LUCJAN ZARZECKI

NAUCZANIE
MATEMATYKI POCZĄTKOWEJ

Agendo discimus...

CZĘŚĆ I. LICZBA CAŁKOWITA.

WYDANIE 3-ie UZUPEŁNIONE i POWIĘKSZONE

Nr 8

WYDAWNICTWO M. ARCTA W WARSZAWIE
POZNAŃ, PLAC WOLNOŚCI 7
1919

DRUKARNIA M. ARCTA W WARSZAWIE, NOWY-ŚWIAT 41.

Tym, którzy pragną lud polski uczyć nie tylko czytania, ale myślenia i rachowania.

poświęca

Autor.

PRZEDMOWA.

Książka wychodzi obecnie w wydaniu trzeciem. W porównaniu z drugiem poczyniono w niej pewne uzupełnienia, a tem samem powiększono objętość. Uzupełnienia dotyczą głównie nauczania t. zw. algebry w klasie 3-ej i geometrji. Ze względów praktycznych podzielono ją na 3 części: pierwszą poświęcono nauczaniu liczby całkowitej, drugą — wymiernej, a trzecią — geometrji. Z powodu uzupełnień wspomnianych tytuł książki również uległ zmianie, odpowiadającej rozszerzeniu się zakresu spraw, jakie porusza.

Doświadczenie pouczyło, że dwa pierwsze wydania były potrzebne. Wobec tego autor sądzi, że to trzecie również odpowiadać będzie pilnej potrzebie i spełni rolę swoją z pożytkiem. Rola ta nie polega na udzielaniu drobiagowych przepisów, lecz na wyjaśnieniu zagadnień zasadniczych. Rzeczą jest nauczyciela wyciąganie z zasad głównych wniosków pomniejszych, w praktyce nauczania potrzebnych. Zostawi mu to dużo swobody, da pole do myślenia i twórczości. Od tej twórczości płynącej z żywego, bezpośredniego doświadczenia zależą w przyszłości w ogromnej mierze losy nauczania i szkoły narodowej. Książka niniejsza pragnie do tego nauczyciela polskiego pobudzić.

Tak płodna w następstwa i tak dziś pogłębiona zasada: learning by doing znaną jest autorowi, a pomimo to wskazania swoje przystosował on do praktyki dzisiejszego nauczania i poziomu przygotowania pedagogicznego nauczycieli. Motoda nauczania rośnie i rozwija się razem z nauczycielem i postępem wychowania. Nie jest ona środkiem medycznym, lecz organiczną częścią całości życia...

Przyjdą szczęśliwsi i będą mogli zrobić lepiej.

ROZDZIAŁ I.

Arytmetyka obecnie należy do głównych przedmiotów nauczania w szkole elementarnej i średniej. Przyczyny tego zjawiska są dostatecznie zrozumiałe: działały tu względy w pierwszym rzędzie praktyczne. Prócz nich jednak niemałą rolę odegrały również wyrobione sposoby rachunku, wykonywania działań, które zastąpiły dawne zmudne metody mechaniczne. Oddawna już, a szczególniej od czasów Pestalozzego (a więc przez cały wiek XIX) usilnie pracowano nad metodą nauczania arytmetyki początkowej; literatura tej gałęzi dydaktyki w tym czasie wzrosła imponująco. Zrobiono już w tej dziedzinie dużo, a z całą pewnością zaznaczyć należy, iż główny impuls do tej pracy dało powstanie szkoły ludowej, demokratyzacja oświaty. Rozszerzony teren doświadczenia, rozrastające się potrzeby wpłynęły ogromnie na praktykę nauczania, na ustalenie pewnych sposobów traktowania rzeczy. Ale jeśli obecnie w porównaniu z wiekiem XVII zrobiliśmy bardzo duży krok naprzód w tej właśnie praktyce nauczania, to podwaliny teorji metodyki są jednakże chwiejne i nieraz zgoła niejasne.

Dla każdego chyba jest rzeczą zrozumiałą, że zdawanie sobie sprawy z tych elementarnych procesów myśli, z tych pojęć, na których opiera się gmach arytmetyki, to kwestja nie tylko ciekawa dla teoretyka, ale ważna też i dla praktyka. Stąd nieustanne poszukiwania w tej dziedzinie, ciągła praca zarówno pedagogów z zawodu, jak filozofów i matematyków-specjalistów. Najgłówniejszą jakością elementarną, na której opiera się arytmetyka, jest sama liczba całkowita, czyli t. zw. naturalna. Czem jest ta liczba? W pytaniu tem (jak zresztą w wielu innych) schodzą się drogi niezależnego badania naukowego i praktyki nauczania. Dość zajrzeć do wielu dzieł, szczególnie w literaturze niemieckiej, poświęconych specjalnie nauczaniu początków arytmetyki, aby się przekonać, że każdy autor przedewszystkiem na to pytanie zwraca uwagę.

Nie miejsce tutaj zastanawiać się nad różnemi teorjami o pochodzeniu i jakości pojęcia liczby. Takie badania zaprowadziłyby nas zbyt daleko od tych kwestyj praktycznych, z któremi związane jest nauczanie, od tego celu skromnego, który postawiliśmy sobie w tej książce. Postaramy się jednakże zwrócić tu uwagę na pewne ważne momenty, związane blisko z powstawaniem pojęcia liczby.

Gdy liczymy jakieś dane przedmioty konkretne, przechodzimy od jednego przedmiotu do drugiego w pewnej kolei. Aby taką kolejność wytworzyć, potrzeba pewnego wysiłku zarówno wyobraźni, jak uwagi. Łatwo to zrozumiemy, jeżeli zechcemy dla sprawdzenia przeliczyć faktycznie pewną grupę przedmiotów, np. grupę drzew w jakimś niewielkim gaju. Im więcej jest przedmiotów do przeliczenia, tem większe są trudności, gdyż trudniej jest wtedy w rozpatrywanych przedmiotach utworzyć pewien porządek, kolejność. Pomagamy sobie, dzieląc dane przedmioty na grupy, łatwe do spamiętania, albo też na grupy specjalnie przez nas mechanicznie śród przedmiotów wytworzone. Jeżeli zechcemy obserwować osoby liczące, bez trudności spostrzeżemy, że w takich razach najczęściej liczą one dwójkami (parami) lub trójkami, rzadziej czwórkami, a jeszcze rzadziej piątkami. Takie niewielkie grupy przedmiotów chwytamy liczbowo jakby jednym rzutem oka, a robimy to tem łatwiej, im odpowiedniejsze są po temu warunki, w jakich przedmioty są dane; rzecz bowiem zależy w dużej mierze od odległości przedmiotów, od ich położenia wzajemnego i t. p. Gdy np. przedmioty znajdują się w większej liczbie i bardzo blisko, albo też bardzo daleko jeden od drugiego, wtedy trudniej chwytać owe pary i trójki jednym rzutem oka; bo w pierwszym przypadku musimy mozolnie oddzielać jedną trójkę od drugiej, wysilać uwagę, w drugim zaś gałka oczka musi wykonać pewien ruch, by od jednego przedmiotu przejść do drugiego, fiksacja bowiem, czyli ustawienie danego przedmiotu w jasnem polu widzenia, może być zrobiona dla stosunkowo niewielkiej grupy przedmiotów i zależy również od odległości oka od tych przedmiotów. Wobec tego jest rzeczą ważną, by narzędzia poglądowe przy nauczaniu arytmetyki były ustawione w klasie na odpowiedniej odległości i miały określoną, zależną od warunków wielkość. Zdarzyło mi się widzieć w jednej z klas szkoły elementarnej liczydło, z którego nie usunięto niepotrzebnych gałek, liczona grupa gałek nie mogła być wskutek tego dla wszystkich uczniów wyraźna; samo zaś liczydło było przysunięte zbyt blisko do ławek. Są to rzeczy, na które należy baczyć przy nauczaniu.

