

POLITECHNIKA GDAŃSKA

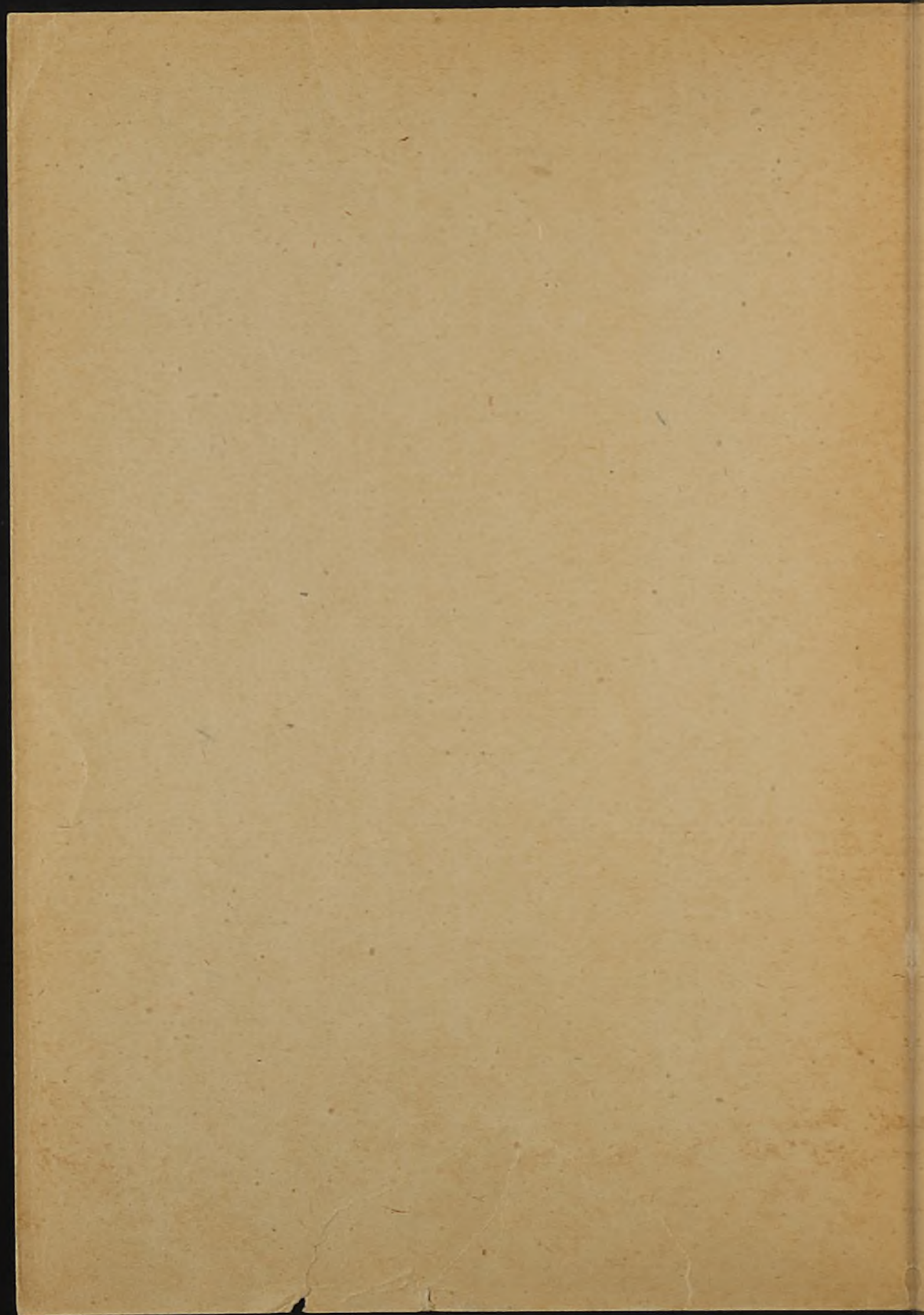
MIECZYŚLAW KRĘŻELEWSKI

HYDROMECHANIKA OGÓLNA
I OKRĘTOWA

CZEŚĆ II



GDAŃSK 1982



POLITECHNIKA GDAŃSKA

MIECZYŚLAW KRĘŻELEWSKI

HYDROMECHANIKA OGÓLNA
I OKRĘTOWA

CZĘŚĆ II



GDAŃSK 1982

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTW POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Roman Kazimierczak

REDAKTOR SKRYPTÓW

Zdzisław Pułaczewski

RECENZENT

Wiesław Wełnicki

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

PRINTED IN POLAND

Do nabycia: PP Dom Książki Nr 23 (Gmach Główny Politechniki Gdańskiej),
80-952 Gdańsk-Wrzeszcz, ul. Majakowskiego 11/12

449

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Nakład 300+25+10+30 egz. Ark. wyd. 28,9. Ark. druku 26,75. Papier drukowy kl. V 71 g. Oddano do druku 19.11.1981 r. Druk ukończono w czerwcu 1982 r.
Zamówienie nr S/598/81.A-11. Cena zł 98,-

Wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Poznańskiej
61-821 Poznań, ul. Ogrodowa 11, tel. 554-25

SPIS TREŚCI

	Str.
OD AUTORA	7
12. UZUPEŁNIENIE POJĘĆ I TWIERDZEN KINEMATYKI PŁYNÓW	8
12.1. Funkcja prądu i jej zastosowanie	8
12.1.1. Funkcja prądu dla przepływu płaskiego	8
12.1.2. Funkcja prądu dla przepływu osiowo-symetrycznego	16
12.2. Pole prędkości indukowane osobliwościami hydromechanicz- nymi	21
12.2.1. Pole prędkości i potencjał źródeł. Warstwa poje- dyncza	23
12.2.2. Pole prędkości i potencjał dipoli. Warstwa po- dwójna	31
12.2.3. Pole prędkości i potencjał wirów. Warstwa wirowa	36
12.3. Potencjał prędkości przepływu jednorodnego.	56
12.4. Odwracanie przepływu	58
12.5. Strumień nadążający	61
12.6. Kinematyczny warunek brzegowy	64
12.7. Elementy kinematyki płynów wyrażone w ruchomych układach współrzędnych	70
12.7.1. Związki transformacyjne dla wielkości pola hydro- mechanicznego o charakterze wektorowym	71
12.7.2. Związki transformacyjne dla prędkości kątowej	77
12.7.3. Pochodna lokalna prędkości w układzie ruchomym. Równania różniczkowe cosinusów kierunkowych	79
12.7.4. Przyspieszenie elementu płynu i równania ruchu płynu w ruchomym układzie odniesienia	84
13. CAŁKI OGÓLNE RÓWNAŃ RZĄDZĄCYCH PLYNEM IDEALNYM I ICH ZASTOSOWANIE	92
13.1. Całki ogólne równań ruchu płynu idealnego w nieruchomym układzie odniesienia	92
13.2. Całki ogólne równań ruchu płynu idealnego w ruchomych układach odniesienia	96
13.3. Przykłady zastosowań całek ogólnych równań rządzących plynem idealnym	98
13.3.1. Pole ciśnień wytwarzane w cieczy przez źródło	99
13.3.2. Pole ciśnień wytwarzane w cieczy przez wiry	103
13.3.3. Współczynniki ciśnienia. Siła nośna	107

	Str.
13.3.4. Warunek uniknięcia kawitacji	118
13.3.5. Zastosowanie całki Bernoulliego do oceny jakościowej zjawisk hydromechanicznych	120
14. TWIERDZENIA O TRWAŁOŚCI RUCHU WIROWEGO I ICH ZASTOSOWANIE	124
14.1. Twierdzenie Kelvina o pochodnej cyrkulacji prędkości	124
14.2. Twierdzenie Helmholtza o trwałości ruchu wirowego	129
14.3. Zastosowanie twierdzeń o trwałości ruchu wirowego	137
14.4. Twierdzenie Żukowskiego dla elementu powierzchni wirowej	145
14.5. Warunek brzegowy na powierzchni wirowej utworzonej z wirów swobodnych	151
15. WARUNKI BRZEGOWE NA SWOBODNEJ POWIERZCHNI	153
15.1. Liniowy warunek brzegowy na swobodnej powierzchni	160
15.1.1. Szczególne przypadki liniowego warunku brzegowego na swobodnej powierzchni	161
15.1.2. Zapis warunku brzegowego na swobodnej powierzchni przy pomocy funkcji prądu i potencjału zespolonego	164
15.1.3. Zapis warunku brzegowego na swobodnej powierzchni przy pomocy potencjału przyspieszenia	166
15.2. Praktyczne wnioski wynikające z warunku brzegowego na swobodnej powierzchni	172
15.3. Warunek brzegowy na granicy dwóch płynów o różnych gęstościach	182
16. POWIERZCHNIOWE FALE SWOBODNE	186
16.1. Sformułowanie zadania dla swobodnych fal grawitacyjnych	188
16.2. Płaskie fale stojące	189
16.3. Płaskie fale biegnące	197
16.3.1. Fale biegnące w ruchomym układzie odniesienia	204
16.3.2. Płaskie fale biegnące pod dowolnym kątem względem nieruchomego układu odniesienia	207
16.3.3. Pole ciśnień w płaskiej fali biegnącej	212
16.3.4. Grupa fal. Prędkość grupowa	214
16.3.5. Związki energetyczne dla płaskich fal biegnących	219
16.3.6. Uwagi o tłumieniu fal grawitacyjnych	231
16.4. Ocena zakresu ważności liniowej teorii fal powierzchniowych	233
16.5. Uwagi o falach kapilarnych	242
16.6. Warunki uniknięcia fal swobodnych	245
17. REAKCJE HYDROMECHANICZNE	248
17.1. Zastosowanie zasady pędu i momentu pędu do wyznaczania reakcji hydrodynamicznych działających na ciało w ośrodku nieograniczonym	249
17.1.1. Ciało w spoczynku w płynie nieruchomym. Reakcje hydrostatyczne	253

17.1.2. Ustalony opływ ciała nieruchomego	254
17.2. Wyznaczenie oporu lepkości ciał wydłużonych	260
17.3. Wzór Żukowskiego dla siły nośnej płata. Opór indukowany . .	266
17.3.1. Równanie różniczkowo-całkowe płata. Metoda Glauerta	270
17.3.2. Płat nośny o najmniejszym oporze indukowanym . . .	272
17.3.3. Przeliczanie charakterystyk hydrodynamicznych płata z danego wydłużenia na inne wydłużenie	274
17.4. Oddziaływanie płaskiego przepływu potencjalnego na ciała. Wzory Blasiusa - Czapłygina	280
17.5. Oddziaływanie trójwymiarowego przepływu potencjalnego na ciała poruszające się w ośrodku nieograniczonym	283
17.5.1. Siły chwilowe działające na płyn	288
17.5.2. Wyznaczanie potencjału prędkości dla przypadku ciała sztywnego. Metoda Kirchoffa	291
17.5.3. Masy hydrodynamiczne	294
17.6. Równania ruchu ciała sztywnego w ośrodku nieograniczonym .	299
17.6.1. Równania ruchu statku manewrującego w płaszczyźnie poziomej	302
17.6.2. Ruch bezwładnościowy ciała. Paradoks d'Alemberta .	305
17.6.3. Ruch statku wzdłuż linii prostej	308
17.7. Reakcje bezwładności działające na ciała zmieniające kształt	310
17.8. Oddziaływanie trójwymiarowego przepływu potencjalnego na statki nawodne	315
17.8.1. Zastosowanie zasady pędu do wyznaczania oddziały- wania przepływu potencjalnego na statki nawodne .	318
17.8.2. Uwagi o wzorach dla reakcji hydrodynamicznych działających na statki nawodne	323
17.8.3. Podstawa teoretyczna eksperymentalnego wyznaczania oporu falowego statku	328
17.8.4. Zastosowanie zasady energii do wyznaczania oporu falowego statku w kanale	337
17.9. Opór falowy poduszki. Fale generowane przez statek . .	340
18. PODSTAWY TEORETYCZNEGO WYZNACZANIA OPORU FALOWEGO STATKU	357
18.1. Przedstawienie całkowe funkcji Greena dla źródła w ośrodku nieograniczonym	359
18.2. Potencjał źródła pod swobodną powierzchnią wody głębokiej	362
18.3. Potencjał źródła poruszającego się pod swobodną powierz- chnią wody płytkiej	366
18.4. Potencjały innych osobliwości hydromechanicznych pod swo- bodną powierzchnią wody	369
18.5. Zastosowanie twierdzenia Greena do wyznaczenia potencjału przepływu cieczy wywołanego ruchem statku	372

	Str.
18.5.1. Zastosowanie twierdzenia Greena do wyznaczania potencjału prędkości statków w ośrodku nieograniczonym	373
18.5.2. Zastosowanie twierdzenia Greena do wyznaczania potencjału prędkości statków podwodnych	376
18.5.3. Zastosowanie wzoru Greena do wyznaczania potencjału prędkości statków nawodnych	378
18.5.4. Wyznaczanie potencjału prędkości w zadaniu o oporze falowym statków nawodnych w ujęciu liniowym .	382
19. PODSTAWY EKSPERYMENTALNYCH BADAŃ MODELOWYCH I METOD EKSTRAPOLACJI ICH WYNIKÓW	388
19.1. Matematyczne sformułowanie zadania dla reakcji hydromechanicznych działających na statek	391
19.2. Normalizacja równań rządzących i warunków brzegowych. Liczby podobieństwa	393
19.2.1. Normalizacja warunku początkowego i warunków brzegowych na ścianach zbiornika i na powierzchni statku	394
19.2.2. Normalizacja warunku brzegowego na swobodnej powierzchni	397
19.2.3. Normalizacja równań rządzących	399
19.3. Uwagi o bezwymiarowym polu ciśnień i prędkości w cieczy .	400
19.4. Współczynniki reakcji hydromechanicznych i prawa ich modelowania	401
19.4.1. Współczynniki oporu statku	405
19.4.2. Charakterystyki hydrodynamiczne napędowej śruby swobodnej	409
19.5. Uwagi o metodach ekstrapolacji oporu modelu statku	413
BIBLIOGRAFIA	420

OD AUTORA

Część druga skryptu „Hydromechanika ogólna i okrętowa” stanowi rozszerzenie materiału podstawowego, zawartego w pierwszych ośmiu rozdziałach części pierwszej skryptu o tym samym tytule.

Za wyjątkiem rozdziału 18 obejmuje ona zakres 50 godzinnego wykładu dla specjalności Budowa Okrętów Morskich w Instytucie Okrętowym Politechniki Gdańskiej. Rozdział 18 jest przeznaczony dla studentów specjalizujących się w zakresie hydromechaniki okrętowej. Zawiera on materiał 10 godzinnego wykładu.

W skrypcie zawarto tylko materiał podstawowy, zilustrowany przykładami o znaczeniu praktycznym. Podobnie jak w części I starano się o wyciągnięcie - z równań i wzorów - jak najwięcej jakościowych wniosków dotyczących przebiegu zjawisk i praktycznych zastosowań w projektowaniu i eksploatacji statków. Zwracano także dość dużą uwagę na budowę modeli matematycznych zjawisk hydromechanicznych, na metody rozwiązywania zadań, jak również na zagadnienia dotychczas słabo zbadane lub nie rozwiązane.

W celu lepszego zrozumienia i opanowania przedmiotu, niektóre zagadnienia, twierdzenia, wzory przedstawiono przy różnych podejściach. Przykładem może być twierdzenie o trwałości ruchu wirowego lub rozdziały: 17.8.3 i 17.8.4. Wykładowca ma tu oczywiście swobodę wyboru podejścia. Powinien on jednak wskazywać na inne drogi prowadzące do tych samych wyników. Te inne drogi słuchacz znajdzie w skrypcie względnie w przywołanej a łatwo dostępnej literaturze.

W przekonaniu autora materiał zawarty w skrypcie pozwala na samodzielne sformułowanie zadań hydromechanicznych a także na identyfikację nie zawsze jasno sformułowanych w publikacjach problemów hydromechanicznych i na krytyczną ocenę wyników badań i wniosków różnych autorów.

Skrypt może stanowić pomoc dla inżynierów biur projektowych i ośrodków badawczych przemysłu okrętowego i żeglugi a także dla pracowników naukowych instytutów badawczych, pracujących w zakresie hydromechaniki.

Oznaczenia kolejnych rozdziałów skryptu są kontynuacją oznaczeń rozdziałów części pierwszej, co ułatwia korzystanie i odwoływanie się do wzorów części pierwszej. Konwencja numeracji wzorów, tablic i rysunków jest bowiem taka sama, jaką zastosowano w części I.

Autor pragnie tu wyrazić swoje podziękowanie Panu inż. Jerzemu Oleksemu za wykonanie rysunków zawartych w skrypcie.

12. UZUPEŁNIENIE POJĘĆ I TWIERDZEŃ KINEMATYKI PŁYNÓW

W rozdziale 3 i 6 części I przedstawione zostały najważniejsze pojęcia i twierdzenia kinematyki płynów jak np.: operatory różniczkowe i całkowe pola hydromechanicznego, linie prądu, linie wirowe, przyspieszenie elementu płynu w różnych zapisach, ruch lokalny płynu, tensory prędkości płynu (tensor prędkości deformacji i tensor prędkości kątowej), twierdzenie Helmholtza o kinematyce wiru, tak zwane I twierdzenie Helmholtza i inne. Ten wykład poświęcimy dalszemu rozszerzeniu pojęć i poznaniu dalszych twierdzeń kinematyki płynu po to, aby uzyskać narzędzie pozwalające na sprawniejsze niekiedy rozwiązywanie zadań hydromechanicznych.

12.1. FUNKCJA PRĄDU I JEJ ZASTOSOWANIE

Jeśli przepływ płynu nieściśliwego zależy tylko od dwóch zmiennych przestrzennych, a więc jeśli jest to przepływ płaski lub osłowo-symetryczny, to składowe prędkości płynu można wyrazić przy pomocy pewnej funkcji ψ zwanej funkcją prądu lub niekiedy potencjałem prądu, a czasami również funkcją Stokesa. Jeśli przepływ jest nieustalony, to czas t traktuje się jako parametr. Płyn może być lepki lub idealny, a przepływ może być potencjalny lub wirowy. Podstawowy warunek dla wyznaczenia funkcji prądu ψ jest

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (12.1)$$

12.1.1. Funkcja prądu dla przepływu płaskiego

Zakładamy, że wszystkie charakterystyki przepływu: prędkość, ciśnienie, naprężenia itp. nie zależą od współrzędnej z . Są one zatem funkcjami x i y kartezjańskiego układu współrzędnych.

Dla kartezjańskiego układu współrzędnych współczynniki Lamego $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, prędkość $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ i równanie (12.1) na podstawie wzoru ogólnego (9.33) jest

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (12.2)$$

Natomiast dla biegunowego układu współrzędnych, $H_r = 1$; $H_\theta = r$, $H_z = 1$; $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$, równanie (12.1) będzie

$$\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (12.3)$$

Jeśli wprowadzi się funkcję $\psi(x,y)$ taką, że

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{i} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (12.4)$$

to ze względu na założoną ciągłość pola hydromechanicznego równanie (12.2) jest spełnione, bo

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

Wyrażenia (12.4) są określeniem funkcji prądu dla płaskiego przepływu płynu nieściśliwego opisanego w kartezjańskim układzie współrzędnych. Z wyrażenia (12.3) widać, że funkcja prądu dla przepływu płaskiego w biegunowym układzie współrzędnych będzie

$$r v_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{i} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (12.5)$$

W celu znalezienia interpretacji kinematycznej funkcji prądu napiszemy równanie linii prądu (6.4). Dla przypadku płaskiego przepływu mamy:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

$$\text{lub} \quad -v_y dx + v_x dy = 0 \quad (12.6)$$

Podstawiając do równania (12.6) wyrażenia (12.4) dostajemy

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad (12.7)$$

a więc różniczkę zupełną $d\psi$ funkcji prądu $\psi(x,y)$. Stąd wniosek taki, że wzdłuż linii prądu funkcja prądu ma wartość stałą. Inaczej: wzdłuż linii prądu

$$\psi(x,y) = C \quad \text{i} \quad d\psi = 0$$

Stwierdzenia powyższe są również ważne dla biegunowego układu współrzędnych. Istotnie tak jest, bo równanie linii prądu zgodne z (9.3) będzie

$$-v_2 ds_1 + v_1 ds_2 = 0$$

gdzie: $v_1 = v_r$; $v_2 = v_\theta$; $ds_1 = dr$; $ds_2 = r d\theta$

Po uwzględnieniu wzorów (12.5) równanie linii prądu przepływu płaskiego w biegunowym układzie współrzędnych można zapisać

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta = d\psi(r, \theta) = 0 \quad (12.8)$$

i wzdłuż linii prądu mamy $\psi(r, \theta) = C$.

Z powyższego widać wyraźnie, że przez proste operacje nad funkcją prądu $\psi(x,y)$ lub $\psi(r,\theta)$ możemy wyznaczyć pole prędkości płynu $\vec{v}(x,y)$ oraz obraz przepływu w postaci linii prądu. Zakładając bowiem różne wartości dla stałej C możemy znaleźć interesujące nas linie prądu przepływu. Powstaje

pytanie: W jaki sposób można znaleźć funkcję prądu $\psi(x, y)$? Dla tego celu wyrazimy najpierw rotację prędkości przy pomocy funkcji $\psi(x, y)$. Z wyrażen (3.33) widać, że:

$$\text{rot } \vec{v} = \Omega_z \vec{k} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (12.9)$$

Po podstawieniu (12.4) do (12.9) mamy

$$\Omega_z = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\Delta \psi \quad (12.10)$$

Stąd, jeśli płaski przepływ płynu jest bezwirowy, to $\text{rot } \vec{v} = 0$ i $\Delta \psi = 0$. Funkcję prądu $\psi(x, y)$ dla płaskiego przepływu potencjalnego możemy zatem wyznaczyć z równania Laplace'a:

$$\Delta \psi(x, y) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (12.11)$$

lub

$$\begin{aligned} \Delta \psi(r, \theta) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= 0 \end{aligned} \quad (12.12)$$

dla przepływu płaskiego, opisanego w biegunowym układzie współrzędnych. Funkcje prądu zatem dla bezwirowego przepływu płaskiego są funkcjami harmonicznymi. Wyznacza się je z tych samych równań co potencjał prędkości $\varphi(x, y)$ lub $\varphi(r, \theta)$. Jeśli przepływ jest wirowy, to funkcję prądu $\psi(x, y)$ można wyznaczyć z równania (12.10) przy założeniu, że dany jest rozkład rotacji prędkości. Przy pomocy funkcji prądu $\psi(x, y)$ można także napisać równanie Naviera i Stokesa (7.29), które przy pomocy oznaczeń (7.32) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \otimes \vec{\Omega} - \vec{\Omega} \cdot \nabla \otimes \vec{v} = \nu \Delta \vec{\Omega} \quad (12.13)$$

Ale zgodnie z (12.9) i (12.10)

$$\vec{\Omega} = -\Delta \psi \vec{k}$$

a

$$\vec{v} \cdot \nabla \otimes \vec{\Omega} = v_x \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \Omega_z}{\partial y}$$

oraz $\vec{\Omega} \cdot \nabla \otimes \vec{v} = 0$. Stąd równanie (12.13) po uwzględnieniu wyrażen (12.2) będzie mieć postać

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = \nu \Delta^2 \psi \quad (12.14)$$

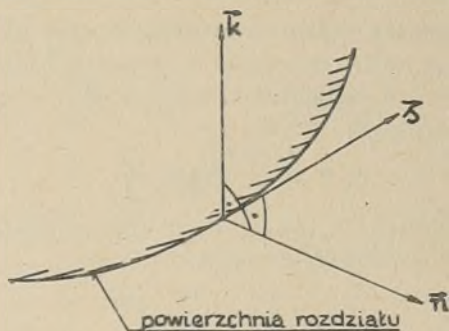
gdzie

$$\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (12.15)$$

Równanie (12.14) znajduje zastosowanie przy badaniu płaskich przepływów płynu newtonowskiego. Do równania (12.14) należy dołączyć warunki brzegowe. Pokażemy tu, że kinematyczne warunki brzegowe (8.1) i (8.2) można wy-

razić również przy pomocy funkcji prądu $\psi(x,y,t)$. Dla dokonania tego ce-
lowe jest znalezienie najpierw zależności pomiędzy składowymi normalnej \vec{n}
i stycznej \vec{s} dla przepływu płaskiego w płaszczyźnie (x,y) , przy czym
zmieniono tu oznaczenie \vec{i} na \vec{s} i konsekwentnie oznaczenie składowej
stycznej prędkości na v_s .

W rozpatrywanym przypadku wektory \vec{n} i \vec{s} leżą w płaszczyźnie (x,y) ,
a wektor \vec{k} jest prostopadły do \vec{n} i do \vec{s} . Pokazuje to rysunek 12.1.



Rys.12.1

Możemy zatem napisać, że

$$\vec{n} = \vec{i} n_x + \vec{j} n_y = \vec{s} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ s_x & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} s_y - \vec{j} s_x$$

lub
$$\vec{s} = \vec{i} s_x + \vec{j} s_y = \vec{k} \times \vec{n} = -\vec{i} n_y + \vec{j} n_x$$

Stąd, przez porównanie składowych wektorów \vec{n} i \vec{s} mamy

$$\begin{aligned} \cos(\vec{n}, x) &= n_x = s_y = \cos(\vec{s}, y) \\ \cos(\vec{n}, y) &= n_y = -s_x = -\cos(\vec{s}, x) \end{aligned} \quad (12.16)$$

Napiszemy teraz wyrażenie dla składowej normalnej v_n i składowej stycznej
 v_s prędkości \vec{v}

$$\begin{aligned} v_s &= \vec{v} \cdot \vec{s} = \vec{v} \cdot (\vec{i} s_x + \vec{j} s_y) = \vec{v} \cdot (-\vec{i} n_y + \vec{j} n_x) = \\ &= -v_x n_y + v_y n_x \end{aligned} \quad (12.17)$$

$$\begin{aligned} v_n &= \vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot (\vec{i} n_x + \vec{j} n_y) = \vec{v} \cdot (\vec{i} s_y - \vec{j} s_x) = \\ &= v_x s_y + v_y s_x \end{aligned} \quad (12.18)$$

Podstawiając wyrażenia (12.4) do związków (12.17) i (12.18) otrzymuje się

$$v_n = \frac{\partial \psi}{\partial y} s_y + \frac{\partial \psi}{\partial x} s_x = \vec{s} \cdot \nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (12.19)$$

$$v_s = - \frac{\partial \psi}{\partial y} n_y - \frac{\partial \psi}{\partial x} n_x = - \vec{n} \cdot \nabla \psi = - \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad (12.20)$$

Jeśli przepływ jest potencjalny, to $\Delta \psi = 0$ i równanie (12.14) jest automatycznie wypełnione. Do wyznaczenia funkcji prądu ψ mamy wtedy równanie (12.11) z warunkiem brzegowym (12.19) równym

$$v_n \Big|_s = \frac{\partial \psi}{\partial s} \Big|_s = v_{nsc} \quad (12.21)$$

Oczywistym jest, że płaskie zadanie hydromechaniczne dla nieściśliwego przepływu potencjalnego można rozwiązać z równania Laplace'a dla potencjału prędkości φ : $\Delta \varphi = 0$ z warunkiem brzegowym $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_s = v_{nsc}$, przy czym

$$\vec{v} = \nabla \varphi; \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (12.22)$$

Porównując wyrażenia (12.22) i (12.4) uzyskuje się związki pomiędzy potencjałem prędkości φ i funkcją prądu ψ :

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (12.23)$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Są to znane warunki Cauchy'ego-Riemana konieczne i dostateczne dla istnienia funkcji analitycznej:

$$w(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y) \quad (12.24)$$

gdzie: $z = x + iy$ - jest zmienną zespoloną.

W hydromechanice funkcję harmoniczną $w(z)$ nazywa się potencjałem zespolonym lub funkcją charakterystyczną przepływu. Tak jak potencjał φ i funkcja prądu ψ , tak również potencjał $w(z)$ może być wyrażony w biegunowym układzie współrzędnych. Wtedy

$$z = r e^{i\theta}$$

Biorąc pod uwagę to, że

$$\vec{v} = \nabla \varphi = \vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta$$

oraz wyrażenia (12.5) mamy znów warunki Cauchy'ego-Riemana

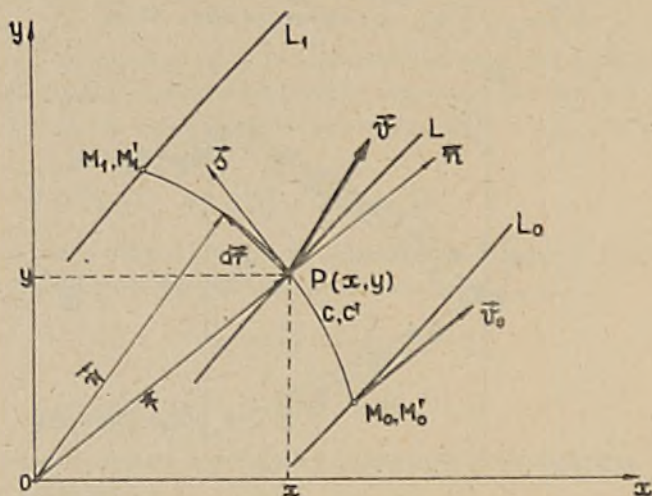
$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (12.25)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

dla biegunowego układu współrzędnych. Wyrażenie (12.24) wskazuje na duże znaczenie funkcji analitycznych w badaniu płaskich przepływów potencjalnych. Zamiast poszukiwania dwóch funkcji φ i ψ dwóch zmiennych wystarczy znaleźć jedną funkcję jednej zmiennej: $w(z)$. Składowe prędkości pływu można wtedy wyznaczyć przez rozdzielenie funkcji charakterystycznej przepływu $w(z)$ na część rzeczywistą φ i urojoną ψ i przez zastosowanie

Stąd współrzędne x i y punktów M_0' , M_1' są takie same jak punktów M_0 i M_1 . W rzucie na płaszczyznę Oxy powierzchnia S jest krzywą C . Pokazuje to rysunek 12.4. Wysokość powierzchni S jest stała i równa 1. Wydatek Q zgodnie ze wzorem (3.56) jest

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (12.27)$$



Rys. 12.4

Z rysunku 12.3 widać, że

$$d\vec{S} = d\vec{r} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} dy - \vec{j} dx$$

Podstawiając to wyrażenie oraz $\vec{v} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y$ do wzoru (12.27) uzyskuje się wzór na wydatek Q dla przepływu płaskiego

$$Q = \int_C -v_y dx + v_x dy \quad (12.28)$$

który po uwzględnieniu wzoru (12.4) przyjmuje postać

$$Q = \int_C \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (12.29)$$

Wzór (12.29) jest ważny dla płaskich przepływów nieściśliwych i jednorodnych ze względu na gęstość. Płyn może być lepki, a przepływ może być wirowym.

Wyrażenie podcałkowe we wzorze (12.29), jak już wiemy, jest różniczką zupełną, równą:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy \quad (12.7)$$

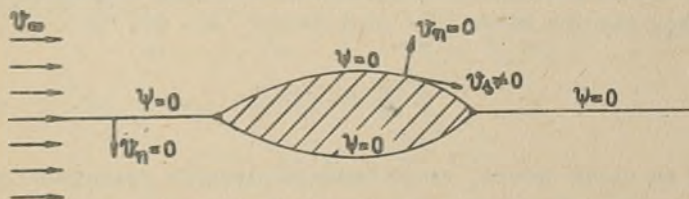
$$1 \quad Q = \int_C d\psi = \psi(M_1) - \psi(M_0) \quad (12.30)$$

Zatem dla płaskiego jednorodnego płynu nieściśliwego wydatek przez dowolną powierzchnię poprowadzoną pomiędzy dwoma liniami prądu, której wysokość jest równa jednostki, jest równy różnicy wartości funkcji prądu na tych dwóch liniach prądu.

Należy zwrócić uwagę na jeszcze jedną praktyczną korzyść wynikającą z wprowadzenia pojęcia funkcji prądu ψ . Otóż przez dowolną powierzchnię prądu będącą powierzchnią walcową o obrysie podstawy utworzoną przez linię prądu L i tworzącą równoległą do osi Oz płyn nie przepływa, bo $v_n = 0$. Zatem jest to ten sam przypadek, jaki ma miejsce przy opływie bez oderwania ściany nieprzepuszczalnej płynem idealnym. Stąd każdą taką powierzchnię prądu można uważać za ścianę nieprzepuszczalną. Na takiej ścianie zakłada się wartość stałej C równą zeru. Stąd na ścianie nieprzepuszczalnej

$$\psi(x, y) = \psi(r, \theta) = 0 \quad (12.31)$$

Równanie (12.31) może być uważane za równanie opływanej ściany płynem idealnym lub ciała dwuwymiarowego, gdy funkcja $\psi(x, y)$ posiada rozgałęzienie jak na rysunku 12.5. W takim przypadku zakreślony obszar na rysunku 12.5 może być ciałem dwuwymiarowym.



Rys.12.5

Wyrażenie (12.30) jest ważne również w biegunowym układzie współrzędnych; występująca w nim różniczka $d\psi$ jest określona wtedy wzorem (12.8). Natomiast wyrażenie (12.28) dla wydatku płynu Q ma nieco inną postać, bowiem

$$d\vec{S} = (\vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta) \times 1 \vec{e}_z = \vec{e}_r r d\theta - \vec{e}_\theta dr$$

$$\vec{v} = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta$$

1

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_C r v_r d\theta - v_\theta dr = \int_C \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\theta + \frac{\partial\psi}{\partial r} dr \quad (12.32)$$

Strumień prędkości, wydatek Q , przez powierzchnię S można również wyrazić przy pomocy potencjału zespolonego $w(z)$. Dla dokonania tego rozpiszmy całkę

$$\begin{aligned} \int_C \frac{dw}{dz} dz &= \int_C (v_x - i v_y) (dx + i dy) = \\ &= \int_C (v_x dx + v_y dy) + i \int_C (v_x dy - v_y dx) \end{aligned}$$

Pierwsza całka jest równa cyrkulacji prędkości Γ po konturze C (wzór 3.88), a druga zgodnie ze wzorem (12.28) wydatkowi Q .

Zatem

$$\int_C \frac{dw}{dz} dz = \Gamma + i Q \quad (12.33)$$

Oczywiście wyrażenie (12.33), jest ważne dla przepływu potencjalnego. Można temu wyrażeniu nadać inne, użyteczne postacie

$$\int_C \frac{dw}{dz} dz = \int_C \nabla \varphi \cdot d\vec{r} + i \int_C d\vec{r} \cdot \nabla \psi = \int_C d\varphi + i \int_C d\psi = \Gamma + i Q \quad (12.34)$$

Ze wzorów (12.34) wynika twierdzenie Cauchy'ego dla funkcji analitycznych. Widać bowiem z (12.34), że jeśli kontur C jest krzywą zamkniętą, nie obejmującą żadnych wirów ($\Gamma = 0$) i źródeł ($Q = 0$), to

$$\oint_C \frac{dw}{dz} dz = 0 \quad (12.35)$$

Jeszcze raz tu widać dobrze, że do badania płyskich przepływów potencjalnych można zastosować dobrze rozwinięty cały aparat funkcji analitycznych. Zadania hydromechaniczne przy zastosowaniu $w(z)$ rozwiązuje się prościej. Jednak można je oczywiście rozwiązywać także bez stosowania funkcji analitycznych.

12.1.2. Funkcja prądu dla przepływu osiowo-symetrycznego

Niech ciało opływane płynem lub poruszające się w nieskończonym ośrodku posiada oś symetrii i niech tą osią będzie oś Oz . Jeśli ciało takie będzie się poruszać w płynie idealnym w kierunku osi Oz lub nieruchome takie ciało będzie usytuowane w strumieniu jednorodnym o prędkości skierowanej wzdłuż osi Oz , to przepływ płynu będzie taki sam w każdej płaszczyźnie przechodzącej przez oś Oz ; będzie przepływem osiowo-symetrycznym. Nie będzie zatem zależeć od kąta θ w układzie walcowym lub sferycznym układzie współrzędnych. Jest to oczywiście przepływ przestrzenny i w kartezjańskim układzie współrzędnych będzie zależeć od wszystkich trzech współ-

rzędnych. Uwagi powyższe będą także ważne dla przepływu laminarnego cieczy rzeczywistej.

Napiszmy $\nabla \cdot \vec{v}$ we współrzędnych uogólnionych przy założeniu, że $v_3 = 0$ a $v_1(q_1, q_2)$ i $v_2(q_1, q_2)$.

Ze wzoru (9.33) mamy

$$\frac{\partial(v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} = 0$$

Równanie powyższe będzie spełnione wtedy, gdy wprowadzimy funkcję prądu $\psi(q_1, q_2)$ taką, że

$$v_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \quad v_2 = -\frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \quad (12.36)$$

Dla walcowego układu współrzędnych wyrażenia (12.36) są równe:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (12.37)$$

zaś w sferycznym układzie współrzędnych przyjmują postać:

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \chi} \frac{\partial \psi}{\partial \chi} \quad v_\chi = -\frac{1}{r \sin \chi} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (12.38)$$

Postępując w ten sam sposób jak dla przypadku płaskiego, to jest pisząc na podstawie rozdziału (9.3) równanie linii prądu

$$-v_2 ds_1 + v_1 ds_2 = 0$$

i wykorzystując wzory (9.10)

$$ds_1 = H_1 dq_1 \quad ds_2 = H_2 dq_2$$

oraz wzory (12.36), możemy napisać

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \psi}{\partial q_2} dq_2 \quad (12.39)$$

Stąd, wzdłuż obrotowej powierzchni prądu

$$\psi(q_1, q_2) = C \quad (12.40)$$

Jeśli przepływ jest potencjalny ($\nabla \times \vec{v} = 0$), to ψ można wyznaczyć z równania $\nabla \times \vec{v} = 0$. Patrząc na wyrażenie (9.35) widzimy, że $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ i

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{\Omega} = \frac{\vec{e}_3}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(H_2 v_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(H_1 v_1)}{\partial q_2} \right]$$

Podstawiając w powyższe wyrażenie v_1 i v_2 określone wzorami (12.36) mamy

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_1 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) = -H_1 H_2 \Omega_3 \quad (12.41)$$

Dla ruchu bezwirowego prawa strona tego równania jest równa zeru. Zatem dla takiego przypadku przepływu równanie dla wyznaczenia funkcji prądu przepływu osiowosymetrycznego będzie

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2}{H_1 H_3} \frac{\partial \Psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} \right) = 0 \quad (12.42)$$

Na podstawie wzoru ogólnego (9.38) możemy także napisać równanie Laplace'a dla wyznaczenia potencjału prędkości

$$\Delta \varphi = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) = 0 \quad (12.43)$$

Widzimy patrząc na równanie (12.42) i (12.41), że równanie (12.42) dla Ψ nie jest równaniem Laplace'a dla przepływu osiowosymetrycznego we współrzędnych walcowych i sferycznych.

Dla układu walcowego należy przyjąć

$$H_1 = H_r = 1 \quad H_2 = H_z = 1 \quad H_3 = H_\theta = r$$

a w równaniu (12.41) zmienić znak. Wtedy równanie (12.42) przyjmie postać

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0$$

a równanie (12.43) można będzie zapisać tak:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0$$

Tu już wyraźnie widać, że są to różne równania.

Dla układu sferycznego współczynniki Lamego są:

$$H_1 = H_r = 1 \quad H_2 = r \quad H_3 = r \sin \chi$$

i napisanie równań (12.42) i (12.43) w tym układzie nie przedstawia już żadnych trudności.

Korzystając ze wzorów (9.18) i uwzględniając wyżej podane wartości współczynników H_i możemy napisać związki analogiczne jak (12.23). I tak dla walcowego układu współrzędnych

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (12.44)$$

a dla sferycznego układu współrzędnych

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \chi} \frac{\partial \Psi}{\partial \chi} \quad (12.45)$$

$$v_\chi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} = -\frac{1}{r \sin \chi} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

Równania (12.44) i (12.45) pozwalają na znalezienie składowych pola prędkości, gdy znany jest potencjał φ lub funkcja prądu Ψ ; pozwalają one również na znalezienie funkcji prądu Ψ , gdy znany jest potencjał φ i odwrotnie.

Jeśli przepływ jest potencjalny, to różniczkę funkcji prądu (12.39) możemy zapisać przy pomocy potencjału prędkości φ . Korzysta się przy tym z wyrażeń (9.18) i (12.36). Wykonując proste działania mamy:

$$d\psi = -\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} dq_1 + \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} dq_2 = 0 \quad (12.46)$$

Przykładowo dla przepływu potencjalnego w walcowym układzie współrzędnych

$$d\psi = -r \frac{\partial \psi}{\partial z} dr + r \frac{\partial \psi}{\partial r} dz = 0$$

Łatwo sprawdzić, że powierzchnie prądu, $\psi = C$ i powierzchnie ekwipotencjalne $\varphi = C$ dla przepływu osiowo-symetrycznego są ortogonalne. Jeśli tak jest, to

$$\vec{n}_\psi \cdot \vec{n}_\varphi = 0 \quad (12.47)$$

gdzie: \vec{n}_ψ jest normalną do powierzchni prądu, a

\vec{n}_φ - normalną do powierzchni stałego potencjału.

Zgodnie ze wzorem (3.11)

$$\vec{n}_\psi = \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|}$$

i

$$\vec{n}_\varphi = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}$$

Równanie (12.47) będzie spełnione, gdy

$$(\nabla \psi) \cdot (\nabla \varphi) = 0$$

Uwzględniając wzór (9.16) powyższe równanie możemy napisać

$$(\nabla \psi) \cdot (\nabla \varphi) = \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = 0$$

Ale

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = v_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}$$

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = v_2 = -\frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1}$$

więc

$$(\nabla \psi) \cdot (\nabla \varphi) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = 0$$

i równanie (12.47) jest rzeczywiście wypełnione.

Ponieważ prawdziwość równania (12.47) wykazaliśmy dla dowolnych ortogonalnych układów współrzędnych, kiedy charakterystyki przepływu zależą tylko od dwóch współrzędnych q_1 i q_2 , to również w przepływie płaskim linie prądu i linie stałego potencjału są wzajemnie ortogonalne. Dla kartezjańskiego bowiem układu współrzędnych $q_1 = x$; $q_2 = y$, a dla biegunowego układu współrzędnych $q_1 = r$; $q_2 = \theta$.

Również związek (12.46) jest ważny dla płaskiego przepływu potencjalnego. Przykładowo dla kartezjańskiego układu współrzędnych: $H_1 = H_2 = H_3 = 1$, różniczka (12.46) będzie

$$d\psi = -\frac{\partial\psi}{\partial y} dx + \frac{\partial\psi}{\partial x} dy = 0$$

Równanie ciała opływanego, ściany - $\psi(q_1, q_2) = 0$ również jest ważne dla przepływu osiowosymetrycznego.

Wykażmy obecnie, że wzór (12.30)

$$Q = \int_C d\psi = \psi_B - \psi_A$$

jest ważny również dla przepływu osiowo-symetrycznego, przy czym w tym przypadku $d\psi$ jest określone wzorem (12.39). Tu przez ψ_B oznaczono wartość funkcji prądu na obrotowej powierzchni prądu B, a przez ψ_A wartość funkcji prądu na powierzchni A. Należy zaznaczyć tylko, że w przepływie płaskim przyjęto $q_3 = z = 1$. Dla przepływu osiowo-symetrycznego należy również założyć $q_3 = \theta = 1$, to jest $\theta = 1$ rad.

W celu znalezienia wydatku Q pomiędzy powierzchniami obrotowymi prądu ψ_A i ψ_B prowadzimy dowolną powierzchnię obrotową S zawartą pomiędzy powierzchniami ψ_A i ψ_B i obliczamy element powierzchni $d\vec{S}$ podobnie jak przy wyprowadzeniu wzoru (12.28). Mamy

$$\begin{aligned} d\vec{S} &= (\vec{e}_1 H_1 dq_1 + \vec{e}_2 H_2 dq_2) \times \vec{e}_3 H_3 (dq_3 = 1) = \\ &= -\vec{e}_2 H_3 H_1 dq_1 + \vec{e}_1 H_3 H_2 dq_2 \end{aligned} \quad (12.48)$$

Zauważmy, że w przypadku przepływu płaskiego, rys. 12.3, $dq_3 = dz = 1$ i powierzchnia S była powierzchnią walcową o wysokości równej jedności. W przypadku przepływu osiowo-symetrycznego powierzchnia S jest powierzchnią obrotową i wydatek Q jest obliczany dla przepływu przez wycinek powierzchni S wyznaczony przez kąt $\theta = 1$ jak na rysunku 12.6. Wydatek przepływu przez całą powierzchnię S będzie 2π razy większy. Wydatek Q zgodnie ze wzorem ogólnym jest:

$$Q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2) \cdot (-\vec{e}_2 H_3 H_1 dq_1 + \vec{e}_1 H_3 H_2 dq_2)$$

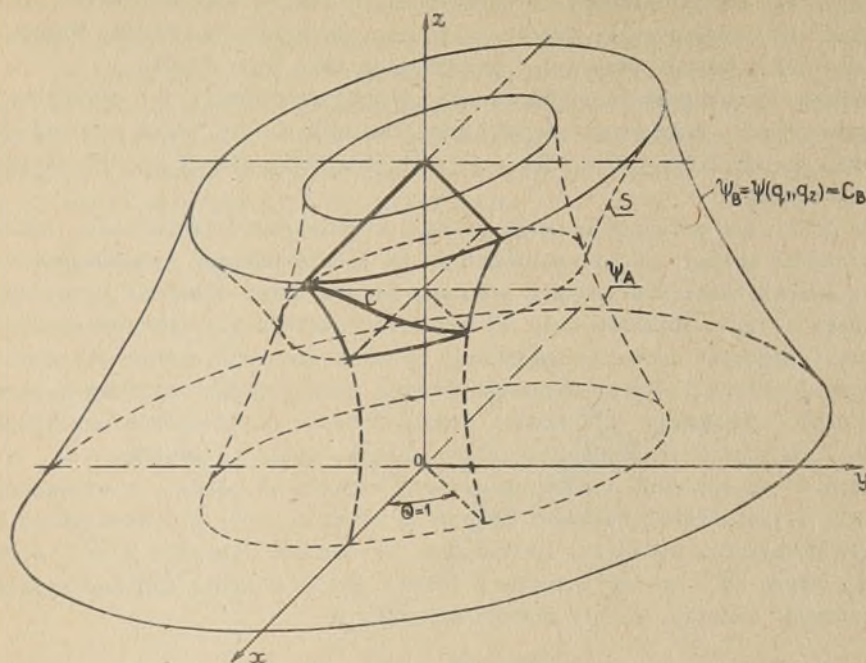
Zatem

$$Q = \int_C -v_2 H_3 H_1 dq_1 + v_1 H_3 H_2 dq_2 \quad (12.49)$$

gdzie C jest dowolną krzywą leżącą na powierzchni S .

Łatwo zauważyć, że wzory (12.28) i (12.32) są szczególnymi przypadkami wzoru (12.49). Podstawiając za v_1 i v_2 wyrażenia (12.36) mamy

$$Q = \int_C \frac{\partial\psi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2} dq_2 = \int_C d\psi = \psi_B - \psi_A \quad (12.50)$$



Rys.12.6

a więc to, czego należało się spodziewać. Zaleca się rozpisać wzory (12.49) i (12.50) w walcowym i sferycznym układzie współrzędnych. Podamy tu, że dla sferycznego układu współrzędnych wzór (12.49) przyjmuje postać

$$\dot{Q} = \int_C -v_x r \sin \chi dr + v_r r^2 \sin \chi d\chi$$

12.2. POLE PRĘDKOŚCI INDUKOWANE OSOBLIWOŚCIAMI HYDROMECHANICZNYMI

Przy omawianiu pola hydromechanicznego wprowadzono pojęcie osobliwości hydromechanicznych, przy czym taką osobliwością hydromechaniczną jest źródło o wydatku Q usytuowane w jakimś punkcie przestrzeni a także - wiórko wirowe o natężeniu $\Gamma = I$. Wydatek - natężenie źródła Q , divergencję prędkości i strumień prędkości wiąże zależność (3.82)

$$Q = \text{div } \vec{v} \Delta V = \oint_{\Delta S} \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Dlaczego źródło o wydatku Q usytuowane w punkcie $N(\xi, \eta, \zeta)$ jest nazywane osobliwością hydromechaniczną? Otóż, jak zobaczymy dalej, prędkość indukowana przez to źródło w punkcie M oddalonym od źródła o odległość $\vec{r} = \vec{NM}$ jest

$$\vec{v}(M) = \frac{Q(N)}{4\pi r^2}$$

Z powyższego wzoru widzimy, że jeśli punkt M zbliża się do punktu N, to prędkość indukowana przez źródło staje się nieokreśloną. Mówimy wtedy, że w punkcie N istnieje osobliwość hydromechaniczna typu źródło.

Włókno wirowe jest to linia wirowa, której przypisuje się określone natężenie $I = \Gamma$. Z drugiego twierdzenia Helmholtza dla rurki wirowej (3.97) wynika, że gdy $\Delta S \rightarrow 0$, to $\Omega \rightarrow \infty$, bo natężenie wiru I ma być wielkością skończoną.

Na podstawie powyższych dwóch poznanych przykładów osobliwości hydromechanicznych możemy ogólnie powiedzieć, że osobliwościami hydromechanicznymi są obiekty charakteryzujące się tym, że gdy jakaś wielkość geometryczna związana z takim obiektem dąży do zera, to wielkość pola hydromechanicznego, np.: prędkość, rotacja prędkości, wydatek nieograniczenie wzrasta.

Oprócz źródła i włókna wirowego trzecią osobliwością hydromechaniczną jest dipol o momencie \vec{m} . Moment dipola określa się w sposób następujący: Niech w punkcie N znajduje się źródło ujemne, upust, o wydatku $-Q$, a w punkcie N' przestrzeni źródło dodatnie o wydatku $+Q$. Jeśli z odległością $\overline{NN'} = \varepsilon \vec{s}$ tych źródeł będziemy zdązać do zera, $\varepsilon \rightarrow 0$, a jednocześnie będziemy powiększać wydatek Q źródeł tak, że wartość iloczynu $Q \overline{NN'}$ będzie stała, równa \vec{m} , to tak określony obiekt będzie właśnie dipolem hydromechanicznym. Widzimy, że aby moment dipola

$$\vec{m} = m\vec{s} = Q \overline{NN'} \quad (12.51)$$

miał wartość skończoną, to przy $\overline{NN'} \rightarrow 0$ wydatek Q musi rosnać nieograniczenie. Zatem dipol jest rzeczywiście osobliwością hydromechaniczną. Dipole i źródła mogą być rozłożone w pewnym obszarze płynu V, mogą być usytuowane na pewnej powierzchni S lub na dowolnej krzywej C, poprowadzonej w płynie. Również włókna wirowe mogą znajdować się w obszarze płynu V lub mogą tworzyć powierzchnię wirową, zwaną warstwą wirową.

Jeśli na jakiejś powierzchni rozłożone są w sposób ciągły źródła o wydatku powierzchniowym $q(\xi, \eta, \zeta)$, zwanym gęstością rozkładu powierzchniowego, przy czym

$$dQ(\xi, \eta, \zeta) = q(\xi, \eta, \zeta) dS \quad (12.52)$$

to taką powierzchnię nazywa się warstwą pojedynczą.

Jeśli natomiast na jakiejś powierzchni są rozłożone w sposób ciągły dipole o momencie dipolowym skierowanym wzdłuż zewnętrznej normalnej \vec{n} do tej powierzchni, to, oznaczając przez $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$ gęstość powierzchniową momentu dipolowego, mamy

$$d\vec{m} = \sigma \vec{n} dS = \sigma d\vec{S} \quad (12.53)$$

zaś powierzchnię taką nazywa się warstwą podwójną.

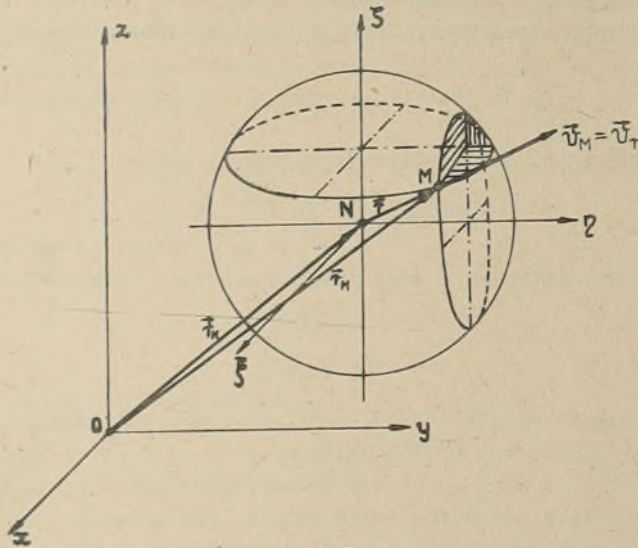
Wprowadzone wyżej osobliwości hydromechaniczne mają również interpretację fizyczną w elektrostatyce i w elektromagnetyzmie. Szczególnie duże znaczenie mają one w rozwiązywaniu zadań hydromechaniki cieczy idealnej.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia pola prędkości indukowanego przez poszczególne osobliwości hydromechaniczne.

12.2.1. Pole prędkości i potencjał źródeł. Warstwa pojedyncza

Niech w punkcie N określonym promieniem wiodącym \vec{r}_N , jak na rysunku 12.7, znajduje się źródło o wydatku Q. Charakteryzuje się ono tym, że ciecz wypływa z punktu N promieniowo we wszystkie strony, przy czym prędkość we wszystkich kierunkach ma ten sam moduł. Naturalnym układem współrzędnych do badania przepływu będzie tu układ sferyczny o początku w punkcie N. Wtedy składowe pola prędkości będą:

$$v_r \neq 0; \quad v_\chi = v_\theta = 0 \quad \text{i} \quad \vec{v} = \vec{e}_r v_r = \frac{\vec{r}}{r} v_r$$



Rys.12.7

W celu znalezienia zależności pomiędzy wydatkiem Q źródła i prędkością \vec{v} obliczymy strumień prędkości przez powierzchnię kuli o środku znajdującym się w punkcie N i promieniu r. Przy tak wybranej powierzchni S prędkość v_r w każdym punkcie tej powierzchni ma tę samą wartość

$$Q = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oint_S v_r dS_r = v_r S$$

przy czym

$$S = 4\pi r^2$$

Stąd

$$v_r = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \quad (12.54)$$

Tensor prędkości płynu S indukowanej przez źródło o wydatku Q, znajdujące się w ośrodku nieograniczonym, zgodnie z (9.50) będzie

$$s = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi} \frac{Q}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^3} \end{bmatrix}$$

Divergencja prędkości zgodnie z (9.33)

$$\nabla \cdot \vec{v} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0$$

przy czym w punkcie N ma osobliwość.

Rotacja prędkości zgodnie ze wzorem (9.34) jest równa zeru w całym obszarze, bo

$$\text{rot}_r \vec{v} = 0 \quad \text{rot}_x \vec{v} = 0 \quad \text{rot}_y \vec{v} = 0$$

Zatem przepływ płynu jest przepływem potencjalnym i

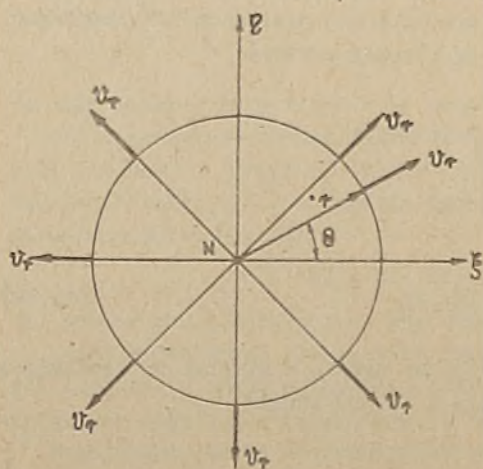
$$\vec{v} = \nabla \varphi = \vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2}$$

Wykonując proste całkowanie przy założeniu stałej całkowania równej zeru mamy

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r} \quad (12.55)$$

W przypadku upustu wydatek $Q < 0$. Wydatek Q może być ponadto funkcją czasu, np.: $Q = Q_0 \sin \omega t$ - źródło pulsujące, $Q = Q_0 \delta(t)$ - gwałtowny wytrysk płynu z punktu N, $Q = Q_0 u(t)$ - gwałtowne powstanie źródła o wydatku Q_0 w punkcie N obszaru płynnego. Jeśli oznaczy się przez ξ, η, ζ współrzędne kartezjańskie punktu N, a przez x, y, z - współrzędne punktu M, to r we wzorze (12.54) i (12.55) wyrazi się następująco

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \quad (12.56)$$



Rys. 12.8

Ponieważ w sferycznym układzie współrzędnych pole prędkości źródła nie zależy od kąta θ , rysunek 12.8, to istnieje funkcja prądu ψ . Wyznamy ją posługując się wyrażeniem (12.46), przy czym $q_1 = r$, $q_2 = X$ a $\varphi = \varphi(r)$. Uwzględniając powyższe

$$\begin{aligned} d\psi &= r^2 \sin X \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr = \\ &= \frac{Q}{4\pi} \sin X dr \end{aligned} \quad (12.57)$$

zaś

$$\psi = -\frac{Q}{4\pi} \cos X + C$$

Przyjmując $\psi = 0$ dla $\chi = 0$, mamy

$$\psi = \frac{Q}{4\pi} (1 - \cos \chi) \quad (12.58)$$

Powierzchnie prądu są zatem powierzchniami stożkowymi o wierzchołku w miejscu usytuowania źródła, a powierzchnie stałego potencjału - powierzchniami kul, o środku znajdującym się również w punkcie N. Są one wzajemnie ortogonalne, czyli tak jak być powinno (wzór 12.47).

Biorąc pod uwagę wnioski a) przykładu 3.3.5 o superpozycji potencjałów prędkości, ze względu na liniowość równania Laplace'a można natychmiast napisać potencjał prędkości indukowanej przez rozkład źródeł o wydatku dQ w pewnym obszarze V czyli $dQ(V)$, przez rozkład źródeł dQ na pewnej powierzchni S czyli $dQ(S)$, względnie przez rozkład źródeł wzdłuż krzywej C czyli $dQ(C)$. I tak dla rozkładu źródeł w obszarze V mamy

$$\varphi = - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{dQ(V)}{r} \quad (12.59)$$

dla rozkładu źródeł na powierzchni S

$$\varphi = - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{dQ(S)}{r} \quad (12.60)$$

a dla rozkładu źródeł wzdłuż krzywej C

$$\varphi = - \frac{1}{4\pi} \int_C \frac{dQ(C)}{r} \quad (12.61)$$

gdzie r jest określone wzorem (12.56). Sumowanie w powyższych wzorach odbywa się po wszystkich źródłach o współrzędnych ξ, η, ζ . Jeśli źródła są rozłożone w sposób ciągły, to można wprowadzić gęstość rozkładu $q(\xi, \eta, \zeta)$ objętościową, powierzchniową lub liniową. Wtedy

$$dQ(V) = q_V(\xi, \eta, \zeta) dV \quad (12.62a)$$

$$dQ(S) = q_S(\xi, \eta, \zeta) dS \quad (12.62b)$$

$$dQ(C) = q_C(\xi, \eta, \zeta) dS \quad (12.62c)$$

Biorąc pod uwagę określenie diwergencji (3.62)

$$Q = \operatorname{div} \vec{v} = \Delta \varphi$$

widzimy, że $q_V = \operatorname{div} \vec{v}$. Ponieważ dalej $\vec{v} = \nabla \varphi$ to

$$\varphi(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{q_V(\xi, \eta, \zeta) dV}{r} \quad (12.63)$$

jest rozwiązaniem równania Poissona, bo

$$q_V = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi \quad (12.64)$$

Zatem potencjał prędkości φ , określony wzorem (12.63) w nieograniczonym obszarze płynu zawierającym w sobie objętość V , jest rozwiązaniem równania Poissona $\Delta\varphi = q_v$, a pozostałym obszarze płynu, w którym $q_v = 0$, potencjał φ jest rozwiązaniem równania Laplace'a. Maleje on jak $\frac{1}{R}$ i przy $R \rightarrow \infty$ ma wartość zero pierwszego rzędu, co zapisujemy $\varphi = O\left(\frac{1}{R}\right)$.

Należy podkreślić, że gęstość rozkładu źródeł q_1 może dodatkowo zależeć od czasu t . Pokażemy obecnie, że przy pomocy wzoru (12.61) można uzyskać wyrażenie dla źródła płaskiego. Mówimy, że źródło jest płaskie, gdy pole prędkości indukowane przez to źródło jest takie same we wszystkich płaszczyznach równoległych do siebie, np. we wszystkich płaszczyznach równoległych do płaszczyzny Oxy kartezjańskiego układu współrzędnych. Jest to możliwe, gdy źródła o stałej gęstości rozkładu

$$q_c = q_0 = \text{const}$$

są rozłożone w sposób ciągły wzdłuż osi z -tów kartezjańskiego układu współrzędnych. Wtedy wydatek elementarnego źródła zgodnie ze wzorem (12.62a) będzie

$$dQ(c) = q_0 d\zeta = q_0 d\zeta$$

a prędkość indukowana w punkcie M płaszczyzny xy przez cały rozkład źródeł wyrazi się wzorem

$$\vec{v} = \nabla\varphi = -\frac{q_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \text{ grad} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{q_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{r}}{r^3} d\zeta \quad (12.65)$$

Z rysunku 12.9 widać, że

$$\vec{r} = \vec{r}^* - \vec{k}\zeta$$

Stąd

$$\vec{v} = \frac{q_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\vec{r}^* - \vec{k}\zeta) d\zeta}{(r^{*2} + \zeta^2)^{3/2}} = \frac{q_0}{2\pi r^*} \vec{r}^* \quad (12.66)$$

lub

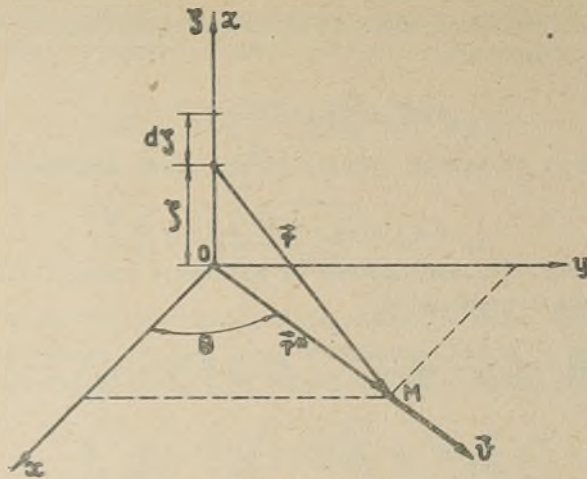
$$\vec{v} = \vec{e}_{r^*} v_r = \vec{e}_{r^*} \frac{q_0}{2\pi r^*} \quad (12.66a)$$

gdzie:

$$r^* = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Widzimy, że prędkość \vec{v} indukowana przez rozkład źródeł wzdłuż osi z ma kierunek promienia $\vec{r}^* = \overline{OM}$; pole prędkości $\vec{v}(r^*)$ jest płaskie. Obraz przepływu jest taki sam jak na rysunku 12.8.

Wyrażenie (12.66a) można prosto uzyskać w ten sam sposób jak wzór (12.54) dla przypadku źródła punktowego z tym, że zamiast powierzchni kuli otaczającej źródło bierze się powierzchnię walca o podstawie w kształcie okręgu usytuowanego w początku układu współrzędnych oraz tworzących równoległych do osi Oz i wysokości równej 1. Wydatek źródła będzie



Rys.12.9

$$Q = Q_0 \cdot 1 = v_r \cdot 2\pi r \quad \text{bo} \quad v_\theta = 0$$

a więc mamy znów wzór (12.66). Dalej zgodnie z przyjętymi uprzednio oznaczeniami będziemy stosować dla przepływu płaskiego również $r^* = r$. Zgodnie z tym

$$\vec{v} = \vec{e}_r v_r = \vec{e}_r \frac{Q}{2\pi r} \quad (12.67)$$

Potencjał prędkości źródła płaskiego wyznaczmy z zależności

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{Q}{2\pi r}$$

pomijając stałą C jako nieistotną dla opisu pola prędkości mamy

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad (12.67)$$

a na podstawie wzorów (12.5)

$$r v_r = \frac{Q}{2\pi} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{d\psi}{d\theta}$$

Zakładając, że zerową linią prądu jest oś Ox: $\psi = 0$ dla $\theta = 0$, funkcja prądu płaskiego źródła jest

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (12.68)$$

Posługując się potencjałem zespolonym $w(z)$, (12.24), wyrażenia (12.67) i (12.68) można zapisać przy pomocy jednego wzoru

$$w(z) = \varphi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\theta) = \frac{Q}{2\pi} \ln (r e^{i\theta}) \quad (12.69a)$$

lub

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (12.69b)$$

gdzie:

$$z = x + iy = r e^{i\theta}$$

Jeśli płaskie źródło znajduje się w nie początku układu współrzędnych, ale w punkcie z_0 , to

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (12.70)$$

gdzie: $z_0 = \xi + i\eta$; we wzorze (12.67) należy wtedy podstawić

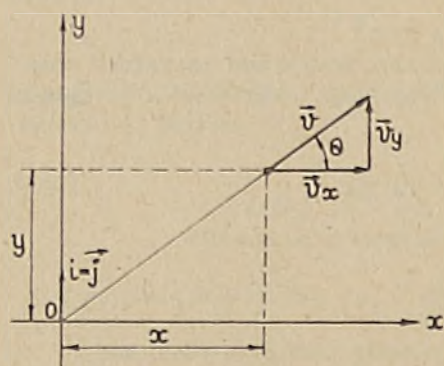
$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

Korzystając ze wzoru (12.69b) możemy na podstawie wzoru (12.26) znaleźć prędkość sprzężoną i prędkość \vec{v}_r

$$v^* = \frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z} = \frac{Q}{2\pi r} e^{-i\theta} = \frac{Q}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = v_x - i v_y$$

$$\vec{v} = \frac{Q}{2\pi r} e^{i\theta} = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{r} + i \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{r} = \frac{Q}{2\pi r} \vec{e}_r$$

Pokazuje to rysunek 12.10.



Rys. 12.10

Łatwo sprawdzić, że potencjał płaskiego źródła można również przedstawić w postaci

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (12.67a)$$

bo istotnie

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r} (-r^{-2}) = \frac{Q}{2\pi r}$$

Częściej w hydromechanice stosuje się dla potencjału prędkości płaskiego źródła wyrażenie (12.67); wyrażenie zaś (12.67a) jest bardziej podobne do

wyrażenia (12.55) dla potencjału źródła przestrzennego. Postępując podobnie jak w przypadku przestrzennym możemy napisać natychmiast potencjał prędkości dla przypadku rozkładu źródeł płaskich na płaszczyźnie Oxy . Mogą one być rozłożone w pewnym obszarze płaskim $A(\xi, \eta)$ płaszczyzny (xy) , na pewnej krzywej, konturze $C(\xi, \eta)$ leżącym również na płaszczyźnie (xy) . Należy pamiętać przy tym, że w rzeczywistości w pierwszym przypadku mamy rozkład źródeł w walcu nieskończonym o podstawie A i tworzących równoległych do osi Oz . W drugim przypadku rozkład źródeł jest na powierzchni walcowej o zarysie powierzchni będącym konturem C i tworzących również równoległych do osi Oz . Dla przypadku płaskiego niech gęstość rozkładu źródeł będzie

$$q_a(\xi, \eta) dA = dQ(A) \quad (12.71a)$$

i

$$q_s(\xi, \eta) dS = dQ(C) \quad (12.71b)$$

Wtedy potencjały prędkości indukowane przez te rozkłady wyrażą się wzorami analogicznymi do wzorów (12.60), (12.61). Mianowicie:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_A q_a(\xi, \eta) \ln r \, d\xi \, d\eta \quad (12.72)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_C q_s(\xi, \eta) \ln r \, ds \quad (12.73)$$

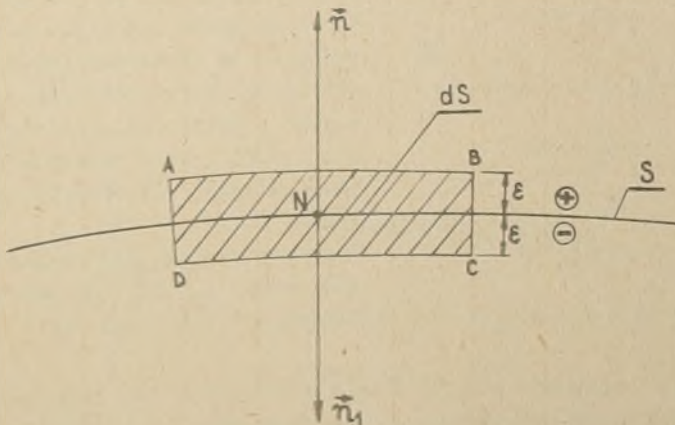
gdzie ds jest elementem konturu C . Wyrażeniom tym można nadać również inne postacie, jeśli weźmie się pod uwagę wyrażenie (12.67a) i wyrażenie (12.71a i b). We wzorach (12.72) i (12.73) promień r jest określony wzorem

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$$

Oczywiście równania powyższe spełniają równanie Laplace'a na płaszczyźnie poza obszarem, w którym źródła są rozłożone. W obszarze A równanie (12.72) spełnia równanie Poissona na płaszczyźnie. Można łatwo jeszcze zauważyć, że wzór (12.72) odpowiada wyrażeniu (12.59), a wzór (12.73) wyrażeniu (12.60).

Kończąc uwagi o polu prędkości, potencjale prędkości, indukowanym przez źródła pokażemy ważną, w praktycznych zastosowaniach, interpretację gęstości rozkładu źródeł q_s na powierzchni S lub gęstości źródeł na płaskim konturze C . W tym celu wydzielimy z całej powierzchni S jej element dS i w punkcie N elementu dS poprowadzimy zewnętrzną normalną \vec{n} . Zgodnie z (12.63b) wydatek źródeł rozłożonych na elemencie powierzchni dS będzie

$$dQ = q_s \, dS$$



Rys. 12.11

Przemieścimy teraz element dS na odległość c w kierunku normalnej \vec{n} w obie strony powierzchni dS . Uzyskamy w ten sposób element objętości dV równy $dS \, 2c$. Pokazuje to rysunek 12.11. Element objętości dV jest ograni-

czony powierzchnią S_1 składającą się z powierzchni $dS_{AB} = dS_{DC} = dS$ i powierzchni bocznych: powierzchni $dS_{BC} = dS_{AD}$ oraz dwóch powierzchni dS_{ABCD} . Wyróżnimy ponadto dwie strony powierzchni dS : dodatnią w kierunku zewnętrznej normalnej dS^+ i ujemną dS^- w kierunku wewnętrznej normalnej $\vec{n}_1 = -\vec{n}$. Oznaczmy dalej przez \vec{v}^+ prędkość na dS^+ a przez \vec{v}^- - prędkość na dS^- . Prędkość \vec{v} jest prędkością indukowaną przez źródła dQ rozłożone na elemencie powierzchni dS . Ponieważ dS jest wielkością małą, to \vec{v}^+ i \vec{v}^- możemy uważać za wielkość stałą na elemencie dS powierzchni S . Strumień prędkości przez powierzchnię S_1 będzie równy

$$dQ = \oint_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = q_s dS$$

Przy obliczaniu całki po powierzchni S_1 możemy zaniedbać strumienie przez powierzchnie boczne - ze względu na małą wielkość ϵ , z którą możemy pójść do zera. Mając to na uwadze oraz uwagi dotyczące prędkości możemy napisać:

$$dQ = \vec{v}^+ \cdot \vec{n} dS + \vec{v}^- \cdot \vec{n}_1 dS = q_s dS$$

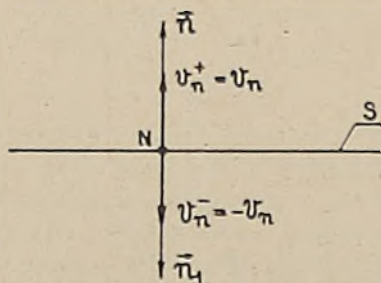
Stąd uwzględniając, że $\vec{n}_1 = -\vec{n}$ mamy związek

$$q_s = \vec{n} \cdot (\vec{v}^+ - \vec{v}^-) \quad (12.74)$$

lub

$$q_s = v_n^+ - v_n^- \quad (12.74a)$$

Widzimy, że gęstość rozkładu źródeł q_s na powierzchni S jest równa różnicy składowych normalnych prędkości z dwu stron powierzchni S . Stąd, jeśli



Rys.12.11a

przy opływie jakiejś powierzchni będzie mieć miejsce nieciągłość składowych normalnych prędkości do tej powierzchni, to tę nieciągłość prędkości możemy przypisać pewnemu rozkładowi źródeł na tej powierzchni. To stwierdzenie ma zastosowanie przy wyznaczaniu potencjału prędkości, a dalej pola prędkości i ciśnienia przy opływie ciał wydłużonych cieczą nielepłą.

Zauważmy jeszcze to, że jeżeli uwzględnimy znaki v_n^+ i v_n^- tak jak na rysunku

12.11a, to $v_n^+ = v_n$, a $v_n^- = -v_n$ i związek (12.74a) będzie

$$q_s = 2 v_n \quad (12.74b)$$

Przy opływie ścian nieprzepuszczalnych bez oderwania przepływu cieczą idealną $v_n = v_{nsc}$ i tę wielkość można podstawić do wyrażenia (12.74b). Oczywiście rozpatrywane pole prędkości jest polem potencjalnym - wzory (12.60), (12.73) - i związek (12.74b) także wynika prosto ze wzoru (12.74a). Istotnie:

$$v_n^+ = \vec{n} \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

$$v_n^- = \vec{n}_1 \cdot \nabla \varphi = - \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

1

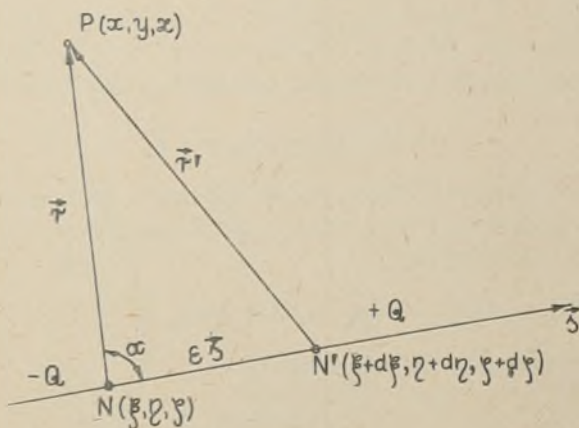
$$q_s + v_n^+ - v_n^- = \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 2 v_{nsc}$$

Ze wzorów powyższych korzysta się przy rozwiązywaniu zadań opływu ciał wydłużonych.

12.2.2. Pole prędkości i potencjał dipoli. Warstwa podwójna

Przechodzimy do wyznaczania potencjału prędkości pochodzącego od dipola hydromechanicznego. Wybieramy w przestrzeni dwa blisko leżące punkty: N o współrzędnych ξ, η, ζ i N' o współrzędnych $\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta$. Odległość tych punktów niech będzie $\overline{NN'} = \epsilon \vec{s}$, gdzie ϵ jest małą wielkością a \vec{s} jest wektorem jednostkowym, skierowanym od punktu N do punktu N' . W punkcie N niech znajduje się źródło o wydatku $-Q$, a w punkcie N' - źródło o wydatku $+Q$. Poszukujemy potencjału prędkości φ w dowolnym punkcie P przestrzeni, jak na rys. 12.12. Punkt P jest oddalony od punktu N o r , a od punktu N' o r' , gdzie r określa wzór (12.56) i podobnie r' . Potencjał φ_1 w punkcie P pochodzący od źródła $-Q$ w punkcie N jest

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi r}$$



Rys. 12.12

a potencjał φ_2 w punkcie P , indukowany źródłem $+Q$ usytuowanym w punkcie N' , zgodnie z (12.55) wyraża się przez

$$\varphi_2 = - \frac{Q}{4\pi r'}$$

Potencjał φ w punkcie P od obu źródeł jest sumą φ_1 i φ_2 . Dlaczego tak możemy robić?

Stąd

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) \quad (12.75a)$$

Ale wyrażenie w nawiasie przedstawia przyrost funkcji r^{-1} , gdy punkt N przemieści się w nowe położenie N' . Widzimy tu, że r musimy rozpatrywać jako funkcję punktu N, to jest współrzędnych ξ, η, ζ , a nie współrzędnych x, y, z punktu P.

Korzystając ze wzoru dla różniczki funkcji skalarnej:

$$df = d\vec{r} \cdot \text{grad } f$$

możemy napisać, że:

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = d \left(\frac{1}{r} \right) = \overline{NN'} \cdot \text{grad}_N \frac{1}{r} \quad (12.75b)$$

przy czym przy grad wstawiono indeks N, żeby pokazać, że różniczkowanie r odbywa się względem współrzędnych ξ, η, ζ punktu N, a punkt P o współrzędnych x, y, z pozostaje niezmienny. Obliczmy

$$\text{grad}_N \frac{1}{r} = -\frac{\overline{PN}}{r^3} \quad (12.76a)$$

Podobnie możemy obliczyć $\text{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right)$, gdzie wskaźnik oznacza, że różniczkuje się względem współrzędnych x, y, z punktu P a punkt N jest niezmienny. Mamy:

$$\text{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{\overline{NP}}{r^3} = \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (12.76b)$$

gdzie:

$$\overline{NP} = -\overline{PN} = \vec{r}$$

Na podstawie wzorów (12.76a) i (12.76b) możemy napisać

$$\text{grad}_N \frac{1}{r} = -\text{grad}_P \frac{1}{r} = \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (12.77)$$

Mamy już wszystkie niezbędne wielkości do napisania potencjału dipola hydromechanicznego w różnych postaciach. I tak podstawiając (12.75b) do (12.75a) uzyskuje się wyrażenie:

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} (Q \overline{NN'}) \cdot \text{grad}_N \frac{1}{r}$$

które po uwzględnieniu (12.51) można zapisać:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \vec{m} \cdot \text{grad}_N \frac{1}{r} \quad (12.78a)$$

lub

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi} \vec{s} \cdot \text{grad}_N \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (12.78b)$$

Jeśli się uwzględni wzór (12.77), to dostaniemy jeszcze inne, równoważne wyrażenia dla potencjału dipola:

$$\varphi = \frac{\vec{m}}{4\pi} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} = -\frac{m \cos \alpha}{4\pi r^2} \quad (12.78c)$$

gdzie: $\alpha = \angle(\vec{s}, r)$ pokazany również na rysunku 12.12. W podobny sposób możemy pójść dalej i tworzyć potencjały kwadrupoli i ogólnie potencjały multipoli, które również niekiedy bywają stosowane do rozwiązywania zadań opływu ciał strugą jednorodną.

Dipole, jak już zaznaczono wyżej, mogą być rozłożone na dowolnej powierzchni S , w tym powierzchni statku. Jeśli są rozłożone w sposób ciągły, tak, że oś dipola - oś \vec{s} - jest skierowana wzdłuż zewnętrznej normalnej \vec{n} do powierzchni S , a σ jest gęstością powierzchniową momentu dipolowego, to zgodnie z (12.53)

$$d\vec{m} = \sigma \vec{n} dS$$

i potencjał φ prędkości w punkcie P przestrzeni będzie sumą potencjałów indukowanych przez wszystkie momenty $d\vec{m}$ rozłożone na powierzchni S ; zatem

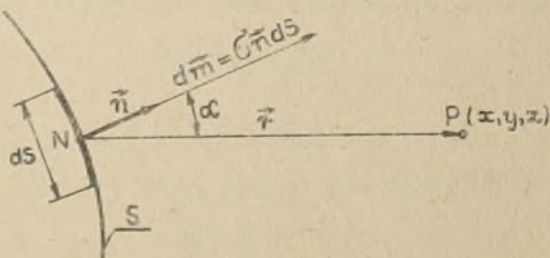
$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(\xi, \eta, \zeta) \vec{n} \cdot \text{grad}_N \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

lub

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_S \sigma \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (12.79)$$

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma \cos \alpha}{r^2} dS \quad (12.80)$$

gdzie: α jest kątem pomiędzy zewnętrzną normalną \vec{n} w punkcie N powierzchni S a wektorem \vec{r} łączącym punkt N z punktem P przestrzeni, w którym szuka się potencjału φ . Pokazuje to rysunek 12.13.



Rys. 12.13

Znajdźmy jeszcze potencjał płaskiego dipola. Powstaje on wtedy, gdy stałe momenty dipolowe są rozłożone w sposób ciągły na osi z i tworzą z tą osią kąt prosty. Potencjał prędkości i potencjał pola prędkości nie zależą wtedy od współrzędnej z . Łatwo się o tym przekonać, kiedy postępuje się ten sam sposób jak przy wyprowadzaniu wzoru (12.66). Istotnie, jeśli oznaczymy również przez \vec{m} gęstość rozkładu momentu dipolowego, to jest moment dipolowy ma jednostkę długości, to

$$d\vec{m}(z) = \vec{m} dz = (\vec{i} m_x + \vec{j} m_y) dz$$

i elementarny potencjał $d\varphi$ będzie

$$d\varphi = - \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} d\xi$$

przy czym $\vec{r} = \vec{r}^* - \vec{k}\xi$ jak na rysunku 12.9.

Uwzględniając powyższe, mamy

$$\varphi = - \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}^*}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(r^{*2} + \xi^2)^{3/2}} = - \frac{\vec{m}}{2\pi r^*} \cdot \frac{\vec{r}^*}{r^*} \quad (12.81)$$

Dalej, podobnie jak w przypadku źródła płaskiego, będziemy oznaczać

$$\vec{r}^* = \vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y$$

gdy dipol znajduje się w początku układu współrzędnych, lub przez

$$\vec{r}^* = \vec{r} = \vec{i}(x - \xi) + \vec{j}(y - \eta)$$

gdy dipol płaski jest usytuowany w punkcie (ξ, η) płaszczyzny (xy) . Jeżeli moment

$$\vec{m} = m \vec{i}$$

a dipol znajduje się w początku układu współrzędnych, to $\vec{m} \cdot \vec{r} = m x$

$$\varphi = - \frac{m}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (12.82)$$

Wyrażenie (12.82) łatwo można wyrazić we współrzędnych biegunowych.

Uwzględniając, że $x^2 + y^2 = r^2$, a $x = r \cos \theta$, mamy

$$\varphi = - \frac{m}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \quad (12.82a)$$

Składowe pola prędkości indukowanego przez dipol płaski są:

$$v_p = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{m}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{m}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}$$

Stosując wzory (12.25) znajdujemy funkcję prądu $\psi(r, \theta)$

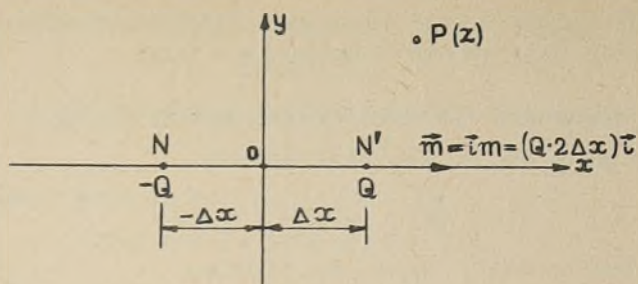
$$\psi(r, \theta) = \frac{m}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \quad (12.82b)$$

Zgodnie ze wzorem (12.24) funkcja charakterystyczna płaskiego dipola będzie:

$$w(z) = \varphi + i\psi = - \frac{m}{2\pi r} (\cos \theta - i \sin \theta) = - \frac{m}{2\pi r} e^{-i\theta}$$

$$\bar{w}(z) = - \frac{m}{2\pi} \frac{1}{r e^{i\theta}} = - \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (12.82c)$$

Wyrażenie dla funkcji charakterystycznej $w(z)$ płaskiego dipola możemy uzyskać również przez zastosowanie takiego samego postępowania jakie było zastosowane przy wyprowadzaniu wzoru (12.78). Umieścimy zatem w punkcie N , jak na rysunku 12.14, źródło płaskie o wydatku $-Q$, a w punkcie N' -



Rys.12.14

źródło o wydatku Q . Stosując wzór (12.70) dla potencjału źródła płaskiego możemy napisać potencjał zespolony w punkcie P płaszczyzny (xy) dla układu źródeł jak na rysunku 12.14.

$$w(z) = - \frac{(Q \cdot 2\Delta x)}{2\pi} \frac{\ln(z + \Delta x) - \ln(z - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Stosując określenie momentu dipolowego

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 \Delta x Q) = m = \text{const} \quad .$$

funkcja charakterystyczna dipola płaskiego będzie

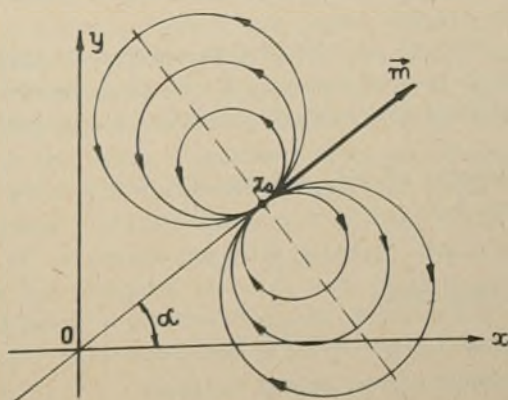
$$w(z) = - \frac{m}{2\pi} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(z + \Delta x) - \ln(z - \Delta x)}{2\Delta x} = - \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (12.82c)$$

Jest to wzór (12.82c) uzyskany na innej drodze.

Jeśli dipol płaski znajduje się nie w początku układu współrzędnych, ale w punkcie $z_0 = \xi_0 + i \eta_0$ płaszczyzny zespolonej z , a oś dipola tworzy z osią Ox kąt α , to funkcja charakterystyczna $w(z)$ w tym przypadku jest:

$$w(z) = - \frac{m e^{-i\alpha}}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} \quad (12.82d)$$

Obraz linii prądu dla tego przypadku pokazuje rysunek 12.15.



Rys.12.15

Skonstruujcie rysunek rodziny linii prądu płaskiego dipola. Narysujcie również rodzinę linii stałego potencjału $\varphi = \text{const}$.

12.2.3. Pole prędkości i potencjał wirów. Warstwa wirowa

Mówiliśmy już o tym, że równanie (7.30)

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} - (\vec{Q} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{v} \quad (7.30)$$

względnie równanie (7.29) łącznie z wyrażeniami

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{ i } \quad \nabla \times \vec{v} = \vec{Q} \quad (12.83)$$

opisuje pole prędkości newtonowskiego płynu nieściśliwego. Ten układ równań nie jest wygodnym przy numerycznym rozwiązywaniu zadań. Przez wprowadzenie funkcji prądu $\psi(x, y)$ okazało się możliwym sprowadzenie tego układu do postaci bardziej dogodniejszej do badań. Jest to równanie (12.14), które można zapisać następująco:

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} = \nu \Delta \Omega_z \quad (12.84a)$$

przy czym

$$\Delta \psi = -\Omega_z \quad (12.84b)$$

oraz

$$\vec{v} = \text{rot} (\vec{k} \psi(x, y)) \quad (12.84c)$$

Związek (12.84c) jest równoważny określeniu funkcji prądu (12.4) dla przepływu płaskiego. Równanie (12.84b) jest równaniem Poissona na płaszczyźnie (xy) . Rozwiązaniem tego równania jest wyrażenie (12.72), w którym należy podstawić

$$q_a(\xi, \eta) = -\Omega_z(\xi, \eta)$$

Stąd

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_A \Omega_z(\xi, \eta) \ln r \, d\xi \, d\eta \quad (12.84d)$$

gdzie A jest obszarem na płaszczyźnie (xy) , który przebiegają prostoosiowe wiry, równoległe do osi Oz .

Okazuje się, że również w przypadku przestrzennym zamiast związków (12.83) można znaleźć analogiczne do (12.84b i c) wyrażenia, przy czym te ostatnie są szczególnymi przypadkami związków dla przepływu trójwymiarowego.

Wychodzimy z równania (3.38), ważnego dla każdego wektora \vec{A} , który tu oznaczymy literą $\vec{\Psi}$:

$$\text{div rot } \vec{\Psi} = 0 \quad (3.38)$$

Dla płynu nieściśliwego mamy

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (4.8)$$

Na podstawie tych dwóch równań możemy napisać:

$$\vec{v} = \text{rot } \vec{\Psi} \quad (12.85)$$

Wektor $\vec{\psi}$ nazywamy potencjałem wektorowym. Ale z wyrażenia (12.83) mamy

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\Omega} \quad (12.86)$$

Podstawiając (12.85) do wyrażenia (12.86) dostaje się związek

$$\text{rot rot } \vec{\psi} = \vec{\Omega} \quad (12.87)$$

który przy pomocy wzoru (3.41):

$$\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$$

daje się zapisać

$$\text{grad div } \vec{\psi} - \Delta \vec{\psi} = \vec{\Omega} \quad (12.88)$$

Dobieramy „skalę” dla potencjału wektorowego (prądu) $\vec{\psi}$ tak, że

$$\text{div } \vec{\psi} = 0 \quad (12.89)$$

Wtedy do wyznaczenia potencjału $\vec{\psi}$ mamy równanie Poissona

$$\Delta \vec{\psi} = -\vec{\Omega} \quad (12.90)$$

które jest równoważne 3 równaniom skalarnym

$$\Delta \psi_x = -\Omega_x \quad \Delta \psi_y = -\Omega_y \quad \Delta \psi_z = -\Omega_z$$

Zauważmy, że dla przypadku płaskiego $\psi_z = \psi$ jest już dobrze znaną nam funkcją prądu - równanie (12.84b) jest identyczne z ostatnim równaniem (12.90). Również dla przypadku płaskiego, ponieważ $\psi_z = \psi(x, y)$, zależność (12.88) jest spełniona.

Podsumowując, pełen układ równań dla badania ruchu wirowego płynu nieściśliwego jest:

$$a) \quad \frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{\Omega}$$

$$b) \quad \Delta \vec{\psi} = -\vec{\Omega}$$

$$c) \quad \vec{v} = \text{rot } \vec{\psi}$$

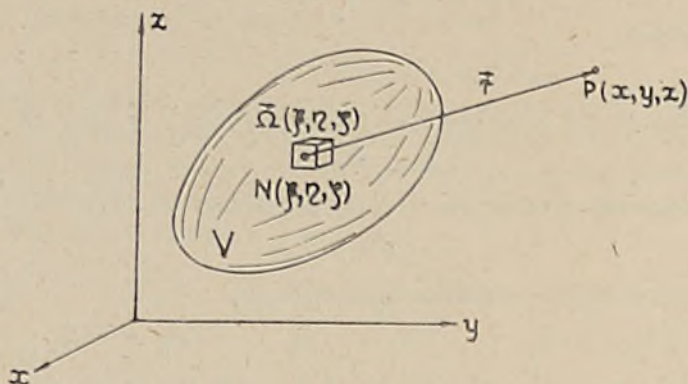
Ponieważ powyższy układ równań można rozwiązać numerycznie tylko dla przepływów laminarnych względnie dla płynu idealnego [11] i to tylko dla prostych warunków brzegowych, dlatego jesteśmy zmuszeni budować uproszczone modele wirowe, w których zakłada się pewien rozkład wirów $\vec{\Omega}$. Podstawą tworzenia tych modeli jest obserwacja przepływu wokół rozpatrywanych ciał oraz ogólne prawa hydromechaniki. Mamy modele wirowe płatów nośnych w postaci sterów, statku, stabilizatorów, płatów nośnych wodolotów, śrub napędowych oraz - jak już wiemy - kadłuba statku manewrującego. Interesuje nas przy tym pole prędkości indukowane przez dany model wirowy - przez, ogólnie mówiąc, zadany w pewnym obszarze V rozkład wirów $\vec{\Omega}$. Niech zatem jak na rysunku 12.16, w pewnym obszarze V będzie zadany rozkład wirowości $\vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta)$, a poza tym obszarem niech $\vec{\Omega} = 0$. Zgodnie z powyższym prędkość płynu \vec{v} , indukowana w punkcie $P(x, y, z)$ przez zadany w obszarze V rozkład wirów $\vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta)$, jest określona przez potencjał wektorowy (prądu $\vec{\psi}$) za pomocą wyrażenia:

$$\vec{v} = \text{rot } \vec{\psi} \quad (12.85)$$

$$\Delta \vec{\psi} = -\vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta) \quad (12.89)$$

Ale rozwiązaniem równania Poissona (12.89) zgodnie z (12.63) jest

$$\vec{\psi} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta) dV}{r}$$



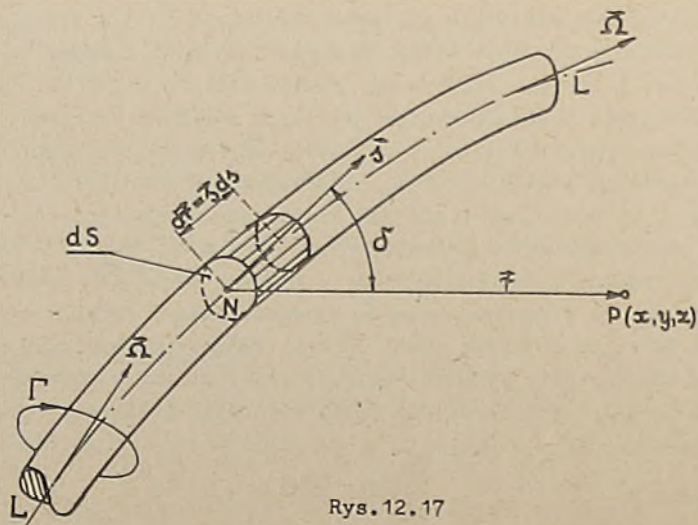
Rys. 12.16

I ostatecznie pole prędkości \vec{v} indukowane przez zadany rozkład wirowości $\vec{\Omega}$ w płynie nieściśliwym będzie

$$\vec{v} = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_V \frac{\vec{\Omega} dV}{r} \quad (12.91)$$

gdzie r jest określone wzorem (12.56).

Zastosujemy obecnie wzór (12.91) do rurki wirowej o natężeniu $I = \Gamma$. Rurkę wirową pokazuje rysunek 12.17, na którym przez L oznaczono oś rurki



Rys. 12.17

wirowej, przez \vec{s} - wektor stycznej do osi rurki, przez dS - przekrój normalny do osi rurki w wybranym punkcie $M(\xi, \eta, \zeta)$ rurki. Odległość punktu N od punktu $P(x, y, z)$, w którym wyznacza się prędkość indukowaną przez rurkę wirową, oznaczono jak zwykle wektorem \vec{r} . Kąt pomiędzy \vec{s} w punkcie N a wektorem \vec{r} oznaczono literą δ . Z rysunku 12.17 widać, że

$$\vec{\Omega}(\xi, \eta, \zeta) dV = \vec{\Omega} dS ds = \Omega dS \vec{s} ds = \Gamma d\vec{r}$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do wzoru (12.91) otrzymujemy

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \text{rot} \left(\frac{d\vec{r}}{r} \right) \quad (12.92)$$

Jeśli uwzględnimy, że

$$\text{rot} \left(\frac{d\vec{r}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot} d\vec{r} + \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times d\vec{r} = \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times d\vec{r}$$

bo $\text{rot} (d\vec{r}) = 0$

to uzyskamy znany wzór wyrażający prawo Biota-Savarta:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times d\vec{r} \quad (12.92a)$$

który po uwzględnieniu wzoru (12.77) można zapisać również w postaci:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} \quad (12.92b)$$

Oczywiście, operację rotacji można zastosować już we wzorze (12.91) pamiętając o tym, że działa ten operator na wielkości będące funkcjami współrzędnych x, y, z . Jeśli się weźmie pod uwagę powyższe, to

$$\text{rot} \Omega(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

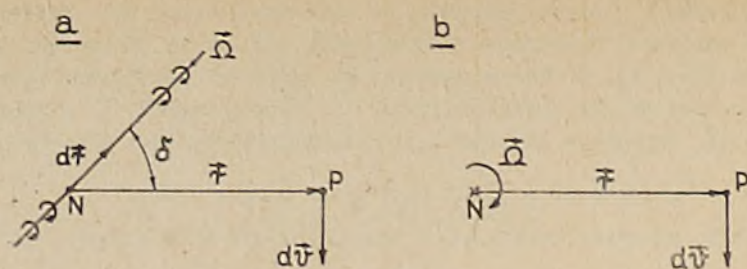
i wzór (12.91) można także zapisać w postaci:

$$\vec{v} = - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{r} \times \vec{\Omega}}{r^3} dV \quad (12.91a)$$

Widać, że jeżeli zastosujemy go do włókna wirowego o natężeniu $\Gamma = \vec{\Omega} \cdot d\vec{S}$, to natychmiast uzyskamy wzór (12.92b). Ze wzoru (12.92b) widać, że moduł elementarnej prędkości indukowanej przez element ds rurki wirowej

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{ds \sin \delta}{r^2} \quad (12.92c)$$

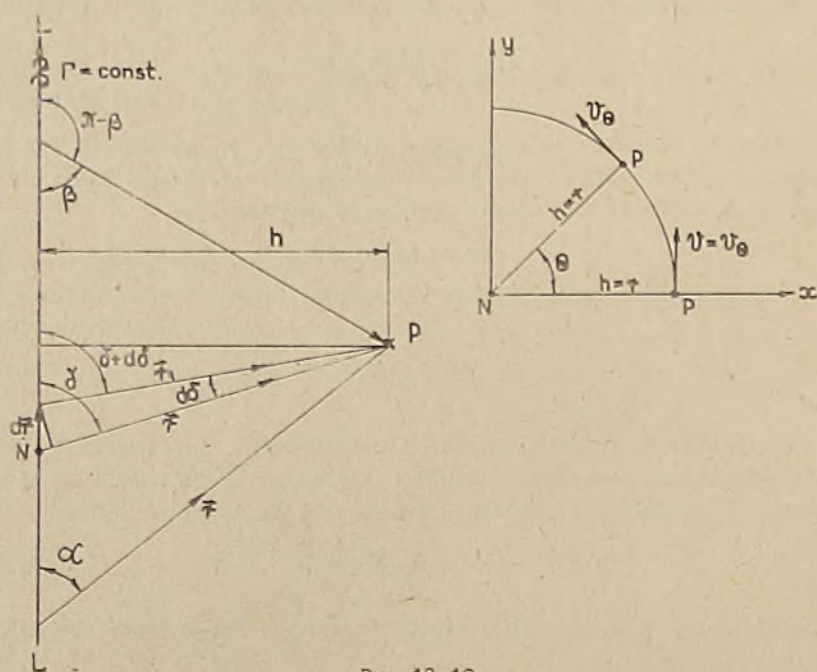
jest prostopadły do wektora $\vec{r} = \overline{NP}$ i wektora $\vec{\Omega}$. Pokazuje to rysunek 12.18a i b.



Rys. 12.18

Zastosujmy obecnie wzór (12.92) do nieskończonego włókna wirowego o linii wirowej w postaci linii prostej jak na rysunku 12.19. Poszukajmy prędkości indukowanej włóknem wirowym o natężeniu $I = \Gamma$ w punkcie P oddalonym o h od linii wirowej. Wektor prędkości \vec{v} jest prostopadły do płaszczyzny rysunku i skierowany od patrzącego na rysunek. Stosując jako zmienną kąt δ możemy wzór (12.92b) dla rozpatrywanego przypadku zapisać tak:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \frac{ds \sin\delta}{r^2}$$



Rys. 12.19

Z rysunku widać, że

$$r d\delta = ds \sin\delta \quad h = r \sin\delta$$

Uwzględniając to prędkość v będzie

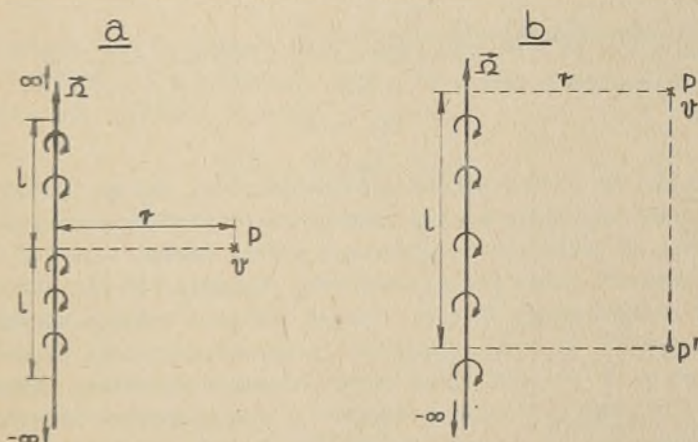
$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\alpha}^{\pi-\beta} \sin \delta d\delta = \frac{\Gamma}{r\pi h} [\cos \alpha - \cos (\pi-\beta)] \quad (12.93)$$

W walcowym układzie współrzędnych, w których oś Oz pokrywa się z linią wirową L-L wektor prędkości indukowanej $\vec{v} = \vec{e}_{\theta} v = \vec{e}_{\theta} v_{\theta}$. Wzór (12.93) pozwala na znalezienie wyrażen dla wiru nieskończonego oraz dla wiru półnieskończonego, jak na rysunku 12.20. Dla włókna nieskończonego kąty $\alpha = \beta = 0$ i

$$v = v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (12.94)$$

a dla wiru półnieskończonego $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$

$$v = v_{\theta} = \frac{\Gamma}{4\pi r} \quad (12.95)$$



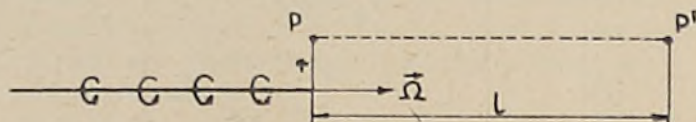
Rys.12.20

Widzimy z powyższych dwóch wzorów, że prędkość indukowana w punkcie P wirum nieskończonym, jak na rysunku 12.20a jest dwa razy większa - tak jak należało się tego spodziewać - niż indukowana w punkcie P przez wir półnieskończony, pokazany na rysunku 12.10b. Wniosek ten ma praktyczne zastosowanie przy analizie jakościowej różnych wzajemnych oddziaływań obiektów poruszających się w cieczy, w wyniku ruchu których wytwarzane są w cieczy wiry. Na przykład przy analizie wzajemnego oddziaływania śruby napędowej i steru statku, usytuowanego przeważnie za śrubą napędową. Tymi zagadnieniami będziemy się zajmować również w dalszych wykładach. Obecnie wrócimy jeszcze do wzoru (12.93). Zapisujemy go w postaci:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha + \cos \beta) \quad (12.96)$$

Jeśli teraz $\alpha = \beta = 8^\circ$, rys. 12.19, to prędkość indukowana w punkcie P od tej części wiru nieskończonego jest mniejsza od prędkości v określonej wzorem (12.94) o około 1%. Długość l wiru, jak na rysunku 12.20a, indukująca tę wartość w punkcie P jest około 7 razy większa od odległości punktu P od osi wiru. Również taka długość $l \approx 7 r$ wiru, jak na rysunku 12.20b, indukuje praktycznie taką wartość prędkości, jaka wynika ze wzoru (12.95). Jeśli dalej punkt P, jak na rysunku 12.20b, zajmie położenie P' względem wiru, to w tym punkcie prędkość v będzie określona z praktyczną dokładnością (1%) wzorem 12.94.

Przy usytuowaniu punktu P' względem półnieskończonego wiru, w odległości $l \approx 7 r$, jak na rysunku 12.21, indukowana prędkość w tym punkcie będzie praktycznie równa zero. Powyższe uwagi znajdują zastosowanie przy numerycznym wyznaczaniu pola prędkości indukowanego przez modele wirów sterów i śrub napędowych.



Rys.12.21

Przypomnijmy, że włókno wirowe półnieskończone, jak na 12.20b i 12.21 może rozpoczynać się tylko na powierzchni rozdziału: na swobodnej powierzchni względnie na powierzchni opływającego płynem ciała.

W rozpatrywanych wyżej przypadkach poza obszarem V, jak na rysunku 12.16, poza nieskończonym włóknom wirowym lub poza półnieskończonym włóknom wirowym $\text{rot } \vec{v} = 0$. Zatem indukowane przez te wiry pole prędkości w obszarze gdzie $\text{rot } \vec{v} = 0$ jest polem potencjalnym. Więc możemy napisać, że $\vec{v} = \text{grad } \varphi$. Znajdźmy potencjał prędkości φ dla przypadku nieskończonego włókna wirowego, jak na rysunku 12.20a. Indukowane pole prędkości jest płaskie, zależy tylko od współrzędnej x i y lub θ i r . Zatem

$$\vec{v} = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Stąd

$$\vec{v} = \vec{e}_\theta \frac{\Gamma}{2\pi r} = \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

Przyjmując stałą całkowania równą zero, jako nieistotną dla określenia pola prędkości, mamy

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (12.97)$$

Korzystając z wyrażen (12.25) można wyznaczyć funkcję prądu ψ :

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$\psi = - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (12.98)$$

Wyrażenia (12.97) i (12.98) zgodnie z (12.94) można wyrazić przy pomocy funkcji charakterystycznej

$$w(z) = \varphi + i\psi = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (12.99)$$

Wyrażenie (12.99) zwie się również potencjałem zespolonym płaskiego wiru. Jeśli płaski wir nie znajduje się w początku układu współrzędnych, lecz w punkcie z_0 płaszczyzny zespolonej z , to $w(z)$ będzie

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) \quad (12.99a)$$

W przypadku przebijania płaszczyzny z przez zbiór nieskończonych i prostopadłych do płaszczyzny z włókien wirowych, funkcja charakterystyczna jest

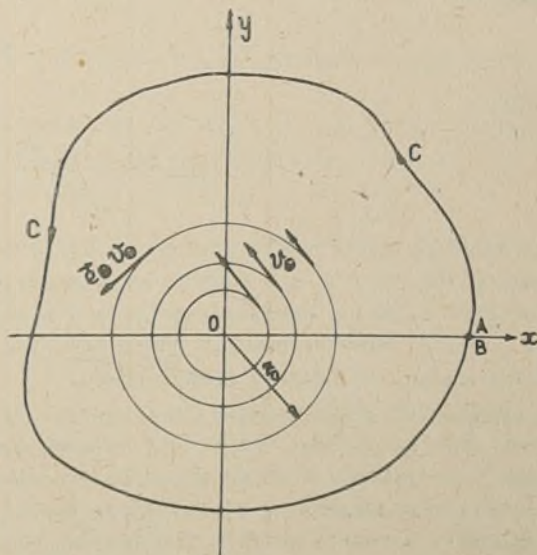
$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_n \Gamma_n \ln(z - z_{on}) \quad (12.99b)$$

W podobny sposób można składać inne potencjały $w(z)$, a także potencjały φ i funkcje prądu ψ . Dla przykładu potencjał źródła płaskiego i płaskiego wiru będzie sumą wyrażeń (12.69b) i (12.99):

$$w(z) = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln z \quad (12.100)$$

Jest to funkcja charakterystyczna płaskiego źródła-wiru.

Wzory (12.94) i (12.96) pokazują nam, że cząstki płynu w przypadku płaskiego wiru poruszają się po koncentrycznych okręgach, przy czym prędkość v_θ maleje przy oddalaniu się od osi wiru jak r^{-1} . Pokazuje to rysunek 12.22, na którym pokazano również dowolny kontur C obejmujący płaski wir usytuowany w początku układu współrzędnych. Obliczmy cyrkulację prędkości po tym konturze C , równą natężeniu wiru.



Rys. 12.22

Zgodnie ze wzorem (3.94)

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_A^B d\vec{r} \cdot \nabla \varphi = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A$$

Ponieważ w punkcie A, jak na rysunku 12.22, kąt $\theta = 0$, a w punkcie B krzywej C jest równy 2π , to zgodnie ze wzorem (12.97) potencjał $\varphi_A = 0$, a $\varphi_B = \Gamma$.

Stąd

$$\Gamma = \oint_C d\varphi = \varphi_B - \varphi_A = \Gamma = I \quad (12.101)$$

Ponieważ dalej punkt A pokrywa się z punktem B konturu C, to potencjał płaskiego wiru jest funkcją wieloznaczną. Na osi Ox występuje skok potencjału prędkości.

Wyniki obliczeń (12.101) można również uzyskać prosto ze wzoru (12.34), bo w przepływie według założenia nie ma źródeł: $Q = 0$, a więc

$$\oint_C d\varphi = \Gamma = \oint_C \frac{dw}{dz} dz$$

Obliczmy całkę po prawej stronie Γ :

Na podstawie wzoru (12.99)

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}$$

Przyjmując dalej dla prostoty za kontur C okrąg o promieniu r_0 (rys. 12.22) mamy

$$z = r_0 e^{i\theta} \quad dz = r_0 i e^{i\theta} d\theta$$

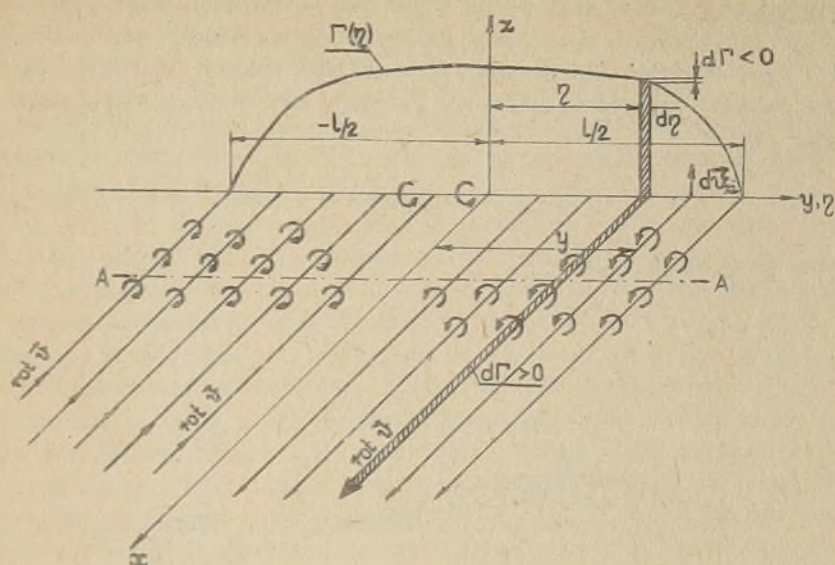
Więc

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{r_0 i e^{i\theta} d\theta}{r_0 e^{i\theta}} = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \Big|_0^{2\pi} = \Gamma$$

Uzyskaliśmy wynik taki, jakiego należało się spodziewać. Sprawdźcie przy pomocy (12.34), że dla funkcji charakterystycznej $w(z)$ określonej wzorem (12.100) całka po dowolnym konturze C z prędkości zespolonej będzie równa $\Gamma + iQ$. Mamy tu jeszcze jeden przykład na to, że interesujące nas wielkości możemy obliczać w różny sposób.

Mówiliśmy już w punkcie 3.3.2 o tym, że z włókien wirowych można utworzyć warstwę wirową. Można taką warstwę utworzyć z wirów półnieskończonych i oczywiście z wirów płaskich - nieskończonych. Pierwszy przypadek znalazł zastosowanie w teorii płata nośnego o dużym wydłużeniu; drugi natomiast - w teorii profilu lub inaczej w teorii płata o wydłużeniu nieskończonym.

Na rysunku 12.23 pokazany jest model wirowy płata o dużym wydłużeniu, zwanym modelem linii nośnej Prandtla. Składa się on z tak zwanej linii nośnej będącej wirem związanym, utworzonej przez prostoosiowy wir leżący na odcinku $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ osi Oy i charakteryzujący się zmiennym natężeniem, mierzonym cyrkulacją prędkości $\Gamma(\eta)$ oraz z wirów półnieskończonych zaczyna-



Rys.12.23

jących się na wirze związanym $\Gamma(\eta)$ i rozciągających się do nieskończoności. Te wiry półnieskończone o natężeniu

$$d\Gamma = -\frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} d\eta \quad (12.102)$$

nazywa się wirami swobodnymi. Jak już wiemy, (3.32), wirem związanym można zastąpić płat nośny.

Obliczmy pole prędkości indukowanych na odcinku $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ przez powyższy układ wirów. Jest ono wytworzone tylko przez wiry swobodne. Zgodnie ze wzorem (12.95) i prawem Biota i Savarta

$$d\vec{v}_{z1} = \vec{k} dv_{z1} = \vec{k} dv_1 \quad dv_1 = \frac{d\Gamma}{4\pi(y-\eta)}$$

Uwzględniając (12.102) dv_1 będzie

$$dv_1 = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\Gamma}{d\eta} \right) \frac{d\eta}{y-\eta}$$

Sumując przyczynki dv_1 od wszystkich wirów swobodnych, prędkość indukowana na osi linii nośnej wyrazi się wzorem

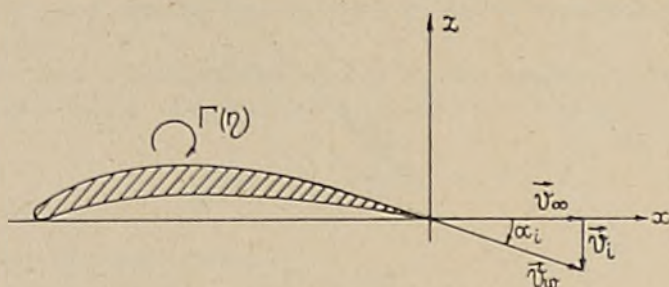
$$v_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta} \quad (12.103)$$

Z powyższego wzoru będziemy korzystać przy rozpatrywaniu teorii płata nośnego o dużym wydłużeniu. Tu ograniczymy się do dwóch istotnych uwag.

Uwaga pierwsza: Niech linia nośna $\Gamma(\eta)$ jak na rysunku 12.23 będzie wirem związanym zastępującym płat nośny opływany strugą jednorodną o prędkości $\vec{v}_\infty = \vec{i} v_\infty$. Prędkość indukowana v_1 , określona wzorem (12.103), na ogół zmienna wzdłuż rozpiętości płata l , powoduje skos strugi o tak zwany indukowany kąt

$$\alpha_1 = -\operatorname{arctg} \frac{v_1}{v_\infty} \approx -\frac{v_1}{v_\infty} \quad (12.104)$$

pokazany na rysunku 12.24.



Rys.12.24

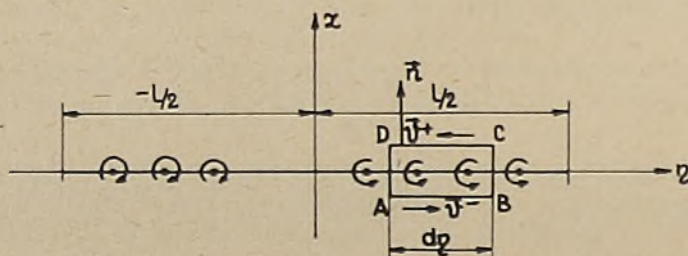
Prędkość wypadkowa v_w w przekroju równoległym do płaszczyzny Oxz jest

$$\vec{v}_w = \vec{v}_\infty + \vec{v}_1$$

Uwaga druga: Przekrój A-A warstwy wirowej, utworzonej z wirów swobodnych, płaszczyzną prostopadłą do osi wirów, to jest płaszczyzną równoległą do płaszczyzny Oyz , pokazuje rysunek 12.25. Zaznaczono na nim małą pętlę ABCD w kształcie prostokąta o bardzo małych bokach: $AB = DC = d\eta$; $BC = DA \ll AB$. Wyróżniamy, podobnie jak przy szukaniu interpretacji gęstości rozkładu źródeł na powierzchni S , prędkość v^+ na dodatniej stronie warstwy wirowej i prędkość v^- na ujemnej - dolnej stronie warstwy wirowej. Obliczmy cyrkulację prędkości po pętli ABCD. Przy uwzględnieniu tego, że $BC = DA \ll AB$, mamy:

$$d\Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} d\eta = v^- d\eta + v^+ d\eta$$

A-A

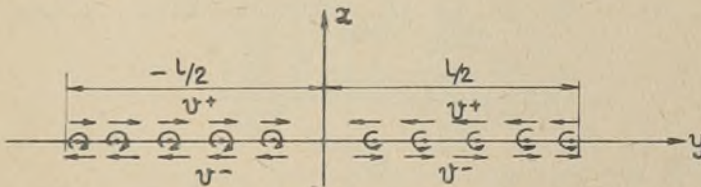


Rys.12.25

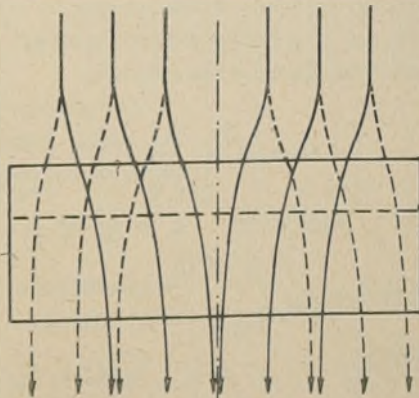
Stąd

$$\frac{d\Gamma}{d\eta} = v^- + v^+ \quad (12.105)$$

Dodatnie kierunki prędkości v^- i v^+ zaznaczono na rysunku 12.25. Widzimy, że gęstość rozkładu cyrkulacji w warstwie wirowej jest równa skokowi prędkości stycznych na dodatniej i ujemnej stronie warstwy wirowej, przy czym prędkości v^- i v^+ są prostopadłe do osi wirów, do rot \vec{v} . Ponieważ rozkład gęstości cyrkulacji $\frac{d\Gamma}{d\eta}$ jest zmienny wzdłuż rozpiętości płata, również skok prędkości stycznych jest funkcją η . Na rysunku 12.26 zaznaczono strzałkami tę zmianę prędkości v^- i v^+ . Dalej prędkości v^- i v^+ są oczywiście również funkcją współrzędnej x . (Wykażcie to!). Więc jeśli płat nośny, lub inaczej rozpatrywany model wirowy, jest opływany strugą jednorodną w nieskończoności, to linie prądu na powierzchni dodatniej warstwy wirowej (na stronie grzbietowej płata) i na powierzchni ujemnej warstwy wirowej (na stronie spodniej płata) będą przesunięte względem siebie, jak schematycznie pokazano na rysunku 12.27. Zaznaczono na nim liniami ciągłymi linie prądu na powierzchni dodatniej, a liniami kreskowanymi linie prądu na powierzchni ujemnej. Poziomy skos linii prądu będzie również przed płatem (Prawo Biota-Sovarta).



Rys.12.26



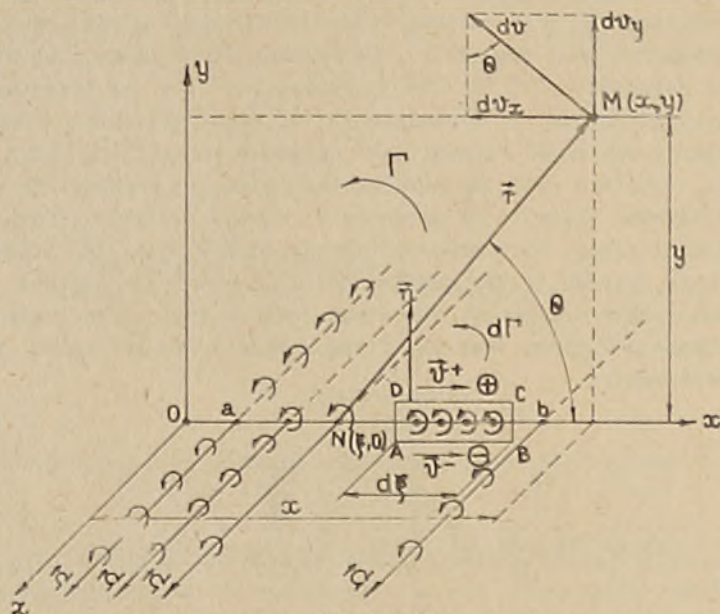
Rys.12.27

Przejdziemy do omówienia podstawowych zależności dla płaskiej warstwy wirowej, która jest utworzona z nieskończonych włókien wirowych. Dla prostoty założymy najpierw, że włókna wirowe są rozłożone w sposób ciągły na

odcinku $\langle a, b \rangle$ osi Ox i że gęstość natężeń wirów jest $\gamma(\xi)$, przy czym

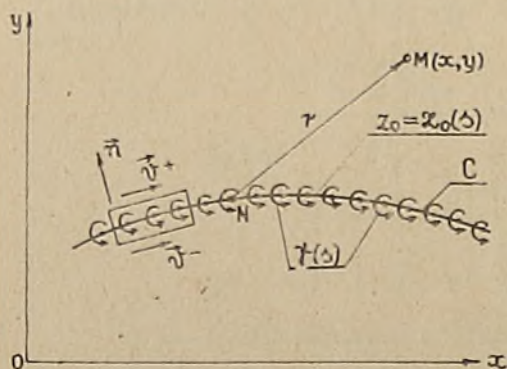
$$\gamma(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} \quad (12.105)$$

a linie wirowe mają kierunek osi Oz , jak na rysunku 12.28. Podobnie jak w przypadku przestrzennym wyróżnimy dodatnią i ujemną stronę warstwy wirowej i obliczymy cyrkulację prędkości po pętli ABCD, zaznaczonej również na rysunku 12.28.



Rys.12.28

Na dodatniej stronie warstwy wirowej niech prędkość v_x będzie v^+ , a na ujemnej v^- . W odróżnieniu od przypadku przestrzennego dodatnie kierunki v^+ i v^- pokrywają się z dodatnim kierunkiem osi Ox .



Rys.12.28a

Cyrkulacja prędkości $d\Gamma$ po pętli ABCD, przy zaniedbaniu przyczynków po odcinkach \overline{BC} i \overline{DA} , jest

$$d\Gamma = \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi = v^- d\xi - v^+ d\xi$$

Uwzględniając związek (12.106) możemy napisać

$$\gamma(\xi) = v^- - v^+ \quad (12.107)$$

Widzimy, że jest to taki sam związek jak dla przypadku przestrzennego, (12.105) i wnioski też są takie same. Przy przyjęciu kierun-

ku dodatniego wirów jak na rysunku 12.28 $\vec{v}^+ = -\vec{v}^-$. Więc

$$\gamma(\xi) = 2 v^- \quad (12.107a)$$

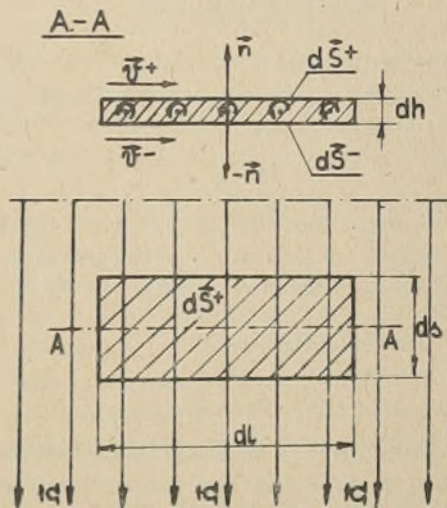
Związki pomiędzy gęstością rozkładu wirów γ a skokiem prędkości po obu stronach warstwy (powierzchni) wirowej można znaleźć dla przypadku ogólnego przy wzięciu pod uwagę twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego

$$\oint_S \vec{n} \times \vec{v} \, dS = \int_V \nabla \times \vec{v} \, dV$$

które można oczywiście zapisać tak:

$$\oint_S \vec{dS} \times \vec{v} = \int_V \text{rot } \vec{v} \, dV \quad (12.108)$$

Zastosujmy ten wzór do elementu dV utworzonego przez przesunięcie równoległe w kierunku dodatnim, \vec{n} , elementu dS powierzchni (warstwy) wirowej oraz w kierunku $-\vec{n}$ tak, że odległość pomiędzy elementami powierzchni dS^+ i dS^- jest bardzo mała i równa $dh \ll dl$ i ds , jak na rysunku 12.29



Rys. 12.29

Widzimy, że

$$dV = dl \, ds \, dh \quad dS^+ = \vec{n} \, dl \, ds \quad dS^- = -\vec{n} \, dl \, ds$$

Biorąc pod uwagę, że gęstość rozkładu wirów

$$\vec{\gamma} = dh \, \text{rot } \vec{v} \quad (12.108a)$$

związek (12.108) można dla powyższego przypadku zapisać

$$dS^+ \times \vec{v}^+ + dS^- \times \vec{v}^- = \text{rot } \vec{v} \, dV$$

lub

$$\vec{n} \, dl \, ds \times \vec{v}^+ - \vec{n} \, dl \, ds \times \vec{v}^- = \vec{\gamma} \, dl \, ds$$

Dzieląc stronami przez $dl \, ds$ powyższe wyrażenie mamy:

$$\vec{\gamma} = \vec{n} \times (\vec{v}^+ - \vec{v}^-) \quad (12.109)$$

Łatwo stwierdzić, że wyrażenia (12.105) i (12.107) są szczególnymi przypadkami wzoru (12.109). Istotnie, gęstość rozkładu wirów pokazanych na rysunku 12.28 jest $\gamma(\xi) = \gamma_z$ a na rysunku 12.25 -

$$\gamma(\eta) = \gamma_x$$

Ze wzoru (12.109)

$$\gamma_x = n_y(v_z^+ - v_z^-) - n_z(v_y^+ - v_y^-) \quad (12.110a)$$

$$1 \quad \gamma_z = n_x(v_y^+ - v_y^-) - n_y(v_x^+ - v_x^-) \quad (12.110b)$$

W przypadku warstwy wirowej jak na rysunku 12.25 $\vec{n} = \vec{k}$ i $n_y = \cos(\vec{n}, y) = 0$ a $n_z = \cos(\vec{n}, z) = 1$. Stąd

$$\gamma_x = \gamma(\eta) = v_y^- - v_y^+$$

Jeśli dalej zastosujemy oznaczenia dla prędkości na warstwie wirowej, jakiego były przyjęte na rysunku 12.25, to uzyskamy wzór (12.105).

Dla warstwy wirowej pokazanej na rysunku 12.28 $\vec{n} = \vec{j}$ i $n_x = \cos(\vec{n}, x) = 0$; $\cos(\vec{n}, y) = 1$, zaś $\gamma(\xi) = \gamma_z(\xi) = v_x^- - v_x^+$, a więc zgodnie ze wzorem (12.107).

Gdyby warstwa wirowa była utworzona z nieskończonych włókien wirowych, rozłożonych w sposób ciągły na odcinku prostej prostopadłej do osi Ox o liniach wirowych skierowanych zgodnie z osią Oz , to

$$\vec{n} = \vec{i} \quad n_x = 1 \quad n_y = 0$$

$$\gamma_z(\eta) = v_y^+ - v_y^-$$

Widzimy, że wzór (12.109) pozwala na znalezienie zależności pomiędzy gęstością rozkładu wirów a prędkościami po obu stronach warstwy wirowej dla dowolnie zorientowanych warstw (powierzchni) wirowych.

Przechodzimy do wyznaczenia pola prędkości i funkcji charakterystycznej przepływu $w(z)$ dla warstwy wirowej, pokazanej na rysunku 12.28. Widzimy, że włókno wirowe o natężeniu $d\Gamma$ usytuowane w punkcie $N(\xi, 0)$ indukuje w punkcie $M(x, y)$ prędkości:

$$dv_x = -dv \sin \theta = -\frac{d\Gamma}{2\pi r} \frac{y}{r} = -\frac{\gamma(\xi) y d\xi}{2\pi r^2}$$

$$dv_y = dv \cos \theta = \frac{d\Gamma}{2\pi r} \frac{x-\xi}{r} = \frac{\gamma(\xi) (x-\xi) d\xi}{r^2}$$

gdzie

$$r^2 = (x - \xi)^2 + y^2$$

Prędkość zaś indukowana w punkcie M przez warstwę wirową rozłożoną na odcinku $\langle a, b \rangle$ będzie

$$v_x = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma(\xi)y \, d\xi}{r^2} \quad (12.111a)$$

$$v_y = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma(\xi)(x-\xi) \, d\xi}{r^2} \quad (12.111b)$$

Powyższe wyrażenia dla v_x i v_y możemy zapisać przy pomocy wzoru (12.26) dla prędkości zespolonej następująco:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= v_x - i v_y = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\gamma(\xi)}{r^2} [-y - i(x-\xi)] \, d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \gamma(\xi) \frac{[(x-\xi) - iy]}{[(x-\xi) + iy][(x-\xi) - iy]} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma(\xi) \, d\xi}{z-\xi} \\ \frac{dw}{dz} &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma(\xi) \, d\xi}{z-\xi} \quad (12.111c) \end{aligned}$$

Potencjał zespolony $w(z)$ warstwy wirowej jak na rysunku 12.28 zatem będzie:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \gamma(\xi) \ln(z-\xi) \, d\xi \quad (12.111d)$$

Wzór (12.111d) można było uzyskać bezpośrednio ze wzoru (12.99a) zastępując w nim Γ przez $d\Gamma = \gamma(\xi) \, d\xi$ według wzoru (12.106), przyjmując $z_0 = \xi$ i biorąc całkę po odcinku a, b . Postępując tak samo, można natychmiast napisać funkcję charakterystyczną $w(z)$ dla warstwy wirowej utworzonej z nieskończonych włókien wirowych przebiegających płaszczyznę (x, y) wzdłuż linii ciągłej C jak na rysunku 12.28a, przy czym linie wirowe mają kierunek osi Oz .

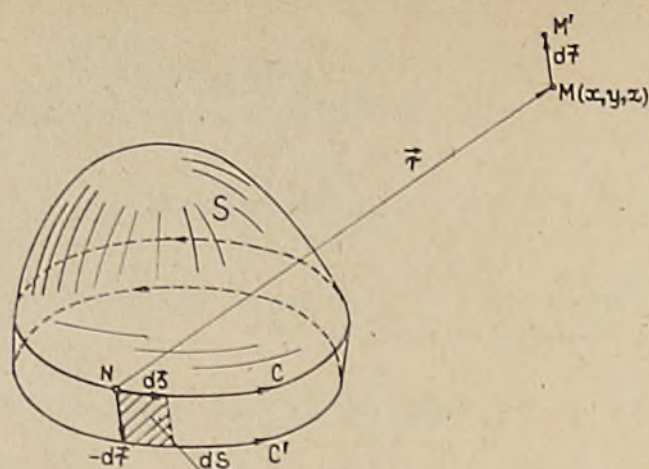
Jeśli $z_0 = z_0(s)$ jest równaniem linii C , na której rozłożone są włókna wirowe o gęstości

$$\gamma_z = \gamma(s) = n_x (v_y^+ - v_y^-) - n_y (v_x^+ - v_x^-)$$

to funkcja $w(z)$ będzie:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \gamma(s) \ln[z - z_0(s)] \, ds \quad (12.111e)$$

Wzory (12.111) znajdują zastosowanie w teorii profili płatów nośnych lub inaczej w teorii płata nośnego o nieskończonym wydłużeniu.



Rys.12.30

Wykażemy jeszcze, że pole prędkości indukowane przez zamknięte włókno wirowe, pętla C na rysunku 12.30, o natężeniu I jest takie same, jak pole prędkości wywołane dipolami równomiernie rozłożonymi na powierzchni S rozpiętej na pętli C, przy czym gęstość momentu dipolowego σ ma wartość stałą i równą I , a elementarny moment dipolowy jest

$$d\vec{m} = \sigma \vec{n} dS = \sigma d\vec{S} \quad (12.112a)$$

Niech poza pętlą C nie ma wirów. Wtedy pole prędkości indukowane przez włókno wirowe C ma potencjał φ . Niech dalej ten potencjał w dowolnym punkcie M poza pętlą C będzie φ_M . W punkcie M', blisko leżącym punktu M, takim że $\overline{MM'} = d\vec{r}$, nastąpi zmiana potencjału φ o wielkości $d\varphi = \varphi_{M'} - \varphi_M$. Tą samą zmianę potencjału $d\varphi$ można uzyskać, jeśli punkt M pozostanie w tym samym miejscu, a pętla C przemieści się o $-d\vec{r} = \overline{MM'}$ i zajmie położenie C', jak na rysunku 12.30. Wtedy powierzchnia S rozpięta na pętli C ulegnie zmianie o wielkość powierzchni pomiędzy pętlami C i C'. Na tej dodatkowej powierzchni według założenia niech również będą rozmieszczone dipole określone wzorem (12.112a). Element $d\vec{S}$ przyrostu powierzchni, zgodnie z rysunkiem 12.30, jest

$$d\vec{S} = \vec{n} dS = -d\vec{r} \times d\vec{s} = d\vec{s} \times d\vec{r}$$

zaś przyrost potencjału w punkcie M, pochodzący od dipoli rozłożonych na tym elemencie $d\vec{S}$, zgodnie ze wzorem (12.78c) będzie

$$-\frac{d\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} = -\frac{\sigma d\vec{S} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

Uwzględniając dalej wyrażenie dla $d\vec{S}$ i wykonując sumowanie po całej pętli C dostajemy przyrost potencjału φ w punkcie M

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \nabla\varphi = \left(-\frac{\sigma}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^3} \right) \cdot d\vec{r}$$

Stąd pole prędkości indukowane przez pętlę C w punkcie M jest

$$\vec{v} = \frac{\sigma}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \nabla\varphi \quad (12.112b)$$

Jest to ten sam wzór co (12.92b). Stąd rzeczywiście pole prędkości indukowane przez zamknięte włókno wirowe o natężeniu Γ jest takie same jak pole prędkości indukowane przez warstwę podwójną rozpiętą na tym włóknie wirowym, przy czym gęstość powierzchniowa momentu dipolowego σ jest stała i równa natężeniu włókna wirowego Γ . Praktyczne znaczenie tego stwierdzenia polega na tym, że zamiast wyznaczania pola prędkości indukowanego przez zamknięte pętle wirowe możemy wyznaczać to pole prędkości dla warstw podwójnych rozpiętych na tych pętlach, i odwrotnie. Stąd wniosek dalszy: W przypadku pętli zamkniętej wzory (12.92a)

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_C \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times d\vec{r} \quad (12.92a)$$

i wzór (12.79) dla $\sigma = \Gamma$ muszą dać ten sam skutek

$$\varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (12.79a)$$

Dla wykazania tego zastosujemy do wyrażenia (12.92a) wzór ważny dla dowolnego wektora \vec{a}

$$\oint_C \vec{a} \times d\vec{r} = \int_S \vec{n} \nabla \cdot \vec{a} dS - \nabla \int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS \quad (12.113)$$

i podstawmy w nim zamiast \vec{a} wektor $\nabla(r^{-1})$.

Mamy:

$$\oint_C \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times d\vec{r} = \int_S \vec{n} \Delta \left(\frac{1}{r} \right) dS - \nabla \int_S \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

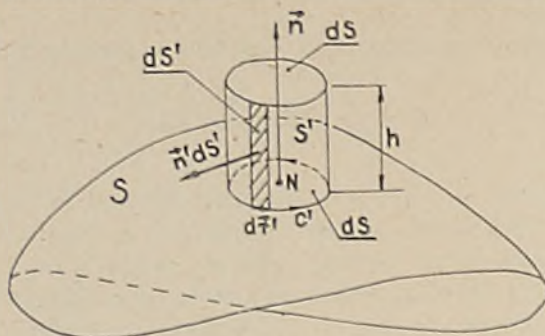
Ale

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0; \quad \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right)$$

więc

$$\oint_C \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times d\vec{r} = -\nabla \int_S \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (12.114)$$

Uwzględniając, że $\vec{v} = \nabla\varphi$ i podstawiając wzór (12.114) do wzoru (12.92a) uzyskujemy, tak jak być powinno, wzór (12.79a).



Rys.12.31

W celu wykazania prawdziwości wzoru (12.113) w dowolnym punkcie N powierzchni S rozpiętej na pętli C zbudujemy walec o podstawie dS , małej wysokości h , równoległej do zewnętrznej normalnej \vec{n} powierzchni S w punkcie N , i obwodzie podstawy dS w postaci pętli C' , jak pokazuje rysunek 12.31. Powierzchnią boczną walca niech będzie S' , a zewnętrzna normalna do S' niech będzie \vec{n}' . Oznaczmy dalej przez \vec{s}' wektor styczny do pętli C' . Mamy oczywiste zależności:

$$dV = dS h \quad ds h = dS'$$

$$d\vec{r}' = \vec{s}' ds = \vec{s}' \frac{dS'}{h} \quad \vec{s}' = \vec{n} \times \vec{n}'$$

Możemy teraz napisać tożsamość:

$$\oint_C \vec{a} \times d\vec{r}' = \frac{1}{h} \int_{S'} \vec{a} \times (\vec{n} \times \vec{n}') dS' \quad (12.115a)$$

Do prawej strony (12.115a) zastosujemy wzór (3.40) dla potrójnego iloczynu wektorowego. Otrzymujemy

$$\oint_C \vec{a} \times d\vec{r}' = \frac{1}{h} \int_{S'} \vec{n} (\vec{n}' \cdot \vec{a}) dS' - \frac{1}{h} \int_{S'} \vec{n}' (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS' \quad (12.115b)$$

We wzorze (12.115a) normalna \vec{n} ma wartość stałą, a normalna \vec{n}' zmienia się od punktu do punktu powierzchni S' . Niech na dolnej ścianie walca $dS = dS_d$ zewnętrzna normalna $\vec{n}' = \vec{n}_d$, to na $dS = dS_g$ (górnej) $\vec{n}' = \vec{n}_g = -\vec{n}_d$. Biorąc to pod uwagę zauważyć można, że wyrażenia z prawej strony wzoru (12.115b) dla powierzchni dS_d i dS_g są równe zeru. Stąd wzór (12.115b) możemy zapisać:

$$\oint_C \vec{a} \times d\vec{r}' = \frac{1}{h} \oint_{S_1} \vec{n} (\vec{n}' \cdot \vec{a}) dS_1 - \frac{1}{h} \oint_{S_1} \vec{n}' (a_n) dS_1$$

gdzie:

$$S_1' = S' + dS_d + dS_g = S' + 2 dS$$

Jest powierzchnią całkowitą walca o objętości $V' = ds h = dV$. Teraz już do wzoru (12.115c) możemy zastosować wzór (3.65)

$$\oint_S L(\vec{n}) dS = \int_V L(\nabla) dV$$

Otrzymujemy:

$$\oint_C \vec{a} \times d\vec{r}' = \frac{1}{h} \int_{V'} \vec{n} (\nabla \cdot \vec{a}) dV' - \frac{1}{h} \int_{V'} \nabla(a \cdot \vec{n}) dV'$$

Ale objętość V' jest wielkością małą, więc w całym obszarze wyrażenia podcałkowe mają wartości stałe. Zatem

$$\oint_C \vec{a} \times d\vec{r}' = \vec{n} (\nabla \cdot \vec{a}) dS - \nabla(\vec{a} \cdot \vec{n}) dS$$

Wykonując dalej sumowanie po całej powierzchni S i po wszystkich pętlach C' leżących na powierzchni S dostajemy wzór:

$$\oint_C \vec{a} \times d\vec{r}' = \oint_{\partial S} \vec{a} \times d\vec{r}' = \int_S [\vec{n} (\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla(\vec{a} \cdot \vec{n})] dS \quad (12.113)$$

przedstawiający inną postać twierdzenia Stokesa (3.92). Jeśli weźmie się pod uwagę wyrażenie dla potrójnego iloczynu wektorowego

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B} (\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{A} (\vec{B} \cdot \vec{C})$$

to wektor Stokesa (12.113) można zapisać w postaci:

$$\oint_C d\vec{r}' \times \vec{a} \equiv \oint_{\partial S} d\vec{r}' \times \vec{a} = \int_S (\vec{n} \times \nabla) \times \vec{a} dS \quad (12.113a)$$

$$\oint_{\partial S} d\vec{r}' \times \vec{a} = \int_S [\nabla(\vec{a} \cdot \vec{n}) - \vec{n} (\nabla \cdot \vec{a})] dS \quad (12.113b)$$

W analogicznej do 12.113a postaci zapisujemy także wzór (3.92):

$$\oint_{\partial S} d\vec{r}' \cdot \vec{a} \equiv \oint_C d\vec{r}' \cdot \vec{a} = \int_S (\vec{n} \times \nabla) \cdot \vec{a} dS \quad (12.113c)$$

Jeśli zamiast pola wektorowego \vec{a} weźmiemy pole skalarne φ to:

$$\oint_{\partial S} d\vec{r}' \varphi = \int_S (\vec{n} \times \nabla) \varphi dS \quad (12.113d)$$

Przykład. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \times (\varphi \vec{v}_e)$$

gdzie ∂S jest brzegiem dowolnej powierzchni S , φ jest dowolnym polem skalarnym, a \vec{v}_e jest prędkością unoszenia układu odniesienia, w którym dany jest promień wodzący \vec{r} oraz $\varphi(\vec{r})$

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$$

Zgodnie ze wzorem (12.113b) mamy:

$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \times (\varphi \vec{v}_e) = \int_S [\nabla(\varphi \vec{v}_e \cdot \vec{n}) - \vec{n}(\nabla \cdot \varphi \vec{v}_e)] dS$$

Ale

$$\nabla(\varphi \vec{v}_e \cdot \vec{n}) = \varphi \nabla(\vec{v}_e \cdot \vec{n}) + \vec{v}_e \cdot \vec{n} \nabla \varphi$$

Uwzględniając, że $\nabla \otimes \vec{n}_c = 0$; $\nabla \times \vec{n}_c = 0$, to na podstawie wzoru (3.48) mamy:

$$\nabla(\vec{v}_e \cdot \vec{n}) = \vec{\omega} \times \vec{n} + 2 \vec{n} \times \vec{\omega} = -\vec{\omega} \times \vec{n}$$

Natomiast:

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{v}_e) = \varphi \nabla \cdot \vec{v}_e + \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} d\vec{r} \times (\varphi \vec{v}_e) &= \int_S [\vec{v}_e \cdot \vec{n} \otimes \nabla \varphi - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi \otimes \vec{n} - \vec{\omega} \times \varphi \vec{n}] dS = \\ &= \int_S \vec{v}_e \cdot (\vec{n} \otimes \nabla \varphi - \nabla \varphi \otimes \vec{n}) dS - \int_S \vec{\omega} \times \varphi \vec{n} dS \end{aligned} \quad (12.113e)$$

Powyższy wzór ma istotne znaczenie przy wyprowadzaniu wyrażeń dla reakcji hydromechanicznych przez zastosowanie zasady pędu w ruchomym układzie odniesienia.

12.3. POTENCJAŁ PRĘDKOŚCI PRZEPIYU JEDNORODNEGO

Przepływ jednorodny płynu charakteryzuje się tym, że w każdym punkcie obszaru płynnego prędkość \vec{v} ma wartość stałą; zatem $\vec{v} = \vec{v}_\infty = \text{const}$. Potencjał prędkości przepływu jednorodnego w ogólnym przypadku jest:

$$\varphi = \vec{v} \cdot \vec{r} = \vec{v}_\infty \cdot \vec{r} \quad (12.116)$$

Jeśli mamy kartezjański układ współrzędnych i

$$\vec{v} = \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z$$

to

$$\varphi = x v_x + y v_y + z v_z \quad (12.116a)$$

Jeśli układ współrzędnych jest tak dobrany, że wektor \vec{v}_∞ leży w płaszczyźnie (x, y) i tworzy z osią Ox kąt α , jak pokazuje rysunek 12.32, to

$$v_x = v_\infty \cos \alpha$$

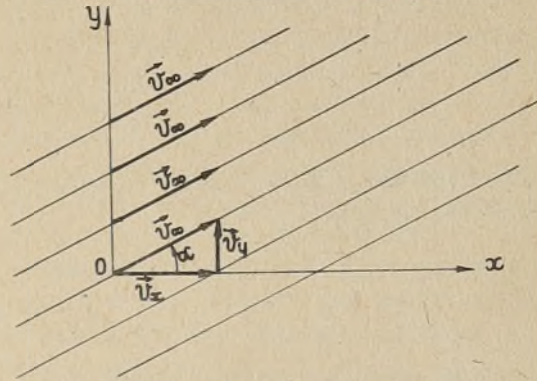
$$v_y = v_\infty \sin \alpha$$

i potencjał prędkości będzie:

$$\varphi = x v_x + y v_y =$$

$$= v_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

(12.117a)



Rys.12.32

Ponieważ przepływ w tym przypadku jest dwuwymiarowy, to istnieje funkcja prądu $\psi(x, y)$. Na mocy wzoru (12.6) mamy

$$\psi = v_\infty (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \quad (12.117b)$$

Oczywiście potencjały φ i ψ można zapisać przy pomocy funkcji charakterystycznej przepływu $w(z)$; wzór (12.24).

Łatwo sprawdzić przez rozpisanie, że

$$w(z) = \varphi + i \psi = v_\infty z e^{-i\alpha} \quad (12.117c)$$

Jeśli dalej zapiszemy zmienną zespoloną z w układzie biegunowym, to

$$w(z) = v_\infty r e^{i(\theta - \alpha)} \quad (12.117d)$$

Znaczenie praktyczne przepływu jednorodnego - spełnia on równanie Laplace'a $\Delta \varphi = 0$ - polega na tym, że dodając potencjał tego przepływu do potencjału źródła lub dipola uzyskuje się potencjały różnych opływanych ciał. Przykładowo dodając potencjał płaskiego dipola (12.82c) i potencjał zespolony (12.117d) uzyskamy potencjał prędkości i funkcję prądu dla opływu nieskończonego walca.

