

Wojciech Gąziewicz

TRANSFORMACJA LAPLACE'A

Skrypt dla studentów politechnik

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Centrum Nauczania Matematyki
i Kształcenia na Odległość

Politechnika Gdańska 2016

Skrypt przeznaczony jest głównie dla studentów kierunków elektrycznych, elektroniki oraz automatyki na studiach technicznych. Mogą z niego skorzystać również studenci fizyki technicznej i matematyki stosowanej. Skrypt zakończony jest serią zadań kontrolnych, które student powinien rozwiązać w celu sprawdzenia opanowania przedstawionego materiału.

Wojciech Grażewicz

Spis treści

1	Definicja i własności przekształcenia Laplace'a	2
2	Przekształcenie odwrotne do przekształcenia Laplace'a	9
3	Zastosowania przekształcenia Laplace'a	11
4	Splot funkcji i jego własności	18
5	Transformata oryginału okresowego	20
6	Delta Diraca	22
7	Zadania	26
8	Literatura	28

1 Definicja i własności przekształcenia Laplace'a

Rozpatrzmy funkcję zespoloną $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ argumentu rzeczywistego czyli funkcję

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) = f_1(t) + if_2(t) \in \mathbb{C},$$

gdzie f_1 i f_2 są funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej. Jeżeli obie funkcje f_1 i f_2 są funkcjami całkowanymi na każdym przedziale $\langle 0; r \rangle$, $r \geq 0$, to możemy zdefiniować

$$\int_0^\infty f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f_1(t) dt + i \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f_2(t) dt.$$

Jeżeli obie granice po prawej stronie istnieją i są właściwe to mówimy, że całka $\int_0^\infty f(t) dt$ jest zbieżna. Jeżeli któraś z tych granic nie istnieje lub jest niewłaściwa, to całka jest rozbieżna. Jeżeli zbieżna jest całka $\int_0^\infty |f(t)| dt = \int_0^\infty \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)} dt$, to mówimy, że całka $\int_0^\infty f(t) dt$ jest zbieżna bezwzględnie. Zachodzi przy tym nierówność

$$\left| \int_0^\infty f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)| dt.$$

Definicja 1.1 Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ będzie funkcją całkowaną na każdym przedziale $\langle 0; r \rangle$, $r \geq 0$. Transformatą Laplace'a funkcji f nazywamy funkcję zespoloną F argumentu zespolonego, określoną wzorem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt. \quad (1)$$

Piszemy wówczas

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)].$$

Mamy zatem

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Całka występująca we wzorze (1) (zwana całką Laplace'a) jest całką zależną od parametru zespolonego s . Dla pewnych wartości s może ona być zbieżna, dla innych zbieżna bezwzględnie, a dla jeszcze innych rozbieżna.

Ważną klasą funkcji, dla których całka Laplace'a jest zbieżna, jest klasa funkcji zwanych oryginałami. Ograniczymy się tutaj do oryginałów, które są funkcjami rzeczywistymi (choć w ogólnym przypadku mogą to być funkcje zespolone).

Definicja 1.2 *Oryginałem* nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:

- 1° $f(t) = 0$ dla każdego $t < 0$;
- 2° w każdym przedziale $\langle t_1; t_2 \rangle$, $0 \leq t_1 < t_2$, funkcja f ma skończoną liczbę punktów nieciągłości i każdy z nich jest punktem nieciągłości pierwszego rodzaju;

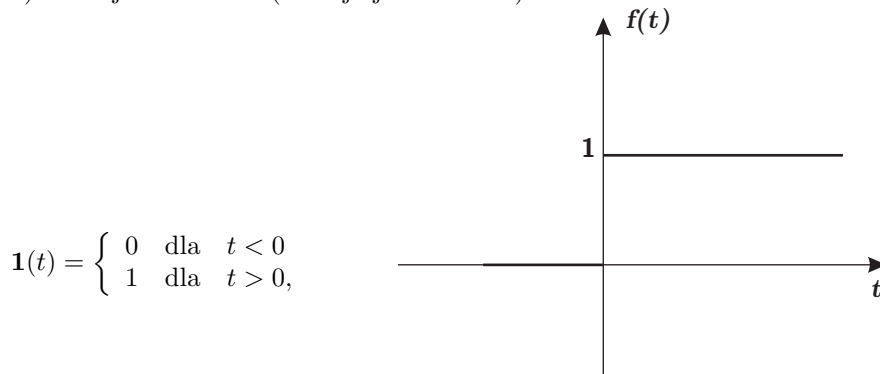
3° funkcja f jest rzędu wykładniczego, czyli

$$\exists M > 0 \exists \lambda \geq 0 \forall t \in (0; \infty) |f(t)| \leq M e^{\lambda t}.$$

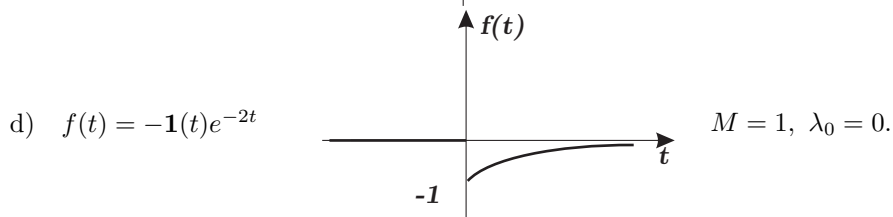
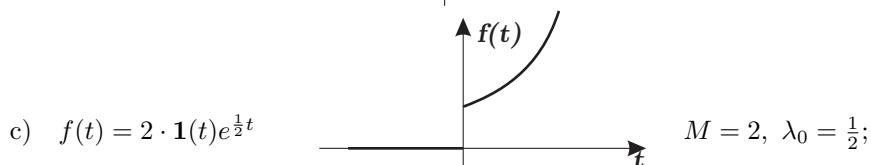
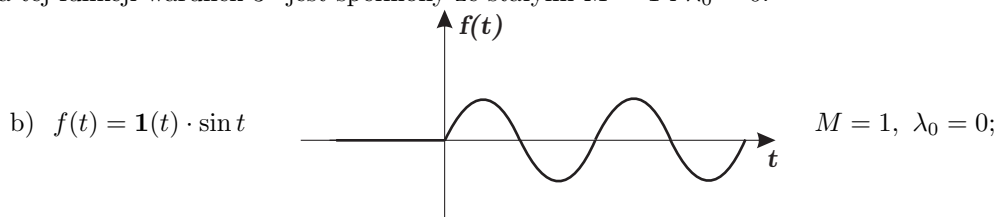
Najmniejszą stałą λ spełniającą warunek 3° będziemy oznaczać przez λ_0 i nazywać *współczynnikiem wzrostu wykładniczego oryginału* f .

Przykłady oryginałów:

a) Funkcja Heviside'a (funkcja jednostkowa)



Dla tej funkcji warunek 3° jest spełniony ze stałymi $M = 1$ i $\lambda_0 = 0$.



Zauważymy na przykład, że funkcja $g(t) = \sin t$, nie jest oryginałem ponieważ nie spełnia warunku 1°. Jeżeli jednak funkcja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki 2° i 3°, to funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot g(t)$ jest już oryginałem. W dalszym ciągu, jeżeli to nie

będzie prowadziło do nieporozumień, będziemy w zapisie oryginału pomijali czynnik $\mathbf{1}(t)$ traktując na przykład funkcję $f(t) = \sin t$ jako oryginał $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot \sin t$. W szczególności każda funkcja ograniczona spełniająca warunek 2°, jest oryginałem ze stałą $\lambda_0 = 0$.

Łatwo wykazać, że jeśli $f(t)$ i $g(t)$ są oryginałami, to funkcja $h(t) = af(t) + bg(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$, też jest oryginałem (a to oznacza, że zbiór oryginałów stanowi przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych).

