

Politechnika Gdańska
Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska
Katedra Hydrotechniki

mgr inż. Wojciech Artichowicz

MODELOWANIE PRZEPŁYWU USTALONEGO
NIEJEDNOSTAJNEGO W KANAŁACH OTWARTYCH

PRACA DOKTORSKA

Promotor: prof. dr hab. inż. Romuald Szymkiewicz

Gdańsk, czerwiec 2012 r.

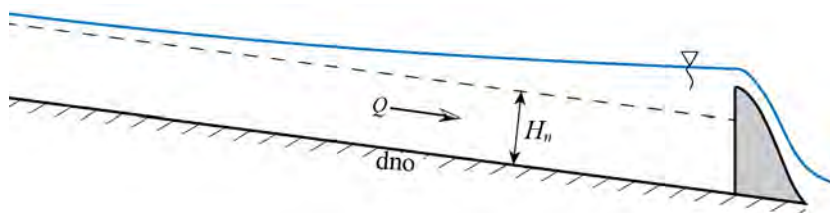
Spis treści

1. Przepływ ustalony niejednostajny - przedstawienie problemu, cel i zakres pracy	1
2. Równania przepływu ustalonego niejednostajnego	8
2.1. Uproszczone równania de Saint-Venanta.....	8
2.2. Różniczkowe równanie energii mechanicznej	10
2.3. Standardowe równanie dla kanału pryzmatycznego	11
2.4. Typy formułowanych zagadnień	15
2.5. Równanie energii mechanicznej jako ogólny model przepływu ustalonego niejednostajnego	20
3. Numeryczne rozwiązanie zagadnienia początkowego różniczkowego równania energii mechanicznej opisującego ustalony przepływ niejednostajny	27
3.1. Ogólna metoda dwupoziomowa.....	28
3.2. Analiza własności funkcji $F(h_i)$	29
3.3. Dyskusja istnienia rozwiązania i jego jednoznaczności.....	40
3.4. Aproksymacja równania energii metodami Rungego-Kutty	43
4. Analiza numerycznego rozwiązania zagadnienia brzegowego różniczkowego równania energii mechanicznej	46
4.1. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego metodą strzału	46
4.2. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego metodą różnicową	50
5. Rozwiązanie równania przepływu ustalonego niejednostajnego w sieciach kanałów otwartych.....	56
6. Weryfikacja rozwiązań numerycznych	74
6.1. Przepływ ustalony niejednostajny w pryzmatycznym kanale prostokątnym	74
6.2. Przepływ ustalony niejednostajny w kanale prostokątnym o zmiennym spadku dna... ..	80
6.3. Wypływ spod zasuwy.....	83
6.3. Przepływ ustalony niejednostajny w kanale o przekroju kołowym	86
6.4. Przepływ ustalony niejednostajny w sieciach kanałów otwartych.....	88
7. Wnioski	93
Symbole użyte w pracy	95
Bibliografia.....	98

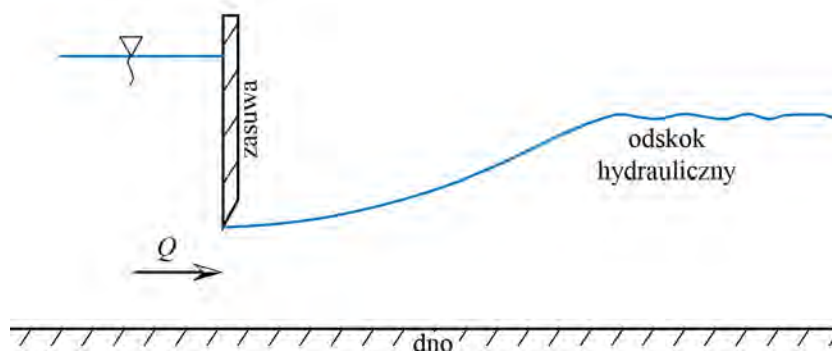
1. Przepływ ustalony niejednostajny - przedstawienie problemu, cel i zakres pracy

W wielu przypadkach spotykanych w praktyce inżynierskiej przepływ w kanałach lub sieciach kanałów otwartych może być traktowany jak przepływ niezmienny w czasie i zmienny w przestrzeni, czyli klasyfikowany jako przepływ ustalony niejednostajny. Przykładami takiego przepływu mogą być:

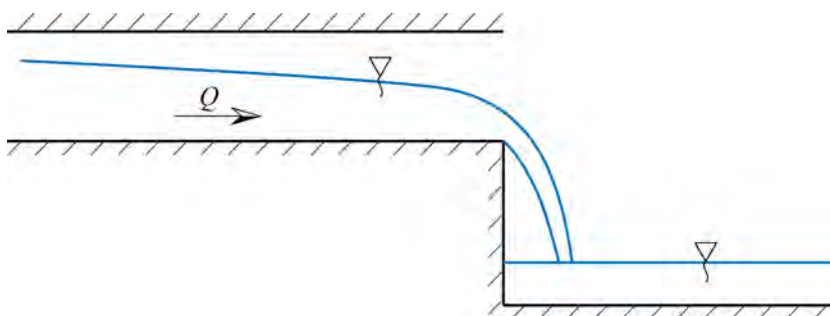
- przepływ w kanale przegrodzonym budowlą piętrzącą (rys. 1.1),
- wypływ spod zasuwy (rys. 1.2),
- przepływ na odcinku wylotowym kolektora ściekowego (rys. 1.3) przy ustalonym w czasie natężeniu przepływu.



Rys. 1.1. Krzywa spiętrzenia (H_n – głębokość normalna).



Rys. 1.2. Wypływ spod zasuwy.

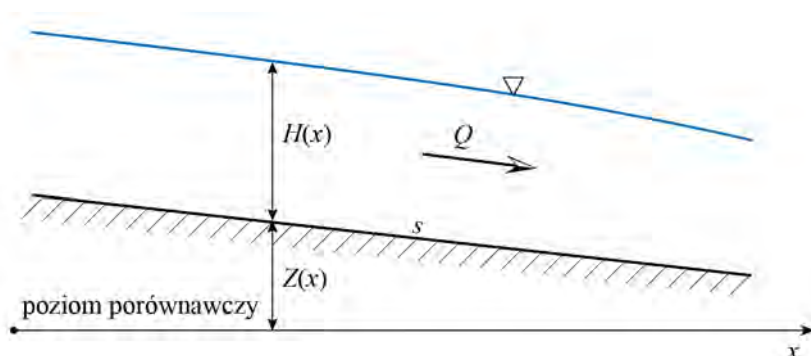


Rys. 1.3. Wylot kolektora ściekowego.

W literaturze poświęconej zagadnieniu modelowania przepływu ustalonego niejednostajnego w kanałach otwartych zauważa się wyraźny podział na metody stosowane w przypadku kanałów pryzmatycznych oraz na metody stosowane w przypadku kanałów naturalnych (Venkataraman et. al., 1982; French, 1985; Chanson, 2004a; Chaudhry, 2008).

Jeśli chodzi o kanały pryzmatyczne, to do wyznaczania układu zwierciadła wody stosuje się następujące równanie (Czetwertyński i Utrysko 1969; French, 1985; Sawicki 1998; Chadwick i Morfett, 1999; Sturm, 2001; Chanson, 2004a; Chaudhry, 2008):

$$\frac{dH}{dx} = \frac{s - S}{1 - \alpha \cdot Fr^2}, \quad (1.1)$$



Rys. 1.4. Schemat odcinka kanału.

gdzie:

H – głębokość,

Z – rzędna dna ponad przyjętym poziomem porównawczym,

x – zmienna przestrzenna,

s – spadek dna kanału,

S – spadek linii energii,

Fr – liczba Froude’a,

α - współczynnik korygujący energię kinetyczną wynikającą z uśrednionej w przekroju prędkości przepływu, wyrażony wzorem (Chaudhry, 2008):

$$\alpha = \frac{\iint_A u^3(x, y, z, t) dA}{U^3 \cdot A}, \quad (1.2)$$

w którym:

A - pole przekroju czynnego,

$u(x, y, z, t)$ - prędkość lokalna w kierunku x w przekroju,

U - prędkość średnia wyrażona wzorem:

$$U(x,t) = \frac{1}{A} \iint u(x,y,z,t) dA = \frac{Q}{A}. \quad (1.3)$$

W powyższym równaniu Q oznacza objętościowe natężenie przepływu.

W przypadku modelowania przepływu ustalonego niejednostajnego w kanałach naturalnych wykorzystywana jest zapisana w dyskretniej postaci zasada zachowania energii mechanicznej (French, 1985; Mays, 1999; Kubrak, 1998) lub równanie Bernoulliego z członem uwzględniającym straty energii (Chanson, 2004a). W obu przypadkach do obliczeń używa się poniższego równania:

$$h_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \Delta x \cdot \bar{S}, \quad (1.4)$$

w którym indeksy 1 i 2 określają odpowiednio początkowy i końcowy przekrój rozpatrywanego odcinka kanału (rys. 1.5), zaś:

α_1, α_2 – współczynniki korekcyjne energii kinetycznej,

U_1, U_2 – prędkości średnie w przekrojach,

h_1, h_2 – rzędne zwierciadła wody,

g – przyspieszenie ziemskie,

Δx – odległość między przekrojami,

$\bar{S}$ – średni spadek linii energii między przekrojami utożsamiany z wysokością strat energii powstałych na skutek tarcia.

Geometryczną interpretację równania przedstawiono na rysunku 1.5. Średni spadek linii energii można określać zgodnie z jednym z poniższych wzorów (Mays, 1999; Chaudhry, 2008):

$$\bar{S} = \left(\frac{Q_1 + Q_2}{K_1 + K_2} \right)^2, \quad (1.5a)$$

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2}{2}, \quad (1.5b)$$

$$\bar{S} = \frac{2 \cdot S_1 \cdot S_2}{S_1 + S_2}, \quad (1.5c)$$

$$\bar{S} = \sqrt{S_1 \cdot S_2}, \quad (1.5d)$$

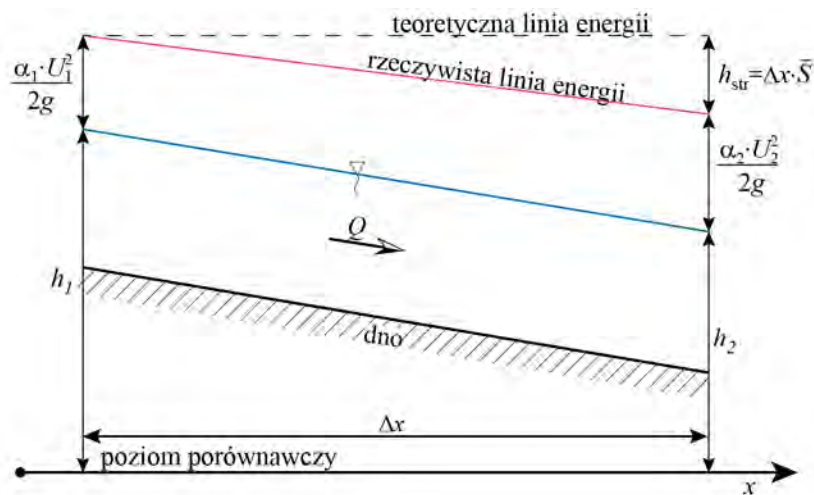
gdzie K oznacza moduł przepływu zależny tylko od geometrii i właściwości hydraulicznych koryta:

$$K = \frac{1}{n} A \cdot R^{2/3}, \quad (1.6)$$

w którym:

n – współczynnik szorstkości wg Manninga,

R – promień hydrauliczny.



Rys. 1.5. Schemat obliczeniowy do równania (1.4) .

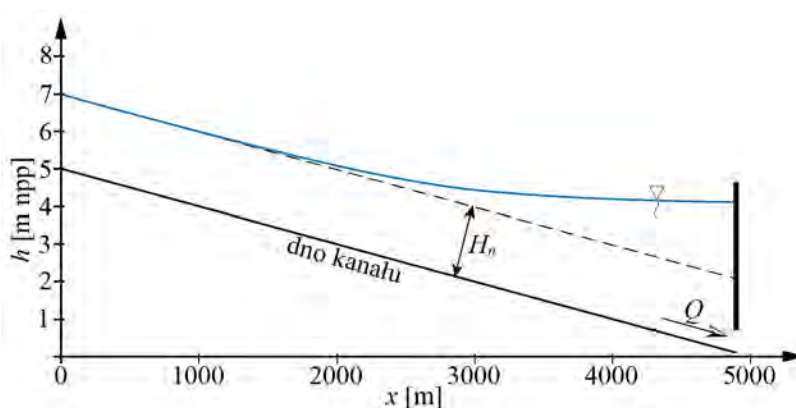
Jak wynika z równań (1.5a)-(1.5d) średni spadek można obliczać jako kwadrat ilorazu sumy wydatków i sumy modułów przepływu oraz jako średnią arytmetyczną, harmoniczną lub geometryczną ze spadków linii energii w przekrojach 1 i 2.

O ile równanie (1.4) można stosować zarówno dla kanałów naturalnych jak i dla kanałów pryzmatycznych, o tyle równanie (1.1) nie może być stosowane dla kanałów naturalnych. Ponadto równanie (1.1) w trakcie rozwiązywania może sprawiać dodatkowe trudności. W sytuacji wystąpienia przepływu krytycznego (lub zbliżonego) mianownik prawej strony równania równy jest zero, przez co staje się ono nieokreślone. Możliwe przyczyny nieokreśloności równania (1.1) wraz z ich interpretacją fizyczną podaje Chanson (2004a):

Tab. 1.1. Przyczyny i interpretacja nieokreśloności równania (1.1) wg. Chansona.

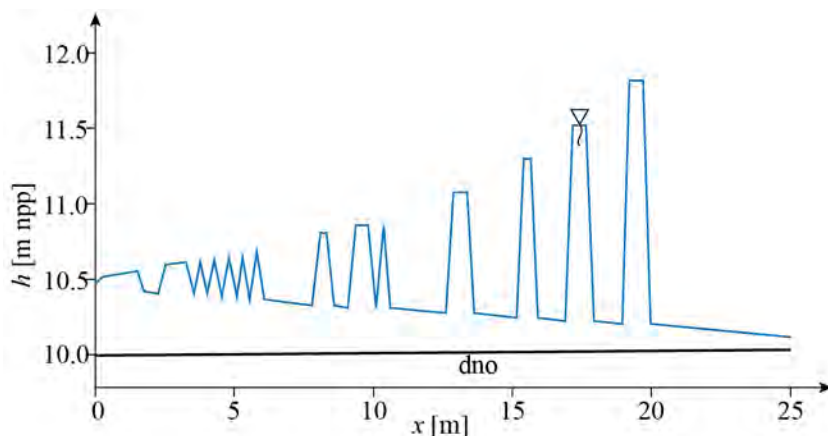
	Przyczyna nieokreśloności równania	Interpretacja fizyczna
1	$\frac{dH}{dx} = 0$	Spadek dna równy jest spadkowi linii energii: $s = S$
2	$Fr = 1$	Spadek dna równy jest spadkowi krytycznemu: $s = s_{kr}$
3	$\frac{dH}{dx} = 0$ oraz $Fr = 1$	Wystąpienie obu wyżej wymienionych przypadków: $s = S$ i $s = s_{kr}$

Równanie (1.4) umożliwia wyznaczenie układu zwierciadła wody w kanale o dowolnej geometrii, w tym w kanale pryzmatycznym. Przykład obliczonej krzywej spiętrzenia w kanale prostokątnym przedstawiono na rysunku 1.6. W trakcie rozwiązywania tego przykładu nie wystąpiły żadne problemy natury numerycznej. Obliczone głębokości zmieniają się w sposób ciągły od zadanej w przekroju budowli piętrzącej do głębokości normalnej H_n . Jednak przy próbie obliczenia układu zwierciadła wody powstającego przy wypływie spod zasuwy pojawiają się trudności. Ich charakter ilustruje rysunek 1.7. Jak widać otrzymane rozwiązanie zdecydowanie odbiega od oczekiwanego. Chociaż w trakcie obliczeń nie wystąpiły żadne problemy natury numerycznej to jest ono niepoprawne z punktu widzenia fizyki zjawiska. Fakt ten sugeruje istnienie pewnych właściwości rozwiązywanego równania (1.4) ujawniających swoją obecność w szczególnych przypadkach.



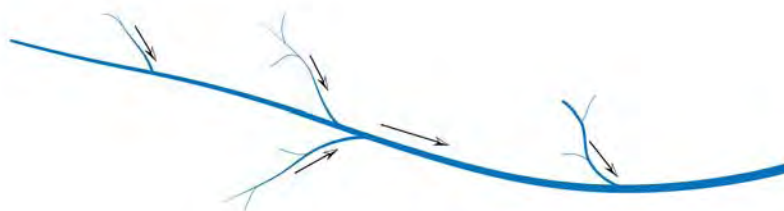
Rys. 1.6. Krzywa spiętrzenia (H_n – głębokość normalna).

Zastosowana powyżej metoda obliczania układu zwierciadła wody bazująca na równaniu (1.4) w literaturze anglosaskiej funkcjonuje pod nazwą „the standard step method” (Chow 1959; French, 1985).

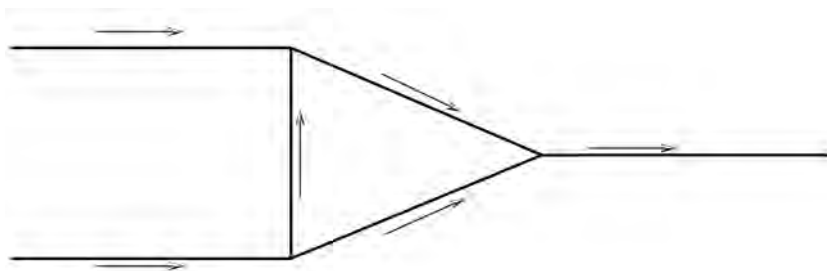


Rys. 1.7. Obliczony układ zwierciadła wody wypływającej spod zasuw.

Oprócz kanałów pojedynczych przepływ ustalony niejednostajny występuje powszechnie również w sieciach kanałów otwartych, zarówno naturalnych (rys. 1.8) jak i sztucznych (rys. 1.9).



Rys. 1.8. Sieć kanałów naturalnych (przykład sieci dendrycznej).



Rys. 1.9. Sieć kanałów sztucznych (przykład sieci pierścieniowej).

Przepływ tego typu spotykamy w systemach rzecznych, kanalizacyjnych oraz w sieciach kanałów odwadniających lub nawadniających. Mimo istotnego znaczenia praktycznego tego zagadnienia, jak dotąd nie istnieje jednolita i spójna metodologia rozwiązywania tego problemu. W literaturze można znaleźć wiele różnych propozycji algorytmów wyznaczania układu zwierciadła wody w sieciach kanałów. Możliwości praktycznego zastosowania tych metod są ograniczone. Z tego powodu ich zastosowanie jest możliwe tylko w przypadkach szczególnych, np. jedynie w sieciach dendrycznych (rys. 1.8).

Z drugiej strony, proponowane algorytmy obliczeniowe są zwykle skomplikowane i trudne w implementacji. Należy zauważyć, że bardzo często parametry przepływu ustalonego wyznacza się rozwiązując równania przepływu nieustalonego z ustalonymi w czasie warunkami brzegowymi (Cunge, Holly i Verwey, 1979).

Biorąc pod uwagę trudności i problemy występujące w trakcie rozwiązywania różnych przypadków przepływu ustalonego niejednostajnego, naturalnym wydaje się pytanie o możliwość opracowania jednolitego, w miarę ogólnego i wolnego od ograniczeń podejścia do rozwiązywania zagadnienia przepływu ustalonego niejednostajnego zarówno w naturalnych jak i sztucznych kanałach pojedynczych oraz w sieciach kanałów. Wydaje się, że opracowanie takiego ujednoliconego podejścia jest możliwe. W rzeczywistości bowiem podział metod obliczeniowych w zależności od rodzaju kanału wydaje się być sztucznym.

Opracowanie ujednoliconego podejścia wymaga rozstrzygnięcia dwóch kwestii:

- które z możliwych równań należy przyjąć za podstawowe?
- jakie metody numeryczne należy stosować do jego rozwiązania?

Ważnym aspektem problemu jest proces numerycznego rozwiązania równania przepływu. Szymkiewicz (2010) wykazał, iż dyskretna postać równania energii może mieć więcej niż jeden pierwiastek. W związku z tym pojawia się kwestia wyboru właściwego pierwiastka. Istotne jest także wyjaśnienie związku pomiędzy liczbą i położeniem pierwiastków a zastosowaną metodą aproksymacji równań.

Celem niniejszej pracy doktorskiej jest opracowanie propozycji jednolitego podejścia do modelowania przepływu ustalonego niejednostajnego w kanałach otwartych. Realizując powyższy cel:

- wykonano analizę możliwych modeli matematycznych opisujących ruch ustalony niejednostajny w kanałach otwartych,
- zaproponowano jednolite podejście do rozwiązywania zagadnień formułowanych dla kanałów pojedynczych i sieci kanałów otwartych,
- przeprowadzono dyskusję różnych aspektów numerycznego rozwiązywania równań wybranymi metodami,
- wykonano stanowiska laboratoryjne i przeprowadzono eksperymenty,
- skonfrontowano wyniki obliczeń z wynikami eksperymentów.

Wszystkie obliczenia wykonano własnymi programami opracowanymi w języku Scilab.

2. Równania przepływu ustalonego niejednostajnego

Opracowanie jednolitej metodologii obliczeń układu zwierciadła wody w kanałach otwartych wymaga wyjścia od ogólnych równań opisujących przepływ nieustalony. Modelem opisującym nieustalony ruch cieczy w kanałach otwartych jest układ równań de Saint-Venanta składający się z równania ciągłości oraz równania dynamicznego. Równania te można wyprowadzić z równań Naviera-Stokesa z uwzględnieniem uśrednienia Reynoldsa (French, 1985; Kubrak, 1998; Sawicki 1998; Szymkiewicz, 2000).

2.1. Uprozczone równania de Saint-Venanta

W roku 1871 Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant wyprowadził równania przepływu nieustalonego w kanałach otwartych. Zakładając, że:

- ruch wody w kanale jest wolnozmienny,
- przepływ jest jednowymiarowy,
- rozkład ciśnienia w przekroju jest hydrostatyczny,
- jedyną siłą masową jest siła ciężkości,
- spadek dna kanału jest na tyle mały, iż różnica między głębokością mierzoną wzdłuż osi pionowej układu odniesienia, a głębokością mierzoną prostopadle do dna jest nieznaczna,
- rozkład prędkości w pionie jest jednostajny,
- opory ruchu obliczane są jak dla przepływu ustalonego jednostajnego,
- uwzględnia się dopływ boczny w równaniu ciągłości lecz pomija się jego wpływ na dynamikę przepływu

zapropował on układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych I rzędu w postaci równania ciągłości i równania dynamicznego. Układ ten nazywa się zwykle układem równań de Saint-Venanta.

W układzie równań de Saint-Venanta mogą występować różne kombinacje zmiennych zależnych. Ich zestawienie podaje na przykład Chanson (2004a). Ponieważ wybór zestawu zmiennych zależnych w równaniach decyduje o możliwości jego zapisu w formie zachowawczej lub niezachowawczej w dalszej części pracy jako zmienne zależne

przyjmuje się natężenie przepływu i rzędną zwierciadła wody. Użycie tych zmiennych umożliwia zapisanie równań w następującej formie zachowawczej:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta \cdot Q^2}{A} \right) + g \cdot A \frac{\partial h}{\partial x} = -g \cdot A \cdot S. \quad (2.2)$$

gdzie:

t – czas,

q – dopływ boczny,

β – współczynnik korekcyjny pędu zdefiniowany wzorem:

$$\beta = \frac{\iint_A u^2(x, y, z, t) dA}{U^2 \cdot A}. \quad (2.3)$$

Współczynnik β koryguje błąd wielkości pędu spowodowany wprowadzeniem prędkości średniej. Określa on stosunek pędu strumienia przy rzeczywistym rozkładzie prędkości do pędu przy uśrednionej prędkości. Dyskusję na temat jego roli podają m.in. Chanson (2004a) oraz Sturm (2001).

Spadek linii energii w równaniu (2.2) można wyrazić przy pomocy formuły:

$$S = \frac{Q^2 \cdot n^2}{R^{4/3} \cdot A^2} \quad (2.4)$$

wynikającej ze wzoru Manninga.

W przypadku, gdy rozważany przepływ jest ustalony w czasie, w równaniach (2.1) i (2.2) pochodne względem czasu są równe zero:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

W konsekwencji układ (2.1) i (2.2) przyjmie prostszą formę:

$$\frac{dQ}{dx} = q, \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\beta \cdot Q^2}{A} \right) + g \cdot A \frac{dh}{dx} = -g \cdot A \cdot S. \quad (2.6)$$

Otrzymane równania stanowią układ równań różniczkowych zwyczajnych, ponieważ po eliminacji czasu występujące w nich zmienne są funkcjami jedynie położenia. Równania (2.5) i (2.6) opisują ustalony przepływ niejednostajny w dowolnym kanale. Można przypuszczać, że ich rozwiązanie będzie tożsame z rozwiązaniem równań de Saint-Venanta (2.1) i (2.2) przy ustalonych w czasie warunkach brzegowych.

2.2. Różniczkowe równanie energii mechanicznej

Układ równań (2.5) i (2.6) można przekształcić do innej postaci. W tym celu równanie (2.6) dzielimy przez $g \cdot A$:

$$\frac{1}{gA} \frac{d}{dx} \left(\frac{\beta \cdot Q^2}{A} \right) + \frac{dh}{dx} = -S. \quad (2.7)$$

Ponieważ:

$$\frac{1}{g \cdot A} \frac{d}{dx} \left(\frac{\beta \cdot Q^2}{A} \right) = \frac{1}{g} \frac{\beta}{A} \frac{d}{dx} (Q \cdot U) = \frac{1}{g} \frac{\beta}{A} \left(U \frac{dQ}{dx} + Q \frac{dU}{dx} \right) \quad (2.8)$$

równanie (2.7) przyjmie postać:

$$\frac{\beta}{g} \frac{U}{A} \frac{dQ}{dx} + \frac{\beta}{g} \frac{Q}{A} \frac{dU}{dx} + \frac{dh}{dx} = -S. \quad (2.9)$$

Po uwzględnieniu uproszczonego równania ciągłości (2.5) otrzymujemy zależność:

$$\frac{\beta}{g} \frac{U}{A} q + \frac{\beta}{g} \frac{Q}{A} \frac{dU}{dx} + \frac{dh}{dx} = -S, \quad (2.10)$$

z której po uporządkowaniu wynika równanie:

$$\frac{d}{dx} \left(h + \frac{\beta \cdot Q^2}{2g \cdot A^2} \right) = -S - \frac{\beta \cdot Q}{g \cdot A^2} q. \quad (2.11)$$

Można zauważyć, że wyjściowe równanie dynamiczne (2.6) reprezentujące zasadę zachowania pędu, po zastosowanych przekształceniach reprezentuje zasadę zachowania

energii mechanicznej. W związku z tym współczynnik korekcyjny pędu β należy zastąpić współczynnikiem korekcyjnym energii kinetycznej α . Ostatecznie wyjściowe równanie (2.6) przyjmie postać:

$$\frac{d}{dx} \left(h + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A^2} \right) = -S - \frac{\alpha \cdot Q}{g \cdot A^2} q, \quad (2.12)$$

w którym współczynnik α zdefiniowany jest zależnością (1.2).

Jeśli do równania (2.12) wprowadzimy wyrażenie:

$$E = h + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A^2} \quad (2.13)$$

reprezentujące wysokość energii mechanicznej, to układ równań opisujących ustalony przepływ niejednostajny (równania (2.5) i (2.12)) przyjmie postać:

$$\frac{dQ}{dx} = q, \quad (2.14)$$

$$\frac{dE}{dx} = -S - \frac{\alpha \cdot Q}{g \cdot A^2} q, \quad (2.15)$$

2.3. Standardowe równanie dla kanału pryzmatycznego

W przypadku kanału pryzmatycznego zależność (2.12) można poddać przekształceniom prowadzącym do znanej standardowej w hydraulice koryt otwartych postaci. W tym celu rzędną zwierciadła wody wyraża się poprzez głębokość strumienia H i rzędną dna Z : $h = H + Z$. Różniczkując zależność (2.13) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dx} \left(h + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A^2} \right) = \frac{d}{dx} \left(H + Z + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A^2} \right) = \frac{dH}{dx} + \frac{dZ}{dx} + \frac{\alpha \cdot Q}{g \cdot A^2} q - \frac{\alpha \cdot Q^2}{g \cdot A^3} \frac{dA}{dx}. \quad (2.16)$$

Ponieważ powierzchnia przekroju A jest funkcją głębokości, a ta z kolei jest funkcją położenia, zatem można zapisać:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{dH} \frac{dH}{dx} = B \frac{dH}{dx}, \quad (2.17)$$

gdzie B jest szerokością kanału na poziomie zwierciadła wody. Wstawiając (2.17) do równania (2.16) otrzymujemy zależność:

$$\frac{dH}{dx} + \frac{dZ}{dx} + \frac{\alpha \cdot Q}{g \cdot A^2} q - \frac{\alpha \cdot Q^2}{g \cdot A^3} B \frac{dH}{dx} = -S - \frac{\alpha \cdot Q}{g \cdot A^2} q, \quad (2.18)$$

która po uporządkowaniu prowadzi do równania o postaci:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{-\frac{dZ}{dx} - S - 2 \frac{\alpha \cdot Q}{g \cdot A^2} q}{\left(1 - \frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot B}{g \cdot A^3}\right)}. \quad (2.19)$$

Wprowadzenie definicji podłużnego spadku dna kanału

$$s = -\frac{dZ}{dx} \quad (2.20)$$

umożliwia zapisanie równania (2.19) w następującej postaci:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{s - S - 2 \frac{\alpha \cdot Q}{g \cdot A^2} q}{1 - \frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot B}{g \cdot A^3}}. \quad (2.21)$$

Do równania (2.21) wprowadźmy liczbę Froude'a zdefiniowaną wzorem (Chanson, 2004a):

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{g \cdot H}}. \quad (2.22)$$

Równanie (2.21) przyjmie wówczas następującą postać

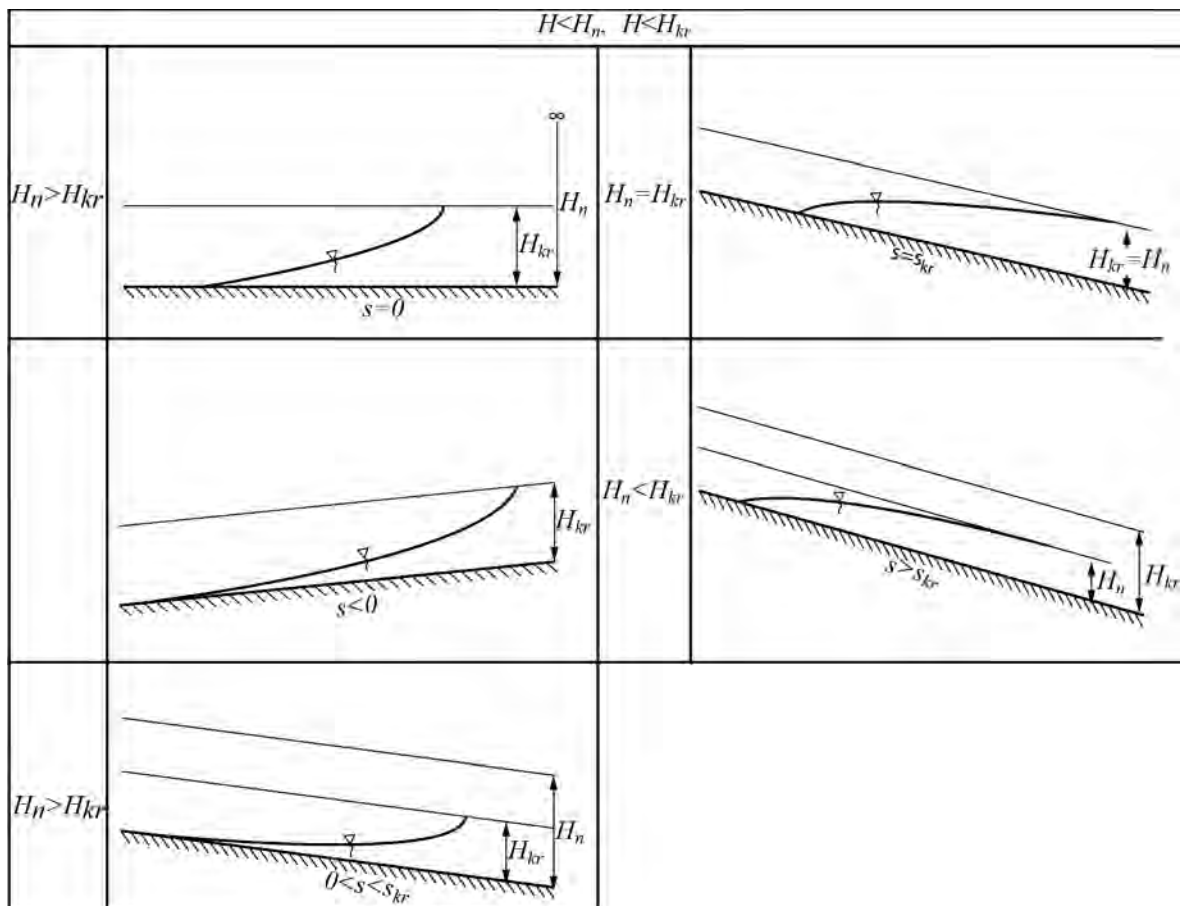
$$\frac{dH}{dx} = \frac{s - S - 2 \frac{\alpha \cdot Q}{g \cdot A^2} q}{1 - \alpha \cdot Fr^2}. \quad (2.23)$$

Opisuje ono układ zwierciadła wody w kanale pryzmatycznym z uwzględnieniem dopływu bocznego q . W przypadku, gdy dopływ boczny nie występuje, czyli $q=0$, równanie (2.23) upraszcza się do postaci klasycznej:

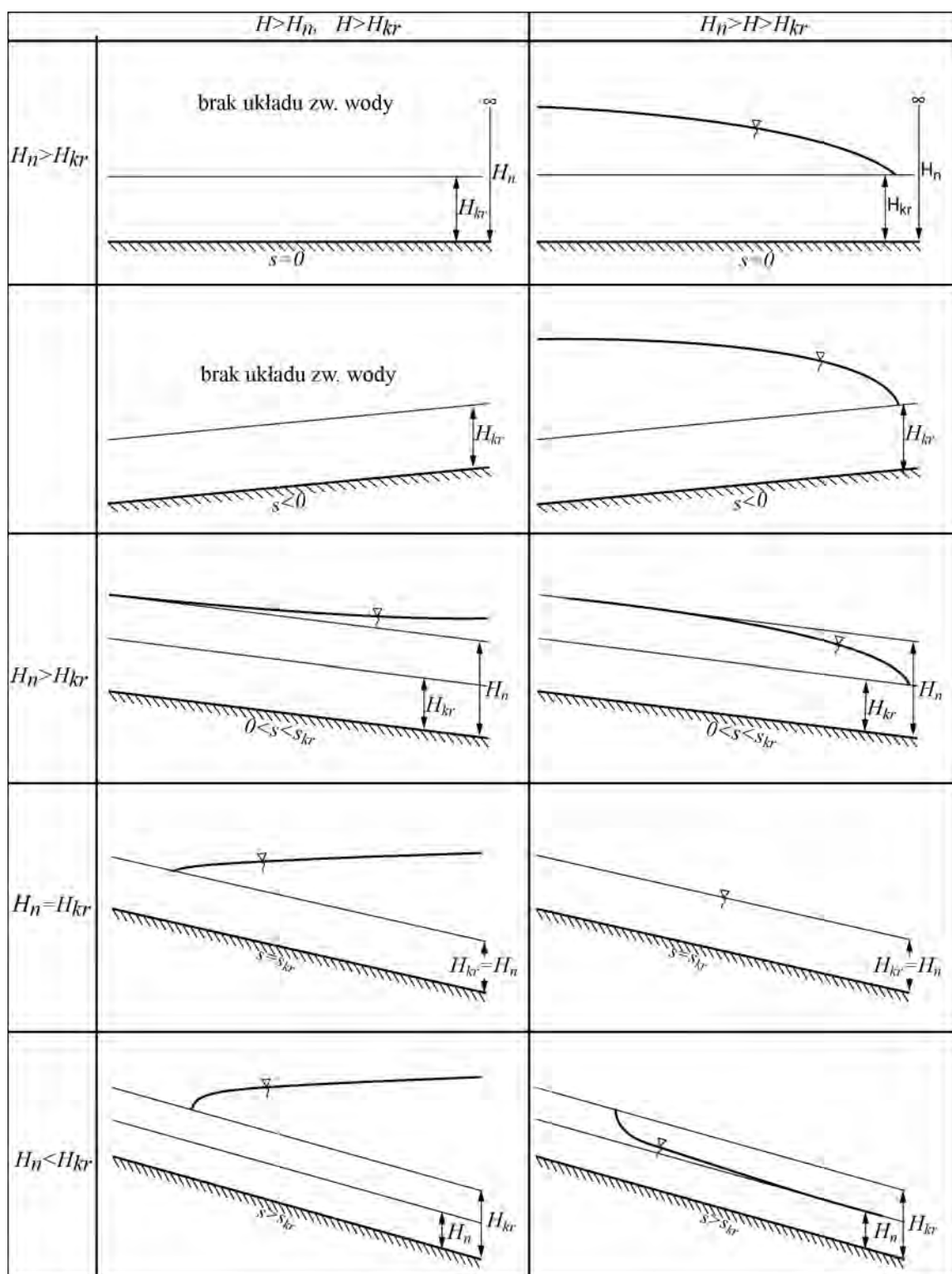
$$\frac{dH}{dx} = \frac{s - S}{1 - \alpha \cdot Fr^2}. \quad (2.24)$$

Jest to dobrze znane równanie opisujące układ zwierciadła wody w kanale pryzmatycznym. Równanie, które wyprowadzono tutaj z ogólnych równań przepływu nieustalonego, zwykle wyprowadzane jest w inny sposób (Czetweryński i Utrysko, 1969).