Napiszmy jeszcze potencjały prędkości i funkcje prądu przepływu jednorodnego w walcowym i sferycznym układzie współrzędnych dla przypadku, gdy $\vec{v} = \vec{v}_\infty = \text{const} = \vec{k} v_\infty$. Dla układu walcowego potencjał prędkości jest

$$\varphi = v_\infty z \quad (12.118a)$$

Funkcję prądu wyznaczmy z zależności (12.44). Mamy

$$v_\infty = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Stąd

$$\psi = -\frac{1}{2} v_{\infty} r^2 \quad (12.118b)$$

W układzie sferycznym przepływ jednorodny skierowany zgodnie z osią Oz jest

$$\vec{v}_{\infty} = v_{\infty} \vec{k} = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_{\chi} v_{\chi} = \text{const}$$

gdzie

$$v_r = v_{\infty} \cos \chi$$

$$v_{\chi} = -v_{\infty} \sin \chi$$

Biorąc pod uwagę wzory (12.45) uzyskamy potencjał prędkości i funkcję prądu określone przez

$$\varphi = v_{\infty} r \cos \chi \quad (12.119a)$$

$$\psi = \frac{1}{2} r^2 v_{\infty} \sin^2 \chi \quad (12.119b)$$

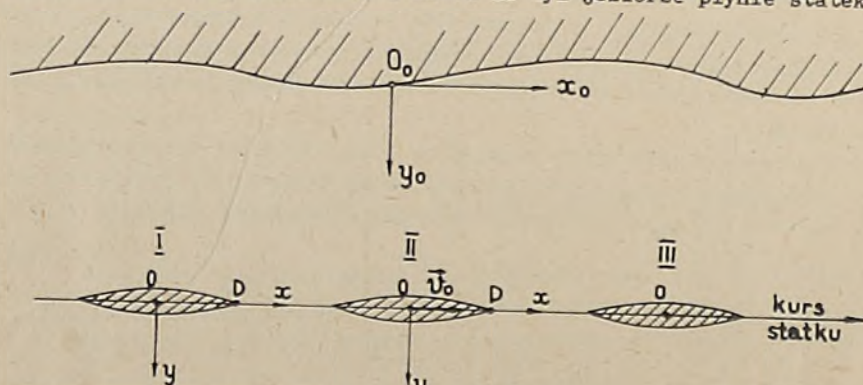
Składając potencjał przestrzennego dipola i potencjał (12.119a) uzyskuje się potencjał prędkości opływanej kuli.

12.4. ODWRACANIE PRZEPŁYWU

Odwracanie przepływu stosuje się przy badaniu wzajemnego oddziaływania płynu i obiektu poruszającego się w nim ruchem jednostajnym po linii prostej.

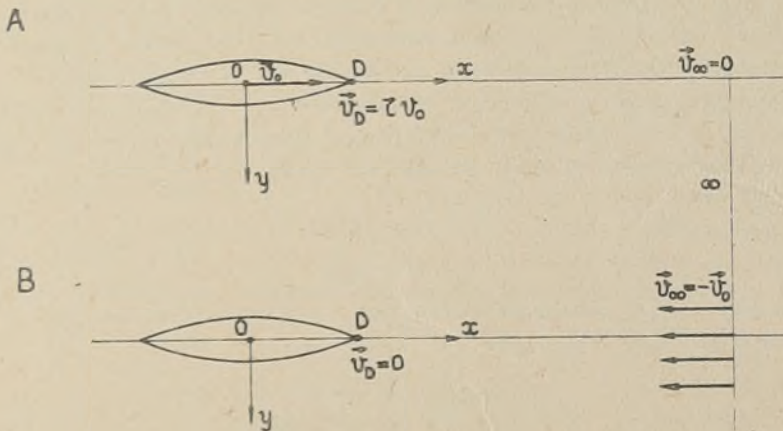
Odwracanie przepływu polega na tym, że obiekt poruszający się w płynie ruchem jednostajnym po linii prostej z prędkością \vec{v}_0 uważa się za nieruchomy, a kieruje się na ten obiekt przepływ jednorodny, o prędkości $\vec{v}_{\infty} = -\vec{v}_0$.

W celu wyjaśnienia podstawy odwracania przepływu rozpatrzmy następujący przykład. Niech w punkcie O_0 usytuowanym na brzegu jeziora, jak na rysunku 12.33, znajduje się obserwator i niech na tym jeziorze płynie statek pro-



Rys.12.33

tym kursem ze stałą prędkością $\vec{v}_0 = \vec{i} v_0$. Ruch statku wprowadza do obszaru wodnego jeziora pewne zakłócenia; indukuje pole prędkości wody w jeziorze. Nazwiemy je przepływem absolutnym $\vec{v}_a = \vec{v}$. Na powierzchni wody, początkowo spokojnej, powstają fale. Dla obserwatora stojącego na brzegu w punkcie O_0 - nieruchomy układ odniesienia $O_0 x_0 y_0 z_0$ - obraz falowania powierzchniowego jest inny dla różnych położenia statku względem niego: położenie I, II, III na rysunku 12.33. Dla tego obserwatora zatem przepływ wody w jeziorze będzie zależeć od czasu, będzie przepływem nieustalonym. Natomiast obserwator tego samego przepływu, znajdujący się na statku stwierdzi, że obraz sfalowanej powierzchni wody względem statku nie ulega zmianie; nie zależy od czasu. Zatem jest przepływem ustalonym w układzie odniesienia związanym ze statkiem lub inaczej: w układzie ruchomym Oxy obserwator znajdujący się na statku może stwierdzić przy pomocy odpowiednich przyrządów, że również pole prędkości w układzie związanym ze statkiem nie zależy od czasu. To ostatecznie stwierdzenie jest ważne, jednak tylko poza cienkim, w stosunku do szerokości kadłuba, obszarem wody, w którym przepływ jest burzliwy. Jednak i w tym obszarze wody, zwanym, jak już wiemy warstwą przyścienną - uśrednione pole prędkości też będzie ustalonym.



Rys.12.34

Obserwatorowi stojącemu na dziobie statku i patrzącemu na wodę - punkt D na rysunku 12.33 i 12.34 - wydaje się, że statek jest nieruchomy i że woda napływa na statek gdzieś z obszaru znajdującego się daleko przed statkiem, przy czym przepływ tej napływającej wody jest przepływem jednorodnym. Na tym właśnie polega odwracanie przepływu.

Pomiędzy przepływem absolutnym \vec{v}_a , przepływem odwróconym \vec{v}_{od} oraz przepływem jednorodnym $\vec{v}'_{\infty} = -\vec{v}_0$, gdzie \vec{v}_0 - prędkość obiektu w płynie, istnieje prosta zależność

$$\vec{v}_{od} = \vec{v}'_{\infty} + \vec{v}_a \quad (12.120a)$$

lub

$$\vec{v}_{od} = -\vec{v}_0 + \vec{v}_a \quad (12.120b)$$

Prawdziwość powyższych zależności można łatwo sprawdzić przy pomocy rysunku 12.34, na którym literą A oznaczono ruch rzeczywisty statku a literą B - przepływ odwrócony. W przypadku A prędkość wody na dziobnicy statku, w punkcie D, jest równa prędkości statku, a daleko przed statkiem jest równa zeru. Możemy to zapisać:

$$\vec{v}_a(D) = \vec{v}_0 \quad \vec{v}_a(\infty) = 0$$

Dla przypadku B - statku nieruchomego - woda napływa z nieskończoności na statek strugą jednorodną o prędkości $\vec{v}_\infty = -\vec{v}_0$, a w punkcie D statku prędkość $\vec{v}_{od} = 0$. Zapisujemy to

$$\vec{v}_{od}(\infty) = -\vec{v}_0 \quad \vec{v}_{od}(D) = 0$$

Powyższe wartości prędkości powinniśmy uzyskać przez podstawienie $\vec{v}_a(D)$ i $\vec{v}_a(\infty)$ do zależności (12.120b). Rzeczywiście tak jest, bo

$$\vec{v}_{od}(D) = -\vec{v}_0 + \vec{v}_a(D) = -\vec{v}_0 + \vec{v}_0 = 0$$

$$\vec{v}_{od}(\infty) = -\vec{v}_0 + \vec{v}_a(\infty) = -\vec{v}_0 + 0 = -\vec{v}_0$$

Widzimy, że w przepływie absolutnym i odwróconym mamy inną kinematykę przepływu. Jeśli jest znany jeden przepływ, to drugi można wyznaczyć przy pomocy związków (12.120). Podobnie zachowuje się potencjał prędkości. Niech φ będzie potencjałem absolutnego przepływu, φ_∞ - potencjałem przepływu jednorodnego, a Φ - potencjałem przepływu odwróconego. Pomiedzy tymi potencjałami mam miejsce relacja podobna do wyrażenia (12.120a).

$$\Phi = \varphi_\infty + \varphi \quad (12.121a)$$

$$\text{Stąd} \quad \varphi = \Phi - \varphi_\infty \quad (12.121b)$$

Jak zobaczymy dalej, potencjał opływu kuli o promieniu r_0 strugą jednorodną o prędkości $\vec{v} = -\vec{k} v_\infty$ jest

$$\Phi = -v_\infty \left(r + \frac{r_0^3}{2r^2} \right) \cos \chi \quad (12.122a)$$

Potencjał przepływu jednorodnego, zgodnie ze wzorem (12.119a), wyraża się wzorem:

$$\varphi_\infty = -v_\infty r \cos \chi$$

Stąd na mocy wzoru (12.121b) potencjał przepływu absolutnego φ , zwany także potencjałem zaburzeń będzie:

$$\varphi = \Phi - \varphi_\infty = -\frac{r_0^3}{2r^2} v_\infty \cos \chi \quad (12.122b)$$

Podobne związki dla nieskończonego walca poruszającego się w nieograniczonym płynie z prędkością $\vec{v}_0 = \vec{i} v_0$ lub opływającego strugą jednorodną o prędkości $\vec{v} = -\vec{i} v_\infty$ są:

$$\begin{aligned}\Phi &= -v_{\infty} \left(r + \frac{r_0^2}{r} \right) \cos \theta \\ \varphi_{\infty} &= -v_{\infty} r \cos \theta \\ \varphi &= \Phi - \varphi_{\infty} = -\frac{r_0^2}{r} v_{\infty} \cos \theta\end{aligned}\quad (12.123)$$

Wyrażenia (12.122) i (12.123) pokazują, że rzeczywiście kinematyka przepływu odwróconego i przepływu absolutnego jest inna. Powstaje pytanie: A jaki jest związek pomiędzy naprężeniami w tych przepływach? Możemy go użyć rozpatrując równanie ruchu, np. wzór (5.30)

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot P$$

Ale na mocy wzoru (12.120b) możemy napisać

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \frac{d\vec{v}_{od}}{dt}$$

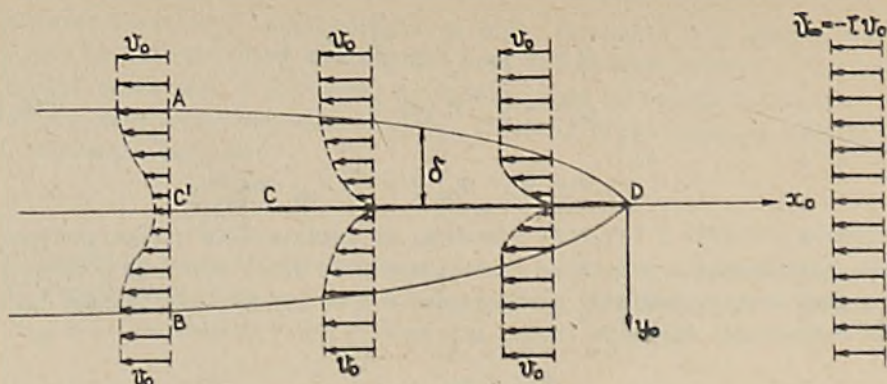
Stąd wniosek taki, że przyspieszenia elementów płynu przepływu absolutnego i przepływu odwróconego będą sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy prędkość przepływu jednorodnego będzie stała; $\vec{v}_o = \text{const}$. Zatem reakcje hydromechaniczne działające na obiekt poruszający się w płynie ruchem jednostajnym po linii prostej i reakcje działające na nieruchomy obiekt, opływany strugą jednorodną o prędkości $\vec{v}_{\infty} = -\vec{v}_o = \text{const}$ są takie same.

Odwracanie przepływu znalazło również szerokie zastosowanie w badaniach eksperymentalnych. Stosuje się je przy badaniach modeli obiektów w kanałach obiegowych, w tunelach kawitacyjnych oraz w tunelach aerodynamicznych. Opis tych urządzeń oraz możliwości przeprowadzenia różnych badań na tych urządzeniach poznanie na zajęciach laboratoryjnych przedmiotu.

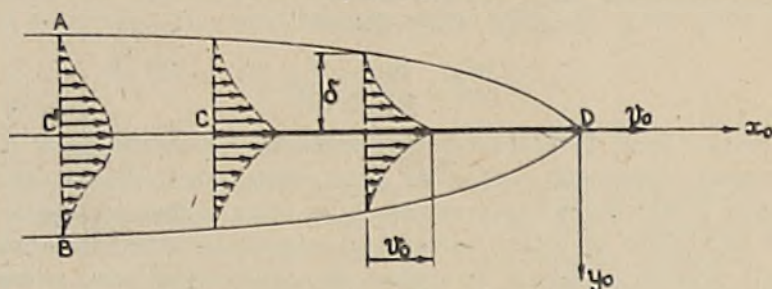
12.5. STRUMIEN NADAJĄCY

Dla ilustracji kinematyki absolutnego i odwróconego przepływu płynu pokazano schematycznie na rysunku 12.35 obraz laminarnego opływu nieruchomej płaskiej płyty CD, strugą jednorodną o prędkości $\vec{v}_{\infty} = -\vec{i} v_o$, a na rysunku 12.36 obraz przepływu na tej samej płycie poruszającej się ze stałą prędkością $\vec{v} = \vec{i} v_o$.

Zgodnie z kinematycznymi warunkami brzegowymi (8.1) do (8.4), na nieruchomej płycie prędkość wody jest równa zero, a na płycie ruchomej woda ma prędkość równą prędkości płyty. W pierwszym przypadku ma miejsce narastanie prędkości w warstwie przyściennej od $v = 0$ do wartości prędkości daleko przed płytą, to jest do $v_x(y) = -v_o$. To zjawisko ma miejsce w każdym przekroju prostopadłym do powierzchni płyty. Różnica pomiędzy rozkładami prędkości w poszczególnych przekrojach polega tylko na tym, że odległość δ od płyty, określająca warunek: $v_x = -v_o$ wzrasta wzdłuż opływanej płyty. Wielkość δ nazywa się grubością warstwy przyściennej, przy czym przyj-



Rys. 12.35



Rys. 12.36

muje się przeważnie dla określenia δ warunek $v_x(y) = -0,99 v_0$. Za płytą, przekrój AB na rysunkach 12.35 i 12.36, istnieje obszar płynu, w którym pole prędkości jest inne niż pole prędkości poza warstwą przyścienną. Ten obszar płynu nazywa się śladem hydromechanicznym lub prosto: śladem, a w okrętownictwie strumieniem nadążającym. Grubość warstwy przyściennej i śladu na przytoczonych rysunkach jest znacznie przesadzona.

Uzasadnienie nazwy: strumień nadążający wynika z rozpatrzenia przepływu absolutnego indukowanego w płynie początkowo nieruchomym przez poruszającą się w nim płytę CD jak na rysunku 12.36. Tu płyta CD indukuje pole prędkości $\vec{v} = \vec{I} v_x(x,y)$, a zatem o kierunku zgodnym z kierunkiem prędkości płyty. Ponieważ pole prędkości w warstwie przyściennej i w śladzie jest spowodowane w rozpatrywanym przypadku lepkością płynu, tarcie, to w okrętownictwie wprowadzono nazwę: tarciovy strumień nadążający. Oznaczmy go przez $v_x(x,y) = v_f$. Jeśli dalej wprowadzi się prędkość bezwymiarową strumienia nadążającego

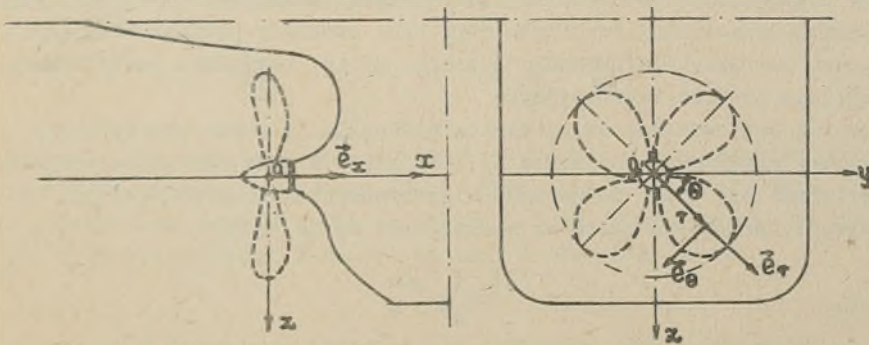
$$w_f = \frac{v_f}{v_0} \quad (12.124)$$

zwaną współczynnikiem tarciowym strumienia nadążającego, to prędkość płyty lub innego ciała sztywno związanego z płytą względem płynu w warstwie przyściennej lub śladzie będzie

$$v_A = v_0 - v_f = v_0 (1 - w_f) \quad (12.125)$$

Strumień nadążający oczywiście istnieje i w ogólnym przepływie płynu wokół poruszającego się w płynie ciała o dowolnym kształcie.

Ponieważ pole prędkości płynu w zbiorniku, indukowane przez poruszające się w tym zbiorniku ciało, opisane jest przez równanie rządzące ruchem płynu i warunki brzegowe oraz warunki początkowe, to to pole prędkości - prędkość absolutna płynu lub strumień nadążający \vec{w} - będzie zależeć od kształtu poruszającego się ciała, kształtu zbiornika wodnego, usytuowania tego ciała względem powierzchni zbiornika, własności fizycznych płynu w zbiorniku oraz od prędkości tegoż ciała. Będzie ono zatem inne, gdy ciało-statek będzie się poruszać na nieograniczonym oceanie od tego, gdy ten sam statek będzie płynął na wodzie spływonej lub w kanale. Tak samo śruba napędowa głęboko zanurzonego okrętu podwodnego będzie pracować w innym polu prędkości niż śruba tego samego okrętu płynącego na głębokości peryskopowej lub w stanie wynurzonej. Strumień nadążający będzie zależny od charakteru przepływu w warstwie przyściennej; inny będzie dla przepływu laminarnego, a inny dla przepływu burzliwego. Inne również będzie pole \vec{w} dla przepływu bez oderwania niż dla przepływu z oderwaniem warstwy przyściennej. Rozróżnia się w okrętownictwie nominalny strumień nadążający oraz efektywny strumień nadążający. Pzez nominalny strumień nadążający należy rozumieć pole prędkości indukowane przez kadłub statku niewyposażony w śrubę napędową; efektywny strumień nadążający to pole prędkości indukowane przez kadłub statku, śrubę napędową i ster.



Rys.12.37

Stosując walcowy układ współrzędnych: x, θ, r pokazany na rysunku 12.37, współczynnik strumienia nadążającego w możemy zapisać:

$$\vec{w} = \vec{e}_x w_a + \vec{e}_\theta w_\theta + \vec{e}_r w_r \quad (12.126)$$

przy czym każda ze składowych: w_a - osiowa, w_θ - obwodowa, w_r - promieniowa - jest funkcją współrzędnych x, θ, r . Poszczególne ze składowych w_i wzoru (12.126) dzieli się umownie w różny sposób. Najczęściej stosuje się podział następujący:

$$w_a = w = w_v + w_p \quad \text{lub} \quad w = w_v + w_p + w_w$$

gdzie: w_v - składowa osiowa strumienia nadążającego wywołanego lepkością wody;

w_p - składowa osiowa potencjalnego strumienia nadążającego; istnieje ona przy założeniu wody nielepkiej i przepływu bezwirowego.

Czasami ze współczynnika w_p wyłącza się składową falową w_w strumienia nadążającego, pochodzącą od ruchu falowego wody, wywołanego ruchem statku.

W obecnym stanie wiedzy, dla celów praktycznych pole prędkości wokół kadłuba statku, a szczególnie za jego rufą, w miejscu usytuowania śruby napędowej, wyznacza się eksperymentalnie na modelach statków. Metody jego wyznaczania poznacie na zajęciach laboratoryjnych. W dalszych wykładach zostaną omówione podstawy teoretyczne przeprowadzania różnych eksperymentalnych badań modelowych w hydromechanice. Tu wskażemy tylko, że na podstawie systematycznych badań modelowych i badań statków rzeczywistych opracowano szereg wzorów empirycznych i wykresów pozwalających na przybliżoną ocenę efektywnego lub nominalnego strumienia nadążającego w miejscu sytuowania śrub napędowych za kadłubem statku.

12.6. KINEMATYCZNY WARUNEK BRZEGOWY

W rozdziale 8 sformułowano ogólny warunek kinematyczny na powierzchniach materialnych będących powierzchniami rozdziału dwóch nie mieszających się płynów, względnie na powierzchni ciała poruszającego się w płynie i płynie. Przykładami powierzchni rozdziału mogą być: swobodna powierzchnia płynu w zbiorniku, powierzchnia swobodna jeziora, morza, względnie powierzchnia ograniczająca pęcherz kawitacyjny.

Zajmować się będziemy dalej płynem nielepkim. Warunek kinematyczny na powierzchni materialnej $S(x, y, z, t) = C$, gdzie S jest równaniem powierzchni, sprowadza się wtedy do warunku nieprzepuszczalności powierzchni S i nieodrywania przepływu płynu na powierzchni S , to jest

$$v_n \Big|_S = v_{sn} \quad (8.1)$$

Jeśli przepływ płynu jest bezwirowy, a prędkość powierzchni S jest

$$\vec{v}_s = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_s = \vec{v}_e$$

to warunek (8.1) można zapisać

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S = (\vec{v}_o + \vec{\omega} \times \vec{r}_s) \cdot \vec{n} = \vec{v}_o \cdot \vec{n} + \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_s \times \vec{n}) \quad (12.127a)$$

Tu przez \vec{r}_s oznaczono promień wodzący ściany S w ruchomym układzie współrzędnych, a przez \vec{n} , jak zwykle, zewnętrzną normalną do powierzchni S . Wprowadzając oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 v_{ox} = v_1 & \quad v_{oy} = v_2 & \quad v_{oz} = v_3 & \quad \omega_x = v_4 & \quad \omega_y = v_5 \\
 \omega_z = v_6 & \quad n_x = n_1 & \quad n_y = n_2 & \quad n_z = n_3 \\
 n_4 = (\vec{r}_s \times \vec{n})_x & = y n_3 - z n_2 \\
 n_5 = (\vec{r}_s \times \vec{n})_y & = z n_1 - x n_3 \\
 n_6 = (\vec{r}_s \times \vec{n})_z & = x n_2 - y n_1
 \end{aligned} \tag{12.127b}$$

wyrażenie (12.127a) można zapisać następująco:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|_s = \sum_{i=1}^6 v_i n_i \tag{12.127c}$$

Jeśli przepływ płynu jest bezwirowy, a ściana S porusza się z prędkością unoszenia \vec{v}_{es} i jednocześnie się deformuje, przy czym prędkość deformacji ściany S jest \vec{v}_d , to warunek (8.1) będzie mieć postać

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|_s = \vec{v}_{es} \cdot \vec{n} + \vec{v}_d \cdot \vec{n} = \sum_{i=1}^6 v_i n_i + \vec{v}_d \cdot \vec{n} \tag{12.128}$$

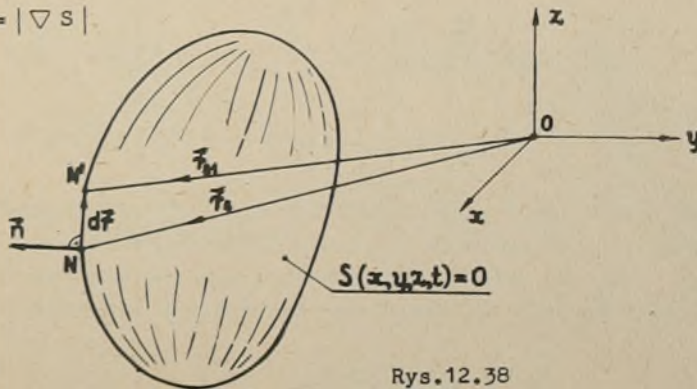
gdzie \vec{n} jest dane wzorem (3.11). Jeżeli dodatkowo ta ściana będzie się poruszać nie w wodzie spokojnej, ale w pewnym polu prędkości mającym potencjał Φ , np.: w polu falowym lub polu prędkości indukowanym przez pewien obiekt-statek, to warunek kinetyczny będzie

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|_s = \sum_{i=1}^6 v_i n_i + \vec{v}_d \cdot \vec{n} - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}} \right|_s \tag{12.129}$$

Podamy niżej jeszcze jedno wyrażenie użyteczne w praktycznych zastosowaniach, dla warunku brzegowego (8.1). Niech $S(x, y, z, t) = 0$ będzie równaniem powierzchni rozdziału jak na rysunku 12.38. Wtedy zgodnie ze wzorami (3.11) i (3.15) normalna \vec{n} do powierzchni s jest dana przez

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{N} \tag{12.130}$$

gdzie $N = |\nabla S|$



Rys. 12.38

Uwzględniając powyższe wyrażenie lewą stroną równania (8.1) możemy zapisać

$$v_n \Big|_S = \frac{1}{N} \vec{v} \cdot \nabla S \quad (12.131)$$

Zgodnie z (8.1) powyższe wyrażenie dla składowej normalnej prędkości płynu na powierzchni S musi być równe składowej normalnej prędkości powierzchni S , v_{sn} . Wyrażenie dla v_{sn} uzyskamy obliczając pochodną zupełną powierzchni S .

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial S}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

lub

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \nabla S = 0 \quad (12.132)$$

bo $d\vec{r}$ leży na ścianie, na powierzchni S , jak na rysunku 12.38. Tu przez \vec{v}_s oznaczono prędkość powierzchni rozdziału, S . Uwzględniając wzór (12.130) prędkość normalna powierzchni S będzie

$$v_{sn} = - \frac{1}{N} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (12.133)$$

Podstawiając wzory (12.131) i (12.133) do warunku (8.1) mamy

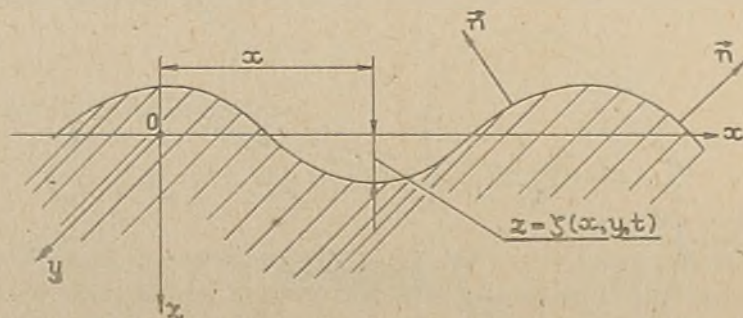
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla S = 0 = \frac{dS}{dt} = \frac{DS}{Dt} \quad (12.134)$$

gdzie: \vec{v} jest prędkością płynu na powierzchni S .

Widzimy, że zamiast warunku brzegowego w postaci (8.1) możemy zastosować warunek (12.134) mówiący o tym, że pochodna materialna powierzchni rozdziału S ma być równa zero. Zauważmy jeszcze to, że równanie (12.134) wyraża warunek zachowania powierzchni rozdziału, to jest powierzchni materialnej utworzonej z tych samych elementów płynu.

Jeśli pole prędkości płynu ma potencjał φ , to warunek (12.134) możemy zapisać:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } S = 0 \quad (12.135)$$



Rys. 12.39

Dla przykładu zastosowania wzoru (12.135) napiszemy kinematyczny warunek brzegowy swobodnej powierzchni wody, jak na rysunku 12.39, gdzie osie Ox i Oy nieruchomego układu współrzędnych $Oxyz$ leżą na niezakłóconej swobodnej powierzchni wody. Niech równaniem sfalowanej swobodnej powierzchni będzie

$$z = \zeta(x, y, t) \quad (12.136)$$

Wtedy $S = \zeta(x, y, t) - z = 0$ i w przypadku przepływu potencjalnego wody w ruchu falowym, a taki jest bardzo dobrym przybliżeniem, kinematyczny warunek brzegowy na $z = \zeta(x, y, t)$ zgodnie z (12.135) jest

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (12.137)$$

W przypadku małych wychyleń powierzchni swobodnej i małych wartości składowych prędkości w polu falowym wody można zaniedbać drugi i trzeci wyraz równania (12.137) oraz żądać wypełnienia tego warunku nie na nieznanym poziomie $z = \zeta(x, y, t)$, lecz na niezakłóconej powierzchni swobodnej, to jest dla $z = 0$. Wtedy zamiast warunku (12.137) mamy:

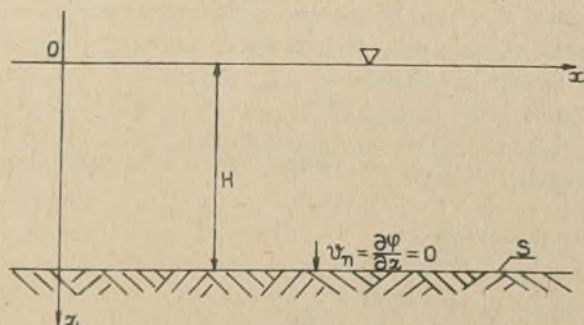
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{dla } z = 0 \quad (12.138)$$

Zauważyć można jeszcze łatwo, że normalna do swobodnej powierzchni ma kierunek pokazany na rysunku 12.39. Jest to zgodne ze wzorem (12.130), bo

$$\vec{n} = \frac{1}{N} \left(\vec{i} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \vec{k} \right) = \vec{i} n_x + \vec{j} n_y + \vec{k} n_z \quad (12.139)$$

Jako drugi przykład zastosowania wzoru (12.135) napiszemy warunek brzegowy na płaskim dnie zbiornika o głębokości H , jak na rysunku 12.40. Równaniem dna w tym przypadku jest

$$S = z - H = 0$$



Rys. 12.40

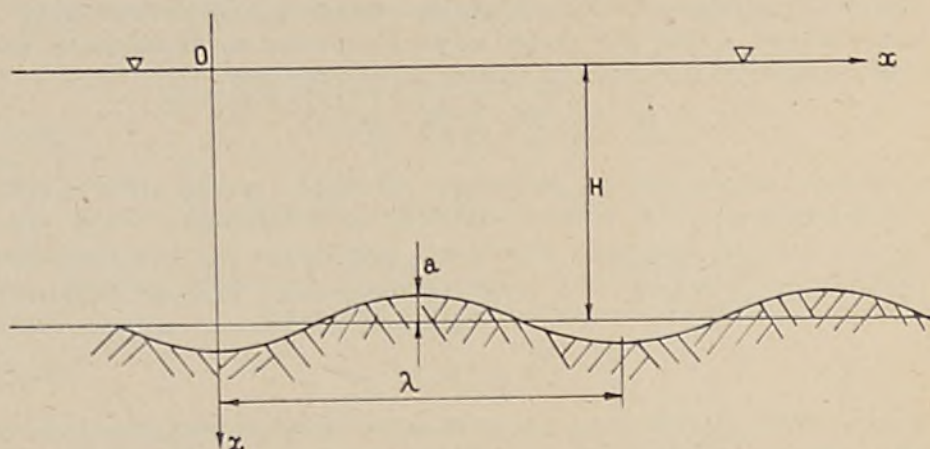
Stąd z równania (12.135) mamy natychmiast $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ dla $z = H$. Gdyby dno zbiornika było faliste o amplitudzie a i długości fali λ , przy czym fale byłyby walcowymi o tworzących równoległych do osi Oy , jak na rysunku 12.41, to równaniem powierzchni dna zbiornika byłoby wyrażenie

$$S = a \cos kx - z + H = 0$$

gdzie $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

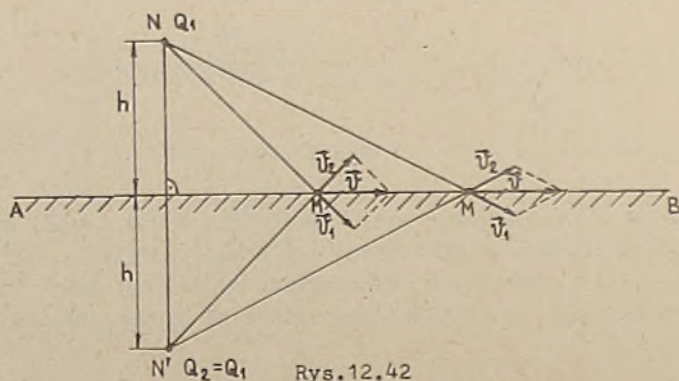
Z warunku 12.135) mamy

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial x} k \sin kx + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$



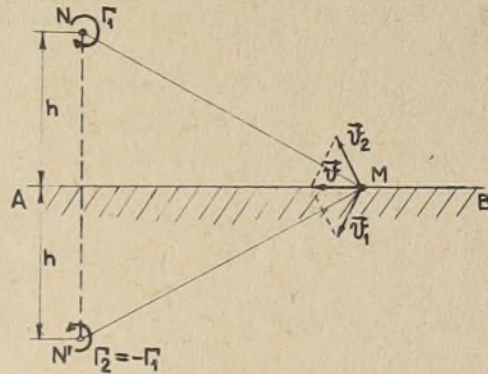
Rys.12.41

Z warunku $v_n = 0$ na płaskiej ścianie nieruchomej wynika tak zwana metoda odbić zwierciadlanych, stosowana często przy rozwiązywaniu zadań hydrodynamicznych. Objaśnimy ją na kilku przykładach. Niech w punkcie N oddalonym o h od płaskiej ściany nieprzepuszczalnej AB znajduje się źródło o natężeniu Q_1 - pokazane na rysunku 12.42. Indukuje ono w każdym punkcie N ściany AB prędkość \vec{v}_1 . Żeby w każdym punkcie N składowa normalna do ściany prędkości \vec{v}_1 była równa zero, to z drugiej strony ściany AB musi znajdować się wyobrażone źródło o wydatku $Q_2 = Q_1$ usytuowane w punkcie N' oddalonym również o wielkość h od ściany AB i leżącym na tej samej prostej, prostopadłej do AB. Widzimy, że źródło wyobrażone Q_2 jest zwierciadlanym odbiciem źródła rzeczywistego Q_1 .



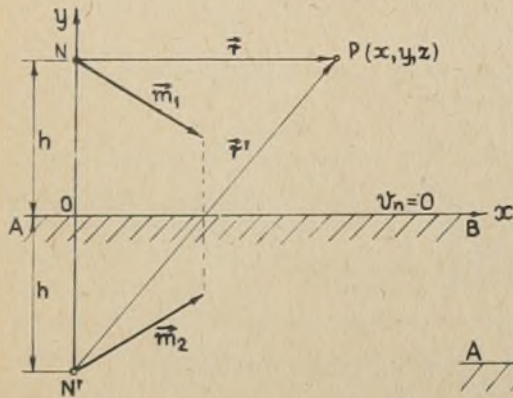
Rys.12.42

Jeśli przez punkt N przechodzi włókno wirowe o natężeniu Γ_1 , równoległe do ściany AB, to warunek $v_n = 0$ na ścianie wymaga, aby przez punkt N' również przechodziło włókno wirowe, lecz o natężeniu $\Gamma_2 = -\Gamma_1$. Pokazuje to rysunek 12.43. Mamy i w tym przypadku odbicie zwierciadlane wiru.

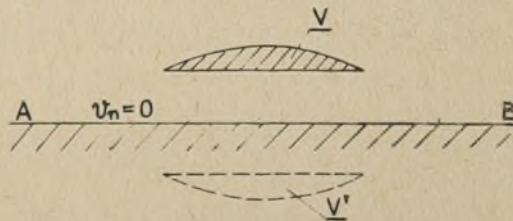


Rys. 12.43

Na rysunkach 12.44 do 12.47 pokazano dalsze przykłady zastosowania metody odbić zwierciadlanych, wynikającej z warunku kinematycznego na płaskiej nieprzepuszczalnej ścianie nieruchomej. Rysunek 12.44 pokazuje rzeczywisty dipol hydromechaniczny o momencie $\vec{m}_1 = \vec{i} m_x + \vec{j} m_y$ i dipol wyobrażony o momencie $\vec{m}_2 = \vec{i} m_x - \vec{j} m_y$; rysunek 12.45 przedstawia ciało V przy ścianie AB oraz ciało odbite V', a na rysunkach 12.46 i 12.47 pokazano obrazowo wpływ dwóch ścian na osobliwości hydromechaniczne typu źródło i włókno wirowe.

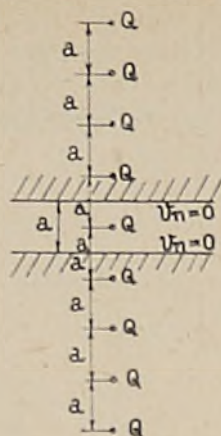


Rys. 12.44



Rys. 12.45

W przypadku osobliwości hydromechanicznych możemy prosto znaleźć potencjał tych osobliwości z uwzględnieniem warunku kinematycznego na prostej ścianie AB. Dla przykładu napiszemy potencjał prędkości φ w dowolnym punkcie płynu indukowany przez dipol o momencie



Rys. 12.46



Rys. 12.47

$$\vec{m}_1 = I^* m_x + J^* m_y$$

usytuowany w pobliżu ściany płaskiej jak na rysunku 12.44. Zgodnie ze wzorem (12.78c) potencjał φ_1 pochodzący od dipola \vec{m}_1 w punkcie N jest

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{m_x x + m_y (y-h)}{[x^2 + (y-h)^2 + z^2]^{3/2}}$$

a potencjał φ pochodzący od dipola odbitego, w punkcie N' wyrazi się następująco:

$$\varphi_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{m_x x - m_y (y+h)}{[x^2 + (y+h)^2 + z^2]^{3/2}}$$

Potencjał prędkości w punkcie P będzie równy sumie potencjałów $\varphi_1 + \varphi_2$, co zapiszemy:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Napiszcie potencjał prędkości dla źródła i włókna wirowego, usytuowanych pomiędzy dwoma ścianami jak na rysunkach 12.46 i 12.47 przy założeniu, że źródło jest płaskie oraz że jest źródłem punktowym.

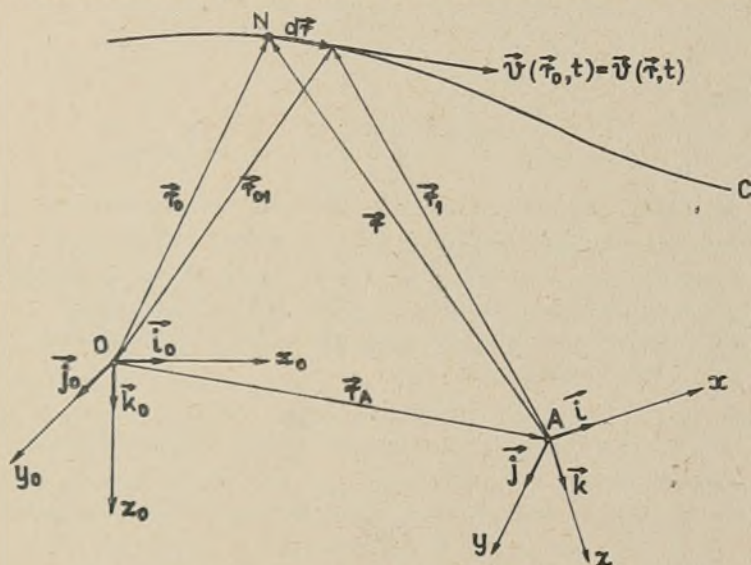
12.7. ELEMENTY KINEMATYKI PŁYNÓW WYRAŻONE W RUCHOMYCH UKŁADACH WSPÓŁRZĘDNYCH

Dotychczas przedstawione wyrażenia dla wielkości hydromechanicznych były dane w nieruchomym w przestrzeni układzie współrzędnych. Niekiedy jednak rozwiązywanie zadań hydromechanicznych może okazać się prostszym w ruchomych układach współrzędnych. Jeśli bowiem badany jest przepływ płynu wywołany ruchem ciała o niezmiennej w czasie powierzchni S, to w układzie odniesienia związanym z tym ciałem powierzchnia rozpatrywanego ciała nie

będzie zależeć od czasu, a natomiast w nieruchomym układzie współrzędnych ta sama powierzchnia S ciała będzie funkcją czasu. Stąd celowym jest związanie układu ruchomego z poruszającym się w płynie ciałem. Dlatego układ ruchomy również nazywa się układem związanym. Przeważnie początek układu ruchomego, A , przyjmuje się w środku masy G ciała.

12.7.1. Związki transformacyjne dla wielkości pola hydromechanicznego o charakterze wektorowym

Przy wyprowadzaniu związków transformacyjnych dla wielkości wektorowych wyrażonych w ruchomym lub nieruchomym układzie odniesienia założymy, że oba układy odniesienia są prawoskrętnymi układami kartezjańskimi.



Rys. 12.48

Bazę układu nieruchomego $O x_0 y_0 z_0$ oznaczymy przez $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$, a bazę układu ruchomego - przez $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Wersory $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ oczywiście nie zależą od czasu. Natomiast wersory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jako związane z układem ruchomym $A xyz$ są funkcją czasu - poruszają się w przestrzeni tak, jak układ $Axyz$ związany z poruszającym się w płynie ciałem. Rysunek 12.48 pokazuje oba układy współrzędnych w chwili t_0 . Zaznaczono na nim literą C tor elementu płynu. Z rysunku 12.48 widać, że dowolny punkt N przestrzeni V może być zidentyfikowany w obu układach współrzędnych: przez promień wodzący \vec{r}_0 w układzie nieruchomym lub przez promień wodzący \vec{r} w układzie ruchomym, oczywiście gdy będzie znana relacja pomiędzy tymi układami. Z rysunku 12.48 dalej widać, że ta relacja jest równa

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_A + \vec{r} \quad (12.140)$$

przy czym obie strony powyższej równości są wyrażone w tej samej bazie: w bazie $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ lub w bazie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Choć ogólnie prawo transformacji

wektorów z bazy $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ do bazy $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lub odwrotnie jest znane z mechaniki i matematyki:

$$\begin{pmatrix} x_0 - X_{AO} \\ y_0 - Y_{AO} \\ z_0 - Z_{AO} \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (12.140a)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = [D]^T \begin{pmatrix} x_0 - X_{AO} \\ y_0 - Y_{AO} \\ z_0 - Z_{AO} \end{pmatrix} \quad (12.140b)$$

lub w skrócie

$$\vec{r}_0 - \vec{r}_A = [D] \vec{r} \quad \vec{r} = [D]^T (\vec{r}_0 - \vec{r}_A) \quad (12.140c)$$

gdzie $[D]$ jest macierzą transformacji - macierzą pełnego obrotu, a $[D]^T$ jest macierzą transponowaną macierzy $[D]$, to wydaje się celowym wyprowadzenie tu elementów d_{ij} macierzy $[D]$, zwanej także macierzą cosinusów kierunkowych. Uzasadnione jest to tym, że różni autorzy definiują w różny sposób kąty Eulera określające wzajemne położenie w przestrzeni układów $Axyz$ i $Ox_0y_0z_0$ oraz kierunek osi Oz_0 .

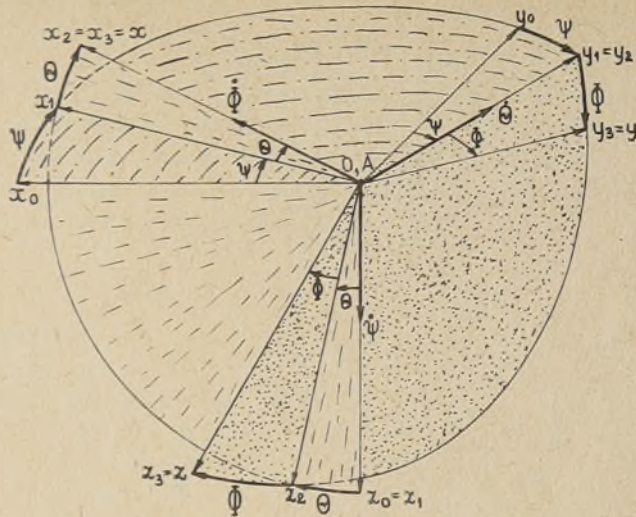
W hydromechanice okrętowej przyjęto kierować oś Oz_0 pionowo w dół, a położenie układu $Axyz$ względem osi układu $Ox_0y_0z_0$ określa się przy pomocy trzech kolejnych obrotów osi układu $Ox_0y_0z_0$ tak, aby w trzecim obrocie osie obu układów były do siebie równoległe. Kolejność obrotów jest następująca:

- pierwszy obrót o kąt Ψ odbywa się wokół osi Oz_0 i w efekcie uzyskuje się nowy układ współrzędnych $Ox_1y_1z_1 = z_0$;
- drugi obrót ma miejsce wokół osi Oy_1 o kąt θ , co daje nowy układ współrzędnych $Ox_2y_2 = y_1, z_2$;
- trzeci obrót dokonuje względem osi Ox_2 o kąt Φ .

W ostatnim obrocie uzyskany układ współrzędnych ma osie równoległe do układu ruchomego $Axyz$. Zatem mamy $x_2 = x_3 = x, y_3 = y, z_3 = z$. Stosuje się prawoskrętny kierunek obrotu. Kolejność jest bardzo ważna. Powyższe operacje przy założeniu, że $\vec{r}_A = 0$ pokazuje rysunek 12.49. Zaznaczono na nim również prędkości kątowe $\dot{\Psi}, \dot{\theta}, \dot{\Phi}$. Z rysunku tego widać wyraźnie, że prędkości $\dot{\Psi}, \dot{\theta}$ i $\dot{\Phi}$ nie są wzajemnie ortogonalne.

Napiszmy prawo transformacyjne dla wektorów w układzie $Ox_0y_0z_0$ i $Ox_1y_1z_1$ przy założeniu że wektorem tym jest wektor dowolny \vec{a} . Mamy

$$\vec{a} = \vec{a}_0 = \vec{i}_0 a_{x0} + \vec{j}_0 a_{y0} + \vec{k}_0 a_{z0} = \vec{i}_1 a_{x1} + \vec{j}_1 a_{y1} + \vec{k}_1 a_{z1} \quad (12.141a)$$



Rys.12.49

Widzimy, że ten wektor \vec{a} może być wyrażony w bazie układu nieruchomego oraz w bazie układu obróconego o kąt ψ oraz, że składowe tego wektora $\vec{a} = \vec{a}_0 = \vec{a}_1$ zależą od przyjętej bazy. Są one różne w różnych bazach. Można je znaleźć przez wyrażenie wektorów bazowych $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ za pomocą wektorów bazowych $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ jak niżej:

$$\begin{aligned}\vec{i}_0 &= \vec{i}_1 \cos(\vec{i}_0, \vec{i}_1) + \vec{j}_1 \cos(\vec{i}_0, \vec{j}_1) + \vec{k}_1 \cos(\vec{i}_0, \vec{k}_1) \\ \vec{j}_0 &= \vec{i}_1 \cos(\vec{j}_0, \vec{i}_1) + \vec{j}_1 \cos(\vec{j}_0, \vec{j}_1) + \vec{k}_1 \cos(\vec{j}_0, \vec{k}_1) \quad (12.141b) \\ \vec{k}_0 &= \vec{i}_1 \cos(\vec{k}_0, \vec{i}_1) + \vec{j}_1 \cos(\vec{k}_0, \vec{j}_1) + \vec{k}_1 \cos(\vec{k}_0, \vec{k}_1)\end{aligned}$$

i podstawienie związków (12.141b) do wyrażenia (12.141a) oraz przyrównanie składowych przy tych samych wektorach bazowych $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$. W wyniku uzyskuje się takie same wyrażenia dla składowych wektora \vec{a} w bazie układu nieruchomego, wyrażonych przy pomocy składowych wektora \vec{a} w bazie układu ruchomego, jak związki (12.141b) lub (12.140a).

Jeśli oznaczymy przez:

$$\begin{aligned}\psi_{11} &= \cos(\vec{i}_0, \vec{i}_1) & \psi_{12} &= \cos(\vec{i}_0, \vec{j}_1) & \psi_{13} &= \cos(\vec{i}_0, \vec{k}_1) \\ \psi_{21} &= \cos(\vec{j}_0, \vec{i}_1) & \psi_{22} &= \cos(\vec{j}_0, \vec{j}_1) & \psi_{23} &= \cos(\vec{j}_0, \vec{k}_1) \\ \psi_{31} &= \cos(\vec{k}_0, \vec{i}_1) & \psi_{32} &= \cos(\vec{k}_0, \vec{j}_1) & \psi_{33} &= \cos(\vec{k}_0, \vec{k}_1)\end{aligned}$$

elementy macierzy pierwszego obrotu $[\psi]$, to wyrażenia (12.141b) możemy prosto napisać:

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{pmatrix} = [\psi] \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{pmatrix} \quad (12.141c)$$

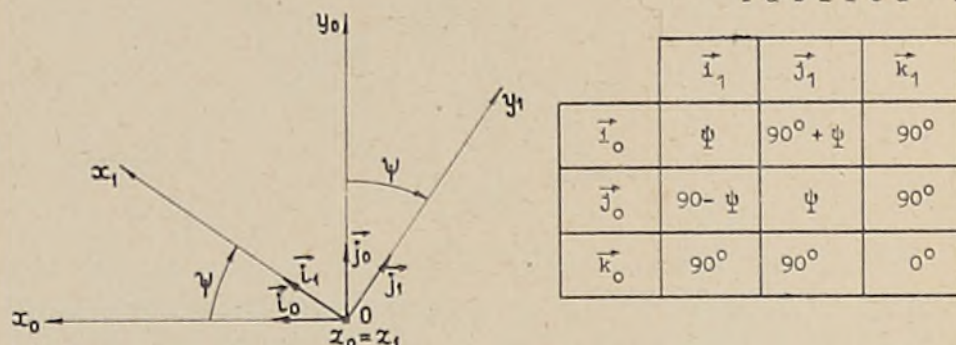
i podobnie:

$$\begin{Bmatrix} a_{x0} \\ a_{y0} \\ a_{z0} \end{Bmatrix} = [\Psi] \begin{Bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \end{Bmatrix} \quad (12.141d)$$

lub prościej:

$$\vec{a}_0 = [\Psi] \vec{a}_1 \quad (12.141e)$$

T a b l i c a 1



Rys.12.50

Dla pierwszego obrotu, ψ , kąty pomiędzy wektorami bazowymi układów $Ox_0y_0z_0$ i $Ox_1y_1z_1$ można wyznaczyć z rysunku 12.49 lub lepiej przy pomocy rysunku 12.50. Zawiera je tablica 1, na podstawie której piszemy macierz pierwszego obrotu

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.141f)$$

Wyznacznik macierzy $[\Psi]$ jest równy 1, a macierz odwrotna $[\Psi]^{-1} = [\Psi]^T$, co można łatwo sprawdzić przez proste obliczenia według znanego wzoru

$$[\Psi]^{-1}_{ij} = \frac{D_{ji}}{\det[\Psi]}$$

gdzie: D_{ji} jest algebraicznym dopełnieniem elementu ψ_{ji} , które jest równe iloczynowi $(-1)^{j+1}$ i wyznacznika macierzy otrzymanej z macierzy $[\Psi]$ przez skreślenie j -go wiersza i i -tej kolumny.

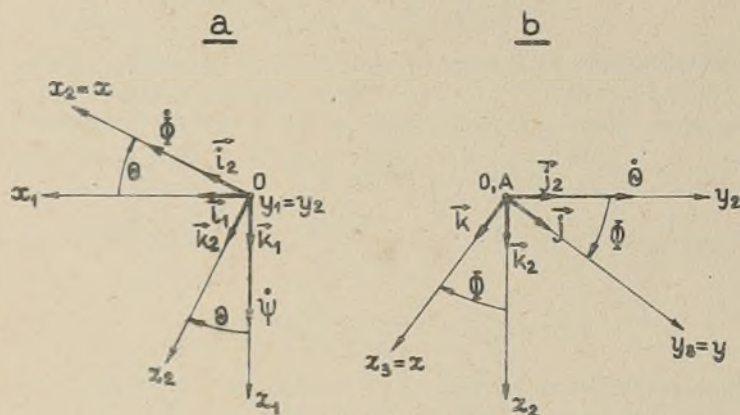
Mając to na uwadze możemy napisać

$$\begin{Bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \end{Bmatrix} = [\Psi]^T \begin{Bmatrix} a_{x0} \\ a_{y0} \\ a_{z0} \end{Bmatrix}$$

lub symbolicznie

$$\vec{a}_1 = [\psi]^T \vec{a}_0 \quad (12.141g)$$

W taki sam sposób można postępować przy rozpatrywaniu pozostałych dwóch obrotów: θ i Φ . Rysunek 12.51a pokazuje drugi obrót wokół osi $Oy_1=Oy_2$, a na rysunku 12.51b pokazano trzeci obrót Φ wokół osi $Ox_2 = Ox_3 = Ox$. W tabelicy 2 podano kąty pomiędzy osiami układów $Ox_1y_1z_1$ i $Ox_2y_2z_2$, a w tabelicy 3 - kąty pomiędzy osiami układów $Ox_2y_2z_2$ i $Axyz$.



Rys.12.51

T a b l i c a 2

	\vec{i}_2	\vec{j}_2	\vec{k}_2
\vec{i}_1	θ	90°	$90^\circ - \theta$
\vec{j}_1	90°	0°	90°
\vec{k}_1	$90^\circ + \theta$	90°	θ

T a b l i c a 3

	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}_2	0°	90°	90°
\vec{j}_2	90°	Φ	$90^\circ + \Phi$
\vec{k}_2	90°	$90^\circ - \Phi$	Φ

Na podstawie tablic 2 i 3 możemy już napisać macierze transformacji $[\theta]$ i $[\Phi]$ odpowiednio dla izolowanych obrotów θ i Φ :

$$[\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (12.142)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \quad (12.143)$$

Tak samo jak dla macierzy obrotu $[\psi]$ są tu również ważne związki:

$$\det [\theta] = 1 \quad [\theta]^{-1} = [\theta]^T$$

$$\det [\phi] = 1 \quad [\phi]^{-1} = [\phi]^T$$

oraz

$$\vec{a}_1 = [\theta] \vec{a}_2 \quad \vec{a}_2 = [\theta]^T \vec{a}_1 \quad (12.144)$$

$$\vec{a}_2 = [\phi] \vec{a} \quad \vec{a} = [\phi]^T \vec{a}_2 \quad (12.145)$$

Przy pomocy powyższych związków oraz wzoru (12.141e) można znaleźć zależność pomiędzy składowymi wektora \vec{a}_0 w bazie układu nieruchomego i składowymi tego samego wektora \vec{a} , wyrażonymi w bazie układu ruchomego. Mamy

$$\vec{a}_0 = [\psi] \vec{a}_1 = [\psi] [\theta] \vec{a}_2 = [\psi] [\theta] [\phi] \vec{a} = [D] \vec{a} \quad (12.146a)$$

$$\vec{a} = [\phi]^T \vec{a}_2 = [\phi]^T [\theta]^T \vec{a}_1 = [\phi]^T [\theta]^T [\psi]^T \vec{a}_0 = [D]^T \vec{a}_0 \quad (12.146b)$$

gdzie

$$[D] = [\psi] [\theta] [\phi] \quad (12.147)$$

jest poszukiwaną macierzą pełnego obrotu. Związki (12.146a) i (12.146b) są to te same wyrażenia co (12.140a) i (12.141b).

Wykonując zaznaczone we wzorze (12.147) działania uzyskamy następującą postać macierzy $[D]$:

$$[D] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta \cos \phi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \psi \sin \phi \\ \sin \psi \cos \theta \sin \phi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (12.148)$$

przy czym $\det[D] = 1$ i $[D]^{-1} = [D]^T$.

Ze wzoru (12.148) widać, że jeśli $\psi = \theta = \phi = 0$ to $[D] = I$, gdzie I jest macierzą jednostkową. W tym przypadku wersory obu układów: ruchomego i nieruchomego są do siebie równoległe.

Jeśli któryś z obrotów nie ma miejsca, to w macierzy $[D]$ w miejsce kąta tego obrotu należy podstawić zero. I tak,

$$\text{jeśli } \phi = 0, \text{ to } [D] = [\psi][\theta]$$

$$\text{jeśli } \theta = 0, \text{ to } [D] = [\psi][\phi]$$

$$\text{jeśli zaś } \psi = 0, \text{ to } [D] = [\theta][\phi]$$

jeśli natomiast występuje tylko jeden obrót, to $[D] = [\psi]$ lub $[D] = [\theta]$, względnie $[D] = [\phi]$

Ponieważ wektor \vec{a} był dowolnym wektorem, stałym lub zależnym od miejsca i czasu, to wszystkie powyższe związki są ważne dla każdego wektora. Wektorem \vec{a} może być zatem: pole prędkości płynu $\vec{v}(\vec{r}, t)$, pole przyspieszeń $\vec{w}(\vec{r}, t)$, gradient pola skalarnego $\nabla \phi$, rotacja prędkości płynu $\vec{\omega}$, siła masowa \vec{F} , wektor naprężeń w płynie \vec{p}_n , normalna \vec{n} do powierzchni S .

Obliczenia składowych wektora \vec{a} należy wykonywać w takiej bazie, w jakiej operacje matematyczne są najprostsze. Czasem prostszymi są obliczenia wykonywane w bazie ruchomej. Czasem jeszcze, w celu uproszczenia operacji matematycznych przy rozwiązywaniu zadań hydromechanicznych z ruchomym układem współrzędnych Axyz, może być jeszcze dodatkowo związany sztywno inny ortogonalny układ współrzędnych, np.: sferyczny przy rozpatrywaniu ruchu kuli w płynie lub walcowy, bardzo często stosowany w hydro-mechanice okrętowej.

12.7.2. Związki transformacyjne dla prędkości kątowej

Podany związek (12.14a) jest również ważny dla wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ układu ruchomego, przy czym

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \vec{i}_0 \omega_{x0} + \vec{j}_0 \omega_{y0} + \vec{k}_0 \omega_{z0} = \vec{i} \omega_x + \vec{j} \omega_y + \vec{k} \omega_z = \\ &= \vec{\psi} + \vec{\theta} + \vec{\phi} = \vec{k}_0 \psi + \vec{j}_1 \theta + \vec{i} \phi\end{aligned}\quad (12.149)$$

oraz

$$\begin{pmatrix} \omega_{x0} \\ \omega_{y0} \\ \omega_{z0} \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = [D]^T \begin{pmatrix} \omega_{x0} \\ \omega_{y0} \\ \omega_{z0} \end{pmatrix}$$

gdzie macierz $[D]$ określona jest wzorem (12.148). Zadanie nasze dalej polega na znalezieniu związków pomiędzy nieortogonalnymi prędkościami kątowymi $\vec{\psi}$, $\vec{\theta}$, $\vec{\phi}$ a składowymi prędkościami kątowej $\vec{\omega}$ wyrażonych w bazie \vec{i}_0 , \vec{j}_0 , \vec{k}_0 lub w bazie \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} . Na podstawie rysunków 12.49 do 12.51 możemy wyznaczyć kąty pomiędzy wektorami bazy \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} a wektorami $\vec{\psi}$, $\vec{\theta}$, $\vec{\phi}$. Zawiera je tablica 4.

T a b l i c a 4

	$\vec{\psi}$	$\vec{\theta}$	$\vec{\phi}$
\vec{i}	$90^\circ + \theta$	$x0y_2$	0°
\vec{j}	$y0z_0$	ϕ	90°
\vec{k}	$z0z_0$	$z0y_2$	90°

Z rysunku 12.51a widać, że $\angle xOy_2 = 90^\circ$, a z rysunku 12.51b mamy $\angle zOy_2 = 90^\circ + \phi$. Natomiast $\cos(\angle yOz_0) = d_{32}$, a $\cos(\angle zOz_0) = d_{33}$.

Uwzględniając powyższe oraz tablicę 4, macierz cosinusów kierunkowych $[D]_\omega$ dająca związek

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = [D]_\omega \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (12.150)$$

będzie

$$[D]_\omega = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & 1 \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi & 0 \\ \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (12.151)$$

Wyznacznik macierzy $[D]_\omega = -\cos\theta$, a macierz odwrotna $[D]_\omega^{-1}$ wyrazi się następująco:

$$[D]_\omega^{-1} = -\frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} 0 & -\sin\phi & -\cos\phi \\ 0 & -\cos\phi\cos\theta & \sin\phi\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta\sin\phi & -\cos\phi\sin\theta \end{bmatrix} \quad (12.152)$$

i składowe prędkości kątowych $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ są:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = [D]_\omega^{-1} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}$$

lub

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos\theta} (\omega_z \cos\phi + \omega_y \sin\phi) \\ \dot{\theta} &= \omega_y \cos\phi - \omega_z \sin\phi \\ \dot{\phi} &= \omega_x + \operatorname{tg}\theta (\omega_y \sin\phi + \omega_z \cos\phi) \end{aligned} \quad (12.153)$$

Macierze transformacji prędkości kątowych $[D]_\omega$ i $[D]_\omega^{-1}$ znacznie się upraszczają dla małych kątów θ i ϕ . Istotnie

$$[D]_\omega = \begin{bmatrix} -\theta & 0 & 1 \\ \phi & 1 & 0 \\ 1 & -\phi & 0 \end{bmatrix} \quad [D]_\omega^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \phi & 1 \\ 0 & 1 & -\phi \\ 1 & 0 & \theta \end{bmatrix}$$

1

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi} &= \omega_z + \Phi \omega_y & \omega_x &= \dot{\Phi} - \Theta \dot{\Psi} \\
 \dot{\Theta} &= \omega_y - \Phi \omega_z & \omega_z &= \dot{\Phi} \dot{\Psi} + \dot{\Theta} \\
 \dot{\Phi} &= \omega_x + \Theta \omega_z & \omega_z &= \dot{\Psi} - \Phi \dot{\Theta}
 \end{aligned}
 \tag{12.154}$$

Jeśli nadal kąty Θ i Φ są małe a także małymi są prędkości kątowe $\dot{\Psi}$, $\dot{\Theta}$, $\dot{\Phi}$, to:

$$\omega_x \cong \dot{\Phi} \quad \omega_y = \dot{\Theta} \quad \omega_z = \dot{\Psi}
 \tag{12.155}$$

Ostatnie zależności znajdują szerokie zastosowanie w liniowej teorii kołysań statków; będziemy często z tych zależności korzystać.

Przy powyższych założeniach upraszczających macierz pełnego obrotu (12.148) także przyjmuje bardzo prostą postać:

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & -\Psi & \Theta \\ \Psi & 1 & -\Phi \\ 0 & \Phi & 1 \end{bmatrix}
 \tag{12.156}$$

Jeśli w praktycznych obliczeniach zadań hydromechanicznych względnie zadań mechaniki ruchu okrętu założenie małych wielkości kątów i prędkości kątowych nie jest wystarczające, to należy wtedy zastosować wzory (12.154) lub nawet (12.153) oraz wzór (12.148) dla macierzy $[D]$. W praktycznych obliczeniach celowym okazuje się nieco inne podejście. Zamiast stosowania nieliniowych równań (12.153) i dalej złożonych wyrażeń dla elementów d_{ij} macierzy $[D]$ można znaleźć liniowe równania różniczkowe dla d_{ij} , w wyniku rozwiązań których uzyskuje się elementy d_{ij} . Tych równań, jak zobaczymy dalej, jest 9. Rozwiązuje się je znaną metodą Runge-Kutego przy pomocy programu, w który wyposażony jest już nieco większy kalkulator.

12.7.3. Pochodna lokalna prędkości w układzie ruchomym. Równania różniczkowe cosinusów kierunkowych

W równania ruchu płynu wchodzi pochodne wektora względem czasu i/lub miejsca w obszarze V . Wektorem tym jest prędkość elementu płynu $\vec{v}(\vec{r}, t)$ i rotacja prędkości płynu $\vec{\Omega}$. Mamy znane wyrażenia dla tych pochodnych w nieruchomym układzie współrzędnych.

Przy obliczaniu pochodnych wektora $\vec{a}(\vec{r}, t)$ względem czasu należy pamiętać o tym, że wektory bazowe: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ układu ruchomego są zależne od czasu, a wektory: $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ układu nieruchomego są stałe. Oprócz powyższego należy mieć na uwadze również to, że skalar ϕ , wektor \vec{a} , tensor S mogą być wyrażone w nieruchomym lub ruchomym układzie odniesienia i że w danym miejscu - punkt N na rysunku 12.48 - są to te same matematyczne obiekty.

Zatem

$$\varphi = \varphi(N, t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_0(\vec{r}_0, t) = \varphi_0(\vec{r}_A + \vec{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\vec{r}, t) \quad (12.157a)$$

$$\vec{a} = \vec{a}(N, t) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a}_0(\vec{r}_0, t) = \vec{a}_0(\vec{r}_A + \vec{r}, t) = \vec{a}(\vec{r}, t) \quad (12.157b)$$

$$s(N, t) \stackrel{\text{def}}{=} s_0(\vec{r}_0, t) = s_0(\vec{r}_A + \vec{r}, t) = s(\vec{r}, t) \quad (12.157c)$$

Wyrażenie (12.157b) jest uogólnieniem wyrażeń (12.141a) i (12.149).

Dowolny skalar φ nie zależy od kierunku i jako określony jedną liczbą jest niezmienny przy transformacjach ortogonalnych układów: składowe wektora \vec{a} transformują się według wzorów (12.146), zaś dla składowych tensora przy transformacji ortogonalnej jest znany wzór [10]

$$S_{0ij} = d_{ik} d_{jl} S_{kl} \quad (12.158)$$

gdzie sumowanie odbywa się po powtarzających się wskaźnikach: k i l . Powyższy wzór uzyskamy dalej podczas wyznaczania przyspieszenia konwekcyjnego w ruchomym układzie odniesienia. Uwzględniając wzory (12.157a i b) pochodne materialne funkcji skalarnej i wektorowej będą:

$$\frac{d\varphi_0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \frac{d\vec{a}_0}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}$$

Rozpatrzmy najpierw pochodną lokalną wektora:

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \vec{i}_0 a_{x0} + \vec{j}_0 a_{y0} + \vec{k}_0 a_{z0} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z$$

Mamy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} &= \vec{i}_0 \frac{\partial a_{x0}}{\partial t} + \vec{j}_0 \frac{\partial a_{y0}}{\partial t} + \vec{k}_0 \frac{\partial a_{z0}}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \vec{i}}{\partial t} a_x + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} a_y + \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} a_z + \vec{i} \frac{\partial a_x}{\partial t} + \vec{j} \frac{\partial a_y}{\partial t} + \vec{k} \frac{\partial a_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (12.159)$$

Jeśli oznaczymy przez

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \vec{i} \frac{\partial a_x}{\partial t} + \vec{j} \frac{\partial a_y}{\partial t} + \vec{k} \frac{\partial a_z}{\partial t} \quad (12.159a)$$

pochodną lokalną wektora \vec{a} w układzie ruchomym, to pochodną lokalną wektora \vec{a} będzie

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{i}}{\partial t} a_x + \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} a_y + \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} a_z \quad (12.159b)$$

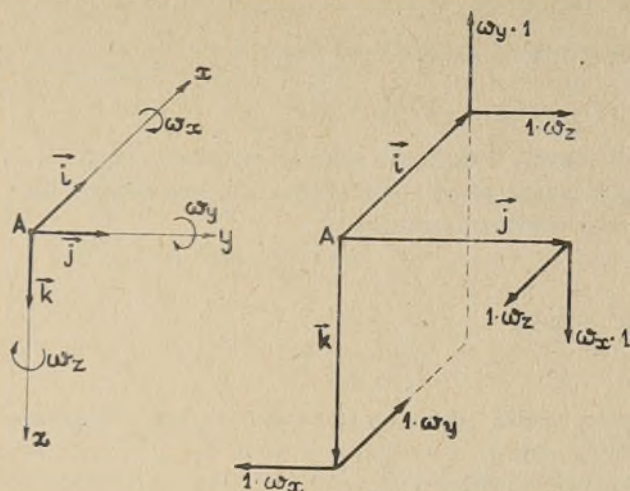
Gdy wektorem \vec{a} jest prędkość \vec{v} , to

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v}_r$$

nazywa się przyspieszeniem względnym, a kiedy $\vec{a} = \vec{r}$, to

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{v}_w$$

jest prędkością względną, np. prędkością punktu N na rysunku 12.48 względem układu ruchomego $Axyz$.



Rys.12.52

Wchodzące do wzoru (12.159b) prędkości zmian wersorów \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} można prosto wyznaczyć przy pomocy składowych ω_x , ω_y , ω_z prędkości $\vec{\omega}$ obracania się układu ruchomego. Ponieważ długości wersorów \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} są równe jedności, to prędkości zmian wektorów \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} na podstawie rysunku 12.52 będą:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{i}}{\partial t} &= \vec{j} \omega_z - \vec{k} \omega_y = \vec{\omega} \times \vec{i} \\ \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} &= \vec{k} \omega_x - \vec{i} \omega_z = \vec{\omega} \times \vec{j} \\ \frac{\partial \vec{k}}{\partial t} &= \vec{i} \omega_y - \vec{j} \omega_x = \vec{\omega} \times \vec{k}\end{aligned}\quad (12.159c)$$

Podstawiając (12.159c) do wzoru (12.159b) uzyskamy znaną dobrze zależność

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \frac{\partial' \vec{a}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{a} \quad (12.160)$$

Przy uwzględnieniu wyrażenia (6.52) dla tensora prędkości kątowej S_ω wzór (12.160) dla pochodnej lokalnej wektora \vec{a} możemy również zapisać następująco:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \frac{\partial' \vec{a}}{\partial t} + S_\omega \cdot \vec{a} \quad (12.161)$$

Wzór (12.160) został już zastosowany przez nas do wyznaczenia kinematycznego warunku brzegowego (12.127c).

Przy zastosowaniu wzoru (12.160) do związku (12.140) uzyskamy prędkość \vec{v} punktu N na rysunku 12.48:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{d'\vec{r}}{dt} \quad (12.162)$$

gdzie: $\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$ (12.162a)

jest prędkością początku układu ruchomego, a

$$\vec{v}_w = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (12.162b)$$

jest prędkością punktu N względem układu ruchomego Axyz.

Prędkość \vec{v}_w , jak wiemy, nazywa się prędkością względną. Jeśli wprowadzi się znane pojęcie prędkości unoszenia

$$\vec{v}_e = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (12.162c)$$

to prędkość \vec{v} będzie

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_w \quad (12.162d)$$

Przez rozwiązanie równań ruchu ciała-statku w płynie wyznacza się składowe prędkości początku układu A wyrażone w bazie $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ oraz wyrażone w tej samej bazie składowe prędkości kątowej $\vec{\omega}$, przy czym stosuje się przeważnie następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} v_{Ax} = u & & v_{Ay} = v & & v_{Az} = w \\ \omega_x = p & & \omega_y = q & & \omega_z = r \end{aligned} \quad (12.162e)$$

Jeśli chce się wyznaczyć tor środka ciężkości statku, którym jest początek układu ruchomego, to składowe: u, v, w prędkości \vec{v}_A należy przetransponować dla układu nieruchomego $Ox_0y_0z_0$. Wtedy równanie różniczkowe szukanego toru będzie

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = [D] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

lub

$$\begin{aligned} \dot{x}_{OA} &= u d_{11} + v d_{12} + w d_{13} \\ \dot{y}_{OA} &= u d_{21} + v d_{22} + w d_{23} \\ \dot{z}_{OA} &= u d_{31} + v d_{32} + w d_{33} \end{aligned} \quad (12.163)$$

Jak już zaznaczono, cosinusy kierunkowe d_{ij} podlegają wyznaczeniu w toku rozwiązywania zadania o ruchu ciała w płynie i do tego celu służą równania różniczkowe tych cosinusów, które można znaleźć przez różniczkowanie względem czasu wektorów bazowych:

$$\begin{aligned} \vec{i}_0 &= \vec{i} d_{11} + \vec{j} d_{12} + \vec{k} d_{13} \\ \vec{j}_0 &= \vec{i} d_{21} + \vec{j} d_{22} + \vec{k} d_{23} \\ \vec{k}_0 &= \vec{i} d_{31} + \vec{j} d_{32} + \vec{k} d_{33} \end{aligned}$$

Stosując wzór (12.160) do pierwszego równania dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}_0}{dt} = 0 &= \vec{i} \dot{d}_{11} + \vec{j} \dot{d}_{12} + \vec{k} \dot{d}_{13} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i} (\dot{d}_{11} + q d_{13} - r d_{12}) + \vec{j} (\dot{d}_{12} + r d_{11} - p d_{13}) + \\ &+ \vec{k} (\dot{d}_{13} + p d_{12} - q d_{11}) \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} \dot{d}_{11} + q d_{13} - r d_{12} &= 0 \\ \dot{d}_{12} + r d_{11} - p d_{13} &= 0 \\ \dot{d}_{13} + p d_{12} - q d_{11} &= 0 \end{aligned} \quad (12.164a)$$

i podobnie przez różniczkowanie wektorów \vec{j}_0 i \vec{k}_0 względem czasu mamy dalszych sześć równań:

$$\begin{aligned} \dot{d}_{21} + q d_{23} - r d_{21} &= 0 \\ \dot{d}_{22} + r d_{21} - p d_{23} &= 0 \\ \dot{d}_{23} + p d_{22} - q d_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (12.164b)$$

$$\begin{aligned} \dot{d}_{31} + q d_{33} - r d_{31} &= 0 \\ \dot{d}_{32} + r d_{31} - p d_{33} &= 0 \\ \dot{d}_{33} + p d_{32} - q d_{31} &= 0 \end{aligned} \quad (12.164c)$$

Układ równań (12.164) łącznie z równaniami (12.163) oraz równaniami dynamicznymi ruchu ciała, o których będziemy mówić w dalszych wykładach, opisują ruch dowolny ciała-statku w płynie. W wyniku rozwiązania równań (12.164) uzyskuje się elementy d_{ij} macierzy $[D]$ i $[D]^T = [D]^{-1}$, a stąd położenie w przestrzeni osi układu ruchomego, bo

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = [D]^T \begin{pmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{pmatrix}$$

Dla sprawdzenia poprawności wyników obliczeń przy pomocy maszyny cyfrowej można wykorzystać w programie oczywiste warunki:

$$\begin{aligned} |\vec{i}_0| = |\vec{j}_0| = |\vec{k}_0| &= 1 \\ \vec{i}_0 \cdot \vec{j}_0 = \vec{j}_0 \cdot \vec{k}_0 = \vec{k}_0 \cdot \vec{i}_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{i}_0 \times \vec{j}_0 = \vec{k}_0 \quad \vec{j}_0 \times \vec{k}_0 = \vec{i}_0 \quad \vec{k}_0 \times \vec{i}_0 = \vec{j}_0$$

W przypadku ruchu płynu traktowanego jako ośrodek ciągły wyrażenie

$$\vec{v}(\vec{r}_0, t) = \vec{i}_0 v_{x0} + \vec{j}_0 v_{y0} + \vec{k}_0 v_{z0} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{i}_0 \frac{dx_0}{dt} + \\ + \vec{j}_0 \frac{dy_0}{dt} + \vec{k}_0 \frac{dz_0}{dt}$$

jest równaniem toru elementu płynu, przy czym element płynu jest uważany za punkt. Istotnie, równania

$$\frac{dx_0}{dt} = v_{x0} \quad \frac{dy_0}{dt} = v_{y0} \quad \frac{dz_0}{dt} = v_{z0}$$

są zgodne z równaniami (6.2). Jeśli zamiast składowych v_{x0} , v_{y0} , v_{z0} są dane składowe v_x , v_y , v_z w układzie ruchomym, to równaniem toru będą równania:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_0}{dt} \\ \frac{dy_0}{dt} \\ \frac{dz_0}{dt} \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (12.165)$$

Widzimy, że są to takie same równania jak (12.163) dla wyznaczenia toru początku układu ruchomego A - środka ciężkości statku. Różnica polega tylko na interpretacji składowych prędkości \vec{v} i \vec{v}_A . Jeśli chcemy wyznaczyć tor elementu płynu względem układu ruchomego, to znajdujemy go w sposób podobny do toru tego elementu w układzie nieruchomym, mianowicie na podstawie rysunku 12.48 mamy:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_w \quad (12.166)$$

lub

$$\frac{d'x}{dt} = v_{wx} \quad \frac{d'y}{dt} = v_{wy} \quad \frac{d'z}{dt} = v_{wz}$$

Analogicznie do (6.4) możemy również napisać równanie linii prądu odniesionej do układu ruchomego.

$$d\vec{r} \times \vec{v}_w = 0 \quad \text{ i } \quad \frac{dy}{v_{wx}} = \frac{dy}{v_{wy}} = \frac{dz}{v_{wz}} \quad (12.167)$$

12.7.4. Przyspieszenie elementu płynu i równania ruchu płynu w ruchomym układzie odniesienia

W rozdziale 6.3 przedstawiono różne wyrażenia dla przyspieszenia elementu płynu wyrażonego w nieruchomym układzie odniesienia. Obecnie naszym celem jest wyprowadzenie analogicznych wyrażeń dla przyspieszenia \vec{w} elementu płynu wyrażonego w ruchomym układzie odniesienia.

W celu uzyskania jaśniejszego poglądu napiszmy najpierw jeszcze raz, lecz nieco inaczej, wyrażenie dla \vec{w} w układzie nieruchomym. Mamy:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}_0[\vec{r}_0(t), t]}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{v}(\vec{r}_0(t), t)}{\partial t} \right)_{\vec{r}_0 = \text{const}} + \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}_0(t), t)}{\partial \vec{r}_0} \cdot \frac{d\vec{r}_0}{dt}$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie równości jest, jak wiemy, przyspieszeniem lokalnym, a drugi - przyspieszeniem konwekcyjnym. Wprowadzając tensor prędkości płynu $\mathbf{S}(\vec{r}_0, t)$ zgodnie z (6.10) i (6.25):

$$\mathbf{S}(\vec{r}_0, t) = \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}_0, t)}{\partial \vec{r}_0} = (\nabla \otimes \vec{v})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial y_0} & \frac{\partial}{\partial z_0} \end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{Bmatrix} \quad (12.168a)$$

przyspieszenie elementu płynu w nieruchomym układzie współrzędnych będzie:

$$\vec{w}(\vec{r}_0, t) = \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}_0, t)}{\partial t} + \mathbf{S}(\vec{r}_0, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}_0, t) \quad (12.168b)$$

W podobny sposób wyprowadza się wyrażenie dla przyspieszenia $\vec{w}(\vec{r}, t)$ elementu płynu w ruchomym układzie współrzędnych. Należy tu jednak uwzględnić to, że wektory bazy: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ układu ruchomego są zależne od czasu. Stąd pochodna lokalna prędkości elementu płynu w układzie ruchomym będzie dana wzorem (12.160). Uwzględniając powyższe uwagi przyspieszenie elementu płynu, wyrażone w układzie ruchomym, jest

$$\vec{w}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (12.169a)$$

Ale zgodnie z (12.166) i (12.162d)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_w = \vec{v} - \vec{v}_e$$

a

$$\frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} = (\nabla \otimes \vec{v})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \mathbf{S}(\vec{r}, t) \quad (12.169b)$$

więc

$$\begin{aligned} \vec{w}(\vec{r}, t) &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \mathbf{S}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}_w = \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \mathbf{S} \cdot (\vec{v} - \vec{v}_e) \end{aligned} \quad (12.169c)$$

W powyższym wyrażeniu wszystkie składowe wektorów $\vec{v}, \vec{\omega}$ i \vec{v}_e oraz tensora \mathbf{S} są wyrażone w bazie układu ruchomego: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Zauważmy jeszcze, że pomiędzy składowymi przyspieszenia \vec{w} elementu płynu wyrażonymi w układzie nieruchomym i w układzie ruchomym ważna jest zależność transformacyjna dla wektorów (12.140c)

$$\vec{w}(\vec{r}_0, t) = [D] \vec{w}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{w}(\vec{r}, t) = [D]^T \vec{w}(\vec{r}_0, t)$$

Ze wzoru (12.169c) widać, że gdy $\vec{v}_e = 0$, $\vec{\omega} = 0$ i $[D] = [D]^T = I$ to wtedy, tak jak być powinno, składowe przyspieszenia \vec{w} w obu układach odniesienia: $Ox_0y_0z_0$, Axyz, są takie same.

Wzór (12.169c) stosuje się do równania Naviera i Stokesa lub równania Eulera przy wyznaczaniu pola prędkości płynu i ciśnień w ruchomym układzie odniesienia, a wzór (12.168b), względnie jego równoważne zapisy podane w rozdziale 6.3, do tych samych równań, gdy poszukuje się pola prędkości i ciśnienia w nieruchomym układzie współrzędnych.

Przy pomocy prawa transformacyjnego (12.140c) dla wektorów oraz określeń (12.168a) i (12.169b) można łatwo znaleźć podane wyżej prawo transformacyjne (12.158) dla tensorów:

Mamy:

$$S(\vec{r}_0, t) = \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}_0, t)}{\partial \vec{r}_0} = \frac{\partial [[D] \vec{v}(\vec{r}, t)]}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{r}_0} = \frac{[D] \partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} [D]^T$$

Więc wyrażenie

$$S(\vec{r}_0, t) = [D] S(\vec{r}, t) [D]^T \quad (12.170)$$

jest prawem transformacji ortogonalnej tensorów, które zapisane przy pomocy wskaźników i konwencji sumacyjnej przyjmuje postać wzoru (12.158). Stąd $S(\vec{r}_0, t) = S(\vec{r}, t)$ jest tensorem; jest tensorem prędkości płynu.

Wzór transformacyjny (12.170) względnie (12.158) jest ważny dla każdego tensora ortogonalnego. Możemy go zastosować również dla tensora naprężeń w płynie (5.16) i wykazać, że jest rzeczywiście tensorem lub lepiej, że ma charakter tensorowy. Żeby to zrobić, weźmiemy pod uwagę wzór (5.17). Otóż, zgodnie ze wzorem (12.140c) powinno być $\vec{p}_n(\vec{r}_0, t) = [D] \vec{p}_n(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned} \vec{p}_n(\vec{r}_0, t) &= \vec{n}(\vec{r}_0, t) \cdot P(\vec{r}_0, t) = [D] \vec{n}(\vec{r}, t) \cdot [D] P(\vec{r}, t) [D]^T = \\ &= ([D] P(\vec{r}, t) [D]^T)^T \cdot [D] \vec{n}(\vec{r}, t) = \\ &= (P(\vec{r}, t) [D]^T)^T \cdot [D]^T \cdot [D] \vec{n}(\vec{r}, t) = (P(\vec{r}, t) [D]^T)^T \cdot \vec{n} = \\ &= [D] P^T(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} = [D] \vec{n}(\vec{r}, t) \cdot P(\vec{r}, t) = [D] \vec{p}_n(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

c.n.d.

Widzimy stąd, że rzeczywiście składowe tensora naprężeń P transformują się zgodnie ze wzorem transformacyjnym (12.170) czyli tak, jak być powinno.

W podobny sposób można również wykazać, że dywergencja prędkości w obu układach odniesienia jest taka sama

$$\frac{\partial v_{x0}}{\partial x_0} + \frac{\partial v_{y0}}{\partial y_0} + \frac{\partial v_{z0}}{\partial z_0} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Tego należało się spodziewać, bo $\nabla \cdot \vec{v}$ jest wielkością o charakterze skalarnym. Również wyrażenia dla mocy wewnętrznej i mocy dyssypowanej (7.43), (7.47), (7.48) i (7.49), jako mające charakter skalarny, są takie same w nieruchomym i ruchomym układzie współrzędnych.

Wykażcie, że tak jest!

Wróćmy jeszcze do wyrażenia (12.169c) dla przyspieszenia elementu płynu \vec{w} . Jeśli uwzględnimy związek (6.26).

$$\mathbf{S} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \mathbf{S}^T \equiv \vec{v} \cdot (\nabla \otimes \vec{v}) \equiv \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \text{to} \quad \vec{w} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial' \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{v}_w \cdot \nabla \otimes \vec{v} = \\ &= \frac{\partial' \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v} \end{aligned} \quad (12.170)$$

Z powyższego wyrażenia widać, że operator pochodnej materialnej w ruchomym układzie odniesienia, działającej na pole wektorowe, jest

$$\frac{d(\quad)}{dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + \vec{\omega} \times (\quad) - \vec{v}_e \cdot \nabla(\quad) + \vec{v} \cdot \nabla(\quad) \quad (12.171)$$

Zakładając $\vec{\omega} = 0$ i $\vec{v}_e = 0$ we wzorze (12.171) uzyskamy znany operator pochodnej materialnej

$$\frac{d(\quad)}{dt} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla(\quad) \quad (12.171a)$$

działający na wektor lub skalar w układzie nieruchomym.

Przy obliczaniu w układzie ruchomym pochodnej materialnej funkcji skalarnej, np. potencjału φ , należy w operatorze (12.171) podstawić $\vec{\omega} = 0$. Istotnie tak jest, bo

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(\vec{r}, t)}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\nabla \varphi) \cdot \vec{v}_w = \\ &= \left(\frac{\partial'}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla - \vec{v}_e \cdot \nabla \right) \varphi \end{aligned} \quad (12.171b)$$

Należy podkreślić jednak to, że

$$\vec{v}_e = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Ponieważ zgodnie z (12.157b) operator ∇ w układzie ruchomym i nieruchomym jest taki sam, lecz składowe ma inne, to na podstawie wzorów (12.171a) i (12.171b) mamy:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial'}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \quad (12.172)$$

Również porównując wzory (12.171) i (12.171a) uzyskuje się bardziej ogólną postać:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial'}{\partial t} + \vec{\omega} \times - \vec{v}_e \cdot \nabla \quad (12.173)$$

Wzór (12.172) odnosi się do funkcji skalarnej, a wzór (12.173) jest ważny dla dowolnej funkcji wektorowej.

Zatem jeśli jakieś wyrażenie skalarne dane w nieruchomym układzie współrzędnych zawiera pochodną lokalną, to to wyrażenie możemy natychmiast zapisać w ruchomym układzie odniesienia, zastępując operator pochodnej lokalnej zgodnie ze wzorem (12.172). Zilustrujemy ten wniosek przykładami:

- równanie ciągłości (4.6) w ruchomym układzie odniesienia będzie:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \rho + \vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (12.174a)$$

- zlinearyzowany kinematyczny warunek brzegowy na swobodnej powierzchni (12.138) przybierze postać:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \zeta = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (12.174b)$$

Analogicznie postępuje się w przypadku wyrażeń wektorowych z tą różnicą, że zamiast wyrażenia (12.172) bierze się pod uwagę operator (12.173).

Przykładowo stosując operator (12.173) do równania (7.30) mamy:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{\Omega} - (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{\Omega} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{\Omega} \quad (12.174c)$$

Gdy płyn jest ściśliwy: $\text{div } \vec{v} \neq 0$, to po lewej stronie równania (12.174c) dojdzie jeszcze jeden wyraz, równy

$$\vec{\Omega} \text{ div } \vec{v}$$

w tym przypadku będziemy mieć:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{\Omega} + (\vec{v}_w \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{\Omega} (\nabla \cdot \vec{v}) - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{\Omega} \quad (12.174d)$$

Przy pomocy wyrażenia (12.169c), (12.170) lub (12.173) równania Naviera i Stokesa (7.19) wyrażone w ruchomym układzie odniesienia będą:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \mathbf{S} \cdot (\vec{v} - \vec{v}_e) = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (12.175a)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} - (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (12.175b)$$

Dla $\vec{F} = -\nabla U$ przez zastosowanie operacji rotacji do obu stron równania (12.175b) wyprowadzicie wzór (12.174d).

Przy analizie równania ruchu płynu newtonowskiego lub płynu idealnego wygodnym jest zapisanie przyspieszenia w postaci Lamba-Gromeki. Dla nieruchomego układu współrzędnych przyspieszenie \vec{w} wyrażone w tej postaci dane jest wzorem (5.41). Istnieją różne sposoby wyprowadzenia tego wzoru dla układu ruchomego. Najprostszym wydaje się wyprowadzenie jak na stronie 91 części I. Wychodzimy zatem z oczywistej tożsamości:

$$\mathbf{S} \cdot (\vec{v} - \vec{v}_e) = \mathbf{S}^T \cdot \vec{v} - \mathbf{S}^T \cdot \vec{v}_e + (\mathbf{S} - \mathbf{S}^T) \cdot \vec{v}_w \quad (12.176)$$

Pierwszy i ostatni wyraz prawej strony tożsamości (12.176) już znamy. Zgodnie ze wzorem (6.15)

$$\mathbf{S}^T \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad } v^2 \quad (12.176a)$$

a według wzoru (6.18)

$$(\mathbf{S} - \mathbf{S}^T) \cdot \vec{v}_w = -\vec{v}_w \times \text{rot } \vec{v} \quad (12.176b)$$

Obliczmy zatem jeszcze $\mathbf{S}^T \cdot \vec{v}_e$

$$\mathbf{S}^T \cdot \vec{v}_e = \begin{pmatrix} v_{ex} \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_{ey} \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_{ez} \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ v_{ex} \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_{ey} \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_{ez} \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ v_{ex} \frac{\partial v_x}{\partial z} + v_{ey} \frac{\partial v_y}{\partial z} + v_{ez} \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ale składowa na oś Ax wektora $\mathbf{S}^T \cdot \vec{v}_e$ może być zapisana:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}^T \cdot \vec{v}_e)_x &= \frac{\partial}{\partial x} (v_{ex} v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (v_{ey} v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (v_{ez} v_z) - \\ &- v_y \frac{\partial v_{ey}}{\partial x} - v_z \frac{\partial v_{ez}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v}_e \cdot \vec{v}) + (v_z \omega_y - v_y \omega_z) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{v}_e \cdot \vec{v}) + (\vec{\omega} \times \vec{v})_x \end{aligned}$$

Podobnie pozostałe składowe $\mathbf{S}^T \cdot \vec{v}$ będą

$$(\mathbf{S}^T \cdot \vec{v}_e)_y = \frac{\partial}{\partial y} (\vec{v}_e \cdot \vec{v}) + (\vec{\omega} \times \vec{v})_y$$

$$(\mathbf{S}^T \cdot \vec{v}_e)_z = \frac{\partial}{\partial z} (\vec{v}_e \cdot \vec{v}) + (\vec{\omega} \times \vec{v})_z$$

Uwzględniając powyższe mamy

$$\mathbf{S}^T \cdot \vec{v} = \nabla (\vec{v}_e \cdot \vec{v}) + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad (12.176c)$$

Przy podstawieniu wyrażeń (12.176a,b,c) do wzoru (12.169c) uzyskamy szukane wyrażenie dla przyspieszenia elementu płynu w postaci Lamba-Gromeki, ważne w ruchomym układzie współrzędnych:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} - \vec{v}_e \cdot \vec{v} \right) - (\vec{v} - \vec{v}_e) \times \text{rot } \vec{v} \quad (12.177)$$

Stąd mamy jeszcze jedną postać równania Naviera i Stokesa w ruchomym układzie współrzędnych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} - \vec{v}_e \cdot \vec{v} \right) - (\vec{v} - \vec{v}_e) \times \text{rot } \vec{v} = \\ = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \nu \text{grad} (\nabla \cdot \vec{v}) \end{aligned} \quad (12.178)$$

Wiemy już z pytania kontrolnego 48 części I, że zastosowanie operacji dywergencji do równania Naviera i Stokesa płynu nieściśliwego daje równanie Poissona dla ciśnienia

$$\Delta p = -\rho \mathbf{S} : \mathbf{S} \quad (12.179)$$

gdzie zgodnie z definicją (7.42)

$$\mathbf{S} : \mathbf{S} = \sum_{i,j} S_{ij} S_{ji} \quad (12.179a)$$

jest podwójnym iloczynem skalarnym tensorów prędkości płynu lub inaczej - pierwszym niezmiennikiem - śladem iloczynu tensorów \mathbf{S} , to jest

$$\mathbf{S} : \mathbf{S} = \text{Tr}[\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}]$$

Równanie (12.179), jako równanie skalarne, jest ważne również w ruchomym układzie odniesienia. Można to sprawdzić przez zastosowanie operatora dywergencji do równania (12.175a), przy założeniu, że $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Mamy:

$$\text{div} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{v}) = 0 \quad (a)$$

Zgodnie ze wzorem (3.47) i uwzględnieniem, że $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

$$\text{div}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{rot} \vec{\omega} - \vec{\omega} \cdot \text{rot} \vec{v} = -\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} \quad (b)$$

Dywergencja 3 wyrazu równania (12.175a) jest

$$\text{div}(\mathbf{S} \cdot \vec{v}_w) = \text{div}(\mathbf{S}_c \cdot \vec{v}_{wc}) + \text{div}(\mathbf{S}_c \cdot \vec{v}_w) \quad (c)$$

Ale

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{S} \cdot \vec{v}_{wc}) &= \nabla \cdot [(\nabla \otimes \vec{v})^T \cdot \vec{v}_{wc}] = [\nabla \cdot (\nabla \otimes \vec{v})^T] \cdot \vec{v}_w = \\ &= (\nabla \otimes \nabla \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}_w = \vec{v}_w \cdot \text{grad} \text{div} \vec{v} = 0 \end{aligned} \quad (d)$$

Więc

$$\text{div}(\mathbf{S} \cdot \vec{v}_w) = \text{div}(\mathbf{S}_c \cdot \vec{v}_w) = \text{div}(\mathbf{S}_c \cdot \vec{v}) - \text{div}(\mathbf{S}_c \cdot \vec{v}_e)$$

Dalej zgodnie ze wzorem (7.42)

$$\text{div}(\mathbf{S}_c \cdot \vec{v}) = \mathbf{S} : \mathbf{S} \quad (e)$$

Pozostaje nam do obliczenia

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{S}_c \cdot \vec{v}_e) &= \text{div} \left(\left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right] \otimes \left\{ \begin{array}{c} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} v_{ex} \\ v_{ey} \\ v_{ez} \end{array} \right\} \right) = \\ &= \omega_x \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \omega_y \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \omega_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \\ &= -\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega} \end{aligned} \quad (f)$$

Uwzględniając wyrażenia (d), (e) i (f)

$$\operatorname{div} (\mathbf{S}_c \cdot \vec{v}_w) = \mathbf{S} : \mathbf{S} + \vec{\omega} \times \vec{\Omega} \quad (g)$$

Mamy zatem obliczoną dywergencję wszystkich wyrazów lewej strony równania Naviera i Stokesa. Przy obliczaniu dywergencji prawej strony uwzględniamy wzory (5.4) lub (5.5) dla siły masowej \vec{F} oraz że $\rho = \text{const}$, $\mu = \text{const}$. Zgodnie z tym

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \quad \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{1}{\rho} \Delta p$$

$$\operatorname{div} (v \Delta \vec{v}) = v \Delta \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Uwzględniając powyższe oraz wzory (g), (b) i (a) widzimy, że wzór (12.179) jest ważny również w ruchomym układzie współrzędnych, czyli tak, jak być powinno.

Równanie (12.179) znajduje zastosowanie przy numerycznym rozwiązywaniu - metodą różnic skróconych [11] - zadań dotyczących przepływów nieściśnialnego płynu newtonowskiego. Dołącza się je do równania Naviera i Stokesa zamiast równania ciągłości: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Zamknięty układ równań w tym przypadku jest następujący:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + \mathbf{S} \cdot \vec{v}_w = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + v \Delta \vec{v}$$

$$\Delta p = -\rho \mathbf{S} : \mathbf{S}$$

$$\vec{v}_w = \vec{v} - \vec{v}_e$$

Przy rozwiązywaniu zadań hydromechaniki pomija się czasem wielkość $\mathbf{S} : \mathbf{S}$ i równanie (12.179) staje się równaniem Laplace'a $\Delta p = 0$, służącym dla wyznaczenia pola ciśnienia. Znalazło ono dość szerokie zastosowanie szczególnie w liniowej teorii płyta nośnego [13].

Widzimy, że wprowadzenie układów ruchomych daje nam większą możliwość niekiedy prostszego rozwiązywania zadań hydromechanicznych. Wybór układu odniesienia przy rozwiązywaniu zadania zależy od nas. Można zadanie rozwiązać w nieruchomym układzie współrzędnych i dalej, korzystając z przedstawionych związków transformacyjnych, przejść do układu ruchomego; względnie można postępować odwrotnie. Wzbogaciłiśmy więc narzędzia pracy. Pozwalają one nam już na znajdowanie pola prędkości, a w szczególności potencjału prędkości $\bar{\varphi}$ dla przepływów w ośrodkach nieograniczonych, a także z uwzględnieniem ścian stałych. Przy ruchu ciała w pobliżu lub na swobodnej powierzchni nie mamy jeszcze podanych kompletnych warunków brzegowych, chociaż ich elementy już znamy. Omówimy je bardziej dokładnie w następnych wykładach, kiedy zostaną przedstawione całki ogólne równań ruchu. Tam też podamy pewne twierdzenia dotyczące ruchu wirowego płynu chociaż część tych twierdzeń będzie mieć charakter kinematyczny.

13. CAŁKI OGÓLNE RÓWNAŃ RZĄDZĄCYCH PŁYNEM IDEALNYM I ICH ZASTOSOWANIE

Całki ogólne równań rządzących ruchem płynu można znaleźć tylko dla przypadku barotropowego płynu idealnego znajdującego się w polu sił masowych mających potencjał. Mimo tego ograniczenia zakres zastosowań praktycznych jest bardzo szeroki. Wynika to ze stwierdzenia mówiącego o tym, że w niektórych zagadnieniach hydromechanicznych wpływ lepkości płynów, takich jak woda względnie powietrze, jest bardzo mały. Dla ruchów statków w wodzie, okazuje się, że przy pominięciu lepkości można uzyskać szereg informacji o dużym znaczeniu praktycznym. Należą do nich:

- informacje o oddziaływaniu wody spokojnej lub wody sfalowanej na kołyszący się statek;
- informacje o oporze falowym statku i falach powierzchniowych wytwarzanych przez statek;
- informacje o wpływie ścian zbiornika wodnego i/lub ścian kanału, na reakcje hydrodynamiczne działające na statek;
- informacje o wzajemnym oddziaływaniu na siebie statków płynących blisko siebie, względnie o oddziaływaniu kadłuba statku i jego części wystających: stępek przeciwprzechyłowych, stabilizatorów, sterów i śrub napędowych.

Również przy pominięciu sił lepkości można uzyskać dane o falach wewnętrznych w płynie: wodzie i/lub powietrzu, wywołanych ruchem statku, śrubą napędową lub innymi przyczynami, np. wybuchem podwodnej miny.

Na podstawie powyższego mamy uzasadnienie do zajmowania się całkami ogólnymi równań rządzących płynem idealnym.

13.1. CAŁKI OGÓLNE RÓWNAŃ RUCHU PŁYNU IDEALNEGO W NIERUCHOMYM UKŁADZIE ODNIESIENIA

Do znalezienia całek ogólnych równań ruchu płynu idealnego pomozemy skalarnie przez element $d\vec{r}$ obustronnie równania Lamba-Gromeki (5.45). Jeżeli założymy, że

$$\vec{F} = -\nabla U \quad (5.3)$$

i że płyn jest barotropowy

$$\nabla p = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (10.10)$$

to w wyniku uzyskamy

$$d\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + d\vec{r} \cdot \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + U \right) = d\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{\Omega}) \quad (13.1)$$

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$$

W wyrażeniu pod znakiem gradientu poszczególne składniki przedstawiają energię przypadającą na jednostkę masy płynu, przy czym: $\frac{v^2}{2}$ - energię kinetyczną; \mathcal{P} - energię potencjalną sił wewnętrznych w płynie; U - energię potencjalną sił masowych.

Dwie ostatnie postaci energii omówiono przy badaniu hydrostatyki płynów. Tam też znaleziono całkę ogólną równania (13.1) dla płynu w spoczynku:

$$E = U + \mathcal{P} = \text{const} \quad (10.12)$$

Na tej całce, jak wiemy, opiera się cała hydrostatyka.

Również przy omawianiu równania Naviera i Stokesa dla płynu nieściśliwego znaleziono dla przypadku przepływu potencjalnego całkę ogólną równania (13.1) w postaci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = C(t) \quad (5.47)$$

W obu tych przypadkach prawa strona równania (13.1) jest równa zeru. Skorzystamy dalej z tej uwagi. Narazie zostaniemy jeszcze przy przepływie potencjalnym, to jest $\vec{\Omega} = 0$, $\nabla \varphi = \vec{v}$.

Z równania (13.1) tego przypadku przepływu mamy:

$$d\vec{r} \cdot \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + \mathcal{P} \right) = 0 \quad \text{lub}$$

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + \mathcal{P} \right) = 0$$

Stąd wyrażenie pod znakiem gradientu nie może zależeć od współrzędnych przestrzennych; może zależeć tylko od czasu t , co zapisujemy:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + U + \mathcal{P} = C(t) \quad (13.2)$$

Całkę (13.2) nazywamy całką lub równaniem Cauchy'ego-Lagrange'a. Stałą $C(t)$ wyznacza się w dowolnym miejscu płynu tam, gdzie ją najłatwiej można wyznaczyć. Przeważnie ma to miejsce daleko przed poruszającym się w płynie statkiem. Jeśli przepływ jest ustalony, to

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

i stała $C(t)$ nie zależy od czasu. Dla płynu nieściśliwego funkcja ciśnienia jest

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\rho} p \quad (10.11)$$

W interesujących nas zagadnieniach potencjał sił masowych wyraża się wzorami (5.4) lub (5.5):

$U = gz$ (5.4) dla osi Oz skierowanej pionowo w górę

i

$U = -gz$ (5.5) dla osi Oz skierowanej pionowo w dół.

Przykładowo dla osi Oz skierowanej pionowo w dół równanie Cauchy'ego-Lagrange'a dla ruchu ustalonego wody, traktowanej jako nieściśliwy płyn, przyjmie postać:

$$E = \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + \frac{p}{\rho} - gz = C = \text{const} \quad (13.3)$$

Równania powyższe nazywa się niekiedy całką Eulera.

Często przy badaniu przepływów potencjalnych płynu, a w szczególności przy badaniu pola fal powierzchniowych, np.: wywołanych ruchem statku, wprowadza się do równania ruchu płynu idealnego fikcyjne siły lepkości, tak zwaną lepkość Rayleigh'a

$$\vec{F}_\mu = -\mu \vec{\nabla}^2 \vec{v} = -\mu \nabla^2 \vec{v} \quad (13.4)$$

We wzorze (13.4) współczynnik μ nie ma nic wspólnego z określonym wcześniej dynamicznym współczynnikiem lepkości.

Lepkość Rayleigh'a zabezpiecza nam uzyskanie prawidłowego rozwiązania zadania. Przy jej wprowadzaniu nie trzeba uwzględniać tak zwanego warunku wypromieniowania uwzględniającego to, że fale wytwarzane na swobodnej powierzchni przez kołyszący się statek rozchodzą się na powierzchni swobodnej od tego statku, a nie wędrują do statku gdzieś z nieskończoności. Równanie Laplace'a bowiem obejmuje i takie rozwiązanie zadania.

Po uzyskaniu rozwiązania zadania o falach wytwarzanych przez statek, na przykład po znalezieniu wyrażenia dla potencjału prędkości, należy wziąć:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} ()$$

Korzyść z wprowadzenia lepkości Rayleigh'a jest jeszcze taka, że do rozwiązania równania Laplace'a można stosować transformację Fouriera.

Przy uwzględnieniu wyrażenia (13.4) całka Cauchy'ego-Lagrange'a (13.2) przyjmie postać

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + U + \frac{p}{\rho} + \mu\varphi = C(t) \quad (13.5)$$

Można temu wyrażeniu nadać różne postaci w zależności od tego, jaki przyjmie się układ odniesienia, czy przepływ jest ustalony czy nie, oraz od tego, czy $\rho = \text{const}$, czy też $\rho = \rho(p)$.

Wróćmy do wyrażenia (13.1). Poza przepływem potencjalnym płynu barotropowego, znajdującego się w polu sił masowych mających potencjał, całkę ogólną równania rządzącego płynem idealnym można jeszcze znaleźć dla przepływu ustalonego:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0 \quad \text{oraz również dla } \rho = \rho(p) \quad \text{i} \quad \vec{F} = -\nabla U$$

wtedy, gdy prawa strona wyrażenia (13.1) także staje się równa zeru, zatem gdy

$$d\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{\Omega}) = \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times d\vec{r}) = \vec{\Omega} \cdot (d\vec{r} \times \vec{v}) = 0 \quad (13.6)$$

Przy spełnieniu warunku (13.6) dla $\vec{\Omega} \neq 0$ i $\vec{v} \neq 0$ całka równania (13.1) jest

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \mathcal{P} + U = C = \text{const} \quad (13.7)$$

Z warunku (13.6) widać, że energia E przypadająca na jednostkę masy jest stała na liniach wektorowych wyznaczonych przez

$$d\vec{x} \times \vec{v} = 0 \quad (13.8a)$$

$$\vec{\Omega} \times d\vec{r} = 0 \quad (13.8b)$$

$$\vec{v} \times \vec{\Omega} = 0 \quad (13.8c)$$

Równanie linii wektorowych (13.8a) jest znanym nam równaniem linii prądu (6.4), a równanie (13.8b) jest równaniem linii wirowych (3.95). Dla tych przypadków linii wektorowych równanie (13.7) nazywa się równaniem lub całką Bernoulli'ego.

Z równania (13.8c) wynika, że wektor prędkości \vec{v} pokrywa się z rotacją prędkości $\vec{\Omega}$. Element płynu w tym przypadku obraca się z prędkością kątową $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}$ dookoła linii wirowej i jednocześnie przemieszcza się z prędkością \vec{v} wzdłuż tej linii. Linia prądu zatem tu pokrywa się z linią wirową. Oczywiście z takich linii wirowych będących jednocześnie liniami prądu może być utworzona powierzchnia wirowa. Zauważymy, że ze względu na $\vec{v} \times \vec{\Omega} = 0$ stała C ma wartość taką samą na całej tej powierzchni. Przykładem tego przypadku są wiry swobodne w modelu linii nośnej Prandtla, pokazanym na rysunku 12.23. Całkę (13.7) dla $\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0$ nazywają niekiedy całką Gromeki.

Zauważmy jeszcze, że dla przepływu ustalonego równanie (13.1) możemy również zapisać tak:

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + U \right) = \text{grad} E = \vec{v} \times \vec{\Omega} \quad (13.9)$$

Stąd wektor $\vec{v} \times \vec{\Omega}$ jest wektorem potencjalnym, oczywiście tylko dla płynu barotropowego znajdującego się w potencjalnym polu sił masowych. Potencjałem tym jest E , dane wzorem (13.7). Powierzchnia $E = \text{const}$ jest powierzchnią ekwipotencjalną dla iloczynu $\vec{v} \times \vec{\Omega}$. Stąd $\text{grad} E$ jest wektorem prostopadłym do powierzchni $E = \text{const}$ zawierającej wektory \vec{v} i $\vec{\Omega}$, zatem utworzonej jednocześnie z linii prądu i linii wirowych, przy czym te linie prądu i linie wirowe nie muszą - jak w warunku (13.8) - się pokrywać. Stąd widzimy, że równanie

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \mathcal{P} + U = \text{const}$$

jest również ważne na powierzchni wirowej, która jest jednocześnie powierzchnią prądu. Przykładem zastosować może być opływ powierzchni wirowej jak na rysunku 12.28 lub 12.29 strugą jednorodną $\vec{v} = \vec{1} v_0$.

Powyższe stwierdzenie znajduje zastosowanie w teorii płata nośnego o dużym lub nieskończonym wydłużeniu.

13.2. CAŁKI OGÓLNE RÓWNAŃ RUCHU PŁYNU IDEALNEGO
W RUCHOMYCH UKŁADACH ODNIESIENIA

Dosyć często w praktycznych zagadnieniach hydromechaniki okrętu okazuje się przydatna znajomość całek ogólnych równań ruchu płynu idealnego, wyrażonych w ruchomych układach odniesienia. Ma to miejsce w teorii śrub napędowych i płatów nośnych oraz przy badaniu zjawisk fal powierzchniowych wytwarzanych przez poruszające się na (lub w pobliżu) swobodnej powierzchni wody obiekty. Okazuje się łatwiejszym formułowanie i rozwiązywanie zadań w układzie walcowym, związanym z obracającą się śrubą napędową niż w nieruchomym w przestrzeni układzie odniesienia. Zobaczmy to dalej na konkretnych przykładach.

Sposób postępowania w rozpatrywanym przypadku jest taki sam, jaki był zastosowany przy wyznaczaniu całek ogólnych wyrażonych w nieruchomym układzie odniesienia. Założenia dotyczące pola sił masowych w płynie oraz własności fizycznych płynu są w obu przypadkach identyczne. Bierze się również pod uwagę równanie rządzące w postaci Lamba-Gromeki z tym, że zamiast wzoru (5.45) bierzemy wzór (12.177):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} - \vec{v} \cdot \vec{v}_e \right) - \vec{v}_w \times (\nabla \times \vec{v}) = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (12.177)$$

We wzorze tym, również

$$\vec{F} = -\nabla U \quad U = -gz_0$$

gdzie z_0 zgodnie ze wzorem (12.146a) jest

$$z_0 = d_{31}x + d_{32}y + d_{33}z$$

Jeśli przepływ płynu jest bezwirowy, to pole prędkości płynu w układzie ruchomym ma potencjał $\varphi(x, y, z, t)$ i całka równania (12.177) będzie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \mathcal{P} + U = C(t) \quad (13.10)$$

Po uwzględnieniu lepkości Reyleigh'a przybiera ona postać analogiczną do (13.5):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \mathcal{P} + U + \mu \varphi = C(t) \quad (13.11)$$

Zauważmy, że równanie Cauchy'ego-Lagrange'a (13.10) i (13.11), wyrażone w ruchomych układach odniesienia, uzyskać można prosto z równań (13.2) i (13.5) przez zastąpienie operatora pochodnej lokalnej $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ operatorem (12.172) dla funkcji skalarnej w ruchomym układzie współrzędnych.

Rozpiszmy równanie (13.11) dla przypadku płynu o stałej gęstości. Przy uwzględnieniu wyrażenia (12.162c) dla prędkości unoszenia \vec{v}_e przybiera ono postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (v_{Ax} + \omega_y z - \omega_z y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (v_{Ay} + \omega_z x - \omega_x z) \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \\ - (v_{Az} + \omega_x y - \omega_y x) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ + \frac{p}{\rho} - g (d_{31}x + d_{32}y + d_{33}z) + \mu \varphi = C(t) \end{aligned} \quad (13.11a)$$

Stałą $C(t)$ wyznacza się tu także w dowolnym miejscu płynu. W zadaniach dotyczących fal na swobodnej powierzchni wody stosuje się ruchomy układ współrzędnych $Axyz$, w którym $\Psi \equiv \chi$ lub β , a kąty $\theta = \Phi = 0$ oraz $v_{Az} = 0$ i $\vec{\omega} = \vec{k}\omega$. Dla tego przypadku elementy d_{ij} macierzy transformacji $[D]$ można określić bezpośrednio z macierzy $[\Psi] \equiv [\chi]$. W tym przypadku $d_{31} = d_{32} = 0$, a $d_{33} = 1$ [patrz wzór (12.141f)] i równanie (13.11a) znacznie się upraszcza:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - (v_{Ax} - \omega y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (v_{Ay} + \omega x) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} - gz + \mu \varphi = C(t) \quad (13.12)$$

przy czym na mocy (12.153) mamy $\vec{\omega} = \vec{k} \dot{\psi} = \vec{k} \dot{\chi}$

Dla porządku zaznaczmy jeszcze, że jeżeli w ruchomym układzie współrzędnych potencjał prędkości nie zależy od czasu, to stała C również nie zależy od czasu, a równanie (13.11) ma postać prostszą:

$$-\vec{v}_e \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \mathcal{P} + U + \mu \varphi = C \quad (13.13)$$

Równanie (12.177) można jeszcze scałkować dla przepływu ustalonego w ruchomym układzie odniesienia wzdłuż takiej linii, na której trzeci wyraz równania (12.177) będzie równy zeru.

Istotnie, zakładając $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ i mnożąc skalarnie równanie (12.177) przez element $d\vec{r}$ linii wektorowej danej w ruchomym układzie odniesienia mamy:

$$d\vec{r} \cdot \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} - \vec{v}_e \cdot \vec{v} + U + \mathcal{P} \right) + d\vec{r} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{v}_w) = 0$$

Ale zgodnie z założeniem:

$$d\vec{r} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{v}_w) = \vec{\Omega} \cdot (\vec{v}_w \times d\vec{r}) = \vec{v}_w \cdot (d\vec{r} \times \vec{\Omega}) = 0$$

Stąd widać, że dla przypadku ustalonego przepływu płynu barotropowego, pozostającego w potencjalnym polu sił masowych, wyrażonego w ruchomym układzie odniesienia całka ogólna równania rządzącego ma postać:

$$-\vec{v}_e \cdot \vec{v} + \frac{v^2}{2} + \mathcal{P} + U = C \quad (13.14)$$

przy czym stałą C wyznacza się w dowolnym punkcie linii wektorowych opisanych równaniami:

$$\begin{aligned} \vec{v}_w \times d\vec{r} &= 0 \\ \vec{\Omega} \times d\vec{r} &= 0 \\ \vec{\Omega} \times \vec{v}_w &= 0 \end{aligned} \quad (13.15)$$

Zatem stała C ma wartość stałą wzdłuż linii prądu danych w układzie ruchomym, wzdłuż linii wirowych w układzie ruchomym oraz w przypadku, gdy linie wirowe pokrywają się z liniami prądu w układzie ruchomym.

Wychodząc ze wzoru:

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 - \vec{v}_e \cdot \vec{v} + \mathcal{P} + U \right) = \vec{v}_w \times \vec{\Omega}$$

analogicznego do wzoru (13.9), dochodzimy do wniosku podobnego jak w przypadku układu nieruchomego. Wniosek jest taki, że równanie Bernoulli'ego (13.14) jest również spełnione dla każdej powierzchni wirowej będącej jednocześnie powierzchnią prądu, przy czym obie te powierzchnie są dane w ruchomym układzie odniesienia, a stała C ma wartość stałą na całej tej powierzchni. Łatwo można zauważyć, że jeżeli poza taką powierzchnią, w całym pozostałym obszarze płynu $\vec{\Omega} = 0$, to stała C na takiej powierzchni ma taką samą wartość jak w równaniu (13.13) - jak w przepływie potencjalnym. Jest to oczywiście ważne również dla powierzchni określonej przez $\vec{v}_w \times \vec{\Omega} = 0$, a więc przykładowo na powierzchni utworzonej z wirów swobodnych w modelu linii nośnej Prandtla. Skorzystamy z tej uwagi przy omawianiu elementów teorii płata nośnego i śrub napędowych.

Tu zwrócimy jeszcze uwagę na to, że przy uwzględnieniu zależności:

$$v^2 = (\vec{v}_e + \vec{v}_w)^2 = v_e^2 + 2 \vec{v}_e \cdot \vec{v}_w + v_w^2$$

$$\vec{v}_e \cdot \vec{v} = \vec{v}_e \cdot (\vec{v}_e + \vec{v}_w) = v_e^2 + \vec{v}_e \cdot \vec{v}_w$$

równania (13.11) i (13.14) możemy zapisać następująco:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v_w^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} + \mathcal{P} + U = C(t) \quad (13.15a)$$

$$\frac{v_w^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} + \mathcal{P} + U = C \quad (13.15b)$$

We wzorze (13.15a) potencjał φ jest potencjałem przepływu absolutnego, a

$$\vec{v}_w = \vec{v} - \vec{v}_e = \nabla \varphi - \vec{v}_e$$

Wzór (13.15a) znajduje zastosowanie przy opracowywaniu modelu płata nośnego w ruchu nieustalonym.

13.3. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ CAŁEK OGÓLNYCH RÓWNAŃ RZĄDZĄCYCH PŁYNEM IDEALNYM

Jak bardzo szerokie zastosowanie w mechanice płynów znajdują całki ogólne równań rządzących płynem, przekonacie się po przejściu całego kursu wykładów, ćwiczeń, zajęć laboratoryjnych i projektowych, a ponadto później w praktyce produkcyjnej względnie w działalności badawczej. Również stosować je będziecie w innych dyscyplinach. Szereg zastosowań możecie znaleźć

w dostępnych obecnie podręcznikach mechaniki płynów [1], [2], [3]. Tu ograniczymy się tylko do przekazania kilku przykładów.

13.3.1. Pole ciśnień wytwarzane w cieczy przez źródło

Niech w pewnym punkcie nieograniczonego obszaru cieczy znajduje się źródło o wydatku Q . Należy znaleźć pole ciśnień.

Zgodnie ze wzorem (12.55) potencjał prędkości jest

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r} \quad (a)$$

a prędkość płynu indukowana przez to źródło, w sferycznym układzie współrzędnych, będzie

$$\vec{v} = \vec{e}_r \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \quad (b)$$

Ponieważ przepływ jest potencjalny, to dla wyznaczenia pola ciśnień możemy zastosować całkę Cauchy'ego-Lagrange'a. Stałą C całki najłatwiej wyznaczyć w tym przypadku - i nie tylko w tym przypadku - daleko od źródła: w nieskończoności, gdzie $\vec{v} = 0$, a ciśnienie jest równe p_0 . Dalej pominiemy ciśnienie hydrostatyczne; można je zawsze dodać. Następnie dla prostoty zakładamy, że płyn jest nieściśliwy. Wtedy przy uwzględnieniu wyrażeń (a) i (b) całka (13.2) przyjmie postać:

$$-\frac{1}{4\pi r} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 + \frac{p}{\rho} = C(t) = 0 + 0 + \frac{p_0}{\rho}$$

Stąd pole ciśnień jest

$$\frac{p-p_0}{\rho} = \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 \quad (c)$$

Jeśli źródło ma wydatek stały, to pierwszy wyraz po prawej stronie wyrażenia (c) jest równy zeru i

$$\frac{p-p_0}{\rho} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q}{4\pi r^2} \right)^2 \quad (d)$$

Wyrażenie (d) pokazuje, że:

- rozkład ciśnień w cieczy nie zależy od tego czy źródło jest dodatnie czy też w płynie znajduje się upust;
- pole ciśnień indukowane przez źródło jest proporcjonalne do gęstości płynu i kwadratu natężenia źródła;
- źródło powoduje obniżenie ciśnienia w płynie, i że to obniżenie szybko, jak r^{-4} , się zmniejsza w miarę oddalania się od źródła.

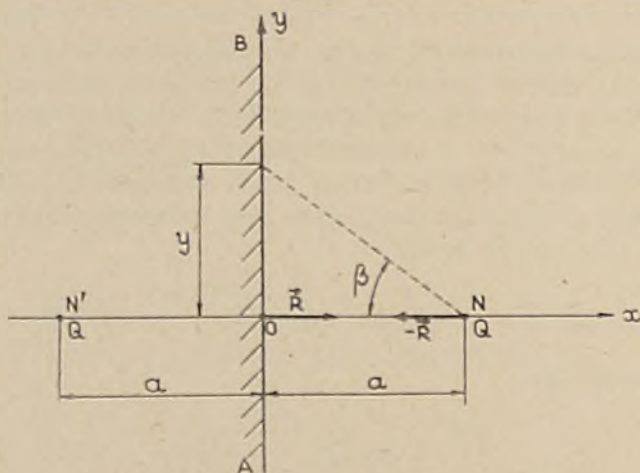
Z wyrażenia (c) widać wyraźnie wpływ niestacjonarności źródła na pole ciśnień.

Takie same postępowanie zastosujcie dla dipola, którego potencjał prędkości jest dany wzorem (12.78c). Powinniście uzyskać:

$$\frac{p-p_0}{\rho} = \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \cdot \frac{\partial \vec{m}}{\partial t} - \frac{m^2}{32\pi^2 r^6} (1 + 3 \cos^2 \alpha)$$

gdzie $\alpha = \angle(\vec{m}, \vec{r})$.

Wnioski są podobne jak dla źródła z tym, że oddziaływanie dipola hydrodynamicznego na pole ciśnień szybciej maleje przy oddalaniu się od niego niż w przypadku źródła. A co się dzieje w przypadku płaskiego źródła i dipola? Sprawdźcie to! Możecie również sprawdzić, że reakcja hydrodynamiczna działająca na rozpatrzone wyżej osobliwości hydrodynamiczne jest równa zeru. Będzie ona różna od zera wtedy, gdy źródło będzie usytuowane w pobliżu ściany. Rozpatrzmy zatem pole ciśnień na płaskiej ścianie wytworzone przez źródło płaskie znajdujące się w nieruchomej cieczy nieściśliwej, jak pokazuje rysunek 13.1.



Rys.13.1

Zgodnie ze wzorem (12.70) i metodą odbić zwierciadlanych funkcja charakterystyczna przepływu jest

$$w(z) = w_1(z) + w_2(z)$$

gdzie

$$w_1(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - a)$$

$$w_2(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z + a)$$

Stąd

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z^2 - a^2) = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\theta) = \varphi + i\psi \quad (e)$$

Stąd już łatwo można znaleźć potencjał prędkości φ i funkcję prądu ψ :

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x^2 - y^2 - a^2)^2 + 4x^2 y^2}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2} \right)$$

Składowe prędkości można wyznaczyć przy pomocy wzorów (12.23) lub wzoru (12.26). Zastosujmy ten ostatni! Mamy wyrażenie:

$$\frac{dw}{dz} = v_x - i v_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{2z}{z^2 - a^2} \quad (f)$$

wyznaczające pole prędkości w całym obszarze płynnym. Żeby znaleźć prędkość \vec{v} na ścianie AB należy podstawić do wzoru (f) wartość $z = iy$. Więc

$$v_x - i v_y = \frac{iy}{-1y^2 - a^2} \frac{Q}{\pi} = -\frac{Q}{\pi} \frac{y}{y^2 + a^2} i \quad (g)$$

Stąd widać, że składowa prędkości płynu normalna do ściany jest

$$v_n = v_x(0, y) = 0$$

czyli jest taka, jak być powinna.

Ponieważ przepływ jest ustalony, to do wyznaczenia rozkładu ciśnienia na ścianie AB możemy zastosować całkę Eulera (13.3). Pomijamy, podobnie jak w poprzednim przykładzie, siły masowe.

Wtedy:

$$\frac{p-p_0}{\rho} = -\frac{1}{2} v^2 = -\frac{Q^2}{2\pi^2} \frac{y^2}{(y^2 + a^2)^2} \quad (4)$$

Przy wprowadzeniu nowej zmiennej β jak na rysunku 13.1, to jest $y = a \operatorname{tg} \beta$, wzór (h) przyjmuje postać:

$$\frac{p-p_0}{\rho} = -\frac{1}{2} \left(\frac{Q}{2\pi a} \right)^2 \sin^2 2\beta \quad (i)$$

Wzory powyższe wykazują, że dla $y = 0$ i $y \rightarrow \infty$ ciśnienie na ścianie $p = p_0$ oraz, że największy spadek ciśnienia na ścianie ma miejsce dla $\beta = 45^\circ$ lub dla $y = a$.

Przy pomocy ogólnego wzoru (5.7a) dla reakcji hydrodynamicznej płynu idealnego

$$\vec{R} = - \int_S p \vec{n} dS$$

można określić wzajemne oddziaływanie źródła i ściany AB.

W naszym przypadku

$$dS = 1 dy \quad \vec{n} = \vec{i}$$

więc

$$\vec{R} = \vec{i} R_x = -\vec{i} \int_{-\infty}^{\infty} (p - p_0) dy$$

Uwzględniając wzór (h) lub (i) i wykonując proste całkowanie otrzymamy:

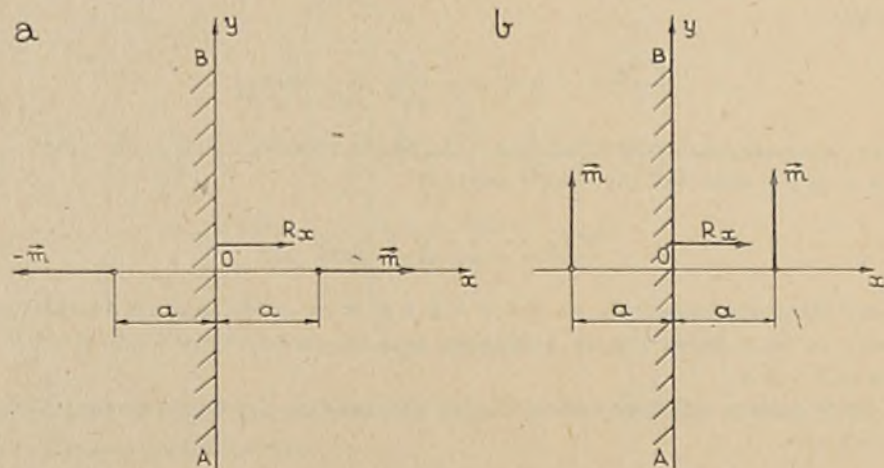
$$R_x = \frac{\rho Q^2}{4\pi a} \quad (13.16)$$

Siła hydrodynamiczna oddziaływania źródła na ścianę jest taka, że źródło usiłuje przyciągnąć do siebie nieruchomą ścianę AB. Ze strony ściany na źródło działa siła przeciwna $-R_x$. Jest to tak zwane ssące działanie źródła. Ze wzoru (13.16) widać, że jest ono tym większe, im większy jest wydatek źródła i im bliżej ściany ono się znajduje.

Jeśli źródło jest przestrzenne, to można uzyskać wzór podobny:

$$R_x = \frac{\rho Q^2}{16\pi a^2} \quad (13.17)$$

Należy bowiem pamiętać o tym, że w przypadku płaskim (wzór 13.16) siła R_x przypada na jednostkę długości płaskiej ściany AB, mierzona w kierunku osi Oz, a wydatek źródła Q ma wymiar $m^2 s^{-1}$. Natomiast we wzorze (13.17) siła R_x jest siłą całkowitą działającą na ścianę o nieograniczonych wymiarach, a wydatek Q jest mierzony w $m^3 s^{-1}$.



Rys. 13.2

Podobne postępowanie można prosto wykonać dla płaskiego i przestrzennego dipola hydrodynamicznego, przy czym dla płaskich dipoli pokazanych na rysunku 13.2a i b funkcje charakterystyczne przepływu zgodnie ze wzorem (12.82d) są:

$$\text{dla a) } w(z) = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{z-a} + \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z+a}$$

$$\text{dla b) } w_1(z) = i \frac{m}{2\pi} \left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{z+a} \right)$$

Reakcja hydrodynamiczna działająca na ścianę w obu przypadkach jest taka sama:

$$R_x = \frac{\rho m^2}{8\pi a^3} \quad (13.18)$$

Jeśli dipol pokazany na rysunku 13.2a jest dipolem przestrzennym, to

$$R_x = \frac{3\rho m^2}{32\pi a^4} \quad (13.19)$$

natomiast dla przestrzennego dipola jak na rysunku 13.2b siła przyciągania dipola do ściany jest o połowę mniejsza od siły określonej wzorem (13.19). Widzimy, że wzajemne oddziaływanie ściany i dipola ma ten sam charakter co wzajemne oddziaływanie źródła i ściany i tak być powinno. Dlaczego? Wróćcie do określenia dipola hydromechanicznego!

13.3.2. Pole ciśnień wytwarzane w cieczy przez wiry

Niech w cieczy nieściśliwej znajduje się prostoosiowy nieskończony wir o natężeniu równym cyrkulacji prędkości Γ . Zakładamy dalej, że ciecz jest nielepka i że nie ma sił masowych. Wtedy poza wirem, dla $r = r_0$, gdzie r_0 jest promieniem rurki wirowej, przepływ cieczy jest potencjalny, przy czym potencjał prędkości

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (12.97)$$

a prędkość

$$\vec{v} = \vec{e}_\theta \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (12.96)$$

Widzimy, że daleko od wiru - w nieskończoności - $\vec{v} = 0$. Ciśnienie p niech będzie, dla $r = \infty$, równe p_0 .

Stosując równanie (13.3) mamy:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho}$$

Uwzględniając wzór (12.96) ciśnienie dla $r > r_0$ będzie

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r^2} \quad (13.20)$$

Zatem obecność wiru w cieczy powoduje obniżenie ciśnienia podobnie jak źródło lub dipol hydromechaniczny. Jeśli oznaczymy przez v_w prędkość cieczy na rurce wirowej, a przez p_w ciśnienie w tym miejscu, to ze wzoru (13.20) mamy:

$$p_w = p_0 - \frac{\rho}{2} v_w^2 \quad (13.20a)$$

Nasuwa się pytanie. Jakie jest pole ciśnień wewnątrz rurki wirowej? Żeby je wyznaczyć, należy wrócić do równania ruchu cieczy. Dla rozpatrywanego modelu płynu będzie to również dobrze znane równanie Eulera

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

które dla przypadku płaskiego wiru stacjonarnego przyjmie postać:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (13.21)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Dla prostoty założymy dalej, że pole prędkości cieczy wewnątrz rozpatrywanej rurki wirowej jest takie same jak w ciele sztywnym, to jest

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\vec{i}\omega y + \vec{j}\omega x \quad (13.21a)$$

Podstawiając (13.21a) do równania (13.21) otrzymamy

$$-\omega^2 x = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$-\omega^2 y = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

Mnożąc stronami pierwsze równanie przez dx a drugie przez dy i dodając do siebie tak otrzymane równanie dostajemy:

$$\rho \omega^2 (x dx + y dy) = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy$$

Stąd

$$\frac{\rho \omega^2 r^2}{2} + C = p$$

Stałą C wyznaczymy na powierzchni rurki wirowej, dla $r = r_0$.
Zatem

$$C = p_w - \frac{\rho \omega^2 r_0^2}{2} = p_w - \frac{1}{2} \rho v_w^2$$

Więc ciśnienie wewnątrz wiru, dla $r \leq r_0$, przy uwzględnieniu wzoru (13.20a) będzie

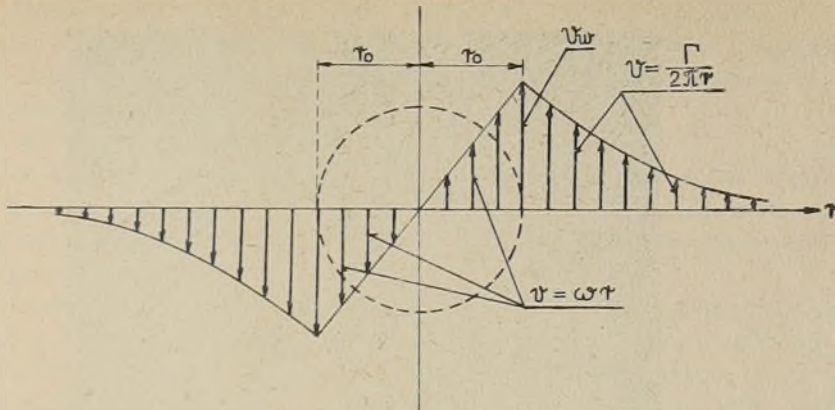
$$p = p_0 - \rho v_w^2 + \frac{\rho}{2} v^2 \quad (13.22)$$

gdzie: $v = \omega r$

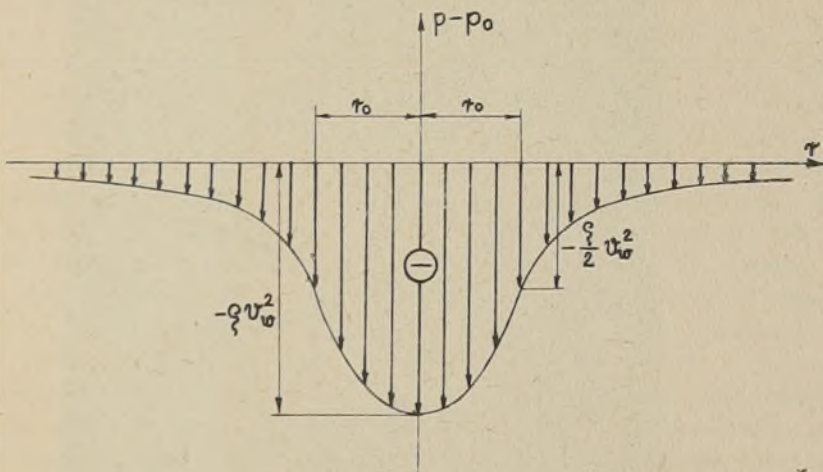
Widzimy, że dla $r = r_0$ prędkość $v = v_w$ i ciśnienie $p = p_w$ oraz że przy zbliżaniu się do osi wiru ciśnienie nadal spada osiągając wartość minimalną dla $r = 0$

$$p = p_0 - \rho v_w^2 = p_0 - \rho \omega^2 r_0^2 \quad (13.22a)$$

Na rysunku 13.3 pokazano zmianę pola prędkości indukowanej w cieczy przez wir w zależności od odległości r od osi wiru, a na rysunku 13.4 pole ciśnień określone wzorami: (13.20) dla $r \geq r_0$ i (13.22) dla $r < r_0$.



Rys.13.3



Rys.13.4

Zależność pomiędzy prędkością ω a cyrkulacją prędkości Γ można wyznaczyć z warunku równości prędkości na powierzchni wiru

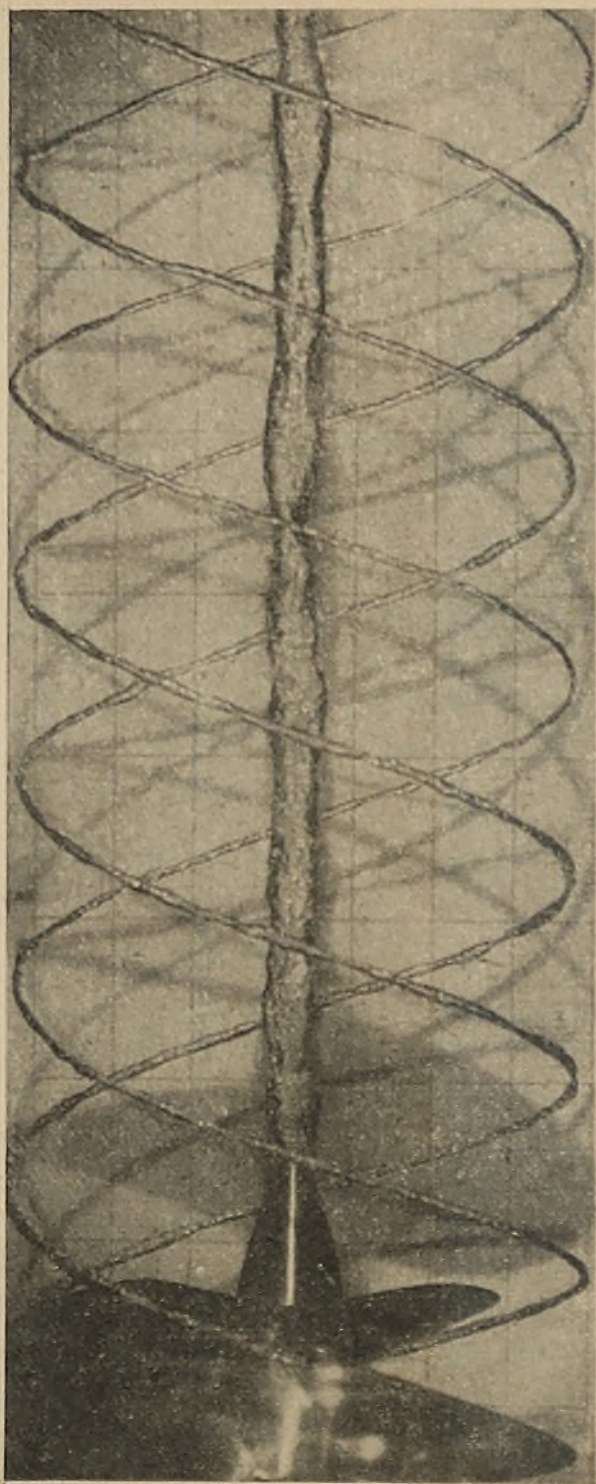
$$v_w = \omega r_0 = \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \quad (a)$$

lub z twierdzenia Stokesa mówiącego o tym, że cyrkulacja prędkości jest równa natężeniu wiru, a zatem:

$$\Gamma = \int_S \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{s} = 2\omega\pi r_0^2 \quad (b)$$

Istotnie z równań a) i b) uzyskuje się tą samą zależność:

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2}$$



Rys. 13.5

Podsumowując powyższe, podamy kilka praktycznych wniosków:

Jeśli w płynie powstanie z jakiejś przyczyny wir, to jemu towarzyszyć będzie spadek ciśnienia, przy czym ten spadek jest proporcjonalny do kwadratu natężenia wiru.

Wir ma działanie podsysające.

Jeśli na rufie statku nastąpi oderwanie przepływu, to - jak wiadomo - utworzą się w tej części kadłuba wiry, a stąd na powierzchni rufowej statku nastąpi spadek ciśnienia, który spowoduje wzrost oporu. Ten wzrost oporu nazywa się oporem wirowym.

Zmniejszenie ciśnienia w wodzie spowoduje wydzielenie pęcherzy rozpuszczonych w niej gazów - wzór (2.31) - a gdy ciśnienie spadnie poniżej ciśnienia parowania wody, to powstanie zjawisko kawitacji. Jeśli to ma miejsce, to wiry powstające w wodzie są dobrze widoczne, jak np. wiry swobodne powstające w wyniku pracy śruby napędowej. Można je obserwować w tunelach kawitacyjnych. Pokazuje je rysunek 13.5.

Przy wirach powstających w pobliżu swobodnej powierzchni wody spadek ciśnienia niekiedy może być tak znaczny, że powietrze z atmosfery wdziera się do tych wirów. To zjawisko nazywa się wentylacją, zapowietrzeniem lub niekiedy aeracją. Można je w praktyce obserwować przy ruchu płatów nośnych pracujących w pobliżu swobodnej powierzchni wody lub przecinających tę swobodną powierzchnię. A zatem przy płytce zanurzonych śrubach napędowych szybkich jednostek, na płytce zanurzonych płatach nośnych wodolotów oraz na sterach przecinających swobodną powierzchnię, kiedy zostaną wychylone o duży kąt. Zjawisko to jest niekorzystne. Towarzyszy jemu spadek siły nośnej. Przykładowo na wodolotach to zmniejszenie siły nośnej spowoduje wzrost zanurzenia płatów, wzrost ciśnienia hydrostatycznego na płatach zamknięcie zapowietrzenia i ponowny wzrost siły nośnej, a stąd ponowne wynurzenie wodolotu i znów zapowietrzenie płatów. W wyniku powstaje niestacyczny ruch wodolotu zwany „galopowaniem”. Zapobiega się temu zjawisku albo przez odpowiednie profilowanie płatów nośnych, lub niekiedy przez stosowanie płytek poprzecznych na płatach, prostopadłych do krawędzi natarcia. Podobnie jak nie zawsze zjawisko oderwania przepływu jest niekorzystne, tak również niekiedy specjalnie stosuje się sztuczną, kontrolowaną jednak wentylację płatów lub śrub napędowych. Sztuczną wentylację płatów stosuje się w celu kontrolowania siły nośnej płatów nośnych dla stabilizacji wodolotu na sfalowanym morzu, a kontrolowaną wentylację śrub napędowych wtedy, gdy nie można uniknąć ich kawitacji. Problem wentylacji tych obiektów w obecnym stanie wiedzy rozwiązuje się na drodze badań modelowych.

13.3.3. Współczynniki ciśnienia. Siła nośna

W praktycznej działalności okazuje się wygodniejszym przedstawianie wyników obliczeń względnie wyników badań eksperymentalnych w postaci bezwymiarowej. Zamiast reakcji hydrodynamicznej \vec{R} stosuje się współczynnik siły

$$\vec{C}_R = \frac{1}{S} \frac{1}{\rho} \int_S \vec{p}_n \, dS \quad (13.23)$$

a zamiast ciśnienia p współczynnik ciśnienia:

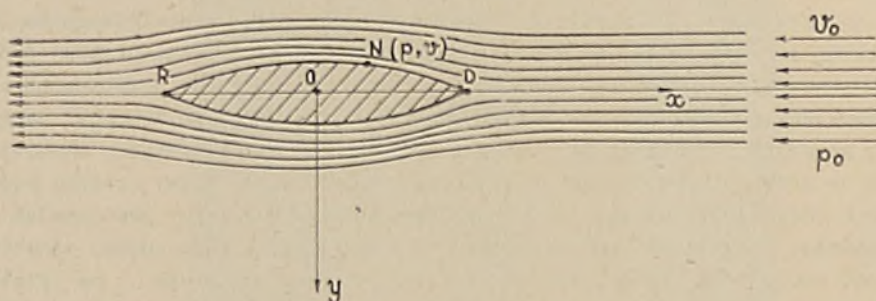
$$c_p = \frac{\Delta p}{q} = \bar{p} = \frac{p - p_0}{q} \quad (13.24)$$

gdzie:

$$q = \frac{1}{2} \rho v_0^2 - \text{ciśnienie spiętrzenia.}$$

W zależności od rozpatrywanych zagadnień wyrażenie dla współczynnika ciśnienia przyjmuje różne postacie. Rozpatrzmy najpierw dla prostoty przypadek ustalonego opływu ciała nieruchomego strugą jednorodną płynu idealnego, jak na rysunku 13.6. Daleko przed opływającym ciałem prędkość płynu jest v_0 , a ciśnienie $p = p_0$. Ponieważ przepływ jest ustalony, to do wyznaczenia ciśnienia w dowolnym punkcie N opływającego ciała, gdzie prędkość i ciśnienie są odpowiednio równe \vec{v} i p , możemy zastosować całkę Bernoulliego (13.3). Zauważmy, że ciało opływane jest nieruchome. Zatem:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$$



Rys. 13.6

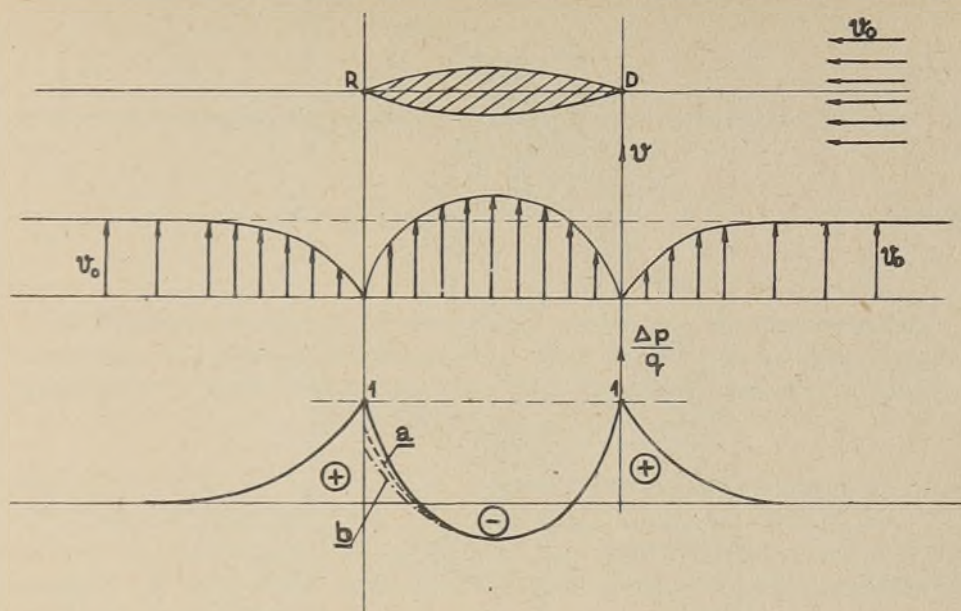
więc

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{v^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \right]$$

i współczynnik ciśnienia w dowolnym miejscu powierzchni opływającego ciała będzie

$$\bar{p} = \frac{\Delta p}{q} = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = 1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \quad (13.25)$$

Widzimy, że daleko przed opływającym ciałem $v = v_0$ i $\bar{p} = 0$. W płynie idealnym, również daleko za ciałem głęboko zanurzonym w cieczy $p = p_0$ i $v = v_0$, więc także współczynnik ciśnienia jest równy zero. W punktach D i R , na dziobie i rufie prędkość $v = 0$ i współczynnik ciśnienia jest równy 1. Wykres poglądowy prędkości i ciśnień dla tego przypadku pokazuje rysunek 13.7. Widać z niego, że w środkowej części ciała prędkość jest większa niż prędkość strugi jednorodnej oraz że odpowiadający tej prędkości współczynnik ciśnienia ma wartości ujemne.



Rys.13.7

Przedstawiony wyżej charakter rozkładu ciśnień jest taki sam dla różnych opływanych ciał. W przypadku opływu ciał płynem lepkiem bez oderwania przepływu eksperymenty wykazują, że lepkość ma praktyczny wpływ na rozkład ciśnień tylko w części rufowej, części spływu opływającego ciała. Poglądowo pokazuje to krzywa a na rysunku 13.7. Mamy zatem w tej części ciała spadek ciśnienia. Dalszy spadek ciśnienia w tej części, krzywa b, wystąpi wtedy, gdy będzie mieć miejsce oderwanie przepływu i powstaną wiry. Te spadki ciśnień pomnożone przez elementy powierzchni opływającego ciała i posumowane po całej powierzchni dadzą w wyniku reakcję hydrodynamiczną o kierunku prędkości v_0 , zwaną oporem ciśnienia. Dla ilustracji rozkładu współczynnika ciśnienia na kadłubie statku, na rysunku 13.8 pokazano wyniki badań modelowych.