Liczymy jednak nie tylko przedmioty konkretne, dane nam w polu widzenia, lecz i oddzielne powtarzające się dźwięki, np. uderzenia zegara, spadające powolnie krople wody i t. p. Liczyć możemy również oddzielne dotknięcia do powierzchni naszego ciała, oddzielne ruchy wykonywane przez nas samych. Czy możemy w tych razach z równą, jak poprzednio, łatwością ujmować wrażenia grupami po dwa, po trzy i t. p.? Otóż skonstatować tu należy dużą i *ważną* różnicę. W polu widzenia dane mamy przedmioty jednocześnie, tu następują po sobie kolejno; tam możemy wracać do przeliczonych i sprawdzać rachunek, tu tego zrobić nie możemy. Możemy i wzrokiem ujmować zjawisko, np. gdy obserwujemy ruchy wahadła zegarowego. Ale jedno wahnięcie mija i nie powtórzy się; a więc nieudolny rachmistrz nigdy nie ma pewności, czy dobrze porachował, jeżeli nie jest obeznany z jakiemi innemi metodami sprawdzania swego rachunku.

Z powyższego wynika, że liczymy przeważnie dwa rodzaje przedmiotów: 1-o takie, które są nam dane wszystkie jednocześnie w przestrzeni, 2-o takie, które następują po sobie w czasie. Liczenie w pierwszych jest jakby wygodniejsze, bo możemy nasze liczenie sprawdzić bezpośrednio, przeliczając powtórnie. Na tem między innemi przyczynami polega wartość t. zw. środków pomocniczych do poglądowego nauczania arytmetyki początkowej. Środki te mają jeszcze inne znaczenie, o czem jednak później. Ta własność specjalna przedmiotów pierwszego rodzaju jest zarazem powodem, dla którego wiele ludzi sądzi, że samo pojęcie liczby powstało z doświadczenia przez obserwowanie takich przedmiotów. Gdyby takie rozumienie rzeczy nie szkodziło przy nauczaniu, możnaby zupełnie nie zwracać na nie uwagi; ale nieraz może ono być szkodliwe. Taki pogląd jest to coś takiego, gdyby kto, widząc, że ławka w izbie pomaga dzieciom przy nauce chodzenia, chciał wyprowadzić stąd wniosek, że niektóre przedmioty zewnętrzne uczą dzieci chodzić. Zaznaczyliśmy powyżej, że licząc dane przedmioty, tem samem zaprowadzamy śród nich pewien porządek, ład. Otóż gdy liczymy, biorąc przedmioty pojedyńczo, czy też parami lub trójkami, łatwo zaobserwować, że porządek, jaki wybraliśmy, wcale nie wpływa na rezultat, o ile tylko rachunek był dobrze wykonany. Gdybyśmy np. przeliczali 12 przedmiotów pojedyńczo, to takie uporządkowanie możnaby było utworzyć tyloma sposobami, ile jest jedności w iloczynie: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12; gdyby przedmiotów było 5, to uporządkowań różnych byłoby: 1. 2. 3. 4. 5 i t. d. Przy wszelkiem uporządkowaniu rezultat liczenia będzie ten sam, otrzymana liczba będzie taka sama, a więc liczba nie zależy od uporządkowania. Ale gdy nam chodzi nie o kolejne liczenie, lecz o *doraźne* odczytywanie z danej grupy przedmiotów odpowiadającej im liczby, wtedy zestawienie tych przedmiotów musi być, jakeśmy to zaznaczyli, mniej lub więcej wygodne. Możnaby zadać sobie pytanie, jakie ustawienie przedmiotów byłoby najwygodniejsze do doraźnego odczytywania z nich liczby. Wykonywano nawet w tym celu różne doświadczenia z dziećmi. Wiemy zresztą, że doraźne odczytywanie liczby nawet dla nas starszych przedstawia duże trudności, jeżeli ta liczba jest większa, niż 4 lub 5. Musimy przy takich liczbach dokonywać liczenia, będzie się ono odbywało prędzej lub powolniej, zależnie od wprawy, ale faktycznie, jak to nietrudno sprawdzić, obserwując samego siebie lub rozpytując ludzi, będzie.

Liczba z drugiej strony nie zależy nie tylko od porządku, ale i od *jakości* przedmiotów. Wszystko jedno, czy liczymy stalki, czy kamyki, czy patyczki i t. p.; jeżeli liczba ich będzie ta sama, rezultat liczenia będzie ten sam. Fakt ten zwykle wyzyskują przy nauczaniu, usiłując wytworzyć w dzieciach *pojęcie* liczby. Wszak wszyscy dobrze rozumiemy, że liczba nie jest przedstawieniem jakiegoś konkretnego przedmiotu, że nie zawiera w sobie żadnych cech zmysłowych, że jest wytworem psychicznym, który należy do klasy t. zw. pojęć, tak samo jak np. dobro, sprawiedliwość i t. p. Każde pojęcie poza wszystkiemi innemi cechami posiada przedewszystkiem dwie: 1) reprezentuje całą klasę przedmiotów i 2) służyć może do porozumiewania się ludzi między sobą. Przedstawienia różnych konkretnych przedmiotów u różnych ludzi mogą być i są różne. Każdy z nas, przypominając sobie pewien przedmiot konkretny, uświadamia sobie inaczej jego szczegóły, inaczej go zabarwia uczuciowo, przedstawia go sobie więcej lub mniej dokładnie. W pojęciu te szczegóły indywidualne znikają, mamy przed sobą wytwór specjalny, coś w rodzaju monety papierowej, reprezentanta całej masy przedmiotów konkretnych z wzajemnie sprzecznemi i pokrywającemi się cechami indywidualnemi. Nie ulega jednakże wątpliwości, że pojęcie nie zjawia się odrazu, że musi ono być wypracowane i zdobyte, że przedewszystkiem pojawienie się jego musi poprzedzać *uświadamianie sobie przez człowieka potrzeby tego wytworu*. Nie ulega również wątpliwości, że pomiędzy przedstawieniem oddzielnego przedmiotu a reprezentantem klasy, do której on należy, istnieje cały szereg stopni przejściowych. Zaznajomienie się z historją rachunku i z jego stanem obecnym u ludów pierwotnych ma przedewszystkiem znaczenie ze względu na liczne i bardzo pouczające przykłady tych stopni przejściowych.

Jeżeli nas ktoś zapyta, co sobie wyobrażamy, gdy usłyszymy słowa: „system planetarny”, każdy z nas odpowie, że w wyobraźni jego zjawia się pewien całokształt przedmiotów skoordynowanych ze sobą w taki sposób, jak np. słońce i planety. Kto widział tellurjum, przypomni sobie, jak ten przyrząd wygląda, inni posługiwać się będą innemi przedstawieniami. Wszystkie te przedstawienia nie będą jednakże odpowiadały rzeczywistości, a to ze względu na jej ogrom i na niemożliwość bezpośredniego oglądania właściwego przedmiotu. Wiemy, że każda gwiazda może być rozpatrywana jako ośrodek jakiegoś systemu planetarnego, że nasze słońce jest tylko jedną z takich licznych bardzo gwiazd. Tak więc wspomniane wyżej różne u różnych ludzi przedstawienia będą niejako reprezentantami całej klasy jednorodnych przedmiotów. Każde takie przedstawienie posiada jedną z tych cech zasadniczych pojęcia, o których wyżej mówiono. Nie jest jednakże we właściwem tego słowa znaczeniu pojęciem. Jeżeli człowiek pierwotny zamiast używanego przez nas wyrazu — „pięć” powiada „ręka”, czyż nie używa też pewnego przedmiotu, który mu zastępuje naszą liczbę odnośną? Bez wątpienia tak jest. Badanie rachunku ludów pierwotnych i historja tegoż z całą pewnością pouczają, że podobne „przedmioty zastępcze” odgrywały w rachunku dużą rolę. Przy nauczaniu niektórzy nauczyciele posługują się monetami lub odpowiednio przygotowanemi markami, które mają to samo znaczenie, co np. kulki na liczydle. Im bardziej przedmioty zastępcze odbiegają od jakiegokolwiek konkretnego zbioru przedmiotów, tem więcej się zbliżają do pojęcia ze względu na swoją rolę.