Uzasadnimy teraz podstawowy

Fakt. *Jeżeli f jest oryginałem, to całka Laplace'a $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ jest zbieżna dla $s \in D$, gdzie $D = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \lambda_0\}$ i λ_0 jest współczynnikiem wzrostu wykładniczego oryginału f .*

D o w ó d: Pokażemy, że całka $\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ jest zbieżna bezwzględnie. Istotnie, niech

$$|f(t)| \leq Me^{\lambda_0 t} \text{ i niech } s = \lambda + i\omega. \text{ Wtedy}$$

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)| \cdot |e^{-st}| \leq Me^{\lambda_0 t} |e^{-\lambda t - i\omega t}| = Me^{\lambda_0 t} e^{-\lambda t} = Me^{(\lambda_0 - \lambda)t}.$$

Ponieważ całka niewłaściwa $\int_0^\infty e^{at} dt$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy $a < 0$, więc całka $\int_0^\infty Me^{(\lambda_0 - \lambda)t} dt$ jest zbieżna dla $\lambda > \lambda_0$. Stąd, na mocy kryterium porównawczego, całka $\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt$ jest zbieżna, a co za tym idzie całka $\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ jest zbieżna bezwzględnie dla $\operatorname{Re}(s) = \lambda > \lambda_0$. \square

Z powyższego faktu wynika, że transformata $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ oryginału f jest określona dla każdego $s \in D$. Obszar D jest więc dziedziną funkcji F . Okazuje się, że transformata $F(s)$ ma w obszarze D dodatkowe własności. Zachodzi bowiem

Twierdzenie 1.1 *Jeżeli $f(t)$ jest oryginałem, a $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, to F jest funkcją holomorficzną w obszarze $D = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) = \lambda > \lambda_0\}$. Dodatkowo $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(s) = 0$.*

Funkcja holomorficzna dla funkcji o wartościach zespolonych jest odpowiednikiem funkcji analitycznej (czyli takiej, którą można rozwinąć w szereg Taylora) dla funkcji o wartościach rzeczywistych. Ponadto warunek $\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} F(s) = 0$ orzeka, że każda funkcja zespolona, która nie spełnia tego warunku nie może być transformatą oryginału f . W szczególności funkcje wymierne zmiennej s , w których stopień licznika jest większy bądź równy stopniowi mianownika nie są transformatami żadnych oryginałów.

Podamy teraz kilka przykładów wyznaczania transformaty.

Przykład 1.1 Wyznaczyć transformatę funkcji jednostkowej.

R o z w i ą z a n i e :

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-st} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^r = \frac{1}{s} \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-sr} + \frac{1}{s}.$$

Pokażemy, że $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-sr} = 0$. Wystarczy pokazać, że $\lim_{r \rightarrow \infty} |e^{-sr}| = 0$. Istotnie

$$|e^{-sr}| = |e^{-(\lambda + i\omega)r}| = e^{-r\lambda}. \text{ Ponieważ dla oryginału } \mathbf{1}(t) \text{ jest } \lambda_0 = 0, \text{ więc dla}$$

$\lambda > \lambda_0 = 0$ mamy $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r\lambda} = 0$.

Ostatecznie

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}$$

Dopuszczalny jest również skrócony zapis dla powyższych obliczeń:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}.$$

Przykład 1.2 Wyznaczyć transformatę oryginału $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}.$$

Pominęliśmy uzasadnienie faktu, że dla $\operatorname{Re}(s) > \lambda_0 = a$ jest $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{(a-s)r} = 0$. Argumentacja podobna jest do tej z poprzedniego przykładu

Otrzymaliśmy wzór

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$$

Przykład 1.3 Obliczyć transformatę funkcji $f(t) = \sin t$.

Rozwiązanie: Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin t] &= \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt \quad \left| \begin{array}{l} u = e^{-st} \quad v' = \sin t \\ u' = -se^{-st} \quad v = -\cos t \end{array} \right| \\ &= -\cos t e^{-st} \Big|_0^{\infty} - s \int_0^{\infty} \cos t e^{-st} dt \quad \left| \begin{array}{l} u = e^{-st} \quad v' = \cos t \\ u' = -se^{-st} \quad v = \sin t \end{array} \right| \\ &= -\cos t e^{-st} \Big|_0^{\infty} - s \left[\sin t e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt \right] = \\ &= -\cos t e^{-st} \Big|_0^{\infty} - s \sin t e^{-st} \Big|_0^{\infty} - s^2 \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Stąd

$$(1+s^2) \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt = e^{-st} (-s \sin t - \cos t) \Big|_0^{\infty} = \underbrace{\lim_{r \rightarrow \infty} [e^{-sr} (-s \sin r - \cos r)]}_{0 \text{ (gdy } \operatorname{Re}(s) > 0)} + 1.$$

Zatem

$$\mathcal{L}[\sin t] = \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Własności transformaty Laplace'a

Podamy teraz podstawowe własności transformaty Laplace'a. Łatwe dowody tych własności pominiemy. Zilustrujemy tylko każdą z nich prostymi przykładami. W dalszym ciągu zakładamy, że $f(t)$ jest oryginałem, a $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ – jego transformata.

1. Liniowość transformaty

Dla dowolnych oryginałów f i g oraz dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ mamy

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

Przykład: $\mathcal{L}[2 - \sin t + 3e^{-t}] = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{3}{s + 1}$.

2. Twierdzenie o podobieństwie

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

Przykład: $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1}$, stąd

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

3. Różniczkowanie oryginału

Jeżeli $f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ są oryginałami, to

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$$

w szczególności

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0+)$$

oraz

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0+) - f'(0+)$$

Przykład: $\mathcal{L}[\cos at] = \mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{a} \sin at\right)'\right] = \frac{1}{a} \mathcal{L}[(\sin at)'] = \frac{1}{a} \left(s \frac{a}{s^2 + a^2} - \sin(0+)\right)$.

Zatem

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

4. Różniczkowanie transformaty

$$\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(s)$$

w szczególności

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s)$$

Przykłady:

$$\mathcal{L}[t \sin 2t] = -\left(\frac{2}{s^2 + 4}\right)' = \frac{4s}{(s^2 + 4)^2}$$

$$\mathcal{L}[t^2 e^{3t}] = \left(\frac{1}{s-3}\right)'' = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}[t \mathbf{1}(t)] = -\left(\frac{1}{s}\right)' = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[t^2] = \mathcal{L}[t \cdot t] = -\left(\frac{1}{s^2}\right)' = \frac{2}{s^3}$$

Ogólnie mamy:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{(n)!}{s^{n+1}}$$

5. Przesunięcie w argumencie oryginału

$$\mathcal{L}[f(t-a)\mathbf{1}(t-a)] = F(s)e^{-as}, \quad a > 0$$

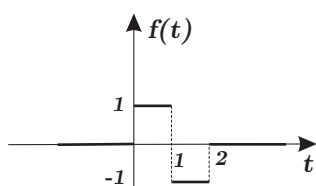
Przykłady:

$$\mathcal{L}[(t-1)^2\mathbf{1}(t-1)] = \frac{2}{s^3}e^{-s}.$$

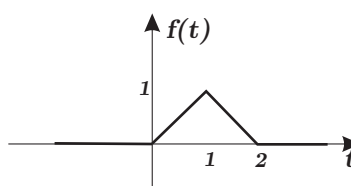
$$\mathcal{L}[\cos 3(t-2)\mathbf{1}(t-2)] = \frac{s}{s^2+9}e^{-2s}.$$

$$\mathcal{L}[t\mathbf{1}(t-3)] = \mathcal{L}[(t-3)\mathbf{1}(t-3)] + 3\mathcal{L}[\mathbf{1}(t-3)] = \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{3}{s}e^{-3s}.$$