Równanie (2.24) jest podstawą analizy charakterystycznych przypadków układu zwierciadła wody w zależności od warunków w jakich odbywa się przepływ. Przykłady wyników tej analizy podają np. Chow (1959), French (1985), Kubrak (1998), Chanson (2004a). Niektóre typowe układy zwierciadła wody wynikające z równania (2.24) przedstawiono na rysunkach 2.1a i 2.1b. Należy pamiętać, że wyniki zamieszczone na rysunkach mają raczej jakościowy charakter.



Rys. 2.1a. Układ zwierciadła wody w zależności od warunków przepływu.



Rys. 2.1b. Układ zwierciadła wody w zależności od warunków przepływu.

Na przedstawionych rysunkach H jest głębokością wody, H_n , H_{kr} odpowiednio głębokością normalną i krytyczną, s oznacza spadek dna, a s_{kr} krytyczny spadek dna, czyli takie nachylenie dna kanału, przy którym ukształtowałby się przepływ krytyczny. Wówczas energia przepływu byłaby minimalna (Kubrak, 1998).

2.4. Typy formułowanych zagadnień

Rozpatrzmy problem rozwiązania układu równań (2.14) i (2.15):

$$\frac{dQ}{dx} = q, \quad (2.25)$$

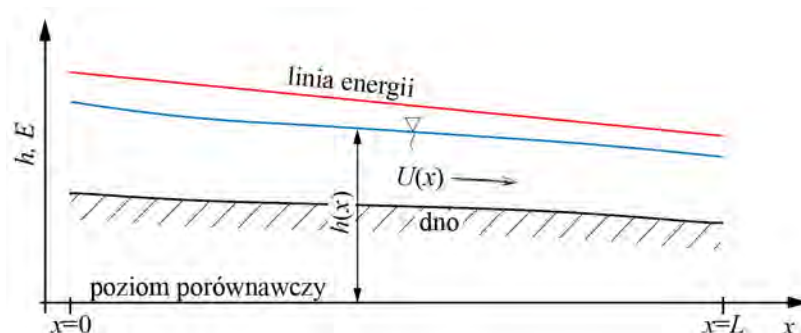
$$\frac{d}{dx} \left(h + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A^2} \right) = -S - \frac{\alpha \cdot Q}{g \cdot A^2} q, \quad (2.26)$$

Powyższe równania tworzą układ równań różniczkowych zwyczajnych. Problem ich rozwiązania można sformułować dwojako. Zależnie od konkretnej sytuacji dla równań (2.25) i (2.26) można sformułować albo zagadnienie początkowe albo zagadnienie brzegowe.

Założmy, że znane jest natężenie przepływu w przekroju początkowym oraz dopływ boczny. W takiej sytuacji rozwiązanie równania (2.25) ma postać:

$$Q(x) = Q_0 + \int_0^x q(X) dX, \quad (2.27)$$

gdzie X jest zmienną całkowania, zaś Q_0 jest natężeniem przepływu w przekroju początkowym $x=0$. Znając natężenie przepływu wzdłuż osi kanału $Q(x)$, układ zwierciadła wody otrzymamy rozwiązując równanie (2.26). W tym celu formułuje się tzw. zagadnienie początkowe, dla którego dziedziną rozwiązania jest odcinek kanału o długości L (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Obszar rozwiązania równań opisujących przepływ ustalony niejednostajny.

Zagadnienie początkowe równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.28)$$

ma następującą postać (Dziubiński i Świątkowski, 1985): poszukuje się funkcji, która w dziedzinie rozwiązania spełnia równanie (2.28) oraz dodatkowy warunek, nazywany warunkiem początkowym: $y(x_0)=y_0$.

Istnienia rozwiązania dowodzi twierdzenie Cauchy'ego o istnieniu całki (Bronsztejn, Siemiendiajew, 1968): *Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w otoczeniu punktu (x_0,y_0) , tzn. w obszarze $|x-x_0|<a$ i $|y-y_0|<b$ to istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie równania (2.28).* Jednoznaczność rozwiązania w obszarze $|x-x_0|<a$ i $|y-y_0|<b$ wynika ze spełnienia nierówności Lipschitza (Bronsztejn i Siemiendiajew, 1968; Kincaid i Cheney, 2002). Jeżeli istnieje takie L , że zachodzi:

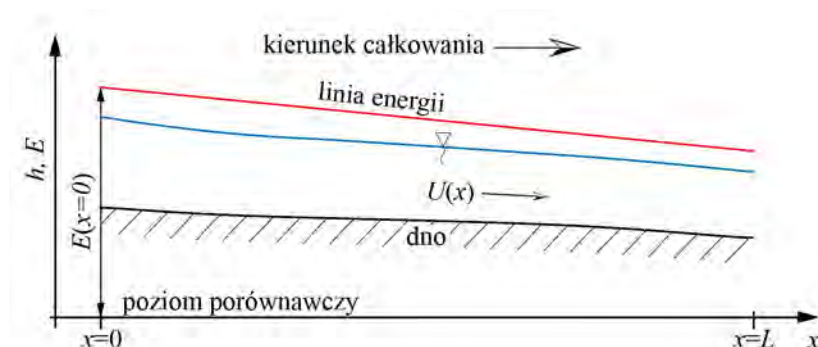
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad (2.29)$$

wówczas rozwiązanie zagadnienia jest jedyne i jest funkcją ciągłą względem y_0 .

Poprawne postawienie zagadnienia początkowego równania (2.26) wymaga zadania dodatkowego warunku na jednym z krańców dziedziny rozwiązania, co w praktyce oznacza zadanie natężenia przepływu i rzędnej zwierciadła wody na początku lub na końcu kanału. Warunek początkowy zadany w początkowym przekroju kanału będzie miał poniższą postać:

$$E_{x=0} = h_{x=0} + \frac{\alpha \cdot Q_{x=0}^2}{2g \cdot A_{x=0}^2}. \quad (2.30)$$

Umieszczenie tego warunku w obszarze rozwiązania zaznaczono na rysunku 2.3.

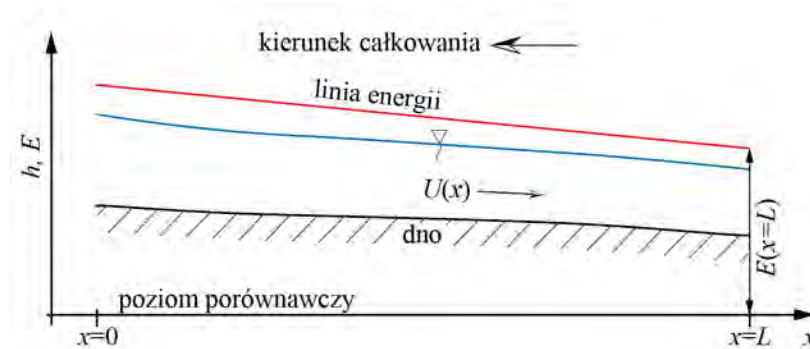


Rys. 2.3. Warunek początkowy zadany na początku kanału.

Warunek początkowy zadany na końcu obszaru rozwiązania będzie miał postać analogiczną do (2.30):

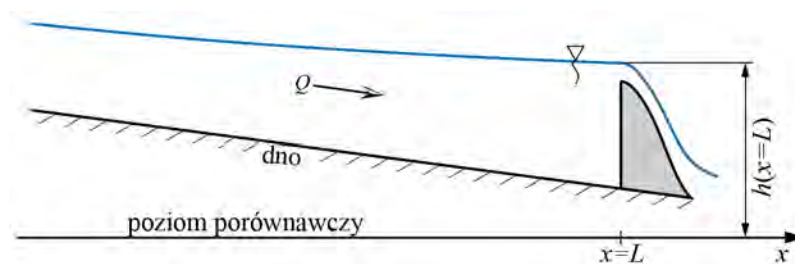
$$E_{x=L} = h_{x=L} + \frac{\alpha \cdot Q_{x=L}^2}{2g \cdot A_{x=L}^2}. \quad (2.31)$$

Umieszczenie warunku (2.31) przedstawia rysunek 2.4.

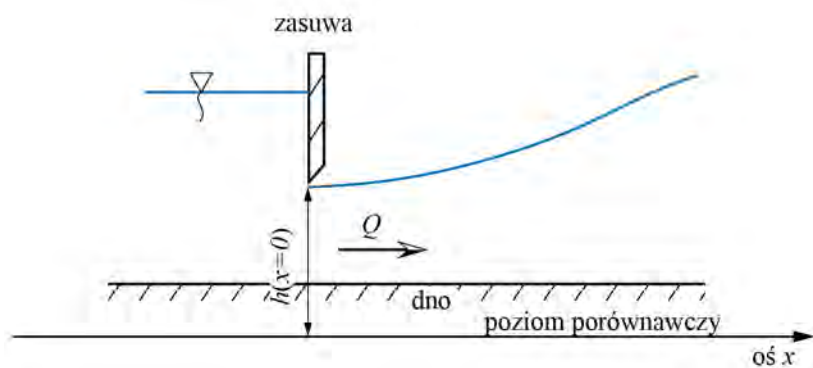


Rys. 2.4. Warunek początkowy zadany na końcu kanału.

Kierunek całkowania równania (2.26) oraz miejsce zadania warunku początkowego określone jest zwykle przez praktyczną możliwość uzyskania wymaganej informacji oraz przez czynniki determinujące układ zwierciadła wody (Chanson, 2004b). Przykładowo do określenia krzywej spiętrzenia miejscem, w którym należy zadać warunek początkowy jest przekrój zapory, co przedstawiono na rysunku 2.5. Natomiast rysunek 2.6 przedstawia miejsce zadania warunku początkowego przy obliczaniu układu zwierciadła wody przy wypływie spod zasuwy.



Rys. 2.5. Miejsce zadania warunku początkowego w przypadku kanału przegrodzonego budowlą piętrzącą.



Rys. 2.6. Miejsce zadania warunku początkowego przy wypływie spod zasuwy.

Rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest więc krzywa $h(x)$, która przechodzi przez punkt o zadanych współrzędnych $(x_0, h(x_0))$ lub $(x_L, h(x_L))$.

Drugim typem zagadnienia formułowanego dla równań różniczkowych zwyczajnych jest zagadnienie brzegowe. Zagadnienie to można formułować dla równania różniczkowego zwyczajnego rzędu wyższego niż 1, bądź dla układu równań różniczkowych I rzędu. Ponieważ każde równanie rzędu N można zastąpić równoważnym układem N równań I rzędu wystarczy rozpatrzyć tylko problem rozwiązania zagadnienia brzegowego dla układu równań.

Zagadnienie brzegowe dla układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu w przedziale $\langle a, b \rangle$ ma następującą postać:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad (2.32)$$

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a, \quad \mathbf{y}(b) = \mathbf{y}_b, \quad (2.33a,b)$$

gdzie:

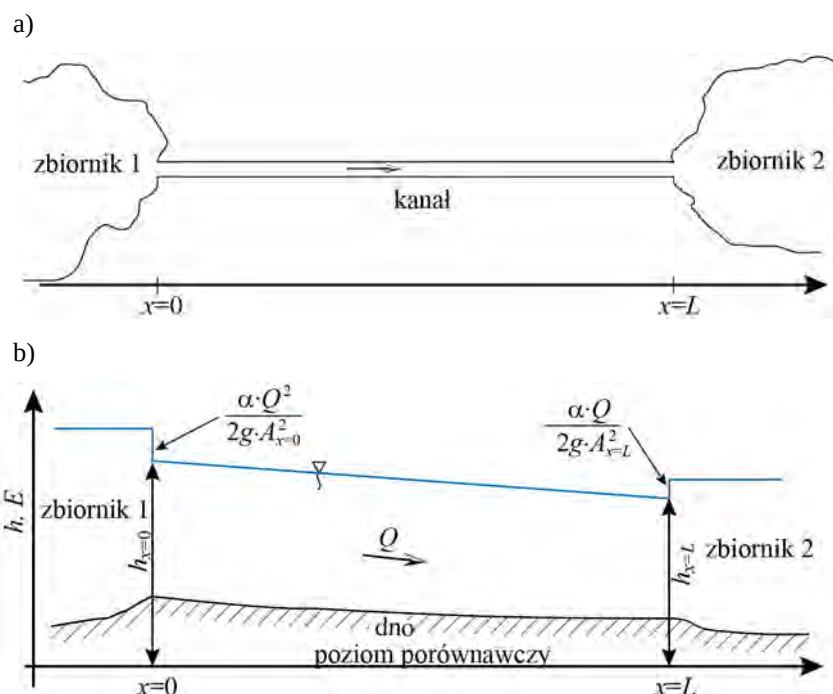
$\mathbf{y}'$ - wektor pochodnych funkcji $\mathbf{y}$,

$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$ - wektor funkcyjny,

$\mathbf{y}_a, \mathbf{y}_b$ - wektory wartości funkcji $\mathbf{y}$ na początku i końcu obszaru rozwiązania.

Poszukiwane rozwiązanie zagadnienia brzegowego musi spełniać równanie (2.32) oraz warunki (2.33a) i (2.33b) zadane na krańcach dziedziny rozwiązania. O ile rozwiązanie zagadnienia początkowego dla równań różniczkowych zwyczajnych udaje się uzyskać prawie zawsze, to w przypadku zagadnienia brzegowego znalezienie rozwiązania może być niemożliwe.

Jeśli chodzi o przepływy w kanałach otwartych to zagadnienie brzegowe dla równań (2.25) i (2.26) formułuje się wówczas, gdy oprócz wyznaczenia układu zwierciadła wody konieczne jest obliczenie wartości natężenia przepływu lub współczynnika szorstkości. W przypadku zagadnienia brzegowego, poszukuje się takiej funkcji, która spełnia zarówno równania jak i dodatkowe warunki zadane na obu brzegach dziedziny rozwiązania. Oznacza to, że poszukiwany jest taki układ zwierciadła wody, przy którym spełnione są oba warunki (2.30) i (2.31) oraz spełnione są równania (2.25) i (2.26). Przykładem zagadnienia brzegowego jest problem wyznaczenia układu zwierciadła wody w kanale łączącym dwa zbiorniki o stałych poziomach wody (rys. 2.7). Miejsce zadania warunków brzegowych dla tych równań przedstawiono na rysunku 2.7b.



Rys. 2.7. Kanał łączący dwa zbiorniki: a) widok z góry, b) przekrój wzdłuż osi kanału.

Jeśli w równaniu różniczkowym zwyczajnym I rzędu występuje parametr σ , to możliwe jest sformułowanie zagadnienia brzegowego dzięki możliwości wprowadzenia dodatkowego równania różniczkowego związanego z tym parametrem (Ascher i Petzold, 1998). Można założyć, że w rozpatrywanej dziedzinie parametr ten zachowuje stałą wartość, czyli:

$$\frac{d\sigma}{dx} = 0, \quad (2.34)$$

gdzie σ jest parametrem o nieznanej wartości. Dzięki takiemu postępowaniu możliwe staje się sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia brzegowego dla układu równań, składającego się z równania wyjściowego I rzędu oraz z dodatkowego równania umożliwiającego wyznaczenie poszukiwanej wartości parametru. W przypadku przepływu w kanale otwartym sytuacja taka wystąpi, gdy oprócz układu zwierciadła wody nieznane jest natężenie przepływu w kanale Q lub współczynnik szorstkości kanału n .

2.5. Równanie energii mechanicznej jako ogólny model przepływu ustalonego niejednostajnego

Aby rozwiązać zagadnienie początkowe dla któregośkolwiek z przedstawionych układów równań opisujących przepływ ustalony niejednostajny należy posłużyć się metodami przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. W praktyce najczęściej stosowane są metody jednokrokowe, gdyż nie wymagają one stosowania stałego kroku całkowania. Jest to istotna zaleta, gdyż w ciekach naturalnych uzyskanie danych opisujących geometrię koryta w równych odstępach wzdłuż osi kanału jest niemożliwe. Chow (1959), French (1985) oraz Chanson (2004a) opisują standardową metodę krokową (*the standard step method*), która jak się okazuje jest tożsama z rozwiązaniem równania różniczkowego (2.26) niejawną metodą trapezową (Szymkiewicz, 2010). Jak wynika z przeglądu literatury, do rozwiązania równań przepływu ustalonego niejednostajnego często stosowana jest również jawna metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego (Misra, 1998; Szymkiewicz, 2000). Ponieważ bez względu na to, czy do dyskretyzacji równania (2.26) zastosowane zostaną metody jawne czy niejawne, w każdym kroku obliczeń konieczne jest rozwiązanie algebraicznego równania nieliniowego. Zatem ze względów praktycznych korzystniej jest stosować metody niejawne. Umożliwiają one osiągnięcie lepszej dokładności obliczeń, a ze względu na charakter równań opisujących przepływ ustalony niejednostajny, nie powodują zwiększenia kosztu obliczeń.

Rozwiążmy kolejno trzy wcześniej przedstawione równania opisujące przepływ ustalony niejednostajny, tzn.: równanie dynamiczne (2.6), równanie energii w postaci (2.24) oraz równanie (2.26). Do rozwiązania zastosujemy niejawny schemat trapezowy (Ascher i Petzold, 1998):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})), \quad (2.35)$$

w którym i oznacza indeks przekroju obliczeniowego, a Δx jest krokiem całkowania.

Rozpatrzmy równania de Saint-Venanta w warunkach przepływu ustalonego. Zakładając, że natężenie przepływu Q oraz współczynnik korekcyjny pędu β nie zmieniają się wzdłuż osi kanału, równanie dynamiczne (2.6) można zapisać następująco:

$$\frac{\beta \cdot Q^2}{g \cdot A} \cdot \frac{dA^{-1}}{dx} + \frac{dh}{dx} = -S. \quad (2.36)$$

Aproksymację powyższego równania wykonamy schematem trapezowym niejawnym, zapisanym w postaci formuły równoważnej do (2.35):

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2}. \quad (2.37)$$

W rezultacie otrzymuje się różnicową postać równania dynamicznego:

$$\frac{\beta \cdot Q^2}{g \cdot \frac{1}{2}(A_i + A_{i+1})} \cdot \frac{A_{i+1}^{-1} - A_i^{-1}}{\Delta x} + \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} = -\frac{1}{2}(S_i + S_{i+1}), \quad (2.38)$$

które po uporządkowaniu przyjmie formę:

$$\frac{2\beta \cdot Q^2}{g(A_{i+1} + A_i)} \left(\frac{1}{A_{i+1}} - \frac{1}{A_i} \right) + h_{i+1} - h_i + \frac{\Delta x}{2}(S_i + S_{i+1}) = 0. \quad (2.39)$$

W równaniu (2.39) jedyną niewiadomą jest rzędna zwierciadła wody h_{i+1} więc rozwiązanie można uzyskać bez potrzeby formułowania układu równań, jak to ma miejsce w przypadku rozwiązywania układu równań de Saint-Venanta. Informację umożliwiającą rozpoczęcie obliczeń dostarcza warunek początkowy (2.30) lub (2.31). Równanie (2.39) jest nieliniowe względem h_{i+1} w związku z czym, do jego rozwiązywania konieczne jest stosowanie metod przybliżonego poszukiwania pierwiastków równań nieliniowych, takich jak metoda Newtona, metoda bisekcji, itp.

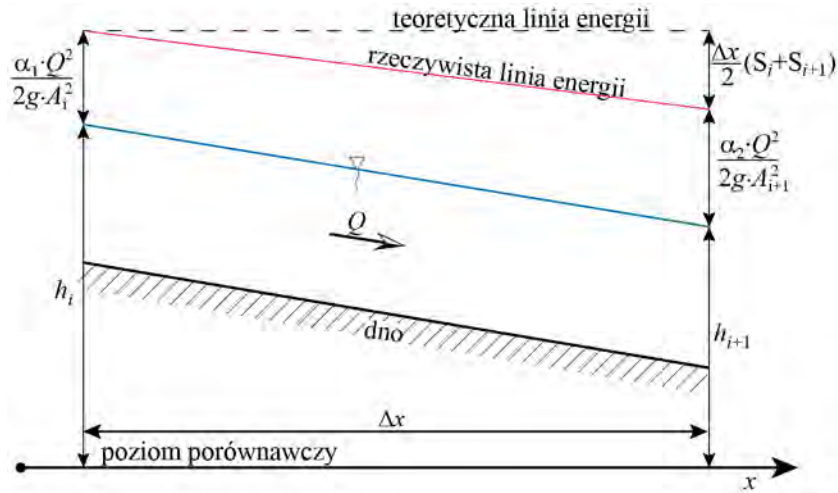
W przypadku, gdy całkowanie odbywa się zgodnie z kierunkiem przepływu, we wzorach różnicowych szukaną jest rzędna zwierciadła wody indeksowana jako $i+1$. Natomiast, gdy całkowanie odbywa się w kierunku przeciwnym do przepływu wody, szukane są wartości z indeksem i .

Jeśli chodzi o rozwiązanie zagadnienia początkowego równania energii mechanicznej to dla uproszczenia rozważań założmy, że dopływ boczny nie występuje. W takiej sytuacji

aproxymacja równania (2.26) metodą trapezową niejawną prowadzi do poniższej zależności:

$$h_{i+1} + \frac{\alpha_{i+1} \cdot Q^2}{2g \cdot A_{i+1}^2} = h_i + \frac{\alpha_i \cdot Q^2}{2g \cdot A_i^2} - \frac{\Delta x}{2}(S_i + S_{i+1}). \quad (2.40)$$

Jej graficzną interpretację przedstawia rysunek 2.8. Zauważmy, że otrzymana formuła jest tożsama z przytoczoną w rozdziale 1 formułą (1.4), czyli z dyskretnym równaniem zachowania energii mechanicznej.



Rys. 2.8. Ilustracja aproksymacji równania energii (2.26) niejawną metodą trapezową (2.35).

Przyjęty warunek początkowy informuje nas o rzędnej zwierciadła wody w przekroju i , zatem w równaniu (2.40) występuje tylko jedna niewiadoma, którą jest rzędna zwierciadła wody h_{i+1} . Ponieważ parametry przekroju są funkcją rzędnej zwierciadła wody to równanie jest równaniem algebraicznym nieliniowym. W związku z tym, tak jak w przypadku dyskretnej postaci równania dynamicznego, również do rozwiązywania równania (2.40) należy zastosować jedną z metod przybliżonego obliczania pierwiastków równań nieliniowych (np. metoda bisekcji, siecznych, iteracji prostej, czy Newtona).

Trzecim równaniem opisującym przepływ ustalony niejednostajny jest standardowe równanie ważne dla kanałów pryzmatycznych. W wyniku aproksymacji schematem trapezowym niejawnym równanie (2.24) przyjmuje następującą formę:

$$H_{i+1} = H_i + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{s - S_i}{1 - \alpha_i \cdot Fr_i^2} + \frac{s - S_{i+1}}{1 - \alpha_{i+1} \cdot Fr_{i+1}^2} \right). \quad (2.41)$$

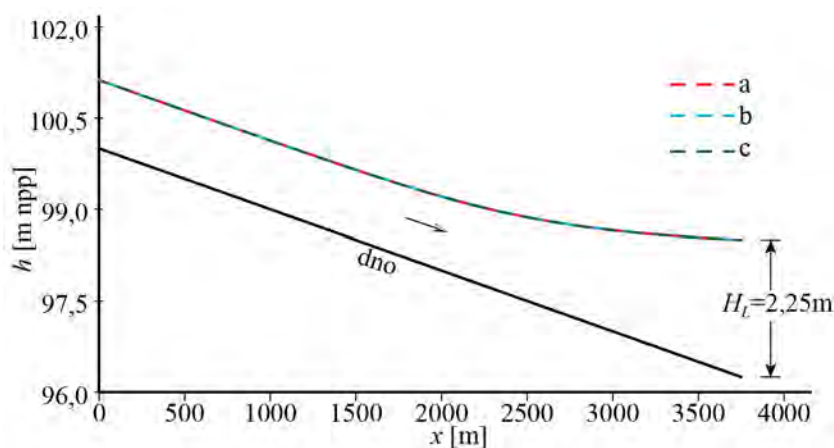
Analogicznie do równania dynamicznego (2.36) i równania energii (2.26), również w tym przypadku w każdym kroku obliczeń konieczne jest rozwiązanie równania nieliniowego. Jednak jest to konieczne tylko w przypadku stosowania schematów niejawnych, takich jak zastosowana tutaj metoda (2.35). W sytuacji, gdy równanie (2.24) jest aproksymowane schematem jawnym, jego dyskretna postać jest równaniem algebraicznym liniowym, dzięki czemu wprost można obliczyć głębokość w szukanym przekroju.

Jak wynika z wcześniejszych analiz przepływ ustalony niejednostajny w kanałach otwartych może być opisany w trojaki sposób. W związku z tym interesującym wydaje się porównanie wyników otrzymanych wskutek zastosowania niejawnej metody trapezowej do rozwiązania numerycznego omawianych wyżej trzech różnych równań różniczkowych. W tym celu rozważmy poniższy przykład.

Przykład 2.1.

Rozpatrzmy przepływ ustalony niejednostajny w kanale prostokątnym o szerokości $B=5$ m, długości 3750 m i o stałym spadku dna wynoszącym $s=0,001$ [-], w którym natężenie przepływu wynosi $Q=5$ m³/s. Załóżmy, iż na końcu kanału znajduje się budowla piętrząca, w wyniku czego głębokość wody w przekroju końcowym wynosi $H_L=2,25$ m. Jest ona większa od głębokości normalnej odpowiadającej przyjętemu natężeniu przepływu w rozpatrywanym kanale. Współczynnik szorstkości wg Manninga wynosi $n=0,03$ s/m^{1/3}. Krok całkowania przyjęto równy $\Delta x = 50$ m. Równanie nieliniowe rozwiązywano metodą Newtona z dokładnością równą $\varepsilon_H = 0,00001$ m określającą maksymalną dopuszczalną różnicę dwóch kolejnych przybliżeń rzędnej zwierciadła wody w przekroju obliczeniowym.

Rysunek 2.9 przedstawia rozwiązanie równania dynamicznego, równania energii oraz równania standardowego stosowanego dla kanałów pryzmatycznych dla przyjętych wyżej danych. Maksymalna różnica między rozwiązaniem równania energii a rozwiązaniem równania dynamicznego wyniosła $\varepsilon = 0,0059$ m. Jak można zauważyć na rysunku 2.9, w przypadku krzywej spiętrzenia w kanale prostokątnym wyniki obliczeń otrzymane wskutek wykorzystania omówionych równań są praktycznie identyczne.

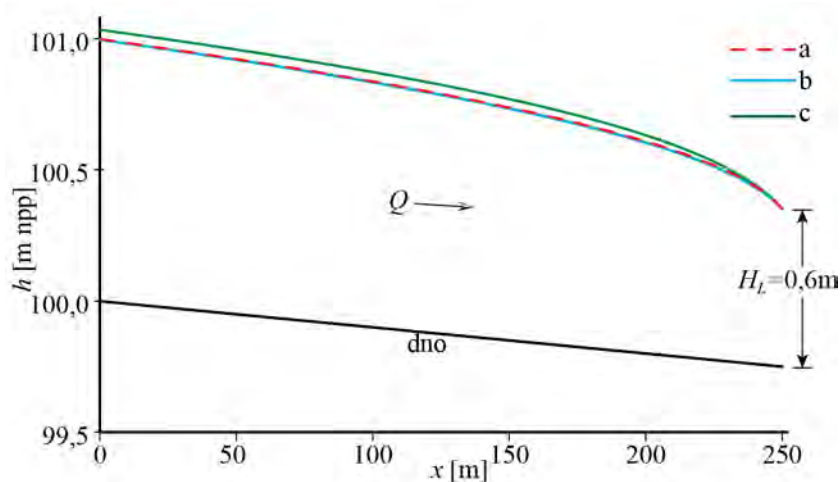


Rys. 2.9. Krzywe spiętrzenia otrzymane w wyniku użycia różnych modeli: a) równanie energii, b) równanie dynamiczne, c) równanie standardowe.

Przykład 2.2.

Rozważmy przepływ w kanale prostokątnym o długości $L=250$ m, szerokości dna $B=5$ m i szorstkości wynoszącej $n=0,03$ s/m^{1/3}. Dno kanału ma stały spadek $s=0,001$ [-]. Kanał podzielono na 100 odcinków obliczeniowych o długości $\Delta x = 2,5$ m. Natężenie przepływu w kanale ma wartość $Q=5$ m³/s. Warunkiem początkowym do obliczeń jest głębokość w końcowym przekroju wynosząca $H_L=0,6$ m. Głębokość ta jest mniejsza od głębokości normalnej odpowiadającej przyjętemu natężeniu przepływu w rozpatrywanym kanale. Układ zwierciadła wody $h(x)$ będący rozwiązaniem przykładu 2.2 przedstawiono na rysunku 2.10.

Jak można zauważyć, różnice pomiędzy rozwiązaniami równań energii i dynamicznego oraz równania standardowego są wyraźniejsze.