Ciekawą i nie pozbawioną głębokiego znaczenia psychologicznego jest rzeczą, że ręka ludzka i wogóle części ciała były „przedmiotami zastępczemi”, a ich nazwy były pierwszemi liczebnikami, które później stopniowo usamodzielniały się, przerabiały, aby stać się tem, czem są obecnie. Jak ściśle umysł ludzki był związany z konkretnemi przedmiotami dowodzi chociażby ta okoliczność, że śród ludów pierwotnych spotyka się nieraz cztery np. różne nazwy dla oznaczenia czterech różnego rodzaju przedmiotów. Inaczej się nazywają np. przedmioty żywe, inaczej okrągłe, podłużne i t. p. (różnica może być całkowita, albo tylko w końcówce słowa czy przystawce).

Nietrudno zrozumieć, iż przy powyższym sposobie reprezentacji liczb niemożliwe są nasze metody rachunku, np. nasze mnożenie, niemożliwe jest przedewszystkiem rozszerzenie zakresu liczbowego poza ograniczoną sferę, związaną z możliwością takiej konkretnej reprezentacji. Pomimo tego w tym okresie rozwoju matematycznego występuje na widownię jedna z bardzo ważnych, dla matematyki zasadniczych metod.

Tą metodą dużej wagi jest metoda *odwzorowywania*. Jeżeli mamy dwa zbiory jakich przedmiotów (np. ziaren grochu czy kamyczków), to nawet wtedy, gdy nie posiadamy jeszcze nazw liczebników, gdy obce nam jest samo pojęcie liczby, możemy określić, czy zbiory te są liczebnie równe, czy też który z nich jest większy. Nazwijmy nasze zbiory dla skrócenia Z_1 i Z_2, a każdy przedmiot należący do jednego lub drugiego zbioru nazwijmy, również dla krótkości, jego elementem. Jeżeli teraz każdemu elementowi pierwszego zbioru Z_1 podporządkujemy jeden i tylko jeden element Z_2 i okaże się, że przytem zbiór Z_1 wyczerpuje się wcześniej, to powiadamy, że Z_1 jest mniejszy, niż Z_2; jeżeli obydwa zbiory wyczerpują się jednocześnie, mówimy, że są sobie równe, że posiadają tę samą zawartość.

Taki proces podporządkowania nazywa się właśnie procesem odwzorowywania. Pomiędzy zbiorami równemi istnieje, jak powiadamy, *doskonała odpowiedniość*, to zn. każdemu elementowi jednego zbioru odpowiada jeden i tylko jeden element drugiego i odwrotnie. Proces odwzorowania nie zależy od *jakości* elementów obu zbiorów, nie zależy również od uporządkowania ich — w tem znaczeniu, że każdorazowo możemy uwzględnić takie lub inne uporządkowanie.

Liczenie, jak widzieliśmy, również nie zależało (we właściwem znaczeniu tych wyrazów) od porządku i jakości liczonych przedmiotów. Rzuca się jednakże w oczy ta różnica pomiędzy liczeniem a odwzorowywaniem, że przy liczeniu elementy liczonego zbioru podporządkowujemy liczebnikom, wyrazom t. zw. ciągu naturalnego liczb: 1. 2. 3. 4. 5. i t. d., a przy odwzorowywaniu przedmiotom, elementom innego konkretnego zbioru. Pozatem wszystko pozostaje tem samem, przynajmniej na pierwszy rzut oka. Nietrudno zrozumieć, że pierwszem dalszem odkryciem na drodze przejściowej od odwzorowania do liczenia będzie odpowiedni wybór jednego ze zbiorów Z_1 i Z_2. Ten wybór musi być tak dokonany, aby jeden ze zbiorów był łatwo przenośny, aby w razie potrzeby stale mógł towarzyszyć początkującemu rachmistrzowi. Dziecko, licząc, odruchowo posługuje się palcami, które posiadają te cechy, ale nie mogą służyć do większego zakresu liczbowego, niż 10. To też nasz karbowy, licząc kopy zboża czy sztuki drzewa w lesie, albo co innego jeszcze, jeżeli nie jest biegły w rachunku (co się często zdarzało, a i teraz nierzadko się zdarza), wycina sobie kozikiem na kijku znaki, odpowiadające kopom; pani ekonomowa znowu, jeżeli nie jest biegła w rachunku, stawia węglem na deszczułce kreski, odpowiadające garncom mleka; modlący się przesuwa paciorki różańca, który dawniej odgrywał większą rolę, bo ludzie częściej nie umieli liczyć i t. p. Przykłady te wskazują, że tu wykonywany jest proces odwzorowywania i przytem na przedmiotach dosyć łatwo przenośnych.

Wobec tego owe przedmioty zastępcze nabierają innego znaczenia: są to zbiory przedmiotów obranych do wykonywania procesu odwzorowywania, ale ponieważ te przedmioty są indywidualne, mogą więc służyć do sprawdzenia, przeliczenia tylko określonych zbiorów. Przedmioty takie wzięte były z otoczenia najbliższego. Nadawała się do tego szczególniej ręka ludzka, jako przedmiot bezpośrednio, organicznie związany z ciałem człowieka: to też mamy w historji arytmetyki dane, że t. zw. rachunek na palcach odgrywał dawniej dużą rolę. Teraz jeszcze błąkają się t. zw. sztuczki z dziedziny starożytnego rachunku na palcach. Rachunek na palcach, jak sądzą słusznie pedagogowie, może mieć zawsze niemałe znaczenie, a szczególniej przy nauczaniu dzieci niedorozwiniętych. Nadaje się on głównie w zakresie pierwszego dziesiątka, gdzie może mieć dużą wartość, psychologicznie uzasadnioną.

Jeżeli zwrócimy uwagę na to, że przy większych liczbach proces odwzorowywania wymaga pomiętania porządku, w jakim uszeregowane są przedmioty zbioru odwzorowywanego, nietrudno zrozumieć, że proces ten mógł najpierw dotyczyć tylko bardzo niewielkich zbiorów. Pamiętanie porządku elementów większego zbioru jest związane z większym wysiłkiem uwagi, a więc większą pracą umysłową. Określone zbiory przedmiotów, służące najpierw do odwzorowywania [jak np. ręka (5), cały człowiek (20)], jako przedmioty zastępcze, były stałe i tem samem ograniczone. W taki sposob proces rozwoju myśli arytmetycznej nie mógł posuwać się dalej, zakres liczbowy nie mógł rosnąć, gdyż inaczej trzebaby było posiadać liczne tego rodzaju zbiory, co zbytnio utrudniałoby liczenie, a właściwie odwzorowywanie. Dlatego stadjum owych zbiorów stałych mogło się utrzymać dotąd tylko, póki potrzeba praktyczna nie zmusiła człowieka do udoskonalenia swego aparatu odwzorowującego. Karbowy, który wycina znaczki na kiju, jest już na wyższym szczeblu rozwoju, bo może w ten sposób znacznie większe liczby odwzorowywać. Póki praktyka życia związana była z niewielkiemi liczbami, środki powyższe jako tako wystarczały; ale później musiały ustąpić innym: aparat odwzorowujący musiał się ciągle wydoskonalać. Podobne zjawisko spotykamy w sposobach pisania, które najpierw związane były, jak to widzimy np. w hieroglifach egipskich, z rysunkiem. Aparat odwzorowujący będzie tem doskonalszy, im łatwiej da się przenosić, im większy zakres liczb objąć potrafi; wtedy dla wszystkich przypadków będzie stosowny. Pisanie zwyczajnych kresek, którego pozostałości widzimy np. w cyfrach rzymskich, pozwala zapisywać nawet większe liczby przy odpowiedniej cierpliwości, ale ma inne braki, które łatwo zrozumieć: wymaga dużo miejsca i dużo czasu, niewygodne jest do porozumiewania się i działań.

