>AE</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,76
<b>AB</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,56
<b>AG</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,70
<b>KN</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,40
<b>IM</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,18
<b>RS</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,40
<b>LP</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,35
<b>HF</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,30
<b>HC</b>	{0,01, 0,1, 0,3, 0,1, 0,01}	{3000, 500, 150, 500, 3000}	{30000, 5000, 1500, 5000, 30000}	0,30

### 4.2.2. Symulacja obrotu przedramienia

W niniejszym podpunkcie przedstawiono wyniki symulacji rozwiązania prostego zadania dynamiki. Obrót przedramienia względem nieruchomego ramienia zachodzi dzięki generowaniu przez elementy kurczliwe mięśni następujących sił wewnętrznych, [N]:

$$P_{1\_1}^w(t) = P_{3\_1}^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (t < 0,1) \vee \left[ (t \geq 0,1) \wedge \left( \alpha(t) < \frac{3\pi}{4} \right) \right] \vee (t > 1) \\ 60 & \text{dla } t \in [0,1; 0,6) \wedge \left[ \alpha(t) \geq \frac{3\pi}{4} \right] \\ 5 & \text{dla } t \in [0,6; 1) \end{cases}$$

$$P_{1\_2}^w(t) = P_{3\_2}^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (t < 0,1) \vee \left[ (t \geq 0,1) \wedge \left( \alpha(t) < \frac{3\pi}{4} \right) \right] \vee (t > 1) \\ 60 & \text{dla } t \in [0,1; 0,6) \wedge \left[ \alpha(t) \geq \frac{3\pi}{4} \right] \\ 5 & \text{dla } t \in [0,6; 1) \end{cases}$$

$$P_{1\_3}^w(t) = P_{3\_3}^w(t) = 50 \cdot [\sigma_{HV}(t) - \sigma_{HV}(t-0,1)] + 60 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,1) - \sigma_{HV}(t-0,6)] + \\ + 20 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,6) - \sigma_{HV}(t-0,8)] + 10 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,8) - \sigma_{HV}(t-1)],$$

$$P_{1\_4}^w(t) = P_{3\_4}^w(t) = 30 \cdot [\sigma_{HV}(t) - \sigma_{HV}(t-0,6)] + 20 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,6) - \sigma_{HV}(t-0,8)] + \\ + 10 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,8) - \sigma_{HV}(t-1)],$$

$$P_{1\_5}^w(t) = P_{3\_5}^w(t) = 60 \cdot [\sigma_{HV}(t) - \sigma_{HV}(t-0,1)] + 80 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,1) - \sigma_{HV}(t-0,6)] + \\ + 30 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,6) - \sigma_{HV}(t-0,8)] + 20 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,8) - \sigma_{HV}(t-1)],$$

$$P_{1\_6}^w(t) = P_{3\_6}^w(t) = 60 \cdot [\sigma_{HV}(t) - \sigma_{HV}(t-0,1)] + 80 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,1) - \sigma_{HV}(t-0,6)] + \\ + 30 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,6) - \sigma_{HV}(t-0,8)] + 20 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,8) - \sigma_{HV}(t-1)],$$

$$P_{1\_7}^w(t) = P_{3\_7}^w(t) = 80 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,5) - \sigma_{HV}(t-0,6)] + 30 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,6) - \sigma_{HV}(t-0,8)],$$

$$P_{1\_8}^w(t) = P_{3\_8}^w(t) = 60 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,5) - \sigma_{HV}(t-0,6)] + 20 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,6) - \sigma_{HV}(t-0,8)],$$

$$P_{1\_9}^w(t) = P_{3\_9}^w(t) = 60 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,5) - \sigma_{HV}(t-0,6)] + 20 \cdot [\sigma_{HV}(t-0,6) - \sigma_{HV}(t-0,8)],$$

$$P_{2\_1}^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (t < 0,1) \vee \left[ (t \geq 0,1) \wedge \left( \alpha(t) < \frac{3\pi}{4} \right) \right] \vee (t > 1) \\ 120 & \text{dla } t \in [0,1; 0,6) \wedge \left[ \alpha(t) \geq \frac{3\pi}{4} \right] \\ 10 & \text{dla } t \in [0,6; 1) \end{cases}$$

$$P_{2\_2}^w(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (t < 0,1) \vee \left[ (t \geq 0,1) \wedge \left( \alpha(t) < \frac{3\pi}{4} \right) \right] \vee (t > 1) \\ 120 & \text{dla } t \in [0,1; 0,6) \wedge \left[ \alpha(t) \geq \frac{3\pi}{4} \right] \\ 10 & \text{dla } t \in [0,6; 1) \end{cases}$$

$$P_{2\_3}^w(t) = 100 \cdot [\sigma_{HV}(t) - \sigma_{HV}(t - 0,1)] + 120 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,1) - \sigma_{HV}(t - 0,6)] + \\ + 40 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,6) - \sigma_{HV}(t - 0,8)] + 20 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,8) - \sigma_{HV}(t - 1)],$$

$$P_{2\_4}^w(t) = 60 \cdot [\sigma_{HV}(t) - \sigma_{HV}(t - 0,6)] + 40 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,6) - \sigma_{HV}(t - 0,8)] + \\ + 20 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,8) - \sigma_{HV}(t - 1)],$$

$$P_{2\_5}^w(t) = 120 \cdot [\sigma_{HV}(t) - \sigma_{HV}(t - 0,1)] + 160 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,1) - \sigma_{HV}(t - 0,6)] + \\ + 60 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,6) - \sigma_{HV}(t - 0,8)] + 40 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,8) - \sigma_{HV}(t - 1)],$$

$$P_{2\_6}^w(t) = 120 \cdot [\sigma_{HV}(t) - \sigma_{HV}(t - 0,1)] + 160 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,1) - \sigma_{HV}(t - 0,6)] + \\ + 60 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,6) - \sigma_{HV}(t - 0,8)] + 40 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,8) - \sigma_{HV}(t - 1)],$$

$$P_{2\_7}^w(t) = 160 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,5) - \sigma_{HV}(t - 0,6)] + 60 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,6) - \sigma_{HV}(t - 0,8)],$$

$$P_{2\_8}^w(t) = 120 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,5) - \sigma_{HV}(t - 0,6)] + 40 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,6) - \sigma_{HV}(t - 0,8)],$$

$$P_{2\_9}^w(t) = 120 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,5) - \sigma_{HV}(t - 0,6)] + 40 \cdot [\sigma_{HV}(t - 0,6) - \sigma_{HV}(t - 0,8)].$$

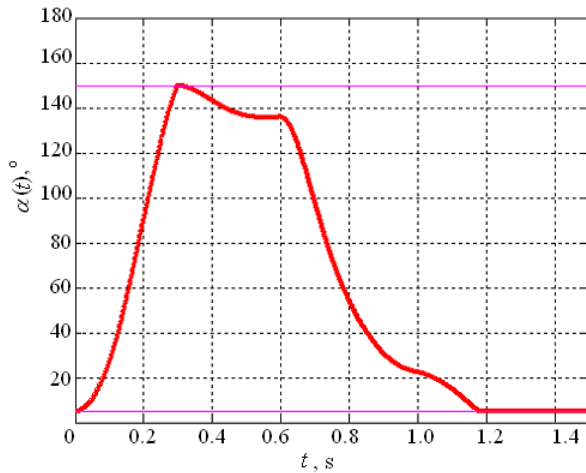
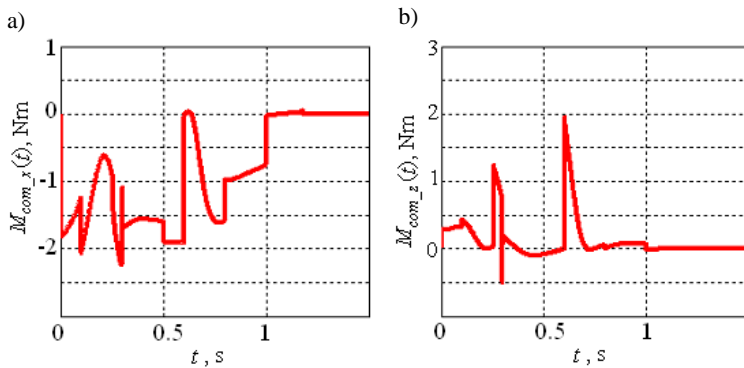
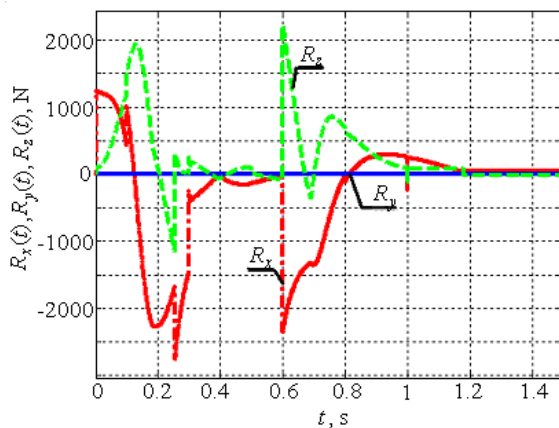
Wartość momentu zewnętrznego przyjęto zerową,  $M_{zew}(t) = 0$ .

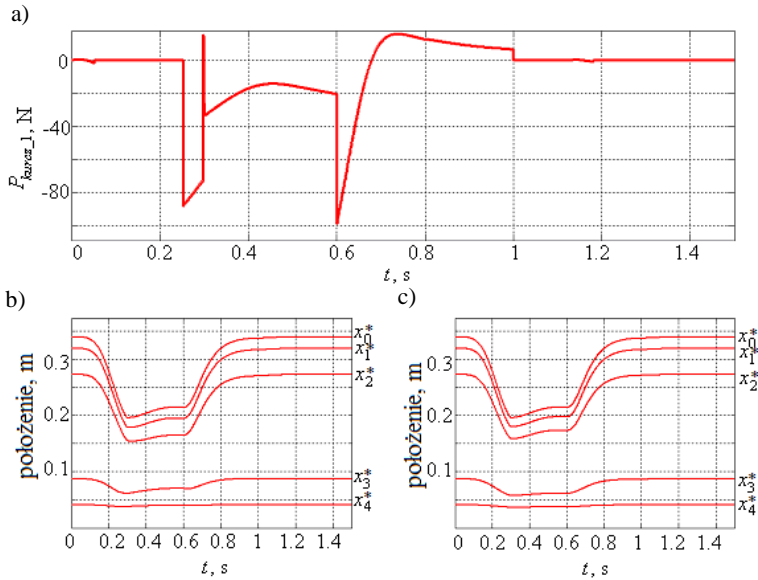
Dla modelu 3D mięśni rzeczywistych przeprowadzono obliczenia z krokiem całkowania  $\Delta t = 10^{-7}$  s, zaś dla modelu 3D mięśni hipotetycznych i modelu 2D mięśni hipotetycznych – z krokiem całkowania  $\Delta t = 10^{-6}$  s.

#### 4.2.2.1. Model 2D mięśni hipotetycznych

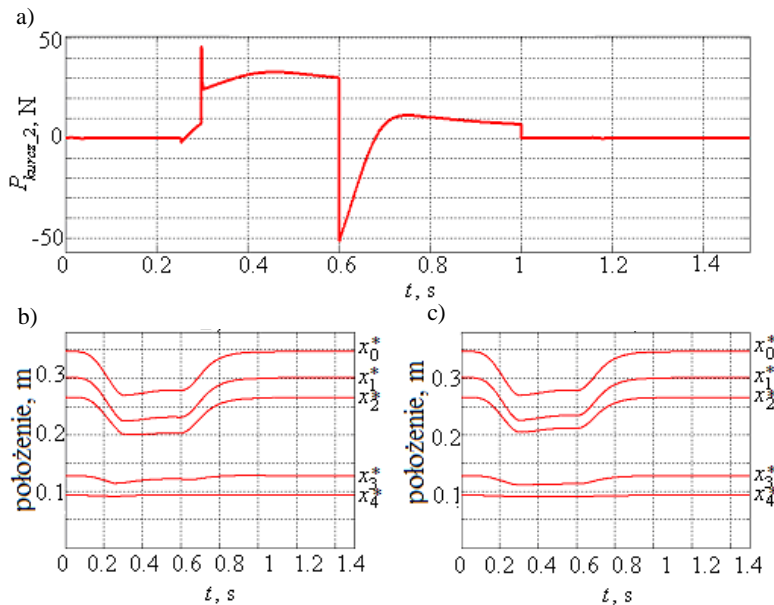
Wyniki symulacji dla modelu 2D mięśni hipotetycznych przedstawiono na kolejnych przykładach, od rys. 4.42 do rys. 4.53.



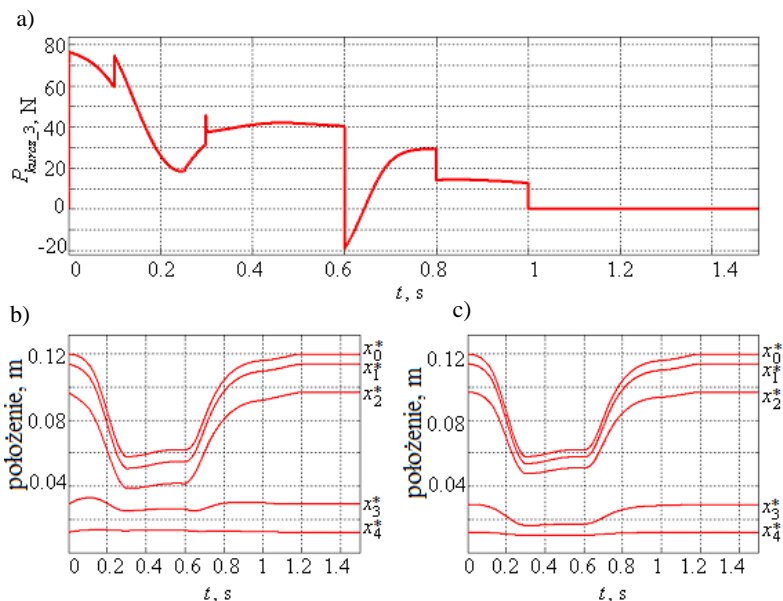
Rys. 4.42. Przebieg kąta obrotu przedramienia  $\alpha(t)$ Rys. 4.43. Przebieg momentu kompensacyjnego: a)  $M_{com\_x}(t)$ ; b)  $M_{com\_z}(t)$ Rys. 4.44. Przebieg reakcji  $R_x(t)$ ,  $R_y(t)$ ,  $R_z(t)$



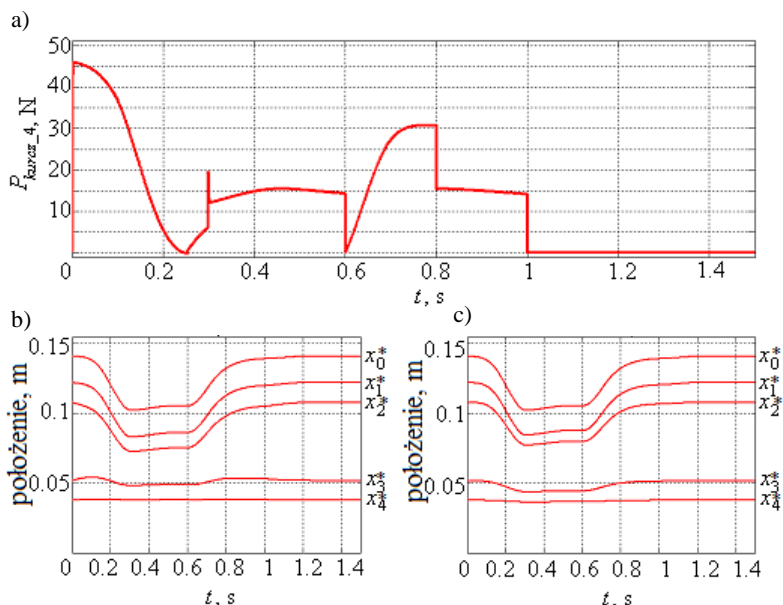
Rys. 4.45. Zachowanie modelu mięśnia *IM*: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz\_1}(t)$ ; b) przebieg położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położenia  $x_i$  ( $x_i = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



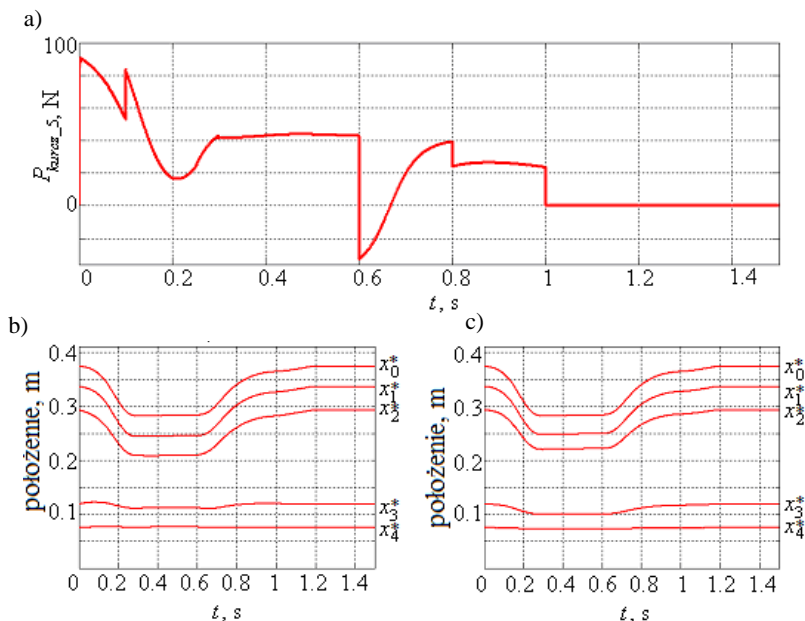
Rys. 4.46. Zachowanie modelu mięśnia *KN*: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz\_2}(t)$ ; b) przebieg położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położenia  $x_i$  ( $x_i = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



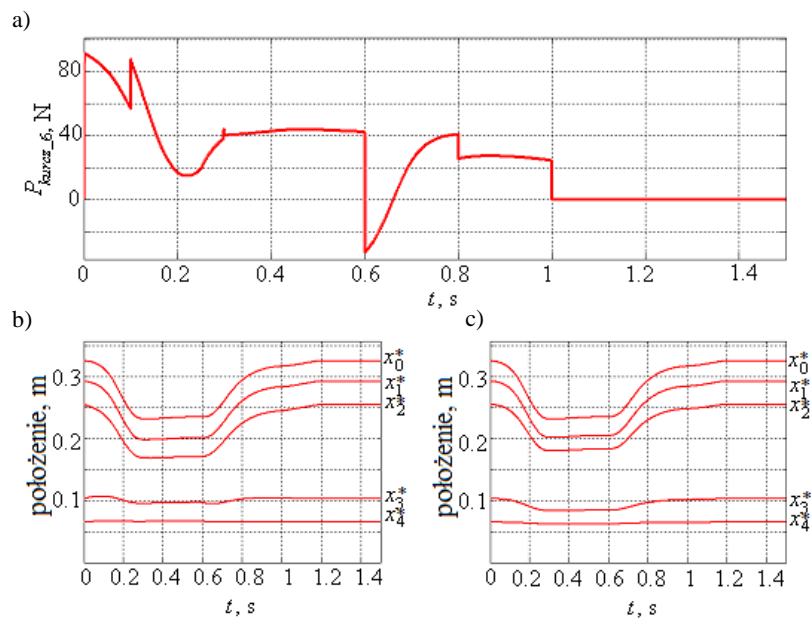
Rys. 4.47. Zachowanie modelu mięśnia LP: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_3}(t)$ ; b) przebieg położeń  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położeń  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