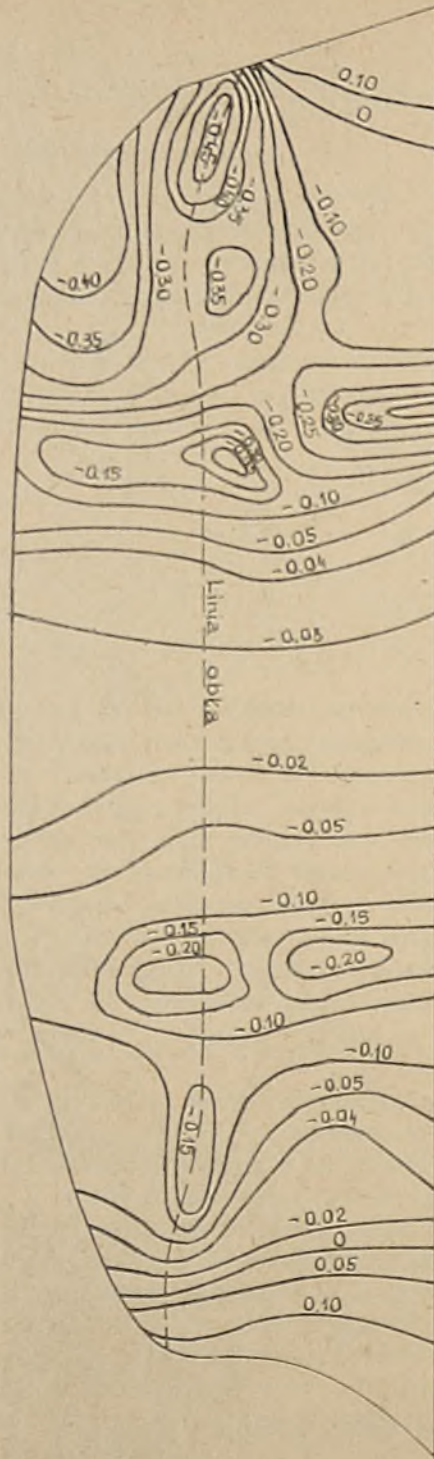
Rozpatrzmy teraz drugi przypadek. Niech to samo ciało jak na rysunku 13.6 porusza się ze stałą prędkością $\vec{v}_e = i \vec{v}_0$ w nieruchomym płynie o tych samych charakterystykach jak w przypadku pierwszym. Przepływ płynu indukowany przez to ciało będzie przepływem ustalonym w układzie odniesienia związanym z tym ciałem. Zatem do znalezienia pola ciśnień i współczynnika ciśnienia możemy zastosować wzór (13.14) zauważając, że daleko przed ciałem prędkość płynu jest równa zero, a ciśnienie jest p_0 . Więc

$$\frac{v^2}{2} - \vec{v}_e \cdot \vec{v} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} \quad (13.26)$$

Ale

$$v^2 = v_e^2 + v_w^2 + 2 \vec{v}_e \cdot \vec{v}_w$$

$$\vec{v}_e \cdot \vec{v} = v_e^2 + \vec{v}_e \cdot \vec{v}_w$$



Rys. 13.8

Uwzględniając powyższe wyrażenia wzór (13.26) można zapisać

$$\frac{v_w^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} \quad (13.27)$$

przy czym, w naszym przypadku, $\vec{v}_e = \vec{i} v_0$. Stąd współczynnik ciśnienia będzie

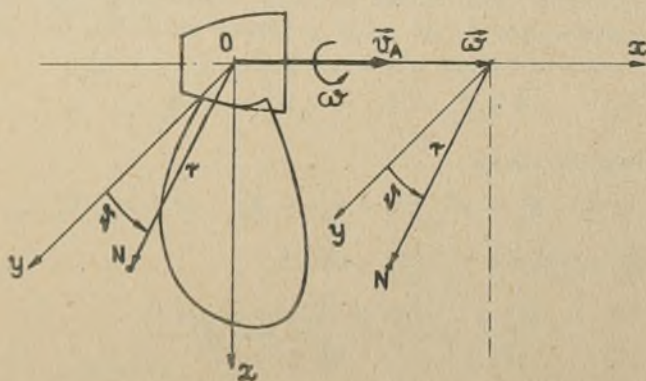
$$\bar{p} = \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = 1 - \left(\frac{v_w}{v_0} \right)^2 \quad (13.28)$$

Na podstawie wzoru (13.28) powinniśmy - zgodnie z metodą odwracania przepływów - uzyskać te same wartości, jakie uzyskaliśmy ze wzoru (13.25). Sprawdźmy to! Daleko przed ciałem prędkość absolutna płynu $\vec{v} = 0$. Więc

$$\vec{v} = 0 = \vec{v}_e + \vec{v}_w$$

Stąd $\vec{v}_w = -\vec{v}_e = -\vec{i} v_0$ i zgodnie z (13.28) współczynnik ciśnienia jest równy zero. W punktach D i R opływającego ciała $\vec{v} = \vec{v}_e$, a zatem $\vec{v}_w = 0$ i znów $\bar{p} = 1$, czyli jest tak, jak powinno być. Zauważmy, że we wzorze (13.25) prędkość \vec{v} jest także prędkością względną, prędkością płynu względem nieruchomego ciała.

Ciekawszym przypadkiem zastosowania całki Bernoulli'ego w ruchomym układzie odniesienia jest śruba napędowa statku. Przyjęto stosowanie w tym przypadku albo układu ruchomego związanego z poruszającą się śrubą napędową z prędkością v_A w kierunku osi Ox i jednocześnie obracającą się z prędkością kątową $\vec{\omega} = \vec{e}_x \omega$, albo przepływu częściowo odwróconego. Polega on na tym, że układ ruchomy Oxyz tylko obraca się z prędkością kątową śruby napędowej $\vec{\omega} = \vec{e}_x \omega$ i znajduje się w strudze jednorodnej napływającej z nieskończoności z prędkością $\vec{v} = -\vec{e}_x v_A$. Pierwszy przypadek pokazany jest na rysunku 13.9. Gdy prędkości: $\vec{\omega}$ i \vec{v}_A są stałe, to przepływ wody w układzie ruchomym jest ustalony i pole ciśnień określaają wyrażenia: (13.26), (13.27). Lecz teraz prędkość unoszenia $\vec{v}_e = \vec{e}_x v_A + \vec{e}_\theta \omega r$ więc $v_e^2 = v_A^2 + (\omega r)^2$.



Rys.13.9

Uwzględniając powyższe, wzór (13.27) przybierze postacie:

$$\frac{v_w^2}{2} - \frac{(\omega r)^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} \quad (13.29a)$$

$$\frac{v_w^2}{2} - \frac{(\omega r)^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} \quad (13.29b)$$

Zauważmy jeszcze to, że stosując ten sam sposób postępowania jak przy wprowadzaniu wzoru (13.27) możemy całkę Bernoulliego (13.14) zapisać tak:

$$\frac{v_w^2}{2} - \frac{v_e^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C \quad (13.30)$$

Zastosujemy ten wzór dla drugiego przypadku układu ruchomego śruby napędowej. Daleko przed śrubą teraz mamy:

$$\vec{v} = -\vec{e}_x v_A \quad \text{oraz} \quad p = p_0$$

natomiast $\vec{v}_e = \vec{e}_\theta \omega r$

Więc stała C w całce (13.30) będzie:

$$C = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_{w\infty}^2}{2} - \frac{v_{e\infty}^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} \left[-\vec{e}_x v_A - \vec{e}_\theta (\omega r)^2 \right]^2 - \frac{(\omega r)^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_A^2}{2}$$

Uwzględniając to, uzyskamy wzór taki sam jak (13.29b). Potwierdza to możliwość częściowego odwracania przepływów.

Ze wzoru (13.29a) lub (13.29b) możemy znaleźć współczynnik ciśnienia w postaci:

$$C_p = \bar{p} = \frac{p - p_0}{\frac{\rho}{2} [v_A^2 + (\omega r)^2]} = 1 - \frac{v_w^2}{v_A^2 + (\omega r)^2} = \frac{v_A^2 + (\omega r)^2 - v_w^2}{v_A^2 + (\omega r)^2} \quad (13.31)$$

Wzorowi (13.31) można nadać różne postacie w zależności od rozpatrywanych zagadnień szczegółowych. I tak jeśli prędkość absolutną przepływu - indukowaną przez śrubę - zapisze się w postaci:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 = -\vec{e}_x v_a + \vec{e}_\theta v_u + \vec{e}_r v_r \quad (13.32a)$$

to prędkość względna jest

$$\vec{v}_w = \vec{v}_1 - \vec{v}_e = -\vec{e}_x (v_a + v_a) - \vec{e}_\theta (\omega r - v_u) + \vec{e}_r v_r \quad (13.32b)$$

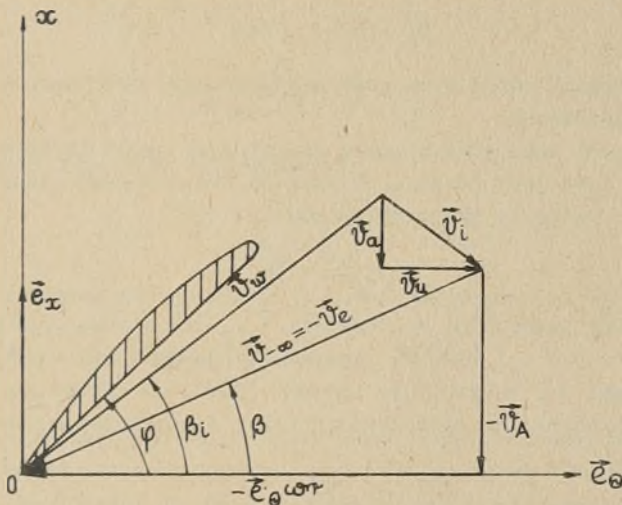
a współczynnik ciśnienia (13.31) będzie:

$$C_p = - \frac{v^2 + 2(v_a v_a - v_u \omega r)}{v_A^2 + (\omega r)^2} \quad (13.32c)$$

We wzorze (13.32a) poszczególne składowe prędkości indukowane mają nazwy następujące:

- v_a - osiowa prędkość indukowana
- v_u - obwodowa prędkość indukowana
- v_r - promieniowa prędkość indukowana.

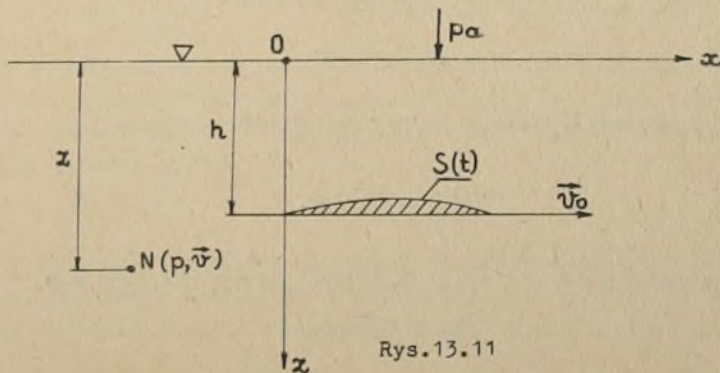
Przy pominięciu prędkości v_r wykres prędkości danych wzorem (13.32b) na przekroju skrzydła walcem o promieniu r , współosiowym z osią śruby, jest taki jak na rysunku 13.10. Znalazł on szerokie zastosowanie w teorii śrub napędowych.



Rys.13.10

Jako następny przykład rozpatrzmy cienkie ciało - płat nośny o odkształcalnej powierzchni, $S(t)$, poruszający się ze stałą prędkością $\vec{v}_e = \vec{i} v_0$ pod swobodną powierzchnią wody. Założymy, że przepływ jest potencjalny i że prędkości indukowane w wodzie są małe. Wtedy do wyznaczenia ciśnienia p w dowolnym punkcie N (rysunek 13.11) możemy zastosować całkę Cauchy'ego-Lagrange'a (13.10):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{p}{\rho} - gz = \frac{p_a}{\rho}$$



Rys.13.11

Stałą C wyznaczyliśmy daleko przed poruszającym się ciałem dla $z=0$. Założenie małych prędkości indukowanych upoważnia nas do pominięcia kwadratów tych prędkości: $(\nabla\varphi)^2 \approx 0$. Po uwzględnieniu tego założenia już prosto znajduje się współczynnik ciśnienia. Jest on równy:

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = \frac{2}{v_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{2}{v_0^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (13.33)$$

Gdy ciało jest nieodkształcalne, to ostatni wyraz jest równy zeru. W powyższym wzorze:

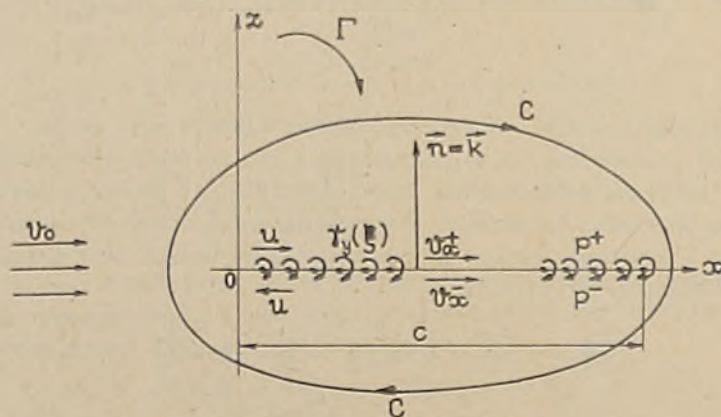
$$p_0 = p_a + \rho g z$$

W podobny sposób można wyznaczyć współczynniki ciśnienia dla innych zadań hydromechanicznych.

Dla ilustracji tego stwierdzenia rozpatrzmy jeden użyteczny praktycznie przykład. Jaka jest różnica ciśnień po obu stronach płaskiej powierzchni wirowej o gęstości natężenia wirów

$$\gamma_y(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} \quad (12.106)$$

opływanej strugą jednorodną o prędkości $\vec{I} v_0$ lub poruszającej się ze stałą prędkością $\vec{v}_e = -\vec{I} v_0$? Przekrój poprzeczny powierzchni wirowej jest odcinkiem $\langle 0, c \rangle$ osi Ox . Pokazuje go rysunek 13.12, na którym zaznaczono także prędkości i ciśnienia na górnej-dodatniej i dolnej-ujemnej warstwie wirowej.



Rys. 13.12

Zgodnie z twierdzeniem Stokesa (3.94) cyrkulacja prędkości

$$\Gamma = \int_0^c \gamma_y(\xi) d\xi \quad (13.34)$$

Uwzględniając dalej, że $\vec{n} = \vec{k}$, na podstawie wzoru (12.109) mamy

$$\gamma_y = v_x^+ - v_x^- \quad (13.34a)$$

przy czym

$$v_x^+ = v_0 + u \quad v_x^- = v_0 - u \quad (13.24b)$$

Stąd

$$\gamma_y(\xi) = 2u \quad u = \frac{1}{2} \gamma_y(\xi) \quad (13.34c)$$

Ponieważ przepływ na warstwie wirowej jest ustalony, to do wyznaczenia ciśnień p^+ i p^- oraz $\Delta p = p^+ - p^-$ można zastosować całkę Bernoulliego (13.7).
Wzrost

$$\frac{p^+}{\rho} + \frac{(v_0 + u)^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} \quad (13.35)$$

$$\frac{p^-}{\rho} + \frac{(v_0 - u)^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}$$

Wykonując proste działania uzyskamy wzór

$$c_p = \frac{\Delta p}{q} = \frac{p^+ - p^-}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = -4 \frac{u}{v_0} \quad (13.35a)$$

który przy uwzględnieniu wyrażenia (13.34c) można zapisać w postaci

$$\frac{\Delta p}{q} = \frac{p^+ - p^-}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = -2 \frac{\gamma_y(\xi)}{v_0} \quad (13.35b)$$

Znając różnicę ciśnień po obu stronach powierzchni wirowej można obliczyć reakcję hydromechaniczną działającą na tę powierzchnię. Według założenia płyn jest nielepekki. Wzrost do wyznaczenia \vec{R} można zastosować wzór (5.7a):

$$\vec{R} = - \int_S \vec{n} p \, dS = - \int_S p \, d\vec{S}$$

Obliczmy reakcję płynu działającą na jednostkę długości powierzchni wirowej. Tak robimy, bo powierzchnia ta ma długość nieskończoną. Uwzględniając to, mamy:

$$dS = 1 \, d\xi \quad d\vec{S}^+ = \vec{k} \, dS \quad d\vec{S}^- = -\vec{k} \, dS$$

$$\vec{R} = -\rho \int_0^c \frac{\Delta p}{q} \vec{k} \, d\xi = \rho v_0 \vec{k} \int_0^c \gamma_y(\xi) \, d\xi = \rho v_0 \Gamma \vec{k}$$

Wzrost reakcja działająca na jednostkę długości warstwy wirowej o cyrkulacji Γ , opływanej strugą jednorodną, ma kierunek osi Oz i jest proporcjonalna do gęstości płynu, prędkości strugi jednorodnej oraz do całkowitego natężenia wirów warstwy wirowej. Wzrost

$$R_z = L = \rho v_0 \Gamma \quad (13.36)$$

nazywa się wzorem lub niekiedy prawem Kutty i Żukowskiego, a reakcja R_z - siłą nośną. Znaczenie praktyczne tego wzoru polega na tym, że warstwę wirową można zastąpić cienką, słabo wygiętą płytą nośną o nieskończonej roz-

piętości. Tu zaleca się wrócić do tekstu na stronach 58 i 19 części I. W przypadku płata o skończonej rozpiętości natężenie wirów zmienia się wzdłuż jego rozpiętości: $\Gamma = \Gamma(\eta)$ i wzór na siłę nośną takiego płata będzie

$$R_z = \rho v_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(\eta) d\eta \quad (13.36a)$$

Model wirowy takiego płata nośnego pokazano już na rysunku 12.23. Przedstawiony wyżej tok postępowania przy wyprowadzaniu wzoru (13.36) jest jednym z możliwych. Również wzór (13.35a) można uzyskać w inny sposób, rozpatrując zamiast opływu warstwy wirowej jej ruchu z prędkością $\vec{v}_e = \vec{I} v_0$ w płynie nieruchomym. Wtedy jednak do wyznaczenia różnicy ciśnień $\Delta p = p^+ - p^-$ należy zastosować całkę Bernoulliego wyrażoną w ruchomym układzie odniesienia (13.14):

$$\frac{v^2}{2} - \vec{v}_e \cdot \vec{v} + \frac{p}{\rho} = C$$

Na górnej stronie warstwy wirowej prędkość absolutna płynu jest $\vec{v} = \vec{I} u$, a na dolnej $\vec{v} = -\vec{I} u$, co zaznaczono na rysunku 13.12. Daleko zaś przed warstwą prędkość $\vec{v} = 0$, a ciśnienie $p = p_0$. Stąd dla górnej warstwy wirowej mamy:

$$\frac{u^2}{2} + v_0 u + \frac{p^+}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}$$

i analogicznie dla dolnej strony tej warstwy:

$$\frac{u^2}{2} - v_0 u + \frac{p^-}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}$$

Obliczając dalej współczynnik ciśnienia C_p otrzymany wzór (13.35a).

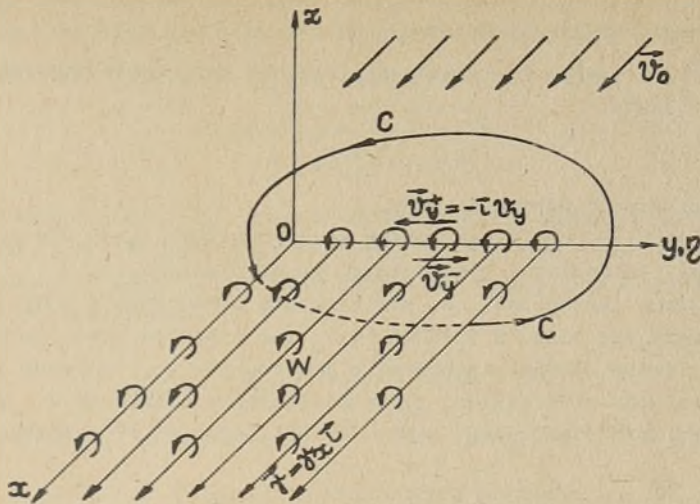
Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład opływu powierzchni wirowej strugą jednorodną. Niech powierzchnia wirowa w , utworzona z prostych linii wirowych o natężeniu $\gamma_x(\eta)$, biorących swój początek na osi Oy , będzie opływana strugą jednorodną $\vec{v}_0 = \vec{I} v_0$, tak jak na rysunku 13.12a. Zgodnie ze wzorem (12.110a) związek pomiędzy gęstością rozkładu wirów a prędkościami indukowanymi przez rozpatrywaną powierzchnię wirową jest:

$$\gamma_x(\eta) = v_y^- - v_y^+ = 2 v_y(\eta)$$

Cyrkulacja prędkości po pętli C jest

$$\Gamma_c = \int_0^c \gamma_x(\eta) d\eta$$

Wyznamy podobnie jak w poprzednim przykładzie różnicę ciśnień działających na dodatnią i ujemną stronę powierzchni wirowej w . Powierzchnia wirowa jest jednocześnie powierzchnią prądu i stała C we wzorze (13.7) jest taka sama na tej powierzchni jak i daleko przed nią. Więc zgodnie z tym możemy napisać:



Rys. 13.12a

$$\frac{p^+}{\rho} + \frac{(\vec{i} v_0 - \vec{j} v_y)^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2}$$

lub

$$\frac{p^+}{\rho} + \frac{v_y^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} \quad (13.37)$$

Podobnie dla ujemnej powierzchni W

$$\frac{p^-}{\rho} + \frac{(\vec{i} v_0 + \vec{j} v_y)^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2}$$

lub

$$\frac{p^-}{\rho} + \frac{v_y^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} \quad (13.37a)$$

Zatem po obu stronach powierzchni wirowej w tym przypadku ciśnienia są takie same.

Należy zauważyć przy tym, że ponieważ według założenia v_y jest funkcją współrzędnej η , to także ciśnienia p^+ i p^- zależą od współrzędnej η . Lecz na tak opływanej powierzchni wirowej zgodnie z ogólnym wzorem dla reakcji hydromechanicznych nie będzie działała żadna siła. Na powierzchnię wirową utworzoną z wirów swobodnych w modelu linii nośnej Prandtla nie działa żadna siła. I tak być powinno. Siła nośna może działać tylko na płat nośny, tam gdzie wystąpi różnica ciśnień po obu stronach płata. Płat nośny o nieskończonym wydłużeniu można stąd zastąpić powierzchnią wirową taką jak w poprzednim przykładzie. Tam osi wirów są prostopadłe do \vec{v}_0 .

13.3.4. Warunek uniknięcia kawitacji

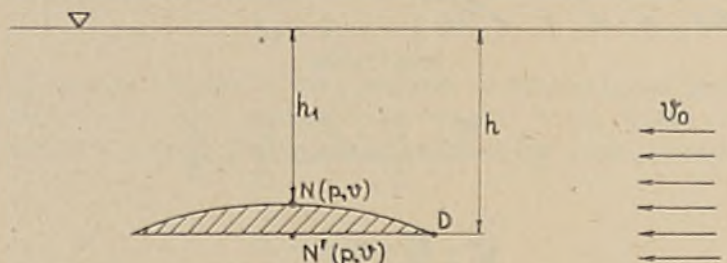
W punkcie 2.6 części I sformułowano warunek uniknięcia kawitacji w postaci wzoru (2.29):

$$P > P_v$$

gdzie p_v - ciśnienie parowania wody.

Przy pomocy całki Bernoulliego możemy temu warunkowi nadać bardziej konkretną postać, przydatną w praktycznych zastosowaniach.

Niech zatem na głębokości h pod swobodną powierzchnią wody - rysunek 13.13 - porusza się ciało z prędkością v_0 lub niech to samo nieruchome ciało będzie opływane strugą jednorodną o prędkości - v_0 . Ponieważ ciało jest nieruchome, a woda nieściśliwa, to do znalezienia ciśnienia w dowolnym punkcie ciała można zastosować całkę Bernoulliego (13.7) w postaci (13.3).



Rys. 13.13

Stałą C wyznaczmy w punkcie spiętrzenia D ciała, znajdującego się na głębokości h , gdzie $\vec{v} = 0$, $p_D = p_a + \rho g h + \frac{\rho v_0^2}{2}$. Więc:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - g h_1 = \frac{p_D}{\rho} - g h$$

Stąd nierówność:

$$p = p_a + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho (v_0^2 - v^2) > p_v$$

mówiąca o tym, że ciśnienie na opływającym ciele musi być większe od ciśnienia parowania wody.

Wprowadzając pojęcie liczby kawitacyjnej

$$\sigma = \frac{p_a + \rho g h_1 - p_v}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} \quad (13.38)$$

powyższy warunek uniknięcia kawitacji można zapisać:

$$\sigma > \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 - 1 \quad (13.39a)$$

$$\text{lub} \quad \sigma > -C_p \quad \sigma > \xi \quad (13.39b)$$

gdzie: $\xi = -C_p$ nazywa się współczynnikiem rozrzedzenia.

W przypadku śrub napędowych liczbę kawitacyjną tworzy się w ten sam sposób jak współczynnik ciśnienia określony wzorem (13.31). Wtedy liczba kawitacyjna ma postać:

$$\sigma = \frac{p_a + \rho g h_1 - p_v}{\frac{1}{2} \rho [v_A^2 + (\omega r)^2]} \quad (13.38a)$$

gdzie h_1 oznacza zanurzenie rozpatrywanego profilu skrzydła śruby w położeniu znajdującym się najbliższej swobodnej powierzchni wody. Spotyka się również inne określenia liczb kawitacyjnych, stosowanych w empirycznych kryteriach kawitacyjnych:

$$\sigma_0 = \frac{p_a + \gamma h_w - p_v}{\frac{1}{2} \rho v_A^2} \quad (13.38b)$$

$$\sigma_{0,7} = \frac{p_a + \gamma h_w - 0,7 \gamma R - p_v}{\frac{\rho}{2} [v_A^2 + (0,7 \pi D n)^2]} \quad (13.38c)$$

gdzie: h_w - zanurzenie osi wału śrubowego;

R - promień śruby napędowej;

D - średnica śruby napędowej.

Na zajęciach projektowych zdobędziecie praktykę w zastosowaniu powyżej podanych liczb kawitacyjnych.

Wracając do warunku uniknięcia kawitacji (13.39a), należy podkreślić, że musi on być wypełniony w każdym miejscu opływającego wodą ciała; przykładowo na obu stronach profilu: grzbietowej - punkty N i spodniej - punkty N' na rysunku 13.13. Stąd konieczna jest znajomość rozkładu współczynnika ciśnienia po całej powierzchni opływającego ciała. Całki ogólne równań ruchu płynu pozwalają nam na znalezienie wyrażenia dla konkretnych zadań. Tu przykładowo napiszemy te wyrażenia dla strony dodatniej i ujemnej powierzchni wirowej pokazanej na rysunku 13.12. Z równań (13.35) mamy:

$$c_p^+ = \frac{p^+ - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = - \left(\frac{u}{v_0} \right)^2 - 2 \frac{u}{v_0} \quad (13.40a)$$

$$c_p^- = \frac{p^- - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = - \left(\frac{u}{v_0} \right)^2 + 2 \frac{u}{v_0} \quad (13.40b)$$

gdzie: $u = \frac{1}{2} \gamma_y(\xi)$

Jeśli rozpatruje się zagadnienie liniowe, w którym zakłada się, że prędkości indukowane u są małe w stosunku do v_0 , to wzory (13.40) przyjmą postać:

$$c_p^+ = - \frac{\gamma_y}{v_0} \quad (13.41a)$$

$$C_p^- = \frac{\delta_y}{v_0} \quad (13.41b)$$

Powyższe wzory podają rozkłady ciśnień spowodowane tylko warstwą wirową. W rzeczywistym profilu płata należy jeszcze uwzględnić rozkład ciśnień wywołany skończoną grubością. Można go znaleźć stosując w tym przypadku wzór (13.33). Wtedy rzeczywisty rozkład ciśnień - w ujęciu liniowym - będzie sumą wyrażeń (13.33) i (13.41):

$$C_p^+ = \frac{p^+ - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = \left(\frac{2}{v_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=z^+} - \frac{\gamma_y(x)}{v_0} \quad (13.42a)$$

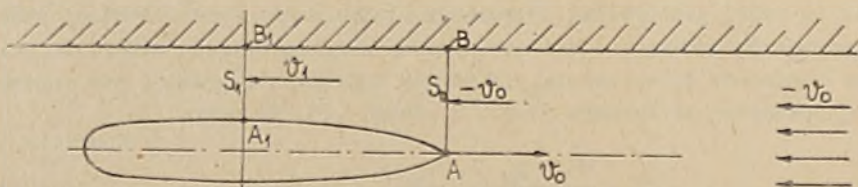
$$C_p^- = \frac{p^- - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = \left(\frac{2}{v_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{2}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=z^-} + \frac{\gamma_y(x)}{v_0} \quad (13.42b)$$

gdzie: z^+ - jest rzędną dodatniej strony profilu,
 z^- - jest stroną ujemną profilu.

W praktycznych obliczeniach przeważnie stosuje się uproszczenie $z = z^+ = z^- = 0$.

13.3.5. Zastosowanie całki Bernoulliego do oceny jakościowej zjawisk hydromechanicznych

Całka Bernoulliego w połączeniu z równaniem ciągłości znajduje szerokie zastosowanie w praktyce inżynierskiej do jakościowego przewidywania zachowania się różnych obiektów w różnych warunkach. Zilustrujemy to kilkoma przykładami z zakresu okrętownictwa.



Rys.13.14

Niech statek porusza się ze stałą prędkością wzdłuż płaskiej ściany, jak na rysunku 13.14. Zatem przepływ możemy odwrócić i rozpatrzeć statek nieruchomy opływany strugą jednorodną o prędkości $-v_0$. Niech pole przekroju AB pokazanego na rysunku 13.14 będzie S_2 , a prędkość na tym przekroju v . Odpowiednie wielkości dla przekroju A_1B_1 niech będą S_1 i v_1 . Z równania ciągłości mamy:

$$\rho S v = \rho S_1 v_1$$

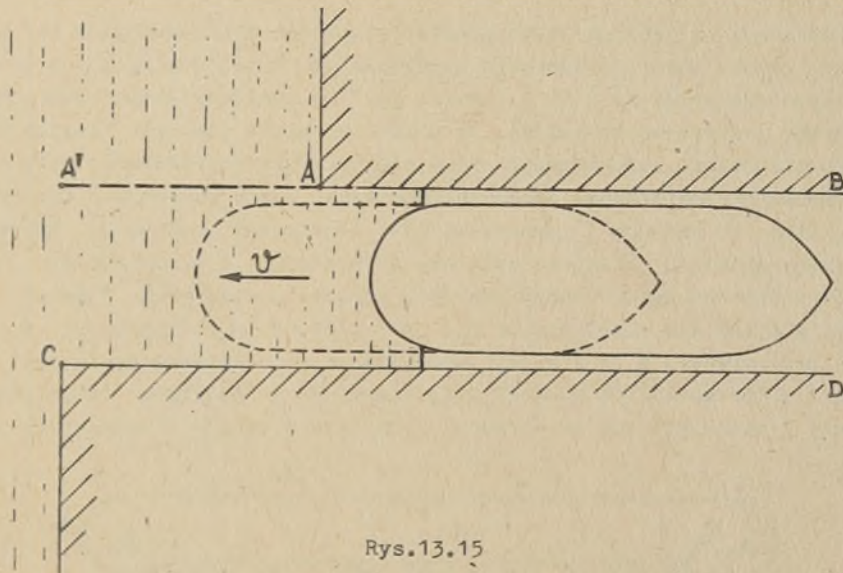
Stąd prędkość v_1 w przekroju A_1B_1 jest

$$v_1 = \frac{S}{S_1} v \quad (a)$$

Ponieważ $S > S_1$, to $v_1 > v$. Przy zmniejszeniu się przekroju ma miejsce wzrost prędkości. A co się dzieje z ciśnieniem? Możemy je wyznaczyć z całki Bernoulliego. Przy pominięciu sił masowych mamy:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} \quad (b)$$

Ponieważ $v_1 > v$, to $p_1 < p$ i w przekroju A_1B_1 wystąpi spadek ciśnienia. Spowoduje to powstanie reakcji hydromechanicznej działającej na statek, a skierowanej ku ścianie. Na ścianę oczywiście będzie działać reakcja hydrodynamiczna o tym samym module lecz przeciwnie skierowana. Wystąpi tu znane zjawisko „przysysania” statku do ściany. Ponieważ dalej część rufowa i część dziobowa kadłuba statku są różnie odkształtowane, to na tych częściach spadki ciśnień będą inne i powstanie oprócz reakcji \vec{R} jeszcze moment hydrodynamiczny \vec{M} starający się statek obrócić.

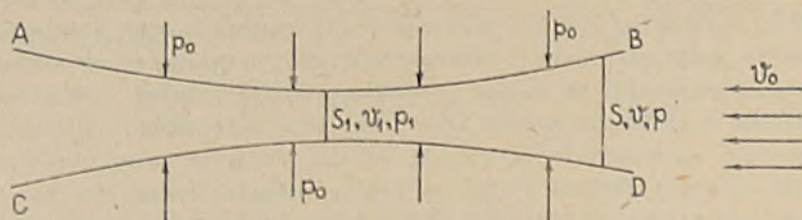


Rys.13.15

Podobne zjawisko przysysania statku do ściany z jednoczesnym obrotem może wystąpić podczas wodowania statku z pochylni, jak na rysunku 13.15. Aby uniknąć tego niekorzystnego zjawiska, należy ścianę pochylni AB przedłużyć na czas wodowania - linia przerywana AA' na rysunku 13.15 - tak, aby zaistniała symetria przepływu podczas tego procesu.

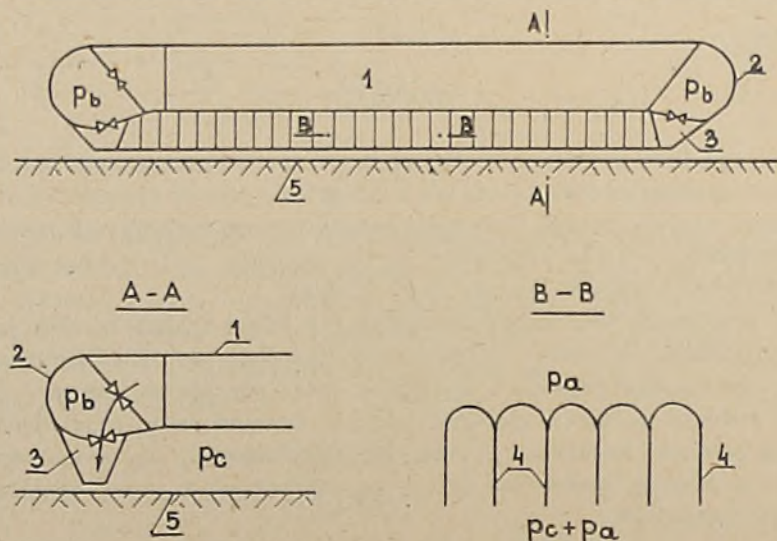
Z tymi problemami wzajemnego oddziaływania ścian i statków oraz wzajemnego oddziaływania na siebie statków mają często do czynienia kapitanowie podczas manewrów wyprzedzania i wymijania oraz, gdy statek płynie z pochyleniem rufowym na bardzo płytkiej wodzie. Również takie oddziaływanie ma miejsce pomiędzy kadłubami statków wielokadłubowych, np. katamaranów. Spróbujcie w podobny sposób jak wyżej, to oddziaływanie w poszczególnych przypadkach uzasadnić.

Podobne ssące działanie ściany ma miejsce, jak już wiemy, w przypadku źródła lub dipola usytuowanego przy ścianie. Powstaje w związku z tym pytanie: czy obiektu w płynie nie można zastąpić pewnym rozkładem źródeł i/lub dipoli rozłożonych w obszarze obiektu lub na jego powierzchni? Okazuje się, że można tak postąpić. Jak to praktycznie się wykonuje - będzie to tematem dalszych wykładów.



Rys. 13.16

Tu wskazywaliśmy jeszcze jedno praktyczne zastosowanie związków (a) i (b). Przy ich pomocy można wytłumaczyć zwieranie się dwóch elastycznych powłok nieprzepuszczalnych: AB i CD - rysunek 13.16 - pomiędzy które wdmuchuje się strugę jednorodną powietrza. To proste zjawisko znalazło zastosowanie przy konstruowaniu segmentowych osłon elastycznych poduszkowca, osłaniających poduszkę powietrzną. Schematycznie taką osłonę pokazuje rysunek 13.17. Otóż do kadłuba 1 zamocowana jest elastyczna powłoka 2 tworząca elastyczny zbiornik powietrza zasilany bezpośrednio z wentylatorów lub z kanałów powietrza usytuowanych wewnątrz kadłuba poduszkowca. Ciśnienie powietrza w zbiorniku elastycznym, p_b , jest większe od ciśnienia p_c w poduszce powietrznej, a to z kolei jest większe od ciśnienia powietrza na zewnątrz poduszkowca. Do powłoki elastycznej 2 są umocowane elastyczne segmenty 3 zwężające się ku ekranowi 5. Boczne ściany 4 elastycznych seg-



Rys. 13.17

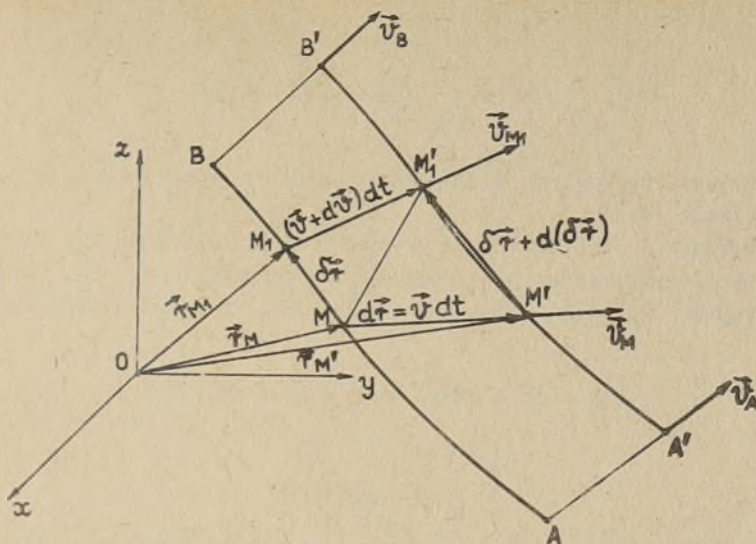
mentów 3 nie są ze sobą połączone. Jednak wskutek zjawiska zwierania się powłok elastycznych przy przepływie pomiędzy nimi powietrza te boczne ściany 4 segmentów 3 tak szczelnie do siebie przywierają, że nie ma pomiędzy nimi praktycznie żadnego przepływu. Przy nierównym ekranie 5 mogą się jednak te segmenty deformować w ten sposób, że dolne krawędzie segmentów 3 śledzą nierówności ekranu: wody lub stałego podłoża. Jak kształtuje się elastyczną osłonę poduszkowca, dowiedzie się na zajęciach projektowych przedmiotu. Tu zaznaczymy tylko, że przez odpowiedni dobór zewnętrznej i wewnętrznej geometrii elastycznej osłony, opartej także na zjawiskach związanych z przepływem, można uzyskać pożądane charakterystyki zachowania się poduszkowca, jako środka transportu wodnego lub nośnika dużych ciężarów w różnych zakładach produkcyjnych, np. na stocznicach.

14. TWIERDZENIA O TRWAŁOŚCI RUCHU WIROWEGO I ICH ZASTOSOWANIE

Dotychczas poznaliśmy szereg własności ruchu wirowego płynu. Z drugiego twierdzenia Helmholtz'a wiemy, że natężenie wiru w każdej chwili jest stałe. Twierdzenie Stokesa mówi o tym, jak można ułatwić obliczenie natężenia wirów przebijających daną powierzchnię S rozpiętą na pętli C ; wystarczy w tym przypadku obliczyć cyrkulację prędkości po pętli C . Te twierdzenia, jako kinematyczne, są ważne dla każdego płynu. Tak samo ważny dla każdego płynu jest wzór (12.91) i prawo Biota i Savarta (12.92a i b), pozwalające na wyznaczenie pola prędkości indukowanego w cieczy nieściśliwej przez zadany rozkład wirów. Widzimy, że powyższe twierdzenia, wnioski i prawa dotyczą wirów istniejących. Nic one nie mówią o tym, jak te wiry zmieniają się z upływem czasu. Wiemy już, że ruch wirowy płynu newtonowskiego jest opisany równaniem Naviera i Stokesa, a jeśli płyn dodatkowo jest barotropowy, to do badania ruchu wirowego takiego płynu można się posłużyć równaniem (7.30) lub bardziej ogólnym równaniem (12.174d). Ponieważ te równania, także przy założeniu $v = 0$, ze względu na wysoką nieliniowość trudno poddają się analizie, to w praktyce jesteśmy zmuszeni do budowy i badania modeli wirowych. Przykłady takich modeli pokazują rysunki: 12.23, 13.12. Tworzy się takie modele na podstawie obserwacji zjawiska - rysunek 13.5 - oraz własności ruchu wirowego. Użyteczne w tym względzie są twierdzenia Helmholtza o trwałości ruchu wirowego. Musimy je poznać. Uzyskać je można w różny sposób. Zwykle robi się to stosując twierdzenie Kelvina o pochodnej cyrkulacji. Zatem rozpoczynamy poznawanie dalszych własności ruchu wirowego płynu od twierdzenia Kelvina.

14.1. TWIERDZENIE KELVINA O POCHODNEJ CYRKULACJI PRĘDKOŚCI

Są dwa twierdzenia Kelvina o pochodnej cyrkulacji. Pierwsze mówi o tym, że pochodna względem czasu cyrkulacji prędkości po pętli zamkniętej będącej krzywą płynną - inaczej: krzywą materialną - jest równa cyrkulacji przyspieszenia po tej samej pętli. To twierdzenie, jako kinematyczne, jest ważne dla każdego płynu. Drugie natomiast twierdzenie Kelvina, ważne dla płynu barotropowego znajdującego się w polu sił masowych, mających potencjał, mówi o tym, że dla dowolnej linii płynnej cyrkulacja prędkości nie zmienia się z upływem czasu - jest stała. Udowodnimy najpierw I twierdzenie Kelvina. Można ten dowód przeprowadzić w różny sposób. Pokażemy tu dwa znane podejścia [4], [5], [6].



Rys.14.1

Niech linia AB na rysunku 14.1 będzie linią płynną - utworzoną z tych samych elementów płynu. Cyrkulacja prędkości po krzywej AB zgodnie z określeniem (3.88) jest

$$\Gamma_{AB} = \int_{AB} \vec{v} \cdot \delta\vec{r}$$

Do obliczenia pochodnej cyrkulacji Γ względem czasu zastosujemy wzór:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{AB}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{AB} \vec{v} \cdot \delta\vec{r} = \int_{AB} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \delta\vec{r}) = \\ &= \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \delta\vec{r} + \int_{AB} \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} (\delta\vec{r}) \end{aligned} \quad (14.1)$$

W podobny sposób można uzyskać równanie ciągłości (4.7).

Istotnie wzór (4.2) możemy - zgodnie z (14.1) zapisać:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \delta V = \int_{V(t)} \frac{d}{dt} (\rho \delta V) = \int_{V(t_0)} \frac{d\rho}{dt} \delta V + \int_{V(t_0)} \rho \frac{d}{dt} (\delta V)$$

Ale na mocy (4.9):

$$\frac{d(\delta V)}{dt} = \delta V \operatorname{div} \vec{v}$$

Stąd

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \delta V = \int_{V(t_0)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) \delta V$$

i natychmiast, ze względu na dowolność obszaru płynnego $V(t_0)$, mamy równanie ciągłości (4.7).

Występującą we wzorze (14.1) prędkość zmiany elementu $\delta \vec{r}$ linii płynnej AB wyznaczmy biorąc pod uwagę to, że trójkąty: MM_1M_1' , MM_1M_1' pokazane na rysunku 14.1 mają jeden bok wspólny MM_1' . Z rysunku tego mamy zależność

$$\vec{v} dt + \delta \vec{r} + d(\delta \vec{r}) = \delta \vec{r} + (\vec{v} + d\vec{v}) dt$$

Stąd

$$d\vec{v} = \frac{d}{dt} (\delta \vec{r}) \quad (14.2)$$

Podstawiając wyrażenie (14.2) do wzoru (14.1) i wykonując proste całkowanie uzyskamy:

$$\frac{d\Gamma_{AB}}{dt} = \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \delta \vec{r} + \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} \quad (14.3)$$

Jeśli linia AB jest pętlą zamkniętą, to $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ i

$$\frac{d}{dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} \quad (14.4)$$

Wzór (14.4) jest treścią I twierdzenia Kelvina o pochodnej cyrkulacji prędkości.

Zamiast geometrycznego wyprowadzenia wzoru (14.2) można oczywiście zastosować tu wzór (6.38). Istotnie:

$$\frac{d\delta \vec{r}}{dt} = \delta \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} = d\vec{v}$$

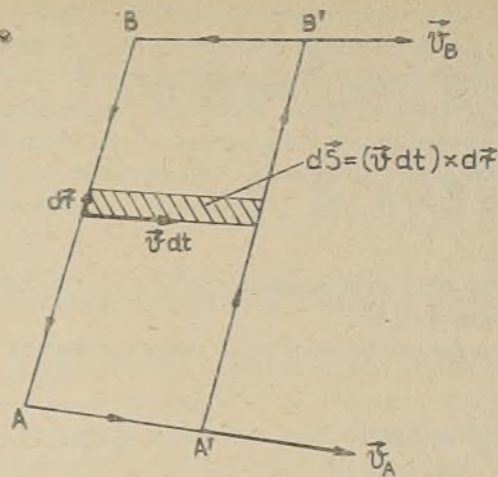
Drugie podejście przy wyprowadzaniu twierdzenia Kelvina polega na obliczeniu cyrkulacji po pętli zamkniętej $AA'B'BA$ utworzonej przez linię płynną AB w chwili t , tę samą linię płynną $A'B'$ w chwili $t + dt$ oraz odcinki:

$$\overline{AA'} = \vec{v}_A dt, \quad \overline{BB'} = \vec{v}_B dt$$

Kierunek dodatni obchodzenia pętli pokazano na rysunku 14.2.

Otóż pochodna cyrkulacji jest

$$\frac{d\Gamma_{AB}}{dt} = \int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{r} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{A'}^{B'} \vec{v} \cdot d\vec{r} - \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{r}}{\Delta t} \quad (14.5)$$



Rys. 14.2

Drugi wyraz tego wzoru wyznaczmy przez obliczenie cyrkulacji po pętli $A'B'A$ i zastosowanie wzoru Stokesa dla powierzchni S rozpiętej na tej pętli. Więć:

$$\int_{A'}^{B'} \vec{v} \cdot d\vec{r} - \vec{v}_B \cdot \vec{v}_B dt - \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{r} + \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A dt = \int_A^B (\text{rot } \vec{v}) \cdot (\vec{v} dt \times d\vec{r})$$

Stąd drugi wyraz wyrażenia (14.5) będzie:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{A'}^{B'} \vec{v} \cdot d\vec{r} - \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_B \cdot \vec{v}_B - \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A + \int_A^B (\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}) \cdot d\vec{r} \quad (14.5a)$$

Jeśli uwzględnimy dalej, że

$$\vec{v}_B \cdot \vec{v}_B - \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A = v_B^2 - v_A^2 = \int_A^B d(v^2) = \int_A^B d\vec{r} \cdot \text{grad } v^2$$

to wzór (14.5) można zapisać:

$$\frac{d\Gamma_{AB}}{dt} = \int_A^B \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} + \text{grad } v^2 \right) \cdot d\vec{r} \quad (14.5b)$$

Podstawmy do wyrażenia (14.5b) wzór (5.41) dla przyspieszenia elementu płynu. Uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \int_A^B \left(\text{grad} \frac{v^2}{2} \right) \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2} \end{aligned} \quad (14.3)$$

Jeszcze inne podejście przy wyprowadzaniu wzoru (14.3) można znaleźć w podręczniku mechaniki płynów [2].

Jeśli teraz podstawimy do wzoru (14.4) równanie Eulera (5.44) przy założeniu, że:

$$\vec{F} = -\nabla U \quad \nabla \mathcal{P} = \frac{1}{\rho} \nabla p$$

to

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla (U + \mathcal{P}) \quad (14.5c)$$

i

$$\frac{d}{dt} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = - \oint_C d\vec{r} \cdot \nabla (U + \mathcal{P}) = - \oint_C d(U + \mathcal{P}) = - (U + \mathcal{P}) \Big|_{A \rightarrow B} = 0$$

Więc dla nielepkiego płynu barotropowego znajdującego się w polu sił masowych, mających potencjał wzdłuż dowolnej pętli płynnej C, poprowadzonej w tym płynie

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad (14.6)$$

Wzorowi (14.6) można w zależności od potrzeby nadać inne, rozwinięte postacie:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \Gamma = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \vec{v}_w \cdot \nabla \Gamma = 0$$

gdzie: $\vec{v}_w = \vec{v} - \vec{v}_e$ jest względną prędkością płynu.

Mamy zatem udowodnione I i II twierdzenie Kelvina o pochodnej cyrkulacji.

Ponieważ cyrkulacja prędkości wzdłuż pętli C jest równa natężeniu wirów przebijających powierzchnię S rozpiętą na pętli C, to wzór (14.6) wskazuje również na to, że jeżeli w danej chwili nie ma wirowości w płynie, to nie było jej nigdy ani nie może się ona pojawić w przyszłości. Jest to treścią twierdzenia Lagrange'a. Jeśli natomiast w danej chwili są wiry, to będą one trwać wiecznie. Należy pamiętać tu o założeniach dotyczących własności płynu. Jeśli płyn jest lepki $\nu \neq 0$, to wiemy, że wiry mogą powstać. Wiry także powstają, gdy płyn nie jest barotropowy, np. woda w morzu - prądy morskie [4], [12].

Wracając do wzoru (14.5c) widzimy, że w nielepkim barotropowym płynie znajdującym się w polu grawitacyjnym przyspieszenie elementu płynu ma potencjał niezależnie od tego, czy przepływ jest potencjalny, czy też jest

przepływem wirowym. Potencjał ten nazywa się potencjałem przyspieszenia. Znajduje on dosyć szerokie zastosowanie w teorii płata nośnego poruszającego się tak w ośrodku nieorganicznym, jak również poruszającego się pod swobodną powierzchnią wody [13]. Znamy zatem potencjały: prędkości, wektorowy, prądu oraz zespolony. Do potencjału przyspieszenia jeszcze wrócimy. Obecnie interesują nas twierdzenia o trwałości ruchu wirowego płynu i ich praktyczne zastosowanie.

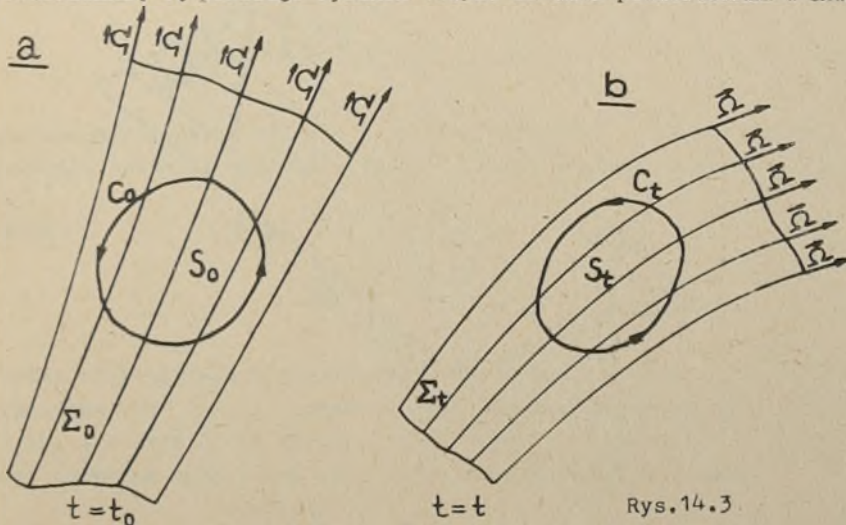
14.2. TWIERDZENIE HELMHOLTZA O TRWAŁOŚCI RUCHU WIROWEGO

Zachowanie się ruchu wirowego w barotropowym płynie nielepkiem, znajdującym się w polu sił masowych mających potencjał, określają twierdzenia Helmholtza o trwałości ruchu wirowego, zwane również dynamicznymi twierdzeniami Helmholtza. Pierwsza część tego twierdzenia mówi o tym, że linie wirowe i powierzchnie wirowe się nie rozpywają; tworzą je wciąż te same elementy płynu i są unoszone razem z płynem. Również rurka wirowa jako szczególny przypadek powierzchni wirowej jest trwała. Stąd twierdzenie to dotyczy także włókna wirowego. Jeśli zatem w danej chwili linia płynna pokrywała się z linią wirową, to będzie tak trwać wiecznie. Wiemy już, że w płynie newtonowskim to stwierdzenie nie jest prawdziwe.

Druga część twierdzenia Helmholtza dotyczy natężenia rurki wirowej. Mówi ona o tym, że natężenie rurki wirowej z upływem czasu się nie zmienia. Jest zatem natężenie rurki wirowej w rozpatrywanym płynie nie tylko stałe w każdej wybranej chwili i w każdym przekroju, ale również będzie stałe zawsze. Wiemy, że jeżeli uwzględni się lepkość płynu, to wystąpi dyfuzja wiru. Wiry z upływem czasu się rozpląną. W rozpatrywanym zaś modelu płynu wiry będą zachowane, będą trwać wiecznie.

Przejdźmy do dowodów tych twierdzeń.

Niech zatem będzie powierzchnią Σ_0 będzie powierzchnią wirową w chwili t_0 . Powierzchnię tę pokazuje rysunek 14.3a. Ta sama powierzchnia w chwili t



niech będzie Σ_t . Zmiana powierzchni Σ_0 w powierzchnię Σ_t (rys. 14.3b) występuje wskutek poruszania się płynu. Poprowadźmy na powierzchni Σ_0 dowolną pętlę C_0 zawierającą część S_0 powierzchni Σ_0 . Ponieważ S_0 leży na powierzchni Σ_0 , to linie wirowe nie przebijają powierzchni S_0 . Stąd, z twierdzenia Stokesa mamy

$$\Gamma_{C_0} = \oint_{C_0} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{S_0} d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{v} = 0$$

bo $\text{rot } \vec{v}$ jest prostopadła do elementów $d\vec{S}$.

Po upływie czasu $t-t_0$ pętla płynna C_0 stała się pętlą C_t obejmującą powierzchnię S_t . Ale na mocy twierdzenia Kelvina (14.6) cyrkulacja

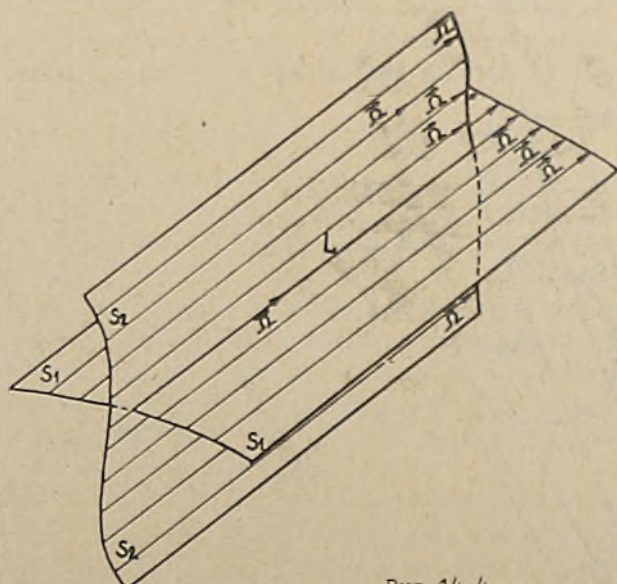
$$\Gamma_{C_t} = \oint_{C_t} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \Gamma_{C_0} = 0$$

Więc również

$$\int_{S_t} d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{v} = 0$$

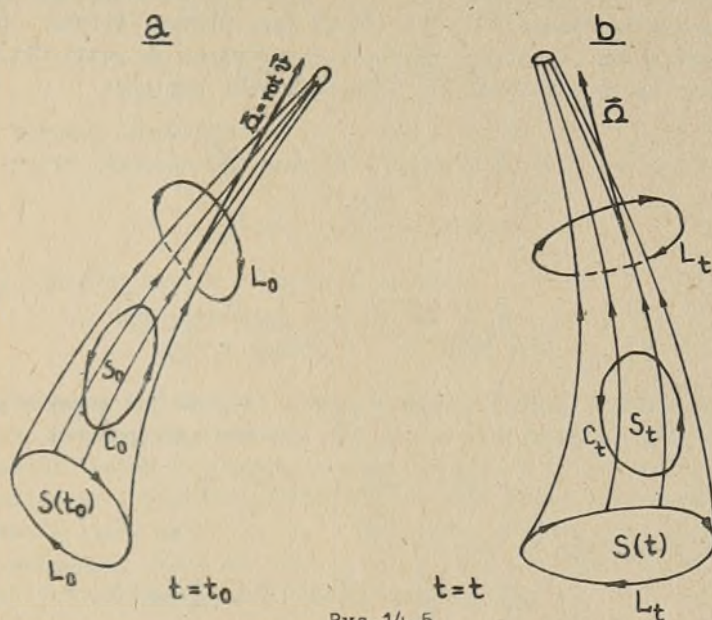
Stąd wynika wniosek taki, że $\text{rot } \vec{v}$ jest prostopadła do każdego elementu $d\vec{S}$ powierzchni S_t . Zatem powierzchnia S_t jest także powierzchnią wirową. Więc powierzchnia wirowa jest zachowana. Tworzą ją te same elementy płynu.

Powierzchnie wirowe mogą się przecinać, jak S_1 i S_2 na rysunku 14.4 lub mogą tworzyć rurkę wirową jak na rysunku 14.5a i b. Z zachowania powierzchni wirowych S_1 i S_2 wynika to, że linia ich przecięcia, będąca linią wirową, jest także zachowana. Zachowane są również rurki wirowe jako



Rys. 14.4

szczególny przypadek powierzchni wirowych. Rozumowanie można bowiem powtórzyć dla pętli C_0 i C_t leżących na powierzchniach bocznych rurek, pokazanych na rysunkach 14.5a i 14.5b.



Rys.14.5

Dla udowodnienia drugiej części twierdzenia Helmholtza wystarczy obliczyć cyrkulację prędkości po pętlach L_0 i L_t oraz wziąć pod uwagę twierdzenie Kelvina (14.6). Zgodnie z nim:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (14.6a)$$

Więc

$$\oint_{L_0} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_{L_t} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \text{const} . \quad (14.6b)$$

a zatem natężenie rurki wirowej z upływem czasu nie ulega zmianie. To stwierdzenie wynika z równości (14.6b) a także z prawej strony równości (14.6a).

Wyrażenie:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 0$$

jest zatem sformułowaniem matematycznym zachowania wirów.

Rozpisując wzór (14.6a) możemy znaleźć warunek konieczny i dostateczny dla płynu, w którym linie wirowe i rurki wirowe są zachowane. W tym celu bierzemy pochodną materialną obu stron wyrażenia (3.92). Mamy:

$$\frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{v} \quad (14.7a)$$

Zgodnie zaś z twierdzeniem Kelvina (14.4) lewa strona równości jest równa cyrkulacji przyspieszenia płynu po pętli $C(t)$, w chwili $t=t_0$. Stąd na mocy twierdzenia Stokesa możemy napisać:

$$\oint_{C(t_0)} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_{S(t_0)} d\vec{S} \cdot \text{rot} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \quad (14.7b)$$

Zatem:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{v} = \int_{S(t_0)} d\vec{S} \cdot \text{rot} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) \quad (14.7c)$$

Wyrażenie podcałkowe prawej strony równości (14.7c) już znamy z punktu 7.4 części I. Dla płynu nieściśliwego wyraża się ono następująco:

$$\text{rot} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v}$$

a dla płynu ściśliwego ma ono postać:

$$\text{rot} \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{\Omega} \text{div } \vec{v}$$

Po uwzględnieniu powyższych wyrażeń wzór (14.7c) będzie

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} d\vec{S} \cdot \text{rot } \vec{v} = \int_{S(t_0)} \left[L \frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{\Omega} \text{div } \vec{v} \right] \cdot d\vec{S} \quad (14.8)$$

Widzimy tu wyraźnie, że jeżeli powierzchnia $S(t)$ jest dowolnym przekrojem rurki wirowej, to jej natężenie nie będzie ulegać zmianie z upływem czasu, gdy tylko będzie spełnione równanie Helmholtza

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{\Omega} \text{div } \vec{v} = 0 \quad (7.31a)$$

Równanie to jest ważne dla płynu charakteryzowanego przez:

$$\mu = 0 \quad \vec{F} = -\nabla U \quad \text{ i } \quad \nabla p = \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Wyraża ono warunek konieczny i dostateczny dla zachowania linii wirowych, powierzchni wirowych i rurek wirowych. Jeśli jest zadana wirowość w chwili $t=t_0$, to równanie (7.31a) opisuje zachowanie się tej wirowości w czasie t .

Jeśli zajdzie potrzeba, to równanie (7.31a) można wyrazić w ruchomym układzie odniesienia. Wystarczy zastosować operator pochodnej materialnej w ruchomym układzie odniesienia - operator (12.171).

Równanie Helmholtza (7.31a) ze względu na wysoką nieliniowość można badać tylko przy zastosowaniu metod numerycznych.

Dla przepływu płaskiego równania (7.31a) przyjmuje postać analogiczną do równania zachowania masy (4.7), z tym że zamiast gęstości płynu ρ mamy pseudoskalar Ω . Istotnie, jeśli przepływ odbywa się przykładowo w płaszczyźnie xy , to $\text{rot } \vec{v} = \vec{k} \Omega_z$; $\vec{\Omega} \cdot \nabla \otimes \vec{v} = 0$ i równanie (7.31a) redukuje się do

$$\frac{d\Omega_z}{dt} + \Omega_z \text{div } \vec{v} = 0 \quad (14.9a)$$

a więc do postaci identycznej z równaniem ciągłości (4.7). Jeśli płyn jest nieściśliwy, to równanie (14.9a) jeszcze bardziej się upraszcza:

$$\frac{d\Omega_z}{dt} = 0 = \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \Omega_z \quad (14.9b)$$

Przeważnie zapisuje się to równanie w postaci:

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} = 0 \quad (14.9c)$$

gdzie składowe prędkości v_x i v_y wyrażono przy pomocy funkcji prądu (12.4).

Zauważmy jeszcze, że zamiast $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$ można do wzoru (14.8) podstawić dowolny wektor. Zatem wynikające z równania (14.8) równanie (7.31a) wyraża warunek konieczny i dostateczny dla zachowania każdej linii wektorowej. Lecz nie każda linia wektorowa jest zachowana. Przykładowo: tylko te linie prądu są zachowane, które są liniami nieruchomymi w przestrzeni [4].

Warunek (7.31a) dla dowolnej linii wektorowej:

$$d\vec{r} \times \vec{a} = 0$$

można zapisać jeszcze tak:

$$\left[\frac{d\vec{a}}{dt} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{v} \right] \times \vec{a} = 0$$

bo

$$(\vec{a} \text{div } \vec{v}) \times \vec{a} = 0$$

Wzór (14.8) można zapisać w różnych postaciach mających zastosowanie w hydromechanice, szczególnie przy wyprowadzaniu wyrażeń dla reakcji hydrodynamicznych działających na ciała zanurzone w cieczy lub kadłub statku. Otóż jeśli zamiast $\vec{\Omega}$ napiszemy dowolny wektor \vec{a} i zastosujemy wzór (3.46) podobnie, jak to zrobiono przy wyprowadzaniu wzoru (7.28), to wyrażenie (14.8) przyjmie postać:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_{S(t_0)} \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \vec{v} \text{div } \vec{a} + \text{rot} (\vec{a} \times \vec{v}) \right) \cdot d\vec{S} \quad (14.10)$$

lub postać następującą:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_{S(t_0)} \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \vec{v} \text{div } \vec{a} \right) \cdot d\vec{S} + \oint_{C(t_0)} (\vec{a} \times \vec{v}) \cdot d\vec{r} \quad (14.10a)$$

gdzie pętla $C(t_0)$ jest brzegiem powierzchni materialnej $S(t_0)$ a \vec{v} jest prędkością tej powierzchni.

Jeśli S jest powierzchnią zamkniętą, to pętla C staje się punktem powierzchni S i całka krzywoliniowa we wzorze (14.10a) znika. Wtedy mamy:

$$\frac{d}{dt} \oint_{S(t)} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \oint_{S(t_0)} \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{div} \vec{a} \right) \cdot d\vec{S} \quad (14.10b)$$

Wyrażenia (14.10) można zapisać także w ruchomym układzie odniesienia. Wystarczy zastosować operator (12.173).

Wzory (14.10) można uzyskać również bezpośrednio z definicji pochodnej:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{S(t_0)} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S(t_0 + \Delta t)} \vec{a}_n \, dS - \int_{S(t_0)} \vec{a}_n \, dS \right]$$

Sposób ten wykorzystamy niżej do wyprowadzania analogów wzorów (14.10) dla potencjału prędkości φ :

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \varphi \vec{n} \, dS = \int_{S(t_0)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} + \vec{v}_s \cdot \vec{n} \otimes \nabla \varphi \right) dS + \oint_{\partial S} \varphi \vec{v}_s \times d\vec{r} \quad (14.11)$$

gdzie \vec{v}_s jest prędkością powierzchni S , a ∂S jest brzegiem powierzchni $S(t_0)$ - pętłą C . Jeśli S jest powierzchnią płynną, to \vec{v}_s jest prędkością płynu; równą $\nabla \varphi$. Zobaczmy dalej, że wzór (14.11) ma taką samą postać w ruchomym i w nieruchomym układzie odniesienia. Jeśli powierzchnia S jest powierzchnią zamkniętą, to oczywiście:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \varphi \vec{n} \, dS = \oint_{S(t_0)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_{sn} \nabla \varphi \right) dS \quad (14.12)$$

Wzory (14.11), (14.12) można także uzyskać ze wzorów (14.10a) i (14.10b) przez podstawienie do nich kolejno $\vec{a} = \vec{e}_1 \varphi$, $\vec{a} = \vec{e}_2 \varphi$, $\vec{a} = \vec{e}_3 \varphi$, pomnożenie tak uzyskanych wyrażeń przez wersory \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 , dodanie stronami tych wyrażeń oraz wykonanie pod znakiem całki prostych działań algebraicznych.

Ze względu jednak na ważność tych związków w hydromechanice wyprowadzimy je wychodząc z określenia pochodnej:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \varphi \vec{n} \, dS = \int_{S(t_0)} \frac{\partial(\varphi \vec{n})}{\partial t} \, dS + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_1(t_0 + \Delta t)} \varphi \vec{n} \, dS - \int_{S(t_0)} \varphi \vec{n} \, dS \right]$$

Niech w chwili t_0 będzie dana powierzchnia $S(t_0)$ w ruchomym układzie odniesienia i niech na powierzchni $S(t_0)$ będzie określona funkcja skalarna φ ; może nią być potencjał prędkości. Niech w chwili $t = t_0 + \Delta t$ powierzchnia S zajmie nowe położenie $S_1 = S(t_0 + \Delta t)$. Oznaczmy przez \vec{v}_s prędkość poszczególnych punktów powierzchni S , przez \vec{v}_e - prędkość unoszenia układu ruchomego:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_s$$

gdzie: \vec{r}_s - jest promieniem wodzącym powierzchni S, mierzonym względem początku układu ruchomego. Oznaczmy także przez \vec{v}_w - prędkość względną powierzchni S, przy czym

$$\vec{v}_w = \vec{v}_s - \vec{v}_e$$

Niech ∂S będzie brzegiem powierzchni S w chwili t_0 . Zauważymy, że powierzchnie: S, S_1 oraz powierzchnia boczna S_b rozpięta na brzegach ∂S i ∂S_1 tworzą powierzchnię zamkniętą

$$S_0 = S + S_1 + S_b$$

ograniczającą obszar V_0 . Możemy zatem zastosować tu twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego

$$\oint_{S_0} \varphi \vec{n} \, dS = \int_{V_0} \nabla \varphi \, dV = \int_{S(t_0)} (\nabla \varphi) \cdot \vec{v}_w \cdot \vec{n} \, dS \, \Delta t$$

Więc

$$\Delta t \int_{S(t_0)} \nabla \varphi \cdot \vec{v}_w \cdot \vec{n} \, dS = \int_{S_1} \varphi \vec{n} \, dS - \int_S \varphi \vec{n} \, dS + \oint_{\partial S} \varphi \, d\vec{r} \times \vec{v}_w \, \Delta t$$

bo na powierzchni S wektor \vec{n} jest skierowany do wnętrza obszaru V_0 , a $d\vec{r} \times \vec{v}_w \, \Delta t$ jest elementem powierzchni bocznej S_b .

Stąd

$$\int_{S_1} \varphi \vec{n} \, dS - \int_S \varphi \vec{n} \, dS = \Delta t \left[\int_S (\nabla \varphi) \cdot \vec{v}_w \cdot \vec{n} \, dS + \oint_{\partial S} \vec{v}_w \cdot \varphi \times d\vec{r} \right] \quad (14.13a)$$

Obliczamy następnie pierwszy składnik prawej strony wyrażenia dla definicji pochodnej powierzchni S

$$\frac{\partial(\varphi \vec{n})}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} + \vec{\omega} \times \varphi \vec{n} \quad (14.13b)$$

bo $\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = 0$ w ruchomym układzie odniesienia.

Po podstawieniu wzorów (14.13a i b) do wyrażenia dla definicji pochodnej uzyskuje się:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \varphi \vec{n} \, dS = \int_{S(t_0)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} + \vec{\omega} \times \varphi \vec{n} + v_{wn} \nabla \varphi \right) \, dS + \oint_{\partial S} \varphi \vec{v}_w \times d\vec{r} \quad (14.13c)$$

Rozpatrzmy szczególny przypadek powierzchni S. Widzimy, że jeżeli powierzchnia S jest nieruchoma względem układu ruchomego: $\vec{v}_e = \vec{v}_s$, to

$$\frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{n} \, dS = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} \, dS + \vec{\omega} \times \int_S \varphi \vec{n} \, dS$$

$$\frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{n} dS = \frac{d'}{dt} \int_S \varphi \vec{n} dS + \vec{\omega} \times \int_S \varphi \vec{n} dS \quad (14.13d)$$

Wzór (14.13d) znajduje szerokie zastosowanie w mechanice ruchu statków. Wykażemy niżej, że wzory: (14.11) i (14.13c) są równoważne. W tym celu rozpisujemy całkę krzywoliniową wzoru (14.13c):

$$\oint_{\partial S} \varphi \vec{v}_w \times d\vec{r} = \oint_{\partial S} \varphi (\vec{v}_s - \vec{v}_e) \times d\vec{r} = \oint_{\partial S} \varphi \vec{v}_s \times d\vec{r} + \oint_{\partial S} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_e$$

Ale ostatnią całkę możemy zamienić na całkę powierzchniową przez zastosowanie wzoru (12.113e). Jeśli to zrobimy i podstawimy to wyrażenie do wzoru (14.13c), to natychmiast uzyskamy poszukiwany wzór (14.11), w którym zgodnie z wyrażeniem (12.172)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial' \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi$$

Zatem wyrażenie (14.11) ma taką samą postać tak w nieruchomym, jak i w ruchomym układzie odniesienia.

Jeśli powierzchnia S jest powierzchnią zamkniętą, to oczywiście całka krzywoliniowa znika i

$$\frac{d}{dt} \oint_S \varphi \vec{n} dS = \oint_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} + v_{sn} \nabla \varphi \right) dS \quad (14.12)$$

Przy rozpatrywaniu momentu nieustalonych sił hydromechanicznych w przepływach potencjalnych duże znaczenie ma pochodna:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{r}_s \times \varphi \vec{n} dS$$

Sposób znalezienia tej pochodnej jest taki sam, jaki zastosowano wyżej. Natychmiast możemy napisać:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} (\vec{r}_s \times \vec{n}) \varphi dS = \int_S \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} (\vec{r}_s \times \vec{n}) + \vec{r}_s \times v_{sn} \nabla \varphi \right] dS + \oint_{\partial S} \vec{r}_s \times \varphi (\vec{v}_s \times d\vec{r}) \quad (14.14a)$$

oraz

$$\frac{d}{dt} \oint_{S(t)} (\vec{r}_s \times \vec{n}) \varphi dS = \oint_S \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} (\vec{r}_s \times \vec{n}) + \vec{r}_s \times v_{sn} \nabla \varphi \right] dS \quad (14.14b)$$

We wzorach (14.14a i b) promień wodzący \vec{r}_s elementu powierzchni dS jest wzięty względem nieruchomego bieguna. W praktycznych obliczeniach niekiedy wygodniejszym jest posługiwanie się ruchomym układem odniesienia. Niech początek tego układu będzie A , a jego promień wodzący \vec{r}_A . Wtedy

$$\vec{r}_s = \vec{r}_A + \vec{r}_{1s}$$

gdzie \vec{r}_{1s} jest promieniem wodzącym elementu powierzchni dS względem bieguna A. Przy uwzględnieniu powyższej relacji lewa strona wzoru (14.14a) będzie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{S(t)} (\vec{r}_s \times \vec{n}) \varphi dS &= \vec{v}_A \times \int_S \varphi \vec{n} dS + \vec{r}_A \times \frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{n} dS + \\ &+ \frac{d}{dt} \int_S (\vec{r}_{1s} \times \vec{n}) \varphi dS \end{aligned}$$

gdzie:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt}$$

Rozpisując prawą stronę (14.14a) i przyrównując z powyższym wyrażeniem po uwzględnieniu wzoru (14.11) otrzymamy:

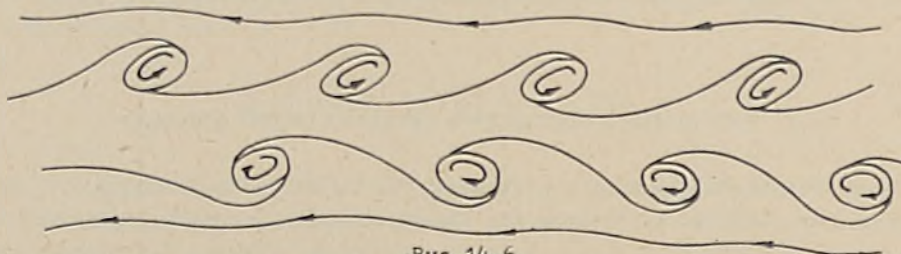
$$\begin{aligned} \vec{v}_A \times \int_S \varphi \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S (\vec{r}_{1s} \times \vec{n}) \varphi dS &= \\ = \int_S \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} (\vec{r}_{1s} \times \vec{n}) + \vec{r}_{1s} \times v_{sn} \nabla \varphi \right] dS + \oint_{\partial S} \varphi \vec{r}_{1s} \times (\vec{v}_s \times d\vec{r}) \quad (14.14c) \end{aligned}$$

14.3. ZASTOSOWANIE TWIERDZEŃ O TRWAŁOŚCI RUCHU WIROWEGO

Równanie (14.9c) łącznie z równaniem (12.10) znalazły zastosowanie do numerycznego badania zachowania się płaskich warstw wirowych i prostych rurek wirowych w chwili t_0 [11]. Badania numeryczne wykonane dla warstwy wirowej utworzonej z linii wirowych o tym samym kierunku, a powstałej w chwili t_0 w wyniku poruszających się w przeciwnych kierunkach strug jednorodnych cieczy nielepkiej i nieściśliwej, wykazały, że po upływie pewnego czasu ta warstwa wirowa się deformuje, tworząc wiry skupione o tym samym znaku, dążące do wymieszania przepływu. Uzyskuje się tu przy uwzględnieniu wyrazów nieliniowych efekt zatem podobny do dyfuzji lepkiej. Zgodnie z twierdzeniem Kelvina natężenia tych wirów skupionych muszą być jednak równe sumie natężeń wirów w warstwie wirowej w chwili $t=t_0$. Podobnie powierzchnia wirowa pokazana na rysunku 13.12 w chwili t_0 opływana strugą jednorodną będzie ulegać z upływem czasu deformacji i w pewnej odległości x musi zwinąć się w jeden wir skupiony o natężeniu takim samym, jaki miała cała powierzchnia w chwili początkowej. Tak samo powierzchnia wirowa utworzona z wirów swobodnych w modelu linii nośnej Prandtla zwinie się w dwa wiry skupione o kierunkach przeciwnych. Jednak i tu natężenie tych wirów z upływem czasu nie będzie ulegać zmianie, a ponadto te wiry skupione będą utworzone z tych samych linii wirowych i z tych samych elementów cieczy, z których była utworzona była powierzchnia wirowa w chwili t_0 .

Badania numeryczne wykonane dla przypadku dwóch cylindrycznych, nieskończonych rurek wirowych o tym samym znaku wykazują [11], że zachowanie się tych rurek z upływem czasu zależy od ich odległości. Gdy odległość tych rurek jest dostatecznie duża, to one obracając się względem pewnej osi zmieniają swój przekrój, lecz nadal tworzą je te same elementy cieczy i ich natężenie z upływem czasu nie ulega zmianie. Natomiast gdy odległość tych rurek wirowych w chwili początkowej jest dostatecznie mała, to rurki te obracając się i jednocześnie deformując swój przekrój zbliżają się do siebie, by w końcu utworzyć jeden wir skupiony. I tu także są nadal ważne twierdzenia p zachowaniu wirów. To zachowanie się tych rurek wynika bowiem z równania (14.14c).

W pracy [11] przytoczono również wyniki badań numerycznych zachowania się w czasie dwóch równoległych warstw wirowych o gęstości natężenia wirów posiadających znaki przeciwne, przy czym w chwili $t_0=0$ te warstwy są od siebie oddalone. Po upływie czasu warstwy te się deformują, by w końcu utworzyć ścieżkę złożoną z wirów skupionych, usytuowanych w dwóch szeregach o znakach takich, jakie miały w chwili $t_0=0$ w danej warstwie wirowej, przy czym wiry w jednym z szeregów są przesunięte względem wirów w szeregu drugim o połowę odległości pomiędzy wirami skupionymi w danym szeregu. Schemat takiej ścieżki wirowej pokazuje rysunek 14.6. Nazywa się ten układ wirów ścieżką lub wirami Karmana.



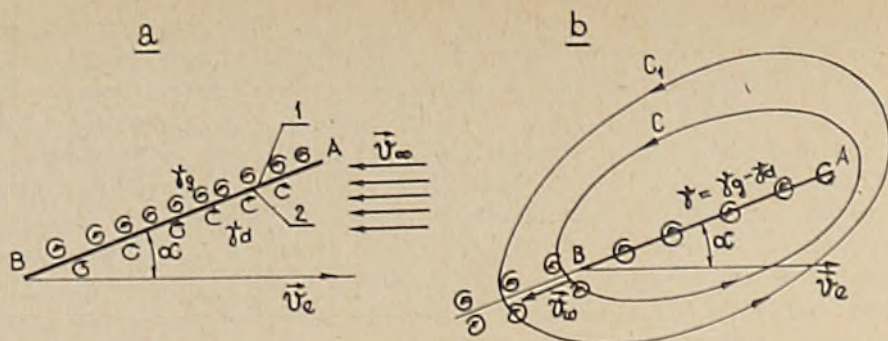
Rys.14.6

Wiry typu ścieżki Karmana powstają przy opływie płynem rzeczywistym każdej przeszkody - każdego ciała, z tym, że ich natężenie zależy od kształtu opływającego płynem, względnie poruszającego się w tym płynie ciała. Szczególnie dobrze są one widoczne przy opływie tzw. ciał urwistych i typu walec: linie wysokiego napięcia, anteny telewizyjne, łodygi trzciny, itp. Przy opływie ciał smukłych: kadłuby szybkich statków wypornościowych, płyty nośne względnie płaska płyta jak na rysunkach 12.35 i 12.36, na ich powierzchni tworzy się cienka warstwa przyścienna, a za nimi hydromechaniczny ślad, w którym w głównej części przepływ płynu będzie spowodowany właśnie obecnością wirów typu ścieżki wirowej Karmana. Należy jednak pamiętać o tym, że wskutek lepkości w tym śladzie będzie istnieć zjawisko dyfuzji wirów - dyfuzji lepkiej - i obraz przepływu będzie jeszcze bardziej złożony. Jeśli wrócimy do rysunków 12.35 i 12.36, to możemy prosto sprawdzić, że w obu przypadkach w obszarach C'CDA wiry mają znak przeciwny do ruchu wskazówek zegara, a w obszarach C'CDB - znak zgodny z ruchem wskazówek zegara. Zatem sumaryczne natężenie wirów w śladzie, przypadające na jednost-

kę długości śladu, będzie równe zeru, lub inaczej, sumaryczna gęstość natężenia wirów w śladzie jest równa zeru. Biorąc dalej pod uwagę wzór (13.35b) dochodzimy do wniosku, że ciśnienie po obu stronach śladu - na granicy śladu - jest takie same. I tak być powinno. To stwierdzenie stanowi podstawę formułowania warunku brzegowego na śladzie, stosowanego w teorii płata [14]. Wzór (13.35) można było zastosować, ponieważ poza warstwą przyścienną przepływ jest bezwirowy, a więc ważna jest całka Cauchy'ego-Lagrange'a. Ponieważ po obu stronach śladu ciśnienie jest takie same, to również po obu stronach tego śladu prędkości płynu są takie same. Ten wniosek także może być stosowany jako podstawa formułowania warunku brzegowego na śladzie hydromechanicznym.

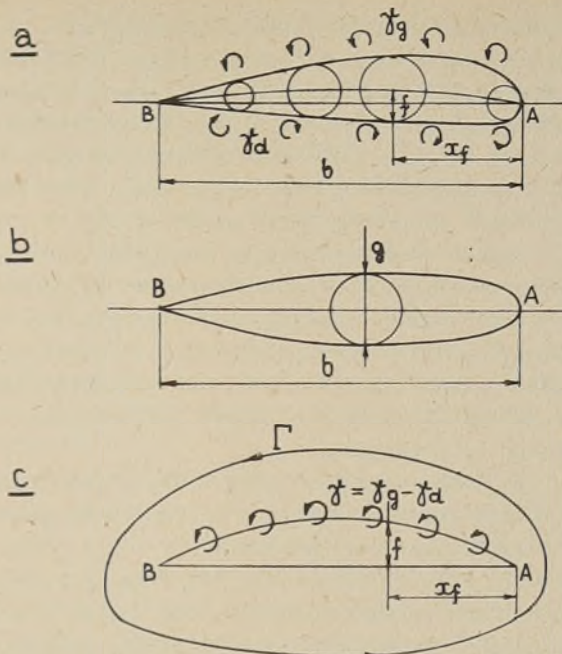
Gdybyśmy obliczali cyrkulację prędkości po pętli obejmującej tą płytę wraz z warstwą przyścienną oraz cały ślad hydromechaniczny, rozciągający się do nieskończoności w ruchu ustalonym, to cyrkulacja ta byłaby równa zeru. Jest to zgodne z twierdzeniem Kelvina o cyrkulacji prędkości. Kiedy płyta jest nieruchoma, to płyn jest w spoczynku i w płynie wiry nie istnieją. Cyrkulacja prędkości po dowolnej pętli poprowadzonej w płynie - równa sumie natężeń wirów przebiegających powierzchnię rozpiętą na tej pętli - jest równa zeru. Kiedy płyta zacznie się poruszać z prędkością skierowaną wzdłuż swojej płaszczyzny, to wskutek lepkości, prędkość względna płyty \vec{v}_w staje się równa zeru i w cienkiej warstwie płynu tuż przy płycie wystąpi przyrost prędkości względnej, co jest równoważne pojawieniu się wirów, przy czym po obu stronach tej płyty wiry będą mieć znaki przeciwne. Wiry te zostaną w płynie w tym miejscu, w którym płyta znajdowała się w chwili t_0 . Ponieważ ta płyta się porusza, więc wciąż takie wiry będą się tworzyć i rozwijać zgodnie z równaniem Helmholtza tak, że w końcu utworzy się warstwa przyścienna, a za płytą omówiony wyżej ślad. Ten ślad w przypadku ruchu ustalonego będzie się rozciągać aż do nieskończoności. Prędkość spływu tych wirów z krawędzi tylnej płyty-splwy - będzie równa prędkości względnej \vec{v}_w płynu. Jest to oczywiście ważne tak dla przypadku płyty nieruchomej, jak i dla przypadku dowolnego ciała opływanego strugą jednorodną, jest także zgodne z twierdzeniem Helmholtza. Ponieważ źródłem wirów jest opływana strugą jednorodną płyta, płat nośny, kadłub statku, itp., to jedynym możliwym kierunkiem, w którym wiry, linie wirowe, rurki wirowe, mogą się poruszać - zachowując tę własność, że są związane z tymi samymi elementami płynu - będzie kierunek zgodny ze strugą opływającą dane ciało, a zatem zgodny z prędkością względną \vec{v}_w . Ten wniosek dotyczy wszystkich rodzajów wirów spływających z opływanego ciała. A zatem dotyczy on także wirów swobodnych w modelu wirowym płata nośnego o wydłużeniu skończonym.

Jeśli teraz wrócimy do tej samej płyty o wydłużeniu nieskończonym, opływanej strugą jednorodną, tak że płaszczyzna płyty tworzy z tą strugą pewien kąt α (rys. 14.7a), zwany kątem natarcia, względnie gdy płyta ta porusza się w płynie nieruchomym z prędkością $\vec{v}_e - - \vec{v}_\infty$, tworzącą z płaszczyzną płyty ten sam kąt natarcia, to w warstwie przyściennej wytworzonej na górnej stronie 1 płyty gęstość natężenia wirów, χ_g , będzie różnić się od gęstości natężenia wirów χ_d na stronie dolnej 2 płyty. Stąd wzdłuż



Rys.14.7

ciężkiwi płyty będzie istnieć sumaryczna, różna od zera, gęstość natężenia wirów $\gamma = \gamma_+ - \gamma_-$ pokazana na rysunku 14.7b. Przy ruchu ustalonym płyty ten rozkład γ wzdłuż ciężkiwi płyty AB nie będzie zależał od czasu. Będzie zatem niejako związany z płytą. Dlatego wiry te nazywamy wirami związanymi. Jak już wiemy, zgodnie z twierdzeniem Stokesa, sumę tych wirów po całej ciężkiwie AB płyty można zastąpić jednym wirem zastępczym I_z , zwanym także wirem związanym. Natężenie wiru zastępczego jest równe cyrkulacji prędkości Γ po pętli C obejmującej płytę - rys. 14.7b - i przechodzącej przez krawędź spływu B płyty. Ponieważ w śladzie za płytą zgodnie z poprzednimi uwagami wiry spływające z płyty tworzą warstwę wirową o charakterze ścieżki wirowej Karmana, to pętla C może także w tym przypadku (ruch ustalony) obejmować ślad; może być pętlą C_1 jak na rysunku 14.7b. Wiry w śladzie spływają z powierzchni płyty z prędkością względną \vec{V}_w na krawędzi spływu B płyty. Jest to ważne tylko dla opływu płyty bez oderwania przepływu. Sprawdzić można, że gęstość natężenia dolnej części ścieżki wirowej w śladzie jest równa $\gamma_- = \gamma_d$, a górnej $\gamma_+ = -\gamma_d$. Wtedy mamy $\gamma_+ + \gamma_- = 0$, i zgodnie ze wzorem uproszczonym (13.35b) - wzór ścisły podamy niżej - różnica ciśnień po obu stronach śladu jest równa zeru. Zakłada się, że to różnica ciśnień - równa zeru - ma miejsce także na krawędzi spływu B płyty. Jest to równoważne z założeniem równości zeru gęstości natężenia wirów γ w punkcie B, co piszemy $\gamma(B) = 0$. To ostatnie stwierdzenie jest treścią tak zwanego postulatu Kutty, zwanego także postulatem Kutty-Żukowskiego. Stosuje się ten postulat jako warunek brzegowy dla równania służącego do wyznaczania rozkładu wirów związanych na płycie i profilach posiadających ostrą krawędź spływu B dla przypadku przepływu bez oderwania warstwy przyściennej. Do wyznaczania natężenia wiru związanego na profilu posiadającym ostrą krawędź spływu - szczególnym przypadkiem profilu jest płaska płyta - stosuje się także tak zwany postulat Żukowskiego i Czapygina. Mówi on o tym, że na krawędzi spływu, prędkość płynu musi mieć wartość skończoną. Oba postulaty są równoważne. Wynikają one z obserwacji przepływu wokół profili i uwzględniają w sposób pośredni wpływ lepkości na powstawanie wirów związanych na profilach lub inaczej - cyrkulacji prędkości. Znaczenie ich



Rys.14.8

polega na tym, że przy ich pomocy, stosując model płynu idealnego, możemy wyznaczyć cyrkulację prędkości wokół profilu, rozkład ciśnień na nim oraz siłę nośną.

Podobne postępowanie jak dla płaskiej płyty można zastosować do opływu nieskończonej powierzchni walcowej o kierownicy krzywoliniowej AB, jak na rysunku 14.8c, lub do płata o nieskończonej rozpiętości i profilu czyli jego przekroju poprzecznego, jak na rysunku 14.8a. Kierownicą tej powierzchni walcowej może być łuk koła, odcinek paraboli drugiego lub wyższego stopnia, względnie linia łamana - złożona z odcinków linii prostych. W teorii profili zwie się ją linią szkieletową profilu i charakteryzuje się jej wygięciem f/b oraz położeniem tego wygięcia x_f/b względem krawędzi natarcia A profilu. Z geometrycznego punktu widzenia linia szkieletowa jest miejscem geometrycznym środków okręgów wpisanych w profil. Dobrze ona aproksymuje bardzo cienki profil płata.

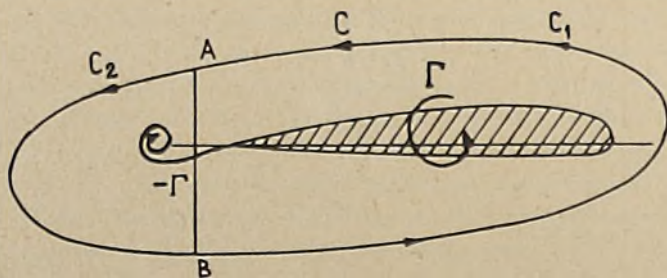
Jeśli grubość profilu, scharakteryzowana stosunkiem grubości g do cięciwy b , zatem przez g/b , ma wartość skończoną, to profil można uzyskać przez nałożenie na linię szkieletową zadanego rozkładu grubości profilu symetrycznego względem cięciwy AB - prostej łączącej krawędź natarcia profilu z jego krawędzią spływu. Rozkład grubości g wzdłuż cięciwy pokazuje rysunek 14.8b. Można zastosować także postępowanie odwrotne: każdy profil niesymetryczny można rozłożyć na profil symetryczny oraz linię szkieletową. Szczególnym przypadkiem linii szkieletowej jest cięciwa; wtedy $f/b = 0$. Opracowano dotychczas zbiory - rodziny - profili o różnych kształtach linii szkieletowych i różnych rozkładach grubości. Różnica pomiędzy profilami

mi w danej rodzinie polega na różnych wartościach wielkości: f/b , x_f/b oraz g/b . Zawarte są one wraz z ich charakterystykami hydrodynamicznymi, współczynnikami sił i ciśnienia w różnych poradnikach i katalogach.

Wracając do zagadnienia opływu profili widać, że rozkładając dany profil na profil symetryczny i linię szkieletową możemy zadanie rozłożyć na zadanie opływu profilu symetrycznego oraz opływu linii szkieletowej. Pierwsze zadanie będzie podobne do opływu płyty płaskiej jak na rysunku 12.35 i 12.36 lub lepiej do opływu ciała pokazanego na rysunku 13.6. Drugie natomiast do opływu płyty ustawionej pod kątem natarcia do strugi jednorodnej, jak na rysunku 14.7. Różnica tu polega tylko na tym, że wiry związane będą rozłożone nie wzdłuż linii prostej, lecz wzdłuż krzywej linii szkieletowej. Do wyznaczenia rozkładu natężenia wirów związanych lub cyrkulacji prędkości oczywiście należy tu zastosować także postulat Kutty-Żukowskiego lub postulat Żukowskiego i Czapygina.

Powstaje pytanie: czy wiry związane i wiry w śladzie hydromechanicznym są wszystkimi wirami powstającymi w płynie w wyniku ruchu jednostajnego po linii prostej płata o wydłużeniu nieskończonym?

Gdyby rzeczywiście powstały tylko te wiry, to twierdzenie Kelvina (14.6) i twierdzenie Lagrange'a nie byłyby spełnione. Dla spełnienia tych twierdzeń musi jeszcze dodatkowo powstać i istnieć w płynie jeszcze jeden wir o natężeniu równym natężeniu wiru związanego, lecz posiadający do niego znak przeciwny. Taki wir rzeczywiście powstaje w płynie za profilem po upływie pewnego, dość krótkiego, czasu od chwili rozpoczęcia poruszania się płata. Nazywa się ten wir wirem startowym. Można go zaobserwować w czasie przeprowadzania badań eksperymentalnych. Zostaje on w tym miejscu, w którym płat zaczął się poruszać. Gdy odległość jego od płata dostatecznie wzrośnie, to zgodnie z wynikami prawa Biota i Savarta przestaje on oddziaływać na pole prędkości na płacie. Dlatego przy ruchu ustalonym płata zakłada się, że wir startowy znajduje się w nieskończoności za płatem. Na rysunku 14.9 pokazano schematycznie wir startowy o natężeniu $-\Gamma$ i wir związany o natężeniu Γ w chwili po uformowaniu się wiru startowego. Cyrkulacja prędkości po pętli C obejmującej oba wiry jest równa zero, czyli jest taka, jaką była przed rozpoczęciem ruchu płata. Natomiast cyrkulacja prędkości po pętli C_1AB jest równa Γ , czyli sumie natężeń wirów w warstwie przyściennej, albo równa natężeniu wiru związanego. Ten wir startowy powoduje to, że spełniony jest postulat Żukowskiego i Czapygina o opływie na ostrzu.



Rys. 14.9

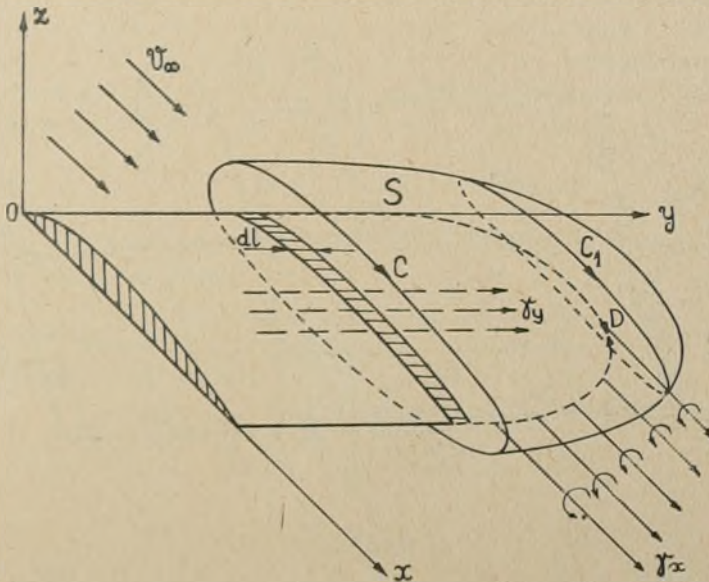
Należy ten wir startowy do kategorii wirów swobodnych, unoszonych z prędkością względną.

Jeśli przepływ jest nieustalony, spowodowany zmianą kąta natarcia płata, zmianą prędkości unoszenia lub prędkości strugi napływającej na płat, względnie zmianą w czasie samego płata, to - dla spełnienia twierdzenia Kelvina o pochodnej cyrkulacji prędkości [14.6] lub postulatu Żukowskiego i Czapłygina - na płacie musi zaistnieć zmiana natężenia wirów związanych i z tego płata muszą spływać wiry swobodne - startowe - o natężeniu równym zmianie natężeń wirów związanych, lecz o znakach przeciwnych. Przy odbywającej się w sposób ciągły zmianie parametrów kinematycznych ruchu tego płata można założyć, że te wiry swobodne spływające z płata z prędkością względną płynu względem płata będą się tworzyć w sposób ciągły. Powyższe uwagi stanowią podstawę do budowy modeli matematycznych płatów nośnych w ruchu nieustalonym.

Dotychczas rozpatrywaliśmy płat nośny o rozpiętości nieskończonej. A jak będzie wyglądać układ wirów przy płacie o rozpiętości skończonej? Wiemy już, że oprócz wirów wyżej omówionych będą istnieć jeszcze dodatkowe półnieskończone wiry swobodne, jakie pokazano na rysunku 12.23 w modelu linii nośnej Prandtla. Mamy obecnie pewne uzasadnienie na istnienie tych wirów. Otóż wydzielimy z płata o dużym wydłużeniu pewien element o długości dl , który następnie otoczmy pętlą C , jak na rysunku 14.10. Na pętli C rozepniemy dalej powierzchnię S . Założymy, że element dl płata działa siła nośna dL , zgodnie ze wzorem Żukowskiego (13.36), równa

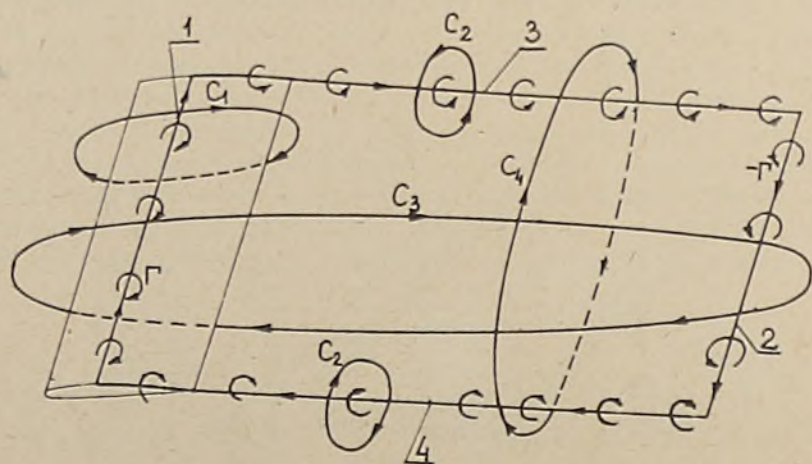
$$dL = \rho v_0 \Gamma dl$$

gdzie: Γ jest cyrkulacją prędkości po pętli C równą sumie natężeń wirów związanych i przebiegających powierzchnię S , rozpiętą na tej pętli. W jaki



Rys.14.10

sposób wiry te przebijają powierzchnię S ? Dla odpowiedzi na to pytanie poprowadzimy na powierzchni S jeszcze jedną pętlę C_1 tuż za wierzchołkiem płata. Pętla C_1 nie obejmuje płata nośnego, a zatem w tym miejscu siła nośna jest równa zero i cyrkulacja prędkości musi też być równa zero. Więć wiry mogą przebijać powierzchnię S tylko w obszarze płata. Zgodnie z twierdzeniem Helmholtza o wirach, te wiry przebijające powierzchnię S mogą być skierowane tylko w kierunku dodatniej osi Ox (rys. 14.10), czyli - jak już wskazano - w kierunku zgodnym ze strugą opływającą płat. Są to, wiemy o tym, wiry swobodne. Wytworzone na powierzchni płata - rozdziału - wiry zgodnie z twierdzeniem Helmholtza muszą rozciągać się do nieskończoności, gdzie zamykają się wirem startowym. Ruch tych wirów swobodnych przy pominięciu lepkości opisuje równanie (7.31a). W modelach obliczeniowych płatów zwykle jednak zakłada się, że wiry swobodne leżą w płaszczyźnie płata tak, jak w przypadku modelu Prandtla. Najprostszym modelem wirowym płata nośnego o skończonej rozpiętości jest tak zwany wir podkowiasty zamknięty w nieskończoności wirem startowym. Pokazuje go rysunek 14.11. Składa się on z wiru związanego 1 o natężeniu równym cyrkulacji prędkości Γ po pętli C_1 , wiru startowego 2 o natężeniu $-\Gamma$ i dwóch wirów swobodnych 3 i 4, również o natężeniach Γ i $-\Gamma$. Widać z rysunku 14.11, że rozpatrywany wir tworzy zamkniętą pętlę włókna wirowego. Natężenie tego włókna wirowego jest stałe w danej chwili i także nie będzie ulegać zmianie z upływem czasu. Ponieważ płat się porusza ruchem jednostajnym, to ta pętla będzie się wydłużać. Wzrośnie energia kinetyczna płynu. Jeżeli poprowadzi się pętlę zamkniętą obejmującą wir związany i wir startowy - pętlę C_3 , lub pętlę obejmującą oba wiry swobodne - C_4 , to zauważymy, że cyrkulacja prędkości po tych pętlach jest równa zero. Zatem jest tu także spełnione II twierdzenie Kelvina o pochodnej cyrkulacji prędkości.



Rys. 14.11

Warunkiem powstania wirów swobodnych $\underline{3}$ i $\underline{4}$ przy płacie o skończonej rozpiętości jest istnienie siły nośnej na tym płacie, a zatem istnienie wiru związanego wywołującego przepływ o cyrkulacji prędkości różnej od zera. Jeżeli siła nośna na płacie o skończonej rozpiętości jest równa zeru, to wiry związane na płacie muszą tworzyć pętle zamknięte w obrębie powierzchni płata. Wtedy cyrkulacja prędkości po dowolnej pętli obejmującej płat jest równa zeru i wiry nie przebijają powierzchni S , pokazanej na rysunku 14.10.

Model wirowy płata dany na rysunku 14.11, choć bardzo prosty, znajduje obecnie zastosowanie przy numerycznym wyznaczaniu charakterystyk hydrodynamicznych płatów nośnych w metodzie kart, polegającej na tym, że cały płat dzieli się na zbiór elementów i każdy z tych elementów zastępuje się wirem podkowiastym [14]. Inne bardziej złożone modele wirowe płatów nośnych będą omówione dalej. Tu wskażemy jeszcze tylko na to, że przy ruchu niestalonym płata, podobnie jak przy płacie o rozpiętości nieskończonej, wiry swobodne typu wiru startowego $\underline{2}$ będą rozciągać się pomiędzy wirami swobodnymi $\underline{3}$ i $\underline{4}$, których natężenie po ich długości musi się zmieniać tak, aby były zachowane twierdzenia o trwałości ruchu wirowego płynu.

14.4. TWIERDZENIE ŻUKOWSKIEGO DLA ELEMENTU POWIERZCHNI WIROWEJ

Niech niezamknięta powierzchnia wirowa S o ciągłej gęstości natężenia wirów $\vec{\gamma}$, zastępująca nieskończenie cienki płat nośny, porusza się ruchem niestalonym w idealnym płynie barotropowym bez oderwania przepływu. Środek płynny jest nieograniczony i poza tą powierzchnią w płynie nie ma innych ciał ani innych osobliwości hydromechanicznych. Poza tą powierzchnią zatem przepływ płynu jest przepływem potencjalnym. Do wyznaczenia rozkładu ciśnień w płynie i na tej powierzchni wirowej można stosować całkę Cauchy'ego-Lagrange'a (13.15a). Z założenia o braku oderwania przepływu wynika, że po obu stronach powierzchni S musi być spełniony kinematyczny warunek brzegowy (8.1):

$$v_n \Big|_S = v_{sn} \quad (8.1)$$

gdzie $\vec{v}_s = \vec{v}_e$ - jest prędkością unoszenia powierzchni S . Jeśli uwzględnimy, że prędkość absolutna płynu

$$\vec{v} = \vec{v}_w + \vec{v}_e = \nabla\phi$$

to warunek (8.1) można zapisać

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_S = \vec{v}_w \cdot \vec{n} \Big|_S + \vec{v}_e \cdot \vec{n} \Big|_S = \vec{v}_e \cdot \vec{n}$$

Stąd wynika, że

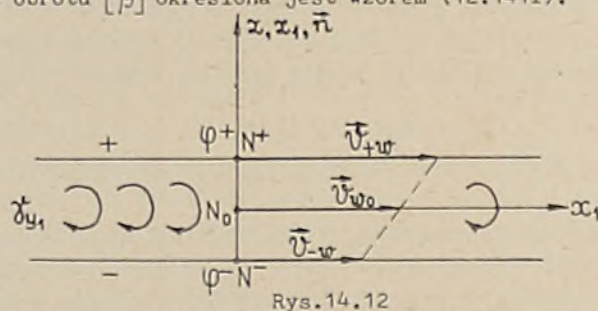
$$\vec{v}_w \cdot \vec{n} = 0 \quad (14.15)$$

i po obu stronach powierzchni S wektor prędkości względnej płynu jest styczny do powierzchni wirowej.

Zanim przejdziemy do wyznaczenia różnicy ciśnień po obu stronach warstwy wirowej S, poprowadzimy w dowolnym punkcie N powierzchni S dwa prawoskrętne kartezjańskie układy współrzędnych. Pierwszy N_0xyz o osi N_0z zgodnej z normalną do dodatniej strony S i drugi $N_0x_1y_1z_1$ związany z prędkością względną \vec{v}_{wo} tak, że oś N_0x_1 pokrywa się z prędkością względną środkowego, dowolnego punktu warstwy wirowej, jak na rysunku 14.12. Na rysunku tym zaznaczono również prędkości względne na dodatniej \vec{v}_{+w} i ujemnej \vec{v}_{-w} stronie warstwy wirowej. Jeśli pomiędzy osiami N_0x i N_0x_1 jest kąt β , to związek pomiędzy wektorami obu układów można znaleźć ze wzoru (12.141g)

$$\begin{Bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{Bmatrix} = [\beta]^T \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}$$

gdzie macierz obrotu $[\beta]$ określona jest wzorem (12.141f).



I tak jeśli uwzględnimy, że

$$\sin \beta = \frac{v_{woy}}{v_{wo}} \quad \cos \beta = \frac{v_{wox}}{v_{wo}}$$

to

$$\vec{j}_1 = -\vec{i} \frac{v_{woy}}{v_{wo}} + \vec{j} \frac{v_{wox}}{v_{wo}} \quad (14.16)$$

Skorzystamy dalej z tego związku. Zastosujmy całkę (13.15a) do punktów N_+ i N_- warstwy wirowej S. Ponieważ warstwa wirowa jest nieskończenie cienka, a siłami masowymi są siły grawitacyjne, to

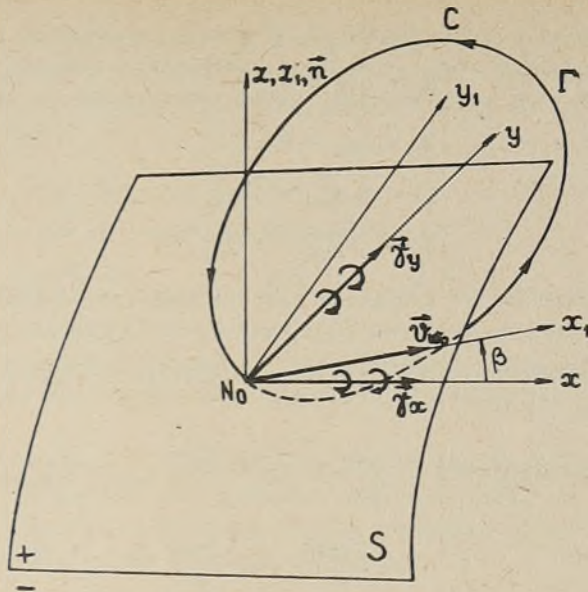
$$\frac{\partial \varphi_+}{\partial t} + \frac{v_{+w}^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} + \mathcal{P}_+ = \frac{\partial \varphi_-}{\partial t} + \frac{v_{-w}^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} + \mathcal{P}_-$$

Więc

$$\Delta \mathcal{P} = \mathcal{P}_- - \mathcal{P}_+ = \frac{\partial(\varphi_+ - \varphi_-)}{\partial t} + \frac{1}{2}(v_{+w}^2 - v_{-w}^2) \quad (14.17)$$

Wyznamy poszczególne składniki powyższego wyrażenia w zależności od gęstości natężenia wirów ζ warstwy wirowej S. Zgodnie ze wzorem (12.101) wiemy, że cyrkulacja prędkości Γ po krzywej C, pokazanej na rysunku 14.13, jest

$$\Gamma = \varphi_+ - \varphi_-$$



Rys.14.13

Stąd

$$\frac{\partial(\varphi_+ - \varphi_-)}{\partial t} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \quad (14.18a)$$

Jeśli przepływ jest ustalony, to $\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0$. Jeśli zaś ten przepływ jest nieustalony, to zmiana w czasie cyrkulacji po konturze C może być tylko spowodowana wpływem wirów swobodnych o osiach równoległych do osi wirów związanych, od których te swobodne wiry odchodzą. Zgodnie z twierdzeniem Kelvina (14.6) zmiana cyrkulacji po konturze C o $\Delta \Gamma$ może być skompensowana powstaniem wirów swobodnych o natężeniu $-\Delta \Gamma$, uniesionych poza kontur C. Wiry swobodne spływają z prędkością względną, w tym przypadku z prędkością v_{wo} . Jeśli dalej oznaczymy przez γ_{-y1} rzut gęstości natężenia wirów swobodnych na kierunek \vec{j}_1 , to sumaryczne natężenie wirów swobodnych uniesionych w czasie dt poza kontur C będzie

$$\gamma_{-y1} v_{wo} dt$$

Stąd zmiana cyrkulacji wzdłuż pętli C jest równa

$$-\Delta \Gamma = \gamma_{-y1} v_{wo} dt \quad \text{i} \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -v_{wo} \gamma_{-y1} \quad (14.81b)$$

Przy zastosowanych oznaczeniach gęstość natężenia wirów, $\vec{\gamma}$ jest:

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_+ + \vec{\gamma}_- \quad \text{gdzie}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\gamma} &= \vec{i} \gamma_x + \vec{j} \gamma_y \\
 \gamma_x &= \gamma_{+x} + \gamma_{-x} \\
 \gamma_y &= \gamma_{+y} + \gamma_{-y} \\
 \vec{\gamma}_- &= \vec{i} \gamma_{-x} + \vec{j} \gamma_{-y} \\
 \vec{\gamma}_+ &= \vec{i} \gamma_{+x} + \vec{j} \gamma_{+y}
 \end{aligned}
 \tag{14.18c}$$

przy czym wskaźnikiem (+) oznaczono wiry związane, a wskaźnikiem (-) - wiry swobodne.

Mając te zależności, możemy obliczyć wszystkie potrzebne nam wielkości. I tak:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{-y1} &= \vec{j}_1 \cdot \vec{\gamma}_- = \left(-\vec{i} \frac{v_{woy}}{v_{wo}} + \vec{j} \frac{v_{wox}}{v_{wo}} \right) \cdot (\vec{i} \gamma_{-x} + \vec{j} \gamma_{-y}) = \\
 &= -\gamma_{-x} \frac{v_{woy}}{v_{wo}} + \gamma_{-y} \frac{v_{wox}}{v_{wo}}
 \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do wzoru (14.18b) uzyskamy wzór dla zmiany cyrkulacji prędkości po pętli C

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \gamma_{-x} v_{woy} - \gamma_{-y} v_{wox}
 \tag{14.19}$$

Wzór (14.19) możemy oczywiście zapisać w postaci:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \vec{k} \cdot (\vec{\gamma}_- \times \vec{v}_{wo}) = \frac{\partial(\varphi_+ - \varphi_-)}{\partial t}
 \tag{14.19a}$$

Należy przy tym pamiętać, że

$$\vec{v}_{wo} = \nabla \varphi - \vec{v}_e
 \tag{14.19b}$$

Ze wzoru (14.19a) wynika wniosek mający duże znaczenie przy budowie modeli wirowych płatów nośnych poruszających się ruchem jednostajnym po linii prostej. Jeśli bowiem ruch płata jest ustalonym, to pochodna lokalna cyrkulacji prędkości jest równa zeru i wtedy

$$\vec{\gamma}_- \times \vec{v}_{wo} = 0
 \tag{14.20}$$

Ponieważ płat się porusza lub nieruchomy płat jest opływany strugą jednorodną, to warunek (14.20) może być spełniony gdy $\vec{\gamma}_- = 0$, czyli gdy nie ma wirów swobodnych (płat nieskończonej rozpiętości lub gdy płat skończonej rozpiętości nie wytwarza siły nośnej); względnie gdy wektory $\vec{\gamma}_-$ i \vec{v}_{wo} są do siebie równoległe. Ale ponieważ wiry spływają z prędkością względną, to wektory $\vec{\gamma}_-$ i \vec{v}_{wo} muszą się pokrywać. Inaczej, włókna wirów swobodnych pokrywają się z liniami prądu. Biorąc dalej pod uwagę wzór (13.108a) widzimy, że wiry swobodne w ruchu ustalonym powierzchni wirowej, zastępującej płat nośny, spełniają także warunek

$$\vec{\Omega} \times \vec{v}_{wo} = 0
 \tag{14.20a}$$

Jeśli prędkości indukowane przez wiry związane i wiry swobodne są wielkościami małymi w stosunku do prędkości unoszenia płata nośnego, powierzchni wirów związanych, to zamiast \vec{v}_{wo} w przybliżeniu można zgodnie ze wzorem (14.19b) podstawić:

$$\vec{v}_{wo} \cong -\vec{v}_e$$

Wtedy warunki (14.20) i (14.20a) przyjmują postać:

$$\vec{\gamma}_- \times \vec{v}_e = 0 \quad \text{lub} \quad \vec{\Omega} \times \vec{v}_e = 0 \quad (14.20b)$$

Powyższe warunki nakładane na powierzchnię wirową utworzoną z wirów swobodnych znacznie upraszczają zadania. Zastosowano je w modelu linii nośnej Prandtl'a, jak na rys. 12.23, oraz w modelu powierzchni wirowej płata nośnego.

Przechodzimy obecnie do wyrażenia drugiego wyrazu wzorem (14.17) przy pomocy prędkości względnej oraz gęstości natężenia wirów $\vec{\gamma}$. Zauważając, że w przyjętym układzie współrzędnych N_0xyz normalna \vec{n} do dodatniej strony powierzchni S jest równa wersorowi \vec{k} , co daje:

$$n_x = \cos(\vec{k}, \vec{i}) = 0 \quad n_y = 0 \quad n_z = 1$$

to na mocy powyższych wyrażen ze wzoru (12.109) wynikają związki:

$$\gamma_x = v_{-wy} - v_{+wy} \quad ; \quad \gamma_y = v_{+wx} - v_{-wx} \quad (14.21)$$

Na podstawie rysunku 14.12 możemy napisać:

$$\begin{aligned} v_{wox} &= \frac{1}{2} (v_{+wx} + v_{-wx}) \\ v_{woy} &= \frac{1}{2} (v_{+wy} + v_{-wy}) \end{aligned} \quad (14.22)$$

Mnożąc odpowiednio przez siebie wyrażenia (14.21) i (14.22) oraz dodając stronami uzyskuje się:

$$\frac{1}{2} (v_{+w}^2 - v_{-w}^2) = -\gamma_x v_{woy} + \gamma_y v_{wox} = \vec{k} \cdot (\vec{v}_{wo} \times \vec{\gamma}) \quad (14.23)$$

Widzimy stąd, że jeżeli przepływ jest ustalony, to

$$\Delta \mathcal{P} = \vec{k} \cdot (\vec{v}_{wo} \times \vec{\gamma}) = \vec{k} \cdot (\vec{v}_{wo} \times \vec{\gamma}_+) + \vec{k} \cdot (\vec{v}_{wo} \times \vec{\gamma}_-)$$

Ale na mocy (14.20) drugi składnik jest równy zeru. Stąd różnica ciśnień po obu stronach warstwy wirowej

$$\Delta \mathcal{P} = \vec{k} \cdot (\vec{v}_{wo} \times \vec{\gamma}_+) \quad (14.24)$$

jest zależna od gęstości natężenia wirów związanych i prędkości względnej w tym miejscu powierzchni wirowej, w której określa się $\Delta \mathcal{P}$. Więc w ruchu ustalonym płata nośnego wiry swobodne wpływają na różnicę ciśnień po obu stronach płata tylko przez prędkości indukowane przez te wiry. Dają one bowiem pewien przyczynek do prędkości \vec{v}_{wo} . Jeśli jednak ten przyczynek jest mały - ma to miejsce przy małych natężeniach wirów lub inaczej przy małym obciążeniu płata nośnego - to zamiast \vec{v}_{wo} podstawiamy $-\vec{v}_e$.

Jeśli płyn jest nieściśliwy, to $\rho = \frac{p}{\rho}$ i

$$\Delta p = \frac{1}{\rho} (p_- - p_+)$$

Wtedy wzór (14.24) przyjmuje postać:

$$\Delta p = p_- - p_+ = \rho \vec{k} \cdot (\vec{v}_{w0} \times \vec{\gamma}_+) \quad (14.24a)$$

Przy założeniu zaś, że $\vec{v}_{w0} \approx -\vec{v}_e$ mamy

$$p_+ - p_- = \rho \vec{k} \cdot (\vec{v}_e \times \vec{\gamma}_+) \quad (14.24b)$$

Ten przypadek był już przez nas rozpatrywany. Jest to zadanie opływu powierzchni wirowej strugą jednorodną, pokazane na rysunku 13.12. Jeśli ta powierzchnia porusza się z prędkością v_0 , to $\vec{v}_e = -\vec{i} v_0$. Uwzględniając dalej, że $\vec{\gamma}_+ = \vec{j} \gamma_y$, na podstawie wzoru (14.24b) uzyskamy wzór (13.35b). Podkreślić należy, że jest to pewne uproszczenie w stosunku do wzoru (14.24a). Podkreślić jeszcze trzeba to, że wzory (14.24a) mogą być zastosowane nie tylko do płatów płaskich, lecz do dowolnej dostatecznie gładkiej powierzchni wirowej, np. do powierzchni wirowej zastępującej śrubę napędową.

Wzory (14.20) i (14.24) wskazują również na to, że jeżeli powierzchnia wirowa utworzona z wirów swobodnych jest opływana strugą jednorodną lub porusza się ruchem jednostajnym w ten sposób, że prędkość strugi jest równoległa do osi wirów, to ciśnienia po obu stronach tej powierzchni w punktach na jednej normalnej do tej powierzchni są takie same. Wiemy już, że tak być powinno - przykład przedstawiony na rysunku 13.12a.

Przejdźmy obecnie do ruchu nieustalonego powierzchni wirowej S. Podstawiając do wzoru (14.17) wyrażenia (14.19a) oraz (14.23) przy uwzględnieniu, że $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_+ + \vec{\gamma}_-$ dostaniemy znów wzór (14.24). Stąd widać, że wzory (12.24) dla różnicy ciśnień po obu stronach warstwy - powierzchni - wirowej są także ważne dla ruchu nieustalonego tej powierzchni. W ogólnym przypadku lepiej podstawić we wzorze (14.24) zamiast wektora \vec{k} zewnętrzną normalną \vec{n} do dodatniej strony powierzchni S; wtedy

$$\Delta p = \vec{n} \cdot (\vec{v}_{w0} \times \vec{\gamma}_+) \quad (14.25)$$

Zauważyć jest łatwo, że jeśli na płacie nośnym nie powstaje siła nośna o charakterze cyrkulacyjnym, to wirów swobodnych nie ma; linie wirowe na płacie są liniami zamkniętymi. Dla tego przypadku opływu powierzchni wirowej, zastępującej płat nośny zgodnie ze wzorami (14.17), (14.18a) oraz (14.23), różnica funkcji ciśnienia Δp będzie

$$\Delta p = -\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \vec{n}_0 \cdot (\vec{v}_{w0} \times \vec{\gamma}) \quad (14.26)$$

przy czym $\vec{\gamma}_- = 0$ i $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_+$.

Wzory (14.25) i (14.26) stanowią zapis twierdzenia Żukowskiego dla elementu powierzchni wirowej. Są one ważne dla dowolnego ruchu tej powierzchni. Trudność w ich stosowaniu polega na tym, że są to wyrażenia nieliniowe ze względu na $\vec{\gamma}$. Jak już wyżej bowiem wykazano, prędkość względna

plynu v_{wo} zależy w ogólnym przypadku od gęstości natężenia wirów $\vec{\zeta}$. Dlatego przy małych obciążeniach powierzchni wirowej dość często stosuje się wzór uproszczony (14.24b), względnie stosuje się metody ujmujące w sposób przybliżony wpływ prędkości indukowanych przez warstwę wirową na prędkość.

14.5. WARUNEK BRZEGOWY NA POWIERZCHNI WIROWEJ UTWORZONEJ Z WIRÓW SWOBODNYCH

Jako jeszcze jedno zastosowanie twierdzenia Kelvina (14.6) o pochodnej cyrkulacji prędkości wyrazimy w postaci matematycznej warunek brzegowy na powierzchni wirowej, utworzonej z wirów swobodnych. Wiemy już, że w tym przypadku powierzchni wirowej ciśnienia spełniają warunek:

$$p_+ = p_- \quad \text{lub} \quad \Delta \mathcal{P} = 0 \quad (14.27)$$

Rozpiszmy go stosując całkę (13.10) do obu stron tej powierzchni. Mamy:

$$\frac{\partial \varphi_+}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi_+ + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_+)^2 = \frac{\partial \varphi_-}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi_- + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_-)^2$$

Uwzględniając, że moduły prędkości indukowanych po obu stronach powierzchni wirowej są takie same:

$$|\nabla \varphi_+| = |\nabla \varphi_-|$$

powyższe równanie możemy zapisać tak:

$$\frac{\partial (\varphi_+ - \varphi_-)}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla (\varphi_+ - \varphi_-) = 0 \quad (14.28)$$

Przy wzięciu pod uwagę związku:

$$\Gamma = \varphi_+ - \varphi_-$$

warunek (14.27) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \Gamma = 0 \quad (14.28a)$$

Ponieważ w środku warstwy wirowej prędkość indukowana przez wiry jest równa zeru, równanie (14.28a) jest zapisem wzoru (14.6) w ruchomym układzie odniesienia. Stąd warunek (14.27) jest równoważny twierdzeniu Kelvina o pochodnej cyrkulacji prędkości dla idealnego płynu barotropowego znajdującego się w potencjalnym polu sił masowych.

Widzimy tu wyraźnie znaczenie twierdzeń o trwałości ruchu wirowego do badania modeli matematycznych dla problemów związanych z przepływem płynu lepkiego. Dzięki tym modelom sprowadzamy te problemy do przepływów płynu idealnego. Ale i w tych upraszczających modelach występują dość duże trudności natury matematycznej. W związku z tym koniecznym staje się - w praktyce - wprowadzenie dalszych uproszczeń. Powstaje zatem pytanie: Co warte są praktycznie takie obliczenia? Odpowiedź na to pytanie może dać tylko eksperyment. Ale jak taki eksperyment należy przeprowadzić? Musimy

się tym zagadnieniem również bliżej zająć. Zrobimy to nieco później. Tu przypomnimy jeszcze o tym, że gdyby można było rozwiązać dla ogólnych przypadków równanie Naviera i Stokesa - oczywiście to też model, model płynu newtonowskiego - to w wyniku uzyskalibyśmy pole prędkości i pole ciśnienia dalej wektor naprężeń \vec{p}_n i reakcje hydromechaniczne \vec{R} i \vec{M} .

15. WARUNKI BRZEGOWE NA SWOBODNEJ POWIERZCHNI

Obiekty poruszające się na swobodnej powierzchni wody lub w jej pobliżu, pod tą powierzchnią lub nad nią, powodują powstawanie fal powierzchniowych. Przyczyną powstania fal powierzchniowych może być również ruch zbiornika nie całkowicie wypełnionego płynem. Takie przypadki zbiorników znajdują się także na statkach: zbiorniki paliwa, wody, specjalne zbiorniki do przewożenia ładunków płynnych a także zbiorniki z wodą służące jako elementy wykonawcze urządzeń stabilizacyjnych kołysania statków na morzu sfalowanym. Główną przyczyną falowania morza jest wiatr. Dlatego nazywa się to falowanie swobodnej powierzchni morza falowaniem wiatrowym. Jest to najbardziej złożony przypadek falowania powierzchni swobodnej. Prócz tego falowanie swobodnej powierzchni może być spowodowane przez wchodzenie różnych obiektów do wody przez jej swobodną powierzchnię; np. gdy wrzucamy jakiś przedmiot do wody (kamień), wejście torpedy lub rakiety typu powietrze-woda, przez wybuchy podwodne, a także przez trzęsienie ziemi.

Przy ruchu jednostajnym statków obserwuje się, że woda jest sfalowana za statkiem, a przed statkiem jest nadal spokojna. Jeśli natomiast statek kołysze się na początkowo gładkiej powierzchni swobodnej wody, to wytwarzane przez niego fale rozchodzą się na tej powierzchni w kierunku od statku. Inaczej: statek promieniuje fale powierzchniowe. Te obserwowane zjawiska należy uwzględnić przy matematycznym sformułowaniu zadań o falowaniu powierzchniowym. Podaje się je w postaci tak zwanego warunku o promieniowaniu. Gdy statek zaś kołysze się na wodzie już sfalowanej, to stanowi on pewną przeszkodę dla nadbiegających fal, które odbijają się od burt statku. Występuje w tym przypadku zjawisko odbicia i załamania fal powierzchniowych, zatem dyfrakcja fal.

Do matematycznego sformułowania tych różnych praktycznych dla okrętownictwa zadań o falowaniu powierzchniowym konieczna jest znajomość warunku brzegowego na swobodnej powierzchni zbiornika cieczy.

Podstawowe założenia dotyczące modelu cieczy przeważnie są takie:

- ciecz jest jednorodna i nieściśliwa;
- ciecz jest nielepka;
- przepływ w ruchu falowym cieczy jest bezwirowy.

Ponadto zakłada się, że można pominąć napięcie powierzchniowe. Jak wpływa napięcie powierzchniowe na obraz falowania powierzchni swobodnej oraz kiedy można pominąć wpływ lepkości, powiemy nieco później, kiedy będziemy znać już podstawowe charakterystyki falowania powierzchniowego.

Przy powyższych założeniach ogólne warunki brzegowe już znamy. Są nimi wyrażenia (8.1) oraz (8.7). Pozostaje nam tylko nadanie im rozwiniętej formy.

Zgodnie ze wzorem (8.7) ciśnienia po obu stronach powierzchni swobodnej muszą być takie same. Warunek zaś (8.1) sprowadza się do warunku materialności powierzchni swobodnej, czyli do warunku (12.134). Stąd jeśli założymy, że na powierzchnię swobodną działa ciśnienie atmosferyczne p_a oraz na pewien obszar tej powierzchni dowolny układ nadciśnień $p_c(x, y, t)$, to warunki te możemy zapisać:

$$p_a + p_c = p \quad (15.1)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad (15.2)$$

przy czym wyrażenie (15.2) jest pochodną materialną. Założymy dalej, że układ ciśnień porusza się po swobodnej powierzchni ruchem dowolnym wraz z prędkością \vec{v}_e , przy czym wektor \vec{v}_e leży w płaszczyźnie równoległej do niezakłóconej swobodnej powierzchni wody.

W celu napisania warunków (15.1) i (15.2) wprowadzimy dwa układy współrzędnych: pierwszy $O_0x_0y_0z_0$, nieruchomy w przestrzeni, o osiach O_0x_0 i O_0y_0 leżących na niezakłóconej powierzchni swobodnej, i osi O_0z_0 skierowanej pionowo w dół oraz układ ruchomy $Oxyz$, związany z poruszającym się układem ciśnień $p_c(x, y, t)$. Układ ciśnień p_c działa na dowolną powierzchnię S_0 . Powyższe układy odniesienia wraz z powierzchnią S_0 oraz odkształconą - sfalowaną w powierzchnię swobodną

$$S = \zeta(x, y, t) - z = 0 \quad (15.3)$$

pokazuje rysunek 15.1. Widzimy, że osi Ox i Oy układu ruchomego także znajdują się na niezakłóconej powierzchni swobodnej. Prędkość unoszenia układu ruchomego \vec{v}_e będzie:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + \vec{k}\omega \times \vec{r} = \vec{i}u_1 + \vec{j}u_2 \quad (15.4)$$

gdzie:

$$u_1 = v_{0x} - \omega y \quad u_2 = v_{0y} + \omega x \quad (15.4a)$$

Celowym okazuje się rozpisywanie (15.1) i (15.2) w ruchomym układzie współrzędnych $Oxyz$. Uzyska się wtedy bardziej ogólne wyrażenie. Do nieruchomego układu odniesienia można bowiem zawsze wrócić przez założenie prędkości unoszenia $\vec{v}_e = 0$.

Stosując operator pochodnej materialnej w ruchomym układzie odniesienia (12.171b) do kinematycznego warunku brzegowego (15.2) otrzymujemy:

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla S + \nabla \phi \cdot \nabla S = 0 \quad (15.5)$$

bo założyliśmy przepływ potencjalny.

Jeśli wprowadzimy dalej oznaczenia dla pochodnych cząstkowych:

$$\varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \varphi_{t'} = \frac{\partial \varphi}{\partial t'}; \quad \xi_{t'} = \frac{\partial \xi}{\partial t'}; \quad \xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ itp.}$$

to przy uwzględnieniu wyrażenia (15.3) i (15.4) równanie (15.5) przyjmie postać:

$$\xi_{t'} - \vec{v}_e \cdot \nabla \xi + \varphi_x \xi_x + \varphi_y \xi_y - \varphi_z = 0 \quad (15.6)$$

bo

$$\begin{aligned} \vec{v}_e \cdot \nabla \xi &= u_1 \xi_x + u_2 \xi_y = \vec{v}_e \cdot \nabla \xi \\ \nabla \varphi \cdot \nabla \xi &= \varphi_x \xi_x + \varphi_y \xi_y - \varphi_z \cdot 1 \end{aligned} \quad (15.6a)$$

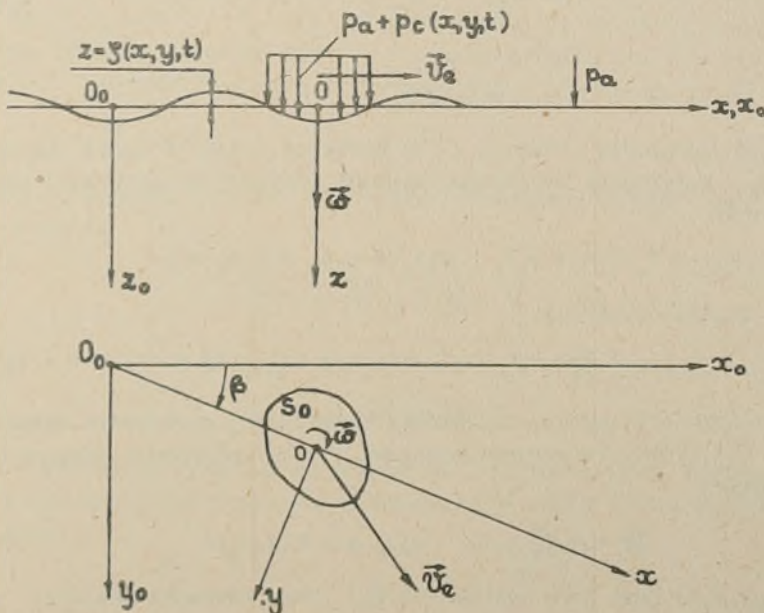
Warunek ten musi być wypełniony na powierzchni swobodnej

$$z = \xi(x, y, t) \quad (15.3)$$

podlegającej wyznaczeniu w wyniku rozwiązania zadania o falowaniu.

Przechodzimy do napisania warunku dynamicznego (15.2), również w ruchomym układzie odniesienia. Zastosujemy tu całkę równania ruchu w postaci (13.12) przy uwzględnieniu oznaczeń (15.4). Stałą $C(t)$ jak zwykle wyznaczmy daleko przed układem ciśnień na swobodnej powierzchni wody, gdzie $\vec{v} = \nabla \varphi = 0$; $p = p_0$ i $z = \xi = 0$. Wtedy pod układem ciśnień na powierzchni swobodnej mamy:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \mu \varphi - gz + \frac{p_a + p_c}{\rho} = \frac{p_a}{\rho}$$



Rys. 15.1

Stąd dla $z = \zeta(x, y, t)$ mamy drugi warunek brzegowy:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \mu \varphi - gz = - \frac{p_0(x, y, t)}{\rho} \quad (15.7)$$

Z powyższego warunku możemy wyznaczyć kształt swobodnej powierzchni

$$z = \zeta(x, y, t) = \frac{1}{g} A(x, y, z = \zeta(x, y, t), t) \quad (15.8)$$

gdzie:
$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \mu \varphi + \frac{p_c}{\rho} \quad (15.8a)$$

Przy pomocy zależności (15.8) można z równania (15.6) wyeliminować pochodne ζ i uzyskać równanie zawierające tylko poszukiwany potencjał φ . I tak, żeby znaleźć pochodną $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, należy zróżniczkować względem czasu wyrażenie (15.8) w ruchomym układzie odniesienia. Zgodnie z wzorem (12.172) mamy

$$g (\zeta_t - \vec{v}_e \cdot \nabla \zeta) = A_t - \vec{v}_e \cdot \nabla A + A_z (\zeta_t - \vec{v}_e \cdot \nabla \zeta)$$

Więc

$$\zeta_t - \vec{v}_e \cdot \nabla \zeta = \frac{1}{g - A_z} (A_t - \vec{v}_e \cdot \nabla A) \quad (15.9a)$$

Podobnie

$$g \zeta_x = A_x + A_z \zeta_x$$

$$g \zeta_y = A_y + A_z \zeta_y$$

i dalej

$$\zeta_x = \frac{1}{g - A_z} A_x \quad (15.9b)$$

$$\zeta_y = \frac{1}{g - A_z} A_y \quad (15.9c)$$

Podstawiając wyrażenia (15.9a, b, c) do równania (15.6) i dalej mnożąc je przez $(g - A_z)$ uzyskujemy podstawowy warunek brzegowy na swobodnej powierzchni w postaci:

$$A_t - \vec{v}_e \cdot \nabla A + \varphi_x A_x + \varphi_y A_y + \varphi_z A_z - g \varphi_z = 0 \quad (15.10)$$

Możemy go zapisać prościej:

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla A + \nabla \varphi \cdot \nabla A - g \varphi_z = 0 \quad (15.10a)$$

Jeśli zastosuje się operator pochodnej materialnej w ruchomym układzie odniesienia (12.171b), to warunek brzegowy (15.10) przyjmuje jeszcze bardziej prostą postać:

$$\frac{dA}{dt} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z = \zeta(x, y, t) \quad (15.10b)$$

gdzie $A(x, y, z, t)$ jest dane wzorem (15.8a). Jako równanie skalarne wzór (15.10b) jest ważny w każdym układzie współrzędnych leżącym na niezakłóconej powierzchni wody. W zależności od rozpatrywanego zadania można nadać temu równaniu różne postacie. Jeśli osi: $O_0 z_0$, Oz są skierowane pionowo w

górze, to oczywiście (dlaczego?) przy g należy zmienić znak. Ta uwaga dotyczy wszystkich dotychczas napisanych wyrażeń.

Wzór (15.10b) wyprowadźcie w nieruchomym układzie odniesienia. Możecie tu zastosować postępowanie jak wyżej zakładając prędkość unoszenia $\vec{v}_e = 0$. Można wzór (15.10b) dostać jeszcze w sposób prostszy. Wystarczy wziąć pochodną materialną wyrażenia uzyskanego z (15.8)

$$\frac{d}{dt} [A - g \zeta(x, y, t)] = 0$$

i uwzględnić wyrażenie (15.6) dla kinematycznego warunku na swobodnej powierzchni. Dla przypadku $\vec{v}_e = 0$ bowiem mamy:

$$\frac{dA}{dt} - g \frac{d\zeta}{dt} = 0$$

Ale

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

bo

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

Więc dla $z = \zeta(x, y, t)$ kinematyczny warunek brzegowy jest

$$\frac{dA}{dt} - g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (15.10b)$$

Zanim rozpiszemy dalej równanie (15.10b), zrobimy tu prosty przykład jego zastosowania. Niech na całej swobodnej powierzchni ciśnienie będzie stałe, równe ciśnieniu atmosferycznemu i niech pokrywają się oba układy odniesienia. Zatem $p_c = 0$ i $\vec{v}_e = 0$. Dalej założymy, że prędkości ruchu falowego są małe. Wtedy rozwijając funkcję A w szereg Taylora w otoczeniu płaszczyzny $z = 0$ i ograniczając się tylko do wyrazów pierwszego rzędu mamy:

$$A = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu \phi, \quad \phi(x, y, 0, t) \quad \text{dla } z = 0$$

Stąd warunek brzegowy (15.10b) po dalszym odrzuceniu wyrazów nieliniowych przyjmie postać:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} - g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z = 0 \quad (15.11)$$

a wzór dla wyznaczenia kształtu swobodnej powierzchni będzie

$$z = \zeta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi(x, y, 0, t)}{\partial t} \quad (15.12)$$

bowiem μ w końcowych wyrażeniach należy założyć równe zero. Postępując analogicznie jak wyżej dla przypadku jednostajnego ruchu cienkiego statku nawodnego mamy:

$$\vec{v}_e = \vec{i} v_0, \quad p_c = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

oraz

$$A = -v_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu \phi$$

Zakładając dalej $\nabla\varphi \cdot \nabla A = 0$ z równania (15.10a) dostajemy:

$$-v_0 \frac{\partial A}{\partial x} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Uwzględniając zlinearyzowane wyrażenie dla funkcji A mamy:

$$v_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - v_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

lub

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{v_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{g}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z = 0 \quad (15.13)$$

Kształt swobodnej powierzchni wody określa wyrażenie

$$z = \zeta = -\frac{v_0}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, 0)}{\partial x} \quad (15.14)$$

Jeśli założy się równą zeru lepkość Rayleigh'a, to warunki brzegowe (15.11) i (15.13) będą miały najbardziej znaną w hydromechanice okrętowej postać:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (15.11a)$$

dla $z = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{g}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (15.13a)$$

Przy stosowaniu powyższych warunków należy dołączyć jeszcze warunek eliminujący swobodne fale powierzchniowe; inaczej - warunek na nieskończoności, zwany także warunkiem promieniowania.

Warunek ogólny (15.10b) pozwala na znalezienie szczególnych przypadków dla wszystkich możliwych zagadnień hydromechanicznych związanych ze swobodną powierzchnią, kiedy wpływ siły napięcia powierzchniowego i siły lepkości jest możliwy do pominięcia.

Obecnie postaramy się o rozpisanie warunku (15.10a) przy pomocy wyrażenia (15.8a). Zatem:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{d \vec{v}_e}{dt} \cdot \nabla \varphi - \vec{v}_e \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_c}{\partial t} \quad (15.15a)$$

$$\nabla A = \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla (\vec{v}_e \cdot \nabla \varphi) + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \varphi)^2 + \mu \nabla \varphi + \frac{1}{\rho} \nabla p_c$$

$$\begin{aligned} -\vec{v}_e \cdot \nabla A &= -\vec{v}_e \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \nabla (\vec{v}_e \cdot \nabla \varphi) - \frac{1}{2} \vec{v}_e \cdot \nabla (\nabla \varphi)^2 - \\ &\quad - \mu \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{\rho} \vec{v}_e \cdot \nabla p_c \end{aligned} \quad (15.15b)$$

$$\begin{aligned} \nabla \varphi \cdot \nabla A &= \nabla \varphi \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla \varphi \cdot \nabla (\vec{v}_e \cdot \nabla \varphi) + \frac{1}{2} (\nabla \varphi) \cdot \nabla (\nabla \varphi)^2 + \mu (\nabla \varphi)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{\rho} (\nabla \varphi) \cdot \nabla p_c \end{aligned} \quad (15.15c)$$

Podstawiając wyrażenia (15.15a,b,c) do równania (15.10a) i uwzględniając tożsamość

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi)^2 = (\nabla \varphi) \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

dostajemy następującą postać warunku brzegowego (15.10b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \vec{v}_e \cdot \nabla (\vec{v}_e \cdot \nabla \varphi) + \mu (\nabla \varphi - \vec{v}_e) \cdot \nabla \varphi + \\ + 2 (\nabla \varphi - \vec{v}_e) \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d \vec{v}_e}{dt} \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{2} \vec{v}_e \cdot \nabla (\nabla \varphi)^2 + \\ + \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla (\nabla \varphi)^2 - \nabla \varphi \cdot \nabla (\vec{v}_e \cdot \nabla \varphi) = - \frac{1}{\rho} \frac{dp_c}{dt} \end{aligned} \quad (15.16)$$

Jeśli wprowadzimy prędkość względną

$$\vec{v}_w = \vec{v} - \vec{v}_e = \nabla \varphi - \vec{v}_e \quad (15.17)$$

oraz uwzględnimy tożsamości:

$$\nabla (\nabla \varphi)^2 = 2 \nabla \varphi \cdot (\nabla \otimes \nabla \varphi)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\nabla \varphi) \cdot \nabla (\nabla \varphi)^2 &= \frac{1}{2} \vec{v}_e \cdot \nabla (\nabla \varphi)^2 = \vec{v}_w \cdot (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \otimes \nabla \varphi) \\ \vec{v}_e \cdot \nabla (\vec{v}_e \cdot \nabla \varphi) - \nabla \varphi \cdot \nabla (\vec{v}_e \cdot \nabla \varphi) &= - \vec{v}_w \cdot \nabla (\vec{v}_e \cdot \nabla \varphi) = \\ &= - \vec{v}_w \cdot [(\nabla \otimes \vec{v}_e) \cdot \nabla \varphi + \vec{v}_e \cdot \nabla \otimes \nabla \varphi] \end{aligned}$$

to równanie (15.16) można zapisać tak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2 \vec{v}_w \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \vec{v}_w \cdot \nabla \varphi - \frac{d \vec{v}_e}{dt} \cdot \nabla \varphi - \\ - \vec{v}_w \cdot (\nabla \otimes \vec{v}_e) \cdot \nabla \varphi + \vec{v}_w \cdot (\vec{v}_w \cdot \nabla \otimes \nabla \varphi) = - \frac{1}{\rho} \frac{dp_c}{dt} \end{aligned} \quad (15.18)$$

Zapisy warunku brzegowego (15.16) i (15.18) są równoważne zapisowi najprostszemu (15.10b). Zakładając, że układ ruchomy Oxyz pokrywa się z układem nieruchomym, ($\vec{v}_e = 0$), dostaje się nieliniowy warunek brzegowy na swobodnej powierzchni wody, wyrażony w nieruchomym układzie odniesienia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2 (\nabla \varphi) \cdot \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu (\nabla \varphi)^2 + \\ + (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi \cdot \nabla \otimes \nabla \varphi) = - \frac{1}{\rho} \frac{dp_c}{dt} \end{aligned} \quad (15.19)$$

Wyrażenie (15.19) może być szybko znalezione także ze wzoru (15.10b) przy uwzględnieniu (15.8a) dla $\vec{v}_e = 0$. Podstawiając (15.8a) do wzoru (15.10b) dostajemy:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \mu \varphi + \frac{p_0}{\rho} \right] - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Uwzględniając dalej, że

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\nabla\varphi)^2 = \nabla\varphi \cdot \nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot (\nabla\varphi \cdot \nabla \otimes \nabla\varphi)$$

$$\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi$$

mamy wyrażenie (15.19).

Widzimy, że temu samemu warunkowi brzegowemu na swobodnej powierzchni można nadać różne postacie; najprostszy zapis tego warunku jest (15.10b). Widzimy dalej, że warunek brzegowy w ruchomym układzie odniesienia ma postać bardziej złożoną od tego warunku wyrażonego w układzie nieruchomym. Dotychczas brak jest rozwiązania zadań o przepływach cieczy ze swobodną powierzchnią, uwzględniających pełen nieliniowy warunek brzegowy na swobodnej powierzchni. Przeważnie stosuje się warunek zlinearyzowany i to tylko dla zagadnień bardzo prostych.

15.1. LINIOWY WARUNEK BRZEGOWY NA SWOBODNEJ POWIERZCHNI

Warunki (15.10), (15.16), (15.18) dla wyznaczenia potencjału φ stosowane są na aktualnej swobodnej powierzchni cieczy $z = \xi(x, y, t)$, określonej wyrażeniami (15.8) zawierającymi poszukiwany potencjał prędkości φ .

W celu usunięcia tej podstawowej niedogodności zakłada się, że potencjał φ może być analitycznie przedłużony z aktualnej swobodnej powierzchni $z = \xi(x, y, t)$ na płaszczyznę $z = 0$. Można wtedy φ rozwinąć w szereg Taylora:

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, 0, t) + \xi \left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{1}{2} \xi^2 \left. \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right|_{z=0} + \dots$$

przy czym ξ jest określone wzorami: (15.8) i (15.8a) z tym, że we wzorze (15.8a) pozostawia się tylko wyrazy liniowe oraz zakłada się $\mu = 0$. Tak uzyskane rozwinięcia dla potencjału φ podstawia się do równania (15.16) i uzyskuje się warunek ważny dla $z = 0$. Dotychczas przeważnie ograniczono się do wyrazów drugiego rzędu i to tylko dla szczególnych przypadków równania (15.16).

Przy założeniu, że powstające fale mają małą amplitudę w stosunku do długości fali, dobrym przybliżeniem jest ograniczenie się tylko do wyrazów liniowych w równaniu (15.16). Wtedy dla $z = 0$ ogólny liniowy warunek brzegowy na swobodnej powierzchni będzie mieć postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} - g \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \vec{v}_e \cdot \nabla(\vec{v}_e \cdot \nabla\varphi) - \mu \vec{v}_e \cdot \nabla\varphi - \\ - 2 \vec{v}_e \cdot \nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{d\vec{v}_e}{dt} \cdot \nabla\varphi = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_c}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot \nabla p_c - \vec{v}_e \cdot \nabla p_c \right) \end{aligned} \quad (15.20)$$

Kształt zaś powierzchni wyrazi się wzorem:

$$z = \zeta = \frac{1}{g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{\rho} p_c \right]_{z=0} \quad (15.21)$$

Jeśli wprowadzimy operator:

$$\left(\frac{\partial'}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2 \vec{v}_e \cdot \nabla \frac{\partial'}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \nabla (\vec{v}_e \cdot \nabla) \quad (15.22)$$

to warunek (15.20) i wzór (15.21) można zapisać prościej:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial'}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \right)^2 \varphi + \mu \left(\frac{\partial'}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \right) \varphi - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{d \vec{v}_e}{dt} \cdot \nabla \varphi = \\ & = - \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial'}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \right) p_c + \nabla \varphi \cdot \nabla p_c \right] \text{ dla } z=0 \end{aligned} \quad (15.20a)$$

$$z = \zeta = \frac{1}{g} \left[\left(\frac{\partial'}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \right) \varphi + \frac{1}{\rho} p_c \right]_{z=0} \quad (15.21a)$$

Zwrócić należy uwagę na to, że jeżeli najpierw zlinearyzuje się warunki (15.6) i (15.7):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \zeta = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (15.23a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi + \mu \varphi - g \zeta = - \frac{1}{\rho} p_c \quad (15.23b)$$

które są ważne dla $z=0$, to różniczkując (15.23b) względem czasu w układzie ruchomym i podstawiając do tak uzyskanego równania wyrażenie (15.23a) uzyska się wzór (15.20) z pominięciem wyrazu $\nabla \varphi \cdot \nabla p_c$. We wszystkich dotychczas znanych wyrażeniach dla warunku brzegowego na swobodnej powierzchni, dotyczących ruchu układu ciśnień po tej powierzchni, pominięto ten liniowy wyraz.