Ostatnim szczeblem rozwojowym w tej dziedzinie jest wytworzenie ciągu naturalnego, wytworzenie słów odpowiadających liczbom stale zwiększającym się o jedność. Ten ciąg naturalny jest uniwersalnym aparatem odwzorowującym, najwygodniejszym, bo kto go raz posiadł, — zawsze z nim pozostanie. Liczenie jest to odwzorowywanie zapomocą ciągu naturalnego liczb, podporządkowywanie każdego kolejnego elementu przeliczonego zbioru kolejnemu elementowi ciągu, który przytem daje odpowiedź na pytanie: *ile przedmiotów policzyliśmy?* Utworzony ciąg naturalny ma nadto wiele innych cech. Np. odrazu rzuca się w oczy, że nie można każdej następnej liczby ciągu nazywać oddzielnem słowem bez żadnej prawidłowości: myśl zgubiłaby się napewno w tym lesie słów.

Podczas gdy przedmioty liczone możemy przestawiać dowolnie i przez to liczba ich się nie zmieni, wyrazy ciągu naturalnego przeciwnie: — nie mogą być przedstawiane; w ich uporządkowaniu zawiera się coś więcej, niż w zwyczajnym szeregu znaków lub też jakichkolwiek innych przedmiotów. Wyrazy ciągu są reprezentantami wszelakich zbiorów o tej samej *zawartości*, a każdy wyraz następny jest reprezentantem zbiorów o zawartości *większej* (t. j. przy odwzorowywaniu 2 zbiorów jakichkolwiek, których reprezentantami są 2 następujące po sobie wyrazy ciągu naturalnego; po wyczerpaniu jednego z tych zbiorów w drugim pozostanie jeszcze jeden element). Każdy wyraz ciągu naturalnego przedstawia *jakby symbol, znak wykonanej pracy odwzorowywania czyli liczenia*. Ta ostatnia uwaga ma wielkie znaczenie dydaktyczne, bo bardzo często uczymy najpierw, np. w zakresie pierwszego dziesiątka, liczyć, uważając to za rzecz konieczną przy nauce początków. Jest to mniemanie niesłuszne: dziecko może zapamiętać szereg kolejnych liczebników, może stosować to do liczenia przedmiotów, ale takie liczenie będzie procesem czysto *formalnym*, bo dla dziecka w takim razie nazwy kolejne liczebników nie będą posiadały nic prócz zwyczajnych dźwięków, szeregowanych w porządku kolejnym, utrwalonym tylko przez pamięć (patrz np. S. Jankowski; „Jak prowadzić naukę rachunków. Część I".

Warszawa 1908). W niektórych przypadkach taka znajomość szeregu liczebników może nawet zaszkodzić, a wogóle przygotowaniem do nauki być nie może.

Jest faktem, znanym z obserwacji rachunku u ludów pierwotnych, że samo nauczenie liczebników nie prowadzi do stosowania ich w rachunku praktycznym. Człowiek pierwotny pamięta nieraz wyuczone słowa, ale w praktyce swego życia stosuje własne pierwotne metody, obywające się bez tych słów. Dopiero zmiana warunków jego życia, rozwój odpowiedni stosunków gospodarczych, handlu i przemysłu jest tym motorem, który prowadzi jego myśl matematyczną na wyższy szczebel rozwoju.

Tak samo postępujemy zbyt ryczałtowo i nieoględnie, gdy pokazując różne przedmioty i przeliczając je, sądzimy, że w ten sposób wytwarza się *pojęcie* liczby. (Np. patrz W. Traczyński: „Przewodnik metodyczny do nauki rachunków". Jarosław 1910). Już z powyższego krótkiego szkicu czytelnik widzi, ile to momentów myślowych potrzeba uwzględnić, by można mówić o pojęciu liczby, z drugiej zaś strony pojęcia muszą się *stopniowo wytworzyć*, wyrosnąć, a do tego nie dość samych tylko pokazów i krótkiego zwrócenia uwagi. Uczeń musi przejść przez wszystkie stadja przygotowawcze, a więc musi zauważyć niezależność liczby od uporządkowania, od jakości przedmiotów, musi odwzorowywać zbiory jedne w drugich zapomocą stałych przedmiotów, np. gałek na liczydle, kresek stawianych u siebie w tabliczce (arytmetyka bez słów w ochronkach), obrazków, następnie liczyć różne przedmioty, używając słów. Nie dość jeszcze na tem: pojęcie danej indywidualnej liczby wtedy się zjawia, wtedy jest w posiadaniu dziecka, gdy ono *niem operuje*, co jest możliwe tylko przy wykonywaniu różnych z liczbą działań i zadań, gdy dziecko *uświadamia sobie swoje procesy psychiczne*. Wobec tego, że języka dzieci uczą się zwykle dość wcześnie, pojęcia, jakie wyraża mowa, zdają się nam już być gotowemi; gdy tymczasem bliższe zbadanie rzeczy wykazałoby duże braki w tej dziedzinie. Można przeliczać różne przedmioty, ale nie mieć pojęcia liczby, przynajmniej samo takie przeliczanie nie może być sprawdzianem tego. Najlepszym sprawdzianem jest samodzielne zastosowanie liczby przez ucznia w zadaniu. Jeżeli dziecko powie do kolegi: „dam ci cztery stalki, a ty daj mi obsadkę, bo swoją zgubiłem", to tutaj najlepiej się przejawia wartość zdobytych pojęć. Zadanie, jak wszędzie w matematyce, ma również w tym razie kapitalne znaczenie. Na tem polega wartość tak zwanego praktycznego kierunku w nauczaniu wogóle. Jeżeli dziecko stosuje pewne pojęcia do zagadnień znajdujących się w sferze jego zainteresowań, jeżeli operuje pewnemi pojęciami, tem samem musi je posiadać. Inne sprawdziany są o wiele ryzykowniejsze i nie dają uczącemu pewności.