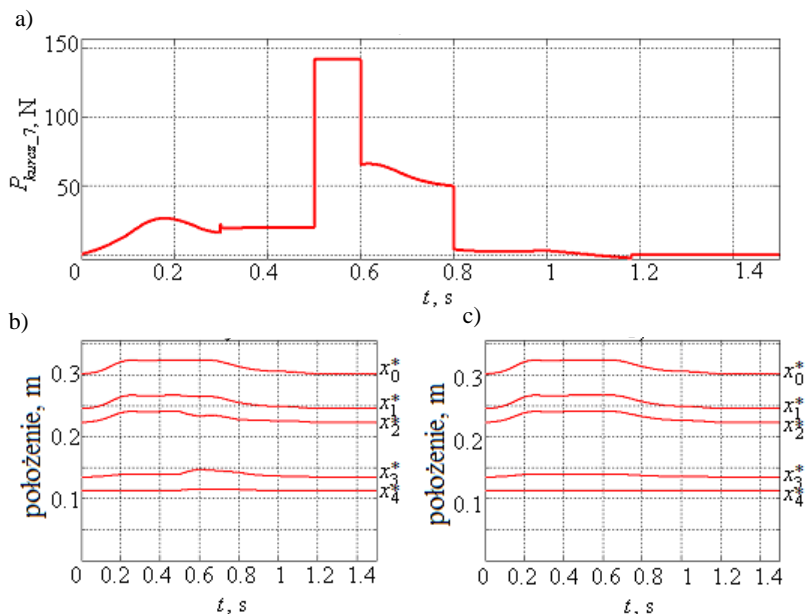
Rys. 4.48. Zachowanie modelu mięśnia RS: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_4}(t)$ ; b) przebieg położeń  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położeń  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



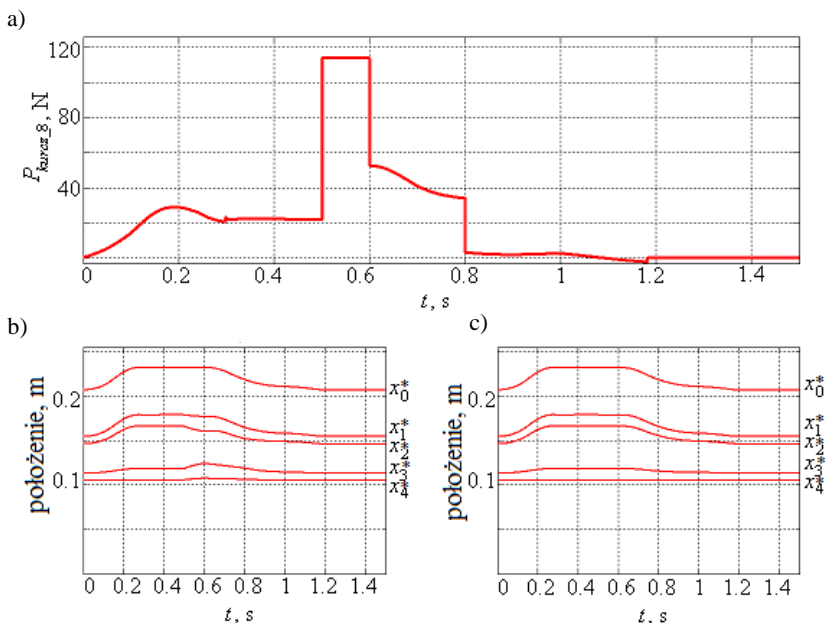
Rys. 4.49. Zachowanie modelu mięśnia *HF*: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz\_5}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i$  ( $x_i = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



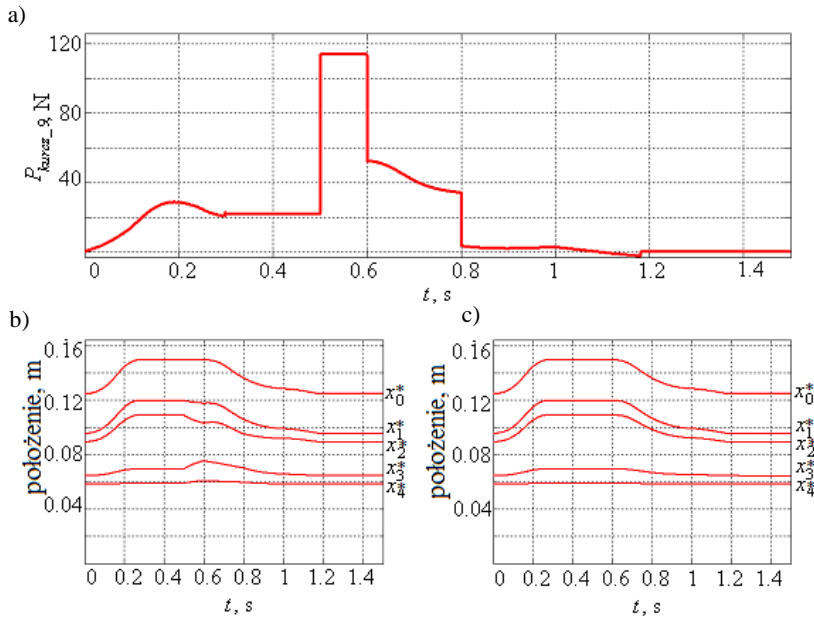
Rys. 4.50. Zachowanie modelu mięśnia *HC*: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz\_6}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i$  ( $x_i = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



Rys. 4.51. Zachowanie modelu mięśnia AB: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_7}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i$  ( $x_i = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



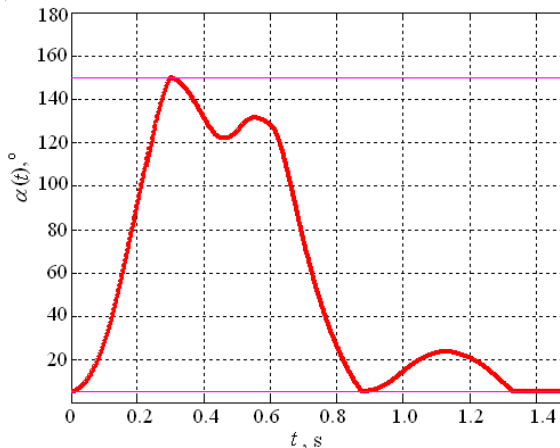
Rys. 4.52. Zachowanie modelu mięśnia AE: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_8}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i$  ( $x_i = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



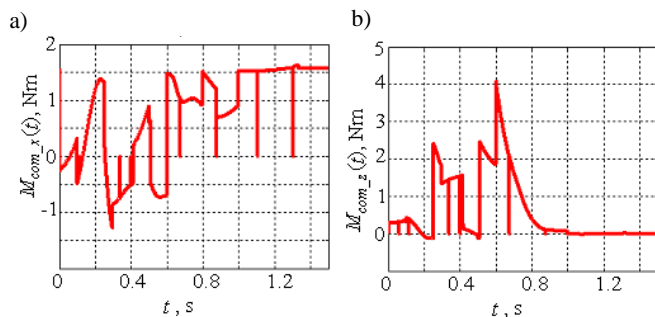
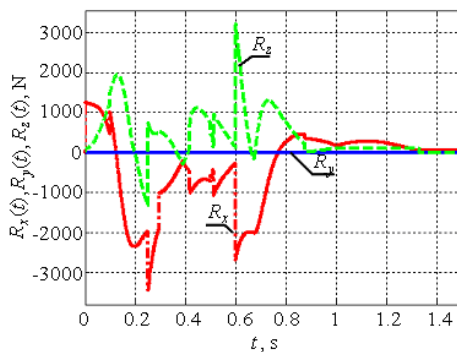
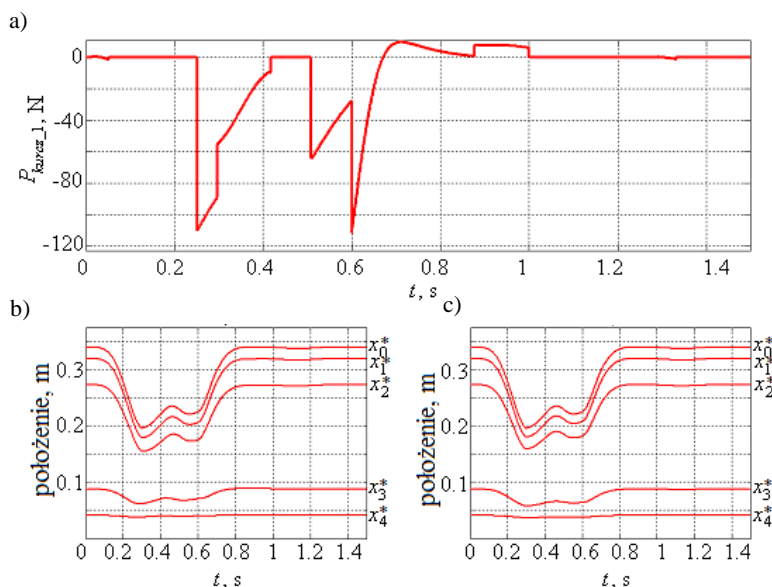
Rys. 4.53. Zachowanie modelu mięśnia AG: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz\_g}(t)$ ; b) przebieg położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położenia  $x_i$  ( $x_i = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego

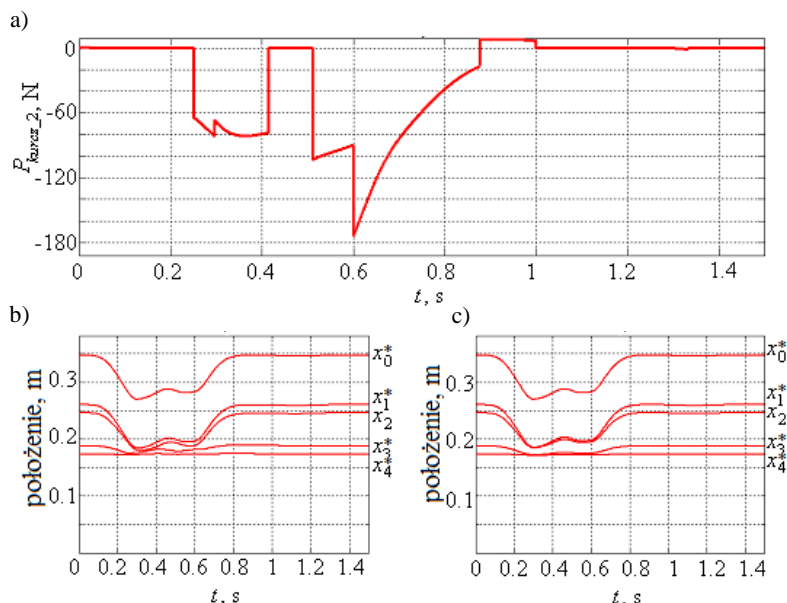
#### 4.2.2.2. Model 3D mięśni rzeczywistych

Wyniki symulacji dla modelu 3D mięśni rzeczywistych przedstawiono na kolejnych przykładach, od rys. 4.54 do rys. 4.65.

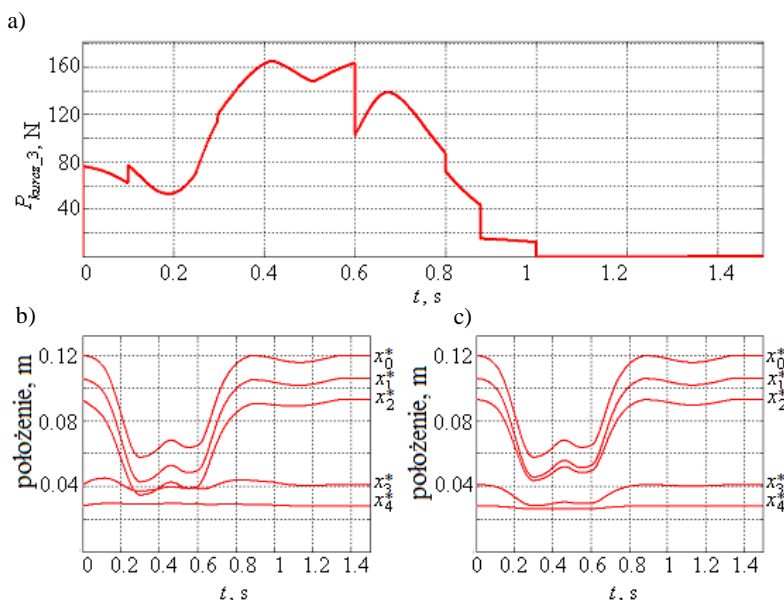


Rys. 4.54. Przebieg kąta obrotu przedramienia  $\alpha(t)$

Rys. 4.55. Przebieg momentu kompensacyjnego: a)  $M_{com_x}(t)$ , b)  $M_{com_z}(t)$ Rys. 4.56. Przebieg reakcji  $R_x(t)$ ,  $R_y(t)$ ,  $R_z(t)$ Rys. 4.57. Zachowanie mięśnia IM: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_1}(t)$ ; b) przebieg położeń  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położeń  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego

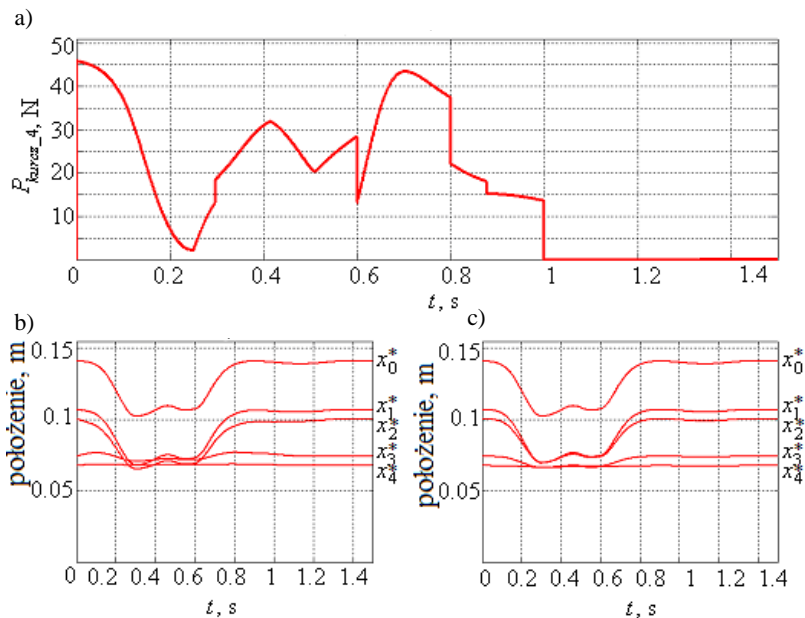


Rys. 4.58. Zachowanie modelu mięśnia KN: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz\_2}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego

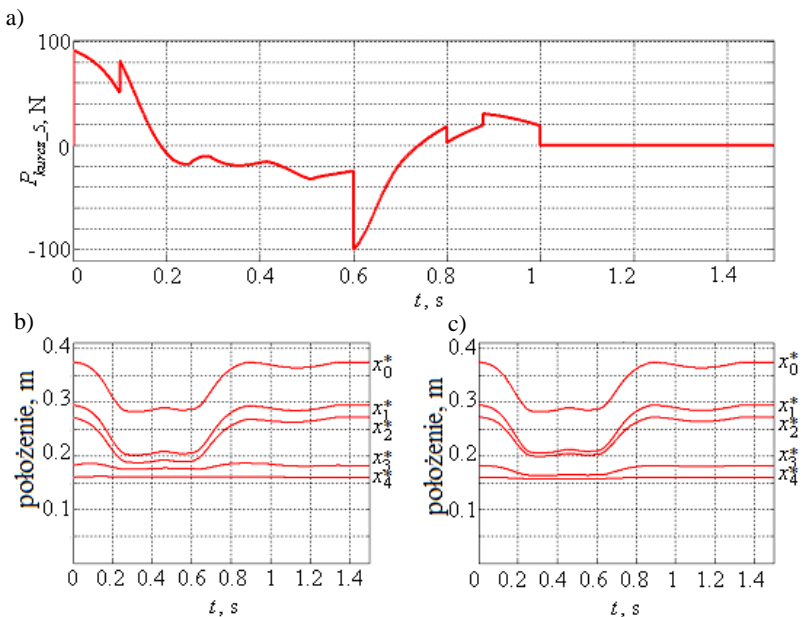


Rys. 4.59. Zachowanie modelu mięśnia LP: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz\_3}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego

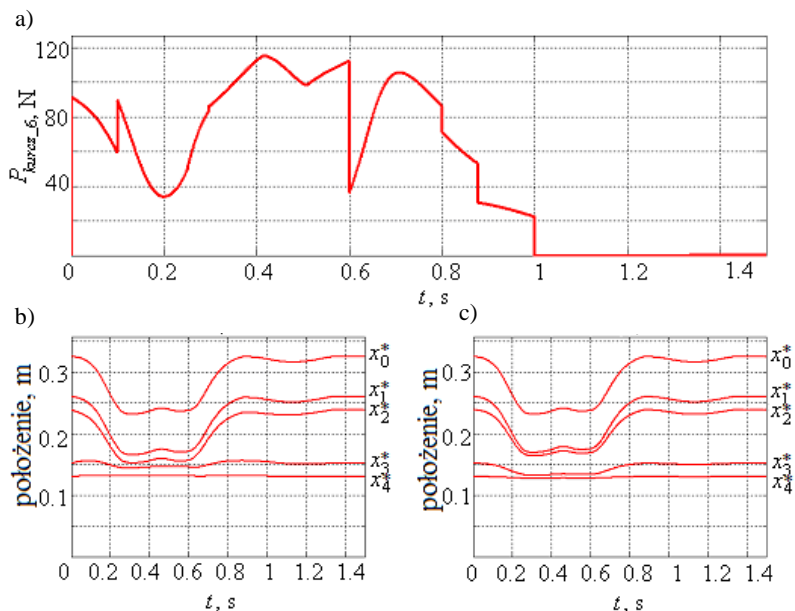




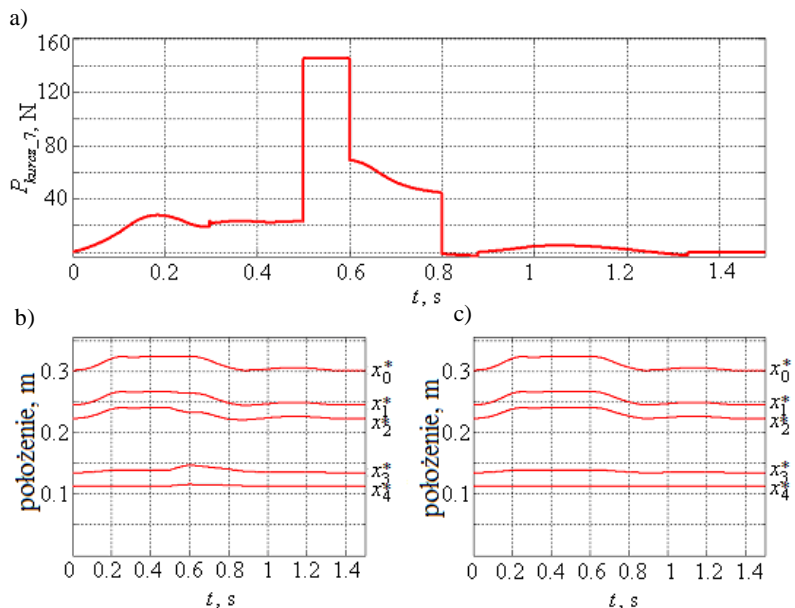
Rys. 4.60. Zachowanie modelu mięśnia RS: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_4}(t)$ ; b) przebieg położeń  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położeń  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



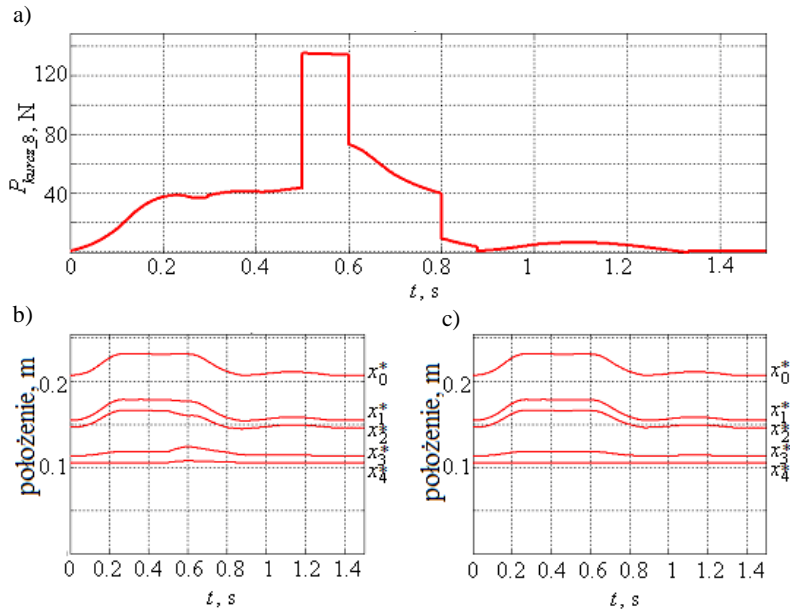
Rys. 4.61. Zachowanie modelu mięśnia HF: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_5}(t)$ ; b) przebieg położeń  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położeń  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