15.1.1. Szczególne przypadki liniowego warunku brzegowego na swobodnej powierzchni

Z ogólnych wyrażeń (15.20), (15.20a) dla liniowego warunku brzegowego na swobodnej powierzchni można prosto uzyskać wszystkie znane szczególne przypadki tego warunku oraz przypadki bardziej złożone od stosowanych dotychczas w hydromechanice. Pokażemy to na następujących przykładach.

Przykład 1. Niech po swobodnej powierzchni porusza się dowolny układ ciśnień $p_c(x, y, t)$. Chcemy badać przepływ cieczy, wywołany przez ten układ ciśnień, w nieruchomym układzie odniesienia. Należy zatem w równaniu (15.20) i wyrażeniu (15.21) podstawić $\vec{v}_e = 0$. Uwzględniając to otrzymujemy dla $z = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_c}{\partial t} + \nabla \varphi \cdot \nabla p_c \right) \quad (15.24a)$$

$$\zeta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p_c \right)_{z=0} \quad (15.24b)$$

Tu potencjał φ wyznaczany jest w nieruchomym układzie odniesienia. Warunek ten z pominięciem lepkości Rayleigh'a oraz wyrazu $\nabla\varphi \cdot \nabla p_c$ był stosowany przy badaniu reakcji hydromechanicznych, a w szczególności oporu falowego poduszkowców. Zauważmy, że jeżeli nawodny statek wypornościowy porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej, to jego część nawodna wywołuje pewne pole prędkości w powietrzu w pobliżu statku, co w efekcie daje pewien wędrujący wraz ze statkiem układ ciśnień $p_c(x, y, t)$. Ten efekt w hydromechanice okrętu się pomija. Czy zawsze jest to uzasadnione?

Badając wzajemne oddziaływanie płatów nośnych i kadłuba wodolotu w stanie lotu należy ten efekt uwzględnić. Bowiem na podstawie wzoru (13.25) dla współczynnika ciśnienia i równania ciągłości

$$S_1 v_1 = S_0 v_0$$

możemy jakościowo ocenić, że $\frac{\Delta p}{q} \approx -20$. To zadanie czeka na pełniejsze rozwiązanie.

Przykład 2. Na swobodnej powierzchni cieczy panuje stałe ciśnienie $p = p_0$. Dla sformułowania zadań liniowych ruchu falowego cieczy w nieruchomym układzie odniesienia mamy warunek brzegowy

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z=0 \quad (15.11)$$

$$\xi = \frac{1}{g} \frac{\partial g(x, y, 0, t)}{\partial t} \quad (15.12)$$

otrzymany z (15.24a) przez założenie $p_c = 0$. Jeśli pominie się lepkość Rayleigh'a, to uzyska się ze wzoru (15.11) najbardziej znaną i najczęściej dotychczas stosowaną postać liniowego warunku na swobodnej powierzchni:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (15.25)$$

Wtedy jednak, jak już wskazywano, należy jeszcze dołączyć warunek wypromieniowania.

Warunki (15.11), (15.25) są stosowane do badania przepływów wody, wywołanych kołysaniem statku. Dotychczas różnymi metodami rozwiązano zadanie płaskie dla walca o kierownicy mającej kształt wręgopodobny. Ponadto warunki te były stosowane do badań ruchu falowego cieczy wywołanego pulsującymi osobliwościami hydromechanicznymi, a warunek (15.25) do badania fal swobodnych. Przypomnijmy, że dla osi Oz skierowanej pionowo w górę przy wyrazach zawierających przyspieszenie grawitacyjne należy zmienić znak na przeciwny.

Przykład 3. Niech zmienny w czasie układ ciśnień $p_c(x, y, t)$, dany w układzie ruchomym, porusza się z prędkością $\vec{v}_e = \vec{i} v_0(t)$. Potencjał prędkości φ wyrażony w układzie ruchomym, związanym z układem ciśnień, będzie funkcją współrzędnych i czasu. Ponieważ dla tego przypadku ruchu $\vec{v}_e \cdot \nabla(\vec{v}_e \cdot \nabla \varphi) = v_0^2(t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, to warunek (15.20) przyjmie postać:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} + v_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2 v_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} -$$

$$- \frac{d v_0}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_c}{\partial t} + \nabla \varphi \cdot \nabla p_c - v_0 \frac{\partial p_c}{\partial x} \right) \quad (15.26a)$$

a kształt swobodnej powierzchni na podstawie wzoru (15.21) będzie:

$$z = \zeta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} p_c \right)_{z=0} \quad (15.26b)$$

Widzimy, że warunek (15.26a) ma postać bardzo złożoną. Jeśli rozpatrywać się będzie przypadek $\vec{v}_e = \vec{i} v_0 = \text{const}$, to odpadnie tylko ostatni wyraz lewej strony równania i warunek brzegowy nadal będzie mieć postać bardziej złożoną niż postać warunku (15.24a). Może się zatem okazać łatwiejszym rozpatrywanie powyższego zadania w nieruchomym układzie odniesienia.

Jeśli założymy $p_c = 0$ i $\vec{v}_e = \vec{i} v_0 = \text{const}$, to uzyskamy:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} + v_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2 v_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} = 0 \quad (15.26c)$$

$$\zeta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{z=0} \quad (15.26d)$$

Warunek (15.26c) był stosowany do badania układu fal na swobodnej powierzchni wody, wywołanych jednostajnym ruchem po linii prostej zanurzonego pod powierzchnią wody pulsującego źródła. Może on być zastosowany do badania reakcji hydrodynamicznych działających na kołyszący się płaski walec o przekroju wręgodobnym i jednocześnie dryfujący ze stałą prędkością, prostopadłą do tworzących tego walca.

Przykład 4. Niech po swobodnej powierzchni wody porusza się jednostajnym ruchem po linii prostej układ ciśnień niezmienny w czasie. Wtedy w układzie odniesienia związanym z tym układem ciśnień pole prędkości cieczy będzie polem ustalonym. Więc potencjał prędkości φ będzie także ustalony. Dla tego przypadku:

$$\vec{v}_e = \vec{i} v_0 = \text{const} \quad p_c(x, y) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

i warunek (15.26a) przybierze postać:

$$v_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{v_0}{\rho} \frac{\partial p_c}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \nabla p_c \cdot \nabla \varphi \quad (15.27a)$$

$$\zeta = - \frac{v_0}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{\rho g} p_c \quad (15.27b)$$

Przy pominięciu ostatniego wyrazu prawej strony wyrażenia (15.27a) ten warunek był stosowany do badania oporu falowego poduszki. Należałoby sprawdzić wpływ pominięcia wyrazu $\nabla \varphi \cdot \nabla p_c$ na obraz falowania swobodnej powierzchni i opór falowy poduszki.

Przykład 5. Niech pod swobodną powierzchnią cieczy porusza się jednostajnym ruchem po linii prostej osobliwość hydromechaniczna: źródło, dipol, włókno wirowe o

$$Q = \text{const}; \quad \vec{m} = \text{const}; \quad \text{lub} \quad \Gamma = \text{const}$$

Dla tego przykładu

$$\vec{v}_e = \vec{I} v_0 = \text{const}; \quad p_c = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

i na podstawie (15.20) lub (15.27) mamy dla $z=0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{v_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{E}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (15.28a)$$

$$\zeta = - \frac{v_0}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (15.28b)$$

Przy pominięciu lepkości Rayleigh'a z równania (15.28a) uzyskuje się najbardziej znany przypadek warunku brzegowego na swobodnej powierzchni:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{E}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z=0 \quad (15.28c)$$

stosowanego dla przypadku jednostajnego ruchu obiektu, z prędkością $v_0 = \text{const}$, na lub pod swobodną powierzchnią wody. Zamiast bowiem $Q = \text{const}$ może być $Q = \sum Q_1 = \text{const}$, względnie może być to dowolnie ukształtowane ciało - kadłub statku.

Warunki (15.28) są stosowane w liniowej teorii oporu falowego statków a także w teorii podwodnego płata nośnego.

15.1.2. Zapis warunku brzegowego na swobodnej powierzchni przy pomocy funkcji prądu i potencjału zespolonego

Badając przepływy płaskie uzyskuje się pewne uproszczenie zadań przez zastosowanie funkcji prądu ψ lub potencjału zespolonego $w(z)$. Przy pomocy ψ i $w(z)$ można zapisać także warunki brzegowe (15.28a i c). Ze względu na oznaczenie zmiennej zespolonej $z = x + iy$ wygodniejszym jest rozpatrywanie zadań w układzie odniesienia $Oxyz$ takim, że osie Ox i Oz leżą na niezakłóconej powierzchni wody, a oś Oy jest skierowana pionowo w górę. W tym układzie warunek (15.28c) będzie:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{E}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{dla } y = 0 \quad (15.29a)$$

a wychylenie powierzchni swobodnej wyrazi się przez

$$\eta = \frac{v_0}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{y=0} \quad (15.29b)$$

Uwzględniając warunki (12.23) mamy:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Stąd warunek (15.29a) można zapisać:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{g}{v_0^2} \psi = 0 \quad \text{dla } y = 0 \quad (15.30a)$$

$$\eta = \frac{v_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (15.30b)$$

Na mocy wzoru (12.26) i warunków (12.23) możemy napisać:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \text{Im} \left(i \frac{dw}{dz} \right)$$

$$\psi = \text{Im} w(z)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \text{Im} \frac{dw}{dz}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \text{Im} \left(i \frac{dw}{dz} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \text{Im} \left(i \frac{d^2 w}{dz^2} \right)$$

Uwzględniając powyższe zależności warunek (15.30a) przybiera równoważną postać:

$$\text{Im} \left(i \frac{dw}{dz} - \frac{g}{v_0^2} w(z) \right) = 0 \quad \text{dla } y = 0 \quad (15.30c)$$

zaś warunek (15.29a) postać następującą:

$$\text{Im} \left(i \frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{g}{v_0^2} \frac{dw}{dz} \right) = 0 \quad \text{dla } y = 0 \quad (15.30d)$$

Także natychmiast możemy napisać przy pomocy potencjału zespolonego warunek (15.28a). Przyjmuje on postać:

$$\text{Im} \left[i \frac{d^2 w}{dz^2} - \left(\frac{g}{v_0^2} + i \frac{\mu}{v_0} \right) \frac{dw}{dz} \right] = 0 \quad \text{dla } y = 0 \quad (15.30e)$$

Wychylenie swobodnej powierzchni $\eta(x)$ jest:

$$\eta = \frac{v_0}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{v_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{v_0}{g} \text{Re} \left(\frac{dw}{dz} \right) = \frac{v_0}{g} \text{Im} \left(i \frac{dw}{dz} \right) \quad (15.30f)$$

Powyższe wyrażenia warunków brzegowych (15.30) znalazły zastosowanie przy wyznaczaniu układu fal generowanych na swobodnej powierzchni przez zanużone w cieczy płaskie osobliwości hydromechaniczne, poruszające się ruchem jednostajnym po linii prostej, równoległej do swobodnej powierzchni.

15.1.3. Zapis warunku brzegowego na swobodnej powierzchni przy pomocy potencjału przyspieszenia

W rozdziale 14.1 (wzór (14.5c)) wskazano, że w nielepkim, barotropowym płynie znajdującym się w polu grawitacyjnym przyspieszenie elementu płynu ma potencjał niezależnie od tego, czy przepływ płynu jest potencjalny, czy też jest przepływem wirowym. Potencjał ten nazywa się potencjałem przyspieszenia. Jest on szeroko stosowany przy badaniu zagadnień związanych z ruchem płyt nośnych, szczególnie poruszających się pod swobodną powierzchnią wody [13]. Ze względu na szerokie zastosowanie podwodnych płyt nośnych w okrętownictwie: śruby napędowe, stery, elementy wykonawcze stabilizatorów kołysań statków, płyty nośne wodolotów - sformułujemy warunki brzegowe także przy zastosowaniu potencjału przyspieszenia θ .

Najpierw jednak musimy podać podstawowe zależności dla tej wielkości. Dla prostoty założymy początkowo, że $\vec{F} = 0$. Wtedy równanie Eulera możemy zapisać:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (15.31)$$

Ograniczymy się do jednorodnego płynu nieściśliwego: $\rho = \text{const.}$
Z równania (15.31) wynika związek:

$$\vec{w} = \nabla \theta \quad (15.32)$$

Jest on równoważny twierdzeniu (14.6) oraz równaniu Helmholtza (7.31a).
Podstawiając związek (15.32) do równania (15.31) otrzymujemy:

$$\text{grad} \left(\theta + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

Stąd

$$\theta + \frac{p}{\rho} = C(t) \quad (15.33)$$

gdzie θ jest potencjałem przyspieszenia, a stała całkowania może zależeć od czasu. Ma ona taką samą wartość w całym zbiorniku płynu. Dla płynu barotropowego całka (15.33) przyjmie oczywiście postać:

$$\theta + \mathcal{P} = C(t) \quad (15.33a)$$

Jeśli daleko przed poruszającym się obiektem w płynie prędkość płynu jest $\vec{v} = 0$, $\vec{w} = 0$ i $p = p_0$, to $\theta = 0$. W tym miejscu płynu można najłatwiej wyznaczyć stałą C w całce (15.33). Mamy:

$$\theta + \frac{p}{\rho} = 0 + \frac{p_0}{\rho}$$

Więc

$$\theta = -\frac{p-p_0}{\rho} \quad (15.34)$$

lub

$$p-p_0 = -\rho \theta \quad (15.35)$$

Znając potencjał przyspieszenia θ na podstawie związku (15.32) możemy prosto, przez różniczkowanie θ , znaleźć składowe przyspieszenia elementu płynu:

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

Również przy pomocy potencjału θ możemy wyrazić reakcje hydromechaniczne \vec{R} i \vec{M} . Podstawiając (15.35) do wzorów (5.7a) i (5.7b) mamy:

$$\vec{R} = \rho \oint_S \theta \vec{n} dS \quad (15.36a)$$

$$\vec{M} = \rho \oint_S \vec{r} \times \theta \vec{n} dS \quad (15.36b)$$

W celu znalezienia równania dla wyznaczenia potencjału przyspieszenia zastosujemy operator Laplace'a dla obu stron wyrażenia (15.35). Uzyskujemy zależność:

$$\Delta p = -\rho \Delta \theta \quad (15.37)$$

Przyrównując wyrażenia (15.37) i (12.179) mamy równanie Poissona dla potencjału przyspieszenia θ :

$$\Delta \theta = \mathbf{S} : \mathbf{S} \quad (15.37a)$$

gdzie prawa strona jest śladem iloczynu tensorów prędkości płynu. Jest to zatem równanie bardzo złożone. Znaczne uproszczenie zadań można uzyskać tylko wtedy, gdy prędkości płynu są wielkościami małymi. Wtedy prawa strona równania (15.37a) niewiele różnić się będzie od zera i można będzie przyjąć, że

$$\Delta \theta = 0 \quad \text{lub} \quad \Delta p = 0 \quad (15.37b)$$

Założenie $\mathbf{S} : \mathbf{S} = 0$ jest równoważne pominięciu wyrazu $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ w równaniu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (15.37c)$$

Przy założeniu $\vec{F} = 0$ zlinearyzowane równanie rządzące ruchem płynu idealnego nieściśliwego przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} - (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \theta \quad (15.37d)$$

Równania (15.37b i d) stanowią zamknięty układ równań dla tego przypadku płynu. Jeśli układ ruchomy się nie obraca, to równania jeszcze bardziej się upraszczają:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \theta \quad (15.38a)$$

$$\Delta \theta = 0 \quad (15.38b)$$

Szczególnie proste związki uzyskuje się dla przepływu potencjalnego w ujęciu liniowym: $v^2 \approx 0$. Wtedy zakładając $\vec{v} = \nabla\varphi$ z równania (15.38a) mamy związek:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla\varphi = \theta \quad (15.39a)$$

lub

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \theta \quad (15.39b)$$

bowiem stałą C wyznaczamy w dowolnym miejscu płynu; w nieskończoności: $\varphi = 0$, $p = p_0$ i $\theta = 0$. Jeśli nie można pominąć kwadratów prędkości indukowanych przez poruszające się w płynie ciało, to związek pomiędzy potencjałami φ i θ uzyskuje się przez porównanie całki (15.33) z całką Cauchy'ego-Lagrange'a. Wtedy

$$\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla\varphi + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 = - \frac{p-p_0}{\rho} \quad (15.39c)$$

Szczególnie prostą zależność dla potencjału prędkości uzyskuje się dla jednostajnego, po linii prostej, ruchu obiektu w płynie z prędkością $\vec{v}_e = \vec{i} v_0$

$$- v_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \theta \quad (15.39d)$$

Uwzględniając dalej, że daleko przed poruszającym się obiektem $p = p_0$ i $\theta = 0$, mamy

$$\varphi(x, y, z) = - \frac{1}{v_0} \int_{-\infty}^x \theta(\tau, y, z) d\tau \quad (15.39e)$$

Załóżmy teraz, że siłami masowymi są siły ciężkości

$$\vec{F} = - \nabla U$$

a oś Oz kartezjańskiego układu współrzędnych niech będzie skierowana pionowo w dół. Wtedy

$$U = - gz$$

i równanie rządzące ruchem tego płynu będzie

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = - \nabla \left(U + \frac{1}{\rho} p \right) = \nabla \theta_1$$

Stąd

$$\begin{aligned} \nabla \left(\theta_1 + U + \frac{p}{\rho} \right) &= 0 \quad | \\ \theta_1 - gz + \frac{p}{\rho} &= C(t) \end{aligned} \quad (15.40a)$$

Stałą $C(t)$, podobnie jak w poprzednim przypadku, wyznaczmy daleko przed poruszającym się w płynie obiektem dla $z=0$; mamy:

$$\begin{aligned} \theta_1 - gz + \frac{p}{\rho} &= \frac{p_c = p_a}{\rho} \\ \theta_1 - gz &= - \frac{p - p_0}{\rho} \end{aligned} \quad (15.40b)$$

$$p - p_0 = -\rho \theta_1 + \rho g z \quad (15.40c)$$

Jeśli założymy przepływ potencjalny, to równanie ruchu płynu idealnego możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right) &= \nabla \theta_1 \\ \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \theta_1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

Całką tego równania jest:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \theta_1 = C(t) \quad (15.40d)$$

Stałą C możemy wyznaczyć w dowolnym miejscu płynu. Wyznaczamy ją daleko przed obiektem - w nieskończoności:

$$\varphi = 0; \quad \vec{v} = 0; \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0; \quad \theta = 0$$

Stąd:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = \theta_1 \quad (15.40e)$$

lub w układzie ruchomym:

$$\theta_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_0 \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \quad (15.40f)$$

Jest to ten sam związek pomiędzy potencjałami φ i θ_1 jak pomiędzy φ i θ . Jeśli podstawimy wyrażenie (15.40e) lub (15.40f) do całki (15.40a), to uzyskamy znane już całki Cauchy'ego-Lagrange'a (5.47) lub (13.10).

Zakładając, że płyn jest w spoczynku: $\vec{v} = 0$, to $\theta_1 = 0$ i z całki (15.40c) dostajemy hydrostatyczny rozkład ciśnień (10.15). Zatem θ_1 obejmuje wpływ prędkości płynu na pole ciśnień i dalej - na reakcje hydrodynamiczne. Podstawiając bowiem wyrażenie (15.40c) do wzoru (5.7a) mamy:

$$\vec{R} = \rho \oint_S \theta_1 \vec{n} dS - \rho g \oint_S z \vec{n} dS = \rho \oint_S \theta_1 \vec{n} dS - \rho g V \vec{k} \quad (15.41)$$

Pierwszy człon wyrażenia (15.41) przedstawia część reakcji \vec{R} o charakterze hydrodynamicznym, drugi natomiast - reakcję hydrostatyczną, inaczej: siłę wyporu hydrostatycznego. Wzór ten jest ważny zarówno dla przepływów potencjalnych jak i dla przepływów wirowych.

Ponieważ siłę wyporu hydrostatycznego umiemy obliczyć, to z pola ciśnień zawsze można wyłączyć ciśnienie hydrostatyczne i zajmować się tylko ciśnieniem dynamicznym; $\rho \theta_1$ równym $\rho \theta$, bez uwzględnienia sił masowych. Stosując operator Laplace'a do obu stron równania (15.40a) dostajemy taki sam wzór jak (15.47). Stąd równaniem dla wyznaczenia potencjału przyspieszenia θ_1 jest równanie Poissona (15.37a). Celowym zatem jest stosowanie potencjału przyspieszenia - obojętnie czy uwzględnia się siły grawitacyjne, czy też nie - tylko do zagadnień hydromechanicznych w ujęciu liniowym.

$$\Delta p = 0 \quad \Delta \theta_1 = 0 \quad \Delta \theta = 0$$

$$\theta_1 = \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial' \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi \quad (15.42)$$

Ponieważ zależności (15.42) są ważne przy pominięciu kwadratów prędkości absolutnego przepływu, to również warunki brzegowe na swobodnej powierzchni należy formułować przy pomocy potencjału θ tylko w ujęciu liniowym. Podstawą sformułowania ich są zależności (15.1) i (15.2). Kinematyczny warunek brzegowy (15.2) w rozpisaniu (15.6) jest w obu przypadkach taki sam. Warunek (15.1) rozpisany przy pomocy równania (15.40a) jest

$$\theta_1 - gz = - \frac{p_c}{\rho}$$

Przy uwzględnieniu lepkości Rayleigh'a wyrazi się on równaniem:

$$\theta_1 - gz + \mu \varphi = - \frac{p_c}{\rho} \quad (15.43)$$

Stąd możemy znaleźć kształt swobodnej powierzchni:

$$z = \zeta = \frac{1}{g} A(x, y, z = \zeta, t) \quad (15.43a)$$

gdzie:

$$A = \theta_1 + \mu \varphi + \frac{p_c}{\rho} \quad (15.43b)$$

Widzimy, że przy uwzględnieniu wyrażenia dla θ_1 (15.40f) wzory (15.43b) i (15.8) są takie same. Zatem ogólny warunek (15.10b) jest również ważny dla potencjału przyspieszenia $\theta = \theta_1$. Powtarzamy tu, że należy jednak stosować jego postać zlinearyzowaną, dla $z = 0$, gdy stosuje się równanie Laplace'a $\Delta \theta = 0$ dla wyznaczenia θ . Wyprowadzając dla danego zagadnienia warunek brzegowy na swobodnej powierzchni przy pomocy potencjału θ możemy korzystać z ogólnego warunku (15.10b) lub ze szczególnego już wyrażenia danego przy pomocy potencjału φ . W tym drugim postępowaniu eliminuje się potencjał φ przy zastosowaniu wzorów (15.42a).

Objasnimy powyższe uwagi na przykładach takich samych jak poprzednio. I tak w przykładzie 1 mieliśmy dane $p_c(x, y, t)$. Równania podstawowe są

$$\frac{dA}{dt} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (15.10b)$$

$$A = \theta_1 + \mu \varphi + \frac{p_c}{\rho}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \varphi \cdot \nabla A \approx \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\theta_1 = \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

W $\nabla \varphi \cdot \nabla A$ pomijamy liniowy wyraz $\nabla \varphi \cdot \nabla p_c$.

Stąd równanie (15.10b) można zapisać:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_c}{\partial t} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z=0$$

lub

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mu \theta - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_c}{\partial t}$$

Różniczkując obustronnie powyższe równanie względem czasu otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial t} - g \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2}$$

i ostatecznie mamy dla $z = 0$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial t} - g \frac{\partial \theta}{\partial z} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 p_c}{\partial t^2} \quad (15.44)$$

$$\zeta = \frac{\theta_1}{g} + \frac{p_c}{\varrho g} \quad (15.44a)$$

Przy podstawieniu do warunku (15.44) $p_c = 0$ dostajemy natychmiast odpowiednik warunku (15.11), a jeżeli dodatkowo założymy $\mu = 0$, to uzyskamy odpowiednik warunku (15.25). Dla zadania rozpatrywanego w przykładzie 4 mieliśmy $\vec{v}_e = \vec{i} v_o$, $p_c(x, y)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. Stąd przy pominięciu, tak jak poprzednio, wyrazu $\nabla \varphi \cdot \nabla A$ mamy:

$$-\vec{v}_e \cdot \nabla A - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

$$v_o \frac{\partial A}{\partial x} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \theta = -v_o \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$v_o \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu v_o \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{v_o}{\varrho} \frac{\partial p_c}{\partial x} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\mu}{v_o} \theta + \frac{g}{v_o} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_c}{\partial x}$$

Różniczkujemy stronami powyższe równanie względem x :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\mu}{v_o} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{g}{v_o} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 p_c}{\partial x^2}$$

Ostatecznie dla $z=0$ mamy:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\mu}{v_o} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{g}{v_o^2} \frac{\partial \theta}{\partial z} = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2 p_c}{\partial x^2} \quad (15.45)$$

Kształt swobodnej powierzchni w tym przypadku również będzie dany wzorem (15.14b). Jeśli $p_c = 0$, to uzyskamy z warunku (15.45) odpowiednik warunku (15.28a), a jeśli jeszcze założymy $\mu = 0$, to uzyska się odpowiednik równania (15.28c).

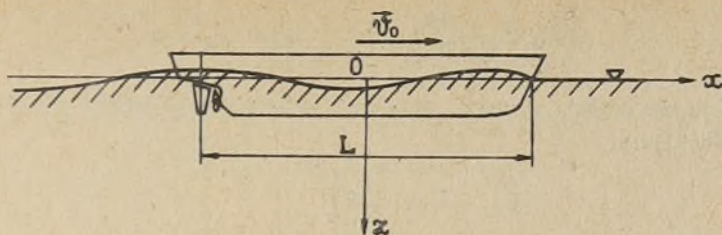
Przedstawione warunki brzegowe na swobodnej powierzchni wody pozwalają nam na matematyczne sformułowanie zadań związanych z ruchem ciał częściowo

lub całkowicie zanurzonych w wodzie mającej swobodną powierzchnię. Pozwalają one również na sformułowanie zadań dotyczących ruchu osobliwości hydrodynamicznych pod powierzchnią wody lub ruchu dowolnego układu ciśnień po swobodnej powierzchni. Można również sformułować zadanie o ruchu cieczy w zbiorniku nie całkowicie wypełnionym tą cieczą. W przyjętym modelu cieczy i założonym jej ruchu: $q = \text{const}$, $\nabla \times \vec{v} = 0$, $v_n = 0$, formułowanie tych zadań jest proste. Do wyznaczenia potencjału prędkości piszemy równanie Laplace'a, $\Delta \phi = 0$, z kinematycznym warunkiem brzegowym na powierzchni obiektu i ścianach zbiornika (12.134) oraz z warunkiem brzegowym na swobodnej powierzchni (15.10b). Po wyznaczeniu potencjału ϕ znajdujemy ze wzoru (15.8) postać swobodnej powierzchni, zaś z całki Cauchy'ego-Lagrange'a pole ciśnień w całym obszarze cieczy, w tym i na ścianach zbiornika cieczy i ciała poruszającego się w tej cieczy, a dalej przy pomocy wzorów (5.7a), (5.7b) reakcje hydrodynamiczne działające na ściany zbiornika i poruszające się ciało. Formułowanie zadań przy zastosowaniu potencjału przyspieszenia θ jest podobne. Zamiast równania $\Delta \phi = 0$ mamy równanie $\Delta \theta = 0$. Istnieją tu jednak pewne trudności w zapisywaniu warunków brzegowych przy pomocy potencjału przyspieszenia θ . Tylko dla prostych przypadków ruchu obiektów w płynie lub cieczy daje się je prosto napisać. Dlatego potencjał przyspieszenia ma bardziej ograniczony zakres zastosowań niż potencjał prędkości. Stosuje się go z powodzeniem w teorii płata pośnego poruszającego się w ośrodku nieograniczonym i pod swobodną powierzchnią wody.

Chociaż matematyczne sformułowanie zadań o jednostajnym ruchu statku nawodnego lub statku poruszającego się pod powierzchnią wody, o jednostajnym ruchu powierzchni ślizgającej się po swobodnej powierzchni wody, o ruchu jednostajnym dowolnego układu ciśnień po wodzie jest, jak widzimy, bardzo proste - warunek brzegowy (15.28a) lub (15.28c) względnie (15.27a) - to jednak przy rozwiązywaniu tych najprostszych zadań występują duże trudności natury matematycznej. Jeszcze większe trudności mają miejsce przy rozwiązywaniu zagadnień o ruchu niejednostajnym obiektów. Wszystkie zadania mające jakieś praktyczne znaczenie rozwiązuje się na drodze numerycznej i to różnymi metodami; przy czym dotychczas uzyskano tylko raczej skromne wyniki. Podkreślić należy, że powyższe uwagi dotyczą wody nieściśliwej i nielepkiej oraz przepływu potencjalnego.

15.2. PRAKTYCZNE WNIOSKI WYNIKAJĄCE Z WARUNKU BRZEGOWEGO NA SWOBODNEJ POWIERZCHNI

Przy rozwiązywaniu zadań, nawet liniowych, ze swobodną powierzchnią największe trudności matematyczne sprawia warunek brzegowy. Powstaje pytanie, czy i w jakich przypadkach, nie można wprowadzić pewnych uproszczeń. Dla uzyskania pewnego poglądu w tej sprawie sprowadzimy najprostszy warunek brzegowy (15.28c) do postaci bezwymiarowej. Może on być napisany dla jednostajnego ruchu smukłego statku z prędkością: $\vec{I} v_0$ po linii prostej jak na rysunku 15.2.



Rys.15.2

Jako wielkość odniesienia dla współrzędnych x, y, z weźmiemy długość statku na wodnicy L , a dla prędkości płynu - prędkość statku v_0 . Na ogół wielkości odniesienia dobiera się tak, aby były one łatwe do pomierzenia i aby jednocześnie w istotny sposób wpływały na rozpatrywane zjawisko hydromechaniczne. Pierwsze wymaganie nie przedstawia problemu. Dla spełnienia drugiego wymagania problem musi już być rozpoznany, czy to na drodze uproszczonych badań teoretycznych, czy też przez badania eksperymentalne. Tu wybrano długość statku L , bo wyniki badań eksperymentalnych i teoretycznych wykazują, że opór falowy statku, R_w , na wodzie nieograniczonej zależy w istotny sposób od długości L i prędkości v_0 . Oznaczając wskaźnikiem b bezwymiarowe współrzędne i inne wielkości, mamy:

$$x_b = \frac{x}{L} \quad y_b = \frac{y}{L} \quad z_b = \frac{z}{L}$$

Ponieważ wymiar potencjału prędkości φ jest $[L^2 T^{-1}]$, to $\varphi_b = \frac{\varphi}{L v_0}$.

Stąd

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{v_0 L}{L} \frac{\partial \varphi_b}{\partial x_b} = v_0 \frac{\partial \varphi_b}{\partial x_b}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{v_0}{L} \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial x_b^2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_0 \frac{\partial \varphi_b}{\partial z_b}$$

i warunek

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{g}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

w postaci bezwymiarowej będzie:

$$\frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial x_b^2} - \frac{gL}{v_0^2} \frac{\partial \varphi_b}{\partial z_b} = 0 \quad (15.46)$$

Jeśli wyprowadzimy bezwymiarową prędkość:

$$F_n = F_L = \frac{v_0}{\sqrt{gL}} \quad (15.47)$$

zwaną liczbą Froude'a, odniesioną do długości statku - na co wskazuje wskaźnik L - to warunek (15.46) możemy zapisać:

$$\frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial x_b^2} - \frac{1}{F_L^2} \frac{\partial \varphi_b}{\partial z_b} = 0 \quad \text{dla } z_b = 0 \quad (15.46a)$$

W ten sam sposób możemy wyrazić opis fal wytworzonych przez statek na swobodnej powierzchni:

$$\xi_b = -F_L^2 \frac{\partial \varphi_b}{\partial x_b} \Big|_{z_b=0} \quad (15.48)$$

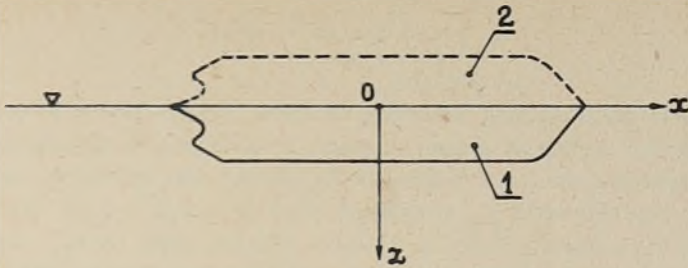
gdzie $\xi_b = \xi/L$

Równanie (15.46a) jako bezwymiarowe jest takie same dla różnej wielkości statków geometrycznie podobnych, dla których liczby Froude'a są takie same; w szczególności dla modelu statku i statku rzeczywistego. Wartość liczby Froude'a mówi nam zaś o tym, czy statek jest powolny, czy też jest szybki. Sama natomiast wartość szybkości statku o niczym nie świadczy. Transportowe statki nawodne z reguły nie przekraczają liczby F_L równej 0,4, podczas gdy holowniki podczas swobodnego pływania i małe powolne motorówki mogą osiągać $F_L \approx 0,6$. Bardzo powolne bywają duże zbiornikowce: $F_L \approx 0,15$; natomiast bardzo szybkimi są statki do przewozu pojemników: $F_L \approx 0,35$. Wodoloty i poduszkowce osiągają liczbę Froude'a rzędu 1,1-2,5. Podobny rząd liczby F_L jest dla jednostek częściowo ślizgających się po powierzchni wody. Liczba Froude'a dla płatów nośnych wodolotu - odniesiona do cięciwy płata - osiąga wartości większe od 5.

Przechodźmy do zbadania wpływu liczby Froude'a na warunek brzegowy (15.46a) i falowanie powierzchniowe określone wzorem (15.48). Rozpatrzmy dwa szczególne przypadki: $F_L \rightarrow 0$ i $F_L \rightarrow \infty$, to jest przypadek małych i bardzo dużych liczb Froude'a - małych i dużych prędkości.

Jeśli F_L dąży do zera, to aby warunek (15.46a) mógł być wypełniony, $\frac{\partial \varphi_b}{\partial z_b}$ także powinna dążyć do zera. Jest to warunek kinematyczny na płaszczyźnie $z=0$, traktowanej jako ściana nieprzepuszczalna. Zatem przy bardzo małych liczbach Froude'a, praktycznie $F_L < 0,10$, swobodna powierzchnia zachowuje się tak, jak sztywna i nieprzepuszczalna ściana. Ze wzoru (15.48) wynika to samo stwierdzenie: jeśli $F_L \rightarrow 0$ to $\xi_b \rightarrow 0$. W tym przypadku ruchu obiektów: statków, osobliwości hydromechanicznych - obowiązuje metoda odbić zwierciadlanych zilustrowana na rysunkach: 12.42 do 12.45. Pokazane tam osobliwości hydromechaniczne mogą być traktowane jako poruszające się z bardzo małymi prędkościami pod swobodną powierzchnią wody AB w zbiorniku o nieograniczonej głębokości. Rysunki zaś 12.46; 12.47 mogą być ilustracją powolnego ruchu źródła i włókna wirowego z małymi prędkościami w wodzie płytkiej.

Przepliw wokół zanurzonej części kadłuba statku jest w tym przypadku taki, jak gdyby był wywołany przez kadłub rzeczywisty i jednocześnie kadłub wyobrażony, będący lustrzanym odbiciem kadłuba rzeczywistego. Ilustruje to rysunek 15.3, gdzie symbolem 1 oznaczono zanurzoną część kadłuba statku, a symbolem 2 kadłub wyobrażony. Stąd wniosek taki, że badanie stat-



Rys.15.3

ku nawodnego przy bardzo małych liczbach Froude'a można zastąpić badaniem statku „zdwojonego” w nieograniczonym ośrodku płynnym. Reakcje hydrodynamiczne działające na statek rzeczywisty będą równe połowie tych reakcji działających na statek zdwojony. Na tym spostrzeżeniu została oparta metoda Fottingera mająca na celu eksperymentalne wyznaczenie oporu lepkości kadłuba statku. Ponieważ w rozpatrywanym przypadku nie ma praktycznie falowania swobodnej powierzchni, to także praktycznie nie ma oporu falowego. Przy jednostajnym ruchu po linii prostej obiektu w cieczy idealnej i nieograniczonej - uzasadnimy to dalej - reakcje hydrodynamiczne są równe zeru. Więc całkowita reakcja hydrodynamiczna jest spowodowana lepkością płynu - cieczy lub powietrza. Przy ruchu niejednostajnym reakcje hydrodynamiczne działające na obiekt - statek poruszający się w płynie idealnym będą istnieć. Można je zatem wyznaczyć dla zdwojonego kadłuba poruszającego się w ośrodku nieograniczonym i wartości ich podzielić przez 2. To podejście można zatem zastosować do wyznaczenia reakcji o charakterze bezwładnościowym, działających na manewrujący powolny statek wypornościowy, np.: duży masowiec lub zbiornikowiec. Jeśli jednak ten statek manewruje na wodach spłyconych, to zagadnienie staje się bardziej złożone: mamy wtedy wpływ dna. (Wróćcie do rysunków 12.46 i 12.47).

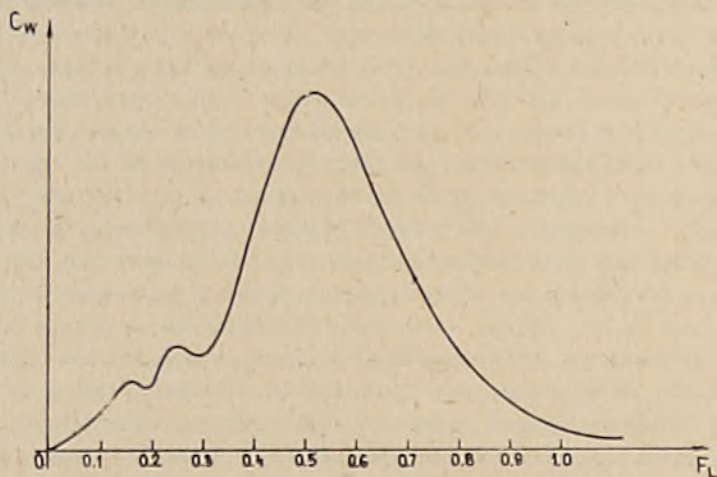
W drugim szczególnym przypadku, przy liczbie Froude'a dążącej do nieskończoności, z równania (15.46a) wynika, że $\left. \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial x_b^2} \right|_{z_b=0}$ powinna dążyć do zera. Ze wzoru (15.48) widać dalej, że także $\left. \frac{\partial \varphi_b}{\partial z_b} \right|_{z_b=0}$ musi dążyć do zera przy $F_L \rightarrow \infty$. Zatem warunek brzegowy na swobodnej powierzchni dla dużych liczb Froude'a można w przybliżeniu zapisać:

$$\varphi(x, y, 0) = \text{const.}$$

Warunek ten bywa stosowany w teorii płata podwodnego. Ponieważ przy $F_L \rightarrow \infty$ powierzchnia swobodna nie odkształca się ($\xi_b \rightarrow 0$), to także w tym przypadku nie wystąpi opór falowy statku. Stąd współczynnik oporu falowego statku w funkcji liczby Froude'a

$$C_w = \frac{R_w}{\sum \rho v_o^2 \Omega} = f(F_L) \quad (15.49)$$

gdzie: Ω jest powierzchnią zwilżoną kadłuba statku, powinien przy wzrastaniu liczby być najpierw krzywą rosnącą a następnie - malejącą. Stwierdzono eksperymentalnie i na drodze teoretycznej dla prostych przypadków, że maksimum współczynnika C_w występuje przy $F_L \approx 0,5 - 0,6$. Typowy przebieg krzywej C_w pokazuje rysunek 15.4. Z wykresu tego widać, że wodoloty i poduszki oraz jednostki ślizgające się po powierzchni wody, charakteryzujące się wysoką liczbą F_L , doznają bardzo małego oporu falowego, natomiast szybko jednostki wypornościowe: transportowe i okręty wojenne, niszczyciele - będą mieć wysoki udział oporu falowego w oporze całkowitym.



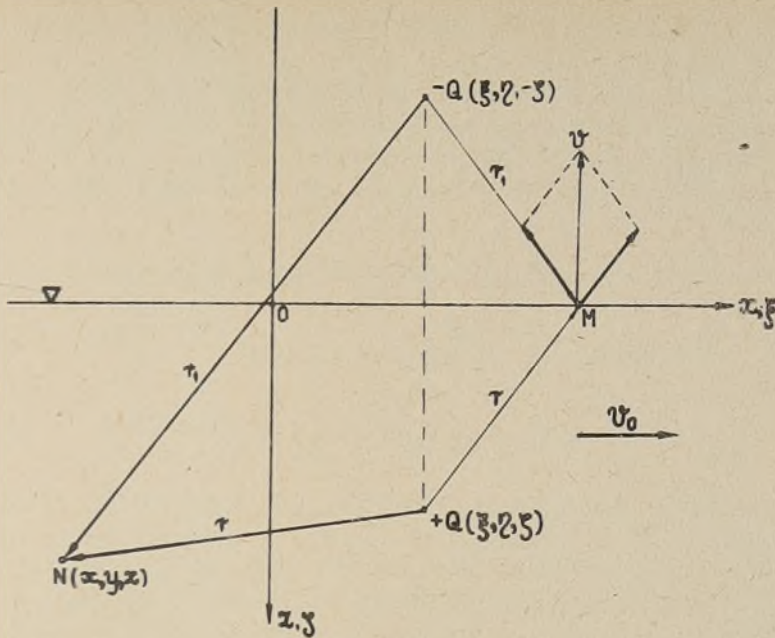
Rys.15.4

Zilustrujemy zastosowanie warunku brzegowego na swobodnej powierzchni wody dla dużych prędkości na przykładzie źródła o natężeniu Q , usytuowanego w punkcie (ξ, η, ζ) i poruszającego się z prędkością $\vec{v}_o = \vec{i} v_o$ jak na rysunku 15.5. Zgodnie z poprzednimi uwagami składowa $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ prędkości cieczy w dowolnym punkcie M leżącym na swobodnej powierzchni ($z=0$) powinna być równa zero. Z rysunku 15.5 widać, że jest to możliwe tylko wtedy, gdy w punkcie o współrzędnych $(\xi, \eta, -\zeta)$ usytuowane zostanie źródło fikcyjne o wydatku $-Q$. Stąd uwzględniając wzór (12.55) dla potencjału źródła znajdującego się w ośrodku nieograniczonym możemy natychmiast napisać wyrażenie dla potencjału prędkości w dowolnym punkcie $N(x, y, z)$ w układzie współrzędnych związanych z poruszającym się źródłem. Będzie on dany wzorem:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (15.51)$$

gdzie:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \quad (15.50a)$$



Rys.15.5

$$r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2} \quad (15.50b)$$

Dla bardzo małych prędkości v_0 źródła pod swobodną powierzchnią potencjał prędkości cieczy będzie:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \quad (15.51a)$$

Dla ośrodka nieograniczonego mamy wzór (12.55):

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r}$$

Wszystkie powyższe wyrażenia dla potencjału prędkości indukowanej przez źródło można zapisać w postaci takiego samego wzoru:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi} G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \quad (15.52)$$

gdzie:

$$G = \frac{1}{r} + G_1 \quad (15.52a)$$

przy czym $G_1 = 0$ dla źródła w ośrodku nieograniczonym

$$G_1 = \frac{1}{r_1} \quad (15.52b)$$

dla źródła poruszającego z bardzo małą prędkością pod swobodną powierzchnią cieczy i

$$G_1 = -\frac{1}{r_1} \quad (15.52c)$$

dla źródła poruszającego się z bardzo dużą prędkością pod swobodną powierzchnią cieczy.

Wzory (15.52b i c), jak widzimy, są szczególnymi przypadkami wzoru bardziej ogólnego dla funkcji G_1 . Wyznaczyć ją można przez podstawienie wyrażenia (15.52) i (15.52a) do warunku brzegowego (15.28c) lub (15.28a).

Oprócz zapisu (15.52a) dla funkcji G stosuje się dosyć często zapisy następujące:

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \xi) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + G_1(x, y, z, \xi, \eta, \xi) \quad (15.53a)$$

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \xi) = \frac{1}{r} + K(x, y, z, \xi, \eta, \xi) \quad (15.53b)$$

gdzie:

$$K(x, y, z, \xi, \eta, \xi) = -\frac{1}{r_1} + G_1 \quad (15.53c)$$

Sposób wyznaczenia funkcji G jest taki sam, jak podano wyżej. Potencjał ϕ według wzoru (15.52) z wyrażeniem dla funkcji G (Greena) zgodnie ze wzorem (15.53a) lub wzorem (15.53b), podstawia się do warunku (15.28c) lub (15.28a). W zależności od zastosowanego przedstawienia funkcji G uzyskuje się dla G_1 oczywiście różne wyrażenia. Należy mieć to na uwadze przy korzystaniu z gotowych wyrażeń dla funkcji G . Czasami funkcję G_1 we wzorze (15.53c) rozбивa się jeszcze dalej pisząc:

$$K = -\frac{1}{r_1} + K_1(x, y, z, \xi, \eta, \xi) + K_2(x, y, z, \xi, \eta, \xi) \quad (15.53d)$$

W przypadku ruchu jednostajnego źródła w wodzie o głębokości nieskończonej warunek brzegowy na dnie $v_z = 0$ przy $z \rightarrow \infty$ sprowadza się do

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=\infty} = 0 \quad \text{lub} \quad \left. \frac{\partial G_1}{\partial z} \right|_{z=\infty} = 0 \quad \text{dla} \quad z \rightarrow \infty \quad (15.54)$$

Dla przypadku ruchu jednostajnego źródła pod swobodną powierzchnią wody o głębokości H wygodnym jest przedstawienie funkcji G w takiej postaci, aby również warunek brzegowy na dnie zbiornika miał prostą postać:

$$\left. \frac{\partial G_1}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \quad (15.55)$$

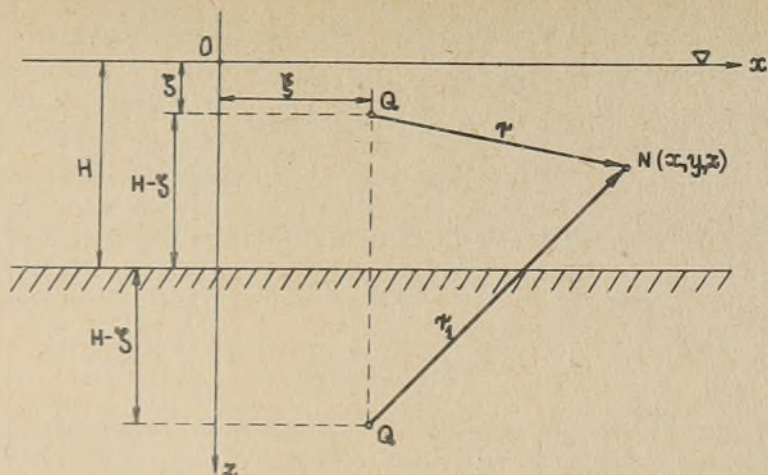
Jeśli warunek na dnie ma mieć postać (15.55), to funkcja G we wzorze (15.52) powinna być wyrażona przez

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \xi) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + G_1(x, y, z, \xi, \eta, \xi) \quad (15.56)$$

gdzie:

$$r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\xi-2H)^2} \quad (15.56a)$$

Jak widać z rysunku 15.6, przyjęto tu fikcyjne źródło wydatku Q poruszające się z prędkością \vec{v}_0 pod dnem zbiornika w odległości $(H - \xi)$.



Rys.15.6

Zastosowano tu, jak widzimy, metodę zwierciadlanych odbić. Zupełnie podobny sposób można zastosować dla wyznaczania potencjału prędkości indukowanej w cieczy przez poruszające się ruchem jednostajnym, równoległe do swobodnej powierzchni, źródło płaskie. Dla tego przypadku na mocy wzoru (12.67) analog wyrażenia (15.53b) będzie:

$$\varphi(x, z) = \frac{Q}{2\pi} G(x, z, \xi, \zeta) \quad (15.57a)$$

$$G(x, z, \xi, \zeta) = \ln r - \ln r_1 + G_1(x, z, \xi, \zeta) \quad (15.57b)$$

przy czym r i r_1 są określone wzorami (15.51a), (15.51b), w których należy podstawić $y = \eta$. Sposób wyznaczenia funkcji Greena G_1 jest taki sam, jak dla przypadku źródła przestrzennego.

Wiemy już, że przy przepływach płaskich znaczne uproszczenie zadań można uzyskać przez zastosowanie aparatu funkcji analitycznych. Wygodnym wtedy jest przyjęcie układu współrzędnych Oxy o osi Oy skierowanej pionowo w górę, to jest takiego, jaki zastosowano w rozdziale 15.12. Dla źródła płaskiego, poruszającego się ruchem jednostajnym na głębokości h , na podstawie wzoru (12.70), ($z_0 = -ih$), potencjał zespolony możemy zapisać na przykład w postaci:

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \left[\ln(z + ih) - \ln(z - ih) \right] + G_1(z, ih) \quad (15.58)$$

Do wyznaczenia funkcji G_1 mamy wtedy warunek brzegowy (15.30c). Oczywiście zamiast stosowania potencjału $w(z)$ można napisać wyrażenie dla prędkości zespolonej źródła

$$\frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \left[\frac{1}{z+ih} - \frac{1}{z-ih} \right] + G_2(z, ih) \quad (15.59)$$

i zastosować do wyznaczenia funkcji $G_2(z, ih)$ warunek (15.30d). Ponieważ w rozpatrywanym przypadku źródło porusza się ruchem jednostajnym, równoległe

do swobodnej powierzchni wody, to znając potencjał przepływu absolutnego φ , możemy - stosując wzór (12.121a) - natychmiast napisać potencjał przepływu odwróconego Φ . A zatem

$$\Phi = \varphi_{\infty} + \varphi = -v_0 x + \varphi \quad (15.60)$$

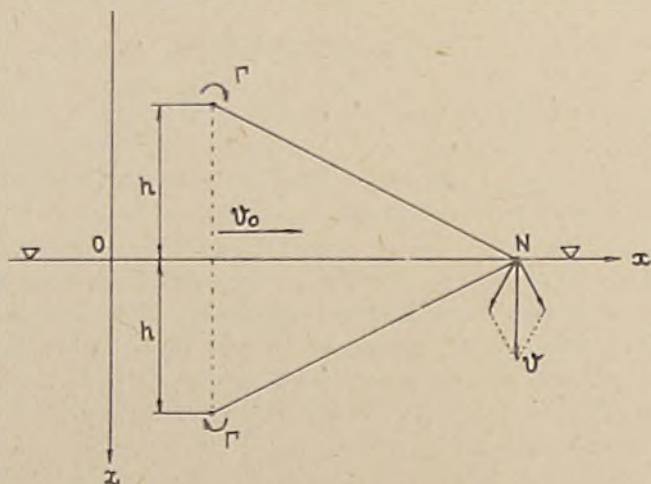
$$W(z) = w_{\infty}(z) + w(z) = v_0 z + w(z) \quad (15.61)$$

Przedstawiony wyżej sposób wyznaczania potencjału prędkości φ dla źródła o stałym wydatku Q , poruszającego się ruchem jednostajnym, równoległe do swobodnej powierzchni wody, można zastosować dla nieruchomego źródła pulsującego o wydatku na przykład:

$$Q = Q_0 \cdot \cos \omega t \quad (15.62)$$

oraz dla przypadku źródła pulsującego i jednocześnie przemieszczającego się pod powierzchnią wody. Przy wyznaczeniu funkcji G_1 korzysta się wtedy z innych warunków brzegowych. I tak dla przypadku Q danego wzorem (15.62) i $\vec{v}_e = 0$ korzysta się z warunku (15.25) lub (15.11), a dla przypadku $Q = Q_0 \cos \omega t$ i $\vec{v}_e = \vec{i} v_0 = \text{const}$ z warunku (15.26c).

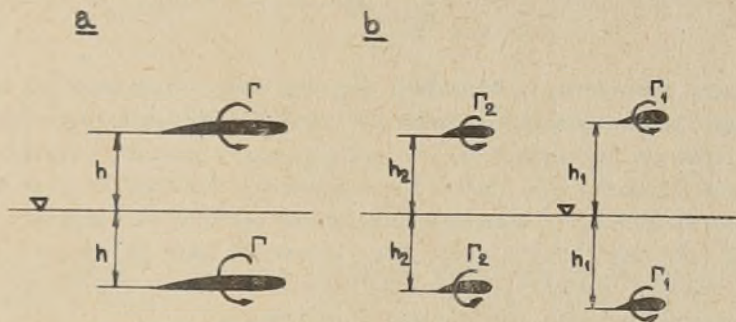
Takie samo podejście może być także zastosowane dla wyznaczenia potencjału prędkości indukowanych w cieczy przez inne zanurzone osobliwości hydrodynamiczne: dipol i włókno wirowe.



Rys.15.7

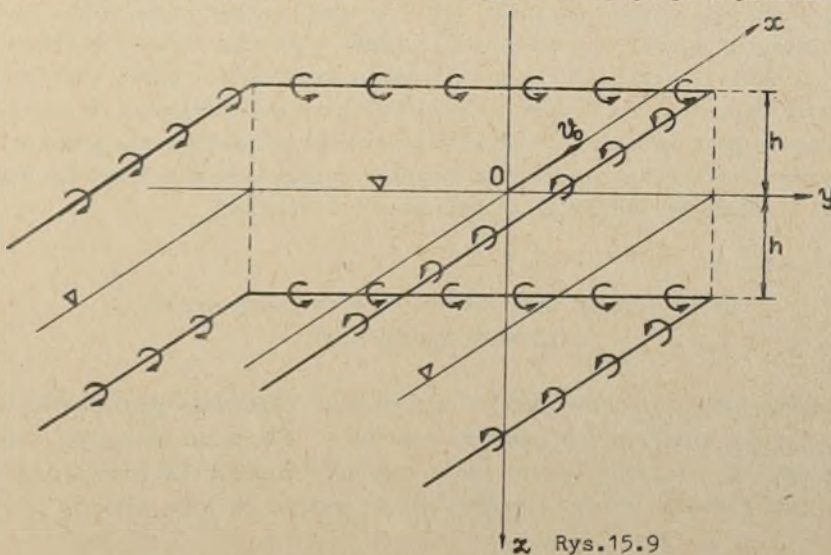
Ze względu na praktyczne zastosowanie rozpatrzmy jeszcze jednostajny ruch zanurzonego na głębokości h pod swobodną powierzchnią wody nieskończonego włókna wirowego. Prędkość $\vec{i} v_0$ włókna jest bardzo duża. Z rysunku 15.7 widać, że aby warunek $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ dla $z=0$ był wypełniony, to nad swobodną powierzchnią w odległości h musi poruszać się takie same fikcyjne włókno wirowe. Rzeczywiście, w tym przypadku wypadkowa prędkość indukowana przez oba wiry w dowolnym punkcie N powierzchni swobodnej jest prostopadła do

płaszczyzny $z=0$. Ponieważ takim włóknem wirowym, wirem związanym, można zastąpić oddziaływanie na płyn płata nośnego o nieskończonej rozpiętości, a układem wirów (model Prandtla) płat o rozpiętości skończonej, to stwierdzenie to stanowi podstawę budowy modeli wirowych podwodnych płatów nośnych charakteryzujących się wysokimi liczbami Froude'a. Eksperymentalnie stwierdzono, że siła nośna płata podwodnego nie zależy praktycznie od liczby Froude'a odniesionej do cięży płata, gdy $F_n > 4.5 \div 5$. Ten przypadek ma miejsce dla płatów nośnych wodolotów oraz okrętowych śrub napędowych. Możecie to sprawdzić prostym rachunkiem.



Rys.15.8

Na rysunku 15.8a pokazano przypadek jednego płata nośnego poruszającego się z dużą liczbą Froude'a na głębokości h i płat wyobrażony, a na rysunku 15.8b przypadek dwóch płatów. Rysunek zaś 15.9 jest odpowiednikiem modelu wiru podkowlistego pokazanego na rysunku 14.11. Widzimy, że w przypadku płata podwodnego, poruszającego się z bardzo dużymi prędkościami, przepływ wody jest taki, jak w przypadku ruchu dwupłata poruszającego się w ośrodku nieograniczonym. Stąd dla celów praktycznych można tu zastosować dane dla dwupłata poruszającego się w ośrodku nieograniczonym, np. w powietrzu dla



Rys.15.9

liczby Macha $M = \frac{v}{c} < 0,3$. Wniosek istotny. Można z niego skorzystać przy projektowaniu płatów nośnych wodolotów.

Również można wysnuć praktyczny wniosek dotyczący poduszkowców bez rozwiązywania zadań konkretnych o ruchu układu ciśnień po swobodnej powierzchni wody. Otóż z wyrażen dla wychyleń powierzchni swobodnej: (15.8), (15.24b), (15.26), (15.27b) i (15.44b) - wynika, że przy zerowej prędkości układu ciśnień $p_c(x,y)$ powierzchnia swobodna odkształca się zgodnie z wyrażeniem:

$$\xi = \frac{p_c(x,y)}{\rho g} \quad (15.63)$$

Zatem poduszka powietrzna poduszkowca wypiera wodę - podobnie jak kadłub statku. Stąd dla kształtowania rozkładu ciśnień w poduszce powietrznej można w przybliżeniu zastosować dane o kształtowaniu kadłuba statku o tej samej liczbie Froude'a dla statku i poduszkowca. Dla dużych liczb Froude'a można będzie skorzystać z danych o kształtach statków ślizgających się po powierzchni wody itp. Przybliżenie tego wniosku polega na tym, że istnieje zasadnicza różnica pomiędzy powierzchnią kadłuba statku i powierzchnią swobodną w obszarze poduszki powietrznej poduszkowca.

Jeśli już będziemy znać pożądaną w poduszce powietrznej rozkład ciśnień $p_c(x,y)$, to powstaje pytanie: jak praktycznie wytworzyć ten zadany rozkład $p_c(x,y)$? Zadanie to, jako bardziej złożone od kształtowania podwodnej części kadłuba statku, nie zostało jeszcze całkowicie rozwiązane. Wskażemy tu na pewne możliwości formowania rozkładu ciśnień na ekranie w obszarze poduszki powietrznej. Otóż można zastosować elastyczne segmenty Σ (rys. 17), wyposażone w tylną ścianę, zaopatrzoną w otwory i ukształtowaną tak, że zewnętrzne normalne do powierzchni tych otworów przebiegają w określonych miejscach ekran. Ponieważ ciśnienie p_g w segmencie jest większe niż ciśnienie p_c w poduszce powietrznej, więc powietrze będzie wpływać do obszaru poduszki w postaci strug. Pomiędzy tymi strugami wytwarza się wiry, a w wirach ciśnienie spada. Natomiast w miejscach kontaktu strug z ekranem ciśnienie na ekranie jest większe od ciśnienia średniego w poduszce. W związku z tym na ekranie - na swobodnej powierzchni - można uzyskać zmienny rozkład ciśnień. Stąd widzimy, że przez wewnętrzne ukształtowanie elastycznej osłony poduszkowca można wpływać na rozkład $p_c(x,y)$, a tym samym na charakterystyki dynamiczne jednostki na poduszce powietrznej.

15.3. WARUNEK BRZEGOWY NA GRANICY DWÓCH PŁYNÓW O RÓŻNYCH GĘSTOŚCIACH

Dotychczas przedstawione warunki brzegowe na swobodnej powierzchni cieczy stosuje się wtedy, gdy w zadaniu interesuje nas tylko przepływ cieczy. Jeśli natomiast pożądanym byłoby także zbadanie ruchu powietrza, gazu, nad swobodną powierzchnią cieczy, to warunki te przyjmują inną postać.

Znajomość takich warunków jest konieczna przy teoretycznym badaniu charakterystyk aerodynamicznych statków poruszających się nad swobodną powierzchnią wody, to jest: ekrano-pławców (rys. 1.2a), a także poduszkowców nie posiadających kontaktu z ekranem. Mogą te warunki także posłużyć do badania wzajemnego oddziaływania powietrza i wody, a zatem do badania zjawiska powstawania i zanikania falowania wiatrowego.

Podstawa formułowania warunku brzegowego w tym przypadku jest taka sama, jak uprzednio: bierze się pod uwagę wyrażenia (8.1) i (8.7).

Jeśli oznaczymy wskaźnikiem 1 obszar wody, a wskaźnikiem 2 obszar powietrza ponad wodą, to warunek dla ciśnień na powierzchni swobodnej $S_1 = S_2 = S$ będzie:

$$P_1 = P_2$$

Zaś warunek materialności powierzchni swobodnej S wyrazi się tak samo jak poprzednio:

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{dS_2}{dt} = \frac{dS}{dt} = 0$$

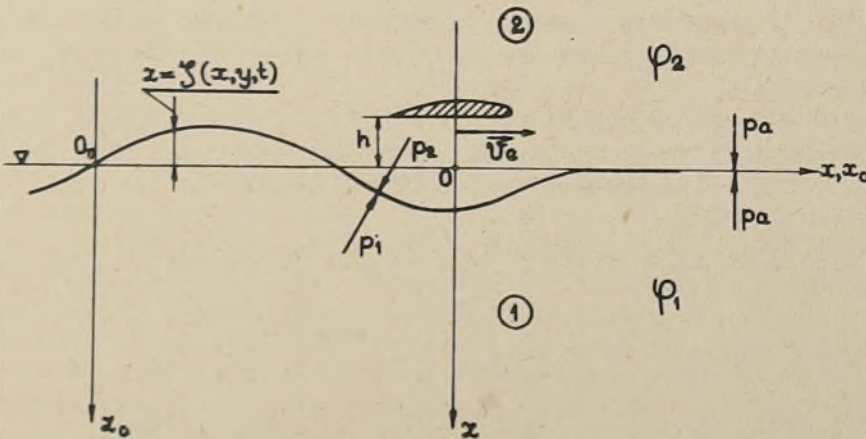
Zapiszmy te warunki w układzie ruchomym, poruszającym się względem układu nieruchomego z prędkością \vec{v}_e . Układy te pokazuje rysunek 15.10.

Daleko w nieskończoności ciśnienie $p=p_a$. Stąd warunek $p_1=p_2$ możemy napisać:

$$P_a + P_{c1} = P_a + P_{c2}$$

1

$$P_{c1} = P_{c2} = P_c$$



Rys. 15.10

Zatem wychylenie powierzchni swobodnej będzie określone także wyrażeniami (15.8), przy czym w (15.8a) można zastosować potencjał φ_1 lub φ_2 .

Jeśli oznaczymy dalej przez:

$$A = A_1 + \frac{P_c}{\varrho_1} \quad (15.64a)$$

$$\Lambda = \Lambda_2 + \frac{p_c}{\rho_2} \quad (15.64b)$$

gdzie:

$$\Lambda_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi_1 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_1)^2 + \mu \varphi_1 \quad (15.64c)$$

$$\Lambda_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi_2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_2)^2 + \mu \varphi_2 \quad (15.64d)$$

to warunek (15.10b) możemy zapisać:

$$\frac{d\Lambda_1}{dt} - g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{1}{\rho_1} \frac{dp_c}{dt} = 0 \quad (15.65a)$$

$$\frac{d\Lambda_2}{dt} - g \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{1}{\rho_2} \frac{dp_c}{dt} = 0 \quad (15.65b)$$

dla $z = \zeta(x, y, t)$.

Powyższe warunki brzegowe można dalej zapisać w postaci jednego wyrażenia:

$$\rho_1 \left(\frac{d\Lambda_1}{dt} - g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{d\Lambda_2}{dt} - g \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) = - \frac{dp_c}{dt} \quad (15.66)$$

dla $z = \zeta(x, y, t)$.

Widzimy, że warunek (15.10b) jest szczególnym przypadkiem warunku (15.66). Zakładając $\rho_2 = 0$ uzyskuje się bowiem wyrażenie (15.10b). W rzeczywistości stosunek gęstości powietrza i wody jest: $\rho_2/\rho_1 = 0,00129$.

Warunek (15.66) możemy stosować dla powierzchni rozdziału pomiędzy dwiema warstwami płynów o różnych gęstościach, przy czym gęstość górnej warstwy płynu ρ_2 powinna być mniejsza od gęstości ρ_1 warstwy dolnej. Podobnie można postąpić dla przypadku większej ilości warstw niemieszających się płynów.

Wracając do warunku (15.66) należy podkreślić, że postępowanie przy rozpisywaniu (15.66) dla szczególnych przypadków jest takie same, jak dla $\rho_2 = 0$. I tak odpowiednikiem warunku (15.11) będzie:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - g \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \quad (15.67a)$$

dla $z=0$

Warunek (15.13) przy $\rho_2 \neq 0$ przyjmuje postać:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\mu}{v_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{g}{v_0^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{\mu}{v_0} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{g}{v_0^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \quad (15.67b)$$

Można również dla zadań liniowych wyrazić warunek (15.66) przy pomocy potencjału przyspieszenia θ , np.:

$$\rho_1 \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} - g \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} - g \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) \quad \text{dla } z=0$$

Przedstawione warunki brzegowe pozwalają nam na sformułowanie matematyczne bardzo dużej ilości zadań o znaczeniu praktycznym. Postępuje się tak:

- zakłada się, że płyn jest nielepki, nieściśliwy, a przepływ jest potencjalny,
- do wyznaczenia potencjału prędkości mamy wówczas równanie Laplace'a

$$\Delta \varphi = 0$$

- warunki brzegowe na ścianach zbiornika i powierzchniach opływanych względnie poruszających się w płynie ciał sprowadzają się do:

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

- jeśli zbiornik jest nieograniczony to należy dołączyć warunek w nieskończoności, dotyczący prędkości lub potencjału prędkości,
- jeśli zbiornik ma swobodną powierzchnię, to pisze się dodatkowo warunki (15.10b) lub (15.66). Gdy w wyrażeniu na A , A_1 , A_2 pomija się lepkość Rayleigh'a, to należy jeszcze dodatkowo dołączyć warunek wypromieniowania,
- ponadto jeśli przepływ płynu jest nieustalony, to muszą być dołączone warunki początkowe przepływu i ruchu ciała. W wyniku rozwiązania uzyskuje się potencjał prędkości, a dalej pole prędkości, pole ciśnień i reakcje hydrodynamiczne działające na ciała poruszające się w płynie i ewentualnie na ściany zbiornika płynu.

Podobnie można sformułować zadanie liniowe przy pomocy potencjału przyspieszenia θ .

Całość postępowania - jak widzimy - sprowadza się do matematyki i to do działów bardzo trudnych. Dlatego tylko mała liczba szczególnych przypadków ruchu prostych ciał została do tej pory rozwiązana. Zwróćmy uwagę jeszcze na to, że równanie Laplace'a jest bardzo prostym równaniem różniczkowym. Trudności sprawiają nam i matematykom tylko warunki brzegowe. Najbardziej kłopotliwym z nich jest warunek na swobodnej powierzchni.

Najprostszym zadaniem z podanej klasy zadań hydromechanicznych jest jednostajny, po linii prostej, ruch ciała w ośrodku nieograniczonym. Jednak i tu poza kulą i elipsoidem nie można uzyskać potencjału prędkości w postaci zamkniętej. Przy rozwiązywaniu zadań stosuje się metody numeryczne oraz pewne dalsze uproszczenia. Weryfikacje przybliżonych metod rozwiązywania zadań przeprowadza się na drodze badań modelowych.

Przedstawione tu wyżej warunki brzegowe na swobodnej powierzchni powinny dać Wam możliwość identyfikacji problemów hydromechanicznych przedstawionych w różnych publikacjach oraz samodzielne formułowanie zadań Was interesujących.

16. POWIERZCHNIOWE FALE SWOBODNE

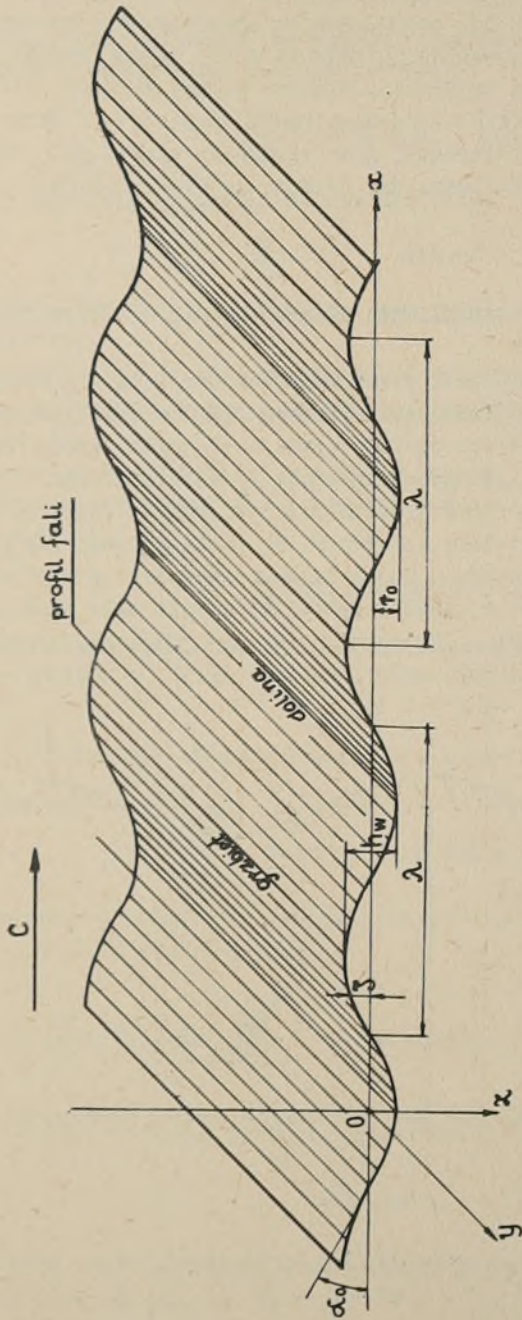
Rozróżnia się powierzchniowe fale wymuszone oraz powierzchniowe fale swobodne. Jedne i drugie mogą istnieć na swobodnej powierzchni cieczy, wody, dzięki sile grawitacyjnej, która w tym przypadku ma charakter siły przywracającej. Dlatego falowanie powierzchniowe nazywa się także falowaniem grawitacyjnym.

Falowanie wymuszone jest wywołane różnymi przyczynami: ruchem statków, wiatrem, oscylacyjnymi ruchami zbiornika wodnego. Jest ono bardzo złożone. Obserwowaliście z pewnością falowanie morza lub jeziora w czasie trwania silnego wiatru. Może także zwróciliście uwagę na falowanie powierzchni swobodnej spowodowane ruchem statku lub po wrzuceniu kamienia do wody?

Swobodne falowanie powierzchniowe istnieje na swobodnej powierzchni cieczy - wody - wtedy, gdy przyczyna wywołująca falowanie powierzchniowe zanika. Występuje ono zatem na swobodnej powierzchni po upływie pewnego czasu, od chwili zaniknięcia wiatru, w postaci fali martwej. Obserwacja takiej fali przeważnie wykazuje, że jej obraz jest taki sam we wszystkich płaszczyznach pokrywających się z kierunkiem przemieszczania się fali. Jest to zatem bieżąca fala dwuwymiarowa. Rysunek 16.1 pokazuje główne charakterystyki takiej fali. Są nimi długość fali λ , wysokość fali $h_w = \zeta_w$, okres fali τ . Maksymalne wzniesienie swobodnej powierzchni sfalowanej nazywa się grzbietem fali, a maksymalne obniżenie - doliną fali. Długością fali dwuwymiarowej, regularnej jak na rysunku 16.1, jest odległość pomiędzy dwoma sąsiednimi grzbietami lub dwiema sąsiednimi dolinami, względnie dwoma sąsiednimi punktami profilu fali pozostającymi w tej samej fazie. Wysokością fali nazywa się pionową odległość pomiędzy grzbietem i doliną fali. Połowa wysokości regularnej fali zwie się amplitudą fali: $r_0 = \zeta_A = 0,5 h_w$. Do scharakteryzowania geometrii profilu fali służy jeszcze względna wysokość fali h_w/λ zwana także stromością fali oraz maksymalny kąt skłonu fali α_0 . Pomiędzy prędkością przemieszczania się profilu fali C , zwanej także prędkością fazową fali - jest ona stała - długością fali i okresem fali istnieje zależność

$$C = \frac{\lambda}{\tau} \quad (16.1)$$

Obserwacje falowania powierzchniowego wykazują, że stromość powstających fal powierzchniowych jest mała i wynosi od $1/10$ do $1/26$. Stąd kąty skłonu fali są także małe. Powyższe dane są podstawą do stwierdzenia, że powierzchnia swobodna pokryta falami grawitacyjnymi mało różni się od płaszczyzny $z=0$ i że dość dobrym przybliżeniem do analitycznego badania fal powierzchniowych będzie liniowy warunek brzegowy na swobodnej powierzchni wody.

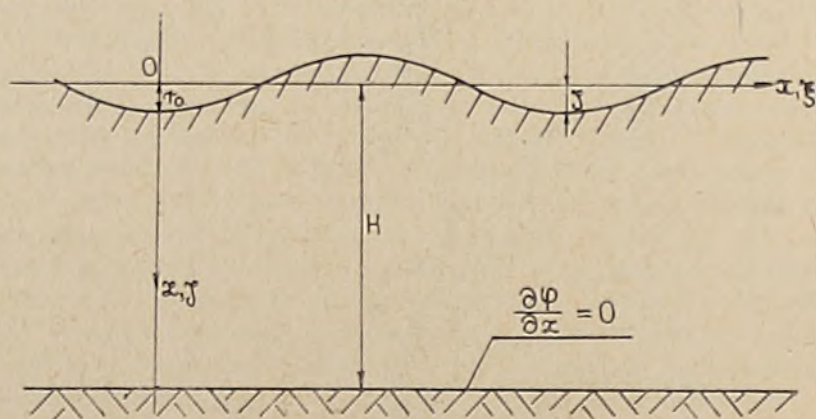


Rys. 16.1

Grawitacyjne fale stojące powstają na swobodnej powierzchni o ograniczonych wymiarach - w zbiornikach cieczy po ustaniu ruchów tych zbiorników a także wtedy, gdy fala biegnąca odbija się od przeszkody. Ten rodzaj fal charakteryzuje się tym, że jej profil nie przemieszcza się po swobodnej powierzchni, a jedynie z upływem czasu zmieniają się rzędne profilu fali w danym obszarze powierzchni swobodnej. Widzimy zatem, że wzór (16.1) nie ma tu zastosowania, chociaż fala stojąca ma pewną długość λ i okres T . Okresem fali stojącej lub biegnącej jest przedział czasu, jaki upłynie przy mijaniu nieruchomego punktu przez dwa kolejne grzbiety lub dwie kolejne doliny fali.

16.1. SFORMUŁOWANIE ZADANIA DLA SWOBODNYCH FAL GRAWITACYJNYCH

Robimy następujące założenia. Niech woda znajduje się w zbiorniku posiadającym płaskie dno na głębokości H , równoległe do niezakłóconej swobodnej powierzchni $z=0$ i niech poziome wymiary zbiornika będą nieograniczone. Założenia te jak i następne upraszczają zadanie. Zatem zakładamy dalej, że woda jest praktycznie nieściśliwa, że jest nielepkka, że na swobodnej powierzchni panuje stałe ciśnienie, że można pominąć napięcie powierzchniowe oraz, że przepływ w ruchu falowym wody jest przepływem potencjalnym. Ponadto założymy, że amplitudy fal są bardzo małe oraz, że istnieją tylko fale dwuwymiarowe. Sporo tych założeń! Mimo to, uzyskamy dość dużo informacji o ruchu falowym wody i to informacji o dużym znaczeniu praktycznym.



Rys. 16.2

Zadanie sformułujemy w nieruchomym układzie odniesienia pokazanym na rysunku 16.2. Z założeń $\nabla \times \vec{v} = 0$ i $\rho = \text{const}$ wynika, że pole prędkości ma potencjał φ taki, że

$$\vec{v} = \nabla \varphi \quad (16.2)$$

oraz, że $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ i że potencjał φ spełnia równanie Laplace'a:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (16.3)$$

Do równania (16.3) dołączamy następujące warunki brzegowe:

- na swobodnej powierzchni warunek (15.11a):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z=0 \quad (16.4)$$

- na dnie zbiornika (przykład na rysunku 12.40)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z=H \quad (16.5)$$

Ponieważ rozpatrujemy fale swobodne, więc nie narzuca się warunków początkowych dla $t=0$.

Gdyby zbiornik miał skończone poziome wymiary, to należałoby dołączyć kinematyczne warunki brzegowe na bocznych ścianach tego zbiornika typu wyrażenia (16.5).

Po wyznaczeniu potencjału φ z równania (16.3) przy warunku (16.4) i (16.5) można na podstawie wzoru (15.12) znaleźć postać sfalowanej, swobodnej powierzchni

$$\zeta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial t} \quad (16.6)$$

a z równania Cauchy'ego-Lagrange'a (13.2) pole ciśnień na głębokości z

$$p = p_a + \rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (16.7)$$

gdzie: p_a - ciśnienie atmosferyczne na swobodnej powierzchni.

16.2. PŁASKIE FALE STOJĄCE

Do rozwiązania zadania zastosujemy metodę rozdzielania zmiennych Fouriera. Zgodnie z nią możemy napisać:

$$\varphi(x, y, t) = X(x) Z(z) \varphi_1(t) \quad (16.8)$$

Podstawiamy wyrażenie (16.8) do równania Laplace'a (16.3).

Mamy:

$$\varphi_1 Z \frac{d^2 X}{dx^2} + \varphi_1 X \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Stąd

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = - k^2 \quad (16.9)$$

Przy stałej k dajemy znak (-), bo funkcja $X(x)$ ma być funkcją okresową - ma opisywać profil fali.

Wyrażenia (16.9) zapisujemy w postaci dwóch równań różniczkowych:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0 \quad (16.10a)$$

$$-\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0 \quad (16.10b)$$

Rozwiązaniem tych równań są wyrażenia:

$$X = C_1 \cos(kx + \epsilon_1) \quad (16.11a)$$

$$Z = D_1 e^{-kz} + D_2 e^{kz} \quad (16.11b)$$

Przechodzimy do zastosowania warunków brzegowych. Podstawiamy (16.8) do warunku na dnie (16.5). Mamy:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi_1 X \frac{dZ}{dz} = 0 \quad \text{dla } z=H$$

Stąd

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \quad \text{dla } z=H$$

Ale z wyrażenia (16.11b) wynika, że:

$$\frac{dZ}{dz} = -D_1 k e^{-kz} + D_2 k e^{kz}$$

Więc dla $z=H$ mamy równanie:

$$-D_1 k e^{-kH} + D_2 k e^{kH} = 0$$

Jest ono możliwe do spełnienia wtedy, gdy:

$$D_1 e^{-kH} = D_2 e^{kH}$$

i jest równe stałej. Wygodnym jest oznaczenie tej stałej przez $\frac{1}{2} D$. Wtedy:

$$D_1 = \frac{1}{2} D e^{kH} \quad (16.12)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} D e^{-kH}$$

Podstawiając wyrażenia (16.12) do wzoru (16.11b) mamy:

$$Z(z) = D \frac{1}{2} [e^{k(H-z)} + e^{-k(H-z)}] = D \cosh[k(H-z)] \quad (16.13)$$

Następnie podstawiamy wyrażenie (16.8) do warunku (16.4) - otrzymujemy:

$$X Z \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - g \varphi_1 X \frac{dZ}{dz} = 0 \quad \text{dla } z=0$$

Stąd po uwzględnieniu wyrażenia (16.13) uzyskuje się równanie:

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} + \omega^2 \varphi_1 = 0 \quad (16.14)$$

gdzie:

$$\omega^2 = gk \operatorname{tgh}(kH) \quad (16.15)$$

Można było napisać ω^2 , bo k i H są wielkościami dodatnimi. Rozwiązanie równania (16.14) jest takie same jak rozwiązanie równania (16.10a). Jest ono równe:

$$\varphi_1(t) = C_2 \cos(\omega t + \varepsilon_2) \quad (16.16)$$

Zatem ω jest częstością fali i jest związana z okresem fali τ znaną zależnością

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ogólne wyrażenie dla potencjału prędkości uzyskamy podstawiając wyrażenia (16.11a), (16.13) i (16.16) do wzoru (16.8).

Więc:

$$\varphi(x, z, t) = C_1 C_2 D \cosh[k(H-z)] \cos(kx + \varepsilon_1) \cos(\omega t + \varepsilon_2) \quad (16.17)$$

Iloczyn stałych $C_1 C_2 D$ możemy oczywiście zastąpić jedną stałą C , a przesunięciom fazowym ε_1 i ε_2 możemy tu nadać dowolne wartości. Założymy najpierw

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 = 0$$

Wtedy potencjał φ będzie określony przez

$$\varphi = -C \cosh[k(H-z)] \sin kx \cos \omega t \quad (16.18)$$

Znając potencjał prędkości, możemy wyznaczyć wszystkie charakterystyki przepływu, np.: tory elementów płynu, linie prądu, pole prędkości, pole ciśnień a także ze wzoru (16.6) obraz swobodnej powierzchni.

Podstawiając wyrażenie (16.18) do wzoru (16.6) widzimy, że kształt swobodnej powierzchni opisany jest wzorem

$$\xi(x, t) = r_0 \sin kx \sin \omega t \quad (16.19)$$

gdzie amplituda fali r_0 jest określona przez:

$$r_0 = \frac{C\omega}{g} \cosh(kH) \quad (16.20a)$$

Stąd stała:

$$C = \frac{g r_0}{\omega \cosh(kH)} \quad (16.20b)$$

Przy uwzględnieniu (16.20b) wyrażenie (16.18) daje użyteczną postać potencjału prędkości fali stojącej:

$$\varphi = -\frac{r_0 g}{\omega} \frac{\cosh[k(H-z)]}{\cosh(kH)} \sin kx \cos \omega t \quad (16.21)$$

Ze wzoru (16.19) widać, że w danej chwili t - przykładowo dla $\omega t = \frac{1}{2}\pi$, równanie swobodnej powierzchni (16.19) przedstawia sinusoidę

$$\xi(x) = r_0 \sin kx \quad (16.22)$$

o długości fali

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (16.23)$$

Liczba $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ nazywa się liczbą falową, a w ogólnym przypadku wektorem falowym. Pokazuje ona, ile długości fal uклада się na odcinku równym 2π . Ze wzoru (16.19) widać, że położenia punktów przecięcia profilu fali z osią Ox nie zmieniają swojego położenia z upływem czasu. Są one nazywane węzłami fali. Węzły fali nie przemieszczają się wzdłuż osi Ox . Profil fali opisanej zatem przez wzór (16.19) jest falą stojącą. Wzór (16.19) pokazuje także to, że pomiędzy węzłami fali mają miejsce wahań swobodnej powierzchni zgodnie z $\sin \omega t$, przy czym amplituda tych wahań, równa r_0 , nazywa się strzałką. Na podstawie wzoru (16.15) możemy znaleźć okres tych wahań. Jest on równy

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{gk \operatorname{tgh}(kH)}} \quad (16.24)$$

Widzimy, że okres τ zależy od długości fali oraz od głębokości zbiornika wody. Jeśli głębokość zbiornika staje się bardzo duża, $kH \rightarrow \infty$, to $\operatorname{tgh}(kH) \rightarrow 1$, a także przy $H \rightarrow \infty$

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\cosh[k(H-z)]}{\cos(kH)} = e^{-kz}$$

i ze wzorów ważnych dla wody płytkiej dostajemy natychmiast szczególny przypadek wody bardzo głębokiej, a mianowicie:

$$\varphi(x, z, t) = -\frac{r_0 g}{\omega} e^{-kz} \sin kx \cos \omega t \quad (16.25a)$$

$$\xi(x, t) = r_0 \sin kx \sin \omega t \quad (16.25b)$$

$$\omega^2 = gk \quad \tau = \frac{2\pi}{\sqrt{gk}} = \sqrt{\frac{2\pi}{g} \lambda} \quad (16.25c)$$

Widzimy, że na wodzie płytkiej i na wodzie głębokiej profil fali $\xi(x, t)$ jest opisany tymi samymi wyrażeniami.

Znając potencjał fali stojącej (16.21), (16.25a) można znaleźć pole prędkości:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

a na podstawie wzoru (16.7) - pole ciśnień. Zauważmy, że przy tak określonym potencjale prędkości węzeł fali stojącej ma miejsce w początku układu współrzędnych oraz, że w węźle fali $v_z = 0$, a v_x ma wartość ekstremalną; w strzałce fali natomiast $v_x = 0$, a v_z ma wartość ekstremalną. Na swobodnej powierzchni składowa v_z , niezależnie czy woda jest płytka czy też głęboka, określona jest tym samym wzorem:

$$v_z = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = r_0 \omega \sin kx \cos \omega t$$

Ponieważ rozpatrujemy zadanie w ujęciu liniowym, to zgodnie ze wzorem (12.138) v_z powinno być równe $\frac{\partial \xi}{\partial t}$. I tak rzeczywiście jest. Na dnie, przy $z=H$, $v_z=0$. Jest to zgodne z warunkiem (16.5). Zauważmy jeszcze to, że $v_x=0$ jest równoważne kinematycznemu warunkowi brzegowemu na nieprzepuszczalnej ścianie, prostopadłej do osi Ox . Zatem jeśli w strzałce fali stojącej określonej potencjałem prędkości (16.21) wstawi się ścianę pionową prostopadłą do osi Ox , to nic w przepływie się nie zmieni. Mając to na uwadze, łatwym staje się napisanie wyrażenia dla potencjału prędkości fal grawitacyjnych powstających w zbiorniku ograniczonym ścianami prostopadłymi do osi Ox w odległości $x = \pm \frac{B}{2}$. Na tych ścianach

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x = \pm \frac{B}{2}} = 0$$

Z wyrażenia (16.21) widać, że jest to możliwe wtedy, gdy

$$\cos k \frac{B}{2} = 0$$

Stąd liczba falowa musi spełniać zależność

$$k = \frac{\pi(2n+1)}{B} \quad (16.26)$$

gdzie: $n = 0, 1, 2 \dots$

Uwzględniając wyrażenie dla liczby falowej

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (16.27)$$

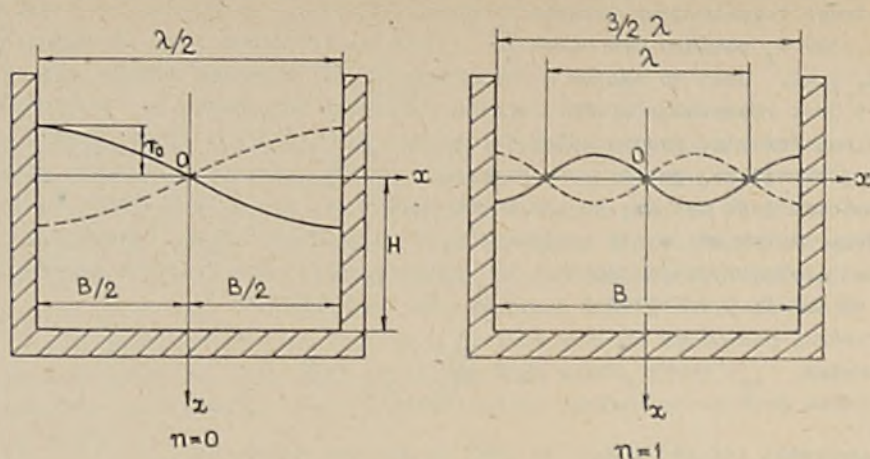
widzimy, że na szerokości B zbiornika powstaje nieparzysta ilość połówek fal

$$\frac{B}{\frac{\lambda}{2}} = 2n + 1 \quad (16.28)$$

mających węzeł w środku zbiornika, a strzałki przy jego ścianach. Powstających fal stojących na powierzchni zbiornika może być nieskończenie wiele. Wynika to ze wzoru (16.26). Dla znalezienia n -tej fali stojącej na swobodnej powierzchni należy do wzoru (16.25b) podstawić liczbę falową określoną związkami (16.26). Tak samo postępuje się z potencjałem prędkości (16.21) oraz z częstością fali określoną wyrażeniem (16.15). Na rysunku 16.3 pokazano przypadek fali stojącej w płaskim zbiorniku dla $n=0$ oraz dla $n=1$.

Ponieważ równanie Laplace'a jest równaniem liniowym, a także wszystkie warunki brzegowe w naszym zadaniu są liniowe, to na swobodnej powierzchni wody lub innej cieczy w zbiorniku może powstać fala stojąca będąca sumą wszystkich prostych fal stojących. Zatem wszystkie wielkości opisujące takie falowanie grawitacyjne, będące wahaniami własnymi cieczy w zbiorniku można prosto znaleźć z poznanych już wyżej wyrażeń. I tak

$$\varphi(x, z, t) = -g \sum_n \frac{r_{0n}}{n} \frac{\cosh[k_n(H-z)]}{\cosh(k_n H)} \sin k_n x \cos \omega_n t \quad (16.29)$$



Rys.16.3

gdzie:

$$k_n = \frac{\pi}{B} (2n + 1) = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad (16.30)$$

$$\omega_n^2 = g k_n \operatorname{tgh}(k_n H) \quad (16.31)$$

$$n = 0; 1; 2; \dots$$

W wyrażeniu (16.29) nie podano celowo górnej granicy sumowania. Zależy ona bowiem od szerokości zbiornika B. Wynika to z przyczyny nieuwzględnienia w warunku brzegowym na swobodnej powierzchni napięcia powierzchniowego $\sigma = a$. Jak już wspomniano, przy małych długościach fal: $\lambda < 0,1$ zaczynają decydującą rolę odgrywać napięcia powierzchniowe i powyższe związki przestają być obowiązujące. Mamy wtedy do czynienia z tak zwanymi falami kapilarnymi, objawiającymi się w postaci zmarszczek na swobodnej powierzchni. Uwzględniając powyższą uwagę, maksymalną wartość n można określić ze związku

$$\lambda_n = \frac{2B}{2n+1} > 0,10$$

Jeśli podstawimy wyrażenie (16.29) do wzoru (16.7) określającego pole ciśnień w zbiorniku, to możemy stwierdzić, że oprócz ciśnienia hydrostatycznego: $p_a + \rho g z$, stałego na danej głębokości z, będzie działać dodatkowe ciśnienie dynamiczne

$$p_d = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

o postaci bardzo złożonej, zależnej od miejsca i czasu. Ciśnienie to działa na boczne ściany i dno zbiornika. Należy mieć je na uwadze przy projektowaniu zbiorników cieczy na statkach. Może ono być bowiem przyczyną drgań konstrukcji zbiorników okrętowych.

We wzorze (16,17) można za stałe dowolne podstawić także daną:

$$\varepsilon_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = -\frac{\pi}{2}$$

Wtedy potencjał φ ruchu falowego wody będzie:

$$\varphi_1(x, z, t) = \frac{r_0 g}{\omega} \frac{\cosh [k (H-z)]}{\cosh (k H)} \cos kx \sin \omega t \quad (16.32)$$

a profil fali

$$\zeta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_1(x, 0, t)}{\partial t} = r_0 \cos kx \cos \omega t \quad (16.33)$$

ma strzałkę w początku układu współrzędnych.

Jeśli rozpatruje się wahania własne cieczy w zbiorniku płaskim jak na rysunku 16.3, to przy uwzględnieniu kinematycznego warunku na ścianach bocznych tego zbiornika

$$v_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \Big|_{x = \pm \frac{B}{2}} = 0$$

mamy

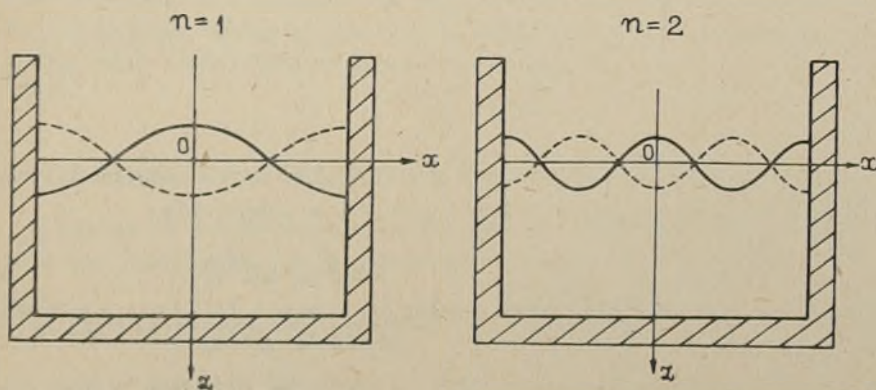
$$\sin k \frac{B}{2} = 0$$

Stąd

$$k_n = 2n \frac{\pi}{B} \quad n = 1; 2; 3; \dots \quad (16.34)$$

$$\frac{B}{\lambda} = 2n \quad (16.35)$$

Widzimy, że w tym przypadku na szerokości zbiornika układa się parzysta ilość połówek fal stojących posiadających strzałki w połowie szerokości zbiornika oraz na jego bocznych ścianach. Obraz falowania dla $n=1$ i $n=2$ pokazano na rysunku 16.4.



Rys. 16.4

Łatwo zauważyć, że wzory dla własnych liczb falowych (16.26) i (16.34) można wyrazić przy pomocy jednego wyrażenia:

$$k_n = \frac{n\pi}{B} \quad (16.36)$$

Podobnie wzory - (16.28) i (16.35):

$$\frac{B}{\frac{\lambda}{2}} = n \quad \text{gdzie: } n = 1, 2, 3$$

Częstości własne wahań powierzchni swobodnej - w postaci fal stojących będą wtedy określone związkiem

$$\omega_n^2 = g \frac{\pi n}{B} \operatorname{tgh} \frac{\pi n H}{B} \quad (16.37)$$

Widzimy, że zależą one od szerokości zbiornika oraz od wypełnienia cieczą tego zbiornika.

W podobny sposób można znaleźć związek częstości własnych wahań swobodnej powierzchni w postaci fal stojących w basenie w kształcie prostopadłościanu o wymiarach: długość L , szerokość B , głębokość H .

W celu matematycznego sformułowania zadania przyjmujemy układ odniesienia taki sam, jaki zastosowano w zadaniu płaskim na rysunku 16.3. Oś Oy leży na swobodnej powierzchni cieczy i jest skierowana wzdłuż długości basenu. Zadanie jest sformułowane przez równanie Laplace'a

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (16.38)$$

i warunki brzegowe:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z = 0 \quad (16.39)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \quad (16.40)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=\pm \frac{L}{2}} = 0 \quad (16.41)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=\pm \frac{B}{2}} = 0 \quad (16.42)$$

Korzystając z wyrażeń (16.18), (16.21) oraz (16.25a) można natychmiast napisać potencjał fali stojącej w takim zbiorniku, a mianowicie:

$$\varphi(x, y, z, t) = - \frac{g r_0}{\omega} \frac{\cosh [k(H-z)]}{\cosh (kH)} \cos \omega t \begin{cases} \cos ux \cos vy \\ \sin ux \sin vy \end{cases} \quad (16.43)$$

Z równania Laplace'a (16.38) dostaje się związek

$$k^2 = u^2 + v^2 \quad (16.44)$$

który możemy traktować jako kwadrat modułu wektora falowego

$$\vec{k} = \vec{i} u + \vec{j} v \quad (16.45)$$

Wyraźnie widzimy tu uzasadnienie nazwy: wektor falowy. Jeśli podstawimy wyrażenie (16.43) do warunku brzegowego na swobodnej powierzchni, to uzyskamy związek pomiędzy częstością ω a k identyczny z (16.15). Łatwo można sprawdzić, że warunek na dnie (16.40) jest także spełniony. Jeśli chodzi natomiast o warunki brzegowe na ścianach bocznych basenu, to przy przyjęciu

$$\cos ux \cos vy$$

i uwzględnieniu (16.34) mamy

$$u_m = 2\pi \frac{m}{L} \quad v_n = 2\pi \frac{n}{B} \quad (16.46a)$$

gdzie $m, n = 1; 2; 3; \dots$

Przyjmując natomiast w wyrażeniu (16.43)

$$\sin ux \sin vy$$

i uwzględniając (16.26), dla składowych wektora falowego mamy:

$$u_m = (2m + 1) \frac{\pi}{L} \quad v_n = (2n + 1) \frac{\pi}{B} \quad (16.46b)$$

gdzie: $m, n = 0; 1; 2; \dots$

Podobnie jak w zadaniu płaskim u_m, v_n możemy zapisać przy pomocy wyrażeń

$$u_m = \frac{m\pi}{L} \quad v_n = \frac{n\pi}{B} \quad (16.47)$$

gdzie: m, n są liczbami całkowitymi.

Stąd dalej uwzględniając związek (16.44) i (16.47) uzyskuje się wyrażenie dla możliwych części własnych wahań powierzchni swobodnej w zbiorniku o kształcie prostopadłościanu:

$$\omega_{m,n}^2 = g\pi \sqrt{\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2} \operatorname{tgh} \left(\pi \sqrt{m^2 \left(\frac{H}{L}\right)^2 + n^2 \left(\frac{H}{B}\right)^2} \right) \quad (16.48)$$

Wzór powyższy może posłużyć do sprawdzenia, czy podczas eksploatacji statku nie wystąpi rezonans pomiędzy kołysaniami statku a wahaniami swobodnej powierzchni w zbiorniku zamontowanym na statku.

16.3. PŁASKIE FALE BIEGNĄCE

Dodając do siebie potencjały określone wzorami (16.32) i (16.21) dostaje się nowy potencjał φ opisujący falowanie grawitacyjne

$$\varphi(x, z, t) = - \frac{g \Gamma_0}{\omega} \frac{\cosh [k(H-z)]}{\cosh (kH)} \sin (kx - \omega t) \quad (16.49)$$

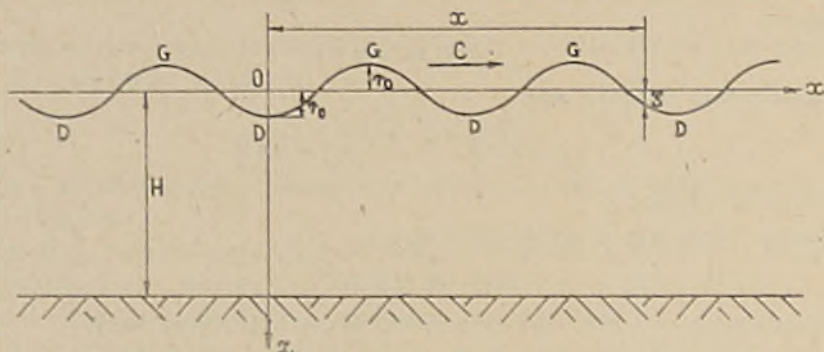
Spełnia on równanie Laplace'a (16.3) oraz warunki brzegowe (16.4) i (16.5)

Na podstawie wyrażenia (16.6) przy zastosowaniu wzoru (16.49) znajdujemy równanie swobodnej powierzchni:

$$\zeta = r_0 \cos(kx - \omega t) \quad (16.50)$$

Dla $t=0$ profil swobodnej powierzchni pokazuje rysunek 16.5. Z równania (16.50) wynika, że doliny, D, fali mają miejsce dla

$$\cos(kx - \omega t) = -1.$$



Rys.16.5

Wtedy faza

$$kx - \omega t = 2\pi n \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

Stąd dolina fali ze wskaźnikiem n przemieszcza się w kierunku dodatniej osi Ox ze stałą prędkością

$$C = \frac{\omega}{k} \quad (16.51)$$

bowiem

$$x = \frac{2n\pi}{k} + \frac{\omega}{k} t$$

jest równaniem drogi dla jednostajnego ruchu wzdłuż linii prostej. Zatem wyrażenie (16.50) opisuje profil płaskiej fali biegnącej, a wyrażenie (16.49) odpowiadający tej fali potencjał.

Podstawiając zależność (16.15) do wzoru (16.51) uzyskujemy wyrażenie na prędkość fazową fali

$$C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \operatorname{tgh}(kH)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)} \quad (16.52)$$

Ze wzoru (16.52) widać, że prędkość fali biegnącej po swobodnej powierzchni zależy od jej długości λ . Ta własność nazywa się dyspersją fali.

Rozpatrzmy dwa szczególne przypadki wzoru (16.52). Pierwszy z nich odpowiada wodzie głębokiej, drugi - wodzie płytkiej. Jeśli woda jest głęboka, to $kH \rightarrow \infty$ i $\operatorname{tgh}(kH) = 1$. Wtedy prędkość fali jest

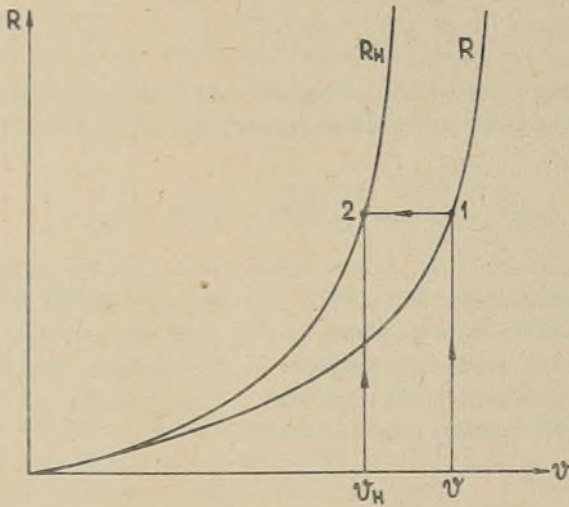
$$C_\infty = C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad (16.53)$$

a długość fali

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} c^2 \quad (16.54)$$

Uwzględniając (16.53) wzór (16.52) dla fal o tych samych długościach na wodzie płytkiej i wodzie głębokiej można zapisać w postaci:

$$\frac{c_H}{c_\infty} = \sqrt{\operatorname{tgh}(kH)} = \sqrt{\operatorname{tgh}\left(\frac{gH}{c_\infty^2}\right)} \quad (16.55)$$



Rys. 16.6

Znalazł on zastosowanie przy przybliżonym wyznaczaniu oporu statku na wodzie płytkiej, gdy dana jest krzywa oporu statku na wodzie głębokiej. Sposób postępowania w tej zgrubnej metodzie pokazany jest na rysunku 16.6, na którym literą R oznaczono opór statku na wodzie głębokiej, a przez R_H - opór statku na wodzie o głębokości H . Obieramy dowolną wartość prędkości statku $v = c_\infty$ i obliczamy dla danej głębokości wody H prędkość statku $v_H = c_H$ zakładając, że $R(v) = R_H(v_H)$. Zauważmy, że wprowadzając liczbę Froude'a odniesioną do głębokości wody H otrzymujemy

$$F_{H\infty} = \frac{v_\infty}{\sqrt{gH}} = \frac{c_\infty}{\sqrt{gH}} \quad (16.56)$$

Wzorowi (16.55) można nadać postać:

$$\frac{c_H}{c_\infty} = \sqrt{\operatorname{tgh}(F_{H\infty}^{-2})} \quad (16.57)$$

Wzór (16.57) pokazuje, że przy liczbach $F_{H\infty} = 0,4 - 0,5$ prędkość fali biegnącej na wodzie głębokiej i na wodzie płytkiej jest praktycznie taka sama. Taki sam również powinien być obraz fal wytwarzany przez statek, a co za tym idzie i opór falowy statku. Przy dalszym wzrastaniu F_H prędkość c_H będzie ulegać zmniejszeniu, będzie także ulegać zmianie - w stosunku

wody głębokiej - obraz fal wytwarzanych przez statek i będzie zmieniać się jego opór falowy. Następuje wzrost tego oporu. Decydującym parametrem będzie w tym przypadku liczba Froude'a odniesiona do głębokości zbiornika wodnego, a nie $F_n = F_L = \frac{v}{\sqrt{gL}}$. Zauważmy, że mogliśmy przyjąć prędkość fali równą prędkości statku, bo w układzie związanym ze statkiem fale wytwarzane przez statek są nieruchome względem statku.

Ze wzoru (16.55) widać także, że jeśli głębokość zbiornika $H \geq \frac{\lambda}{2}$, to $C_H \approx C_\infty$, bo:

$$C_H = C_\infty \sqrt{\tanh \pi} \approx C_\infty$$

Rozpatrując drugi szczególny przypadek wody bardzo płytkiej mamy $\tanh(kH) \approx kH$. Stąd prędkość fali biegnącej C_H na mocy wzoru (16.52) będzie

$$C_H = \sqrt{\frac{g}{k}} (kH) = \sqrt{gH} = C_{kr} \quad (16.58)$$

Widzimy, że prędkość fali na wodzie bardzo płytkiej nie zależy od długości fali. Zależy ona od głębokości wody H . Z większą prędkością niż określoną wzorem (16.58) fale na wodzie płytkiej nie mogą się poruszać. Mówimy, że wzór (16.58) określa prędkość krytyczną fali biegnącej o małej amplitudzie na wodzie płytkiej. Jeśli rozpatruje się jednak zadanie nieliniowe, to zamiast wzoru (16.58) dostaje się zależność

$$C_{kr} = \sqrt{g(H + r_0)} \quad (16.58a)$$

Przy małej amplitudzie r_0 w stosunku do H wzory: (16.58) i (16.58a) pokrywają się.

Jeśli chodzi o prędkość fali na wodzie bardzo płytkiej, to widzimy, że własność niezależności jej prędkości od długości fali jest taka sama jak dla fal elektromagnetycznych w próżni a także jak dla fali dźwiękowej. Szczególnie ta ostatnia uwaga ma dla nas znaczenie praktyczne. Wprowadzając liczbę Froude'a

$$F_H = \frac{v}{C_{kr}} = \frac{v}{\sqrt{gH}} \quad (16.59)$$

gdzie: v - prędkość obiektu - statku - na wodzie płytkiej widzimy, że jest ona odpowiednikiem liczby Macha

$$M = \frac{v}{C} \quad (16.60)$$

w aerodynamice. Tu C jest prędkością dźwięku a v - prędkością obiektu. Z tej analogii wynika wniosek taki, że przy projektowaniu statków poruszających się na wodzie płytkiej z daną liczbą F_H można skorzystać z danych dla projektowania samolotów poruszających się z liczbą Macha: $M = F_H$.

Pomiędzy liczbą Froude'a F_L i F_H mamy zależność:

$$F_H = F_L \sqrt{\frac{L}{H}} \quad (16.61)$$

Na podstawie wzoru (16.52) możemy ocenić, jak zmienia się długość fali na wodzie płytkiej w stosunku do długości fali na wodzie głębokiej, gdy, w obu przypadkach, fale mają taką samą prędkość. Otóż

$$\lambda_H = \lambda_\infty \frac{C_H^2}{C_\infty^2} \frac{1}{\operatorname{tgh}(kH)}$$

Widzimy, że przy $C_H = C_\infty$ $\lambda_H > \lambda_\infty$. Jeśli głębokość staje się bardzo mała, to długość fali bardzo się zwiększa; przy prędkości krytycznej staje się nieskończenie długą. Profil fali staje się wtedy jednym grzbietem występującym ponad poziomem wody o głębokości H . Można go określić w ujęciu nieliniowym zadania. W układzie odniesienia związanym z poruszającą się taką falą, zwaną falą odosobnioną, równanie przybliżone tego profilu jest [14]

$$\zeta = -r_0 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{x \sqrt{3} r_0}{2 \left(H + \frac{1}{3} r_0 \right)^{3/2}} \right] \quad (16.62)$$

Fale odosobnione, zwane także falami długimi, zostały najpierw zaobserwowane w płytkim kanale. Powstają one w postaci pływów wskutek przyciągania księżyca a także przy ruchu statku na wodzie płytkiej lub w płytkim kanale przy prędkości statku bliskiej prędkości krytycznej fali.

Podobnie jak dla fali stojącej możemy napisać potencjał fali biegnącej na wodzie głębokiej. Wystarczy przejść do granicy $H \rightarrow \infty$ w wyrażeniu (16.49). Wykonując działania otrzymujemy

$$\varphi(x, z, t) = -\frac{g r_0}{\omega} e^{-kz} \sin(kx - \omega t) \quad (16.63)$$

Widzimy, że profil fali jest w tym przypadku opisany również wyrażeniem (16.50).

Znając potencjały prędkości fali biegnącej na wodzie płytkiej i wodzie głębokiej możemy wyznaczyć pole prędkości a dalej tory elementów wody i linie prądu. I tak dla wody płytkiej pole prędkości jest:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{r_0 g k}{\omega} \frac{\cosh[k(H-z)]}{\cosh(kH)} \cos(kx - \omega t) \quad (16.64)$$

Uwzględniając wzór (16.15) możemy v_x zapisać:

$$v_x = -r_0 \omega \frac{\cosh[k(H-z)]}{\sinh(kH)} \cos(kx - \omega t) \quad (16.65)$$

Podobnie

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = r_0 \omega \frac{\sinh[k(H-z)]}{\sinh(kH)} \sin(kx - \omega t) \quad (16.66)$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (16.67)$$

Pole prędkości w płaskiej fali biegnącej na wodzie głębokiej uzyskujemy przez zastosowanie operatora „nabla” dla potencjału określonego wzorem (16.63) lub ze wzorów od (16.65) do (16.67) dla $H \rightarrow \infty$.

Otrzymujemy

$$v_x = -r_0 \omega e^{-kz} \cos(kx - \omega t) \quad (16.68)$$

$$v_y = 0 \quad (16.69)$$

$$v_z = r_0 \omega e^{-kz} \sin(kx - \omega t) \quad (16.70)$$

Widzimy, że pole prędkości w fali biegnącej jest polem przestrzenno-czasowym.

Sprawdźcie, że dla $z=0$

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (16.71)$$

Przy pomocy równań (6.2) i wyrażeń dla prędkości v_x i v_z można znaleźć tory elementów wody w fali biegnącej, bowiem

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Ponieważ amplituda r_0 fali jest wielkością małą, to także małymi będą wahaniami elementu wody względem jego położenia równowagi (x_0, z_0) . To położenie równowagi (x_0, z_0) podstawiamy do prawych stron wyrażeń (dla prędkości v_x i v_z). Wtedy całkowanie równań toru elementu wody jest proste. W wyniku uzyskuje się dla wody płytkiej równanie torów:

$$x - x_0 = r_0 \frac{\cosh[k(H-z_0)]}{\sinh(kH)} \sin(kx_0 - \omega t) \quad (16.72)$$

$$z - z_0 = r_0 \frac{\sinh[k(H-z_0)]}{\sinh(kH)} \cos(kx - \omega t) \quad (16.73)$$

Jest to równanie parametryczne elipsy o półosiach

$$a = r_0 \frac{\cosh[k(H-z_0)]}{\sinh(kH)} \quad (16.74)$$

$$b = r_0 \frac{\sinh[k(H-z_0)]}{\sinh(kH)} \quad (16.75)$$

Istotnie dzieląc stronami wyrażenie (16.72) przez a i tak samo wyrażenie (16.73) przez b rugujemy z nich funkcje $\sin(\)$ i $\cos(\)$ uzyskując

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b^2} = 1 \quad (16.76)$$

Zatem torami elementów wody - cząstek wody - w płaskiej fali biegnącej na wodzie płytkiej są elipsy. Dla cząstek wody położonych na swobodnej powierzchni: $z_0 = 0$, $b = r_0$, $a = r_0 \operatorname{ctgh}(kH)$; dla cząstek znajdujących się na dnie: $z_0 = H$, $b = 0$, $a = r_0 \operatorname{csech}(kH)$. Jeśli woda jest bardzo głęboka, to $a = b = r_0 e^{-kz}$. Zatem na wodzie głębokiej torami cząstek wody są okręgi o promieniach

$$r_z = r_0 e^{-kz} \quad (16.77)$$

malejących wraz z zanurzeniem cząstki. Na głębokości $z = 0,5\lambda$ promień $r_z = r_0 e^{-\pi} = 0,043 r_0$. Stąd na głębokości $z > 0,5\lambda$ zanika praktycznie ruch falowy wody.

Przy uwzględnieniu wzoru (16.77) składowe prędkości cząstek wody w płaskiej fali biegnącej o małej amplitudzie możemy zapisać tak:

$$v_x = -\omega r_z \cos(kx - \omega t) \quad (16.78)$$

$$v_z = \omega r_z \sin(kx - \omega t)$$

Stąd moduł prędkości cząstek

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \omega r_z$$

maleje tak samo jak promień toru cząstki i na głębokości $z > 0,5\lambda$ praktycznie $v = 0$. Stąd wniosek taki: jeśli statek podwodny będzie się poruszać na głębokości większej niż połowa długości fali biegnącej lub stojącej (wzór 16.25), to falowanie powierzchni swobodnej nie będzie oddziaływać na ten statek. Drugi wniosek: jeśli głębokość wody jest większa niż 0,5 długości fali, to wodę można traktować jako głęboką i stosować wyrażenia dla wody głębokiej. Są one bowiem prostsze.

Należy tu podkreślić, że zgodnie ze wzorami (16.72) i (16.73) cząstki wody w fali biegnącej wykonują tylko małe wahania. Natomiast z prędkością fali c , prędkością fazową, przemieszcza się profil fali.

Wyznamy jeszcze linie prądu dla przypadku wody głębokiej. Można to zrobić przez rozwiązanie równania linii prądu (6.4).

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z} \quad (16.79)$$

lub przez zastosowanie pojęcia funkcji prądu (12.7). W tym drugim przypadku, przy korzystaniu ze wzorów (12.4) i (12.7), należy podstawić z zamiast x oraz x zamiast y . Dlaczego?

Wtedy mamy:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (16.80)$$

$$\begin{aligned} d\psi &= -v_x dz + v_z dx = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \\ &= r_0 \omega \left[e^{-kz} \sin(kx - \omega t) dx + e^{-kz} \cos(kx - \omega t) dz \right] = \\ &= -\frac{r_0 \omega}{k} d \left[e^{-kz} \cos(kx - \omega t) \right] = 0 \end{aligned}$$

Stąd równanie dowolnej linii prądu jest

$$\psi(x, z, t) = -\frac{r_0 \omega}{k} e^{-kz} \cos(kx - \omega t) = \text{const} \quad (16.81)$$

Widzimy tu wyraźnie, że linie prądu nie pokrywają się z torami cząstek wody. Tory są okręgami i nie zależą od czasu t . Jest zatem tak, jak być powinno (wróć do rozdziału 6.1). Ten sam wynik dostaniemy, jeśli podstawimy wyrażenia (16.78) do równania (16.79). Istotnie mamy:

$$\frac{dx}{-\cos(kx - \omega t)} = \frac{dz}{\sin(kx - \omega t)}$$

Stąd:

$$-\frac{\sin(kx - \omega t)}{\cos(kx - \omega t)} dx = dz$$

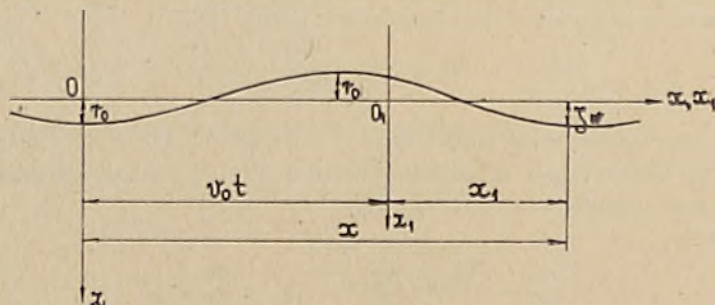
Całkując to proste równanie dostajemy wzór równoważny do (16.81):

$$\ln|\cos(kx - \omega t)| - kz = C$$

16.3.1. Fale biegnące w ruchomym układzie odniesienia

Wszystkie zadania hydromechaniczne można rozwiązywać albo w nieruchomym układzie odniesienia, albo też w układzie ruchomym. Rozwiązuje się zadanie w takim układzie, w jakim rozwiązywanie jest prostsze. Gdy dane jest rozwiązanie w jednym z tych układów, to wykorzystując związki transformacyjne rozdziału 12.7 możemy to rozwiązanie napisać w układzie drugim.

Powyższe uwagi zilustrujemy przykładem płaskiej fali biegnącej, kiedy układ ruchomy $O_1x_1y_1z_1$ porusza się ruchem jednostajnym wzdłuż osi Ox względem układu nieruchomego $Oxyz$ z prędkością unoszenia $\vec{v}_e = \vec{i} v_0$ tak, jak pokazano na rysunku 16.7.



Rys.16.7

Jeśli w chwili $t=0$ oba układy odniesienia pokrywały się, to w chwili t , relacja pomiędzy współrzędnymi dowolnego punktu jest

$$x = x_1 + v_0 t \quad y = y_1 \quad z = z_1$$

Podstawiając powyższe zależności do wzoru (16.63) uzyskamy potencjał biegnącej fali płaskiej na powierzchni wody głębokiej

$$\varphi(x_1, z_1, t) = -\frac{\xi r_0}{\omega} e^{-kz} \sin[k(x_1 + v_0 t) - \omega t]$$

lub

$$\varphi(x_1, z_1, t) = -\frac{g r_0}{\omega} e^{-kz_1} \sin(kx_1 - \omega_e t) \quad (16.82)$$

gdzie

$$\omega_e = \omega - kv_0 = \omega \left(1 - \frac{kv_0}{\omega}\right) = \omega \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \quad (16.83)$$

nazywa się częstością spotkaniową.

Łatwo zauważyć, że przy ruchu układu ruchomego $Ox_1y_1z_1$ w stronę przeciwną ($\vec{v}_e = -\vec{1} v_0$) częstość spotkaniowa będzie

$$\omega_e = \omega \left(1 + \frac{v_0}{c}\right)$$

W podobny sposób można przetransponować do układu ruchomego profil fali oraz prędkości fali v_x i v_y . Zróbcie to! Można także postąpić inaczej: możemy wyznaczyć poszukiwane wielkości z potencjału φ danego w układzie ruchomym. Zatem:

$$v_{x_1}(x_1, z_1, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{r_0 g k}{\omega} e^{-kz_1} \cos(kx_1 - \omega_e t)$$

Uwzględniając wzór (16.25c): $\omega^2 = gk$, prędkość v_{x_1} będzie

$$v_{x_1} = -r_0 \omega e^{-kz_1} \cos(kx_1 - \omega_e t) \quad (16.84a)$$

I podobnie

$$v_{z_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = r_0 \omega e^{-kz_1} \sin(kx_1 - \omega_e t) \quad (16.84b)$$

Zauważcie podobieństwo wzorów (16.68) i (16.84). Przy wyznaczaniu profilu fali w układzie ruchomym we wzorze (16.6) należy zastosować operator różniczkowania względem czasu funkcji skalarnej w układzie ruchomym - operator (12.172). Dla naszego przypadku: $\vec{v}_e = \vec{1} v_0$ przyjmuje on postać

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial'}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Uwzględniając to, wzór (16.6) zapisujemy:

$$\zeta_1(x_1, t) = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial' \varphi}{\partial t} - v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \Bigg|_{z_1=0}$$

Ze wzoru (16.82) mamy

$$\frac{\partial' \varphi}{\partial t} \Bigg|_{z_1=0} = \frac{g r_0}{\omega} \omega_e \cos(kx_1 - \omega_e t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Bigg|_{z_1=0} = -\frac{g r_0}{\omega} k \cos(kx_1 - \omega_e t)$$

Więc

$$\xi_1(x_1, t) = \frac{r_0}{\omega} (\omega_e + k v_0) \cos(kx_1 - \omega_e t)$$

Ale na mocy wzoru (16.83) $\omega_e + k v_0 = \omega$. Stąd ostatecznie profil fali biegnącej w układzie ruchomym opisany jest przez

$$\xi_1(x_1, t) = r_0 \cos(kx_1 - \omega_e t) \quad (16.85)$$

Wzory (16.84) i (16.85) pokazują, że przy prędkości układu ruchomego v_0 równej prędkości fali c fala biegnąca jest nieruchoma względem układu ruchomego. Wtedy $\omega_e = 0$

$$\xi_1 = r_0 \cos kx_1 \quad (16.86a)$$

$$v_{x_1} = -r_0 \omega e^{-kz_1} \cos kx_1 \quad (16.86b)$$

$$v_{z_1} = r_0 \omega e^{-kz_1} \sin kx_1 \quad (16.86c)$$

$$\varphi(x_1, z_1) = -\frac{g r_0}{\omega} e^{-kz_1} \sin kx_1 \quad (16.86d)$$

Na podstawie wzoru (16.81) można także napisać funkcję prądu takiej fali

$$\psi(x_1, z_1) = -\frac{r_0 \omega}{k} e^{-kz_1} \cos kx_1 \quad (16.86e)$$

Jeśli uwzględnimy wyrażenia (16.80), to dla rozpatrywanego przypadku wzór (15.29b) dla profilu fali będzie

$$\xi_1 = \frac{v_0}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z_1} \Big|_{z_1=0}$$

i

$$\xi_1 = \frac{v_0}{g} \left(-\frac{r_0 \omega}{k} \right) (-k) \cos kx_1 = \frac{v_0}{g} r_0 \omega \cos kx_1$$

Ale $v_0 = c = \frac{\omega}{k}$ i $\omega^2 = gk$ więc jest tak, jak być powinno:

$$\xi_1 = r_0 \cos kx_1 .$$

Przypadek równości prędkości fali c z prędkością układu ruchomego, v_0 , ma miejsce wtedy, kiedy fale grawitacyjne są wytwarzane przez poruszający się obiekt w pobliżu swobodnej powierzchni i fale te są opisane w układzie odniesienia związanym z tym obiektem. Fale takie są jednak bardziej złożone, niż to wynika ze wzorów (16.86). Jednak w pewnym obszarze swobodnej powierzchni, daleko za takim obiektem, wyrażenia (16.86) dość dobrze opisują główne charakterystyki fal generowanych na swobodnej powierzchni przez taki obiekt - statek. Pokażemy tu, że liczba falowa k i częstość fali ω występująca we wzorach (16.86) wyraża się poprzez prędkość obiektu v_0 (prędkość układu ruchomego). Istotnie, biorąc pod uwagę związki:

$$c = v_0 = \frac{\omega}{k} \quad \text{i} \quad \omega^2 = gk$$

mamy:

$$k = \frac{g}{v_0^2} \quad \text{i} \quad \omega = \frac{g}{v_0} \quad (16.87)$$

16.3.2. Płaskie fale biegnące pod dowolnym kątem względem nieruchomego układu odniesienia

Niech układ współrzędnych Oxyz będzie nieruchomym układem odniesienia o osiach Ox i Oy leżących na niezakłóconej swobodnej powierzchni wody, a oś Oz niech będzie, jak zwykle, skierowana pionowo w dół. Sprawdźmy, że funkcja

$$\varphi(x, y, z, t) = -\frac{g r_0}{\omega} e^{-kz} \sin(ux + vy - \omega t) \quad (16.88a)$$

przedstawia potencjał płaskiej fali biegnącej pod kątem β względem osi Ox, przy czym zbiornik wody jest nieograniczony, a $\beta = \arctg \frac{v}{u}$.

Jeśli wyrażenie (16.88a) jest potencjałem prędkości, to musi ono spełniać równanie Laplace'a

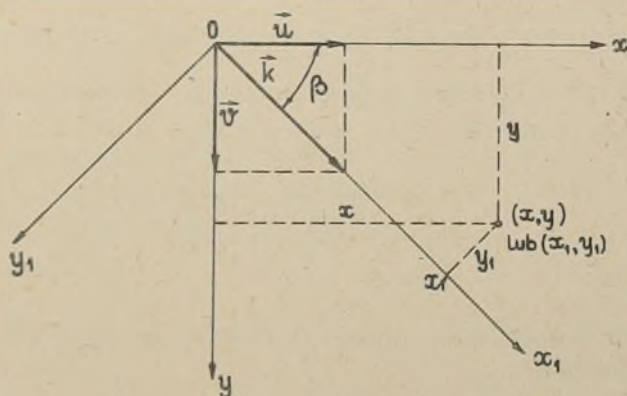
$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Wykonując proste działania zauważamy, że równanie Laplace'a jest spełnione, gdy

$$u^2 + v^2 - k^2 = 0$$

lub gdy

$$k^2 = u^2 + v^2 \quad (16.88b)$$



Rys. 16.8

Tu widzimy, jeszcze raz uzasadnienie wprowadzonej nazwy: wektor falowy \vec{k} . Możemy bowiem zinterpretować u i v jako składowe wektora falowego \vec{k} , pokazane na rysunku 16.8.

Z rysunku 16.8 widać, że

$$u = k \cos \beta \quad (16.88c)$$

$$v = k \sin \beta$$

Sprawdźmy dalej, czy jest spełniony warunek brzegowy na dnie

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z \rightarrow \infty} = 0$$

i na swobodnej powierzchni

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z=0$$

Widzimy z (16.88a), że warunek brzegowy na dnie jest spełniony, a z warunku na swobodnej powierzchni dostajemy znaną nam dobrze zależność dyspersyjną

$$\omega^2 = gk \quad (16.88d)$$

Stąd rzeczywiście wyrażenie (16.88a) przedstawia potencjał małych fal grawitacyjnych na swobodnej powierzchni. Korzystając dalej ze wzoru (15.12)

$$\zeta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t}$$

znajdujemy profil fali - kształt swobodnej powierzchni:

$$\zeta = r_0 \cos (ux + vy - \omega t) \quad (16.88e)$$

Jeśli uwzględnimy związki (16.88c), to

$$\zeta(x, y, t) = r_0 \cos [k (x \cos \beta + y \sin \beta) - \omega t] \quad (16.88f)$$

lub

$$\zeta(x, y, t) = r_0 \cos \left[\frac{\omega^2}{g} (x \cos \beta + y \sin \beta) - \omega t \right] \quad (16.88g)$$

Wyrażenia (16.88f i g) możemy zapisać w układzie współrzędnych $Ox_1y_1z_1$, pokazanym także na rysunku 16.8. Zgodnie bowiem ze wzorami (12.41g i i) mamy

$$x_1 = x \cos \beta + y \sin \beta$$

$$y_1 = y \cos \beta - x \sin \beta$$

$$z_1 = z$$

Jeśli pierwszy z powyższych związków podstawimy do wzoru (16.88f), to przyjmiemy on postać:

$$\zeta(x_1, t) = r_0 \cos (kx_1 - \omega t)$$

Przedstawia on płaską falę biegnącą w kierunku dodatnim osi Ox_1 , a więc w kierunku tworzącym z osią Ox kąt β .

Przekrój fali płaszczyną $y = 0$ uzyskamy z wyrażenia (16.88e lub f):

$$\zeta(x, t) = r_0 \cos (ux - \omega t) = r_0 \cos (kx \cos \beta - \omega t)$$

Widzimy, że ten przekrój jest także falą płaską o długości

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{u} = \frac{2\pi}{k \cos\beta} = \frac{\lambda}{\cos\beta}$$

przy czym prędkość fazowa tej fali biegnącej w kierunku Ox jest

$$c_1 = \frac{\omega}{u} = \frac{\omega}{k \cos\beta} = \frac{c}{\cos\beta}$$

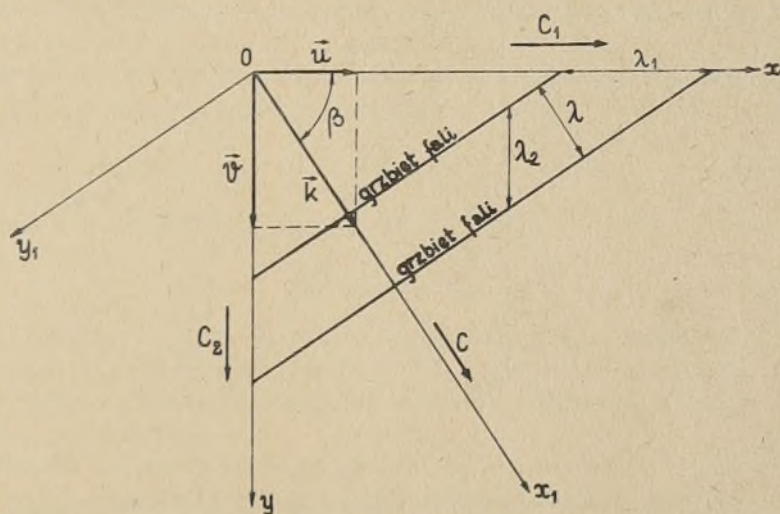
Podobnie, przekrój fali (16.88e) płaszczyzną $x = 0$ będzie

$$\xi(y, t) = r_0 \cos(vy - \omega t) = r_0 \cos(ky \sin\beta - \omega t)$$

i

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{v} = \frac{\lambda}{\sin\beta}; \quad c_2 = \frac{\omega}{v} = \frac{c}{\sin\beta}$$

Interpretacja powyższych wyrażeń podana jest na rysunku 16.9.



Rys. 16.9

Wyrażeniom dla potencjału fali (16.88a), dla profilu fali (16.88e) a także dla składowych pola prędkości fali można nadać prostsze postaci, jeśli zastosuje się następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} x &= x_1 & y &= x_2 & \vec{x} &= \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 \\ u &= k_1 & v &= k_2 & \vec{k} &= \vec{e}_1 k_1 + \vec{e}_2 k_2 \end{aligned}$$

Wtedy:

$$ux + vy = k_1 x_1 + k_2 x_2 = \vec{k} \cdot \vec{x} \quad (16.89)$$

Uwzględniając (16.89) potencjał fali będzie:

$$\varphi(\vec{x}, z, t) = -\frac{E\Gamma_0}{\omega} e^{-kz} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad (16.90)$$

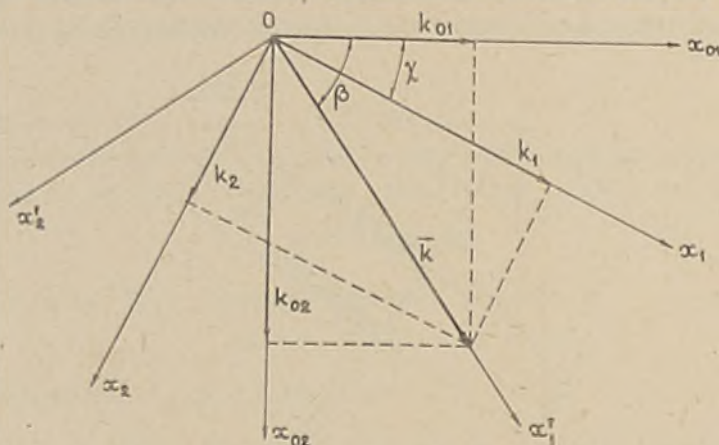
a profil fali wyrazi się wzorem:

$$\zeta(\vec{x}, t) = r_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad (16.91)$$

Wyrażenia (16.90) i (16.91) są wygodne w zastosowaniach praktycznych, gdy falę daną w jednym układzie współrzędnych, np. $Ox_0y_0t_0$, chcemy zapisać w innym, obróconym układzie współrzędnych, np.: $Ox_1y_1z_1$. Iloczyn skalarny $\vec{k} \cdot \vec{x}$ bowiem we wszystkich obróconych układach współrzędnych ma taką samą wartość:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = k_{01} x_{01} + k_{02} x_{02} = k_1 x_1 + k_2 x_2 = k x'_1 \quad (16.92)$$

gdzie oznaczenia stosowane tu, pokazano na rysunku 16.10. Sprawdźcie zależność (16.92) przy pomocy związków transformacyjnych (12.41f i g).



Rys. 16.10

Bardzo często ze względu na uproszczenie operacji matematycznych stosuje się zapis potencjału prędkości fali grawitacyjnej (16.90) i profilu fali (16.91) przy pomocy wzoru Eulera

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$$

Sprawdźcie, że wzory (16.90) i (16.91) przyjmą wtedy postacie:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, z, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{i g r_0}{\omega} e^{-kz} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{i g r_0}{\omega} \exp[-kz + i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] \right\} \end{aligned} \quad (16.91a)$$

$$\begin{aligned} \zeta(\vec{x}, t) &= r_0 \operatorname{Re} (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}) = \\ &= r_0 \operatorname{Re} [\exp[i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)]] \end{aligned} \quad (16.91b)$$

W układzie współrzędnych $Ox_1y_1z_1$, jak na rysunku 16.8, pole prędkości płaskiej fali biegnącej wyznaczmy z potencjału (16.90)

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \nabla\varphi = \vec{e}_1 v_{x1} + \vec{e}_2 v_{x2} + \vec{e}_3 v_z = \\ &= \vec{e}_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{aligned}$$

Przy uwzględnieniu związków (16.88c) z oznaczeniami (16.89):

$$k_1 = k \cos\beta \quad k_2 = k \sin\beta$$

mamy:

$$\begin{aligned}v_{x1} &= -\omega r_0 \cos\beta e^{-kz} \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) \\ v_{x2} &= -\omega r_0 \sin\beta e^{-kz} \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) \\ v_z &= \omega r_0 e^{-kz} \sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\end{aligned}\quad (16.93)$$

Powyższe związki dla prędkości cząstek wody w fali są wykorzystywane w teorii kołysań wodolotów, poruszających się na falowaniu regularnym. Płaską falę biegnącą zwie się bowiem falą regularną.

Na swobodnej powierzchni nieograniczonego zbiornika wody mogą powstawać płaskie fale biegnące o różnych wektorach falowych:

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \quad (16.94a)$$

związanymi z częstością ω_n zależnością (16.88d):

$$\omega_n^2 = g k_n \quad (16.94b)$$

mających amplitudę r_n . Te fale mogą występować jednocześnie, przy czym będzie zachodzić zjawisko interferencji tak, że w wyniku powstanie bardzo złożony obraz sfalowanej powierzchni swobodnej, składającej się z sumy płaskich fal swobodnych.

Ze względu na liniowość równania Laplace'a i założenia liniowego warunku brzegowego na swobodnej powierzchni możemy dla tak złożonego falowania napisać - na podstawie wzoru (16.90) - potencjał prędkości w postaci

$$\varphi(\vec{x}, z, t) = -g \sum_n \frac{r_n}{\omega_n} e^{-k_n z} \sin(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t) \quad (16.94c)$$

lub na podstawie wzoru (16.90a) w postaci zespolonej

$$\varphi(\vec{x}, z, t) = R_e \left\{ i g \sum_n \frac{r_n}{\omega_n} \exp[-k_n z + i(\vec{k}_n \cdot \vec{x} - \omega_n t)] \right\} \quad (16.94d)$$

W powyższych wzorach amplituda fali składowej - elementarnej - r_n jest funkcją częstości fali ω_n i także wektora falowego k_n . Można pójść jeszcze dalej i założyć, że amplituda r_n jest funkcją ciągłą częstości fali ω oraz wektora falowego \vec{k} i to w dodatku funkcją losową $\Phi(\vec{k}, \omega)$ [16,17]. Wtedy infinytezymalne amplitudy

$$d\Phi(\vec{k}, \omega)$$

będą wielkościami losowymi, a także losowym będzie potencjał prędkości φ , który na podstawie (16.94d) możemy formalnie zapisać

$$\varphi(\vec{x}, z, t) = -g \iint_{\vec{k}, \omega} \frac{1}{\omega} \exp [e^{-kz} + i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)] d\phi(\vec{k}, \omega) \quad (16.94e)$$

Sprawdźcie, że potencjał (16.94e) spełnia warunek na dnie $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ dla $z \rightarrow \infty$, że z warunku na swobodnej powierzchni dostaje się wyrażenie (16.88d), a z równania Laplace'a zależność (16.88b) oraz, że swobodna powierzchnia opisana jest przez

$$\xi(\vec{x}, t) = \iint_{\vec{k}, \omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} d\phi(\vec{k}, \omega) \quad (16.94f)$$

Całkowanie w powyższych wyrażeniach odbywa się po wszystkich częstościach i wszystkich wektorach falowych, przy czym pomiędzy k i ω istnieje zależność (16.88d). Wyrażenie (16.94f) jest jednym z modeli losowego falowania wiatrowego powierzchni morza. Będziemy się nim bliżej zajmować przy rozpatrywaniu mechaniki ruchu statków na morzu wzburzonym. Jeśli zechcecie poszerzyć swoje wiadomości już teraz, to możecie przestudiować pozycję [16 i 17] bibliografii. My wrócimy jednak dalej do zagadnień prostszych, do podstawowych wielkości opisujących dwuwymiarowe, płaskie fale swobodne.

16.3.3. Pole ciśnień w płaskiej fali biegnącej

Pole ciśnień w płaskiej fali biegnącej, na wodzie głębokiej, posiadającą małą amplitudę r_0 , wyznaczmy ze wzorów (16.7) i (16.63). Mamy:

$$p = p_a + \rho g z - \rho g r_z \cos(kx - \omega t) \quad (16.95)$$

gdzie: r_z - określone jest przez wyrażenie (16.77).

Jeśli woda jest płytka, to zamiast potencjału danego wzorem (16.63) należy zastosować potencjał φ , określony wzorem (16.49). Wtedy ciśnienie w płaskiej fali biegnącej na wodzie płytkiej będzie

$$p = p_a + \rho g z - \rho g r_0 \frac{\cosh[k(H-z)]}{\cosh(kH)} \cos(kx - \omega t) \quad (16.96)$$

Wyrażenia powyższe są oczywiście ważne dla zlinearyzowanego zadania.

Pierwsze dwa wyrazy wzorów (16.95) i (16.96) przedstawiają znane nam ciśnienie hydrostatyczne panujące na głębokości z w stosunku do niezakłóconego poziomu wody; trzeci wyraz daje wpływ ruchu falowego wody na pole ciśnień.

Ze wzoru (16.95) wyznaczmy powierzchnię stałego ciśnienia $p = p_0$; mamy:

$$z = \frac{p_0 - p_a}{\rho g} + r_0 e^{-kz} \cos(kx - \omega t) \quad (16.97)$$

Widzimy, że powierzchnie stałego ciśnienia są w tej samej fazie, co powierzchnia swobodna

$$S = r_0 \cos(kx - \omega t)$$

Powyższe wyrażenie możemy uzyskać także ze wzoru (16.97) podstawiając w jego prawej stronie $z=0$ i $p_0=p_a$. Stąd warunek równości ciśnień w zlinearyzowanym zadaniu jest wypełniony nie dla $z=0$, lecz dla $z=\zeta$. I tak rzeczywiście było założone przy wyprowadzaniu wzoru (16.7) ze zlinearyzowanej całki Cauchy'ego-Lagrange'a:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} - gz = C(t)$$

bowiem stałą $C(t)$ wyznaczamy na swobodnej powierzchni:

$$z = \zeta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad \text{gdzie } p = p_a$$

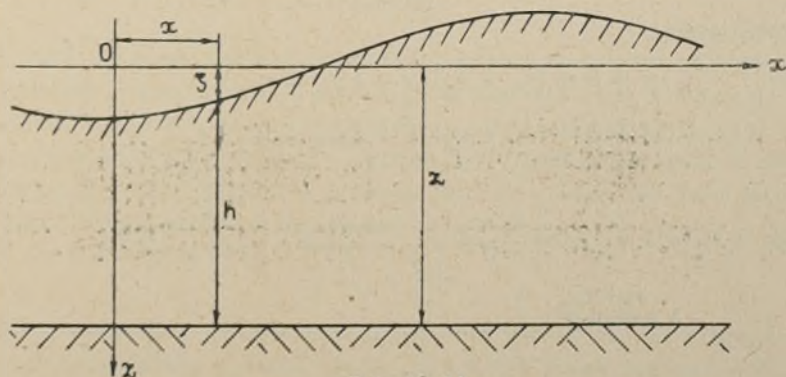
Wzór (16.95) pokazuje, że ciśnienie p pod dolną falą zmniejsza się o wielkość

$$p_d = \rho g r_0 e^{-kz} \cos(kx - \omega t) \quad (16.98)$$

a pod grzbietem natomiast o tę wartość wzrasta.

Jeśli statek znajduje się na sfalowanej wodzie i pominiemy wpływ oddziaływania statku na sfalowaną wodę, na pole falowe - jest to przedmiotem tak zwanej hipotezy Froude'a - Kryłowa - to wzory dla ciśnienia w fali pokazują, że na powierzchni kadłuba statku rozkład ciśnień będzie inny niż rozkład hydrostatyczny. Fala będzie oddziaływać na statek; spowoduje jego kołysanie. Również statek kołyszący się na fali będzie oddziaływać na pole falowe, wystąpi odbicie fal nadbiegających na kadłub statku, częściowe wytłumienie fali nadbiegającej - a więc zjawisko dyfrakcji i tłumienia, a także powstanie fali generowanej przez kołyszący się statek na sfalowanej wodzie. Tymi praktycznymi problemami będziemy zajmować się przy rozpatrywaniu mechaniki ruchu statku - inaczej właściwości morskich okrętu. Tu wskażemy tylko jeszcze raz na to, że jeżeli statek podwodny pływa na głębokości $z > 0,5 \lambda$, to praktycznie fala powierzchniowa na niego nie oddziałuje. Dlaczego?

Czasem wzór (16.95) przedstawia się w postaci wykazującej wyraźnie różnicę pomiędzy ciśnieniem hydrostatycznym na danej głębokości h pod sfalowaną powierzchnią wody i ciśnieniem od wpływu fali, zwanym efektem Smith'a.



Rys.16.11

Na podstawie rysunku 16.11 mamy:

$$z = h + \zeta = h + r_0 \cos(kx - \omega t)$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do wzoru (16.95) uzyskuje się:

$$p = p_a + \rho gh + \rho g r_0 (1 - e^{-kz}) \cos(kx - \omega t) \quad (16.95a)$$

Pierwsze dwa składniki: $p_a + \rho gh$ są ciśnieniem hydrostatycznym, liczonym w ten sam sposób jak w hydrostatyce. Ostatni składnik nazywa się efektem Smith'a.

16.3.4. Grupa fal. Prędkość grupowa

Jak już wspomniano wyżej - w rozdziale 16.3.2 - rzeczywisty obraz falowania swobodnej powierzchni wody, wymuszony przez wiatr lub poruszające się w pobliżu swobodnej powierzchni wody obiekty, jest bardzo złożony. Może być jednak traktowany jako nałożenie się fal płaskich o różnych wektorach falowych i różnych amplitudach. W celu poznania dalszych własności takiego falowania, rozpatrzmy prosty przypadek dwóch fal biegnących:

$$\zeta_1 = r_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\zeta_2 = r_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

o tych samych amplitudach i nieznacznie różniących się liczbach falowych k , a zatem i częstościach ω . Niech dalej

$$k_1 = k + \Delta k \quad k_2 = k$$

$$\omega_1 = \omega + \Delta\omega \quad \omega_2 = \omega$$

Wiemy już, że fale, ζ , można prosto dodawać - w ramach liniowej teorii. Zatem fala wypadkowa w tym przypadku będzie

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = r_0 [\cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t)]$$

W celu zbadania własności fali wypadkowej ζ przekształcimy wzór powyższy stosując tożsamość trygonometryczną:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

W naszym przypadku:

$$\alpha + \beta = (k_1 + k_2) x - (\omega_1 + \omega_2) t$$

$$\alpha - \beta = (k_1 - k_2) x - (\omega_1 - \omega_2) t$$

Stąd

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = 2 r_0 \cos \left[\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right] \cos \left[\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \quad (16.99)$$

Wyrażenie powyższe wykazuje interesujące własności fali wypadkowej. Ponieważ według założenia k_1 i k_2 różnią się bardzo nieznacznie, więc średnia liczba falowa i średnia częstość:

$$\frac{k_1+k_2}{2} \approx k_1 = k_2 = k$$

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \approx \omega_1 = \omega_2 = \omega$$

są takie same jak dla fal składowych. Stąd długość fali

$$\lambda = \frac{2\pi z}{k_1+k_2} \approx \frac{2\pi}{k}$$

i prędkość fazowa

$$C = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2} \approx \frac{\omega}{k}$$

są praktycznie takie same, jak dla fal składowych. Amplituda natomiast fali wypadkowej

$$\begin{aligned} a &= 2 r_0 \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2} x - \frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right) = \\ &= 2 r_0 \cos\left(\frac{1}{2} \Delta k x - \frac{1}{2} \Delta \omega t\right) \end{aligned} \quad (16.100)$$

jest funkcją miejsca x i czasu t . Widzimy, że w wyniku nałożenia się dwóch fal o nieznacznie różniących się długościach uzyskaliśmy falę zmodulowaną poruszającą się ze średnią prędkością C bliską prędkości fazowej fal składowych, której amplituda zmienia się zależnie od różnicy liczb falowych Δk i różnicy częstości $\Delta \omega$. Maksymalna wartość amplitudy, a , fali zmodulowanej jest równa $2 r_0$. Przemieszcza się ona - a także inne wartości amplitudy $a(x, t)$ - z prędkością inną niż c , a mianowicie z prędkością równą

$$U = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \quad (16.101)$$

Jeśli różnica liczb falowych jest bardzo mała, to w granicy przy $\Delta k \rightarrow 0$ wzór (16.101) można zapisać jako

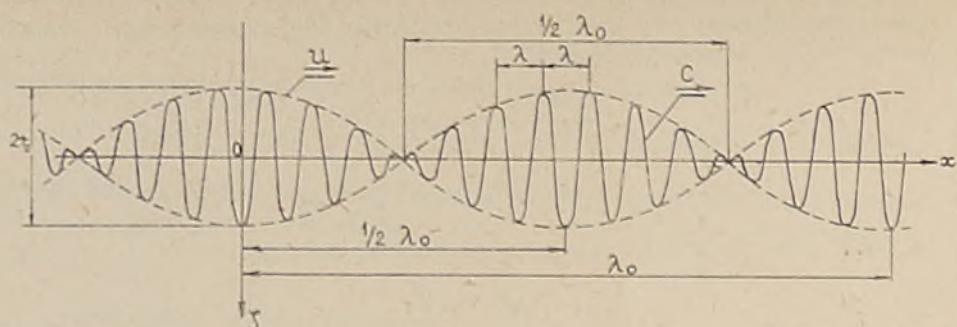
$$U = \frac{d\omega}{dk} \quad (16.102)$$

Wzór (16.102) daje nam wartość prędkości, z jaką przemieszczają się modulacje amplitudy. Jest to zatem prędkość rozchodzenia się modulacji. W hydrodynamice, a także w fizyce prędkość rozchodzenia się modulacji U nazywa się prędkością grupową fali. Stosuje się także oznaczenia $U = C_g$.