Zazwyczaj sądzimy, że pojęcie liczby rozwija się na tle doświadczenia. Ale powiedzieć, że coś powstaje na tle doświadczenia, jest to często prawie nic nie objaśnić. W naszem zagadnieniu mamy do czynienia z bardzo zawiłym procesem. Jednym z wybitnych rzeczników doświadczalnego powstawania pojęć liczbowych jest myśliciel angielski John Stuart Mill. Stawia on sprawę najjaśniej i najkonsekwentniej. Przytoczymy tu słowa samego Milla: „Wyrażenie „dwa krzemienie i jeden krzemień" oraz wyrażenie „trzy krzemienie" w rzeczywistości oznaczają ten sam zbiór krzemieni, a bynajmniej nie ten sam fakt fizyczny. Są to nazwy tych samych przedmiotów, lecz tych samych przedmiotów w dwóch stanach odmiennych: chociaż nazwy oznaczają te same rzeczy, lecz towarzyszące im pewne cechy są różne. Trzy krzemienie w dwóch różnych zbiorach i trzy krzemienie w jednym zbiorze oddziaływają na nasze zmysły nie jednakowo, a twierdzenie, że przez zmianę miejsca i rozkładu tych krzemieni można osiągnąć, aby te krzemienie wywoływały ten lub inny szereg czuć, jakkolwiek byłoby banalnem, nie jest jednakże tautologją. Twierdzenie to jest prawdą, znaną z bardzo wczesnego i stałego doświadczenia: jest ono prawdą zdobytą indukcyjnie, a takie właśnie prawdy stanowią podstawę nauki o liczbach. Wszystkie prawdy podstawowe tej nauki opierają się na świadectwie zmysłów; dowody czerpiemy, wykazując oczom lub palcom naszym, że dana liczba przedmiotów, np. dziesięć kul, może przy rozmaitym układzie przedstawiać się naszym zmysłom jako różne szeregi liczb o sumie równej dziesięciu. Wszystkie udoskonalone metody nauczania dzieci arytmetyki oparte są na znajomości tego faktu. Wszyscy, którzy pragną uczyć arytmetyki, wpływać na umysł dziecka, dawać wiedzę o liczbach, a nie o cyfrach — uczą teraz na podstawie świadectwa zmysłów, jak wskazano powyżej". (System Logiki. T. I, ks. II, roz. VI, wydanie 5-te).

Mill słusznie twierdzi, że dwa różne ugrupowania tych samych przedmiotów stanowią różne fakty fizyczne. Skądże tedy dowiadujemy się o tem, że liczba przedmiotów jest ta sama? „Twierdzenie to jest prawdą znaną z bardzo wczesnego i stałego doświadczenia" — mówi Mill. Lecz czy takie objaśnienie cokolwiek rzecz tłumaczy? Jest to dogmat i nic ponadto. Dlaczego doświadczenie nie poucza nas bez zmudnego liczenia, że różne ugrupowania tych samych 60 np. przedmiotów dają tę samą liczbę? Dlaczego ogranicza się do niewielkiej bardzo liczby przedmiotów, jakkolwiek ogarnąć wzrokiem wyraźnie możemy czasem bardzo znaczne ich liczby? Gdyby liczba była cechą ugrupowań przedmiotów, którą można ujmować zmysłami, odczytywanie liczby nie zależałoby od liczności grupy. Aby odczytać liczbę, trzeba porównywać różne ugrupowania, albo między sobą w pamięci, albo ze stałem innem ugrupowaniem (co jest łatwiejsze), a tem samem wykonać proces odwzorowania. Końcowe uwagi powyższego ustępu z dzieła Milla są słuszne niezależnie od jego teorji filozoficznej. Dziecko może myśleć tylko o konkretnych przedmiotach, tylko takie może porównywać, ale robimy to, uwzględniamy tę rzecz dlatego, by to dziecko później mogło myśleć *o wytworach własnej myśli*, bo to jest zasadniczą właściwością nauki arytmetyki i matematyki wogóle. Konkretne przedmioty pomagają do wytworzenia pojęcia liczby, ale nie tworzą tego pojęcia: jest ono produktem czystej myśli. Myśl dziecka powoli odrywa się od konkretnych przedmiotów, staje, że tak powiem na własnych nogach, a wtedy robi wprost ogromnej doniosłości krok naprzód. Nie myślmy, że to tak prędko się odbywa: często nawet w wyższych klasach szkoły średniej jeszcze się do tego nie dochodzi. Ale wróćmy do Milla.

Sam on czuje, że czegoś jego teorji brakuje, bo oto dalej powiada: „Sąd „trzy jest dwa i jeden" musimy nazwać określeniem trójki; natomiast oparte na tym sądzie liczenie wypływa nie z samego określenia, lecz na zasadzie założenia zawartego w niem twierdzenia arytmetycznego, mianowicie: istnieją zbiory przedmiotów, które, oddziaływając na nasze zmysły w postaci wrażenia: ₒₒ°, mogą być podzielone na dwie części w ten sposób: ∘∘ ∘. Ponieważ zakłada się tego rodzaju twierdzenie, nazywamy wszystkie takie ugrupowania: trzy, a stąd i sam zawarty w założeniu tem fakt fizyczny będzie mógł być poczytywany za określenie liczby trzy". Mill chce tu powiedzieć, że niezależnie od ugrupowania przedmiotów poznajemy w doświadczeniu te, w których liczba jest ta sama, i że ta właśnie niezależność od ugrupowania stanowi „twierdzenie" arytmetyczne; nie wykazuje natomiast, jak już wyżej zanotowaliśmy, w jaki to sposób w doświadczeniu dochodzimy do podobnego zasadniczego „twierdzenia", dlaczego mamy pewność, że różnym grupom przedmiotów odpowiada ta sama liczba. W dalszych swych wywodach Mill wskazuje na jeden jeszcze „element hipotetyczny". Jest nim założenie identyczności liczonych jednostek. Wszak wiemy z doświadczenia, że niema dwóch zupełnie jednakowych przedmiotów. Skąd w takim razie założenie, że liczone przedmioty są identyczne? Nawet w tej drobniejszej sprawie widać specjalną funkcję naszej myśli, która musi sobie sama tworzyć rzeczy i pracuje nad niemi. Prócz tego powyższe wywody Milla wcale nie dotyczą przedmiotów zjawiających się jeden za drugim kolejno w czasie [1]).

Myśli, które wypowiedziane zostały w powyższych rozważaniach, dadzą się streścić narazie w takim ogólnym wniosku dydaktycznym: Należy baczniejszą zwracać uwagę na wytwarzanie się pojęcia liczby, a dlatego prócz odliczania *różnych* przedmiotów uwzględniać następujące czynniki: 1° proces odwzorowania, 2° niezależność liczby od uporządkowania. Najlepszym zaś sprawdzianem w kwestji posiadania pojęcia liczby jest samodzielność stawianych przez ucznia zapytań treści arytmetycznej i samodzielne stosowanie pojęć liczbowych do bezpośrednio nasuwających się zagadnień otaczającego życia, związanych ze sferą jego zainteresowań.

Swoją drogą czytelnik zapyta nas: a czemże jest liczba, jak ją określić? Określenia takiego niema, odpowiadamy, bo liczba całkowita jest pierwotnym faktem arytmetycznym. Jeżeli co chcemy określić, musimy odwołać się do pojęć elementarniejszych lub za elementarniejsze uważanych. W nauce niema zgody co do tego. Różni metodycy podają różne określenia liczby, ale wszystkie one bez wyjątku grzeszą nielogicznością. Dawniej (a nawet i teraz czasem) podawano w podręcznikach określenie liczby w rodzaju następującego: liczba jest to rezultat liczenia albo mierzenia. Jasna rzecz jednakże, że w samem pojęciu liczenia i mierzenia już się zawiera pojęcie liczby, popełnia się tu tedy błąd logiczny, który nazywają „błędnem kołem" (circulus vitiosus). Jedna rzecz jest wyraźna i powinna być dobrze rozumiana: mówiąc o liczbie, mamy do czynienia z pojęciem, abstrakcją, która nie zjawia się w głowie dziecka odrazu, ale musi być przygotowana. Przygotowanie to stanowi najważniejsze zadanie metody nauczania pierwszych początków.