Przykład 1.4 Wyznaczyć transformaty Laplace'a funkcji przedstawionych na wykresach



a)



b)

R o z w i ą z a n i e :

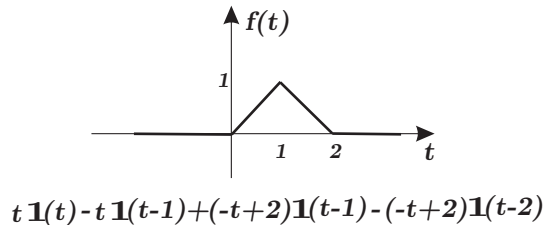
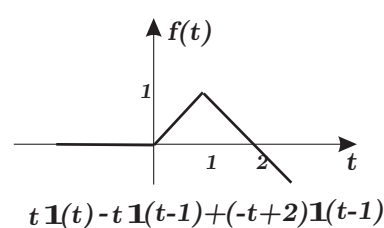
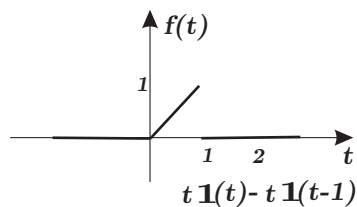
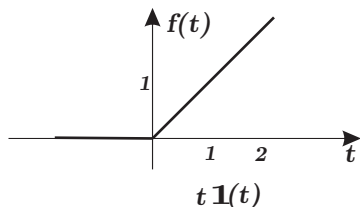
a) Funkcję f zapiszemy za pomocą funkcji Heviside'a:

$$f(t) = \mathbf{1}(t) - 2 \cdot \mathbf{1}(t-1) + \mathbf{1}(t-2).$$

Stąd

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s}.$$

b) Na poniższych rysunkach pokazane są kolejne etapy prowadzące do wyrażenia funkcji f za pomocą funkcji jednostkowej Heviside'a



Zatem

$$\begin{aligned} f(t) &= t\mathbf{1}(t) - t\mathbf{1}(t-1) + (-t+2)\mathbf{1}(t-1) - (-t+2)\mathbf{1}(t-2) \\ &= t\mathbf{1}(t) - 2(t-1)\mathbf{1}(t-1) + (t-2)\mathbf{1}(t-2). \end{aligned}$$

Stąd na podstawie własności 5 oraz pamiętając, że $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$, mamy

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s}.$$

6. Przesunięcie w argumencie transformaty

Obliczymy transformatę funkcji $e^{s_0 t} f(t)$, $s_0 \in \mathcal{C}$.

$$\mathcal{L}[e^{s_0 t} f(t)] = \int_0^t e^{s_0 t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^t e^{-(s-s_0)t} f(t) dt = F(s-s_0). \text{ Zatem}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{s_0 t} f(t)] = F(s-s_0), s_0 \in \mathcal{C}}$$

Przykłady:

$$\mathcal{L}[t e^{2t}] = \frac{1}{(s-2)^2}.$$

$$\mathcal{L}[t^2 e^{-t}] = \frac{2}{(s+1)^3}.$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}.$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} \cos \omega t] = \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-3t} \sin^2 t] &= \mathcal{L}[e^{-3t} \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-3t}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-3t} \cos 2t] \\ &= \frac{1}{2(s+3)} - \frac{s+3}{2[(s+3)^2 + 4]}. \end{aligned}$$

7. Całkowanie oryginału

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}}$$

Istotnie:

Niech $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Wtedy $g'(t) = f(t)$ oraz $sG(s) - g(0) = F(s)$. Ponieważ $g(0) = 0$, więc $sG(s) = F(s)$ i stąd $G(s) = \frac{F(s)}{s}$.

Przykład: $\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{3\tau} \cos 2\tau d\tau\right] = \frac{s-3}{s[(s-3)^2 + 4]}.$

Podamy teraz zestawienie najczęściej stosowanych wzorów związanych z transformacją Laplace'a

Lp.	$f(t)$	$F(s)$	Lp.	$f(t)$	$F(s)$
1	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$	8	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	9	$f'(t)$	$sF(s) - f(0+)$
3	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	10	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0+) - f'(0+)$
4	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	11	$tf(t)$	$-F'(s)$
5	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	12	$t^2f(t)$	$F''(s)$
6	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	13	$f(t-a)\mathbf{1}(t-a), a > 0$	$F(s)e^{-as}$
7	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	14	$e^{s_0t}f(t), s_0 \in \mathcal{C}$	$F(s-s_0)$

2 Przekształcenie odwrotne do przekształcenia Laplace'a

Transformacja Laplace'a jest przekształceniem, które pewnym funkcjom f zmiennej rzeczywistej t przyporządkowuje funkcje F zmiennej zespolonej s . Zapisujemy to wówczas $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Powstaje pytanie, czy istnieje odwzorowanie odwrotne do przekształcenia Laplace'a. Z definicji transformaty $F(s)$ wynika, że jeśli dwa oryginały $f(t)$ i $g(t)$ różnią się w skończonej liczbie punktów, to ich transformaty $F(s)$ i $G(s)$ będą identyczne. Podamy następujące

Twierdzenie 2.1 *Jeżeli f jest oryginałem, a funkcja F zmiennej zespolonej $s = \lambda + i\omega$ jest transformatą Laplace'a funkcji f , to w każdym punkcie t zachodzi wzór*

$$\frac{f(t-) + f(t+)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\lambda - i\omega}^{\lambda + i\omega} F(s)e^{st} ds, \quad (2)$$

gdzie $\lambda > \lambda_0$ a λ_0 jest współczynnikiem wzrostu wykładniczego oryginału f .

Z twierdzenia tego wynika, że w każdym punkcie t , w którym oryginał f jest ciągły, prawa strona wzoru (2) jest równa $f(t)$, natomiast w punktach nieciągłości funkcji f , prawa strona tego wzoru jest równa średniej arytmetycznej granic jednostronnych funkcji f w tym punkcie. Z tego powodu w dalszym ciągu jeśli oryginał $f(t)$ w jakimś punkcie jest nieciągły, to będziemy przyjmować, że w tym punkcie przyjmuje on wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych funkcji (choć nie będziemy tego zaznaczać na wykresie funkcji). Zgodnie z tą umową np.

$$\mathbf{1}(0) = \frac{\mathbf{1}(0-) + \mathbf{1}(0+)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Definicja 2.1 Przekształceniem odwrotnym do przekształcenia Laplace'a nazywamy przekształcenie określone wzorem

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\lambda - i\omega}^{\lambda + i\omega} F(s) e^{st} ds$$

Jeżeli oryginał f w swoich punktach nieciągłości ma wartość równą średniej arytmetycznej skoku w tym punkcie, to zachodzi

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \iff \mathcal{L}[f(t)] = F(s).$$

Przy wyznaczaniu oryginału, gdy znana jest jego transformata, korzystamy z wzorów z tabeli transformat. Na przykład $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 - 2}\right) = \cosh \sqrt{2}t$, bo na podstawie wzoru 6 jest $\mathcal{L}(\cosh \sqrt{2}t) = \frac{s}{s^2 - 2}$.

Przekształcenie \mathcal{L}^{-1} , podobnie jak przekształcenie \mathcal{L} jest przekształceniem liniowym. Mamy więc równości

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = a\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + b\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = af(t) + bg(t)}$$

Przykład 2.1 Obliczyć $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, jeśli $F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + s}$.

R o z w i ą z a n i e :

Funkcję F rozkładamy na ułamki proste,

$$\frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Stąd

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = 1 + \sin t.$$

Zatem $f(t) = 1 + \sin t$. W zasadzie powinniśmy napisać $f(t) = (1 + \sin t)\mathbf{1}(t)$, jednak zgodnie z wcześniejszą umową czynnik $\mathbf{1}(t)$ pomijamy.