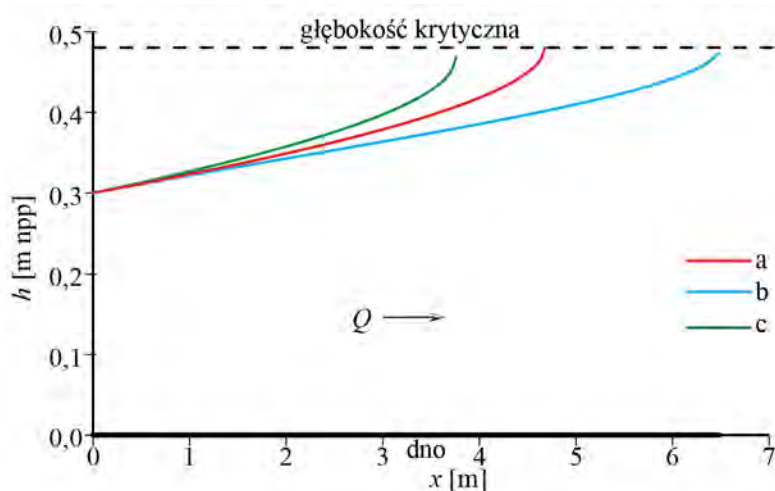


Rys. 2.10. Krzywe depresji otrzymane w wyniku użycia różnych modeli: a) równanie energii, b) równanie standardowe, c) równanie dynamiczne.

Kolejny przykład ilustruje znaczne zróżnicowanie wyników uzyskane w przypadku wypływu spod zasuwy.

Przykład 2.3.

Rozważmy poziomy odcinek kanału prostokątnego o szerokości $B=2$ m i współczynniku szorstkości równym $n=0,03$ s/m^{1/3}, który przegrodzony jest śluzą. Zasuwa otwarta jest na wysokość $H_0=0,3$ m, którą to wartość zadano jako warunek początkowy do obliczeń. Wartość natężenia przepływu równa jest $Q=2$ m³/s. Krok całkowania wynosi $\Delta x=0,02$ m. Otrzymane krzywe przedstawia rysunek 2.11.



Rys. 2.11. Układ zwierciadła wody dla zagadnienia wypływu spod zasuwy: a) równanie energii, b) równanie standardowe, c) równanie dynamiczne.

W przypadku zastosowania rozpatrywanych równań przepływu ustalonego niejednostajnego do zagadnienia wypływu spod zasuwy widoczne jest, w przeciwieństwie do przykładu 2.1, wyraźne zróżnicowanie wyników.

Przedstawione powyżej przykłady wykazują, iż różne równania mogą prowadzić do różnych wyników w zależności od analizowanego przypadku przepływu. Rozwiązania równania dynamicznego oraz równania energii różnią się, gdyż ich aproksymacje różnicowe nie są identyczne. Fakt ten był sygnalizowany przez Cunge, Holly i Verwey (1979). Natomiast różnice między rozwiązaniem równania energii oraz równania standardowego dla kanałów pryzmatycznych są tym większe im bardziej rozpatrywany przepływ jest zbliżony do krytycznego. Sugeruje to, iż przyczyną różnic jest fakt, iż standardowe równanie stosowane do obliczeń w kanałach pryzmatycznych posiada asymptotę pionową w punkcie głębokości krytycznej.

Z uzyskanych rozwiązań wynika, że chociaż do modelowania przepływu ustalonego niejednostajnego można wykorzystać dowolne z rozważanych równań, to otrzymane rezultaty różnią się w zależności od warunków przepływu. Równanie (2.24) standardowo stosowane dla koryt pryzmatycznych staje się nieokreślone, gdy przepływ jest zbliżony do krytycznego. Jest to duża niedogodność, gdyż w pewnych warunkach uzyskanie rozwiązania jest niemożliwe. Kolejną wadą tego równania jest to, iż nie nadaje się ono do obliczeń w kanałach naturalnych przez co jego zastosowanie w praktyce jest ograniczone. Z tego punktu widzenia równanie energii (2.26) i równanie dynamiczne (2.36) mają lepsze właściwości. Po pierwsze nieciągłości nie pojawiają się, a po drugie mogą one być stosowane dla dowolnego typu kanałów.

Istotnego argumentu decydującego o wyborze równania dostarcza jego fizyczna interpretacja. Równanie energii (2.26) w sposób oczywisty gwarantuje spełnienie zasady zachowania energii. Fakt ten można wykazać całkując równanie na odcinku kanału ograniczonym dwoma przekrojami o odciętych x_1 oraz x_2 :

$$\int_{E_1}^{E_2} dE = - \int_{x_1}^{x_2} S dx. \quad (2.42)$$

Obliczenie całki po lewej stronie równania daje zależność

$$E_2 - E_1 = - \int_{x_1}^{x_2} S dx. \quad (2.43)$$

Po podstawieniu zależności (2.13) otrzymuje się równanie

$$h_2 + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_2^2} - \left(h_1 + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_1^2} \right) = -S \cdot \Delta x. \quad (2.44)$$

Powyższy wynik interpretuje się następująco: różnica wysokości energii w dwóch przekrojach jest równa stratom energii na tym odcinku. Postępując identycznie z równaniem (2.24), otrzymuje się następującą postać całkową:

$$\int_{H_1}^{H_2} dH = \int_{x_1}^{x_2} \frac{s - S}{1 - \alpha \cdot Fr^2} dx. \quad (2.45)$$

Po scałkowaniu jego lewej strony mamy:

$$H_2 - H_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{s - S}{1 - \alpha \cdot Fr^2} dx. \quad (2.46)$$

Dla równania (2.46) nie możemy podać tak oczywistej fizycznej interpretacji całkowitej formy równania wyjściowego, jak to miało miejsce w przypadku równania energii (2.26). Jest to istotny argument przemawiający za stosowaniem równania (2.26) jako podstawowego jednowymiarowego modelu przepływu.

Z kolei równanie dynamiczne nie wykazuje żadnych istotnych zalet w porównaniu z równaniem energii. W związku z tym, przyjęcie równania energii jako ogólnego modelu przepływu ustalonego niejednostajnego w kanałach otwartych wydaje się całkowicie uzasadnione. Z tego powodu dalsze analizy ustalonego niejednostajnego przepływu w kanałach otwartych będą odniesione wyłącznie do tego równania.

3. Numeryczne rozwiązanie zagadnienia początkowego różniczkowego równania energii mechanicznej opisującego ustalony przepływ niejednostajny

Rozwiązanie równania (2.26) można otrzymać stosując różne metody numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. W rozdziale 2 do rozwiązania zastosowano niejawną metodę trapezową. Chociaż właściwości tej metody w szczególności sposób predestynują ją do rozwiązania równania (2.26), to teoretycznie nie ma żadnych przeszkód, aby zastosować dowolną spośród bardzo licznych metod numerycznego rozwiązania zagadnienia początkowego równania różniczkowego zwyczajnego. Jednak z powodów praktycznych najlepsze są metody, które operują jedynie wartościami węzłowymi i nie wymagają interpolacji parametrów w przekrojach pośrednich kanału pomiędzy węzłami. Ten aspekt problemu praktycznie eliminuje z rozważań metody wielokrokowe oraz metody jednokrokowe typu Rungego-Kutty. Jeśli chodzi o metodę Rungego-Kutty to należy stwierdzić, że bardzo dobrze nadaje się ona do obliczeń w kanałach pryzmatycznych. Jednak w przypadku kanałów naturalnych, których geometrię znamy tylko w miejscach pomiaru przekrojów poprzecznych, wymagana jest interpolacja parametrów kanałów w przekrojach pośrednich. Wprowadza to dodatkowy, trudny do oszacowania, błąd lokalny. Zastosowanie metody Rungego-Kutty do rozwiązania równania (2.26) zostanie przedstawione dalej w podrozdziale 3.3.

3.1. Ogólna metoda dwupoziomowa

Jeśli chodzi o wspomnianą niejawną metodę trapezową, opisaną i zastosowaną w rozdziale 2, to można ją potraktować jako szczególny przypadek rodziny metod, do której należy także jawna i niejawną metoda Eulera oraz metoda Galerkina. Metody te są szczególnymi przypadkami ogólnej metody dwupoziomowej, którą można zapisać następująco:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x((1-\theta)f(x_i, y_i) + \theta \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1})), \quad (3.1)$$

gdzie θ jest parametrem wagowym o wartości z przedziału $\langle 0,1 \rangle$. Zauważmy, że dla szczególnych wartości tego parametru otrzymujemy poszczególne metody. I tak:

- dla $\theta=0$ równanie (3.1) staje się jawnym schematem Eulera;
- dla $\theta=1/2$ równanie (3.1) staje się niejawnym schematem trapezowym;
- dla $\theta=2/3$ równanie (3.1) staje się metodą Galerkina;
- dla $\theta=1$ równanie (3.1) staje się niejawnym schematem Eulera.

Zastosujemy formułę (3.1) do rozwiązania równania (2.26). Otrzymamy następującą aproksymację tego równania:

$$\left(h_{i+1} + \frac{\alpha_{i+1} \cdot Q^2}{2g \cdot A_{i+1}^2} \right) - \left(h_i + \frac{\alpha_i \cdot Q^2}{2g \cdot A_i^2} \right) + \Delta x \left((1-\theta) \frac{n_i^2 \cdot Q^2}{R_i^{4/3} \cdot A_i^2} + \theta \frac{n_{i+1}^2 \cdot Q^2}{R_{i+1}^{4/3} \cdot A_{i+1}^2} \right) = 0. \quad (3.2)$$

Przy znanym (z warunku początkowego lub poprzedniego kroku obliczeń) poziomie zwierciadła wody w przekroju $i+1$ jedyną niewiadomą w równaniu (3.2) jest rzędna zwierciadła wody w przekroju sąsiednim i . Jednakże równanie (3.2) jest równaniem nieliniowym względem h_i . Jego rozwiązanie jest więc problemem znalezienia pierwiastków funkcji:

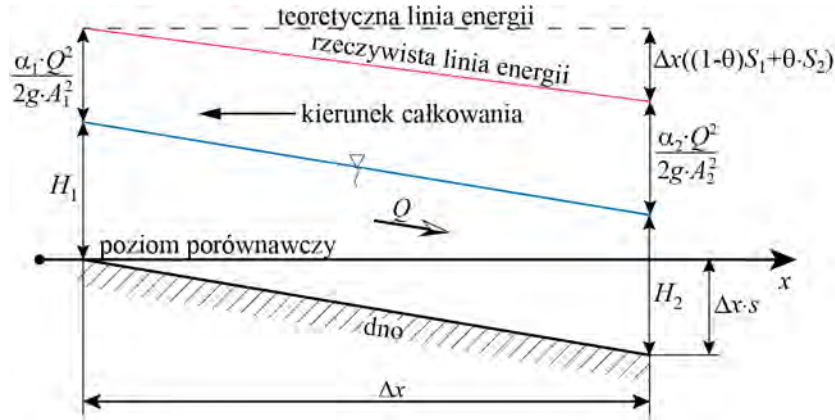
$$F(h_i) = \left(h_{i+1} + \frac{\alpha_{i+1} \cdot Q^2}{2g \cdot A_{i+1}^2} \right) - \left(h_i + \frac{\alpha_i \cdot Q^2}{2g \cdot A_i^2} \right) + \Delta x \left((1-\theta) \frac{n_i^2 \cdot Q^2}{R_i^{4/3} \cdot A_i^2} + \theta \frac{n_{i+1}^2 \cdot Q^2}{R_{i+1}^{4/3} \cdot A_{i+1}^2} \right). \quad (3.3)$$

Jak pokazano w rozdziale 1 rozwiązanie równania (3.2) z $\theta=1/2$, czyli niejawną metodą trapezową, w niektórych sytuacjach zapewnia rozwiązanie niebudzące wątpliwości, zaś w

innych generuje rozwiązania niefizyczne. Ilustracją tych przypadków są rysunki 1.6 oraz 1.7. Można przypuszczać, że przyczyną tego są właściwości funkcji $F(h_i)$.

3.2. Analiza własności funkcji $F(h_i)$

W celu przeprowadzenia analizy dyskretnej formy równania energii przyjmijmy schemat obliczeniowy przedstawiony na rysunku 3.1.



Rys. 3.1. Schemat obliczeniowy do równania (3.2).

Aproksymacja równania energii ogólną metodą dwupoziomową ma postać (3.2). W związku z tym, iż przepływ odbywa się zgodnie z kierunkiem rosnących wartości osi x , wartość natężenia przepływu można przyjąć jako dodatnią. Dla uproszczenia rozważmy jedynie dwa sąsiadujące ze sobą przekroje obliczeniowe, które oznaczmy indeksami 1 oraz 2. Zatem równanie (3.2) przyjmie postać:

$$\left(h_2 + \frac{\alpha_2 \cdot Q^2}{2g \cdot A_2^2} \right) - \left(h_1 + \frac{\alpha_1 \cdot Q^2}{2g \cdot A_1^2} \right) + \Delta x \left((1-\theta) \frac{n_1^2 \cdot Q^2}{R_1^{4/3} \cdot A_1^2} + \theta \frac{n_2^2 \cdot Q^2}{R_2^{4/3} \cdot A_2^2} \right) = 0. \quad (3.4)$$

W równaniu tym niewiadomą jest rzędna zwierciadła wody w przekroju indeksowanym jako 1. W dalszej analizie dla wygody posłużymy się głębokością zamiast rzędnej. Schemat obliczeniowy dla tego przypadku ilustruje rysunek 3.1. Ponadto założymy stałą wartość współczynnika korekcyjnego energii α . Ostatecznie badana funkcja przyjmie postać:

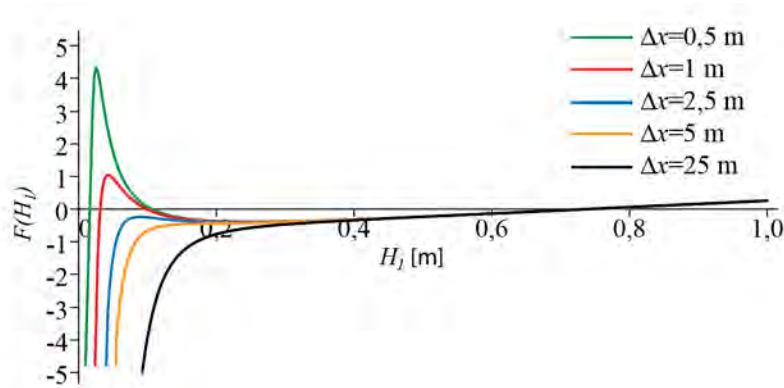
$$F(H_1) = \left(H_2 - \Delta x \cdot s + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_2^2} \right) - \left(H_1 + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_1^2} \right) + \Delta x \left((1-\theta) \frac{n_1^2 \cdot Q^2}{R_1^{4/3} \cdot A_1^2} + \theta \frac{n_2^2 \cdot Q^2}{R_2^{4/3} \cdot A_2^2} \right). \quad (3.5)$$

Znając położenie zwierciadła wody w przekroju na końcu odcinka kanału (indeks 2), położenie zwierciadła wody w przekroju 1 otrzymujemy rozwiązując równanie:

$$F(H_1) = 0. \quad (3.6)$$

Jak pokazano w rozdziale 1, niekiedy uzyskane rozwiązanie jest нефизyczne i zdecydowanie odbiega od spodziewanego. Aby wyjaśnić przyczynę tego faktu należy wykonać i zbadać przebieg zmienności funkcji (3.5). W tym celu rozpatrzmy hipotetyczne zadanie.

Założmy, że przepływ o natężeniu $Q=2 \text{ m}^3/\text{s}$ odbywa się w kanale prostokątnym o spadku dna równym $s=0,001$ [-], szerokości $B=5 \text{ m}$ i współczynnika szorstkości wg Manninga $n=0,03 \text{ s/m}^{1/3}$. W przekroju końcowym zadana jest głębokość $H_L = H_2 = 0,75 \text{ m}$. Założmy dodatkowo $\theta=1/2$ co oznacza, że równanie ruchu ustalonego niejednostajnego rozwiązujemy niejawnym schematem trapezowym. Dla powyższych danych stabilizujemy funkcję (3.5) przyjmując różne wartości odległości pomiędzy przekrojami Δx . Na rysunku 3.2 przedstawione są wykresy funkcji (3.5) odpowiadające różnym wartościom kroku całkowania Δx .



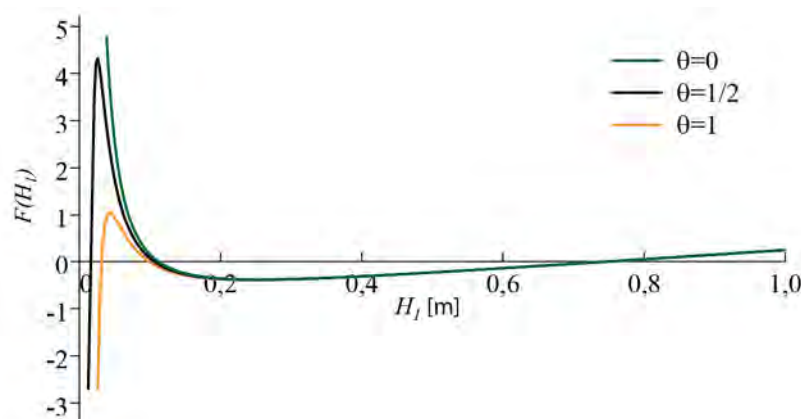
Rys. 3.2. Wykres funkcji (3.6) dla różnych wartości kroku całkowania.

Można zauważyć, że wraz ze zmianą wartości Δx zmienia się kształt funkcji $F(H_1)$. Z rysunku wynika, że pierwiastek o największej wartości występuje zawsze, niezależnie od przyjętej wartości kroku całkowania Δx . Natomiast dla małych wartości Δx pojawiają się

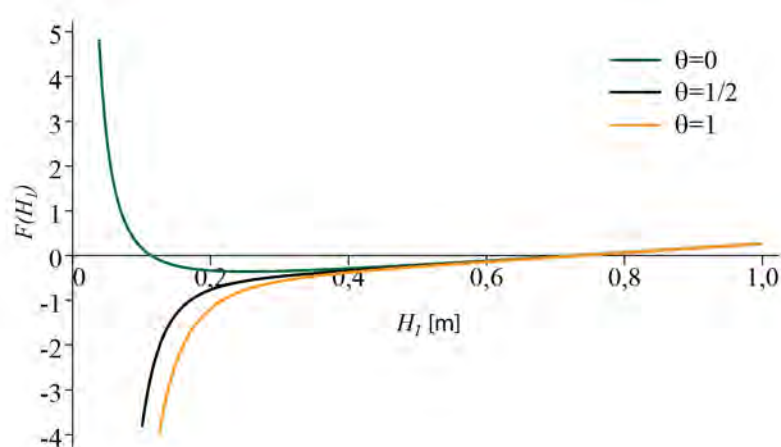
dwa dodatkowe pierwiastki. Fakt ten oznacza, że równanie posiada więcej niż jedno rozwiązanie. Konsekwencją tego są wspomniane wcześniej i przedstawione na rysunku 1.7 rozwiązania niefizyczne. Wydaje się, że otrzymano je w wyniku przypadkowego wyboru pierwiastka równania. Wspomniany przykład rozwiązywano metodą Newtona, która dla funkcji posiadających więcej niż jedno miejsce zerowe, tzn. gdy funkcja nie jest monotoniczna, może prowadzić do przypadkowego rozwiązania. Do podobnego wyniku mogą prowadzić wszystkie znane metody rozwiązywania równań nieliniowych. Interesujące jest także odniesienie wartości pierwiastków fizycznych do wartości głębokości krytycznej. Dla rozpatrywanego przypadku głębokość krytyczna wynosi $H_{kr}=0,26$ m, zatem jak wynika z rysunku pierwiastki rozłożone są po obu stronach tej wartości.

W związku z powyższą własnością pojawia się problem wyboru odpowiedniego pierwiastka w trakcie rozwiązywania równania (3.5). Przebieg funkcji sugeruje, że sukcesywnie wybierając pierwiastek po lewej stronie głębokości krytycznej (gdzie $H(x)<H_{kr}$) otrzymamy układ zwierciadła wody odpowiadający krzywej spiętrzenia odzwierciedlającej np. wypływ spod zasuwy (rys. 2.1b), natomiast wybór pierwiastka o wartości większej od głębokości krytycznej (gdzie $H(x)>H_{kr}$) pozwoli uzyskać krzywą depresji lub spiętrzenia odpowiadającą odpowiednio swobodnemu wypływowi z kanału lub cofce (rys. 2.1a). Można więc przypuszczać, że równanie ruchu ustalonego niejednostajnego (2.26) można wykorzystywać do obliczeń układu zwierciadła wody zarówno dla przepływu rwącego jak i przepływu spokojnego. Jednak jak wynika z wykresów przedstawionych na rysunku 3.2, aby możliwe było otrzymanie rozwiązania odpowiadającego ruchowi rwącemu konieczne jest stosowanie małych wartości Δx . Wydaje się, iż wyjaśnieniem tego faktu może być to, że ruch rwący w kanałach otwartych, poza przypadkami szczególnymi, zwykle występuje lokalnie na stosunkowo krótkich odcinkach kanału, przez co i krok całkowania musi być odpowiednio mały, aby możliwe było odwzorowanie tego zjawiska.

Ponieważ równanie (3.4) jest wynikiem aproksymacji równania różniczkowego można przypuszczać, że postać funkcji $F(H_1)$ (3.5) wynika z przyjętej metody rozwiązania, czyli zależy od sposobu wykonania jej aproksymacji. W związku z tym uzasadnione jest przypuszczenie, że jej kształt będzie w pewnym stopniu zależny także od przyjętej wartości parametru θ . Zależność taką dla zestawu poprzednio przyjętych danych przedstawiono na rysunkach 3.3 oraz 3.4.



Rys. 3.3. Wykres funkcji (3.2) przy kroku całkowania równym $\Delta x=0,5$ m.



Rys. 3.4. Wykres funkcji (3.2) przy kroku całkowania równym $\Delta x=25$ m.

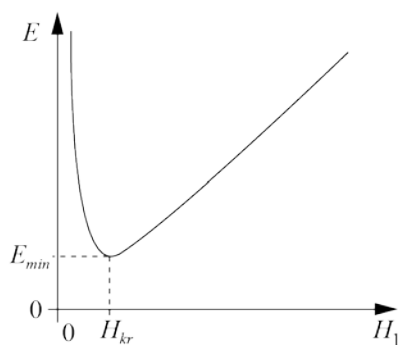
Rysunek 3.3. przedstawia przebieg zmienności funkcji (3.5) przy różnych wartościach parametru θ dla kroku całkowania $\Delta x = 0,5$ m, natomiast rysunek 3.4 przy wartości kroku całkowania wynoszącym $\Delta x = 25$ m.

Można zauważyć, że charakter funkcji wyraźnie zależy od przyjętego sposobu aproksymacji. W przypadku, gdy równanie energii aproksymowane jest formułą jawną ($\theta=0$ – jawny schemat Eulera) badana funkcja ma dwa miejsca zerowe, a jej kształt praktycznie nie zależy od wielkości kroku całkowania. Natomiast równania różnicowe otrzymane w wyniku aproksymacji schematami niejawnymi ($\theta=1/2$ – metoda trapezowa niejawna, $\theta=1$ – niejawny schemat Eulera) mają inne własności. Liczba miejsc zerowych funkcji $F(H_1)$ zmieniająca się od jeden do trzy wynika z nieliniowości członu strat energii. Dokonajmy próby wyjaśnienia zmiennego kształtu funkcji $F(H_1)$ zależnie od typu zastosowanej metody rozwiązania.

W wyniku aproksymacji równania energii zarówno schematami jawnymi jak i niejawnymi otrzymuje się algebraiczne równania nieliniowe. Jednak charakter tych równań

różni się istotnie. Stosowanie schematów jawnych skutkuje powstaniem algebraicznych równań nieliniowych, w których nieliniowość wynika tylko z charakteru zależności opisującej wysokość energii właściwej w przekroju (rys. 3.5) opisanej wzorem:

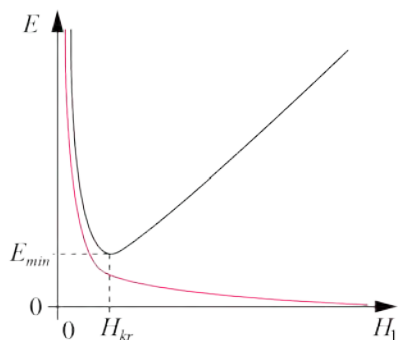
$$E = H_1 + \frac{\alpha_1 \cdot Q^2}{2g \cdot A_1^2}. \quad (3.7)$$



Rys. 3.5. Przykładowy wykres zależności wysokości energii właściwej od głębokości w przekroju.

Natomiast nieliniowość równań różnicowych otrzymanych na skutek aproksymacji schematami niejawnymi jest wynikiem zarówno nieliniowości członu energii właściwej jak i nieliniowości członu strat energii (rys. 3.6) wyrażonego poniższą formułą:

$$\Delta E = \Delta x \cdot ((1 - \theta)S_1 + \theta \cdot S_2). \quad (3.8)$$



Rys. 3.6. Przykładowy wykres wysokości energii właściwej (kolor czarny) oraz wysokości strat ΔE (kolor czerwony) w zależności od głębokości w przekroju.

Ogólny wzór wynikający z aproksymacji równania energii schematami jawnymi można przedstawić jako sumę rzędnej dna, energii właściwej oraz członu, który nie zależy od szukanej głębokości:

$$-\left[Z_1 + \left(H_1 + \frac{\alpha_1 \cdot Q^2}{2g \cdot A_1^2} \right) \right] + \Phi = 0. \quad (3.9)$$

Dla jawnego schematu Eulera ($\theta=0$) człon Φ będzie opisany następującą zależnością:

$$\Phi = Z_2 + \left(H_2 + \frac{\alpha_2 \cdot Q^2}{2g \cdot A_2^2} \right) + \Delta x \cdot S_2. \quad (3.10)$$

Jak widać jego wartość nie zależy od szukanej rzędnej w przekroju indeksowanym jako 1. Natomiast w przypadku stosowania formuł niejawnych pojawia się dodatkowy człon zależny od szukanej głębokości, który jest silnie nieliniowy. Dla formuły trapezowej niejawnej, analogiczna zależność do (3.9) będzie następująca:

$$-\left[Z_1 + \left(H_1 + \frac{\alpha_1 \cdot Q^2}{2g \cdot A_1^2} \right) \right] + \Phi + \frac{\Delta x}{2} \cdot S_1 = 0, \quad (3.11)$$

przy czym:

$$\Phi = Z_2 + \left(H_2 + \frac{\alpha_2 \cdot Q^2}{2g \cdot A_2^2} \right) + \frac{\Delta x}{2} \cdot S_2. \quad (3.12)$$

Liczba miejsc zerowych równania różnicowego (3.5) powstałego na skutek aproksymacji schematem trapezowym niejawnym ($\theta=1/2$) zależy od wzajemnej relacji jego składowych:

$$F(H_1) = E_2 - E_1 + \Delta E, \quad (3.13)$$

gdzie:

$$E_1 = Z_1 + H_1 + \frac{\alpha_1 \cdot Q^2}{2g \cdot A_1^2}, \quad (3.14)$$

$$E_2 = Z_2 + H_2 + \frac{\alpha_2 \cdot Q^2}{2g \cdot A_2^2}, \quad (3.15)$$

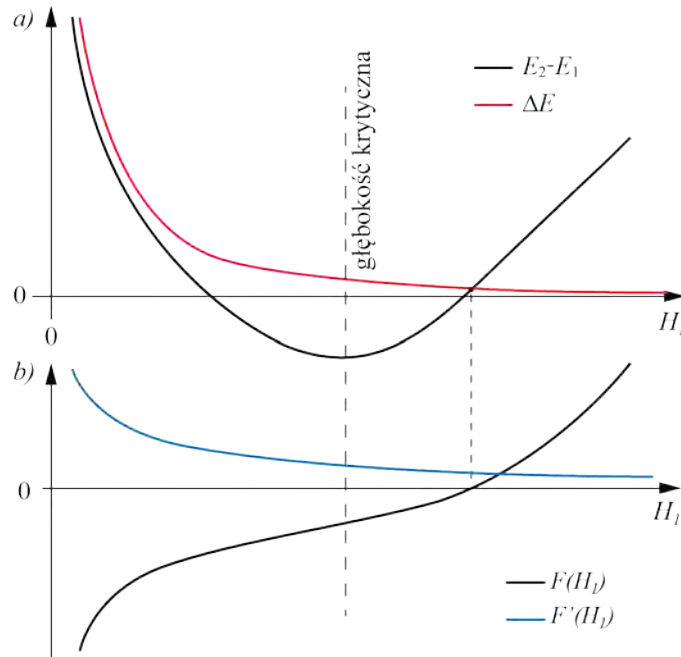
$$\Delta E = \frac{\Delta x}{2} (S_1 + S_2). \quad (3.16)$$

Uwzględniając wzór (2.4) opisujący spadek linii energii w przekroju, można zapisać, że strata energii wynosi:

$$\Delta E = \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{n_1^2 \cdot Q^2}{R_1^{4/3} \cdot A_1^2} + \frac{n_2^2 \cdot Q^2}{R_2^{4/3} \cdot A_2^2} \right). \quad (3.17)$$

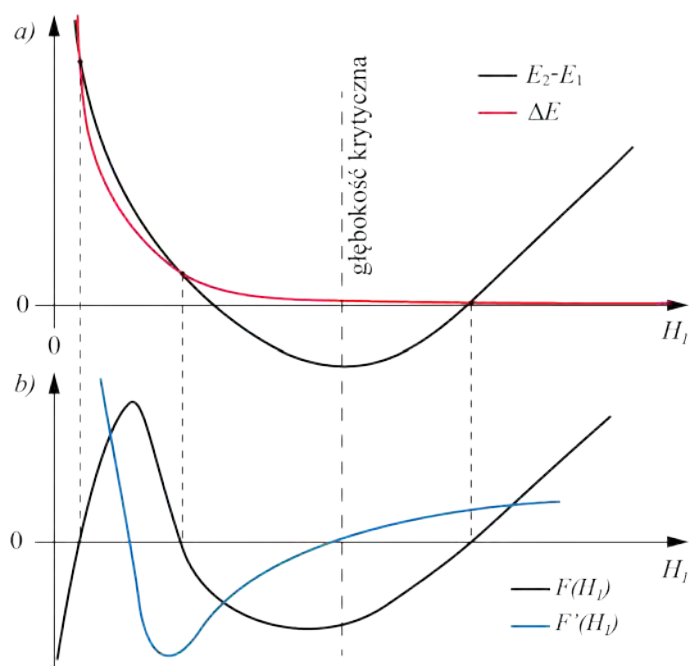
Równanie (3.13) można interpretować jako bilans energii właściwej dla odcinka kanału ograniczonego przekrojami 1-2, natomiast równanie (3.17) jest oszacowaniem wysokości straty energii pomiędzy przekrojami.

Miejsca zerowe funkcji znajdują się w punktach przecięcia wykresów jej składowych $E_2 - E_1$ oraz ΔE . W przypadku, gdy istnieje tylko jeden pierwiastek funkcja opisująca straty rośnie szybciej w kierunku malejących głębokości niż funkcja opisująca energię właściwą. Wówczas istnieje tylko jeden punkt przecięcia, co przedstawia rysunek 3.7a. Rysunek 3.7b przedstawia wykres funkcji $F(H_1)$ oraz jej pochodnej. Jak można zauważyć, funkcja ta w całej dziedzinie jest monotoniczna, a pochodna nie ma miejsc zerowych.



Rys. 3.7. Przykładowy wykres: a) składowych funkcji $F(H_1)$, b) funkcji $F(H_1)$ oraz jej pochodnej w przypadku występowania jednego miejsca zerowego.

Jeśli funkcja opisująca wysokość strat (3.17), dla głębokości mniejszych od krytycznej, lokalnie ma wartości mniejsze niż funkcja $E_2 - E_1$, wówczas występują trzy pierwiastki (rys. 3.8a), a pochodna funkcji ma dwa miejsca zerowe odpowiadające lokalnemu maksimum i minimum funkcji (rys. 3.8b).



Rys. 3.8. Przykładowy wykres: a) składowych funkcji $F(H_1)$, b) funkcji $F(H_1)$ oraz jej pochodnej w przypadku występowania trzech miejsc zerowych.

Tę własność można wykorzystać do określenia liczby miejsc zerowych funkcji (3.5) dla takich wartości parametru θ , przy których otrzymuje się schemat niejawny. Wniosek dotyczący liczby miejsc zerowych można sformułować następująco: jeśli dla jakiegokolwiek głębokości mniejszej od głębokości krytycznej, wartość funkcji (3.17) opisującej straty energii jest mniejsza lub równa wartości funkcji opisującej wysokość energii, to funkcja (3.5) ma dwa lub trzy miejsca zerowe.

Jak powyżej wykazano zasadniczy wpływ na charakter funkcji $F(H_1)$ ma numeryczna metoda rozwiązania równania, którą definiuje parametr wagowy θ . Jeśli przyjmuje on wartości większe od zera, oznacza to, że w równaniu aproksymującym uwzględniany jest silnie nieliniowy człon strat energii. Warto zatem zbadać, czy zastosowana formuła opisująca wysokość strat energii również wpływa na kształt funkcji. W tym celu stratę energii wyrażmy wzorem Darcy-Weisbacha:

$$S = \frac{\lambda}{4R} \cdot \frac{Q^2}{2g \cdot A^2}, \quad (3.18)$$

gdzie λ jest współczynnikiem oporów, natomiast R jest promieniem hydraulicznym. Do oszacowania współczynnika oporów λ można zastosować formułę Colebrooka-White'a (Kubrak, 1998; Chanson, 2004b):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log_{10} \left(\frac{2,51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k_s}{3,71 \cdot 4 \cdot R} \right), \quad (3.19)$$

gdzie k_s oznacza chropowatość absolutną ścian kanału, natomiast Re jest liczbą Reynoldsa.

Wzór opisujący liczbę Reynoldsa w kanałach otwartych ma następującą formę:

$$Re = \frac{4 \cdot Q \cdot R}{\nu \cdot A}, \quad (3.20)$$

gdzie ν jest współczynnikiem lepkości kinematycznej.