Bezpośrednio z zagadnienia istoty liczby wypływa na tle tej lub innej odpowiedzi na to zagadnienie główna kierująca zasada nauczania. W ogromie literatury i chaosie poglądów wyłaniają się głównie 2 takie zasady. Jedna z nich to *zasada liczenia*, druga t. zw. *obrazów liczbowych*. Przyjrzymy się po kolei każdej z nich.

Główną rzeczą w powstawaniu pojęcia liczby jest liczenie, jako *szereg aktów uwagi*, które mają miejsce przy zatrzymywaniu się kolejnem nad każdym oddzielnym liczonym przedmiotem, bez względu na, to jakiej ten przedmiot będzie natury. Proces liczenia nie zależy od jakości liczonych przedmiotów ani od ich uporządkowania, wyraża pewną „sumę" pracy psy-

[1]) Zrobiliśmy tu dygresję dla Milla, gdyż chodziło nam o pewne wyjaśnienie popularnych poglądów.

chicznej. Ta praca będzie jednakowa, czy liczymy konie na pastwisku, czy też uderzenia zegara albo gwiazdy w pewnem miejscu niebios. Jednakowość rezultatu i niezależność od natury przedmiotów jest głównym powodem, że liczba oddziela się niejako od przedmiotów konkretnych, a gdy to oddzielenie nastąpi, mamy już pojęcie liczby gotowe. Dlatego, ucząc dzieci, należy wymagać od nich, by przeliczały różne przedmioty w najrozmaitszych położeniach i postaciach; przez to staje się dla nich jasne, że liczba wcale od tych właściwości nie zależy. Tak samo jak w powstawaniu pojęcia liczby, proces liczenia odgrywa zasadniczą rolę w działaniach. Np. w jakiż sposób wykonywamy i sprawdzamy dodawanie? Mamy, dajmy na to, dodać 5 do 3. Liczymy od jednego do 5, a następnie w dalszym ciągu od 1 do 3, ale to ostatnie liczenie zastępujemy potem przez odpowiednie przedłużenie szeregu naturalnego poza 5. Schematycznie to przedstawić można tak:

1, 2, 3, 4, 5,
1, 2, 3,
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Przy dodawaniu trzeba więc właściwie wykonać 3 procesy liczenia. Przy odejmowaniu liczymy w odwrotnym porządku w drugim wierszu. Zapomocą liczenia sprawdzamy rezultaty tych działań elementarnych. Stąd sprawne i szybkie liczenie jest konieczne dla dobrego, świadomego opanowania działań. Takie pojmowanie rzeczy, więcej lub mniej dokładne, jest popularne. Pochodzi stąd fakt, że uczący najpierw wprawia dzieci w liczenie, sądząc, że w ten sposób zdobywa podstawę do dalszej nauki. Nie wypływa to z samej zasady nawet. W niej główny nacisk kładzie się na proces psychiczny przechodzenia od jednego przedmiotu do drugiego, na wspomniany szereg aktów uwagi, przyczem nie ma znaczenia, czy każdy taki akt, uświadomiwszy go sobie, nazywamy, czy też obchodzimy się bez słów. W każdym jednakże razie ta strona zasady liczenia jest bardzo niejasna i budzić może powyższe nieporozumienie. Jeżeli wymieniam kolejne liczebniki, to mogę to robić mechanicznie, a w takim razie równie dobrze mogę powtarzać szereg nazw chińskich albo jakich innych dźwięków. Cóż z takiego powtarzania mi przyjdzie? Jaka treść psychiczna jest w niem zawarta? Wypowiadam słowo „pięć", cóż przez to rozumiem? Słowo to skojarzone jest z następnem „sześć" i poprzedniem „cztery", ale skojarzenie to jest czysto przygodne, formalne, bo żadnemu z tych słów nie odpowiada żadna treść psychiczna. Nie wytwarzamy w ten sposób *szeregu naturalnego*, ale wypowiadamy szereg dźwięków bez znaczenia. Wytworzyć szereg naturalny jest to zrobić to, do czego dążymy: dać pojęcie liczb i związek między niemi. W jakiż sposób taka bezduszna rzecz, jak zapamiętanie szeregu kolejnych dźwięków, może być podstawą dalszej nauki? Nawet w nauce języka obcego pamiętanie nazw różnych przedmiotów jeszcze nie wystarcza: a tu mamy jeszcze mniej. Jeżeli więc słuszna jest zasada liczenia, to nie może być mowy o takim procesie liczenia, jaki zwykle wykonywają ci, którzy się arytmetyki trochę nauczyli. Jedną z ważnych zasad dydaktycznych jest pamiętanie o tem, że przynajmniej w rzeczach podstawowych — a o takich tu mowa — nie można używać słów, którym nie odpowiada żadna treść. Oddzielne liczebniki muszą być najpierw poznane, musi być uchwycony związek między kolejnemi liczbami, musi być gotowe pojęcie liczby, aby proces liczenia w tej formie, o której mówimy, mógł mieć miejsce i znaczenie. W takim razie upada może cała zasada? Nie, bo zwykły proces liczenia nie jest zjawiskiem *pierwotnem, lecz pochodnem*. Zasada liczenia ostać się może, ale trzeba opierać się w niej nie na ostatniej formie procesu liczenia, lecz na pierwotniejszej. Taką pierwotniejszą formą jest *odwzorowywanie*. Z niego też należy wychodzić w nauczaniu. Przez odwzorowywanie uczeń porównywa 2 zbiory przedmiotów, odpowiada na zapytania dotyczące pojęć: mniej, więcej, równo (brakuje, przewyższa) i t. d. Tu niema jeszcze i nie może być pojęcia liczby, ale jest pierwsze stadjum porównywania, jest odczuwanie *wielkości* [1]). W jaki sposób posuwać się dalej w nauczaniu, o tem będzie mowa niżej; teraz zaznaczamy tylko takie nasze stanowisko wobec zasady liczenia. Nie miejsce tu na dłuższe rozważania, przypuszczam jednakże, że tego, co powiedziano, wystarcza do zrozumienia potrzebnej do dalszych wywodów rzeczy.

Zasada druga, czyli zasada obrazów liczbowych, jest o wiele młodszą, niż poprzednia. Wyrosła ona pod wpływem psychologji doświadczalnej i cała jest owiana jej młodzieńczym duchem. Nie przemawia to jednakże na jej korzyść. Zwolennicy tej zasady, głównie w Niemczech, krytykują zasadę liczenia przeważnie z dwóch stanowisk: 1-o że jest oparta na założeniach a priori, niemal dowolnych, 2-o że nie ma znaczenia tam, gdzie nie może być mowy o pojęciu liczby, gdzie, jak u dziecka, istnieją tylko konkretne wyobrażenia; więc jeżeli się ją stosuje w tym czasie, to obciąża się pamięć tylko, a nie oddziaływa na inne władze psychiczne. Już w zakresie pierwszego dziesiątka, mówi Lay, jeden ze zwolenników tej zasady, musi dziecko spamiętać rezultaty blisko 200 różnych działań.

---

[1]) Stąd właściwie nie powinno się nazywać powyższej zasady „zasadą liczenia", ale „odwzorowywania" (nie Zahlprinzip, ale Abbildungsprinzip) Rzecz ta wyraźnie występuje w matematyce wyższej w tak zw. teorji mnogości.