Przykład 2.2 Wiedząc, że $F(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 5}$, znaleźć oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

R o z w i ą z a n i e :

Trójmian kwadratowy w mianowniku doprowadzamy do postaci kanonicznej. Otrzymamy

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)^2 + 1}.$$

Następnie otrzymaną funkcję przekształcamy tak, aby można było skorzystać z wzoru 14 w połączeniu z wzorami 3 i 4.

$$F(s) = \frac{s+2-2}{(s+2)^2 + 1} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} + \frac{2}{(s+2)^2 + 1}.$$

Stąd na podstawie wspomnianych wzorów mamy

$$\text{O d p o w i e d ź : } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} + \frac{2}{(s+2)^2 + 1}\right) = e^{-2t} \cos t + 2e^{-2t} \sin t.$$

3 Zastosowania przekształcenia Laplace'a

Transformacja Laplace'a jest dogodnym narzędziem pomocnym w rozwiązywaniu równań różniczkowych liniowych. Zaczniemy od następującego przykładu

Przykład 3.1 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x' + x = e^{-t}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Jest to równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego z niewiadomą funkcją x zmiennej niezależnej t . Założymy, że funkcja x jest oryginałem. Niech $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. Wtedy $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$. Zgodnie ze wzorem 5 z tabeli na str. 9 mamy

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s) - x(0+) = sX(s) - 1$$

Stosujemy transformatę Laplace'a do obu stron danego równania (transformujemy obie strony równania). Otrzymujemy

$$sX(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Stąd

$$(s+1)X(s) = 1 + \frac{1}{s+1}$$

oraz

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Zatem

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) = e^{-t} + te^{-t}.$$

O d p o w i e d ź:

$$x(t) = (1+t)e^{-t}.$$

Stosując transformatę Laplace'a do obu stron równania, przekształciliśmy dane równanie różniczkowe z niewiadomą funkcją x , w równanie algebraiczne z niewiadomą funkcją X . Wyznaczyliśmy z tego przekształconego równania funkcję X , a następnie stosując transformatę odwrotną \mathcal{L}^{-1} do funkcji X , otrzymaliśmy oryginał x , który jest rozwiązaniem danego zagadnienia.

Przykład 3.2 Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x'' - 2x' = e^{2t} \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Korzystając z wzorów 10, 9 i 2 otrzymujemy

$$\mathcal{L}[x''] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s),$$

$$\mathcal{L}[x'] = sX(s) - x(0) = sX(s),$$

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}.$$

Transformujemy obie strony danego równania:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x'' - 2x'] &= \mathcal{L}[e^{2t}] \\ s^2 X(s) - 2sX(s) &= \frac{1}{s-2}.\end{aligned}$$

Stąd

$$X(s) = \frac{1}{s(s-2)^2}.$$

Zatem

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-2)^2}\right).$$

Rozkładamy funkcję $X(s)$ na ułamki proste i otrzymujemy

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s-2)} + \frac{1}{2(s-2)^2}\right).$$

O d p o w i e d ź : $x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}.$

Przy wyznaczaniu transformaty odwrotnej skorzystaliśmy ze wzorów: 1, 2 i 14 w połączeniu ze wzorem 7 z tabeli transformat ze strony 9.

Rozwiązanie równań z powyższych dwóch przykładów, gdzie prawe strony są funkcjami ciągłymi, można było łatwo uzyskać klasycznymi metodami znanymi z kursu równań różniczkowych. W przypadku, gdy po prawej stronie równania występuje funkcja, która nie jest ciągła klasyczne metody zawodzą i wtedy transformacja Laplace'a jest skutecznym narzędziem. Zilustrujemy to kolejnym przykładem.

Przykład 3.3 Rozwiązać zagadnienie

$$\begin{cases} x'' + x = t\mathbf{1}(t-1) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Prawą stronę równania przekształcamy do postaci

$$t\mathbf{1}(t-1) = [1 + (t-1)]\mathbf{1}(t-1) = \mathbf{1}(t-1) + (t-1)\mathbf{1}(t-1).$$

Transformujemy teraz obie strony równania:

$$\mathcal{L}[x'' + x] = \mathcal{L}[\mathbf{1}(t-1) + (t-1)\mathbf{1}(t-1)].$$

Zatem

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-s}.$$

Uwzględniając warunki początkowe, mamy

$$s^2 X(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-s}.$$

Stąd

$$X(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s(s^2+1)}e^{-s} + \frac{1}{s^2(s^2+1)}e^{-s}.$$

Zatem

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s(s^2+1)}e^{-s} + \frac{1}{s^2(s^2+1)}e^{-s}\right).$$

Korzystamy teraz z liniowości transformaty odwrotnej i dostajemy

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}e^{-s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}e^{-s}\right).$$

Wyznaczamy poszczególne składniki funkcji x . Otrzymujemy kolejno:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t \cdot \mathbf{1}(t).$$

Funkcję wymierną $\frac{1}{s(s^2+1)}$ rozkładamy na ułamki proste:

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1},$$

a stąd

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) = 1 - \cos t$$

oraz, na podstawie wzoru 13,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}e^{-s}\right) = [1 - \cos(t-1)]\mathbf{1}(t-1).$$

Analogicznie

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}e^{-s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)e^{-s}\right] = [(t-1)^2 - \sin(t-1)]\mathbf{1}(t-1).$$

Zatem rozwiązaniem danego zagadnienia jest

$$\text{O d p o w i e d ź : } x(t) = \sin t \mathbf{1}(t) + [1 - \cos(t-1)]\mathbf{1}(t-1) + [(t-1)^2 - \sin(t-1)]\mathbf{1}(t-1).$$

Rozwiązanie x , jak się okazuje jest funkcją ciągłą.

Przykład 3.4 Rozwiązać, metodą transformacji Laplace'a, układ równań z zadanymi warunkami początkowymi

$$\begin{cases} x' + y' + y = e^t \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Zakładamy, że niewiadome funkcje x i y są oryginałami o transformatach odpowiednio X i Y . Transformujemy oba równania:

$$\begin{cases} sX(s) + sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s-1}, \\ 2sX(s) + sY(s) + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX(s) + (s+1)Y(s) = \frac{1}{s-1}, \\ 2sX(s) + (s+2)Y(s) = \frac{s}{s^2+1}. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ równań algebraicznych z niewiadomymi $X(s)$ i $Y(s)$. Rozwiązując ten liniowy układ otrzymujemy

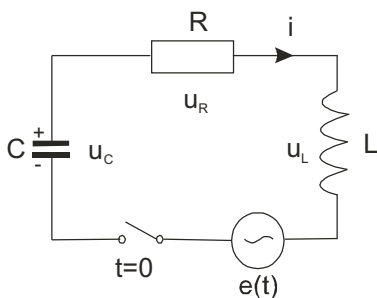
$$\begin{cases} X(s) = -\frac{s+2}{s^2(s-1)} + \frac{s+1}{s(s^2+1)} = \frac{4}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}, \\ Y(s) = -\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s(s-1)} = -\frac{2}{s} + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s^2+1}. \end{cases}$$

Stąd

$$\text{O d p o w i e d ź : } \begin{cases} x(t) = 4 + 2t - 3e^t + \sin t - \cos t \\ y(t) = -2 + 2e^t - \sin t. \end{cases}$$

Ważnymi przykładami zastosowań transformacji Laplace'a są zastosowania w dziedzinie elektrotechniki. Pokażemy jak wyprowadzić i rozwiązać równanie wyrażające zmianę natężenia prądu w typowym obwodzie zawierającym cewkę, opornik i kondensator.