Uzasadnienie nazwy „prędkość grupowa” wynika z tego, że fala zmodulowana utworzona jest z powtarzających się co

$$\frac{1}{2} \lambda_0 = \frac{2\pi}{\Delta k}$$

grup fal - paczek fal, przemieszczających się wzdłuż osi Ox z prędkością U . Pokazuje to wyraźnie rysunek 16.12, na którym przedstawiono profil fali



Rys. 16.12

zmodulowanej w chwili $t = 0$, złożonej z dwóch fal składowych o amplitudach r_0 i liczbach falowych $k_1 = \frac{30}{14}\pi$; $k_2 = \frac{26}{14}\pi$. Dla tego przypadku długość fali w grupie $\lambda = 1$ m, długość grupy $\frac{1}{2}\lambda_0 = 7$ m, długość fal składowych: $\lambda_1 = 0,935$ m i $\lambda_2 = 1,075$ m. Amplitudy fal w grupie zgodnie ze wzorem (16.100) zawarte są pomiędzy cosinusoidami:

$$\pm 2 r_0 \cos \frac{\Delta k}{2} x = \pm 2 r_0 \cos \frac{\pi}{7} x$$

W podobny sposób jak na rysunku 16.12 zmienia się z czasem t rzędna profilu fali w wybranym miejscu x . Przykładowo dla $x=0$ ze wzoru (16.99) mamy

$$\xi = 2 r_0 \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\Delta \omega}{2} t \right)$$

zaś amplituda

$$a(t) = 2 r_0 \cos \frac{\Delta \omega}{2} t$$

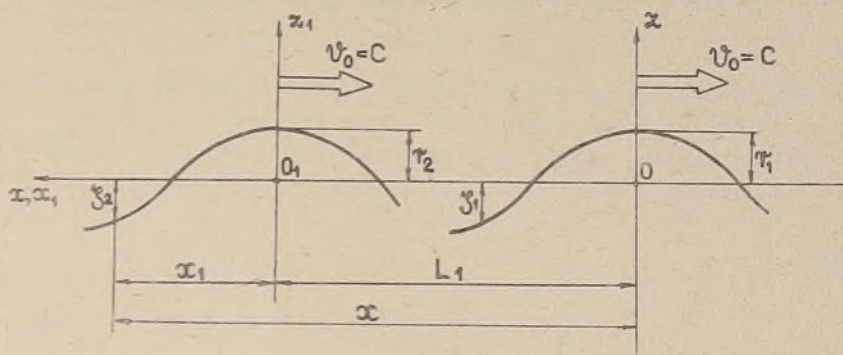
Oczywiście znając k_1 i k_2 możemy obliczyć ω_1 i ω_2 ze wzorów: $\omega_1^2 = g k_1$, $\omega_2^2 = g k_2$. W rozpatrywanym przykładzie stosunek długości fal składowych $\lambda_2/\lambda_1 = 1,15$. Gdy będzie ten stosunek ulegał zmniejszeniu, to różnica liczb falowych k_1 i k_2 będzie także się zmniejszać. Spowoduje to wydłużenie długości fali λ_0 . W granicznym przypadku: $k_1 = k_2$, długość λ_0 stanie się nieskończenie duża. Prędkość grupowa U będzie tu ściśle określona wzorem (16.102). Ze wzoru (16.99) widać, że fala wypadkowa będzie tu prostą sumą fal składowych:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2 r_0 \cos (k_1 x - \omega t)$$

Ma miejsce zatem korzystna, konstruktywna, interferencja fal składowych; korzystna, ale z punktu widzenia fali. Gdybyśmy usiłowali wypadkową falę zmniejszyć lub zlikwidować, to zjawisko konstruktywnej interferencji fal powierzchniowych jest niekorzystne.

Rozpatrzmy jeszcze przypadek interferencji dwóch płaskich fal biegnących, danych w układzie ruchomym poruszającym się z prędkością $\vec{v}_0 = \vec{i} v_0$, równą prędkości fal składowych $C_1 = C_2 = C = v_0$, przy czym amplitudy fal

składowych są: r_1 i r_2 . Usytuowanie grzbietów fal składowych i ich profili pokazuje rysunek 16.13.



Rys.16.13

Zgodnie ze wzorem (16.86a) fale składowe są opisane wyrażeniami

$$\zeta_1 = r_1 \cos kx$$

$$\zeta_2 = r_2 \cos kx_1$$

Uwzględniając, że $x_1 = x - L_1$, profil fali wypadkowej $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$ w miejscu $x > L_1$ będzie

$$\zeta = r_1 \cos kx + r_2 \cos k(x - L_1) = R_e \left\{ e^{ikx} (r_1 + r_2 e^{-ikL_1}) \right\}$$

Wykonując proste działania mamy

$$\zeta = r_w \cos (kx - \epsilon)$$

gdzie:

- przesunięcie fazowe

$$\epsilon = \arctg \frac{r_2 \sin k L_1}{r_1 + r_2 \cos k L_1}$$

- amplituda wypadkowa

$$r_w^2 = \zeta \zeta^* = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos k L_1 \quad (16.103a)$$

Uwzględniając wyrażenie (16.87) dla liczby falowej $k = g/v_0^2$ oraz oznaczając przez F_{L1} liczbę Froude'a odniesioną do długości L_1 ; $F_{L1} = v_0 / \sqrt{g L_1}$

wzór dla amplitudy fali wypadkowej będzie:

$$r_w^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos \frac{1}{F_{L1}^2} \quad (16.123b)$$

Wzory dla amplitudy fali wypadkowej r_w znajdują zastosowanie przy projektowaniu kształtów statków nawodnych: dla właściwego doboru długości statku w zależności od jego prędkości eksploatacyjnej. Omówimy ich praktyczne zastosowanie w dalszych wykładach. Tu wskażemy tylko na to, że jeżeli

$$k L_1 = 2 \pi n$$

lub

$$\frac{L_1}{\frac{\lambda}{2}} = 2n \quad n = 1; 2; 3; \dots \quad (16.104a)$$

to

$$r_w = r_1 + r_2$$

a jeżeli

$$\frac{L_1}{\frac{\lambda}{2}} = 2n + 1 \quad n = 0; 1; 2; 3; \dots \quad (16.104b)$$

to

$$r_w = r_1 - r_2$$

Zatem wartość amplitudy fali wypadkowej zależy od tego, ile połówek fal złoży się na długości L_1 ; jeżeli ilość tych połówek fal jest parzysta, to amplituda fali wypadkowej jest równa sumie amplitud fal składowych, a przy nieparzystej ilości tych połówek - równa jest różnicy amplitud składowych.

Podkreślić należy jeszcze to, że prędkość fazowa fali wypadkowej jest równa także

$$c = v_0 = \sqrt{\frac{g}{2\pi} \lambda}$$

a prędkość grupowa będzie równa

$$U = c_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Korzystając ze wzoru (16.88d) dla wody głębokiej: $\omega^2 = gk$ i wzoru (16.15): $\omega^2 = gk \operatorname{tgh}(kH)$ dla wody płytkiej obliczymy dla obu przypadków prędkości grupowe U .

Dla wody głębokiej mamy:

$$U = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2} c \quad (16.105a)$$

Zatem na wodzie głębokiej prędkość grupowa jest równa połowie prędkości fazowej fali.

Dla wody płytkiej różniczkując stronami wyrażenie (16.15) mamy

$$2\omega d\omega = gkH \frac{dk}{\cosh(kH)} + g dk \operatorname{tgh}(kH)$$

Stąd po prostych działaniach uzyskać można wzór

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} c \left[\frac{2kH}{\sinh(2kH)} + 1 \right] \quad (16.105b)$$

Ponieważ dla przypadku wody głębokiej: $kH \rightarrow \infty$, $\frac{x}{\sinh x} \rightarrow 0$, to ze wzoru (16.105b) uzyskuje się wzór (16.105a), czyli jest tak, jak być powinno. Dla wody bardzo płytkiej $kH \rightarrow 0$, a $\frac{x}{\sinh x} \rightarrow 1$, mamy

$$U = C = \sqrt{gH} \quad (16.106)$$

Zatem na wodzie bardzo płytkiej prędkość grupowa fali grawitacyjnej i prędkość fazowa fali jest taka sama. Taką samą własność wykazują fale elektromagnetyczne w próżni a także fale sprężyste, np.: fale dźwiękowe w powietrzu lub w wodzie, dla których prędkość fazowa fali nie zależy od jej długości. Tu

$$C = \frac{\omega}{k} = \text{const} \quad \text{i} \quad \omega = k C$$

$$U = \frac{d\omega}{dk} = C$$

Tę analogię fal grawitacyjnych na wodach płytkich i fal dźwiękowych, jak już wskazano, można wykorzystać w praktyce projektowania kształtów kadłubów statków eksploatowanych na wodach płytkich z prędkościami wysokimi, bliskimi $F_H = 1$. Jak już wyżej wskazano, można wtedy skorzystać z danych dla projektowania samolotów o prędkościach eksploatacyjnych bliskich prędkości dźwięku.

16.3.5. Związki energetyczne dla płaskich fal biegnących

Zajmować będziemy się najpierw obliczeniem energii płaskiej fali biegnącej na swobodnej powierzchni wody, przypadającej na jednostkę powierzchni sfalowanej lub inaczej - obliczeniem gęstości powierzchniowej energii fali. Energia ta jest sumą energii kinetycznej E_k i energii potencjalnej E_p . Energię kinetyczną E_k można wyznaczyć ze wzoru (3.81):

$$E_k = \frac{\rho}{2} \oint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (3.81)$$

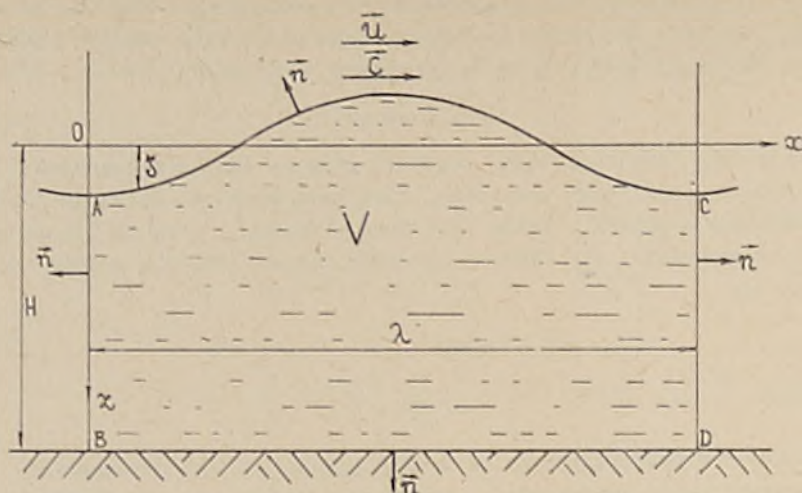
Energię zaś potencjalną wyznaczmy jako przyrost energii potencjalnej sfalowanej wody w stosunku do energii potencjalnej rozpatrywanego obszaru wody spokojnej. Niech tym obszarem wodnym będzie obszar ograniczony: płaskim dnem zbiornika wody, powierzchnią swobodną o długości równej długości fali λ , dwoma poprzecznymi i pionowymi ścianami AB i CD o szerokości równej 1 oraz dwiema równoległymi i pionowymi ścianami wzdłużnymi ACDBA, których odległość jest także równa 1. Ten obszar wody pokazuje rysunek 16.14. Głębokość wody, H , może być nieograniczona.

Przy oznaczaniach jak na rysunku 16.14 średnia energia potencjalna, przypadająca na jednostkę powierzchni sfalowanej będzie równa

$$E_{ps} = \frac{1}{\lambda \cdot 1} \left(\frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda \zeta^2 dx \right)$$

gdzie:

$$\zeta = r_0 \cos(kx - \omega t)$$



Rys. 16.14

Stąd

$$E_{ps} = \frac{1}{4} \rho g r_0^2 \quad (16.107a)$$

Przy wyznaczaniu średniej energii kinetycznej

$$E_{ks} = \frac{1}{\lambda \cdot T} E_k$$

korzystamy ze wzoru (16.49) dla potencjału prędkości płaskiej fali biegnącej. Z rysunku 16.14 widać, że na ścianach poprzecznych AB i CD wartości potencjału w odpowiadających sobie miejscach O_z są takie same, a normalne do tych ścian mają wartości przeciwne. Stąd

$$\int_{S_{AB}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} dS + \int_{S_{CD}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} dS = 0$$

Podobnie suma takich całek po wzdłużnych ścianach pionowych też jest równa zero. Także ze względu na warunek brzegowy na dnie $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0$, całka ta jest równa zero. Stąd gęstość powierzchniowa energii kinetycznej będzie

$$E_{ks} = \frac{\rho}{\lambda^2} \int_{S_{AC}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} dS$$

Ze względu na małą amplitudę fali możemy przyjąć

$$dS = 1 dx$$

Uwzględniając powyższe oraz to, że na powierzchni S_{AC} $\vec{n} \approx -\vec{k}$ i

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} \Big|_{z=0} = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

gęstość powierzchniowa energii kinetycznej będzie

$$E_{ks} = \frac{\rho g r_0^2}{2\lambda} \int_0^\lambda \sin^2(kx - \omega t) dx = \frac{1}{4} \rho g r_0^2 \quad (16.107b)$$

Widzimy, że dla małych fal biegnących gęstości powierzchniowe energii kinetycznej i potencjalnych są takie same. Gęstość zaś energii całkowitej płaskiej fali jest

$$E_{ws} = E_{ks} + E_{ps} = \frac{1}{2} \rho g r_0^2 \quad (16.107c)$$

przy czym E_{ws} przedstawia średnią za jeden okres energię przypadającą na jednostkę powierzchni szalowanej wody. Jest ona proporcjonalna do kwadratu amplitudy fali.

Ze względu na duże znaczenie praktyczne ostatniego wzoru, wyprowadzimy go wychodząc z ogólnego równania energii (7.36) przy uwzględnieniu, że woda jest nielepka i nieściśliwa:

$$\mu = 0; \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad \rho N_{wi} = p \operatorname{div} \vec{v} = 0; \\ \vec{p}_n = -p \vec{n} \quad \vec{F} = -\nabla u$$

Niech obszar wody $V(t_0)$ będzie ograniczony powierzchnią $S(t_0)$ jak na rysunku 16.14. Ponieważ mamy ruch falowy

$$\xi = r_0 \cos(kx - \omega t)$$

to część S_{AC} powierzchni S będzie zmieniać się w czasie a także obszar wody V będzie zmienny w czasie. Stąd równanie energii (7.36) będzie

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \frac{\rho v^2}{2} dV = - \int_{V(t_0)} \rho \nabla U \cdot \vec{v} dV - \oint_{S(t_0)} \vec{n} p \cdot \vec{v} dS \quad (16.108)$$

Równaniu (16.108) można nadać różne postaci w zależności od tego, jakie informacje zechce się uzyskać.

Wykażemy najpierw, że prędkość zmiany energii mechanicznej wody jest równa mocy chwilowej sił ciśnienia przyłożonych do powierzchni $S(t_0)$. Rozpisując lewą stronę równania oraz zmieniając całkę objętościową na całkę powierzchniową po prawej stronie równania (16.108) mamy:

$$\rho \int_{V(t_0)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) dV + \oint_{S(t_0)} \rho \left(\frac{v^2}{2} + U \right) v_n dS = - \oint_{S(t_0)} p v_n dS \quad (16.108a)$$

Ale w obszarze $V(t_0)$ energia potencjalna jest stała, więc w $V(t_0)$ $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. Zatem równanie (16.108a) może być zapisane także tak:

$$\rho \int_{V(t_0)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) dV + \rho \oint_{S(t_0)} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) v_n dS = - \oint_{S(t_0)} p v_n dS \quad (16.108b)$$

lub prościej

$$\frac{d}{dt} \rho \int_{V(t_0)} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) dV = - \oint_{S(t_0)} p \vec{n} \cdot \vec{v} dS \quad (16.108c)$$

Względnie w postaci:

$$\frac{d}{dt} E = - \oint_S p \vec{n} \cdot \vec{v} dS \quad (16.108d)$$

gdzie energią wody (płynu nieściśliwego) jest

$$E = \rho \int_{V(t)} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) dV \quad (16.109)$$

Zastosujmy wzór (16.109) do wyznaczenia powierzchniowej gęstości energii fal. Dla oznaczeń jak na rysunku 16.14: $U = -gz$; $dV = 1 dS_z dz$ gęstość energii E_w płaskich fal grawitacyjnych będzie

$$\begin{aligned} E_w &= \rho \int_S \left(\frac{v^2}{2} - gz \right) dz + \frac{1}{2} \rho g H^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \rho \int_0^H v^2 dz + \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 \end{aligned} \quad (16.110)$$

Pierwszy wyraz przedstawia gęstość powierzchniową energii kinetycznej, a drugi gęstość powierzchniową energii potencjalnej płaskich fal grawitacyjnych. Wzór jest ważny zarówno dla fal biegnących, jak i dla fal stojących. Widzimy, że jeżeli ruchu falowego nie ma; $v=0$ i $\zeta=0$, to $E_w = 0$. Ponieważ wychylenie powierzchni wody jest zależne od x i t , to celowym jest określenie średniej wartości gęstości powierzchniowej energii

$$E_{ws} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} E_w dx \quad (16.111)$$

gdzie τ jest okresem fali.

Wykonajmy obliczenia energii średniej E_{ws} dla fal biegnących i stojących na wodzie głębokiej. Dla fal biegnących zgodnie ze wzorem (16.78a).

$$v^2 = \omega^2 r_0^2 e^{-2kz}$$

$$\begin{aligned} i \quad E_w &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 r_0^2 \lim_{H \rightarrow \infty} \int_0^H e^{-2kz} dz + \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 = \\ &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 r_0^2 \frac{1}{2k} + \frac{1}{2} \rho g r_0^2 \cos^2(kx - \omega t) = \\ &= \frac{1}{4} \rho g r_0^2 + \frac{1}{2} \rho g r_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (16.110a)$$

Stąd

$$E_{ws} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} E_w dx = \frac{1}{4} \rho g r_0^2 + \frac{1}{4} \rho g r_0^2 = \frac{1}{2} \rho g r_0^2 \quad (16.108c)$$

Zauważmy, że ten sam wzór uzyskalibyśmy, gdybyśmy uśredniali najpierw po czasie t .

Dla fal stojących z potencjału (16.25) mamy

$$\begin{aligned} v_x &= -r_0 \omega e^{-kz} \cos kx \cos \omega t \\ v_y &= 0 \quad v_z = r_0 \omega e^{-kz} \sin kx \cos \omega t \\ v^2 &= r_0^2 \omega^2 e^{-2kz} \cos^2 \omega t \end{aligned}$$

Stąd ze wzoru (16.110) gęstość energii E_w będzie

$$\begin{aligned} E_w &= \frac{1}{2} \rho \omega^2 r_0^2 \frac{1}{2k} \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} \rho g r_0^2 \sin^2 kx \sin^2 \omega t = \\ &= \frac{1}{4} \rho g r_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} \rho g r_0^2 \sin^2 kx \sin^2 \omega t \quad (16.110b) \end{aligned}$$

Średnia gęstość energii przypadająca na jednostkę powierzchni wody pokrytej falami stojącymi zgodnie ze wzorem (16.111) będzie:

$$\begin{aligned} E'_{ws} &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} E_w dx = \frac{1}{4} \rho g r_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{4} \rho g r_0^2 \sin^2 \omega t \\ E_{ws} &= \frac{1}{4} \rho g r_0^2 \quad (16.112) \end{aligned}$$

Widzimy, że wyraz proporcjonalny do $\cos^2 \omega t$ jest średnią gęstością powierzchniową energii kinetycznej, a wyraz proporcjonalny do $\sin^2 \omega t$ - średnią gęstością energii potencjalnej. Średnia gęstość energii całkowitej jest stała i jest o połowę mniejsza niż dla fali biegnącej o tej samej amplitudzie co fala stojąca.

Uśrednijmy dalej E'_{ws} po czasie t według wzoru (16.111). Mamy:

$$E_{ws} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} E'_{ws} dt = \frac{1}{8} \rho g r_0^2 + \frac{1}{8} \rho g r_0^2 = \frac{1}{4} \rho g r_0^2 \quad (16.112)$$

Tu już wyraźnie widać podobieństwo wzorów (16.107c) i (16.112); średnie gęstości powierzchniowe energii potencjalnej i kinematycznej małych fal grawitacyjnych są takie same. Powyższe wnioski wynikają z uśrednienia wzoru (16.109) dla przypadku małych fal grawitacyjnych. Ze wzoru (16.108d) możemy natychmiast wysnuć wniosek taki, że średnia moc sił ciśnienia działającego na powierzchnię S ograniczającą obszar V , jak na rysunku 16.14, jest równa zero. Wzór (16.108b) mówi nam zaś o tym, że średnia z pochodnej lokalnej energii fali w obszarze V jest równa ujemnej wartości średniej ze strumienia tej energii przez powierzchnię S ograniczającą obszar V .

Ponieważ zaś średnia wartość energii fali jest stała, to taka średnia wartość lokalnej pochodnej energii fali w obszarze V jest równa zero

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{sr} = 0$$

Stąd średni strumień energii fali przez powierzchnię S ograniczającą obszar V (rys. 16.14) jest także równy zero. Dla dali stojącej w zbiorniku, jak na rysunku 16.3, prędkość na ścianach $v_n = 0$, więc strumień energii przez te ściany też jest równy zero. Możecie sprawdzić, że średni strumień energii przez swobodną powierzchnię jest równy zero. Jest zatem tak, jak powinno być. Przy falach stojących w zbiorniku mamy zatem wyjaśnione do końca sprawy energetyczne powierzchniowych fal stojących.

Obecnie na podstawie ogólnych związków (16.108a) zbadamy zagadnienie transportu energii dla fal biegnących: czy jakaś energia wpływa do obszaru V i jaka? Bo wiemy, że ile wplynie, to tyle musi z tego obszaru wypłynąć. Jeżeli wpływa energia, to jaka i z jaką prędkością? Dla zbadania tych zagadnień napiszemy równanie (16.108b) w zmodyfikowanej postaci.

Jeśli oznaczymy pochodną lokalną energii przez

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho \int_{S(t_0)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) dV$$

to równanie (16.108b) można zapisać tak:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \rho \oint_{S(t_0)} \left(\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (16.113)$$

lub

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \oint_{S(t_0)} \left(\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (16.113a)$$

Zatem dla cieczy nieściśliwej i nielepkiej zmiana energii w danej objętości V w jednostce czasu jest równa ujemnej wartości strumienia energii przez powierzchnię ograniczającą tę objętość V . Stąd wyrażenie:

$$\vec{e} = \rho \left(\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) \vec{v} \quad (16.113b)$$

możemy nazwać wektorem gęstości strumienia energii.

Jeśli wrócimy do przepływu potencjalnego płynu nieściśliwego, to biorąc pod uwagę całkę Cauchy'ego-Lagrange'a (13.2)

$$\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p_a}{\rho}$$

równanie (16.113a) będzie

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho \oint \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_n dS \quad (16.113c)$$

bo

$$\oint_S c(t) v_n dS = c(t) \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV = 0$$

Stąd wektor strumienia energii dla przepływu potencjalnego płynu nieściśliwego będzie:

$$\vec{e} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{v} \quad (16.113d)$$

Biorąc pod uwagę wyrażenia (16.113b i d) wzór (16.113a) możemy zapisać:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\oint_S \vec{e} \cdot \vec{n} dS \quad (16.113e)$$

Jeśli strumień energii ma wartość dodatnią, to energia wypływa z obszaru V . Ze wzoru (16.113e) widać, że w tym przypadku pochodna lokalna energii jest mniejsza od zera. Zatem energia w obszarze V ulega zmniejszeniu. Jeśli natomiast $\frac{\partial E}{\partial t} > 0$, to strumień energii przez powierzchnię S ma wartość ujemną - czyli energia wpływa do obszaru V przez powierzchnię S . Wszystko zatem się zgadza! Gdyby ktoś z Was miał jakieś jeszcze wątpliwości, to niech ponownie przeczyta rozdział 3.3.1.

Mamy gotowe narzędzia do zbadania postawionego zagadnienia transportu energii w płaskiej fali wędrującej. Bierzemy pod uwagę obszar V jak na rysunku 16.14. Wtedy

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho \int_{S_{AB}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_n dS + \rho \int_{S_{BD}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_n dS + \rho \int_{S_{CD}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_n dS + \rho \int_{S_{AC}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_n dS$$

bo na ścianach bocznych $ABCD$ $v_n = v_y = 0$.

Również na dnie S_{BD} prędkość $v_n = v_z = 0$, więc

$$\int_{S_{BD}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_n dS = 0$$

Obliczmy całkę na swobodnej powierzchni AC , traktując ją jako płaszczyznę $z = 0$; $v_n = -\vec{k} \cdot \vec{v} = -v_z$. Stąd przy uwzględnieniu wyrażenia (16.49) oraz wzoru (16.66)

$$\begin{aligned} \int_{S_{AC}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_n dS &= \int_0^\lambda \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} (-v_z) \right]_{z=0} dx = \\ &= g\omega r_0^2 \int_0^\lambda \cos(kx - \omega t) \sin(kx - \omega t) dx = 0 \end{aligned}$$

A więc strumień energii przez swobodną powierzchnię jest równy zero tak samo jak i przez dno zbiornika. Zatem energia, jeśli „przepływa”, to tylko przez powierzchnie S_{AB} i S_{CD} . Stąd

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho \int_{S_{AB}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_n dS + \rho \int_{S_{CD}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_n dS$$

Ze wzoru (16.49) mamy dla ścian S_{AB} ; A_{CD}

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = g r_0 \frac{\cosh [k(H-z)]}{\cosh(kH)} \cos(kx - \omega t)$$

a na ścianie S_{AB}

$$v_n = -\vec{i} \cdot \vec{v} = -v_x = r_0 \omega \frac{\cosh [k(H-z)]}{\sinh(kH)} \cos(kx - \omega t)$$

Na ścianie zaś S_{CD} $v_n = \vec{i} \cdot \vec{v} = v_x$, gdzie v_x określone jest wzorem (16.65). Widzimy zatem, że

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\rho \int_{S_{AB}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_x dS + \rho \int_{S_{CD}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_x dS = 0.$$

Sprawdzimy, czy istnieje przepływ energii przez ścianę S_{AB}

$$-\rho \int_{S_{AB}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_x dS = \rho g \omega r_0^2 \frac{\cos^2(kx - \omega t)}{\sinh(kH) \cosh(kH)} \int_0^H \cosh^2 [k(H-z)] dz$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\int \cosh^2 ax dx = \frac{1}{4a} \sinh 2ax + \frac{1}{2} x$$

mamy

$$\int_0^H \cosh^2 [k(H-z)] dz = \frac{1}{4k} \sinh(2kH) + \frac{H}{2}$$

Stąd

$$-\rho \int_{S_{AB}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_x dS = \frac{\rho g \omega r_0^2}{\sinh(2kH)} \left(\frac{\sinh(2kH)}{2k} + H \right) \cos^2(kx - \omega t)$$

W wyrażeniu powyższym można rozpoznać wzór (16.105b) dla prędkości grupowej fali na wodzie płytkiej, U . Uwzględniając to, ujemna wartość strumienia energii płaskiej fali biegnącej przez ścianę AB będzie

$$-\rho \int_{S_{AB}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_x dS = \rho g r_0^2 U \cos^2(kx - \omega t) \quad (16.114)$$

Srednia w czasie jednego okresu fali τ wartość tego strumienia jest równa

$$\frac{1}{2} \rho g r_0^2 u = E_{ws} U \quad (16.115)$$

gdzie: E_{ws} - średnia gęstość powierzchniowa energii płaskiej fali biegnącej, według wzoru (16.107c).

Na ścianie CD obszaru V (rys.16.14).

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left(\rho \int_{S_{CD}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} v_n dS \right) dt = - E_{ws} U \quad (16.116)$$

Podsumowując, mamy na ścianie AB

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left(\int_{S_{AB}} \vec{e} \cdot d\vec{S} \right) dt = - E_{ws} U \quad (16.117a)$$

a na ścianie CD

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left(\int_{S_{CD}} \vec{e} \cdot d\vec{S} \right) dt = E_{ws} U \quad (16.117b)$$

Więc

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Wnioskujemy, że w fali biegnącej ma miejsce transport energii, że energia w danym obszarze V o powierzchni swobodnej pokrytej falami biegnącymi jest stała, że transport energii jest zgodny z kierunkiem prędkości grupowej fali i z tą prędkością jest ta energia przenoszona; że średnia w czasie jednego okresu fali τ energia transportowana jest równa średniej gęstości powierzchniowej fali. Dalej, ponieważ kierunek prędkości grupowej jest zgodny z kierunkiem prędkości fazowej fali - prędkości fali - a ten znow jest zgodny z kierunkiem wektora falowego, to transport energii w fali biegnącej jest zgodny z kierunkiem wektora falowego.

Na zagadnienie energetyczne w fali biegnącej można spojrzeć jeszcze inaczej, biorąc pod uwagę zamiast wzorów (16.113e i d) wzory (16.108b i d). Łatwo można sprawdzić przy zastosowaniu wyrażeń dla ciśnienia (16.95) lub (16.96), że moc sił ciśnienia

$$-\int_S p v_n dS$$

na dnie zbiornika i na sfałowanej powierzchni jest równa zero, że na ścianie AB średnia moc sił ciśnienia

$$-\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left(\int_0^H p v_n dz \right) dt = E_{ws} U \quad (16.118)$$

zaś na ścianie CD (rys. 16.14) jest równa $-E_{ws} U$. Stąd wniosek taki, że średnia moc sił ciśnienia na ścianie prostopadłej do kierunku ruchu fali biegnącej jest równa iloczynowi średniej gęstości energii powierzchniowej fali i prędkości grupowej fali. Jest ona także równa średniemu strumieniowi energii fali przez tę ścianę.

Biorąc dalej pod uwagę wnioski, jakie uzyskaliśmy ze wzoru (16.113c) oraz powyższe wnioski, możemy stwierdzić, że wyraz

$$\oint_{S(t_0)} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) v_n dS \quad (16.119)$$

wzoru (16.108b) powinien być równy zeru na swobodnej powierzchni i na dnie oraz uśredniona jego wartość po czasie t powinna być także równa zeru na ścianie AB i CD (rys. 16.14). I tak rzeczywiście jest. Dla przypadku wody głębokiej na ścianie AB mamy

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left(\int_{S_{AB}} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) v_n dS \right) dt = \\ & = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \lim_{H \rightarrow \infty} \int_0^H \left(\frac{\omega^2 r_0^2}{2} e^{-2kz} - gz \right) \omega r_0 e^{-kz} \cos(kx - \omega t) dz dt = 0 \end{aligned}$$

Na ścianie CD mamy taką samą całkę ze znakiem minus, na dnie $v_n = 0$, a na swobodnej powierzchni $p = p_a$. Więc jest jak wyżej wskazano.

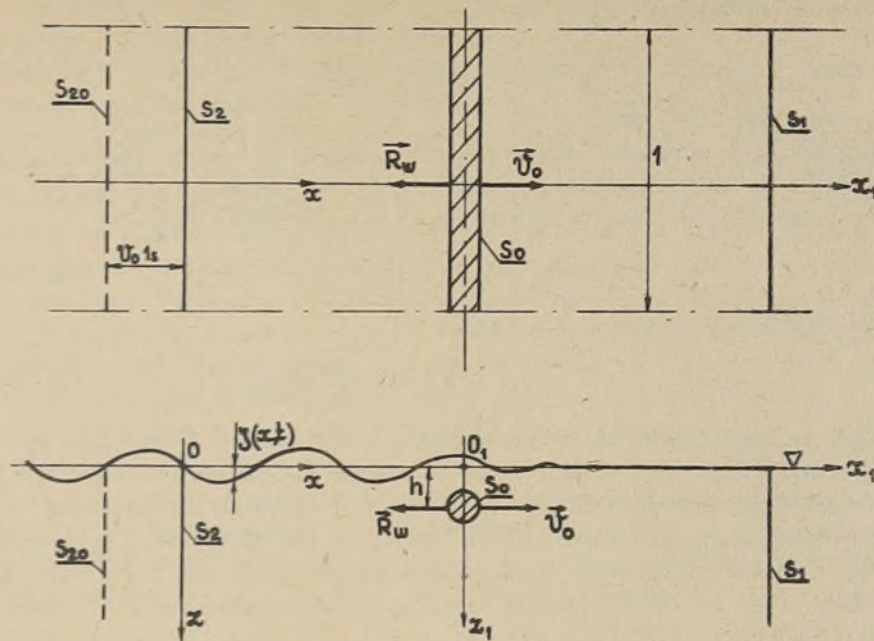
Zilustrujemy wnioski dotyczące transportu energii do wyznaczenia oporu falowego w przepływie płaskim, a więc siły, jaka działa na ciało walcowe lub inaczej kontur C, źródło płaskie, płaski dipol, nieskończone włókna wirowe poruszające się ze stałą prędkością v_0 pod swobodną powierzchnią wody. Dotyczy to także płaskiego układu ciśnień poruszającego się z prędkością v_0 po swobodnej powierzchni wody. Daleko za tym ciałem na swobodnej powierzchni pozostaną fale grawitacyjne mające charakter fal swobodnych o prędkości fazowej równej prędkości ruchu ciała, v_0 . W układzie współrzędnych $O_1 x_1 y_1 z_1$ (rys. 16.15), związanym z ciałem, profil fali daleko za ciałem w przekroju S_2 będzie dany wzorem (16.86):

$$\zeta = r_0 \cos k x_1$$

a w układzie nieruchomym Oxyz wzorem (16.50):

$$\zeta = r_0 \cos(kx - \omega t)$$

gdzie S_2 - nieruchoma płaszczyzna prostopadła do kierunku prędkości v_0 obiektu, usytuowana daleko za poruszającym się ciałem S_0 . Na rys. 16.15 pokazano także płaszczyznę S_1 usytuowaną daleko przed ciałem S_0 i równoległą do S_2 .



Rys.16.15

Z bilansu energii [17] wynika, że obszar cieczy zawarty pomiędzy płaszczyznami S_1 i S_2 o szerokości równej jednostce uzyskuje w jednostce czasu (1 s) przyrost energii równy $E_{ws} v_0$. Ten przyrost energii jest równy mocy sił ciśnienia na płaszczyźnie S_2 , to jest $E_{ws} U$ (wzór 16.118) oraz mocy reakcji hydrodynamicznej działającej na wodę ze strony poruszającego się ciała; zatem mocy oporu falowego $R_w v_0$. Ponieważ daleko przed ciałem fal nie ma, więc

$$E_{ws} v_0 = R_w v_0 + E_{ws} U$$

Stąd opór falowy R_w przypadający na jednostkę rozpiętości ciała (w kierunku osi $O_1 y_1$) będzie:

$$R_w = E_{ws} \left(1 - \frac{U}{v_0}\right) \quad (16.120)$$

Wzór (16.120) można uzyskać także następującym rozumowaniem:

Niech płaszczyzny S_2 i S_1 , (rys. 16.15), poruszają się także z prędkością v_0 ciała S_0 . Wtedy po czasie $t = 1$ s płaszczyzna S_2 przemieści się na odległość $v_0 \cdot 1$ i w związku z tym wzrosnie powierzchnia sfalowanej wody o $v_0 \cdot 1$ - o wielkość zawartą pomiędzy płaszczyznami S_{20} i S_2 jak na rys. 16.15.

Przyrost energii sfalowanej wody pomiędzy płaszczyznami S_{20} i S_2 będzie $E_{ws} v_0$. Część tej energii zostanie przetransponowana do obszaru zawartego pomiędzy S_{20} i S_2 przez powierzchnię S_{20} przez fale wytworzone już wcześniej. Będzie ona równa $E_{ws} U$, co jest zgodne ze wzorem (16.115).

Stąd moc oporu falowego $R_w v_0$ będzie:

$$R_w v_0 = E_{ws} v_0 - E_{ws} U \quad (16.121)$$

I znów mamy wzór (16.120).

Uwzględniając wyrażenie dla prędkości grupowej na wodzie głębokiej (16.105a) i na wodzie płytkiej (16.105b) oraz to, że $E_{ws} = \frac{1}{2} \rho g r_0^2$, a $C = v_0$, opór falowy ciała walcowego na wodzie głębokiej będzie:

$$R_w = \frac{1}{4} \rho g r_0^2 \quad (16.122)$$

a na wodzie płytkiej wyrazi się wzorem

$$R_w = \frac{1}{4} \rho g r_0^2 \left(1 - \frac{2 kH}{\sinh(2 kH)} \right) \quad (16.123)$$

Widzimy, że opór falowy na wodzie głębokiej jest wprost proporcjonalny do kwadratu amplitudy fali daleko za poruszającym się ciałem walcowym lub inną osobliwością hydromechaniczną zanurzoną pod swobodną powierzchnią wody. Dla znalezienia oporu falowego ciała walcowego lub osobliwości hydromechanicznej w przepływie płaskim wystarczy zatem znajomość amplitudy fali generowanej przez te obiekty daleko za nimi. I tak przykładowo dla włókna wirowego [6], [17]:

$$\zeta(x) = \frac{2\Gamma}{v_0} e^{-\frac{gh}{v_0^2}} \sin \frac{k}{v_0} x \quad (16.124)$$

opór falowy zgodnie ze wzorem (16.121) jest

$$R_w = \frac{\rho g}{v_0^2} \Gamma^2 e^{-\frac{2gh}{v_0^2}} \quad (16.125)$$

a dla źródła o wydatku Q

$$\zeta(x) = \frac{2Q}{v_0} e^{-\frac{gh}{v_0^2}} \cos \frac{k}{v_0} x \quad (16.126a)$$

i

$$R_w = \frac{\rho g}{v_0^2} Q^2 e^{-\frac{2gh}{v_0^2}} \quad (16.126b)$$

We wzorach tych występuje czynnik

$$e^{-\frac{2gh}{v_0^2}} = e^{-\frac{2}{F_h^2}}$$

który ma miejsce także i przy ruchu walca o przejozu kołowym lub eliptycznym. Wskazuje on, że przy zwiększaniu zanurzenia ciała lub osobliwości hydromechanicznej opór falowy wykładniczo maleje. Również przy prędkości dążącej do zera lub do nieskończoności amplitudy r_0 dążą do zera i opór falowy maleje do zera. Przy kombinacji prędkości v_0 i zanurzeniu h , takim że $F_h = v_0/\sqrt{gh} = 0,5$, czynnik $\exp[-2/F_h^2] = \exp(-8) = 0,000335$. Praktycznie

tu oporu falowego już nie ma. Zwróćmy również uwagę na to, że na wodzie bardzo płytkiej, przy $v_0 = C_{kr} = \sqrt{gH} = U$, opór falowy zgodnie ze wzorami (16.120) i (16.123) jest równy zeru.

Wracając do wzoru (16.120) i rys. 16.15 możemy wnioskować z powodu założonej dużej odległości pomiędzy ciałem S_0 a płaszczyzną S_2 , że wzór (16.120) będzie także ważny, gdy zamiast jednego ciała S_0 będzie zbiór ciał $\sum S_{0i}$ poruszających się z tą samą prędkością v_0 , a więc nieruchomych względem siebie. Wtedy amplituda fali od tego zbioru w przekroju S_2 będzie wypadkową od wszystkich fal wytworzonych przez poszczególne ciała, jeśli tylko odległość pomiędzy tymi ciałami będzie odpowiednio duża. Przykładowo dla przypadku dwóch ciał S_{01} i S_{02} będziemy mieć zjawisko jak na rysunku 16.13. Amplituda wypadkowa r_w jest określona wtedy wzorami (16.103a,b). W przypadku, kiedy na długości L_1 , zwanej w okrętownictwie długością falo-twórczą, wytworzy się parzysta ilość połówek fal, to amplituda fali wypadkowej będzie $r_w = r_1 + r_2$ (wzór 16.104a) i opór falowy będzie mieć wartość maksymalną, a gdy $L_1/\frac{1}{2}\lambda = 2n + 1$, to R_w ma wartość minimalną. Wykorzystuje się to zjawisko interferencji fal przy kształtowaniu statków nawodnych. Wzór (16.120) można uogólnić na przypadek ruchu dowolnego ciała, gdy generowany układ falowy przez to trójwymiarowe ciało - statek - jest falą trój-wymiarową.

16.3.6. Uwagi o tłumieniu fal grawitacyjnych

Mówiliśmy już o tym, że charakter fal swobodnych mają fale wytwarzane przez poruszające się w pobliżu swobodnej powierzchni objekty w obszarze dostatecznie daleko za tymi obiektami a także fale spowodowane działaniem wiatru po upływie pewnego czasu od zaniku wiatru. W tym ostatnim przypadku powstaje tak zwana fala martwa o profilu sinusoidalnym. Rozpatrywane dotychczas fale swobodne opisane równaniem Laplace'a z warunkami brzegowymi, lecz bez warunków początkowych i bez uwzględnienia przyczyn wywołujących to falowanie, mają niezmienną w czasie amplitudę, „żyją” wiecznie; były, są i będą zawsze. W rzeczywistości obserwuje się zanikanie fal. Z upływem czasu ich amplituda ulega zmniejszeniu. Zmniejsza się zatem i energia fali.

Postaramy się o ocenę wielkości rozpraszanej energii fali stosując wyrażenia rozdziału 7.5. Otóż prędkość zmiany średniej gęstości powierzchniowej energii fali - wzór (16.107c), winna być równa średniej gęstości powierzchniowej mocy dyssypowanej, określonej wzorem (7.49), co zapisujemy:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho g r_0^2(t) \right) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left[-2\mu \lim_{H \rightarrow \infty} \int_0^H \mathbf{S}_d^2 dz \right] dt \quad (16.127a)$$

gdzie dla płaskiego przepływu potencjalnego ślad iloczynu tensora prędkości płynu jest:

$$\mathbf{S}_d^2 = \text{Tr}[\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}] = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right)^2 \quad (16.127b)$$

(patrz str. 125 części I).

Podstawiając wyrażenie dla potencjału prędkości φ (wzór 16.72) do związku (16.127b) mamy

$$S_d^2 = r_0^2 \omega^2 k^2 e^{-2kx} [\sin^2(kx - \omega t) + \cos^2(kx - \omega t) + 2 \cos^2(kx - \omega t)]$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do wzoru (16.127a) i wykonaniu prostych działań dostajemy:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho g r_0^2(t) \right) = -2 \mu g r_0^2(t) k^2 \quad (16.127c)$$

Prawa strona powyższego równania wyraża średnią powierzchniową gęstość mocy dysypowanej w ruchu falowym swobodnej powierzchni o bardzo małej amplitudzie r_0 . Widzimy, że średnia gęstość mocy dysypowanej fal powierzchniowych

$$N_\mu = -2 \mu g r_0^2 k^2 = -2 \pi^2 \rho v g \left(\frac{h_w}{\lambda} \right)^2 \quad (16.128)$$

gdzie $h_w = 2 r_0$.

jest wprost proporcjonalna do kwadratu stromości fali. Wzór ten jest oczywiście słuszny tylko w ramach teorii liniowej fal, a zatem gdy wysokość fali h_w jest dużo mniejsza od jej długości. Uzasadnimy to stwierdzenie dalej. Tu można jednak wskazać, że w falach bardziej stromych ma miejsce większe rozproszenie energii fal niż w falach o małym stosunku wysokości fali do jej długości.

Wróćmy do równania (16.127c). Możemy je zapisać w postaci:

$$\frac{dr_0}{dt} = -2 \nu k^2 r_0(t)$$

Przyjmując dla $t=0$ $r_0(t) = r_0$, mamy zależność amplitudy fali od czasu t w postaci

$$r_0(t) = r_0 e^{-2\nu k^2 t} \quad (16.129)$$

1

$$\xi = r_0 e^{-2\nu k^2 t} \cos(kx - \omega t) \quad (16.129a)$$

Widzimy, że fale na swobodnej powierzchni są tłumione; zanikają z upływem czasu t , przy czym współczynnik tłumienia fal δ_w jest

$$\delta_w = 2 \nu k^2 \quad (16.129b)$$

Ze względu na małą wartość kinematycznego współczynnika lepkości wody - dla $t = 15^\circ\text{C}$, $\nu = 1,142 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ - zanikanie fal grawitacyjnych na swobodnej powierzchni jest bardzo powolne. Biorąc pod uwagę czas T_{02} , po upływie którego amplituda fali ulegnie zmniejszeniu do wartości równej 2 procent amplitudy początkowej:

$$T_{02} \approx \frac{4}{\delta_w} = \frac{2}{\nu k^2} = \frac{\lambda^2}{2 \pi^2 \nu} \quad (16.129c)$$

możemy stwierdzić, wykonując proste obliczenia, że dla fali o długości 0,1 m, $T_{02} = 0,123$ godz.; dla $\lambda = 1,0$ m, $T_{02} = 12,3$ godz. a dla $\lambda = 10$ m, $T_{02} = 123,5$ godz. Czasy te są zatem nierealnie długie. Więc wzory (16.128) i (16.129) dają tylko jakościową ocenę tłumienia fal grawitacyjnych wskazując na to, że fale bardzo krótkie zanikają znacznie szybciej niż fale długie. Ale te jakościowe związki pozwalają na wytłumaczenie zjawiska przechodzenia nieregularnej fali wiatrowej w falę martwą - regularną. I tak przykładowo wyrażenie (16.117a) z uwzględnieniem (16.129) będzie

$$\xi(x,t) = \sum_n r_n(k_n) e^{-2\nu k_n^2 t} \cos(k_n x - \omega_n t + \epsilon_n) \quad (16.129d)$$

Jeśli przez k , ω , r_0 oznaczymy charakterystyki fali najdłuższej, to po dostatecznie długim czasie pozostanie na swobodnej powierzchni tylko fala opisana wzorem (16.129a). Wszystkie inne składowe fali nieregularnej (16.129d) zostaną wytłumione.

16.4. OCENA ZAKRESU WAŻNOŚCI LINIOWEJ TEORII FAL POWIERZCHNIOWYCH

Dla oceny zakresu ważności liniowej teorii fal powierzchniowych weźmiemy pod uwagę równanie ruchu płynu nieściśliwego oraz związki dla płaskiej fali biegnącej na wodzie nieograniczonej. Przy osi Oz skierowanej pionowo w dół równania rządzące ruchem wody o gęstości stałej są:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = g \vec{e}_3 - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} \quad (a)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (b)$$

Biorąc wyrażenia (16.74) dla pola prędkości w fali możemy napisać:

$$\vec{v} = \omega r_0 \vec{v}_b$$

$$x_b = kx \quad y_b = ky \quad z_b = kz \quad t_b = \omega t$$

$$p = \rho g r_0 p_b \quad (\text{wzór 16.98})$$

gdzie wskaźnikiem „b” oznaczyliśmy wielkość bezwymiarową. Przy pomocy tych wielkości bezwymiarowych możemy zapisać równania ruchu (a) i (b). I tak

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial(\omega r_0 \vec{v}_b)}{\partial t_b} \frac{dt_b}{dt} = \omega^2 r_0 \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t_b}$$

$$\nabla = k \nabla_b = k \left(\vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_b} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y_b} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z_b} \right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} - \text{moduł wektora falowego}$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \omega^2 r_0 k (\vec{v}_b \cdot \nabla_b) \vec{v}_b$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = k g r_0 \nabla_b p_b$$

$$\Delta \vec{v}_b = k^2 \omega r_0 \Delta_b \vec{v}_b$$

Podstawiając powyższe do równania (a) i (b) oraz dzieląc stronami tak uzyskane równanie (a) przez $\omega^2 r_0$, a równanie (b) przez $k r_0 \omega$ dostajemy bezwymiarowy układ równań rządzących ruchem falowym wody

$$\frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t_b} + k r_0 (\vec{v}_b \cdot \nabla_b) \vec{v}_b = \frac{g}{\omega^2 r_0} \vec{e}_3 - \frac{k g}{\omega^2} \nabla_b p_b + \frac{v k^2}{\omega} \nabla_b \vec{v}_b \quad (16.130a)$$

$$\nabla_b \cdot \vec{v}_b = 0 \quad (16.130b)$$

Jeśli uwzględnimy zależność pomiędzy częstością fali ω i liczbą falową k : $\omega^2 = gk$, to równanie (16.130a) przyjmie postać:

$$\frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t_b} + k r_0 (\vec{v}_b \cdot \nabla_b) \vec{v}_b = \frac{\vec{e}_3}{k r_0} - \nabla_b p_b + \frac{v k^2}{\omega} \Delta_b \vec{v}_b \quad (16.130c)$$

Widzimy, że człon nieliniowy $(\vec{v}_b \cdot \nabla_b) \vec{v}_b$ może zostać pominięty w przypadku bardzo małej wartości iloczynu k i r_0

$$k r_0 = \frac{2\pi}{\lambda} r_0 = \pi \left(\frac{h_w}{\lambda} \right) = \alpha_0 \ll 1 \quad (15.130d)$$

Tu przez α_0 oznaczono maksymalny kąt skłonu fali, bo

$$\frac{dS}{dx} = -r_0 k \sin(kx - \omega t) = -\alpha_0 \sin(kx - \omega t) \quad (16.130e)$$

Zatem człony nieliniowe możliwe są do pominięcia dla fali o bardzo małej wysokości w stosunku do jej długości. Jak już wspomniano, realne fale powierzchniowe mają stromość od 1/10 do 1/26. Dla fali stromszej $k r_0 = 0,314$, dla drugiego przypadku fali $k r_0 = 0,12$, a α_0 odpowiednio wynosi 18° i $\sim 7^\circ$. Stąd dla drugiego przypadku fali ($\alpha_0 \approx 7^\circ$) wpływ nieliniowości jest mniejszy niż dla fali o $\alpha_0 \approx 18^\circ$.

Jeśli weźmie się pod uwagę falę płaską, to maksymalne wartości składowych v_{bi} są: $v_{bi} = e^{-z_b}$; takie wartości mają także pochodne tych prędkości względem czasu t_b i współrzędnych x_b . Stąd poszczególne człony równania (16.130c) są rzędu:

$$\frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t_b} = e^{-z_b}; \quad k r_0 (\vec{v}_b \cdot \nabla_b) \vec{v}_b = k r_0 e^{-2z_b}; \quad \nabla_b p_b = e^{-z_b}$$

$$\frac{v k^2}{\omega} \Delta_b \vec{v}_b = \frac{v k^2}{\omega} e^{-z_b}$$

Wynikają z powyższego wnioski takie:

- wpływ nieliniowości jest największy przy swobodnej powierzchni;
- wpływ nieliniowości maleje znacznie szybciej z zanurzeniem z_b niż znikanie ruchu falowego;

- stosunek przyspieszenia konwekcyjnego do przyspieszenia lokalnego jest rzędu $k r_0 e^{-2b}$, a na swobodnej powierzchni waha się od 0,12 do 0,32.

Z równania (16.130c) widać wyraźnie, że im $k r_0$ jest mniejsze, tym pierwszy wyraz prawej strony tego równania, opisujący bezwymiarową siłę ciężkości, staje się większy. Jest on istotny w tym równaniu. Stąd uzasadnienie nazwy dla fal na swobodnej powierzchni - fale grawitacyjne jako spowodowane siłą ciężkości. Na swobodnej powierzchni mogą powstać fale bardzo krótkie, spowodowane napięciem powierzchniowym - fale kapilarne. Omówimy je krótko w następnym rozdziale.

Tu wrócimy do ostatniego wyrazu równania (16.130c). Opisuje on, jak wiemy, siły lepkości. Widzimy, że bezwymiarowe siły lepkości są rzędu

$$\theta = \frac{\nu k^2}{\omega} = \frac{\nu k^2}{\sqrt{gk}} = \frac{\nu(2\pi)^{1,5}}{\sqrt{g}} \frac{1}{\lambda^{1,5}}$$

Dla wody o temperaturze 15°C

$$\theta = \frac{\nu k^2}{\omega} = 5,7 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\lambda^{1,5}} \quad (16.130f)$$

Wartości tego współczynnika dla fal o długości $\lambda = 0,10 \text{ m}; 1 \text{ m}; 10 \text{ m}; 100 \text{ m}$ wynoszą odpowiednio: $1,82 \cdot 10^{-4}; 5,75 \cdot 10^{-6}; 1,82 \cdot 10^{-7}; 5,75 \cdot 10^{-9}$.

Stąd widać, że wpływ lepkości nawet dla bardzo krótkich fal grawitacyjnych jest bardzo mały. Jest to uzasadnienie na pomijanie sił lepkości przy badaniu ruchu falowego wody spowodowanego siłą grawitacyjną. Wiemy już, że wpływ siły lepkości na przepływ ma miejsce głównie w warstwie przyściennej. W tym przypadku siły lepkości będą działać w bardzo małej warstwie wody przy swobodnej powierzchni - tam powinien być ruch wirowy - a ze wzrostem zanurzenia pod tą powierzchnią oddziaływanie sił lepkości powinno szybko zanikać.

Powyższe przykłady rachunkowe wskazują jeszcze na to, że wpływ wyrazu opisującego przyspieszenie konwekcyjne powinien być znacznie większy niż wpływ sił lepkości. Dla $k r_0 = 0,12$ bowiem stosunek

$$\frac{\nu k^2}{\omega(k r_0)} = 1,51 \cdot 10^{-2}; 4,8 \cdot 10^{-5}; 1,51 \cdot 10^{-6}; 4,8 \cdot 10^{-8}$$

dla fal o długości odpowiednio równych: $\lambda = 0,10 \text{ m}; 1 \text{ m}; 10 \text{ m}$ i 100 m .

Stąd należałoby poświęcić więcej czasu nieliniowej teorii fal grawitacyjnych, która z powodu trudności natury matematycznej nie jest dostatecznie dotychczas rozwinięta.

Obecnie podamy sformułowanie zadania dla fal grawitacyjnych na swobodnej powierzchni, bez uwzględnienia napięcia powierzchniowego, dla zbiornika wody o nieskończonych wymiarach.

Otóż równaniem rządzącym ruchem wody jest równanie Naviera i Stokesa (16.130c), które przy uwzględnieniu wzoru (3.49) zapisujemy

$$\frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t_b} + k r_0 \left(\text{grad}_b \frac{v_b^2}{2} - \vec{v}_b \times \text{rot}_b \vec{v}_b \right) = \frac{\vec{e}_3}{k r_0} - \text{grad}_b p_b + \frac{\nu k}{\omega} \Delta_b \vec{v}_b \quad (16.131)$$

oraz równanie ciągłości

$$\operatorname{div}_b \vec{v}_b = 0$$

z warunkami kinematycznymi: $\vec{v}_b = 0$ przy $z_b \rightarrow \infty$ i warunkami (8.1) i (8.2) oraz (8.5) dla $z_b = \zeta_b$. Przy założeniu, że na swobodnej powierzchni panuje ciśnienie p_a , to w tensorze naprężeń nad swobodną powierzchnią należy przyjąć, że naprężenia styczne są równe zeru.

Zadanie takie nie zostało rozwiązane. Rozpatrzmy tylko szczególne uproszczone przypadki tego zadania:

Przypadek 1

Najbardziej rozwinięta jest teoria potencjalnych fal o małej amplitudzie r_0 . Równania rządzące dla tego przypadku są

$$\frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t_b} = \frac{\vec{e}_3}{kr_0} - \nabla_b p_b$$

$$\nabla_b \cdot \vec{v}_b = 0$$

Zagadnienia fal swobodnych opisanych w rozdziałach 16.2 do 16.35 dotyczą tego przypadku.

Przypadek 2

Teoria potencjalnych fal o skończonej amplitudzie opisana jest układem równań:

$$\frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t_b} + kr_0 \operatorname{grad}_b \frac{v_b^2}{2} = \frac{\vec{e}_3}{kr_0} - \nabla_b p_b$$

$$\nabla_b \cdot \vec{v}_b = 0$$

Sprowadza się ona do poszukiwania potencjału prędkości φ z warunkiem brzegowym (15.10b). Rozwiązano w sposób przybliżony zagadnienie fal swobodnych na wodzie o skończonej i o nieograniczonej głębokości. Przegląd zadań rozwiązanych tego zagadnienia możecie znaleźć w monografii [15]. Tu przytoczymy tylko dane tak zwanej fali Stokesa [6], na wodzie głębokiej.

Otóż z teorii nieliniowej związek dyspersyjny zależy obecnie od współczynnika kr_0 i ma postać:

$$\omega^2 = gk \left(1 + k^2 r_0^2 + \frac{3}{2} k^4 r_0^4 + \dots \right) \quad (16.132a)$$

Jeśli $kr_0 \rightarrow 0$, to uzyskujemy zależność dla wody głębokiej wynikającą z teorii liniowej. Prędkość fazowa fali c wyraża się oczywiście wzorem ogólnie ważnym: $c = \omega/k$. Stąd uwzględniając (16.132a) mamy:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \left[1 + (kr_0)^2 + \frac{3}{2} (kr_0)^4 + \dots \right]} \quad (16.132b)$$

Dla fali o stromości 1/26, to jest $kr_0 = 0,12$, prędkość fazowa obliczona według wzoru (16.132b) różni się od prędkości obliczonej według wzoru (16.53) o około 1%

$$\sqrt{1 + (kr_0)^2 + \frac{3}{2} (kr_0)^4} = \sqrt{1,0147} \approx 1,01$$

Jeśli fala jest strzemsza, np.: $kr_0 = 0,31$, to różnica ta będzie już rzędu 5%.

Istotną różnicą pomiędzy liniową teorią a wynikami teorii nieliniowej jest to, że tory cząstek wody nie są już okręgami; są niezamkniętymi krzywymi. W związku z tym występuje tu transport masy cieczy w kierunku prędkości fali, przy czym prędkość transportu masy jest

$$U_m = r_0^2 e^{-2kz} k^2 c = r_0^2 e^{-2kz} \sqrt{gk^3 [1 + (kr_0)^2 + \dots]}$$

Profil fali o skończonej amplitudzie wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} \xi = & \frac{\pi r_0^2}{\lambda} + r_0 \cos(kx - \omega t) + \left(\frac{\pi r_0^2}{\lambda} + \frac{17}{16} \frac{\pi^2 r_0^3}{\lambda^2} \right) \cos 2(kx - \omega t) + \\ & + \frac{3}{2} \frac{\pi^2 r_0^3}{\lambda^2} \cos 3(kx - \omega t) + \dots \end{aligned}$$

Jeśli r_0 i kr_0 stają się bardzo małe, to profil fali jest taki, jaki wynika z teorii liniowej fali. Teoria nieliniowa wykazuje, że fale grawitacyjne mogą istnieć tylko wtedy, gdy kąt pomiędzy stycznymi do grzbietu fali nie przekracza 120° , a stromość fali h_w/λ jest mniejsza niż 0,142. Po przekroczeniu tych wielkości następuje rozpadanie się grzbietu fali i tworzą się pianiste grzebienie.

Przedstawione skrótkowo wyniki nieliniowej teorii płaskiej fali swobodnej dobrze zgadzają się z obserwacjami rzeczywistego falowania. Martwa fala zbliżona jest do fali Stokesa.

Przypadek 3

Liniowa teoria fal grawitacyjnych z uwzględnieniem lepkości. Równania rządzące są:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t} &= \frac{\vec{e}_z}{kr_0} - \nabla_b p_b + \frac{k^2 \nu}{\omega} \Delta_b \vec{v}_b \\ \nabla_b \cdot \vec{v}_b &= 0 \end{aligned}$$

Warunek kinematyczny zlinearyzowany na swobodnej powierzchni wypełniony jest dla $z=0$. Oczywiście zlinearyzowanym jest także i warunek dynamiczny. Ma być on spełniony również dla $z=0$. Zadanie to dla fal swobodnych możecie znaleźć u Haskinda [18], a dla fal wymuszonych przez wędrujący układ ciśnień u Niekrasowa [18]. Różnica pomiędzy zadaniem fal swobodnych i fal wymuszonych jest taka, że w pierwszym zadaniu zakłada się na swobodnej powierzchni ciśnienie $p = p_a = \text{const}$, a w drugim, że $p = p_a + p_c(x, y, t)$. Zlinearyzowany kinematyczny warunek brzegowy zgodnie z (12.138) jest

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v_z \quad (16.133a)$$

Lecz tu v_z jest różne od $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, bo wskutek istnienia lepkości będziemy mieć ruch wirowy wody. Ponieważ każdy wektor możemy przedstawić w postaci części potencjalnej i części o charakterze wirowym (porównaj wzór dla przyspieszenia konwekcyjnego (3.49), to prędkość wody \vec{v} możemy zapisać:

$$\vec{v} = \text{grad} \varphi + \text{rot} \vec{\psi} \quad (16.133b)$$

gdzie: $\vec{\psi}$ - potencjał wektorowy określony wzorem (12.85) i wzorem (12.88) oraz wzorem (12.89).

Uwzględniając (15.133b) zlinearyzowany warunek kinematyczny na swobodnej powierzchni dla $z=0$ jest

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \quad (16.133c)$$

gdzie: $\vec{\psi} = \vec{e}_1 \psi_x + \vec{e}_2 \psi_y + \vec{e}_3 \psi_z$.

Żeby uzyskać równania rządzące, podstawiamy (16.133b) do zlinearyzowanego równania Naviera i Stokesa oraz równania ciągłości:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla U - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0; \quad U = -gz$$

Ponieważ $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\psi}) = 0$, to uzyskujemy

$$\Delta \varphi = 0 \quad (16.134a)$$

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + \frac{p}{\rho} \right) = \text{rot} \left(\nu \Delta \vec{\psi} - \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} \right)$$

Stąd mamy drugie równanie dla wyznaczenia $\vec{\psi}$

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{\psi} \quad (16.134b)$$

oraz równania dla wyznaczenia pola ciśnień:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} \quad (16.134c)$$

gdzie: $p_0 = \text{const}$ na swobodnej powierzchni.

Do równań (16.134a i b) należy dołączyć warunki brzegowe. Ponieważ głębokość zbiornika wody jest nieograniczona, to dla $z \rightarrow \infty$ φ i $\vec{\psi} \rightarrow 0$.

Pozostaje nam napisanie warunku dynamicznego na swobodnej powierzchni. Jest to warunek (8.6), który dla $z=0$ przy uwzględnieniu punktu 3 rozdziału 7.1 oraz wzorów (6.47); (6.48) przybierze postać:

$$p_{zz} = -p_0 + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} = -p_0 \quad (16.135a)$$

$$p_{zx} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = 0 \quad (16.135b)$$

$$p_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = 0 \quad (16.135c)$$

Łącząc wyrażenia (16.135a) i (16.134c) otrzymujemy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\zeta = -2\nu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (16.135d)$$

Stąd otrzymujemy wzór dla fal na swobodnej powierzchni

$$S = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 2\nu \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (16.136)$$

Warunek (16.135d) oraz (16.133a) można połączyć w jedno wyrażenie w ten sam sposób, jak to zrobiono w rozdziale 15. Różniczkując (16.135d) zatem względem czasu i podstawiając (16.133a) do tak uzyskanego wyrażenia mamy:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g v_z + 2\nu \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z=0 \quad (16.135e)$$

W warunkach (16.135b, c i e) należy jeszcze wyrazić składowe v_x, v_y, v_z przy pomocy potencjału prędkości φ i potencjału wektorowego $\vec{\psi}$, a więc przy pomocy wzoru (16.133b). Zróbcie to! Spróbujcie rozpisać także warunek brzegowy na swobodnej powierzchni dla ciśnienia danego wzorem (15.1).

My dalej ograniczymy się do prostego, płaskiego zadania, w którym przepływ nie zależy od y , a tylko od x, z, t . Żeby to miało miejsce, to

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{e}_1 \Omega_x + \vec{e}_2 \Omega_y + \vec{e}_3 \Omega_z$$

może mieć tylko składową Ω_y różną od zera. Biorąc pod uwagę związek (12.89) widzimy, że

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{e}_2 \Omega_y = -\vec{e}_2 \Delta \psi_y \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{e}_2 \Delta \psi$$

a zatem $\psi_x = \psi_z = 0$, $\psi_y = \psi = \psi(x, z, t)$. Stąd na mocy (16.133b)

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ v_y &= 0 \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (16.137)$$

Zauważyć można, że warunek (16.135c) jest w tym przypadku spełniony automatycznie. Nasze zadanie dla płaskich fal swobodnych na swobodnej powierzchni ma, przy uwzględnieniu (16.137), postać następującą:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \Delta \psi \quad (b)$$

dla $z=0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + 2\nu \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^2 \partial t} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z \partial t} \right) = 0 \quad (c)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (d)$$

a dla $z \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow 0$ i $\psi \rightarrow 0$ (e, f)

Po znalezieniu φ i ψ kształt swobodnej powierzchni wyznaczmy ze wzoru (16.136) lub przez całkowanie wzoru (16.133a); pole ciśnienia - ze wzoru (13.134c), a pole wirowe ze wzoru:

$$\Omega_y = -\Delta \psi = -\frac{1}{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (g)$$

Potencjał prędkości φ i prądu ψ przewiduje się wg [16] w postaci równań:

$$\varphi = R_e [A \exp(-kz + ikx + nt)] \quad (16.138a)$$

$$\psi = R_e [B \exp(-sz + ikx + nt)] \quad (16.138b)$$

spełniających warunki brzegowe (e) i (f) przy $R_e k > 0$ i $R_e s > 0$. Funkcja (16.138a) spełnia równanie Laplace'a (a). Podstawiając (16.138b) do równania (b) mamy związek:

$$s^2 = k^2 + \frac{n}{\nu} \quad (16.138c)$$

Jeśli podstawimy się natomiast (16.138a i b) do warunków na swobodnej powierzchni (c) i (d), to dostaje się układ równań:

$$(n^2 + gk + 2\nu k^2 n) A - (g + 2\nu ns) ik B = 0$$

$$2 i k^2 A + (k^2 + s^2) B = 0$$

który ma rozwiązanie, gdy wyznacznik tego układu

$$(n^2 + gk + 2\nu k^2 n) (k^2 + s^2) - 2 k^3 (g + 2\nu sn) = 0 \quad (16.138d)$$

wprowadzając oznaczenia:

$$\omega^2 = gk; \quad \frac{\nu k^2}{\omega} = \theta; \quad n + 2\nu k^2 = \xi \omega$$

i uwzględniając związek (16.138c) wyrażenie (16.138d) można zapisać:

$$(n + 2\nu k^2)^2 + gk = 4 k^3 \nu^2 s$$

$$(\xi^2 + 1)^2 \omega^4 = 16 k^6 \nu^4 (k^2 + \frac{n}{\nu})$$

$$(\xi^2 + 1)^2 = 16 \theta^3 (\xi - \theta)$$

Widzimy, że z dokładnością do θ^3 - wzór (16.130f) -

$$\xi = \pm 1$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę $\xi = -1$, to uzyskamy fale biegnące w kierunku dodatniej osi Ox ; przy $\xi = +1$ fala biegnie w kierunku ujemnej osi Ox . Bierzemy $\xi = 1$. Stąd

$$n = -i\omega - 2\nu k^2 \quad (16.138e)$$

Ze wzoru (16.138c) możemy ocenić wielkość s :

$$s^2 = k^2 + \frac{n}{\nu} = k^2 - \frac{i\omega}{\nu} - 2k^2 = -k^2 - \frac{i\omega}{\nu} \approx -\frac{i\omega}{\nu}$$

Więc

$$s = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} - i \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} = \beta - i\beta \quad (16.138f)$$

Ponieważ rozpatruje się fale swobodne, to jedną ze stałych: A, B w wyrażeniach (16.138a, b) możemy założyć dowolnie. Biorąc pod uwagę wzór (16.90a) przyjmujemy:

$$A = \frac{i g r_0}{\omega}$$

A wtedy

$$B = -\frac{2 i k^2}{k^2 + s^2} A = 2 k \omega r_0 \frac{1}{k^2 + s^2}$$

ale przy uwzględnieniu (16.138c) i (16.138e)

$$\frac{1}{k^2 + s^2} = \frac{1}{2k^2 + \frac{n}{\nu}} = \frac{-\nu}{i\omega}$$

Więc

$$B = 2 i k r_0 \nu \quad (16.138g)$$

Podstawiając (16.138e, f, g) do wyrażeń (16.138a, b) mamy:

$$\varphi = R_e \left\{ \frac{i g r_0}{\omega} e^{-kz-2\nu k^2 t} e^{i(kx-\omega t)} \right\} \quad (16.139a)$$

$$\psi = R_e \left\{ 2 i k r_0 \nu e^{-\beta z-2\nu k^2 t} e^{i(kx-\beta z-\omega t)} \right\} \quad (16.139b)$$

a na mocy wzorów (g) i (16.139b):

$$\Omega_y = \text{rot}_y \vec{v} = -2 k r_0 \omega e^{-\beta z-2\nu k^2 t} e^{i(kx-\beta z-\omega t)} \quad (16.139c)$$

Przy pomocy wyrażeń (16.138a i b) i wzoru (16.136) możemy znaleźć kształt swobodnej powierzchni. Prosto działania dają:

$$\zeta = r_0 R_e \left\{ \left(1 + \frac{4}{g} k^2 \nu^2 \beta + \frac{4}{g} k^2 \nu^2 \beta i \right) e^{-2\nu k^2 t} e^{i(kz-\omega t)} \right\}$$

Widzimy, że dla fali o długości $\lambda = 0,1$ m z dokładnością do $10^{-5} r_0$, a dla fali $\lambda = 1$ m z dokładnością do $10^{-8} r_0$ i dla fali $\lambda = 1$ m z dokładnością do $10^{-8} r_0$ i dla fali o $\lambda = 100$ m z dokładnością $10^{-12} r_0$ profil fali opisany jest wyrażeniem:

$$\zeta = r_0 e^{-2\nu k^2 t} \cos(kx - \omega t)$$

a więc wzorem (16.129a) uzyskany na innej drodze.

Wzory (16.139b i c) wskazują na to, że ruch wirowy wody w fali grawitacyjnej istnieje tylko w bardzo cienkiej warstwie, tuż przy swobodnej powierzchni wody i że bardzo szybko zanika z głębokością z. I tak przy głębokości $z = \frac{4}{\beta}$ gęstość wirów jest równa tylko 2 procent gęstości wirów dla

$z = 0$. Przykładowo dla fali o $\lambda = 0,1$ m; 1 m; 10 m; 100 m; i temperaturze wody 15°C ruch wirowy zanika odpowiednio przy $z = 0,129 \cdot 10^{-3}$ m; $2,3 \cdot 10^{-3}$ m; $4,06 \cdot 10^{-3}$ m; $7,25 \cdot 10^{-3}$ m.

Stąd widać, że w pierwszym przybliżeniu można w liniowej teorii fal nie uwzględniać lepkości wody i traktować ruch falowy wody jako ruch potencjalny.

Widzimy także, że liniowa teoria fal nie wyjaśnia ilościowo tłumienia fal grawitacyjnych. Czym rzeczywiste tłumienie fal grawitacyjnych może być spowodowane? Pewne wskaźniki w tym zakresie możecie znaleźć na stronach 98-106 monografii Titowa [20]. Mówi się, że rozbieżności rzeczywistości i liniowej teorii tłumienia fal grawitacyjnych spowodowane są turbulencją przepływu w ruchu falowym wody. Przyczyna zatem tkwi w pominięciu wyrazu nieliniowego w równaniu (16.131). Ten problem nie został do tej pory jednak zbadany. Może ktoś z Was i w tym kierunku popracuje?

16.5. UWAGI O FALACH KAPILARNYCH

Dotychczas przy rozpatrywaniu fal powstających na swobodnej powierzchni wody pomijano napięcie powierzchniowe; porównaj rozdział 2.5. Obecnie zbadamy, jaki wpływ ma to napięcie powierzchniowe na falowanie swobodnej powierzchni. Ograniczymy się tu jednak tylko do zadania liniowego, z pominięciem sił lepkości. Będziemy dalej zakładać, że przepływ jest potencjalny, a woda jest nieściśliwa oraz że nad swobodną powierzchnią panuje stałe ciśnienie p_a - ciśnienie atmosferyczne. Nad swobodną powierzchnią znajduje się nieruchome powietrze. Głębokość zbiornika H założymy nieograniczoną. Układ odniesienia w celu matematycznego sformułowania zadania dla fal swobodnych przyjmujemy taki jak na rysunku 16.2.

W celu uwzględnienia napięcia powierzchniowego warunek dynamiczny (15.1) zastępujemy wzorem (2.28). Przy założeniu, że powstające fale mają małą stromość, można zastosować przybliżone wzory dla krzywizny sfalowanej powierzchni wody

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$$

Wtedy dynamiczny warunek brzegowy na swobodnej powierzchni z uwzględnieniem (16.7) można zapisać tak:

$$p - p_a = a \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = a \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g z$$

Stąd:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\xi + \frac{a}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (16.140a)$$

Jeśli uwzględnimy, że:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{dla } z=0 \quad (12.138)$$

to po zróżniczkowaniu względem czasu wyrażenia (16.140a) przybiera ono postać:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{a}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (16.140b)$$

Ponieważ potencjał φ na mocy założenia musi spełniać równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

to warunek brzegowy (16.140b) wypełniany dla $z=0$ można zapisać także w postaci:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{a}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} = 0 \quad (16.140c)$$

Zadanie o swobodnych falach powierzchniowych z uwzględnieniem napięcia powierzchniowego różni się zatem od zadania rozpatrywanego w rozdziale 16.1 tylko innym warunkiem brzegowym. Stąd potencjał, profil fali i pole ciśnień będą dane tymi samymi wyrażeniami, jakie uzyskaliśmy na przykład dla płaskiej fali biegnącej na swobodnej powierzchni. Inny będzie tylko związek dyspersyjny, podający zależność częstości fali od liczby falowej, a stąd innym wyrażeniem będzie opisana prędkość fazowa i grupowa fali.

Znajdziemy te związki przy wzięciu pod uwagę wyrażenia (16.72) dla potencjału φ fali biegnącej na nieograniczonym zbiorniku wody:

$$\varphi = - \frac{g r_0}{\omega} e^{-kz} \sin(kx - \omega t) \quad (16.72)$$

Podstawimy zatem powyższe wyrażenie do warunku brzegowego (16.140c). Mamy związek

$$\omega^2 = gk + \frac{a}{\rho} k^3 \quad (16.141)$$

ważny dla wody głębokiej. Dla wody płytkiej na podstawie natomiast wzoru (16.49) uzyskamy

$$\omega^2 = (gk + \frac{a}{\rho} k^3) \operatorname{tgh}(kH) \quad (16.142)$$

Profil fali będzie dany wzorem (16.50):

$$\zeta = r_0 \cos(kx - \omega t)$$

a prędkość fazowa fali na wodzie głębokiej jest

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi a}{\rho\lambda}} \quad (16.143)$$

Z powyższego wzoru widać, że dla fali bardzo długiej wpływ napięcia powierzchniowego na prędkość fazową można pominąć. Fala jest wtedy spowodowana siłą grawitacyjną. Mamy uzasadnienie nazwy: fale grawitacyjne. Praktycznie ma to miejsce przy falach dłuższych od 0,17 m i prędkościach fazowych

$$c = 1,25 \sqrt{\lambda} > 0,62 \text{ m s}^{-1}$$

Jeśli oznaczymy przez c_0 i ω_0 prędkość i częstość fali czysto grawitacyjnej, a przez c i ω dane z wzorów (16.141) i (16.143), to wpływ napięcia powierzchniowego określi się wyrażeniem

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{c - c_0}{c_0} = \sqrt{1 + \frac{a}{\rho g} k^2} - 1 \quad (16.144)$$

Dla powierzchni rozdziału pomiędzy wodą i powietrzem w temperaturze 18°C współczynnik napięcia powierzchniowego $a = 72,8 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$. Ze wzoru (16.144) łatwo wyliczyć, że dla fali o długości $\lambda = 0,17 \text{ m}$ wpływ napięcia powierzchniowego na częstość lub prędkość jest równy 0,5%; 1-procentowy ten wpływ ma miejsce dla fali o długości 0,12 m; 5% zaś dla fali o długości 0,055 m. Z powyższych danych wynika wniosek praktyczny dotyczący przeprowadzenia badań modelowych statku. Jeśli podczas takich badań modelowych chce się uniknąć wpływu napięcia powierzchniowego na reakcje hydrodynamiczne o charakterze falowym, to prędkość holowania modelu powinna być większa od $1,25 \sqrt{0,12} = 0,43 \text{ m/s}$ a, okres kołysań $T_L > 0,8 \sqrt{\lambda} \approx 0,35 \text{ s}$.

Wzory (16.141 ÷ 16.143) pokazują, że przy bardzo małych długościach fal - dużych liczbach falowych - pierwszy składnik można pominąć, wtedy częstość i prędkość fali powierzchniowej będzie

$$\omega^2 = \frac{a}{\rho} k^3 \quad c = \sqrt{\frac{2\pi a}{\rho \lambda}} \quad (16.145)$$

Fale, dla których są ważne związki (16.145), nazywa się falami kapilarnymi lub zmarszczkami. Widzimy, że im krótsza jest fala kapilarna, tym większa jest jej prędkość fazowa. Sprawdźcie, że prędkość grupowa fali kapilarnej jest

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a}{\rho}} k = \frac{3}{2} c$$

Jeśli nie można pominąć ani napięcia powierzchniowego, ani też siły grawitacyjnej, to fale powierzchniowe wtedy nazywa się falami kapilarno-grawitacyjnymi. Ze wzoru (16.143) można obliczyć ich prędkość minimalną. Jest ona równa

$$c_m^2 = 2 \sqrt{\frac{a g}{\rho}} = \frac{a}{\rho} \frac{2\pi}{\lambda_m} \quad (16.146)$$

gdzie: λ_m - długość fali odpowiadająca minimalnej prędkości fali kapilarno-grawitacyjnej.

$$\lambda_m = 2\pi \sqrt{\frac{a}{\rho g}} \quad (16.147)$$

Spróbujcie wytworzyć fale kapilarne w szklance z wodą lub innym zbiorniku wody, np. na zajęciach laboratoryjnych w basenie do badań modelowych.

16.6. WARUNKI UNIKNIĘCIA FAL SWOBODNYCH

Z rozdziałów 16.1 - 16.3 widać, że rozwiązując równanie Laplace'a z warunkiem kinematycznym na dnie oraz z warunkiem na swobodnej powierzchni, nie zawierającym lepkości Rayleigh'a, uzyskuje się falowanie swobodnej powierzchni w postaci fal swobodnych. W zadaniu tak postawionym nie ma warunków początkowych ani warunku kinematycznego na powierzchni opływającego ciała, rozpatrzonych w rozdziale 12.6, nie ma także warunku w nieskończoności. Dla uzyskania jednoznacznego rozwiązania należy te warunki dołączyć. Wiemy już także, że w przypadku ruchu ciała ze stałą prędkością po linii prostej nad, na, lub pod swobodną powierzchnią - w układzie odniesienia związanym z tym ciałem - przepływ będzie ustalony i warunek początkowy jest zbędny. Lecz tu jeśli się nie dołączy właściwie sformułowanego warunku brzegowego w nieskończoności - daleko od ciała, które spowoduje ruch fali swobodnej powierzchni - to rozwiązanie może zawierać również fale swobodne. Należy te fale wyeliminować z rozwiązania. Można to zrobić tak, jak wskazano w rozdziale 13.1, przez wprowadzenie do warunku brzegowego na swobodnej powierzchni lepkości Rayleigh'a. Ledy warunku w nieskończoności nie ma potrzeby wprowadzać. Fale swobodne zostają w tym postępowaniu wyeliminowane. Również ma to miejsce w przypadku dowolnego ruchu ciała lub osobliwości hydromechanicznych. Postępowanie takie jest jednak możliwe tylko przy analitycznym rozwiązywaniu zadań a także w postępowaniu analityczno-numerycznym, w którym znajduje się ogólne wyrażenie na potencjał, np. przez zastosowanie transformaty Fouriera lub transformaty Fouriera i Laplace'a, a dalej już stosuje się metody numeryczne dla uzyskania wyników konkretnych.

To podejście nie jest jednak stosowane przy całkowicie numerycznych rozwiązaniach zadań o ruchu ciał w pobliżu swobodnej powierzchni. Bardzo często nie jest ono także stosowane przy analitycznym rozwiązywaniu tych zadań. W tych ostatnich przypadkach rozwiązywania zadań należy dołączyć warunek o nieskończoności. Można stosunkowo prosto sformułować ten warunek tylko w dwóch przypadkach. Pierwszy, gdy ciało porusza się ze stałą prędkością po linii prostej w pobliżu swobodnej powierzchni. Obserwacje tu wskazują, że daleko przed ciałem nie ma falowania swobodnej powierzchni, a daleko za tym ciałem fale mają skończoną amplitudę. Drugi przypadek obejmuje drgające lub kołyszące się ciało w pobliżu swobodnej powierzchni o prędkości średniej równej zeru. Wytwarzane przez takie ciało fale na swobodnej powierzchni biegną od ciała a nie odwrotnie. Mówi się, że ciało promieniuje fale, a stąd warunek w nieskończoności nazywa się warunkiem wypromieniowania względnie warunkiem uchodzącej fazy. Istnieją różne matematyczne sformułowania powyższych warunków. I tak dla prostoliniowego ruchu ciała ze stałą prędkością ten warunek ma postać:

A)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \pm \infty}} \nabla \varphi = 0 \quad (16.148)$$

i φ ograniczone przy $x \rightarrow -\infty$

$$B) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\nabla \varphi)^2 = 0 \quad (16.149)$$

i $\nabla \varphi$ ograniczone przy $x \rightarrow -\infty$

$$C) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi = 0 \quad (16.150)$$

$$D) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \varphi = 0 \quad (16.151)$$

Warunek w postaci A) i B) podaje Koczín w zbiorze prac [21], a warunek w postaci C) i D) można spotkać w szeregu artykułach i podręcznikach, między innymi w [6], [15].

Dla przypadku kołyszącego się ciała ze średnią prędkością równą zeru warunek wypromieniowania zapisuje się w postaci

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} - i k_0 \varphi \right) = 0 \quad (16.152)$$

$$\lim_{k_0 R \rightarrow \infty} \sqrt{k_0 R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} - i k_0 \varphi \right) = 0 \quad (16.153)$$

gdzie:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$g k_0 = \omega^2$$

lub k_0 jest pierwiastkiem równania dyspersyjnego

$$g k_0 \operatorname{tgh}(k_0 H) = \omega^2$$

Warunek ten jest ważny dla fazy fali zapisanej tak, jak było przyjęte w rozdziale 16, to jest dla

$$\exp [i (kx - \omega t)]$$

W przypadku fazy zapisanej w postaci

$$\exp [i (\omega t - kx)]$$

w nawiasach wyrażeń: (16.152) i (16.153) należy zmienić znak na plus. Pierwszy zapis stosowany jest przez Koczina w pracy [21] i w pracach większości autorów zachodnich, drugi natomiast stosuje Haskind w [18]. Inną równoważną postać tego warunku wyprowadzono w pracy [22], nadającą się do obliczeń numerycznych potencjału φ , mianowicie

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\frac{1}{2R} + i k_0 \varphi \quad (16.154)$$

Dla przypadku zadania płaskiego, a zatem oscylującego walca o nieskończonej tworzącej, generowane fale na swobodnej powierzchni daleko od tego walca są biegnącymi falami płaskimi w kierunkach $x \rightarrow \pm \infty$. Z wyrażenia (16.154) dostajemy warunek w nieskończoności w postaci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = i k_0 \varphi \quad \text{dla } x > 0 \quad (16.155)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -i k_0 \varphi \quad \text{dla } x < 0$$

Warunek ten zapisuje się także tak:

$$\varphi(x, z, t) \sim R_e A \exp [i (k_0 |x| - \omega t)] \quad (16.156)$$

dla $|x| \rightarrow \infty$

Jeśli zadanie jest bardziej złożone od dwóch wyżej rozpatrzonych przypadków - np.: ruch pulsującego układu ciśnień po swobodnej powierzchni ze stałą prędkością po linii prostej albo dryfujący i jednocześnie kołyszący się nieskończony walec na swobodnej powierzchni - to sformułowanie warunku w nieskończoności staje się trudne. Nie jest z góry wiadomym, jaki warunek należy przyjąć. Można tu pójść dwoma drogami. Pierwsza polega na spostrzeżeniu, że z dużej odległości od ciała nie widać tego ciała, a tylko fale wytworzone przez to ciało. Te wytworzone fale mogą pochodzić zatem od różnych przyczyn, między innymi od różnych osobliwości hydrodynamicznych: źródła liniowego, włókna wirowego, dipolu liniowego. Należy zatem znaleźć potencjał i fale wytworzone daleko od tych osobliwości i dalej ustalić warunki w nieskończoności - daleko przed ciałem i daleko za tym ciałem - dla zadania nas interesującego. Przy wyznaczaniu fal od tych osobliwości pulsujących i jednocześnie poruszających się z prędkością \vec{v}_0 w nieskończoności, inaczej - przy poszukiwaniu asymptotycznych rozwiązań - należy brać warunki brzegowe na swobodnej powierzchni zawierające lepkość Rayleigh'a.

Drugie natomiast podejście polega na tym, że można sformułować zadanie na warunki początkowe. Wtedy daleko od ciała w chwili $t=0$ woda jest spokojna. Po uzyskaniu rozwiązania i przejściu z czasem t do nieskończoności można będzie uzyskać rozwiązanie stacjonarne rozpatrywanego zadania. To drugie podejście wydaje się być bardziej kłopotliwym w zastosowaniach niż podejście pierwsze.

Jak już wspomniano, ustalenie warunków w „nieskończoności” - daleko od ciała - jest konieczne przy numerycznym rozwiązywaniu zadań. Wtedy obszar nieskończony zastępuje się obszarem skończonym, a na brzegu tego obszaru koniecznym jest zadanie warunków brzegowych.

17. REAKCJE HYDROMECHANICZNE

Znamy już ogólne wyrażenia dla reakcji hydromechanicznych \vec{R} i \vec{M} działających na ciała znajdujące się w płynie:

$$\vec{R} = \int_S \vec{p}_n \, dS = \int_S \vec{n} \cdot \mathbf{P} \, dS \quad (5.7)$$

$$\vec{M} = \int_S \vec{r} \times \vec{p}_n \, dS = \int_S \vec{r} \times \vec{n} \cdot \mathbf{P} \, dS \quad (5.8)$$

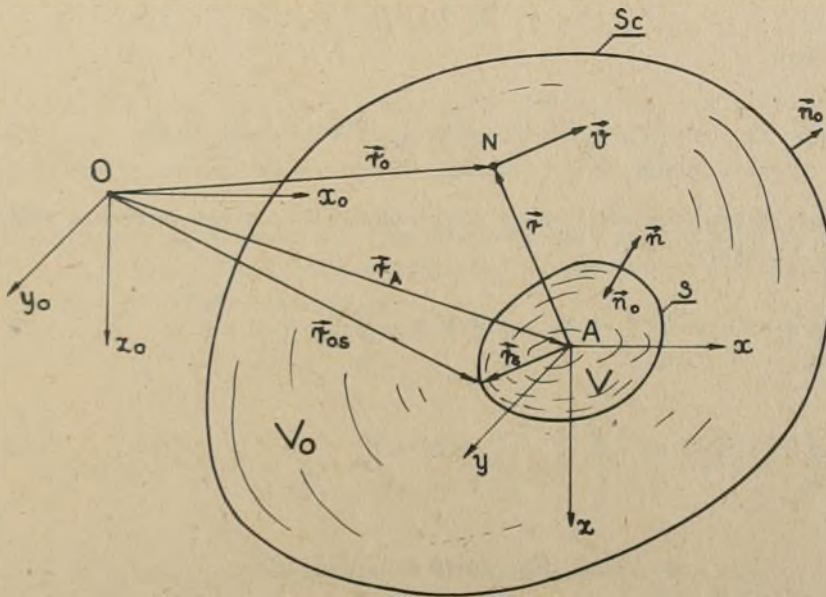
Wzory te są ważne dla każdego płynu. Dla płynu newtonowskiego wektor naprężeń \vec{p}_n jest określony wzorem (7.26) lub (7.27). Dla płynu nielepkiego lub dla płynu znajdującego się w spoczynku zgodnie ze wzorami (7.26) i (7.27) wektor naprężeń $\vec{p}_n = -\vec{n}p$ i ze wzorów ogólnych uzyskujemy wzory (5.7a) i (5.8). Wektor \vec{n} jest zewnętrzną normalną do powierzchni S . Wzory powyższe są ważne tak dla ciała całkowicie zanurzonego, jak i dla ciała zanurzonego w cieczy częściowo. W tym ostatnim przypadku mamy statek nawodny, którego część podwodna znajduje się w wodzie, a część nawodna w powietrzu. Powierzchnia S jest powierzchnią całego statku. Widzimy, że dla znalezienia całkowitego oddziaływania płynu na statek nawodny musimy znać wektor \vec{p}_n w każdym punkcie powierzchni S . W praktyce jednak dla statków nawodnych oddzielnie wyznacza się oddziaływanie wody na część podwodną kadłuba i oddzielnie oddziaływanie powietrza na część nawodną statku. Przy wyznaczaniu tylko oddziaływania wody na kadłub statku nawodnego powierzchnia S jest powierzchnią otwartą. Jednak w tym przypadku wzory (5.7) i (5.8) są nadal ważne. Czasami sztucznie zamyka się powierzchnię ograniczającą podwodną część kadłuba przez dodanie powierzchni rozpiętej na linii przenikania powierzchni wody z powierzchnią kadłuba statku czyli na wodnicy lub na pływnicy statku. Na tej dołączonej powierzchni zakłada się takie same ciśnienie, jakie panuje na swobodnej powierzchni wody S_p .

Wzory (5.7a) i (5.8a) były już stosowane dla wyznaczenia reakcji hydrostatycznych (10.18) i (10.22), do wyznaczenia oddziaływania osobliwości hydrodynamicznych i ściany (13.16), (13.18), do znalezienia siły nośnej działającej na płaską powierzchnię wirową opływającą strugą jednorodną (13.36), do wyprowadzenia wzoru (15.41), uzależniającego reakcje hydrodynamiczne od potencjału przyspieszenia Θ oraz do znalezienia wartości oporu falowego ciał walcowych lub płaskich osobliwości hydrodynamicznych poruszających się pod swobodną powierzchnią wody (16.120).

Te wzory można zastosować także do innych zadań hydromechanicznych. Jednak niekiedy nadanie im specjalnej postaci przez wykorzystanie równań ruchu płynu, całek ogólnych tych równań lub przez bezpośrednie zastosowanie zasady pędu względnie energii pozwala na uzyskanie dodatkowych informacji o oddziaływaniu płynu na ciała i odwrotnie, pozwala na uproszczenie postępowania przy wyznaczaniu tegoż oddziaływania lub na opracowanie metod eksperymentalnego badania i określania całkowitych reakcji hydrodynamicznych lub ich składników wywołanych różnymi przyczynami. Tym zagadnieniom poświęćmy nieco więcej uwagi.

17.1. ZASTOSOWANIE ZASADY PĘDU I MOMENTU PĘDU
DO WYZNACZANIA REAKCJI HYDRODYNAMICZNYCH
DZIAŁAJĄCYCH NA CIAŁO W OŚRODKU NIEOGRANICZONYM

Wyznamy reakcje hydromechaniczne działające na ciało znajdujące się w nieograniczonym ośrodku płynu. Ciało to jest ograniczone nieprzepuszczalną powierzchnią S o zewnętrznej normalnej \vec{n} . Otoczmy rozpatrywane ciało nieruchomą powierzchnią kontrolną S_c o zewnętrznej normalnej \vec{n}_0 . Powierzchnia $S_c + S = \partial V_0$ ogranicza obszar płynny V_0 , a powierzchnia S - objętość ciała V . Powierzchnie ∂V_0 i obszary V i V_0 oraz prędkość płynu \vec{v} mogą być wyrażone w nieruchomym układzie odniesienia $Ox_0y_0z_0$ lub w układzie odniesienia związanym z poruszającym się ciałem. Ciałem tym może być statek podwodny. Zależności pomiędzy układami współrzędnych pokazane są na rysunku 17.1. Obowiązują również tu wyrażenia z rozdziału 12.7.



Rys.17.1

Jeśli oznaczymy przez \vec{Q} pęd płynu, a przez \vec{K} kręt płynu, przy czym:

$$\vec{Q} = \int_{V_0} \rho \vec{v} \, dV \quad (17.1a)$$

$$\vec{K}_0 = \int_{V_0} \vec{r}_0 \times \rho \vec{v} \, dV \quad (17.1b)$$

to zgodnie z zasadą pędu (5.25) i zasadą momentu pędu (5.35) możemy napisać

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \int_{V_0} \rho \vec{F} \, dV + \oint_{\partial V_0} \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} \, dS \quad (17.2a)$$

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \int_{V_0} \vec{r}_0 \times \rho \vec{F} \, dV + \oint_{\partial V_0} \vec{r}_0 \times \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} \, dS \quad (17.2b)$$

Biorąc pod uwagę wzór (4.15) dla przyspieszenia elementu płynu, prędkość zmiany pędu płynu można zapisać następująco

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} &= \int_{V_0} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \, dV = \int_{V_0} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \, dV + \oint_{\partial V_0} \rho \vec{n}_0 \cdot \vec{v} \otimes \vec{v} \, dS = \\ &= \int_{V_0} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \, dV + \oint_{\partial V_0} \rho v_{no} \vec{v} \, dS \end{aligned} \quad (17.3a)$$

przy czym

$$\oint_{\partial V_0} \rho v_{no} \vec{v} \, dV = \oint_{S_c} \rho v_{no} \vec{v} \, dS - \oint_S \rho v_n \vec{v} \, dS \quad (17.3b)$$

Podobnie możemy rozpisać całki powierzchniowe w lewych stronach równań (17.2). I tak:

$$\oint_{\partial V_0} \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} \, dS = \oint_{S_c} \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} \, dS - \oint_S \vec{n} \cdot \mathbf{P} \, dS = \oint_{S_c} \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} \, dS - \vec{R} \quad (17.3c)$$

$$\oint_{\partial V_0} \vec{r}_0 \times \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} \, dS = \oint_{S_c} \vec{r}_0 \times \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} \, dS - \vec{M}_0 \quad (17.3d)$$

gdzie:

$$\vec{R} = \oint_S \vec{n} \cdot \mathbf{P} \, dS = \oint_S \vec{p}_n \, dS \quad (5.7)$$

$$\vec{M}_0 = \oint_S \vec{r}_0 \times \vec{n} \cdot \mathbf{P} dS = \oint_S \vec{r}_0 \times \vec{p}_n dS \quad (5.8)$$

Widzimy, że moment siły hydromecanicznej jest brany względem początku nieruchomego układu odniesienia.

Po podstawieniu zależności (17.3) do równań (17.2) uzyskuje się po uporządkowaniu wyrażenie następujące dla reakcji hydromecanicznych \vec{R} i \vec{M}_0

$$\vec{R} = - \frac{d\vec{Q}}{dt} + \int_{V_0} \rho \vec{F} dV + \oint_{S_c} \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} dS \quad (17.4)$$

$$\begin{aligned} \vec{R} = & - \int_{V_0} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV - \oint_{S_c} \rho v_{no} \vec{v} dS + \oint_S \rho v_n \vec{v} dS + \\ & + \oint_{S_c} \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} dS + \int_{V_0} \rho \vec{F} dV \end{aligned}$$

$$\vec{M}_0 = - \frac{d\vec{K}_0}{dt} + \oint_{S_c} \vec{r}_0 \times \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} dS + \int_{V_0} \vec{r}_0 \times \rho \vec{F} dV$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 = & - \int_{V_0} \vec{r}_0 \times \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV - \oint_{S_c} \vec{r}_0 \times \rho v_{no} \vec{v} dS + \oint_S \vec{r}_0 \times \rho v_n \vec{v} dS + \\ & + \oint_{S_c} \vec{r}_0 \times \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} dS + \int_{V_0} \vec{r}_0 \times \rho \vec{F} dV \end{aligned} \quad (17.5)$$

Wzory (17.4) i (17.5) są ważne tak dla płynu ściśliwego, jak i dla płynu nieściśliwego. Płyn ponadto może być jednorodny lub też może być niejednorodny. Żadnych bowiem założeń co do gęstości płynu dotychczas nie poczyniono.

W praktycznych zastosowaniach wygodniejszym jest posługiwanie się krętem \vec{K} i momentem reakcji hydromecanicznej \vec{M} , wyznaczonych względem początku ruchomego układu odniesienia;

$$\vec{K} = \int_{V_0} \vec{r} \times \rho \vec{v} dV$$

$$\vec{M} = \oint_S \vec{r} \times \vec{n} \cdot \mathbf{P} dS$$

W powyższych wzorach prędkość płynu \vec{v} i tensor naprężeń \mathbf{P} a także powierzchnia S są wyrażone w ruchomym układzie odniesienia.

Z rysunku 17.1 widać, że:

$$\vec{r}_O = \vec{r}_A + \vec{r}$$

Więc

$$\vec{M}_O = \oint_S (\vec{r}_A + \vec{r}) \times \vec{n} \cdot \vec{P} dS = \vec{r}_A \times \vec{R} + \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} (\vec{r}_A + \vec{r}) \times \rho \vec{v} dV = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \times \vec{Q} + \vec{r}_A \times \frac{d\vec{Q}}{dt} + \frac{d\vec{K}}{dt}$$

Zgodnie z (12.162a)

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$$

Podstawiając powyższe zależności do pierwszego równania (17.5) mamy:

$$\begin{aligned} \vec{M} = & - \frac{d\vec{K}}{dt} - \vec{v}_A \times \vec{Q} + \oint_{S_c} \vec{r} \times \vec{n}_O \cdot \vec{P} dS + \int_{V_0} \vec{r} \times \rho \vec{F} dV + \\ & + \vec{r}_A \times \left[\oint_{S_c} \vec{n}_O \cdot \vec{P} dS + \int_{V_0} \rho \vec{F} dV - \frac{d\vec{Q}}{dt} - \vec{R} \right] \end{aligned}$$

Ale na mocy pierwszego wyrażenia (17.4) wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe zeru. Więc moment siły hydromechanicznej względem początku od ruchomego układu odniesienia wyraża się wzorami:

$$\vec{M} = - \frac{d\vec{K}}{dt} - \vec{v}_A \times \vec{Q} + \oint_{S_c} \vec{r} \times \vec{n}_O \cdot \vec{P} dS + \int_{V_0} \vec{r} \times \rho \vec{F} dV \quad (17.5a)$$

gdzie:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}$$

Jeśli weźmie się pod uwagę wzór (12.173), to wyrażenia (17.5a) oraz (17.4) można natychmiast wyrazić w ruchomym układzie odniesienia Axyz. I tak:

$$\begin{aligned} \vec{R} = & - \int_{V_0} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV - \vec{\omega} \times \int_{V_0} \rho \vec{v} dV - \int_{S_c} \rho \vec{v}_w \cdot \vec{n}_O \otimes \vec{v} dS + \\ & + \oint_S \rho \vec{v}_w \cdot \vec{n} \otimes \vec{v} dS + \oint_{S_c} \vec{n}_O \cdot \vec{P} dS + \int_{V_0} \rho \vec{F} dV \end{aligned} \quad (17.4a)$$

$$\begin{aligned}
\vec{M} = & -\vec{v}_A \times \vec{Q} - \int_{V_0} \rho \vec{r} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV - \vec{\omega} \times \int_{V_0} \rho \vec{r} \times \vec{v} dV + \\
& - \oint_{S_c} \rho \vec{r} \times \vec{v}_w \cdot \vec{n}_0 \otimes \vec{v} dS + \oint_S \rho \vec{r} \times \vec{v}_w \cdot \vec{n} \otimes \vec{v} dS + \\
& + \int_{S_c} \vec{r} \times \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} dS + \int_{V_0} \rho \vec{r} \times \vec{F} dV
\end{aligned} \quad (17.5b)$$

We wzorach (17.4a) i (17.5b) wszystkie wielkości są określone w ruchomym układzie odniesienia Axyz. Powierzchnia kontrolna S_c może być nieruchoma względem ruchomego układu odniesienia.

Widzimy, że wyrażenia dla reakcji hydromechanicznych wyrażone w ruchomym układzie odniesienia mają postać bardziej złożoną od tych wyrażenń danych w układzie nieruchomym i że wyrażenia w ruchomych układach odniesienia można natychmiast uzyskać z wyrażenń danych w nieruchomym układzie odniesienia.

W podobny sposób jak wyżej można wyprowadzić wyrażenia dla reakcji \vec{R} i \vec{M} dla przypadku ruchu ciała poruszającego się na swobodnej powierzchni wody lub w jej pobliżu. Wystarczy powierzchnię kontrolną S_c rozbić na powierzchnię swob odną S_F i powierzchnię Σ równą $S_c - S_F$. Zrobimy to później po rozpatrzeniu prostszych przypadków ruchu ciała w ośrodku nieograniczonym lub opływu nieruchomego ciała strugą jednorodną. Wyrażenia ogólne dla \vec{R} i \vec{M} przyjmują wtedy postacie niekiedy bardzo proste. Jako najprostszymi przykład rozpatrzmy dobrze już nam znane reakcje działające na ciało spoczywające w płynie nieruchomym.

17.1.1. Ciało w spoczynku w płynie nieruchomym. Reakcje hydrostatyczne

Jeśli płyn jest nieruchomy, to tensor naprężeń

$$\mathbf{P} = -p \mathbf{I}$$

i wyrażenia (17.4) i (17.5) redukują się:

$$\vec{R} = \int_{V_0} \rho \vec{F} dV - \oint_{S_c} \vec{n}_0 p dS$$

$$\vec{M} = \int_{V_0} \rho \vec{r} \times \vec{F} dV - \oint_{S_c} \vec{r} \times \vec{n}_0 p dS$$

W tym przypadku równaniem rządzącym jest równanie hydrostatyki (10.4):

$$\rho \vec{F} = \nabla p .$$

Mając je na uwadze całkę po obszarze V_0 możemy przekształcić następująco:

$$\int_{V_0} \rho \vec{F} dV = \int_{V_0} \nabla p dV = \oint_{\partial V_0} \vec{n}_0 p dS = \oint_S \vec{n}_0 p dS + \oint_{S_c} \vec{n}_0 p dS$$

Więc reakcja hydrostatyczna

$$\vec{R} = \oint_S \vec{n}_0 p dS = - \oint_S \vec{n} p dS = - \int_V \nabla p dV$$

gdzie p jest ciśnieniem hydrostatycznym.

Podobnie możemy dostać wyrażenie dla momentu reakcji hydrostatycznej

$$\vec{M} = \oint_S \vec{r} \times \vec{n}_0 p dS = - \oint_S \vec{r} \times \nabla p dV$$

Podstawiając do powyższych wzorów wyrażenia dla ciśnienia hydrostatycznego uzyskamy wzory: (10.18), (10.22).

Widzimy, że całka po obszarze V_0 z sił masowych we wzorach (17.4) i (17.5) określa reakcje hydrostatyczne. Potrafimy je już obliczać. W związku z tym w wyrażeniach dla \vec{R} i \vec{M} możemy pominąć siły masowe i ograniczyć się do wyznaczenia tylko części dynamicznej reakcji \vec{R} i \vec{M} . Część hydrostatyczną tych reakcji można będzie zawsze w razie potrzeby uwzględnić. Dla ciał całkowicie zanurzonych zawsze się tak postępuje.

17.1.2. Ustalony opływ ciała nieruchomego

Zadanie rozwiązuje się w układzie nieruchomym odniesienia, który związany jest z opływającym ciałem. Zakładamy, że opływ odbywa się bez oderwania. Wtedy na powierzchni ciała prędkość $\vec{v}=0$ a także $v_n=0$. Jeśli pominiemy siły masowe, to wzór (17.4) przyjmie postać:

$$\vec{R} = - \oint_{S_c} \rho v_{no} \vec{v} dS + \oint_{S_c} \vec{n}_0 \cdot \mathbf{P} dS \quad (17.6)$$

Widzimy, że dla znalezienia reakcji hydrodynamicznej działającej na opływane ciało wystarczy znajomość prędkości i tensora naprężeń na powierzchni kontrolnej S_c . Powierzchnia kontrolna S_c może być dowolnie poprowadzona w płynie. Najlepiej bardzo daleko od opływającego ciała.

Przy założeniu, że płyn jest newtonowski, drugą całkę we wzorze (17.6) możemy rozpisać przez podstawienie wyrażenia (7.26). W wyniku otrzymujemy:

$$\vec{R} = - \oint_{S_c} \rho v_{no} \vec{v} dS - \oint_{S_c} \vec{n}_0 p dS + \mu \oint_{S_c} \vec{n}_0 \cdot \nabla \otimes \vec{v} dS \quad (17.7)$$

W stosowanej mechanice płynów ostatni wyraz powyższego wzoru jest pomijany. Wynika to z założenia, że gradient prędkości na powierzchni kontrolnej S_c jest wielkością małą, a współczynnik lepkości jest rzędu $10^{-3} [\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}]$. Przy takim założeniu wzór (17.7) staje się wyrażeniem:

$$\vec{R} = - \oint_{S_c} \rho v_{no} \vec{v} dS - \oint_{S_0} \vec{n}_0 p dS \quad (17.7a)$$

ważnym tak dla płynu lepkiego, jak i dla płynu nielepkiego. Oznaczając przez \vec{r}_s promień wodzący elementu powierzchni kontrolnej S_c , przy założeniach jak wyżej, możemy napisać na podstawie wzoru (17.5) wyrażenie dla głównego momentu siły hydrodynamicznej

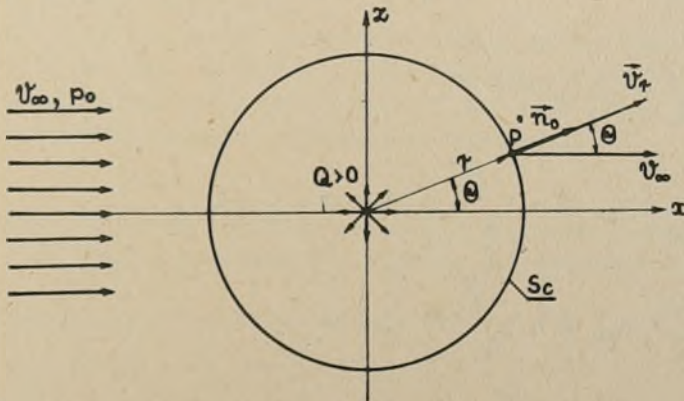
$$\vec{M} = - \oint_{S_c} \vec{r}_s \times \rho v_{no} \vec{v} dS - \oint_{S_c} \vec{r}_s \times \vec{n}_0 p dS \quad (17.7b)$$

Wzory (17.a i b) łącznie z równaniami Bernoulliego (13.7) i równaniem ciągłości pozwalają na rozwiązywanie praktycznych zadań inżynierskich. Pewne modyfikacje wzoru (17.7a) znalazły zastosowanie do eksperymentalnego wyznaczania oporu lepkości ciał wydłużonych. Mogą one służyć także do wyznaczania reakcji hydrodynamicznych działających na osobliwości hydromechaniczne.

Przykład 17.1

Przy pomocy wzoru (17.7a) obliczymy reakcję hydrodynamiczną działającą na płaskie źródło o wydatku Q znajdujące się w jednorodnej strudze o prędkości v_∞ . Jako powierzchnię kontrolną obieramy walec kołowy o tworzącej równoległej do osi źródła, jak na rysunku 17.2. Prędkość indukowana przez źródło - wzór (12.66b) - jest

$$\vec{v} = \vec{e}_r \frac{Q}{2\pi r} = \vec{e}_r v_r$$



Rys.17.2

Reakcja strugi jednorodnej na źródło:

$$\vec{R} = \vec{e}_x R_x + \vec{e}_z R_z$$

Ze wzoru (17.7a) mamy:

$$R_x = - \int_{S_c} \rho v_{no} v_x dS - \int_{S_c} p n_{ox} dS$$

$$R_z = - \int_{S_c} \rho v_{no} v_z dS - \int_{S_c} p n_{oz} dS$$

Z rysunku (17.2) widać, że:

$$\begin{aligned} v_{no} &= v_r + v_\infty \cos \theta & dS &= r \cdot r d\theta \\ v_x &= v_\infty + v_r \cos \theta & n_{ox} &= \cos(\vec{n}_0, x) = \cos \theta \\ v_z &= v_r \sin \theta & n_{oz} &= \sin \theta \end{aligned}$$

$\theta \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Z równania Bernoulliego przy pominięciu sił masowych mamy

$$p_0 + \frac{\rho v_\infty^2}{2} = p + \frac{\rho v^2}{2}$$

gdzie:

$$v^2 = v_x^2 + v_z^2 = (v_\infty + v_r \cos \theta)^2 + v_r^2 \sin^2 \theta$$

Mamy zatem wszystkie wielkości wchodzące do wyrażeń dla R_x i R_z . Proste działania dają:

$$- \int_{S_c} \rho v_{no} v_x dS = - \rho \int_0^{2\pi} v_{no} v_x r d\theta = - \rho Q v_\infty - \frac{1}{2} \rho Q v_\infty$$

$$- \int_{S_c} \rho v_{no} v_z dS = 0$$

$$- \int_{S_c} p n_{ox} dS = - \int_0^{2\pi} p r \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \rho Q v_\infty$$

$$- \int_{S_c} p n_{oz} dS = - \int_0^{2\pi} p r \sin \theta d\theta = 0$$

Stąd reakcja strugi jednorodnej działająca na źródło płaskie jest

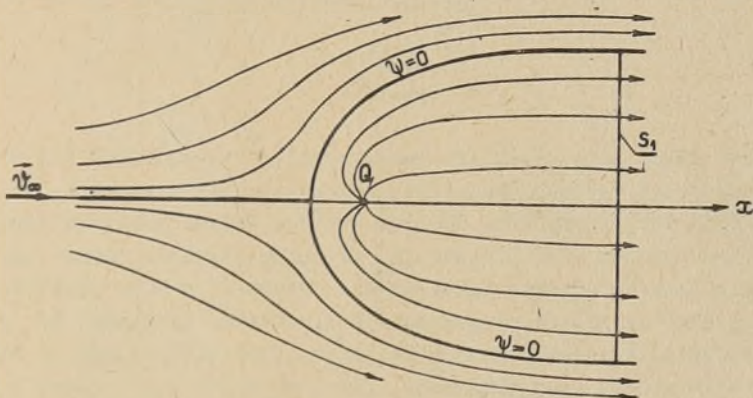
$$\vec{R} = - \vec{e}_x \rho Q v_\infty Q$$

Ponieważ $\vec{v}_\infty = \vec{e}_x v_\infty$, to

$$\vec{R} = -\rho Q \vec{v}_\infty \quad (17.8)$$

Sprawdźcie w podobny sposób, że wzór (17.8) jest także ważny dla opływu źródła przestrzennego. Jeśli zamiast źródła mamy upust o wydatku $-Q$, to reakcja \vec{R} będzie zgodna z wektorem prędkości strugi jednorodnej; będzie przedstawiać siłę oporu. Przy opływie źródła dodatniego reakcja \vec{R} jest siłą napędzającą.

Jak wiemy, przy opływie źródła dodatniego strugą jednorodną uzyskujemy opływ pół-ciała jak na rysunku 17.3.



Rys.17.3

Zauważcie, że wydatek źródła

$$Q = \int_{S_1} v_{no} dS$$

gdzie powierzchnię S_1 pokazano także na rysunku 17.3. Zadanie powyższe przedstawia ideę pędnika reakcyjnego.

Ten sam wynik (17.8) powinniśmy uzyskać dla źródła poruszającego się ze stałą prędkością v_0 po linii prostej w ośrodku nieograniczonym. Uzasadnijcie to wykonując obliczenia przy pomocy wzoru (17.4a) oraz przez zastosowanie metody odwracania przepływu, omówionej w rozdziale 12.4.

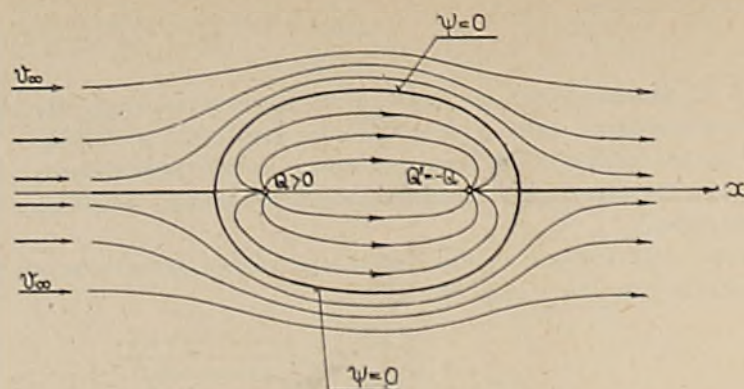
Przykład 17.2

Niech w strudze jednorodnej znajduje się źródło o wydatku Q oraz upust o wydatku $Q^* = -Q$. Znaleźć oddziaływanie płynu na tak utworzony układ hydrodynamiczny.

Ze wzoru (17.8) wynika, że reakcja

$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = -\vec{v}_\infty \rho (Q + Q^*) = 0$$

Przez dodanie funkcji prądu dla źródła i upustu oraz funkcji prądu strugi jednorodnej uzyskujemy opływ owalu Rankine'a dla przypadku płaskiego i owoidu Rankine'a dla przypadku przestrzennego, jak na rysunku 17.4. Zatem



Rys.17.4

wniosek jest taki, że na owal lub owoid Rankine'a znajdujący się w strudze jednorodnej cieczy nieściśliwej, przy pominięciu sił ciężkości, nie działa żadna reakcja hydrodynamiczna. Również $\vec{R}=0$ dla opływu półciała utworzonego przez $\psi=0$ na rysunku 17.3. Zauważcie, że opływ półciała można uzyskać z opływu owalu Rankine'a przez umieszczenie źródła $Q' = -Q$ w nieskończoności. Jest to przykład na tak zwany paradoks d'Alemberta. Zauważmy, że w przykładzie tym przepływ jest potencjalny, ciecz jest nieściśliwa i nielepka, a ośrodek płynny jest nieograniczony. Założono także $v_\infty = \text{const}$ i że wydatek Q i Q' są stałe. Wykażemy dalej, że przy takich założeniach oddziaływanie płynu na ciała będzie zawsze równe zero. Szczególny przypadek powyższego zadania to opływ dipola strugą jednorodną. Mamy tu opływ walca dla przypadku płaskiego i opływ kuli dla przypadku przestrzennego. Reakcja hydrodynamiczna i tu będzie równa zero. Ten wynik uzyskuje się także z wzorów (5.7a) i (5.7b) przy wykorzystaniu całki Eulera (13.3) i potencjału prędkości (12.122a). Jeśli na powierzchni kuli znajdującej się w strudze jednorodnej usytuuje się jednak źródło dodatnie o wydatku Q , to reakcja hydrodynamiczna będzie różna od zera. Wystąpi bowiem oddziaływanie źródła, ściany i strugi. Oddziaływanie to można wyznaczyć z ogólnego wzoru dla \vec{R} i \vec{M} lub lepiej ze wzoru Lagally'ego [17]. Niżej rozpatrzmy jeszcze jeden ważny praktycznie przykład.

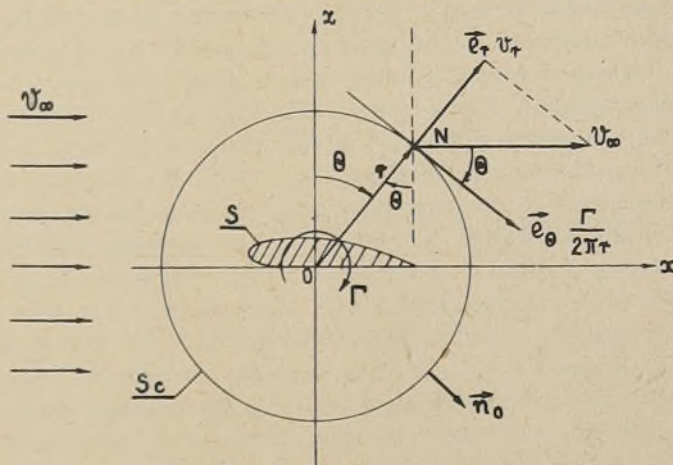
Przykład 17.3

Wyznaczyć reakcję hydrodynamiczną działającą na płat nośny o wydłużeniu nieskończonym, znajdujący się w ośrodku nieograniczonym. Płat jest opływany strugą jednorodną cieczy nieściśliwej. Sumaryczne natężenie wirów w warstwie przyściennej możemy zastąpić jednym wirem skupionym - związanym, o natężeniu równym cyrkulacji prędkości Γ . Ograniczymy się tu jedynie do wyznaczenia reakcji hydrodynamicznej od wiru związanego przypadającej na jednostkę rozpiętości płata. Reakcje wyznaczymy na podstawie wzoru (17.7a). Tak samo jak w przykładzie 17.1, jako powierzchnię kontrolną S_c weźmiemy walec kołowy o promieniu r . Rysunek 17.5 pokazuje profil płata, kierownicę walca S_c oraz prędkości na powierzchni S_c . Promień r walca S_c wybrano do-

wolnie. Jeśli jest dostatecznie duży, to z powierzchni S_c płata S nie widać. Nie widzimy jego kształtu. Mamy tylko rozkład prędkości i ciśnień na tej powierzchni kontrolnej. One wyznaczają reakcję \vec{R} i moment \vec{M} . To spostrzeżenie jest często wykorzystywane w hydromechanice w zadaniach dotyczących oddziaływania przepływu cieczy na ciało o złożonej geometrii.

Z rysunku 17.5 widać, że w dowolnym punkcie N okręgu S_c składowe prędkości są:

$$\begin{aligned} v_x &= v_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta & n_{ox} &= \sin \theta \\ v_z &= -\frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta & n_{oz} &= \cos \theta \\ v_{no} &= v_r = v_\infty \sin \theta \\ v_s &= \frac{\Gamma}{2\pi r} + v_\infty \cos \theta \\ v^2 &= v_x^2 + v_z^2 = v_{no}^2 + v_s^2 = v_\infty^2 + \left(\frac{\Gamma}{2\pi r}\right)^2 + 2 v_\infty \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta \end{aligned}$$



Rys.17.5

Ciśnienie p w punkcie N okręgu S_c wyznacza się równania

$$\frac{p_o}{\rho} + \frac{v_\infty^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}$$

Uwzględniając powyższe zależności mamy

$$R_x = -\rho \int_0^{2\pi} r v_{no} v_x d\theta + \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} v^2 n_{ox} r d\theta = 0 + 0 = 0$$

$$R_z = -\rho \int_{S_c} v_{no} v_z dS - \int_{S_c} p n_{oz} dS = \frac{1}{2} \rho v_\infty \Gamma + \frac{1}{2} \rho v_\infty \Gamma$$

Stąd

$$\vec{R} = \vec{e}_z \varrho v_\infty \Gamma \quad (13.36)$$

Uzyskaliśmy - tak jak należało oczekiwać - wzór Żukowskiego dla siły nośnej płata.

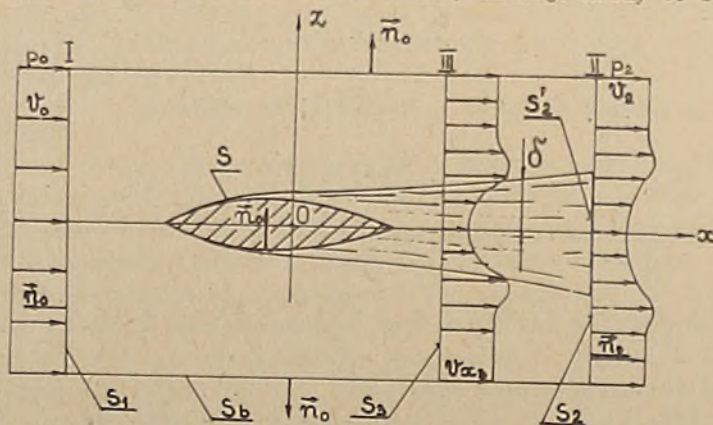
Przykłady powyższe wskazują na to, że wzór (17.7a) można zapisać także w postaci:

$$\vec{R} = \varrho \oint_{S_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_o - v_{no} \vec{v} \right) dS \quad (17.9)$$

Uwzględniono wyżej całkę Eulera, ważną dla przepływu potencjalnego cieczy nieściśliwej.

17.2. WYZNACZENIE OPORU LEPKOŚCI CIAŁ WYDŁUŻONYCH

Niech wydłużone ciało: płat nośny, statek, znajduje się w jednorodnym strumieniu płynu nieściśliwego w ośrodku nieograniczonym. Daleko przed tym ciałem prędkość strumienia jednorodnego niech będzie v_o , a ciśnienie równe p_o . Zgodnie z metodą odwracania przepływu przypadek ten jest dynamicznie równoważny jednostajnemu ruchowi tego ciała wzdłuż linii prostej. W celu wyznaczenia reakcji hydrodynamicznej działającej na to ciało weźmiemy jako powierzchnię kontrolną S prostopadłościan o powierzchniach S_1 , S_2 i S_b , pokazanych na rysunku 17.6. Powierzchnie S_1 i S_2 znajdują się według założenia daleko od ciała S . Wzdłuż powierzchni ciała S tworzy się wskutek lepkości warstwa przyścienna, a za tym ciałem hydrodynamiczny ślad o małej grubości $\delta(x)$. Poza warstwą przyścienną i śladem przepływ jest bezwymiarowy. Na powierzchni S_2 niech prędkość płynu będzie \vec{v}_2 . Skierujemy najpierw naszą uwagę na składową $R_x = R_v$ będącą oporem spowodowanym lepkością. Zakładamy, że płat jest nieskończenie długi - w kierunku osi Oy - lub że skończonej rozpiętości płat nie wytwarza siły nośnej. Kiedy to będzie mieć miejsce?



Rys.17.6

Opór lepkości R_v , zwany także oporem profilowym, będzie składać się z oporu tarcia i oporu ciśnienia spowodowanego lepkością płynu.

Na ścianie S_1 : $v_{no} = -v_0$ $v_x = v_0$ $p = p_0$

Na ścianie S_2 : $v_{no} = v_{2x} = v_2$ $v_{x2} = v_2$ $p = p_2$

Na ścianie bocznej S_b : $\vec{v} = \vec{v}_0$ $n_x = 0$

Więc na mocy wzoru (17.7a) mamy:

$$R_x = R_v = \rho \int_{S_1=S_2} (v_0^2 - v_2^2) dS + \int_{S_1=S_2} (p_0 - p_2) dS$$

Ale

$$v_0^2 - v_2^2 = (v_0 - v_2)(v_0 + v_2) = v_0(v_0 - v_2) + v_2(v_0 - v_2)$$

Z zasady zachowania masy mamy:

$$-\rho \int_{S_1} v_0 dS + \rho \int_{S_2} v_2 dS = 0 = \rho \int_{S=S_2} (v_0 - v_2) dS$$

Zatem:

$$R_v = \rho \int_{S_2} v_2(v_0 - v_2) dS + \int_{S_2} (p_2 - p_0) dS$$

Płaszczyznę S_2 można tak dobrać, aby ciśnienie $p_2 = p_0$. Wtedy opór lepkości będzie wyrażać się wzorem:

$$R_v = \rho \int_{S_2} v_2(v_0 - v_2) dS \quad (17.10)$$

Współczynnik oporu lepkości jest:

$$C_v = \frac{R_v}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 S_0} = \frac{2}{S_0} \int_{S_2} \frac{v_2}{v_0} \left(1 - \frac{v_2}{v_0}\right) dS \quad (17.10a)$$

gdzie S_0 jest powierzchnią odniesienia dla ciała.

Do zastosowania wzoru (17.10a) należy znać pole prędkości v_2 i odległość od ciała, gdzie ciśnienie $p_2 = p_0$. Można zatem zastosować wzór (17.10a) ale wtedy, gdy będziemy mieć obliczoną warstwę przyścienną i ślad. Po pewnych modyfikacjach i założeniach upraszczających można opór R_v obliczyć na podstawie wzoru (17.10) przez pomiar ciśnienia statycznego p i całkowitego H w odległości mniejszej od ciała, niż to wynika z warunku $p_0 = p_2$. Przedstawimy niżej służącą do tego celu metodę Jones'a [17; 23].

W metodzie Jonesa wprowadza się dodatkową powierzchnię S_3 leżącą bardzo blisko krawędzi spływu ciała, rzędu 5-10% cięciwy płata. Wszystkie pomiary wykonuje się w płaszczyźnie S_3 . Zakłada się, że pomiędzy płaszczyznami S_3 i

S_2 nie mają miejsca straty energii, inaczej - w przepływie nie występuje dyssypacja energii. W związku z tym ważna jest tu całka Bernoulliego:

$$p_3 + \frac{\rho v_{x3}^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_{x2}^2}{2} = H$$

ale $p_2 = p_0$; $v_{x2} = v_2$ i niech $v_{x3} = v_3$; $p_3 = p$

Włęc

$$p + \frac{\rho v_3^2}{2} = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

W płaszczyźnie S_1 całkowite ciśnienie jest

$$H_0 = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}$$

W związku z tym mamy:

$$v_0^2 = \frac{2}{\rho} (H_0 - p_0); \quad v_2^2 = \frac{2}{\rho} (H - p_0); \quad v_3^2 = \frac{2}{\rho} (H - p) \quad (17.11a)$$

Na podstawie równania ciągłości możemy napisać, że

$$v_2 dS_2 = v_3 dS_3 = v_3 dS \quad (17.11b)$$

Podstawiamy powyższy związek do wzorów (17.10) i (17.10a). Wtedy:

$$R_v = \rho \int_{S_3} v_3 (v_0 - v_2) dS \quad (17.11c)$$

$$C_v = \frac{2}{S_0} \int_{S_3} \frac{v_3}{v_0} \left(1 - \frac{v_2}{v_0}\right) dS \quad (17.11d)$$

Przy wykorzystaniu zależności (17.11a) powyższe wzory przyjmują postać stosowaną w praktyce badawczej:

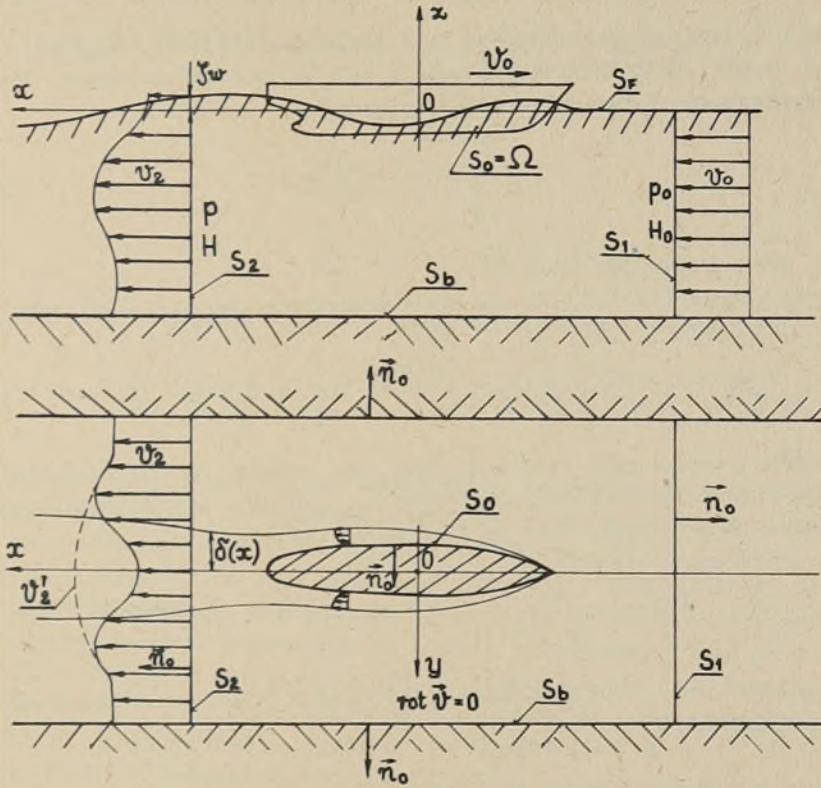
$$R_v = 2 \int_{S_3} \sqrt{H-p} \left(\sqrt{H_0-p_0} - \sqrt{H-p_0} \right) dS \quad (17.12a)$$

$$C_v = \frac{2}{S_0} \int_{S_3} \sqrt{\frac{H-p}{H_0-p_0}} \left(1 - \sqrt{\frac{H-p_0}{H_0-p_0}} \right) dS \quad (17.12b)$$

Zwróćmy uwagę na to, że poza śladem przepływ jest potencjalny; tam $H=H_0$. Włęc funkcja podcałkowa we wzorach (17.12a i b) jest równa zeru poza śladem hydrodynamicznym i całkowanie w tych wzorach może odbywać się tylko po przekroju śladu tuż za badanym ciałem. Wzory (17.12) są oczywiście wzorami przybliżonymi ze względu na założenie braku dyssypacji energii w śladzie oraz ze względu na pominięcie składnika:

$$\mu \int_{S_2} \frac{\partial v_x}{\partial x} dS$$

wynikającego ze wzoru (17.7). Metoda Jones'a ze względu na możliwość przeprowadzenia pomiarów blisko za krawędzią spływu jest szeroko stosowana przy badaniach eksperymentalnych w tunelach aerodynamicznych. Czaem wprowadza się do niej pewne poprawki [23].



Rys.17.7

W hydromechanice okrętu do wyznaczania oporu lepkości statku jest stosowana metoda Betza-Tulina [24]. Oparta jest ona na wzorze [17.7a]. Niech statek nawodny porusza się ze stałą prędkością v_0 w osi prostopadłościennego kanału. Statek generuje fale S_w na swobodnej powierzchni. Opór statku $R_x = R_T$ będzie sumą oporu falowego R_w i oporu lepkości R_v . Chcemy wyznaczyć na drodze eksperymentalnej opór lepkości statku. W tym celu, podobnie jak w metodzie Jonesa, odwracamy przepływ (to nie jest konieczne) i obieramy powierzchnię kontrolną $S_1 + S_2 + S_b + S_f + S_0$, jak rysunku 17.7. Zakładamy, że poza śladem i warstwą przyścienną przepływ jest potencjalny. Tak samo jak poprzednio oznaczymy przez

$$H_0 = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \quad H = p + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (17.13a)$$

W metodzie Betza wprowadza się dodatkowo umowny przepływ potencjalny, taki że poza śladem w przekroju S_2 pokrywa się on z przepływem rzeczywistym

(v_2, p) . Przepływ ten jest scharakteryzowany przez ciśnienie $p'=p$ i prędkość v_2' ; pozostałe składowe prędkości tego umownego przepływu się pomija. Stąd mamy relację

$$H_0 = p + \frac{\rho v_2'^2}{2} \quad (17.13b)$$

Ponieważ w przepływie rzeczywistym jest spełnione równanie ciągłości, a $v_2' > v_2$, to dla spełnienia tego równania należy umieścić wewnątrz śladu hydrodynamicznego statku układ źródeł o wydatku

$$Q = \int_{S_2'} (v_2' - v_2) dS \quad (17.13c)$$

gdzie S_2' jest przekrojem śladu są S_2 .

Zgodnie ze wzorem (17.7a) opór statku w przepływie rzeczywistym jest

$$R_x = R_T = R_V + R_W = \int_{S_1} (p_0 + \rho v_0^2) dS - \int_{S_2} (p + \rho v_2^2) dS \quad (17.13d)$$

W przepływie umownym opór statku R_1 jest sumą reakcji hydrodynamicznej działającej na źródło Q i oporu falowego R_{w1} . Reakcja źródła jest naporem określonym wzorem (17.8). Wiąc na mocy wzoru (17.7a)

$$R_1 = R_{w1} - \rho Q v_0 = \int_{S_1} (p_0 + \rho v_0^2) dS - \int_{S_2} (p + \rho v_2^2) dS \quad (17.13e)$$

Przy założeniu, że $R_W = R_{w1}$ ze wzorów (17.13d) i (17.13e i c) mamy wzór dla oporu lepkości R_V

$$R_V = \rho \int_{S_2'} \left[(v_2'^2 - v_2^2) - v_0 (v_2' - v_2) \right] dS \quad (17.13f)$$

Współczynnik oporu lepkości statku C_V będzie

$$C_V = \frac{R_V}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 S_0} = \frac{2}{S_0} \int_{S_2'} \left\{ \left[\left(\frac{v_2'}{v_0} \right)^2 - \left(\frac{v_2}{v_0} \right)^2 \right] - \left[\left(\frac{v_2'}{v_0} \right) - \left(\frac{v_2}{v_0} \right) \right] \right\} dS \quad (17.13g)$$

Poza śladem prędkości $v_2' = v_2$ i wyrażenia podcałkowe we wzorach (17.13f i g) są równe zero. Całkowanie może odbywać się po S_2' lub S_2 . Wzór dla C_V daje się prosto wyrazić za pomocą współczynnika ciśnienia:

$$\bar{\Delta p} = \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} \quad (14.25)$$

i współczynnika ciśnienia całkowitego

$$\bar{\Delta H} = \frac{H - H_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} \quad (17.14)$$

Istotnie, na mocy (17.13a i b) mamy:

$$\overline{\Delta p} = 1 - \left(\frac{v_2'}{v_0}\right)^2 \leq 0$$

$$H_0 - H = \frac{Q}{2} v_2'^2 - \frac{Q}{2} v_2^2 \quad \text{i} \quad \overline{\Delta H} = \left(\frac{v_2'}{v_0}\right)^2 - \left(\frac{v_2}{v_0}\right)^2 \geq 0$$

Więc

$$\frac{v_2'}{v_0} = \sqrt{1 - \overline{\Delta p}}$$

$$\frac{v_2}{v_0} = \sqrt{1 - \overline{\Delta p} - \overline{\Delta H}}$$

Po uwzględnieniu powyższych związków współczynnik oporu lepkości będzie

$$C_v = C_F + C_{pv} = \frac{2}{S_0} \int_{S_2} (\overline{\Delta H} - \sqrt{1 - \overline{\Delta p}} + \sqrt{(1 - \overline{\Delta p} - \overline{\Delta H})}) dS \quad (17.15)$$

Wzór (17.15) jest stosowany w laboratoriach hydromechaniki okrętowej do wyznaczania oporu lepkości statków. O pomiarze oporu falowego statku, także przy zastosowaniu zasady pędu, będziemy mówić poniżej. Tu wskażemy na to, że jeżeli pomierzy się opór falowy, C_w^p , statku i doda do niego współczynnik oporu lepkości C_v według wzoru (17.15), to przeważnie nie uzyskuje się współczynnika oporu całkowitego C_T statku, określonego przez pomiar oporu R_T dynamometrem. I tak powinno być, bo podejście przy uzyskaniu wzoru (17.15) dla C_v jest podejściem przybliżonym. Pominięto, oprócz wyrazu proporcjonalnego do współczynnika lepkości, oddziaływanie źródeł Q na powierzchnię kadłuba. Reakcja strumienia na źródło w obecności ściany S_0 jest inna. (Porównaj metodę Lagally'ego). Dalej wzór dla R_{w1} wynikający ze wzoru (17.13e) nie jest poprawny. Zobaczymy dalej, że pominięto w nim całkę po swobodnej powierzchni S_p . Zatem - w przekonaniu Autora - wzór (17.15) może dawać lepszą zgodność wyników pomiarów z rzeczywistością w przypadku bardzo małych prędkości statków, gdy opór falowy jest wielkością bardzo małą. Ciekawym jest to, że przy oznaczeniach: (13.25), (17.14) oryginalny wzór Betz'a dla oporu lepkości ciał wydłużonych - profil - w ośrodku nieograniczonym, [23], jest identyczny ze wzorem (17.15). Wniosek jest taki, że należy opracować doskonalszą metodę wyznaczania oporu lepkości statku. Jeszcze jedna uwaga dotycząca wzorów (17.15) i (17.12b). Wzory powyższe są ważne dla przepływów laminarnych. W przepływach burzliwych w śladzie prędkości zależą od czasu. A przy statkach, a także przy badaniach ich modeli, mamy zawsze przepływ burzliwy w warstwie przyściennej i w śladzie. Widzimy tu wyraźnie pewne braki w praktycznych metodach hydromechaniki.

17.3. WZÓR ŻUKOWSKIEGO DLA SIŁY NOŚNEJ PŁATA.
OPÓR INDUKOWANY

Zastosujemy wzór (17.10) do wyprowadzenia wzoru Żukowskiego dla siły nośnej płata nośnego poruszającego się ze stałą prędkością v_0 . Rozpatrujemy przepływ odwrócony jak na rysunku 17.6, przy czym bierzemy pod uwagę powierzchnię śladu S'_2 . Rozpiętość płata - w kierunku osi Oy niech będzie l . Oznaczmy prędkość w śladzie przez

$$v_2 = v_0 + v'_2 \quad v'_2 < 0 \quad |v'_2| \ll v_0$$

Wzór (17.10) przy uwzględnieniu powyższego jest

$$R_x = \rho \int_{S'_2} (-v'_2) (v_0 + v'_2) dS = -\rho v_0 \int_{S'_2} \left(v'_2 + \frac{v'^2_2}{v_0} \right) dS$$

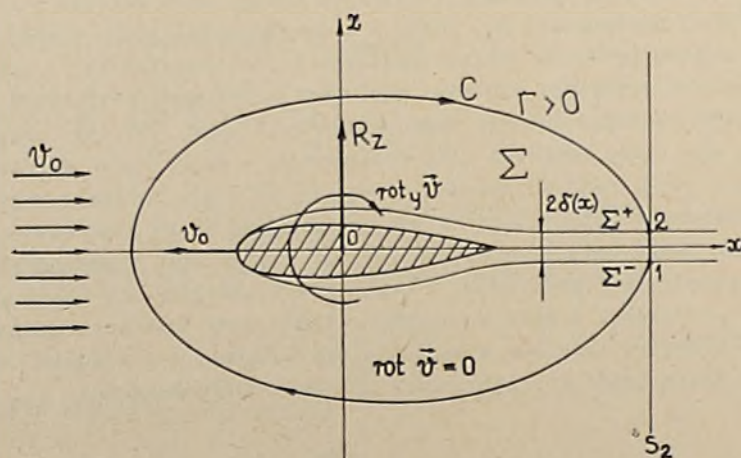
Stąd

$$R_x \approx -\rho v_0 \int_{S'_2} v'_2 dS$$

Wprowadzając oznaczenie $v'_2 = v'_x$ i podobnie v'_y i v'_z dla pozostałych składowych prędkości w śladzie dostaniemy zlinearyzowane wyrażenia dla składowych reakcji hydromechanicznych

$$R_x \approx -\rho v_0 \int_{S'_2} v'_x dz dy \quad (17.16a)$$

$$R_y \approx -\rho v_0 \int_{S'_2} v'_y dz dy \quad (17.6b)$$



Rys. 17.8

$$R_z \approx -\rho v_0 \int_{S_2} v_z' dz dy \quad (17.16c)$$

Rozpatrzmy dalej tylko wzór ostatni (17.16c). Otóż wiemy już, że poza śladem hydromechanicznym i warstwą przysścienną przepływ płynu jest bezwiro-
rowy. Niech φ będzie potencjałem tegoż przepływu. Otoczmy płat nośny pę-
tlą C leżącą w płaszczyźnie Oxz i przebijającą ślad w przekroju S_2 (rys.
17.8). Na śladzie spełniony jest warunek (14.27) i (14.28).

Według założenia ślad jest bardzo cienki. Ze wzoru (17.16c) mamy:

$$\begin{aligned} R_z &= -\rho v_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy \int_{z_1}^{z_2} v_z' dz = \rho v_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy \int_{z_2}^{z_1} v_z' dz = \\ &= \rho v_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy \int_{z_2}^{z_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \rho v_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dy \int_C d\varphi = \\ &= \rho v_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} [\varphi(y, z_2) - \varphi(y, z_1)] dy = \rho v_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (\varphi_2 - \varphi_1) dy \end{aligned}$$

Na powierzchni śladu występuje skok potencjału φ . Zgodnie ze wzorem
(12.101) jest on równy cyrkulacji prędkości Γ po pętli C i równy natężeniu
wiru związanego

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_{\Sigma} \text{rot}_y \vec{v} d\Sigma = \varphi_2 - \varphi_1$$

Kierunek dodatni $\text{rot}_y \vec{v}$ i kierunek obchodzenia pętli C pokazano na rysunku
17.8. Widzimy, że skok potencjału na śladzie jest funkcją y . Więc ostatecz-
nie:

$$L = R_z = \rho v_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(y) dy \quad (13.36a)$$

Uzyskaliśmy znany nam wzór Żukowskiego dla siły nośnej płata. Przy jakich
założeniach jest on ważny? Porównaj wzór (14.24b).

Jak już wiemy dla przepływu ustalonego cyrkulacja Γ zależy od geome-
trii płata, prędkości v_0 oraz od orientacji płata względem prędkości v_0 .
Można ją wyrazić przy pomocy współczynnika siły nośnej przekroju płata

$$dL = C_L(y) b(y) dy \frac{1}{2} \rho v_0^2 = \rho v_0 \Gamma(y) dy$$

Więc

$$\Gamma(y) = \frac{v_0}{2} C_L(y) b(y) \quad (17.17)$$

gdzie $b(y)$ jest cięciwą profilu płata.

Zlinearyzowany wzór (17.16a) dla oporu nie ma praktycznego zastosowania. Jest za mało dokładny. Oprócz oporu profilowego płata skończonej rozpiętości, który można wyznaczyć ze wzoru (17.10) lub ze wzorów Jones'a albo Betz'a, istnieje jeszcze jeden składnik oporu. Jest nim opór indukowany $R_i = R_{xi}$. Spowodowany jest on stratą energii na wytworzenie wirów swobodnych. Jeśli płat porusza się ze stałą prędkością v_0 , to w każdej jednostce czasu długość wirów swobodnych (rys. 12.23, rys. 14.10, 14.11) wzrasta o v_0 . Wystąpi zatem przyrost energii kinematycznej wirów. Ten przyrost energii kinetycznej wirów musi być równy pracy oporu indukowanego w jednostce czasu. Można na tej drodze wyznaczyć ten składnik oporu [25]. My wyznaczmy opór indukowany przy pomocy zasady pędu, przy czym zastosujemy wzór (17.9). Przyjmuje on postać:

$$R_i = R_{xi} = \rho \int_{S_c} \left(\frac{v^2}{2} n_{ox} - v_{no} v_x \right) dS \quad (17.18)$$

Wykażcie przy pomocy związku (17.4a), że wzór powyższy jest ważny także w ruchomym układzie odniesienia, związanym z płatem poruszającym się ze stałą prędkością $\vec{v}_e = -\vec{e}_x v_0$. Płat z układem odniesienia pokazuje rysunek 17.8. We wzorze (17.18) prędkości v są prędkościami zakłóceń; tu prędkościami indukowanymi przez warstwę wirów swobodnych. Zakładamy, tak samo jak w modelu Prandtla, że warstwa wirowa - utworzona z wirów swobodnych - pokrywa się z płaszczyzną xy i że prędkość indukowana $v_y \approx 0$. Niech uwzględnia się zatem deformacji tej powierzchni wirowej oraz zakłada się, że każdy element płata pracuje niezależnie od pozostałych. Nieruchomą powierzchnię kontrolną S_c (rys. 17.8) przyjmujemy w bardzo dużej odległości od płata. Wtedy na S_c prędkość płynu jest równa zero (lub równa v_0 w przypadku założenia przepływu odwróconego) za wyjątkiem przekroju 1-2 warstwy wirowej, gdzie $\vec{v} = \vec{e}_y v_y + \vec{e}_z v_z$. Prędkość v_x w przekroju 1-2 jest równa zero. Tam bowiem wiry są nieruchome. Zatem przy uwzględnieniu powyższych uwag opór indukowany będzie:

$$R_{xi} = \rho \int_{S_c} \frac{1}{2} (v_y^2 + v_z^2) dS \quad \text{bo } n_{ox} = 1$$

Zatem:

$$R_{xi} = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2} v_z(x = \infty, y) dy \int_{z_1}^z v_z dz$$

Ostatnią całkę wyrazić możemy przy pomocy cyrkulacji prędkości $\Gamma(y)$ po pętli C tak samo, jak przy wyprowadzaniu wzoru dla siły nośnej. Więc

$$R_{xi} = -\rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(y) \frac{1}{2} v_z(x = \infty, y) dy$$

Ale prędkość indukowaną v_z w nieskończoności możemy wyrazić przy pomocy prędkości v_z na płacie. Wiemy już - wzory (12.94), (12.95) - że:

$$v_z(x=0, y) = \frac{1}{2} v_z(x=\infty, y)$$

Zatem opór indukowany płata - w ujęciu liniowym - będzie:

$$R_{x1} = -\rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(y) v_z(y) dy \quad (17.19)$$

Prędkość indukowaną już znamy. Wyraża się wzorem (12.103); kąt skosu strumienia zaś wzorem (12.104). Przy uwzględnieniu tych zależności opór indukowany wyrazić można także wzorami następującymi:

$$R_{x1} = \rho v_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(y) \alpha_1(y) dy \quad (17.19a)$$

$$R_{x1} = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(y) \left(\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{d\Gamma}{d\eta}\right) d\eta}{4\pi(y-\eta)} \right) dy \quad (17.19b)$$

Widzimy, że do wyznaczenia siły nośnej R_z i oporu indukowanego wystarczy znajomość rozkładu cyrkulacji prędkości wzdłuż rozpiętości płata. Zanim napiszemy takie równanie dla wyznaczenia $\Gamma(y)$, pokażemy interpretację wzorów dla R_{x1} i R_z . W tym celu wydzielimy z płata element o szerokości dy powstały przez przecięcie płaszczyznami $y = \text{const}$ i $y + dy = \text{const}$, przy czym $y \in \langle -\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \rangle$; $y + dy \in \langle \frac{l}{2}, \frac{l}{2} \rangle$. Zgodnie z założeniami taki element pracuje niezależnie od pozostałych i zachowuje się tak jak płatek nieskończonej rozpiętości opływany pod efektywnym kątem natarcia

$$\alpha_e = \alpha - \alpha_1 \quad (17.20)$$

Zgodnie z twierdzeniem Żukowskiego dla płata nieskończonej rozpiętości powstająca siła nośna na tym elemencie jest prostopadła do prędkości względnej \vec{v}_w i równa

$$d\vec{R} = \rho \vec{v}_w \Gamma(y) dy \quad x \vec{e}_y = \vec{e}_x dR_{x1} + \vec{e}_z dR_z$$

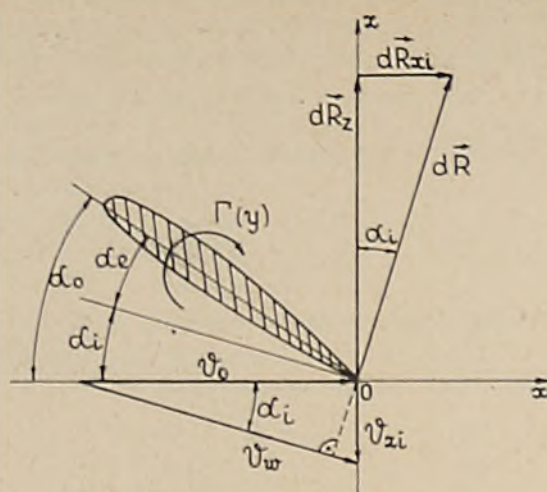
gdzie:

$$\vec{v}_w = \vec{v} - \vec{v}_e \quad \vec{v} = \vec{e}_z v_z \quad \vec{v}_e = -v_0 \vec{e}_x$$

$$\vec{v}_w = \vec{e}_x v_0 + \vec{e}_z v_z$$

Wykres prędkości i sił na elemencie płata pokazuje rysunek 17.9. Widzimy z niego, że:

$$dR_z = dR \cos \alpha_1 = \rho (v_w \cos \alpha_1) \Gamma(y) dy = \rho v_0 \Gamma(y) dy$$



Rys.17.9

$$\begin{aligned} dR_{x1} &= dR \sin \alpha_1 = \rho (v_w \sin \alpha_1) \Gamma(y) dy = -\rho v_z \Gamma(y) dy = \\ &= \rho v_0 \alpha_1(y) \Gamma(y) dy \end{aligned}$$

W ten sposób uzyskaliśmy wyrażenie podcałkowe wzorów: (13.36a); (17.19) i (14.19a). Wzory te będą dobrze opisywać siły hydrodynamiczne działające na płat, gdy prędkości v_y będą pomijalnie małe. Ma to miejsce wtedy, gdy rozpiętość l płata nośnego jest dostatecznie duża, oraz gdy nie wystąpi oderwanie przepływu. Taki przepływ założono: $\vec{v}_w \cdot \vec{n} = 0$. Pierwszy warunek jest spełniony dla wydłużeń płata

$$\Lambda = \frac{l^2}{S} \geq 4 \div 5 \quad (17.21)$$

gdzie: S - powierzchnia nośna płata, określona jako rzut płata na płaszczyznę utworzoną przez cięciwę b i rozpiętość l . Dla płata o obrysie prostokątnym $S = lb$, a $\Lambda = l/b$.