Tak, spamiętać, bo ten fakt, że zapomocą liczenia może ono te rezultaty sprawdzić, nie wystarcza, gdyż działania muszą być zmechanizowane, a w jakiż to sposób można zrobić, jak nie zapomocą pamięci? Ileż trudu w tem się mieści, ile pracy psychicznej, którą możnaby na coś lepszego zużytkować, gdyby się inaczej do rzeczy zabrać! Skoro dziecko, zaczynające się uczyć, myśli obrazami, wyobrażeniami konkretnemi, czy nie możnaby było wynaleźć, jako odpowiedników liczb przynajmniej pierwszego dziesiątka, takich wyobrażeń, które ułatwiłyby przez uprzytomnienie ich sobie działania z liczbami i tem samem zekonomizowały wysiłki pamięci? Np. w razie dodawania 3 i 4 mógłbym, jak i w innych przypadkach podobnych, podsunąć dzieciom takie obrazy:

o o		o o
	i	
o o		o

o o o o

Połączenie ich o o o dałoby nowy obraz liczby 7. W ten sposób działania wykonywałyby się w wyobraźni, o ile tylko każdej liczbie pierwszego dziesiątka (nawet do 12) podporządkowany był podobny obraz i obraz ten utrwalił się przez powtarzanie w pamięci wzrokowej dzieci. Myśl taka sięga drugiej połowy XVIII-go wieku [1]), ale dopiero niedawno różne projekty obrazów liczbowych, podawanych przez różnych metodyków, poddano doświadczalnemu badaniu. Z tych doświadczeń (którym można to i owo zarzucić) zwycięsko wyszedł szereg Borna (metodyka niemieckiego z drugiej połowy XIX-go wieku):

1	2	3	4	5	
o	o	o o	o o	o o o	i t. d.
	o	o	o o	o o	

Jedną z głównych rzeczy w zrozumieniu tej zasady jest fakt natychmiastowego niemal odczytywania liczby z danego ugrupowania. Badając różne ugrupowania punktów doświadczalnie, wybrano to, przy którem takie odczytywanie dawało najmniej omyłek. Przyznać należy, że zwolennicy tej zasady nie wypracowali jeszcze dokładniejszej metody praktycznego nauczania. Książki np. Walsemanna i Laya zawierają dużo rzeczy ciekawych, ale wyrobionej metody praktycznej tu jeszcze niema. Przytem postawiono wspomnianej zasadzie zarówno ze strony teoretycznej, jak praktycznej szereg zarzutów poważnych, na które nie można się nie zgodzić. Doraźne chwytanie liczby z danego ugrupowania, jak to wiemy z własnego

---

[1]) Wpadł na ten pomysł Busse, profesor filantropinum w Desau.

doświadczenia my starsi, nie jest rzeczą łatwą. Odrazu odczytujemy przy prawie dowolnem ugrupowaniu 2, 3, czasem 4, ale dalej już napotykamy trudności. Czy żądanie, aby dzieci chwytały liczbę z powyższego, choćby najwygodniejszego, ugrupowania, nie jest wygórowane? Czy nie jest za trudne i nie obciąża ze swej strony zbytnio wzrokowej pamięci ucznia, zwłaszcza tego, który wzrokowcem nie jest albo jeszcze się nim nie stał przez naukę książkową? Dalej, działania z takiemi obrazami nie są bynajmniej łatwe, bo np., gdy dodajemy $\begin{smallmatrix} o & o \\ o & o \end{smallmatrix}$ i $\begin{smallmatrix} o & & o \\ & o & \end{smallmatrix}$, wszystko idzie gładko, ale, gdy mamy dodać $\begin{smallmatrix} o & o & o \\ o & o & \end{smallmatrix}$ i $\begin{smallmatrix} o & o \\ o & \end{smallmatrix}$, potrzebna jest pewna modyfikacja obrazów, potrzebne jest ich naruszenie albo wykonanie w wyobraźni obrotu jednego z nich o 180°. Czy można się przytem uwolnić od liczenia? Uczeń posiada np. obrazy 7 i 8, ale dodawanie tych liczb już bez liczenia uskutecznione być nie może; nie może też wtedy, gdy niema pod ręką odpowiednich konkretnych obrazów; niema również pewności, czy dane działanie wykonane jest dobrze. W jakiż sposób dalej przejdziemy do pojęcia liczby? Droga pozostaje ta sama, co poprzednio, a zdobyte ułatwienie jest problematyczne. Zawiera się jednakże w tym poglądzie zdrowe, zdaniem mojem, ziarno prawdy, a dotyczy ono przedewszystkiem tego ważnego metodycznie faktu, że obok rozmaitości liczonych przedmiotów musi być pewien stały przyrząd, na którym dzieci widzą pewne stałe, jednakowe ugrupowania tych przedmiotów o danej, odpowiadającej im liczbie. Istnienie takiego przyrządu ułatwia sprawdzanie działań. Dzieci przyzwyczajają się do jego wyglądu, uwaga ich nie jest zajęta szczegółami konkretnemi i dlatego treść arytmetyczna łatwiej tu występuje, co ma niemałą wartość przy wyjaśnianiu. Weźmy przykład. Po zaznajomieniu się z liczbą 6, uzmysłowieniu jej, różnych przykładach konkretnych i t. d. występują działania z liczbami oderwanemi. Ile będzie 4 a 2? Może się zdarzyć (a przy pośpiesznem, u nas zwyczajnem, nauczaniu zdarza się często), że uczeń nie umie na to odpowiedzieć, tem bardziej wtedy, gdy powtarzamy i gdy o 6 niema ciągle mowy. Na przyrządzie stałym łatwiej nieudolnemu matematykowi rzecz wyjaśnić. To samo może się zdarzyć, gdy rozwiązujemy zadanie, którego fabuła omawia przedmioty nie znajdujące się w klasie. Jak tę rzecz w nauczaniu wyzyskać, o tem będzie mowa w rozdziale następnym.

Nie może ulegać wątpliwości, że zasada obrazów liczbowych również opiera się na odwzorowywaniu. Każdy obraz liczbowy jest swojego rodzaju aparatem odwzorowującym, którym się posługujemy czy to w wyobraźni, czy też na przyrządzie dla ułatwienia myśli. Jednostajność tworzenia obrazów liczbowych w szeregu Borna jest tą dodatnią jego stroną, która pomaga do wykonywania działań i pamiętania tych obrazów. Zwolennicy tej zasady, tak samo jak i poprzedniej, nie zwracają na to uwagi, chociaż to fakt ważny i świadczy o jednolitości podstaw obu zasad, a więc i o jednolitości metody nauczania.

Przytaczając tutaj główniejsze poglądy na niektóre zasadnicze kwestje, a także uwzględniając niektóre uwagi krytyczne, pragnę tylko wyjaśnić te myśli, które stanowią podstawę niniejszej książki.

Reasumując powyższe, twierdzę: 1-o zasada liczenia jest słuszna, ale tylko wtedy, gdy przez liczenie nie będziemy rozumieli zwykle używanego procesu, lecz zaczniemy w nauczaniu od formy pierwotniejszej, od odwzorowywania; 2-o zasada obrazów liczbowych nie przeczy, jak sądzą niektórzy, zasadzie liczenia, a stanowi nowy przyczynek do właściwej metody nauczania, bo w każdym razie ważnym jest fakt istnienia przy nauczaniu stałych ugrupowań przedmiotów na stałym przyrządzie.

ROZDZIAŁ II.

Nauczanie każdego przedmiotu opiera się na kilku głównych zasadach, wspólnych dla wszystkich przedmiotów i rozpatrywanych przez ogólną dydaktykę. Każdy przedmiot do tych zasad dołącza, oczywiście, inne, płynące z jego natury i zadań nauczania. Bardzo ważnem jest dla jasnego zdawania sobie sprawy z wielu wskazań metodycznych dobre rozumienie tych właśnie ogólnych zasad. Dydaktyka ogólna podaje 4 takie zasady: zasadę poglądowości, samodzielności, ciągłości i indukcji. Ponieważ omawianie tych zasad nie należy do zagadnień, które są celem niniejszej książki, nie będę tu dłużej nad niemi się zastanawiał; pomimo to z różnych względów, a między innemi ze względu na właściwe rozumienie następującego wykładu, nie od rzeczy będzie poświęcić tej sprawie tutaj kilka uwag.