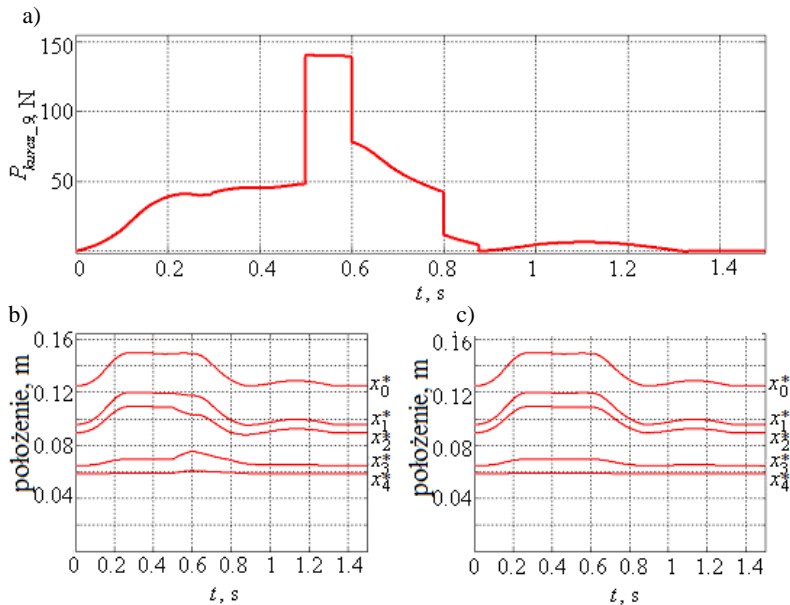
Rys. 4.62. Zachowanie modelu mięśnia HC: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz\_6}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



Rys. 4.63. Zachowanie modelu mięśnia AB: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz\_7}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



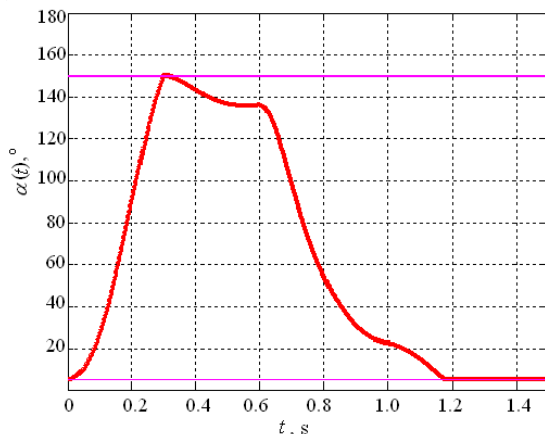
Rys. 4.64. Zachowanie modelu mięśnia AE: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz\_g}(t)$ ; b) przebieg położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



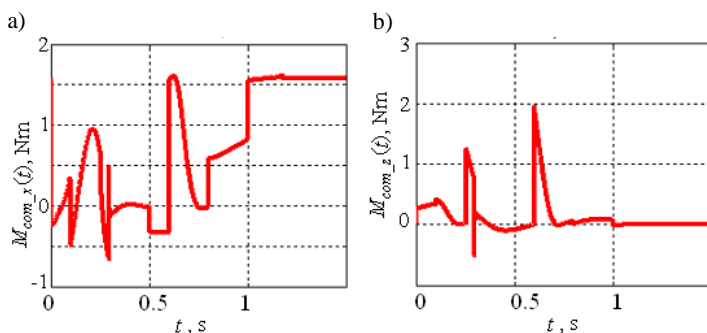
Rys. 4.65. Zachowanie modelu mięśnia AG: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz\_g}(t)$ ; b) przebieg położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego

### 4.2.2.3. Model 3D mięśni hipotetycznych

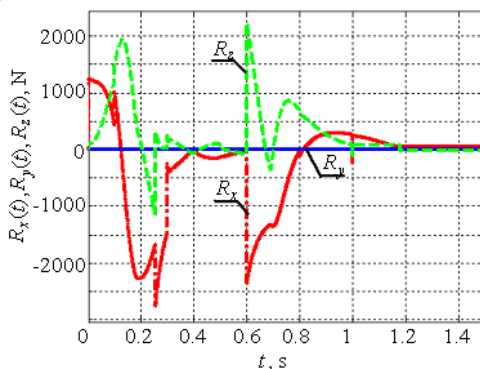
Wyniki symulacji dla modelu 3D mięśni hipotetycznych przedstawiono na kolejnych przykładach, od rys. 4.66 do rys. 4.77.



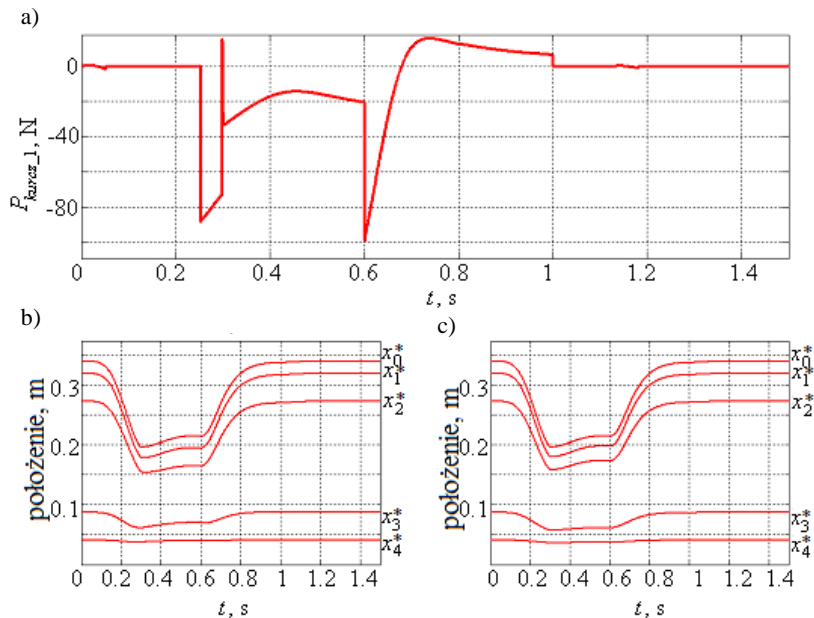
Rys. 4.66. Przebieg kąta obrotu przedramienia  $\alpha(t)$



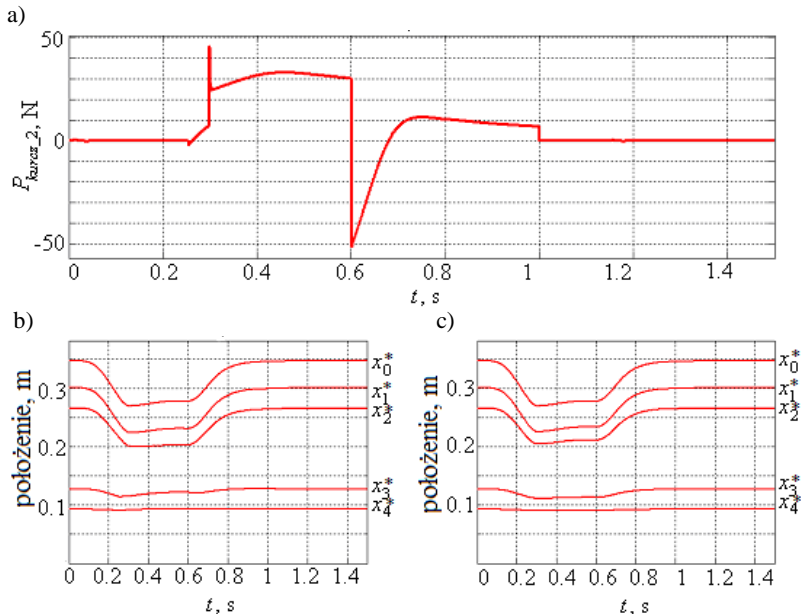
Rys. 4.67. Przebieg momentu kompensacyjnego: a)  $M_{com_x}(t)$ ; b)  $M_{com_z}(t)$



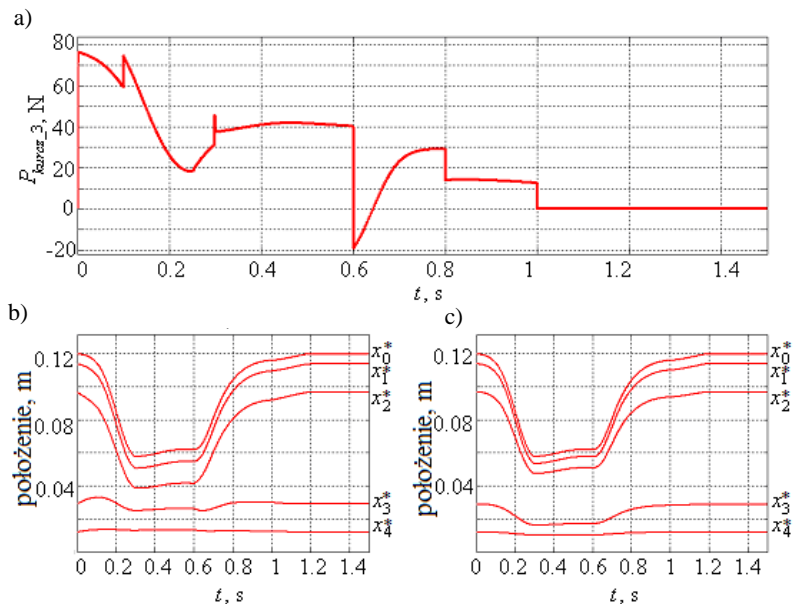
Rys. 4.68. Przebieg reakcji  $R_x(t)$ ,  $R_y(t)$ ,  $R_z(t)$



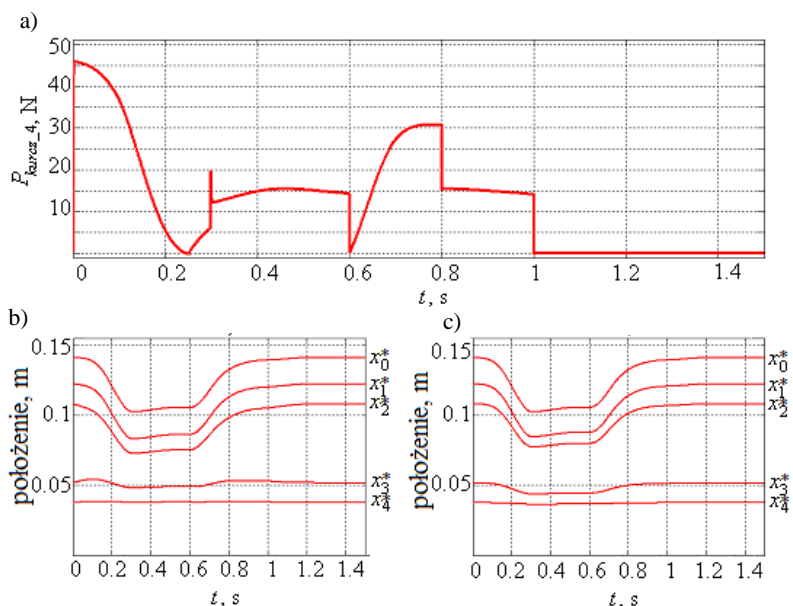
Rys. 4.69. Zachowanie modelu mięśnia *IM*: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_1}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i$  ( $x_i = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



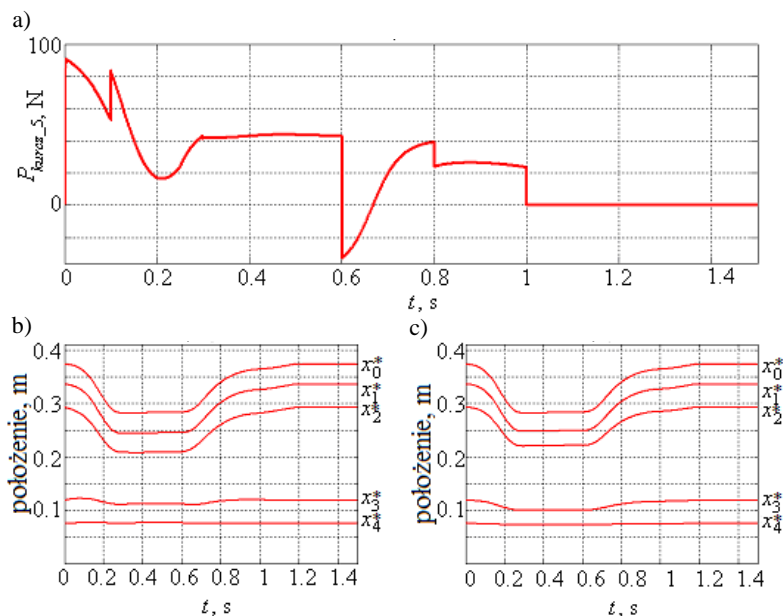
Rys. 4.70. Zachowanie modelu mięśnia *KN*: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_2}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i$  ( $x_i = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



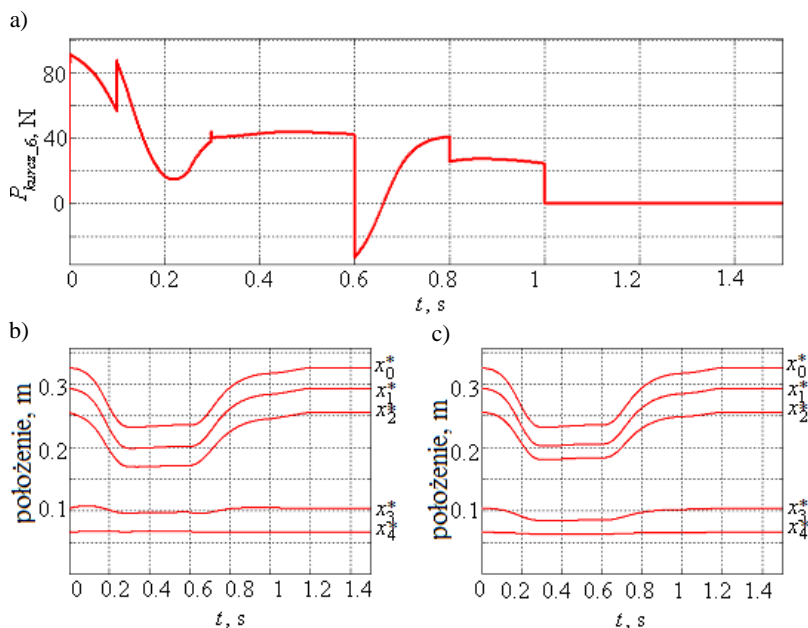
Rys. 4.71. Zachowanie modelu mięśnia LP: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_3}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



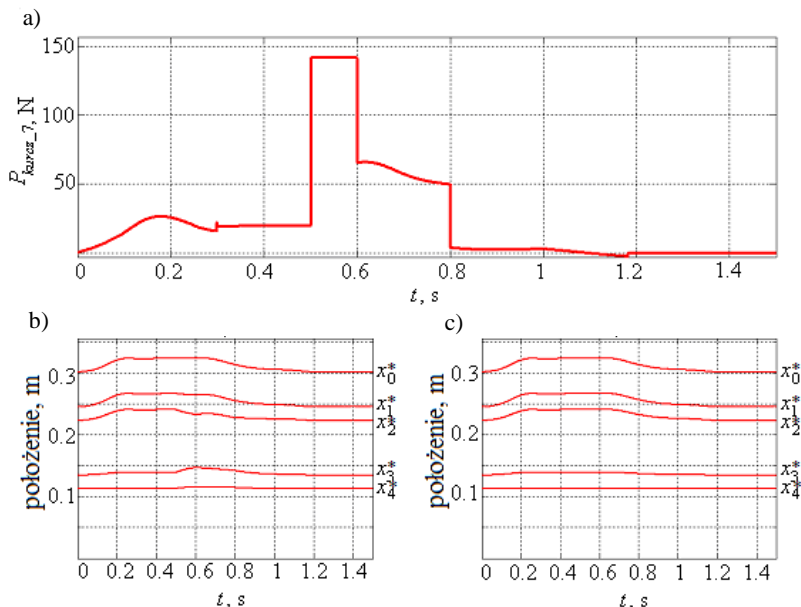
Rys. 4.72. Zachowanie modelu mięśnia RS: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_4}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



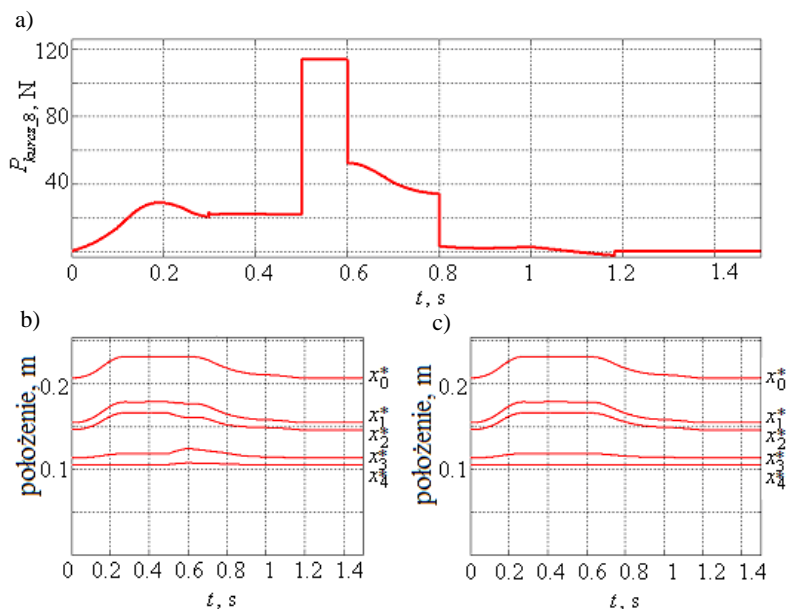
Rys. 4.73. Zachowanie modelu mięśnia HF: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_5}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



Rys. 4.74. Zachowanie modelu mięśnia HC: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_6}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego

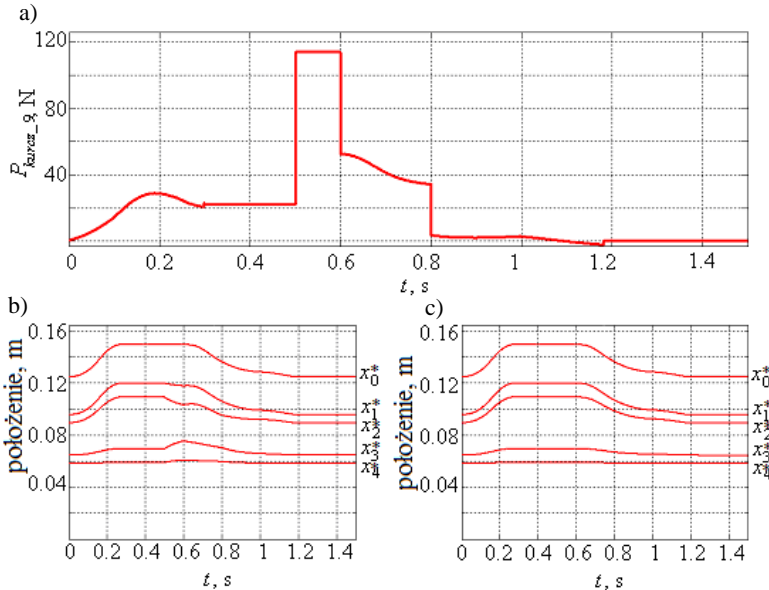


Rys. 4.75. Zachowanie modelu mięśnia AB: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_7}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego



Rys. 4.76. Zachowanie mięśnia AE: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_8}(t)$ ; b) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położen  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego





Rys. 4.77. Zachowanie modelu mięśnia AG: a) przebieg siły kurczącej mięśnia  $P_{kurcz_g}(t)$ ; b) przebieg położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia pobudzonego; c) przebieg położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia niepobudzonego

### 4.2.3. Przykład obliczeniowy zastosowania metody oszacowania sił mięśni rzeczywistego zespołu mięśniowego

W przykładzie tym oszacowano siłę  $i$ -tego mięśnia zespołu o początkowych współrzędnych przyczepu  $\{x_{in_i}, y_{in_i}, z_{in_i}\} = \{x_{in_i}[\alpha(t=0)], y_{in_i}, z_{in_i}[\alpha(t=0)]\} = \{10, 0, -10\}$ , [mm], oraz stałych współrzędnych początku  $\{x_{or_i}, y_{or_i}, z_{or_i}\} = \{0, 0, 300\}$  [mm]. Założono, iż podczas identyfikacji właściwości lepkosprężystych tego mięśnia (etap pierwszy p. 3.2.7) uzyskano następujące dane liczbowe:

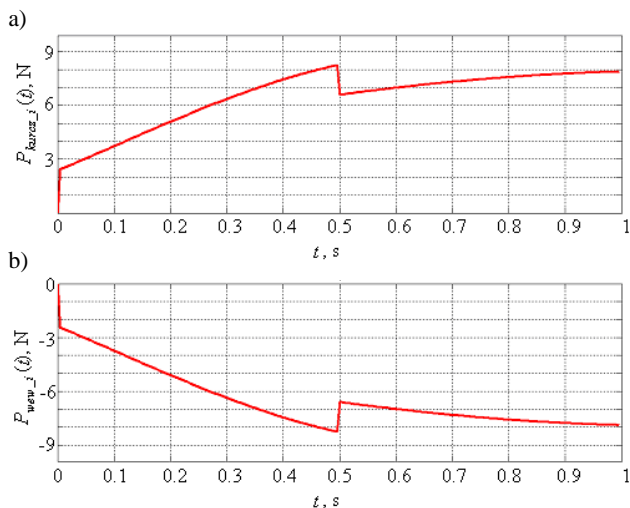
- $\{l_i(t=0), i = 0, \dots, 4\} = \{0,3; 0,255; 0,21; 0,09; 0,045\}$  [m];
- $\{m_i, i = 0, \dots, 4\} = \{0,01; 0,1; 0,3; 0,1; 0,01\}$  [kg];
- $\{K_i, i = 0, \dots, 4\} = \{31000; 5000; 1500; 5000; 31000\}$  [N/m];
- $\{L_i, i = 0, \dots, 4\} = \{3100; 500; 150; 500; 3100\}$  [N·s/m].