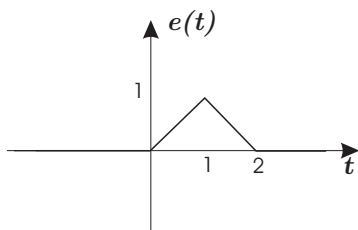
Przykład 3.5 Obwód elektryczny składa się ze źródła prądu o SEM równej $e = e(t)$, cewki o indukcyjności L , oporu R i kondensatora o pojemności C .



Znaleźć natężenie prądu $i = i(t)$ jako funkcję czasu t , jeżeli w chwili początkowej $t = 0$ natężenie w obwodzie oraz ładunek są równe zero. Wykonać obliczenia gdy $R = 2[\Omega]$, $L = 1[H]$, $C = 0,2[F]$, a siła elektromotoryczna $e(t)[V]$ zadana jest wzorem:

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \in (0; 1), \\ -t + 2, & t \in (1; 2), \\ 0, & t > 2, \end{cases}$$

której wykres przedstawiony jest na rysunku:



Sporządzić wykres natężenia i korzystając z dowolnego programu do obliczeń symbolicznych.

R o z w i ą z a n i e :

Zgodnie z prawem Kirchoffa, całkowita siła elektromotoryczna w obwodzie równa się sumie spadków napięć na cewce, oporze i kondensatorze,

$$e(t) = u_L + u_R + u_C,$$

gdzie

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_R = Ri, \quad u_C = \frac{q}{c}.$$

Napięcie u_C wyznaczymy z zależności

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t),$$

stąd, całkując ten związek w przedziale od 0 do t , otrzymamy

$$q(t) - q(0) = \int_0^t i(s) ds.$$

Ponieważ $q(0) = 0$, więc

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds.$$

Mamy zatem równanie

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = e(t). \quad (3)$$

Różniczkując ostatnie równanie obustronnie względem zmiennej t otrzymujemy

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + Ri + \frac{1}{C} i = \frac{de}{dt}.$$

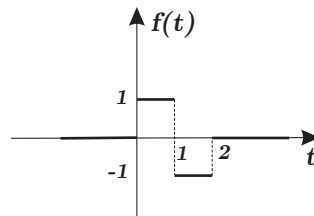
Po podzieleniu przez L i wstawieniu zadanych wartości liczbowych otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego z niewiadomą funkcją i

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2 \frac{di}{dt} + 5i = f(t), \quad (4)$$

gdzie funkcja

$$f(t) = \frac{de}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \in (0; 1) \\ -1, & t \in (1; 2), \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

przedstawiona jest na poniższym wykresie



Zapiszemy jeszcze warunki początkowe:

$$i(0) = 0, \quad \frac{di}{dt}(0) = \frac{e(0)}{L} = 0.$$

Drugi z warunków początkowych otrzymamy wstawiając $t = 0$ do obu stron równania (3). Transformując obustronnie równanie (2) i uwzględniając warunki początkowe, otrzymujemy

$$s^2 I(s) + 2sI(s) + 5I(s) = F(s)$$

gdzie $I(s) = \mathcal{L}[i(t)]$, $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s}$ (zob. przykład 1.4 a) str. 7).

Mamy zatem

$$(s^2 + 2s + 5)I(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s}$$

i stąd

$$I(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} - \frac{2}{s(s^2 + 2s + 5)}e^{-s} + \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}e^{-2s},$$

a więc

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} - \frac{2}{s(s^2 + 2s + 5)}e^{-s} + \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}e^{-2s}\right].$$

Funkcję wymierną $\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}$ rozkładamy na ułamki proste:

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 5}, \quad \text{stąd } A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = -\frac{2}{5}.$$

Zatem

$$\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{s} - \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 5} \right).$$

Przekształćmy jeszcze ostatnie wyrażenie do postaci dogodnej do stosowania wzorów z tabeli transformat

$$\frac{1}{5} \left(\frac{1}{s} - \frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 4} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{s} - \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{2}{(s + 1)^2 + 4} \right).$$

Mamy zatem kolejno:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}\right] = \frac{1}{5} \left[1 - e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t \right] \mathbf{1}(t),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s(s^2 + 2s + 5)}e^{-s}\right] = \frac{2}{5} \left[1 - e^{-(t-1)} \cos 2(t-1) - \frac{1}{2}e^{-(t-1)} \sin 2(t-1) \right] \mathbf{1}(t-1),$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}e^{-2s}\right] = \frac{2}{5} \left[1 - e^{-(t-2)} \cos 2(t-2) - \frac{1}{2}e^{-(t-2)} \sin 2(t-2) \right] \mathbf{1}(t-2).$$

Ostatecznie

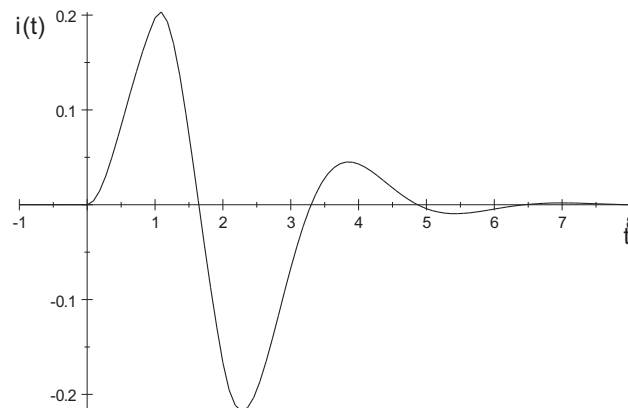
O d p o w i e d ź :

$$i(t) = \frac{1}{5} \left[1 - e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t \right] \mathbf{1}(t) \\ - \frac{2}{5} \left[1 - e^{-(t-1)} \cos 2(t-1) - \frac{1}{2}e^{-(t-1)} \sin 2(t-1) \right] \mathbf{1}(t-1) \\ + \frac{2}{5} \left[1 - e^{-(t-2)} \cos 2(t-2) - \frac{1}{2}e^{-(t-2)} \sin 2(t-2) \right] \mathbf{1}(t-2)$$

lub w tradycyjnym zapisie

$$i(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} [1 - e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t], & t \in (0; 1), \\ \frac{2}{5} [1 - e^{-(t-1)} \cos 2(t-1) - \frac{1}{2}e^{-(t-1)} \sin 2(t-1)], & t \in (1; 2), \\ \frac{2}{5} [1 - e^{-(t-2)} \cos 2(t-2) - \frac{1}{2}e^{-(t-2)} \sin 2(t-2)], & t \in (2; \infty). \end{cases}$$

Na koniec wykres rozwiązania uzyskany za pomocą programu Scientific Work Place



Uwaga: Transformatę $I(s)$ można też otrzymać bezpośrednio z równania (3) pomijając wyprowadzenie równania różniczkowego (4). Mianowicie, transformując obie strony równania (3) i stosując wzór na całkowanie oryginału (własność 7 ze strony 8) otrzymujemy:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} = E(s).$$

Stąd

$$I(s) = \frac{E(s)}{Ls + R + \frac{1}{sC}}$$

Wstawiając teraz dane zadania oraz korzystając z wyniku z przykładu 1.4 b) na str. 7 otrzymujemy

$$I(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)} - \frac{2}{s(s^2 + 2s + 5)}e^{-s} + \frac{1}{s(s^2 + 2s + 5)}e^{-2s}.$$

Transformacja Laplace'a stosuje się do równań lub układów równań różniczkowych liniowych w przypadku gdy warunki początkowe stawiane są w punkcie $t_0 = 0$. Na kolejnym przykładzie pokażemy jak sobie radzić, gdy warunek początkowy dany jest w punkcie $t_0 \neq 0$.

Przykład 3.6 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$x' + 2x = t, \quad x(2) = 1.$$

R o z w i ą z a n i e :

Przez odpowiednią zamianę zmiennych sprowadzimy dane równanie do równoważnego równania z warunkiem początkowym w zerze.