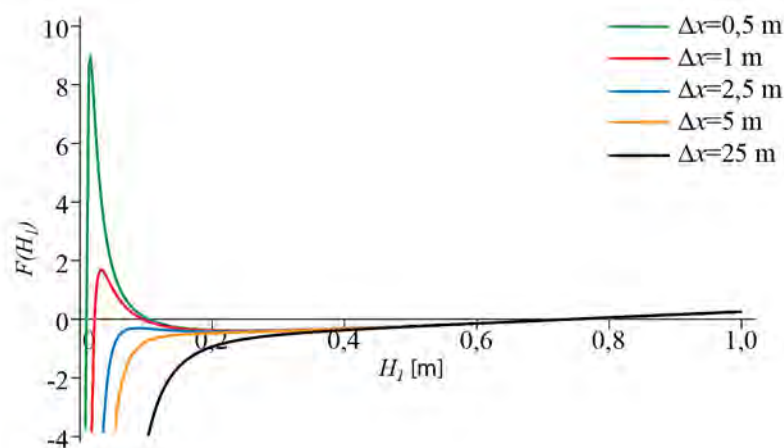
Funkcja (3.5) z członem strat energii opisanym za pomocą formuły Darcy-Weisbacha ma postać:

$$F(H_1) = \left(H_2 - \Delta x \cdot s + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_2^2} \right) - \left(H_1 + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_1^2} \right) + \Delta x \left((1 - \theta) \frac{Q^2 \cdot \lambda_1}{8g \cdot A_1^2 \cdot R_1} + \theta \frac{Q^2 \cdot \lambda_2}{8g \cdot A_2^2 \cdot R_2} \right). \quad (3.21)$$

Aby możliwe było porównywanie funkcji (3.5) oraz (3.21) konieczne jest obliczenie wartości chropowatości absolutnej kanału odpowiadającej danej wartości współczynnika szorstkości wg Manninga. Jak podaje Kubrak (1998), odpowiadającą wartość można obliczyć na podstawie zależności:

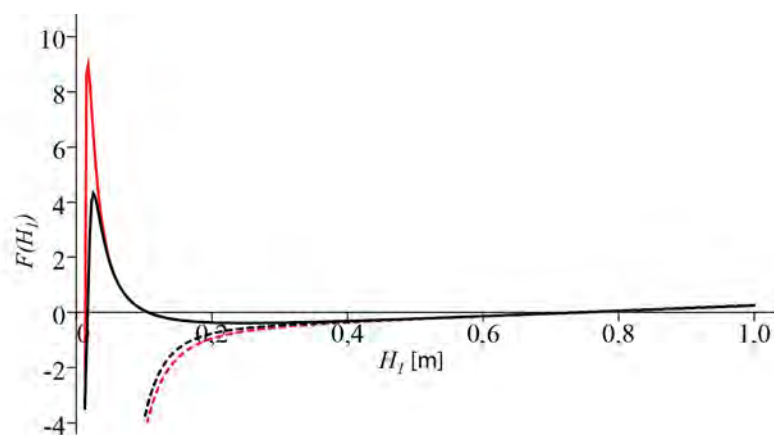
$$\frac{\frac{1}{n} k_s^{-1/6}}{\sqrt{g}} = 8,2. \quad (3.22)$$

Zgodnie z powyższym wzorem wartość chropowatości absolutnej odpowiadająca współczynnikowi szorstkości $n=0,03 \text{ s/m}^{1/3}$ wyniesie $k_s=4,78 \text{ mm}$. Na rysunku 3.9 przedstawiono wykres funkcji (3.21) otrzymany dla identycznych danych wykorzystanych wcześniej dla funkcji (3.5).



Rys. 3.9. Wykres funkcji (3.21) dla różnych wartości kroku całkowania ($\theta = 1/2$).

Jak można zauważyć, pomimo użycia innej formuły do opisu strat energii, kształt funkcji nie uległ zmianie. W celu lepszego porównania funkcji (3.5) oraz (3.21) ich wykresy dla dwóch skrajnych wartości kroku całkowania Δx zestawiono na jednym rysunku 3.10. Jak widać, badane funkcje mają bardzo podobny przebieg dla takich samych wartości kroku całkowania i odpowiadających sobie danych opisujących szorstkość.



Rys. 3.10. Wykresy funkcji (3.5) – kolor czarny oraz (3.21) – kolor czerwony. Linia ciągła oznacza wykres stworzony dla wartości $\Delta x=0,5$ m, natomiast linia przerywana dla $\Delta x=25$ m.

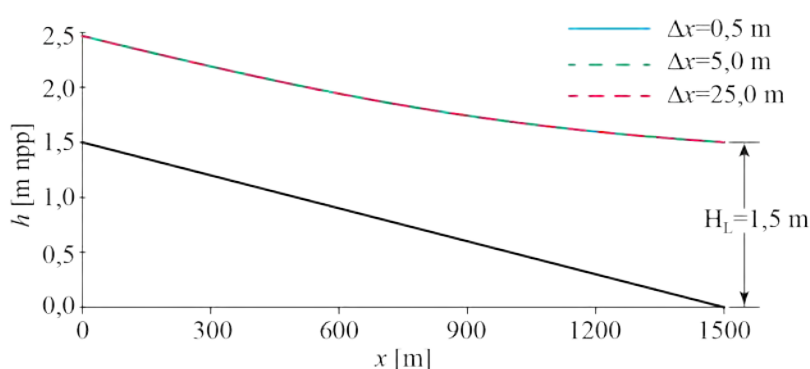
Zatem można wnioskować, że formuła opisująca straty energii praktycznie nie wpływa na kształt funkcji, a tym samym na ilość miejsc zerowych, które ta funkcja posiada.

Można wykazać, że wpływ współczynnika szorstkości wg Manniga na kształt funkcji (3.5) jest podobny do wpływu wielkości kroku całkowania Δx . Wniosek ten z praktycznego punktu widzenia ma niewielką wartość, gdyż szorstkość kanału jest parametrem fizycznym, natomiast krok całkowania Δx może być przyjmowany dowolnie.

Stosowanie małego kroku całkowania sprawia, że dyskretna postać funkcji opisującej przepływ ustalony niejednostajny może posiadać więcej niż jedno miejsce zerowe. Jest to przyczyną wspomnianych w rozdziale 1 trudności pojawiających się w trakcie rozwiązywania równania energii. W sytuacji, gdy funkcja posiada więcej niż jedno miejsce zerowe, algorytmy numerycznego rozwiązywania algebraicznych równań nieliniowych mogą prowadzić do przypadkowego wyboru pierwiastków tego równania. Warunkiem otrzymania poprawnego rozwiązania jest wybór odpowiedniego pierwiastka. Musi to być pierwiastek odpowiadający rozpatrywanemu rodzajowi ruchu. O ile w przypadku przepływów rwących całkowanie równania ruchu wymaga stosowania względnie małych wartości Δx to rozwiązanie tego samego równania w warunkach przepływu spokojnego otrzymujemy niezależnie od przyjętej wartości Δx pod warunkiem, że w trakcie rozwiązywania równania wybierany będzie pierwiastek położony na prawo od głębokości krytycznej (rys. 3.2). Fakt ten można zilustrować poniższym przykładem obliczeniowym.

Przykład 3.1.

Rozważmy przepływ o natężeniu $Q=3 \text{ m}^3/\text{s}$ w pryzmatycznym kanale o przekroju prostokątnym, którego długość wynosi $L=1500 \text{ m}$. Spadek dna kanału równy jest $s=0,001$ [-], a współczynnik szorstkości wg Manninga $n=0,03 \text{ s/m}^{1/3}$. Szerokość dna kanału równa jest $B=4 \text{ m}$. W kanale tym poszukiwany jest układ zwierciadła wody przy warunku zadany w końcowym przekroju kanału $H_L=1,5 \text{ m}$.



Rys. 3.11. Obliczone układy zwierciadła wody dla różnych wartości kroku całkowania Δx .

Na rysunku 3.11 przedstawiono rozwiązania otrzymane dla $\Delta x=0,5 \text{ m}$, $\Delta x=5 \text{ m}$ i $\Delta x=25 \text{ m}$. Jak widać różnice pomiędzy poszczególnymi rozwiązaniami są praktycznie niezauważalne, a układ zwierciadła wody jest zgodny z oczekiwanym.

3.3. Dyskusja istnienia rozwiązania i jego jednoznaczności

W związku z faktem, iż nieliniowe równania algebraiczne otrzymane w wyniku aproksymacji równania różniczkowego mogą mieć od jednego do trzech pierwiastków, interesujące jest pytanie o powód takiej sytuacji. Czy jest to własność równania algebraicznego czy równania różniczkowego? Aby odpowiedzieć na to pytanie należy zbadać, czy równanie energii opisujące przepływ ustalony niejednostajny spełnia warunek Lipschitza, który gwarantuje jednoznaczność rozwiązania (Kincaid i Cheney, 2002). Rozważmy zatem rozwiązywane równanie w postaci:

$$\frac{dE}{dx} = -S. \quad (3.23)$$

Założmy, że przepływ odbywa się na poziomym odcinku kanału prostokątnego o znacznej szerokości. W takiej sytuacji promień hydrauliczny w przybliżeniu jest równy głębokości (Czetwertyński i Utrysko, 1969; Aivazian, 1998):

$$R \approx H. \quad (3.24)$$

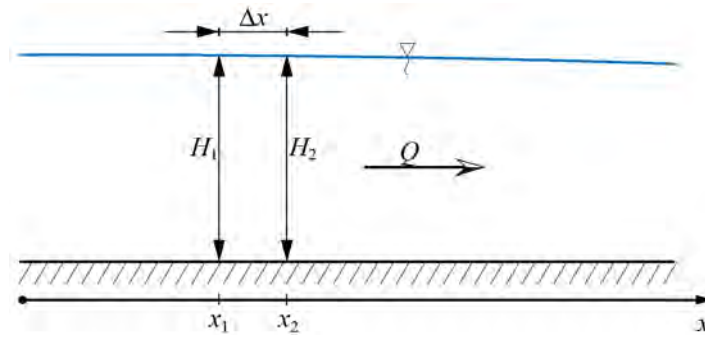
Wykorzystajmy do określenia spadku linii energii formułę Darcy-Weisbacha:

$$S = \frac{Q^2 \cdot \lambda}{8g \cdot A^2 \cdot R}, \quad (3.25)$$

gdzie $A = B \cdot H$ jest powierzchnią przekroju czynnego. Uwzględniając warunek (3.24) wzór (3.25) uprości się do następującej postaci:

$$S = \frac{Q^2 \cdot \lambda}{8g \cdot B} \cdot \frac{1}{H^3}. \quad (3.26)$$

Założmy następnie, że analizujemy dwa przekroje położone blisko siebie, a chropowatość kanału jest stała zarówno na jego długości jak i głębokości (rys. 3.12).



Rys. 3.12. Rozważany odcinek kanału.

Ponieważ rozważamy przepływ wolnozmienny, współczynnik oporów w obu analizowanych przekrojach powinien mieć bardzo zbliżone wartości. Zatem zasadne jest założenie, iż współczynnik oporów między dwoma blisko położonymi przekrojami jest stały $\lambda = \text{const}$. Przy powyższych założeniach nierówność Lipschitza (Kincaid i Cheney, 2002) przyjmie postać:

$$|f(x_1, H_1) - f(x_2, H_2)| \leq L \left| H_1 + \frac{\alpha \cdot U_1^2}{2g} - \left(H_2 + \frac{\alpha \cdot U_2^2}{2g} \right) \right|. \quad (3.27)$$

Przy małej odległości między przekrojami można przyjąć, że średnie prędkości w nich nie różnią się istotnie. Można więc założyć, że:

$$\frac{\alpha \cdot U_1^2}{2g} - \frac{\alpha \cdot U_2^2}{2g} \approx 0. \quad (3.28)$$

W rezultacie nierówność Lipschitza upraszcza się:

$$|f(x_1, H_1) - f(x_2, H_2)| \leq L |H_1 - H_2|, \quad (3.29)$$

a po uwzględnieniu definicji prawej strony równania energii (3.23) przyjmuje postać:

$$|-S_1 - (-S_2)| \leq L |H_1 - H_2|. \quad (3.30)$$

Po wstawieniu wzoru opisującego spadek linii energii otrzymujemy relację:

$$\left| -\frac{Q^2 \cdot \lambda}{8g \cdot B} \frac{1}{H_1^3} - \left(-\frac{Q^2 \cdot \lambda}{8g \cdot B} \frac{1}{H_2^3} \right) \right| \leq L |H_1 - H_2|. \quad (3.31)$$

Jej interpretacja będzie łatwiejsza jeśli dokonamy dalszych przekształceń. W tym celu wyłączamy wartości stałe przed moduł oraz porządkujemy:

$$\frac{Q^2 \cdot \lambda}{8g \cdot B} \left| \frac{1}{H_2^3} - \frac{1}{H_1^3} \right| \leq L |H_1 - H_2|. \quad (3.32)$$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika wyrażenia objętego symbolem wartości bezwzględnej otrzymujemy:

$$\frac{Q^2 \cdot \lambda}{8g \cdot B} \left| \frac{H_1^3 - H_2^3}{H_2^3 \cdot H_1^3} \right| \leq L |H_1 - H_2|. \quad (3.33)$$

Zgodnie ze wzorem skróconego mnożenia

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a \cdot b + b^2) \quad (3.34)$$

równanie (3.33) przepisujemy w postaci:

$$\frac{Q^2 \cdot \lambda}{8g \cdot B} \left| \frac{(H_1 - H_2)(H_1^2 + H_1 \cdot H_2 + H_2^2)}{H_2^3 \cdot H_1^3} \right| \leq L |H_1 - H_2|. \quad (3.35)$$

Ponieważ z definicji głębokości wody H_1 oraz H_2 są zawsze dodatnie, to wyrażenie

$$\frac{(H_1^2 + H_1 \cdot H_2 + H_2^2)}{H_2^3 \cdot H_1^3} \quad (3.36)$$

również będzie zawsze dodatnie. Dzięki temu równanie (3.35) możemy zapisać w formie:

$$\frac{Q^2 \cdot \lambda}{8g \cdot B} \cdot \frac{(H_1^2 + H_1 \cdot H_2 + H_2^2)}{H_2^3 \cdot H_1^3} |H_1 - H_2| \leq L |H_1 - H_2|. \quad (3.37)$$

Dzieląc powyższą nierówność obustronnie przez $|H_1 - H_2|$ i dokonując prostych przekształceń otrzymuje się:

$$\frac{Q^2 \cdot \lambda}{8g \cdot B} \left(\frac{1}{H_1 \cdot H_2^3} + \frac{1}{H_1^2 \cdot H_2^2} + \frac{1}{H_1^3 \cdot H_2} \right) \leq L. \quad (3.38)$$

Biorąc pod uwagę możliwe wartości parametrów występujących po lewej stronie powyższej nierówności można stwierdzić, że nie istnieje taka stała L , która ją spełnia. Lewa strona nierówności (3.38) nie jest stała, ani ograniczona co dowodzi, że warunek Lipschitza nie jest spełniony. Spełnienie przez funkcję tego warunku gwarantuje, że rozwiązanie zagadnienia początkowego równania różniczkowego istnieje i jest

jednoznaczne (Kincaid i Cheney, 2002). Natomiast w przypadku, gdy warunek ten nie jest spełniony, zagadnienie początkowe może nie mieć rozwiązania lub może ich mieć więcej niż jedno. W przypadku analizowanej funkcji należy skłaniać się ku wnioskowi, iż zagadnienie początkowe sformułowane dla równania ruchu ustalonego niejednostajnego może mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

3.4. Aproksymacja równania energii metodami Rungego-Kutty

Metoda Rungego-Kutty, a dokładniej rodzina metod Rungego-Kutty to najważniejszy jawny algorytm jednokrokowego rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych. Polega ona na uwzględnieniu w formule aproksymacyjnej zmiennej liczby członów szeregu Taylora, jednak bez konieczności obliczania pochodnych wyższych rzędów. Istnieje szereg wariantów tej metody różniących się dokładnością (od rzędu II do VIII) (Legras, 1974). Chociaż metoda Rungego-Kutty jest metodą jednokrową, to jednak obliczenie przybliżenia w następnym przekroju wymaga wykonania szeregu obliczeń – etapów pośrednich. Ich liczba związana jest z rzędem metody. Jeśli chodzi o hydraulikę kanałów otwartych to metoda może być stosowana tylko dla kanałów pryzmatycznych. Ograniczenie to wynika z konieczności obliczania parametrów przekroju poprzecznego kanału w przekrojach pośrednich pomiędzy przekrojami pomierzonymi. Wymaga to zastosowania interpolacji, w celu określenia parametrów przekroju pośredniego. W praktyce szczególnie popularną i chętnie stosowaną jest metoda Rungego-Kutty IV rzędu.

Metoda rzędu IV wykorzystuje poniższy schemat aproksymacji równań (Legras, 1974):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.39)$$

w którym:

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad (3.40a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{\Delta x}{2}k_1\right), \quad (3.40b)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{\Delta x}{2}k_2\right), \quad (3.40c)$$

$$k_4 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x \cdot k_3). \quad (3.40d)$$

Jak wynika z powyższych formuł, realizacja rozwiązania numerycznego wymaga obliczenia wartości funkcji $f(x,y)$ nie tylko w przekroju o współrzędnej x_i oraz $x_i+\Delta x$ ale także w przekroju pośrednim o współrzędnej $x_i+\Delta x/2$. Ta cecha charakteryzuje praktycznie wszystkie warianty metody Rungego-Kutty, szczególnie zaś warianty o rzędzie dokładności wyższym niż dwa.

Dyskretna postać równania energii wynikająca z użycia schematu (3.39) jest następująca:

$$h_{i+1} + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_{i+1}^2} = h_i + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_i^2} - \frac{\Delta x}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.41)$$

gdzie:

$$k_1 = S(x_i, h_i), \quad (3.42a)$$

$$k_2 = S\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, h_i + \frac{\Delta x}{2} k_1\right), \quad (3.42b)$$

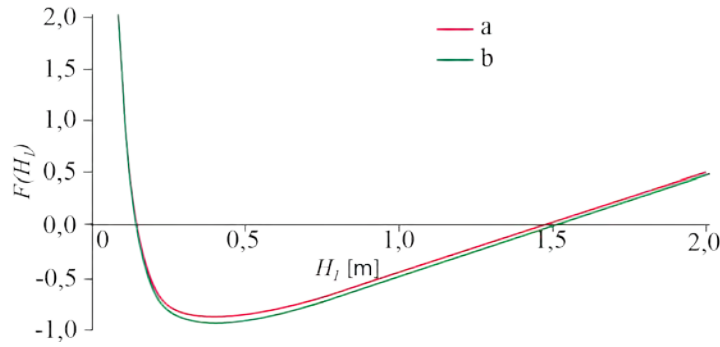
$$k_3 = S\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, h_i + \frac{\Delta x}{2} k_2\right), \quad (3.42c)$$

$$k_4 = S(x_i + \Delta x, h_i + \Delta x \cdot k_3). \quad (3.42d)$$

Pomimo, że zastosowana metoda Rungego-Kutty jest metodą jawną, to równanie (3.41) jest równaniem algebraicznym nieliniowym. Przenosząc wszystkie człony tego równania na jedną stronę otrzymujemy funkcję:

$$F_{IV}(H_1) = \left(H_2 - \Delta x \cdot s + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_2^2} \right) - \left(H_1 + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_1^2} \right) + \frac{\Delta x}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (3.43)$$

Rozwiązanie równania (3.41), tak jak uprzednio, będzie polegało na znalezieniu miejsc zerowych funkcji zdefiniowanej wzorem (3.43). W związku z tym, zbadajmy przebieg tej funkcji. Wykres funkcji (3.43) wykonano dla danych przyjętych w przykładzie 3.1 i przedstawiono na rysunku 3.13.



Rys. 3.13. Przebieg zmienności funkcji (3.43) przy kroku całkowania a) $\Delta x = 0,5$ m, b) $\Delta x = 25$ m.

Jak wynika z rysunku 3.13 kształt funkcji (3.43) jest bardzo zbliżony do kształtu funkcji powstałej wskutek aproksymacji równania energii jawnym schematem dwupoziomowym. Również w tym przypadku funkcja ma dwa pierwiastki dodatnie, a jej kształt nie zależy od wielkości kroku całkowania Δx . Jest sprawą oczywistą, że również w tym przypadku wystąpi problem wyboru właściwego pierwiastka. Podobne wyniki można uzyskać dla innych wariantów metody Rungego-Kutty.

Pewnym wyjątkiem wśród metod tej rodziny jest metoda Rungego-Kutty II rzędu, nazywana często metodą Eulera-Cauchy. W przeciwieństwie do innych wariantów metody, wymieniony wariant wykorzystuje wyłącznie dane z pomierzonych przekrojów kanału i oraz $i+1$, bez konieczności dodatkowej interpolacji. Formuła Rungego-Kutty rzędu II ma postać (Legras, 1974):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta x}{2}(k_1 + k_2), \quad (3.44)$$

gdzie:

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad (3.45a)$$

$$k_2 = f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x \cdot k_1). \quad (3.45b)$$

Aproksymacja równania ruchu ustalonego niejednostajnego (2.26) prowadzi do zależności:

$$h_{i+1} + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_{i+1}^2} = h_i + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_i^2} - \frac{\Delta x}{2}(k_1 + k_2). \quad (3.46)$$

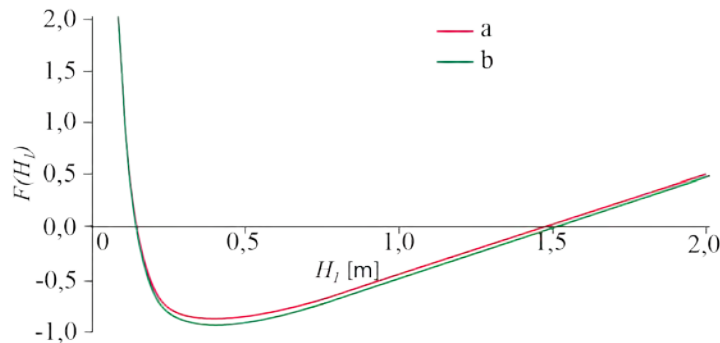
Współczynniki k_1 i k_2 wyrażone są następująco:

$$k_1 = S(x_i, h_i), \quad (3.47a)$$

$$k_2 = S(x_i + \Delta x, h_i + \Delta x \cdot k_1). \quad (3.47b)$$

Przenosząc wszystkie człony równania (3.46) na jedną stronę znaku równości otrzymuje się badaną funkcję:

$$F_H(H_1) = \left(H_2 - \Delta x \cdot s + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_2^2} \right) - \left(H_1 + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_1^2} \right) + \frac{\Delta x}{2} (k_1 + k_2). \quad (3.48)$$



Rys. 3.14. Przebieg zmienności funkcji (3.48) przy kroku całkowania a) $\Delta x=0,5$ m, b) $\Delta x=25$ m.

Jak można zauważyć na wykresach (rys. 3.13 i 3.14), kształt funkcji (3.43) oraz (3.48) jest identyczny jak tej powstałej wskutek aproksymacji równania energii ogólnym schematem dwupoziomowym przy wartości parametru $\theta=0$ (jawny schemat Eulera). Fakt ten potwierdza wcześniej sformułowany wniosek, że kształt funkcji $F(H_1)$ zależy przede wszystkim od typu metody rozwiązywania - czy jest to metoda jawna, czy niejawna.

4. Analiza numerycznego rozwiązania zagadnienia brzegowego różniczkowego równania energii mechanicznej

4.1. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego metodą strzału

W hydraulice koryt otwartych zagadnienie brzegowe formułuje się, gdy konieczne jest wyznaczenie układu zwierciadła wody oraz parametru równania przepływu ustalonego niejednostajnego. Poszukiwanym parametrem jest zwykle natężenie przepływu lub średni współczynnik szorstkości kanału. W takim przypadku, do rozwiązania problemu konieczne jest zadanie dwóch warunków brzegowych – na początku i na końcu rozpatrywanego odcinka kanału. Otrzymuje się wówczas zagadnienie brzegowe w postaci (2.32) z warunkami (2.33a,b), w którym pojawia się dodatkowe równanie opisujące zmienność szukanego parametru wzdłuż kanału (2.34). Dla rozważanego tu równania energii (2.26) problem brzegowy można rozwiązać stosując znane metody rozwiązywania tego typu

zagadnień. Ich opis podają Stoer i Bulirsch (1980), Press i in. (1992) oraz Kincaid i Cheney (2002). Jeśli rozpatrujemy przepływ w pojedynczym kanale otwartym bardzo skuteczną jest metoda strzału. Polega ona na rozwiązywaniu ciągu zagadnień początkowych w postaci (2.28) z warunkiem początkowym w postaci pierwszego warunku brzegowego i wyborze takiego rozwiązania, które spełnia drugi warunek brzegowy.

Rozpatrzmy układ równań opisujących przepływ ustalony niejednostajny:

$$\frac{dE}{dx} = -S, \quad (4.1)$$

$$\frac{dQ}{dx} = q. \quad (4.2)$$

Energia mechaniczna przepływu E opisana jest poniższą formułą:

$$E = h + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A^2}. \quad (4.3)$$

Założmy, że na rozpatrywanym odcinku kanału nie ma dopływu bocznego, czyli $q=0$. W takiej sytuacji rozwiązanie równania (4.2) ma postać:

$$Q = \text{const.} \quad (4.4)$$

przy czym Q traktujemy jako niewiadomą. Jeśli z kolei założymy, że znane jest natężenie przepływu Q , a nieznany jest stały na długości kanału współczynnik szorstkości n , to równania opisujące ten przypadek przepływu przyjmą następującą postać:

$$\frac{dE}{dx} = -S, \quad (4.5)$$

$$\frac{dn}{dx} = 0. \quad (4.6)$$

Rozwiązanie równania (4.6) jest podobne do rozwiązania równania (4.2). Przy stałym współczynniku szorstkości ma ono postać:

$$n = \text{const.} \quad (4.7)$$

przy czym, jak wyżej wspomniano, jego wartość jest nieznana. Podsumowując, w trakcie rozwiązywania zagadnienia brzegowego dla równań ruchu ustalonego niejednostajnego rozwiązujemy równanie energii oraz jedno z dodatkowo wprowadzonych równań typu

(2.34) opisujących wzdłuż osi x albo natężenie przepływu Q czyli równanie ciągłości, albo średni współczynnik szorstkości kanału n .

Rozpatrzmy problem rozwiązania zagadnienia brzegowego (4.1), (4.2) przy nieznanej wartości wydatku Q . W przypadku rozpatrywanej metody strzału dla zadanego warunku na brzegu $x=0$

$$E(x=0) = E_0 = h_0 + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_0^2} \quad (4.8)$$

poszukujemy takiej funkcji $h(x)$ dla $x \in <0, L>$ oraz takiej wartości wydatku Q , dla której spełniony zostanie drugi warunek brzegowy:

$$E(x=L) = E_L = h_L + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_L^2} \quad (4.9)$$

Ponieważ położenie linii energii $E(x)$ (i linii ciśnień $h(x)$) jest zależne od wartości natężenia przepływu Q :

$$E = E(x, Q), \quad (4.10)$$

to rozwiązaniem będzie taka funkcja $E(x)$ oraz takie natężenie przepływu Q , dla którego będzie spełniony warunek

$$E(x=L, Q) - E_L = 0. \quad (4.11)$$

Inaczej mówiąc Q należy tak dobrać, aby obliczona funkcja $E(x)$ spełniała w punkcie $x=L$ zadany warunek brzegowy (4.9).

Podobny tok postępowania stosujemy, gdy zadane jest natężenie przepływu Q , a nieznany jest współczynnik szorstkości kanału n . W tym przypadku od funkcji $E(x)$ będącej rozwiązaniem równania (4.1) wymagamy, aby dla danej wartości n i zadanego warunku (4.8) spełniała drugi warunek brzegowy (4.9). Inaczej mówiąc n należy tak dobrać, aby obliczona funkcja $E(x)$ spełniała w punkcie $x=L$ warunek analogiczny do (4.11), czyli aby

$$E(x=L, n) - E_L = 0. \quad (4.12)$$

W celu wyznaczenia takiej wartości Q , dla której spełniony zostanie warunek (4.11) (lub (4.12) dla n) wprowadźmy funkcję opisującą różnicę między obliczoną wysokością

energii w końcowym przekroju a wartością, która została zadana jako warunek brzegowy. Funkcja taka w zależności od szukanej niewiadomej będzie miała postać:

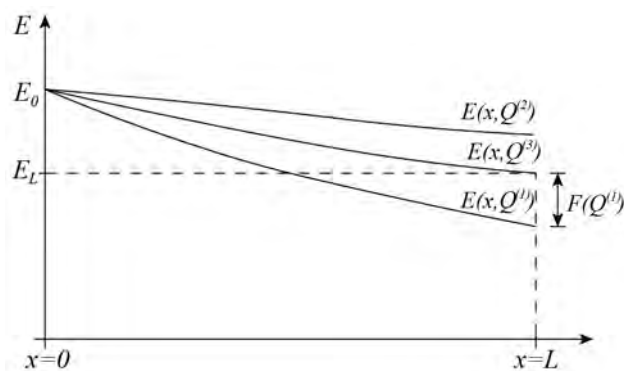
$$F(Q) = E(L, Q) - E_L, \quad (4.13)$$

gdy nieznane jest natężenie przepływu lub

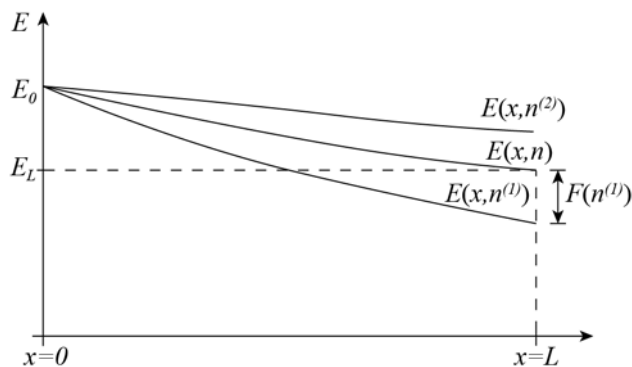
$$F(n) = E(L, n) - E_L, \quad (4.14)$$

gdy nieznany jest współczynnik szorstkości n .

Sposób postępowania w metodzie strzału przy rozwiązywaniu zagadnienia brzegowego polega na założeniu pewnej wartości natężenia przepływu lub współczynnika szorstkości i wyznaczeniu układu zwierciadła wody. Jeśli wartość funkcji (4.13) lub odpowiednio (4.14) jest dostatecznie bliska zeru oznacza to, że otrzymany układ zwierciadła wody oraz przyjęta wartość poszukiwanego parametru są rozwiązaniem rozważanego zagadnienia brzegowego. W przeciwnym wypadku, należy przyjąć inną wartość szukanego parametru i powtórzyć postępowanie. Graficzną interpretację tego postępowania przedstawiają rysunki 4.1 i 4.2.



Rys. 4.1. Ilustracja metody strzału w przypadku nieznanego natężenia przepływu Q .

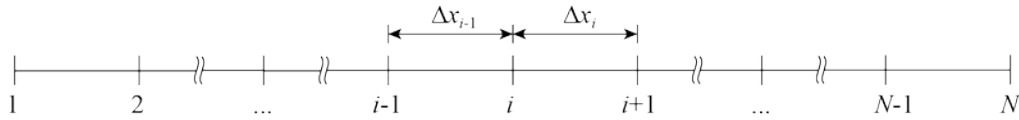


Rys. 4.2. Ilustracja metody strzału w przypadku nieznanego współczynnika szorstkości n .

Proces poszukiwania miejsca zerowego nieliniowej funkcji $F(Q)$ lub $F(n)$ można usprawnić. Zamiast metody prób i błędów należy zastosować jedną z metod rozwiązywania algebraicznych równań nieliniowych jednej zmiennej, taką jak metoda bisekcji, metoda Newtona itp.

4.2. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego metodą różnicową

Oprócz opisanej wyżej metody strzału do rozwiązywania zagadnienia brzegowego układu równań różniczkowych zwyczajnych można zastosować metodę różnicową. W metodzie tej rozpatrywany kanał o długości L , opisany przez N znanych przekrojów poprzecznych, dzielimy na $N-1$ odcinków obliczeniowych (rys. 4.3) o długości Δx_i .



Rys. 4.3. Podział kanału na odcinki obliczeniowe.