17.3.1. Równanie różniczkowo-całkowe płata. Metoda Glauerta

Związek dla wyznaczenia rozkładu cyrkulacji prędkości wzdłuż rozpiętości płata uzyskujemy przy wykorzystaniu zależności (17.17), (17.20) oraz stwierdzenia, że w zakresie małych kątów natarcia współczynnik siły nośnej elementu płata jest równy:

$$C_L(y) = \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{\Lambda=\infty} \alpha_e \equiv a_0 \alpha_e = \left(\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{\Lambda} \alpha \equiv C_L' \alpha \quad (17.22)$$

Zależność ta mówi o tym, że element płata o danym wydłużeniu Λ opływany pod kątem natarcia α zachowuje się tak jak płat nieskończony opływany pod efektywnym kątem natarcia.

Podstawiając wzór (17.22) do relacji (17.17) mamy:

$$\Gamma(y) = \frac{1}{2} a_0 b v_0 \alpha_e = \frac{1}{2} a_0 b v_0 (\alpha - \alpha_1) \quad (17.23)$$

Jeśli uwzględnimy wyrażenia (12.104) i (12.103) dla indukowanego kąta natarcia, to uzyskamy równanie:

$$\Gamma(y) = v_0 \frac{a_0(y)b(y)}{2} \left[\alpha(y) - \frac{1}{4\pi v_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta} \right] \quad (17.24)$$

W powyższych wzorach kąt α jest mierzony od linii zerowej nośności dla wyznaczenia rozkładu $\Gamma(y)$. Dla tego równania warunek brzegowy jest taki:

$$\Gamma\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0 \quad (17.24a)$$

Widzimy, że podstawowym równaniem teorii linii nośnej Prandtla jest równanie różniczkowo-całkowe z jądrem osobliwym. Wartość całki w tym równaniu należy rozumieć w sensie wartości głównej Cauchy'ego. Ogólne rozwiązanie równania (17.24) nie jest znane. Rozwiązuje się to równanie metodami przybliżonymi. Najbardziej znanymi metodami są metoda Glauerta i metoda Muthoppa. Ograniczymy się do krótkiego przedstawienia metody tylko Glauerta, bowiem równanie (17.24) nie ma już obecnie tak dużego znaczenia jak dawniej. Przedstawimy później, przy omawianiu podstaw projektowania sterów okrętowych, mających wydłużenie rzędu 1-2, metodą numeryczną ważną dla płata o dowolnym wydłużeniu i ukształtowaniu, a opartą o metodę wirów dyskretnych [14]. Podstawy dla tej metody zostały omówione w rozdziałach: 12.3.3 i 14.4.

W metodzie Glauerta wprowadza się nowe zmienne

$$\theta; \theta' \in \langle 0, \pi \rangle$$

takie, że:

$$y = -\frac{l}{2} \cos \theta \quad \eta = -\frac{l}{2} \cos \theta' \quad (17.25)$$

Widzimy, że dla $\theta = 0$ $y = -\frac{l}{2}$, a dla π $y = \frac{l}{2}$ i $y = 0$ dla $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Ponieważ $\Gamma\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0$, to $\Gamma(\theta) = 0$ dla $\Gamma(0)$ i $\Gamma(\pi)$. Dlatego możemy cyrkulację prędkości $\Gamma(\theta) = \Gamma(y)$ rozłożyć na szereg sinusów:

$$\Gamma(\theta) = 2l v_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n \theta \quad (17.26)$$

Przy wykorzystaniu zależności (17.25) i (17.26) wzór dla indukowanego kąta natarcia będzie:

$$\alpha_1(\theta) = \frac{1}{4\pi v_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta' d\theta'}{\cos\theta - \cos\theta'}$$

Ostatnią całkę możemy obliczyć przy zastosowaniu teorii residuów. Mamy:

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n \theta' d\theta'}{\cos \theta - \cos \theta'} = -\pi \frac{\sin n \theta}{\sin \theta}$$

Więc ostatecznie:

$$\alpha_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\sin n \theta}{\sin \theta} \quad (17.27)$$

Podstawiając wyrażenia (17.26) i (17.27) do równania (17.24) otrzymujemy równanie pozwalające na wyznaczenie współczynników A_n rozkładu cyrkulacji $\Gamma(\theta)$:

$$\frac{1}{4l} a_0 b \alpha = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\sin n \theta + \frac{1}{4l} a_0 b \frac{n \sin n \theta}{\sin \theta} \right] \quad (17.28)$$

W równaniu (17.28) wielkości a_0 , b i α mogą zależeć od θ . Żąda się, aby powyższe równanie było spełnione w wybranych przekrojach płata. Ilość przekrojów n jest równa ilości nieznanymi współczynników A_n ; jest ona dobierana tak, aby uzyskać zadaną dokładność obliczeń. Przy wskaźnikach n nieparzystych uzyskuje się - łatwo to sprawdzić - symetryczny rozkład cyrkulacji, a przy n parzystych - rozkład antysymetryczny. Dowolny zatem rozkład $\alpha(\theta)$ wzdłuż rozpiętości płata można rozłożyć na część symetryczną α^s i antysymetryczną α^a tak, że:

$$\alpha = \alpha^a + \alpha^s$$

i dla każdego rozkładu: α^a , α^s rozwiązać oddzielnie układ równań wynikający z (17.28), stosując przy tym technikę cyrkulacji.

17.3.2. Płat nośny o najmniejszym oporze indukowanym

Obliczmy siłę nośną płata $L=R_z$ przy wykorzystaniu rozkładu cyrkulacji $\Gamma(\theta)$.

Mamy:

$$R_z = L = \rho v_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(y) dy = l^2 v_0^2 \rho \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n \theta \sin \theta d\theta$$

Więc

$$L = C_L S \frac{\rho v_0^2}{2} = l^2 A_1 \pi \frac{\rho v_0^2}{2}$$

Stąd współczynnik siły nośnej płata

$$C_L = \pi \frac{l^2}{S} A_1 = \pi \wedge A_1 \quad (17.29)$$

zależy tylko od pierwszego współczynnika rozkładu cyrkulacji $\Gamma(\theta)$. Możemy także prosto obliczyć opór indukowany. Podstawiamy zatem α_i według wzoru (17.27) i cyrkulację $\Gamma(\theta)$ do wzoru (17.19). Otrzymujemy

$$\begin{aligned} R_{x1} &= \rho v_0^2 l^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n m A_m \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = \\ &= \frac{\rho v_0^2}{2} l^2 \pi \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 = C_{x1} S \frac{\rho v_0^2}{2} \end{aligned}$$

Stąd współczynnik oporu indukowanego

$$C_{x1} = \pi \wedge \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 \quad (17.30)$$

Widzimy, że wyraża się on przy pomocy wszystkich współczynników A_n rozkładu $\Gamma(\theta)$. Widzimy, że płat, na którym powstaje siła nośna ($A_1 \neq 0$), będzie doznawał minimalnego oporu indukowanego wtedy, gdy wszystkie współczynniki $A_n = 0$ oprócz $A_1 \neq 0$. Zatem

$$(C_{x1})_{\min} = \pi \wedge A_1^2 = \frac{C_L^2}{\pi \wedge} \quad (17.30a)$$

Z wyrażenia (17.27) widać, że wtedy indukowany kąt natarcia

$$\alpha_i = A_1 = \frac{C_L}{\pi \wedge}$$

jest stały wzdłuż rozpiętości płata i że:

$$(C_{x1})_{\min} = \alpha_i C_L$$

Dla minimalnego oporu indukowanego płata rozkład cyrkulacji prędkości jest elipsą. Elipsą jest także obrys powierzchni nośnej. Istotnie mamy:

$$\Gamma = 2l v_0 A_1 \sin \theta = \frac{\Gamma_0}{2} \sin \theta$$

$$y = -\frac{1}{2} l \cos \theta$$

Jest to równanie parametryczne elipsy, bowiem:

$$\frac{y^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{\Gamma^2}{\left(\frac{\Gamma_0}{2}\right)^2} = 1$$

Podobnie uzyskujemy równanie dla obrysu płata. Przy wzięciu pod uwagę wzorów (17.17), (17.25) i (17.29) mamy:

$$\Gamma = \frac{C_L b}{2} v_0 = \frac{\pi \wedge A_1}{2} v_0 \quad b = 2l v_0 A_1 \sin \theta$$

Stąd:

$$x_b = \frac{1}{2} b = \frac{b_0}{2} \sin \theta \quad y = -\frac{1}{2} \cos \theta$$

Więc:

$$\frac{x_b^2}{\left(\frac{b_0}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

gdzie:

$$b_0 = \frac{4S}{\pi \wedge}; \quad S = \pi \frac{1}{2} \frac{b}{2}$$

Podobne wzory jak dla płata o minimalnym oporze indukowanym można napisać i dla dowolnego rozkładu cyrkulacji na płacie. I tak, że wzoru (17.30) mamy:

$$C_{x1} = \pi \wedge A_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n A_n^2}{A_1^2} = \frac{C_L^2}{\pi \wedge} (1 + \delta) \quad (17.30b)$$

gdzie

$$1 + \delta = \frac{1}{A_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2$$

a ze wzoru (17.27) otrzymujemy

$$\alpha_1 = \frac{C_L}{\pi \wedge} (1 + \tau) \quad (17.27b)$$

gdzie:

$$1 + \tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{A_1} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\sin n \theta}{\sin \theta} \right) d \theta$$

Wzór (17.27b) podaje średnią wartość kąta α_1 dla całego płata. Wielkość τ i δ zależą od geometrii płata; od wydłużenia \wedge i obrysu płata. Można znaleźć wartości tych współczynników w poradnikach.

Ze wzorów (17.30a i b) widać, że współczynnik oporu indukowanego jest odwrotnie proporcjonalny dla wydłużenia płata i prost proporcjonalny do kwadratu współczynnika siły nośnej. Krzywa $C_{x1} = f(C_L^2)$ nosi nazwę paraboli oporu indukowanego.

17.3.3. Przeliczanie charakterystyk hydrodynamicznych płata z danego wydłużenia na wydłużenie inne

Hydrodynamiczne - lub aerodynamiczne - charakterystyki płata nośnego przedstawiają zależność współczynnika siły nośnej:

$$C_z = \frac{R_z}{\frac{1}{2} \rho v_o^2 S} = C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho v_o^2 S} \quad (17.31a)$$

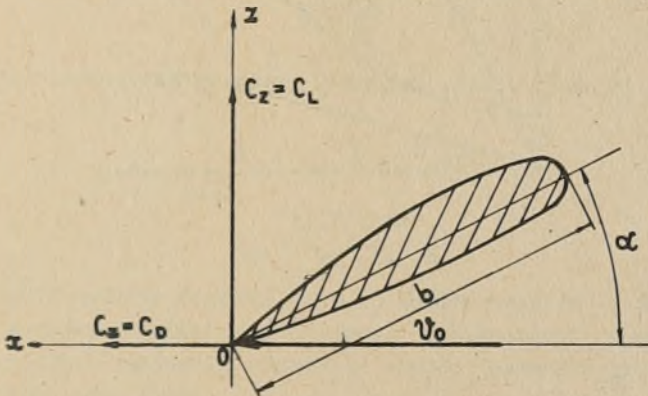
współczynnika oporu:

$$C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 S} = C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 S} \quad (17.31b)$$

i współczynnika momentu płata:

$$C_m = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 S b} \quad (17.31c)$$

od geometrycznego kąta natarcia płata α . Oznaczenia C_L i C_D są stosowane w hydromechanice okrętu. Są to oznaczenia angielskie. Współczynniki te są dane w układzie współrzędnych związanych z prędkością v_0 . Współczynnik momentu C_m podany jest względem krawędzi natarcia lub względem punktu leżącego w $1/4$ cięciwy płata b od krawędzi natarcia. Układ współrzędnych i współczynniki C_x , C_z pokazuje rysunek 17.10, a zależność C_D , C_L , C_m od kąta natarcia - rysunek 17.11.



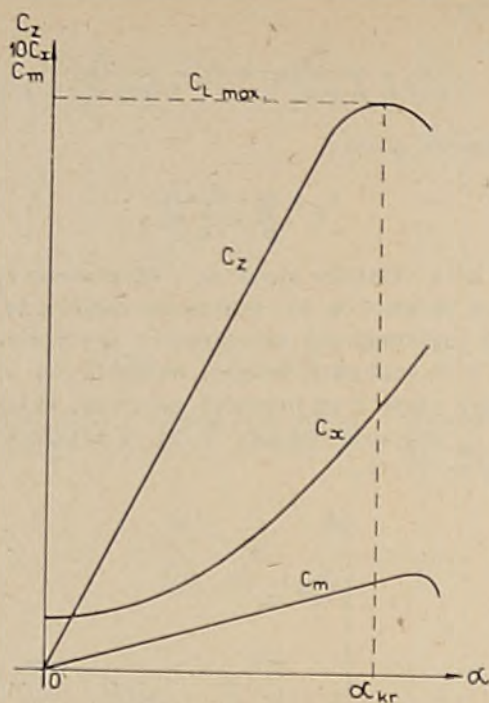
Rys. 17.10

Hydrodynamiczne charakterystyki płata uzyskuje się na drodze eksperymentalnej. Zbiorcze wyniki badań można znaleźć w pracach [26, 27], w publikacjach Instytutów badawczych a także w poradnikach, w tym - poradnikach okrętowca. Dane te odnoszą się dla płatów o stałym profilu, obrysie prostokątnym oraz wydłużeniu $\Lambda = 6$ lub $\Lambda = 5$. Podawane są również inne przedstawienia wyników eksperymentów. Opisują je między innymi Bukowski [3] i Prosnak [2]. Ważną charakterystyką płata jest jego doskonałość

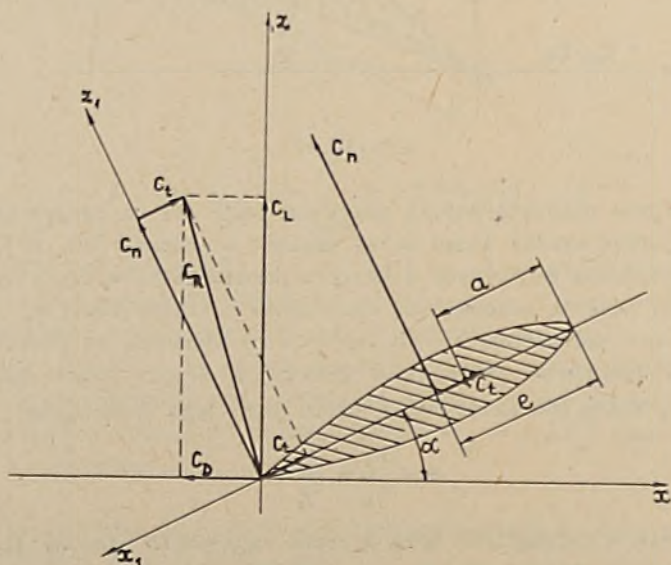
$$d = \frac{C_z}{C_x} = \frac{C_L}{C_D}$$

W okrętownictwie a szczególnie przy śrubach napędowych stosuje się pojęcie odwrotnej doskonałości profilu lub płata

$$\xi = \frac{1}{d} = \frac{C_D}{C_L} \quad (17.31d)$$



Rys.17.11



Rys.17.12

W praktycznych obliczeniach, szczególnie momentu zawiasowego steru C_{ms} , stosowany jest układ współrzędnych związany z płatem nośnym. Pokazuje go rysunek 17.12. Zaznaczono na nim znajdującą się w odległości a od krawędzi

natarcia oś obrotu płata. Z rysunku 17.12 widać, że współczynnik siły normalnej, C_n , i stycznej, C_t , płata oblicza się następująco:

$$\begin{aligned} C_{z1} &= C_n = C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha \\ C_{x1} &= C_t = C_D \cos \alpha - C_L \sin \alpha \end{aligned} \quad (17.31e)$$

Moment płata:

$$M = Ne = C_m b S \frac{1}{2} \rho v_o^2$$

Stąd mamy relację:

$$C_m b = C_n e$$

Współczynnik odległości środka parcia płata (środką ciśnienia) od krawędzi natarcia płata jest

$$\frac{e}{b} = \frac{C_m}{C_n} \quad (17.31f)$$

Moment reakcji hydrodynamicznej względem osi obrotu steru M_s (moment zawiasowy) jest:

$$M_s = C_{ms} \frac{1}{2} \rho v_o^2 S b \quad (17.31g)$$

gdzie:

$$C_{ms} = C_m - C_n \frac{a}{b} \quad (17.31h)$$

Do określenia momentu maszyny sterowej należy uwzględnić dodatkowo moment tarcia w zawiasach (łożyskach) steru. Do wyznaczenia reakcji w łożyskach konieczna jest znajomość całkowitej reakcji hydrodynamicznej R , której współczynnik jest równy:

$$C_R = \sqrt{C_L^2 + C_D^2} \quad (17.31i)$$

Przeważnie projektowany płat nośny ma inne wydłużenie Λ_2 niż wydłużenie płata badanego Λ_1 . Przy przeliczaniu charakterystyk hydrodynamicznych płata z wydłużenia Λ_1 na wydłużenie Λ_2 wychodzimy z danych rozdziału 17.3.2.

Opieramy się na założeniu, że dwa płaty nośne o tych samych profilach i wydłużeniach Λ_1 i Λ_2 będą mieć takie same współczynniki siły nośnej a także takie same współczynniki momentów

$$C_{L1} = C_{L2} = C_L$$

$$C_{m1} = C_{m2} = C_m$$

wtedy, gdy ich średnie efektywne kąty natarcia - wzór (17.20) - będą takie same, to jest gdy

$$\alpha_{e1} = \alpha_{e2} \quad (17.32)$$

Płaty mogą mieć różne obrysy. Stosuje się tu przeliczenie momentów płata, chociaż teoria linii nośnej nie pozwala na wyznaczenie współczynnika C_m .

Jako drugą zależność, opartą o wyniki badań eksperymentalnych, przyjmuje się, że współczynnik oporu lepkości C_v - współczynnik oporu profilowego - nie zależy od wydłużenia płata Λ . Zatem:

$$C_{v1} = C_{v2} \quad (17.33)$$

Podstawiając wzór (17.27b) do związku (17.32) mamy:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{C_L}{\pi} \left(\frac{1 + \tau_2}{\Lambda_2} - \frac{1 + \tau_1}{\Lambda_1} \right) \quad (17.34)$$

Jest to wzór dla przeliczenia kątów natarcia dla płatów o Λ_1 i Λ_2 mających ten sam współczynnik siły nośnej $C_{L1} = C_{L2} = C_L$ i współczynnik momentu $C_{m1} = C_{m2} = C_m$.

Związek (17.33) można zapisać w postaci:

$$C_{D1} - C_{x11} = C_{D2} - C_{x12}$$

Po uwzględnieniu wzoru (17.30b) powyższa relacja będzie:

$$C_{D2} = C_{D1} + \frac{C_L^2}{\pi} \left(\frac{1 + \delta_2}{\Lambda_2} - \frac{1 + \delta_1}{\Lambda_1} \right) \quad (17.35)$$

Chociaż wzory (17.27b) i (17.30b) są ważne w zakresie liniowej zmiany współczynnika $C_L(\alpha)$, to w praktyce stosuje się je dla całej krzywej $C_L(\alpha)$. Popełnia się tu pewien błąd. Wskażemy tu jeszcze na to, że przy kącie natarcia płata α_{KR} , któremu odpowiada około 95% maksymalnej wartości współczynnika siły nośnej C_{Lm} obserwuje się odrywanie przepływu na płacie. Zależy ono od kształtu profilu płata i charakteru przepływu w warstwie przyściennej. (Rozdz. 7.3). Przy wyższych liczbach Reynoldsa R_e zjawisko to wystąpi później. Zatem przy wyższych liczbach R_e uzyskuje się na danym płacie większe wartości C_{Lm} . Uzasadnić to można jakościowo w oparciu o dane rozdz. 7.3 do 7.5.

Jeśli potrzebna jest tylko znajomość współczynnika siły nośnej C_L , to można go prosto określić z zależności (17.22):

$$C_L = C'_L \alpha_h = C'_L (\alpha + \alpha_0)$$

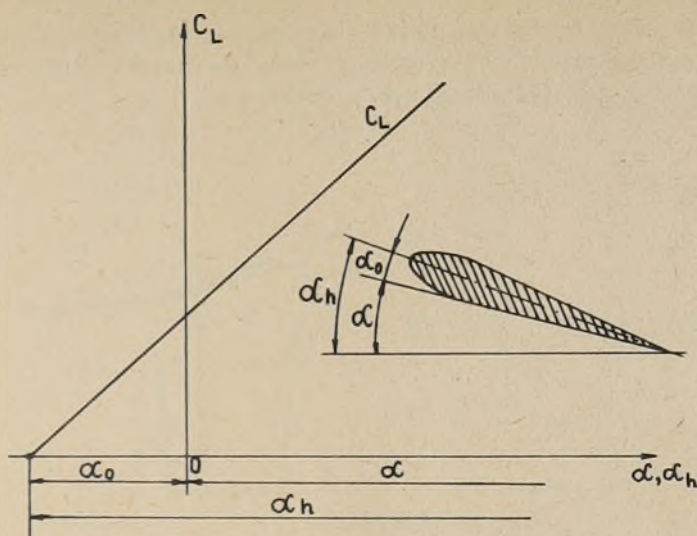
α_h - hydrodynamiczny kąt natarcia; dla profili symetrycznych pokrywa się on z geometrycznym kątem natarcia α . Określenie α_0 , α i α_h pokazano na rys. 17.13. Teoretyczna wartość $\alpha_0 = -2 \frac{f}{b} = -2\bar{f}$.

Wartość współczynnika C'_L dla wydłużenia Λ znaleźć można ze związku (17.32):

$$\alpha_{h\Lambda} - \alpha_1 = \alpha_{h\Lambda} = \infty$$

Stąd:

$$\alpha_{h\Lambda} = \alpha_{h\Lambda} = \infty + \alpha_1$$



Rys. 17.13

Zatem:

$$\frac{C_L}{C'_L} = \frac{C_L}{a_0} + \frac{C_L}{\pi \Lambda} (1 + \tau)$$

Więc:

$$C'_L = \frac{a_0}{1 + \frac{a_0}{\pi \Lambda} (1 + \tau)} \quad (17.36)$$

Teoretyczna wartość współczynnika $a_0 = 2\pi$. W rzeczywistości a_0 przyjmuje wartość niższą. Dla płatów wodolotów o $\bar{g} < 0,10$ dobrym przybliżeniem jest $a_0 = 5,50$.

Przy wydłużeniach $\Lambda < 4$ wzór (17.36) daje zawyżone wartości C'_L . Lepsze wyniki można uzyskać z półempirycznego wzoru Diedericha:

$$C'_L = \frac{a_0 \Lambda}{\Lambda \sqrt{1 + \left(\frac{a_0}{\pi \Lambda}\right)^2} + \frac{a_0}{\pi}} \quad (17.36a)$$

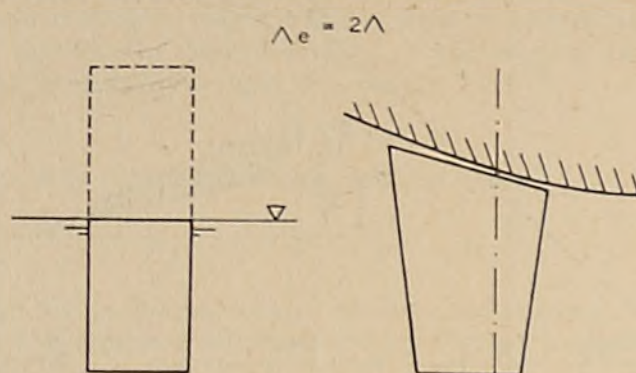
Wzór (17.36a) daje dobrze zgadzające się wyniki z eksperymentem w całym zakresie wydłużeń Λ . Dla $\Lambda \rightarrow \infty$ uzyskuje się z powyższego wzoru $C'_L = a_0$, a dla $\Lambda \rightarrow 0$ zależność

$$C'_L = \frac{\pi}{2} \Lambda \quad (17.36b)$$

pokrywającą się z wynikiem uzyskanym dla płata o granicznie małym wydłużeniu; oczywiście w liniowym ujęciu teorii takiego płata.

Wzór (17.36) zmodyfikujemy później dla płatów podwodnych ze skosem i wzniosem. Tu wskażemy jedynie na to, że w oparciu o metodę odbić zwierciadlanych można zastosować wzór (17.36) dla pionowego płata, który przecina powierzchnię swobodną i porusza się z bardzo małymi prędkościami ($F_b \rightarrow 0$)

względnie gdy jedna z krawędzi płata znajduje się bardzo blisko sztywnej ściany, jak na rysunku 17.14. Wystarczy wtedy zamiast Δ we wzorach (17.36) (17.35) podstawić tak zwane wydłużenie efektywne:



Rys.17.14

Ten przypadek ma miejsce przy sterach statków powolnych i przy stabilizatorach kołysań statków.

17.4. ODDZIAŁYWANIE PŁASKIEGO PRZEPŁYwu POTENCJALNEGO NA CIAŁA. WZORY BLASIUSA-CZAPLYGINA

Niech ruchome ciało walcowe o kierownicy będącej dowolnym konturem C znajduje się w strudze jednorodnej. Prędkość strugi daleko przed ciałem niech będzie v_0 , a ciśnienie p_0 . Zakładamy, że płyn jest nielepki i nieściśliwy. Na konturze C prędkość v i ciśnienie p wyznaczmy z równania Bernoulliego. Przy pominięciu sił ciężkości mamy:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{v_0^2}{2}$$

Zatem ciśnienie p na konturze - zakładamy, że kontur stanowi linię prądu - wyrazi się jako

$$p = p_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} - \rho \frac{v^2}{2}$$

Reakcję hydrodynamiczną działającą na jednostkę długości ciała wyznaczmy ze wzoru (5.7a)

$$\vec{R} = \vec{i} R_x + \vec{j} R_y = - \int_S p \vec{n} dS$$

$$\vec{n} dS = \vec{n} ds \cdot 1 = (dx \vec{i} + dy \vec{j}) \times 1 \vec{k}$$

$$n_x ds = dy \quad n_y ds = -dx$$

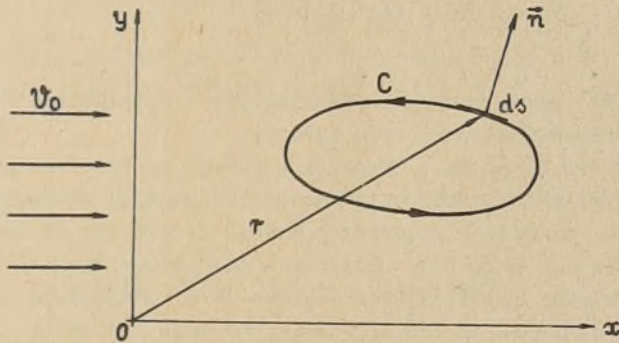
Więc

$$R_x = - \oint_C p n_x ds = - \oint_C p dy$$

$$R_y = - \oint_C p n_y ds = \oint_C p dx$$

Analogicznie jak dla prędkości sprężonej utworzymy reakcję sprężoną

$$R^* = R_x - i R_y = - \oint_C p (dy + i dx) = - \oint_C p dz^* \quad (17.37)$$



Rys.17.15

Moment reakcji hydrodynamicznej względem początku układu odniesienia, jak na rysunku 17.15, ma tylko jedną składową wzdłuż osi Oz. Ze wzoru (5.8a) mamy:

$$M_z = M_0 = - \oint_C p (x n_y - y n_x) ds = \oint_C p (x dx + y dy) \quad (17.38)$$

Ale

$$x dx + y dy = R_e (z dz^*) = R_e (z^* dz)$$

Moment M_0 jest wielkością rzeczywistą. Wzory (17.37) i (17.38) są dotychczas ważne dla płaskiego przepływu płynu nielepkiego. Ograniczenia będą dalej zależeć od tego, jaką całkę płynu idealnego, wiążącą ciśnienie p z prędkością płynu \vec{v} się zastosuje. Jeśli weźmiemy ciśnienie z wyżej napisanej całki Bernoulliego, to przepływ może być potencjalny lub wirowy, ale musi być przepływem ustalonym. Jeśli natomiast weźmie się pod uwagę całkę Cauchy'ego-Lagrange'a, to przepływ musi być potencjalnym; może być ustalony przepływ potencjalny. Ponieważ całki (17.37) i (17.38) ze stałych są równe zero, więc

$$R^* = \frac{\rho}{2} i \oint_C v^2 dz^* \quad (17.37a)$$

$$M_0 = -\frac{Q}{2} \oint_C v^2 R_e(z dz^*) \quad (17.38a)$$

Biorąc pod uwagę to, że

$$v^2 = \frac{dw}{dz} \frac{dw^*}{dz^*} \quad \frac{dw^*}{dz^*} dz^* = \frac{dw}{dz} dz$$

i że M_0 jest rzeczywiste, możemy wzory (17.37a) i (17.38a) zapisać tak:

$$R^* = R_x - i R_y = i \frac{Q}{2} \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz \quad (17.37b)$$

$$M_0 = -\frac{Q}{2} R_e \oint_C z \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz \quad (17.38b)$$

Powyższe wzory noszą nazwę wzorów Blasiusa i Czapygina. Niezależnie zostały one wyprowadzone przez tych badaczy.

Znaczenie wzorów Blasiusa i Czapygina polega na tym, że zamiast złożonego niekiedy konturu C możemy wziąć dowolny kontur C_1 zawierający kontur C , jeśli tylko w obszarze D zawartym pomiędzy C_1 i C nie ma źródeł ani wirów: inaczej, jeśli w obszarze D wyrażenia podcałkowe wzorów (17.37b) i (17.38b) są funkcjami analitycznymi. Wynika to z twierdzenia Cauchy'ego-Goursata, wzór (12.35) [10 tom II]. Wzory te mogą być także stosowane, do obliczenia oddziaływania strugi jednorodnej na izolowane źródła lub wiry zawarte w konturze C . Wydatek Q źródła lub cyrkulacja Γ muszą być jednak stałe.

Ponieważ przy wyprowadzeniu wzorów Blasiusa-Czapygina nie zakładano ograniczeń co do obszaru płynu, a tylko istnienie ustalonego przepływu potencjalnego, to wzory te mogą być także zastosowane do obliczenia reakcji strugi na ciało lub osobliwość hydrodynamiczną znajdującą się pod swobodną powierzchnią wody lub przy ścianie nieruchomej; np.: ruch ciała walcowego przy dnie, w kanale lub w pobliżu innych ciał. Należy w każdym konkretnym przypadku wyznaczyć tylko potencjał zespolony przepływu $w(z)$ i wykonać całkowanie. Przy obliczaniu całek korzystnym jest zastosowanie teorii residuów. Wzory (17.37b) i (17.38b) nie uwzględniają reakcji hydrostatycznej. Możemy ją obliczyć oddzielnie.

Wzory dla reakcji hydrodynamicznej w płaskim i nieustalonym przepływie potencjalnym, wyrażone przy pomocy potencjału zespolonego $w(z)$, można także wyprowadzić stosując całkę Cauchy'ego-Lagrange'a. Zrobił to Siedow [28], [17]. W pracach [28 i 17] podano szereg zastosowań tych wzorów.

17.5. ODDZIAŁYWANIE TRÓJWYMIAROWEGO PRZEPŁYWU POTENCJALNEGO
NA CIAŁA PORUSZAJĄCE SIĘ W OŚRODKU NIEOGRANICZONYM

Niech dowolnie ukształtowane ciało - może nim być statek podwodny - o objętości V i powierzchni zwilżonej S porusza się w ośrodku nieograniczonym. Zakładamy, że ciecz jest nielepkka i nieściśliwa, a przepływ cieczy wywołany ruchem ciała jest przepływem potencjalnym. Siłami masowymi \vec{F} są siły grawitacyjne o potencjale U . Zadanie będziemy analizować w nieruchomym układzie odniesienia $O_0x_0y_0z_0$. W celu uzyskania konkretnego wyrażenia dla reakcji hydrostatycznej skierujemy oś O_0z_0 pionowo w dół. Wtedy

$$\vec{F} = -\nabla U = g \vec{k}_0; \quad U = -g z_0$$

Do znalezienia wyrażeń dla reakcji hydrodynamicznych \vec{R} i \vec{M}_0 zastosujemy najpierw zasadę pędu. Z ogólnych wyrażeń dla \vec{R} i \vec{M}_0 - wzory (17.4) i (17.5) - mamy

$$\vec{R} = -\rho \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi \, dV - \rho \int_{S_c} v_{no} \vec{v} \, dS + \rho \int_S v_n \vec{v} \, dS - \int_{S_c} p \vec{n}_0 \, dS - \rho \int_{V_0} \nabla U \, dV$$

gdzie $\vec{v} = \nabla \varphi$, a ze względu na ciągłość potencjału

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Występujące całki objętościowe można zamienić na całki po brzegu obszaru V_0 . Zgodnie z twierdzeniem Gaussa-Ostrogradzkiego (3.65) mamy:

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi \, dV = \int_{\partial V_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n}_0 \, dS = \int_{S_c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n}_0 \, dS - \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} \, dS$$

$$\int_{V_0} \nabla U \, dV = \int_{S_c} \vec{n}_0 U \, dS - \int_S \vec{n} U \, dS$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności wyrażenie dla reakcji \vec{R} będzie

$$\begin{aligned} \vec{R} = & - \int_{S_c} (p + \rho U + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \vec{n}_0 \, dS - \rho \int_{S_c} v_{no} \vec{v} \, dS + \\ & + \rho \int_S (\frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} + v_n \vec{v}) \, dS + \rho \int_S \vec{n} U \, dS \end{aligned}$$

Stałą występującą w całce Cauchy'ego-Lagrange'a - wzory (13.2) lub (5.47) - wyznaczmy daleko przed ciałem, gdzie prędkość indukowana przez to ciało jest równa zeru, a ciśnienie jest równe p_0 . Zatem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + U_0; \quad U_0 = -g h_0$$

a $h_0 = z_0 = \text{const}$ jest współrzędną dowolnego punktu w miejscu, gdzie $\vec{v} = 0$ i $p = p_0$.

Ponieważ całka zorientowana po powierzchni zamkniętej ze stałą funkcją podcałkową jest równa zeru, więc

$$\oint_{S_c} \left(p + \rho U + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \vec{n}_0 \, dS = -\rho \oint_{S_c} \frac{v^2}{2} \vec{n}_0 \, dS$$

W związku z powyższym wyrażenie dla reakcji \vec{R} będzie

$$\vec{R} = \rho \oint_{S_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{n0} \vec{v} \right) dS + \rho \oint_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} + v_n \vec{v} \right) dS + \rho \int_V \nabla U \, dV$$

W przyjętym układzie odniesienia:

$$\nabla U = -\vec{k}_0 g$$

$$\rho \int_V \nabla U \, dV = -\vec{k}_0 \rho g V$$

Przy wzięciu pod uwagę kinematycznego warunku brzegowego na powierzchni ciała, $v_{ns} = v_n$ oraz wzoru (14.12), występującą we wzorze dla \vec{R} całkę drugą można zapisać tak:

$$\oint_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} + v_n \vec{v} \right) dS = \frac{d}{dt} \oint_S \varphi \vec{n} \, dS$$

Uwzględniając powyższe zależności uzyskamy wzór dla reakcji hydrodynamicznej \vec{R} w postaci:

$$\vec{R} = -\vec{k}_0 \rho g V + \rho \frac{d}{dt} \oint_S \varphi \vec{n} \, dS + \rho \oint_{S_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{n0} \vec{v} \right) dS \quad (17.39)$$

Na podstawie wzoru (17.5) możemy, postępując analogicznie, wyznaczyć główny wektor momentu siły hydrodynamicznej

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{h0} + \rho \frac{d}{dt} \oint_S \varphi \vec{r}_{0s} \times \vec{n} \, dS + \rho \oint_{S_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{r}_{0s} \times \vec{n}_0 - \vec{r}_{0s} \times v_{n0} \vec{v} \right) dS \quad (17.40)$$

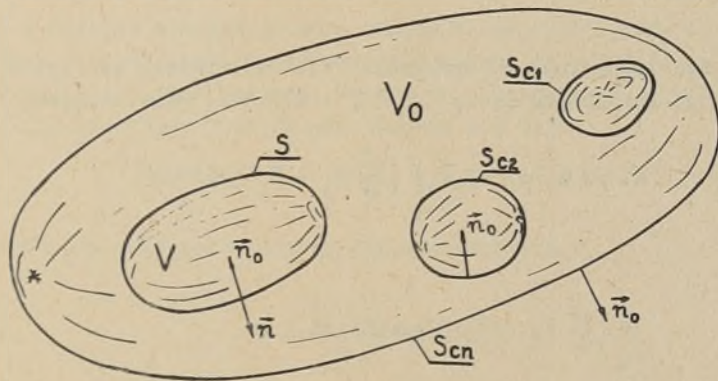
gdzie: \vec{M}_{h0} jest momentem hydrostatycznej siły wyporu, a \vec{r}_{0s} jest promieniem wodzącym elementu powierzchni dS . Łatwo można zauważyć, że powierzchnia S_c może obejmować i inne ciała znajdujące się w ośrodku, przykładowo: ciała ograniczone powierzchniami zamkniętymi S_{c1} , S_{c2} , ... pokazane na rysunku 17.16. Wtedy we wzorach (17.39) i (17.40) powierzchnia kontrolna S_c jest równa

$$S_c = \sum_1^n S_{ci}$$

Zamiast ciała o objętości V i powierzchni S można rozpatrywać inne ciało ograniczone powierzchnią S_{ci} . Reakcja płynu, \vec{R} działająca na to ciało oczywiście wyrazi się wzorem:

$$\vec{R} = \rho \int_{S_{ci}} U \vec{n} dS + \rho \frac{d}{dt} \int_{S_{ci}} \varphi \vec{n} dS + \rho \int_{S_c = \sum_{i=1}^n (S_{ci}) - S_{ci} + S} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_o - v_{no} \vec{v} \right) dS$$

Oczywistym jest, że potencjał przepływu cieczy w przypadku jednego ciała poruszającego się w ośrodku płynnym będzie inny od potencjału prędkości, kiedy w ośrodku porusza się wiele ciał. Ciałami tymi mogą być także osoblności hydromechaniczne. W złożonym takim przypadku do wyznaczania potencjału φ służy to samo równanie Laplace'a. Kinematyczne warunki brzegowe musimy wziąć na wszystkich ciałach.



Rys.17.16

Powierzchnię kontrolną $S_c = \partial V_0 - S$ można wybierać dowolnie pod warunkiem, że w obszarze V_0 nie ma źródeł ani wirów. W przypadku istnienia tylko jednego ciała S powierzchnię kontrolną S_c wygodnie jest przyjąć bardzo daleko od ciała - w nieskończoności. Powierzchnią S_c może być także powierzchnia ciała S . Wtedy wzory dla reakcji hydrodynamicznych uzyskamy ze wzorów (17.39), (17.40) przez podstawienie $S_c = S$. Zgodnie z tym mamy

$$\vec{R} = \rho \int_{S(t)} U \vec{n} dS + \rho \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \varphi \vec{n} dS + \rho \int_{S(t)} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n} - v_n \vec{v} \right) dS \quad (17.39a)$$

$$\vec{M}_O = \rho \int_{S(t)} U \vec{r}_{Os} \times \vec{n} dS + \rho \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \varphi \vec{r}_{Os} \times \vec{n} dS +$$

$$+ \rho \int_{S(t)} \left(\frac{v^2}{2} \vec{r}_{Os} \times \vec{n} - \vec{r}_{Os} \times v_n \vec{v} \right) dS \quad (17.40a)$$

Powyższe dwa wzory powinno się także uzyskać przez podstawienie ciśnienia, wyznaczonego z całki Cauchy'ego-Lagrange'a, do ogólnych wzorów (5.7a), (5.8a) dla reakcji hydromechanicznych w płynie nielepkim.

$$\text{Mamy: } p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho \frac{v^2}{2} - \rho U + p_0 + \rho U_0$$

$$\text{Więc } \vec{R} = - \int_S p \vec{n} \, dS = \int_S \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} \, dS + \rho \int_S \frac{v^2}{2} \vec{n} \, dS + \rho \int_S U \vec{n} \, dS$$

$$\text{Ale } \rho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} \, dS = \frac{d}{dt} \rho \int_S \varphi \vec{n} \, dS - \rho \int_S v_n \vec{v} \, dS$$

Zatem

$$\vec{R} = \rho \int_S U \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \rho \int_S \varphi \vec{n} \, dS + \rho \int_S \left(\frac{v^2}{2} \vec{n} - v_n \vec{v} \right) dS$$

Podobnie szybko można znaleźć wyrażenie (17.40a). Należy skorzystać ze wzoru (14.14b). Porównując wzory (17.39) i (17.39a) mamy związek:

$$\int_{S(t)} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n} - \vec{n} \cdot \nabla \varphi \otimes \nabla \varphi \right) dS = \int_{S_0} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - \vec{n}_0 \cdot \nabla \varphi \otimes \nabla \varphi \right) dS \quad (17.41)$$

Stąd:

$$\int_{\partial V_0} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - \vec{n}_0 \cdot \nabla \varphi \otimes \nabla \varphi \right) dS = 0 \quad (17.41a)$$

Co ta relacja znaczy i kiedy jest ona spełniona? Na pewno będzie ona spełniona wtedy, gdy wyrażenie podcałkowe będzie równe zeru w każdym punkcie obszaru płynu V_0 . Więcej informacji o obszarze V_0 uzyskamy zamieniając całkę (17.41a) na całkę po obszarze V_0 . Mamy

$$\int_{V_0} \left(\nabla \frac{v^2}{2} - \nabla \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v}) \right) dV = 0 \quad (17.41b)$$

Ale

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v}) &= \vec{v} \otimes \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \otimes \vec{v} = \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} + \\ &+ \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} \end{aligned}$$

Stąd, po uwzględnieniu powyższych tożsamości, wyrażenie (17.41b) można zapisać tak:

$$\int_{V_0} (-\vec{v} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}) dV = 0 \quad (17.41c)$$

Powyższy związek wskazuje na to, że powierzchnia kontrolna S_c musi być tak poprowadzona w płynie, aby nie obejmowała żadnych źródeł $Q_1 = \delta V \operatorname{div} \vec{v}$ ani wirów $\delta V \operatorname{rot} \vec{v}$.

Występujący we wzorach (17.39) i (17.40) potencjał prędkości może być wyrażony w nieruchomym układzie odniesienia $O_0 x_0 y_0 z_0$ lub w układzie w nieruchomym układzie odniesienia $O_0 x_0 y_0 z_0$ lub w układzie odniesienia związanym z poruszającym się ciałem. W przypadku zastosowania układu odniesienia związanego z ciałem do obliczania pochodnej względem czasu, występującej we wzorze (17.39) i (17.40), należy zastosować wyrażenie (14.13d). Jeśli kręt płynu obliczamy w ruchomym układzie odniesienia, względem bieguna A, to moment reakcji hydrodynamicznej zgodnie ze wzorem (17.5b) i (17.40) będzie:

$$\vec{M} = \vec{M}_h - \vec{v}_A \times \vec{Q} + \rho \frac{d}{dt} \oint_S \varphi \vec{r}_s \times \vec{n} \, dS + \rho \oint_S \left(\frac{v^2}{2} \vec{r}_s \times \vec{n} - \vec{r}_s \times v_n \vec{v} \right) dS \quad (17.40b)$$

Jeśli w ośrodku nieograniczonym znajduje się tylko jedno ciało a ponadto nie ma w nim osobliwości hydromechanicznych, to ostatnie całki we wzorach (17.39) i (17.39a) znikają. Wynika to z rozpatrzenia związku (17.41). Potencjał φ przepływu absolutnego zmienia się jak

$$\varphi = C \frac{1}{r^2}$$

Przykładowo dla kuli poruszającej się z prędkością v_0

$$\varphi = - \frac{r_0^2}{2 r^2} v_0 \cos \chi \quad (12.122b)$$

Zatem $\vec{v} = 0 \left(\frac{1}{r^3} \right)$; $v^2 = 0 \left(\frac{1}{r^6} \right)$ $S = 0 (r^2)$

włęc przy $r \rightarrow \infty$

$$\oint_S \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{n0} \vec{v} \right) dS = 0 \left(\frac{1}{r^4} \right) \rightarrow 0$$

Ze związku zaś (17.41) wynika, że także

$$\oint_S \left(\frac{v^2}{2} \vec{n} - v_n \vec{v} \right) dS = 0$$

W podobny sposób można wykazać zerowanie się ostatniej całki w wyrażeniu (17.40). Stąd wniosek taki, że jeżeli w ośrodku nieograniczonym porusza się tylko jedno ciało a ponadto nie ma w tym ośrodku żadnych wirów ani źródeł, to reakcje hydrodynamiczne działające na to ciało będą równe:

$$\vec{R} = \rho \oint_{S(t)} U \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \rho \oint_{S(t)} \varphi \vec{n} \, dS \quad (17.42a)$$

$$\vec{M}_0 = \rho \int_{S(t)} U \vec{r}_{0s} \times \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \rho \int_{S(t)} \varphi \vec{r}_{0s} \times \vec{n} \, dS \quad (17.42b)$$

$$\vec{M} = \rho \int_{S(t)} U \vec{r}_s \times \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \rho \int_{S(t)} \varphi \vec{r}_s \times \vec{n} \, dS + \vec{v}_A \times \rho \int_S \varphi \vec{n} \, dS \quad (17.42c)$$

Powyższe związki można zapisać tak:

$$\vec{R} = \vec{R}_h + \vec{R}_1 \quad (17.43a)$$

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_{0h} + \vec{M}_{01} \quad (17.43b)$$

$$\vec{M} = \vec{M}_h + \vec{M}_1 \quad (17.43c)$$

gdzie \vec{R}_h , \vec{M}_h - reakcje hydrostatyczne a

$$\vec{R}_1 = \frac{d}{dt} \rho \int_S \varphi \vec{n} \, dS \quad (17.43d)$$

$$\vec{M}_{01} = \frac{d}{dt} \rho \int_S \varphi \vec{r}_{0s} \times \vec{n} \, dS \quad (17.43e)$$

$$\vec{M}_1 = \vec{v}_A \times \rho \int_S \varphi \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \rho \int_S \varphi \vec{r}_s \times \vec{n} \, dS \quad (17.43f)$$

przedstawiają reakcje bezwładności wody. Stosując oznaczenia dla pędu \vec{Q} cieczy i momentu pędu cieczy \vec{K}_0 , \vec{K} powyższe związki przyjmują prostą postać:

$$\vec{R}_1 = - \frac{d \vec{Q}_1}{dt} \quad (17.44a)$$

$$\vec{M}_{01} = - \frac{d \vec{K}_{01}}{dt} \quad (17.44b)$$

$$\vec{M}_1 = - \vec{v}_A \times \vec{Q}_1 - \frac{d \vec{K}_1}{dt} \quad (17.44c)$$

gdzie: pęd cieczy i kręt płynu jest

$$\vec{Q}_1 = - \rho \int_S \varphi \vec{n} \, dS \quad (17.45a)$$

a kręt płynu wyraża się całką

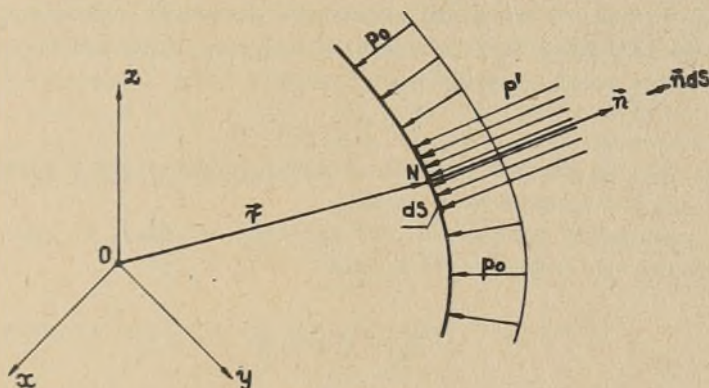
$$\vec{K}_1 = - \rho \int_S \varphi \vec{r}_s \times \vec{n} \, dS \quad (17.45b)$$

Podamy niżej interpretację fizyczną wzorów dla pędu i momentu pędu płynu.

17.5.1. Siły chwilowe działające na płyn

Siły chwilowe w płynie mogą powstać przy gwałtownej zmianie kształtu ciała znajdującego się w płynie, przy szybkiej zmianie stanu ruchu tegoż ciała, przy wchodzeniu lub wychodzeniu ciała z wody poprzez swobodną po-

wierzchnię, przy przechodzeniu poduszki z stanu pływania wypornościowego do stanu zawisu, przy wybuchach podwodnych, itp. Ponieważ ogólnie w płynie działają siły masowe i siły powierzchniowe, to możemy mieć masowe siły chwilowe i powierzchniowe siły chwilowe. Rozpatrzmy stan ruchu płynu wywołany powierzchniowymi siłami chwilowymi przyłożonymi do powierzchni S w chwili $t=0$ (rys.17.17). Działają one w ciągu bardzo krótkiego czasu τ . Pomijamy siły lepkości jako małe w stosunku do sił ciśnienia $p'(x, y, z, t)$. Niech w chwili $t=0^-$ - prędkość płynu była równa zeru, a ciśnienie w płynie i na powierzchni S było równe $p = p_0 = \text{const.}$



Rys.17.17

Równaniem rządzącym dla płynu jest równanie Eulera:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p'$$

Wobec tego prędkość płynu wywołana impulsem ciśnienia będzie

$$\int_0^{\tau} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = -\frac{1}{\rho} \int_0^{\tau} \text{grad } p' dt$$

Oznaczając przez $\pi(x, y, z)$ impuls ciśnienia i biorąc pod uwagę warunki początkowe mamy:

$$\pi(x, y, z) = \int_0^{\tau} \text{grad } p' dt$$

$$\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \pi \quad (17.46)$$

Widzimy, że przyłożony impuls ciśnienia π wywołuje potencjalne pole prędkości

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi$$

Jeśli płyn jest nieściśliwy, to potencjał prędkości będzie

$$\varphi = -\frac{1}{\rho} \pi \quad (17.47)$$

Ponieważ $\rho = \text{const}$, więc

$$\frac{dp}{d\varphi} = c^2 = \infty$$

i natychmiast w całym płynie po zadziałaniu impulsu zostanie indukowane pole prędkości określone wzorem (17.46). Wzór (17.47) może służyć jako interpretacja fizyczna potencjału prędkości φ . Wniosek dalszy jest taki, że przez przykładanie do płynu impulsów ciśnień nie można wywołać ani też zlikwidować ruchu wirowego płynu.

Impulsy ciśnień π mogą się oczywiście powtarzać w czasie t , tworząc przykładowo schodkową funkcję czasu, a w granicy mogą być funkcją ciągłą czasu t . Zatem możemy napisać ogólnie, że

$$\pi = \pi(x, y, z, t) \quad (17.46a)$$

Przypadek taki ma miejsce przy nieustalonym ruchu ciała w płynie, przy kołyszącym się lub manewrującym statku.

Jeśli podstawimy związek (17.47) do wzoru (17.45a), to pęd cieczy wywołany nieustalonym ruchem ciała będzie

$$\vec{Q}_1 = \oint_S \pi \vec{n} dS$$

a reakcja bezwładności wyrazi się wzorem

$$\vec{R}_1 = \frac{d}{dt} \oint_S \pi \vec{n} dS$$

Więc reakcje bezwładności są wywołane przez zmienne w czasie impulsy ciśnienia na powierzchni S ciała. Jeśli impuls ciśnienia nie zależy od czasu, to $\vec{R}_1 = 0$.

Wzory (17.43d i e) można prosto uzyskać przy pomocy zależności 17.46 i 17.47. Jeśli bowiem pokazana na rysunku 17.1 powierzchnia kontrolna S_c jest usytuowana bardzo daleko od ciała ($V; S$), to na S_c panuje ciśnienie $p_0 = \text{const}$. Wtedy, przy pominięciu sił masowych, reakcja hydrodynamiczna

$$\begin{aligned} \vec{R} = \vec{R}_1 &= \frac{-d\vec{Q}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho \vec{v} dV = -\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho \left(-\frac{1}{\rho} \nabla \pi\right) dV = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} \nabla \pi dV = \frac{d}{dt} \oint_{\partial V_0} \vec{n}_0 \pi dS = \frac{d}{dt} \oint_{S_c} \vec{n}_0 \pi dS + \\ &+ \frac{d}{dt} \rho \oint_S \varphi \vec{n} dS \end{aligned}$$

Ale na S_c impuls $\vec{\pi}$ jest stały, więc

$$\vec{R}_1 = \rho \frac{d}{dt} \oint_S \varphi \vec{n} dS \quad (17.43d)$$

W taki sam sposób można uzyskać wzór (17.43e).

17.5.2. Wyznaczanie potencjału prędkości dla przypadku ciała sztywnego.

Metoda Kirchoffa

Niech ciało sztywne ograniczone powierzchnią S porusza się w cieczy nieściśliwej. Zakładamy, że obszar cieczy jest nieograniczony i że przepływ ma potencjał φ . Zadanie będziemy rozwiązywać w układzie odniesienia, który jest sztywno związany z poruszającym się ciałem.

Według założenia $\vec{v} = \nabla\varphi$ i $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Więc równaniem rządzącym jest równanie Laplace'a $\Delta\varphi = 0$ (3.27). Warunkami brzegowym są: warunek kinematyczny (12.127c) na powierzchni ciała

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = \vec{v} \cdot \vec{n} = \sum_{k=1}^6 v_k n_k = v_k n_k$$

i warunek zanikania prędkości przepływu w nieskończoności:

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{gdy } r \rightarrow \infty$$

Jest to zadanie liniowe. Zgodnie z podejściem Kirchoffa, biorąc pod uwagę postać warunku kinematycznego (12.127c), potencjał prędkości φ możemy wyrazić przy pomocy potencjałów jednostkowych φ_k tak:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) &= v_1(t) \varphi_1(x, y, z) + v_2(t) \varphi_2(x, y, z) + \dots = \\ &= v_k(t) \varphi_k(x, y, z) \end{aligned} \quad (17.48)$$

Wymiary potencjałów: dla $k = 1, 2, 3$ jest $[m]$, a dla $k = 4, 5, 6$ - $[m^2]$. Podstawiając związek (17.48) do warunku (12.127c) i równania Laplace'a mamy:

$$\begin{aligned} v_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} &= v_k n_k \\ v_k \Delta\varphi_k &= 0 \end{aligned}$$

Zatem potencjały φ_k będące funkcjami tylko miejsca wyznaczmy z równań:

$$\Delta\varphi_k = 0 \quad (17.49a)$$

i warunków brzegowych

$$\left. \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} \right|_S = n_k \quad (17.49b)$$

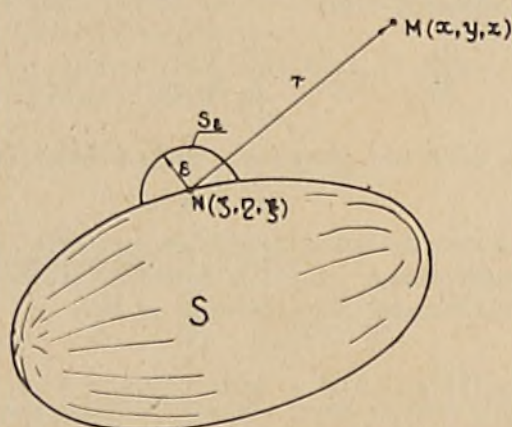
$$\varphi_k \rightarrow 0 \quad \text{dla } r \rightarrow \infty \quad (17.49c)$$

Uogólnione cosinusy kierunkowe określone są wzorami (12.127b). W przypadku trójwymiarowego ciała zadanie można rozwiązać analitycznie tylko dla ciał prostych, takich jak kula i elipsoid obrotowy. Dla ciał o bardziej złożonych kształtach rozwiązuje się to zadanie metodami numerycznymi [11], [17]. Jedną z takich metod jest metoda równań całkowych [6]. Polega ona na tym, że na powierzchni S ciała, rysunek 17.18, rozkładamy źródła o nieznannej gęstości powierzchniowej $q_k(\xi, \eta, \zeta)$. Wtedy zgodnie ze wzorem (12.60) potencjał jednostkowy będzie

$$\varphi_k = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{q_k(\xi, \eta, \zeta)}{r} dS \quad (17.50a)$$

gdzie:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$



Rys. 17.18

Widzimy, że φ spełnia warunek (17.49d). Spełnia on równanie Laplace'a (17.49a). Do wyznaczenia q_k mamy warunek nieprzepuszczalności powierzchni ciała S , warunek (17.49b). Zgodnie z nim

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi} \oint_S q_k(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = n_k$$

Ale biorąc pod uwagę (12.76b) mamy:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \vec{n} \cdot \text{grad}_p \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r})}{r^2}$$

Zatem:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = \frac{1}{4\pi} \oint_S q_k \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r})}{r^2} dS = n_k \quad (17.50)$$

Porównaj powyższą całkę ze wzorem (12.80) i biorąc pod uwagę rysunek 12.13 daj interpretację q_k w powyższym wyrażeniu. Nieznana gęstość źródeł $q_k(\xi, \eta, \zeta)$ może mieć wartości dodatnie i ujemne, ale tak, że

$$\oint_S q_k dS = 0$$

Jeśli punkt M zbliża się bardzo do punktu N , to $r \rightarrow 0$ i wyrażenie podcałkowe w równaniu (17.50b) rośnie nieograniczenie. Całka po powierzchni S jest wtedy całką niewłaściwą. Dla obliczenia całki w takim przypadku otacza się punkt N małą półkulą o promieniu ϵ , analogicznie jak przy obliczaniu residuów w przypadku płaskim.

Możemy tu napisać, że

$$\oint_S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\epsilon} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} = \oint_S + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon}$$

Ponieważ półkula S_ϵ jest bardzo mała, więc na S_ϵ gęstość $q_k = \text{const.}$ Dalej na S_ϵ zewnętrzna normalna ma kierunek promienia ϵ i wobec tego na S_ϵ $\cos(\vec{n}, \vec{\epsilon}) = 1$. Stąd:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{q_k \cos(\vec{n}, \vec{r})}{r^2} dS = \frac{q_k}{\epsilon^2} 2\pi\epsilon^2 = 2\pi q_k(x, y, z)$$

Przy zastosowaniu powyższych uwag równanie (17.50b) przybierze końcową postać:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{q_k(\xi, \eta, \zeta) \cos(\vec{n}, \vec{r})}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} dS + \frac{1}{2} q_k(x, y, z) = n_k(x, y, z) \quad (17.50c)$$

Widzimy, że poszukiwaną gęstość rozkładu źródeł q_k na powierzchni ciała S w celu wyznaczenia potencjału prędkości $\varphi_k(x, y, z)$ przy ruchu ciała z prędkością v_k można wyznaczyć z liniowego równania całkowego (17.50c). Jest to równanie Fredholma II rodzaju. Do rozwiązania tego równania stosuje się metodę Fredholma, polegającą na tym, że powierzchnię S dzieli się na małe elementy ΔS_i i zastępuje całkę sumą:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{q_k \cos(\vec{n}, \vec{r})}{r^2} dS \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_k^i \left[\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r})}{r^2} \right]_i \Delta S_i \quad (17.51a)$$

Przy pomocy (17.51a) równanie (17.50c) można zapisać:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_k^i \left[\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r})}{r^2} \right]_i \Delta S_i + \frac{1}{2} q_k = n_k$$

Żądamy spełnienia równania (17.51b) w środku geometrycznym każdego elementu powierzchni ΔS_1 . W efekcie sprowadzamy zadanie do rozwiązania układu liniowych równań algebraicznych względem niewiadomych gęstości q_k^m

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_k^i \left[\frac{\cos(\vec{n}_i, \vec{r}_{im})}{r_{im}^2} \right]_{im} \Delta S_1 + \frac{1}{2} q_k^m = n_k \quad (17.52)$$

gdzie $m = 1, 2, 3, \dots, n$, a r_{im} jest odległością punktu m od punktu i na powierzchni S .

Z sumy występującej we wzorze (17.52) należy wyłączyć oczywiście $r_{im}=0$; zawiera je bowiem wyraz $\frac{1}{2} q_k^m$. Równań algebraicznych mamy tyle, ile wybrano punktów na powierzchni S ciała (zwykle 100-500 i czasem więcej). Bliższe dane o metodzie rozwiązania równania (17.50c) możecie znaleźć w podręcznikach z równań całkowych, np. w [29].

17.5.3. Masy hydrodynamiczne

Pęd płynu o charakterze bezwładnościowym \vec{Q}_1 oraz moment pędu \vec{K}_1 , określone wzorami (17.45), wyrazimy przy pomocy potencjału φ danego wzorem (17.48) dla przypadku ruchu ciała w ośrodku nieorganicznym.

Otóż:

$$\vec{Q}_1 = Q_1 \vec{e}_1 + Q_2 \vec{e}_2 + Q_3 \vec{e}_3 = Q_j \vec{e}_j = -\rho \int_S \varphi \vec{e}_j n_j dS$$

Zatem:

$$\begin{aligned} Q_j &= -\rho \int_S \varphi n_j dS = -\rho \int_S \varphi_k v_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dS = \\ &= \left(-\rho \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dS \right) v_k = m_{kj} v_k \end{aligned} \quad (17.53)$$

gdzie:

$$m_{kj} = -\rho \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} dS \quad (17.54)$$

$$k=1; 2; 3; \dots, 6 \quad j = 1, 2, 3$$

Podobnie możemy postąpić z bezwładnościowym momentem pędu \vec{K}_1 . Składowe K_1, K_2, K_3 są:

$$K_1 = -\rho \int_S \varphi_k v_k [\vec{r}_s \times \vec{n}]_1 dS = v_k (-\rho \int_S \varphi_k n_4 dS) = v_k m_{k4}$$

$$K_2 = v_k \left(-\rho \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} dS \right) = v_k m_{k5}; \quad K_3 = v_k m_{k6}$$

Stąd widać, że składowe pędu \vec{Q}_i i momentu pędu \vec{K}_i możemy zapisać przy pomocy jednego wzoru

$$B_j = m_{kj} v_k = \sum_{k=1}^6 m_{kj} v_k \quad (17.55)$$

przy czym $k, j = 1, 2, \dots, 6$

$$a \quad B_1 = Q_1, \quad B_2 = Q_2, \quad B_3 = Q_3, \quad B_4 = K_1, \quad B_5 = K_2, \quad B_6 = K_3$$

Kwadratowa macierz m_{kj} zawierająca 36 elementów nazywa się macierzą mas hydrodynamicznych lub macierzą mas towarzyszących. Macierz m_{kj} jest macierzą symetryczną. Można to wykazać stosując drugi wzór Greena (3.79) do obszaru płynu V_0 jak na rysunku 17.1. Mamy dla potencjałów φ_j, φ_k :

$$\int_{V_0} (\varphi_j \Delta \varphi_k - \varphi_k \Delta \varphi_j) dV = \oint_{\partial V_0} \left(\varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial n_0} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_0} \right) dS$$

Ale potencjały φ_j i φ_k spełniają równanie Laplace'a (17.49a), a całka

$$\oint_{S_c} \left(\varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial n_0} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_0} \right) dS \rightarrow 0 \quad \text{przy } r \rightarrow \infty$$

jest bowiem mała rzędu $O\left(\frac{1}{r^2}\right)$. Wobec tego

$$\oint_S \left(\varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \right) dS = 0$$

i natychmiast mamy, że

$$m_{kj} = m_{jk} \quad (17.56)$$

Widzimy, że macierz mas hydrodynamicznych zawiera 21 niezależnych elementów. Dla $j, k = 1, 2, 3$ m_{jk} ma wymiar masy i dlatego nazywają się te wielkości masą towarzyszącą. Dla $j = 1, 2, 3$ i $k = 4, 5, 6$ m_{jk} ma wymiar statystycznego momentu masy. Stąd nazwa statyczny moment towarzyszący. Dla $j, k = 4, 5, 6$ m_{jk} ma wymiar momentu bezwładności masy, więc nazwa towarzyszący moment bezwładności masy. Należy zwrócić uwagę, że masy towarzyszące nie mają nic wspólnego z jakąś masą płynu poruszającą się z ciałem. Są to wielkości, przy pomocy których prosto daje się wyrazić pęd płynu nielepkiego uzyskany od ciała poruszającego się ruchem niejednostajnym w ośrodku nieograniczonym. Przez masy hydrodynamiczne towarzyszące można także prosto wyrazić energię kinematyczną płynu.

Otóż dla obszaru V_0 jak na rysunku 17.1 energią kinetyczną płynu zgodnie ze wzorem (3.81) jest

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{V_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} dS = - \frac{\rho}{2} \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (17.57)$$

bo całka po powierzchni S_c , zgodnie z wyżej przedstawionymi argumentami, jest równa zero. Podstawiamy potencjał φ dany wzorem (17.48) do wyrażenia (17.57). Otrzymujemy:

$$E = -\frac{\rho}{2} \int_S v_k \varphi_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} v_j dS = \frac{1}{2} v_j v_k \left(-\rho \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) dS$$

Zatem energia kinetyczna płynu w rozpatrywanym przypadku ruchu ciała wyrazi się zależnością:

$$E = \frac{1}{2} v_j v_k m_{jk} \quad (17.58)$$

gdzie sumowanie odbywa się po tych samych wskaźnikach. Przy pomocy energii kinetycznej możemy prosto obliczyć składowe pędu B_j

$$B_j = \frac{\partial E}{\partial v_j} = m_{jk} v_k \quad (17.59)$$

Dla ciała sztywnego poruszającego się w ośrodku nieograniczonym, na mocy (17.48) i (17.54), masy towarzyszące m_{jk} wyrażone w układzie odniesienia związanym z tym ciałem, są wielkościami stałymi. Bowiem wtedy powierzchnia S ograniczająca ciało jest niezależna od czasu.

Na podstawie wzoru (17.54) można wykazać, że liczba niezerowych elementów macierzy m_{jk} redukuje się w przypadku posiadania przez ciało płaszczyzn symetrii. Jeśli ciało poruszające się w płynie ma płaszczyznę symetrii Oxz , to

$$m_{12} = m_{14} = m_{16} = m_{25} = m_{34} = m_{36} = m_{45} = m_{56} = 0 \quad (17.60)$$

i liczba niezerowych mas towarzyszących zmniejsza się z 21 do 12. Jeśli natomiast obiekt ma 2 płaszczyzny symetrii, to niezerowymi są tylko następujące masy hydrodynamiczne:

$$m_{11} \quad m_{22} \quad m_{33} \quad m_{44} \quad m_{55} \quad m_{66} \quad m_{26} \quad m_{35} \quad (17.61)$$

Jeśli zaś obiekt ma 3 płaszczyzny symetrii, to także

$$m_{26} = m_{35} = 0$$

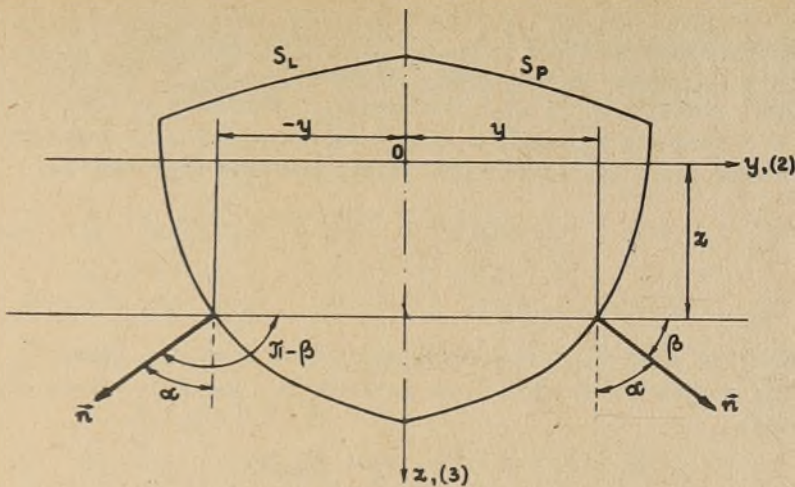
Dla ciała obrotowego z osią symetrii pokrywającą się z osią Ox mamy różne od zera tylko następujące masy

$$m_{11} \quad m_{22} = m_{33} \quad m_{55} = m_{66}$$

Przykładowo pokażemy, że istotnie $m_{34} = 0$ dla ciała mającego płaszczyznę symetrii Oxz jak na rysunku 17.19. Otóż:

$$m_{34} = -\rho \int_S \varphi_3 \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} dS = -\rho \int_S \varphi_3 n_4 dS$$

$$m_{34} = -\rho \left(\int_{S_p} \varphi_3 n_4 dS + \int_{S_u} \varphi_3 n_4 dS \right)$$



Rys. 17.19

Ale ze wzoru (12.127b):

$$n_4 = y \cos(\vec{n}, z) - z \cos(\vec{n}, y)$$

Więc na prawej stronie powierzchni S_P na S_P

$$n_4 = y \cos \alpha - z \cos \beta$$

a na S_L

$$n_4 = -y \cos(\alpha) - z \cos(\pi - \beta) = -(y \cos \alpha - z \cos \beta)$$

Natomiast przy ruchu ciała z prędkością V_3 potencjał

$$\varphi_3(x, y, z) = \varphi_3(x, -y, z)$$

Uwzględniając powyższe oraz że $S_P = S_L$ widzimy, że istotnie $m_{34} = 0$. Podobnie można wykazać zerowanie się innych mas hydrodynamicznych.

Ze wzoru określającego masy hydrodynamiczne (17.54) oraz z wyrażen (17.49a) do (17.49c), określających potencjały jednostkowe φ_k , wynika, że masy m_{jk} dla $j, k = 1, 2, 3$ zależą od orientacji układu współrzędnych względem ciała oraz od powierzchni ciała S , a dla pozostałych wartości wskaźników j, k masy m_{jk} zależą ponadto od położenia początku układu odniesienia. Należy to mieć na uwadze przy pisaniu równań ruchu ciała. Jeśli mamy obliczone masy hydrodynamiczne w jakimś układzie współrzędnych, na przykład w układzie $Axyz$ jak na rysunku 17.1, a chcemy napisać równania ruchu ciała w układzie odniesienia $Gx_1y_1z_1$, związanym z ciałem o początku układu pokrywającym się ze środkiem ciężkości ciała, to należy przetransponować macierz m_{jk} do układu $Gx_1y_1z_1$. Transpozycji macierzy m_{jk} można prosto dokonać w oparciu o wyrażenie (17.58) dla energii kinetycznej płynu wywołanej ruchem danego ciała. Dla danego stanu ruchu danego ciała nie może ona bowiem zależeć od przyjętego układu współrzędnych. Więc mamy relację:

$$E = \frac{1}{2} v_j v_k m_{jk} = \frac{1}{2} v'_j v'_k m'_{jk} \quad (17.58a)$$

Dalej należy wyrazić prędkości v_j, v_k przy pomocy składowych v'_j, v'_k i porównać współczynniki przy tych samych wyrazach v'_j, v'_k . W ten sposób uzyskamy związki pomiędzy m'_{jk} a m_{jk} . Transpozycję składowych prędkości v'_j, v'_k , wyrażonych w układzie $Gx_1y_1z_1$, do układu współrzędnych $Axyz$ dokonuje się w oparciu o wzór (12.146a) i (12.148). Należy pamiętać przy tym, że

$$v'_1 = v_{x1}; \quad v'_2 = v_{y1}; \quad v'_3 = v_{z1}; \quad v'_4 = \omega_{x1}; \quad v'_5 = \omega_{y1}; \quad v'_6 = \omega_{z1}$$

a

$$v_1 = v_x; \quad v_2 = v_y; \quad v_3 = v_z; \quad v_4 = \omega_x; \quad v_5 = \omega_y; \quad v_6 = \omega_z$$

Jeśli oznaczymy przez $\vec{r}_G = \overline{AG}$ - odległość punktu G od A , a przez $\vec{r}_{G1} = \overline{GA}$ - odległość punktu A od punktu G , to prędkość G i punktu A wyraża się zależnościami:

$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_G = \vec{v}_A - \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{G1} \\ \vec{v}_A &= \vec{v}_G - \vec{\omega} \times \vec{r}_G = \vec{v}_G + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{G1} \end{aligned} \quad (17.62)$$

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}$$

W równaniach ruchu ciała występują prędkości \vec{v}_G i $\vec{\omega}_1$. Uważamy je zatem za zadane. We wzorze (17.58) dla energii występują prędkości \vec{v}_A i $\vec{\omega}$

Dla znalezienia rozwiniętej postaci relacji pomiędzy v_j a v'_j wprowadzimy następujące oznaczenia składowych prędkości i wektora \vec{r}_A

$$\begin{aligned} \vec{v}_A [v_1, v_2, v_3] \quad \vec{\omega} [\omega_1, \omega_2, \omega_3] &= \vec{\omega} [v_4, v_5, v_6] \\ \vec{v}_G [v'_1, v'_2, v'_3] \quad \vec{\omega}_1 [p, q, r] &= \vec{\omega} [v'_4, v'_5, v'_6] \\ \vec{v}_G [u, v, w] \\ \vec{r}_G [\xi, \eta, \zeta] \quad \vec{r}_{G1} [\xi_1, \eta_1, \zeta_1] \end{aligned}$$

Wtedy zgodnie ze związkiem (12.146a) mamy

$$\begin{pmatrix} v_A \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} v'_4 \\ v'_5 \\ v'_6 \end{pmatrix} \equiv [D] \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (17.63a)$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} u + (q\xi_1 - r\eta_1) \\ v + (r\xi_1 - p\xi_1) \\ w + (p\eta_1 - q\xi_1) \end{pmatrix} \quad (17.63b)$$

gdzie $[D]$ jest macierzą pełnego obrotu układu odniesienia $Gx_1y_1z_1$ względem układu $Axyz$. Może ona być opisana wzorem (12.148), w którym kąty Ψ, Θ, Φ nie zależą od czasu. Wygodniejszym jest zmiana oznaczeń tych kątów, np. na α, β, γ .

W praktycznej działalności mamy przeważnie do czynienia tylko z przemieszczeniem bieguna A do środka ciężkości G. Wtedy macierz $[D] = I$ i wyznaczenie mas hydrodynamicznych m'_{jk} znacznie się upraszcza. Jeszcze większe uproszczenia mają miejsce w zadaniach płaskich. Przykładowo dla $q = r = 0, w = 0$ oraz $[D] = I$ mamy:

$$v_6 = \omega = \omega_3 = v'_6 \quad v_4 = v_5 = 0$$

$$v_1 = u - r\eta_1 = u + r\eta = v'_1 + v'_6 \eta$$

$$v_2 = v + r\xi_1 = v - r\xi = v'_2 - v'_6 \xi$$

i

$$m'_{11} = m_{11} \quad m'_{22} = m_{22} \quad m'_{12} = m_{12}$$

$$m'_{16} = m_{11}\eta - m_{12}\xi + m_{16}$$

$$m'_{26} = m_{12}\eta + m_{22}\xi + m_{26}$$

$$m'_{66} = m_{11}\eta^2 + m_{22}\xi^2 - 2m_{12}\xi\eta + 2(m_{16}\eta - m_{26}\xi) + m_{66}$$

Widzimy, że masy towarzyszące m_{jk} możemy obliczać w dowolnym układzie współrzędnych Axyz i że tak obliczone masy m_{jk} możemy wyrazić w takim układzie odniesienia $Gx_1y_1z_1$, jaki jest nam najwygodniejszy w dalszym postępowaniu. Układ współrzędnych Axyz do obliczenia mas m_{jk} należy oczywiście dobierać tak, aby wyznaczenie m_{jk} było jak najprostsze.

Wyznaczone masy hydrodynamiczne m_{jk} dla ciała poruszającego się w ośrodku nieograniczonym mogą być stosowane także dla powolnych statków nawodnych pływających na nieograniczonym morzu. Uzasadnienie jest to tym, że przy małych liczbach Froude'a, $F_L < 0,15$, powierzchnia swobodna cieczy zachowuje się tak jak sztywna ściana. Zatem przy wzięciu pod uwagę metody odbić zwierciadlanych masy towarzyszące powolnego statku nawodnego są równe połowie mas hydrodynamicznych statku zdwojonego, poruszającego się w ośrodku nieograniczonym (wróć do rozdziału 15.2).

Wpływ ścian zbiornika cieczy i swobodnej powierzchni przy dowolnych liczbach Froude'a omówimy nieco dalej. Tu wskażemy jeszcze na to, że w przypadku statku - ciała - ulegającego deformacjom: ryby, kuli o zmieniającym się w czasie promieniu, masy towarzyszące m_{jk} są zależne od czasu; podczas kołysań zaś statku nawodnego masy m_{jk} są zależne od częstości kołysań.

17.6. RÓWNANIA RUCHU CIAŁA SZTYWNEGO W OŚRODKU NIEOGRANICZONYM

Niech ciało sztywne, ograniczone powierzchnią s porusza się w ośrodku nieograniczonym. Z ciałem tym wiążemy układ współrzędnych Axyz jak na rysunku 17.1. Położenie ciała w ośrodku w danej chwili t określa promień wodzący bieguna A, \vec{r}_A , oraz kąty Eulera: Ψ, Θ, Φ

Prędkość \vec{v}_p dowolnego punktu p ciała jest

$$\vec{v}_p = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

gdzie: $\vec{r} = \overline{Ap}$ - promień wodzący punktu p.

Pęd ciała \vec{L}_O jest

$$\vec{L}_O = \sum \vec{v}_p \Delta m = m \times \vec{v}_A + \vec{\omega} \times m \vec{r}_G$$

gdzie: \vec{r}_G - promień wodzący środka masy G ciała wzięty względem bieguna A.

Moment pędu, kręt, \vec{H}_O ciała jest

$$\vec{H}_O = \sum \vec{r}_O \times \vec{v}_p \Delta m = \sum (\vec{r}_A + \vec{r}) \times \vec{v}_p \Delta m$$

$$\vec{H}_O = \vec{r}_A \times \vec{L}_O + \vec{H}_A$$

$$\vec{H}_A = \sum \vec{r} \times \vec{v}_p \Delta m = J \cdot \vec{\omega} + m \vec{r}_G \times \vec{v}_A$$

J - tensor bezwładności.

Wiąc

$$\vec{H}_O = \vec{r}_A \times \vec{L}_O + m \vec{r}_G \times \vec{v}_A + J \cdot \vec{\omega}$$

Ruch ciała opisuje II prawo Newtona

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{F}_O \quad \frac{d\vec{H}_O}{dt} = \vec{M}_O \quad (17.64)$$

W rozpatrywanym przypadku siłę zewnętrzną działającą na ciało możemy przedstawić w postaci:

$$\vec{F}_O = \vec{F} + \vec{R}_1 = \vec{W} + \vec{R}_V + \vec{G} + \vec{R}_1$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O1} + \vec{M}_{O1}$$

gdzie: \vec{W} - siła Archimedesesa,

\vec{G} - ciężar ciała,

\vec{R}_V - reakcja hydrodynamiczna spowodowana lepkością,

$$\vec{R}_1 = - \frac{d\vec{Q}_1}{dt},$$

$$\vec{M}_{O1} = - \frac{d\vec{K}_{O1}}{dt},$$

\vec{M}_{O1} - moment sił \vec{W} , \vec{G} , \vec{R}_V względem początku nieruchomego układu odniesienia.

Po uwzględnieniu (17.44a i b) równania ruchu ciała wyrażone w nieruchomym układzie odniesienia, lub układzie inercyjnym, są

$$\frac{d}{dt} [\vec{L}_O + \vec{Q}_1] = \vec{F} \quad (17.64a)$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{H}_O + \vec{K}_{O1}] = \vec{M}_{O1}$$

Widzimy, że ruch ciała sztywnego w płynie jest opisany równaniami (17.64a) różniącymi się od równań opisujących ruch ciała w próżni tym, że jak gdyby pęd \vec{L}_O i kręt \vec{H}_O tego ciała został zwiększony o dodatkowy pęd \vec{Q}_1 i dodatkowy kręt \vec{K}_{O1} . Mówi się, że pędowi \vec{L}_O towarzyszy pęd płynu \vec{Q}_1 , a krętowi

\vec{H}_O - dodatkowy kręt \vec{K}_{O1} . Stąd nazwy dla \vec{Q}_1 - pęd towarzyszący i dla \vec{K}_{O1} - kręt towarzyszący.

Wiemy, że wygodniejszym jest badanie ruchu ciała w układzie odniesienia sztywno związanym z ciałem - układ nieinercyjny.

Jeśli oznaczymy

$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F}_O + \vec{M}_A + \vec{M}_1$$

gdzie: \vec{M}_A - jest momentem sił \vec{W} , \vec{G} i \vec{R}_V względem bieguna oraz uwzględnimy wzór (12.160) dla pochodnej względem czasu w układzie nieruchomym a także relację

$$\frac{d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \times \vec{L}_O + \vec{r}_A \times \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \frac{d\vec{H}_A}{dt} = \vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F}_O + \vec{M}_A + \vec{M}_1$$

to równania (17.64a) przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \frac{d'}{dt} (\vec{L}_O + \vec{Q}_1) + \vec{\omega} \times (\vec{L}_O + \vec{Q}_1) &= \vec{F} \\ \frac{d'}{dt} (\vec{H}_A + \vec{K}_1) + \vec{\omega} \times (\vec{H}_A + \vec{K}_1) + \vec{v}_A \times (\vec{L}_O + \vec{Q}_1) &= \vec{M}_A \end{aligned} \quad (17.64b)$$

W mechanice ruchu okrętu będącej działaniem hydromechaniki okrętowej, podobnie jak w mechanice ruchu ciała sztywnego, przyjmuje się środek masy G za początek ruchomego układu odniesienia. Wtedy układ równań rządzących (17.64b) upraszcza się ze względu na to, że

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L} = m \vec{v}_G \\ \vec{H}_A &= \vec{H}_G = \vec{H} = J \cdot \vec{\omega} \\ \vec{v}_A \times \vec{L}_O &= \vec{v}_A \times m \vec{v}_A = 0 \\ \vec{M}_A &= \vec{M}_G \end{aligned} \quad (17.65a)$$

i przyjmuje postać:

$$\frac{d'}{dt} (\vec{L} + \vec{Q}_1) + \vec{\omega} \times (\vec{L} + \vec{Q}_1) = \vec{F} \quad (17.65b)$$

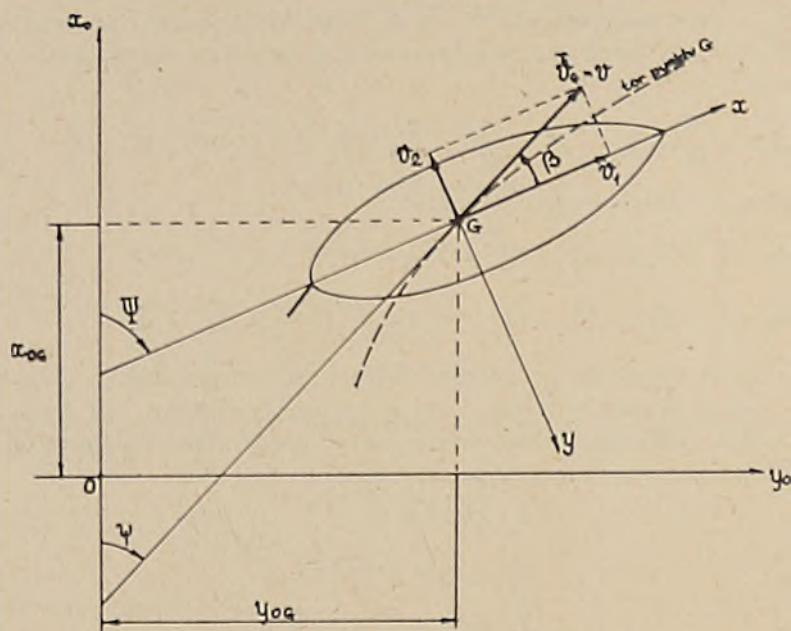
$$\frac{d'}{dt} (\vec{H} + \vec{K}_1) + \vec{\omega} \times (\vec{H} + \vec{K}_1) = \vec{M}_G - \vec{v}_G \times \vec{Q}_1 \quad (17.65c)$$

W równaniach (17.65b i c) towarzyszący pęd \vec{Q}_1 i towarzyszący kręt \vec{K}_1 muszą być wyrażone w układzie odniesienia $Gx_1y_1z_1$. W celu badania położenia ciała w przestrzeni, do równań (17.65b i c) należy dołączyć równania różniczkowe elementów macierzy pełnego obrotu [D] - równania (12.64) oraz równania (12.103) - toru środka masy ciała. W tak sformułowanym zadaniu o ruchu dowolnym ciała sztywnego mamy zatem do czynienia z układem 21 zwyczajnych równań różniczkowych. Ze względu na wysoką nieliniowość równań (17.65b,c), a także ze względu na dużą ilość równań, badanie zachowania się ciała można wykonać tylko numerycznie przy zastosowaniu maszyn liczących.

17.6.1. Równania ruchu statku manewrującego w płaszczyźnie poziomej

Ogólne równania ruchu ciała w ośrodku nieograniczonym zilustrujemy przykładem podwodnego statku poruszającego się w płaszczyźnie poziomej. $Gx_1y_1 = Gxy$.

Zakładamy, że kadłub statku ma płaszczyznę symetrii $Gx_1z_1 = Gxz$ i że osie Gx_1, Gy_1, Gz_1 są głównymi ośrodkami bezwładności.



Rys. 17.20

Położenie statku w chwili t w przestrzeni pokazuje rysunek 17.20. Układ odniesienia $Gx_0y_0z_0$ jest nieruchomy w przestrzeni, a układ $Gxyz$ jest związany sztywno ze statkiem. Prędkość \vec{v}_G środka ciężkości G statku ma składowe:

$$v_1 = v_{Gx} \quad v_2 = v_{Gy} \quad v_3 = 0$$

a prędkość kątowa $\vec{\omega} = \vec{k}\omega_z = \vec{k}v_G$. Wektor \vec{v}_G tworzy z osią Gx kąt β zwany kątem dryfu. Kąt Eulera $\Psi = \angle(x_0, x)$ nazywa się kątem kursowym. Wprowadza się także kąt $\phi = \angle(\vec{v}_G, x_0)$.

Z rysunku 17.20 widać, że

$$\beta = \Psi - \phi \quad (17.66a)$$

Macierz obrotu (12.148) dla rozpatrywanego przypadku jest równa macierzy (12.147f)

$$[D] = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a macierz prędkości kątowej $[D]_{\omega} = I$. Stąd

$$\omega = \dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dt} \quad (17.66b)$$

Zgodnie z (12.163) równania toru środka masy statku G są

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{oG} \\ \dot{y}_{oG} \\ \dot{z}_{oG} \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \cos \Psi - v_2 \sin \Psi \\ v_1 \sin \Psi + v_2 \cos \Psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.66c)$$

Z rysunku 17.20 widać:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_G \cos \beta \\ v_2 &= -v_G \sin \beta \end{aligned} \quad (17.66d)$$

Po podstawieniu (12.66d) do równań (12.66c) mamy:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{oG} &= v_G \cos \Psi \\ \dot{y}_{oG} &= v_G \sin \Psi \end{aligned} \quad (17.66e)$$

W praktycznych badaniach zagadnień manewrowych statków stosuje się wielkości: $v_1, v_2, \omega = \dot{\Psi}$ lub częściej: $v_G \equiv v, \beta, \dot{\Psi}$. W pierwszym przypadku związkami kinematycznymi są: (17.66b) i (17.66e); w drugim natomiast mamy relacje: (17.66a), (17.66b) i (17.66e).

Przy rozpisaniu równań rządzących (17.65) dla rozpatrywanego przypadku weźmiemy pod uwagę ogólny wzór (17.58) dla energii kinetycznej cieczy oraz wzór (17.59) dla składowych pędu towarzyszącego. Ponieważ mamy ruch płaski i statek ma płaszczyzną symetrii, to zgodnie z (17.60) energia kinetyczna cieczy będzie:

$$E = \frac{1}{2} (m_{11} v_1^2 + m_{22} v_2^2 + 2 m_{26} v_2 \omega + m_{66} \omega^2)$$

Składowe pędu cieczy są:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= B_1 = \frac{\partial E}{\partial v_1} = m_{11} v_1 \\ Q_{12} &= B_2 = \frac{\partial E}{\partial v_2} = m_{22} v_2 + m_{26} \omega \\ K_{16} &= B_6 = \frac{\partial E}{\partial v_6} = \frac{\partial E}{\partial \omega} = m_{66} \omega + m_{26} v_2 \end{aligned}$$

Natomiast pęd \vec{L} i kręt \vec{H} statku wyrażą się wzorami:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{i} m v_1 + \vec{j} m v_2 \\ \vec{H} &= \vec{k} J_2 \omega \end{aligned}$$

Zatem:

$$(\vec{L} + \vec{Q}_1)_1 = (m + m_{11}) v_1$$

$$(\vec{L} + \vec{Q}_1)_2 = (m + m_{22}) v_2 + m_{26} \omega$$

$$[\vec{\omega} \times (\vec{L} + \vec{Q}_1)]_1 = - [(m + m_{22}) v_2 \omega + m_{26} \omega^2]$$

$$[\vec{\omega} \times (\vec{L} + \vec{Q}_1)]_2 = (m + m_{11}) v_1 \omega$$

$$(\vec{H} + \vec{K}_1) = \vec{k} [(J_z + m_{66}) \omega + m_{26} v_2]$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{H} + \vec{K}_1) = 0$$

$$\vec{v}_G \times \vec{Q}_1 = \vec{k} [(m_{22} - m_{11}) v_1 v_2 + m_{26} v_1 \omega]$$

Po uwzględnieniu powyższych związków równania (17.65b i c) dla przypadku sztywnego statku manewrującego w płaszczyźnie poziomej przyjmują postać:

$$(m + m_{11}) \frac{d'v_1}{dt} - (m + m_{22}) v_2 \omega - m_{26} \omega^2 = F_1$$

$$(m + m_{22}) \frac{d'v_2}{dt} + m_{26} \frac{d'\omega}{dt} + (m + m_{11}) v_1 \omega = F_2 \quad (17.67)$$

$$(J_z + m_{66}) \frac{d'\omega}{dt} + m_{26} \frac{d'v_2}{dt} + m_{26} v_1 \omega = M_{Gz} - (m_{22} - m_{11}) v_1 v_2$$

$$\omega = \frac{d'\Psi}{dt} \quad \operatorname{tg} \beta = - \frac{v_2}{v_1}$$

$$\Psi = \varphi + \beta \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\dot{x}_{OG} = v \cos \Psi \quad \dot{y}_{OG} = v \sin \Psi$$

Podobnie możemy rozpisać równania ruchu dowolnego ciała - statku - dla przypadku jego ruchu w płaszczyźnie wzdłużnej Gx_1z_1 ; v_1, v_3, v_5 lub dla ruchu w płaszczyźnie poprzecznej Gy_1z_1 ; v_2, v_3, v_4 .

Chociaż równania 17.67 wyprowadzono dla głęboko zanurzonego statku, znajdującego się w nieograniczonym oceanie, to postać ich jest taka sama również dla statku nawodnego lub dla statku podwodnego poruszającego się w pobliżu dna. W tych przypadkach będą tylko inne masy hydrodynamiczne i inne wartości sił F_1, F_2 i momentu M_{Gz} . Wiemy już, że w przypadku statku nawodnego, poruszającego się z bardzo małą prędkością, masy m_{jk} mogą być wyznaczone z danych dla statku zdwojonego.

W przypadku zaś umiarkowanych liczb Froude'a $F_n = 0,2 \div 0,3$ warunek brzegowy na swobodnej powierzchni jest dość złożony i masy m_{jk} będą inne niż w przypadku wody nieograniczonej. Siła \vec{F} i moment \vec{M}_G będą obejmować dodatkowo reakcje hydrodynamiczne związane z falowaniem swobodnej powierzchni, generowanym przez poruszający się statek. Przykładowo siła F_1 będzie obejmować także opór falowy statku R_w . W przypadku ruchu statku na wodzie

ograniczonej (woda płytka lub kanał), w przypadku ruchu statku podwodnego w pobliżu dna głębokiego zbiornika wody a także podczas ruchu grupy statków masy towarzyszące m_{jk} będą inne, wystąpi również oddziaływanie statku i brzegów obszaru cieczy; całka $\oint_S (\frac{1}{2} v^2 \vec{n} - v_n \vec{v}) dS$ będzie różna od zera. Przy wzięciu pod uwagę powyższych uwag jasnym jest, że równania (17.67) są równaniami podstawowymi w zagadnieniu sterowności statków.

17.6.2. Ruch bezwładnościowy ciała. Paradoks d'Alemberta

Niech ciało - statek - porusza się w nieograniczonym ośrodku cieczy nieśliwej i nielepkiej a przepływ cieczy niech będzie potencjalnym. Przy pominięciu sił ciężkości - siły hydrostatycznego wyporu - na ciało działają reakcje hydrodynamiczne, określone wzorami (17.44a i c):

$$\vec{R}_1 = - \frac{d \vec{Q}_1}{dt} = - \frac{d' \vec{Q}_1}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{Q}_1 \quad (17.68a)$$

$$\vec{M}_1 = - \frac{d \vec{K}_1}{dt} - \vec{v}_A \times \vec{Q}_1 = - \frac{d' \vec{K}_1}{dt} - \vec{v}_A \times \vec{Q}_1 - \vec{\omega} \times \vec{K}_1 \quad (17.68b)$$

gdzie składowe pędu Q_j i momentu pędu K_j określa wzór (17.59).

Widzimy, że reakcja \vec{R}_1 będzie równa zero, gdy prędkość kąтова ciała będzie równa zero i gdy prędkości ciała v_1, v_2, v_3 nie będą zależeć od czasu. Zatem na jedno ciało poruszające się ruchem jednostajnym po linii prostej w ośrodku nieograniczonym cieczy nieściśliwej i nielepkiej, przy pominięciu sił ciężkości i założeniu przepływu potencjalnego tej cieczy, nie działa żadna siła. Należy podkreślić, że w ośrodku cieczy znajduje się tylko jedno ciało oraz że nie istnieją w tym ośrodku lub na powierzchni ciała żadne izolowane źródła lub wiry. Powyższe stwierdzenie jest treścią tak zwanego paradoksu d'Alemberta. Jeśli jakies z powyżej wskazanych założeń nie jest spełnione, to reakcja hydrodynamiczna będzie różna od zera.

Ze wzoru (17.68b) widać, że przy $v_1, v_2, v_3 = \text{const}, \vec{Q}_1 \neq 0, \vec{\omega} = 0$

$$\vec{M}_1 = - \vec{v}_A \times \vec{Q}_1 \quad (17.69a)$$

Moment ten jest równy zero wtedy, gdy ciało porusza się wzdłuż jednego z 3 głównych kierunków ruchu; to jest kiedy $\vec{v}_A \parallel \vec{Q}_1$. Inaczej warunek dla głównych kierunków ruchu ciała możemy zapisać:

$$v_1 \parallel Q_1 = m_{11} v_1 + m_{12} v_2 + m_{13} v_3$$

$$v_2 \parallel Q_2 = m_{22} v_2 + m_{12} v_1 + m_{23} v_3$$

$$v_3 \parallel Q_3 = m_{33} v_3 + m_{13} v_1 + m_{23} v_2$$

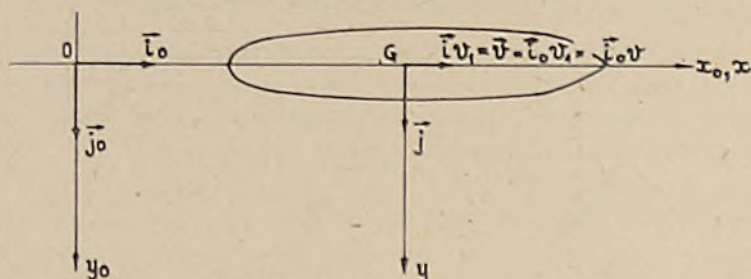
Zależność powyższa może być spełniona wtedy, gdy

$$m_{12} = m_{13} = m_{23} = 0$$

Z powyższego i zależności (17.60), (17.61) widzimy, że główne kierunki ruchu leżą w płaszczyznach symetrii ciała. Jeśli ciało nie ma płaszczyzn symetrii, to główne kierunki ruchu a także środek mas hydrodynamicznych -

punkt centralny ciała - analog środka masy ciała - można wyznaczyć w ten sam sposób, w jaki znajduje się główne osi bezwładności ciała.

Z trzech głównych kierunków ruchu ciała uzyskuje się stabilny ruch ciała ze stałą prędkością tylko wzdłuż kierunku, któremu odpowiada największa masa hydrodynamiczna m_{jj} ; $j = 1, 2, 3$. Dla uzasadnienia tego stwierdzenia rozpatrzmy ruch w płaszczyźnie poziomej Gxy ciała wydłużonego z prędkością $\vec{v} = \vec{i} v_1$ jak na rysunku 17.21.



Rys.17.21

W chwili $t_0 = 0$ reakcje $R_{11} = R_{12} = 0$ i $M_1 = -(m_{22} - m_{11}) v_1 v_2 = 0$ bo $v_1 = \text{const}$, a $v_2 = 0$. Dla ciała wydłużonego o orientacji układu współrzędnych jak na rysunku 17.21 mamy $m_{22} > m_{11}$. Jeśli w chwili $t = t_0 + \Delta t$ zadziała małe zakłócenie odchylające statek od kursu $\Psi = 0$, to prędkość v nie ulegnie zmianie i reakcje hydrodynamiczne będą:

$$R_{11} = R_{12} = 0$$

$$\vec{M}_1 = -\vec{v}_A \times \vec{Q}_1 = -\vec{k} (m_{22} - m_{11}) v_1 v_2 \quad (17.69b)$$

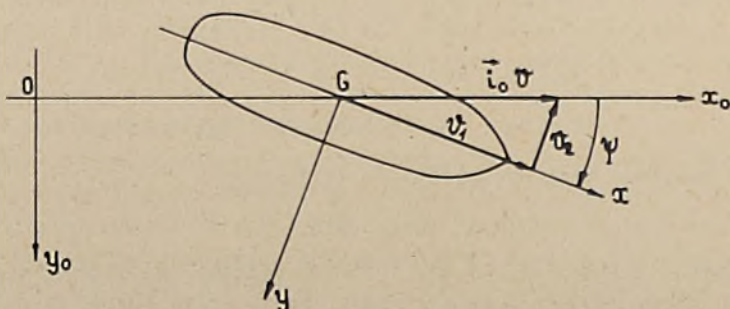
lub

$$\vec{M}_1 = \vec{k} (m_{22} - m_{11}) \frac{v^2}{2} \sin 2\Psi$$

bo z rysunku 17.22 mamy:

$$v_1 = v \cos \Psi$$

$$v_2 = -v \sin \Psi$$



Rys.17.22

Widzimy, że w przypadku zakłócenia ruchu powstał moment M_i działający w tym samym kierunku, co wzrastanie kąta Ψ . Zatem przy ruchu wzdłuż osi Gx równowaga ruchu jest chwiejna.

Z badania równowagi ruchu w tym przypadku można zastosować wzór (10.27). Ze wzoru (17.69b) wynika, że $M_i = 0$ dla $\Psi = 0$ i $\Psi = \pm \frac{\pi}{2}$. Sprawdziliśmy, że położenie statku dla $\Psi = 0$ (ruchu wzdłuż osi Gx) jest niestateczne. A czy ruch statku wzdłuż osi Gy jest stateczny? Na mocy (10,27) mamy warunek istnienia położenia równowagi statycznej

$$\frac{\partial M_i}{\partial \Psi} < 0$$

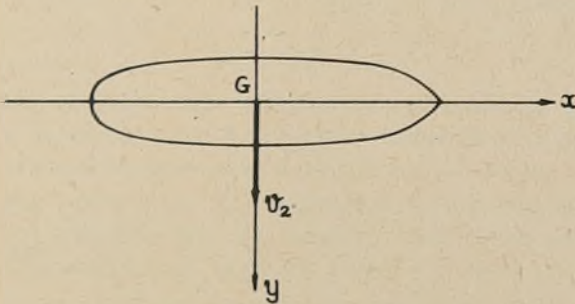
Więc

$$\frac{\partial M_i}{\partial \Psi} = v^2 (m_{22} - m_{11}) \cos 2\Psi \quad (17.69c)$$

Ponieważ $m_{22} > m_{11}$, więc dla $\Psi = 0$, $\frac{\partial M_i}{\partial \Psi} > 0$, a dla $\Psi = \pm \frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial M_i}{\partial \Psi} < 0$ i ruch jednostajny wzdłuż osi Gy jest ruchem statecznym. Ruchowi temu odpowiada maksimum energii kinetycznej cieczy. Łatwo to sprawdzić, bo

$$\frac{\partial E_k}{\partial \Psi} = M_i = (m_{22} - m_{11}) \frac{v^2}{2} \sin 2\Psi$$

$$a \quad \frac{\partial M_i}{\partial \Psi} = \frac{\partial^2 E_k}{\partial \Psi^2} \quad (17.69d)$$



Rys.17.23

Ogólnie, dla trzech głównych kierunków ruchu ciała stateczny ruch bezwładnościowy występuje tylko wzdłuż tego głównego kierunku ruchu, któremu odpowiada maksimum energii kinetycznej cieczy; inaczej - wzdłuż tego głównego kierunku, z którym związana jest maksymalna wartość masy hydrodynamicznej. Ciało wydłużone będzie się zatem poruszać tak, jak pokazano na rysunku 17.23. I w rzeczywistości tak jest. Przykładem może być drewniana listwa pływająca na lekko sfalowanej wodzie jeziora lub statek z awarią głównego napędu. Statek pozbawiony napędu dryfuje bokiem do grzbietów nadbiegających fal - sytuacja bardzo niebezpieczna dla statku.

17.6.3. Ruch statku wzdłuż linii prostej

Jeśli statek porusza się po linii prostej, to $v_2 = v_3 = 0$, $\omega = 0$ i z równań (17.67) pozostaje tylko jedno równanie:

$$(m + m_{11}) \frac{dv}{dt} = F_1 \quad m_{11} \approx 0,1 m \quad (17.70)$$

Tu już wskazaćemy na to, że nie wszystkie statki mają wrodzoną zdolność do poruszania się po linii prostej - inaczej: stateczność kursową. Tym zagadnieniem zajmować się będziemy w oddzielnych wykładach ze sterowności. Obecnie założymy, że statek porusza się kursem prostym.

Siła F_1 jest sumą rzutów na kierunek prędkości statku wszystkich sił działających na statek za wyjątkiem reakcji bezwładności wody. Dla statku poruszającego się po linii prostej na wodzie spokojnej, przy bezwietrznej pogodzie:

$$F_1 = T_s - R_s \quad (17.71)$$

gdzie: T_s - napór pędnika, przeważnie śruby napędowej pracującej za kadłubem statku;

R_s - opór statku wraz z pędnikiem.

Jeśli $F_1 > 0$, to statek się rozpędza. Jeśli $F_1 < 0$, to statek hamuje, a przy $F_1 = 0$ mamy ruch jednostajny statku wzdłuż linii prostej. Wszystkie te trzy przypadki ruchu statku mają bardzo ważne znaczenie w stosowanej hydromechanice okrętu. Najważniejszym z nich dla projektanta statku i dla stoczni jest przypadek $F_1 = 0$ lub

$$T_s = R_s \quad (17.71a)$$

Równość (17.71a) przedstawia matematyczne sformułowanie jednego z podstawowych problemów projektowania mówiącego o tym, że statek musi uzyskać prędkość $v = v_s$ zadaną w kontrakcie. Z problemów podstawowych projektowania statku, dotyczących hydromechaniki okrętowej, poznaliśmy już równanie ciężarów: $D = P$ oraz problemy związane ze statecznością poprzeczną.

Równość $T_s = R_s$ przy $v_s = \text{const}$ pokazuje sposób wyznaczania oporu R_s statku rzeczywistego z pracującym pędnikiem. Widzimy, że wystarczy tu pomierzyć napór śruby napędowej poprzez pomiar siły wzdłużnej w wale napędowym śruby okrętowej. Ze względów „techniczno-ekonomicznych”, możliwych jednak do przewyciężenia, nie przeprowadza się w czasie zdawania statku pomiarów naporu śruby T_s . Więc zwykle nie znamy oporu statku R_s !

Pomiary naporu śruby T_s wykonuje się na modelach statków podczas „badań napędowych”. Na modelach statku możemy również pomierzyć opór modelu bez pracującej śruby. Opór ten oznacza się przez R_{Tm} i nazwy się oporem całkowitym. Wskaźnik m oznacza model; natomiast R_T - oznacza opór statku bez pracującej śruby. Kiedy mówi się o oporze statku, bez żadnych przyłotników, to należy przez to rozumieć, że mówi się o oporze statku bez pracującej śruby napędowej.

Wprowadzenie śruby napędowej za kadłub statku powoduje wzrost oporu. Ten wzrost oporu zwie się ssaniem śruby i oznacza przez ΔR lub ΔT . Wpro-

wadza się pojęcie: współczynnik ssania t , określony tak:

$$t = \frac{\Delta R}{R_S} = \frac{\Delta T}{T_S} \quad (17.72)$$

Przy uwzględnieniu określenia współczynnika ssania (pór, R_S , statku i pracująca śrubą będzie:

$$R_S = R_T + \Delta R = R_T + t R_S$$

Stąd niezbędny napór śruby T_S dla uzyskania zadanej prędkości u_S jest:

$$T_S = R_S = \frac{R_T}{1-t} \quad (17.73)$$

gdzie współczynnik ssania t określa wzór:

$$t = 1 - \frac{R_T}{R_S} \approx 0,05 \div 0,5 \quad (17.74)$$

Ze wzoru (17.74) widać, że współczynnik ssania t możemy wyznaczyć eksperymentalnie poprzez pomiar oporu modelu R_T i pomiar oporu modelu z pracującą śrubą napędową $R_S = T_S$.

W hydromechanice okrętowej wprowadza się pojęcie śruby swobodnej. Jest to śruba napędowa pracująca w zbiorniku wody z dala od kadłuba statku. Napór śruby swobodnej oznacza się przez T , a moment niezbędny do obracania jej ze stałą liczbą obrotów, n , oznacza się literą Q . Śruba swobodna pracuje w innych warunkach niż śruba napędowa usytuowana za kadłubem modelu; mamy różne pola prędkości. W związku z tym napory tych śrub mogą być różne: $T_S \neq T$. Dla oceny różnicy pomiędzy naporami T_S i T wprowadza się współczynnik ξ_T zwany modyfikatorem naporu

$$\xi_T = \frac{T_S}{T} \approx 1 \quad (17.75)$$

Możemy znaleźć ξ_T na drodze eksperymentalnej.

Podobnie określa się modyfikator momentu ξ_Q

$$\xi_Q \equiv \xi_T = \frac{Q}{Q_S} \approx 1 \quad (17.76)$$

Współczynnik ξ_T zwie się przeważnie sprawnością rotacyjną.

Wprowadzono wyżej wielkości: R_S , R_T , T_S , T , ξ_T , $\xi_Q \equiv \xi_T$ a ponadto współczynniki strumienia nadążającego w, wprowadzone w rozdziale 12.5 wyznacza się na drodze eksperymentalnej w tak zwanych badaniach oporowo-napędowych. Projektanta statku interesuje jednak nie model, lecz statek rzeczywisty, który jest projektowany, a następnie budowany na zamówienie armatora. Musimy zatem znać sposób ekstrapolacji wyników badań modelowych na statek rzeczywisty. Szerzej zajmować się będziemy tym problemem po omówieniu podstaw modelowania hydrodynamicznych procesów.

Równanie (17.70) dla statku przyspieszającego może służyć do wyznaczenia długości rozbiegu statku podczas prób zdawczo-obiorczych na mili po-

miarowej. Widzimy z niego, że przy ruchu niejednostajnym na mili pomiarowej napór śruby napędowej T_s jest

$$T_s = R_s + (m + m_{11}) \frac{dv}{dt}$$

Przy uzyskanej średniej prędkości v_s na mili pomiarowej w przypadku ruchu niejednostajnego napór niezbędny T_s jest większy od tego, gdy $v_s = \text{const}$ i silnik napędu głównego może zostać przeciążony.

Prędkość statku będzie ulegać zmniejszeniu, gdy $F_1 = T_s - R_s < 0$. Napór śruby T_s może spełniać związki

$$T_s > 0; \quad T_s = 0; \quad T_s < 0$$

Stosowanie $T_s < 0$ ma miejsce w przypadku hamowania awaryjnego. Wtedy przy wyposażeniu statku w różnie ukształtowane urządzenia hamujące - otwieranie gruszki dziobowej, wysuwane z kadłuba kłapy, ... - możemy także zwiększyć opór statku R_s .

Równanie (17.70) może stanowić także podstawę do eksperymentalnego wyznaczania masy hydrodynamicznej m_{11} . Schemat postępowania jest następujący: Przede wszystkim wyznaczyć należy krzywą $R_T(v)$. Następnie należy do modelu przyłożyć stałą siłę napędzającą $X(t) = X u(t)$, gdzie $X = \text{const}$, a $u(t)$ - funkcja skokowa. Wyznacza się dalej przyspieszenie modelu w zależności od prędkości modelu. Mając te wielkości masę hydrodynamiczną obliczyć można ze wzoru:

$$m_{11} = \frac{X - R_T}{\frac{dv}{dt}} - m$$

Podobne postępowanie można zastosować do eksperymentalnego wyznaczania masy $m_2 \approx m$.

17.7. REAKCJE BEZWŁADNOŚCI DZIAŁAJĄCE NA CIAŁA ZMIENIAJĄCE KSZTAŁT

Przy ruchu ciała w ośrodku nieograniczonym, które zmienia swój kształt z upływem czasu, reakcje o charakterze bezwładnościowym są określone tymi samymi wyrażeniami co w przypadku ruchu ciała sztywnego. Pozostają zatem w mocy wzory (17.44), (17.45) i (17.68). Różnica pomiędzy obu przypadkami polega na tym, że powierzchnia S ograniczająca ciało zależy od czasu dla ciała zmieniającego swój kształt. Wynika to stwierdzenie z wyprowadzeń wzorów (17.39) i (17.40). Masy towarzyszące m_{jk} ciała deformującego się będą zależne od czasu. Należy to mieć na uwadze przy korzystaniu ze wzorów (17.68). I tak zgodnie ze wzorem (17.68a) składowa \vec{R}_1 w kierunku j , R_j , będzie

$$R_j = - \frac{d'Q_j}{dt} - (\vec{\omega} \times \vec{d})_j \quad b$$

$$Q_j = m_{kj} v_k \quad (17.53)$$

gdzie:

$$\frac{d'Q_j}{dt} = m_{jk} \frac{d v_k}{dt} + v_k \frac{dm_{jk}}{dt} \quad (17.77)$$

Jako przykład zastosowania wzoru (17.77) wyznaczmy reakcję bezwładności działającą na kulę poruszającą się z prędkością v_0 i jednocześnie zmieniającą w czasie swój promień r_0 .

Zgodnie ze wzorem (12.122b) potencjał jednostkowy kuli jest

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2} \frac{r_0^3}{r^2} \cos \chi$$

Masy towarzyszące zgodnie ze wzorem (17.54) będą:

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = -\varphi \oint_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS$$

gdzie:

$$\varphi_1 \Big|_{r=r_0} = -\frac{1}{2} r_0 \cos \chi$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r=r_0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \cos \chi$$

$$dS = dS_r = r_0^2 \sin \chi \, d\chi \, d\theta$$

Więc

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = \frac{2}{3} \pi r_0^3 \varphi \quad (17.78)$$

Pozostałe masy towarzyszące $m_{jk} = 0$.

Zauważmy, że współczynnik masy towarzyszącej kuli

$$k_{11} = \frac{m_{11}}{\varphi V} = \frac{1}{2}$$

gdzie: V - objętość kuli.

Jeśli kula zmienia swój promień z upływem czasu, to we wzorze (17.78)

$r_0 = r_0(t)$. Załóżmy, że prędkość kuli ma kierunek osi Oz , $\vec{v}_0 = \vec{e}_z v_0$.

Wtedy:

$$\vec{Q}_1 = \vec{e}_z m_{33} v_0$$

a reakcja bezwładności:

$$\begin{aligned} \vec{R}_1 &= \vec{e}_z R_z = -\frac{d'Q_1}{dt} = -\vec{e}_z \frac{d'}{dt} (m_{33} v_0) = \\ &= -\vec{e}_z \left(m_{33} \frac{d'v_0}{dt} + v_0 \frac{d'm_{33}}{dt} \right) \end{aligned}$$

gdzie:

$$\frac{d'm_{33}}{dt} = \frac{2}{3} \pi \varphi \frac{d'(r_0^3)}{dt} = 2\pi \varphi r_0^2(t) \frac{dr_0}{dt} = \frac{1}{2} \varphi \frac{dV}{dt}$$

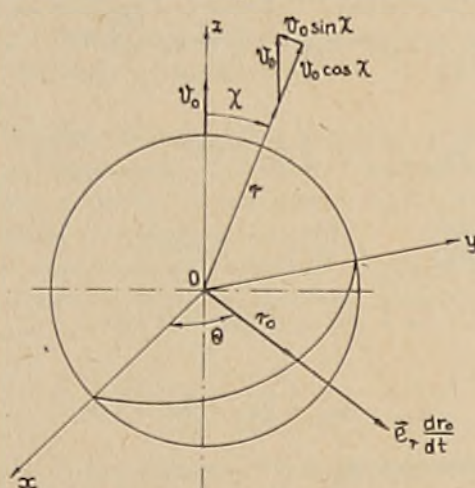
Ten sam wynik uzyskać można na znacznie dłuższej drodze poprzez wyznaczenie potencjału przepływu φ , znalezieniu rozkładu ciśnień na powierzchni kuli oraz zastosowaniu wzoru dla reakcji hydrodynamicznej (5.7a). Naszkicujemy sposób postępowania.

Zadanie rozwiązujemy w układzie odniesienia związanym z deformującą się kulą. Prędkość deformacji kuli według założenia jest:

$$\vec{v}_d = \vec{e}_r \frac{dr_0}{dt}$$

Zakładamy, że płyn jest nieściśliwy i nielepki, a przepływ płynu ma potencjał φ . Potencjał φ ma spełniać równanie Laplace'a:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (a)$$



Rys. 17.24

warunkami brzegowymi:

na powierzchni kuli dla $r=r_0$ (rys. 17.24):

$$v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=r_0} = v_0 \cos \chi + \frac{dr_0}{dt} \quad (b)$$

w nieskończoności:

$$r \rightarrow \infty \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \rightarrow 0 \quad \text{lub} \quad \varphi \rightarrow 0 \quad (c)$$

rzewidujemy rozwiązanie zadania w postaci:

$$\varphi = v_0 P(r) \cos \chi + Q(r) \quad (d)$$

Podstawiamy (d) do (b); mamy:

$$v_0 \cos \chi \left[\frac{d}{dr} (r^2 P) - 2P \right] + \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dQ}{dr} \right) = 0$$

Stąd dla każdego r i χ mamy równania:

$$\frac{d}{dr} (r^2 P) - 2P = 0$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 Q) = 0$$

Zatem:

$$P(r) = Ar + \frac{B^2}{r^2}$$

$$Q(r) = -\frac{C}{r}$$

Po podstawieniu powyższych wyrażeń do związku (d) i po uwzględnieniu warunków brzegowych (b) i (c) potencjał przepływu φ jest:

$$\varphi = -\frac{r_0^3}{2r^2} v_0 \cos \chi - \frac{r_0^2}{r} \frac{dr_0}{dt} \quad (e)$$

Przy wzięciu pod uwagę wzorów (12.55) i (12.78c) możemy się przekonać, że pierwszy składnik potencjału przepływu φ przedstawia potencjał dipola o momencie:

$$\vec{m} = \vec{e}_z 2\pi r_0^3 v_0$$

a drugi - potencjał źródła o wydatku

$$Q(t) = 4\pi r_0^2 \frac{dr_0}{dt} = \frac{dV}{dt}$$

gdzie V jest objętością kuli. Dipol i źródło są usytuowane w początku układu związanego z kulą Oxyz - rysunek 17.24.

Powyższe jest przykładem składania potencjałów osobliwości hydrodynamicznych w celu uzyskania potencjałów złożonych przepływów; w tym przypadku kuli.

Rozkład ciśnień w płynie i na powierzchni kuli znajduje się z całki Cauchy'ego-Lagrange'a. Pomijamy siły grawitacyjne. Stałą $C(t)$ wyznaczamy w nieskończoności dla

$$r \rightarrow \infty \quad \varphi \rightarrow 0 \quad \text{a} \quad p = p_0 = \text{const.}$$

Więc:

$$\frac{p-p_0}{\rho} = -\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right]$$

gdzie:

$$\vec{v}_e = v_0 (\vec{e}_r \cos \chi - \vec{e}_\chi \sin \chi)$$

Składowe pola prędkości płynu na powierzchni kuli, dla $r=r_0$ są:

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_0 \cos \chi + \frac{dr_0}{dt}$$

$$v_\chi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \chi} = \frac{1}{2} v_0 \sin \chi$$

$$v_{\theta} = \frac{1}{r \sin \chi} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$$

$$\vec{v} = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_{\chi} v_{\chi} + \vec{e}_{\theta} v_{\theta}$$

Współczynnik ciśnienia możemy już prosto obliczyć. Wyraża się on wzorem:

$$C_p = \frac{p-p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = 1 - \frac{\rho}{4} \sin^2 \chi + \frac{r_0 \cos \chi}{v_0^2} \frac{dv_0}{dt} +$$

$$+ \frac{3}{v_0} \cos \chi \frac{dr_0}{dt} + \frac{4}{v_0^2} \left(\frac{dr_0}{dt} \right)^2 + \frac{2 r_0}{v_0^2} \frac{d^2 r_0}{dt^2} \quad (f)$$

Dla sztywnej kuli: $r_0 = \text{const}$, zerują się trzy ostatnie wyrazy powyższego wzoru. Natomiast dla sztywnej kuli poruszającej się ze stałą prędkością v_0 współczynnik ciśnienia jest:

$$C_p = 1 - \frac{\rho}{4} \sin^2 \chi$$

W tym ostatnim przypadku reakcja hydrodynamiczna jest równa zeru: \vec{R} i $\vec{M}=0$, co jest zgodne z paradoksem d'Alemberta.

Obliczmy reakcję \vec{R} dla współczynnika ciśnienia określonego wyrażeniem (f). Mamy:

$$\vec{R} = - \int_S (p-p_0) \vec{n} dS = - \frac{1}{2} \rho v_0^2 \int_S C_p \vec{n} dS = \vec{e}_1 R_x + \vec{e}_2 R_y + \vec{e}_3 R_z$$

gdzie:

$$\vec{n} = \vec{e}_1 n_x + \vec{e}_2 n_y + \vec{e}_3 n_z$$

$$n_x = \cos \theta \sin \chi$$

$$n_y = \sin \theta \sin \chi$$

$$n_z = \cos \chi$$

$$dS = r_0^2 \sin \chi d\chi d\theta$$

Wykonując całkowania uzyskujemy następujące wyniki:

$$R_x = - \frac{1}{2} \rho v_0^2 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^{\pi} r_0^2 \sin^2 \chi C_p d\chi = 0$$

$$R_y = 0$$

$$R_z = - \frac{2}{3} \pi \rho r_0^3 \frac{dv_0}{dt} - 2 \pi \rho r_0^2 v_0 \frac{dr_0}{dt} = - m_{33} \frac{dv_0}{dt} - v_0 \frac{dm_{33}}{dt}$$

Więc mamy wynik zgodny z uzyskanym na drodze znacznie prostszej.

Sprawdźcie, że masa towarzysząca walca kołowego przypadająca na jednostkę jego długości - przepływ płaski - jest:

$$m_{11} = m_{22} = \rho \pi r_0^2$$

gdzie: r_0 - promień walca. Obliczcie w ten sam sposób, jak wyżej w przypadku kuli, reakcję hydrodynamiczną działającą na walec, którego promień zmienia się z upływem czasu, np.:

$$r_0 = a + b \cos \omega t$$

Widzimy, że reakcje hydrodynamiczne możemy wyznaczyć w sposób mniej lub bardziej pracochłonny. Gdy mamy słabsze przygotowanie teoretyczne, inaczej - gorsze narzędzia pracy, to dla uzyskania założonego celu więcej musimy się napracować i więcej czasu stracimy.

17.8. ODDZIAŁYWANIE TRÓJWYMIAROWEGO PRZEPŁYWU POTENCJALNEGO NA STATKI NAWODNE

Reakcje hydromechaniczne działające na statki nawodne przy założeniu przepływu potencjalnego wody - cieczy możemy wyznaczyć albo z ogólnych wzorów (5.7a) i (5.8a) dla \vec{R} i \vec{M} , lub też - tak samo jak w przypadku ruchu ciała w ośrodku nieograniczonym - przez zastosowanie zasady pędu. Pierwsze podejście jest prostsze. Rozpatrzmy więc najpierw ten przypadek. Założymy, że ciecz jest nieściśliwa i jednorodna i że jest dany potencjał przepływu w układzie odniesienia związanym ze statkiem, φ . Jest to potencjał przepływu absolutnego:

$$\vec{v} = \nabla \varphi$$

Podwodna część kadłuba statku ograniczona jest powierzchnią S , a prędkość powierzchni S określa wzór:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_s$$

gdzie: \vec{r}_s - jest promieniem wodzącym elementu powierzchni S . Na swobodnej powierzchni S_F panuje stałe ciśnienie p_0 . Stałą $C(t)$ w całce Cauchy'ego-Lagrange'a wyznaczmy daleko przed statkiem na niezakłóconej swobodnej powierzchni.

Więc:

$$p - p_0 = -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi + \frac{v^2}{2} + U \right) = -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U \right)$$

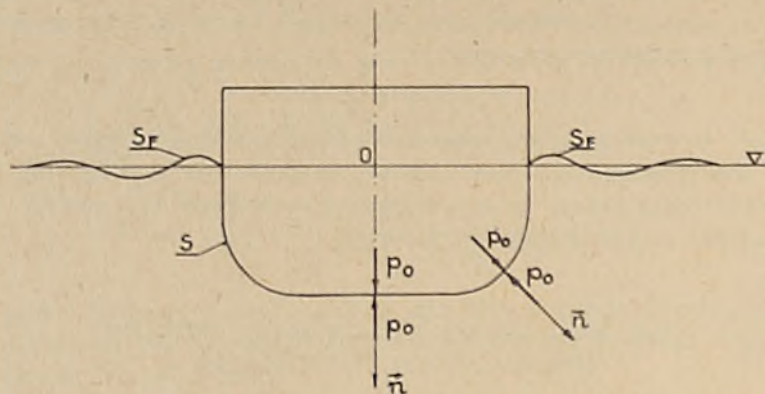
gdzie: $\vec{v}_e = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$ - prędkość unoszenia statku,
 U - potencjał sił grawitacyjnych.

Zgodnie ze wzorem (5.7a) reakcja \vec{R} działająca na statek jest:

$$\vec{R} = - \int_S (p - p_0) \vec{n} dS$$

gdzie: \vec{n} - zewnętrzna normalna do powierzchni S .

W powyższym wzorze wzięto zamiast p , $p - p_0$, bo po obu stronach poszycia kadłuba, powierzchni S , panuje ciśnienie p_0 . Pokazuje to rysunek 17.25.



Rys. 17.25

Zwróćmy uwagę jeszcze na to, że na powierzchni S prędkość $\vec{v}_s = \vec{v}_e \Big|_S$ i że:

$$\vec{v}_e \cdot \vec{n} = \vec{v}_s \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \nabla \varphi \Big|_S = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S$$

Przypomnijmy, że powyższy warunek ma miejsce w przypadku nieprzepuszczalności powierzchni S i niewystępowanie odrywania przepływu.

Po podstawieniu wyrażenia dla rozkładu pola ciśnień na powierzchni S do wzoru dla reakcji \vec{R} mamy:

$$\vec{R} = \rho \int_S U \vec{n} \, dS + \rho \int_S \frac{v^2}{2} \vec{n} \, dS + \rho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} \, dS \quad (17.79)$$

Widzimy, że uzyskaliśmy taki sam wzór dla \vec{R} jak dla przypadku ruchu statku podwodnego w nieograniczonym oceanie. Reakcje hydromechaniczne jednak tam i tu będą inne, bo różne będą w obu przypadkach potencjały prędkości a także zasadnicza różnica występuje w powierzchniach ograniczających kadłub statku. Tam była powierzchnia zamknięta, a tu jest powierzchnią otwartą: kadłub statku przecina swobodną powierzchnią S_F . Wyraźnie to będzie widoczne, gdy przekształcimy wzór (17.79) do postaci analogicznej do wzoru (17.39a).

Zgodnie ze wzorem (14.11) mamy:

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} \, dS = \frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{n} \, dS - \int_S \nabla \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, dS + \oint_{\partial S} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_s$$

bo $\vec{v}_s \cdot \vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$

Podstawiając powyższą zależność do wzoru (17.79) otrzymujemy wyrażenia dla \vec{R} w postaci:

$$\begin{aligned} \vec{R} = & \rho \int_S U \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \rho \int_S \varphi \vec{n} \, dS + \\ & + \rho \int_S \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \vec{n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \nabla \varphi \right] dS + \rho \oint_{\partial S} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_S \end{aligned} \quad (17.80)$$

Jeśli powierzchnia S jest powierzchnią zamkniętą, to $\partial S = 0$ i ostatnia całka krzywoliniowa znika. Widzimy stąd, że wzór (17.39a) jest szczególnym przypadkiem wyrażenia (17.80). Podobnie możemy znaleźć wyrażenie dla momentu \vec{M} względem początku A ruchomego układu odniesienia. Zgodnie ze wzorem (5.8a)

$$\begin{aligned} \vec{M} = & - \int_S (p - p_0) \vec{r}_S \times \vec{n} \, dS = \rho \int_S U \vec{r}_S \times \vec{n} \, dS + \rho \int_S \frac{v^2}{2} \vec{r}_S \times \vec{n} \, dS + \\ & + \rho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\vec{r}_S \times \vec{n}) \, dS \end{aligned} \quad (17.81a)$$

Wyrażenie powyższe można doprowadzić, przy pomocy wzoru (14.14c), do postaci podobnej do wzoru (17.80). Istotnie, przy wzięciu pod uwagę, że \vec{r}_0 we wzorze (14.14c) jest równe \vec{r}_S we wzorze (17.81a), mamy:

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\vec{r}_S \times \vec{n}) \, dS = & \vec{v}_A \times \int_S \varphi \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \int_S (\vec{r}_S \times \vec{n}) \varphi \, dS - \\ & - \int_S \vec{r}_S \times \vec{n} \cdot \vec{v}_S \otimes \nabla \varphi \, dS - \oint_{\partial S} \varphi \vec{r}_S \times (\vec{v}_S \times d\vec{r}) = \\ = & \vec{v}_A \times \int_S \varphi \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \int_S (\vec{r}_S \times \vec{n}) \varphi \, dS - \\ & - \int_S \vec{r}_S \times \frac{\partial \varphi}{\partial n} \nabla \varphi \, dS + \oint_{\partial S} \vec{r}_S \times (d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_S) \end{aligned}$$

Po podstawieniu powyższego związku do wzoru (17.81a) uzyskuje się wzór dla momentu \vec{M} w postaci:

$$\begin{aligned} \vec{M} = & \rho \int_S U \vec{r}_S \times \vec{n} \, dS + \vec{v}_A \times \rho \int_S \varphi \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \rho \int_S (\vec{r}_S \times \vec{n}) \varphi \, dS + \\ & + \rho \int_S \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 (\vec{r}_S \times \vec{n}) - \vec{r}_S \times \frac{\partial \varphi}{\partial n} \nabla \varphi \right] dS + \rho \oint_S \vec{r}_S \times (d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_S) \end{aligned} \quad (17.81b)$$

Jeśli S jest powierzchnią zamkniętą, to ostatnia całka w wyrażeniu (17.81b) jest oczywiście równa zeru. Dla jasności należy podkreślić, że we wzorze (17.81a)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial' \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial' \varphi}{\partial t} - \vec{v}_s \cdot \nabla \varphi$$

bo na powierzchni S $\vec{v}_e = \vec{v}_s$.

Jeśli oznaczymy przez \vec{r}_{os} promień wodzący powierzchni S względem początku nieruchomego układu odniesienia, to moment \vec{M}_0 reakcji hydrodynamicznej względem początku układu nieruchomego będzie:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0 &= - \int_S (p - p_0) \vec{n} \, dS = \\ &= \rho \int_S U \vec{r}_{os} \times \vec{n} \, dS + \rho \int_S \frac{v^2}{2} (\vec{r}_{os} \times \vec{n}) \, dS + \rho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\vec{r}_{os} \times \vec{n}) \, dS = \\ &= \rho \int_S U \vec{r}_{os} \times \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \rho \int_S \varphi \vec{r}_{os} \times \vec{n} \, dS + \\ &+ \rho \int_S \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \vec{r}_{os} \times \vec{n} - \vec{r}_{os} \times \frac{\partial \varphi}{\partial n} \nabla \varphi \right] dS + \\ &+ \rho \oint_S \vec{r}_{os} \times (d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_s) \end{aligned} \quad (17.81c)$$

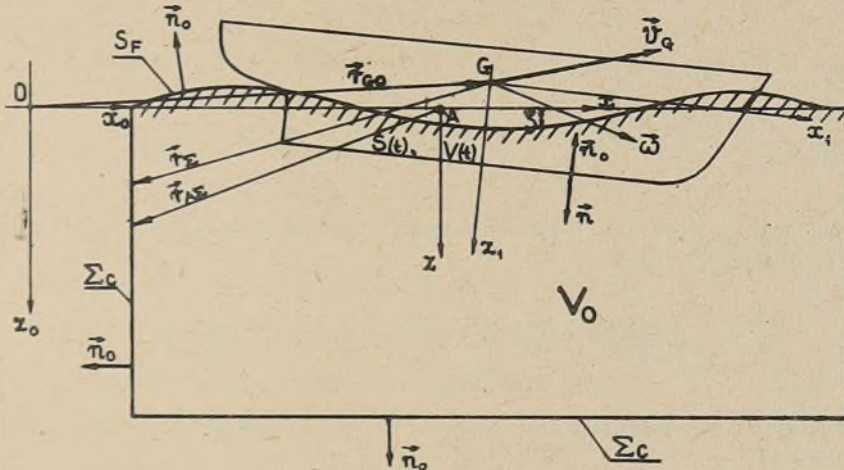
Widzimy, że dla powierzchni zamkniętej S wzór (17.81c) jest taki sam, jak wzór (17.40a).

Zanim przejdziemy do rozpatrywania szczególnych przypadków wzoru (17.80) i ich zastosowania praktycznego, wprowadzimy jeszcze wzór ten przez bezpośrednie zastosowanie zasady pędu.

17.8.1. Zastosowanie zasady pędu do wyznaczania oddziaływania przepływu potencjalnego na statki nawodne

Do opisanie ruchu statku nawodnego stosuje się zwykle trzy kartezjańskie prawoskrętne układy odniesienia. Pierwszy nieruchomy $Ox_0y_0z_0$ o osiach Ox_0, Oy_0 , leżących na niezakłóconej swobodnej powierzchni wody i osi Oz_0 , skierowanej pionowo w dół; wersory tego układu: $\vec{e}_{01}, \vec{e}_{02}, \vec{e}_{03}$. Drugi układ $Axyz$ leżący także na niezakłóconej powierzchni wody o osi Az skierowanej pionowo w dół i poruszający się z prędkością $\vec{v}_A = \vec{e}_x v_{Ax} + \vec{e}_z v_{Az}$ oraz obrócony względem układu $Ox_0y_0z_0$ o kąt Eulera Ψ . Trzeci układ $Gx_1y_1z_1$ jest sztywno związany ze statkiem, przy czym G jest środkiem masy statku. Prędkość środka masy $\vec{v}_G = \vec{i} u + \vec{j} v + \vec{k} w$, a prędkość kątowa statku jest $\omega = \vec{i} p + \vec{j} q + \vec{k} r = \vec{i} \omega_x + \vec{j} \omega_y + \vec{k} \omega_z$. Zależności pomiędzy tymi

układami odniesienia przedstawione są w rozdziałach 12.7.1 i 12.7.2. Jeśli składowa prędkości $w=0$ a także $\omega_y = \omega_x = 0$ i kąty $\Phi = \Theta = 0$, to układy $Axyz$ i $Gx_1y_1z_1$ są do siebie równoległe. Zwykle zakłada się wtedy, że punkty G i A leżą na jednej linii pionowej. W przypadku kołysań statku o małych amplitudach zakłada się, że układ $Axyz$ porusza się ze średnią prędkością środka masy statku G .



Rys.17.26

Układy te wraz z powierzchnią kontrolną $S_c = S_F + \Sigma_c$ pokazuje rysunek 17.26. Zakładamy, że powierzchnia kontrolna Σ_c jest nieruchoma względem układu $Axyz$. Porusza się ona zatem z prędkością

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{e}_{03} \dot{\Psi} \times \vec{r}_{A\Sigma} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_\Sigma$$

względem układu nieruchomego.

Założymy dalej, że potencjał absolutnej prędkości cieczy φ dany jest dany w układzie związanym ze statkiem: $Gx_1y_1z_1$.

Prąd płynu \vec{Q} zgodnie z (17.1) jest

$$\vec{Q} = \int_{V_0} \rho \nabla \varphi \, dV = \rho \oint_{\partial V_0} \vec{n}_0 \varphi \, dS$$

gdzie: $\partial V_0 = S + S_F + \Sigma_c$

Przy uwzględnieniu, że

$$\vec{F} = -\nabla U \quad P = -p \delta_{ik}$$

równanie (17.2a) będzie miało postać

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} = & - \int_{V_0} \rho \nabla U \, dV - \oint_{\partial V_0} p \vec{n}_0 \, dS = - \oint_{\partial V_0} \rho U \vec{n}_0 \, dS - \int_{S_F + \Sigma_c} p \vec{n}_0 \, dS - \\ & - \int_S (p - p_0) \vec{n}_0 \, dS - \int_S p_0 \vec{n}_0 \, dS \end{aligned}$$

Ale $\vec{n}_0 = -\vec{n}$ więc

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \rho \int_S U \vec{n} \, dS - \rho \int_{S_F + \Sigma_c} \left(U + \frac{p}{\rho} \right) \vec{n}_0 \, dS - \int_S p_0 \vec{n}_0 \, dS - \vec{R} \quad (17.82a)$$

Prędkość zmiany pędu \vec{Q} (17.3a) zapisana w układzie $Gx_1y_1z_1$ (uwzględniono wzór 12.173) jest równa

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \int_{V_0} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \, dV + \vec{\omega} \times \int_{V_0} \rho \vec{v} \, dV + \oint_{\partial V_0} \rho \vec{v} \otimes \vec{v}_w \cdot \vec{n}_0 \, dS$$

Dla założonego przepływu potencjalnego $\vec{v} = \nabla \varphi$ powyższe wyrażenie będzie mieć postać:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \oint_{\partial V_0} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n}_0 \, dS + \vec{\omega} \times \oint_{\partial V_0} \rho \varphi \vec{n}_0 \, dS + \int_{S_F + \Sigma_c} \rho \nabla \varphi \otimes (\nabla \varphi - \vec{v}_s) \cdot \vec{n}_0 \, dS \quad (17.82b)$$

bo na S

$$\vec{v}_w \cdot \vec{n} = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{v}_s \cdot \vec{n}$$

Podstawiamy wyrażenie (17.82b) do wyrażenia (17.82a). Po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \rho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n}_0 \, dS + \vec{\omega} \times \rho \int_S \varphi \vec{n}_0 \, dS + \rho \int_S p_0 \vec{n}_0 \, dS + \\ & + \rho \int_{S_F + \Sigma_c} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U + \frac{p}{\rho} \right) \vec{n}_0 \, dS + \vec{\omega} \times \rho \int_{S_F + \Sigma_c} \varphi \vec{n}_0 \, dS + \\ & + \rho \int_{S_F + \Sigma_c} (\nabla \varphi \otimes \nabla \varphi) \cdot \vec{n}_0 \, dS - \rho \int_{S_F + \Sigma_c} \nabla \varphi \otimes \vec{v}_s \cdot \vec{n} \, dS = \\ & = \rho \int_S U \vec{n} \, dS - \vec{R} \end{aligned} \quad (17.82c)$$

Ale powierzchnia statku S jest nieruchoma w układzie związanym ze statkiem, więc na mocy wzoru (14.13d) pierwsze dwie całki są równe:

$$\frac{d}{dt} \rho \int_S \varphi \vec{n}_0 \, dS$$

Czwartą całkę możemy napisać nieco inaczej przy pomocy całki Cauchy'ego-Lagrange'a

$$\begin{aligned} \int_{S_F + \Sigma_C} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u + \frac{p}{\rho} \right) \vec{n}_0 \, dS &= \int_{S_F + \Sigma_C} \frac{p_0}{\rho} \vec{n}_0 \, dS - \int_{S_F + \Sigma_C} \frac{v^2}{2} \vec{n}_0 \, dS + \\ &+ \int_{S_F + \Sigma_C} \vec{v}_S \cdot \nabla \varphi \otimes \vec{n}_0 \, dS \end{aligned}$$

bp na S_F i Σ_C

$$\vec{v}_e = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_S = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_\Sigma$$

Po uwzględnieniu powyższych uwag oraz tego, że

$$\oint_{\partial V_0} \vec{n}_0 \, dS = 0$$

wyrażenie (17.82c) sprowadzi się do

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho \int_S \varphi \vec{n}_0 \, dS - \rho \int_{S_F + \Sigma_C} \frac{1}{2} v^2 \vec{n}_0 \, dS + \rho \int_{S_F + \Sigma_C} \nabla \varphi \otimes \nabla \varphi \cdot \vec{n}_0 \, dS + \\ + \vec{\omega} \times \rho \int_{S_F + \Sigma_C} \varphi \vec{n}_0 \, dS + \rho \int_{S_F + \Sigma_C} \vec{v}_S \cdot [\nabla \varphi \otimes \vec{n}_0 - \vec{n}_0 \otimes \nabla \varphi] \, dS = \rho \int_S U \vec{n} \, dS - \vec{R} \end{aligned}$$

Na mocy wzoru (12.113e) suma 4 i 5 wyrazu powyższego wyrażenia jest równa:

$$\rho \oint_{\partial(S_F + \Sigma_C)} \varphi \vec{v}_S \times d\vec{r}$$

Więc możemy napisać już wzór końcowy dla reakcji \vec{R}

$$\begin{aligned} \vec{R} = \rho \int_S U \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \rho \int_S \varphi \vec{n} \, dS + \rho \int_{S_F + \Sigma_C} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - \vec{v} v_{n0} \right) \, dS + \\ + \rho \oint_{\partial(S_F + \Sigma_C)} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_S \end{aligned} \quad (17.83)$$

gdzie:

$$v^2 = (\nabla\varphi)^2; \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial n_0} \nabla\varphi = \nabla\varphi \otimes \nabla\varphi \cdot \vec{n}_0$$

Prosto można wykazać, że wzory (17.80) i (17.83) są równoważne. Zgodnie z założeniem w obszarze V_0 nie ma źródeł ani wirów, więc na mocy wzoru (17.41a)

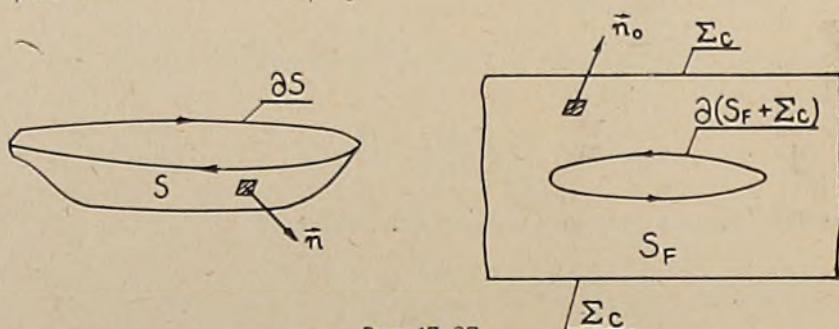
$$\oint_{\partial V_0} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - \vec{n}_0 \cdot \nabla\varphi \otimes \nabla\varphi \right) dS = 0$$

Stąd mamy związek:

$$\begin{aligned} \int_{S_F + \Sigma_C} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial n_0} \nabla\varphi \right) dS &= - \int_S \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial n_0} \nabla\varphi \right) dS = \\ &= \int_S \left(\frac{v^2}{2} \vec{n} - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \nabla\varphi \right) dS \end{aligned} \quad (17.84)$$

Wykazaliśmy zatem, że trzecie wyrazy wzorów (17.80) i (17.83) są takie same. Również ostatnie wyrazy wzorów (17.80) i (17.83) powinny być równoważne. I tak rzeczywiście jest. Przede wszystkim zauważamy, że pętle: $\partial(S_F + \Sigma_C)$ i ∂S opisują tę samą pętlę statku, są zatem identyczne. Kierunek obchodzenia tych pętli określa zewnętrzna normalna do powierzchni $\Sigma_C + S_F$ i S . Zatem na pętli $\partial(S_F + \Sigma_C)$ kierunek ten jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara, a na pętli ∂S jest zgodny z ruchem wskazówek zegara. Pokazuje to rysunek 17.27. Ponieważ obszar V_0 jest ograniczony powierzchnią zamkniętą: $\partial V_0 = S_F + \Sigma_C + S$, to:

$$\oint_{\partial(S_F + \Sigma_C + S)} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_S = 0 = \oint_{\partial(S_F + \Sigma_C)} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_S + \oint_{\partial S} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_S \quad (17.85)$$



Rys.17.27

Więc mamy:

$$\oint_{\partial(S_F + \Sigma_C)} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_S = - \oint_{\partial S} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_S = \oint_{\partial S} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_S \quad (17.86)$$

Widzimy więc, że wzory (17.79), (17.80) i (17.83) wyprowadzone w różny sposób są równoważne. Widzimy także jeszcze raz, że stosowanie zasady pędu względnie zasady krętu do znalezienia ogólnych wyrażeń dla reakcji hydrodynamicznych \vec{R} i \vec{M} jest nieco bardziej pracochłonne i kłopotliwe niż bezpośrednio zastosowanie wzorów ogólnych (5.7) i (5.8), względnie (5.7a) i (5.8a). W ten sposób, w jaki uzyskuje się wzór (17.80) ze wzoru (17.83) i odwrotnie, można napisać następujący wzór dla momentu \vec{M} :

$$\begin{aligned} \vec{M} = & \rho \int_S \vec{r}_s \times \vec{n} \, dS + \vec{v}_A \times \rho \int_S \varphi \vec{n} \, dS + \frac{d}{dt} \rho \int_S (\vec{r}_s \times \vec{n}) \varphi \, dS + \\ & + \rho \int_{S_F + \Sigma_c} \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \vec{r}_s \times \vec{n}_0 - \vec{r}_s \times \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_0} \nabla \varphi \right] dS + \rho \oint_{\partial(S_F + \Sigma_c)} \vec{r}_s \times (d\vec{r} \varphi \vec{v}_s) \end{aligned} \quad (17.87)$$

Wystarczy wziąć pod uwagę wyrażenie (17.81b) i wzory analogiczne do (17.84), (17.85) i (17.86). Postarajcie się o wyprowadzenie wzoru (17.87) przez zastosowanie zasady krętu.

Wszystkie wzory dla reakcji hydrodynamicznych \vec{R} i \vec{M} można wyprowadzić przez zastosowanie zasady zachowania energii, sformułowanej dla płynu w postaci równania (7.36). W ogólnym przypadku ruchu ciała częściowo zanurzonego postępowanie takie jest jednak nieco kłopotliwe.