Niech $\tau = t - 2$, wtedy $t = \tau + 2$.

Wprowadźmy teraz nową funkcję niewiadomą $y = y(\tau)$ związaną z funkcją x zależnością

$$y(\tau) = x(\tau + 2) = x(t). \text{ Wówczas } y'(\tau) = x'(\tau + 2) = x'(t). \text{ Przy tej zamianie zmiennych}$$

dane zagadnienie przekształca się w zagadnienie

$$y'(\tau) + 2y(\tau) = \tau + 2, \quad \tau(0) = 1.$$

Do tego zagadnienia stosujemy transformatę Laplace'a. Otrzymujemy kolejno:

$$sY(s) - 1 + 2Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s},$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s^2(s+2)} + \frac{1}{s(s+2)}.$$

Po rozkładzie funkcji wymiernych na ułamki proste i redukcji wyrazów podobnych dostajemy

$$Y(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2}.$$

A więc

$$y(\tau) = \frac{1}{4}e^{-2\tau} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\tau.$$

Wracając teraz do niewiadomej funkcji x zmiennej t otrzymujemy

O d p o w i e d ź :

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{-2(t-2)} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(t-2).$$

4 Splot funkcji i jego własności

Definicja 4.1 Jeżeli funkcje f i g są funkcjami rzeczywistymi określonymi i całkwalnymi w każdym przedziale $\langle 0; t \rangle$, $t \in (0; \infty)$, to splotem funkcji f i g nazywamy funkcję h określoną następująco

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau, \quad t \in (0, \infty).$$

Splot funkcji f i g oznaczamy $f(t) * g(t)$. Mamy zatem

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau. \quad (5)$$

Własności splotu:

1° Splot jest operacją przemienną, łączną i rozdzielną względem dodawania.

2° Splot dwóch oryginałów jest oryginałem.

Twierdzenie 4.1 (Borela) Jeżeli f i g są oryginałami to

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)] = F(s) \cdot G(s).$$

Twierdzenie powyższe orzeka, że transformata splotu jest równa iloczynowi transformat.

Zilustrujemy to twierdzenie przykładem

Przykład 4.1 Obliczymy splot funkcji $f(t) = t$ i $g(t) = e^t$. Mamy

$$\begin{aligned} t * e^t &= \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau = e^t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau = e^t \left(-\tau e^{-\tau} \Big|_0^t - e^{-\tau} \Big|_0^t \right) \\ &= e^t (-te^{-t} - e^{-t} + 1) = e^t - t - 1. \end{aligned}$$

Zatem

$$\mathcal{L}[t * e^t] = \mathcal{L}[e^t - t - 1] = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} = \frac{s^2 - s + 1 - s(s-1)}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s^2(s-1)}.$$

Z drugiej strony, na podstawie twierdzenia Borela mamy:

$$\mathcal{L}[t * e^t] = \mathcal{L}[t] \cdot \mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1}.$$

Twierdzenie Borela stosujemy przede wszystkim do wyznaczania transformaty odwrotnej. Korzystamy wówczas z zależności

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = f(t) * g(t). \quad (6)$$

Przykład 4.2 Wyznaczyć oryginał $f(t)$, gdy znana jest transformata

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{5s}{(s^2+1)(s-1)}.$$

R o z w i ą z a n i e :

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{5s}{(s^2+1)(s-1)} \right) = 5 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s-1} \cdot \frac{s}{s^2+1} \right) \\ &= 5 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s-1} \right) * \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2+1} \right) = 5 e^t * \cos t = 5 \int_0^t e^{t-\tau} \cos \tau d\tau \\ &= 5 e^t \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau = 5 e^t \left[\frac{1}{2} e^{-\tau} (\sin \tau - \cos \tau) \Big|_0^t \right] = \frac{5}{2} (\sin t - \cos t + e^t). \end{aligned}$$

Uwaga : Przy wyznaczaniu oryginału $x(t)$ z wykorzystaniem twierdzenia Borela, należało obliczyć uciążliwą rachunkowo całkę $\int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau$ (szczegóły rachunków pominęliśmy). Ten sam oryginał można było obliczyć przez rozkład funkcji $F(s)$ na ułamki proste, podobnie jak w przykładach 2.1 i 2.2 na str. 10.

Przykład 4.3 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x(t) + \int_0^t x'(\tau) \cos(t-\tau) d\tau = \sin t \mathbf{1}(t-\pi), \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Równanie powyższe jest równaniem różniczkowo-całkowym typu splotowego. Zauważymy, że równanie można przepisać w postaci

$$x(t) + x'(t) * \cos t = -\sin(t-\pi) \mathbf{1}(t-\pi).$$

Transformujemy obie strony równania, stosując do lewej strony wzór na transformatę splotu (twierdzenie Borela) i wzór na transformatę pierwszej pochodnej, a do prawej strony, wzór 13 z tabeli transformat. Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} X(s) + sX(s) \cdot \frac{s}{s^2 + 1} &= -\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}, \\ X(s) \left(1 + \frac{s^2}{s^2 + 1}\right) &= -\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}, \\ X(s) &= \frac{-e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \cdot \frac{s^2 + 1}{2s^2 + 1} = \frac{-e^{-\pi s}}{2s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Stąd

$$x(t) = -\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{2s^2 + 1} \cdot e^{-\pi s} \right).$$

Ponieważ

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{2s^2 + 1} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} t,$$

więc korzystając znowu ze wzoru 13 na przesunięcie w dziedzinie argumentu, otrzymujemy

$$\text{O d p o w i e d ź : } x(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (t - \pi) \right) \mathbf{1}(t - \pi).$$

5 Transformata oryginału okresowego

Załóżmy, że oryginał $f(t)$ jest funkcją okresową dla $t > 0$, tzn. istnieje $T > 0$ takie, że $f(t) = f(t+T)$ dla każdego $t > 0$. Uzasadnimy wzór na transformatę oryginału okresowego:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt}$$

Istotnie mamy

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_T^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

W drugiej całce stosujemy podstawienie $t = u + T$ i $dt = du$. Zatem

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty f(u+T) e^{-s(u+T)} du \\ &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + e^{-sT} \int_0^\infty f(u) e^{-su} du \\ &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + e^{-sT} F(s). \end{aligned}$$

Stąd

$$F(s) (1 - e^{-sT}) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt.$$

Ostatecznie

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Przykład 5.1 Rozwiązać zagadnienie

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$$

gdzie f jest oryginałem okresowym określonym wzorem

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in (0, \pi), \\ 0 & \text{dla } t \in (\pi, 2\pi), \quad f(t+2\pi) = f(t). \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Wyznaczamy najpierw transformatę oryginału f . Korzystamy ze wzoru na transformatę oryginału okresowego o okresie $T = 2\pi$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} f(t) dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \cdot 1 dt + \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st} \cdot 0 dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \left[-\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} (e^{-\pi s} - 1) \\ &= \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(1 - e^{-\pi s}) \cdot (1 + e^{-\pi s})} = \frac{1}{s(1 + e^{-\pi s})}. \end{aligned}$$

Transformując teraz obie strony równania i uwzględniając warunki początkowe otrzymujemy:

$$s^2 X(s) + X(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-\pi s})}.$$

Stąd

$$X(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-\pi s})(s^2 + 1)}.$$

Zatem

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(1 + e^{-\pi s})(s^2 + 1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(1 + e^{-\pi s})} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \right]$$

Zauważymy, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest iloczynem transformaty naszego oryginału okresowego $f(t)$ i funkcji $\sin t$. Korzystając z twierdzenia Borela, otrzymujemy

$$x(t) = f(t) \star \sin t = \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