Następnie w środku każdego odcinka dokonuje się dyskretyzacji równań (4.1) i (4.2) stosując aproksymację różnicowym ilorazem centralnym. Jest to podejście równoważne niejawniej metodzie trapezowej. W wyniku aproksymacji otrzymuje się następującą formułę:

$$\frac{E_{i+1} - E_i}{\Delta x_i} + \frac{1}{2}(S_i + S_{i+1}) = 0, \quad (i = 1, \dots, N-1). \quad (4.15)$$

Ponieważ wcześniej pominięto dopływ boczny przyjmując $q=0$, z równania ciągłości (4.2) wynika warunek (4.4). Wykorzystując dalej znane zależności opisujące energię (4.3) oraz jej straty powstałe wskutek tarcia (2.4), równania (4.15) można przedstawić w znanej postaci:

$$\left(h_{i+1} + \frac{\alpha_{i+1} \cdot Q^2}{2g \cdot A_{i+1}^2} \right) - \left(h_i + \frac{\alpha_i \cdot Q^2}{2g \cdot A_i^2} \right) + \frac{\Delta x_i}{2} \left(\frac{n_i^2 \cdot |Q| \cdot Q}{R_i^{4/3} \cdot A_i^2} + \frac{n_{i+1}^2 \cdot |Q| \cdot Q}{R_{i+1}^{4/3} \cdot A_{i+1}^2} \right) = 0, \quad (4.16)$$

$(i = 1, \dots, N-1)$

Równania typu (4.16) obowiązują dla każdego odcinka obliczeniowego kanału. W ten sposób otrzymuje się układ $N-1$ równań. Tymczasem z opisu wynika, że w zadaniu wystąpi N niewiadomych wartości rzędnych zwierciadła wody w kolejnych przekrojach

kanału oraz nieznane natężenie przepływu Q , czyli łącznie $N+1$ niewiadomych. Aby zamknąć powyższy układ równań należy wprowadzić dwa dodatkowe równania wynikające z zadanych warunków na brzegach rozpatrywanego odcinka kanału. Są one następujące

$$E_1 = E_0 , \quad (4.17)$$

$$E_N = E_L . \quad (4.18)$$

W odniesieniu do równania energii przyjmą one postać

$$E_1 = h_1 + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_1^2} , \quad (4.19)$$

$$E_N = h_L + \frac{\alpha \cdot Q^2}{2g \cdot A_N^2} . \quad (4.20)$$

Dodając do układu (4.16) równania opisujące warunki brzegowe (4.17) i (4.18) otrzymuje się zamknięty układ algebraicznych równań nieliniowych o wymiarze $(N+1) \times (N+1)$. W notacji macierzowej układ ten można zapisać następująco:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} , \quad (4.21)$$

gdzie: $\mathbf{a}$ jest macierzą współczynników o następujących elementach:

$$a_{1,1} = 1, \quad a_{N,N} = 1, \quad (4.22a,b)$$

$$a_{i,i} = 1, \quad a_{i,i-1} = -1, \quad (i = 2, \dots, N+1) \quad (4.22c,d)$$

$$a_{i,N+1} = -\frac{\alpha_{i-1} \cdot Q}{2g \cdot A_{i-1}^2} + \frac{\alpha_i \cdot Q}{2g \cdot A_i^2} + \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \left(\frac{n_{i-1}^2 \cdot |Q|}{R_{i-1}^{4/3} \cdot A_{i-1}^2} + \frac{n_i^2 \cdot |Q|}{R_i^{4/3} \cdot A_i^2} \right), \quad (4.22e)$$

dla $i=1, 2, \dots, N+1$.

Elementy wektora prawych stron $\mathbf{b}$ są równe:

$$b_1 = E_0 , \quad (4.23a)$$

$$b_i = 0 , \quad (i = 2, \dots, N-1, N+1) \quad (4.23b)$$

$$b_N = E_L . \quad (4.23c)$$

Wektor niewiadomych $\mathbf{x}$ składa się z poszukiwanych rzędnych zwierciadła wody w każdym przekroju oraz niewiadomej będącej natężeniem przepływu:

$$\mathbf{x} = \{h_1, h_2, \dots, h_N, Q\}^T, \quad (4.24)$$

gdzie T jest symbolem transpozycji. Dla jaśniejszej ilustracji struktury układu (4.21) i jego macierzy współczynników układ rozpisano w poniższej postaci:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & & & & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & a_{2,N+1} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{N-1,N} & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N+1} \\ & & & & a_{N,N} & a_{N,N+1} \\ & & & & a_{N+1,N-1} & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E_L \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Ponieważ elementy macierzy współczynników są zależne od rozwiązania, to otrzymany układ równań (4.21) jest nieliniowy. Zauważmy, że dodatkowa nieliniowość zawarta jest w przyjętych warunkach brzegowych. Do rozwiązania układu (4.21) należy zastosować metodę iteracyjną. Okazuje się jednak, że powszechnie używane standardowe wersje znanych metod takich jak metoda gradientowa, metoda Picarda, czy metoda Newtona nie zawsze zapewniają sukces. Na przykład metoda Newtona pozwala czasami uzyskać rozwiązanie, lecz wymaga bardzo dobrego przybliżenia początkowego, co w praktyce trudno jest zapewnić. Skutecznym narzędziem rozwiązania wspomnianego układu może być pewna modyfikacja metody Picarda (Szymkiewicz, 2000). Modyfikacja ta polega na tym, że zamiast oryginalnego układu równań rozwiązuje się układ, ze zmodyfikowaną macierzą współczynników $\mathbf{a}^*$, czyli:

$$\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k)}, \quad (4.26)$$

gdzie k oznacza indeks iteracji. Zmodyfikowana macierz wyrażona jest następująco:

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} \left(\frac{\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{x}^{(k-1)}}{2} \right). \quad (4.27)$$

Wprowadzenie powyższej modyfikacji powoduje, iż otrzymany algorytm umożliwia osiągnięcie zbieżności praktycznie zawsze, dla dowolnego przybliżenia początkowego.

Jak wynika z równania (4.26), w każdej iteracji konieczne jest rozwiązanie układu równań liniowych. Układ ten należy rozwiązywać metodami dokładnymi, gdyż powszechnie stosowane metody iteracyjne mogą być rozbieżne. Warto również zauważyć, że macierz układu jest rzadka w związku z czym należy stosować metodę operującą tylko na niezerowych elementach macierzy. Proces iteracyjny jest kończony, gdy jednocześnie spełnione są poniższe warunki:

$$|h_i^{(k)} - h_i^{(k-1)}| \leq \varepsilon_h, \quad (4.28)$$

$$|Q^{(k)} - Q^{(k-1)}| \leq \varepsilon_Q, \quad (4.29)$$

gdzie $i=1, \dots, N$ jest indeksem przekroju obliczeniowego. Wartości ε_h i ε_Q oznaczają odpowiednio maksymalną dopuszczalną różnicę w dwóch kolejnych iteracjach wartości rzędnych zwierciadła wody oraz natężenia przepływu.

Metodę różnicową można z powodzeniem wykorzystać również do rozwiązania zagadnienia brzegowego w przypadku, gdy nieznany jest współczynnik szorstkości kanału n . Układ równań, który wówczas powstanie będzie bardzo podobny do układu (4.21). Elementy macierzy układu będą wyrażone następująco:

$$a_{1,1} = 1, \quad a_{N,N} = 1, \quad (4.30a,b)$$

$$a_{i,i} = 1, \quad a_{i,i-1} = -1, \quad (i = 2, \dots, N+1) \quad (4.30c,d)$$

$$a_{i,N+1} = \frac{\Delta x_{i-1}}{2} \left(\frac{n \cdot Q \cdot |Q|}{R_{i-1}^{4/3} \cdot A_{i-1}^2} + \frac{n \cdot Q \cdot |Q|}{R_i^{4/3} \cdot A_i^2} \right), \quad (4.30e)$$

dla $i=1, 2, \dots, N+1$.

Wektor prawych stron ma elementy opisane poniższymi formułami:

$$b_1 = E_0, \quad (4.31a)$$

$$b_i = \frac{\alpha_i \cdot Q}{2g \cdot A_{i-1}^2} - \frac{\alpha_i \cdot Q}{2g \cdot A_i^2} \quad (i = 2, \dots, N-1), \quad (4.31b)$$

$$b_N = E_L. \quad (4.31c)$$

Z kolei wektor niewiadomych $\mathbf{x}$ składa się z poszukiwanych rzędnych zwierciadła wody, lecz tym razem ostatnim elementem tego wektora jest zamiast poszukiwanej wartości natężenia przepływu Q , nieznany współczynnik szorstkości kanału.

$$\mathbf{x} = \{h_1, h_2, \dots, h_N, n\}^T. \quad (4.32)$$

Struktura tak sformułowanego układu równań jest następująca:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & & & & a_{1,N+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & a_{2,N+1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N+1} \\ & & & & a_{N,N} & a_{N,N+1} \\ & & & & a_{N+1,N-1} & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ E_L \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

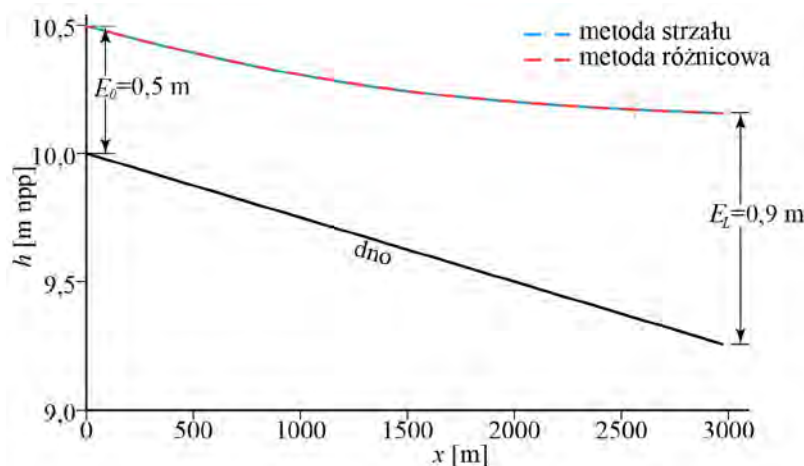
Do rozwiązania tego układu, można zastosować również zmodyfikowaną metodę Picarda. W tym wypadku warunkiem końca obliczeń jest spełnienie nierówności (4.28) oraz nierówności:

$$|n^{(k)} - n^{(k-1)}| \leq \varepsilon_n, \quad (4.34)$$

gdzie ε_n jest dodatnią liczbą określającą dokładność określenia współczynnika szorstkości n . Przykłady wykorzystania metody strzału oraz metody różnicowej do wyznaczenia układu zwierciadła wody i ilustrują przykłady 4.1 oraz 4.2.

Przykład 4.1.

Rozważmy przepływ w pryzmatycznym kanale o przekroju trapezowym, którego długość wynosi $L=3000$ m. Spadek dna kanału równy jest $s=0,00025$ [-], a współczynnik szorstkości wg Manninga $n=0,03$ s/m^{1/3}. Szerokość dna kanału równa jest $B=5$ m, a nachylenie ścian kanału $m=1,5$ [-]. Znane są wysokości energii w pierwszym i ostatnim przekroju, które wynoszą odpowiednio $E_0=0,5$ m i $E_L=0,9$ m. W kanale tym poszukiwany jest układ zwierciadła wody oraz natężenie przepływu. Kanał podzielono na 100 odcinków obliczeniowych o długości $\Delta x=30$ m.

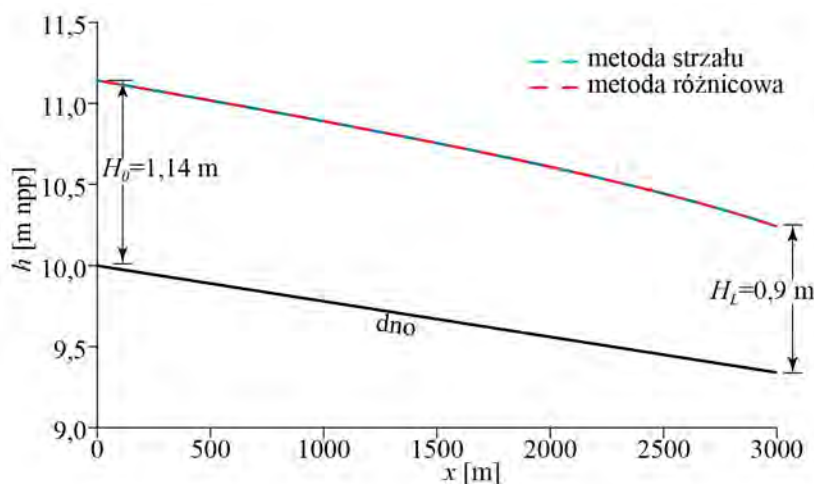


Rys. 4.4. Układ zwierciadła wody otrzymany jako rozwiązanie zagadnienia brzegowego z przykładu 4.1.

Do rozwiązania zadania użyto metody strzału oraz metody różnicowej. W metodzie strzału równanie (4.13) rozwiązano metodą bisekcji. Granice przedziału startowego przyjęto równe $\langle 0,001; 10 \rangle \text{ m}^3/\text{s}$. Rozwiązanie otrzymano po 17 iteracjach, przy dokładności $\varepsilon_Q = 0,00001 \text{ m}^3/\text{s}$. Natężenie przepływu obliczone metodą strzału wyniosło $Q = 0,7948 \text{ m}^3/\text{s}$. Otrzymany układ zwierciadła wody przedstawiono na rysunku 4.4 kolorem niebieskim. Zadanie to rozwiązano również metodą różnicową przyjmując wartość startową natężenia przepływu równą $Q^{(0)} = 2,36 \text{ m}^3/\text{s}$, wyznaczoną jak dla przepływu ustalonego jednostajnego. Obliczenia rozpoczęto przyjmując w pierwszej iteracji w każdym przekroju głębokości równe głębokości normalnej $H_n = 0,47 \text{ m}$. Dokładność rozwiązania przyjęto jako $\varepsilon_h = 0,00001 \text{ m}$ dla rzędnych zwierciadła wody i $\varepsilon_Q = 0,00001 \text{ m}^3/\text{s}$ dla wydatku. Rozwiązanie otrzymano po 17 iteracjach, a obliczony wydatek wyniósł $Q = 0,7947 \text{ m}^3/\text{s}$. Układ zwierciadła wody otrzymany w wyniku obliczeń metodą różnicową na rysunku 4.4 zaznaczono kolorem czerwonym.

Przykład 4.2.

Rozważmy przepływ o wydatku $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ w kanale o przekroju prostokątnym, którego długość wynosi $L = 3000 \text{ m}$. Szerokość kanału równa jest $B = 2,5 \text{ m}$, a jego spadek wynosi $s = 0,00012 [-]$. W kanale tym poszukiwany jest układ zwierciadła wody oraz średni współczynnik szorstkości wg Manninga. Znaleźć są głębokości wody w pierwszym i ostatnim przekroju, które wynoszą odpowiednio $H_0 = 1,14 \text{ m}$ i $H_L = 0,9 \text{ m}$. Kanał podzielono na 500 odcinków obliczeniowych o długości $\Delta x = 6 \text{ m}$.



Rys. 4.5. Układ zwierciadła wody otrzymany jako rozwiązanie zagadnienia brzegowego z przykładu 4.2.

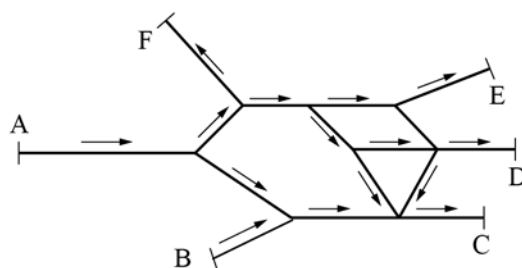
Identycznie jak w przykładzie poprzednim do rozwiązania zadania użyto metody strzału oraz metody różnicowej. W metodzie strzału, do wyznaczenia miejsca zerowego funkcji (4.14) wykorzystano metodę bisekcji. Przedział startowy metody połowienia przyjęto równy $\langle 0,001; 0,04 \rangle$ s/m^{1/3}. Rozwiązanie otrzymano po 9 iteracjach, przy dokładności $\varepsilon_n = 0,0001$ m^{-1/3}/s. Obliczony współczynnik szorstkości wyniósł $n = 0,0315$ s/m^{1/3}. Otrzymany układ zwierciadła wody narysowano niebieską linią na rysunku 4.5. W wyniku użycia metody różnicowej rozwiązanie otrzymano po 5 iteracjach, przyjmując jako punkt startowy do obliczeń współczynnika szorstkości wartość $n^{(0)} = 0,03$ s/m^{1/3}. Obliczona wartość współczynnika szorstkości wynosi $n = 0,0316$ s/m^{1/3}. Układ zwierciadła wody otrzymany w wyniku aplikacji metody różnicowej oznaczono linią czerwoną.

Z przykładów 4.1 oraz 4.2 wynika, że w przypadku kanału pojedynczego metoda strzału jak i metoda różnicowa dają niemal identyczne rozwiązania.

5. Rozwiązanie równania przepływu ustalonego niejednostajnego w sieciach kanałów otwartych

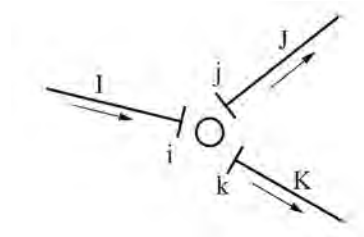
Chociaż przedstawione wcześniej obydwie metody rozwiązywania zagadnienia brzegowego w kanałach pojedynczych można uogólnić i zastosować do analizy przepływu ustalonego niejednostajnego w sieciach kanałów otwartych, to jednak okazuje się, że bardziej uniwersalną jest metoda różnicowa.

Schemat przykładowej sieci kanałów otwartych przedstawia rysunek 5.1.



Rys. 5.1. Przykład sieci kanałów otwartych (strzałki oznaczają założony kierunek przepływu).

Gdy rozważana jest sieć kanałów otwartych, to oprócz warunków brzegowych zadawanych w punktach skrajnych kanałów (oznaczonych na rysunku 5.1 literami A-F) należy zadać dodatkowe warunki obowiązujące w węzłach, w których łączą się kanały (rys. 5.2). Strzałki oznaczają założony kierunek przepływu. Dzięki tym równaniom, nazywanym często równaniami zgodności albo wewnętrznymi warunkami brzegowymi, układy równań zbudowane dla poszczególnych gałęzi w sposób opisany w poprzednim podrozdziale, można powiązać ze sobą tworząc globalny układ równań dla całej sieci.



Rys. 5.2. Połączenie trzech kanałów.

Dodatkowe równania wynikają z warunku zgodności wysokości energii oraz z zasady zachowania masy w połączeniach kanałów. Przy stałej gęstości wody zasada zachowania masy prowadzi do równania bilansu objętości wody. Jeśli założymy brak retencji w węźle, suma wydatków w kanałach wchodzących w skład połączenia jest równa zero. Warunek ten dla połączenia przedstawionego na rysunku 5.2 zapisuje się następująco:

$$Q_{I,i} = Q_{J,j} + Q_{K,k}, \quad (5.1)$$

gdzie duże litery (I, J, K) oznaczają indeksy kanałów, natomiast małe litery (i, j, k) oznaczają indeksy przekrojów tworzących połączenie. Z kolei przy braku strat lokalnych w połączeniu kanałów równanie gwarantujące zgodność wysokości energii można zapisać następująco:

$$h_{I,i} + \frac{\alpha_{I,i} \cdot Q_{I,i}^2}{2g \cdot A_{I,i}^2} = h_{J,j} + \frac{\alpha_{J,j} \cdot Q_{J,j}^2}{2g \cdot A_{J,j}^2} = h_{K,k} + \frac{\alpha_{K,k} \cdot Q_{K,k}^2}{2g \cdot A_{K,k}^2}. \quad (5.2)$$

Równania (5.1) i (5.2) opisują przypadek, kiedy w połączeniu zbiegają się trzy kanały. Podejście to można uogólnić i zastosować do opisanie połączenia składającego się z dowolnej liczby kanałów. Zapisanie powyższych równań oraz umowne określenie kierunku, w którym przepływ traktowany jest jako dodatni, umożliwia formalny opis jednowymiarowego przepływu ustalonego niejednostajnego w dowolnej sieci kanałów otwartych.

W literaturze przedmiotu można znaleźć próby zastosowania metody strzału oraz metody różnicowej do rozwiązania zagadnienia brzegowego w sieciach kanałów otwartych. Okazuje się, iż metoda strzału z powodzeniem może być stosowana do analizy przepływu w sieciach dendrycznych (U.S. Army Corps of Engineers, 1993; Misra, 1995). Przykładowo jest ona stosowana w popularnym oprogramowaniu do analizy przepływu w sieciach kanałów otwartych HEC-RAS. Jednak generalnie nie nadaje się ona do analizy przepływu w sieciach pierścieniowych. Przykłady rozwiązania zagadnienia brzegowego pewną modyfikacją metody strzału w przypadku szczególnym, jakim jest tzw. wpływ wyspy podają Chow (1959) i French (1985).

Bardziej ogólne podejście do analizy przepływu ustalonego niejednostajnego w sieciach kanałów otwartych umożliwia metoda różnicowa. W odróżnieniu od metody strzału metoda różnicowa oferuje elegancki pod względem formalnym zapis problemu, oraz pozwala formułować problem w jednakowy sposób niezależnie od rodzaju rozważanej sieci. Jednak podejście takie wymaga rozwiązania układu równań algebraicznych nieliniowych, którego rozmiar może być znaczny.

Okazuje się, że proste przeniesienie algorytmu metody różnicowej z kanału pojedynczego na sieć kanałów nie może być wykonane w sposób mechaniczny. Przy założeniu, że w każdym kanale sieci przepływ jest stały metoda Newtona zwykle jest zawodna. Celem ominięcia wymienionych trudności Schulte i Chaudhry (1987) przedstawili sposób rozwiązania zagadnienia brzegowego dla dowolnej sieci kanałów, w którym globalny układ równań opisujących przepływ w całej sieci kanałów zawiera zarówno równania aproksymujące równanie energii jak i równanie ciągłości. Powstały układ równań nieliniowych rozwiązano metodą Newtona. Autorzy zapisali równania przepływu ustalonego niejednostajnego w poniższej postaci:

$$y_{I,i} + \frac{\alpha_{I,i} \cdot Q_{I,i}^2}{2g \cdot A_{I,i}^2} + z_{I,i} = y_{I,i+1} + \frac{\alpha_{I,i+1} \cdot Q_{I,i+1}^2}{2g \cdot A_{I,i+1}^2} + z_{I,i+1} + \left(\frac{x_{I,i+1} - x_{I,i}}{2} \right) \cdot \left(\frac{Q_{I,i+1}^2 |Q_{I,i+1}| \cdot n_{I,i+1}^2}{C_0^2 A_{I,i+1}^2 R_{I,i+1}^{1,33}} + \frac{Q_{I,i}^2 |Q_{I,i}| \cdot n_{I,i}^2}{C_0^2 A_{I,i}^2 R_{I,i}^{1,33}} \right), \quad (5.3)$$

gdzie:

I - indeks kanału,

i – indeks przekroju w I -tym kanale,

$y_{I,i}$ - głębokość,

$z_{I,i}$ - rzędna dna,

$x_{I,i}$ - położenie przekroju,

C_0 - stała służąca do wyrażania wyników obliczeń w różnych jednostkach, dla układu SI

$C_0 = 1,0$.

Ponadto autorzy ci potraktowali wydatek w każdym przekroju obliczeniowym jako nieznan. W tym celu wykorzystali następującą aproksymację równania zachowania masy (4.2):

$$Q_{I,i+1} - Q_{I,i} = 0. \quad (5.4)$$

Należy zaznaczyć, że podejście takie zwiększa liczbę niewiadomych i chociaż z równania (5.4) wynikają takie same wartości przepływu we wszystkich przekrojach danego kanału, to w omawianym podejściu otrzymujemy je jako rozwiązanie układu. Równania (5.3) i (5.4) można zapisać dla każdego z $N_I - 1$ odcinków kanałów, przy czym N_I oznacza liczbę przekrojów w I -tym kanale. Natomiast indeks $I=1,2, \dots, M$, gdzie M oznacza liczbę kanałów wchodzących w skład sieci. W celu zamknięcia układu, konieczne jest wprowadzenie równań wynikających z warunków brzegowych:

$$y_{I,1} = y_{I,0}, \quad (5.5)$$

$$y_{I,N_I} = y_{I,L}, \quad (5.6)$$

które zadawane są w tym przekroju początkowym lub końcowym, który nie wchodzi w skład żadnego z połączeń. Przykładami takich przekrojów są te oznaczone literami A-F na rysunku 5.1. Po uwzględnieniu równań (5.1) i (5.2) opisujących połączenia sieci otrzymuje się zamknięty układ nieliniowych równań algebraicznych:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad (5.7)$$

w którym $\mathbf{A}$ jest macierzą układu, $\mathbf{B}$ jest wektorem prawych stron, a $\mathbf{X}$ jest wektorem niewiadomych wyrażonym następująco:

$$X_i = \{y_{I,i}, Q_{I,i}, y_{I,i+1}, Q_{I,i+1}\}^T, \quad \text{dla } I=1,2, \dots, M, \quad (5.8)$$

$$i=1,2, \dots, N_I-1.$$

Jak wykazali autorzy omawianego tu podejścia, układ ten może być rozwiązany metodą Newtona. W metodzie tej poszukuje się miejsca zerowego funkcji $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, czyli takiego wektora $\mathbf{X}$, dla którego zachodzi:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (5.9)$$

a kolejne przybliżenia rozwiązania oblicza się na podstawie wzorów:

$$\mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{X}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}), \quad (5.10)$$

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \Delta \mathbf{X}^{(k)}, \quad (5.11)$$

gdzie k oznacza indeks iteracji, $\mathbf{J}$ jest jakobianem, a $\Delta \mathbf{X}$ oznacza wektor odchyłek metody Newtona. Nie ma zatem konieczności budowania układu równań (5.7), a jedynie konieczne jest obliczanie wektora rezydualnego $\mathbf{F}(\mathbf{X})$. Funkcje skalarne będące składowymi wektora $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ wynikają z równań (5.3) oraz (5.4). Są one następujące:

$$F_m = y_{I,i+1} - y_{I,i} + z_{I,i+1} - z_{I,i} + \frac{1}{2g} \left(\frac{\alpha_{I,I+1} \cdot Q_{I,i+1}^2}{A_{I,i+1}^2} - \frac{\alpha_{I,i} \cdot Q_{I,i}^2}{A_{I,i}^2} \right) + \left(\frac{x_{I,i+1} - x_{I,i}}{2} \right) \cdot \left(\frac{|Q_{I,i+1}| Q_{I,i+1} \cdot n_{I,i+1}^2}{C_0^2 A_{I,i+1}^2 R_{I,i+1}^{1,33}} + \frac{|Q_{I,i}| Q_{I,i} \cdot n_{I,i}^2}{C_0^2 A_{I,i}^2 R_{I,i}^{1,33}} \right), \quad (5.12)$$

$$F_{m+1} = Q_{I,j+1} - Q_{I,j}. \quad (5.13)$$

Równania powyższe są zapisywane naprzemiennie dla głębokości i dla natężeń przepływu, przy czym funkcje oznaczone nieparzystym indeksem

$$m=1, 3, \dots, 2 \cdot \sum_{I=1}^M (N_I - 1) - 1.$$

reprezentują równanie dynamiczne (5.3) zaś funkcje oznaczone parzystą wartością indeksu reprezentują równanie (5.4).

Równanie bilansu objętości (5.1) w połączeniu składającym się z trzech kanałów zapisuje się w formie:

$$F_m = Q_{I,i} + Q_{J,j} + Q_{K,k}, \quad (5.14)$$

a warunek zgodności wysokości energii (5.2) przyjmuje postać równań:

$$F_{m+1} = h_{I,i} + \frac{\alpha_{I,i} \cdot Q_{I,i}^2}{2g \cdot A_{I,i}^2} - h_{J,j} - \frac{\alpha_{J,j} \cdot Q_{J,j}^2}{2g \cdot A_{J,j}^2}, \quad (5.15)$$

$$F_{m+2} = h_{I,i} + \frac{\alpha_{I,i} \cdot Q_{I,i}^2}{2g \cdot A_{I,i}^2} - h_{K,k} - \frac{\alpha_{K,k} \cdot Q_{K,k}^2}{2g \cdot A_{K,k}^2}, \quad (5.16)$$

gdzie i, j oraz k są indeksami przekrojów, natomiast I, J oraz K są indeksami kanałów wchodzących w skład połączenia, zawierającymi odpowiednio przekrój i, j lub k . Indeks równania m będzie przyjmował następujące wartości

$$m = 2 \cdot \sum_{I=1}^M (N_I - 1), \dots, 2 \cdot \sum_{I=1}^M (N_I - 1) + P,$$

gdzie P jest liczbą połączeń. Równania skalarne opisujące zadane warunki brzegowe zapisuje się jako:

$$F_m = y_{I,1} - y_{I,0}, \quad (5.17)$$

jeżeli warunek zadano w pierwszym przekroju kanału o indeksie I lub

$$F_m = y_{I,N_I} - y_{I,L}, \quad (5.18)$$

jeżeli warunek został zadany w ostatnim przekroju tego kanału, dla

$$m = 2 \cdot \sum_{I=1}^M (N_I - 1) + P, \dots, 2 \cdot \sum_{I=1}^M N_I.$$

Założenie nieznanego wydatku w każdym z przekrojów obliczeniowych pozwoliło uzyskać macierz Jacobiego o pasmowej strukturze. Dzięki temu układ ten ma dobre własności jeśli chodzi o zbieżność metody Newtona. Wadą tego podejścia jest konieczność rozwiązania układu równań nieliniowych, w którym liczba niewiadomych równa jest podwojonej liczbie przekrojów w całej sieci. Ponieważ założono stałe wydatki Q_I w każdym z kanałów, to zastosowane podejście w sposób nieuzasadniony zwiększa rozmiary układu równań.

Dla sieci kanałów, tak samo jak dla kanału pojedynczego można zastosować podejście zaproponowane przez Szymkiewicza i Szymkiewicza (2004). Wydaje się ono bardziej efektywne, gdyż pozwala zmniejszyć liczbę niewiadomych do wartości równej sumie liczby przekrojów obliczeniowych oraz liczby kanałów tworzących sieć i nie wymaga obliczania macierzy Jacobiego.

W celu utworzenia układu równań dla sieci kanałów otwartych należy dla każdego z kanałów tworzących sieć zapisać układ (4.21). Żeby zamknąć układ konieczne jest zapisanie równań opisujących połączenia kanałów (5.1) i (5.2), a także równań opisujących zadane warunki brzegowe (4.17) i (4.18) zgodnie z procedurą opisaną w podrozdziale 4.2. W rezultacie, podobnie jak w przypadku zastosowania poprzedniego wariantu metody różnicowej do jednego kanału otrzymuje się układ równań algebraicznych nieliniowych:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}. \quad (5.19)$$

Jego rozwiązaniem jest układ zwierciadła wody, czyli funkcje $h(x)$ w poszczególnych kanałach oraz natężenie przepływu Q_I dla każdego kanału w sieci. Macierz układu równań $\mathbf{A}$ składa się z podmacierzy $\mathbf{a}_I$ opisanych wzorem (4.21), gdzie I oznacza indeks kanału, dla którego została zbudowana dana podmacierz. Wektor prawych stron $\mathbf{B}$ zawiera warunki brzegowe zadane w początkowych lub końcowych przekrojach kanałów, które nie wchodzą w skład połączeń. Wektor niewiadomych $\mathbf{X}$ składa się z rzędnych zwierciadła wody w przekrojach oraz natężeń przepływu w każdym z kanałów wchodzących w skład sieci.

$$\mathbf{X} = \{h_{1,1}, h_{1,2}, \dots, h_{1,N_1}, Q_1, \dots, h_{1,1}, h_{2,2}, \dots, h_{2,N_2} \dots$$

$$h_{I,1}, h_{I,2}, \dots, h_{I,N_I}, \dots, h_{M,1}, h_{M,2}, \dots, h_{M,N_M}, Q_M\}^T. \quad (5.20)$$

Rozwiązanie układu równań (5.19) można uzyskać stosując zmodyfikowaną metodę Picarda przedstawioną w podrozdziale 4.2. Metoda ta jest zbieżna liniowo do rozwiązania.

Interesujące jest zatem pytanie o możliwość uzyskania szybszej zbieżności do rozwiązania niż liniowa. Metoda Newtona gwarantuje kwadratową zbieżność do rozwiązania, ale tylko w przypadku, gdy pierwsze przybliżenie rozwiązania znajduje się w jej tzw. promieniu zbieżności, czyli jest dostatecznie bliskie rozwiązaniu (Argyros, 2008). W przeciwnym wypadku metoda Newtona nie gwarantuje zbieżności do rozwiązania i prowadząc zwykle do załamania obliczeń.

Aby rozwiązać układ (5.19) metodą Newtona, konieczne jest zapisanie go jako funkcji wektorowej:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} - \mathbf{B}. \quad (5.21)$$

Poszukiwane jest miejsce zerowe tej funkcji, czyli taki wektor $\mathbf{X}$, dla którego zachodzi

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}. \quad (5.22)$$

Celem zapewnienia zbieżności rozwiązania metoda Newtona wymaga dobrego punktu startowego. W przypadku problemu brzegowego dla sieci kanałów, określenie wystarczająco dobrego przybliżenia początkowego jest trudne. Dodatkowo, od obliczonego w każdej iteracji wektora odchyłek $\Delta\mathbf{X}^{(k)}$ wymaga się, aby spełniał on poniższą nierówność (Kelly, 2003):

$$\|\mathbf{J}(\mathbf{X}^{(k)}) \cdot \Delta\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})\| \leq \eta \|\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})\|, \quad (5.23)$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest normą euklidesową, czyli długością wektora, a η oznacza błąd wprowadzany przez niedokładność rozwiązania układu równań liniowych powstającego w każdej iteracji oraz niedokładność oszacowania jacobianu. Użycie metody dokładnej do rozwiązania układu równań liniowych oraz analityczne wyznaczenie jacobianu uzasadnia przyjęcie $\eta=0$. Jak pokazuje praktyka, nierówność (5.23) zwykle jest spełniona więc nie ma formalnych przeszkód, ażeby otrzymać rozwiązanie przy użyciu metody Newtona.