Kąt obrotu przedramienia  $\alpha(t)$  zadano w postaci następującej funkcji analitycznej, [rad]:

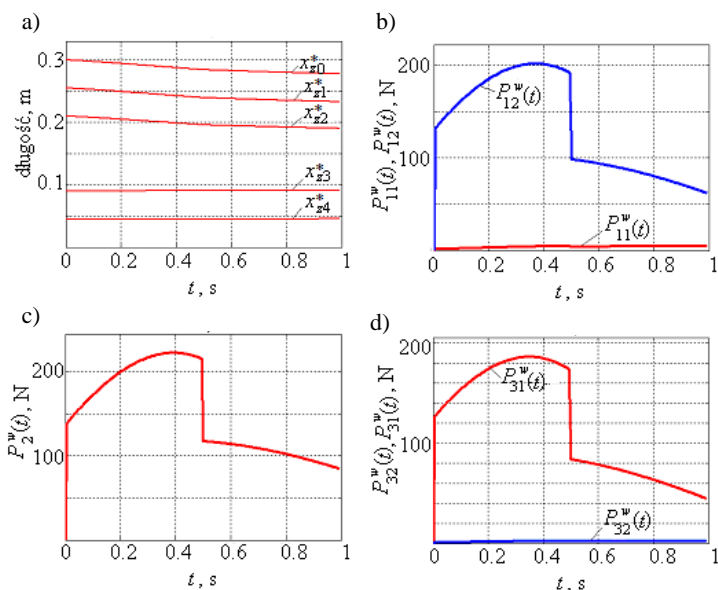
$$\alpha(t) = \left( \frac{45 \cdot \pi}{180} + t \cdot \frac{140 \cdot \pi}{180} \right) \cdot \sigma_{HV}(t) - \frac{70 \cdot \pi}{180} \cdot (t - 0,5) \cdot \sigma_{HV}(t - 0,5),$$

zaś przebiegi położenia charakterystycznych punktów badanego mięśnia:  $x_{z0} = x_{z0}[\alpha(t)]$ ,  $x_{z1} = x_{z1}(t) = 0,99 \cdot x_{z0}$ ,  $x_{z2} = x_{z2}(t) = 0,891 \cdot x_{z0}$ ,  $x_{z3} = x_{z3}(t) = 0,04455 \cdot x_{z0}$ ,  $x_{z4} = x_{z4}(t) = 0,00891 \cdot x_{z0}$ .

W oparciu o zasady podane w p. 3.2.7 oszacowano siłę kurczącą badanego mięśnia  $P_{kurcz_i}(t)$  (rys. 4.78) oraz siły wewnętrzne generowane w jego elementach siłowych  $[P_{11}^w(t), P_{12}^w(t), P_2^w(t), P_{31}^w(t), P_{32}^w(t)]$  (rys. 4.79).



Rys. 4.78. Wyniki obliczeń: a) siła kurcząca  $P_{kurcz_i}(t)$   $i$ -tego mięśnia zespołu mięśni; b) zewnętrzna siła rozciągająca  $P_{zew_i}(t)$  działająca na ten mięsień



Rys. 4.79. Wyniki identyfikacji sił wewnętrznych  $i$ -tego mięśnia zespołu:

- a) zadane przebiegi położenia  $x_i^*$  ( $x_i^* = l_i + x_i$ ,  $i = 0, \dots, 4$ ) charakterystycznych punktów mięśnia;  
 b) siły wewnętrzne  $P_{11}^w(t)$  i  $P_{12}^w(t)$ ; c) siła wewnętrzna  $P_2^w(t)$ ; d) siły wewnętrzne  $P_{31}^w(t)$  i  $P_{32}^w(t)$

#### 4.2.4. Uwagi końcowe

Na podstawie przedstawionych wyników symulacji zachowania modelu 3D mięśni rzeczywistych oraz modelu 3D mięśni hipotetycznych i modelu 2D mięśni hipotetycznych można wywnioskować, że:

- charakterystyki masowo-sprężysto-tłumiące mięśni mają znaczący wpływ zarówno na dynamikę stawu łokciowego, jak i na zachowanie poszczególnych mięśni; potwierdzeniem tego są odmienne symulacje trzech modeli zespołu mięśni, które pobudzano jednakowymi siłami wewnętrznymi;
- współdziałanie mięśni stawu łokciowego zależy zarówno od sił wewnętrznych (generowanych w elementach siłowych mięśni), jak i przyjętych/obliczonych charakterystyk bezwładnościowych struktury przedramię-ręka;
- oddziaływanie mięśni rozmieszczonych w 3D przestrzeni jest inne w porównaniu z oddziaływaniem tych mięśni rozmieszczonych w jednej płaszczyźnie (2D); świadczą o tym odmienne wyniki otrzymane dla modelu 3D mięśni hipotetycznych i modelu 2D mięśni hipotetycznych;
- duży wpływ na dynamikę stawu łokciowego mają przyjęte współrzędne przyczepów i początków mięśni, położenie środka obrotu stawu łokciowego oraz środka ciężkości struktury przedramię-ręka [124]; wniosek ten wynika z faktu, iż dane te wyznaczają czynność, jaką będą wykonywać poszczególne mięśnie, tzn. czy będą pełniły funkcje zginaczy czy prostowników.

Zaproponowany model zespołu mięśni można zweryfikować ilościowo i/lub jakościowo. Weryfikacja ilościowa polega na wyznaczeniu uchybu  $\Delta M(t)$  na podstawie równania (3.136). Jeżeli wartość uchybu jest mała, to można przyjąć, iż model zespołu mięśni uwzględnia wszystkie czynniki działające na rzeczywisty staw łokciowy w czasie badanej czynności fizjologicznej. W przypadku, gdy wartość uchybu jest duża, należy:

- uwzględnić w równaniu dynamiki (3.71) lub (3.84) wpływ momentów pochodzących od reakcji dynamicznych, sił tarcia mięśni o mięśnie i kości, oddziaływania powięzi, krzywoliniowego przebiegu włókien mięśniowych oraz innych sił wynikających z fizjologii stawu łokciowego;
- powtórzyć proces oszacowania sił mięśni rzeczywistych zespołu mięśniowego przy użyciu dokładniejszej techniki pomiarowej.

Weryfikacja jakościowa polega na porównaniu przebiegów obliczonych sił wewnętrznych składowych mięśni z pomiarami sygnału EMG na odpowiednich mięśniach rzeczywistych.

Za pomocą opracowanego i opisanego w monografii modelu zespołu mięśni można sprawdzić, czy siły kurczące obliczone techniką optymalizacyjną mogą być wygenerowane przez zespół mięśni rzeczywistych. Takie sprawdzenie jest przeprowadzane w trzech etapach:

- z przyjętego uprzednio kryterium optymalizacji wyznaczone są siły kurczące poszczególnych składowych modeli mięśni zespołu;
- dla każdego modelu mięśnia obliczane są siły wewnętrzne, które zapewniają utrzymanie przez mięsień uprzednio obliczonej siły kurczącej i odpowiadające im przebiegi położań charakterystycznych punktów;
- wnioskuje się o fizjologicznej zgodności przyjętego kryterium optymalizacji przez porównanie przebiegów przemieszczeń punktów mięśni rzeczywistych i przebiegów zasymulowanych.

## 5. PODSUMOWANIE I UWAGI KOŃCOWE

W monografii zaproponowano matematyczny model mięśnia i model zespołu mięśni układu ramię-przedramię, a także podano ogólne koncepcje sterowania tymi modelami. Zaprezentowano wyniki symulacji numerycznych zachowania modelu mięśnia i zespołu mięśnia będące podstawą do weryfikacji modeli.

Model zachowania mięśnia utworzono przyjmując założenie, że układ charakteryzujący się zróżnicowanymi właściwościami masowo-sprężysto-lepkimi i posiadający fragmenty mogące się kurczyć pod działaniem sił wewnętrznych, odzwierciedla zachowanie mięśnia rzeczywistego. Właściwości lepkosprężyste takiego modelu można oszacować za pomocą identyfikacji parametrycznej, używając danych doświadczalnych o przebiegach czasowych markerów (przyczepionych do powierzchni badanego mięśnia) i siły mierzonej za pomocą dynamometru (przymocowanego do ścięgna przyczepu). Siły wewnętrzne, działające w elementach siłowych modelu mięśnia i odzwierciedlające właściwości kurczliwe włókien mięśniowych, można oszacować podczas identyfikacji sił wewnętrznych. Pomiary sygnału EMG na wyznaczonych fragmentach brzośca badanego żywego mięśnia można zastosować do weryfikacji jakościowej obliczonych sił wewnętrznych.

W zaproponowanym modelu zachowania zespołu mięśni opisującym płaskie ruchy zginania-prostowania w stawie łokciowym układu ramię-przedramię, przy nieziennej pozycji nawracania-odwracania przedramienia, uwzględniono:

- prostoliniowe oddziaływania mięśni w przestrzeni, przy czym oddziaływanie każdego mięśnia jest opisane modelem zachowania mięśnia;
- zróżnicowane właściwości mechaniczne składowych mięśni, które można oszacować, wykonując identyfikację parametryczną;
- oddziaływanie więzadeł na granicach zakresu dopuszczalnego i zapewnienie wyłącznie płaskiego ruchu w płaszczyźnie strzałkowej;
- unikanie efektu ściskania mięśni niepobudzonych.

Ruchy przedramienia zaczynają się od położenia zrównoważonego, co pozwala na oszacowanie przyrostu sił w mięśniach, a w szczególności ich składowych pasywnych i aktywnych. Składowe te odzwierciedlają historię oddziaływania sił mięśni względem ich przyczepów do kości. Opisano metodę uwzględniania sił reakcji dynamicznych w stawie łokciowym. Zaproponowano metodę przeprowadzenia weryfikacji ilościowej, która polega na:

- porównaniu mierzonych sił na ścięgnach przyczepu za pomocą implantowanych dynamometrów i porównaniu przemieszczeń markerów umieszczonych na powierzchniach mięśni z odpowiednimi wielkościami uzyskanymi w czasie symulacji numerycznej modelu zespołu mięśni;
- oszacowanie uchybu  $\Delta M(t)$  (3.136), którego wartość jest podstawą do stwierdzenia, czy w modelu zespołu mięśni uwzględniono działanie głównych czynników powodujących obrót struktury przedramię-ręka. Z kolei metoda przeprowadzenia weryfikacji jakościowej jest taka sama jak dla mięśnia pojedynczego, tzn. na podstawie zmierzonego sygnału EMG każdego rzeczywistego mięśnia zespołu podczas obrotu przedramienia i porównanie wyników tych pomiarów z przebiegami obliczonymi/zadanymi sił wewnętrznymi odpowiedniego modelu mięśnia.

Zaproponowany model zespołu mięśni pozwala oszacować siły poszczególnych mięśni bez stosowania technik optymalizacyjnych i dlatego można go wykorzystać do stwierdzenia fizjologicznej zgodności stosowanych kryteriów optymalizacyjnych. Pod pojęciem fizjologicznej zgodności należy rozumieć zdolność mięśni rzeczywistych do wygenerowania takich sił, które będą równe siłom kurczącym obliczonym z przyjętego kryterium optymalizacyjnego. W tym przypadku stosowanie markerów na mięśniach i dynamometrów na ścięgnach pozwala jednoznacznie stwierdzić, czy określone na podstawie kryterium optymalizacyjnego zachowanie mięśni modelu jest zgodne z zachowaniem każdego mięśnia zespołu rzeczywistego.

Wprowadzenie ograniczeń szeregu wielkości w modelu mięśnia (w celu zapewnienia pracy modelu w stanie dopuszczalnym) pozwala na odzwierciedlenie działania układu nerwowego, który za pomocą proprioreceptorów (wrzeczionka mięśniowe, narządy *Golgiego*) „śledzi” zachowanie poszczególnych mięśni układu i stara się nie dopuścić do ich uszkodzenia. Z tego względu model ten można użyć do przybliżenia rozwiązania problemu sterowania w układach biologicznych, a szczególnie do określenia sposobu, w jaki układ nerwowy steruje zachowaniem poszczególnych mięśni do realizacji zadanego ruchu, jeżeli posiada informacje o stanie każdego mięśnia badanego zespołu.

Model zachowania mięśnia i model zachowania zespołu mięśni można użyć zarówno do rozwiązania prostego jak i odwrotnego zadania dynamiki. Pozwala to na zastosowanie tych modeli: 1) w programach symulacyjnych do analizy zachowania zespołu mięśniowego całego organizmu; 2) do rozwiązywania problemów związanych z rehabilitacją mięśni oraz wyćwiczeniem nowych umiejętności w sporcie.

Na podstawie współczesnej wiedzy z zakresu fizjologii i psychologii opracowano układy sterowania modelem mięśnia oraz układ optymalnej regulacji modelu zespołu mięśni układu ramię-przedramię (p. 3.3). Metody działania tych układów opierają się na założeniu, że każdy model dąży do unikania stanów niedopuszczalnych, w których wielkości charakterystyczne (przemieszczenia, prędkości tych przemieszczeń oraz siły w ścięgnię przyczepu i początku) będą miały wartości, których mięśnie rzeczywiste nie mogą osiągać.

## 5.1. Uwagi końcowe

1. Zaproponowany model zachowania mięśnia pozwala na zamodelowanie zarówno dynamicznych, jak i statycznych stanów mięśnia. Model ten uwzględnia, iż mięsień jest strukturą o zróżnicowanych właściwościach fizjologicznych, które zależą od poprzednich stanów mięśnia oraz rodzaju aktualnie wykonywanej pracy (koncentryczna, ekscentryczna).
2. Zaproponowaną procedurę identyfikacji właściwości lepkosprężystych i procedurę identyfikacji właściwości kurczliwych modelu mięśnia można doświadczalnie zrealizować, stosując markery przyklejone do powierzchni mięśnia.
3. Rozwiązując proste i/lub odwrotne zadanie dynamiki, można zamodelować różne czynności mięśnia, na przykład skurcz: koncentryczny, ekscentryczny, izotoniczny, izotoniczno-izometryczny, auktotoniczny, izokinetyczny, a także skurcz przy skokowej zmianie długości mięśnia.
4. W modelu zachowania zespołu mięśni ramienia-przedramienia zachowanie każdego mięśnia odzwierciedlono jako prostoliniowe działanie pojedynczego aktonu mięśniowego. Ponadto zamodelowano oddziaływanie pochodzące od więzadeł (zachodzi na granicy zakresu ruchów dopuszczalnych) oraz zjawisko występowania sił reakcji w stawie łokciowym, które zachodzi na skutek oddziaływania części stawu w czasie obrotu.

5. Za pomocą modelu zachowania zespołu mięśni można odzwierciedlić zarówno dynamiczne stany obrotu przedramienia (ruchy zginania-prostowania), jak i stany stabilizacji (utrzymania kończyny w wybranym położeniu). Ponadto model ten można zastosować do ustalenia wpływu, jaki ma zmieniający się moment bezwładności pochodzący od mas składowych mięśni na dynamikę ruchu obrotowego.
6. Uzyskując przebiegi przemieszczeń punktów wyznaczonych na mięśniu rzeczywistym, można sprawdzić, czy wybrane kryterium optymalizacyjne jest fizjologicznie uzasadnione, tzn. czy obliczone na podstawie tego kryterium siły mięśni mogą być zrealizowane przez mięśnie rzeczywiste.
7. Weryfikację ilościową można przeprowadzić przez porównywanie przebiegów obliczonych i otrzymanych z pomiarów przemieszczeń markierów przyklejonych na powierzchniach mięśni (lub powierzchni mięśnia). Z kolei weryfikację jakościową można przeprowadzić jako porównywanie obliczonych sił wewnętrznych z sygnałami EMG otrzymanymi z powierzchni (lub od wewnątrz) badanych mięśni (badanego mięśnia).
8. Zaproponowany obliczeniowy model zespołu mięśni można zastosować do:
  - a) symulacji współpracy protezy i/lub mięśnia sztucznego (których modele obliczeniowe zostaną uprzednio opracowane) z układem rzeczywistym mięśni;
  - b) rehabilitacji narządu ruchu jako narzędzie pozwalające wyznaczyć ruchy, które powinna wykonać osoba z uszkodzonym zespołem mięśniowym;
  - c) symulacji ruchów, które powinien wykonywać sportowiec w celu rozwijania swoich umiejętności fizycznych;
  - d) ustalenia związków przyczynowo-skutkowych, które zachodzą podczas współpracy mięśni rzeczywistych;
  - e) wyznaczenia granicznych wartości sił reakcji dynamicznej, która może działać na powierzchnię kości i nie powoduje jej zniszczenia.

## 6. DODATEK

### 6.1. Metoda rozwiązywania sztywnego układu równań różniczkowych

W sztywnym układzie równań różniczkowych bezwzględna wartość maksymalnej wartości własnej układu jest co najmniej dziesięciokrotnie większa od bezwzględnej wartości minimalnej własnej tego układu [121]. Analityczne rozwiązanie sztywnego układu równań różniczkowych jest sumą funkcji potęgowych (eksponentialnych), których potęgi zawierają zarówno bardzo duże, jak i bardzo małe stałe czasowe (stałe te wyznaczają czas odpowiedzi układu na zadane pobudzenie). Poszukiwanie rozwiązania analitycznego dla takiego układu jest skomplikowanym zadaniem, którego rozwiązanie jest ważne tylko dla jednego rodzaju pobudzenia (wymuszenia). Z tego względu, w praktyce zazwyczaj poszukuje się rozwiązań przybliżonych, stosując odpowiednie metody numeryczne. W przypadku rozwiązania sztywnego układu równań różniczkowych za pomocą jawnej metody numerycznej (np. Runge-Kutta, Newmarka) uzyskuje się wyniki numerycznie rozbieżne. Z kolei zastosowanie niejawnych metod numerycznych oraz bardzo małego i/lub zmiennego kroku obliczeń pozwala uniknąć numerycznej rozbieżności i uzyskać rozwiązanie w postaci wyniku liczbowego.