17.8.2. Uwagi o wzorach dla reakcji hydrodynamicznych działających na statki nawodne

Można postawić pytanie: Po co wyprowadzamy tyle równoważnych wzorów dla reakcji \vec{R} i \vec{M} ? Czy nie wystarczy wzór najprostszy, np.: (5.7a) względnie (17.79)? Jeśli nas interesuje reakcja $\vec{R} \{R_1, R_2, R_3\}$, a ściślej wartości liczbowe R_1, R_2, R_3 , to w zasadzie obojętnym jest, jaki wzór zastosujemy. Jednak ze względu na skrócenie czasu obliczeń, wskazuje na to przykład rozdz. 17, opłaca się zastosowanie wzorów bardziej złożonych. To jest powód pierwszy. Drugi powód wyprowadzenia wzorów złożonych jest taki, że ze wzorów bardziej złożonych uzyskuje się znacznie więcej informacji o reakcjach \vec{R} i \vec{M} , bez wyznaczenia ich wartości liczbowych, niż ze wzorów prostych. I tak na podstawie wzoru (5.7a) wiemy tylko, że reakcja płynu nielepkiego na ciało zależy od rozkładu ciśnień na powierzchni ciała S i od kształtu i wielkości tej powierzchni S . Wzór (17.79) daje nam informacje dodatkowe:

- reakcja hydrodynamiczna jest proporcjonalna do gęstości płynu;
- z reakcji hydrodynamicznej daje się wyodrębnić reakcję hydrostatyczną;
- reakcja \vec{R} zależy ponadto od rozkładu kwadratów prędkości płynu na powierzchni S i od rozkładu pochodnej względem czasu impulsów ciśnień $\rho \varphi$ na powierzchni S .

Jeżeli zastosujemy wzór dla różniczkowania funkcji skalarnej względem czasu w układzie ruchomym

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial' \varphi}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi$$

to wzór (17.79) przybierze postać:

$$\vec{R} = \rho \int_S U \vec{n} dS + \rho \int_S \left[\frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 - \vec{v}_e \cdot \nabla\varphi \right] \vec{n} dS + \rho \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial t} \vec{n} dS$$

W przypadku ruchu jednostajnego ciała potencjał prędkości φ określony w układzie związanym z ciałem nie zależy od czasu i ostatni wyraz powyższego wyrażenia znika. Reakcja \vec{R} wtedy także nie zależy od czasu. Jeśli dalej prędkości indukowane w płynie są małe, to

$$\vec{R} \approx \rho \int_S U \vec{n} dS - \rho \int_S \vec{v}_e \cdot \nabla\varphi \otimes \vec{n} dS$$

W przypadku ruchu jednostajnego ciała wzdłuż linii prostej uzyskujemy wzór

$$\vec{R} \approx \rho \int_S U \vec{n} dS - \rho v_0 \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{n} dS$$

Uzyskać można z tego wyrażenia wzór na opór falowy w ujęciu liniowym:

$$R_w = -R_x = \rho v_0 \int_S \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{n}_x dS \quad (17.88)$$

Wzór (17.80) daje informacje podobne do tych, jakie uzyskano ze wzoru (17.39a). Reakcja hydrodynamiczna \vec{R} w przepływie potencjalnym składa się z reakcji hydrostatycznej R_h , reakcji bezwładności:

$$\vec{R}_1 = \frac{d}{dt} \rho \int_S \varphi \vec{n} dS = - \frac{d\vec{Q}_1}{dt} \quad (17.89)$$

oraz reakcji stacjonarnej:

$$\vec{R}_{st} = \rho \int_S \left(\frac{1}{2} v^2 \vec{n} - v_n \vec{v} \right) dS + \rho \oint_{\partial S} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_s$$

Reakcja \vec{R}_{st} w ogólnym przypadku zależy od czasu, bo: $\vec{v} = \nabla\varphi$, a $\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$. Czas ten jest parametrem. Wiemy, że jeżeli są spełnione warunki paradoksu d'Alemberta, to $\vec{R}_{st} = 0$. Jeśli natomiast któryś z tych warunków nie jest spełniony, to $\vec{R}_{st} \neq 0$.

Porównując wzory (17.89) i (17.43d) dla reakcji hydrodynamicznej o charakterze bezwładnościowym widzimy, że różnica polega tylko na tym, że przy ruchu ciała w ośrodku nieograniczonym mamy całkę po powierzchni zamkniętej, a dla statku nawodnego całka jest po powierzchni otwartej. Jeśli statek pływa pod swobodną powierzchnią wody, to wyrażenia (17.89) i (17.43d) są identyczne. W związku z tym i przy statku nawodnym reakcję \vec{R}_1 powinno się dać wyrazić przy pomocy mas hydrodynamicznych m_{jk} . Zrobiliśmy to już dla statku nawodnego, pływającego z bardzo małymi prędkościami, $F_n \rightarrow 0$. Postać wzoru (17.89) wskazuje na to, że dla statku nawodnego

$$m_{jk} = -\rho \int_S \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS$$

a dla statku całkowicie zanurzonego ważny jest nadal wzór (17.54). Wiemy już, że dla statku sztywnego poruszającego się w ośrodku nieograniczonym masy hydrodynamiczne są stałe - nie zależą od prędkości statku. Czy to stwierdzenie pozostaje w mocy dla statku nawodnego lub płytkozanurzonego? Okazuje się, że w tym przypadku masy hydrodynamiczne zależą od prędkości statku, a nawet od jego przyspieszenia. Dla wykazania istnienia takiej zależności ograniczymy się do sformułowania zadania o wyznaczeniu potencjału prędkości φ z liniowym warunkiem brzegowym na swobodnej powierzchni (15.20) dla $p_c = 0$. Zbiornik wody niech ma głębokość H , a pozostałe wymiary zbiornika niech będą nieograniczone.

Zgodnie z metodą Kirchoffa potencjał φ przedstawiamy w postaci:

$$\varphi = v_k \varphi_k \quad (17.48)$$

Potencjały jednostkowe φ_k spełniają równania Laplace'a:

$$\Delta \varphi_k = 0 \quad (17.49a)$$

i warunki brzegowe:

$$\left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right|_S = n_k \quad (17.49b)$$

na dnie:

$$\left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right|_{z=H} = 0 \quad (16.5)$$

w nieskończoności:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \pm \infty}} \nabla \varphi_k = 0 \quad (16.148)$$

φ_k - ograniczone przy $x \rightarrow -\infty$

na swobodnej powierzchni przy $z=0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{v}_e \cdot \nabla \right)^2 \varphi_k - g \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} - \frac{d \vec{v}_e}{dt} \cdot \nabla \varphi_k = 0 \quad (15.20a)$$

$$\mu = 0, \quad p_c = 0$$

Z warunku brzegowego na swobodnej powierzchni widać, że potencjały jednostkowe będą funkcją prędkości statku \vec{v}_e i jego przyspieszenia $\frac{d \vec{v}_e}{dt}$.

Wnioski dalsze:

- w równaniach (17.67) manewrującego statku nawodnego, którego prędkości nie są małe, masy towarzyszące nie są wielkościami stałymi, lecz zależą od prędkości statku i także od przyspieszenia;
- równanie statku hamującego lub przyspieszającego (17.70) w ogólnym przypadku ma postać:

$$\left[m + m_{11}(v, \dot{v}) \right] \frac{d\vec{v}}{dt} = T_s - R_s \quad (17.70a)$$

W żadnej publikacji dotyczącej hydromechaniki okrętowej nie wskazywano na zależność m_{jk} od \vec{v}_e i $\dot{\vec{v}}_e$. Brak jest także wyników badań eksperymentalnych w tym zakresie. Pozostaje również otwartym udowodnienie, czy macierz m_{jk} dla ruchu ogólnego obiektu pod swobodną powierzchnią lub dla obiektu częściowo zanurzonego jest macierzą symetryczną lub nią nie jest. W przypadku statku nawodnego wykonującego małe ruchy oscylacyjne wykazuje się, że $m_{jk} = m_{kj}$ oraz, że m_{jk} jest zależne od częstości kołysań. Tym zagadnieniem będziemy zajmować się przy rozpatrywaniu własności morskich statków. Wydaje się, że zamiast równania (17.70) i (17.70a) dla statku poruszającego się ruchem jednostajnym po linii prostej lepiej jest napisać równanie ruchu w postaci:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_n R_{xn} \quad (17.70c)$$

Tu reakcja cieczy o charakterze potencjalnym jest na mocy wzoru (17.79):

$$R_x = \rho \int_S \left(\frac{v^2}{2} n_x - v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x \right) dS + \rho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} n_x dS \quad (17.90)$$

Pominięto tu składową R_{nx} reakcji hydrostatycznej. Ponieważ wzór (17.80) uzyskano ze wzoru (17.79), to także wzór (17.90) powinno się uzyskać ze wzoru (17.80). Założymy $\vec{\omega} = 0$. Zatem zgodnie z wyrażeniem (14.13d):

$$\frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{n} dS = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} dS$$

Na mocy wzoru (12.113e) przy $\vec{\omega} = 0$

$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_s = \int_S \vec{v}_s \cdot \left[\vec{n} \otimes \nabla \varphi - \nabla \varphi \otimes \vec{n} \right] dS \quad (17.91)$$

Podstawiając powyższe dwie zależności do wzoru (17.80) otrzymujemy

$$\vec{R} = \rho \int_S U \vec{n} dS + \rho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} dS + \rho \int_S \left(\frac{v^2}{2} \vec{n} - \vec{v}_s \cdot \nabla \varphi \otimes \vec{n} \right) dS \quad (17.92)$$

Jeśli statek porusza się z prędkością $\vec{v}_e = \vec{i} v_0$, to $\vec{v}_s = \vec{i} v_0$ i natychmiast przy pominięciu siły hydrostatycznej uzyskuje się wzór (17.90). Dla powierzchni zamkniętej na mocy (17.91) ostatnia całka we wzorze (17.92) przechodzi w trzecią całkę wzoru (17.80). Jest zatem tak, jak powinno być. Jeszcze jedna uwaga: dla ruchu statku nawodnego wzdłuż linii prostej z prędkością $\vec{v}_e = \vec{i} v_0$ całka krzywoliniowa jest równa zeru. Wtedy:

$$\int_S \left(\frac{v^2}{2} n_x - v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x \right) dS = \int_S \left(\frac{v^2}{2} n_x - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dS \quad (17.93)$$

Podobnie dla ruchów występujących oddzielenie wzdłuż pozostałych osi; np. dla $\vec{v}_e = \vec{k} w_0$

$$\int_S \left(\frac{v^2}{2} n_z - w_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} n_z \right) dS = \int_S \left(\frac{v^2}{2} n_z - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dS$$

Pewną uwagę należy zwrócić także na reakcję hydrostatyczną występującą we wzorach (17.79), (17.80) i (17.83)

$$\vec{R}_h = \rho \int_S U \vec{n} dS = -\rho g \int_S z \vec{n} dS \quad (17.94a)$$

Rozpatrywać będziemy powyższy wzór w układzie ruchomym Axyz. Przejście do układu związanego można zawsze dokonać przy pomocy wzorów transformacyjnych, np. (12.140).

Na podstawie rysunku 17.26 można zauważyć, że zanurzona objętość statku $V(t)$ jest ograniczona powierzchnią $\partial V = S(t) + S_{F_0}(t)$, gdzie S_{F_0} jest powierzchnią rozpiętą na pływnicy statku $\partial(S_F + \sum_c)$. Zewnętrzna normalna na powierzchni S_{F_0} jest równa oczywiście \vec{n}_0 i pokrywa się z zewnętrzną normalną do powierzchni ∂V , równą \vec{n} .

Można zauważyć dalej, że na S_{F_0} jest spełniony warunek brzegowy (15.10b). Wobec równania S_{F_0} jest $z = \zeta(x, y, t)$. Po uwzględnieniu powyższych uwag możemy napisać, że

$$\oint_{\partial V} z \vec{n} dS = \oint_{S+S_{F_0}} z \vec{n} dS = \int_S z \vec{n} dS + \int_{S_{F_0}} \zeta \vec{n} dS$$

Stąd:

$$\int_S z \vec{n} dS = \oint_{\partial V} z \vec{n} dS - \int_{S_{F_0}} \zeta \vec{n} dS = \vec{e}_z V(t) - \int_{S_{F_0}} \zeta \vec{n} dS$$

Po uwzględnieniu powyższej relacji reakcja hydrostatyczna wyrazi się wzorem:

$$\vec{R}_h = -\rho g V(t) \vec{e}_z + \rho \int_{S_{F_0}} \zeta \vec{n} dS \quad (17.94b)$$

lub

$$\vec{R}_h = -\rho g V(t) \vec{e}_z + \rho g \int_{S_{F_0}} \zeta \vec{n}_0 dS \quad (17.94c)$$

bo na S_{F_0} zewnętrzna normalna ma ten sam kierunek jak na S_F .

W układzie związanym ze statkiem zgodnie z wzorami (12.140a) i (12.148) dla $\Psi = 0$

$$\vec{e}_z = -\vec{i} \sin \theta + \vec{j} \cos \theta \sin \phi + \vec{k} \cos \theta \cos \phi$$

Drugi składnik siły hydrostatycznej wzoru (17.94c) możemy zamienić na całkę krzywoliniową po pływnicy statku. Do zamiany tej stosuje się wzór Stokesa w postaci (12.113d). I tak dla przykładu składowa reakcji hydrostatycznej w kierunku osi Ax jest:

$$R_{hx} = -\frac{\rho g}{2} \oint_{\partial S} \zeta^2 dy = -\frac{\rho g}{2} \oint_{\partial S} \zeta^2 dy \quad (17.94d)$$

Gdy fale nie występują, to $R_{hx} = 0$. Jest to zatem pewna składowa oporu falowego statku.

Zatem jeśli statek nawodny porusza się z prędkością $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ to opór falowy statku

$$R_w = -R_x = \frac{1}{2} \rho g \oint_{\partial S} \zeta^2(x,y) dy - \frac{\rho}{2} \int_S (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) n_x dS + \rho \int_S \varphi_n \varphi_x dS \quad (17.95)$$

gdzie:

$$\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \dots; \varphi_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

Wzór powyższy może zostać zastosowany wtedy, gdy znany jest potencjał przepływu φ . Relację pomiędzy φ i ζ dają wzory (15.8). Widzimy, że nawet gdy mamy potencjał φ , zadanie o wyznaczeniu oporu falowego statku nie jest zadaniem prostym. Dlatego wzór (17.95) upraszcza się i w teorii liniowej oporu falowego składnik hydrostatyczny się pomija. Przy wystąpieniu wysokich fal okrętowych ten składnik może mieć dość znaczne wartości.

Dla sprawdzenie zgodności obliczeń teoretycznych oporu falowego z eksperymentem należy mieć możliwość pomiaru tego składnika oporu statku. Podaemy niżej podstawę teoretyczną eksperymentalnego wyznaczenia oporu statku.

17.8.3. Podstawa teoretyczna eksperymentalnego wyznaczenia oporu falowego statku

Opór falowy, R_w , powstaje wtedy, gdy statek lub inne ciało pływające w pobliżu swobodnej powierzchni cieczy wytwarza na tej swobodnej powierzchni fale grawitacyjne. Zatem gdy takie fale nie powstają przy ruchu statku-ciała, to także nie ma oporu falowego. Wiemy już, że to ma miejsce przy liczbach Froude'a bliskich zeru i przy bardzo wysokich liczbach Froude'a; praktycznie przy $F_L > 2$ i że największy opór falowy występuje przy $F_L \approx 0,5 + 0,6$. Powstaje pytanie: Czy nie można eksperymentalnie wyznaczyć oporu falowego przez pomiar układu fal, generowanych przez statek? Eggers wyka-

zał [18], że jest to niemożliwe. Wzory podane przez Eggersa można wyprowadzić w różny sposób i różni autorzy tak postępują. Każde z tych postępowania jest jednak tylko szczególnym przypadkiem postępowania ogólnego. My wyprowadzimy wzory dla oporu falowego statku z wyrażenia ogólnego (17.83), które, jak wyżej wskazano, jest równoważne wzorowi (17.80) i (17.79). Niech statek porusza się ze stałą prędkością:

$$\vec{v}_e = \vec{v}_G = \vec{I} v_o = \vec{v}_A = \vec{v}_S = \text{const}$$

Ponieważ prędkość kątowna statku $\vec{\omega} = 0$ i $\vec{v}_S = \vec{v}_e = \text{const}$, to

$$\varrho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{n} dS = \varrho \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} dS = 0$$

bo w układzie odniesienia związanym ze statkiem przepływ nie zależy od czasu. Wobec tego, przy wzięciu pod uwagę związku (17.94c) dla reakcji hydrostatycznej wzór (17.83) przybiera postać

$$\begin{aligned} \vec{R} = & -\varrho g v \vec{e}_z + \varrho g \int_{S_{F_0}} \xi \vec{n}_o dS + \varrho \int_{S_{F_0} + \Sigma_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_o - v_{no} \vec{v} \right) dS + \\ & + \varrho \oint_{\partial(S_F + \Sigma_c)} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_S \end{aligned} \quad (17.96a)$$

Reakcja \vec{R} wyrażona powyższym wzorem nie zależy od czasu. Przekształćmy wzór (17.96a) tak, aby uzyskać wyrażenie przydatne do wyznaczenia oporu falowego przy pomocy parametrów fali okrętu:

Bierzemy najpierw pod uwagę całkę krzywoliniową:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial(S_{F_0} + \Sigma_c)} d\vec{r} \times (\varphi \vec{v}_S) &= \oint (\vec{e}_1 dx + \vec{e}_2 dy + \vec{e}_3 dz) \times \varphi \vec{e}_1 v_o = \\ &= \oint \varphi v_o (-\vec{e}_3 dy + \vec{e}_2 dz) \end{aligned}$$

Więc składowa na oś Ax tej całki jest równa zero. Nie daje ona zatem wkładu do oporu falowego. Trzeci wyraz wzoru (17.96a) jest równy

$$\int_{S_F} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_o - v_{no} \vec{v} \right) dS + \int_{\Sigma_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_o - v_{no} \vec{v} \right) dS$$

Ale z warunku na swobodnej powierzchni (15.8) mamy dla $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$:

$$\frac{v^2}{2} = g\xi + \vec{v}_e \cdot \nabla \varphi = g\xi + v_o \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Stąd:

$$\int_{S_F} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{no} \vec{\nabla} \right) dS = g \int_{S_F} \zeta \vec{n}_0 dS + \int_{S_F} \vec{v}_e \cdot (\nabla \varphi \otimes \vec{n}_0 - \vec{n}_0 \otimes \nabla \varphi) dS$$

Dla $\vec{v}_e = \vec{e}_1 v_0$ składowa w kierunku osi Ax ostatniej całki jest równa zeru, bo:

$$\begin{aligned} \int_{S_F} \vec{e}_1 v_0 \cdot [\nabla \varphi \otimes \vec{n} - \vec{n} \otimes \nabla \varphi] dS &= v_0 \int_{S_F} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{n} - n_x \nabla \varphi \right) dS = \\ &= v_0 \left[\vec{e}_1 \cdot 0 + \vec{e}_2 \int_{S_F} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} n_y - n_x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dS + \vec{e}_3 \int_{S_F} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} n_z - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - n_x \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dS \right] \end{aligned}$$

Zatem:

$$R_x = \rho g \int_{S_F + S_{F_0}} \zeta n_{ox} dS + \rho \int_{\Sigma_c} \left(\frac{v^2}{2} n_{ox} - v_{no} v_x \right) dS \quad (17.96b)$$

Podobnie jak przy wzorze (17.94c i d) przekształcamy pierwszy wyraz wyrażenia (17.96b) przy pomocy wzoru Stokesa na całkę po brzegu obszaru $S_F + S_{F_0}$

$$\oint_{\partial S} A dy = - \int_S n_1 \frac{\partial A}{\partial z} dS$$

Tu $A = \frac{1}{2} \zeta^2$. Włec składowa R_x będzie:

$$R_x = - \frac{1}{2} \rho g \oint_{\partial(S_F + S_{F_0})} \zeta^2 dy + \rho \int_{\Sigma_c} \left(\frac{v^2}{2} n_{ox} - v_{no} v_x \right) dS \quad (17.96c)$$

We wzorze tym:

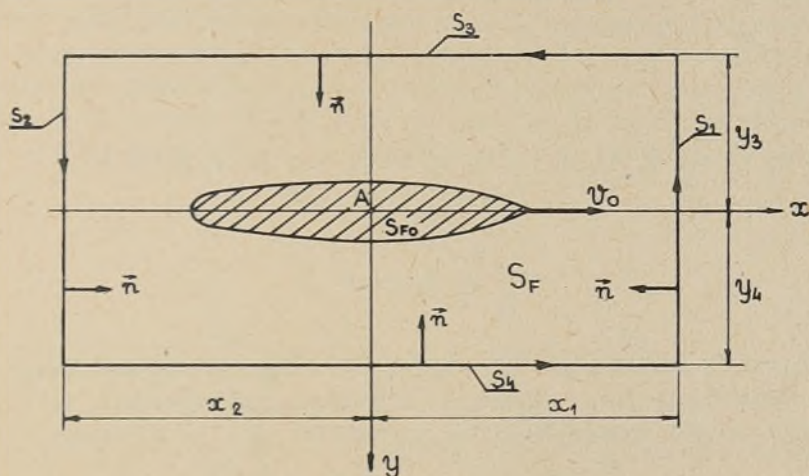
$$v^2 = \nabla \varphi, \quad v_{no} = \nabla \varphi \cdot \vec{n}_0, \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \varphi_x$$

Po uwzględnieniu, że $R_w = -R_x$ i $\vec{n} = -\vec{n}_0$, wzór (17.96c) zapisujemy tak:

$$R_w = \frac{1}{2} \rho g \oint_{\partial(S_F + S_{F_0})} \zeta^2 dy + \frac{\rho}{2} \int_{\Sigma_c} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) n_x dS - \rho \int_{\Sigma_c} \varphi_x \varphi_n dS \quad (17.97)$$

Wzór (17.97) stanowi podstawową zależność eksperymentalnego wyznaczania oporu falowego statku. Można dalej uprościć wzór ten, jeśli odpowiednio wybierze się powierzchnię kontrolną Σ_c . Wygodnym okazuje się zastosowanie

powierzchni kontrolnej Σ w postaci prostopadłościanu o ścianach: S_i ; $i = 1, 2, \dots, 5$, przy czym ściany S_1 i S_2 są prostopadłe do osi Ax , ściany S_3 i S_4 są równoległe do osi Ax , a ściana S_5 jest równoległa do płaszczyzny Axy . W przypadku basenu do badań modelowych ściany S_3 i S_4 mogą być ścianami basenu, a ściana S_5 - dnem basenu. Ściany S_1 poruszają się oczywiście z prędkością $\vec{v}_s = \vec{e}_x v_0$. Brzeg powierzchni kontrolnej Σ_c równy $\partial(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$ wraz z kierunkiem jego obchodzenia i normalną \vec{n} pokazuje rysunek 17.28. Z rysunku widać, że na brzegu ścian S_3 i S_4 $dy = 0$.



Rys.17.28

Zatem:

$$\oint_{\partial(S_F+S_{F_0})} \xi^2 dy = \int_{y_3}^{y_4} \xi^2(x_2, y) dy - \int_{y_3}^{y_4} \xi^2(x_1, y) dy$$

Ale daleko przed modelem - praktycznie bardzo blisko, nie ma fal. Więc $\xi^2(x_1, y) = 0$. Zatem w tym przypadku

$$\oint_{\partial(S_F+S_{F_0})} \xi^2 dy = \int_{y_3}^{y_4} \xi^2(x_2, y) dy \quad (17.98a)$$

Widzimy dalej z rysunku 17.28, że na ścianach S_3 , S_4 i S_5 $n_x = \cos(\vec{n}, x) = 0$, a na ścianie S_1 $v^2 = 0$, więc:

$$\int_{\Sigma_c} v^2 n_x dS = \int_{S_2} v^2 n_x dS = \int_{S_2} v^2 dy dz \quad (17.98b)$$

bo na S_1 $\vec{n} = \vec{e}_x$; $n_x = 1$.

Ostatnią całkę wzoru (17.97) możemy rozpisać tak:

$$\int_{\Sigma_c} \varphi_x \varphi_n dS = \int_{S_1} \varphi_x \varphi_n dS + \int_{S_2} \varphi_x \varphi_n dS + \dots + \int_{S_5} \varphi_x \varphi_n dS$$

Ale na

$$\begin{aligned} S_1 : \quad \varphi_x = 0, \quad \varphi_n = 0; \quad \text{na } S_2 : \quad \varphi_n = \varphi_x; \\ \text{na } S_3 : \quad \varphi_n = \varphi_y; \quad \text{na } S_4 : \quad \varphi_n = -\varphi_y; \\ \text{na } S_5 : \quad \varphi_n = -\varphi_z \end{aligned}$$

Więc

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_c} \varphi_x \varphi_n dS = \int_{S_2} \varphi_x^2 dy dz + \int_{S_3} \varphi_x \varphi_y dx dy - \int_{S_4} \varphi_x \varphi_y dx dy - \\ - \int_{S_5} \varphi_x \varphi_z dx dy \end{aligned}$$

Jeśli ściana S_5 powierzchni Σ_c pokrywa się z dnem basenu modelowego lub leży w dostatecznie dużej odległości od swobodnej powierzchni, to z kinematycznego warunku brzegowego na S_5 wynika, że $\varphi_z|_{S_5} = 0$. Wtedy:

$$\int_{\Sigma_c} \varphi_x \varphi_n dS = \int_{S_2} \varphi_x^2 dy dz + \int_{S_3} \varphi_x \varphi_y dx dy - \int_{S_4} \varphi_x \varphi_y dx dy \quad (17.98c)$$

Po podstawieniu związków 17.98 do wzoru (17.97) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} R_w = \frac{1}{2} \rho g \int_{y_3}^{y_4} \int_{y_3}^{y_4} \zeta^2(x_2, y) dy + \frac{\rho}{2} \int_{S_2} (\varphi_y^2 + \varphi_z^2 - \varphi_x^2) dy dz + \\ + \rho \int_{S_4} \varphi_x \varphi_y dx dz - \rho \int_{S_3} \varphi_x \varphi_y dx dz \quad (17.99) \end{aligned}$$

Wzór (17.99) dla oporu falowego statku nawodnego może zostać dalej uproszczony, jeżeli założy się pewne ograniczenia dla powierzchni S_2 , S_3 i S_4 . I tak, jeśli S_3 i S_4 pokrywają się ze ścianami basenu o szerokości b , to dla $y_3 = -\frac{b}{2}$ i $y_4 = \frac{b}{2}$ z kinematycznego warunku brzegowego na S_3 i S_4 mamy: $\varphi_y = 0$. Ma to miejsce również wtedy, gdy $y_3 \rightarrow -\infty$ i $y_4 \rightarrow +\infty$. W tym przypadku opór falowy R_w będzie wyrażać się wzorem:

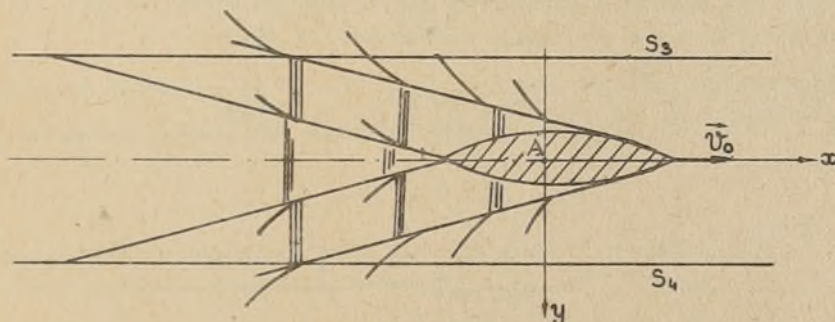
$$R_W = \frac{1}{2} \rho g \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \zeta^2(x_2, y) dy + \frac{\rho}{2} \int_{S_2} [\varphi_y^2(x_2, y, z) + \varphi_z^2 - \varphi_x^2] dy dz \quad (17.100)$$

Wzór powyższy jest podstawą eksperymentalnego wyznaczania oporu falowego statku tak zwaną „metodą przekrojów poprzecznych” [18]. Został on wypracowany przez Eggersa na innej drodze: przez zastosowanie zasady zachowania energii.

Drugie możliwe uproszczenie wzoru [17.99] ma miejsce w następującym przypadku: jeśli powierzchnie kontrolne S_3 i S_4 weźmiemy blisko modelu okrętu, a powierzchnię S_1 i także S_2 weźmiemy bardzo daleko od modelu, to fale generowane przez statek będą przecięte tylko przez powierzchnie S_3 i S_4 . Pokazuje to rysunek 17.29. Jeśli dalej statek ma kadłub symetryczny i porusza się bez dryfu, $\beta = 0$, to prędkości φ_x i φ_y spełniają relację:

$$\varphi_x(y) = \varphi_x(-y)$$

$$\varphi_y(y) = -\varphi_y(-y)$$



Rys.17.29

Wtedy pierwsze dwie całki wzoru (17.99) są równe zero, bo wyrażenia podcałkowe są równe zero, a

$$\int_{S_3} \varphi_x \varphi_y dx dz = \int_{S_4} \varphi_x \varphi_y dx dz$$

Więc przy stosowaniu przekrojów wzdłużnych fal okrętowych opór falowy będzie równy:

$$R_W = 2\rho \int_{S_4} \varphi_x \varphi_y dx dz = 2\rho \int_{S_3} \varphi_x \varphi_y dx dz \quad (17.101)$$

Pierwszy wzór stanowi podstawę eksperymentalnego wyznaczania oporu falowego statków przy pomocy „metody wzdłużnych przekrojów”. Na podstawie wzorów (17.100) i (17.101) opracowano szereg praktycznych metod, stosowanych w różnych basenach do badań modelowych statków. Polegają one na wyrażeniu

prędkości $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ przy pomocy charakterystyk pomierzonych fal w przekrojach poprzecznych lub wzdłużnych. Przegląd tych metod i krytyczne uwagi o nich możecie znaleźć u Eggersa [30].

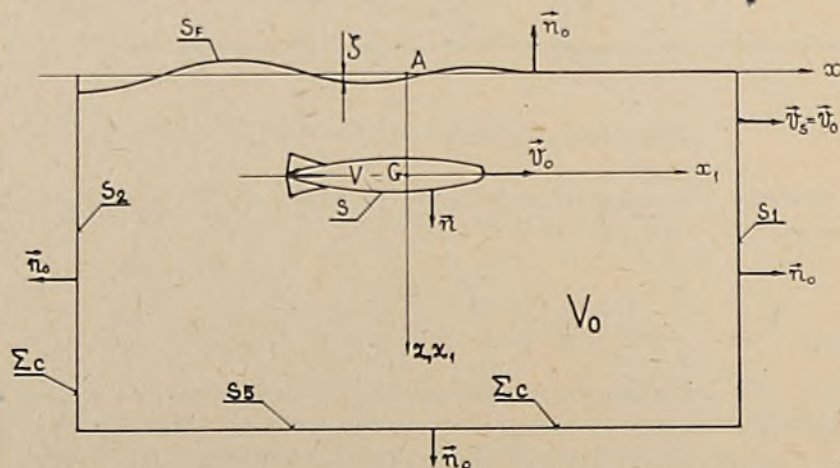
Zauważmy, że jeżeli statek ma kadłub niesymetryczny lub symetryczny kadłub statku porusza się z dryfem, to w metodzie przekrojów wzdłużnych opór falowy wyrazi się wzorem

$$R_w = \rho \int_{S_4} \varphi_x \varphi_y dx dz - \rho \int_{S_4} \varphi_x \varphi_y dx dz \quad (17.101a)$$

Dla tego przypadku statku w metodzie przekrojów poprzecznych wzór dla R_w jest (17.100); dla kadłuba symetrycznego bez dryfu wyrażenia podcałkowe wzoru (17.100) są funkcjami parzystymi współrzędnej y .

Wzory (17.99) i (17.100) są ważne także dla wyznaczania oporu falowego statku podwodnego poruszającego się blisko swobodnej powierzchni wody. Podkreślić należy, że zamiast statku może być inne ciało, np.: płat nośny, kula, itp. Dla wykazania powyższych uwag wróćmy do wzoru (17.80), który dla powierzchni zamkniętej staje się wzorem (17.39a):

$$\vec{R} = \rho \oint_S \mathbf{U} \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \rho \oint_S \varphi \vec{n} dS + \rho \oint_S \left(\frac{v^2}{z} \vec{n} - v_n \vec{v} \right) dS$$



Rys. 17.30

Statek podwodny o objętości V ograniczonej powierzchnią S wraz z powierzchnią kontrolną $\Sigma_c + S_F$ pokazano na rys. 17.30. Tak jak uprzednio zało-

żymy, że w obszarze V_0 nie ma osobliwości hydromechanicznych. Stąd na mocy (17.41a) mamy:

$$\oint_{\partial V_0} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{no} \vec{v} \right) dS = 0 = \int_{\Sigma_c} + \int_{S_F} + \int_S$$

Stąd

$$\int_S \left(\frac{v^2}{2} \vec{n} - v_n \vec{v} \right) dS = \int_{S_F} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{no} \vec{v} \right) dS + \int_{\Sigma_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{no} \vec{v} \right) dS$$

Uwzględniając tę relację wzór dla reakcji hydrodynamicznej działającej na statek podwodny będzie:

$$\begin{aligned} \vec{R} = & -\rho g v \vec{e}_z + \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{n} dS + \rho \int_{S_F} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{no} \vec{v} \right) dS + \\ & + \rho \int_{\Sigma_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{no} \vec{v} \right) dS \end{aligned}$$

Jeśli dalej założymy, że $\vec{\omega} = 0$ i $\vec{v}_0 = \text{const}$, to $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, $\frac{d}{dt} \int_S \varphi \vec{n} dS = 0$, a na swobodnej powierzchni warunek brzegowy sprowadza się do

$$\frac{v^2}{2} = gS - \vec{v}_0 \cdot \nabla \varphi$$

Po uwzględnieniu powyższych uwag wzór dla \vec{R} będzie miał postać:

$$\begin{aligned} \vec{R} = & -\rho g v \vec{e}_z + \rho g \int_{S_F} S \vec{n}_0 dS + \rho \int_{S_F} \vec{v}_0 \cdot (\nabla \varphi \otimes \vec{n}_0 - \vec{n}_0 \otimes \nabla \varphi) dS + \\ & + \rho \int_{\Sigma_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{no} \vec{v} \right) dS \end{aligned}$$

Trzeci wyraz powyższego wzoru na mocy wyrażenia (12.113e) dla $\vec{\omega} = 0$ jest równy:

$$-\rho \int_{\partial S_F} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_0 = \rho \int_{\Sigma_c} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_0$$

Stąd dla $\vec{\omega} = 0$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

$$\vec{R} = -\rho g v \vec{e}_z + \rho g \int_{S_F} S \vec{n}_0 dS + \rho \int_{\Sigma_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{no} \vec{v} \right) dS + \rho \int_{\partial \Sigma_c} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_0 \quad (17.102)$$

Wzór (17.102) jest równoważny wzorowi (17.96a) dla $S_{F_0} = 0$. Wracając bowiem do przekształceń wzoru (17.96a) widzimy, że możemy go zapisać tak:

$$\begin{aligned} \vec{R} = & -\rho g v \vec{e}_z + \rho g \int_{S_f + S_{F_0}} \xi \vec{n}_0 \, dS + \rho \int_{S_f} \vec{v}_e \cdot (\nabla \varphi \otimes \vec{n}_0 - \vec{n}_0 \otimes \nabla \varphi) \, dS + \\ & + \rho \int_{\Sigma_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{no} \vec{v} \right) \, dS + \rho \oint_{\partial(S_f + \Sigma_c)} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_s \end{aligned}$$

Widzimy, że po uwzględnieniu: $\vec{v}_s = \vec{v}_e = \vec{v}_0$ i wzoru (12.113e) dla $\vec{\omega} = 0$ uzyskuje się wyrażenie

$$\begin{aligned} \vec{R} = & -\rho g v \vec{e}_z + \rho g \int_{S_f + S_{F_0}} \xi \vec{n}_0 \, dS + \rho \int_{\Sigma_c} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n}_0 - v_{no} \vec{v} \right) \, dS + \\ & + \rho \oint_{\partial \Sigma_c} d\vec{r} \times \varphi \vec{v}_0 \end{aligned} \quad (17.102a)$$

które dla $S_{F_0} = 0$ przechodzi we wzór (17.102). Wykazaliśmy więc, że wzory: (17.99), (17.100) i (17.101) są także ważne dla statku podwodnego. Statek nawodny lub podwodny może być oczywiście jednokadłubowy lub może być utworzony z wielu kadłubów: katamaran, trimaran i taki, jaki sobie skonstruujemy. Wzory bowiem są ogólne. Możemy wyprowadzić z nich nie tylko wzory dla oporu falowego statku $R_w = -R_x$, lecz także dla pozostałych składowych R_y i R_z reakcji hydrodynamicznej \vec{R} . Można także rozpisywać dalej wzór dla momentu \vec{M} reakcji hydrodynamicznej. Postępowanie jest takie same jak wskazano wyżej.

Należy zaznaczyć, że wyżej podane wzory są ważne dla zadania nieliniowego. Dla zadania liniowego o oporze lub ogólniej o reakcjach \vec{R} i \vec{M} odrzuca się wyrazy zawierające kwadraty prędkości cieczy. Można stosować te wzory również w zadaniach płaskich. Odpada wtedy całkowanie po y , a w wyniku uzyskuje się reakcję \vec{R} , przypadającą na jednostkę długości ciała walcowego. Daleko za takim ciałem układ fal generowanych na swobodnej powierzchni ma charakter płaskiej fali regularnej, nieruchomej względem poruszającego się ciała. W układzie odniesienia związanym z poruszającym się ciałem charakterystyki tej fali opisują wyrażenia (16.86). Założono tam, że woda ma bardzo dużą głębokość. Zgodnie ze wzorem (17.100) opór falowy takiego ciała przypadający na jednostkę jego rozpiętości będzie równy:

$$\begin{aligned}
 R_w &= \frac{1}{2} \rho g s^2 + \frac{\rho}{2} \lim_{H \rightarrow \infty} \int_0^H (\varphi_y^2 + \varphi_z^2 - \varphi_x^2) dz = \\
 &= \frac{1}{2} \rho g r_0^2 \cos^2 kx + \frac{1}{2} \rho r_0^2 \omega^2 (\sin^2 kx - \cos^2 kx) \lim_{H \rightarrow \infty} \int_0^H e^{-2kz} dz = \\
 &= \frac{1}{2} \rho g r_0^2 \cos^2 kx + \frac{1}{2} \rho r_0^2 \frac{\omega^2}{2k} (1 - 2 \cos^2 kx) = \frac{1}{2} \rho g r_0^2 \cos^2 kx + \\
 &+ \frac{1}{4} \rho g r_0^2 - \frac{1}{2} \rho g r_0^2 \cos^2 kx = \frac{1}{4} \rho g r_0^2
 \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy w inny sposób wynik zgodny ze wzorem (16.121a).

Przedstawione wzory, służące za podstawę do wyznaczania eksperymentalnego oporu statku, mogą służyć także do obliczeń teoretycznych tego oporu, gdy znany jest potencjał prędkości w dużej odległości za statkiem. Rozwinięcia asymptotyczne potencjału przepływu φ są prostsze a także prostsze jest całkowanie po płaszczyźnie S_2 niż po powierzchni kadłuba S . W ten sposób prostszym będzie także obliczenie pozostałych składowych reakcji według wzorów (17.102).

17.8.4. Zastosowanie zasady energii do wyznaczania oporu falowego statku w kanale

Niech statek nawodny lub podwodny porusza się w osi kanału ze stałą prędkością $\vec{v}_e = \vec{v}_0 = \vec{e}_x v_0$ jak na rysunkach 17.28 i 17.30. Powierzchnia kontrolna \sum_C porusza się także z prędkością $\vec{v}_s = \vec{v}_0$. Zgodnie z założeniem powierzchnie: S , S_3 , S_4 , S_5 i S_F są powierzchniami materialnymi. Na nich $\vec{v}_w \cdot \vec{n}_0 = 0$. Pokażemy, że równania energii (16.108d) można także uzyskać wzór (17.100) dla oporu falowego statku.

Równanie 16.108d napisane w układzie ruchomym $Gx_1y_1z_1$ jest:

$$\rho \int_{V_0} \frac{\partial'}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) dV + \rho \oint_{\partial V_0} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) \vec{v}_w \cdot \vec{n}_0 dS = - \oint_{\partial V_0} p \vec{n}_0 \cdot \vec{v} dS$$

Ponieważ obszar V_0 w ruchu ustalonym nie ulega zmianie i także energia wody zawarta w tym obszarze się nie zmienia z upływem czasu, to pierwsza całka w powyższym równaniu jest równa zeru. Uwzględniając ponadto, że $\vec{v} = \vec{v}_w + \vec{v}_0$ powyższe równanie będzie:

$$\rho \oint_{\partial V_0} \left(\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right) \vec{v}_w \cdot \vec{n}_0 dS = - \oint_{\partial V_0} p \vec{n}_0 \cdot \vec{v}_0 dS \quad (17.103a)$$

A dla przepływu ustalonego:

$$\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} = \vec{v}_0 \cdot \vec{v} + \frac{p_0}{\rho} \quad (17.103b)$$

Zgodnie z powyższym równanie (17.103a) przybierze postać:

$$\rho \oint_{\partial V_0} (\vec{v}_0 \cdot \vec{v}) (\vec{v}_w \cdot \vec{n}_0) dS + \oint_{\partial V_0} p_0 v_{no} dS = - \oint_{\partial V_0} (p-p_0) \vec{v}_0 \cdot \vec{n}_0 dS$$

Druga całka lewej strony powyższego równania jest równa zeru; dla $\rho = \text{const}$ bowiem

$$\oint_{\partial V} v_{no} dS = 0 = \int_V \text{div } \vec{v} dV$$

wyraża zasadę zachowania masy. Zatem powyższe równanie energii sprowadzi się do postaci:

$$\rho \oint_{\partial V_0} (\vec{v}_0 \cdot \vec{v}) (\vec{v}_w \cdot \vec{n}_0) dS = - \oint_{\partial V_0} (p-p_0) \vec{v}_0 \cdot \vec{n}_0 dS \quad (17.103c)$$

Zastosujemy to równanie do naszego zadania. Ze względu na materialność powierzchni: S , S_3 , S_4 , S_5 i S_F po lewej stronie równości pozostaną tylko całki po powierzchniach S_1 i S_2 . Po prawej stronie równania (17.103c) znikną całka po swobodnej powierzchni S_F ze względu na dynamiczny warunek brzegowy $p=p_0$. Dalsze uproszczenia równania (17.103c) uzyskamy podstawiając $\vec{v}_0 = \vec{e}_x v_0$. Wtedy na ścianach S_3 , S_4 i S_5 ; $n_{ox} = \cos(\vec{n}_0, x_1) = 0$. W związku z powyższym równanie (17.103c) sprowadza się do postaci:

$$\rho \int_{S_1+S_2} v_x (v_{no} - v_0 n'_{ox}) dS = - \int_{S_1+S_2} (p-p_0) n_{ox} dS - \int_S (p-p_0) n_{ox} dS$$

Stąd:

$$\rho \int_{S_1+S_2} v_x v_{no} dS - \rho \int_{S_1+S_2} \left[v_0 v_x - \left(\frac{p-p_0}{\rho} \right) \right] n_{ox} dS = - R_x$$

Uwzględniając dalej całkę Cauchy'ego-Lagrange'a (17.103b) oraz że $R_w = -R_x$ otrzymujemy:

$$R_w = -\rho \int_{S_1+S_2} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) n_{ox} dS + \rho \int_{S_1+S_2} v_x v_{no} dS \quad (17.103d)$$

Łatwo można sprawdzić, że wzór (17.103d) jest równoważny wyrażeniu (17.100). Istotnie jeśli płaszczyzna S_1 znajduje się dostatecznie daleko przed statkiem, to na S_1 $\vec{v} = 0$ i nie ma wychylenia swobodnej powierzchni; $\xi = 0$. Natomiast na S_2 : $n_{ox} = -1$; $v_{no} = -v_x$.

Więc R_w będzie:

$$R_w = \frac{\rho}{2} \int_{S_2} (v_y^2 + v_z^2 - v_x^2) dS - \rho \int_{S_2} g z dS + \rho \int_{S_1} g z dS$$

Jeśli dalej szerokość kanału jest b , a głębokość niezakłóconej powierzchni wody jest H , to

$$\int_{S_1} z dS - \int_{S_2} z dS = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\int_0^H z dz - \int_0^H z dz \right] dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} b^2 dy$$

Stąd

$$R_w = \frac{1}{2} \rho g \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} b^2 dy + \frac{\rho}{2} \int_{S_2} (v_y^2 + v_z^2 - v_x^2) dS \quad (17.100)$$

W praktyce całkowanie po S_2 wykonuje się tak:

$$\int_{S_2} () dS = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_0^H () dz$$

Jeśli statek ma kadłub symetryczny i porusza w osi kanału, to funkcje podcałkowe w (17.100) są parzyste.

Widzimy jeszcze raz, że te same wyrażenia dla oporu falowego można uzyskać na różnej drodze. W pracy [18] wyrażenie (17.100) przez zastosowanie energii uzyskano w nieco bardziej złożony sposób. Można prosto wykazać, że wzór (16.120) dla oporu falowego ciała walcowego jest szczególnym przypadkiem wzoru (17.103d). Zauważcie, że pierwsza całka wzoru (17.103d) jest równa:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E_w dy$$

gdzie E_w jest powierzchniową gęstością energii fal (16.110).

Druga całka natomiast jest:

$$\rho \int_{S_1+S_2} v_x v_{no} dS = -\frac{\rho}{v_0} \int_{S_2} (v_0 v_x) v_x dS = -\frac{1}{v_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u E_w dy$$

Więc dla fal płaskich mamy:

$$\begin{aligned} R_w &= b E_w \left(1 - \frac{u}{v} \right) = \\ &= b \left[\frac{1}{4} \rho g r_0^2 + \frac{1}{2} \rho g r_0^2 \cos^2 kx - \rho g r_0^2 \frac{u}{v_0} \cos^2 kx \right] \end{aligned}$$

Dla wody głębokiej $u/v_0 = \frac{1}{2}$. Więc wszystko się zgadza. Przypominamy, że wzór (17.100) a także (17.103d) jest także ważny dla $z \rightarrow \infty$ i $y \rightarrow \pm \infty$

17.9. OPÓR FALOWY PODUSZKOWCA. FALE GENEROWANE PRZEZ STĄTEK

Poduszkowiec - typ statku nadwodnego - jest utrzymywany ponad wodą przez ciśnienie $p_c = p - p_a$ panujące w poduszce powietrznej, a działające na dno poduszkowca.

Jak wiemy, obszar ciśnień p_c jest zwykle ograniczony osłoną elastyczną o różnym ukształtowaniu. Ciśnienie p_c działa na ekran - inaczej: na podłoże, nad którym poduszkowiec się unosi. W naszym przypadku ekranem jest swobodna powierzchnia wody. Tu przez p_a oznaczono ciśnienie atmosferyczne, a przez p ciśnienie całkowite. Zadanie o ruchu poduszkowca nad wodą zostaje więc sprowadzone do ruchu układu ciśnień p_c po swobodnej powierzchni. Kiedy jest wietrzna pogoda, to na swobodną powierzchnię działa także poruszający się po powierzchni wody układ ciśnień $p = p_a + p_c$. Stąd niektóre wyniki dotyczące wędrującego układu ciśnień p_c mogą być użyteczne do tłumaczenia powstawania powierzchniowych fal wiatrowych. Do opisu matematycznego zadania wprowadzimy 3 układy odniesienia: pierwsze dwa są takie same jak na rysunku 15.1; trzeci układ natomiast $Ox_1y_1z_1$ związany z układem ciśnień pokrywa się z układem $Oxyz$. Jak zobaczymy dalej, wprowadzenie układu odniesienia $Ox_1y_1z_1$ zabezpiecza większą przejrzystość otrzymywanych wyrażeń matematycznych dając rozróżnienie pomiędzy współrzędnymi swobodnej powierzchni a współrzędnymi ekranu w obrębie poduszki powietrznej.

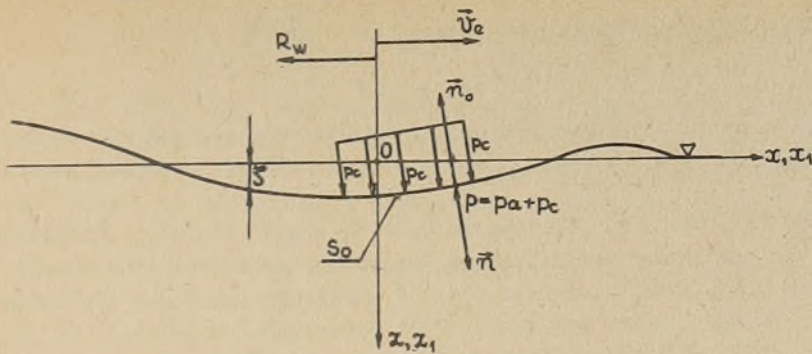
Do wyznaczenia reakcji hydrodynamicznej \vec{R} działającej na układ ciśnień $p_c(x_1, y_1, t)$ zastosujemy ogólny wzór (5.7a)

$$\vec{R} = - \int_{S_0} (p - p_a) \vec{n} \, dS = - \int_{S_0} p_c \vec{n} \, dS \quad (17.104a)$$

gdzie: \vec{n} - zewnętrzna normalna do S_0 , skierowana w wodę,
 S_0 - powierzchnia, na którą działa układ ciśnień p_c .

Zastosowanie wzoru (5.7a) jest równoznaczne z założeniem, że woda jest nielepka. Traktować ją będziemy także jako nieściśliwą. Założymy dalej, że przed zadziałaniem ciśnienia p_c woda była w spoczynku. Zatem przepływ wody wywołany działaniem ciśnienia p_c będzie przepływem potencjalnym. Pomijając się będzie także wpływ napięcia powierzchniowego. Założymy, że ciśnienia p_c nie mają zbyt dużych wartości; dla poduszkowców są rzędu 15 + 30 hPa. W związku z tym fale generowane na swobodnej powierzchni mają małą amplitudę i można stosować zlinearyzowane warunki brzegowe dla $z=0$. Cosinusy kierunkowe n_x, n_y, n_z wyznaczmy z równania swobodnej powierzchni (15.3) i zależności (3.16). Z rysunku 17.31 można zauważyć, że

$$\vec{n}_0 = - \vec{n} = \frac{1}{N} \text{grad } S = \frac{1}{N} \left(\vec{i} \frac{\partial S}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial S}{\partial y} - \vec{k} \right)$$



Rys. 17.31

gdzie:

$$N = |\text{grad } S| = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Więc:

$$n_x = -\frac{1}{N} \frac{\partial S}{\partial x} \quad n_y = -\frac{1}{N} \frac{\partial S}{\partial y} \quad n_z = \frac{1}{N}$$

Zamiast całkowania po powierzchni S_0 wygodniejszym jest przeprowadzenie całkowania po powierzchni S_p będącej rzutem S_0 na płaszczyznę Ox_1y_1 . Na mocy (5.11) mamy:

$$dS = N dS_p = N dx_1 dy_1$$

$$n_x dS = -\frac{\partial S}{\partial x} dx_1 dy_1$$

$$n_y dS = -\frac{\partial S}{\partial y} dx_1 dy_1$$

$$n_z dS = dx_1 dy_1$$

Po uwzględnieniu powyższych związków składowe reakcji hydrodynamicznej będą:

$$R_x = \int_{S_p} p_c \frac{\partial S}{\partial x_1} dx_1 dy_1 \quad (17.104b)$$

$$R_y = \int_{S_p} p_c \frac{\partial S}{\partial y_1} dx_1 dy_1 \quad (17.104c)$$

$$R_z = - \int_{S_p} p_c(x_1, y_1, t) dx_1 dy_1 \quad (17.104d)$$

Przy stałym rozkładzie ciśnień w poduszce powietrznej składowa

$$R_z = - p_c S_p \quad (17.104e)$$

Równoważy ona ciężar poduszki G. Więc

$$G = p_c S_p$$

Jest to podstawowy związek projektowy dla poduszki pozwalający wyznaczyć pole poduszki powietrznej S_p , gdy dany jest ciężar G i średnie ciśnienie p_c .

Ze wzorów (17.104b i c) widzimy, że opór R_x i opór boczny R_y powstają wtedy, gdy na swobodnej powierzchni są generowane fale $\xi(x, y, t)$. Wzór (17.104c) wskazuje ponadto, że dla p_c i ξ parzystych względem współrzędnej y_1 opór boczny $R_y = 0$. Z rysunku 17.31 można także zauważyć, że dla $\Delta x > 0$ $\Delta \xi < 0$ i $R_x < 0$. Składowa R_x jest więc skierowana przeciwnie do prędkości $v_0 = \vec{i} \cdot \vec{v}_e$; jest zatem oporem i to oporem falowym. Zwykle o oporze falowym mówi się wtedy, gdy poduszkowiec porusza się z prędkością $\vec{v}_e = \vec{i} v_0 = \text{const}$. wtedy:

$$R_w = -R_x = - \int_{S_p} p_c(x_1, y_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} dx_1 dy_1 \quad (17.104f)$$

Zauważmy, że wzór (17.104b) jest bardziej ogólny niż wzór (17.104f).

Do wyznaczenia oporu falowego R_w albo bardziej ogólnych składowych R_x i R_y konieczna jest znajomość fal generowanych przez zadany układ ciśnienia $p_c(x_1, y_1, t)$. Ze wzoru (15.8) widzimy, że $\xi(x, y, t)$ wyraża się poprzez potencjał prędkości φ . Zadanie o wyznaczeniu potencjału φ prędkości wody indukowanej przez układ ciśnienia $p_c(x_1, y_1, t)$ sformułować można w ruchomym układzie odniesienia $Oxyz$ lub w układzie nieruchomym $O_0x_0y_0z_0$. Jeśli układ ciśnienia $p_c(x_1, y_1, t)$ porusza się ze stałą prędkością v_0 , to łatwiejszym jest rozwiązywanie zadania w układzie ruchomym. Gdy natomiast $\vec{v}_e \neq v_0 \vec{i} = \text{const}$, to prościej można znaleźć ogólne rozwiązanie w układzie nieruchomym $O_0x_0y_0z_0$. Stwierdzenie to wynika z postaci warunków na swobodnej powierzchni. Porównaj warunki (15.24a) i (15.26a):

Założymy dalej, że:

$$p_c = p_c(x_1, y_1) \quad \vec{v}_e = \vec{i} v_0 = \text{const}$$

i że woda ma głębokość H , a poziome wymiary zbiornika są nieograniczone. Przy tych założeniach matematyczne sformułowanie zadania jest:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.27) \quad (17.104g)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \quad (16.5) \quad (17.104h)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{E}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\mu}{v_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\rho v_0} \frac{\partial p_c}{\partial x} \quad (15.27a) \quad (17.104i)$$

dla $z=0$

$$\xi = -\frac{v_0}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=0} + \frac{1}{\rho g} p_c \quad (15.27b) \quad (17.104j)$$

Założono, że $\nabla \varphi \cdot \nabla p_c$ jest wielkością małą. Przypominamy, że wprowadzenie lepkości Rayleigha, μ , warunkuje uniknięcie w rozwiązaniu fal swobodnych. Jest równoważne warunkowi (16.148). Wprowadzenie sztucznej lepkości μ pozwala ponadto na zastosowanie przekształcenia Fouriera do rozwiązania zadania [31].

Oznaczmy transformatę Fouriera potencjału $\varphi(x, y, z)$ przez $\Phi(u, v, z)$, przy czym

$$\mathcal{F} \{ \varphi(x, y, z) \} = \Phi(u, v, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z) e^{-i(ux+vy)} dx dy \quad (17.105a)$$

$$\varphi(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1} \{ \Phi(u, v, z) \} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u, v, z) e^{i(ux+vy)} du dv \quad (17.105b)$$

Niech dalej:

$$P(u, v) = \mathcal{F} \{ p_c(x_1, y_1) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_c(x_1, y_1) e^{-i(ux_1+vy_1)} dx_1 dy_1 \quad (17.106)$$

Zastosujemy przekształcenie Fouriera do równania (17.104g) i warunków brzegowych (17.104h, i). Uwzględniając, że

$$\mathcal{F} \{ \varphi_{(n)}(x) \} = (iu)^n \Phi(u)$$

$$\mathcal{F}_x \left\{ \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} \right\} = \frac{\partial \Phi(u, z)}{\partial z}$$

przetransformowane równanie Laplace'a będzie:

$$(iu)^2 \Phi(u, v, z) + (iv)^2 \Phi(u, v, z) + \frac{\partial^2 \Phi(u, v, z)}{\partial z^2} = 0$$

Więc traktując u, v jako parametry, mamy:

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - k^2 \Phi = 0 \quad (17.107a)$$

$$\text{gdzie: } k^2 = u^2 + v^2 \quad (16.88b)$$

Transformata warunku brzegowego na dnie (17.104h) jest:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} = \frac{d\Phi}{dz} = 0 \quad \text{dla } z=H \quad (17.107b)$$

Warunek na swobodnej powierzchni, dla $z=0$, przybiera postać:

$$-u^2 \Phi - \frac{E}{v_0^2} \frac{d\Phi}{dz} - \frac{\mu}{v_0} (iu) \Phi = \frac{1}{\rho v_0} (iu) P(u, v) \quad (17.107c)$$

Równanie (17.107a) z warunkiem (17.107b) jest takie same jak (16.10b) z warunkiem (10.5). Rozwiązania zatem są również takie same. Stąd na podstawie wyrażenia (16.13) mamy:

$$\Phi(u, v, z) = D(u, v) \cosh \{ k (H-z) \} \quad (17.108a)$$

Do wyznaczenia nieznannej funkcji $D(u, v)$ pozostało nam równanie (17.107c). Podstawiamy więc wyrażenie (17.108a) do równania (17.107c). Uwzględniając, że dla $z=0$

$$\Phi(u, v, 0) = D(u, v) \cosh(kH)$$

$$\left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z=0} = -Dk \sinh(kH)$$

mamy:

$$D(u, v) = - \frac{i u P(u, v)}{\rho v_0 \cosh(kH)} \cdot \frac{1}{u^2 - \frac{gk}{v_0^2} \operatorname{tgh}(kH) + i \mu \frac{u}{v_0}} \quad (17.108b)$$

gdzie: $P(u, v)$ jest dane transformatą (17.106). Całkowanie we wzorze (17.106) przeprowadza się po powierzchni S_p , bo po za S_p ciśnienie $p_c = 0$.

Widzimy, że wyrażenia (17.108a i b) oraz (17.106) określają całkowicie transformatę Fouriera potencjału $\varphi(x, y, z)$. Potencjał prędkości φ wyznaczmy ze wzoru (17.105b). Zatem po wykonaniu prostych działań algebraicznych otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \mathcal{F}^{-1} \{ \Phi(u, v, z) \} = \\ &= - \frac{i}{4\pi^2 \rho v_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \{ k(H-z) \}}{\cosh(kH)} \cdot \frac{1}{u^2 - \frac{gk}{v_0^2} \operatorname{tgh}(kH) + i \frac{\mu}{v_0} u} \cdot \\ &\cdot \left(\iint_{S_p} p_c(x_1, y_1) e^{-i(ux_1 + vy_1)} dx_1 dy_1 \right) du dv \quad (17.109) \end{aligned}$$

Dzięki zastosowaniu przekształcenia Fouriera uzyskaliśmy na drodze działań algebraicznych wyrażenie dla potencjału spełniające warunki zadania (17.104g, h, i).

Jest to wyrażenie dość złożone. Dla statku nawodnego będzie jeszcze bardziej złożone. Dojdzie bowiem jeszcze jeden warunek brzegowy na powierzchni statku: $\varphi_n \Big|_s = v_{ns}$.

Dalsza kolejność postępowania przy analitycznym wyznaczaniu oporu falowego R_w jest następująca:

- obliczamy całkę w nawiasie wzoru (17.109) dla zadanego rozkładu ciśnienia $p_c(x_1, y_1)$;
- obliczamy kształt swobodnej powierzchni według wzoru (17.104j);
- obliczamy opór falowy według wzoru (17.104f).

Wzorem dla oporu falowego w ujęciu liniowym poduszkowca można nadać różne postaci; wzór (17.104f) jest ważny również dla zadania nieliniowego. Otóż na podstawie wzoru (17.104j) mamy:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = - \frac{v_0}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{z=0} + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p_c}{\partial x}$$

Uwzględniając, że na brzegach S_p ciśnienie $p_c = 0$ po podstawieniu powyższego wyrażenia do wzoru (17.104f) dostajemy:

$$R_w = \frac{v_0}{g} \int_{S_p} p_c(x_1, y_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{z=0} dx_1 dy_1 \quad (17.110a)$$

Jeśli natomiast na brzegu S_p ciśnienie nie jest równe zero, to w ogólnym przypadku powstaje dodatkowy opór $R_{w1} = \frac{1}{\rho g} \int_{S_p} p_c \frac{\partial p_c}{\partial x_1} dx_1 dy_1$. Inne wyrażenie dla R_w uzyskuje się przy uwzględnieniu zlinearyzowanego kinematycznego warunku brzegowego na swobodnej powierzchni (15.6):

$$\begin{aligned} -\vec{v}_e \cdot \nabla \xi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\ -v_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \quad (17.110b)$$

Po podstawieniu (17.110b) do (17.104f) mamy:

$$R_w = \frac{1}{v_0} \int_{S_p} p_c \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} dx_1 dy_1 \quad (17.110c)$$

Zauważcie, że podobnie dla tego jak znajduje potencjał φ , gdy dany jest potencjał przyspieszenia - wyrażenia (15.39e i d), można znaleźć wychylenie swobodnej powierzchni ξ z równania (17.110b):

$$\xi = - \frac{1}{v_0} \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial z} \varphi(\tau, y, z=0) d\tau \quad (17.110d)$$

bo daleko przed poduszkowcem nie ma fali: $\xi = 0$.

Jeśli ciśnienie p_c jest stałe na powierzchni S_p w kształcie prostokąta o długości np. $2l$ i szerokości $2b$, to wzór (17.110c) można wyrazić przy pomocy wychyleń swobodnej powierzchni na przedniej i tylnej krawędzi S_p , bowiem wtedy:

$$\begin{aligned} R_w &= p_c \int_{-b}^b \frac{1}{v_0} \int_{-l}^l \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} dx_1 dz_1 = p_c \int_{-b}^b \frac{1}{v_0} \left(\int_{-l}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx - \int_{-l}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx \right) dy = \\ &= p_c \int_{-b}^b \left[- \frac{1}{v_0} \int_{-\infty}^{-l} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} dx - \left(- \frac{1}{v_0} \int_{\infty}^l \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} dx \right) \right] dy \end{aligned}$$

Więc po uwzględnieniu (17.110d) opór falowy poduszki o obrysie prostokątnym poduszki powietrznej S_p i stałym ciśnieniu p_c w poduszce powietrznej będzie wynosił:

$$R_w = p_c \int_{-b}^b [\xi(-1, y) - \xi(1, y)] dy \quad (17.110e)$$

Wzór (17.110e) stosuje się w praktycznych obliczeniach, gdy wyznacza się pod poduszkowcem układ fal wytworzony przez $p_c = \text{const}$. Znajomość $\xi(x, y)$ jest pożądana ze względu na usytuowanie pędników pracujących w wodzie oraz ze względu na krój dolnej krawędzi segmentów elastycznej osłony.

Przeważnie w praktycznych - numerycznych - obliczeniach oporu falowego poduszkowców a także statków innych typów wprowadza się zamiast składowych u, v wektora falowego k , wektor \vec{k} i kąt θ zgodnie z zależnością 16.88c

$$u = k \cos \theta \quad v = k \sin \theta$$

$$k \in \langle 0, \infty \rangle \quad \theta \in \langle -\pi, \pi \rangle$$

$$du dv = k dk d\theta$$

Po podstawieniu powyższych relacji do (17.109) potencjał będzie:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{-1}{4\pi^2 \rho v_0} \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta - z)} k dk}{k - \frac{E}{v_0^2} \operatorname{tgh}(kH) \sec^2 \theta + \frac{\mu}{v_0} \sec \theta} \cdot \iint_{S_p} p_c(x_1, y_1) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dx_1 dy_1 \quad (17.109a)$$

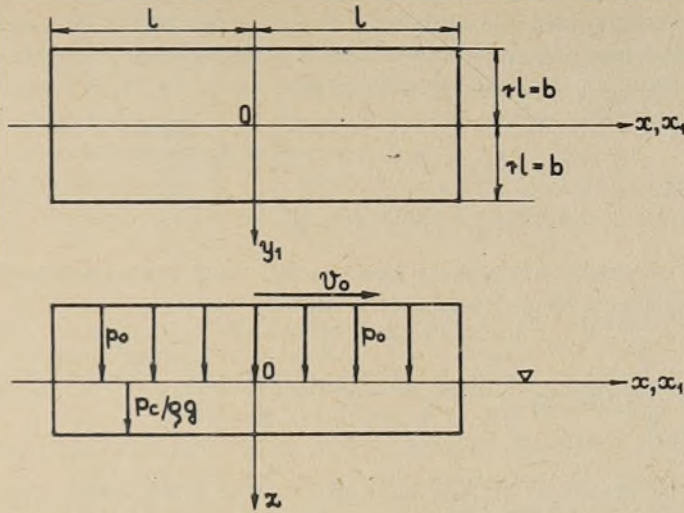
Wzory (17.109) i (17.109a) można napisać natychmiast dla wody głębokiej, w podobny sposób jak ze wzoru (16.21) uzyskano wzór (16.25a). Mianowicie dla $H \rightarrow \infty$

$$\operatorname{tgh}(kH) = 1 \quad \lim_{H/\infty} \frac{\cosh \{k(h-z)\}}{\cosh(kH)} = e^{-kz}$$

Napiżemy szczególny przypadek wzoru (17.109a) dla ruchu z prędkością v_0 prostokątnego układu ciśnień $p_c = p_0 = \text{const}$ po swobodnej powierzchni wody głębokiej. Układ ciśnień pokazany jest na rysunku 17.32. Można go wyrazić przy pomocy funkcji $\operatorname{sign}(\)$ w sposób następujący:

$$p_c(x_1, y_1) = \frac{1}{4} p_0 [\operatorname{sign}(x_1+1) - \operatorname{sign}(x_1-1)] [\operatorname{sign}(y_1+1) - \operatorname{sign}(y_1-1)]$$

$$\iint_{S_p} p_c(x_1, y_1) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dx_1 dy_1 = \frac{1}{4} p_0 J_1 J_2$$



Rys. 17.32

gdzie:

$$J_1 = \int_{-l}^l [\text{sign}(x_1+1) - \text{sign}(x_1-1)] e^{-ikx_1 \cos \theta} dx_1 = 2 \int_{-l}^l e^{-ikx_1 \cos \theta} dx_1$$

$$J_1 = 4 \frac{\sin(kl \cos \theta)}{k \cos \theta}$$

Podobnie:

$$J_2 = 4 \frac{\sin(krl \sin \theta)}{k \sin \theta}$$

Więc dla rozpatrywanego przypadku:

$$\iint_{S_p} p_c e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dx_1 dy_1 = 4 p_0 \frac{\sin(kl \cos \theta) \sin(krl \sin \theta)}{k^2 \cos \theta \sin \theta} \quad (17.111)$$

a potencjał φ dla ruchu tegoż ciśnienia po wodzie nieograniczonej będzie:

$$\varphi(x, y, z) =$$

$$= \frac{-i p_0}{\rho \pi^2 v_0} \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{\sin(kl \cos \theta) \sin(krl \sin \theta) e^{-kz + ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}}{k - \frac{U_0}{v_0} \sec^2 \theta + i \frac{\mu}{v_0} \sec \theta} dk \quad (17.112)$$

Podstawcie wyrażenie (17.111) do wzoru (17.109a)! Dostaniecie potencjał przepływu wody, wywołanego przez układ ciśnień pokazany na rysunku 17.32

i poruszający się na wodzie płytkiej. Widzimy, że w układzie odniesienia związanym z poruszającym się układem ciśnień potencjał φ nie zależy od czasu. Również w tym układzie nie zależą od czasu; pole prędkości $\vec{v} = \nabla\varphi$ układ falowy $\zeta(x,y)$, a także pole ciśnień:

$$p = p_a + p_c + \rho z - \rho \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - v_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)$$

$$p = p_a + p_c + \rho g z + \rho v_0 \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (17.113)$$

Obliczmy dla przykładu wychylenia powierzchni wody przy przepływie określonym potencjałem φ według wzoru (17.112):

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{z=0} = \frac{p_0}{\rho g \pi v_0^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta \sin\theta} \int_0^{\infty} \frac{\sin(kl \cos\theta) \sin(kr l \sin\theta)}{k - \frac{E}{v_0^2} \sec^2\theta + i \frac{\mu}{v_0} \sec\theta} e^{ik(x \cos\theta + y \sin\theta)} dk$$

Więc zgodnie ze wzorem (17.104j) fale generowane przez układ ciśnień $p_0 = \text{const}$ są określone wyrażeniem:

$$\zeta(x,y) = \frac{-p_0}{\rho g \pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta \sin\theta} \int_0^{\infty} \frac{\sin(kl \cos\theta) \sin(kr l \sin\theta)}{k - \frac{E}{v_0^2} \sec^2\theta + i \frac{\mu}{v_0} \sec\theta} e^{ik(x \cos\theta + y \sin\theta)} dk \quad (17.114)$$

Zauważmy, że dla $\mu = 0$ równanie:

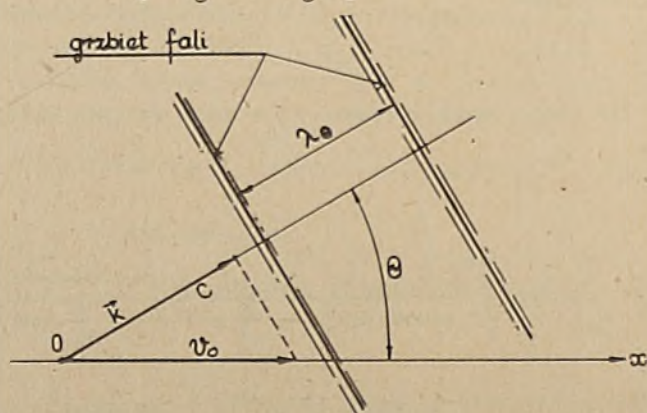
$$k = \frac{E}{v_0^2 \cos^2\theta} \quad (17.115a)$$

jest związkiem dyspersyjnym dla fal płaskich poruszających się pod kątem θ do osi Ox . Prędkość tych fal jest równa

$$c = v_0 \cos\theta \quad (17.115b)$$

a długość

$$\lambda_{\theta} = \frac{2\pi}{E} c^2 = \frac{2\pi}{E} v_0^2 \cos^2\theta \quad (17.115c)$$



Rys. 17.33

Fale wymuszone przez ruch poduszki mogą być zatem interpretowane jako nałożenie się nieskończonej ilości fal płaskich o różnych długościach poruszających się pod różnymi kątami względem prędkości v_0 poduszki. Jedną ze składowych tych fal ilustruje rysunek 17.33. Podobne zjawisko występuje przy statkach nawodnych. Związek (17.115a) wynika bowiem z warunku brzegowego na swobodnej powierzchni.

Przy zastosowaniu związku (17.115a) wyrażeniu (17.114) nadaje się inną postać. Mianowicie podstawia się $g = k v_0^2 \cos^2 \theta$. Wtedy ξ wyrazi się wzorem:

$$\xi(x, y) = \frac{-p_0}{\pi \rho v_0^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta \sin \theta} \int_0^{\infty} \frac{\sin(kl \cos \theta) \sin(krl \sin \theta)}{k - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} + i \frac{\mu}{v_0 \cos \theta}} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \frac{dk}{k} \quad (17.114a)$$

Ten sam sposób postępowania można zastosować dla przypadku zbiornika wody o głębokości H . Na podstawie (17.109) można zauważyć, że wyrażenie dla $\xi(x, y)$ będzie się różnić od wyrażenia (17.114a) tylko tym, że zamiast:

$$\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} \text{ będzie występować } \frac{g \operatorname{tgh}(kH)}{v_0^2 \cos^2 \theta}$$

co jest zgodne ze związkiem dyspersyjnym (16.52).

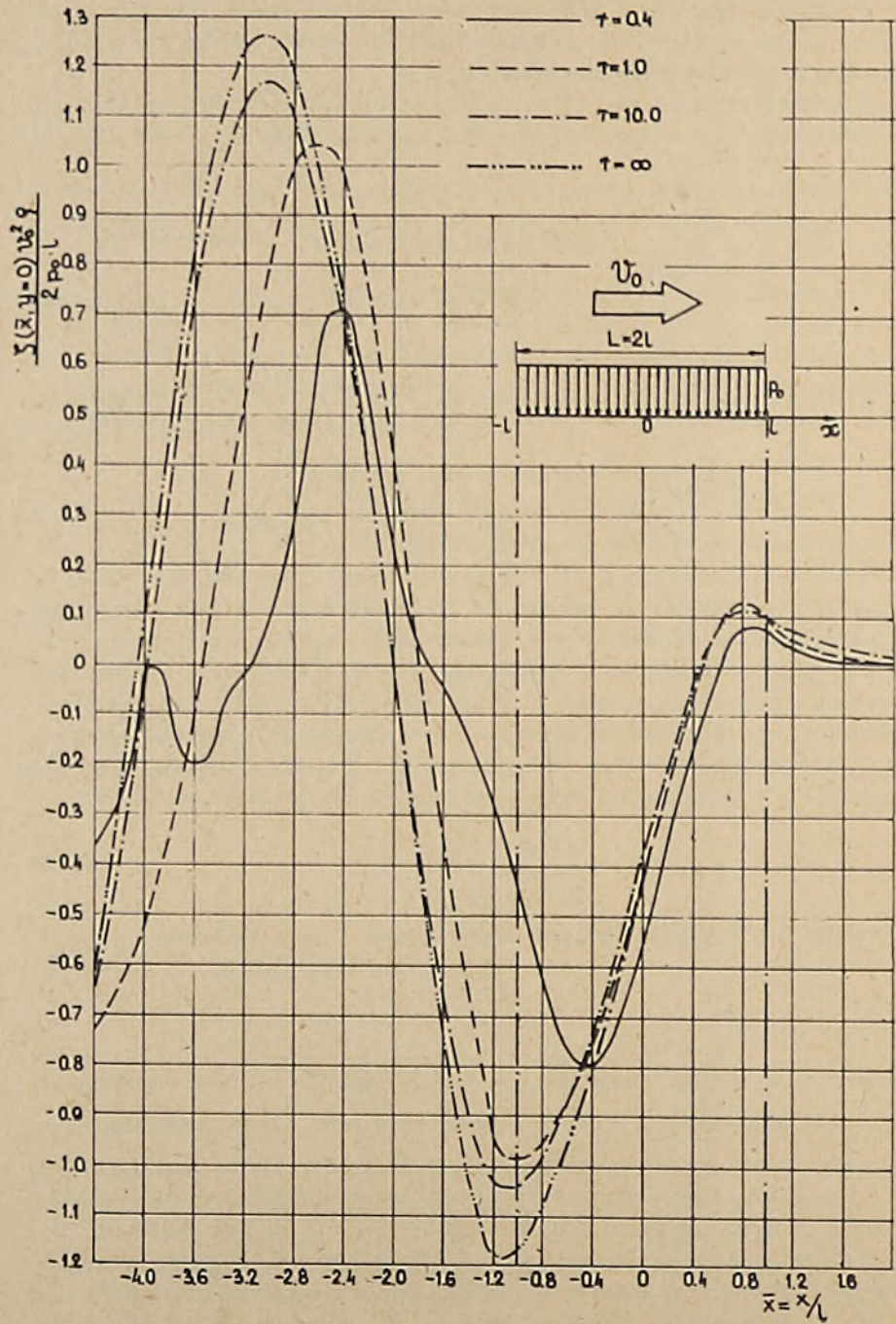
Po wyznaczeniu $\xi(-l, y)$ i $\xi(l, y)$ można według wzoru (17.109a) obliczyć opór falowy poduszki. Ze względu na złożoność wzoru 17.114a obliczenia takie są możliwe do wykonania przy zastosowaniu analizy numerycznej. Dość uciążliwy sposób postępowania, opracowany w szczegółach, wraz z programem dla maszyny cyfrowej można znaleźć w pracach [32] i [34]. Tam również przedstawiono wyniki obliczeń profilu fali wzdłuż osi Ox i współczynnika oporu C_w dla różnych wartości stosunku $r = \frac{b}{l} = \frac{B}{L}$, gdzie $B = 2b$, a $L = 2l$. Na rysunku 17.34 przytoczono wyniki obliczeń współczynnika profilu fali

$$\frac{\xi(\bar{x}, y=0) v_0^2 \rho}{2 p_0 l}$$

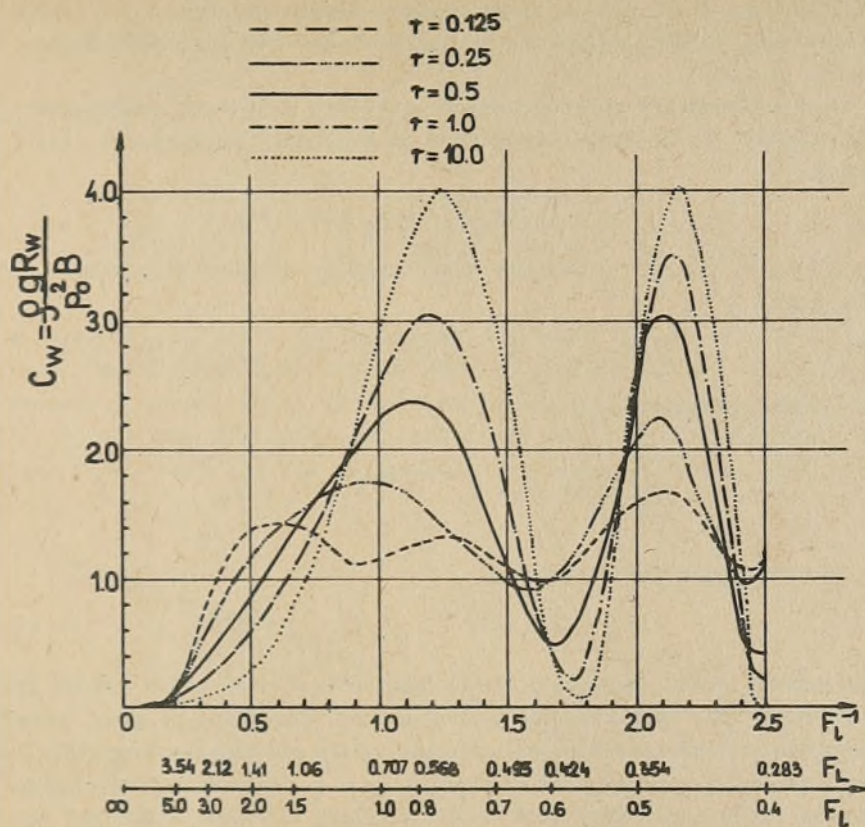
a na rysunku 17.35 wyniki obliczeń współczynnika oporu falowego

$$C_w = \frac{\rho g R_w}{p_0^2 B}$$

w zależności od liczby Froude'a $F_L = \frac{v_0}{\sqrt{gL}}$ i liczby F_L^{-1} . Pomiędzy liczbami F_L i F_L^{-1} mamy zależność $F_L = \sqrt{2} F_L^{-1}$. Pełniejsze dane o współczynnikach oporu falowego można znaleźć w pracy [33]. Widzimy, że krzywe współczynnika oporu falowego wykazują charakterystyczne garby. Pierwszy z nich ma miejsce przy $F_L \approx 0,22$, drugi $F_L \approx 0,32$ i trzeci przy $F_L \approx 0,6$. Położenie tych garbów zależy ponadto od stosunku $\frac{B}{L} = r$. Dla większych wydłużeń poduszki powietrznej L/B lokalne maksima C_w przesuwają się w kierunku większych liczb F_L . Z rysunku 17.35 widzimy, ponadto, że po przekroczeniu ostatniego garbu na krzywej C_w opór falowy szybko ulega zmniejszeniu i dla $F_L > 2,5$



Rys. 17.34



Rys. 17.35

praktycznie jest bliski zeru. Dla statków nawodnych, jak wskazano wyżej, również występują na krzywej $C_w(F_L)$ lokalne maksima usytuowane w podobnych zakresach liczb F_L .

Znając potencjał $\varphi(x, y, z)$ można znaleźć na podstawie wzoru (17.113) pole ciśnień w wodzie. Szczególnie interesującym jest rozkład ciśnień na dnie zbiornika wodnego, dla $z=H$. Ze wzorów (17.109) i (17.111) otrzymujemy:

$$p(x, y, z = H) = p_a + p_0 + \rho g H +$$

$$+ \frac{p_0}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\cosh(kH) \cos\theta \sin\theta} \int_0^{\infty} \frac{\sin(kl \cos\theta) \sin(krl \sin\theta)}{k - \frac{E}{v_0} \sec^2\theta + i \frac{H}{v_0} \sec\theta} e^{ik(x \cos\theta + y \sin\theta)} dk$$

Drugi człon tego wyrażenia jest stały na prostokącie $x \in (-1, 1)$; $y \in (-b, b)$; poza tym obszarem jest oczywiście równy zeru.

Wzór (17.109a) może być zastosowany oczywiście dla różnych układów ciśnień. Przykładowo można badać układ ciśnień w postaci katamaranu a także poduszkowca o większej ilości poduszek powietrznych. Na podstawie zaś sche-

matu rysunku 12.46 można szybko napisać ogólne wyrażenie dla potencjału φ poduszki poruszającej się w kanale. Konkretnie obliczenia będą jednak bardzo złożone.

Duże znaczenie w hydromechanice okrętowej mają fale generowane przez poruszającą się ze stałą prędkością po swobodnej powierzchni impuls ciśnienia:

$$p_c(x_1, y_1) = p_0 \delta(x_1) \delta(y_1)$$

oraz fale wytworzone przez dwa takie impulsy ciśnień usytuowane w stałej odległości L :

$$p_c(x_1, y_1) = p_0 \delta(x_1) \delta(y_1) + p_0 \delta(x_1 - L) \delta(y_1)$$

Dla przypadku pierwszego:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} p_c(x_1, y_1) e^{-i(ux+vy)} dx_1 dy_1 = p_0 \quad (17.116a)$$

a dla drugiego - jest równa:

$$p_0 (1 + e^{-i\omega L}) = p_0 (1 + e^{-ikL \cos \theta}) \quad (17.116b)$$

Przy pomocy ruchu powyższych dwóch impulsów ciśnień można wytłumaczyć istotne cechy fal wytwarzanych przez statek. Zauważmy, że przy jednostajnym ruchu ciała w ośrodku nieograniczonym cieczy nielepkiej (rys. 13.7) na dziobie i na rufie współczynnik ciśnienia $C_p = 1$. Stąd w znacznym uproszczeniu zamiast ruchu ciała mamy ruch dwóch impulsów ciśnień. Potencjał φ przepływu dla przypadku jednego impulsu dostaniemy przez podstawienie p_0 zamiast ostatniej całki wzoru (17.109a); dla drugiego przypadku analogicznie przez podstawienie wyrażenia (17.116b). I tak dla pierwszego przypadku mamy:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \\ &= \frac{-ip_0}{4\pi^2 \rho v_0^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sec \theta d\theta \int_0^{\infty} \frac{\cosh\{k(H-z)\}}{\cosh(kH)} \frac{e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}}{k - \frac{g}{v_0^2} \operatorname{tgh}(kH) \sec^2 \theta + i \frac{\mu}{v_0} \sec \theta} dk \end{aligned}$$

Napiszcie potencjał φ dla ruchu impulsu ciśnienia p_0 na wodzie głębokiej.

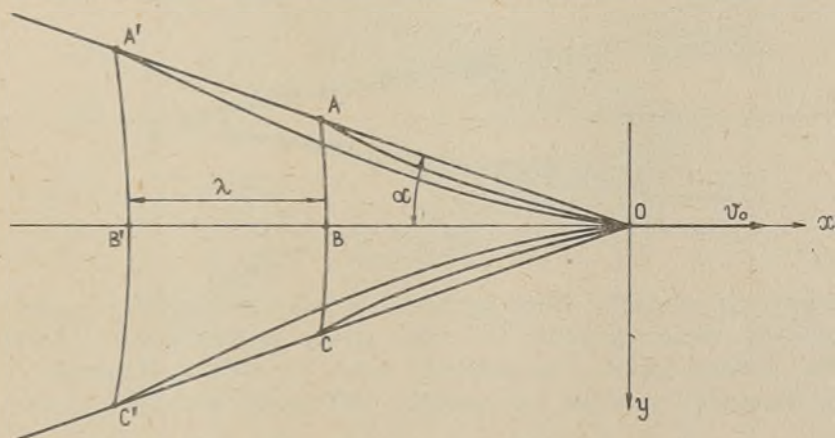
Dla znalezienia wychylenia swobodnej powierzchni $\xi(x, y)$ musimy obliczyć φ_x .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{p_0}{4\pi^2 \rho v_0^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\cos \theta} \int_0^{\infty} \frac{\cosh\{k(H-z)\}}{\cosh(kH)} \frac{e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} k^2 \cos \theta}{k - \frac{g}{v_0^2} \operatorname{tgh}(kH) \sec^2 \theta + i \frac{\mu}{v_0} \sec \theta} dk$$

Zatem fale wywołane ruchem jednego impulsu ciśnienia będą określone wyrażeniem

$$\begin{aligned} \zeta(x,y) &= -\frac{v_0}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{z=0} = \\ &= -\frac{P_0}{4\pi^2 \rho g} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{ik(x\cos\theta+y\sin\theta)} k^2 dk}{k - \frac{g}{v_0} \operatorname{tgh}(kH) \sec^2\theta + i \frac{\mu}{v_0} \sec\theta} \end{aligned} \quad (17.117)$$

Dla wody głębokiej należy w tym wyrażeniu podstawić $\operatorname{tgh}(kH) = 1$. Oczywiście z lepkością Rayleigh'a idziemy do zera po obliczeniu całki osobliwej. Wyprowadzenie μ zapewni właściwy kierunek obchodzenia biegunów w wyrażeniu (17.117). Sposób rozwiązywania całki osobliwej przy pomocy twierdzenia Cauchy'ego o residuach możecie znaleźć między innymi w tomie II [10], w pracy [15], [34].



Rys. 17.36

Schematycznie fale wytworzone przez impuls ciśnienia na wodzie głębokiej zwane falami Kelvina, pokazuje rysunek 17.36. Składają się one z dwóch układów fal: fal skośnych i fal poprzecznych. Na rysunku 17.36 grzbiety fal skośnych charakteryzują krzywe: OA; OA'; OC; OC', a grzbiety fal poprzecznych - krzywe: ABC; A'B'C'. Wytworzone fale na swobodnej powierzchni zawarte są wewnątrz kąta 2α . Na wodzie głębokiej kąt α ma stałą wartość: $\alpha = 19^\circ 38'$. Na wodzie płytkiej kąt α ulega zmianie. Jeśli prędkość $v_0 < \sqrt{gH} = v_{kr}$, to układ fal jest podobny do tego, jak na rysunku 17.36, a wyrażenie dla α ma postać [17]:

$$\cos^2 \alpha = \frac{8(1-n)}{(3-n)^2} \quad n = \frac{2kH}{\sinh(2kH)}$$

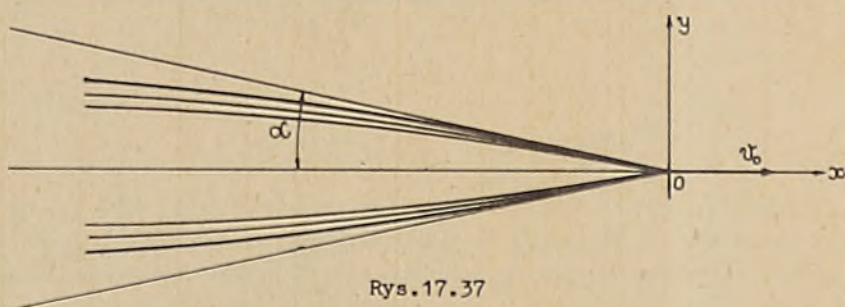
Dla $H = \infty$ $n = 0$, więc $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ i $\alpha = 19^\circ 38'$. Dla $v_0 = \sqrt{gH}$ $n = 1$ i $\alpha = 90^\circ$.

Przy prędkości statku równej v_{kr} następuje zlewanie się fal poprzecznych i fal skośnych w jedną falę mającą charakter fali odosobnionej. Dla prędkości $v_0 < 0,5 \div 0,6$ kąt α jest praktycznie taki sam jak na wodzie głębokiej.

Po przekroczeniu prędkości krytycznej fali, $v_0 > v_{kr}$, fale poprzeczne znikają i pozostają tylko fale skośne, których grzbiety mają kształt linii skierowanych wypukłością w kierunku osi $\pm Oy$. Pokazuje je rysunek 17.37. Kąt ograniczający obszar sfalowanej wody określa związek:

$$\cos 2\alpha = 1 - \frac{2gh}{v_0^2}$$

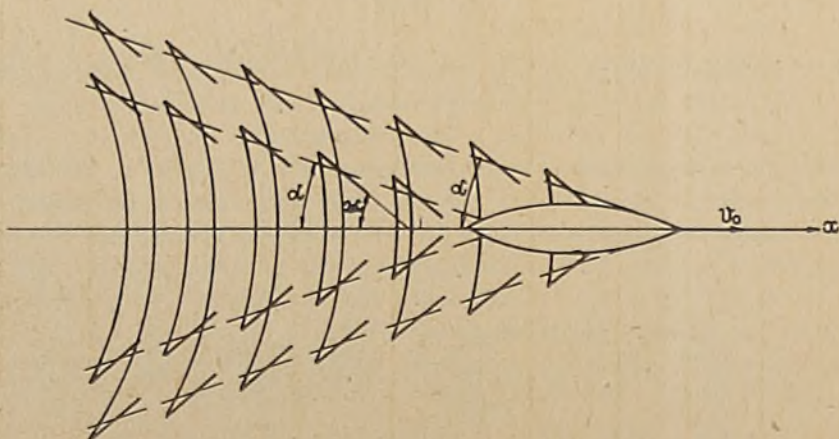
Widzimy, że kąt α maleje z prędkością v_0 ; przy liczbie Froude'a $F_H = 3$ osiąga on wartość kąta α na wodzie głębokiej.



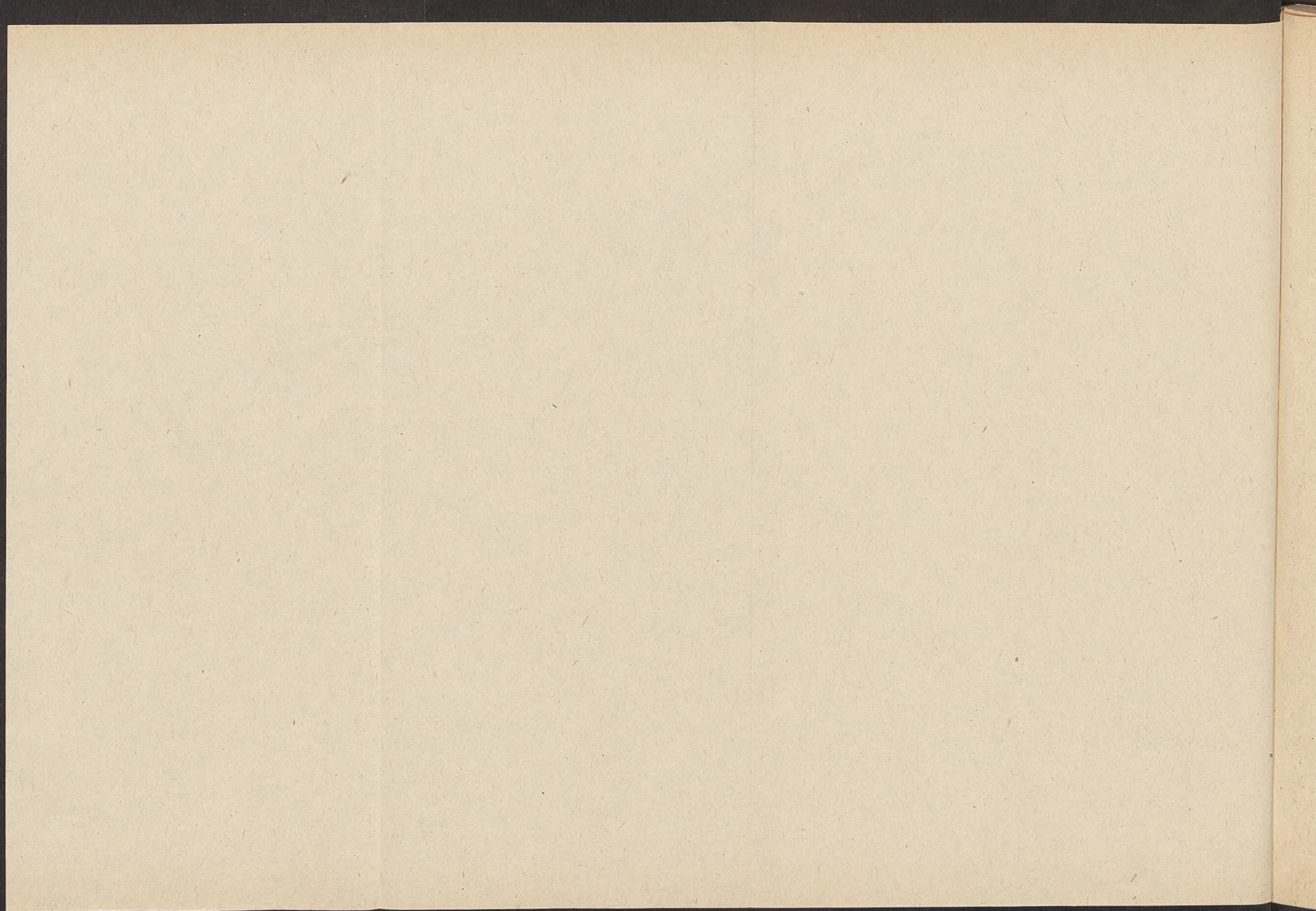
Rys.17.37

Rozpatrzmy przypadek dwóch impulsów ciśnień wędrujących po swobodnej powierzchni. Mając wyrażenie (17.116b) możemy powtórzyć całe obliczenie, jak dla jednego impulsu. Na podstawie wzoru (17.116b) i wyrażenie (17.117) możemy zauważyć, że układ fal wywołany tymi dwoma impulsami będzie:

$$\zeta(x,y) = \zeta_1(x,y) + \zeta_2(x,y) \quad (17.118)$$



Rys.17.38



gdzie: $S_1(x,y)$ - jest dane wzorem (17.117), a $S_2(x,y)$ również wzorem (17.117) z tą różnicą, że zamiast x należy podstawić w tym wzorze $x-L$.

Obraz fal $S_2(x,y)$, będzie zatem taki sam, jak obraz fal $S_1(x,y)$. Będzie się on jednak rozpoczynać w miejscu $x = -L$. Zgodnie z (17.118) fale S_1 i S_2 dodają się; następuje interferencja obu układów fal. Widzimy, że interferencja jest możliwa tylko dla fal poprzecznych. Fale skośne nie spotykają się nigdy. Po przekroczeniu prędkości krytycznej v_{kr} nie ma interferencji układów fal. Warunek korzystnej interferencji ze względu na opór falowy określa związek (16.104b). Tę interferencję układów fal wytworzonych przez impulsy ciśnienia można wytłumaczyć lokalne maksima i minima na krzywej oporu falowego poduszkiowca a także nawodnego statku.

Opisane wyżej układy fal dla ruchu dwóch impulsów ciśnienia oddają bowiem główny charakter fal powierzchniowych, generowanych przez poruszający się ze stałą prędkością po linii prostej statek nawodny. Obraz fal okrętowych na wodzie głębokiej schematycznie pokazuje rysunek 17.38. Na rysunku 17.39 pokazano zaś plan warstwiczny pomierzonych fal statku o kształtach parabolicznych, tak zwanych modeli Wigley'a [35] dla tej samej liczby Froude'a

$$kL = \frac{2\pi L}{\lambda} = \frac{gL}{v_0^2} = \frac{1}{F_L^2} = 12$$

i dwóch różnych T/L . Górna część rysunku odnosi się dla $T/L = 0,0625$, a dolna $T/L = 0,100$.

Z rysunków widzimy, że w falach okrętowych można rozróżnić także dwa układy fal: fale skośne i fale poprzeczne. Oba te układy powstają w części dziobowej i rufowej statku. Kształt fal dziobowych jest podobny do fal rufowych. Obraz fal poprzecznych ze statkiem powstał w wyniku interferencji poprzecznych fal dziobowych i poprzecznych fal rufowych. Fale skośne i rufowe nie interferują ze sobą. Składają się one z krótkich frontów, osie których tworzą z płaszczyzną symetrii statku kąt $\beta \approx 2\alpha$. Środki frontów fal skośnych leżą na linii prostej nachylonej do płaszczyzny Oxz pod kątem $\alpha \approx 20^\circ$.

Ponieważ układ fal utworzonych przez statek jest nieruchomy dla ruchu jednostajnego statku, to długość fal poprzecznych, mierzona w płaszczyźnie symetrii statku, jest równa:

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} v_0^2 \quad (17.115c')$$

Słuszność wzoru (17.115c') względnie poprawność pomiarów można sprawdzić na rysunku 17.39.

Rysunek 17.39 pokazuje złożoność fal okrętowych. Porównując górną i dolną część tego rysunku widać wyraźny wpływ parametru T/L , odpowiednika wydłużenia płata. Parametr T/L dla modeli Wigley'a równy 0,10, odpowiada smukłości płata $g/b = \bar{g}$. Opór falowy statku zatem, tak jak należało oczekiwać, zależy od parametrów określających kształt statku oraz od liczby F_L ; na wodzie płytkiej także od liczby F_H . Znajomość wpływu kształtu kadłuba jest istotna dla projektanta statku. Zagadnienie to nie znalazło do tej pory

pełnego rozwiązania. Niektóre praktyczne dane poznacie na zajęciach projektowych. Tu wskażemy tylko, że im statek ma kształt bliższy do płaskiej płyty, tym opór falowy będzie mniejszy. Płaska płyta opływana strugą jednorodną cieczy nielepkiej o kierunku przepływu równoległym do swojej powierzchni nie zakłóca przepływu i stąd nie wykazuje oporu falowego. Dla takiej płyty $C_B \frac{B}{L} = 0$.

18. PODSTAWY TEORETYCZNEGO WYZNACZANIA OPORU FALOWEGO STATKU

Ogólne podstawy teoretycznego wyznaczania oporu falowego statków już znamy. Wystarczy je podsumować i wskazać na pewne trudności w teoretycznym rozwiązywaniu tego zadania. A zadanie to ma duże znaczenie praktyczne. Podstawowe zagadnienie polega bowiem na tym, że dana jest prędkość v_0 i wyporność statku V i należy tak dobrać kształt podwodnej części kadłuba, aby jego opór falowy był możliwie jak najmniejszy. Gdyby udało się rozwiązać to zadanie, to oprócz uzyskania znajomości wpływu parametrów kształtu kadłuba na opór falowy R_w możliwe stałoby się określenie oporu lepkości statku R_v przez prosty pomiar oporu całkowitego modelu statku $R_T = R_w + R_v$. Celowe zatem jest prowadzenie prac w kierunku rozwiązania teoretycznego tych zadań. W dziedzinie oporu falowego statków i innych ciał wykonano kilkaset prac teoretycznych oraz badań modelowych i badań numerycznych. Spis ważniejszych można znaleźć w [37]. Prace badawcze nad tym zadaniem są ciągle kontynuowane.

W rozdziale tym zostaną podane podstawy teorii oporu falowego w taki sposób, aby możliwym stało się szybkie zidentyfikowanie danej publikacji i krytyczna jej ocena.

Opór falowy statku w cieczy nielepkiej i przy założeniu potencjalnego przepływu określa wzór (17.95):

$$R_w = \frac{1}{2} \rho g \oint_{\partial S} \xi^2 dy - \frac{\rho}{2} \int_S (\nabla \varphi)^2 n_x dS + \rho \int_S \varphi_n \varphi_x dS \quad (17.95)$$

Jak wyżej już wskazano, można temu wzorowi nadać inne postacie. Wzór się upraszcza dla statku podwodnego, który pływa blisko swobodnej powierzchni. Powierzchnia S jest wtedy powierzchnią zamkniętą i odpada całka po brzegu ∂S .

Dla statku nawodnego, którego kadłub przecina swobodną powierzchnię S_F , powierzchnia zwilżona statku S podlega wyznaczeniu w zadaniu o jednostajnym ruchu statku wzdłuż linii prostej. Jest ona bowiem inna niż powierzchnia zwilżona Ω statku nieruchomego. Nawet dla statku symetrycznego oprócz oporu R_w istnieje bowiem reakcja R_z , różna od hydrostatycznego wyporu, a także moment pochylający statek M_y . Uzasadnijcie to twierdzenie. Statek nawodny przy każdej prędkości $v_0 = \text{const}$ zajmuje inne położenie względem wody. Od prędkości v_0 zależy także układ falowy. Zatem zadanie o oporze falowym statku nawodnego jest bardzo złożone.

W ujęciu liniowym oporu falowego bierze się, jak wiadomo, pod uwagę tylko ostatni wyraz wzoru (17.95):

$$R_w = \rho \int_S \varphi_n \varphi_x \, dS = \rho v_0 \int_S \varphi_x n_x \, dS$$

a ponadto zakłada się, że $S = \Omega$. Gdy to nie jest zbyt duże uproszczenie? Czy nie należałoby, nawet przy wyznaczeniu potencjału φ w zadaniu zlinearyzowanym:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (18.1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{E}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\mu}{v_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } z = 0 \quad (18.2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=h} = 0 \quad (18.3)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y = \pm \frac{b}{2}} = 0 \quad (18.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = v_0 n \quad (18.5)$$

$$\xi = - \left. \frac{v_0}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{z=0} \quad (18.6)$$

uwzględniać wszystkich wyrazów wzoru (17.95) z całkowaniem po powierzchni S , a nie Ω ? Może ktoś z Was da odpowiedź na te pytania! Obecnie mnie nie są one znane.

Przy wzięciu pod uwagę przypadku 3 rozdziału 16.4 spróbujcie sformułować zadanie w ujęciu liniowym w oporze falowym statku z uwzględnieniem wpływu lepkości płynu.

Dalej będziemy zajmować się przepływem czysto potencjalnym i to głównie zadaniem z liniowym warunkiem brzegowym na swobodnej powierzchni S_F , warunek (18.2). Macie jednak podstawy do ogólniejszego potraktowania zadania: ogólny warunek brzegowy (15.10b)!

Patrząc na wyżej sformułowane zadanie o wyznaczeniu potencjału φ zauważmy, że zawiera ono dużo elementów wspólnych dla ruchu jednostajnego układu ciśnień p_c po swobodnej powierzchni wody, a także elementy wspólne dla ruchu ciała w ośrodku nieograniczonym. Ponieważ w tym ostatnim przypadku potencjał φ był wyznaczony przy pomocy tak zwanej metody źródeł, wzór (12.60), to i w tym przypadku można postąpić podobnie. Należy tylko znać potencjał źródła poruszającego się ruchem jednostajnym z prędkością v_0 pod swobodną powierzchnią wody. Potencjał takiego źródła nazywają funkcją źródłową Havelocka, a czasami prosto: funkcją Greena dla źródła:

$$\varphi(x, y, z) = - \frac{Q}{4\pi} G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \quad (15.52) \quad (18.7)$$

Funkcję Greena G weźmiemy w postaci wzorów (15.53b i c)

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = G(M, N) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + G(M, N) \quad (18.8)$$

tu M oznacza punkt o współrzędnych x, y, z , a N punkt o współrzędnych ξ, η, ζ . Odległości r i r_1 określają wzory (15.51a i b). Układy $Oxyz$ i $O\xi\eta\zeta$ (rys. 15.5) poruszają się ze stałą prędkością $\vec{v}_0 = \vec{e}_1 v_0$.

18.1. PRZEDSTAWIENIE CAŁKOWE FUNKCJI GREENA DLA ŹRÓDŁA W OŚRODKU NIEOGRANICZONYM

Wyprowadzimy podstawowy wzór w teorii oporu falowego statku dla potencjału źródła o wydatku $Q = 1$, usytuowanego w punkcie $N(\xi, \eta, \zeta)$, w przedstawieniu całkowym. Zgodnie ze wzorem (12.55) mamy:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} = \\ &= -\frac{1}{4\pi r} = -\frac{1}{4\pi} G(M, N) \end{aligned} \quad (18.9)$$

Powyższe wyrażenie można także uzyskać ze wzoru ogólnego (12.63):

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{q(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{r}$$

będącego rozwiązaniem równania Poissona (12.64):

$$\Delta\varphi = q(\xi, \eta, \zeta)$$

dla przypadku $q(\xi, \eta, \zeta) = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)$

gdzie: $\delta(\)$ jest funkcją delta Diraca.

Dla naszego przypadku zatem mamy:

$$\Delta\varphi = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta)$$

Równanie to po uwzględnieniu (18.7) i (18.9) będzie mieć postać:

$$\Delta G = -4\pi\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta) \quad (18.10)$$

z warunkiem brzegowym $G \rightarrow 0$ przy $x, y, z \rightarrow \infty$.

Rozwiążemy to równanie (18.10) przez zastosowanie przekształcenia Fouriera.

Niech zatem:

$$\begin{aligned} g(u, v, w, \xi, \eta, \zeta) &= \mathcal{F}\{G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\} = \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} G e^{-i(ux+vy+wz)} dx dy dz \end{aligned} \quad (18.11a)$$

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \mathcal{F}^{-1} \{g(u, v, w, \xi, \eta, \zeta)\} = \\ = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} g e^{i(ux+vy-wz)} du dv dw \quad (18.11b)$$

Stosując twierdzenie o transformacie pochodnej oraz twierdzenie o przesunięciu równanie (18.10) przybierze postać

$$(iu)^2 g - (iv)^2 g - (iw)^2 g = -4\pi e^{-iu\xi} e^{-iv\eta} e^{-iw\zeta}$$

Stąd:

$$g(u, v, w, \xi, \eta, \zeta) = 4\pi \frac{e^{-i(u\xi+ v\eta+ w\zeta)}}{u^2 + v^2 + w^2}$$

Po zastosowaniu wzoru (18.11b) mamy:

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i[u(x-\xi)+v(y-\eta)+w(z-\zeta)]}}{u^2 + v^2 + w^2} du dv dw \quad (18.12a)$$

Jeśli wprowadzimy oznaczenie (16.88b)

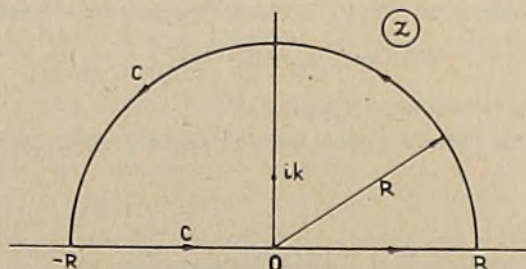
$$k^2 = u^2 + v^2$$

to wyrażenie (18.12a) będzie

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i[u(x-\xi)+v(y-\eta)]} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw(z-\zeta)}}{k^2 + w^2} dw \right) du dv \quad (18.12b)$$

Ostatnią całkę (18.12b) obliczymy przy pomocy twierdzenia o residuach i zastosowaniu lematu Jordana dla $\alpha = z - \zeta > 0$ [10, tom II]. Oznaczmy $w = z$, gdzie z - zmienna zespolona. Wtedy:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iw(z-\zeta)}}{k^2 + w^2} dw = \frac{1}{\pi} \oint_C \frac{e^{i\alpha z}}{k^2 + z^2} dz \quad (18.12c)$$



Rys.18.1

Dla $\alpha > 0$ biegun $z = ik$ leży w górnej półpłaszczyźnie i kontur C obieramy jak na rysunku 18.1.

Ponieważ:

$$\left| f(z) \right| = \left| \frac{1}{k^2 + z^2} \right| \rightarrow 0 \quad \text{fla } R = |z| \rightarrow \infty$$

to na mocy lematu Jordana całka (18.12c) po półokręgu o promieniu $R \rightarrow \infty$ jest równa zeru i

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\alpha}}{k^2 + \omega^2} d\omega = 2\pi i \operatorname{Res} \left[f(z) e^{i\alpha z} \Big|_{z=ik} \right]$$

Obliczymy residuum C_{-1} funkcji podcałkowej $f(z) e^{i\alpha z}$. Mamy wzór ogólny:

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) g(z)$$

Dla naszego przypadku:

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow ik} (z-ik) \frac{e^{i\alpha z}}{(z-ik)(z+ik)} = \frac{e^{-\alpha k}}{2 ik}$$

Więc:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(z-\xi)}}{k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{2\pi i}{\pi} \frac{e^{-k(z-\xi)}}{2 ik} = \frac{1}{k} e^{-k(z-\xi)} \quad (18.12d)$$

Zależność (18.12d) jest ważna dla $\alpha = z - \xi \geq 0$. Postępując podobnie uzyskamy wyrażenie ważne dla $\alpha = z - \xi \leq 0$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(z-\xi)}}{k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{k} e^{k(z-\xi)} \quad (18.12e)$$

Wyrażenia (18.12d) i (18.12e) możemy połączyć w jedno

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(z-\xi)}}{k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{k} e^{k|z-\xi|} \quad (18.12f)$$

Stąd po uwzględnieniu wzoru (18.12f) i wzoru (18.12b) funkcja Greena dla źródła w ośrodku nieograniczonym będzie

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} e^{i[u(x-\xi) + v(y-\eta)] - k|z-\zeta|} du dv \quad (18.13a)$$

Po wprowadzeniu układu biegunowego:

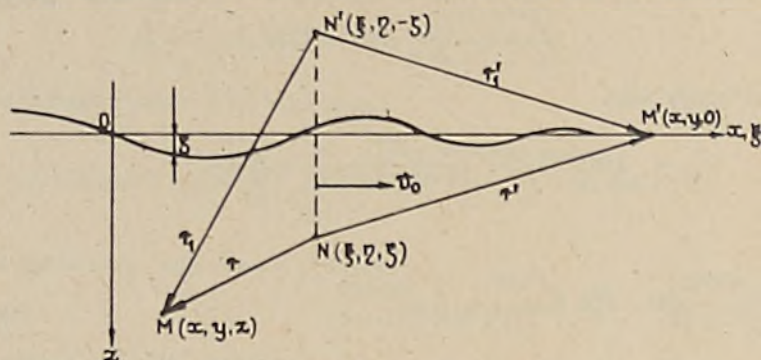
$$\begin{aligned} \theta &\in \langle -\pi, \pi \rangle & k &\in \langle 0, \infty \rangle \\ u &= k \cos \theta & v &= k \sin \theta \\ k dk d\theta &= du dv \end{aligned}$$

wzór (18.13a) przyjmuje postać:

$$G(M, N) = \frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} e^{-k|z-\zeta| + ik[(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta]} dk d\theta \quad (18.13b)$$

18.2. POTENCJAŁ ŹRÓDŁA POD SWOBODNĄ POWIERZCHNIĄ WODY
 GŁĘBOKIEJ

Niech źródło o stałym wydatku usytuowane w punkcie $N(\xi, \eta, \zeta)$ pod swobodną powierzchnią porusza się ze stałą prędkością v_0 w kierunku osi Ox , rysunek 18.2. Pokazane na rysunku 18.2 układy współrzędnych są związane ze źródłem. Zakładamy, że poziome wymiary zbiornika wody i jej głębokość są nieograniczone. Niech potencjał prędkości wody φ wywołanej poruszającym się źródłem będzie określony wyrażeniami (18.7) i (18.8). Musi on spełniać równanie Laplace'a (18.1) z warunkami brzegowymi (18.2) i (18.3).



Rys. 18.2

Podstawiając

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + G_1 \right)$$

do równania Laplace'a mamy:

$$\Delta G_1 = \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G_1}{\partial z^2} = 0 \quad (18.14)$$

Zauważcie, że jeżeli za r^{-1} i r_1^{-1} podstawimy się do równania $\Delta\varphi=0$ wyrażenie (18.13a), to uzyskamy związek $k^2 = u^2 + v^2$ i równanie (18.14).

Postępując podobnie z warunkiem na dnie (18.3) dostajemy

$$\left. \frac{\partial G_1}{\partial z} \right|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad (18.15)$$

Pozostał nam jeszcze warunek brzegowy na swobodnej powierzchni (18.2). Przed wyrażeniem go przy pomocy funkcji harmonicznej G_1 - spełnia ona bowiem równanie (18.14) - wprowadzimy oznaczenia:

$$K_0 = \frac{k}{v_0} \quad \mu_1 = \frac{\mu}{v_0} \quad (18.16)$$

Podstawiając wyrażenie (18.7) do warunku (18.2) mamy dla $z=0$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} - \mu_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} - K_0 \frac{\partial G_1}{\partial z} = K_0 \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \quad (18.17a)$$

Przy obliczaniu pochodnych cząstkowych z r i r_1 można posługiwać się wzorami (15.51a i b) lub wzorem (18.13b). Dla funkcji r_1^{-1} przedstawienie całkowe na mocy (18.13b) jest:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-k(z+\xi)} e^{ikw} dk \quad (18.13c)$$

gdzie:

$$w = (x-\xi) \cos\theta + (y-\eta) \sin\theta \quad (18.13d)$$

We wzorze (18.13c) opuszczono znak bezwzględnej wartości, bo w układzie odniesienia jak na rysunku 18.2 $z+\xi$ ma zawsze wartość dodatnią. Zauważcie, że przy zbliżaniu się do swobodnej powierzchni, $z \rightarrow 0$, zgodnie z (18.12e), wyrażenie (18.13b) będzie:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{k(z-\xi)} e^{ikw} dk \quad (18.13e)$$

bo $\xi > 0$ jest wartością zanurzenia źródła Q.

Widzimy, że dla $z=0$ wzory (18.13c i e) dają taką samą wartość $r' = r_1'$. Jest zatem tak, jak powinno być: punkt M' na rysunku 18.2. Widzimy również, że dla $z=0$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} \right)$$

Wygodniejsze, ze względu na uniknięcie kłopotów z wartością bezwzględną występującą we wzorach (18.13a i b), jest stosowanie przedstawienia (18.13c). Biorąc to pod uwagę, warunek (18.17a) zapisujemy tak:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} - \mu_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} - K_0 \frac{\partial G_1}{\partial z} = - 2 K_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} \right) \quad (18.17b)$$

Z wyrażenia (18.13c) dla $z=0$ mamy:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right|_{z=0} = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} k e^{-k\xi} e^{ikw} dk$$

Podstawiając powyższą zależność do warunku (18.17b) uzyskujemy jego postać końcową:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} - \mu_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} - K_0 \frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{K_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} k e^{-kz} e^{ikw} dk = \quad (18.17c)$$

$$= \frac{K_0}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-kz} e^{i[u(x-\xi)+v(y-\eta)]} du dv \quad (18.17d)$$

dla $z=0$.

Równanie dla $G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, (18.14), z warunkiem brzegowym (18.15) i (18.17c) względnie (18.17d) rozwiązuje się w różny sposób, najczęściej metodą przewidywania rozwiązania [17]. My rozwiążemy je metodą bardziej ogólną. Zastosujemy metodę przekształceń całkowych Fouriera tak samo, jak to zostało zrobione przy poszukiwaniu potencjału ϕ dla ruchu ustalonego dowolnego układu ciśnień $p_0(x_1, y_1)$, po swobodnej powierzchni wody. Metoda ta może zostać także zastosowana dla ruchu źródła pod powierzchnią swobodną cieczy w zbiorniku o głębokości h i dla innych przypadków stacjonarnych osobliwości hydromechanicznych.

Niech zatem

$$\mathcal{F}\{G_1\} = g(u, v, z, \xi, \eta, \zeta) = \iint_{-\infty}^{\infty} G_1 e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

$$G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \mathcal{F}^{-1}\{g\} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} g(u, v, z, \xi, \eta, \zeta) e^{i(ux+vy)} du dv$$

Transformacja Fouriera równania Laplace'a jest:

$$-(u^2 + v^2)g + \frac{d^2 g}{dz^2} = 0$$

Stąd:

$$\frac{d^2 g}{dz^2} - k^2 g = 0$$

Więc

$$g(u, v, z, \xi, \eta, \zeta) = A_1(u, v, \xi, \eta, \zeta) e^{kz} + A_2(u, v, \xi, \eta, \zeta) e^{-kz}$$

Po wyznaczeniu funkcji A_1 i A_2 stosujemy jak zwykle warunek brzegowy na dnie, warunek (18.5), którego transformata Fouriera jest:

$$\left. \frac{dg}{dz} \right|_{z \rightarrow \infty} = 0$$

Zatem:

$$g(u, v, z, \xi, \eta, \zeta) = A_2 e^{-kz} = A(u, v, \xi, \eta, \zeta) e^{-kz} \quad (18.18a)$$

Funkcję $A(u, v, \xi, \eta, \zeta)$ znajdujemy znów z warunku na swobodnej powierzchni. Stosujemy postać (18.17d). Przed zastosowaniem przekształcenia Fouriera do tego warunku zauważmy, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(x-\xi)} du = 2\pi \delta(x-\xi)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iv(y-\eta)} dv = 2\pi \delta(y-\eta)$$

Więc formalnie warunek (18.17d) możemy zapisać tak:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} - \mu_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} - K_0 \frac{\partial G_1}{\partial z} = 4\pi^2 \left(\frac{K_0}{\pi} e^{-k\xi} \delta(x-\xi) \delta(y-\eta) \right)$$

Stąd przekształcenie Fouriera tego warunku będzie:

$$(-u^2 - i\mu_1 u) g - K_0 \frac{dg}{dz} = 4\pi^2 \left(\frac{K_0}{\pi} e^{-k\xi} e^{-iu\xi} e^{-iv\eta} \right)$$

Po podstawieniu (18.18a) do powyższego równania otrzymujemy:

$$A(u, v, \xi, \eta, \zeta) = 4\pi^2 \left(\frac{K_0}{\pi} \frac{e^{-k\xi} e^{-iu\xi} e^{-iv\eta}}{K_0 k - u^2 - i\mu_1 u} \right)$$

Na mocy związku (18.18a) mamy transformatę funkcji G_1 :

$$g(u, v, z, \xi, \eta, \zeta) = 4\pi^2 \left(\frac{K_0}{\pi} \frac{e^{-k(z+\xi)} e^{-iu\xi} e^{-iv\eta}}{K_0 k - u^2 - i\mu_1 u} \right) \quad (18.18b)$$

Napisanie funkcji $G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ jest proste. Mamy:

$$\begin{aligned} G_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ g(u, v, z, \xi, \eta, \zeta) \right\} = \\ &= \frac{K_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k(z+\xi)} e^{i[u(x-\xi)+v(y-\eta)]}}{K_0 k - u^2 - i\mu_1 u} du dv = \end{aligned} \quad (18.19a)$$

$$= \frac{K_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(z+\xi)} e^{ikw}}{K_0 - k \cos^2 \theta - \mu_1 \cos \theta} dk \quad (18.19b)$$

Zadanie mamy zatem rozwiązane:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + G_1 \right) = -\frac{Q}{4\pi} G(M, N) \quad (18.20)$$

Zauważmy, że $G(M, N) = G(N, M)$ jest funkcją parzystą.

Widzimy, że potencjał φ źródła o wydatku Q poruszającego się po linii prostej na głębokości ξ pod swobodną niezakłóconą powierzchnią wody ze stałą prędkością v_0 w kierunku osi Ox ma postać bardzo złożoną. Funkcja podcałkowa wyrażenia (18.19b) ma bowiem bieguny:

$$k = K_0 \sec^2 \theta - i\mu_1 \sec \theta \quad (18.20a)$$

Lepkość Rayleigha μ daje nam usytuowanie tych biegunów i zapewnia właściwy kierunek ich obchodzenia. Po wykonaniu wszystkich działań bierze się

$\lim_{\mu \rightarrow 0} ()$. Obliczenia są dość uciążliwe. Można je znaleźć w pracy [15] lub [34]. Końcowe wyrażenia w różnych postaciach znajdują się w bogatej literaturze poświęconej oporowi falowemu [37] a także w [6; 15; 17; 21].

Przy pomocy wyrażenia (18.20) dla potencjału prędkości możemy obliczyć pole ciśnień w płynie, fale na swobodnej powierzchni a także opór falowy źródła. Dla przykładu profil fali zgodnie ze wzorem (18.6) będzie:

$$\zeta(x,y) = -\frac{v_0}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{Q v_0}{4\pi g} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + G_1 \right) \Big|_{z=0} = \frac{Q v_0}{4\pi g} \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{z=0}$$

Przy uwzględnieniu wyrażenia (18.19b)

$$\zeta(x,y) = \frac{Q}{4\pi^2 v_0} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\zeta} e^{ik[(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta]}}{K_0 - K \cos^2\theta - i\mu_1 \cos\theta} k dk \quad (18.20b)$$

18.3. POTENCJAŁ ŹRÓDŁA PORUSZAJĄCEGO SIĘ POD SWOBNĄ POWIERZCHNIĄ WODY PŁYTKIEJ

Niech źródło o stałym wydatku Q usytuowane w punkcie $N(\xi, \eta, \zeta)$ porusza się ze stałą prędkością v_0 w kierunku osi Ox , przy czym głębokość wody jest równa h . Układy współrzędnych: $Oxyz$, $O\xi\eta\zeta$ są związane ze źródłem.

Matematyczne sformułowanie zadania jest:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{z=h} &= 0 \end{aligned} \quad (18.21)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - K_0 \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \mu_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } z=0$$

Jeżeli założymy, że $\varphi(x,y,z)$ ma postać (18.20), to oba warunki brzegowe będą mieć postać złożoną. Lepiej dobrać funkcję $f(r)$ tak, aby warunek na dnie miał postać

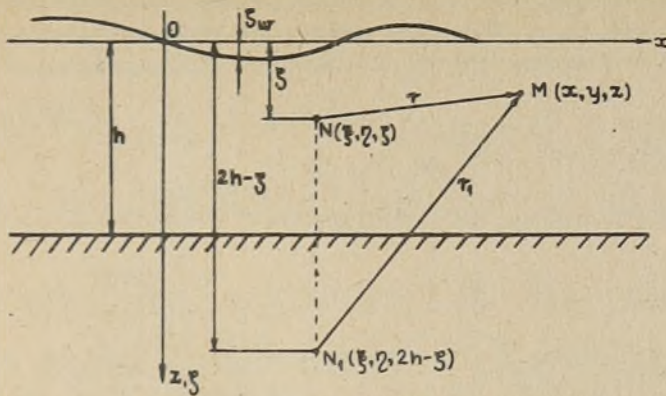
$$\frac{\partial G_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \quad (18.22)$$

Uzyskuje się to, jeśli:

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + G_1 \right) \quad (18.23)$$

gdzie $r = |\overline{MN}|$; $r_1^* = |\overline{MN}_1|$; $N_1(\xi, \eta, 2h-\zeta)$.

W punkcie N_1 znajduje się zatem źródło odbite, także o wydatku Q . Pokazuje to rysunek 18.3.



Rys. 18.3

Więc:

$$r_1^* = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-2h+\zeta)^2}$$

Do wyznaczenia funkcji $G_1(M, N)$ mamy równanie Laplace'a (18.14), warunek (18.22) oraz warunek na swobodnej powierzchni. Wyrazimy go, podobnie jak dla źródła w wodzie głębokiej, przy pomocy funkcji G_1 . Zatem dla $z=0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} - \mu_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} - K_0 \frac{\partial G_1}{\partial z} = & - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1^*} \right) + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1^*} \right) + \\ & + K_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1^*} \right) \end{aligned} \quad (18.24)$$

Ponieważ przy $z \rightarrow 0$ wyrażenie pod znakiem wartości bezwzględnej we wzorze (18.13a i b) ma wartość ujemną zarówno dla r i r_1^* , więc

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} e^{k(z-\zeta)} e^{i[u(x-\xi)+v(y-\eta)]} du dv \\ \frac{1}{r_1^*} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} e^{k(z-2h+\zeta)} e^{i[u(x-\xi)+v(y-\eta)]} du dv \end{aligned} \quad (18.24a)$$

Stąd dla $z=0$

$$\begin{aligned} K_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1^*} \right)_{z=0} &= \frac{K_0}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-k\zeta} + e^{k(\zeta-2h)} \right] e^{i[\cdot]} du dv \\ - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1^*} \right)_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-k\zeta} + e^{k(\zeta-2h)} \right] \frac{u^2}{k} e^{i[\cdot]} du dv \end{aligned} \quad (18.25)$$

Wartość μ_1 występującą po prawej stronie równania (18.24) można już teraz założyć równą zeru. Nie wpływa bowiem ten wyraz na położenie biegunów. Po podstawieniu związków (18.25) do równania (18.24), mamy

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} - K_0 \frac{\partial G_1}{\partial z} - \mu_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[u(x-\xi) + v(y-\eta)]} \left[\frac{e^{-k\xi}}{e^{-k\xi} + e^{k(\xi-2h)}} \right] \left(\frac{K_0 k + u^2}{k} \right) du dv.$$

Przy pomocy funkcji $\delta(\)$ zapisujemy powyższe równanie następująco:

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} - \mu_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} - K_0 \frac{\partial G_1}{\partial z} = \frac{2\pi}{k} \delta(x-\xi) \delta(y-\eta) \left[e^{-k\xi} + e^{k(\xi-2h)} \right] (K_0 k + u^2) \quad (18.26)$$

Zadanie rozwiązujemy przy pomocy przekształcenia Fouriera. Transformatę funkcji $G_1(M, N)$ określamy tak samo jak w zadaniu dla źródła na wodzie głębokiej. Transformacja równania Laplace'a (18.14) jest

$$\frac{d^2 g}{dz^2} - k^2 g = 0 \quad k^2 = u^2 + v^2$$

Stąd przy wykorzystaniu warunku brzegowego na dnie

$$\left. \frac{dg}{dz} \right|_{z=h} = 0$$

mamy

$$\begin{aligned} g(u, v, z, \xi, \eta, \zeta) &= A(u, v, \xi, \eta, \zeta) \cosh k\{(z-h)\} = \\ &= A(u, v, \xi, \eta, \zeta) \cosh k\{(h-z)\} \end{aligned} \quad (18.27)$$

Funkcję $A(u, v, \xi, \eta, \zeta)$ znajdujemy z warunku (18.26):

$$-u^2 g - \mu_1 i u g - K_0 \frac{dg}{dz} = \frac{2\pi}{k} e^{-i(u\xi + v\eta)} \left[e^{-k\xi} + e^{k(\xi-2h)} \right] (K_0 k + u^2)$$

Więc dla $z=0$

$$\left[K_0 k \sinh(kh) - u^2 \cosh(kh) - i \mu_1 u \cosh(kh) \right] A = \frac{2\pi}{k} e^{-i(u\xi + v\eta)} [] (\)$$

Po wyznaczeniu $A(u, v, \xi, \eta, \zeta)$ i podstawieniu do wyrażenia (18.27) transformata Fouriera funkcji G_1 będzie:

$$\begin{aligned} g(u, v, z, \xi, \eta, \zeta) &= \\ &= \frac{2\pi \cosh \{k(h-z)\}}{k \cosh(kh)} \frac{e^{-i(u\xi + v\eta)}}{K_0 k \operatorname{tgh}(kh) - u^2 - i \mu_1 u} \left[e^{-k\xi} + e^{k(\xi-2h)} \right] (K_0 k + u^2) \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} G_1(M, N) &= \mathcal{F}^{-1} \{ g(u, v, z, \xi, \eta, \zeta) \} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh \{k(h-z)\}}{\cosh(kh)} \frac{(K_0 k + u^2) e^{i[u(x-\xi) + v(y-\eta)]}}{k [K_0 k \operatorname{tgh}(kh) - u^2 - i \mu_1 u] \left[e^{-k\xi} + e^{k(\xi-2h)} \right]} du dv \end{aligned} \quad (18.28)$$

Sprawdzić można, że potencjał w postaci (18.23) z funkcją G_1 określoną wyrażeniem (18.28) spełnia zadanie (18.21). W układzie biegunowym wyrażenie (18.28) przyjmuje postać:

$$G_1(M, N) = G_1(N, M) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\cosh\{k(h-z)\}}{\cosh(kh)} \frac{(K_0 + k \cos^2 \theta) e^{ikw} (e^{-kz} + e^{k(z-2h)})}{K_0 \operatorname{tgh}(kh) - k \cos^2 \theta - i\mu_1 \cos \theta} dk \quad (18.29)$$

Gdyby został także uwzględniony drugi wyraz prawej strony warunku (18.24), to wyrażenie $(K_0 + k \cos^2 \theta)$ wzoru (18.29) przeszłoby w $(K_0 + k \cos^2 \theta + i \mu \cos \theta)$. Zatem istotnie nie będzie mieć to wpływu na wartości funkcji $G_1(M, N)$.

Wyrażenie (18.23) dla potencjału źródła, poruszającego się ze stałą prędkością V_0 na głębokości z pod swobodną powierzchnią wody płytkiej o głębokości h , z funkcją G_1 określoną związkami (18.29) obejmuje także przypadek wody głębszej. Przy głębokości $h \rightarrow \infty$ powinno się uzyskać wyrażenie (18.20). I tak rzeczywiście jest. Bowiem przy $h \rightarrow \infty$, $\operatorname{tgh}(kh) = 1$, $e^{k(z-2h)} \rightarrow 0$; $\operatorname{sech}(kh) \cosh\{k(h-z)\} \rightarrow e^{-kz}$; $(r_1^*)^{-1} \rightarrow 0$ więc ze wzorów (18.23), (18.29) mamy dla $h \rightarrow \infty$

$$\varphi(M) = -\frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{(K_0 + k \cos^2 \theta + i \mu_1 \cos \theta) e^{-k(z+z)} e^{ikw}}{K_0 - k \cos^2 \theta - i \mu_1 \cos \theta} dk \right) \quad (18.30)$$

Powyższy wzór uzyskamy także, gdy zamiast $(r_1^*)^{-1}$ we wzorze (18.20) podstawimy jego przedstawienie całkowe (18.17c). Jest więc tak, jak być powinno.

I jeszcze jedna uwaga dotycząca wzoru (18.29). Można go inaczej jeszcze zapisać przy uwzględnieniu, że

$$e^{-kz} + e^{k(z-2h)} = e^{-kh} \left(e^{k(h-z)} + e^{-k(h-z)} \right) = 2 e^{-kh} \cosh\{k(h-z)\}$$

18.4. POTENCJAŁY INNYCH OSOBLIWOŚCI HYDROMECHANICZNYCH POD SWOBODNĄ POWIERZCHNIĄ WODY

Przedstawiona wyżej metoda wyznaczania potencjału źródła pod powierzchnią swobodną wody może być zastosowana, przy uwzględnieniu uwag rozdziału 15.2. do wyznaczania potencjałów innych osobliwości hydromechanicznych pod swobodną powierzchnią. Korzysta się tu jednak tylko z liniowych warunków brzegowych na swobodnej powierzchni.

Szczególnie duże znaczenie przy badaniu kołysań statku ma potencjał dla pulsującego źródła, o wydatku

$$Q = Q_0 e^{i\omega t}$$

Położenie źródła jest stałe w punkcie $N(\xi, \eta, \zeta)$. W związku z tym, rozwiązanie poszukuje się w nieruchomym układzie odniesienia. Potencjału $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ poszukuje się w postaci (18.20) dla źródła w wodzie głębokiej lub w postaci (18.23) dla przypadku źródła pulsującego na wodzie płytkiej. Ten drugi przypadek jest bardziej ogólny, więc rozpatrzmy go. Pierwszy uzyskamy bowiem przez przejście z głębokością zbiornika h do nieskończoności. Tak jak poprzednio potencjał spełnia równanie

$$\Delta \varphi = 0$$

z warunkami:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (15.11)$$

Zgodnie z (18.23):

$$\varphi(M) = - \frac{Q_0 e^{i\omega t}}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1^*} + G_1 \right) = - \frac{Q_0}{4\pi} e^{i\omega t} G(M, N) \quad (18.31)$$

Po podstawieniu (18.31) do równania Laplace'a i warunków brzegowych mamy:

$$\Delta G_1 = 0 \quad (18.14)$$

$$\left. \frac{\partial G_1}{\partial z} \right|_{z=h} = 0 \quad (18.22)$$

$$-\omega^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1^*} + G_1 \right) + i\mu\omega \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1^*} + G_1 \right) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1^*} + G_1 \right) = 0$$

dla $z = 0$

Po uwzględnieniu związków (18.24a) powyższe równanie przyjmuje postać:

$$(-\omega^2 + i\mu\omega) G_1 - \varepsilon \frac{\partial G_1}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} e^{i[u(x-\xi) + v(y-\eta)]} [e^{-kz} + e^{k(z-2h)}] (\omega^2 - i\mu\omega + kg) du dv$$

Dalsze postępowanie jest takie same, jak dla źródła poruszającego się ze stałą prędkością v_0 na wodzie płytkiej.

Transformata Fouriera funkcji $G_1(M, N)$ ma postać:

$$\mathcal{F} \{ G_1(M, N) \} =$$

$$= 2\pi \frac{\cosh\{k(h-z)\}}{k \cos h} \frac{(\omega^2 - i\mu\omega + kg) e^{-i(u\xi + v\eta)}}{gk \operatorname{tgh}(kh) - \omega^2 + i\mu\omega} [e^{-kz} + e^{k(z-2h)}]$$

Więc

$$G_1(M, N) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\cosh\{k(h-z)\}}{\cosh(kh)} \cdot \frac{(\omega^2 - i\mu + kg) e^{ikw} \left[e^{-k\zeta} + e^{k(\zeta-2h)} \right]}{gk \operatorname{tgh}(kh) - \omega^2 + i\mu\omega} dk$$

Zakładając $h \rightarrow \infty$ uzyskamy natychmiast funkcję Greena dla źródła pulsującego na wodzie głębokiej

$$G(M, N) = \frac{1}{r} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(z+\zeta)} e^{ikw} (\omega^2 + kg - i\mu)}{gk - \omega^2 + i\mu\omega} dk \quad (18.33)$$

Powyższe wyrażenie przy uwzględnieniu wzoru (18.13c) można prosto doprowadzić do postaci (18.20):

$$G(M, N) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{g}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{k e^{-k(z+\zeta)} e^{ikw}}{gk - \omega^2 + i\mu\omega} dk \quad (18.34)$$

Gdyby pominięto μ w warunku 15.11 i konsekwentnie w wyrażeniach (18.32-18.34), to w celu uniknięcia fal swobodnych w rozwiązaniu zadania należałoby dołączyć warunek wypromieniowania (16.152).

Występujące w wyrażeniach dla $G(M, N)$ całki osobliwe oblicza się przy pomocy twierdzenia o residuach, podobnie jak to zrobiono przy poszukiwaniu przedstawienia całkowitego dla r^{-1} . Nadaje się przy tym, uzyskiwanym wyrażeniom, różne postacie. Przegląd takich wyrażen można znaleźć między innymi w pracy [17]. Ze względu na złożoność wyrażen funkcji Greena dla źródła pod swobodną powierzchnią poszukuje się także wzorów aproksymacyjnych w celu skrócenia czasu obliczeń numerycznych, wykonywanych przy zastosowaniu maszyn cyfrowych.

Dotychczas rozpatrywaliśmy tylko źródła izolowane. Podobnie jak w ośrodku nieograniczonym mogą one być rozłożone w pewnym obszarze V , na powierzchni S lub krzywej C wydzielonych w cieczy. Różnica pomiędzy wzorami (12.59 - 12.61), ważnymi dla ośrodka nieograniczonego a ich analogami dla zbiornika cieczy ze swobodną powierzchnią polega na tym, że zamiast r^{-1} we wzorach tych należy podstawić funkcję $G(M, N)$. I tak zamiast wzoru (12.59) dla źródeł pod swobodną powierzchnią potencjał prędkości będzie

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_V G(M, N) dQ(V) = -\frac{1}{4\pi} \int_V q_v(N) G(M, N) dV \quad (18.35)$$

Podobnie wzór (12.60) dla potencjału $\varphi(x, y, z)$ wywołanego rozkładem źródeł na powierzchni S jest

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_S G(M, N) dQ(S) = -\frac{1}{4\pi} \int_S q_s(N) G(M, N) dS \quad (18.36)$$

Tu punkt $N(\xi, \eta, \zeta)$ leży na powierzchni S .

Znając funkcję $G(M, N)$ dla źródła pod swobodną powierzchnią, można na podstawie rozdziału 12.2.2, a w szczególności na mocy wzoru (12.78a) lub wzoru (12.78b) natychmiast napisać funkcję Greena dla izolowanego dipola hydromechanicznego pod swobodną powierzchnią wody głębokiej lub wody płytkiej. Można bowiem powtórzyć rozumowanie dla $\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi} G$ i $\varphi_2 = -\frac{Q}{4\pi} G'$. Zatem

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi} \vec{m} \cdot \text{grad}_N G(M, N) = \\ &= -\frac{m}{4\pi} \vec{s} \cdot \text{grad}_N G(M, N) = -\frac{m}{4\pi} \frac{\partial G}{\partial s}\end{aligned}\quad (18.37)$$

Dla dipoli rozłożonych na powierzchni S o osi skierowanej zgodnie z kierunkiem zewnętrznej normalnej do S i gęstości powierzchniowej momentu dipolowego σ potencjał φ w punkcie M na moc wzoru (12.79) będzie:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \sigma(N) \frac{\partial G(M, N)}{\partial n} dS \quad (18.38)$$

Pokażemy dalej, jak wykorzystuje się potencjał źródła i/lub dipola pod swobodną powierzchnią wody głębokiej lub płytkiej do wyznaczenia potencjału φ prędkości cieczy, wywołanej ruchem statku nawodnego lub statku podwodnego. Gdy znany jest potencjał φ , to z przytoczonych wyżej wzorów można znaleźć obraz fal na swobodnej powierzchni, pole ciśnień i reakcje hydromechaniczne, w tym i opór falowy statku. Zauważmy, że przedstawione wyżej potencjały osobliwości hydromechanicznych w zadaniach o ruchach statku w wodzie nie spełniają jedynie warunku nieprzepuszczalności ścian statku, a więc warunków: (8.1), (12.127), (12.128) lub (12.129).

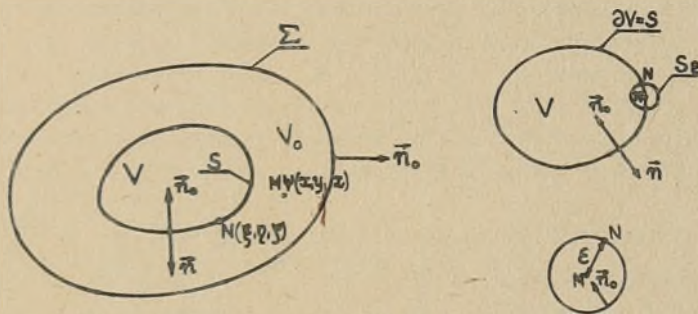
18.5. ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA GREENA DO WYZNACZENIA POTENCJAŁU PRZEPLYWU CIECZY WYWOŁANEGO RUCHEM STATKU

Statek może poruszać się w nieograniczonym oceanie, może się poruszać pod swobodną powierzchnią wody głębokiej lub wody płytkiej, może być także statkiem nawodnym, którego burty przecinają swobodną powierzchnię. Statek nawodny może być także eksploatowany na wodach głębokich lub też wodach ograniczonych.

Jak wyznaczać potencjał prędkości dla przypadku ruchu statku w ośrodku nieograniczonym, pokazano już w rozdziale 17.5.2. Ponieważ pokazana tam metoda może być także zastosowana i dla pozostałych statków, a także innych ciał, damy najpierw nieco głębsze jej podstawy. Następnie zastosujemy ten sam sposób postępowania dla statków poruszających się pod swobodną powierzchnią i dla statków nawodnych.

18.5.1. Zastosowanie twierdzenia Greena do wyznaczania potencjału prędkości statków w ośrodku nieograniczonym

Wydzielimy z nieograniczonego oceanu obszar cieczy V_0 ograniczonej powierzchnią zamkniętą $\partial V_0 = S + \Sigma$, jak pokazuje rysunek 18.4. Niech także powierzchnia zamknięta $S = \partial V$ ogranicza obszar V , którym może być statek. Niech dalej w obszarze V_0 i V nie ma źródeł ani też innych osobliwości hydromechanicznych. Źródła i/lub dipole mogą być rozłożone tylko na powierzchni ∂V . Niech φ będzie potencjałem prędkości i niech spełnia równanie Laplace'a $\Delta\varphi = 0$ w obszarach V i V_0 , a ψ niech będzie równe r^{-1} , gdzie $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$. Funkcja ψ spełnia także równanie $\Delta\psi = 0$; ma ona jednak osobliwość, gdy punkt N zbliża się do punktu M .



Rys. 18.4

Zastosujemy do funkcji φ i ψ wzór Greena (3.79):

$$\int_{V_0} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV = \oint_{\partial V_0} (\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n_0}) dS = 0$$

$$\text{bo } \Delta \varphi = 0 \quad \text{i} \quad \Delta \psi = 0$$

Funkcje φ i ψ są więc funkcjami harmonicznymi. Po podstawieniu $\psi = r^{-1}$ mamy:

$$\oint_{\partial V_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n_0} - \varphi \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS = 0 \quad (18.39a)$$

Przy zbliżaniu się punktu N do punktu M odległość ich $r \rightarrow 0$. Wydzielamy punkt M małą kulą o promieniu ϵ i powierzchnią S_ϵ (rys. 18.4). Wtedy wyrażenie (18.39a) będzie:

$$\oint_{\partial V_0} [] dS = \oint_{\partial V_0 - S_\epsilon} [] dS + \oint_{S_\epsilon} [] dS = \oint_{\partial V_0} [] dS + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{S_\epsilon} [] dS \quad (18.39b)$$

Obliczmy:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{S_\epsilon} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(N)}{\partial n_0} - \varphi(N) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (18.39c)$$

Z rysunku 18.4 widać, że

$$\frac{\partial}{\partial n_0} = -\frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial \xi}$$

Podstawiając powyższą zależność do wyrażenia (18.39c) oraz $r = \xi$ mamy:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{S_\epsilon} [\] dS = -4\pi \varphi(M) = -4\pi \varphi(x, y, z) \quad (18.39d)$$

Stąd po uwzględnieniu (18.39d) wyrażenie (18.39a) będzie:

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(N)}{\partial n_0} - \varphi(N) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (18.40)$$

Widzimy, że potencjał $\varphi(M)$ w obszarze V_0 może być wyznaczony przy pomocy znajomości potencjału φ na brzegu ∂V_0 obszaru V_0 . Jeśli zatem punkt M jest położony na zewnątrz obszaru V_0 , to $\varphi(M)$ dane wzorem (18.40) jest równe zeru. Punkt M może być jednak położony także na brzegu ∂V_0 .

Jeśli przepływ zależy także od czasu t , to czas jest parametrem w wyrażeniu (18.40). Mamy wtedy $\varphi(M, t)$ zamiast $\varphi(M)$ oraz $\varphi(N, t)$ zamiast $\varphi(N)$.

Jeśli weźmiemy pod uwagę wzór (12.60) i wzór (12.79), to $\frac{\partial \varphi(N)}{\partial n_0}$ możemy uważać za gęstość powierzchniową źródeł $q_s(N)$, a $\varphi(N)$ za gęstość powierzchniową $\sigma(N)$ momentu dipolowego. Zatem od rozkładu $q_s(N)$ i $\sigma(N)$ na brzegu ∂V_0 zależy potencjał $\varphi(M)$ wewnątrz ∂V_0 . Ale według założenia (rys. 18.4),

$$\partial V_0 = \partial V + \Sigma$$

Więc q_s i σ są rozłożone na ∂V i Σ , przy czym te rozkłady muszą być takie, aby spełnione zostały warunki brzegowe dla potencjału $\varphi(M)$; w nieskończoności oraz na powierzchni opływającego ciała, którą może być ∂V .

Przy rozwiązywaniu zadań hydromechanicznych, dla znalezienia nieznanymi $q_s(N)$ i $\sigma(N)$, wygodne jest założenie, że:

$$q_s(N) = 0 \quad \text{i} \quad \sigma(N) = 0 \quad \text{na powierzchni } \Sigma.$$

Wtedy $\varphi(M)$ w wyrażeniu (18.40) spełnia warunek w nieskończoności, a sam wzór (18.40) przybiera postać:

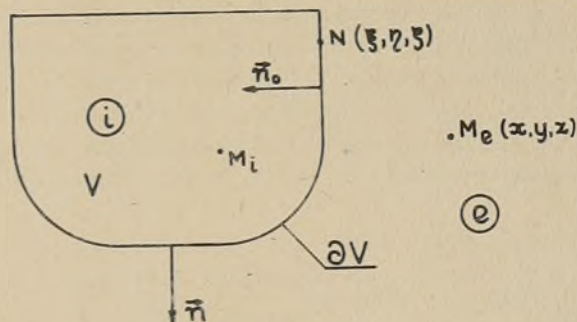
$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(N)}{\partial n_0} - \varphi(N) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (18.41)$$

lub po uwzględnieniu $\vec{n}_0 = -\vec{n}$ postać następującą:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(N)}{\partial n} - \varphi(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (18.42)$$

Potencjał $\varphi(M)$ dany wzorem (18.42) jest różny od zera na ∂V i w całym obszarze V_0 , leżącym na zewnątrz ∂V . Natomiast wewnątrz ∂V $\varphi(M) = 0$.

Dla znalezienia wyrażenia dla $\varphi(M)$ ważnego w V i V_0 oraz lepszej interpretacji gęstości q_s i σ rozpatrzmy jeszcze obszar V ograniczony brzeżem ∂V . Potencjał w tym obszarze oznaczmy przez φ_i , a zewnątrz tego obszaru przez φ_e . Pokazuje to rysunek 18.5. Zaznaczono na nim także punkty wewnętrzne M_i i zewnętrzne M_e względem ∂V .



Rys.18.5

Zgodnie ze wzorem (18.40) mamy:

$$\varphi(M_i) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i(N)}{\partial n} - \varphi_i(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (18.43a)$$

$$\varphi(M_e) = 0$$

Przy zastosowanych oznaczeniach wzór (18.42) zapisujemy tak:

$$\varphi(M_e) = - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_e(N)}{\partial n} - \varphi_e(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (18.43b)$$

$$\varphi(M_i) = 0$$

Jeśli te dwa wzory dodamy, to uzyskamy wyrażenie ważne dla V i V_0

$$\varphi(M) = - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) - (\varphi_e - \varphi_i) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (18.43c)$$

Różnicy potencjałów $\varphi_e - \varphi_i$ i pochodnej tej różnicy względem normalnej n można nadać interpretację fizyczną. Biorąc pod uwagę wzór (12.74) mamy:

$$q_s(N) = \vec{n} \cdot (\vec{v}^e - \vec{v}^i) = \vec{n} \cdot (\nabla \varphi_e - \nabla \varphi_i) = \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \quad (18.44a)$$

gdzie: $q_s(N)$ jest gęstością powierzchniową źródeł rozłożonych na powierzchni ∂V .