Aby poprawić zbieżność metody Newtona konieczne jest wprowadzenie pewnych modyfikacji. Większość znanych modyfikacji mających na celu poprawienie zbieżności procedury obliczeniowej polega na ograniczeniu wielkości wektora poprawek $\Delta\mathbf{X}$. Największym jednak problemem jest to, iż funkcja $\mathbf{F}$ jest określona tylko dla wartości rzędnych zwierciadła wody większych od rzędnej dna. W związku z tym w sytuacji, gdy w trakcie procesu iteracyjnego któraś z poszukiwanych rzędnych zwierciadła wody osiągnie wartość mniejszą od rzędnej dna powoduje to załamanie obliczeń i brak możliwości

uzyskania rozwiązania. Wyrażną poprawę zbieżności procesu iteracyjnego otrzymuje się przez znaczne zmniejszenie wektora poprawek $\Delta \mathbf{X}^{(k)}$ na co pozwala wprowadzenie współczynnika skalującego λ :

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \lambda \cdot \Delta \mathbf{X}^{(k)}. \quad (5.24)$$

Testy numeryczne wykazały, że przy dwudziestokrotnym zmniejszeniu wektora odchyłek ($\lambda=0,01$) otrzymano algorytm, który pozwolił uzyskać zbieżność właściwie dla każdego zadania testowego. Jednak tempo zbieżności procesu iteracyjnego jest tak wolne, że stosowanie metody Newtona w takiej formie staje się nieatrakcyjne.

Warto dodać, że niekiedy możliwe jest otrzymanie rozwiązania układu równań (5.19) metodą Newtona, bez wprowadzania żadnej modyfikacji, co obrazuje poniższy przykład 5.1.

Przykład 5.1.

Rozważmy przepływ w sieci złożonej z czterech kanałów, której schemat przedstawiono na rysunku 5.3. Sieć ta odzwierciedla przypadek tzw. opływu wyspy. Pierwszy i czwarty kanał mają szerokość $B=5$ m, a drugi i trzeci kanał $B=2$ m. Pozostałe parametry kanałów są identyczne i mają następujące wartości: spadek dna $s=0,00015$ [-], nachylenie skarp $m=1,5$ [-], długość kanału $L=3000$ m, współczynnik szorstkości $n=0,03$ s/m^{1/3}. W pierwszym i czwartym kanale jako warunki brzegowe zadano głębokości równe $H_A=1,0$ i $H_B=0,8$ m. Jako przybliżenie początkowe w każdym z kanałów zadano stałą głębokość $H^{(0)}$ wynikającą wprost z zadanych warunków brzegowych. Wartość kroku przyjęto równą $\Delta x=100$ m.

Tab. 5.1. Przybliżenie początkowe.

Kanał	Głębokość $H^{(0)}$ [m]	Wydatek $Q^{(0)}$ [m ³ /s]
1	1,0	0,223
2	1,0	0,750
3	1,0	0,750
4	0,8	0,813



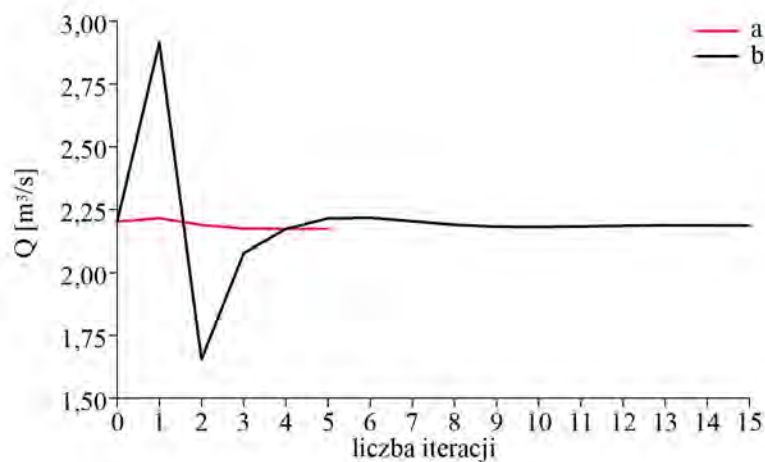
Rys. 5.3. Schemat sieci kanałów opływ wyspy (strzałki oznaczają dodatni kierunek przepływu).

Stosując metodę Newtona rozwiązanie otrzymano po zaledwie 5 iteracjach, natomiast wykorzystując zmodyfikowaną metodę Picarda, do uzyskania rozwiązania o tej samej dokładności konieczne było wykonanie 15 iteracji. Test końca obliczeń oprócz spełnienia warunków (4.28) i (4.29) wymaga również spełnienia poniższej nierówności:

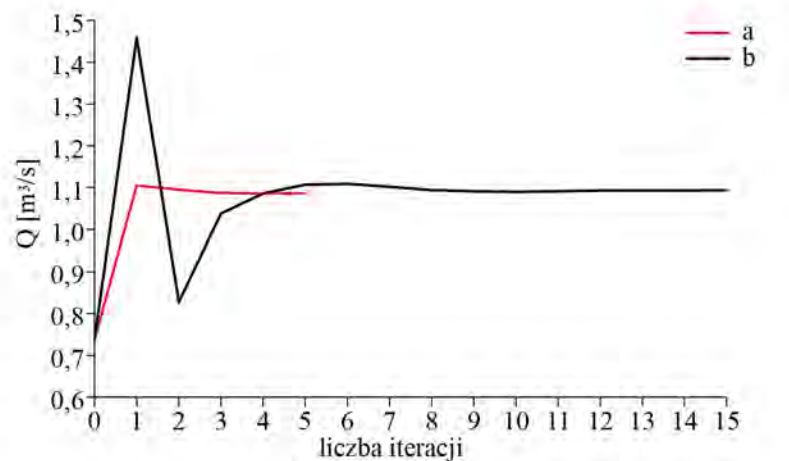
$$\| \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)}) \| \leq \varepsilon_F, \quad (5.25)$$

gdzie ε_F , oznacza dopuszczalną długość wektora rezydualnego. Wymagana dokładność rozwiązania była określona poprzez wartości $\varepsilon_F=0,0001$ [-]. $\varepsilon_H=0,001$ m oraz $\varepsilon_Q=0,001$ m³/s.

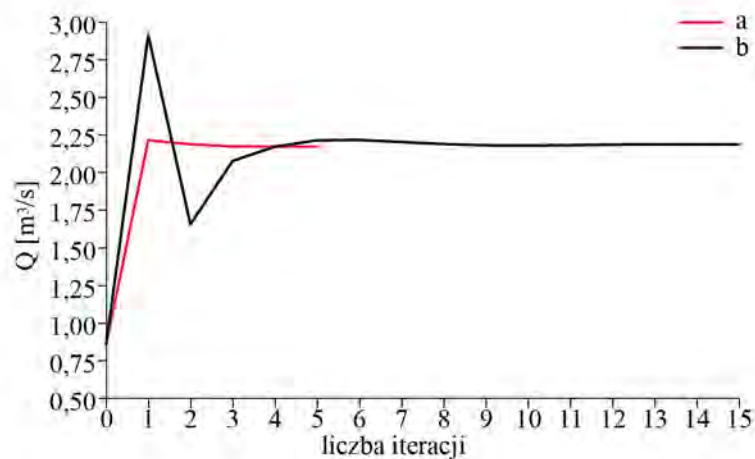
Zbieżność wartości natężenia przepływu dla metody Picarda oraz metody Newtona przedstawiają rysunki 5.4-5.6. Natomiast rysunki 5.7 i 5.8 przedstawiają układ zwierciadła wody otrzymywany w procesie iteracyjnym metody Newtona i metody Picarda.



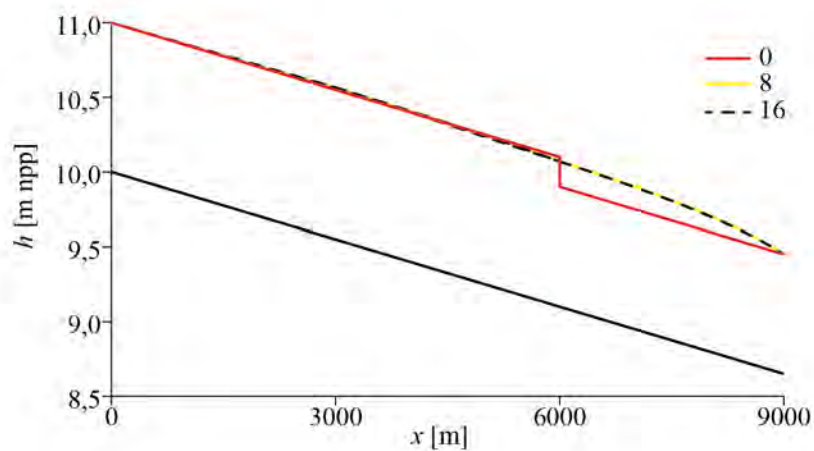
Rys. 5.4. Proces zbieżności wartości natężenia przepływu w kanale nr 1:
a) metoda Newtona, b) zmodyfikowana metoda Picarda.



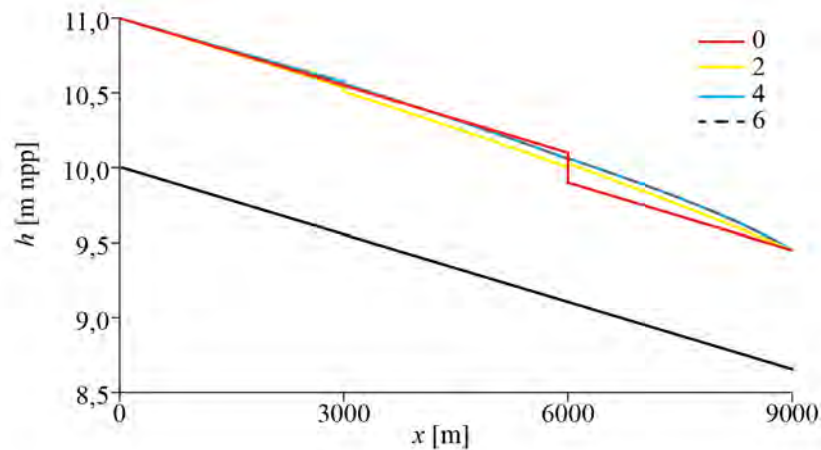
Rys. 5.5. Proces zbieżności wartości natężenia przepływu w kanale nr 2 i 3:
a) metoda Newtona, b) zmodyfikowana metoda Picarda.



Rys. 5.6. Proces zbieżności wartości natężenia przepływu w kanale nr 4:
a) metoda Newtona, b) zmodyfikowana metoda Picarda.



Rys. 5.7. Proces zbieżności linii zwierciadła wody w kanałach 1, 2 i 4 w metodzie Picarda, różne kolory oznaczają indeks iteracji podany w legendzie.



Rys. 5.8. Proces zbieżności linii zwierciadła wody w kanałach nr 1, 2 i 4 w metodzie Newtona, różne kolory oznaczają indeks iteracji podany w legendzie.

W przypadkach, w których metoda Newtona w standardowej postaci zawodzi, znaczną poprawę zbieżności procesu iteracyjnego można uzyskać poprzez zmniejszanie wektora $\Delta \mathbf{X}$. Jednak zbyt mała długość wektora odchyłek powoduje, że proces iteracyjny staje się mniej efektywny. Zatem rozsądną koncepcją jest stosowanie zmiennej długości wektora odchyłek (przy zachowaniu jego kierunku) w zależności od własności funkcji w sąsiedztwie danego punktu $\mathbf{X}^{(k)}$. Koncepcję taką wykorzystuje algorytm zwany zasadą Armijo. Jeśli funkcja, której miejsca zerowego się poszukuje spełnia szereg założeń, z których najważniejszym jest ciągłość w sensie Lipschitza, to zasada Armijo powinna pozwolić na uzyskanie rozwiązania (Kelly, 2003). Jest to algorytm będący modyfikacją metody Newtona, w której współczynnik skalujący λ oblicza się jako wartość będącą lokalnym minimum funkcji:

$$\phi(\lambda) = \left\| \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)} + \lambda \cdot \Delta \mathbf{X}^{(k)}) \right\|^2 \quad (5.26)$$

w przyjętym *a priori* przedziale:

$$\lambda \in \left\langle \frac{1}{2} \lambda_0, \frac{1}{10} \lambda_0 \right\rangle. \quad (5.27)$$

Symbol λ_0 oznacza początkowo przyjętą wartość czynnika skalującego (zwykle $\lambda_0=1$). Zmniejszanie wartości współczynnika skalującego prowadzi się tak długo, aż spełniona zostanie nierówność:

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)} + \lambda \cdot \Delta \mathbf{X}^{(k)})\| \leq (1 - \delta \cdot \lambda) \|\mathbf{F}(\mathbf{X}^{(k)})\|, \quad (5.28)$$

gdzie δ jest arbitralnie przyjmowaną wartością, zwykle równą $\delta=10^{-3}$. W celu znalezienia minimum funkcji (5.26) w przedziale (5.27), funkcję tę interpoluje się wielomianem kwadratowym dla trzech ostatnio obliczonych wartości współczynnika skalującego λ . Następnie z pewnym krokiem oblicza się wartości wielomianu interpolującego w przedziale (5.27) i wybiera się taki współczynnik skalujący λ , dla którego wartość obliczonej funkcji okazała się najmniejsza. Jednak przytoczona tu modyfikacja metody Newtona gwarantuje zbieżność tylko w przypadku, gdy funkcja $\mathbf{F}$ spełnia wszystkie założenia wymagane przez metodę Newtona (w szczególności ciągłość), a jedynie punkt startowy $\mathbf{X}^{(0)}$ nie znajduje się w promieniu zbieżności. W innym przypadku, modyfikacja ta może zapewnić sukces lub nie.

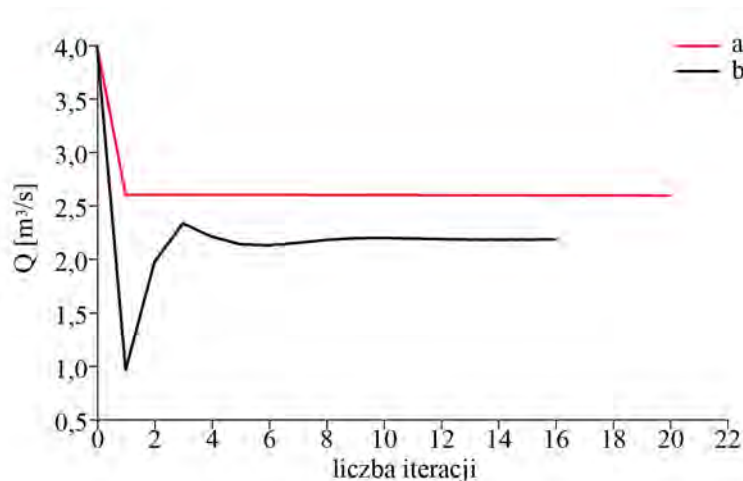
Przykład 5.2.

Rozważmy przykład identyczny jak 5.1, ale wprowadźmy inne przybliżenie początkowe poszukiwanej wartości natężenia przepływu.

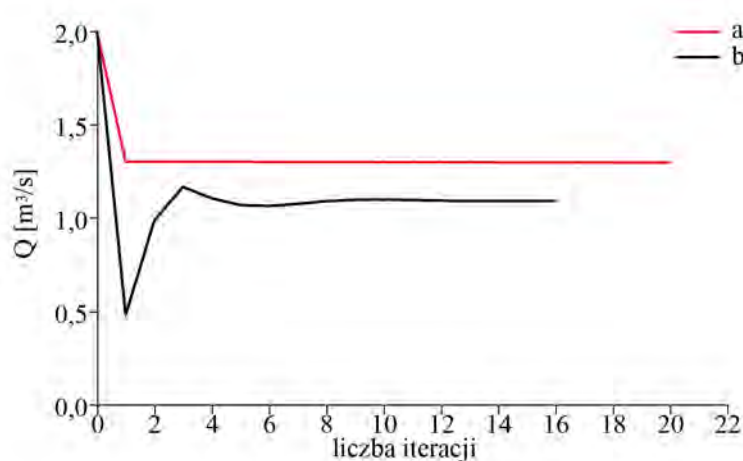
Tab. 5.2. Przybliżenie początkowe.

Kanał	Głębokość $H^{(0)}$ [m]	Wydatek $Q^{(0)}$ [m ³ /s]
1	1,0	4,0
2	1,0	2,0
3	1,0	2,0
4	0,8	4,0

Zbieżność wydatku w kanałach nr 1 oraz nr 2 ilustrują rysunki 5.9 oraz 5.10.



Rys. 5.9. Proces zbieżności wartości natężenia przepływu w kanale nr 1:
a) metoda Newtona, b) zmodyfikowana metoda Picarda.



Rys. 5.10. Proces zbieżności wartości natężenia przepływu w kanale nr 2:
a) metoda Newtona, b) zmodyfikowana metoda Picarda.

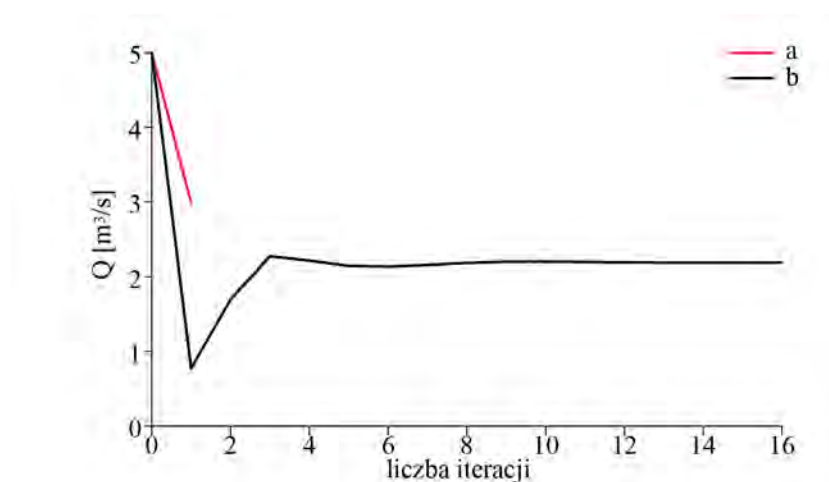
Zmiana przyjętego punktu startowego spowodowała, iż współczynnik skalujący wektora poprawek osiągnął bardzo małą wartość ($\lambda \sim 10^{-5}$) przez co proces iteracyjny metody Newtona uległ stagnacji. Natomiast zastosowanie metody Picarda pozwoliło zakończyć obliczenia sukcesem.

Przyjmując następnie punkt startowy, odbiegający jeszcze bardziej niż poprzednio od poszukiwanego rozwiązania, metoda Newtona, prowadzi do załamania obliczeń już w drugiej iteracji. Przyjęte przybliżenie początkowe przedstawiono w tabeli 5.3.

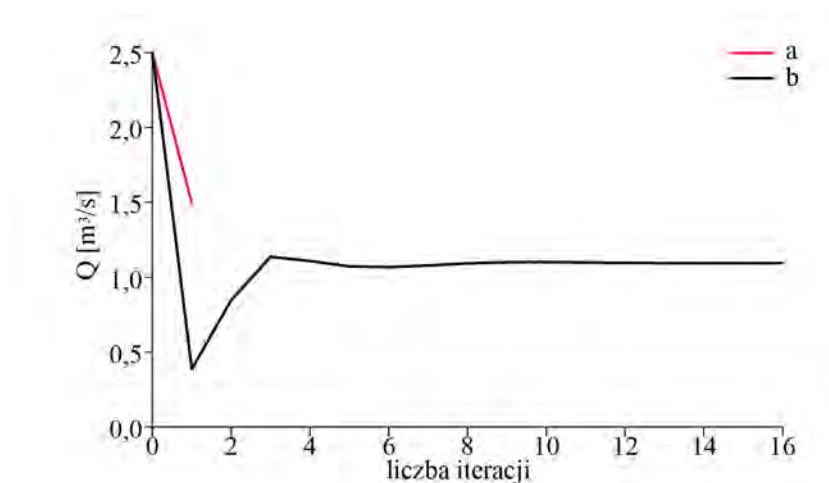
Tab. 5.3. Przybliżenie początkowe.

Kanał	Głębokość $H^{(0)}$ [m]	Wydatek $Q^{(0)}$ [m ³ /s]
1	1,0	5,0
2	1,0	2,5
3	1,0	2,5
4	0,8	5,0

Rysunki 5.11 i 5.12 przedstawiają zbieżność dla tego przypadku. Załamanie obliczeń metodą Newtona nastąpiło przy próbie wykonania drugiej iteracji.



Rys. 5.11. Proces zbieżności wartości natężenia przepływu w kanale nr 1:
a) metoda Newtona, b) zmodyfikowana metoda Picarda.

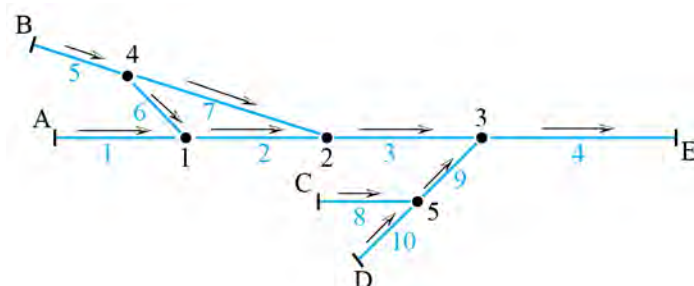


Rys. 5.12. Proces zbieżności wartości natężenia przepływu w kanale nr 2.
a) metoda Newtona, b) zmodyfikowana metoda Picarda.

Przykład 5.2 pokazuje, że w przypadku rozważanego tu układu równań (5.19) zasada Armijo nie daje gwarancji sukcesu. Przykład kolejny potwierdza tę uwagę.

Przykład 5.3.

Rozważmy przepływ w sieci przedstawionej na rysunku 5.13. Własności kanałów tworzących sieć przedstawiono w tabeli 5.4.

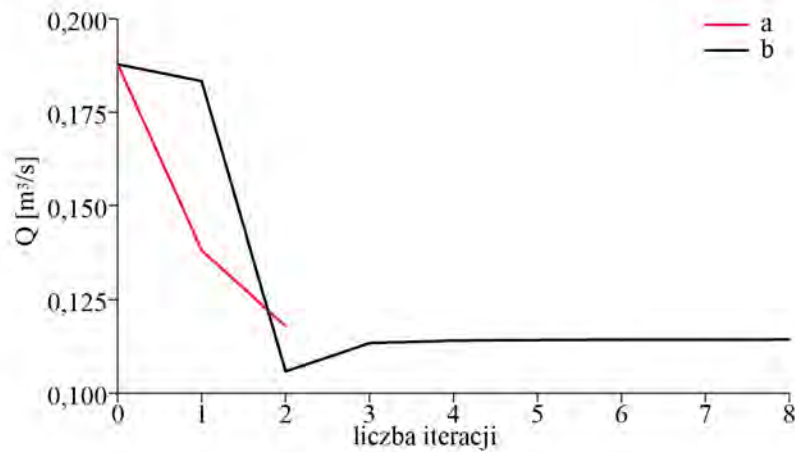


Rys. 5.13. Sieć kanałów (strzałki oznaczają założony kierunek przepływu).

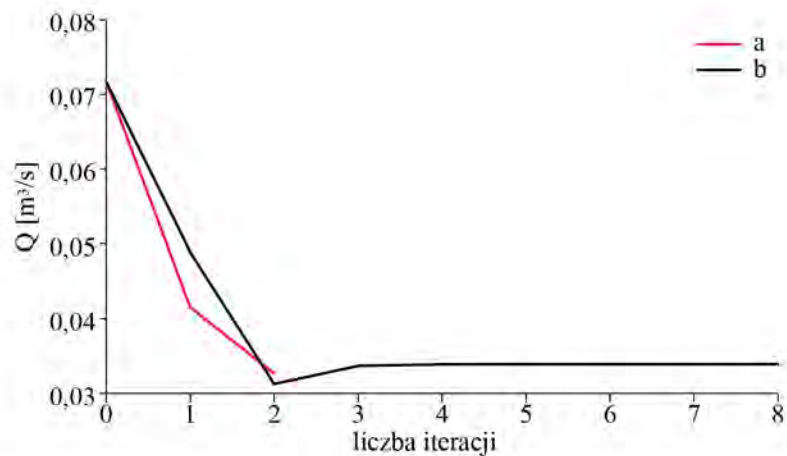
Tab. 5.4. Własności kanałów tworzących sieć z przykładu 5.3.

Nr kanału	Spadek dna s [-]	Szerokość dna B [m]	Długość L [m]	Wsp. szorstkości n [s/m ^{1/3}]
1	0,00002	2,0	1000	0,020
2	0,00001	2,0	1000	0,025
3	0,00001	3,0	1500	0,030
4	0,00001	6,0	2000	0,030
5	0,00002	2,0	1000	0,025
6	0,00002	1,0	800	0,020
7	0,00002	2,0	1200	0,030
8	0,00001	1,0	1000	0,030
9	0,00002	2,0	1000	0,028
10	0,00002	2,0	1000	0,020

Rzędne dna kanałów w połączeniach są zgodne, a więc nie występują tam nagłe skokowe zmiany położenia dna. We wszystkich przekrojach skrajnych nie tworzących połączeń, jako warunek brzegowy zadano głębokość wynoszącą $H_A=H_B=H_C=H_D=H_E=1$ m. Dokładność rozwiązania określona jest wartościami $\varepsilon_F=0,001$ [-], $\varepsilon_H=0,001$ m oraz $\varepsilon_Q=0,001$ m³/s. W tym przypadku, metoda Newtona prowadzi do uzyskania rozwiązania już po dwóch iteracjach. Zbieżność wartości natężenia przepływu w kanałach pierwszym i szóstym przedstawiono na rysunkach 5.14 i 5.15.

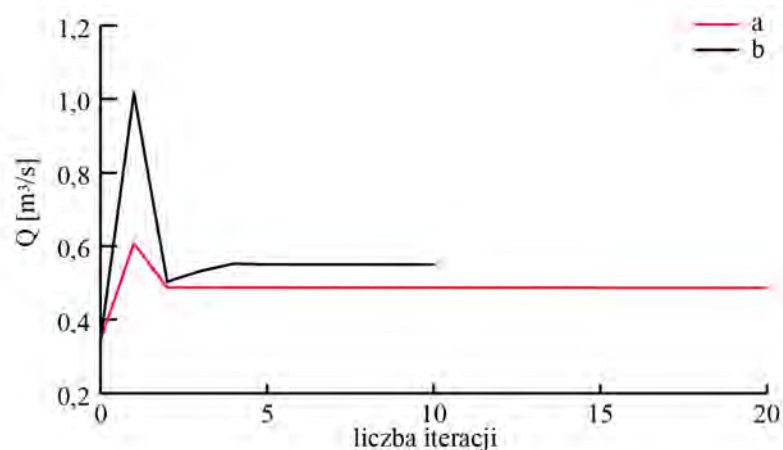


Rys. 5.14. Proces zbieżności wartości natężenia przepływu w kanale nr 1:
a) metoda Newtona, b) zmodyfikowana metoda Picarda.

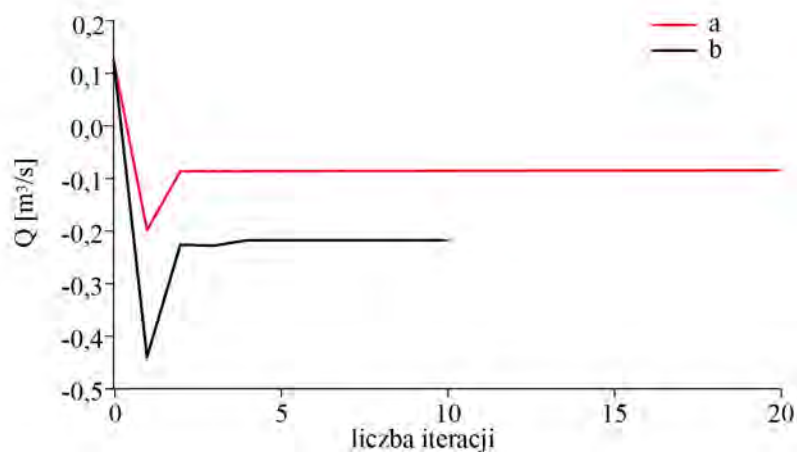


Rys. 5.15. Proces zbieżności wartości natężenia przepływu w kanale nr 6:
a) metoda Newtona, b) zmodyfikowana metoda Picarda.

Po zmianie warunków brzegowych $H_A=H_B=1,6$ m, $H_C=1,4$ m, $H_D=1,5$ m, $H_E=1,4$ m ciąg iteracyjny metody Newtona staje się niezbieżny, a wprowadzona modyfikacja algorytmu prowadzi do obliczenia bardzo małych wartości współczynnika skalującego ($\lambda \sim 10^{-6}$), co powoduje że proces iteracyjny właściwie nie powoduje poprawiania wektora rozwiązań w kolejnych iteracjach. Wartości natężenia przepływu w kolejnych iteracjach przedstawiają rysunki 5.16 i 5.17. Jak można zauważyć wartości otrzymane przy pomocy metody Picarda i metody Newtona są różne. Wynika to z tego, iż w metodzie Newtona nie udało się zakończyć procesu iteracyjnego, a niezmienniczące się wartości natężenia przepływu są wynikiem jego stagnacji.



Rys. 5.16. Proces zbieżności wartości natężenia przepływu w kanale nr 1:
a) metoda Newtona, b) zmodyfikowana metoda Picarda.



Rys. 5.17. Proces zbieżności wartości natężenia przepływu w kanale nr 6:
a) metoda Newtona, b) zmodyfikowana metoda Picarda.

Pomimo tego, że niekiedy metoda Newtona pozwala uzyskać rozwiązanie, nawet znacznie szybciej niż metoda Picarda, to nie ma żadnej gwarancji, iż doprowadzi ona w ogóle do rozwiązania. Podstawowym wymogiem zbieżności metody Newtona, jest to, iż funkcja musi być ciągła w sensie warunku Lipschitza. Bez konieczności przytaczania dowodu na to, iż funkcja $F(\mathbf{X})$ jest nieciągła w sensie Lipschitza, można stwierdzić, że nie jest ciągła jeśli zawiera wyrażenia takie jak wartość bezwzględna, norma wektora, czy niecałkowita potęga niewiadomej lub funkcje interpolowane na podstawie tabeli danych (Kelly, 2003). Sugeruje to, że funkcja wektorowa (5.21) nie jest ciągła w sensie Lipschitza, gdyż zawiera prawie wszystkie wymienione cechy. Jeśli tak jest, proces iteracyjny metody Newtona może być nieprzewidywalny nawet pomimo spełnienia nierówności (5.23) i (5.28) (Kelly, 2003). Należy zatem uznać zmodyfikowaną metodę Picarda jako bardziej skuteczną alternatywę dla metody Newtona przy rozwiązywaniu układu równań (5.19).

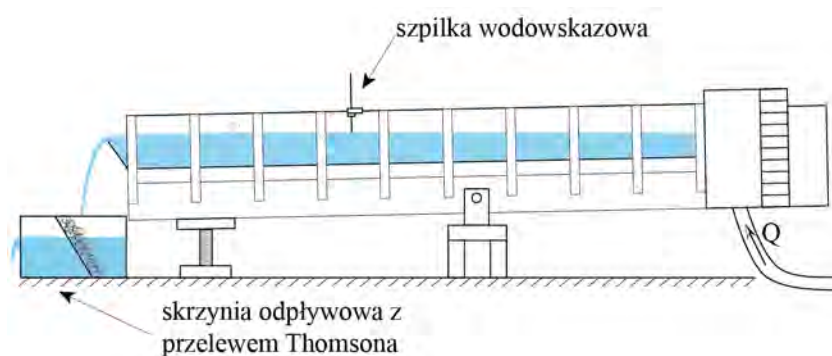
6. Weryfikacja rozwiązań numerycznych

W celu sprawdzenia poprawności matematycznego modelu przepływu w kanałach otwartych i ich sieciach oraz poprawności hipotezy dotyczącej charakteru pierwiastków dyskretnej formy równania przepływu ustalonego niejednostajnego, model poddano weryfikacji. W związku z tym przeprowadzono szereg eksperymentów fizycznych mających na celu odwzorowanie modelowanych zjawisk. Badania laboratoryjne dotyczyły tylko niektórych przypadków przepływu ustalonego niejednostajnego, a mianowicie takich, których odtworzenie było możliwe w warunkach występujących w laboratorium. Pierwsza część badań fizycznych miała na celu weryfikację równania energii jako modelu przepływu ustalonego niejednostajnego w kanałach otwartych oraz sieciach kanałów otwartych. Weryfikacji poddano metody rozwiązywania zagadnienia początkowego oraz brzegowego dla kanałów pojedynczych, a także zagadnienia brzegowego dla sieci kanałów. Druga część eksperymentów miała na celu umożliwienie interpretacji pierwiastków dyskretnej postaci równania energii, którego analizę przeprowadzono w rozdziale 3. Ocena stopnia zgodności między wynikami obliczeń, a pomiarami ma na celu weryfikację modelu zarówno pod względem jakościowym jak i ilościowym.

Badania przeprowadzono w laboratorium hydraulicznym Wydziału Inżynierii Lądowej i Środowiska Politechniki Gdańskiej. W celu przeprowadzenia eksperymentów fizycznych zaprojektowano i zbudowano bądź wykorzystano istniejące stanowiska umożliwiające odtworzenie zjawisk hydraulicznych, które były przedmiotem analizy w niniejszej pracy. W poniższych podrozdziałach przedstawiono opis stanowisk, wyniki pomiarów oraz wyniki obliczeń.

6.1. Przepływ ustalony niejednostajny w pryzmatycznym kanale prostokątnym

Pierwszy eksperyment dotyczył przepływu ustalonego niejednostajnego w kanale uchylnym. Długość kanału wynosi $L=10$ m, szerokość jego dna $B=0,4$ m a maksymalna głębokość to $H_{max}=0,5$ m. Dno kanału wykonane jest ze stali pokrytej częściowo farbą emaliowaną, a jego ściany wykonane są ze szkła. W kanale tym można regulować spadek dna, co umożliwia odwzorowanie różnych warunków przepływu. Schemat stanowiska badawczego przedstawiono na rysunku 6.1, a zdjęcie stanowiska przedstawiono na fotografii 6.1.



Rys. 6.1. Schemat kanału uchylnego.



Fot. 6.1. Kanał uchylny w laboratorium WILIŚ PG.