W monografii do rozwiązania sztywnego układu równań różniczkowych zastosowano niejawną metodę predyktor-korektor [34, 46 51, 90]. Jest to algorytm obliczeniowy, który pozwala uzyskać rozwiązanie w dwóch etapach: pierwszy etap polega na wyznaczeniu wstępnego rozwiązania (predykcji), zaś drugi etap służy do korekcji tego rozwiązania. Dokładność metody zależy od trzech czynników:

- 1) rzędu metody, tzn. ile poprzednich kroków rozwiązań uwzględnia się na etapie predykcji i korekcji rozwiązania aktualnego;
- 2) kroku całkowania  $\Delta t$ ;
- 3) przyjętej dokładności korekcji  $e$  (wszystkie symulacje podane w rozdziale 4 uzyskano przy dokładności  $e \leq 10^{-15}$ ).

Algorytm obliczeniowy metody predyktor-korektor utworzono w środowisku *Matlab* w postaci *m*-pliku. Fragment tego pliku ma następującą strukturę:

```
Etap predykcji:
```

```
if i==2
```

```
    y(1:n,i)=y(1:n,i-1)+ Δt s(1:n,i-1);
```

```
elseif i==3
```

```
    y(1:n,i)=y(1:n,i-1)+ Δt (3·s(1:n,i-1)-s(1:n,i-2))/2;
```

```
elseif i==4
```

```
    y(1:n,i)=y(1:n,i-1)+ Δt (23·s(1:n,i-1)-16·s(1:n,i-2)+5·s(1:n,i-3))/12;
```

```
else
```

```
    y(1:n,i)=y(1:n,i-1)+ Δt (55·s(1:n,i-1)-59·s(1:n,i-2)+37·s(1:n,i-3)-9·s(1:n,i-4))/24;
```

```
end;
```

```
Etap korekcji (proces iteracyjny na podstawie wzoru Adamsa-Moultona):
```

```
b=1;
```

```
while (b>ε)
```

```
    yp=y(1:n,i);
```

```
    s(1:n,i)=[yp(5);
```

```

yp(6);
yp(7);
yp(8);
(-L(1,1)·yp(5)-K(1,1)·yp(1)-L(2,2)·(yp(5)-yp(6))-K(2,2)·(yp(1)-
yp(2))+L(1,1)·dx0+E(1,1)·x0)/M(2,2);
(-L(2,2)·(yp(6)-yp(5))-K(2,2)·(yp(2)-yp(1))-L(3,3)·(yp(6)-yp(7))-
-K(3,3)·(yp(2)-yp(3)))/M(3,3);
(-L(3,3)·(yp(7)-yp(6))-K(3,3)·(yp(3)-yp(2))-L(4,4)·(yp(7)-yp(8))-
-K(4,4)·(yp(3)-yp(4)))/M(4,4);
(-L(4,4)·(yp(8)-yp(7))-K(4,4)·(yp(4)-yp(3))-L(5,5)·yp(8)-
K(5,5)·yp(4))/M(5,5)];
if i==2
    y(1:n,i)=y(1:n,i-1)+ Δt ·(s(1:n,i)+s(1:n,i-1))/2;
elseif i==3
    y(1:n,i)=y(1:n,i-1)+ Δt ·(5·s(1:n,i)+8·s(1:n,i-1)-s(1:n,i-2))/12;
elseif i==4
    y(1:n,i)=y(1:n,i-1)+ Δt ·(9·s(1:n,i)+19·s(1:n,i-1)-5·s(1:n,i-2)+s(1:n,i-3))/24;
else
    y(1:n,i)=y(1:n,i-1)+Δt ·(251·s(1:n,i)+646·s(1:n,i-1)-264·s(1:n,i-2)+
+106·s(1:n,i-3) -19·s(1:n,i-4))/720;
end;
b=abs(y(1,i)-yp(1));
end;

```

## 6.2. Przekształcenie układu równań różniczkowych drugiego rzędu do jednego równania różniczkowo-całkowego

W celu przekształcenia układu równań różniczkowych (3.8) do równania różniczkowo-całkowego (3.9) należy wykonać następujące czynności:

1. Przedstawić układ równań różniczkowych (3.8), np. w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_0 & -L_0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_0 & L_0 + L_1 & -L_1 & 0 & 0 \\ 0 & -L_1 & L_1 + L_2 & -L_2 & 0 \\ 0 & 0 & -L_2 & L_2 + L_3 & -L_3 \\ 0 & 0 & 0 & -L_3 & L_3 + L_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_0 & -K_0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_0 & K_0 + K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ 0 & -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ 0 & 0 & -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zew}(t) \\ P_1^w(t) \\ P_2^w(t) - P_1^w(t) \\ P_3^w(t) - P_2^w(t) \\ -P_3^w(t) \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

2. Zastosować przekształcenie Laplace'a, przy zerowych warunkach początkowych, do układu równań (6.1), otrzymując (6.2):



$$\begin{bmatrix} m_0 \cdot s^2 + L_0 \cdot s + K_0 & -(L_0 \cdot s + K_0) & 0 \\ -(L_0 \cdot s + K_0) & m_1 \cdot s^2 + (L_0 + L_1) \cdot s + (K_0 + K_1) & -(L_1 \cdot s + K_1) \\ 0 & -(L_1 \cdot s + K_1) & m_2 \cdot s^2 + (L_1 + L_2) \cdot s + (K_1 + K_2) \\ 0 & 0 & -(L_2 \cdot s + K_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(L_2 \cdot s + K_2) & 0 & 0 \\ m_3 \cdot s^2 + (L_2 + L_3) \cdot s + (K_2 + K_3) & -(L_3 \cdot s + K_3) & 0 \\ -(L_3 \cdot s + K_3) & m_4 \cdot s^2 + (L_3 + L_4) \cdot s + (K_3 + K_4) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0(s) \\ X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \\ X_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zew}(s) \\ P_1^w(s) \\ P_2^w(s) - P_1^w(s) \\ P_3^w(s) - P_2^w(s) \\ -P_3^w(s) \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

gdzie:  $s$  – operator transformaty Laplace'a;

$X_i(s)$  – transformata Laplace'a funkcji przemieszczenia przyczepu  $x_i(t)$ ;

$P_{zew}(s)$  – transformata Laplace'a funkcji pobudzenia zewnętrznego  $P_{zew}(t)$ ;

$P_i^w(s)$  – transformata Laplace'a funkcji pobudzenia wewnętrznego  $P_i^w(t)$ .

3. Przedstawić macierz kwadratową w zależności (6.2) w postaci czterech bloków – elementu pojedynczego  $\mathbf{M}_{11}$ , wektora (macierz kolumnowa)  $\mathbf{M}_{12}$ , wektora  $\mathbf{M}_{21}$  (macierz kolumnowa) i macierzy  $\mathbf{M}_{22}$  (macierz kwadratowa) [149]:

$$\mathbf{M}_{11} = (m_0 \cdot s^2 + L_0 \cdot s + K_0), \quad (6.3)$$

$$\mathbf{M}_{12} = [- (L_0 \cdot s + K_0) \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad (6.4)$$

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{bmatrix} - (L_0 \cdot s + K_0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{M}_{22} = \begin{bmatrix} m_1 \cdot s^2 + (L_0 + L_1) \cdot s + (K_0 + K_1) & -(L_1 \cdot s + K_1) \\ -(L_1 \cdot s + K_1) & m_2 \cdot s^2 + (L_1 + L_2) \cdot s + (K_1 + K_2) \\ 0 & -(L_2 \cdot s + K_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -(L_2 \cdot s + K_2) & 0 \\ m_3 \cdot s^2 + (L_2 + L_3) \cdot s + (K_2 + K_3) & -(L_3 \cdot s + K_3) \\ -(L_3 \cdot s + K_3) & m_4 \cdot s^2 + (L_3 + L_4) \cdot s + (K_3 + K_4) \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

4. Wyrugować z równania (6.2) wektor funkcji  $[X_1(s) \ X_2(s) \ X_3(s) \ X_4(s)]^T$ , uzyskując jedno równanie zależne wyłącznie od funkcji  $X_0(s)$ :

$$\mathbf{M}_{11} \cdot X_0(s) + \mathbf{M}_{12} \cdot \left( \frac{\text{adj}(\mathbf{M}_{22})}{\det(\mathbf{M}_{22})} \cdot \begin{bmatrix} P_1^w(s) \\ P_2^w(s) - P_1^w(s) \\ P_3^w(s) - P_2^w(s) \\ -P_3^w(s) \end{bmatrix} - \frac{\text{adj}(\mathbf{M}_{22})}{\det(\mathbf{M}_{22})} \cdot \mathbf{M}_{21} \cdot X_0(s) \right) = P_{zew}(s), \quad (6.7)$$

gdzie:  $\text{adj}(\mathbf{M}_{22})$  – algebraiczne dopełnienie bloku macierzy  $\mathbf{M}_{22}$ ;  
 $\det(\mathbf{M}_{22})$  – wyznacznik bloku macierzy  $\mathbf{M}_{22}$ , który jest wielomianem ósmego stopnia.

5. Zastosować odwrotne przekształcenie Laplace'a do równania (6.7), uzyskując równanie różniczkowo-całkowe drugiego rzędu o postaci (3.9).

Należy zauważyć, iż pierwiastki równania charakterystycznego  $\det(\mathbf{M}_{22}) = 0$  są wartościami własnymi  $s_i$  ( $i = 0, \dots, 7$ ) równania różniczkowo-całkowego (3.9).

### 6.3. Metoda rozwiązywania równania różniczkowo-całkowego

W celu uzyskania rozwiązania równania różniczkowo-całkowego (3.9), tzn. wyznaczenia zachowania modelu mięśnia na zadane pobudzenia wewnętrzne  $P_1^w(t)$ ,  $P_2^w(t)$ ,  $P_3^w(t)$  i zewnętrzne  $P_{zew}(t)$ , należy to równanie przekształcić do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu (por. p. 6.2). Metoda rozwiązania tego równania zależy od rodzaju wartości własnych  $s_i$  ( $i = 0, \dots, 7$ ), tzn. od tego, czy są one wartościami rzeczywistymi, zespolonymi i/lub  $n$ -krotnymi.

#### Przypadek 1. Pierwiastki rzeczywiste

W celu rozwiązania równania różniczkowo-całkowego (3.9), posiadającego jednokrotne rzeczywiste wartości własne  $s_i$  ( $i = 0, \dots, 7$ ), należy zastosować następujące zależności, które są ważne dla każdej rzeczywistej  $i$ -tej wartości  $s_i$ :

$$\int_0^t (B_i \cdot e^{s_i \cdot (t-\tau)}) \cdot x_0(\tau) d\tau = p_i, \quad (6.8)$$

$$s_i \cdot p_i + B_i \cdot x_0(t) = \dot{p}_i, \quad (6.9)$$

gdzie:  $p_i$  – splot funkcji dla  $i$ -tej rzeczywistej wartości własnej  $s_i$ ;

$\dot{p}_i$  – prędkość zmiany splotu funkcji.

Następnie należy uzyskać układ równań różniczkowych pierwszego stopnia o następującej postaci:

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= s_0 \cdot p_0 + B_0 \cdot x_0(t) \\ \dot{p}_1 &= s_1 \cdot p_1 + B_1 \cdot x_0(t) \\ \dot{p}_2 &= s_2 \cdot p_2 + B_2 \cdot x_0(t) \\ \dot{p}_3 &= s_3 \cdot p_3 + B_3 \cdot x_0(t) \\ \dot{p}_4 &= s_4 \cdot p_4 + B_4 \cdot x_0(t) \\ \dot{p}_5 &= s_5 \cdot p_5 + B_5 \cdot x_0(t) \\ \dot{p}_6 &= s_6 \cdot p_6 + B_6 \cdot x_0(t) \\ \dot{p}_7 &= s_7 \cdot p_7 + B_7 \cdot x_0(t) \\ \dot{x}_0(t) &= y_1 \\ \dot{y}_1 &= \frac{P_{zew}(t) + P_a(t) - A_1 \cdot y_1 - A_0 \cdot x_0(t) - p_0 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 - p_6 - p_7}{A_2}, \end{aligned} \quad (6.10)$$

gdzie:  $y_i$  – współrzędna pomocnicza.

Przyjmując warunki początkowe dla funkcji szukanych:  $\{x_0(t_0), p_0(t_0), p_1(t_0), p_2(t_0), p_3(t_0), p_4(t_0), p_5(t_0), p_6(t_0), p_7(t_0), y_1(t_0)\}$ , należy za pomocą niejawnej metody numerycznej rozwiązać układ (6.10) (por. p. 6.1).

**Przypadek 2. Pierwiastki zespolone**

Jeżeli w równaniu różniczkowo-całkowym (3.9) występują dwie jednokrotne zespolone wartości własne  $s_k$  i  $s_{k+1} = \bar{s}_k$  ( $\bar{s}_k$  jest sprzężoną wartością własną do  $s_k$ ), to w układzie równań różniczkowych (6.10) należy zmienić odpowiadające tym wartościom własnym równania różniczkowe pierwszego stopnia. Zamiana ta zależy od współczynników  $B_k$  i  $B_{k+1} = \bar{B}_k$  (gdzie  $\bar{B}_k$  jest współczynnikiem sprzężonym do  $B_k$ ):

1) jeżeli są spełnione równości

$$\begin{aligned} B_k \cdot e^{s_k \cdot t} &= [\operatorname{Re}(B_k) + i \cdot \operatorname{Im}(B_k)] \cdot e^{[\operatorname{Re}(s_k) + i \cdot \operatorname{Im}(s_k)]} \\ \bar{B}_k \cdot e^{\bar{s}_k \cdot t} &= [\operatorname{Re}(B_k) - i \cdot \operatorname{Im}(B_k)] \cdot e^{[\operatorname{Re}(s_k) - i \cdot \operatorname{Im}(s_k)]}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

gdzie:  $\operatorname{Re}(B_k)$  – część rzeczywista współczynnika  $B_k$ ;  
 $\operatorname{Im}(B_k)$  – część urojona współczynnika  $B_k$ , przy czym  $\operatorname{Im}(B_k) > 0$ ;  
 $\operatorname{Re}(s_k)$  – część rzeczywista wartości własnej  $s_k$  lub  $\bar{s}_k$ ;  
 $\operatorname{Im}(s_k)$  – część urojona wartości własnej  $s_k$  lub  $\bar{s}_k$ , przy czym  $\operatorname{Im}(s_k) > 0$ ;  
 $i = \sqrt{-1}$  – jednostka urojona;

to w układzie równań różniczkowych pierwszego stopnia (6.10) równania opisujące zespolone wartości własne  $s_k$  i  $s_{k+1} = \bar{s}_k$  należy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= \operatorname{Re}(s_k) \cdot p_k + \frac{\operatorname{Re}(B_k) \cdot \operatorname{Im}(s_k)}{\operatorname{Im}(B_k)} \cdot p_{k+1} + 2 \cdot \operatorname{Re}(B_k) \cdot x_0(t) \\ \dot{p}_{k+1} &= \operatorname{Re}(s_k) \cdot p_{k+1} - \frac{\operatorname{Im}(B_k) \cdot \operatorname{Im}(s_k)}{\operatorname{Re}(B_k)} \cdot p_k, \end{aligned} \quad (6.12)$$

2) jeżeli są spełnione równości

$$\begin{aligned} B_k \cdot e^{s_k \cdot t} &= [\operatorname{Re}(B_k) + i \cdot \operatorname{Im}(B_k)] \cdot e^{[\operatorname{Re}(s_k) - i \cdot \operatorname{Im}(s_k)]} \\ \bar{B}_k \cdot e^{\bar{s}_k \cdot t} &= [\operatorname{Re}(B_k) - i \cdot \operatorname{Im}(B_k)] \cdot e^{[\operatorname{Re}(s_k) + i \cdot \operatorname{Im}(s_k)]}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

to w układzie równań różniczkowych pierwszego stopnia (6.10) równania opisujące zespolone wartości własne  $s_k$  i  $s_{k+1} = \bar{s}_k$  należy zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \dot{p}_k &= \operatorname{Re}(s_k) \cdot p_k - \frac{\operatorname{Re}(B_k) \cdot \operatorname{Im}(s_k)}{\operatorname{Im}(B_k)} \cdot p_{k+1} + 2 \cdot \operatorname{Re}(B_k) \cdot x_0(t) \\ \dot{p}_{k+1} &= \operatorname{Re}(s_k) \cdot p_{k+1} + \frac{\operatorname{Im}(B_k) \cdot \operatorname{Im}(s_k)}{\operatorname{Re}(B_k)} \cdot p_k. \end{aligned} \quad (6.14)$$

**6.4. Metoda rozwiązywania odwrotnego zadania dynamiki**

Parametrami wejściowymi  $i$ -tego mięśnia są: przebieg przemieszczenia przyczepu  $x_{0_i}(t)$  oraz jego pochodne pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego rzędu  $\dot{x}_{0_i} = \dot{x}_{0_i}(t)$ ,  $\ddot{x}_{0_i} = \ddot{x}_{0_i}(t)$ ,  $\dddot{x}_{0_i} = \dddot{x}_{0_i}(t)$ ,  $x_{0_i}^{(IV)} = x_{0_i}^{(IV)}(t)$ ; siła zewnętrzna  $P_{zew_i} = P_{zew_i}(t)$ ; współczynniki zdrowotności mięśnia  $\xi_{1_i}$  i  $\xi_{3_i}$ , których wartości są zgodne z (3.58). Szuka-

nymi wielkościami są przebiegi sił wewnętrznych  $P_{1\_i}^w = P_{1\_i}^w(t)$ ,  $P_{2\_i}^w = P_{2\_i}^w(t)$ ,  $P_{3\_i}^w = P_{3\_i}^w(t)$  oraz przebiegi przemieszczeń odpowiednich fragmentów modelu mięśnia  $x_{j\_i} = x_{j\_i}(t)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ).

W zależności od wartości zadanego współczynnika zdrowotności  $\xi_{1\_i}$  istnieją dwie metody wyznaczenia takich sił wewnętrznych, które realizują zadane przemieszczenie przycepu modelu mięśnia.