Aby obliczyć całkę po prawej stronie ostatniego wzoru, musimy rozpatrzyć przypadki dla t należących do kolejnych przedziałów $(0; \pi)$, $(\pi; 2\pi)$, itd. Mamy zatem

$$\text{jeśli } t \in (0; \pi), \text{ to } x(t) = \int_0^t 1 \cdot \sin(t - \tau) d\tau = \cos(t - \tau) \Big|_0^t = 1 - \cos t,$$

$$\text{jeśli } t \in (\pi; 2\pi), \text{ to } x(t) = \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(t - \tau) d\tau + \int_{\pi}^t 0 \cdot \sin(t - \tau) d\tau = \cos(t - \tau) \Big|_0^{\pi} = -2 \cos t,$$

$$\text{jeśli } t \in (2\pi; 3\pi), \text{ to } x(t) = \int_0^{\pi} \sin(t - \tau) d\tau + \int_{2\pi}^t \sin(t - \tau) d\tau = -2 \cos t + 1 - \cos t = 1 - 3 \cos t,$$

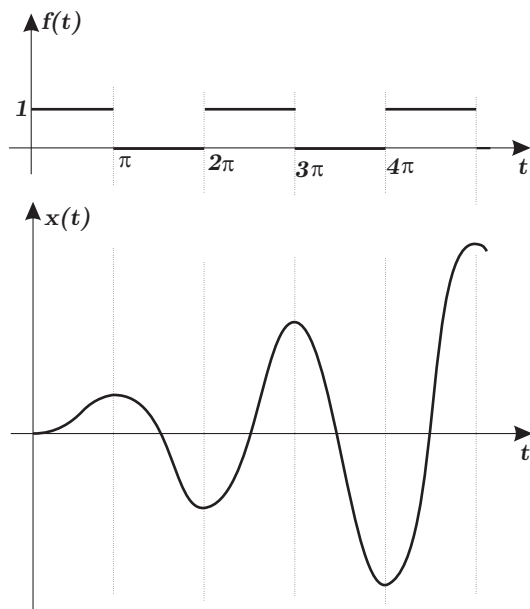
$$\text{jeśli } t \in (3\pi; 4\pi), \text{ to } x(t) = \int_0^{\pi} \sin(t - \tau) d\tau + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(t - \tau) d\tau + \int_{3\pi}^t 0 \cdot \sin(t - \tau) d\tau = -4 \cos t$$

i tak dalej.

Ostatecznie

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & t \in (0; \pi), \\ -2 \cos t, & t \in (\pi; 2\pi), \\ 1 - 3 \cos t, & t \in (2\pi; 3\pi), \\ -4 \cos t, & t \in (3\pi; 4\pi), \\ \vdots & \end{cases}$$

Interpretacja fizyczna rozwiązania naszego zagadnienia jest następująca. Dane równanie jest równaniem różniczkowym oscylatora bez tłumienia z okresowo działającą siłą f , wymuszającą drgania. Całka ogólna równania jednorodnego $x'' + x = 0$ jest postaci $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, a zatem jest funkcją okresową o okresie 2π . Ponieważ siła f ma też okres 2π , więc następuje zjawisko rezonansu. Wykres oryginału f) i wykres rozwiązania x przedstawiono na rysunku poniżej.



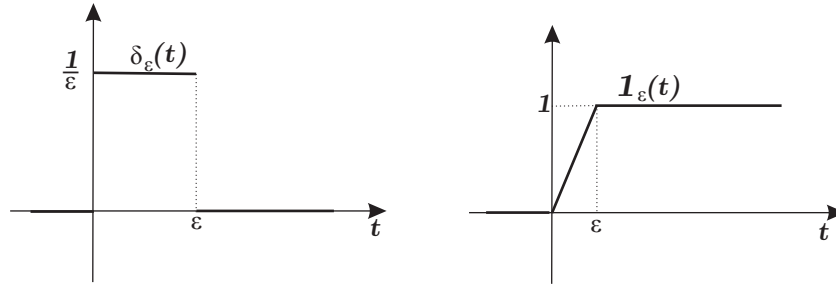
6 Delta Diraca

W zastosowaniach inżynierskich np. w teorii sygnałów i obwodów, w teorii sterowania, rozpatruje się funkcje zmiennej czasowej t (sygnały) o bardzo krótkim okresie działania i bardzo dużej amplitudzie. Zakłada się przy tym, że pole ograniczone osią czasu i wykresem takiego sygnału jest równe 1. Jest wiele możliwych realizacji takich sygnałów. Rozpatrzmy jedną

z nich. Weźmy pod uwagę dwie rodziny funkcji $\delta_\varepsilon(t)$ i $\mathbf{1}_\varepsilon(t)$, $\varepsilon > 0$, dane wzorami

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 < t < \varepsilon, \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{1}_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{t}{\varepsilon}, & 0 < t < \varepsilon, \\ 1, & t > \varepsilon, \end{cases}$$

których wykresy przedstawiono na poniższych rysunkach



Zauważmy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ jest

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} dt = 1$$

oraz

$$[\mathbf{1}_\varepsilon(t)]' = \delta_\varepsilon(t).$$

Gdy ε dąży do zera czas sygnału $\delta_\varepsilon(t)$ jest coraz krótszy i jednocześnie amplituda coraz większa. W granicy otrzymujemy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \mathbf{1}_\varepsilon(t) = \mathbf{1}(t) \quad \text{oraz} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Oznaczmy przez δ sygnał określony wzorem

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0 \end{cases}.$$

Sygnał $\delta = \delta(t)$ nazywać będziemy *deltą Diraca*. Na całej osi t z wyjątkiem zera przyjmuje on wartość zero, natomiast w samym zerze ma wartość równą nieskończoność. Delta Diraca nie jest w zwykłym sensie funkcją, należy ona do klasy obiektów zwanych pseudofunkcjami lub dystrybucjami. Całkowanie i różniczkowanie dystrybucji odbywa się w pewien uogólniony sposób, jednak podlega podobnym prawom jak całkowanie i różniczkowanie zwykłych funkcji. Możemy zatem zapisać

$$1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta_\varepsilon(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt.$$

Mamy ostatecznie

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Analogicznie, przechodząc w zależności $[\mathbf{1}_\varepsilon(t)]' = \delta_\varepsilon(t)$ do granicy przy $\varepsilon \rightarrow 0$, dostajemy

$$[\mathbf{1}(t)]' = \delta(t)$$

Dla przesuniętego sygnału Diraca $\delta(t - t_0)$, $t_0 > 0$, mamy oczywiście

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0, \\ \infty & t = t_0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Odnotujmy jeszcze, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} a \cdot \delta(t) dt = a.$$

Wyprowadźmy kolejną własność związaną z deltą Diraca. Niech f będzie pewną funkcją ciągłą w punkcie t_0 . Wtedy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t - t_0) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} f(t) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot f(t^*) = f(t_0), \end{aligned}$$

gdzie $t^* \in (t_0; t_0 + \varepsilon)$ (skorzystaliśmy tutaj ze znanego z analizy matematycznej twierdzenia o wartości średniej dla całek). Zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

Zbadajmy teraz jak delta Diraca reaguje na transformatę Laplace'a. Obliczmy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t - t_0) f(t)] &= \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta_\varepsilon(t - t_0) f(t) e^{-st} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} f(t) e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \cdot f(t^*) e^{-st^*} = f(t_0) e^{-st_0}. \end{aligned}$$

Ostatecznie

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0) f(t)] = f(t_0) e^{-t_0 s}.$$