Podobnie, wychodząc ze związku (12.80) można wykazać [36], że skok potencjału $\varphi_e - \varphi_i$ przy przejściu przez element powierzchni dS jest równy gęstości powierzchniowej $\sigma(N)$ momentu dipolowego $d\vec{m} = \sigma \vec{n} dS$, przy czym:

$$\sigma = \varphi_i - \varphi_e \quad (18.44b)$$

Zgodnie z powyższymi uwagami wzór (18.43c) przybiera postać:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[q_s(N) \frac{1}{r} + \sigma(N) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dS \quad (18.45)$$

Widzimy, że potencjał prędkości φ w dowolnym miejscu $M(x, y, z)$ nieograniczonego obszaru cieczy jest wyznaczony przy pomocy dowolnej kombinacji źródeł $q_s(N) dS$ i dipoli $\sigma(N) \vec{n} dS$ rozłożonych na powierzchni zamkniętej ∂V ograniczającej obszar cieczy V . Elementarne momenty dipolowe $d\vec{m} = \sigma \vec{n} dS$ są skierowane wzdłuż zewnętrznej normalnej do powierzchni ∂V . Powierzchnia ∂V może, lecz nie musi być powierzchnią statku poruszającego się w cieczy. Przeważnie jednak za ∂V bierze się powierzchnię zwilżoną statku S .

Ponieważ rozkłady $q_s(N)$ i $\sigma(N)$ są dowolne, to na części ∂V można założyć $\sigma(N) = 0$ i $q_s(N) \neq 0$, a na pozostałej założyć te rozkłady odwrotnie. Można założyć również, że na całej powierzchni ∂V nie ma dipoli, a są tylko źródła. Jest to równoważne założeniu, że na powierzchni $\partial V = S$ potencjał φ jest ciągły: $\varphi_e = \varphi_i$, wzór (18.43c). Przy tym założeniu wzór (18.45) będzie:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_S q_s(N) \frac{1}{r} dS \quad (18.46)$$

Był on zastosowany przez nas w rozdziale 17.5.2; jest on równoważny wzorowi (12.60). Jak już wiemy, nieznaną rozkład $q_s(N)$ na powierzchni S znajduje się z warunku nieprzepuszczalności ściany S , który prowadzi do równania całkowitego (17.50). Oczywiście jest, że rozkład $q_s(N)$ musi spełniać warunek dodatkowy:

$$\int_S q_s(N) dS = 0$$

Na zewnątrz powierzchni S przepływ jest bezźródłowy.

Powyżej podane wzory dla wyznaczania potencjału $\varphi(M)$ dla przypadku ruchu statku w nieograniczonym oceanie można uogólnić na przypadek ruchu statku przy dnie oceanu, a także, jak już wyznaczono, dla przypadku statków nawodnych. Rozpatrzmy najpierw przypadek ruchu statku całkowicie zanurzonego pod swobodną powierzchnią wody.

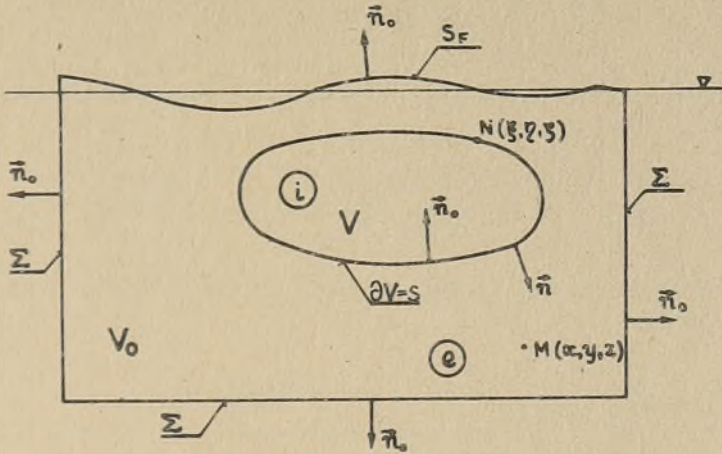
18.5.2. Zastosowanie twierdzenia Greena do wyznaczenia potencjału prędkości statków podwodnych

Zasadnicza różnica pomiędzy zadaniem o potencjale dla statku w ośrodku nieograniczonym a zadaniem tym dla statku podwodnego polega na tym, że powierzchnia ∂V_0 ograniczająca obszar V_0 obejmuje także powierzchnię swobodną S_F . Pokazuje to rysunek 18.6. Przy wyznaczaniu funkcji Greena dla źródła dochodzi dodatkowy warunek na swobodnej powierzchni oraz ewentualnie warunek wypromieniowania. W związku z tym zamiast

$$G(M, N) = \frac{1}{r}$$

mamy

$$G(M,N) = \frac{1}{r} + K(M,N) \quad (15.8b)$$



Rys. 18.6

Zauważmy, że $K(M,N)$ spełnia równanie $\Delta K = 0$ w obszarze V_0 , a także w obszarze V . Również w tych obszarach mamy $\Delta \varphi = 0$. W związku z tym, na mocy twierdzenia Greena mamy:

$$\int_{V_0} (K \Delta \varphi_e - \varphi_e \Delta K) dV = \oint_{\partial V_0} \left(K \frac{\partial \varphi_e}{\partial n_0} - \varphi_e \frac{\partial K}{\partial n_0} \right) dS = 0 \quad (18.47a)$$

Podobnie:

$$\int_V (K \Delta \varphi_i - \varphi_i \Delta K) dV = \oint_{\partial V} \left(K \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial K}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (18.47b)$$

Dodając (18.47a) do (18.40) uzyskuje się wyrażenie:

$$\varphi(M_e) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_0} \left[\left(\frac{1}{r} + K \right) \frac{\partial \varphi_e}{\partial n_0} - \varphi_e \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{1}{r} + K \right) \right] dS; \quad \varphi(M_i) = 0$$

Po wprowadzeniu oznaczenia (15.8b) powyższy wzór będzie:

$$\varphi(M_e) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V_0} \left[G(M,N) \frac{\partial \varphi_e}{\partial n_0} - \varphi_e \frac{\partial G}{\partial n_0} \right] dS; \quad \varphi(M_i) = 0 \quad (18.48a)$$

Podobnie dodając (18.47b) do (18.43a) mamy

$$\varphi(M_i) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[G \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS; \quad \varphi(M_e) = 0 \quad (18.48b)$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie jak przy wzorze (18.42)

wzór (18.48a) będzie mieć postać:

$$\varphi(M_e) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[G \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \varphi_e \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS; \quad \varphi(M_1) = 0 \quad (18.48c)$$

Wzory (18.48b) i (18.48c) łączymy tak samo, jak to zrobiono ze wzorami (18.43a i b). Zatem:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[G(M,N) \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) - (\varphi_e - \varphi_1) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n} \right] dS \quad (18.49a)$$

Przy wykorzystaniu zaś zależności (18.44a i b) wzór (18.49a) ma postać identyczną do wzoru (18.45):

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[q_s(N) G(M,N) + \sigma(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n} \right] dS \quad (18.49b)$$

Wszystkie więc uwagi występujące po wzorze (18.45) są nadal ważne. Funkcja $G(M,N)$ jest funkcją Greena dla źródła pod swobodną powierzchnią. Wzór (18.49b) jest ważny także dla ruchu statku podwodnego na wodzie płytkiej a także dla statku poruszającego się przy dnie wody głębokiej. Sposób wyznaczania nieznannej gęstości powierzchniowej źródła $q_s(N)$ jest taki sam jak w przypadku ruchu statku w ośrodku nieograniczonym. Jądro równania całkowego jest jednak teraz bardziej złożone; porównaj $G(M,N) = r^{-1}$ na przykład ze wzorem (18.20). Bliższe dane o równaniu całkowym dla q_s można znaleźć w literaturze przedmiotu, między innymi w rozdziale 1.7 pracy [17]. Zastosowanie zaś wzoru:

$$\varphi_1(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S (\varphi_e - \varphi_1) \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

do wyznaczenia $\varphi_e(N)$ przedstawione zostało w pracy [38].

18.5.3. Zastosowanie wzoru Greena do wyznaczenia potencjału prędkości statków nawodnych

Pokażemy, że wzory (18.48a i b) są ważne także wtedy, gdy burty statku przecinają powierzchnię wody. Przypominamy, że zamiast statku może być inne ciało. Powierzchnia ∂V_0 ograniczająca obszar V_0 jest obecnie równa

$$\partial V_0 = S + \sum + S_F$$

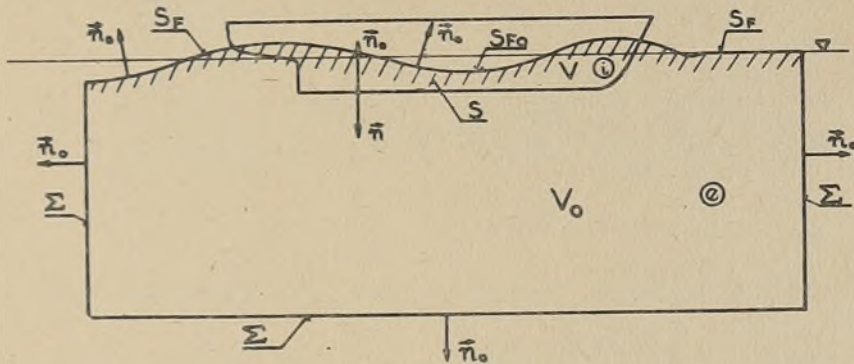
Powierzchnia ∂V graniczająca obszar V jest równa

$$\partial V = S + S_{F0}$$

gdzie: S_{F0} - powierzchnia rozpięta na pływicy statku.

W powyższych określeniach ∂V_0 i ∂V powierzchnia S jest aktualną powierzchnią zwilżoną statku. Ilustracją powyższych uwag jest rysunek 18.7. Zgodnie z tymi oznaczeniami wzór (18.48b) jest

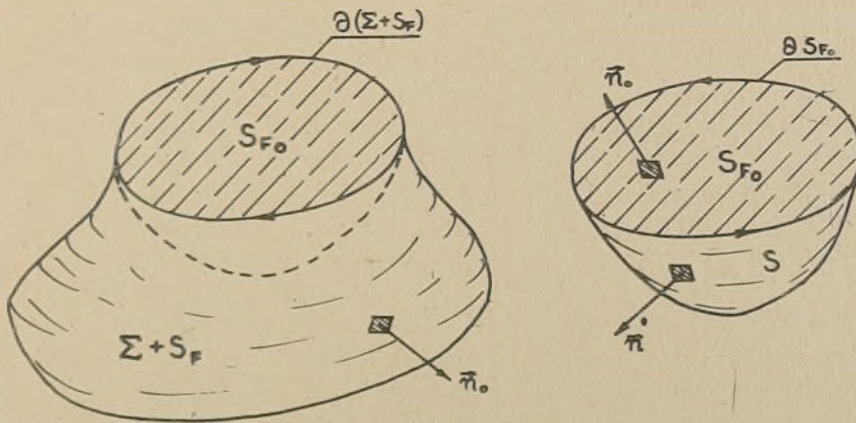
$$\varphi(M_i) = \frac{1}{4\pi} \int_{S+S_F} \left[G \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS; \quad \varphi(M_e) = 0 \quad (18.50a)$$



Rys.18.7

Natomiast wzór (18.48a) będzie:

$$\varphi(M_e) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(G \frac{\partial \varphi_e}{\partial n_0} - \varphi_e \frac{\partial G}{\partial n_0} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma+S_F} \left(G \frac{\partial \varphi_e}{\partial n_0} - \varphi_e \frac{\partial G}{\partial n_0} \right) dS; \quad \varphi(M_i) = 0$$



Rys.18.8

Drugą całką powyższego wyrażenia można zamienić na całkę po powierzchni S_{F_0} . Sposób tej transformacji pokazuje rysunek 18.8. Widzimy, że brzeg $\partial(\Sigma + S_F)$ i brzeg ∂S_{F_0} są takie same, a kierunki obchodzenia tych brzegów są przeciwne. Dalej widać, że brzeg powierzchni ∂S jest taki sam, jak wyżej wskazane brzegi $\partial(\Sigma + S_F)$ i ∂S_{F_0} . Kierunek obchodzenia brzegu ∂S

jest zaś taki sam, jak kierunek obchodzenia brzegu $\partial(\Sigma + S_F)$. Ponadto widać wyraźnie, że kierunek \vec{n}_0 na S_{F0} pokrywa się z kierunkiem zewnętrznej normalnej \vec{n} do powierzchni ∂V .

Po uwzględnieniu powyższych uwag mamy:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S_F + \Sigma} \left(G \frac{\partial \varphi_e}{\partial n_0} - \varphi_e \frac{\partial G}{\partial n_0} \right) dS = - \frac{1}{4\pi} \int_{S_{F0}} \left(G \frac{\partial \varphi_e}{\partial n_0} - \varphi_e \frac{\partial G}{\partial n_0} \right) dS$$

Więc:

$$\varphi(M_e) = - \frac{1}{4\pi} \int_{S + S_{F0}} \left(G \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \varphi_e \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left(G \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \varphi_e \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (18.50b)$$

$$\varphi(M_i) = 0$$

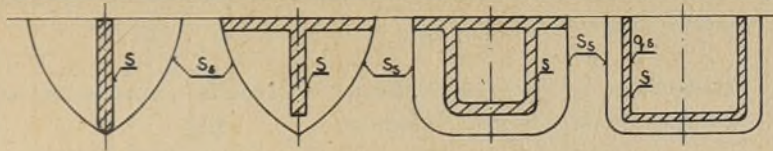
Wzory (18.50a) i (18.50b) łączymy tak, jak uprzednio w jeden wzór:

$$\varphi(M) = - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[G \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) - (\varphi_e - \varphi_i) \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS \quad (18.51a)$$

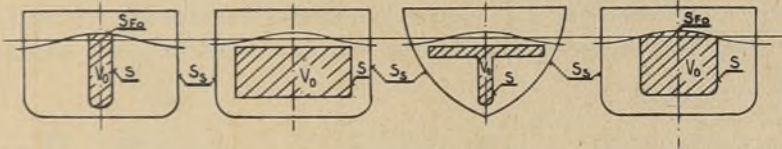
dający potencjał $\varphi(M)$ w obszarze V i V_0 . Przy pomocy gęstości powierzchniowej źródeł $q_s(N)$ i momentu dipolowego $\sigma(N)$ wzór (18.51a) zapisujemy tak:

$$\varphi(M) = - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \left[q_s(N) G(M,N) + \sigma(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n} \right] dS \quad (18.51b)$$

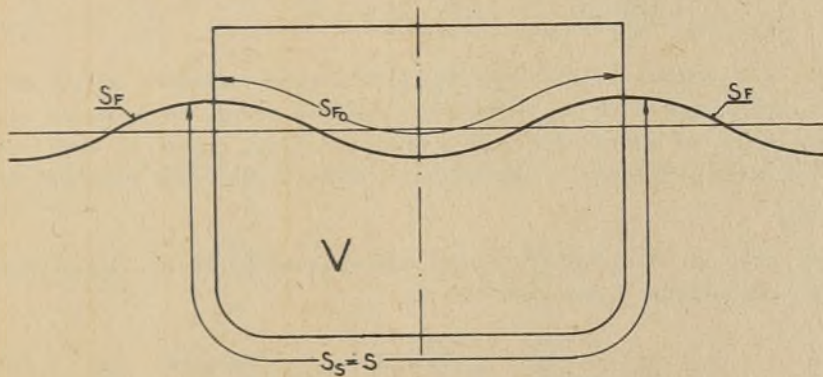
Tu należy pamiętać o tym, że $\partial V = S + S_{F0}$ i chociaż mówiono w tym rozdziale o statku, to S może być, lecz nie musi być powierzchnią statku. Za ∂V można przyjąć, jak widzimy, dowolną powierzchnię wewnątrz statku, na której rozłożone są źródła i/lub dipole. Nieznany rozkład $q_s(N)$ i $\sigma(N)$ wyznacza się z warunku kinematycznego na powierzchni statku. Dla rozróżnienia powierzchni kadłuba statku i powierzchni, na której rozłożone są osobliwości q_s i σ wprowadzimy tu oznaczenia: S_s - powierzchnia statku, a S - powierzchnia osobliwości hydromechanicznych. Przeważnie zaleca się przyjmować $S = S_s$. Wtedy $\partial V = S_s + S_{F0}$. Jak już wiemy, dalej to jeszcze pokażemy, założenie $S = S_s$ prowadzi do równania całkowego drugiego rodzaju, z którego wyznacza się nieznany rozkład osobliwości q_s i/lub σ na $S = S_s$. Teoria tego równania jest dobrze opracowana. Natomiast, gdy $S \neq S_s$, to uzyskuje się równanie całkowite pierwszego rodzaju, słabo zbadane w matematyce. Tym niemniej w teorii oporu falowego przy wyznaczaniu $\varphi(M)$ stosowane były i są nadal stosowane powierzchnie S jak na rysunku 18.9. Możliwe inne ukształtowania powierzchni $S \neq S_s$ dla statków nawodnych zgodnie ze wzorem (18.51b) pokazuje rysunek 18.10. Rysunek 18.11 pokazuje przypadek $\partial V = S_s + S_{F0}$. Porównując wzory (18.45) - dla statku w ośrodku nieograniczonym; (18.49b) - dla statku całkowicie zanurzonego i (18.51b) - dla statku nawodnego widzimy, że formalnie są one takie same. Różnica pomiędzy dwoma pierwszymi polega na różnych wyrażeniach dla funkcji Greena dla źró-



Rys. 18.9



Rys. 18.10



Rys. 18.11

dła. W dwóch ostatnich natomiast różnica istnieje w powierzchni S_5 . Dla sztywnego statku podwodnego powierzchnia S_5 jest niezmienna. Natomiast sztywny statek nawodny w zależności od prędkości zmienia swoje położenie względem wody oraz zmienia swój układ falowy. Więc powierzchnia S_5 statku nawodnego, na której musi być spełniony kinematyczny warunek brzegowy, jest tak samo nieznaną, jak rozkład osobliwości q_s i/lub σ . Funkcja $G(M,N)$ dla źródła w ośrodku nieograniczonym równa jest r^{-1} . Spełnia ona równanie Laplace'a i warunek w nieskończoności. Funkcja $G(M,N)$ dla źródła pod swobodną powierzchnią musi spełniać dodatkowo warunek na dnie zbiornika i na swobodnej powierzchni. Wyzaczyliśmy ją tylko przy liniowym warunku (18.2). Zauważmy jednak, że dotychczas przy wyprowadzaniu wzorów (18.49b) i (18.51b) nie zakładano liniowości warunku brzegowego na swobodnej powierzchni. Zatem wzory te są ważne dla zadania nieliniowego o potencjale $\varphi(N)$. Nie precyzowano także, jaki jest ruch statku ani też nie precyzowano układu współrzędnych. Są one zatem ważne tak dla ruchu jednostajnego statku po linii prostej, jak i dla kołyszącego się lub manewrującego statku. W każdym konkretnym przypadku należy tylko obrać odpowiednio funkcję

$G(M,N)$, a dla znalezienia nieznanymi rozkładów osobliwości przyjmując odpowiedni warunek kinematyczny na S_s .

18.5.4. Wyznaczanie potencjału prędkości w zadaniu o oporze falowym statków nawodnych w ujęciu liniowym

Zakładamy tu, że funkcja $G(M,N)$ jest wyznaczona przy wzięciu pod uwagę liniowego warunku brzegowego na swobodnej powierzchni; wzory (18.20), (18.23). Powierzchnią $S = S_s$ jest powierzchnia zwilżona Ω statku nieruchomego, a powierzchnią S_{Fo} jest powierzchnia wodnicy S_{WL} . W związku z tym we wzorach (18.51a i b) $\partial V = \Omega + S_{WL}$, a same te wzory zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} \varphi(M) = & -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega=S_s} (q_s G + \sigma \frac{\partial G}{\partial n}) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_{WL}=S_{Fo}} [G(M,N) (\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}) + \\ & + (\varphi_1 - \varphi_e) \frac{\partial G}{\partial n}] dS \end{aligned} \quad (18.52)$$

Widzimy, że we wzorze (18.52) źródła i/lub dipole rozłożone są już na powierzchniach zadanych Ω i S_{WL} . Należy pamiętać o tym, że pochodne względem normalnej n we wzorze tym i poprzednich dotyczą punktu N . Przy obliczaniu pochodnej względem n , dotyczącej punktu M , będziemy stosować oznaczenie $\frac{\partial}{\partial n_M}$.

Drugą całkę we wzorze (18.52) przy wykorzystaniu warunku brzegowego na swobodnej powierzchni (18.2) dla $\mu = 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - K_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{dla } z=0 \quad (18.2a)$$

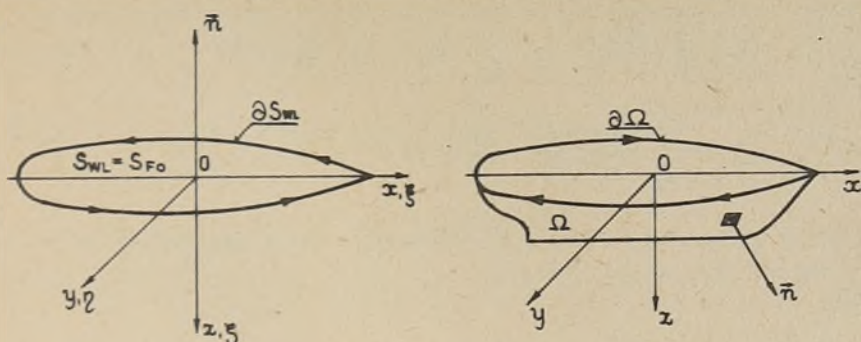
oraz wzoru Stokesa (12.113d)

$$\oint_{\partial S} \Psi d\vec{r} = \int_S (\vec{n} \times \nabla) \Psi dS \quad (12.113d)$$

można przetransponować na całkę po brzegu ∂S_{WL} lub $\partial \Omega$. Uzyskuje się wtedy tak zwaną całkę liniową (Line Integral), której w teorii oporu falowego poświęca się dużo uwagi [37, 38]. Pokażemy niżej sposób dochodzenia do tej całki liniowej.

Tak jak dotychczas obieramy układy współrzędnych: oś Oz i $O\xi$ kierujemy pionowo w dół. Wtedy na powierzchni S_{WL} zewnętrzna normalna $\vec{n} = -\vec{e}_3$. Układy te wraz z kierunkami dodatnimi obchodzenie brzegów ∂S_{WL} i $\partial \Omega$ pokazuje rysunek 18.12. Widzimy, że na S_{WL} pochodna $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \xi}$.

Przypominamy, że potencjał φ i $\varphi_1(\xi, \eta, \xi)$ oraz funkcja Greena dla źródła $G(M,N) = G(x,y,z,\xi,\eta,\xi)$ spełniają warunek brzegowy na swobodnej powierzchni, a także na $S_{Fo} = S_{WL}$. Stąd ze wzoru (18.2a) mamy:



Rys. 18.12

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{K_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{1}{K_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{K_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{1}{K_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)$$

Po uwzględnieniu powyższych zależności całkę po S_{WL} wzoru (18.52a) możemy zapisać tak:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \int_{S_{WL}} \left[G \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) + (\varphi_i - \varphi_e) \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS = \\ & = \frac{1}{4\pi K_0} \int_{S_{WL}} \left[G \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right) + (\varphi_i - \varphi_e) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right) \right] dS \quad (18.53a) \end{aligned}$$

Zamieńmy teraz całkę po S_{WL} na całkę po brzegu ∂S_{WL} . Można to zrobić przy pomocy wzoru Stokesa (12.113d), z którego dla $\vec{n} = -\vec{e}_3$ i $\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial \xi}$ mamy:

$$\oint_{\partial S} \psi \chi d\gamma = - \int_S \frac{\partial}{\partial \xi} (\psi \chi) dS = - \int_S \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \chi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) dS$$

Więc dla

$$\chi = G; \quad \psi = \frac{\partial \varphi_e}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_{WL}} G \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right) dS = \\ & = - \oint_{\partial S_{WL}} G(M, N) \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right) d\gamma - \int_{S_{WL}} \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right) \frac{\partial G}{\partial \xi} dS \quad (a) \end{aligned}$$

Podobnie dla $\chi = \varphi_i - \varphi_e$, $\psi = \frac{\partial G}{\partial \xi}$ mamy:

$$\int_{S_{WL}} (\varphi_1 - \varphi_e) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right) dS = - \oint_{\partial S_{WL}} (\varphi_1 - \varphi_e) \frac{\partial G}{\partial \xi} d\eta -$$

$$- \int_{S_{WL}} \frac{\partial G}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_e}{\partial \xi} \right) dS \quad (b)$$

Po dodaniu stronami wyrażeń (a) i (b) drugie całki prawych stron powyższych wyrażeń się znoszą. Uwzględniając (a) i (b) wzór (18.53a) przybiera postać:

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{S_{WL}} (q_s G + \sigma \frac{\partial G}{\partial n}) dS =$$

$$= - \frac{1}{4\pi K_0} \oint_{\partial S_{WL}} \left[G \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \right) + \sigma \frac{\partial G}{\partial \xi} \right] d\eta = \frac{1}{4\pi K_0} \oint_{\partial \Omega} [] d\eta \quad (18.53b)$$

Powyższe całki krzywoliniowe po brzegach ∂S_{WL} lub $\partial \Omega$ w teorii oporu falowego nazywają wyżej wskazanymi całkami liniowymi. Występują one przy wyznaczaniu potencjału prędkości $\varphi(M)$ dla ciał przecinających swobodną powierzchnię.

Po uwzględnieniu zależności (18.53b) wzór (18.52) dla potencjału $\varphi(M)$ będzie miał postać:

$$\varphi(M) = - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \left[q_s(N) G(M,N) + \sigma(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n} \right] dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi K_0} \oint_{\partial \Omega} \left[G(M,N) \left(\frac{\partial \varphi_e(N)}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_1(N)}{\partial \xi} \right) + \sigma(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n} \right] d\eta \quad (18.54a)$$

Przeważnie zakłada się dalej, że na powierzchni kadłuba S_s nie ma skoku potencjału: $\varphi_e = \varphi_1$ [39]. Wtedy $\sigma(N) = 0$. Ponadto nie może występować także skok prędkości stycznej. Stąd

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}$$

wynikać musi tylko ze skoku prędkości normalnych $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

W związku z tym

$$\frac{\partial \varphi_e}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right) \cos(\vec{n}, \xi) = q_s(N) \cos(\vec{n}, \xi)$$

Przy tych założeniach potencjał $\varphi(M)$ będzie

$$\varphi(M) = - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} q_s(N) G(M,N) dS + \frac{1}{4\pi K_0} \oint_{\partial \Omega} q_s(N) \cos(\vec{n}, \xi) G(M,N) d\eta \quad (18.54b)$$

Nieznany rozkład gęstości powierzchniowej źródeł $q_s(N)$ na powierzchni zwilżonej kadłuba wyznaczamy, jak już zaznaczono, z kinematycznego warunku brzegowego na Ω . Zatem dla $\vec{V}_e = \vec{e}_1 v_o$ na $S_s = \Omega$ mamy:

$$\frac{\partial \varphi(M)}{\partial n} = v_o n_x(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} q_s(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n_M} dS - \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} q_s(N) \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi K_o} \oint_{\partial\Omega} q_s(N) \cos(\vec{n}, \vec{e}_1) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n_M} d\eta$$

gdzie S_ϵ jest powierzchnią półkuli o promieniu ϵ , leżącej na Ω . Więc:

$$-\frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} q_s(N) \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{r} \right) dS = -\frac{1}{4\pi} q_s(M) \left(-\frac{1}{\epsilon^2} \right) 2\pi \epsilon^2 = \frac{1}{2} q_s(M)$$

Zatem po uporządkowaniu dostaje się następujące równanie całkowe drugiego rodzaju:

$$q_s(M) = 2 v_o n_x(M) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} q_s(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n_M} dS -$$

$$- \frac{1}{2\pi K_o} \oint_{\partial\Omega} q_s(N) n_x(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n_M} d\eta \quad (18.55)$$

Jeżeli jest statek całkowicie zanurzony, to całka liniowa jest równa zeru. Całkowanie w obu całkach dotyczy punktu N na Ω i $\partial\Omega$, a nie punktu M .

Jeżeli założy się, że na powierzchni kadłuba nie ma skoku prędkości, $\frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$, to $q_s(N) = 0$ i wyrażenie (18.54a) przyjmuje postać:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \sigma(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n} dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi K_o} \oint_{\partial\Omega} \left[\sigma(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial \xi} - G(M,N) \frac{\partial \sigma(N)}{\partial \xi} \right] d\eta \quad (18.56)$$

Z warunku brzegowego na Ω

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} = v_o n_x$$

Wynika, że wewnątrz Ω i na Ω potencjał $\varphi_1(M) = v_o x$. Podstawiając $\varphi(M) = \varphi_1(M) = v_o x$ do wyrażenia (18.56) dostajemy równanie całkowe pierwszego rodzaju, z którego należy wyznaczyć $\sigma(N) = \varphi_1(N) - \varphi_e(N)$. Ponieważ φ_1 jest znane, to można dalej znaleźć $\varphi_e(N)$ [38]. Powyższą metodą, jak już zaznaczono, nie można uzyskać obrazu fal generowanych przez statek.

Równania (18.55) i (18.56) rozwiązać można tylko na drodze numerycznej. Są one bardzo nieprzyjemne ze względu na złożoną postać funkcji Greena dla źródła $G(M,N)$. Można wykonać obliczenia tylko na bardzo dużych i szybkich maszynach cyfrowych.

Zauważmy, że istnieje możliwość wyznaczenia potencjału prędkości na powierzchni kadłuba i w całym zbiorniku cieczy bez wprowadzania całki liniowej. Mamy bowiem wzór (18.52).

Jeśli założymy, że na powierzchni zwilżonej kadłuba Ω są rozłożone tylko źródła $q_s(N)$, na wodnicy S_{WL} tylko dipole $\sigma(N)$, to wzór (18.52) przyjmuje postać:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} q_s(N) G(M,N) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_{WL}} \sigma(N) \left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\xi=0} dS \quad (18.57a)$$

Uwzględniając, że na S_{WL}

$$\left. \frac{\partial G(M,N)}{\partial n} \right|_{\xi=0} = - \left. \frac{\partial G(M,N)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = G^*(M,N)$$

wzór (18.57a) zapisujemy:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} q_s(N) G(M,N) dS - \frac{1}{4\pi} \int_{S_{WL}} \sigma(N) G^*(M,N) dS \quad (18.57b)$$

Warunek brzegowy na Ω prowadzi do następującego równania całkowego dla rozkładu $q_s(N)$ na Ω i $\sigma(N)$ na S_{WL}

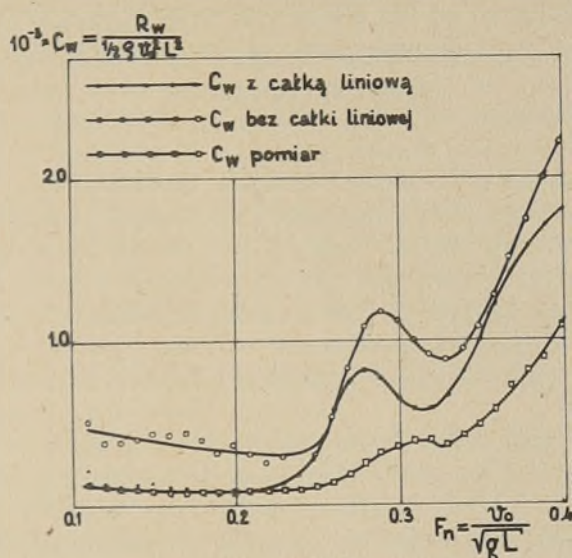
$$q_s(M) = 2 v_o n_x(M) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} q_s(N) \frac{\partial G(M,N)}{\partial n_M} dS + \frac{1}{2\pi} \int_{S_{WL}} \sigma(N) \frac{\partial G^*(M,N)}{\partial n_M} dS \quad (18.58)$$

Z powyżej przedstawionych wyrażeń widać, że nawet w ujęciu liniowym zadanie o oporze falowym statku, R_w , poruszającego się ruchem jednostajnym wzdłuż linii prostej jest bardzo złożone. Pozostaje jeszcze dużo pytań otwartych. Jakże z równań całkowych przyjąć jako zadawalające? Jaką powierzchnię S , na której są rozłożone osobliwości hydromechaniczne, należy przyjąć i jakie osobliwości na poszczególnych częściach tej powierzchni należy założyć? Ponieważ wzór (18.51b) wskazuje na dowolność rozkładów $q_s(N)$ i $\sigma(N)$, to czy na części ∂V , przykładowo na S_{WL} , nie założyć $q_s=0$ i $\sigma=0$?

Odpowiedzi na te pytania mogą dać tylko badania numeryczne skonfrontowane z wynikami badań eksperymentalnych.

W dalszych badaniach numerycznych można byłoby pójść dalej. Po wyznaczeniu z zadania liniowego potencjału $\varphi(M)$ można obliczyć całkowitą reakcję hydrodynamiczną \vec{R} i \vec{M} i na tej podstawie obliczyć położenie równowagi stat-

ku i układ falowy statku. Stąd dalej można wyznaczyć aktualną powierzchnię zwilżoną S_s oraz S_{F0} (rys. 18.11) i na niej znów rozłożyć nieznanne osobliwości hydromechaniczne. Czy w taki sposób wyznaczony opór falowy będzie bliższy rzeczywistości? Pytanie otwarte.



Rys. 18.13

Obecna liniowa teoria oporu falowego daje znacznie zawyżone wyniki w stosunku do wyników eksperymentalnych przy liczbach $F_{nL} > 0,2$. Jedyne położenia garbów na krzywej współczynnika oporu falowego C_w są dość dobrze zgodne z rzeczywistością. Przy liczbach Froude'a $F_n < 0,2$ uwzględnienie całki liniowej w wyrażeniu dla potencjału $\varphi(M)$ daje wyniki możliwe do praktycznego zastosowania. Pokazuje to rysunek 18.13 [40]. Z powyższego widzimy konieczność prowadzenia dalszych prac nad oporem falowym statków, a także konieczność prowadzenia prac nad innymi składowymi reakcji hydrodynamicznej \vec{R} i \vec{M} .

Zwróćmy uwagę jeszcze na to, że przedstawione wyżej podstawy teorii oporu falowego nie uwzględniają wpływu lepkości wody ani też nie uwzględniają wpływu napięcia powierzchniowego. Wiadomo, że lepkość wody ma istotny wpływ na przepływ wokół ciał, szczególnie w części rufowej. Również napięcie powierzchniowe przy wysokich falach dziobowych statku może mieć pewien wpływ. Bowiem stromość fali dziobowej pełnotłiwych lub smukłych a szybkich statków jest znaczna

Wyznaczenie oporu falowego zatem z dokładnością niezbędną do celów praktycznych musi być oparte - w obecnym stanie wiedzy - na eksperymencie.

19. PODSTAWY EKSPERYMENTALNYCH BADAŃ MODELOWYCH I METOD EKSTRAPOLACJI ICH WYNIKÓW

Z poprzedniego rozdziału wyraźnie widać, że nawet dla najprostszego przypadku ruchu statku nawodnego - ze stałą prędkością wzdłuż linii prostej - nie jesteśmy obecnie zdolni do wyznaczania oporu falowego na drodze obliczeń numerycznych z dokładnością wystarczającą dla celów praktycznych, a w przedstawionych podstawach teorii oporu falowego dla uproszczenia założono płyn nielepki, brak napięcia powierzchniowego i brak wirów przy kadłobie statku a ponadto, że fale generowane przez statek mają bardzo małą wysokość.

W procesie projektowania statku musimy znać nie tylko opór falowy, ale opór całkowity statku R_g , napór pędnika T_g oraz inne reakcje hydromechaniczne działające na statek w różnych warunkach jego eksploatacji. Te wielkości w obecnym stanie wiedzy i techniki numerycznej uzyskuje się na drodze badań eksperymentalnych - badań modelowych.

Typowy cykl badań modelowych sprowadza się do opracowania programu eksperymentu, budowy modelu lub modeli, realizacji eksperymentów oraz analizy i ekstrapolacji wyników badań na obiekt naturalnej wielkości. Badania takie są czasochłonne i kosztowne. Przewidują proces projektowania statku. Należy więc dążyć do tego, aby tam, gdzie obliczenia numeryczne dają zadowalające wyniki, wykonywać takie obliczenia zamiast eksperymentu. Dąży się zatem do rozwoju metod numerycznych także w hydromechanice okrętowej.

Pierwszym podstawowym celem badań modelowych w hydromechanice okrętowej jest zatem danie odpowiedzi na konkretne zagadnienie przemysłu okrętowego. Drugim natomiast celem jest weryfikacja modeli matematycznych zjawisk hydromechanicznych, a w szczególności weryfikacja opracowywanych metod numerycznych w hydromechanice okrętowej. Ponadto, badania modelowe przeprowadza się w celu rozpoznania wpływu różnych czynników na zjawiska hydromechaniczne. Przykładem tu może być badanie wpływu lepkości na opór falowy statku lub badania wpływu ukształtowania osłony elastycznej poduszki na jego charakterystyki hydrodynamiczne.

Eksperymentalne badania modelowe łączy się także badaniami numerycznymi. W takich badaniach numerycznych zakłada się różne modele przepływów i poszukuje się modelu o najkorzystniejszych osiągnięciach - własnościach hydromechanicznych. Następnie do takiego wybranego modelu poszukuje się na drodze eksperymentalnych badań modelu fizycznego. Przykładem tu może być poszukiwanie korzystnego rozkładu ciśnień w poduszce powietrznej i sposób jego realizacji omówiony w końcu rozdziału 15.2. Drugim przykładem jest poszukiwanie korzystnego opływu płata o małym wydłużeniu.

Wszystkie badania modelowe w hydromechanice przeprowadza się w oparciu o prawa modelowania zwane także kryteriami podobieństwa procesów hydromechanicznych. Prawa te są przedstawiane w różnym zakresie w zależności od tego, czym dani specjaliści są szczególnie zainteresowani. W różnym ujęciu są one przedstawiane we wszystkich podręcznikach mechaniki płynów: [1], [2, ..., 7, 23, 25, 26, 41, 42].

Inaczej problem jest przedstawiony dla specjalistów z zakresu przepływów z wymianą ciepła, a inaczej dla hydromechaników zainteresowanych głównie przepływami spowodowanymi ruchem ciał w pobliżu swobodnej powierzchni. Przy matematycznym formułowaniu zadań w pierwszym przypadku do równania Naviera i Stokesa oraz równania ciągłości należy dołączyć równanie energii, np. (7.51) oraz warunek brzegowy dla temperatur na ścianach. My natomiast zainteresowani jesteśmy ruchem ciał w płynie nieściśliwym i nieprzewodzącym, w którym działają siły lepkości, siły ciężkości a na swobodnej powierzchni występuje napięcie powierzchniowe, a ponad tą powierzchnią panuje stałe ciśnienie $p_0 = p_g$. Również potrafimy sformułować matematycznie to zadanie. Z rozwiązaniem jednak tego zadania występują takie trudności, że nie jesteśmy w stanie ich obecnie pokonać.

Jeśli jednak to sformułowane matematycznie zadanie, bez jego rozwiązywania, sprowadzimy do postaci bezwymiarowej - inaczej mówiąc - znormalizujemy je, to tak otrzymane wyrażenia znormalizowane będą opisywać zachowanie się bezwymiarowego statku w bezwymiarowym zbiorniku płynu, przy czym pole prędkości i pole ciśnień w tym zbiorniku będzie także bezwymiarowe. Siły działające na statek też będą bezwymiarowe. Tymi bezwymiarowymi siłami będą między innymi znane nam już współczynniki sił: oporu falowego C_w (15.10), oporu lepkości C_v (17.50), oporu indukowanego C_{xi} (17.3), współczynnik siły nośnej C_L (17.31a), współczynnik momentu C_m (17.31c). Ogólne wyrażenia dla współczynnika reakcji hydrodynamicznych podamy dalej. Bezwymiarowym będzie również równanie określające kształt swobodnej powierzchni. Przykładem tego równania może być wyrażenie (15.48):

$$\zeta_b(x_b, y_b) = -F_L^2 \frac{\partial \varphi_b}{\partial x_b} \Big|_{z_b=0} \quad (15.48)$$

Przykładem zaś normalizacji równań opisujących ruch płynu może być sprowadzenie do postaci bezwymiarowej warunku brzegowego na swobodnej powierzchni dokonane w rozdziale 15.2. Bezwymiarowy ten warunek ma postać

$$\frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial x_b^2} - \frac{1}{F_L^2} \frac{\partial \varphi_b}{\partial z_b} = 0 \quad \text{dla } z_b = 0 \quad (15.46a)$$

Widzimy, że w znormalizowanych powyższych wyrażeniach występuje liczba Froude'a F_L . W innych znormalizowanych równaniach będą występować także inne liczby. Te liczby zwie się liczbami podobieństwa albo parametrami podobieństwa. Liczby te biorą swoje nazwy od nazwisk badaczy, którzy je uzyskali. Mamy zatem liczby Froude'a F , Reynoldsa R_e , Webera W_e , Struhala S_h ,

Prandtla P_r , Eulera E_u , Ekerta E_c , Fouriera F_u , Macha M , Nusselta Nu ...

Liczby podobieństwa można zatem szybko uzyskać przez matematyczne sformułowanie zadania i znormalizowanie tak uzyskanych równań. Współczynniki tych znormalizowanych wyrażeń będą właśnie liczbami podobieństwa. Można je także uzyskać przy pomocy analizy wymiarowej [1, 2, 41, 42]. Analizę wymiarową stosuje się zawsze wtedy, gdy nie potrafimy opisać matematyczne zjawiska. My to jednak potrafimy zrobić. Więc będziemy normalizować równania.

Wróćmy jednak najpierw do wyrażeń (15.46a) i (15.48). Przypominamy, że są one ważne dla przepływu potencjalnego wody nielepkiej i nieściśliwej bez napięcia powierzchniowego. Te dwa wyrażenia będą identyczne dla różnych wielkości statków o różnych prędkościach v_0 wtedy, gdy liczby Froude'a dla tych różnych statków będą takie same. Bezwymiarowe obrazy fal $\zeta_b(x_b, x_b)$ dla tych statków są identyczne. Wymiarowe zaś obrazy fal są podobne. Uzyskuje się obraz fal jednego statku z obrazu fal statku drugiego na drodze prostego przeliczenia:

$$\zeta_b = \frac{\zeta_m}{L_m} = \frac{\zeta}{L} = \frac{\zeta_2}{L_2} = \frac{\zeta_n}{L_n}$$

Widzimy, że warunkiem równości wyrażeń (15.48) i (15.46a) jest równość liczb Froude'a. Ogólnie zaś warunkiem równości znormalizowanych równań rządzących i znormalizowanych warunków brzegowych będzie równość liczb podobieństwa. Równość liczb podobieństwa zwięźle kryterium podobieństwa. Mamy zatem: kryterium Froude'a, kryterium Reynoldsa, ... Czasem kryterium Froude'a nazywają w okrętownictwie prawem modelowania Froude'a. Kryterium Reynoldsa - prawem Reynoldsa.

Jeśli będą spełnione kryteria podobieństwa w znormalizowanym, matematycznie sformułowanym zagadnieniu dla ruchu dwóch obiektów w płynie, to oczywiście uzyska się jedno bezwymiarowe rozwiązanie tego zagadnienia. Wymiarowe zaś charakterystyki przepływów uzyska się na drodze prostych przeliczeń. Zjawiska hydromechaniczne w obu przypadkach będą zatem podobne.

Jeszcze kilka uwag o normalizacji równań: Liczby podobieństwa dla tych samych równań rządzących przyjmują różną postać zależnie od tego, jakie wielkości odniesienia dla przeprowadzenia normalizacji tych równań się założy oraz od tego, jak będzie się tworzyć równania znormalizowane. Mówi się, że wielkościami odniesienia powinny być wielkości charakterystyczne dla rozpatrywanego zjawiska. Oznacza to, że rozpatrywane zjawisko od tych wielkości powinno zależeć w istotny sposób. Ale skąd taką informację wziąć? Można ją uzyskać albo na drodze eksperymentalnych badań rozpoznawczych, względnie przez analityczne rozwiązywanie bardzo uproszczonych modeli matematycznych rozpatrywanych zjawisk. Przykładowo dla przypadku statku na wodzie głębokiej wiemy, że obraz fal powierzchniowych zależy od długości statku L i jego prędkości v_0 , na wodzie płytkiej natomiast zależy od v_0 i głębokości wody h . Oprócz istotnego wpływu na dane zjawisko, wielkość odniesienia powinna być wielkością stałą i łatwo mierzalną. Spełnienie tych dwóch wymagań zilustrujemy na przykładzie jednostki ślizgowej. Jej charakterystyki hydrodynamiczne zależą między innymi od ciężaru jednostki, jej

szerokości i długości zwilżonej. Lecz długość zwilżona jest zależna od prędkości, a ciężar i szerokość są stałe. Zatem jako wielkość odniesienia dla wymiarów liniowych można tu przyjąć szerokość B lub $\sqrt[3]{V}$, gdzie V - objętość podwodzia w stanie spoczynku. Dla ślizgów zatem liczba Froude'a może mieć postać:

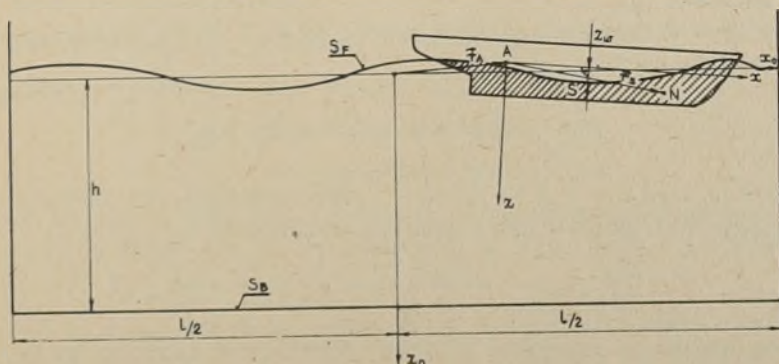
$$F_B = \frac{v_0}{\sqrt{g B}} ; \quad F_V = \frac{v_0}{\sqrt{g \sqrt[3]{V}}}$$

Widzimy, że przystępując do normalizacji równań opisujących zjawisko należy mieć pewną ilość informacji o przebiegu zjawiska i o wpływie parametrów konstrukcyjnych badanego obiektu na to zjawisko. W hydromechanice okrętu tych danych mamy ilość wystarczającą.

Przejdziemy dalej do matematycznego sformułowania zadania o reakcjach hydromechanicznych działających na statek nawodny lub statek poruszający się pod swobodną powierzchnią. Następnie znormalizujemy to zadanie i ustalimy prawa modelowania i sposoby ekstrapolacji wyników badań modelowych na statki naturalnej wielkości. Oczywiście zamiast statku może być także inne ciało, np. śruba napędowa.

19.1. MATEMATYCZNE SFORMUŁOWANIE ZADANIA DLA REAKCJI HYDROMECHANICZNYCH DZIAŁAJĄCYCH NA STATEK

Niech statek nawodny porusza się zadanym ruchem dowolnym w prostopadłościennym zbiorniku wypełnionym cieczą newtonowską. Zakładamy jednorodność i nieściśliwość tej cieczy. Główne wymiary statku są: długość L , szerokość B , zanurzenie T . Wymiary zbiornika oznaczymy następująco: l - długość, b - szerokość, h - głębokość wody w zbiorniku. Zadanie sformułujemy w układzie odniesienia $Axyz$ związanym ze statkiem. Statek i układy odniesienia pokazuje rysunek 19.1. Założymy dalej, że ściany zbiornika S_B i statku S są sztywne a ponadto, że na tych ścianach oderwanie przepływu nie występuje.



Rys. 19.1

Ponieważ $\rho = \text{const}$ i $\mu = \text{const}$, to równania rządzące ruchem płynu będą:
(12.175b):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{v} - (\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} \quad (19.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (19.2)$$

Warunek początkowy:

Niech w chwili $t = 0^-$ statek był nieruchomy, a woda w zbiorniku niech była w spoczynku. W chwili $t = 0^+$ niech statek skokowo uzyskał zadany ruch: $\vec{v}_e = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}$. Matematyczny zapis tego warunku jest następujący:

$$\text{dla } t = 0^- \quad \vec{v}(t = 0^-) = 0; \quad \vec{v}_e = 0; \quad p = p_a + \rho g z_0 \quad (19.3)$$

$$\text{dla } t = 0^+ \quad \vec{v}_{es} = (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_s) U(t)$$

gdzie: \vec{r}_s - promień wodzący powierzchni S statku względem układu ruchomego.

Warunki brzegowe:

Warunki brzegowe na ścianach zbiornika i powierzchni statku mają taką samą postać:

$$\vec{v} \Big|_S = \vec{v}_{es} \quad (19.4)$$

$$\vec{v} \Big|_{S_B} = (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{SB}) U(t) \quad (19.5)$$

gdzie: \vec{r}_{SB} - promień wodzący ścian zbiornika S_B względem układu ruchomego.

Zauważmy, że powierzchnie: S i S_B , tak samo jak i powierzchnia swobodna S_F , w założonym ruchu dowolnym zmieniają się z upływem czasu t. W układzie nieruchomym $Ox_0y_0z_0$ też tałeżą te powierzchnie od czasu.

Przy formułowaniu warunku na swobodnej powierzchni założymy, że ponad nią panuje stałe ciśnienie $p_0 = p_a$ i że napięcie powierzchniowe, a, jest także stałe. Zatem w zadaniu nie będzie się uwzględniać oddziaływania nadwodnej części kadłuba statku oraz oddziaływania zdeformowanej przez ruch statku powierzchni swobodnej S_F na powietrze znajdujące się ponad powierzchnią swobodną S_F .

Przy tych założeniach na mocy wzorów (8.6) i (2.28) możemy napisać warunek dynamiczny na S_F w postaci:

$$P \Big|_{S_F} = \left[p_a + a (R_1^{-1} + R_2^{-1}) \right] \delta_{ik} \quad (19.6)$$

gdzie: $P = -p \delta_{ik} + 2\mu S_d$ (7.8) - tensor naprężeń. Do tego warunku dołączymy dodatkowo warunek materialności powierzchni S_F (12.134).

$$\frac{dS_F}{dt} = 0 \quad S_F = \xi(x, y, t) - z_w = 0 \quad (19.7)$$

Gdyby udało się rozwiązać powyżej sformułowane zadanie, to uzyskałoby się pole prędkości $\vec{v}(x, y, z, t)$ i pola ciśnień $p(x, y, z, t)$ w zbiorniku i na jego brzegach. Dalej już prosto można by było określić tensor naprężeń P

na powierzchni statku S i reakcje hydrodynamiczne \vec{R} i \vec{M} lub współczynniki tych reakcji

$$\vec{C}_R = \frac{\vec{R}}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 S_0} \quad (19.8a)$$

$$\vec{C}_M = \frac{\vec{M}}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 S_0 L} \quad (19.8b)$$

gdzie: v_0 - prędkość charakterystyczna; S_0 - pole powierzchni charakterystycznej; L - długość charakterystyczna.

Zadanie to można oczywiście sformułować w układzie nieruchomym $Ox_0y_0z_0$. W wyniku rozwiązania takiego zadania uzyska się pole $\vec{v}(x_0, y_0, z_0, t)$ i $p(x_0, y_0, z_0, t)$, które przy obliczeniu reakcji \vec{R} i \vec{M} należy przetransformować na pola $\vec{v}(x, y, z, t)$ i $p(x, y, z, t)$ przy pomocy związków transformacyjnych danych w rozdziale 12.7.

Sformułowaliśmy zadanie w ruchomym układzie odniesienia dlatego, ponieważ ze znormalizowanego tak zadania można uzyskać bardziej przejrzyste informacje o znaczeniu praktycznym.

19.2. NORMALIZACJA RÓWNAŃ RZĄDZĄCYCH I WARUNKÓW BRZEGOWYCH. LICZBY PODOBIEŃSTWA

Wszystkie wielkości znormalizowane, bezwymiarowe, będziemy dalej oznaczać wskaźnikiem: b , np.: $\vec{v}_b, \vec{F}_b, t_b, p_b, \dots$. Jako zaś wielkości charakterystyczne - wielkości odniesienia - założymy ogólnie:

- g_0 - przyspieszenie grawitacyjne,
- ρ_0 - gęstość cieczy, np. w temperaturze 15°C ,
- ν_0 - kinematyczny współczynnik lepkości,
- $p_0 = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2$ - ciśnienie charakterystyczne,
- v_0 - prędkość charakterystyczna,
- T_0 - czas charakterystyczny.

Długość charakterystyczną określamy w następujący sposób:

dla odległości w kierunku: A_x - długość statku, L ;

A_y - szerokość statku, B ;

A_z - zanurzenie statku, T .

Jeśli zamiast statku mamy śrubę napędową, to długością charakterystyczną L będzie średnica śruby $D = 2R$, prędkością $v_0 = \pi Dn$, gdzie: n - prędkość obrotowa śruby, S_0 - powierzchnia odniesienia.

Dla statku: $S_0 = \Omega$, dla śruby napędowej $S_0 = \frac{\pi D^2}{4}$, dla steru - pole powierzchni nośnej.

Dla ruchu jednostajnego statku po linii prostej prędkością v_0 będzie prędkość statku, a przy ruchu niejednostajnym jego prędkość średnia. Wtedy czasem charakterystycznym będzie:

$$T_0 = \frac{L}{v_0} \quad (19.9a)$$

a czas bezwymiarowy t_b wyrazi się wzorem:

$$t_b = \frac{t}{T_0} = \frac{v_0}{L} t \quad (19.9b)$$

i będzie oznaczać stosunek drogi przebytej przez statek w czasie, t , do jego długości L . Przy statku kołyszącym się z okresem T_s czasem charakterystycznym będzie okres T_s lub lepiej

$$T_0 = \frac{T_s}{2\pi} = \frac{1}{\omega_s} \quad (19.9c)$$

gdzie: ω_s - częstość kołysań statku. Wtedy:

$$t_b = \omega_s t \quad (19.9d)$$

Dla śrub napędowych wzór (19.9d) przyjmuje postać:

$$t_b = 2\pi n t \quad (19.9e)$$

Mamy już wystarczającą ilość danych niezbędnych dla normalizacji sformułowanego matematycznie zadania.

19.2.1. Normalizacja warunku początkowego i warunków brzegowych na ścianach zbiornika i na powierzchni statku

Bezwymiarowe prędkości są:

$$\vec{v}_b = \frac{\vec{v}}{v_0} \quad \vec{v}_{esb} = \frac{\vec{v}_{es}}{v_0} \quad \vec{v}_{Ab} = \frac{\vec{v}_A}{v_0}$$

Bezwymiarowy promień wodzący powierzchni S jest:

$$\vec{r}_{sb} = \frac{\vec{r}_s}{L} = \vec{e}_1 \frac{x_s}{L} + \vec{e}_2 \frac{y_s}{L} + \vec{e}_3 \frac{z_s}{L} = \vec{e}_1 x_{sb} + \vec{e}_2 y_{sb} \frac{B}{L} + \vec{e}_3 z_{sb} \frac{T}{L}$$

gdzie: $x_{sb} = x_s L^{-1}$; $y_{sb} = y_s B^{-1}$; $z_{sb} = z_s T^{-1}$

Przy powyższych oznaczeniach warunek początkowy jest:

$$\begin{aligned} \vec{v}_b(t_b = 0^-) &= 0 & \vec{v}_{eb}(t_b = 0^-) &= 0 \\ \vec{v}_{esb}(t_b = 0^+) &= (\vec{v}_{Ab} + \vec{\omega}_b \times \vec{r}_{sb}) U(t_b) \end{aligned} \quad (19.10a)$$

$$\text{gdzie:} \quad \vec{\omega}_b \times \vec{r}_{sb} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}_s}{v_0} \quad (19.10b)$$

Więc:

$$\vec{\omega}_b = \vec{\omega} \frac{L}{v_0} = \vec{k}\omega \quad (19.10c)$$

W przypadku obrotów statku wokół jednej z osi A_x , A_y lub A_z współczynnik \vec{k}_ω ma tylko jedną składową

$$k_1 = \frac{L \omega_1}{v_0} \quad (19.10d)$$

Współczynnik k_1 zwię się współczynnikiem częstości. Jeśli zamiast ω_1 podstawi się czas T_0 , (19.9c), do powyższego wzoru, to współczynnik częstości przybierze postać zwaną liczbą Strouhala:

$$k_1 = \frac{L}{v_0 T_{01}} = Sh_1 \quad (19.10d)$$

Jakie wnioski można wysnuć z tej normalizacji warunku początkowego? Otóż jeśli mamy dwa obiekty: mały-model i duży - statek naturalnej wielkości, to wyrażenia (19.10) będą takie same dla modelu - wskaźnik m - i dla statku naturalnej wielkości, gdy wszystkie wyrazy tego wyrażenia będą takie same dla obu obiektów. Zatem, gdy

$$\begin{aligned} \vec{r}_{sbm} &= \vec{r}_{sb} ; & x_{bm} &= x_b ; & y_{bm} &= y_b ; & z_{bm} &= z_b \\ \left(\frac{B}{L}\right)_m &= \frac{B}{L} , & \left(\frac{T}{L}\right)_m &= \frac{T}{L} \end{aligned} \quad (19.11a)$$

Ponadto, gdy

$$\vec{v}_{ebm} = \vec{v}_{eb} ; \quad \vec{v}_{Abm} = \vec{v}_{Ab} ; \quad \vec{\omega}_{bm} = \vec{\omega}_b \quad (19.11b)$$

Wyrażenia (19.11a) przedstawiają warunek geometrycznego podobieństwa modelu i statku naturalnej wielkości, a wyrażenia (19.11b) warunek kinematycznego podobieństwa ruchu rozpatrywanych obiektów.

Zwykle warunek (19.11a) przedstawia się w postaci:

$$\frac{L_m}{L} = \frac{B_m}{B} = \frac{T_m}{T} = \alpha \quad (19.11c)$$

gdzie: α jest skalą modelu. Mamy bowiem:

$$\frac{B_m}{L_m} = \frac{B}{L} ; \quad \frac{T_m}{L_m} = \frac{T}{L} \quad \text{i stąd wyrażenie (19.11c).}$$

Związek (19.11c) dotyczy wszystkich wymiarów liniowych statków. Podczas badań modelowych model statku musi być zatem geometrycznie podobny do statku rzeczywistego. Dla geometrycznie podobnych statków wszystkie bezwymiarowe charakterystyki geometryczne są takie same. Takimi samymi więc będą współczynniki pełnotliwości kadłuba, wodnicy, owręża, itp. Związki zaś pomiędzy polami elementów geometrycznych i objętościami podwodzia statków geometrycznie podobnych będą:

$$\frac{\Omega_m}{\Omega} = \frac{S_{WLM}}{S_{WL}} = \alpha^2 \quad \frac{V_m}{V} = \alpha^3$$

Warunek kinematycznego podobieństwa ruchów modelu i statku (19.11b) zapisać można tak:

$$\frac{\vec{v}_{em}}{v_{om}} = \frac{\vec{v}_e}{v_o} \quad \frac{\vec{v}_{Am}}{v_{om}} = \frac{\vec{v}_A}{v_o}$$

$$\text{Stąd mamy: } \frac{\vec{v}_{em}}{\vec{v}_e} = \frac{\vec{v}_{Am}}{\vec{v}_A} = \frac{v_{om}}{v_o} = k_v \quad (19.11d)$$

$$\text{Podobnie: } \frac{\vec{\omega}_m}{\omega} = \frac{v_{om}}{v_o} \frac{L}{L_m} = \frac{k_v}{\alpha} \quad (19.11e)$$

gdzie: k_v - skala prędkości liniowych.

Widzimy z wyrażeń (19.11d i e), że prędkości liniowe i kątowe statku i jego geometrycznie podobnego modelu muszą pozostawać w stałym stosunku; muszą zatem być podobne.

Z równości czasów bezwymiarowych modelu i obiektu naturalnej wielkości wynika relacja pomiędzy czasem modelowym t_m i czasem rzeczywistym t :

$$\frac{v_o t}{L} = \frac{v_{om} t_m}{L_m}$$

Stąd

$$t_m = \frac{\alpha}{k_v} t \quad (19.11f)$$

Normalizację warunków brzegowych na powierzchni S i S_b , (19.4) i (19.5), przeprowadza się podobnie. Uzyskuje się w wyniku warunek geometrycznego podobieństwa zbiorników cieczy

$$\frac{h_m}{h} = \frac{b_m}{b} = \frac{l_m}{l} = \alpha \quad (19.11c')$$

i powierzchni statku S_b oraz warunek podobieństwa kinematycznego przepływów na tych powierzchniach

$$k_v = \frac{v_{om}}{v_o} = \frac{\vec{v}_m}{\vec{v}} \quad (19.11d')$$

Jako S_b przyjmuje się określenie:

$$S_b = \frac{S}{S_o} \quad \text{lub} \quad S_b = S L^{-2} \quad (19.12)$$

Podsumowując wnioski wynikające z normalizacji warunku początkowego i warunków brzegowych na ścianach zbiornika i powierzchni S ciała można stwierdzić, że dla równoważności bezwymiarowych tych warunków dla różnej wielkości obiektów - modelu i statku rzeczywistego - obiekty te a także ściany zbiorników cieczy, w których te obiekty się znajdują, muszą być geometrycznie podobne oraz że przepływy cieczy wzdłuż ścian zbiorników i powierzchni obiektów muszą być podobne kinematycznie. Musi także zachodzić kinematyczne podobieństwo ruchów tych obiektów.

19.2.2. Normalizacja warunku brzegowego na swobodnej powierzchni

Znormalizujemy najpierw tensor prędkości deformacji S_d . Zgodnie z określeniem (6.40):

$$S_d = \frac{1}{2} [\nabla \otimes \vec{v} + (\nabla \otimes \vec{v})^T]$$

Postępując tak samo jak przy normalizacji promienia wodzącego \vec{r}_s , bezwymiarowy operator ∇_b wyrazi się wzorem:

$$\nabla_b = L \nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_b} + \vec{e}_2 \left(\frac{L}{B}\right) \frac{\partial}{\partial y_b} + \vec{e}_3 \left(\frac{L}{H}\right) \frac{\partial}{\partial z_b} \quad (19.13)$$

W związku z powyższym tensor prędkości deformacji można zapisać tak:

$$S'_d = \frac{v_0}{L} \frac{1}{2} [\nabla_b \otimes \vec{v}_b + (\nabla_b \otimes \vec{v}_b)^T] = \frac{v_0}{L} S_{db} \quad (19.14)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń:

$$p_b = p p_0^{-1} = \frac{p}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} \quad \nu_b = \nu v_0^{-1} \quad \mu_b = \mu \mu_0^{-1} \quad (19.15)$$

$$R_{1b} = R_1 L^{-1} \quad R_{2b} = R_2 L^{-1} \quad S_b = \zeta L^{-1} \quad Z_{wb} = z_w L^{-1}$$

warunek brzegowy (19.6) na $S_{Fb} = S_b(x_b, y_b, z_b) - Z_{wb} = 0$ będzie:

$$-p_b p_0 \delta_{1k} + 2 \mu_b \mu_0 \frac{v_0}{L} S_{db} = - [p_{ab} p_0 + \frac{a}{L} (R_{1b}^{-1} + R_{2b}^{-1})] \delta_{1k}$$

Po podzieleniu stronami przez $p_0 = \frac{1}{2} \rho v_0^2$ powyższego wyrażenia otrzymuje się:

$$-p_b \delta_{1k} + \frac{4}{R_e} \mu_b S_{db} = - [p_{ab} + 2 w_e (R_{1b}^{-1} + R_{2b}^{-1})] \delta_{1k} \quad (19.16)$$

gdzie: $R_e = \frac{v_0 L}{\nu_0}$ - liczba Reynoldsa ; (19.17a)

$$w_e = \frac{a}{\rho_0 \nu_0^2 L} - \text{liczba Webera} ; \quad (19.17b)$$

$$E_u = p_{ab} = \frac{p_a}{\frac{1}{2} \rho_0 v_0^2} - \text{liczba Eulera.} \quad (19.17c)$$

Uzyskaliśmy 3 liczby podobieństwa. Widzimy, że warunek brzegowy (19.16) będzie taki sam dla modelu i obiektu rzeczywistego, gdy będą spełnione warunki geometrycznego i kinematycznego podobieństwa oraz gdy dodatkowo jeszcze liczby podobieństwa R_e , w_e i E_u będą takie same dla modelu i dla statku naturalnej wielkości.

Z równania (19.16) widać, że liczba Reynoldsa związana jest z siłami lepkości, liczba Webera - z siłami napięcia powierzchniowego, a liczba Eulera z siłami ciśnienia.

Normalizacja warunku kinematycznego (18.7) nie wprowadza żadnej nowej informacji: Bezwymiarowa postać tego warunku jest następująca:

$$\frac{\partial S_{Fb}}{\partial t_b} - \vec{v}_{eb} \cdot \nabla_b S_{Fb} + \vec{v}_b \cdot \nabla_b S_{Fb} = 0 \quad (19.18)$$

warunki brzegowe: (19.16) i (19.18) muszą być także założone na pęcherzach pary wodnej w cieczy, jeśli takie pęcherze tam wystąpią. Wtedy p_{ab} będzie oznaczać ciśnienie bezwymiarowe na takiej powierzchni rozdziału, działającej przez powierzchnię pęcherza na rozpatrywaną ciecz.

Na powierzchni pęcherza pary wodnej w cieczy - na kawernie kawitacyjnej - mogą powstać fale, tak jak na każdej powierzchni swobodnej. Ponieważ kawerna kawitacyjna występuje przy dużych prędkościach przepływu wokół ciała, a wymiary kawerny kawitacyjnej nie są zbyt duże, to na powierzchniach pęcherzy mogą mieć miejsce tylko fale kapilarne. Wynika to ze związku (16.143). Uzasadnijcie długość fal kapilarnych od liczby Webera.

Jeszcze jedna uwaga. Podobnie jak dla cieczy nielepkiej z warunku brzegowego na swobodnej powierzchni (19.16) można wyeliminować liczbę Reynoldsa i liczbę Eulera. Wystarczy bowiem zastosować obustronnie dla równania (19.6) operator dylwergencji. Uzyskuje się w wyniku tej operacji równanie:

$$-\nabla p + 2\mu \nabla \cdot S_d = -a \nabla (R_1^{-1} + R_2^{-1}) \quad (19.19)$$

Przy wzięciu pod uwagę równania Naviera i Stokesa oraz związku (7.15) dla $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ powyższe równanie przyjmie postać

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{g} = -a \nabla (R_1^{-1} + R_2^{-1})$$

Sprowadzimy to równanie do postaci bezwymiarowej:

$$\rho_0 \rho_b \frac{v_0^2}{L} \frac{d\vec{v}_0}{dt_b} - \rho_0 \rho_b g_0 \vec{g}_b = -\frac{a}{L^2} \nabla_b (R_{1b}^{-1} + R_{2b}^{-1})$$

Dzieląc stronami powyższe wyrażenie przez współczynnik $\rho_0 v_0^2 L^{-1}$ otrzymuje się postać znormalizowaną

$$\rho_b \frac{d\vec{v}_b}{dt_b} - \frac{\vec{g}_b}{F_L^2} = -We \nabla_b (R_{1b}^{-1} + R_{2b}^{-2}) \quad (19.20)$$

która musi być spełniona na $z_{wb} = \zeta_b(x_b, y_b, t_b)$. Tu mamy już wyraźną zależność warunku brzegowego od liczby Froude'a. Warunek równości liczb Reynoldsa jest ukryty w bezwymiarowym przyspieszeniu. Liczba Eulera, p_{ab} , została wyeliminowana całkowicie. Jak zobaczymy dalej, tak określona liczba Eulera nie występuje w znormalizowanym równaniu Naviera i Stokesa. Liczbę Eulera wyeliminuje się także przez zastosowanie operacji dylwergencji do równania (19.16) lub przez znormalizowanie równania (19.19). Wtedy warunek brzegowy na S_{Fb} będzie

$$-\nabla_b p_b + \frac{4}{Re} \mu_b \nabla_b \cdot S_{db} = -2We \nabla_b (R_{1b}^{-1} + R_{2b}^{-1})$$

W powyższym wyrażeniu liczba F_L jest ukryta w ciśnieniu p_b .

19.2.3. Normalizacja równań rządzących

Sprowadzamy najpierw do postaci bezwymiarowej równanie ciągłości (19.2) Mamy:

$$\frac{v_0}{L} \nabla_b \cdot \vec{v}_b = 0 \quad \text{i} \quad \nabla_b \cdot \vec{v}_b = 0 \quad (19.21)$$

Jeśli ma być ono ważne dla modelu i obiektu rzeczywistego, to $\vec{v}_{bm} = \vec{v}_b$. Zatem musi być spełniony warunek kinematycznego podobieństwa przepływów nie tylko wzdłuż ścian, lecz w całym zbiorniku cieczy. Ze względu na równość operatora ∇_b dla obu obiektów musi być także spełniony warunek geometrycznego podobieństwa w całym płynie. Zatem linie prądu i tory elementów płynu muszą być podobne. Tego należało się spodziewać. Równanie ciągłości jest bowiem równaniem kinematycznym.

Przechodzimy do normalizacji równania (19.1). Poszczególne jego wyrazy można zapisać tak:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{v_0^2}{L} \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t_b} \quad \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{v_0^2}{L} \vec{\omega}_b \times \vec{v}_b$$

$$(\vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{v_0^2}{L} (\vec{v}_{eb} \cdot \nabla_b) \vec{v}_b$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{v_0^2}{L} (\vec{v}_b \cdot \nabla_b) \vec{v}_b$$

$$\vec{F} = \vec{g} = g_0 \vec{g}_b = g_0 g_b (\vec{e}_1 d_{31} + \vec{e}_2 d_{32} + \vec{e}_3 d_{33})$$

$$\frac{1}{\varphi} \nabla p = \frac{p_0}{\varphi L} \frac{1}{\varphi_b} \nabla_b p_b = \frac{v_0^2}{L} \frac{1}{2 \varphi_b} \nabla_b p_b$$

$$v \Delta \vec{v} = \frac{v_0 v_0}{L^2} v_b \Delta_b \vec{v}_b$$

Jeśli podstawimy się powyższe zależności do równania (19.1) i podzielimy się obustronnie przez $v_0^2 L^{-1}$, to przyjmie ono następującą postać znormalizowaną:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_b}{\partial t_b} + \vec{\omega}_b \times \vec{v}_b - (\vec{v}_{eb} \cdot \nabla_b) \vec{v}_b + (\vec{v}_b \cdot \nabla_b) \vec{v}_b = \\ = \frac{\vec{g}_b}{F_b^2} - \frac{1}{2 \varphi_b} \nabla_b p_b + \frac{v_b}{R_e} \Delta_b \vec{v}_b \end{aligned} \quad (19.22a)$$

lub

$$\frac{d \vec{v}_b}{d t_b} = \frac{\vec{g}_b}{F_b^2} - \frac{1}{2 \varphi_b} \nabla_b p_b + \frac{v_b}{R_e} \Delta_b \vec{v}_b \quad (19.22b)$$

Widzimy, że żadnych dodatkowych informacji ze znormalizowanego równania Naviera i Stokesa nie uzyskujemy. Będzie bowiem ono takie same dla modelu

i statku naturalnej wielkości, gdy będą spełnione warunki: kinematycznego i geometrycznego podobieństwa oraz gdy dla obu rozpatrywanych przypadków będą równe liczby podobieństwa.

19.3. UWAGI O BEZWYMIAROWYM POLU CIŚNIEŃ I PRĘDKOŚCI W CIECZY

W rozdziale 19.2. zostało sformułowane matematycznie zadanie o przepływie cieczy wywołanym dowolnym ruchem ciała w zbiorniku. W postaci znormalizowanej równaniami opisującymi są równania rządzące (19.22) i (19.21) z warunkami brzegowymi i warunkiem początkowym (19.10a).

Założymy, że istnieje rozwiązanie tego zadania. Gdyby się udało rozwiązać to zadanie, to w wyniku uzyskanoby bezwymiarową prędkość cieczy $\vec{v}_b(x_b, y_b, z_b, t_b)$ i znormalizowane ciśnienie $p_b(x_b, y_b, z_b, t_b)$ w całym zbiorniku cieczy i na brzegach S_b, S_{Bb}, S_{Fb} .

Pole prędkości \vec{v}_b , ciśnienia p_b a także kształt swobodnej powierzchni S_{Fb} zależec powinien od liczb podobieństwa, kształtu ścian zbiornika i ciała oraz kinematyki ciała. Stwierdzenie to wynika ze znormalizowanych równań rządzących, warunku początkowego i ze znormalizowanych warunków brzegowych. W związku z tym możemy napisać, że:

$$\vec{v}_b = \vec{v}_b(x_b, y_b, z_b, t_b, \frac{B}{L}, \frac{T}{L}, \frac{h}{T}, \frac{b}{B}, \frac{l}{L}, S_b, \vec{v}_{Ab}, \vec{\omega}_b, F_L, R_e, W_e, E_u) \quad (19.23)$$

$$p_b = p_b(x_b, y_b, z_b, t_b, \frac{B}{L}, \frac{T}{L}, \frac{h}{T}, \frac{b}{B}, \frac{l}{L}, S_b, \vec{v}_{Ab}, \vec{\omega}_b, F_L, R_e, W_e, E_u)$$

Od tych samych parametrów zależy także z_{wb} .

Widzimy tu wyraźnie, że dla dwóch obiektów poruszających się w cieczy - modelu i statku naturalnej wielkości - pola ciśnień p_b i prędkości \vec{v}_b oraz także z_{wb} będą takie same, gdy równania rządzące z warunkami brzegowymi i początkowymi będą w obu przypadkach w ten sam sposób znormalizowane i gdy parametry w nawiasach wyrażeń (19.23) będą takie same dla obu obiektów.

Powyższe stwierdzenie stanowi inne sformułowanie warunków podobieństwa przepływów cieczy. Podobieństwo kinematyki przepływu i sił powierzchniowych w płynie jest uzależnione od podobieństwa geometrii ciał i zbiornika cieczy, od podobieństwa kinematyki tych ciał i od podobieństwa sił działających w cieczy. To ostatnie wyraża się przez liczby podobieństwa: Froude'a - siły ciężkości, Reynoldsa - siły lepkości, Webera.

Wyrażenia (19.23) są dość ogólne. Obejmują one także ruch jednostajny ciała nie tylko w kanale, lecz również w ośrodku nieograniczonym. Wtedy bowiem: $\vec{v}_A = \vec{e}_1 v_0$; $l, b, h \rightarrow \infty$; $\vec{\omega}_b = 0$ i odpada także warunek na swobodnej powierzchni, a zatem liczby E_u i W_e . Jeśli wystąpi kawitacja, to będą warunki brzegowe na pęcherzach pary wodnej. Przy założeniu niewystępowania kawitacji dla powyższego przypadku ruchu ciała wyrażenie (19.23) będzie:

$$\vec{v}_b = \vec{v}_b(x_b, y_b, z_b, \frac{B}{L}, \frac{T}{L}, S_b, F_L, Re) \quad (19.24)$$

$$p_b = p_b(x_b, y_b, z_b, \frac{B}{L}, \frac{T}{L}, S_b, F_L, Re)$$

W podobny sposób można napisać szczególną postać wyrażeń (19.23) dla innych ciał poruszających się w jakis szczególny sposób.

Tu zwrócimy jeszcze uwagę na powierzchnię S_b w wyrażeniach (19.23). Otóż ze związku $S_b = S_{bm}$ wynika, że jeżeli powierzchnia statku ma pewną chropowatość, to tą chropowatość powierzchni trzeba na modelu zamodelować. Chropowatość powierzchni statku i modelu muszą być geometrycznie podobne. Przy statkach nawodnych powierzchnia S_b jest funkcją fal powierzchniowych wytworzonych przez statek. Więc w wyrażeniach (19.23) $S_b = S_b(Z_{wb})$.

Przy analitycznym rozwiązywaniu zadań hydromechanicznych dla statków nawodnych mamy więc niezwykle złożony problem. Przy eksperymentalnym rozwiązywaniu zadań problem ten można uprościć biorąc pod uwagę powierzchnię zwilżoną Ω_b zamiast powierzchni S_b , to jest powierzchnię S_b dla $t_b=0^-$.

19.4. WSPÓŁCZYNNIKI REAKCJI HYDROMECHANICZNYCH I PRAWA ICH MODELOWANIA

Uzależnimy współczynniki reakcji hydrodynamicznych (19.8) od prędkości \vec{v}_b i ciśnienia p_b danych wyrażeniami (19.23). Zgodnie ze wzorem (5.7) i (5.8)

$$\vec{R} = \int_S \vec{p}_n \, dS \quad \vec{M} = \int_S \vec{r}_s \times \vec{p}_n \, dS$$

Zatem:

$$\vec{C}_R = \int_S \frac{\vec{p}_n}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} d\left(\frac{S}{S_0}\right) = \int_{S_b} \vec{p}_{nb} \, dS_b \quad (19.25a)$$

Podobnie:

$$\vec{C}_M = \int_{S_b} \vec{r}_{sb} \times \vec{p}_{nb} \, dS_b \quad (19.25b)$$

Znormalizujemy wektor naprężeń \vec{p}_n . Według wzoru (5.38) i (5.39):

$$\vec{p}_n = -\vec{n}p + \mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} = -\vec{n}p + \mu (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{v} = -\vec{n}p + \tau_0 \vec{s}$$

Zatem:

$$\vec{p}_{nb} = \frac{\vec{p}_n}{p_0} = \frac{2 \vec{p}_n}{\rho_0 v_0^2} = -\vec{n} p_b + \frac{2}{Re} \mu_0 (\vec{n} \cdot \nabla_b) \vec{v}_b = -\vec{n} p_b + c_f \vec{s} \quad (19.26)$$

gdzie: $C_f = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2} \rho_o v_o^2} = \frac{\tau_o}{p_o}$ - lokalny współczynnik tarcia.

Dalej będziemy zakładać $\mu_b = 1$; $\mu_o = \mu$. Z (19.26) widać, że znormalizowany wektor naprężeń \vec{p}_{nb} zależy wyraźnie od \vec{v}_b i p_b , które są dane wyrażeniami (19.23). Dla modelowego przepływu i przepływu rzeczywistego cieczy te wektory będą takie same, gdy bezwymiarowe parametry występujące w nawiasach wyrażen (19.23) będą miały takie same wartości dla obu przypadków przepływu; zatem gdy będą wypełnione kryteria podobieństwa.

Patrząc na wzory (19.25) widać, że współczynniki \vec{C}_R i \vec{C}_M są wartościami średnimi wektora \vec{p}_{nb} na powierzchni S_b , przy czym są one wektorami. Stosują się więc do nich wszystkie twierdzenia dotyczące wektorów. Możemy więc napisać:

$$\vec{C}_R = \vec{e}_1 C_{R1} + \vec{e}_2 C_{R2} + \vec{e}_3 C_{R3}$$

i podobnie:

$$\vec{C}_M = \vec{e}_1 C_{M1} + \vec{e}_2 C_{M2} + \vec{e}_3 C_{M3}$$

Gdy mamy wyznaczone C_{R1} i C_{M1} w jednym układzie współrzędnych, to przy pomocy związków transformacyjnych dla wektorów można wyznaczyć C'_{R1} i C'_{M1} w drugim układzie współrzędnych - w układzie „primowym”.

Wyrażenia dla współczynników \vec{C}_R , \vec{C}_M , (19.25), rozpiszemy dalej przez podstawienie do nich związku (19.26). Weźmiemy przy tym uzależnienie wyrażne naprężeń stycznych od prędkości \vec{v}_b . Jest ono bardziej przejrzyste niż $C_f \vec{s}$. Proste działania dają:

$$\vec{C}_R = - \int_{S_b} \vec{n} p_b dS_b + \frac{2}{R_e} \int_{S_b} (\vec{n} \cdot \nabla_b) \vec{v}_b dS_b \quad (19.27a)$$

$$\vec{C}_M = - \int_{S_b} \vec{r}_{sb} \times \vec{n} p_b dS_b + \frac{2}{R_e} \int_{S_b} \vec{r}_{sb} \times (\vec{n} \cdot \nabla_b) \vec{v}_b dS_b \quad (19.27b)$$

Pierwsze wyrazy powyższych wzorów zależą wyraźnie od rozkładu ciśnień p_b na powierzchni ciała i dlatego będziemy je nazywać współczynnikami reakcji ciśnień: \vec{C}_{Rp} i \vec{C}_{Mp} . Drugie wyrazy tych wzorów, zależne wyraźnie od rozkładu prędkości \vec{v}_b cieczy w pobliżu S_b , charakteryzują siły tarcia powierzchniowego. Zwiążą się one reakcjami tarcia: \vec{C}_{Rf} , \vec{C}_{Mf} .

Widzimy, że wzory (19.27) przy powyższych oznaczeniach można przedstawić jako:

$$\vec{C}_R = \vec{C}_{Rp} + \vec{C}_{Rf} \quad (19.28a)$$

$$\vec{C}_M = \vec{C}_{Mp} + \vec{C}_{Mf} \quad (19.28b)$$

gdzie:

$$\vec{C}_{Rp} = - \int_{S_b} \vec{n} p_b dS_b \quad (19.28c)$$

$$\vec{C}_{MP} = - \int_{S_b} \vec{r}_{sb} \times \vec{n} p_b dS_b \quad (19.28d)$$

$$\vec{C}_{RF} = \frac{2}{R_e} \int_{S_b} (\vec{n} \cdot \nabla_b) \vec{v}_b dS_b \quad (19.28e)$$

$$\vec{C}_{MF} = \frac{2}{R_e} \int_{S_b} \vec{r}_{sb} \times (\vec{n} \cdot \nabla_b) \vec{v}_b dS_b \quad (19.28f)$$

Przy wzięciu pod uwagę wyrażeń (19.23) możemy stwierdzić, że wszystkie współczynniki reakcji hydrodynamicznych: \vec{C}_{Rp} , \vec{C}_{RF} , \vec{C}_{Mp} , \vec{C}_{MF} a także wszystkie składowe tych współczynników są funkcjami:

$$C_i = f_i \left(\frac{B}{L}, \frac{T}{L}, \frac{h}{T}, \frac{b}{B}, t_b, \vec{v}_{Ab}, \vec{\omega}_b, F_L, R_e, W_e, E_u \right) \quad (19.29)$$

Współczynniki te będą miały takie same wartości dla modelu i obiektu naturalnej wielkości, gdy będą wypełnione warunki - kryteria - podobieństwa.

Z wypełnieniem tych warunków są związane duże trudności. Nie jest możliwe wypełnienie nawet warunku geometrycznego podobieństwa dla statku nawodnego, eksploatowanego na nieograniczonym oceanie. Mamy do dyspozycji bowiem tylko basen do badań modelowych - zbiornik prostopadłościenny. Nie ma zatem w tym przypadku zachowanych stosunków

$$\left(\frac{h}{T} \right)_m = \frac{h}{T} \quad \left(\frac{b}{B} \right)_m = \frac{b}{B}$$

Niezachowanie tego warunku nazywają w hydromechanice okrętowej wpływem ścian basenu. Zmniejsza się ten wpływ przez budowę dużych basenów i dostosowanie maksymalnej wielkości modelu do danego basenu. Zauważmy, że model nie może być zbyt mały. Na rzeczywistym statku mamy bowiem przepływ burzliwy w warstwie przyściennej. Także na modelu należy zachować burzliwy charakter przepływu w warstwie przyściennej, czyli należy dobrać długość L_m i V_m tak, aby $R_e > R_{ekr} \approx 5 \cdot 10^5$. Dla zapewnienia przepływu burzliwego na całej długości modelu stosuje się ponadto turbulizatory przepływu, wykonane przeważnie w postaci drutu nawiniętego na wręgu $9\frac{1}{2}$.

Podczas badań modelowych wykonywanych w hydromechanice okrętu wypełnia się warunek geometrycznego podobieństwa modelu i statku, warunek kinematycznego podobieństwa oraz warunek równości liczb Froude'a dla modelu i dla statku. Wypełnienie bowiem warunku równości liczb R_e , W_e i E_u jest praktycznie niewykonalne. Stwierdzenia te uzasadnimy niżej.

Przy modelowaniu zgodnie z kryterium równości liczb Froude'a mamy:

$$F_{Lm} = F_L \quad \text{lub} \quad \frac{v_{om}}{\sqrt{g L_m}} = \frac{v_o}{\sqrt{g L}}; \quad g_m = g$$

Stąd prędkość modelu v_{om}

$$v_{om} = v_o \sqrt{\frac{L_m}{L}} = v_o \sqrt{\alpha} \quad (19.30a)$$

jest mniejsza od prędkości statku. Jest to korzystne w praktyce badań modelowych. Współczynnik skali prędkości $k_v = \sqrt{\alpha}$. Zgodnie ze wzorem (19.11e) prędkości kątowe $\vec{\omega}$ modelują się tak:

$$\vec{\omega}_m = \vec{\omega} \frac{k_v}{\alpha} = \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{\alpha}} \quad (19.30b)$$

Podobnie modelują się prędkość obrotową

$$n_m = \frac{n}{\sqrt{\alpha}} \quad (19.30c)$$

Widzimy, że podczas badań modelowych z własnym napędem prędkość obrotowa śruby napędowej, n_m , modelu będzie większa od prędkości obrotowej śruby napędowej statku naturalnej wielkości.

Przebieg zjawisk w czasie na modelu będzie zachodzić szybciej niż na statku naturalnej wielkości. Na mocy wzoru (19.11f) mamy

$$t_m = \frac{\alpha}{k_v} t = \sqrt{\alpha} t \quad (19.31a)$$

W ten sposób sam będą modelować się okresy kołysań statku T_{ϕ} , T_{θ} , T_{ξ} :

$$T_{\phi m} = \sqrt{\alpha} T_{\phi} \quad (19.31b)$$

Częstości własne kołysań statku modelują się zgodnie ze wzorem (19.30b).

Przy modelowaniu ciśnień wychodzimy z zależności $p_{bm} = p_b$. Stąd przy $q = q_m$ mamy:

$$p_m = p \frac{p_{om}}{p_o} = p \left(\frac{v_{om}}{v_o} \right)^2 = p k_v^2 = p \alpha \quad (19.32)$$

Zatem przy modelowaniu zgodnie z kryterium Froude'a rozkład ciśnień na modelu zmniejsza się α -krotnie w stosunku do tego rozkładu na obiekcie rzeczywistym. Reakcje hydrodynamiczne przy założeniu:

$$\vec{C}_R = f(F_L) \quad i \quad F_{Lm} = F_L; \quad q_m = q, \quad \varepsilon_m = \varepsilon$$

modelują się w sposób następujący:

$$\frac{\vec{R}_m}{v_{om}^2 S_{dm}} = \frac{\vec{R}}{v_o^2 S_o} \quad \text{więc} \quad \vec{R}_m = k_v^2 \alpha^2 \vec{R} = \alpha^3 \vec{R} \quad (19.33a)$$

Podobnie:

$$\vec{M}_m = k_v^2 \alpha^3 \vec{M} = \alpha^4 \vec{M} \quad (19.33b)$$

Widzimy, że ma miejsce znaczne zmniejszenie reakcji hydrodynamicznych działających na model statku, model śruby napędowej, model steru, itp. Jest to zjawisko korzystne dla praktyki eksperymentalnej.

Gdyby były wykonywane badania modelowe zgodnie z kryterium Reynoldsa, to przy założeniu $q_m = q$, $\mu_m = \mu$ podobne postępowanie jak wyżej prowadzi do zależności następujących

$$k_v = \frac{1}{\alpha} \quad \vec{v}_m = \frac{\vec{v}}{\alpha}, \quad v_{om} = \frac{v_o}{\alpha}, \quad \vec{\omega}_m = \frac{\vec{\omega}}{\alpha^2}$$

$$\vec{R}_m = \vec{R} \alpha^2 k_v^2 = \vec{R} \quad \vec{M}_m = \alpha \vec{M} \quad p_m = \frac{p}{\alpha^2}$$

Widzimy, że powyższe zależności są praktycznie niemożliwe do zrealizowania podczas badań modelowych, wykonywanych dla statków lub ich elementów, w szczególności ze względu na $\vec{R}_m = \vec{R}$.

Zatem w czasie przeprowadzanych badań modelowych w hydromechanice okrętu wypełniamy tylko częściowo warunki podobieństwa - mamy tu do czynienia z podobieństwem częściowym. Współczynniki reakcji hydrodynamicznych wyznaczone w czasie badań modelowych \vec{C}_{Rm} i \vec{C}_{Mm} nie są równe współczynnikom \vec{C}_R i \vec{C}_M dla obiektu naturalnej wielkości statku, śruby napędowej, steru. Stwierdzenie to możemy zapisać:

$$\vec{C}_R = k_{SR} \vec{C}_{Rm} \quad \vec{C}_M = k_{SM} \vec{C}_{Mm} \quad (19.34)$$

Bezwymiarowe funkcje, współczynniki k_{SR} , k_{SM} zwie się efektem skali. Należy dążyć do tego, aby współczynniki k_{SR} i k_{SM} były równe jedności. Związek (19.34) wyraża problem ekstrapolacji wyników badań modelowych na obiekt rzeczywisty. Problem ten nie jest dotychczas rozwiązany w sposób zadowalający praktykę projektową statków. Poświęćmy temu problemowi nieco więcej uwagi. Tu możemy już stwierdzić, że w obecnym stanie wiedzy i techniki obliczeniowej oraz techniki badań eksperymentalnych nie jesteśmy w stanie wyznaczyć dokładnie reakcji hydromechanicznych ani na drodze rachunkowej, ani też na drodze badań modelowych. A przecież tyle statków pływa na morzach!

Przedstawione wyżej podstawy teorii badań eksperymentalnych dają jednak możliwość oceny prawidłowości stosowanych metod ekstrapolacji wyników badań modelowych i są one ogólne w sensie postawionego zadania. Można je stosować dla badań oporu statku, do badań reakcji hydrodynamicznych działających na manewrujący lub kołyszący się statek a także można zastosować te podstawy do badań modelowych swobodnych śrub napędowych statków.

19.4.1. Współczynniki oporu statku

Niech statek nawodny posiadający płaszczyznę symetrii Ax_z porusza się ze stałą prędkością: $\vec{V}_A = \vec{e}_1 v_0$; $\vec{\omega} = 0$ wzdłuż płaszczyzny symetrii długiego prostopadłościennego kanału o wymiarach b, h . Ze względu na symetrię współczynniki reakcji hydrodynamicznych działających na statek będą:

$$\vec{C}_R = \vec{e}_1 C_x + \vec{e}_3 C_z \quad \vec{C}_M = \vec{e}_2 C_{My}$$

Skoncentrujemy dalej uwagę na współczynniku C_x . W przypadku statku dla C_x wprowadza się oznaczenie $C_T = -C_x$. Współczynnik C_T nazywa się współczynnikiem oporu całkowitego. Zgodnie ze wzorami ogólnymi (19.28) piszemy:

$$C_T = C_p + C_f \quad (19.35)$$

gdzie współczynniki oporu ciśnienia C_p i oporu tarcia C_f będą

$$C_p = \int_{S_b} p_b n_x dS_b \quad (19.35a)$$

$$C_F = - \frac{2}{R_e} \int_{S_b} \left[n_x \frac{\partial v_{bx}}{\partial x_b} + n_y \left(\frac{L}{B} \right) \frac{\partial v_{bx}}{\partial y_b} + n_z \left(\frac{L}{T} \right) \frac{\partial v_{bx}}{\partial z_b} \right] dS_b \quad (19.35b)$$

W przypadku oporu statku, jak już zaznaczono, za powierzchnię odniesienia S_0 przyjmuje się powierzchnię zwilżoną, Ω , statku w spoczynku. W związku z tym współczynniki C_T , C_p , C_F są:

$$C_T = \frac{R_T}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 \Omega} \quad C_F = \frac{R_F}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 \Omega} \quad C_p = \frac{R_p}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 \Omega} \quad (19.35c)$$

Dla rozpatrywanego przypadku wyrażenia (19.23) i (19.29) przyjmują postacie:

$$\begin{aligned} v_{bx} &= v_{bx}(x_b, y_b, z_b, \frac{B}{L}, \frac{T}{L}, \frac{h}{T}, \frac{b}{B}, S_b, F_L, R_e, W_e, E_u) \\ p_b &= p_b(x_b, y_b, z_b, \frac{B}{L}, \frac{T}{L}, \frac{h}{T}, \frac{b}{B}, S_b, F_L, R_e, W_e, E_u) \\ C_i &= C_i(\frac{B}{L}, \frac{T}{L}, \frac{h}{T}, \frac{b}{B}, S_b, F_L, R_e, W_e, E_u) \end{aligned} \quad (19.36)$$

Pozostałe składowe v_{by} i v_{bz} mają taką samą formalną zależność jak v_{bx} w (19.36). Należy podkreślić, że pola prędkości v_b wokół kadłuba statku nie udaje się rozbić na składniki tak, jak się rozkłada współczynnik oporu całkowitego C_T .

Z wyrażeń (19.36) widać, że dla określonego statku w danym kanale współczynniki oporu ciśnienia C_p i oporu tarcia C_F zależą od liczby Froude'a, Reynoldsa, Webera i Eulera. Zatem piszemy:

$$C_T(F_L, R_e, W_e, E_u) = C_p(F_L, R_e, W_e, E_u) + C_F(F_L, R_e, W_e, E_u) \quad (19.37)$$

Powyższe wyrażenie stanowi podstawę krytycznej oceny stosowanych metod ekstrapolacji wyników badań modelowych oporu statku a także podstawę do opracowania w przyszłości doskonalszych metod ekstrapolacyjnych.

Wyrażenie (19.37) znacznie się upraszcza w przypadku statku poruszającego się w nieograniczonym oceanie ruchem jednostajnym wzdłuż linii prostej. Nie ma wtedy warunku brzegowego na swobodnej powierzchni; nie ma na tej powierzchni fal. W wyrażeniu (19.37) nie wystąpią liczby F_L , W_e , E_u . Więc dla statku podwodnego mamy:

$$C_T(R_e) = C_p(R_e) + C_F(R_e) = C_V(R_e) \quad (19.38)$$

gdzie: C_V - opór lepkości - wzory (18.10), (17.12b), (17.15). Drugie uproszczenie wzoru (19.37) występuje dla statku nawodnego w cieczy nielepkiej. Wtedy $\mu = 0$ i $C_F = 0$. Odpada także liczba R_e i E_u . Ciśnienie $p_a = \text{const}$ nie wpływa na stan ruchu i eliminuje się je z warunku brzegowego na S_F .

Dla tego przypadku:

$$C_T(F_L, W_e) = C_P(F_L, W_e) = C_W(F_L, W_e) \quad (19.39)$$

Jeśli ten statek będzie się poruszać jak wyżej, w nieograniczonym obszarze cieczy, to fale nie powstaną i $C_T = 0$. Jest to zgodne z paradoksem d'Alemberta.

Z rozdziału 16.5 już wiemy, że gdy prędkość modelu statku jest dostatecznie wysoka, to wpływ napięcia powierzchniowego jest pomijalnie mały. Wtedy wzór (19.39) będzie:

$$C_T(F_L) = C_P(F_L) = C_W(F_L) \quad (19.40)$$

Wzór (19.40) może być ważny tylko fal o bardzo małej stromości. Wiadomo, że przy wysokich liczbach Froude'a pierwsza fala dziobowa statku ma znaczną stromość i ulega załamaniu. Zjawisko załamania się fali dziobowej ma miejsce także u pełnotłiwych statków powolnych. Wydaje się, że na to zjawisko ma pewien wpływ napięcie powierzchniowe - liczba Webera. Wpływ ten jednak nie został zbadany. Nie zbadano także wpływu liczb W_e i E_u na zjawisko zapowietrzania - aeracji - płytkozanurzonego płata nośnego poruszającego się z dużymi prędkościami.

Zwróćmy uwagę na to, że ciśnienie atmosferyczne, p_a , można wyeliminować w zadaniu liniowym o ruchu ciała pod swobodną powierzchnią cieczy lepkiej - rozdział 16.3.6. Można również wyeliminować p_a z bardziej ogólnego warunku brzegowego: wzór (19.19) i (19.20). W związku z powyższym wydaje się być dość dobrym przybliżeniem zależność

$$C_T(F_L, R_e) = C_P(F_L, R_e) + C_F(F_L, R_e) \quad (19.41)$$

Może ona znaleźć zastosowanie do badania wpływu liczb F_L i R_e na współczynniki C_P i C_F i oczywiście C_T . Postępowanie jest następujące: wykonujemy modele geometrycznie podobne o różnych długościach: $L_1 = L$; $L_2 = 2L$; $L_3 = 3L$; ... Holuje się następnie te modele przy tych samych liczbach Froude'a: $F_1 = F_2 = F_3 = \dots$ i mierzy się opór całkowity R_T oraz rozkład ciśnień na powierzchni kadłuba S_b . Zgodnie ze wzorem (19.35a) można obliczyć współczynnik oporu ciśnienia C_P , a dalej ze wzoru (19.41) współczynnik oporu tarcia. Każdej liczbie Froude'a $F_1 = F_2 = \dots$ odpowiadają różne wartości liczb Reynoldsa. Stąd uzyskać można wpływ liczby R_e na współczynniki C_P , C_F i C_T . Powtarzając cykl holowań z innymi liczbami Froude'a $F'_1 = F'_2 = F'_3$ uzyskuje się także wpływ liczb F_L na powyższe współczynniki. Powyżej przedstawiony sposób postępowania jest przykładem skróconego programu badań eksperymentalnych. Można ten sposób zastosować także do badania wpływu F_L i R_e na inne współczynniki reakcji hydrodynamicznych: C_{Ry} , C_{Rz} , C_{MF} itp.

We wzorze (19.41) współczynnik oporu ciśnienia statków nawodnych lub statków płytkozanurzonych obejmuje opór falowy $C_W(F_L, R_e)$ i opór ciśnienia spowodowany lepkością $C_{pv}(F_L, R_e)$. W związku z tym piszemy

$$C_P(F_L, R_e) = C_W(F_L, R_e) + C_{pv}(F_L, R_e) \quad (19.42)$$

Uzasadnienie wzoru (19.42) polega na tym, że istnieje możliwość eksperymentalnego wyznaczenia składnika C_{pv} i zbadania wpływu liczb F_L i R_e na ten składnik oporu. Wiemy bowiem jak można wyznaczyć $C_p(F_L, R_e)$ oraz $C_w(F_L, R_e)$. Dotychczas nie wykonywano pomiarów $C_p(F_L, R_e)$ i $C_{pv}(F_L, R_e)$.

W analogii do wzoru (19.38) można dalej połączyć współczynniki $C_{pv}(F_L, R_e)$ i $C_p(F_L, R_e)$ w jeden wyraz zwany w hydromechanice okrętowej oporem lepkości

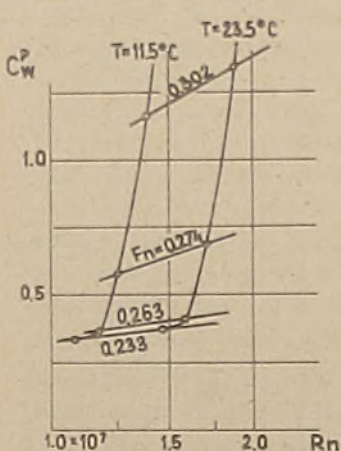
$$C_v(F_L, R_e) = C_{pv}(F_L, R_e) + C_p(F_L, R_e) \quad (19.43)$$

Do wyznaczenia eksperymentalnego współczynnika C_v stosowany bywa wzór (17.15). Należy przeczytać ponownie uwagi podane po tym wzorze w rozdziale 17.2.

Po zastosowaniu wyrażen (19.42) i (19.43) współczynnik oporu całkowitego statku ma postać:

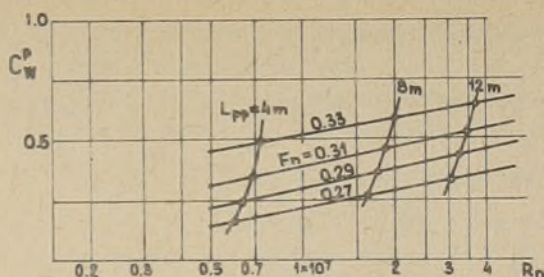
$$C_T(F_L, R_e) = C_w(F_L, R_e) + C_v(F_L, R_e) \quad (19.44)$$

Wszystkie składniki oporu w tym wzorze mogą być wyznaczone przez jednoczesne pomiary: Opór całkowity R_T mierzy się bardzo dokładnie dynamometrem. Opór falowy wyznacza się przez pomiar fal generowanych przez statek, a opór lepkości przez pomiar charakterystyk śladu modelu statku. Dotychczas wykonane eksperymenty nie dały zadowalających wyników: prawa strona równości (19.44) na ogół nie zgadza się z jej stroną lewą. Przyczyny tej niezgodności wydają się wynikać z przybliżonego charakteru wzoru (17.15) oraz z tego, że podstawy teoretyczne wyznaczania oporu falowego - rozdział 17.8.3 - nie uwzględniają wpływu lepkości.



Rys. 19.2

Zakłada się przeważnie, że współczynnik oporu falowego statku nawodnego nie zależy od liczby Reynoldsa. Wyniki badań oporu falowego, przedstawione w pracy [45], wskazują, że to założenie jest nieprawdziwe. Rysunek 19.2 przedstawia wyniki pomiarów oporu falowego C_w wykonane w basenie 400 m długości na modelu o długości 7 m przy temperaturze wody 11,5°C i 23,5°C. Zmienność liczby Reynoldsa uzyskano przez zmianę kinematycznego współczynnika lepkości. Z rysunku 19.2 widać wyraźną zależność $C_w(F_L, R_e)$, przy czym wpływ liczby R_e jest w tym przypadku większy dla wyższych liczb Froude'a. Ponadto widać, że ze wzrostem liczby R_e , przy stałej wartości F_L , współczynnik oporu falowego się zwiększa. Podobną tendencję zachowania się współczynnika C_w od liczby R_e wykazują wyniki badań modeli geometrycznie podobnych („geosimów”), przedstawione także w [45]. Niektóre z nich pokazuje rysunek 19.3. Z rysunków tych wynika, że założenie niezależności współczynnika C_w od R_e jest grubym przybliżeniem. Widzimy, że mimo wykonania bardzo dużej ilości badań modelowych oporu statku nadal wiemy



Rys. 19.3

bardzo mało o współczynnikach oporu statku w jego najprostszym z możliwych ruchów.

19.4.2. Charakterystyki hydrodynamiczne napędowej śruby swobodnej

Przedstawione wyżej - w rozdziale 19.4 - prawa modelowania współczynników reakcji hydromechanicznych są ważne dla wszystkich ciał poruszających się na/lub pod swobodną powierzchnią cieczy. Pokażemy niżej, jak można je zastosować do napędowych śrub swobodnych.

Niech zatem śruba swobodna o średnicy D porusza się ze stałą prędkością v_A pod swobodną powierzchnią na głębokości h_w nieograniczonego zbiornika wody. Przez h_w rozumiemy zanurzenie osi śruby napędowej. Niech także prędkość kątowa śruby ω będzie stałą.

Jak wskazywano w rozdziale 13.3.3, naturalnym układem współrzędnych będzie układ walcowy związany ze skrzydłem śruby - rysunek 13.9. Prędkość unoszenia \vec{v}_e wtedy będzie:

$$\vec{v}_e = \vec{e}_x v_A + \vec{e}_\theta \omega r \quad (19.45)$$

Jako prędkość charakterystyczną v_0 można przyjąć albo $|\vec{v}_e|$, albo:

$$v_0 = \omega R = 2\pi n R = \pi D n \quad (19.46)$$

Moduł prędkości unoszenia stosuje się w obliczeniach teoretycznych współczynnika ciśnienia - wzór (19.33c) a także w niektórych wyrażeniach dla liczb kawitacyjnych σ - wzór (19.39b). Przy opracowywaniu wyników badań śrub swobodnych stosuje się, jako prostsze, wyrażenie (19.46). Nie bierze się za v_0 prędkości v_A , bo przy $v_A = 0$ i $\omega \neq 0$ reakcje hydromechaniczne działające na skrzydła śruby są różne od zera.

Czas bezwymiarowy dla śruby zgodnie ze wzorem (19.9c) jest

$$t_b = \omega t = \pi D n t \quad (19.47)$$

Na mocy wzoru (19.10c)

$$\omega_b = \omega \frac{L}{v_0} = \omega \frac{R}{\omega R} = 1$$

Znormalizowana prędkość unoszenia jest

$$\vec{v}_{eb} = \frac{\vec{v}}{v_0} = \vec{e}_x \frac{v_A}{\pi D n} + \vec{e}_\theta \frac{r}{R} = \vec{e}_x \frac{J}{\pi} + \vec{e}_\theta r_b \quad (19.48)$$

gdzie: $J = \frac{v_A}{Dn}$ - współczynnik posuwu, a $r_b = r R^{-1}$.

Ponieważ założono stałą prędkość postępową v_A śruby i stałe jej obroty, to z ogólnego zadania o reakcjach hydromechanicznych odpada warunek początkowy, warunek zaś na ścianach zbiornika sprowadza się do $\vec{v}_b = 0$, gdy $x, y, z \rightarrow \infty$. Warunek brzegowy na swobodnej powierzchni pozostaje bez zmian. Zwróćmy jednak uwagę na to, że swobodna powierzchnia obraca się z prędkością ω względem układu współrzędnych związanego ze skrzydłem śruby napędowej. Pomiędzy układem $Axyz$, którego osie Ax, Ay leżą na niezakłóconej powierzchni swobodnej, a oś Az jest skierowana pionowo w dół (przy czym układ ten porusza się z prędkością v_A) a układem walcowym mamy zależność:

$$x = x_b; \quad y = r \cos \theta = r \cos t_b; \quad z = h_w + r \sin \theta = h_w + r \sin t_b$$

Stąd:

$$x_b = x R^{-1}; \quad y_b = r_b \cos t_b; \quad z_b = \bar{h}_w + r_b \sin t_b; \quad \bar{h}_w = h_w R^{-1} \quad (19.49)$$

Operator bezwymiarowy ∇_b przyjmuje postać:

$$\nabla_b = R^{-1} \nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r_b} + \frac{\vec{e}_\theta}{r_b} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x_b}$$

Przy powyższych oznaczeniach znormalizowane równania rządzące (19.21) i (19.22) a także warunki brzegowe na S_b i S_{F_0} pozostają ważnymi. Tu jednak liczby podobieństwa F_D, R_e, W_e, E_u przyjmą postać:

$$\begin{aligned} F_D &= \frac{v_0}{\sqrt{g} R} = \frac{2\pi R n}{\sqrt{g} R} = 2\pi n \sqrt{\frac{R}{g}} \\ R_e &= \frac{v_0 R}{\nu} = \frac{2\pi n R^2}{\nu} = 2\pi \frac{n R^2}{\nu} \\ W_e &= \frac{a}{\rho v_0^2 R} = \frac{a}{4\pi^2 \rho R^3 n^2} \\ E_u &= \frac{P_a}{2\pi^2 \rho R^2 n^2} \end{aligned} \quad (19.50)$$

Związki (19.23) wyrażające zależność znormalizowanego pola prędkości i ciśnienia dla śruby napędowej będą:

$$\begin{aligned} \vec{v}_b &= \vec{v}_b(r_b, \theta, x_b, \bar{h}_w, S_b, F_D, R_e, E_u, W_e) \\ P_b &= P_b(r_b, \theta, x_b, \bar{h}_w, S_b, F_D, R_e, E_u, W_e) \end{aligned} \quad (19.51)$$

i podobnie wyrazi się obraz swobodnej powierzchni z_{wb} .

Jeśli śruba jest głęboko zanurzona, to na swobodnej powierzchni nie będzie fal i z wyrażenia (19.51) znikną parametry: E_u, W_e, F_D, \bar{h}_w . Parametry E_u, W_e będą występować w przypadku występowania kawitacji. Będzie wtedy konieczny warunek brzegowy na swobodnej powierzchni pęcherzy kawitacyjnych. Dla przypadku braku kawitacji:

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= \vec{v}_0(r_b, \theta, x_b, S_b, J, R_e) \\ p_b &= p_b(r_b, \theta, x_b, S_b, J, R_e) \end{aligned} \quad (19.52)$$

Jest to analogiczny przypadek do wyrażonego zależnością (19.24).

Ze względu na symetrię współczynniki reakcji \vec{C}_R i \vec{C}_M będą:

$$\vec{C}_R = \vec{e}_x C_{Rx} \quad \vec{C}_M = \vec{e}_x C_{Mx}$$

Dla śrub przyjęto stosować następujące oznaczenia:

$$R_x = T; \quad C_{Rx} = k_T; \quad M_x = -Q; \quad C_{Mx} = -k_Q \quad (19.53)$$

Z ogólnych wzorów (19.8) mamy:

$$k_T = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \varphi v_0^2 S_o} = \frac{T}{\frac{1}{2} \varphi (\pi D n)^2 \frac{\pi D^2}{4}} = \frac{8}{\pi^2} K_T \quad (19.54a)$$

gdzie:

$$K_T = \frac{T}{\varphi D^4 n^2} - \text{współczynnik naporu} \quad (19.54b)$$

Podobnie

$$k_Q = \frac{-M_x}{\frac{1}{2} \varphi v_0^2 S_o R} = \frac{Q}{\frac{1}{2} \varphi (\pi D n)^2 \frac{\pi D^2}{4} \frac{D}{2}} = \frac{16}{\pi^2} K_Q \quad (19.54c)$$

gdzie:
$$K_Q = \frac{Q}{\varphi D^5 n^2} - \text{współczynnik momentu} \quad (19.54d)$$

Przy pomocy współczynników K_T, K_Q i J można wyrazić sprawność śruby swobodnej η_p . Istotnie sprawność śruby swobodnej jest stosunkiem mocy użytecznej - mocy naporu $P_T = T v_A$ do mocy doprowadzonej do śruby $P_D = Q \omega$.
Więc:

$$\eta_p = \frac{P_T}{P_D} = \frac{J}{2\pi} \frac{K_T}{K_Q} \quad (19.54e)$$

Z ogólnych wyrażenia dla \vec{C}_R i \vec{C}_M , (19.25), oraz ze związków (19.51) wynika, że współczynniki naporu i momentu będą zależać od $S_b, J, R_e, F_D, W_e, E_u$. Jeżeli zaś niekawitująca śruba jest zanurzona głęboko pod swobodną powierzchnią to:

$$\begin{aligned} K_T &= K_T(S_b, J, R_e) \\ K_Q &= K_Q(S_b, J, R_e) \end{aligned} \quad (19.55)$$

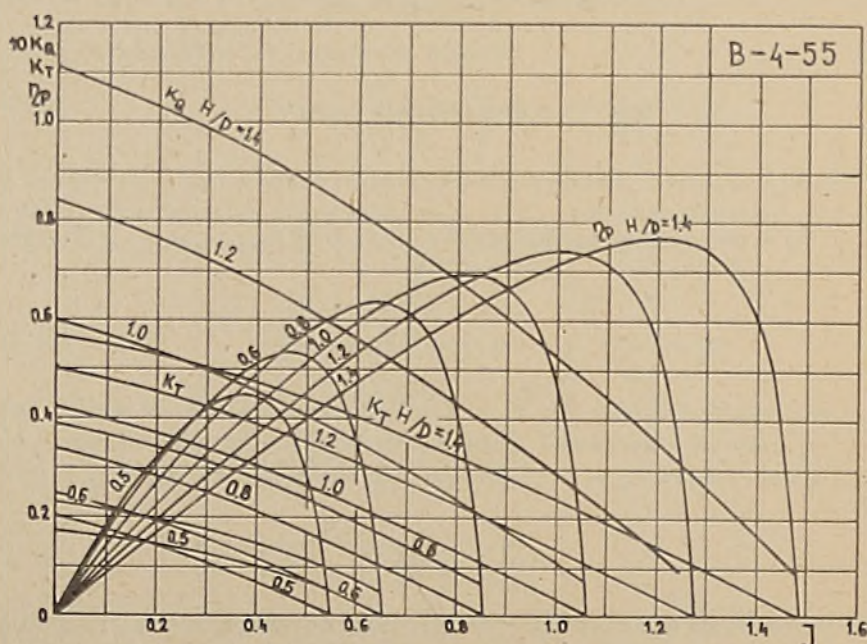
Zamiast liczby Eulera określonej wyżej dla śrub kawitujących przyjęto stosować liczbę kawitacyjną σ . Z wyrażenia (13.47) widzimy, że σ jest też pewną postacią liczby Eulera. Dla śrub kawitujących zanurzonych głęboko

$$\begin{aligned} K_T &= K_T(S_b, J, R_e, \sigma) \\ K_Q &= K_Q(S_b, J, R_e, \sigma) \end{aligned} \quad (19.56)$$

Powierzchnia S_b śruby napędowej, podobnie jak powierzchnia statku, może być scharakteryzowana ogólnie przyjętymi parametrami konstrukcyjnymi. Dla śruby tymi parametrami są: liczba skrzydeł z , współczynnik skoku H/D , współczynnik powierzchni, kształt profili skrzydła i współczynnik średnicy piasty. Największy wpływ na charakterystyki hydrodynamiczne śruby napędowej na współczynnik skoku i współczynnik posuwu. Rysunek 19.4 jest tego przykładem. Uzasadnienie przebiegu krzywych $K_T(J)$ i $K_Q(J)$ będzie przedstawione na wykładach z pędników okrętowych.

Wskazemy jeszcze na to, że zgodnie ze wzorami (19.28) współczynniki K_T i K_Q można rozłożyć na części spowodowane rozkładem ciśnień p_b na skrzydła śruby i części spowodowane siłami tarcia powierzchniowego τ_0 . Czyli:

$$K_T = K_{Tp} + K_{TF} \quad \text{I} \quad K_Q = K_{Qp} + K_{QF}$$



Rys. 19.4

Dalej można przeprowadzić analizę podobną do tej, jaką zastosowano przy współczynnikach oporu statku. Ten sam sposób postępowania jest ważny dla innych rodzajów pędników okrętowych: zespołów dysza-śruba, śruba tandem, śrub częściowo zanurzonych.

19.5. UWAGI O METODACH EKSTRAPOLACJI OPORU MODELU STATKU

Ze wzorów (19.41) i (19.44) wynika, że współczynnik oporu całkowitego statku C_{TS} będzie równy współczynnikowi oporu całkowitego modelu C_{TM} wtedy, gdy będą spełnione warunki podobieństwa geometrycznego, kinematycznego oraz kryterium równości liczb Froude'a $F_{Lm} = F_{Ls}$ i Reynoldsa $R_{em} = R_{es}$. Stwierdzenie to dotyczy także współczynników, składników oporu statku i modelu; C_p , C_F , C_w , C_v . Warunki te spełnione będą, jeśli modelem będzie statek naturalnej wielkości. Stąd powstaje problem, w jaki sposób z dostateczną dokładnością dla praktyki można znaleźć C_{TS} na podstawie wyników badań modelowych: C_{TM} , C_{Wm} , C_{Vm} . Nad tym problemem pracują wszystkie ośrodki badawcze hydromechaniki na świecie. Co 3 lata zbierają się przedstawiciele basenów modelowych na konferencjach, by ustalić kierunki badań oraz ujednoczyć metodę przeliczania wyników badań modelowych na statek rzeczywisty. Nazwa konferencji: "International Towing Tank Conference". Oznaczenie skrótowe i nr kolejny ITTC rok. Przykładowo, konferencja 15, która odbyła się w roku 1978 ma oznaczenie: 8 ITTC 1957 r. itp. Materiały każdej takiej konferencji są publikowane. Trzeba podkreślić, że dotychczas problem ekstrapolacji nie jest rozwiązany zadowalająco.

Przy ekstrapolacji współczynnika oporu modelu C_{TM} na współczynnik C_{TS} stosowana jest metoda Froude'a oraz „metoda ekstrapolacji trójwymiarowej” przyjęta do stosowania na 15 ITTC 1978.

W metodzie Froude'a zamiast zależności

$$C_T(F_L, R_e) = C_p(F_L, R_e) + C_F(F_L, R_e) \quad (19.41)$$

stosuje się związek uproszczony

$$C_T(F_L, R_e) = C_R(F_L) + C_{Fo}(R_e) \quad (19.57)$$

gdzie: C_{Fo} - jest współczynnikiem oporu tarcia płaskiej równoważnej płyty, przez którą należy rozumieć płaską płytę o polu równym polu powierzchni zwilżonej, Ω , statku znajdującego się w spoczynku i długości równej długości wodnicy pływania statku w spoczynku. C_R nazywają współczynnikiem oporu resztowego. Dla współczynnika oporu tarcia płaskiej płyty różne baseny modelowe stosowały różne półempiryczne wzory:

Prandtla-Schlichtinga

$$C_{Fo} = \frac{0,455}{(\log R_e)^{2,58}}$$

Schoenherra:

$$\frac{0,242}{\sqrt{C_{Fo}}} = \log (R_e C_{Fo})$$

Hughesa i innych.

Na 8 ITTC w 1957 r. zalecono stosowanie wzoru znanego pod pełną nazwą: wzór ITTC-57; lub ekstrapolator ITTC-57

$$C_{Fo} = \frac{0,075}{(\log R_e - 2)^2} \quad (19.58)$$

Ze wzoru (19.57) widać, że jeżeli pomierzmy $C_{Tm}(F_L, R_e)$ i według wzoru (19.58) obliczymy C_{Fom} , to mamy

$$C_{Rm}(F_L) = C_{Tm}(F_L, R_{em}) - C_{Fem}(R_{em}) = C_{RS}(F_L) \quad (19.59)$$

Następnie obliczając $C_{Fo}(R_{es})$ można wyznaczyć współczynnik oporu całkowitego statku

$$C_{Ts}(F_L, R_{es}) = C_{Rm}(F_L) + C_{Fo}(R_{es}) + \text{dodatki na opór powietrza,} \quad (19.60)$$

części wystające oraz chropowatość powierzchni.

Różne baseny modelowe przyjmowały wskazane dodatki do oporu w różnej wielkości i według niekiedy własnych empirycznych zależności tak, aby uzyskać wynik końcowy zgodny praktycznie z rzeczywistością. Pewne uwagi o tych dodatkach można znaleźć w poradnikach lub w monografiach [8], [24]. Ze względu na zebrane wieloletnie doświadczenia metoda ta jest jeszcze stosowana w niektórych basenach modelowych przy wykonywaniu prognozy oporu statku.

Metoda Froude'a nie jest zgodna z fizyką zjawiska. Ze wzorów (19.41) do (19.44) widzimy, że:

$$C_R = C_w(F_L, R_e) + C_{pv}(F_L, R_e) + [C_F(R_e, F_L) - C_{Fo}(R_e)]$$

Więc współczynnik oporu resztowego w rzeczywistości jest nie tylko zależny od liczby Froude'a. Zależy on także od liczby Reynoldsa. Z wyników badań przytoczonych w pracy [43] wynika, że dla statku jednośrubowego współczynnik C_R maleje ze wzrostem liczby R_e przy $F_L = \text{const}$, a dla modeli geometrycznie podobnych statku dwuśrubowego wzrasta on ze wzrostem R_e przy $F_L = \text{const}$. Stąd widać, że jeżeli będzie się badać jakieś nowe ukształtowanie kadłuba statku przy pomocy modeli o tej samej długości, to ekstrapolując wyniki oporu najlepszego modelu można uzyskać opór odbiegający od przewidywanego. Może on być wyższy lub niższy względnie może się zgodzić z przewidywaniami. W takim przypadku powinno się powtórzyć pomiary oporu wybranego kształtu na geometrycznie podobnym modelu o większej długości. Powinno się znać tendencje zachowania się współczynnika C_R w zależności od liczby Reynoldsa.

W metodzie ekstrapolacji trójwymiarowej przyjętej na 15 ITTC do stosowania w badaniach w basenach modelowych wychodzi się ze związku

$$C_T(F_L, R_e) = C_w(F_L, R_e) + C_v(F_L, R_e) \quad (19.44)$$

zakładając, że $C_w(F_L, R_e) = C_w(F_L)$ i że współczynnik oporu lepkości

$$C_v(F_L, R_e) = C_v(R_e) = C_{Fo}(1+k)$$

Zamiast poprawnego związku (19.44) mamy więc

$$C_T(F_L, R_e) = C_w(F_L) + (1+k) C_{Fo}(R_e) \quad (19.61)$$

gdzie C_{Fo} określa wzór (19.58), a k jest wartością stałą dla danego statku.

Widzimy, że

$$1 + k = \frac{C_T(F_L, R_e) - C_w(F_L)}{C_{Fo}(R_e)} = \frac{C_v(F_L, R_e)}{C_{Fo}(R_e)} \quad (19.62)$$

Zatem współczynnik k powinien zależeć od F_L i R_e a także od innych parametrów podobieństwa. I tak jest w rzeczywistości. Badania modelowe to potwierdzają. W praktyce ekstrapolacji wyników badań oporu przyjmuje się stałą wartość k dla danego statku. Opracowano szereg wzorów empirycznych dla wyznaczania współczynnika ekstrapolacji trójwymiarowej k . Na 13 konferencji ITTC-1972 zalecono stosowanie wzoru

$$k = 0,17 + \frac{20 C_B}{\left(\frac{L}{B}\right)^2 \sqrt{\frac{B}{T}}}$$

Wadą tego wzoru jest to, że dla niektórych statków w zakresie małych liczb F_L uzyskuje się

$$C_w(F_L) = C_T(F_L, R_e) - (1 + k) C_{Fe} < 0$$

co jest sprzeczne z fizyką zjawiska.

Na 15 konferencji ITTC-1978 uzgodniono stosowanie eksperymentalnych metod do wyznaczania współczynnika k , przy czym należy stosować przy tym ekstrapolator ITTC-57. Przeważnie współczynnik k wyznaczają przy liczbie Froude'a $F_L = 0,15$; czasem jednak - jak w metodzie Prohaski przedstawionej na 11 ITTC-1966 - przy liczbie Froude'a $F_L = 0$. Jeśli wraz z oporem C_{Tm} jest mierzony C_{wm} , to wzór (19.62) przy $F_L = 0,15$ daje nam wartość współczynnika k . Jeśli natomiast C_{wm} nie jest mierzone, to

$$1 + k \approx \frac{C_T}{C_{Fo}} \Big|_{F_L=0,15}$$

Założono tu, że przy $F_L = 0,15$, $C_{wm} = 0$.

W metodzie Prohaski wychodzi się ze stwierdzenia, że w zakresie małych liczb Froude'a współczynnik oporu falowego

$$C_w(F_L) = a F_L^4$$

Wtedy

$$C_{Tm} = (1 + k) C_{Fom} + a F_L^4$$

Współczynnik a wyznacza się metodą najmniejszych kwadratów lub, gdy mierzony jest opór falowy, z zależności $C_w = a F_L^4$.

W metodzie ekstrapolacji trójwymiarowej współczynnik oporu falowego $C_w(F_L)$ oznaczają także przez $C_R(F_L)$ i nazywają oporem resztowym.

Stosując oznaczenia międzynarodowe - ITTC - wzór (19.61) dla modelu zapisujemy tak:

$$C_{Tm} = C_{Rm} + (1 + k_m) C_{Fom} \quad (19.63)$$

Dla statku współczynnik oporu całkowitego jest

$$C_{Ts} = C_{Rm} + (1 + k) C_{FoS} + \Delta C_F + C_{AA} \quad (19.64)$$

gdzie: $k_m = k$; $F_{LS} = F_{Lm}$; $C_{FoS} = C_{Fo}(R_{es})$; $C_{Fom} = C_{Fo}(R_{em})$

ΔC_F - dodatek na chropowatość powierzchni określa wzór

$$\Delta C_F = \left[105 \left(\frac{k_s}{L} \right)^{\frac{1}{3}} - 0,64 \right] 10^{-3}$$

L - długość statku;

k_s - chropowatość powierzchni poszycia. Jeśli nie dokonuje się pomiarów chropowatości, to zaleca się przyjmować standardową wartość $k_s = 150 \cdot 10^{-6}$ m;

C_{AA} - współczynnik oporu powietrza nadwodnej części statku. Jeśli nie dokonuje się pomiaru oporu powietrza, to zaleca się przyjmować wartość przybliżoną według wzoru:

$$C_{AA} = 0,001 \frac{A_T}{\Omega}, \text{ gdzie } A_T - \text{pole rzutu nadwodnej części statku na płaszczyznę owręza, a } \Omega - \text{powierzchnia zwilżona statku.}$$

Opór statku jest określony wzorem:

$$R_T = C_{Ts} \frac{1}{2} \rho v_o^2 \Omega$$

Patrząc na wzory (19.60) i (19.64) widać, że pomiędzy obu metodami istnieje tylko nieznaczna różnica formalna. W metodzie drugiej zwiększa się bowiem tylko współczynnik oporu tarcia równoważnej płyty. Przez tę operację uzyskuje się jednak mniejszy współczynnik C_{Ts} niż w metodzie Froude'a. Merytoryczna różnica pomiędzy obu metodami jest istotna. Obie przedstawione metody są przybliżeniami; współczynnik k nie ma wartości stałej a ponadto opór falowy, $C_w = C_R$, jest zależny także od R_e i być może od W_e . Zatem to, co powiedziano o prognozowanym oporze statku metodą Froude'a, jest tu nadal ważne.

I tak jeśli $C_T - C_{Fo}$ przy $F_L = \text{const}$ jest funkcją malejącą liczby R_e , to metoda ekstrapolacji trójwymiarowej da opór statku bliższy jego rzeczywistej wartości niż metoda Froude'a, przy czym prognozowany opór statku będzie zawyżony. Jeśli natomiast $C_T - C_{Fo}$ przy $F_L = \text{const}$ będzie rosnącą funkcją R_e , to metoda Froude'a da prognozowany opór bliższy oporowi rzeczywistemu niż metoda druga. Prognozowany opór statku będzie niższy od oporu doznawanego przez statek. W takim przypadku przyjęcie nawet $C_{Tm} = C_{Ts}$ da zbyt niską prognozę oporu statku.

Jeżeli zatem nie jesteśmy pewni tendencji zmian $C_T - C_F$ ze wzrostem R_e , to konieczne jest przeprowadzenie badań modelowych oporu statku na co najmniej dwóch geometrycznie podobnych modelach wykonanych w różnych skalach, przy czym model drugi powinien być możliwie duży. Obecnie ze względu na czas i koszty wykonuje się badania modelowe oporu i napędu tylko na jednej wielkości modelu. Z ekstrapolacją wyników badań napędowych, będzie mowa o tym w wykładach z pędników okrętowych, występują podobne kłopoty! A pręd-

kość budowanego statku jest objęta kontraktem. Więc projektant statku, mimo posiadania wyników badań oporowo-napędowych, nie jest pewien, czy statek osiągnie wymaganą prędkość na próbach zdawczo-odbiorczych. Czasami statek na mili pomiarowej nie osiąga warunków kontraktu. Powoduje to duże straty dla stoczni.

Należy zwrócić uwagę na to, że gdy statek po wodowaniu stoi długo przy nabrzeżu wyposażeniowym, to chropowatość powierzchni kadłuba i powierzchni skrzydeł śruby napędowej ulega zwiększeniu. Wzrasta przez to opór kadłuba, maleje napór śruby napędowej oraz zmniejsza się jej sprawność. W takim przypadku tuż przed próbami zdawczo-odbiorczymi na mili pomiarowej powinno się statek wydokować i oczyścić powierzchnię kadłuba, a zwłaszcza starannie przeprowadzić operację oczyszczenia skrzydeł śruby napędowej.

W zakończeniu tych uwag wskażemy jeszcze na możliwość ulepszenia metod ekstrapolacji oporu statku [46]. Wyjdziemy z poprawnego wzoru:

$$C_T(F_L, R_e) = C_W(F_L, R_e) + C_V(F_L, R_e) \quad (19.44)$$

Współczynnik oporu lepkości C_V wyrażamy w ten sam sposób, jak w metodzie ekstrapolacji trójwymiarowej. A zatem:

$$C_V(F_L, R_e) = C_{F0}(R_e) [1 + k_V(F_L, R_e)] \quad (19.65)$$

Analogicznie proponuje się wyrazić współczynnik pomierzonego oporu falowego $C_W^P(F_L, R_e)$. Górny wskaźnik, p , wskazuje na to, że współczynnik oporu falowego wyznaczono przez pomiar charakterystyk fal generowanych na swobodnej powierzchni przez model statku. Zatem:

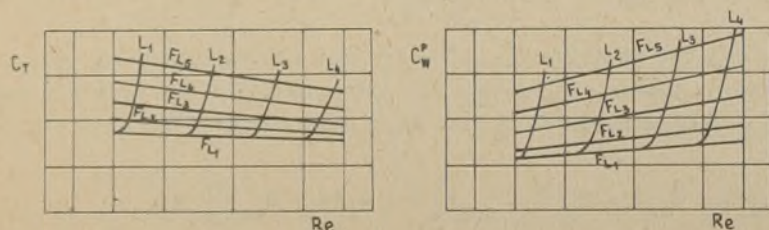
$$C_W^P(F_L, R_e) = C_W^P(F_L, R_{e0}) [1 + k_W(F_L, R_e)] \quad (19.66)$$

Przy tych oznaczeniach współczynnik C_T będzie:

$$C_T(F_L, R_e) = C_W^P(F_L, R_e) + C_V(F_L, R_e) \quad (19.67)$$

Czy wyrażenie (19.44) i (19.67) są równoważne?

W celu wyznaczenia nieznanymi funkcji ekstrapolacyjnych k_V i k_W - oporu lepkości i oporu falowego odpowiednio - konieczne jest dla każdego statku wykonanie pomiarów oporu całkowitego i oporu falowego na kilku modelach geometrycznie podobnych. Uzyska się wtedy zbiór krzywych $C_T(R_e)$ przy różnych liczbach F_L oraz analogiczny zbiór krzywych $C_W^P(R_e)$. Przykład takich krzywych pokazuje rysunek 19.5.



Rys. 19.5

Dla funkcji ekstrapolacyjnej $k_v(F_L, R_e)$ na mocy wzorów (19.65) i (19.67) mamy zależność:

$$1 + k_v(F_L, R_e) = \frac{C_T(F_L, R_e) - C_w^P(F_L, R_e)}{C_{Fo}(R_e)} \quad (19.68)$$

Dla funkcji $k_w(F_L, R_e)$ na mocy wzoru (19.66) mamy

$$1 + k_w(F_L, R_e) = \frac{C_w^P(F_L, R_e)}{C_w^P(F_L, R_{eo})} \quad (19.69)$$

przy czym dla $R_e = R_{eo}$, $k_w(F_L, R_e) = 0$.

Zakładając $F_L = \text{const}$ wyznacza się $k_v(F_L = \text{const}, R_e)$ i $k_w(F_L = \text{const}, R_e)$. Powtarzając postępowanie dla różnych liczb $F_L: F_{L1}, F_{L2}, \dots$ mamy zależności: $k_v(F_L, R_e)$, $k_w(F_L, R_e)$. Wtedy ekstrapolacja wyników badań oporu modelu będzie ekstrapolacją współczynników k_v i k_w ze względu na przejście od R_{em} do R_{es} . Stosując oznaczenia jak we wzorze (19.64) zgodnie z powyższym współczynnik oporu całkowitego statku będzie:

$$C_{Ts}(F_L, R_{es}) = C_w^P(F_L, R_{em}) [1 + k_w(F_L, R_{es})] + C_{Fo}(R_{es}) [1 + k_v(F_L, R_{es})] + \Delta C_F + C_{AA} \quad (19.70)$$

Zauważmy, że istnieje także możliwość ekstrapolacji oporu modelu C_{Tm} na statek przy pomocy poprawnej zależności (19.41):

$$C_T(F_L, R_e) = C_p(F_L, R_e) + C_F(F_L, R_e) \quad (19.41)$$

Analogicznie do wyżej wskazanej propozycji ekstrapolacji oporu modelu można bowiem napisać:

$$C_p(F_L, R_e) = C_p(F_L, R_{eo}) [1 + k_p(F_L, R_e)]$$

$$C_F(F_L, R_e) = C_{Fo}(R_e) [1 + k_F(F_L, R_e)]$$

gdzie:

$$1 + k_p(F_L, R_e) = \frac{C_p(F_L, R_e)}{C_p(F_L, R_{eo})}; \quad k_p = 0 \quad \text{dla } R_e = R_{eo}$$

$$1 + k_F(F_L, R_e) = \frac{C_T(F_L, R_e) - C_p(F_L, R_e)}{C_{Fo}(R_e)}$$

Techniczna różnica pomiędzy obu propozycjami ekstrapolacji C_T polega na tym, że zamiast pomiaru C_w^P mierzy się opór ciśnienia C_p . Wzór dla współczynnika C_{Ts} będzie oczywiście mieć taką samą postać, jak wzór (19.70).
Boviem:

$$C_{Ts}(F_L, R_{es}) = C_p(F_L, R_{em}) [1 + k_p(F_L, R_{es})] + C_{Fo}(R_{es}) [1 + k_F(F_L, R_{es})] + \Delta C_F + C_{AA} \quad (19.71)$$

Można także oprzeć propozycję metody ekstrapolacji oporu w oparciu o wzór (19.44), mierząc jednocześnie opór całkowity modelu i opór lepkości przez pomiar charakterystyk śladu za modelem, np. w oparciu o wzór (17.15) lub wzór analogiczny lepiej dopracowany. Dostaniemy dla C_{TS} zależności analogiczne do wzorów (19.70) i (19.71).

Z przedstawionych propozycji pierwsza z nich nie przedstawia trudności. Technika wyznaczania na drodze eksperymentalnej oporu falowego modelu jest opanowana. Propozycje powyższych metod mają zasadniczą wadę, polegającą na tym, że są czasochłonne. Zamiast jednego modelu, jak w metodzie Froude'a względnie w metodzie trójwymiarowej ekstrapolacji, należy wykonać co najmniej 3 cykle pomiarów. Wzrasta więc koszt przeprowadzania pomiarów i co najmniej 3-krotnie wzrasta koszt wykonania modeli. Zmniejsza się ponadto przepustowość basenu do badań modelowych. Czasochłonność opracowywania wyników eksperymentów w różnych przedstawionych metodach nie ma praktycznego znaczenia. Wykona je mała maszyna cyfrowa.

Jeszcze jedna uwaga: wzory (19.70) i (19.71) też dadzą przybliżoną wartość współczynnika C_{TS} , a baseny do badań modelowych mają zebrane doświadczenia - współczynniki korelacyjne - przeważnie dla metody Froude'a. Te doświadczenia można jednak przetransponować na nową propozycję metody. Wykażcie, że nie przedstawia to żadnej trudności technicznej.

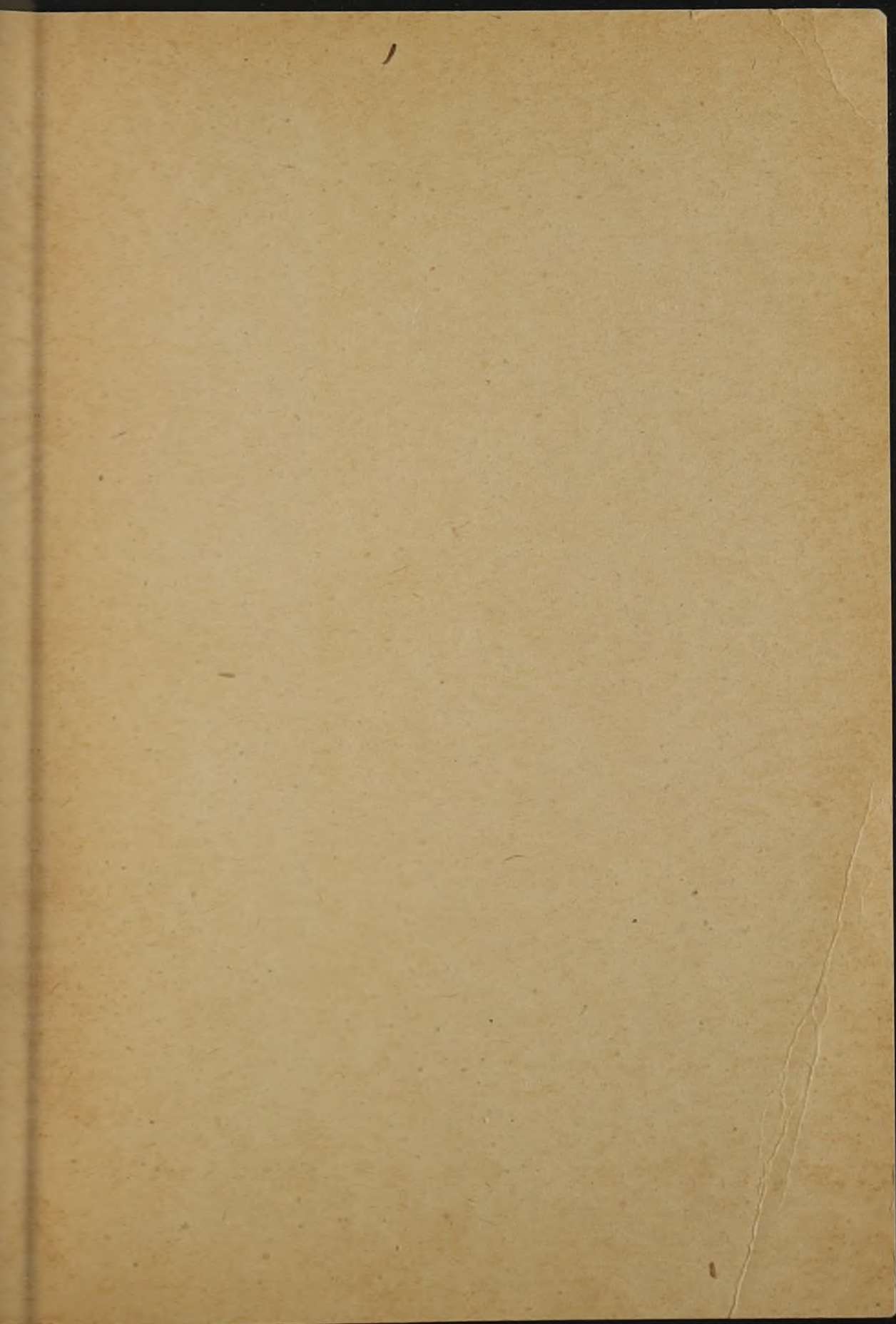
Z przedstawionych podstaw modelowania i ekstrapolacji wyników badań modelowych, zwłaszcza oporu statku, wniosek jest taki, że jeszcze niewiele wiemy o oporze statku, tej najprostszej reakcji hydrodynamicznej działającej na statek w warunkach wody spokojnej, że znacznie mniej jeszcze wiemy o poprawnej ekstrapolacji pola prędkości modelu na statek, że badania modelowe są czasochłonne i zarazem kosztowne, a ponadto nie dają one jeszcze wyników pewnych dla statku, w związku z tym - że należy dążyć do dalszego rozwoju metod analityczno-numerycznych tak, aby w przyszłości stało się możliwe rachunkowe wyznaczanie charakterystyk hydrodynamicznych kadłubów statków oraz elementów współpracujących z tym kadłubem.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Troškolański A.T.; Hydromechanika, WNT, Warszawa 1969.
- [2] Prosnak W.; Mechanika płynów, tom 1. PWN, Warszawa, 1970.
- [3] Bukowski J.; Mechanika płynów. PWN, Warszawa, 1975.
- [4] Koczin N.E., Kibel J.A., Rose I.W.; Teoretičeskaja gidromechanika. Gostechizdat, Moskwa, 1948.
- [5] Łocjański K.G.; Mechanika żidkosti i gaza. Gostechizdat, Moskwa, 1950.
- [6] Fedjajewskij K.K.; Wojtkunskij J.I., Faddiejew J.I.; Gidromechanika. Sudostrojenie, Leningrad, 1968.
- [7] Batchelor G.K.; An Introduction to Fluid Dynamics. Wyd. ros., Izdatielstwo „Mir”, Moskwa, 1973.
- [8] Kaczman F.M., Pustosznij A.F., Sztumpf W.M.; Propulsywnyje Kaczestwa morskich sudow. Sudostrojenie, Leningrad, 1972.
- [9] Kolk W.R.; Modern Flight Dynamics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1961.
- [10] Byron F.W., Fuller R.W.; Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej. PWN, Warszawa, tom I, 1973, tom II, 1974.
- [11] Potter D.; Metody obliczeniowe fizyki. PWN, Warszawa, 1977.
- [12] Średniawa B.; Hydromechanika i teoria sprężystości. PWN, Warszawa, 1977.
- [13] Panczenkow A.N.; Gidrodynamika podwodnowo kryła. Naukowa Dumka, Kijow, 1965.
- [14] Biełocerkowski S.M., Skripacz B.Bk., Tabacznikow W.; Kryło w niestacjonarnym potoku gaza. Izd. Nauka, Fiz. Mat. Giz., Moskwa 1971.
- [15] Srietenski L.L.; Teoria wołnowych dżiżenij żidkosti. Izd. Nauka, Moskwa, 1977.
- [16] Krężelewski M.; Przewidywanie podłużnego zachowania się wodolotów na wzburzonym morzu. Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Okrętowe XXV, Gdańsk 1975.
- [17] Sobczyk K.; Metody dynamiki statystycznej. PWN, Warszawa, 1973.
- [18] Haskind M.D.; Gidrodinamiczeskaja teoria kaczkii korabla. Izd. Nauka, Moskwa, 1973.
- [19] Kostjukow A.A.; Wzaimodiejstwiije tieł dżiżuszczichsja w żidkosti. Izd. „Sudostrojenie”, Leningrad, 1972.

- [20] Eggers K.; Über die Ermittlung des Wellenwiderstandes eines Schiffsmo-
dels durch Analyse Seine Wellensystems. Schiffstechnik Bd.
9, Heft 46, 1962.
- [21] Niekrasow W.A.; Wierojatnostnyje zadaczi moriechodnosti
sudow. Izd. Sudostrojenie, Leningrad, 1978.
- [22] Titow L.F.; Wietrowyje wołny. Gidrometeorologiczeskoje Izd.,
Leningrad, 1969.
- [23] Koczinn N.E.; Sobranie Soczinienij, Tom II, Izd. Akademii
Nauk SSSR, Moskwa-Leningrad, 1949.
- [24] Bai K.J., Yeung R.W.; Numerical Solution to Free-Surfa-
ce Flow Problems. 10 th Symposium on Naval Hydrodynamics.
- [25] Schlichting H.; Grenzschicht - Theorie. Tłum. ros., Izd.
„Nauka”, Moskwa, 1968.
- [26] Titow I.A. i inni; Problemy prikladnoj gidromechaniki sud-
na. Izd. Sudostrojenie, Leningrad, 1975.
- [27] Gołubiew W.W.; Lekcji po teorii kryła. Gos. Izd. Techn.-
Teoret. Literatury, Moskwa-Leningrad, 1949.
- [28] Abbott I.H., Doenhoff A.E.; Theory of wingsec-
tion. Dover Publications, New York, 1959.
- [29] Riegels F.W.; Aerodynamische Profile. R. Oldenburg, München,
1958.
- [30] Siedow L.I.; Płaskije zadaczi gidrodinamiki i aerodinamiki.
Izd. „Nauka”, Moskwa, 1966.
- [31] Piskorek A.; Równania całkowe. WNT, Warszawa, 1971.
- [32] Eggers K.W.; Wave Analysis, State of that Art 1975. Interna-
tional Seminar on Wave Resistance. The Society of Naval Architects
of Japan, 1976.
- [33] Dziubiński J. i inni; Poradnik matematyczny, PWN. War-
szawa, 1978.
- [34] Rogalski A.; Obliczenia numeryczne współczynnika oporu fa-
lowego i odkształceń swobodnej powierzchni wywołane poruszającym się
układem ciśnień. Prace badawcze I.O. PG Nr 1195/MR-311/79, Gdańsk,
1979.
- [35] Newman J.N., Poole F.A.; The wave resistance of a
moving pressure distribution in a canal. Schiffstechnik Vol. 9,
1962.
- [36] Rogalski A.; Opór falowy i odkształcenie swobodnej po-
wierzchni cieczy wywołane poruszającym się układem ciśnień. PB-I.O.
PG Nr 1196/MR-312/79, Gdańsk, 1979.
- [37] Inui T.; Introductory Remarks. International Seminar on Wave
Resistance. The Society of Naval Architects of Japan, 1976.
- [38] Koczinn N.E.; Wektornoje isczislenie i naczala tensoronogo is-
czislenia. Izd. Akademii Nauk ZSSR, Moskwa, 1951.
- [39] Wehausen J.V.; A bibliography of wave resistance of ships.
International Seminar on wave resistance. The Society of Naval
Architects of Japan, 1976.

- [40] P i e n P.C.; Catamaran Hull-Form Design, International Seminar on wave resistance. The Society of Naval Architects of Japan, 1976.
- [41] K u s a k a V.; On the contribution of the line integral to the wave resistance of surface ships. International Seminar on Wave resistance, 1976.
- [42] H i r a t a M.H.; The line integral term in the wave resistance. International Seminar on Wave resistance, 1976.
- [43] K l i n e S.J.; Similitude and Approximation Theory, Mc. Graw-Hill, New York, 1965.
- [44] S i e d o w L.I.; Metody podobja i rozmiernosti w mechanikie. Tehteorizdat, Moskwa, 1954.
- [45] Y o k o o K., T a n a k a H.; Application on Wave analysis to tank eksperiment. International Seminar on Wave Resistance, 1976.
- [46] K r ę ż e l e w s k i M., W e ł n i c k i W.; Metody ekstrapolacji wyników badań oporu modelu statku. Prace Badawcze Instytutu Okrętowego, Politechnika Gdańska, Nr 1376/MR-428/80, Gdańsk, 1981.



Cena zł 98,-