### Metoda A

Metoda A jest stosowana, gdy  $\xi_{1\_i} \in (0; 0,5) \wedge \xi_{3\_i} \in (0; 0,5)$ . Polega ona na rozwiązaniu jednego równania różniczkowego pierwszego rzędu oraz układu trzech równań różniczkowych drugiego rzędu:

$$L_{0\_i} \cdot \dot{x}_{1\_i} + K_{0\_i} \cdot x_{1\_i} = F_{1\_i}(t), \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} m_{2\_i} \cdot \ddot{x}_{2\_i} + \left( L_{2\_i} + \frac{L_{1\_i}}{\xi_{1\_i}} \right) \cdot \dot{x}_{2\_i} + \left( K_{2\_i} + \frac{K_{1\_i}}{\xi_{1\_i}} \right) \cdot x_{2\_i} - L_{2\_i} \cdot \dot{x}_{3\_i} - \\ - K_{2\_i} \cdot x_{3\_i} = L_{1\_i} \cdot \dot{x}_{1\_i} + K_{1\_i} \cdot x_{1\_i} + \left( \frac{1 - \xi_{1\_i}}{\xi_{1\_i}} \right) \cdot F_{2\_i}(t) \\ m_{3\_i} \cdot \ddot{x}_{3\_i} + (L_{2\_i} + L_{3\_i}) \cdot \dot{x}_{3\_i} + (K_{2\_i} + K_{3\_i}) \cdot x_{3\_i} - L_{3\_i} \cdot \dot{x}_{4\_i} - \\ - K_{3\_i} \cdot x_{4\_i} + \left( L_{1\_i} \cdot \frac{\xi_{3\_i} - 1}{\xi_{1\_i}} - L_{2\_i} \right) \cdot \dot{x}_{2\_i} + \\ + \left( K_{1\_i} \cdot \frac{\xi_{3\_i} - 1}{\xi_{1\_i}} - K_{2\_i} \right) \cdot x_{2\_i} = \left( \frac{\xi_{3\_i} - 1}{\xi_{1\_i}} \right) \cdot F_{2\_i}(t) \\ m_{4\_i} \cdot \ddot{x}_{4\_i} + (L_{3\_i} + L_{4\_i}) \cdot \dot{x}_{4\_i} + (K_{3\_i} + K_{4\_i}) \cdot x_{4\_i} - L_{3\_i} \cdot \dot{x}_{3\_i} - \\ - K_{3\_i} \cdot x_{3\_i} - \frac{\xi_{3\_i}}{\xi_{1\_i}} \cdot L_{1\_i} \cdot \dot{x}_{2\_i} - \frac{\xi_{3\_i}}{\xi_{1\_i}} \cdot K_{1\_i} \cdot x_{2\_i} = - \frac{\xi_{3\_i}}{\xi_{1\_i}} \cdot F_{2\_i}(t), \end{aligned} \quad (6.18)$$

gdzie:

$$F_{1\_i}(t) = m_{0\_i} \cdot \ddot{x}_{0\_i} + L_{0\_i} \cdot \dot{x}_{0\_i} + K_{0\_i} \cdot x_{0\_i} + P_{zew\_i}, \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} F_{2\_i}(t) = m_{1\_i} \cdot \ddot{x}_{1\_i} + (L_{0\_i} + L_{1\_i}) \cdot \dot{x}_{1\_i} + (K_{0\_i} + K_{1\_i}) \cdot x_{1\_i} - \\ - L_{0\_i} \cdot \dot{x}_{0\_i} - K_{0\_i} \cdot x_{0\_i}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\dot{x}_{1\_i} = \frac{F_{1\_i}(t) - K_{0\_i} \cdot x_{1\_i}}{L_{0\_i}}, \quad (6.21)$$

$$\ddot{x}_{1\_i} = \frac{\dot{F}_{1\_i}(t) - K_{0\_i} \cdot \dot{x}_{1\_i}}{L_{0\_i}}, \quad (6.22)$$

$$\dot{F}_{1\_i}(t) = m_{0\_i} \cdot \ddot{x}_{0\_i} + L_{0\_i} \cdot \dot{x}_{0\_i} + K_{0\_i} \cdot x_{0\_i} + \dot{P}_{zew\_i}. \quad (6.23)$$

Wewnętrzna siła  $P_{2\_i}^w$  jest obliczana ze wzoru:

$$P_{2-i}^w = \frac{F_{2-i}(t) - \dot{x}_{2-i} \cdot L_{1-i} - K_{1-i} \cdot x_{2-i}}{\xi_{1-i}}, \quad (6.24)$$

zaś pozostałe siły  $P_{1-i}^w$  i  $P_{3-i}^w$  – na podstawie zależności (3.58).

### Metoda B

Metoda B jest stosowana, gdy  $\xi_{1-i} = 0 \wedge \xi_{3-i} \in (0; 0,5)$ . Polega ona na rozwiązaniu dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu oraz układu dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} L_{0-i} \cdot \dot{x}_{1-i} + K_{0-i} \cdot x_{1-i} &= F_{1-i}(t) \\ L_{1-i} \cdot \dot{x}_{2-i} + K_{1-i} \cdot x_{2-i} &= F_{2-i}(t), \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} m_{3-i} \cdot \ddot{x}_{3-i} + (\xi_{3-i} \cdot L_{2-i} + L_{3-i}) \cdot \dot{x}_{3-i} + (\xi_{3-i} \cdot K_{2-i} + K_{3-i}) \cdot x_{3-i} - \\ - L_{3-i} \cdot \dot{x}_{4-i} - K_{3-i} \cdot x_{4-i} &= (\xi_{3-i} - 1) \cdot F_{3-i}(t) + L_{2-i} \cdot \dot{x}_{2-i} - K_{2-i} \cdot x_{2-i} \\ m_{4-i} \cdot \ddot{x}_{4-i} + (L_{3-i} + L_{4-i}) \cdot \dot{x}_{4-i} + (K_{3-i} + K_{4-i}) \cdot x_{4-i} - \xi_{3-i} \cdot L_{2-i} \cdot \\ \cdot \dot{x}_{3-i} - \xi_{3-i} \cdot K_{2-i} \cdot x_{3-i} &= -\xi_{3-i} \cdot F_{3-i}(t). \end{aligned} \quad (6.26)$$

W równaniach (6.25) oraz w układzie równań (6.26) funkcje  $F_{1-i}(t)$  i  $F_{2-i}(t)$  są obliczone ze wzorów (6.19) i (6.20), natomiast funkcja  $F_{3-i}(t)$  jest obliczana ze wzoru:

$$F_{3-i}(t) = m_{2-i} \cdot \ddot{x}_{2-i} + (L_{2-i} + L_{1-i}) \cdot \dot{x}_{2-i} + (K_{2-i} + K_{1-i}) \cdot x_{2-i} - L_{1-i} \cdot \dot{x}_{1-i} - K_{1-i} \cdot x_{1-i}, \quad (6.27)$$

w którym pierwsza pochodna  $\dot{x}_{1-i}$  jest obliczana według wzoru (6.21). Pierwsza pochodna  $\dot{x}_{2-i}$  i druga pochodna  $\ddot{x}_{2-i}$ , pierwsza pochodna funkcji  $\dot{F}_{2-i}(t)$ , trzecia pochodna  $\ddot{x}_{1-i}$  i druga pochodna funkcji  $\ddot{F}_{1-i}(t)$  są obliczane z poniższych wzorów:

$$\dot{x}_{2-i} = \frac{F_{2-i}(t) - K_{1-i} \cdot x_{2-i}}{L_{1-i}}, \quad (6.28)$$

$$\ddot{x}_{2-i} = \frac{\dot{F}_{2-i}(t) - K_{1-i} \cdot \dot{x}_{2-i}}{L_{1-i}}, \quad (6.29)$$

$$\dot{F}_{2-i}(t) = m_{1-i} \cdot \ddot{x}_{1-i} + (L_{0-i} + L_{1-i}) \cdot \dot{x}_{1-i} + (K_{0-i} + K_{1-i}) \cdot x_{1-i} - L_{0-i} \cdot \ddot{x}_{0-i} - K_{0-i} \cdot \dot{x}_{0-i}, \quad (6.30)$$

$$\ddot{x}_{1-i} = \frac{\ddot{F}_{1-i}(t) - K_{0-i} \cdot \ddot{x}_{1-i}}{L_{0-i}}, \quad (6.31)$$

$$\ddot{F}_{1-i}(t) = m_{0-i} \cdot x_{0-i}^{(IV)} + L_{0-i} \cdot \ddot{x}_{0-i} + K_{0-i} \cdot \dot{x}_{0-i} + \ddot{P}_{zew-i}. \quad (6.32)$$

Wewnętrzna siła  $P_{2-i}^w$  jest obliczana ze wzoru:

$$P_{2-i}^w = F_{3-i}(t) - L_{2-i} \cdot \dot{x}_{3-i} - K_{2-i} \cdot x_{3-i}, \quad (6.33)$$

zaś wewnętrzna siła  $P_{3-i}^w$  – na podstawie zależności (3.58).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Analysis of the force-sharing problem using an optimization model. Ait-Haddou R., Jinha A., Herzog W., Binding P., *Mathematical Biosciences* 191, 2004, s. 111-122.
- [2] Amarantini D., Martin L.: A method to combine numerical optimization and EMG data for the estimation of joint moments under dynamic conditions. *Journal of Biomechanics* 37, 2004, s. 1393-1404.
- [3] Anderson F.C., Pandy M.G.: Dynamic simulation of human motion in three dimensions. Proceedings of the Sixth international Symposium on the 3D Analysis of Human Movement, Cape Town, South Africa, 2000, s. 1-4.
- [4] Anderson F.C., Pandy M.G.: Static and dynamic optimization solutions for gait are practically equivalent. *Journal of Biomechanics* 34, 2001, s. 153-161.
- [5] Accuracy of muscle moment arms estimated from MRI-based musculoskeletal models of the lower extremity. Arnold A.S., Salinas S., Asakawa D.J., Delp S.L. *Computer Aided Surgery* 5, 2000, s. 108-119.
- [6] Augustyniak P.: Przetwarzanie sygnałów elektrodiagnostycznych. Kraków: AGH, Uczelniane Wydawnictwo Naukowo-Dydaktyczne, 2001.
- [7] Avela J., Komi P.V.: Reduced stretch reflex sensitivity and muscle stiffness after long-lasting stretch-shortening cycle exercise in humans. *European Journal of Applied Physiology* 78, 1998, s. 403-410.
- [8] Avela J., Kyröläinen H., Komi P.V.: Neuromuscular changes after long-lasting mechanically and electrically elicited fatigue. *European Journal of Applied Physiology* 85, 2001, s. 317-325.
- [9] Będziński R.: Biomechanika inżynierska. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1997.
- [10] Binding P., Jihna A., Herzog W.: Analytic analysis of the force sharing among synergistic muscles on one- and two-degree-of-freedom models. *Journal of Biomechanics* 33, 2000, s. 1423-1432.
- [11] Błaszczyk J.W.: Biomechanika kliniczna. Podręcznik dla studentów medycyny i fizjoterapii. Warszawa: Wydawnictwo Lekarskie PZWL, 2004.
- [12] Blemker S.S., Delp S.L.: Three-dimensional representation of complex muscle architectures and geometries. *Annals of Biomedical Engineering* 33, 2005, s. 661-673.
- [13] Blemker S.S., Delp S.L.: Rectus femoris and vastus intermedius fiber excursions predicted by three-dimensional muscle models. *Journal of Biomechanics* 39, 2006, s. 1383-1391.
- [14] Blemker S.S., Pinsky P.M., Delp S.L.: A 3D model of muscle reveals the causes of nonuniform strains in the biceps brachii. *Journal of Biomechanics* 38, 2005, s. 657-665.
- [15] Bober T., Zawadzki J.: Biomechanika układu ruchu człowieka. Wrocław: Akademia Wychowania Fizycznego we Wrocławiu, 2006.
- [16] Van den Bogert A.J., Gerritsen K.G.M., Cole G.K.: Human muscle modelling from a user's perspective. *Journal of Electromyography and Kinesiology* 8, 1998, s. 119-124.
- [17] Van Bolhuis B.M., Gielen C.C.A.M.: The relative activation of elbow-flexor muscles in isometric flexion and in flexion/extension movements. *Journal of Biomechanics* 30, 1997, s. 803-811.
- [18] Van Bolhuis B.M., Gielen C.C.A.M.: A comparison of models explaining muscle activation patterns for isometric contractions. *Biological Cybernetics* 81, 1999, s. 246-261.
- [19] Passive transverse mechanical properties of skeletal muscle under in vivo compression. Bosboom E.M.H., Hessekink M.K.C., Oomens C.W.J., Bouten C.V.C., Drost M.R., Baaijens F.P.T. *Journal of Biomechanics* 34, 2001, s. 1365-1368.
- [20] Repeated maximal eccentric actions causes log-lasting disturbances in movement control. Bottas R., Linnamo V., Nicol C., Komi P.V. *European Journal of Applied Physiology* 94, 2005, s. 62-69.

- [21] Bronzino J.D.: Biomedical engineering fundamentals. Taylor & Francis Group, 2006 LLC.
- [22] Buchanan T.S.: Evidence that maximum muscle stress is not a constant – differences in specific tension in elbow flexors and extensors. *Medical Engineering & Physics* 17, 1995, s. 529-536.
- [23] Estimation of muscle forces and joint moments using a forward-inverse dynamics model. Buchanan T.S., Lloyd D.G., Manal K., Besier T.F. *Medicine & Science In Sports & Exercise* 37, 2005, s. 1911-1916.
- [24] Camilleri M.J., Hull M.L.: Are the maximum shortening velocity and the shape parameters in a Hill-type model of whole muscle related to activation? *Journal of Biomechanics* 38, 2005, s. 2172-2180.
- [25] Chadwick E.K.J., Nicol A.C.: Elbow and wrist joint contact forces during occupational pick and place activities. *Journal of Biomechanics* 33, 2000, s. 591-600.
- [26] Chadwick E.K.J., van der Helm F.C.T.: Musculo-skeletal modelling of the shoulder. ISB 2003, 2003, *Shoulder biomechanics tutorial*.
- [27] Challis J.: Producing physiologically realistic individual muscle force estimations by imposing constraints when using optimization technique. *Medical Engineering & Physics* 19, 1997, s. 253-261.
- [28] Optimum length of muscle contraction. Chang Y.-W., Su F.-C., Wu H.-W., An K.-N. *Clinical Biomechanics* 14, 1999, s. 537-542.
- [29] Charlton I.W., Johson G.R.: Application of spherical and cylindrical wrapping algorithms in a musculoskeletal model of the upper limb. *Journal of Biomechanics*. 34, 2001, s. 1209-1216.
- [30] Cheng E.J., Brown I.E., Loeb G.E.: Virtual muscle – a computational approach to understanding the effects of muscle properties on motor control. *Journal of Neuroscience Methods* 101, 2000, s. 117-130.
- [31] Crowninshield R.D., Brand R.A.: A physiologically based criterion of muscle force prediction in locomotion. *Journal of Biomechanics* 14, 1981, s. 793-801.
- [32] Czaplicki A.: How does the optimal solution differ from the exact one? *Materiały Międzynarodowej Konferencji BIOMECHANICS 2006, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej*, Nr 26, 2006, s. 75-80.
- [33] Biologia. Czechowski W., Gajewski W., Garbaczewska G., Wakowski E., Stark Z., Skwarło-Sońta K., Trojan P. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Rolnicze i Leśne, 1991.
- [34] Dahlquist G., Björk Å.: *Metody numeryczne*. Warszawa: PWN, 1983.
- [35] Daniel M.: Mathematical modeling of the hip joint loading. *Bulletin of Applied Mechanics* 3, 2004, s. 201-215.
- [36] Daniel M., Iglíč A., Kralj-Iglíč V., Konvičková S.: Computer system for definition of the quantitative geometry of musculature from CT images. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 8, 2005, s. 25-29.
- [37] Delp S. L., Loan P.: A graphic-based software system to develop and analyze models of musculoskeletal structures. *Computers in Biology and Medicine* 25, 1995, s. 21-34.
- [38] Delp S.L.: Surgery simulation – a computer graphics system to analyze and design musculoskeletal reconstructions of the lower limb. PhD. thesis, Stanford: Stanford University Press 1990.
- [39] Dietrich M., Kedzior K., Zagrajek T.: Wyznaczenie obciążeń układu mięśniowo-szkieletowego. *Biomechanika i inżynieria rehabilitacyjna, cykl Biocybernetyka i Inżynieria Biomedyczna*, tom 5, 2000, s. 223-258.
- [40] Dindorf R.: Rozwój zaopatrzenia ortopedycznego elementami płynowymi. *Pomiary Automatyka Robotyka* 6, 2004, s. 4-9.
- [41] Skeletal muscle transverse strain during isometric contraction at different lengths . van Donkelaar C.C., Willems P.J.B., Muijtjens A.M.M., Drost M.R. *Journal of Biomechanics* 32, 1999, s. 755-762.
- [42] Muscular synergism – II. A minimum fatigue criterion for load between synergistic muscles. Dul J., Johnson G.E., Shiavi R., Townsend M.A. *Journal of Biomechanics* 17, 1984, s. 663-673.
- [43] Muscular synergism – I. On criteria for load sharing between synergistic muscles. Dul J., Townsend M.A., Shiavi R., Johnson G.E. *Journal of Biomechanics* 17, 1984, s. 663-673.
- [44] Epstein M., Herzog W.: Aspects of skeletal muscle modeling. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Biological Sciences* 358, 2003, London, s. 1445-1452.

- [45] Model-based estimation of muscle forces exerted during movements. Erdemir A., McLean S., Herzog W., van der Bogert A. *Clinical Biomechanics* 22, 2007, s. 131-154.
- [46] Ettema G.J., Meijer K.: Muscle contraction history – modified Hill versus an exponential decay model. *Biological Cybernetics* 83, 2000, s. 491-500.
- [47] Ewy Z.: *Zarys fizjologii zwierząt*. Warszawa: PWN 1980.
- [48] Fidelus K.: *Biomechaniczne parametry kończyn górnych człowieka*. Roczniki naukowe Akademii Wychowania Fizycznego w Warszawie, tom XV, Warszawa: PWN, 1971.
- [49] Topics in Bio-Mechanical Engineering. Fitz Patrick D., Commins E., Doheny E., O'Malley F., O'Malley M., Nolan P. Trinity Centre for Bioengineering & National Centre for Biomedical Engineering Science, 2004, s. 235-248.
- [50] Extension of a state-of-the-art optimization criterion to predict co-contraction. Forster E., Simon U., Augast P., Claes L. *Journal of Biomechanics* 37, 2004, s. 577-581.
- [51] Fortuna Z., Macukow B., Wąsowski J.: *Metody numeryczne*. Warszawa: WNT 1993.
- [52] Freud J., Takala E.P.: A dynamic model of the forearm including fatigue. *Journal of Biomechanics* 34, 2001, s. 597-605.
- [53] Garner B.A., Pandy M.G.: A kinematic model of the upper limb based on the visible human project (VHP) Image Dataset. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 2, 1999, s. 107-124.
- [54] Garner B.A., Pandy M.G.: The obstacle-set method for representing muscle paths in musculoskeletal models. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 3, 2000, s. 1-30.
- [55] Garner B.A., Pandy M.G.: Musculoskeletal model of the upper limb based on the visible human male dataset. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 4, 2001, s. 93-126.
- [56] Garner B.A., Pandy M.G.: Estimation of musculotendon properties in the human upper limb. *Annals of Biomedical Engineering* 31, 2003, s. 207-220.
- [57] Isometric muscle length-tension curves do not predict angle-torque curves of human wrist in continuous active movements. Gillard D., Yakovenko S., Cameron T., Prochazka A. *Journal of Biomechanics* 33, 2000, s. 1341-1348.
- [58] Muscle activity in rapid multi-degree-of-freedom elbow movements: solutions from a musculoskeletal model. Gonzalez R.V., Abraham L.D., Barr R.E., Buchanan T.S. *Biological Cybernetics* 80, 1999, s. 357-369.
- [59] Gonzalez R.V., Buchanan T.S., Delp S.L.: How muscle architecture and moment arms affect wrist flexion-extension moments. *Journal of Biomechanics* 30, 1997, s. 705-712.
- [60] Gottlieb G.L.: On the voluntary movement of compliant loads by parcellated control mechanics. *Journal of Neurophysiology* 76, 1996, s. 3207-3229.
- [61] Gottlieb G.L.: Muscle activation patterns during two types of voluntary single-joint movement. *Journal of Neurophysiology* 80, 1998, s. 1860-1867.
- [62] Guzik A.: *Modelowanie i identyfikacja sił mięśni kończyny górnej człowieka*. Praca doktorska (2005), Politechnika Śląska, Gliwice.
- [63] Guzik A., Michnik R., Jurkojć J.: *Identyfikacja sił mięśniowych kończyny górnej człowieka w trakcie wykonywania wybranych ćwiczeń rehabilitacyjnych*. Materiały Konferencji „Majówka Młodych Biomechaników”, Konferencja towarzysząca Międzynarodowemu Kongresowi Naukowemu „Worldwide Congress on Materials and Manufacturing Engineering and Technology COMMENT 2005”, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej, Nr 27, 2005, s. 32-37.
- [64] Happee R., Van der Helm F.C.T.: The control of shoulder muscles during goal directed movements, an invert dynamic analysis. *Journal of Biomechanics* 28, 1995, s. 1179-1192.
- [65] Hatze H.: Hyposensitivity of skeletal motions to neutral control perturbations – a challenging concept in neuromuscular control. *Proceedings of the XIth International Biomechanics Seminar „The problem of muscular synergism”*. Studia i Monografie Akademii Wychowania Fizycznego we Wrocławiu, Nr 55, 1998, s. 61-72.
- [66] Hatze H.: An efficient simulation method for discrete value controlled large-scale neuromyoskeletal system models. *Journal of Biomechanics* 34, 2001, s. 267-271.