W szczególności gdy $f(t) = \mathbf{1}(t)$, to

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = e^{-t_0 s},$$

a gdy $t_0 = 0$, to

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1.$$

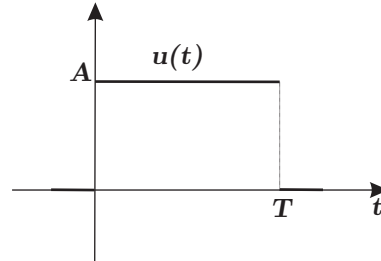
Przykład 6.1 Załóżmy, że pewien układ sterowania opisywany jest równaniem różniczkowym

$$x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = u'(t) + u(t),$$

gdzie u jest daną funkcją (sygnałem wejściowym) a x - funkcją szukaną (sygnałem wyjściowym). Wyznaczyć rozwiązanie przy zerowych warunkach początkowych i sterowaniu u danym przepisem

$$u(t) = \begin{cases} A, & t \in (0; T), \\ 0, & t < 0 \vee t > T \end{cases}$$

patrz rysunek



R o z w i ą z a n i e : Funkcję u zapisujemy w postaci

$$u(t) = A[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T)], \quad \text{wtedy} \quad u'(t) = A[\delta(t) - \delta(t - T)]$$

Po zastosowaniu transformaty Laplace'a do obu stron danego równania, otrzymujemy

$$s^2 X(s) + 4sX(s) + 5X(s) = A[1 - e^{-Ts}] + A\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-Ts}\right].$$

Stąd

$$\begin{aligned} X(s) &= A\left[\frac{1}{s^2 + 4s + 5} - \frac{1}{s^2 + 4s + 5}e^{-Ts}\right] + A\left[\frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)} - \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}e^{-Ts}\right] \\ &= A\left[\frac{s + 1}{s(s^2 + 4s + 5)} + \frac{s + 1}{s(s^2 + 4s + 5)}e^{-Ts}\right]. \end{aligned}$$

Po rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste i po przekształceniach dostajemy

$$X(s) = \frac{A}{5}\left[\frac{1}{s} - \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 2)^2 + 1}\right] + \frac{A}{5}\left[\frac{1}{s} - \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 2)^2 + 1}\right]e^{-Ts}.$$

Po zastosowaniu transformaty odwrotnej otrzymujemy ostatecznie

O d p o w i e d ź :

$$x(t) = \frac{A}{5}\left[1 + (\sin t - \cos t)e^{-2t}\right]\mathbf{1}(t) + \frac{A}{5}\left[1 + (\sin(t - T) - \cos(t - T))e^{-2(t - T)}\right]\mathbf{1}(t - T).$$

7 Zadania

Uzasadnić wzory 8 – 13 z tabeli transformat na str. 9.

(wsk. zastosować odpowiednie podstawienia lub całkowanie przez części)

Wyznaczyć transformaty następujących oryginałów:

1. $\sin^2 t$, odp: $\frac{2}{s(s+4)}$.
2. $\cos^3 t$, odp: $\frac{s^3+7s}{(s^2+9)(s^2+1)}$.
3. $t \cos \omega t$, odp: $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$.
4. $te^t \cos t$, odp: $\frac{s^2-2s}{(s^2-2s+2)^2}$.
5. $\cos^2(t-2) \cdot \mathbf{1}(t-2)$, odp: $\frac{e^{-2s}}{2s} + \frac{se^{-2s}}{2(s^2+4)}$.
6. $|\sin t|$, odp: $\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$.

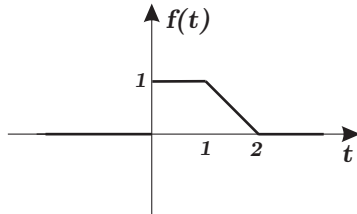
Wyznaczyć oryginał gdy znana jest transformata

7. $\frac{1}{s^2+4s+13}$, odp: $\frac{1}{3} \sin 3te^{-2t}$.
8. $\frac{s}{s^2-2s+3}$, odp: $(\cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t)e^t$.
9. $\frac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}$, odp: $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}e^{-2t}(4 \sin t - 3 \cos t)$.
10. $\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2}$, odp: $(t-2)e^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2)$.
11. $\frac{e^{-s}}{s^2-1} + \frac{se^{-2s}}{s^2-4}$, odp: $\sinh(t-1) \cdot \mathbf{1}(t-1) + \cosh 2(t-2) \cdot \mathbf{1}(t-2)$.
12. $\frac{e^{-\frac{1}{3}s}}{s(s^2+1)}$, odp: $\mathbf{1}(t-\frac{1}{3}) - \cos(t-\frac{1}{3}) \cdot \mathbf{1}(t-\frac{1}{3})$.

Rozwiązać następujące zagadnienia początkowe:

13. $x'' + 2x' + x = t^2e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.
odp: $x(t) = \frac{1}{12}t^4e^{-t}$.
14. $x'' + 4x = t\mathbf{1}(t-\pi)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
odp:
 $x(t) = \frac{1}{2} \sin 2t \mathbf{1}(t) + \frac{1}{4}[(t-\pi) - \frac{1}{2} \sin 2(t-\pi)]\mathbf{1}(t-\pi) + \frac{\pi}{4}[1 - \cos 2(t-\pi)]\mathbf{1}(t-\pi)$.
15. $x''' + x' = e^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.
odp: $x(t) = \frac{1}{6} \cos 2t - \frac{2}{3} \cos t + \frac{3}{2}$.

16. $x'' + 9x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$,
gdzie funkcja f dana jest wykresem



odp:

$$x(t) = \left(\frac{1}{9} + \frac{8}{9} \cos 3t\right) \mathbf{1}(t) + \frac{1}{9} \left[(t-1) - \frac{1}{3} \sin 3(t-1)\right] \mathbf{1}(t-1) + \frac{1}{9} \left[(t-2) + \frac{1}{3} \sin 3(t-2)\right] \mathbf{1}(t-2).$$

$$17. \begin{cases} 2x' + y' = \sin t \\ x' + y' = \cos t \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 0.$$

odp: $x(t) = 1 - \sin t - \cos t$; $y(t) = \cos t + 2 \sin t - 1$.

$$18. \begin{cases} x' - y' + x + y = 1 \\ x' + y' - x + y = t \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 0.$$

odp: $x(t) = \sin t - \cos t - \frac{1}{2}t + 1$, $y(t) = -\sin t - \cos t + \frac{1}{2}t + 1$.

$$19. x(t) = \sin t + 2 \int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

odp: $x(t) = te^t$.

$$20. x(t) = 2 + \int_0^t \sin \tau x'(t-\tau) d\tau, \quad x(0) = 0.$$

odp: $x(t) = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \cdot e^{\frac{1}{2}t}$.

21. $x'' + x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$,
gdzie f jest oryginałem okresowym danym wzorem
 $f(t) = t - n$ dla $n \leq t < n+1$, $n = 0, 1, \dots$.

odp:

$$x(t) = \begin{cases} t - \sin t, & t \in (0; 1) \\ t - \sin t + \cos(t-1) - 1, & t \in (1; 2) \\ t - \sin t + \cos(t-1) + \cos(t-2) - 2, & t \in (2; 3) \\ \vdots & \end{cases}$$

22. $x''' + x' = u'' + 2u' + u$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$, gdy $u(t) = t\mathbf{1}(t)$

odp: $\frac{1}{2}t^2 + 2t - \sin t$.

8 Literatura

- [1] Kącki E., Siewierski L., *Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami*, Warszawa 1975.
- [2] Trajdos T., *Matematyka dla inżynierów*, WNT Warszawa 1974.
- [3] Krasnow M., Kisielew A., Makarenko G. *Funkcje zmiennej zespolonej. Rachunek operatorowy. Teoria stabilności.*, Nauka, Moskwa 1971 (po rosyjsku).
- [4] Krasnow M.I., Makarenko G.I. *Zadania z rachunku operatorowego i stabilności ruchu*, PWN, Warszawa 1970.
- [5] Stankiewicz W., Wojtowicz J. *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, część druga* PWN, Warszawa 1971.