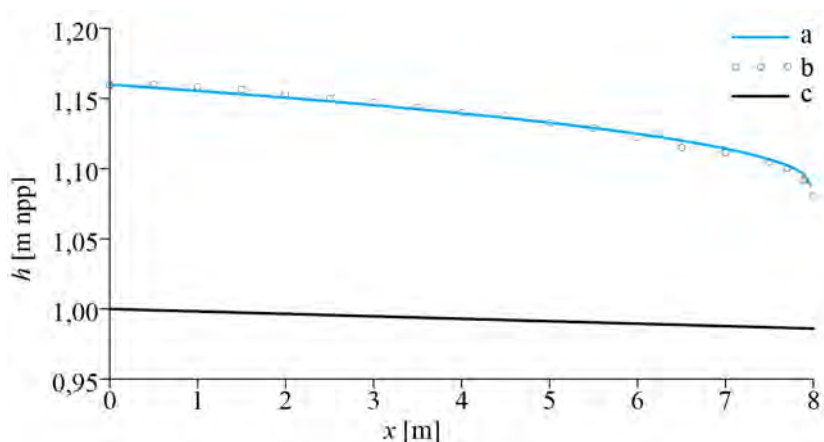
Kanał zakończony jest przelewem o ostrej krawędzi z możliwością regulowania nachylenia, czyli położenia jego krawędzi. Dzięki temu możliwa jest regulacja piętrzenia wody na końcu kanału.

Pomiar głębokości był wykonywany przy pomocy szpilki wodowskazowej umieszczonej na stalowym stelażu, który można przemieszczać wzdłuż kanału (fot. 6.2). Do pomiaru natężenia przepływu wykorzystano cechowany przelew Thomsona znajdujący się w skrzyni odpływowej za końcem kanału uchylnego. Do wyznaczenia nachylenia kanału (spadku dna) użyto poziomicy elektronicznej DNM 60L firmy Bosch.



Fot. 6.2. Szpilka wodowskazowa do pomiarów rzędnych zwierciadła wody w kanale uchylnym.

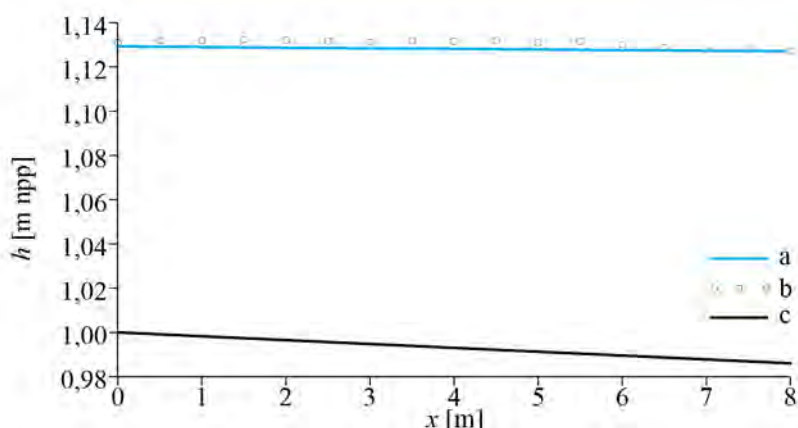
W pierwszej kolejności wyznaczono uśredniony współczynnik szorstkości kanału, który następnie został wykorzystany do obliczeń krzywej spiętrzenia i krzywej depresji. W celu wyznaczenia współczynnika szorstkości wg Manninga zmierzono spadek dna kanału uchylnego, wydatek oraz rzędne zwierciadła wody. Spadek dna równy był $s=0,00175$ [-], a natężenie przepływu wynosiło $Q=38,444 \text{ dm}^3/\text{s}$. Rzędna zwierciadła wody w pierwszym przekroju kanału wynosiła $h_0=1,160 \text{ m}$ co odpowiada głębokości $H_0=0,160 \text{ m}$. W przekroju końcowym rzędna zwierciadła wody była równa $h_L=1,09 \text{ m}$ co odpowiada głębokości $H_L=0,106 \text{ m}$. W wyniku rozwiązania zagadnienia brzegowego (4.5), (4.6) otrzymano współczynnik szorstkości równy $n=0,0187 \text{ s/m}^{1/3}$. Obliczenia wykonano z krokiem przestrzennym wynoszącym $\Delta x=0,25 \text{ m}$. Otrzymany układ zwierciadła wody przedstawiono na rys 6.2.



Rys. 6.2. Układ zwierciadła wody otrzymany wyniku rozwiązania zagadnienia wyznaczenia średniego współczynnika szorstkości: a) wyniki obliczeń, b) pomiary, c) dno.

Jak widać na rysunku 6.2 obliczony układ zwierciadła wody oraz rzędne otrzymane w wyniku dokonanych pomiarów prezentują bardzo dużą zgodność.

W ramach weryfikacji poprawności wyznaczonego współczynnika szorstkości wg Manninga przeprowadzono eksperyment i obliczenia mające odwzorować krzywą spiętrzenia w kanale uchylnym. Eksperyment przeprowadzono przy spadku dna równym $s=0,00175$ [-] i natężeniu przepływu wynoszącym $Q=8,364$ dm³/s. W przekroju końcowym rzędna zwierciadła wody równa była $h_L=1,127$ m co odpowiada głębokości $H_L=0,141$ m. Wartość tę przyjęto jako warunek początkowy do całkowania równania energii. Pomierzona rzędna zwierciadła wody w pierwszym przekroju wyniosła $h_0=1,130$ m, co odpowiada głębokości $H_0=0,131$ m. Głębokość otrzymana w wyniku obliczeń wyniosła $H_0=0,129$ m, zatem w pierwszym przekroju wyniki obliczeń są względem pomiarów niedoszacowane o wartość $\Delta H=0,002$ m. Zadanie rozwiązano z krokiem równym $\Delta x=0,25$ m. Wyniki pomiarów oraz obliczeń przedstawiono na rysunku 6.3.



Rys. 6.3. Układ zwierciadła wody otrzymany wyniku rozwiązania zagadnienia początkowego:
a) wyniki obliczeń, b) pomiary, c) dno.

Średnia arytmetyczna różnicy między wartościami głębokości otrzymanymi w wyniku pomiarów, a wartościami wynikającymi z przeprowadzonych obliczeń wyniosła 0,0025 m, przy czym różnica maksymalna równa jest 0,004 m. Głębokość wody w kanale jest rzędu wielkości 0,138 m. Daje to maksymalny błąd między wynikami obliczeń, a pomiarami wynoszący 2,9%. Wydaje się zatem, że obliczona wartość współczynnika szorstkości jest akceptowalna i nadaje się do wykorzystania jako jeden z parametrów modeli użytych w kolejnych eksperymentach.

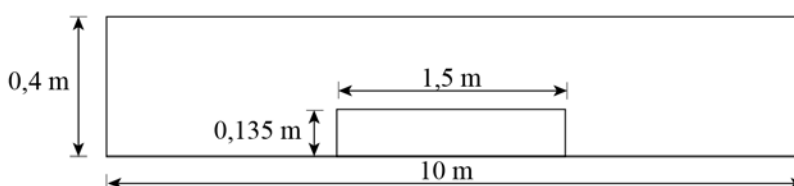
Aby zbadać możliwość użycia równania energii do symulowania przepływu w kanale, w którym występuje nagle zmiana szerokości przekroju, w kanale uchylnym umieszczono

przeszkodę. Obiekt ten powoduje nagłe zwężenie kanału z 40 cm do 26,5 cm. Przeszkoda ma długość $L=1,5$ m. Schemat modelu przedstawiono na rysunku 6.4, a jego zdjęcie na fotografii 6.3.

Współczynnik szorstkości materiału, z którego wykonane jest zwężenie kanału (prawa ściana kanału) wynosi $n=0,010$ s/m^{1/3}. Wartość tę przyjęto za Chow (1959). Szorstkość dna oraz lewej ściany kanału przyjęto równą wyznaczonej poprzez rozwiązanie zagadnienia brzegowego, czyli $n=0,0187$ s/m^{1/3}. Średni współczynnik szorstkości obliczano na podstawie wzoru (Kubrak i Nachlik 2003):

$$n_{gc} = \left(\frac{\sum n_i^{3/2} P_i}{P} \right)^{2/3}, \quad (6.1)$$

gdzie n_{gc} oznacza uśrednioną wartość współczynnika szorstkości w przekroju. Symbol P oznacza obwód zwilżony całego przekroju, natomiast P_i jest obwodem zwilżonym, części przekroju o szorstkości n_i .

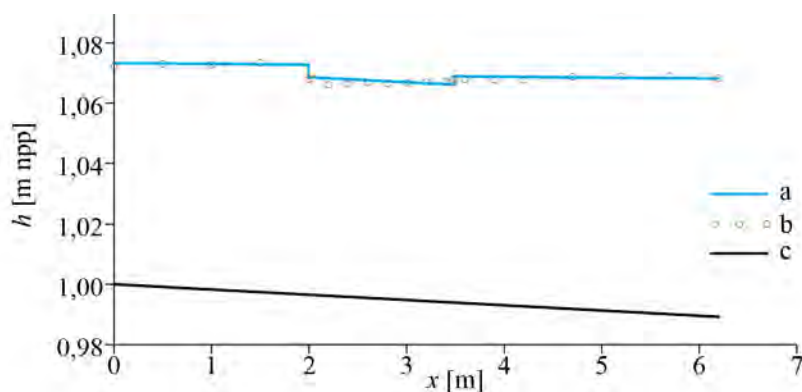


Rys. 6.4. Widok z góry na kanał uchylony wraz ze zwężeniem.



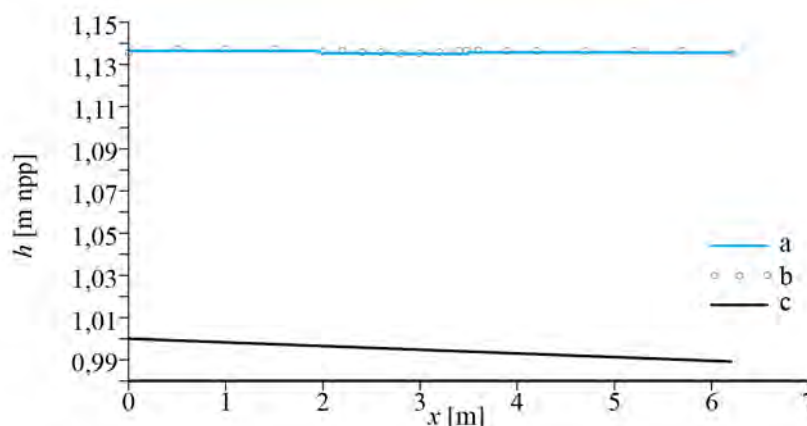
Fot. 6.3. Zdjęcie kanału o uchylno z przeszkodą – nagłe zwężenia kanału.

Eksperymenty przeprowadzono przy spadku dna równym $s=0,00175$ [-] i natężeniu przepływu wynoszącym $Q=5,845$ dm³/s. Warunki przepływu regulowano za pomocą przelewu o zmiennym nachyleniu znajdującym się na końcu kanału uchylnego. W pierwszym eksperymencie rzędna zwierciadła wody w przekroju końcowym wyniosła $h_L=1,067$ m, co odpowiada głębokości $H_L=0,078$ m. Wartości te przyjęto jako dane do przeprowadzenia symulacji przepływu. Krok całkowania przyjęto $\Delta x=0,1$ m, a współczynnik strat na zwężeniu kanału przyjęto równy $0,3$ [-]. Wyniki pomiarów oraz obliczeń przedstawiono na rysunku 6.5.



Rys. 6.5. Układ zwierciadła wody otrzymany w wyniku rozwiązania zagadnienia początkowego:
a) wyniki obliczeń, b) pomiary, c) dno.

Średnia różnica między pomierzonymi, a obliczonymi rzędnymi zwierciadła wody wyniosła $0,0009$ m, natomiast różnica maksymalna $0,002$ m, co daje względny błąd maksymalny wynoszący $2,9\%$. W drugim eksperymencie rzędna zwierciadła wody w końcowym przekroju wynosiła $h_L=1,136$ m, co odpowiada głębokości $H_L=0,136$ m. Wyniki pomiarów oraz obliczeń przedstawiono na rysunku 6.6.



Rys. 6.6. Układ zwierciadła wody otrzymany w wyniku rozwiązania zagadnienia początkowego:
a) wyniki obliczeń, b) pomiary, c) dno.

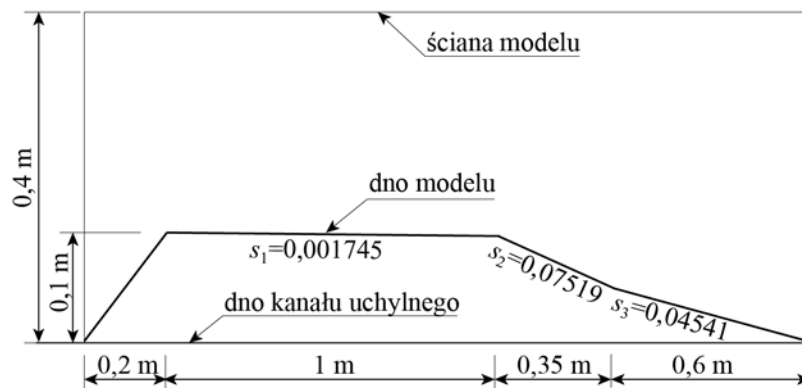
Podobnie jak w pierwszym eksperymencie, średnia odchyłka wartości obliczonych od wartości pomierzonych wyniosła 0,0009 m, a różnica maksymalna 0,002 m, co w tym przypadku daje maksymalny błąd względny rzędu 1,03%.

W obu przypadkach model zapewnił poprawne odwzorowanie układu zwierciadła wody. W pierwszym eksperymencie prędkości przepływu były większe niż w drugim, przez co różnice są bardziej wyraźne, gdyż obniżenie zwierciadła wody spowodowanego przeszkodą jest bardziej znaczące. W drugim przypadku, przy większej głębokości przepływu prędkości są mniejsze. Konsekwentnie mniejsze też są wysokości prędkości. W rezultacie różnice poziomu zwierciadła wody przy przepływie przez zwężoną część kanału są również nieznaczne.

Jak można zauważyć na rysunkach 6.5 oraz 6.6 model w postaci równania energii zapewnia bardzo dobrą zgodność wyników obliczeń oraz pomiarów. Na tej podstawie można uznać, że model ten bardzo dobrze nadaje się do symulacji przepływu w kanałach otwartych, nawet wówczas, gdy następuje nagła zmiana parametrów kanału.

6.2. Przepływ ustalony niejednostajny w kanale prostokątnym o zmiennym spadku dna

Eksperyment ten dotyczy symulacji przepływu w kanale, w którym spadek dna ulega nagłemu istotnemu zwiększeniu. W warunkach takich charakter przepływu w sposób łagodny przechodzi ze spokojnego w rwący. Eksperyment przeprowadzono na odcinku kanału w całości wykonanym ze sklejki szlifowanej, co miało na celu wyeliminowanie wpływu zmienności współczynnika szorstkości z głębokością wody. Zmodyfikowany odcinek umieszczono w kanale o poziomym dnie. Szerokość dna modelu wynosiła $B=0,38$ m, a jego współczynnik szorstkości przyjęto za Chow (1959) jako $n=0,010 \text{ s/m}^{1/3}$. Schemat stanowiska przedstawiono na rysunku 6.7, a samo stanowisko przedstawiono na fotografii 6.4.



Rys. 6.7. Schemat modelu kanału o zmiennym spadku dna.



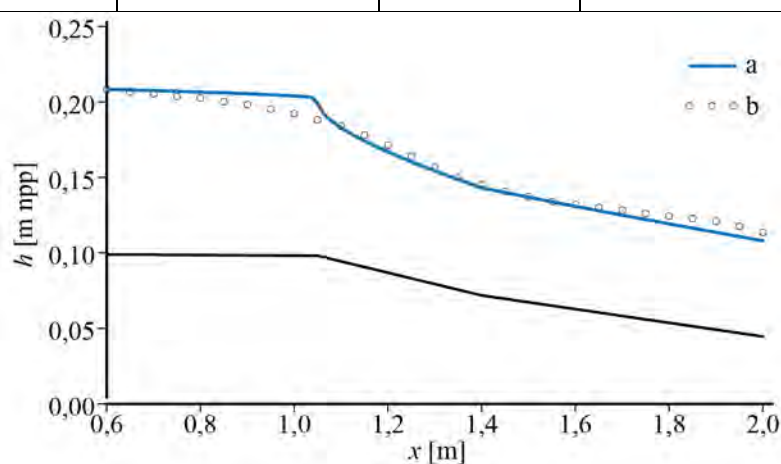
Fot. 6.4. Zdjęcie kanału o zmiennym spadku dna: po lewej konstrukcja stanowiska, po prawej stanowisko w trakcie działania.

Eksperyment fizyczny przeprowadzono dla trzech różnych wartości natężenia przepływu. Warunek początkowy do rozwiązania równania energii otrzymano poprzez pomiar głębokości wody w odciętej $x=0,6$ m, licząc od początku modelu zgodnie z kierunkiem przepływu. Natężenie przepływu wyznaczono za pomocą przelewu Thomsona. Dane użyte w obliczeniach zestawiono w tabeli 6.1. W celu numerycznego rozwiązania zagadnienia początkowego równanie energii aproksymowano metodą trapezową niejawną, natomiast obszar rozwiązania dyskretyzowano z krokiem $\Delta x=0,0125$ m. W trakcie symulacji założono, że na pierwszym odcinku kanału o spadku dna s_1 przepływ jest spokojny, przez co jako rozwiązanie nieliniowego równania algebraicznego wybierano pierwiastek po prawej stronie głębokości krytycznej. Natomiast na odcinkach kanału o

spadku s_2 i s_3 założono, że przepływ jest rwący i jako poprawne rozwiązanie wybierano pierwiastek znajdujący się po lewej stronie głębokości krytycznej.

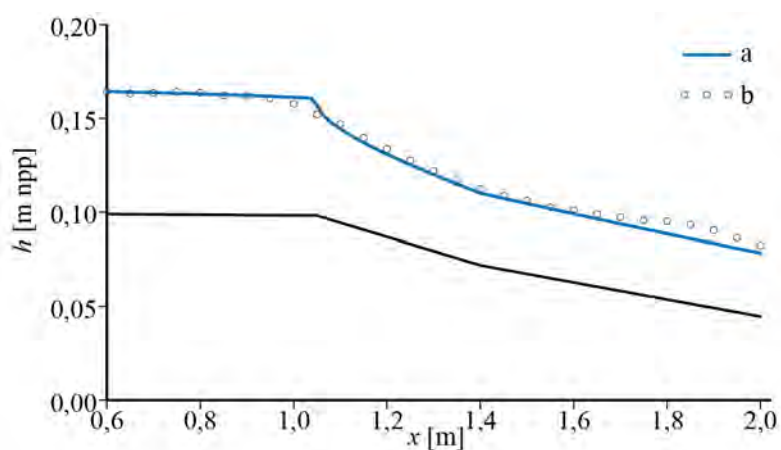
Tab. 6.1. Dane do symulacji przepływu w modelu.

L.p.	Wydatek Q [dm ³ /s]	Rzędna zw. wody h_0 [cm]	Głębokość H_0 [cm]	Głębokość krytyczna H_{kr} [cm]
1	37,362	21,9	10,9	10,3
2	16,903	16,4	6,5	6,0
3	14,887	15,9	6,0	5,6



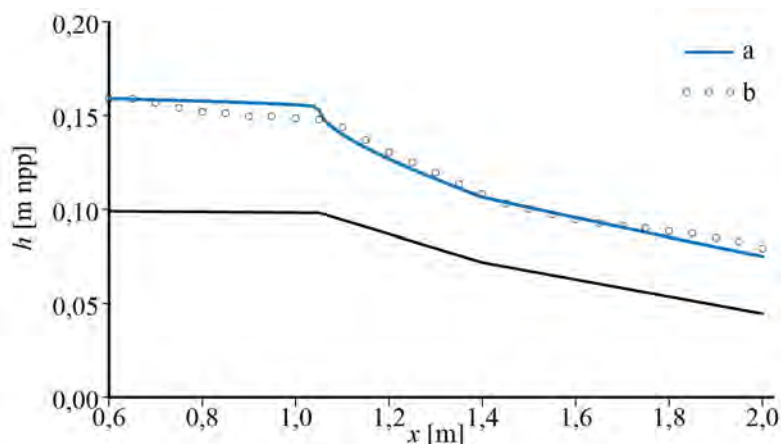
Rys. 6.8. Wyniki a) obliczeń oraz b) pomiarów wykonanych dla doświadczenia 1.

W doświadczeniu pierwszym średnia różnica między rzędnymi obliczonymi, a pomierzonymi wyniosła 0,004 m, a różnica maksymalna 0,012 m, przy czym głębokość maksymalna równa była wartości 0,108 m, a minimalna 0,069 m. Maksymalna odchyłka wartości obliczonej od pomierzonej wystąpiła w miejscu zmiany spadku dna kanału.



Rys. 6.9. Wyniki a) obliczeń oraz b) pomiarów wykonanych dla doświadczenia 2.

W doświadczeniu drugim średnia różnica między wartościami pomierzonymi, a obliczonymi wyniosła 0,0026 m, a maksymalna różnica równa była 0,007 m i jak poprzednio wystąpiła w miejscu zmiany nachylenia dna kanału.



Rys. 6.10. Wyniki a) obliczeń oraz b) pomiarów wykonanych dla doświadczenia 3.

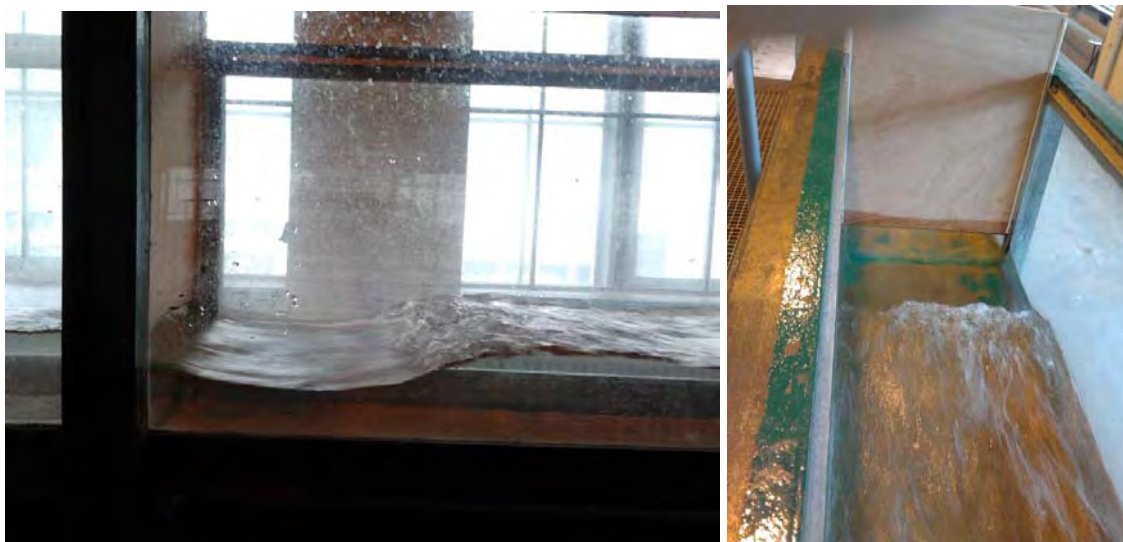
W doświadczeniu trzecim średnia odchyłka wartości obliczonych od pomierzonych wyniosła 0,0033 m, a odchyłka maksymalna równa była 0,007 m.

Rysunki 6.8-6.10 przedstawiają pomiary oraz otrzymane wyniki obliczeń. Jak można zauważyć na tych rysunkach, otrzymano bardzo dużą zgodność zarówno pod względem jakościowym jak i ilościowym wyników obliczeń i pomiarów. Może to świadczyć o tym, iż zaproponowana interpretacja pierwiastków dyskretnej postaci równania energii jest poprawna. Należy zauważyć, że największa różnica między wartościami pomierzonymi, a obliczonymi występowała w miejscu nagłej zmiany spadku dna. Wynika to z faktu, że pierwiastek odpowiadający przepływowi rwącemu wybierano począwszy od miejsca, w którym kanał zmienia spadek na znacznie większy. Jednak w rzeczywistości przepływ zmienia charakter ze spokojnego w rwący wcześniej.

6.3. Wpływ spod zasuw

W badaniu tym porównano wyniki obliczeń oraz pomiary otrzymane z badania zjawiska wypływu spod zasuw. Podobnie jak eksperyment poprzedni, ten ma na celu umożliwienie interpretacji pierwiastków dyskretnej postaci równania energii.

Stanowisko utworzono poprzez przegrodzenie kanału uchylnej drewnianą zasuwą z frezowaną dolną krawędzią (fot. 6.5).



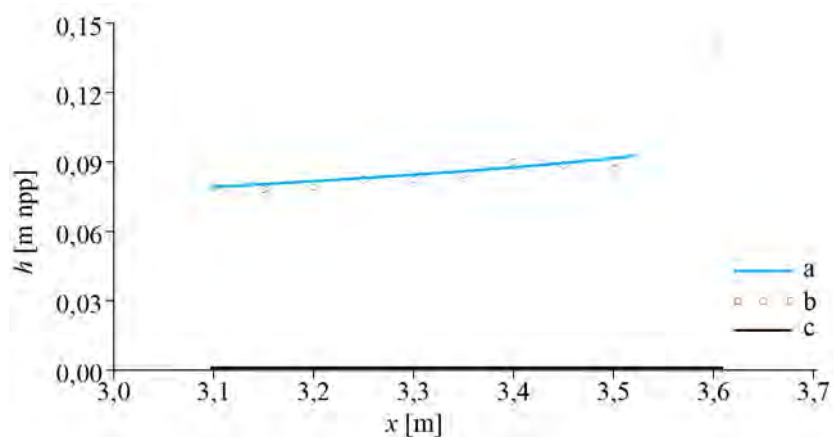
Fot. 6.5. Odcinek kanału z zasuwą: po lewej widok z boku, po prawej spojrzenie na wnętrze stanowiska.

Jako warunek początkowy do obliczeń przyjmowano najmniejszą głębokość za zasuwą, gdyż przyjęty model matematyczny nie ma możliwości odwzorowania układu zwierciadła wody za zasuwą w całości. Stopień otwarcia zasuw oraz przyjęte warunki początkowe zestawiono w tabeli 6.2. Wszystkie krzywe otrzymano przy wydatku równym $Q=0,039 \text{ dm}^3/\text{s}$ i kroku całkowania wynoszącym $\Delta x=0,05 \text{ m}$.

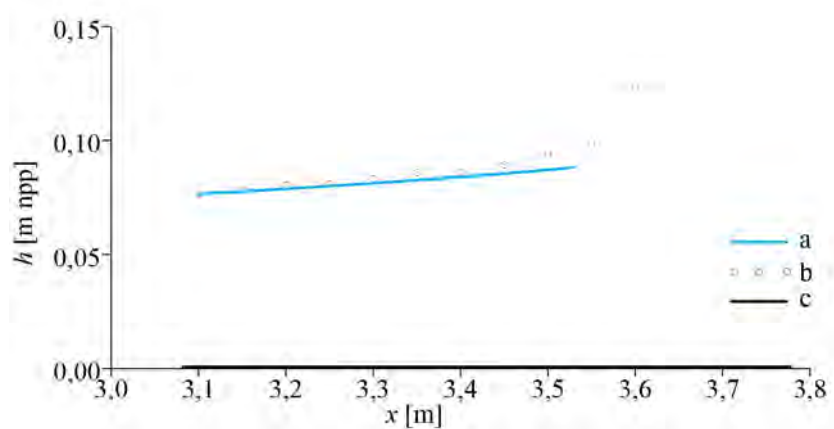
Tab. 6.2. Dane do symulacji wypływu spod zasuw.

L.p.	Wysokość otworu $H_Z \text{ [m]}$	Głębokość $H_0 \text{ [m]}$
1	0,10	0,077
2	0,11	0,079
3	0,12	0,082

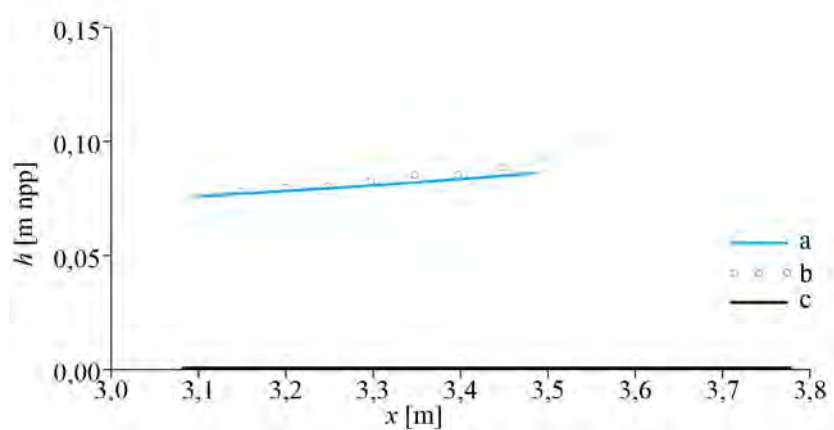
Rysunki 6.11-6.13 przedstawiają wyniki pomiarów i obliczeń.



Rys. 6.11. Wyniki a) obliczeń oraz b) pomiarów wykonanych dla doświadczenia 1.



Rys. 6.12. Wyniki a) obliczeń oraz b) pomiarów wykonanych dla doświadczenia 2.



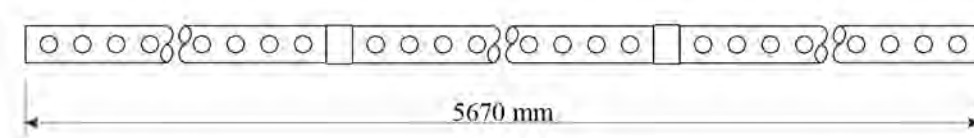
Rys. 6.13. Wyniki a) obliczeń oraz b) pomiarów wykonanych dla doświadczenia 3.

Jak można zauważyć na wyżej przedstawionych wykresach, zgodność wyników obliczeń z pomiarami pod względem jakościowym nie budzi wątpliwości, co potwierdza hipotezę na temat charakteru pierwiastków dyskretnej formy równania energii i możliwości ich alternatywnego wyboru w zależności od rodzaju przepływu. Jeśli chodzi o

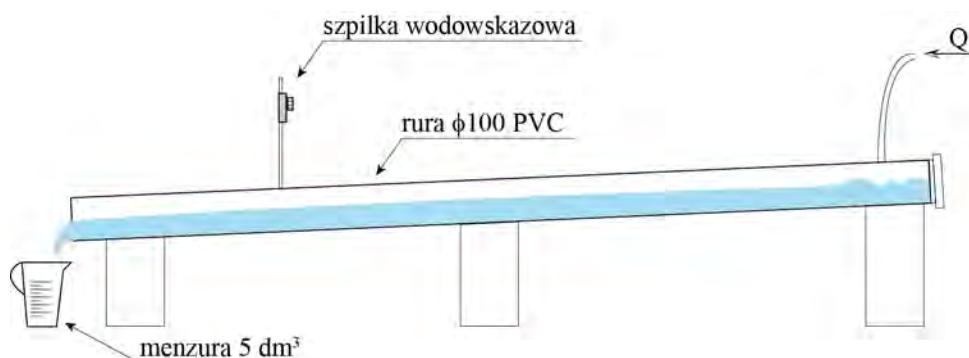
zgodność wyników obliczeń i pomiarów pod względem ilościowym, to można zauważyć, że krzywe i punkty rozbiegają się w końcowej części. Wydaje się, że rozbieżność ta ma związek z początkiem zmiany charakteru przepływu w kanale. Wzrost rzędnych zwierciadła wody związany jest z formowaniem się odskoku hydraulicznego. Jednakże odwzorowanie odskoku hydraulicznego przez stosowane w pracy równanie przepływu ustalonego niejednostajnego nie jest możliwe.

6.3. Przepływ ustalony niejednostajny w kanale o przekroju kołowym

Kolejne badania wykonano na prostym odcinku kanału o przekroju kołowym, który został wykonany z rur PVC $\Phi 110$ mm firmy Armakan PVC. Współczynnik szorstkości materiału, z którego wykonana jest rura oszacowano rozwiązując zagadnienie brzegowe z nieznanym współczynnikiem n . Wyznaczony współczynnik szorstkości został wykorzystany do obliczeń przepływu w sieciach kanałów. Schemat stanowiska przedstawiono na rysunkach 6.14 i 6.15.



Rys. 6.14. Schemat stanowiska wykorzystanego do oszacowania współczynnika szorstkości.



Rys. 6.15. Schemat stanowiska pomiarowego użytego do oszacowania współczynnika szorstkości.

Pod wpływem obciążenia, rura ulegała odkształceniu w płaszczyźnie pionowej, przez co jej dno deformowało się. Fakt ten uwzględniono w obliczeniach przyjmując pomierzone rzędne dna, czyli takie które odzwierciedlają wspomniane odkształcenia. Pomiar rzędnych zwierciadła wody oraz dna wykonano przy użyciu szpilki wodowskazowej. Pomiar

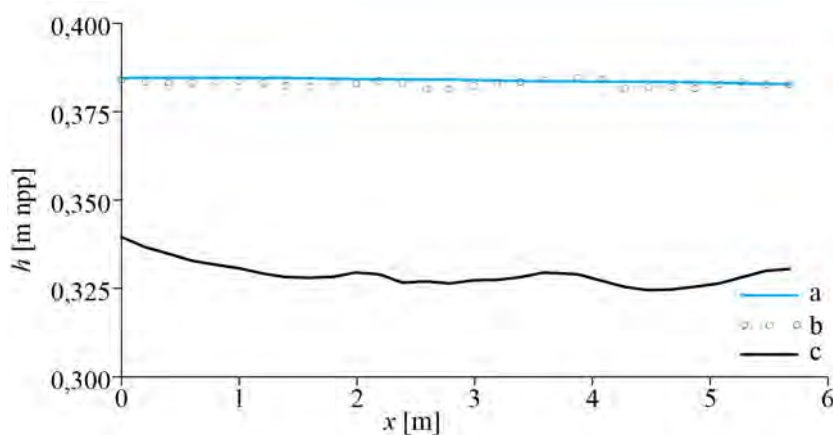
natężenia przepływu wykonano metodą objętościową przy pomocy menzury o pojemności 5 dm^3 .