- [67] Hatze H.: The fundamental problem of myoskeletal inverse dynamics and its implications. *Journal of Biomechanics* 35, 2002, s. 109-115.
- [68] Hausmanowa-Petrusewicz I.: Choroby nerwowo-mięśniowe. Warszawa: PWN, 1999.
- [69] Helm van der F.C.T., Chadwick E.K.J.: A forward-dynamic shoulder and elbow model. In *Proceeding of the 4th Meeting of the International Shoulder Group, 2002, Cleveland*.
- [70] Geometry parameters for musculoskeletal modeling of the shoulder system. Helm van der F.C.T., Veeger H.E.J., Pronk G.M., van der Woude L.H.V., Rozendal R.H. *Journal of Biomechanics* 25, 1992, s. 129-144.
- [71] Herzog W.: History dependence of force production in skeletal muscle – a proposal for mechanisms. *Journal of Electromyography and Kinesiology* 8, 1998, s. 111-117.
- [72] Herzog W.: Muscle synergies during voluntary movement. *Proceedings of the XIth International Biomechanics Seminar „The problem of muscular synergism”*. *Studia i Monografie Akademii Wychowania Fizycznego we Wrocławiu*, Nr 55, 1998, s. 7-22.
- [73] Variations in force-time histories of cat gastrocnemius, soleus and plantaris muscles for consecutive walking steps. Herzog W., Zatsiorsky V., Prilutsky B.I., Leonard T.R. *Journal of Experimental Biology* 191, 1994, s. 19-36.
- [74] Hill A.V.: *First and last experiments in muscle mechanics*. Cambridge, 1970.
- [75] Holzbaur K.R.S., Murray W.M., Delp S.L.: A model of the upper extremity for simulating musculoskeletal surgery and analyzing neuromuscular control. *Annals of Biomedical Engineering* 33, 2005, s. 829-840.
- [76] Upper limb muscle volumes in adult subjects. Holzbaur K.R.S., Murray W.M., Gold G.E., Delp S.L. *Journal of Biomechanics* 40, 2007, s. 742-749.
- [77] Huijing P.A.: Parameter interdependence and success of skeletal muscle modeling. *Human Movement Science* 14, 1995, s. 443-486.
- [78] Huijing P.A.: Muscle, the motor of movement: properties in function, experiment and modeling. *Journal of Electromyography and Kinesiology* 8, 1998, s. 61-77.
- [79] Johansson T., Meier P., Blickhan R.: A finite element model for the mechanical analysis of skeletal muscles. *Journal of Theoretical Biology* 206, 2000, s. 131-149.
- [80] Kaya M., Leonard T., Herzog W.: Coordination of medial gastrocnemius and soleus forces during cat locomotion. *Journal of Experimental Biology* 206, 2003 s. 3645-3655.
- [81] Kędzior K.: Modelowanie własności biomechanicznych siłowników napędu mięśniowego. *Prace Naukowe z Mechaniki, zeszyt 56*, Warszawa: Wyd. Politechniki Warszawskiej, 1978.
- [82] Komputerowo wspomaganą analizą obciążeń układu ruchu człowieka przy wykonywaniu pracy fizycznej. Kędzior K., Zagrajek T., Kamińska J., Roman-Liu D., Tokarski T. *Proceedings of Conference „Biomechanics – Modelling, Computational Methods, Experiments and Biomedical Applications”*, Łódź, 7-8 grudnia, 1998, s. 121-126.
- [83] Klein Breteler M.D., Spoor C.W., van der Helm F.C.T.: Measuring muscle and joint geometry parameters of a shoulder for modeling purposes. *Journal of Biomechanics* 32, 1999, s. 1191-1197.
- [84] Komi P. V.: Stretch-shortening cycle: a powerful model to study normal and fatigued muscle. *Journal of Biomechanics* 33, 2000, s. 1197-1206.
- [85] Komura T., Nagano A.: Evaluation of the influence of muscle deactivation on other muscles and joints during gait motion. *Journal of Biomechanics* 37, 2004, s. 425-436.
- [86] Koo T.K.K., Mak A.F.T.: Feasibility of using EMG driven neuromusculoskeletal model for prediction of dynamic movement of the elbow. *Journal of Electromyography and Kinesiology* 15, 2005, s. 12-26.
- [87] Koo T.K.K., Mak A.F.T., Hung L.K.: In vivo determination of subject - specific musculotendon parameters: applications to the prime elbow flexors in normal and hemiparetic subjects. *Clinical Biomechanics* 17, 2002, s. 390-399.
- [88] Kornecki S.: Identyfikacja własności biomechanicznych procesu stabilizacji mięśniowej. *Studia i monografie AWF we Wrocławiu, zeszyt 11*, Wrocław, 1986.
- [89] Kornecki S., Janura A., Piotrowska A.: Stabilizing functions of muscles and their electromyographic shares. *Proceedings of the XIth International Biomechanics Seminar „The problem of muscular synergism”*. *Studia i Monografie Akademii Wychowania Fizycznego we Wrocławiu*, Nr 55, 1998, s. 23-34.

- [90] Kosma Z.: Podstawy metod numerycznych. Radom: Wydawnictwo WSI, 1996, 2/1996.
- [91] Musculoskeletal parameters of muscles crossing the shoulder and elbow and the effect of sarcomere length sample size on estimation of optimal muscle length. Langenderfer J., Jerabek S.A., Thangamami V.B., Kuhn J.E., Hughes R.E. *Clinical Biomechanics* 19, 2004, s. 664-670.
- [92] Lemay M.A., Crago P.E.: A dynamic model for simulating movements of the elbow, forearm and wrist. *Journal of Biomechanics* 29, 1996, s. 1319-1330.
- [93] A framework for structured modeling of skeletal muscle. Lemos R.R., Epstein M., Herzog W., Wyvill B. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 7, 2004, s. 305-317.
- [94] Li G., Pierce J.E., Herndon J.H.: A global optimization method for prediction of muscles forces of human musculoskeletal system. *Journal of Biomechanics* 39, 2006, s. 522-529.
- [95] Lieber R., Fridén J.: Mechanisms of muscle injury after eccentric contraction. *Journal of Science and Medicine in Sport* 2, 1999, s. 253-265.
- [96] Modelling functional effects of muscle geometry. van der Linden B.J.J.J., Koopman H.F.J.M., Grootenboer H.J., Huijing P.A. *Journal of Electromyography and Kinesiology* 8, 1998, s. 101-109.
- [97] Linnamo V., Bottas R., Komi P.V.: Force and EMG power spectrum during and after eccentric and concentric fatigue. *Journal of Electromyography and Kinesiology* 10, 2000, s. 293-300.
- [98] Motor unit activation patterns during isometric, concentric and eccentric actions at different force levels. Linnamo V., Moritani T., Nicol C., Komi P.V. *Journal of Electromyography and Kinesiology* 13, 2003, s. 93-101.
- [99] Linnamo V., Strojnik V., Komi P.V.: EMG power spectrum and features of the superimposed M-wave during voluntary eccentric and concentric actions at different activation levels. *European Journal of Applied Physiology* 86, 2002, s. 534-540.
- [100] van Loocke M., Lyons C.G., Simms C.: The three-dimensional mechanical properties of skeletal muscle: experiments and modeling. *Topics in Bio-Mechanical Engineering*, Trinity Centre for Bioengineering & National Centre for Biomedical Engineering Science, 2004, s. 216-234.
- [101] de Luca C.J.: Surface electromyography – detection and recording. 2002, Delsys.
- [102] de Luca C.J.: The use of surface electromyography in biomechanics. *Journal of Applied Biomechanics* 13, 1997, s. 135-163.
- [103] Maas H., Baan G.C., Huijing P.A.: Muscle force is determined also by muscle relative position: isolated effects. *Journal of Biomechanics* 37, 2004, s. 99-110.
- [104] Controlled intermittent shortening contractions of a muscle-tendon complex: muscle fiber damage and effects on force transmission from a single head of rat EDL. Maas H., Lehti T.M., Tihonen V., Korhonen J., Huijing P.T. *Journal of Muscle Research and Cell Motility* 26, 2005, s. 259-273.
- [105] Manal K., Buchanan T.S.: A one parameter neural activation to muscle activation model: estimating isometric joint moments from electromyograms. *Journal of Biomechanics* 36, 2003, s. 1197-1202.
- [106] A real-time EMG-driven virtual arm. Manal K., Gonzalez V., Lloyd D.G., Buchanan T.S. *Computers in Biology and Medicine* 32, 2002, s. 25-36.
- [107] Maurel W.: 3D Modelling of the Human Upper Limb including the biomechanics of joints, muscles and soft tissues. PhD. Thesis (1998), Ecole Polytechnique Federal de Lausanne Press, Lausanne.
- [108] A Hill type model of rat medial gastrocnemius muscle that accounts for shortening history effects. Meijer K., Grootenboer H.J., Koopman H.F.J.M., van der Linden B.J.J.J., Huijing P.A. *Journal of Biomechanics* 31, 1998, s. 555-563.
- [109] Michnik R.: Optymalizacja dynamiczna w identyfikacji sił mięśniowych podczas chodu. *Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej*, Nr 19, Politechnika Śląska, Gliwice, 2002.
- [110] Michnik R., Tejszewska D.: Modelowanie sił mięśniowych podczas chodu. *Materiały Międzynarodowej Konferencji BIOMECHANICS 2000*, Acta of Bioengineering and Biomechanics 2000, Vol. 2, Supplement 1, 2000, s. 337-342.
- [111] Minekus J.: Kinematical model of the elbow joint. Research raport. 1997, Technical University of Delft and Leiden University.
- [112] Morecki A., Ekiel J., Fidelius K.: *Bionika ruchu*. Warszawa: PWN, 1971.

- [113] Morecki A., Ekiel J., Fidelus K.: *Cybernetyczne systemy ruchu kończyn zwierząt i robotów*. Warszawa: PWN, 1979.
- [114] Mrozowski J., Awrejcewicz J.: *Podstawy biomechaniki*. Politechnika Łódzka, Łódź, 2004.
- [115] Murray W.M., Buchanan T.S., Delp S.L.: The isometric functional capacity of muscles that cross the elbow. *Journal of Biomechanics* 33, 2000, s. 943-952.
- [116] Murray W.M., Buchanan T.S., Delp S.L.: Scaling of peak moment arms of elbow muscles with upper extremity bone dimensions. *Journal of Biomechanics* 35, 2002, s. 19-26.
- [117] Murray W.M., Delp S.L., Buchanan T.S.: Variation of muscle moment arms with elbow and forearm position. *Journal of Biomechanics* 28, 1995, s. 513-525.
- [118] Narici M.: Human skeletal muscle architecture studied in vivo by non-invasive imaging techniques: functional significance and applications. *Journal of Electromyography and Kinesiology* 9, 1999, s. 97-103.
- [119] Nigg B.M., Herzog W.: *Biomechanics of the musculo-skeletal system*. John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
- [120] Oracz M.: Zastosowanie termomechaniki ośrodków ciągłych do modelowania tkanki mięśniowej. Praca magisterska (2002), Politechnika Warszawska, Warszawa.
- [121] Palczewski A.: *Równania różniczkowe zwyczajne*. Warszawa: WNT, 1999.
- [122] Palmieri R.M., Ingersoll C.D., Hoffman M.A.: The Hoffmann reflex – methodologic considerations and applications for use sports medicine and athletic training research. *Journal for Athletic Training* 39, 2004, s. 268-277.
- [123] Pandy M.G.: Computer modeling and simulation of human Movement. *Annual Review of Biomechanical Engineering* 3, 2003, s. 245-273.
- [124] Pierce J.E., Li G.: Muscle forces predicted using optimization methods are coordinate system dependent. *Journal of Biomechanics* 38, 2005, s. 695-702.
- [125] Platzer W.: *Podręczny atlas anatomii człowieka – narząd ruchu, T. 2*. Braunschweig: Wydawnictwo Medizinische Słotwiński Verlag, 1997.
- [126] Relationship between mechanical cost functions nad muscle oxygen consumption. Praagman M., Veeger H.E.J., van der Helm F.C.T., Chadwick E.K.J. 4th Meeting of the International Shoulder Group, Cleveland, 2002.
- [127] Is coordination of two-joint leg muscles during load lifting consistent with the strategy of minimum fatigue? Prilutsky B.I., Isaka T., Albrecht A.M., Gregor R.J. *Journal of Biomechanics* 31, 1998, s. 1025-1034.
- [128] Raikova R.: A model of the flexion-extension motion in the elbow joint – some problems concerning muscle forces modeling and computation. *Journal of Biomechanics* 29, 1996, s. 763-772.
- [129] Raikova R.: Intermediate problems in biomechanics – which non-linear objective functions may be used? Proceedings of the XIth International Biomechanics Seminar „The problem of muscular synergism”. *Studia i Monografie Akademii Wychowania Fizycznego we Wrocławiu*, 1998, Nr 55, s. 55-60.
- [130] Raikova R.: About weight factors in the non-linear objective functions used for solving indeterminate problems in biomechanics. *Journal of Biomechanics* 32, 1999, s. 689-694.
- [131] Raikova R.: Investigation of the peculiarities of two-joint muscles using a 3 DOF model of the human upper limb in the sagittal plane: an optimization approach. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* 4, 2001, s. 463-490.
- [132] Raikova R.T., Aladjov H.T.: Hierarchical genetic algorithm versus static optimization – investigation of elbow flexion and extension movements. *Journal of Biomechanics* 35, 2002, s. 1123-1135.
- [133] Raikova R.T., Aladjov H.T.: Simulation of the motor units control during a fast elbow flexion in the sagittal plane. *Journal of Electromyography and Kinesiology* 14, 2004, s. 187-195.
- [134] Raikova R.T., Prilutsky B.I.: Sensitivity of predicted muscle forces to parameters of the optimization-based human leg model revealed by analytical and numerical analyses. *Journal of Biomechanics* 34, 2001, s. 1243-1255.
- [135] Rasmussen J., Damsgaard M., Voigt M.: Muscle recruitment by the min/max criterion – a comparative numerical study. *Journal of Biomechanics* 34, 2001, s. 409-415.

- [136] Rehbinder H., Martin C.: A control theoretic model of the forearm. *Journal of Biomechanics* 34, 2001, s. 741-748.
- [137] Roberts T.: The integrated function of muscles and tendons during locomotion. *Comparative Biochemistry and Physiology Part A* 133, 2002, s. 1087-1099.
- [138] Roman-Liu D., Kędzior K., Rzymkowski C.: Optimization of upper limb location in static conditions. *Proceedings of the XIth International Biomechanics Seminar „The problem of muscular synergism”*. *Studia i Monografie Akademii Wychowania Fizycznego we Wrocławiu*, Nr 55, 1998, s. 93-102.
- [139] Rutkowski D.: *Metody optymalizacji w teorii sterowania*. Gdańsk: Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 1974, s. 10-12.
- [140] Sawicki A.: *Rheology of reinforced soil*. Institute of Hydro-Engineering of the Polish Academy of Sciences. Gdańsk: 1999.
- [141] Scovil Y.C., Ronsky J.L.: Sensivity of a Hill-based muscle model to perturbations in model parameters. *Journal of Biomechanics* 33, 2006, s. 2055-2063.
- [142] Seireg A., Arvikar R.: *Biomechanical Analysis of the Musculoskeletal Structure for Medicine and Sports*. 1989, Hemisphere Publishing Corporation.
- [143] Shapiro M.B., Gottlieb G.L., Corcos D.M.: EMG responses to an unexpected load in fast movement are delayed with an increase in the expected movement time. *Journal of Neurophysiology* 91, 2004, s. 2135-2147.
- [144] Electromyographic responses to an unexpected load in fast voluntary movement – descending regulation of segmental reflexes. Shapiro M.B., Gottlieb G.L., Moore C.G., Corcos D.M., *Journal of Neurophysiology* 88, 2002, s. 1059-1063.
- [145] Shue G.-H.: *System models of skeletal muscle*. PhD. Thesis (1995). Case Western Reserve University.
- [146] Shue G.-H., Crago P.: Muscle-tendon model and length history-dependent activation-velocity coupling. *Annals of Biomedical Engineering* 26, 1998, s. 369-380.
- [147] Siemiński A.: Modelowanie współdziałania mięśni – efekt łagodnego nasycenia jako warunek konieczny zgodności przewidywań kryteriów optymalizacyjnych z własnościami realnych napędów mięśniowych. *Studia i monografie AWF we Wrocławiu*, Nr 29, Wrocław, 1992, s. 81-94.
- [148] Siemiński A.: Modelowanie i badanie współdziałania mięśni szkieletowych człowieka w warunkach dynamicznych na przykładzie kończyny dolnej. *Studia i monografie AWF we Wrocławiu*, Nr 40, Wrocław, 1994, s. 149-173.
- [149] Sigorski W.P.: *Математический аппарат инженера*. Kijów: Wydawnictwo „Technika” 1977.
- [150] Tadeusiewicz R., Izworski A., Majewski J.: *Biometria*. Kraków: Wydawnictwo Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, 1993.
- [151] Thelen D.G., Anderson F.C., Delp S.L.: Generating dynamic simulations of movement using computed muscle control. *Journal of Biomechanics* 33, 2003, s. 321-328.
- [152] Tregoubov V.: Development of the muscle kinetic theory and cyclic movement. *Materiały Międzynarodowej Konferencji BIOMECHANICS 2003, Acta of Bioengineering and Biomechanics 2003, Vol. 6, Supplement 1, 2003, s. 512-519.*
- [153] Tucker K.J., Türker K.S.: A new method to estimate signal cancellation in the human maximal M-wave. *Journal of Neuroscience Methods* 149, 2005, s. 31-41.
- [154] Inertia and muscle contraction parameters for musculoskeletal modelling of the shoulder mechanism. Veeger H.E.J., van der Helm F.C.T., van der Woude L.H.V., Pronk G.M., Rozendal R.H. *Journal of Biomechanics* 24, 1991, s. 615-629.
- [155] Parameters for modelling the upper extremity. Veeger H.E.J., Yu B., An K.N., Rozendal R.H. *Journal of Biomechanics* 30, 1997, s. 647-652.
- [156] Wang J.H.C.: Mechanobiology of tendon. *Journal of Biomechanics* 39, 2006, s. 1563-1582.
- [157] Wilkie D.R.: *Mięsień*. Warszawa: Państwowy Zakład Wydawnictw Lekarskich, 1974.
- [158] Winters J.: How detailed should muscle models be to understand multi-joint movement coordination? *Human Movement Science* 14, 1995, s. 401-442.
- [159] Wittbrodt E., Wojnicz W.: Modelling and simulation of striated skeletal muscle and groups of muscles in arm-forearm system 2D. *Materiały Międzynarodowej Konferencji*

- BIOMECHANICS 2003, Acta of Bioengineering and Biomechanics 2003, Vol. 6, Supplement 1, 2003, s. 551-556.
- [160] Wojnicz W.: Modelowanie zachowania mięśnia szkieletowego poprzecznie prążkowanego i czynności odruchowej przedramienia. IV Seminarium Naukowe Środowiskowego Studium Doktoranckiego „Współczesne technologie i konwersja energii” 24-25 września 2001, s. 175-184.
- [161] Wojnicz W.: Modelowanie i symulacja zachowania mięśnia szkieletowego poprzecznie prążkowanego oraz zespołu mięśni zginacz-prostownik w uproszczonym układzie ramię-przedramię. V Seminarium Naukowe Środowiskowego Studium Doktoranckiego „Współczesne technologie i konwersja energii” 16-18 września 2002, s. 175-184.
- [162] Wojnicz W., Wittbrodt E.: Modelowanie i symulacja zachowania zespołu mięśni szkieletowych poprzecznie prążkowanych na przykładzie ruchów przedramienia w dwóch wymiarach. Materiały XIII Krajowej Konferencji Naukowej „Biocybernetyka i Inżynieria Biomedyczna”, Gdańsk, Zakład Poligraficzny Politechniki Gdańskiej, tom 1, 2003, s. 314-319.
- [163] Wojnicz W., Wittbrodt E.: Modelowanie i symulacja zachowania mięśnia szkieletowego o różnych własnościach dynamicznych. Materiały Konferencji „Majówka Młodych Biomechaników”, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej, Nr 24, 2004, s. 219-224.
- [164] Wojnicz W., Wittbrodt E.: Modelowanie zachowania mięśnia szkieletowego w stanie dynamicznym. Proceedings of The International Conference BIOMECHANICS 2004, Acta of Bioengineering and Biomechanics 2004, Vol. 6, Supplement 1, 2004, s. 404-408.
- [165] Wojnicz W., Wittbrodt E.: Próba modelowania i optymalnego sterowania zespołem mięśni ramienia-przedramienia w stanie dynamicznym. Proceedings of The International Conference BIOMECHANICS 2004, Acta of Bioengineering and Biomechanics 2004, Vol. 6, Supplement 1, 2004, s. 409-413.
- [166] Wojnicz W., Wittbrodt E.: Modelowanie zachowania zespołu mięśni szkieletowych w układzie ramię-przedramię. Materiały Konferencji „Majówka Młodych Biomechaników”, Konferencja towarzysząca Międzynarodowemu Kongresowi Naukowemu "Worldwide Congress on Materials and Manufacturing Engineering and Technology COMMENT 2005", Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej, Nr 27, 2005, s. 152-159.
- [167] Wojnicz W., Wittbrodt E.: Modelowanie zachowania zespołu mięśni szkieletowych ramienia-przedramienia i próba optymalnego sterowania tym układem. Materiały XIV Krajowej Konferencji Naukowej „Biocybernetyka i Inżynieria Biomedyczna”, T. 1, Częstochowa, 2005, s. 160-165.
- [168] Wojnicz W.: Modelowanie zachowania zespołu mięśni szkieletowych układu ramię-przedramię. Praca doktorska (2009). Politechnika Łódzka, Wydział Mechaniczny, s. 218.
- [169] Wolcott P.T.: Modelling Human Locomotion. Rapport. 2003, Aalborg University.
- [170] Wu J.Z., Herzog W.: Modelling concentric contraction of muscle using an improved cross – bridge model. Journal of Biomechanics 32, 1999, s. 837-848.
- [171] Yamaguchi G.T., Moran D.W., Si J.: A computational efficient method for solving the redundant problem in biomechanics. Journal of Biomechanics 28, 1995, s. 999-1005.
- [172] A survey of human musculotendon actuator parameters. Yamaguchi G.T., Sawa A.G.U., Moran D.W., Fessler M.J., Winters J.M. Multiple muscle systems – Biomechanics and Movement Organization, 1990, Springer-Verlag.
- [173] Effects of inter- and extramuscular myofascial force transmission on adjacent synergistic muscles – assessment by experiments and finite-element modeling. Yucesoy C.A., Koopman B.H.F.J.M., G.C. Baan, Grootenboer H.J., Huijing P.A. Journal of Biomechanics 36, 2003, s. 1797-1811.
- [174] Three-dimensional finite element modeling of skeletal muscle using a two-domain approach – linked fiber-matrix mesh model. Yucesoy C.A., Koopman B.H.F.J.M., Huijing P.A., Grootenboer H.J. Journal of Biomechanics 35, 2002, s. 1253-1262.
- [175] Mechanisms causing effects of muscle position on proximo-distal muscle force differences in extra-muscular myofascial force transmission. Yucesoy C.A., Maas H., Koopman B.H.F.J.M., Grootenboer H.J., Huijing P.A. Medical Engineering & Physics 28, 2006, s. 214-226.

- 
- [176] Zagrobelny Z., Woźniewski M.: Biomechnaika ogólna – część kliniczna. Akademia Wychowania Fizycznego we Wrocławiu, Wrocław: 1999.
  - [177] Atlas anatomii człowieka. Zespół redakcyjny Parramon, Wydanie II, Panteon, Wrocław, 1999.
  - [178] Zong-Ming L., Latash M.L., Zatsiorsky V.M.: Force sharing among fingers as a model of the redundancy problem. *Journal of Experimental Brain Resources* 119, 1998, s. 276-286.

## **Modele dyskretne w analizie dynamiki mięśni szkieletowych układu ramię-przedramię (streszczenie)**

Monografia jest poświęcona modelowaniu zachowania zespołu mięśni szkieletowych poprzecznie prążkowanych, które należą do aparatu ruchowego człowieka i pozwalają na wykonywanie: ruchów określanych przez świadomość, ruchów wyuczonych (zautomatyzowanych) oraz odruchów nieświadomych. Zaproponowano dwa nowe modele obliczeniowe: model zachowania mięśnia oraz model zachowania zespołu mięśni układu ramię-przedramię. Podano wyniki symulacji numerycznych zachowania modelu mięśnia i zespołu mięśni będące podstawą do weryfikacji modeli.

Monografia składa się z siedmiu rozdziałów. Pierwszy rozdział stanowi wstęp. W drugim rozdziale podano wprowadzenie do problematyki, w tym opis fizjologiczny badanych układów oraz analizę obecnie stosowanych w biomechanice modeli zachowania mięśnia i modeli zachowania zespołu mięśni. W trzecim rozdziale omówiono koncepcje nowych modeli zachowania mięśnia i zespołu mięśni w układzie ramię-przedramię, a także koncepcje sterowania tymi modelami. W czwartym rozdziale przedstawiono wyniki symulacji numerycznych zaproponowanych modeli zachowania mięśnia i zespołu mięśni, a także omówiono wyniki weryfikacji jakościowej. Piąty rozdział zawiera podsumowanie pracy. W szóstym rozdziale opisano algorytmy obliczeniowe i przekształcenia matematyczne. Siódmy rozdział zawiera wykaz literatury.

## **Discrete models in dynamic analysis of skeletal muscles of the arm-forearm system (summary)**

The monograph is devoted to modeling the behavior of striated skeletal muscles' group. Those muscles belonging to human movement apparatus allow to perform reflex, conscious and unconscious movements. Two new computational models are presented. The first one describes the behavior of single muscle and the second one describes the behavior of muscles' group acting on the arm-forearm system. The simulation results of these two models are presented. On the basis of these results the verification procedure has been carried out.

The monograph consists of seven chapters. The first chapter contains an introduction. The second chapter is devoted to the inspection of muscles' physiology and models used nowadays in biomechanics to describe a behavior of single muscle and muscles' groups. In the third chapter new concepts of modeling (the single muscle behavior and the muscles' group behavior) and the concepts of steering are described. The fourth chapter is devoted to numerical simulation of the results of the proposed models. There are also described the results of the quality verification. The fifth chapter contains the conclusions. The sixth chapter is devoted to describing of muscle physiology, algorithms and mathematical transformations used in the calculations. The seventh chapter contains the list of bibliography.



# SKOROWIDZ

## A

acetylocholina .....	17
aktyna .....	16
- auksotoniczny .....	19, 99
atrofia tkanki mięśniowej .....	20
akton mięśniowy .....	13, 48, 66

## B

bilans energetyczny .....	157
bloczek .....	20, 62
- kości ramiennej .....	29, 30, 31
blona cytoplazmatyczna .....	13
- maziowa .....	31
- międzykostna .....	29, 30
- włóknista .....	31
bodziec supramaksymalny .....	18
bruzda międzyguzkowa .....	23, 24
- nerwu promieniowego .....	24, 25
brzusiec .....	13, 66

## C

charakterystyka dynamiczna mięśnia .....	37, 38
- relaksacji naprężenia mięśnia .....	39
- - długości mięśnia .....	39
- - odkształcenia mięśnia .....	39
- - siły mięśnia .....	39
- statyczna mięśnia .....	37
chronaksja .....	35
chronoaksymetria .....	35
chrząstka szklista .....	29
ciałka blaszkowate Vater-Paciniiego .....	34
- Krausego .....	34
- Meissnera .....	34
- Ruffiniego .....	34
ciało tłuszczowe .....	20, 21
cysterny końcowe .....	16
cytoplazma .....	13
czucie stawowe .....	33

## D

dokładność korekcji .....	191
dolna część brzucha .....	66
dołek stawowy kości promieniowej .....	29, 30
droga dośrodkowa .....	32, 39
- korowo-rdzeniowa .....	32
- odśrodkowa .....	32
- piramidowa .....	32
dynamiczne równanie obrotu przedramienia .....	105, 108

dystalna pozycja .....	13
------------------------	----

## E

efekt „ściskania” mięśnia .....	77, 111
ekscentryczny .....	19, 38, 94, 130
elektromiografia elementarna .....	36
- powierzchniowa .....	36
EMG .....	36

## F

filamenty cienkie .....	16
- grube .....	16
funkcja Heaviside’a .....	86, 130
- jednego impulsu prostokątnego .....	85
- o złożonym kształcie .....	86
- - - z pobudzeniem serią <i>n</i> - prostokątnych impulsów symetrycznych .....	86
- pobudzenia serią <i>n</i> -prostokątnych impulsów symetrycznych .....	86

## G

globalny nieruchomy układ współrzędnych .....	103, 109
głowa krótka .....	21
- długa .....	21
- kości .....	24
- ramienna .....	25
- łokciowa .....	25
główka kości ramiennej .....	29, 30
górna część brzucha .....	66
grzebień nadkłykciowy .....	27
guzek nadpanewkowy .....	23
- podpanewkowy .....	24, 25
- większy .....	24
guzowatość łokciowa .....	23
- promieniowa .....	23, 24

## H

hamowanie recyprokalne .....	35
heksagonalny układ filamentów .....	16
hipoteza Bernsteina .....	32
hypomochlion .....	24

## I

identyfikacja parametryczna .....	83
- strukturalna .....	83
implantowany przetwornik siły .....	36
interneurony .....	33
- komórek Renshawa .....	33

inwazyjna metoda mierzenia siły .....	36
izometryczny .....	95
izotoniczny .....	94

**J**

jama stawowa .....	29
jądra komórkowe .....	13
jednostka motoryczna .....	17

**K**

kaletka maziowa .....	20
kanaliki poprzeczne .....	16
- T .....	16
kąt pierzastości .....	42, 45
kloniczny .....	20
koaktywacją alfa-gamma .....	34
komórki satelitarne .....	13
konceptje sterowania .....	117
kontinuum zdyskretyzowane .....	63
koordynacja ruchu .....	32
kość grochowata .....	26, 27
- haczykowa .....	26, 27
- łokciowa .....	23, 24, 25, 26, 27
- promieniowa .....	23, 24, 25, 26, 27
- ramienna .....	23, 24, 25, 26
- śródreżcza .....	26, 27
krażek Z .....	16
- Merkela .....	34
krok całkowania .....	191
kryterium energetyczne (I postać) .....	55
- - (II postać) .....	56
- łagodnego nasycenia .....	55
- maksymalizujące pionową współrzędną $Y_{cm}$ .....	57
- maksymalnej wytrzymałości Crowin- shield'a i Brand'a .....	55
- min/max .....	57
- minimalizacji zmęczenia mięśni podczas realizacji wyuczonyj aktywności zespołu mięśni .....	56
- minimalizujące drgania pochodnej przyspie- szenia .....	58
- - odchylenia od trajektorii ruchu kończyny .....	58
- - wydatek metaboliczny .....	56
- - zużycie energii .....	58
- - - energii metabolicznej .....	58
- minimalnej sumy pracy sił wewnętrznych (podniesionych do potęgi $\lambda$ ) .....	100
- - sumy sił wewnętrznych (podniesionych do potęgi $\lambda$ ) .....	100
- minimalno-czasowe .....	57
- najmniejszej sumy kwadratów aktywacji mięśni .....	56
- - - momentów sił .....	54
- - - - reakcji i/lub sił więzadeł w stawach .....	55

- - - sił .....	54
- - - - reakcji i/lub sił więzadeł w stawach .....	55
- - - - ważonych podniesionych do potęgi $\lambda$ .....	55
- - - ważonych prac mięśni .....	54
- optymalizacyjne .....	54
- uwzględniające procesy metaboliczne .....	57
- zapewniające stabilność układu .....	57
krzywa Blixa .....	37
kurcz kloniczny .....	20
- toniczny .....	20

**L**

luźna tkanka łączna .....	13
---------------------------	----

**Ł**

łopatka .....	23, 24, 25
---------------	------------

**M**

maż stawowa .....	29
mechanogram .....	36
mechanomiografia .....	36
metoda anatomiczna .....	35
- drażnienia elektrycznego .....	35
- elementów skończonych .....	47
- mieszana .....	54, 60
- obrazowania .....	49
- określenia funkcji regresji .....	54
- - udziałów mięśni .....	49
- optymalizacji dynamicznej .....	54, 57
- - mieszanej .....	58
- - statycznej .....	54
- pozwalająca na określenie funkcji regresji .....	54
- predyktor-korektor .....	191
- przemieszczenia ścięgna .....	49
- pseudoodwracalna .....	58
- skalowania siły .....	19
mięsień dłoniowy długi .....	26, 27
- - krótki .....	26, 27
- dwugłowy ramienia .....	21, 23, 24, 26
- łokciowy .....	21, 24
- nawrotny czworoboczny .....	26, 27
- - obły .....	21, 25, 26
- odwodziciel krótki kciuka .....	26, 27
- prostownik promieniowy długi nadgarstka .....	21, 27
- - - krótki nadgarstka .....	27
- ramiennie-promieniowy .....	21, 26, 27
- ramienny .....	21, 23
- stawowy .....	23
- trójgłowy ramienia .....	24
- zginacz długi kciuka .....	26, 27
- - krótki kciuka .....	26, 27
- - nadgarstka łokciowy .....	26, 27
- - nadgarstka promieniowy .....	21
- - palców powierzchniowy .....	21, 25, 26

- zwiotczały .....	20
miofibryla .....	13
miogenny .....	20
mioglobina .....	15
mion .....	16
miozyna .....	16
mitochondria .....	13
model 2D .....	103
- 3D .....	108
- dwuwymiarowy .....	46
- hipersprężysty .....	48
- jednowymiarowy .....	40
- Kelvina-Voighta .....	40
- Maxwella .....	40
- mięśnia .....	39
- - Kędziora .....	41
- - o nierównoważonych siłach wewnętrznych .....	89
- - o równoważonych siłach wewnętrznych .....	88
- - trójwymiarowego .....	46
- - typu Hilla .....	40
- - Zajaca .....	42
- nerwowo-mięśniowo-szkieletowy .....	53
- neuromyodynamiczny .....	61
- reologiczny .....	40
- trójwymiarowy Usika .....	47
- współdziałania mięśni Kędziora .....	51
- zespołu mięśni układu ramię-przedramię .....	102
moment kompensacyjny .....	107
mostki poprzeczne .....	16, 18
motoneurony .....	17
- alfa .....	33
- beta .....	33
- gamma .....	33
<b>N</b>	
nadkłykieć boczny .....	24, 25, 27, 28, 30, 31
- przyśrodkowy .....	25, 26, 30, 31
namięśna .....	13
napięcie spoczynkowe .....	20
narządy Golgiego .....	33, 34
nawracanie .....	29
nebulina .....	16
nerw łokciowy .....	31
nerwowe sprzężenie zwrotne .....	33
neurogeny .....	20, 36
neurony obwodowe .....	32
- odśrodkowe .....	32
- ruchowe .....	17
- wstawkowe .....	33
<b>O</b>	
obwód stawowy kości promieniowej .....	29
odnerwienie mięśnia .....	20
odruch bezwarunkowy .....	32

- miotatyczny .....	33
- na rozciąganie .....	33
- ścięgnisty .....	34
- warunkowy .....	32
odwracanie .....	29
okres utajony .....	19
omięśna .....	13
opóźnienie elektromechaniczne .....	19
output tracking problem .....	115

**P**

pasma łącznotkankowe .....	30
pasmo H .....	16
PCSA .....	19
pęczek mięśniowy .....	13
płytką końcowa .....	17
- motoryczna .....	17
- ruchowa .....	17
pochewka ścięgien .....	20
początek mięśnia .....	13
połączenie nerwowo-mięśniowo-ruchowe .....	13
postsynaptyczna część .....	17
potencjał czynnościowy .....	17, 36
- iglicowy .....	18
- postsynaptyczny .....	17
- progowy .....	17
- spoczynkowy .....	17
powięź .....	13, 20
prawo Bowditcha .....	18
prążki anizotropowe .....	16
- izotropowe .....	16
prążkowanie poprzeczne .....	16
presynaptyczna część .....	17
proksymalna pozycja .....	13
proprioreceptory .....	33
prostowanie .....	21
przegroda międzymięśniowa boczna .....	23, 24, 25
- przyśrodkowa .....	23, 24, 25
przekrój anatomiczny .....	19
- fizjologiczny .....	19
przyczep mięśnia .....	13

**R**

receptory czucia skórnoego .....	33
- stawowe .....	33
- ścięgnowe .....	34
reobaza .....	35
retikulum sarkoplazmatyczne .....	16
rozciągnie .....	23, 24
rozkurcz .....	19
ruchy nieświadome .....	32

**S**

sarkolemma .....	13
sarkomer .....	16

sarkoplazma .....	13
sarkosoma .....	13
siateczka sarkoplazmatyczna .....	16
siła kurcząca .....	67
- skurczu .....	19
składowa bierna siły .....	37
- czynna siły .....	37
skurcz auksotoniczny .....	19, 99
- ekscentryczny .....	19, 94
- izokinetyczny .....	19, 101
- izometryczny .....	19, 95
- izotoniczny .....	19, 94
- koncentryczny .....	19, 94
- tężcowy niepełny .....	94
- - zupełny .....	94
spazm .....	20
stan dopuszczalny .....	92
- niedopuszczalny .....	92
- niepewny .....	92
- relaksacji .....	18
staw łokciowy .....	23, 29
- promieniowo-łokciowy .....	29
- ramiennie-łokciowy .....	29
- ramiennie-promieniowy .....	29
- ramienny .....	23, 24
- unieruchomiony .....	20
sterowanie recyprokalne .....	35
- współbieżne mięśniami przeciwstawnymi ..	35
stopki końcowe .....	17
struna skośna .....	29, 30
sygnał aktywacji .....	41
synapsa nerwowo-mięśniowa .....	13
szczelina synaptyczna .....	17
szywny układ różniczkowy .....	191

## Ś

ścięgno .....	13
ślizgowa teoria skurczu .....	16
środkowa część brzośca .....	16
śródmięsna .....	13
śródręcze .....	26

## T

teoria H. Huxley .....	16
- Loeba .....	39
- mostków poprzecznych .....	16
toniczny .....	20
tonus .....	20
transformata Laplace'a .....	193
tropomiozyna .....	16
troponina .....	16

trzeszczki .....	20, 21
tuberositas pronatoria .....	25

## U

układ piramidowy .....	32
- pozapiramidowy .....	32
- somatyczny .....	18, 32

## W

warstwa białek stabilizujących M .....	16
- tkanki łącznej .....	13
wcięcie bloczkowe .....	29, 30, 31
- bloczkowe kości łokciowej .....	29, 30
- promieniowe kości łokciowej .....	29
weryfikacja .....	129
wiązki miofilamentów .....	16
więzadło czworoboczne .....	29, 30
- pierścieniowate kości promieniowej .....	29, 30, 31
- poboczne łokciowe .....	29, 30, 31
- - promieniowe .....	29, 31
właściwość kurczliwa .....	19
włókienko kurczliwe .....	13, 15, 16
włókna czuciowe Ia .....	33
- - Ib .....	34
- mięśniowe poprzecznie prążkowane ...	13, 14
- poprzeczne .....	31
- pośrednie .....	14
- Sharpeya .....	13
- szybkokurczące .....	14
- wewnątrzwrzecionowe .....	33
- wnikaające .....	13
- wolnokurczące .....	14
wrzecionka mięśniowe .....	33
współskurcz .....	35
współbieżne sterowanie mięśniami przeciw- stawnymi .....	35
wrostek dziobaty .....	25, 26, 30, 31
- kruczy .....	23, 24
- łokciowy .....	24, 25, 30, 31
- rylcowaty .....	27, 28
wzrost napięcia mięśnia mimowolny .....	20
- - - nadmierny .....	20

## Z

zachyłek workowaty górny .....	30, 31
zasada de Luca i Erima .....	39
- Hennemana .....	39
zginanie .....	21
złącze mięśniowo-ścięgnowe .....	19