Średni współczynnik szorstkości kanału wyznaczono na podstawie serii składającej się z sześciu pomiarów. Dla każdego z przypadków krok całkowania był równy $\Delta x = 0,1 \text{ m}$. Dane do obliczeń uzyskane na podstawie eksperymentu przedstawiono w tabeli 6.3.

Tab. 6.3. Dane do obliczeń średniego współczynnika szorstkości kanału o przekroju kołowym.

Lp.	h_0 [cm]	h_L [cm]	H_0 [cm]	H_L [cm]	Q [dm^3/s]	n [$\text{s}/\text{m}^{1/3}$]
1	38,4	38,3	4,0	5,2	0,625	0,0119717
2	37,8	37,7	3,9	4,7	0,423	0,0102141
3	37,2	37,2	3,3	4,1	0,196	0,0094329
4	39,3	39,1	5,4	6,0	1,087	0,0176749
5	34,5	34,3	4,2	4,5	0,404	0,0167045
6	34,4	34,2	4,1	4,3	0,344	0,0166313
$\bar{n} =$						0,0137716

Wartość współczynnika szorstkości wyznaczano metodą bisekcji z dokładnością $\varepsilon_n = 0,00000001 \text{ s}/\text{m}^{1/3}$. Tę wartość współczynnika szorstkości przyjęto do dalszych obliczeń. Na rysunku 6.16 przedstawiono wyniki obliczeń oraz pomiary rzędnych zwierciadła wody dla przypadku nr 1 z tabeli 6.3, po przyjęciu do obliczeń uśrednionego współczynnika szorstkości.



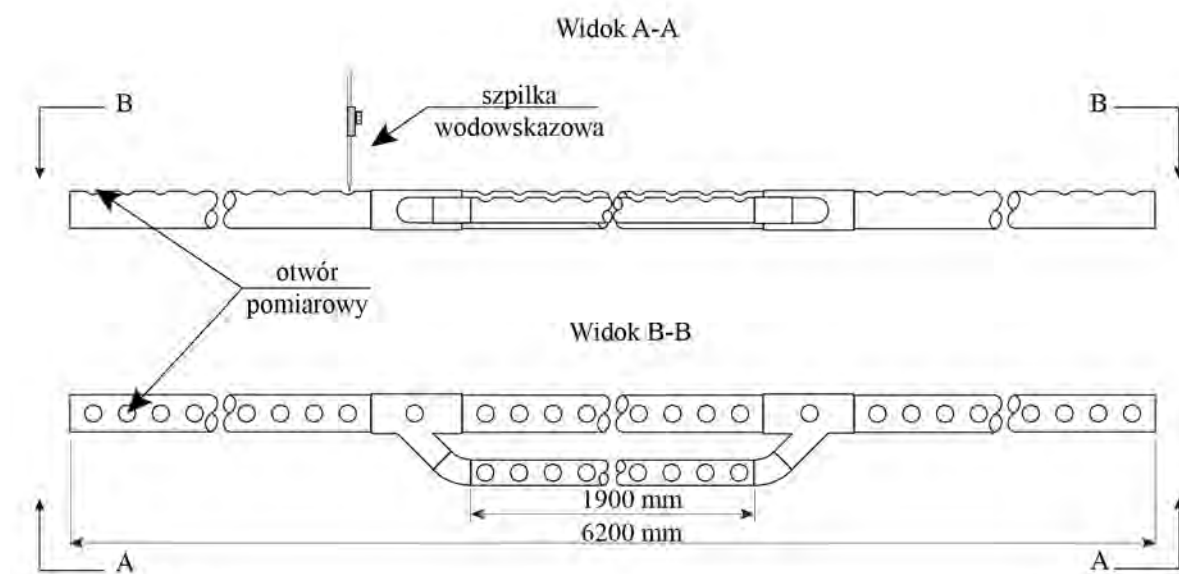
Rys. 6.16. Porównanie obliczonych i pomierzonych rzędnych zwierciadła wody:
a) wartości obliczone, b) pomiar, c) rzędne dna kanału.

Jak można zauważyć wyniki pomiarów oraz obliczeń prezentują dobrą zgodność, przez co przyjęta wartość współczynnika szorstkości wydaje się być poprawna.

6.4. Przepływ ustalony niejednostajny w sieciach kanałów otwartych

W ramach analizy przepływu w sieciach kanałów otwartych przeprowadzono eksperymenty na dwóch stanowiskach wykonanych z rur kanalizacyjnych firmy Armakan PVC. Schemat pierwszego stanowiska przedstawia rysunek 6.17, a jego widok przedstawiono na fotografii 6.6.

Pierwsza sieć składa się z dwóch kanałów o przekroju kołowym: kanału głównego o średnicy $\Phi 110$ mm oraz kanału bocznego o średnicy $\Phi 70$ mm. Sytuacja ta imituje istnienie wyspy, która powoduje rozdzielenie przepływu na dwa asymetryczne kanały. Jest to jedno z klasycznych zagadnień hydrauliki koryt otwartych.



Rys. 6.17. Schemat pierwszego stanowiska badawczego.

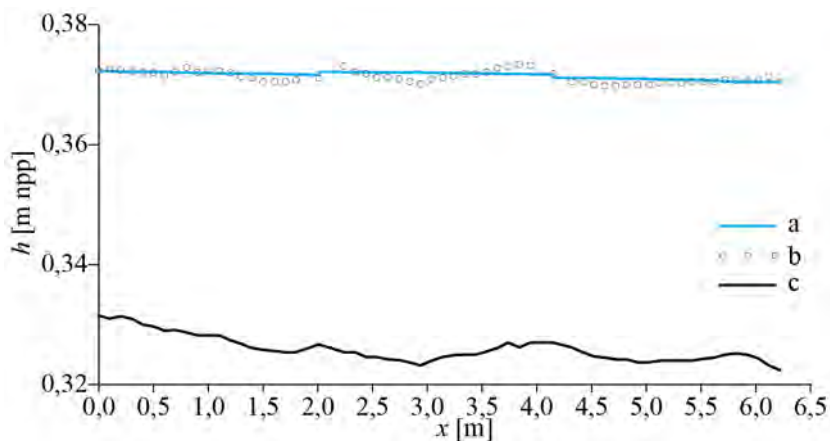


Fot. 6.6. Zdjęcie pierwszej sieci kanałów.

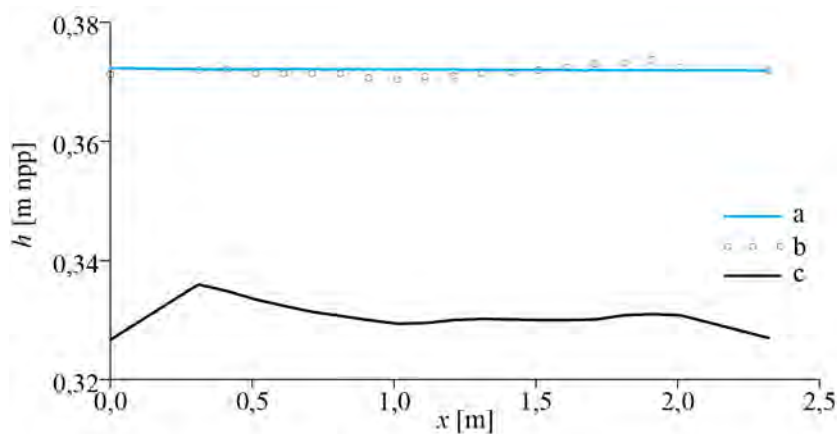
W trakcie przepływu mierzono rzędne dna kanałów, rzędne zwierciadła wody, oraz wydatek u ujścia kanału głównego. Jako warunki brzegowe do rozwiązania równania energii przyjęto rzędne zwierciadła wody w początkowym i końcowym przekroju kanału głównego. Rzędne zwierciadła wody zadane jako warunki brzegowe równe były odpowiednio $h_0=0,372$ m i $h_L=0,3705$ m. Wartości te odpowiadają głębokościom równym $H_0=0,041$ m i $H_L=0,048$ m. Obliczone natężenia przepływu w kanale głównym i bocznym wynoszą odpowiednio $Q_{gl}=0,305$ dm³/s oraz $Q_b=0,163$ dm³/s. Pomierzone natężenie przepływu w przekroju wylotowym kanału głównego wynosi $Q_{pom}=0,483$ dm³/s natomiast wydatek obliczony wynosi $Q_{obl}=0,468$ dm³/s, co daje to błąd względny obliczony na podstawie poniższej formuły:

$$\Delta Q = \left| \frac{Q_{pom} - Q_{obl}}{Q_{pom}} \right| \cdot 100\% \quad (6.2)$$

wynoszący $\Delta Q=3,1\%$. Zadanie rozwiązano z krokiem $\Delta x=0,02$ m. Porównanie obliczonych oraz pomierzonych rzędnych zwierciadła wody w obu kanałach przedstawiają rysunki 6.18 oraz 6.19.

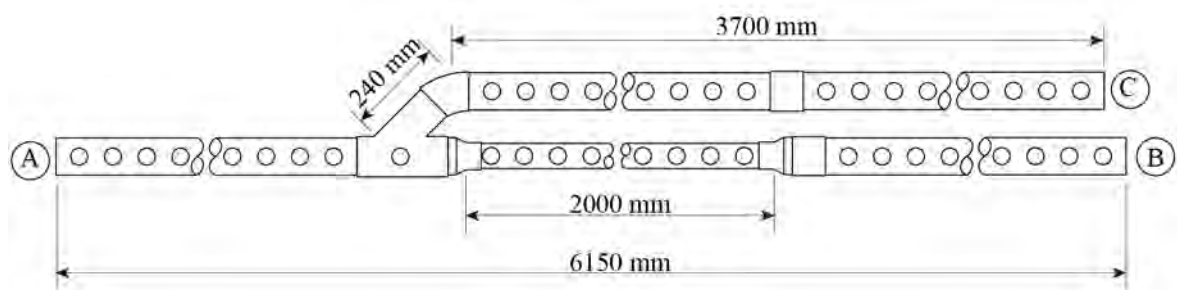


Rys. 6.18. Porównanie obliczonych i pomierzonych rzędnych zwierciadła wody w kanale głównym:
a) wartości obliczone, b) pomiar, c) rzędne dna kanału.



Rys. 6.19. Porównanie obliczonych i pomierzonych rzędnych zwierciadła wody w kanale bocznym:
a) wartości obliczone, b) pomiar, c) rzędne dna kanału.

Druga z badanych sieci jest odzwierciedleniem bifurkacji punktowej często spotykanej w analizie przepływu w kanałach otwartych. Schemat stanowiska przedstawiony jest na rysunku 6.20, a wykonane stanowisko widoczne jest na fotografii 6.7.



Rys. 6.20. Schemat drugiego stanowiska badawczego (litery A, B, C są oznaczeniami jednoznacznie identyfikującymi przekrój).

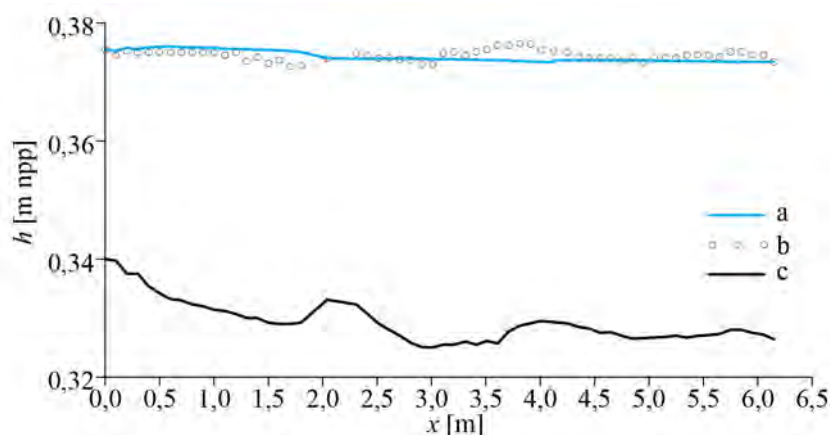


Fot. 6.7. Zdjęcie drugiego stanowiska badawczego.

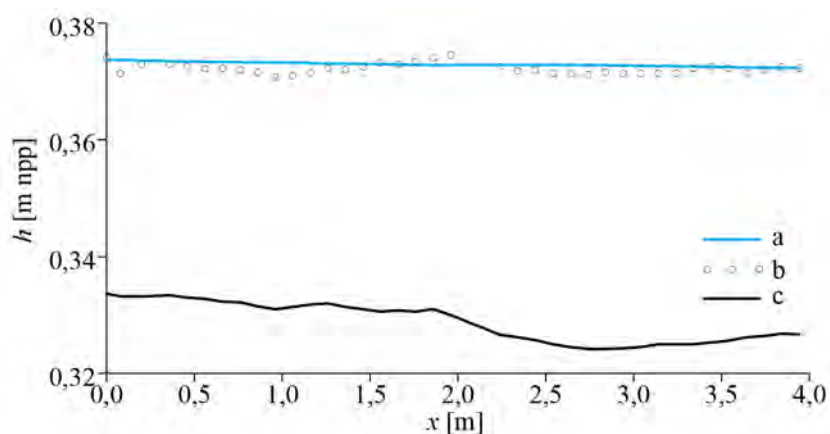
Do przeprowadzenia symulacji w tym eksperymencie, tak jak dla poprzedniej sieci zadano warunki brzegowe w postaci rzędnych zwierciadła wody.

W tym eksperymencie zadana rzędna zwierciadła wody w przekroju A wynosiła $h_A = 0,376$ m, co odpowiada głębokości $H_A = 0,036$ m, natomiast w przekroju oznaczonym literą B zadano rzędną równą $h_B = 0,373$ m odpowiadającą głębokości $H_B = 0,047$ m. W kanale bocznym (przekrój C) zadano rzędną zwierciadła wody wynoszącą $h_C = 0,372$ m co odpowiada głębokości $H_C = 0,046$ m.

Pomierzone wartości natężenia przepływu w kanale głównym wynoszą $Q_{gl} = 0,340$ dm³/s oraz $Q_b = 0,437$ dm³/s, natomiast wartości otrzymane w wyniku obliczeń to $Q_{gl,obl} = 0,300$ dm³/s w kanale głównym i $Q_{b,obl} = 0,434$ dm³/s w kanale bocznym. Odpowiada to błędom względnym obliczonym na podstawie formuły (6.2) o wartościach wynoszących w kanale głównym $\Delta Q_{gl} = 11,92\%$ i $\Delta Q_b = 0,71\%$ w kanale bocznym. Wydatek w odcinku kanału przed bifurkacją jest równy sumie natężenia przepływu w kanałach za bifurkacją i wynosi $Q_{gl+b} = 0,777$ dm³/s, co daje błąd względny na tym odcinku kanału wynoszący $\Delta Q_{gl+b,obl} = 5,62\%$. Obliczone oraz pomierzone wartości rzędnych zwierciadła wody przedstawiono na rysunkach 6.21 i 6.22.



Rys. 6.21. Porównanie obliczonych i pomierzonych rzędnych zwierciadła wody w kanale głównym.
a) wartości obliczone, b) pomiar, c) rzędne dna kanału.



Rys. 6.22. Porównanie obliczonych i pomierzonych rzędnych zwierciadła wody w kanale bocznym.
a) wartości obliczone, b) pomiar, c) rzędne dna kanału.

Jak można zauważyć na podstawie przeprowadzonych eksperymentów, przedstawiony model przepływu w sieciach kanałów otwartych oraz zaproponowany sposób obliczeń pozwalają na uzyskanie wiarygodnych wyników. Wyniki obliczeń i pomiarów są bardzo zgodne pod względem jakościowym, jednakże pod względem ilościowym zgodność nie jest tak dobra. Przyczyną tego jest fakt, iż możliwości techniczne wykonania stanowiska nie pozwoliły na wyeliminowanie czynników zaburzających przepływ. W wyniku tego, lokalne zaburzenia wynikające między innymi ze sposobu połączenia rur niekiedy istotnie wpływały na wartości mierzonych rzędnych zwierciadła wody.

7. Wnioski

Tematem wykonanej pracy są problemy numerycznej symulacji jednowymiarowego przepływu ustalonego niejednostajnego w kanałach otwartych. Choć przepływ ustalony niejednostajny jest jednym z klasycznych i jak się wydawało, dobrze rozpoznanych zagadnień hydrauliki, to okazuje się, że niektóre jego aspekty nie są oczywiste.

Jednym z problemów jest ciągle obowiązujący w literaturze podział na metody analizy tego rodzaju przepływu w kanałach pryzmatycznych oraz w kanałach naturalnych. W pracy zaproponowano przyjęcie równania energii jako ogólnego modelu przepływu ustalonego niejednostajnego w kanałach otwartych. Równanie to posiada następujące zalety:

- ma klarowną interpretację fizyczną,
- może być stosowane dla kanałów naturalnych i kanałów pryzmatycznych,
- może być stosowane zarówno dla kanałów pojedynczych jak i dla sieci kanałów,
- jest określone dla każdej formy przepływu, w tym dla przepływu krytycznego.

Jest ono zatem modelem najlepiej nadającym się do analizy przepływu ustalonego niejednostajnego i umożliwia realizację wymienionego w celach pracy postulatu ujednolicenia podejścia do modelowania przepływu ustalonego niejednostajnego. Spostrzeżenie to likwiduje dysonans pomiędzy metodami obliczania przepływu w kanałach pryzmatycznych i naturalnych. Ponadto okazuje się, że stosowana zwykle tzw. standardowa metoda krokowa jest tożsama z aproksymacją przyjętego różniczkowego równania energii niejawnym schematem trapezowym.

Drugą grupę istotnych wniosków można wyciągnąć z wykonanej w rozprawie analizy warunków numerycznego rozwiązania przyjętego różniczkowego równania przepływu ustalonego niejednostajnego. Wynika z niej, że algebraiczne równanie nieliniowe otrzymane w wyniku aproksymacji równania różniczkowego może mieć zmienną liczbę pierwiastków. Zależnie od przyjętej wartości przestrzennego kroku całkowania Δx może ono mieć od jednego do trzech pierwiastków, przy czym co najmniej jeden lub dwa z nich są fizycznie dopuszczalne. Pierwiastki leżą po obu stronach głębokości krytycznej co oznacza, że jeden z nich jest związany z przepływem spokojnym zaś drugi – z rwącym. Fakt ten implikuje sposób postępowania w trakcie rozwiązywania równania nieliniowego. Wybór pierwiastka powinien odbywać się z dużą ostrożnością i uwzględnieniem charakteru modelowanego przepływu. Ta właściwość równania umożliwia numeryczne

odtworzenie wszystkich typów układu zwierciadła wody (krzywych $h(x)$), które mogą być fizycznie zrealizowane w kanale otwartym.

W pracy wykazano, że możliwe rozwiązania równania energii korespondują z pojęciem energii właściwej w przekroju kanału, przy czym jedno odpowiada przepływowi rwącemu, drugie odpowiada przepływowi spokojnemu. Na ilość możliwych rozwiązań wpływ ma także użyty schemat aproksymacji równania. W przypadku stosowania schematów jawnych takich jak metoda Eulera czy metody Rungego-Kutty równanie ma zawsze dwa rozwiązania. Jeśli równanie aproksymuje się schematem niejawnym (np. niejawna metoda Eulera, schemat trapezowy niejawny) równanie może mieć od jednego do trzech pierwiastków, przy czym ich liczba może się zmieniać w zależności od wielkości kroku całkowania. Przyczyną tego jest wpływ nieliniowości członu strat. W takim przypadku, jeden z pierwiastków jest rozwiązaniem нефизycznym.

Powyższe właściwości numerycznego rozwiązania równania różniczkowego opisującego ustalony przepływ niejednostajny znalazły uzasadnienie teoretyczne. W pracy wykazano, że równanie to nie spełnia nierówności Lipschitza, która gwarantuje istnienie i jednoznaczność rozwiązania. Jest zatem możliwe, aby równanie miało więcej niż jedno poprawne pod względem matematycznym rozwiązanie.

Innym istotnym problemem podjętym w pracy jest symulacja przepływu ustalonego niejednostajnego w sieciach kanałów otwartych. Jak wynika z literatury przedmiotu, brakuje ujednoliconego ogólnego podejścia pozwalającego przeprowadzić obliczenia bez względu na rodzaj sieci. Okazuje się, że takie ujednolicenie jest możliwe w sytuacji, gdy przyjmiemy równanie energii mechanicznej jako obowiązujący opis przepływu ustalonego niejednostajnego a metodę różnicową jako sposób numerycznego rozwiązania tego równania. Dzięki temu podejściu po uwzględnieniu warunków zgodności w połączeniach kanałów możliwa jest symulacja przepływu w sieciach dowolnego typu i o dowolnej konfiguracji, jak również z dowolnie zadawanymi wymuszeniami na końcach kanałów. Takie podejście skutkuje powstaniem układu algebraicznych równań nieliniowych o bardzo rzadkiej macierzy współczynników, czasami o znacznych rozmiarach. Wykazano, że najskuteczniejszym sposobem rozwiązania tego układu jest zmodyfikowana metoda Picarda.

Eksperymenty wykonane w ramach rozprawy w dużej części potwierdziły skuteczność zaproponowanego sposobu analizy przepływu ustalonego niejednostajnego w kanałach otwartych. Między innymi dobra zgodność pomierzonych i obliczonych układów zwierciadła wody potwierdza przyjętą hipotezę na temat interpretacji fizycznych

pierwiastków równania energii mówiącą, że jeden z dwóch pierwiastków związany jest z rozwiązaniem odpowiadającym przepływowi rwącemu, a drugi - przepływowi spokojnemu.

Symbole użyte w pracy

- α - współczynnik korekcyjny energii
- A - pole przekroju czynnego
- $\mathbf{a}$ - macierz układu (4.21)
- $\mathbf{a}^*$ - zmodyfikowana macierz układu (4.21)
- A_i - pole przekroju czynnego w i -tym przekroju kanału
- β - współczynnik korekcyjny pędu
- $\mathbf{B}$ - wektor prawych stron układu (5.7) lub (5.19)
- B - szerokość zwierciadła wody, szerokość dna kanału
- $\mathbf{b}$ - wektor prawych stron układu (4.21)
- b_i - i -ty element wektora $\mathbf{b}$
- C_0 - współczynnik do przeliczania jednostek
- δ - współczynnik metody Armijo
- ΔE - wysokość strat energii
- ΔQ - błąd względny oszacowania wydatku
- Δx - odległość między przekrojami, krok przestrzenny całkowania
- $\Delta \mathbf{X}$ - wektor odchyłek metody Newtona
- E - wysokość energii
- E_1 - wysokość energii w pierwszym przekroju kanału
- E_N - wysokość energii w ostatnim przekroju kanału
- E_0 - wysokość energii zadana jako warunek początkowy lub brzegowy w pierwszym przekroju kanału
- E_L - wysokość energii zadana jako warunek początkowy lub brzegowy w ostatnim przekroju kanału
- ε_F - dopuszczalna długość wektora rezydualnego
- ε_h - dopuszczalna różnica między dwoma kolejnymi przybliżeniami rzędnych zwierciadła wody
- ε_n - dopuszczalna różnica między dwoma kolejnymi przybliżeniami

- współczynnika szorstkości kanału
- ε_Q - dopuszczalna różnica między dwoma kolejnymi przybliżeniami natężenia przepływu
- $\phi(\lambda)$ - funkcja do obliczania wartości współczynnika skalującego λ
- Φ - stała część dyskretnej postaci równania energii, średnica rury
- $\mathbf{F}$ - funkcja wektorowa
- F - funkcja skalarna
- F_m - m -ty element wektora funkcyjnego $\mathbf{F}$
- Fr - liczba Froude'a
- g - przyspieszenie ziemskie
- η - błąd numeryczny w zasadzie Armijo
- H - głębokość
- h - rzędna zwierciadła wody
- H_0 - głębokość w pierwszym przekroju kanału zadana jako warunek początkowy lub brzegowy
- H_L - głębokość w ostatnim przekroju kanału zadana jako warunek początkowy lub brzegowy
- H_1 - głębokość w pierwszym przekroju analizowanego odcinka kanału
- H_2 - głębokość w drugim (ostatnim) przekroju analizowanego odcinka kanału
- H_A - głębokość w przekroju kanału oznaczonym jako A (zadana jako warunek brzegowy)
- H_B - głębokość w przekroju kanału oznaczonym jako B (zadana jako warunek brzegowy)
- H_C - głębokość w przekroju kanału oznaczonym jako C (zadana jako warunek brzegowy)
- H_{kr} - głębokość krytyczna
- H_n - głębokość normalna
- h_{str} - wysokość strat między dwoma przekrojami
- i - indeks przekroju
- i, j, k - indeksy przekrojów w kanałach I, J, K tworzących sieć
- I, J, K - indeksy kanałów tworzących sieć
- $\mathbf{J}$ - macierz Jacobiego
- K - moduł przepływu

- (k) - indeks iteracji
- k_s - chropowatość absolutna
- λ - współczynnik oporów, współczynnik skalujący w metodzie Armijo
- L - długość kanału, stała Lipschitza
- m - indeks równania, nachylenie skarp kanału
- M - liczba kanałów wchodzących w skład sieci
- N - liczba przekrojów kanału
- n - współczynnik szorstkości wg Manninga
- ν - współczynnik lepkości kinematycznej wody
- $\bar{n}$ - średni współczynnik szorstkości wg Manninga w kanale
- n_{gc} - średni współczynnik szorstkości w przekroju o niejednorodnej chropowatości
- N_I - liczba przekrojów w I -tym kanale
- n_i - współczynnik szorstkości i -tego odcinka przekroju o niejednorodnej chropowatości
- P - liczba połączeń kanałów wchodzących w skład sieci, obwód zwilżony
- P_i - obwód zwilżony i -tego odcinka przekroju o niejednorodnej chropowatości
- θ - współczynnik wagowy ogólnej metody dwupoziomowej
- Q - objętościowe natężenie przepływu
- q - dopływ boczny
- Q_0 - natężenie przepływu w przekroju początkowym
- Q_b - natężenie przepływu w kanale bocznym
- Q_{gl} - natężenie przepływu w kanale głównym
- $Q_{gl+b, obl}$ - obliczone sumaryczne natężenie przepływu w kanale głównym i bocznym
- $Q_{gl+b, pom}$ - pomierzone sumaryczne natężenie przepływu w kanale głównym i bocznym
- Q_{obl} - obliczone sumaryczne natężenie przepływu
- Q_{pom} - pomierzone natężenie przepływu
- R - promień hydrauliczny
- Re - liczba Reynoldsa
- R_i - promień hydrauliczny i -tego przekroju
- s - spadek dna kanału
- S - spadek linii energii
- $\bar{S}$ - średni spadek linii energii
- s_{kr} - krytyczny spadek dna

t - czas
 T - symbol transpozycji
 U - prędkość średnia w przekroju w kierunku x
 $U(x,t)$ - prędkość średnia w przekroju w kierunku x
 $u(x,y,z,t)$ - prędkość lokalna w przekroju w kierunku x
 x - zmienna przestrzenna
 X - zmienna całkowania
 $\mathbf{x}$ - wektor niewiadomych układu równań (4.21)
 $\mathbf{X}$ - wektor niewiadomych układu równań (5.7) lub (5.19)
 $\mathbf{x}^{(k)}$ - przybliżenie rozwiązania układu (4.21) w k -tej iteracji
 $\mathbf{X}^{(k)}$ - przybliżenie rozwiązania układu (5.7) lub (5.19) w k -tej iteracji
 y - zmienna zależna
 $\mathbf{y}$ - wektor funkcji
 $\mathbf{y}'$ - pochodna wektora funkcji
 $\mathbf{y}_a$ - warunek brzegowy w punkcie a
 $\mathbf{y}_b$ - warunek brzegowy w punkcie b
 $y_{I,i}$ - głębokość w i -tym przekroju I -tego kanału
 Z - rzędna dna
 $z_{I,i}$ - rzędna dna w i -tym przekroju I -tego kanału

Bibliografia

1. Aivazian O. M., (1998): *New studies of nonuniform flows: finite length and averaged hydraulic gradient of rapid flows in prismatic channels*, Hydrotechnical Construction, Vol. 32, No. 7;
2. Argyros I. K., (2008): *Convergence and applications of Newton-type iterations*. Springer, USA;
3. Ascher U. M., Petzold L. R. (1998) *Computer methods for Ordinary Differential Equations and Difference-Algebraic Equations*, SIAM, Philadelphia;
4. Bronsztejn I. N., Siemiendiajew K. A., (1968): *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*. PWN, Warszawa;
5. Cahoon J., Hoshino T., (2003): *Flume for teaching spatially varied open-channel flow*, Journal of Hydraulic Engineering, October 2003, pp. 813-816;

6. Castro-Orgaz O., Giráldez J. V., Ayuso J. L., (2008): *Energy and momentum under critical flow conditions*, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 46, No. 6, pp. 844-848;
7. Chadwick A., Morfett J., (1999): *Hydraulics in civil and environmental engineering. Third edition*, E & FN SPON, Londyn, Nowy Jork;
8. Chanson H. (2004a): *The hydraulics of open channel flow: an introduction. Second Edition*. Elsevier;
9. Chanson H. (2004b): *Environmental hydraulics of open channel flow*. Elsevier.
10. Chaudhry H. F. (2008): *Open Channel Flow*. Springer;
11. Chow V. T., (1959): *Open-channel hydraulics*, McGraw-Hill / Kogakusha company LTD, Tokyo;
12. Cunge J. A., Holly F. M., Verwey A., (1979): *Practical aspects of computational river hydraulics*, Pitman advanced publishing program;
13. Czetweryński E., Utrysko B., (1969): *Hydraulika i Hydromechanika*. PWN, Warszawa;
14. Dubin J. R., (1999): *On gradually varied flow profiles in rectangular open-channels*. *Journal of hydraulic research*, Vol 37, No. 1;
15. (Praca zbiorowa pod redakcją:) Dziubiński I., Świątkowski T., (1985): *Poradnik matematyczny. Wydanie IV*. PWN Warszawa;
16. Field W. G., Lambert M. F., Williams B. J., (1998): *Energy and momentum in one dimensional open channel flow*, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 36, No. 1;
17. French R.H. (1985): *Open Channel Hydraulics*. McGraw-Hill: New York;
18. Kelly C. T. (2003): *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method*. SIAM;
19. Kincaid D., Cheney W., (2002): *Analiza numeryczna*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne;
20. Kubrak J. (1998): *Hydraulika techniczna*. Wydawnictwo SGGW;
21. Kubrak J, Nachlik E. (2003): *Hydrauliczne podstawy obliczania przepustowości koryt rzecznych*. Wydawnictwo SGGW;
22. Legras J. (1974): *Praktyczne metody analizy numerycznej*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne;
23. Macdonald I. (1996): *Analysis and computation of steady open channel flow*
24. Mays L. W. (Editor): *Hydraulic Design Handbook*. McGraw-Hill;
25. Michlin S. G., Smolnicki C. L., (1972): *Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*. PWN Warszawa;

26. Misra R., (1995): *Steady flow simulation in irrigation canals*. SADHANA Academy proceedings in engineering sciences. vol. 20, Part 6, pp. 955-969;
27. Misra R., (1996): *Spatially varied steady flow in irrigation canals*, Agricultural Water Management, Vol. 30, p.217-235;
28. Misra R., (1998): *Recursive algorithm for steady flow in a canal network*. Advances in Engineering Software, Vol. 29. No. 1, pp. 77-86, 1998;
29. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., (1992): *Numerical recipes in C: The art of scientific computing. Second edition*. Cambridge University Press;
30. Sawicki J. (1998): *Przepływy ze swobodną powierzchnią*. PWN;
31. Sawicki J., (2009): *Mechanika przepływów*. Wydawnictwo PG;
32. Schulte A. M., Chaudhry M. H., (1987): *Gradually-varied flows in open channel networks*, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 25, No 3;
33. Stoer J., (1979): *Wstęp do metod numerycznych. Tom I*, PWN Warszawa;
34. Stoer J., Bulirsch R., (1980): *Wstęp do metod numerycznych Tom II*, PWN Warszawa;
35. Sturm T. (2001): *Open Channel Hydraulics*. McGraw-Hill New York;
36. Szymkiewicz R. (2000): *Modelowanie matematyczne przepływów w kanałach i rzekach*. PWN;
37. Szymkiewicz R., (2010): *Numerical modeling in open channel hydraulics*. Springer;
38. Szymkiewicz A, Szymkiewicz R, (2004): *Method to solve the non-linear systems of equations for steady gradually varied flow in open channel network*, Communications in numerical methods in engineering, Vol. 20, No 4;
39. Todisco M.T., (2009): *Gradually-varied flow in open channel networks*, XIX IMEKO World Congress Fundamental and Applied Meteorology September 6–11, 2009, Lisbon, Portugal;
40. U.S. Army Corps of Engineers (1993): *River Hydraulics*;
41. Venkatarman P., Nasser M. S., Ramamurthy A. S., (1982): *Dynamic equations for steady spatially varied open channel flow: a critical review*, Advances in Water Resources, Vol. 5;