Zasada poglądowości należy do najbardziej popularnych. Dziś każdy nauczyciel wie o konieczności jej stosowania, a każdy inteligentny człowiek, nawet najmniej obeznany z nauką wychowania, ma o niej pewne pojęcie. Zasługą jest wielkiego pedagoga czeskiego, Jana Amosa Komeńskiego (1592 — 1670), że pierwszy w formie dokładniejszej i umiejętniejszej wprowadził ją do swej teorji nauczania. „Początek poznania zawsze powinien wychodzić od zmysłów (albowiem niemasz nic w rozumie, coby przedtem nie istniało w zmysłach); dlaczegóżby więc i początek nauki nie miał rozpoczynać się raczej od spostrzeżenia rzeczy, niż od roztrząsania wyrazów. Potem zaś dopiero, skoro rzecz zostanie pokazana, niechaj przyłączy się mowa do dalszego jej objaśnienia“ pisze Komeński (Wielka Dydaktyka, Warszawa, 1883 r., przekład H. Wernica, str. 146—7). Usiłował on wprowadzić poglądowość we wszystkie dziedziny nauczania, ale głównie zrobił to dla nauki języków i podkreślał wszędzie najbardziej oddziaływanie na zmysł wzroku. Od czasów Pestalozzego zaczynamy rozumieć poglądowość głębiej, jako oddziaływanie nie tylko na zmysł wzroku zgodnie z samą nazwą, ale na wszystkie zmysły, a w szczególności na dotyk i słuch. Rozumiemy teraz, że dla dziecka to jest najbardziej zrozumiałem, co jest wykonalnem, co umie zrobić. Rzeczywistość, świat nasz wyjaśniają się nam nie tylko przez bierne patrzenie, słuchanie i wogóle ujmowanie zmysłowe, ale przez nasz czyn, przez tworzenie ich własnym wysiłkiem. Dlatego praca ręczna nie tylko jest pożytecznem zajęciem rzemieślniczem, ale wielką dźwignią nauki i poznawania; dlatego to zagadnienie, związane z zainteresowaniem właściwem wiekowi, jest najodpowiedniejszą pobudką poznania. Tenże Komeński, jakkolwiek nie tak wyraźnie, podkreślał i trzy inne zasady dydaktyczne. Już w maksymie naczelnej wspomnianej powyżej książki, która jest, niestety, wyczerpana, powiada, że gwiazdą przewodnią jego dydaktyki ma być wynalezienie reguły, „według której nauczający mniejby nauczali, a uczący się — więcej się nauczyli". Formułuje tu wielki pedagog wyraźnie zasadę samodzielności. Nauczanie nie polega na tem, aby „wlewać do głowy pustej" mądrość, ale na stworzeniu przez nauczycieli i wogóle przez starsze pokolenie takich warunków, w których dzieci mogłyby poznawać zgodnie z naturą swego umysłu. Tylko ten, co własnym wysiłkiem coś zdobył, co przeszedł właściwą umysłowi ludzkiemu drogę żmudną od faktu, spostrzeżenia i czynu własnego do pojęcia, tylko ten może się „nauczyć". Ta myśl nie tylko jest gwiazdą przewodnią Komeńskiego, ale kieruje również potężnym umysłem Bacona w jego rozważaniach o metodzie indukcyjnej.

Zasada ciągłości była znana jeszcze przed Komeńskim i wyrażana przez wielu pisarzy pedagogicznych w postaci formuły: „od łatwiejszego do trudniejszego" lub też: „natura nie czyni skoków". Wszakże właściwą jej treść może zrozumieć tylko ten, kto zdaje sobie sprawę, jak się rozwija umysł ludzki. Im głębszą będzie nasza w tej dziedzinie wiedza, tem lepiej potrafimy samą zasadę rozumieć i stosować. Dziś jasnem jest każdemu, że w nauczaniu nie można przeskakiwać bez ładu od jednego szczegółu do drugiego, że trzeba nowe wyobrażenia i pojęcia wprowadzać, licząc się z tem, co uczący się już ma. Z zasadą ciągłości jest w związku ścisłym bardzo ważne pojęcie dla dydaktyki — pojęcie apercepcji, t. j. procesu przyswajania sobie nowego materjału naukowego i związanej z nim umiejętności nawiązywania tego materjału do poprzednio zdobytego. Zasada ciągłości ma znaczenie nie tylko na oddzielnej lekcji, ale i w programie klasy, szkoły, całym programie nauczania i nawet całej organizacji szkolnej. Nieumiejętne jej stosowanie może czasem wywołać nudę, jak wilka z lasu. Dlatego to od nauczyciela wymaganą jest umiejętność obserwowania dzieci i liczenia się z ich stanem umysłowym. O zasadzie indukcji powiem więcej w dalszym ciągu w zastosowaniu do nauczania arytmetyki, gdyż ma ona tutaj specjalne cechy. Dlatego obecnie nie będę się nią zajmował — nawet pokrótce, jak poprzedniemi zasadami.

Stosowanie każdej z tych zasad w praktyce nastręcza różne zagadnienia, zależne od natury przedmiotu. Z tego wynika, że to samo powinniśmy zrobić przy omawianiu nauczania arytmetyki. Dlatego w rozdziale niniejszym poświęcimy główną uwagę stosowaniu zasady poglądowości.

* * *

Spopularyzowane są już, jak powiedzieliśmy, pojęcia o poglądowości w nauczaniu. Gdy się jednakże obeznamy z literaturą przedmiotu, a tem bardziej z realizowaniem owej poglądowości w praktyce, znajdziemy wiele zdań różnych co do środków i zakresu poglądowego nauczania, znajdziemy również w owej praktyce nieraz pozory poglądowości, a nie samą jej treść. Wyliczymy i rozpatrzymy tu po kolei wszelkie możliwe środki do nauczania poglądowego.

a) Przedmioty i zjawiska świata otaczającego.

Bez wątpienia, bliskie zetknięcie się z rzeczami codziennego doświadczenia nadaje nauce, zwłaszcza oderwanej, żywość, a dla umysłów nierozbudzonych wartość realną. Tak jest wszędzie, w każdej dziedzinie wiedzy; ma to też znaczenie swoje, nie podlegające wątpliwości, w nauczaniu arytmetyki. W pierwszych początkach nauki, na tem stadjum rozwoju umysłowego dziecka, gdy nie operuje ono jeszcze wyrobionemi pojęciami, bliska styczność z przedmiotami doświadczenia zwykłego ma wartość podwójną: daje materjał poglądowy, dostępny dla umysłu dziecięcego i nadaje przez zastosowanie wspomnianą wartość realną. Przedmioty i zjawiska otaczającego świata mogą być używane w nauczaniu albo przez pokaz, albo też przez nadmienienie. Im większą rozmaitością przedmiotów konkretnych nauczyciel rozporządza, im więcej pokazać ich może, przyczepiając do nich liczbę, — tem lepiej. Nie bójmy się zbytnio, aby uwaga dziecka za bardzo się rozpraszała; owszem, barwność i rozmaitość podtrzymują jej napięcie, a wprawny nauczyciel potrafi przytem podkreślać to, o co chodzi, co jest ważne. W nauczaniu indywidualnem nawet przechadzka może być w odpowiedni sposób wyzyskana. Nie myślmy, aby tylko urzędowe godziny nauki robiły swoje: zwykle połowa ich idzie na marne — tak mówi przeciętne doświadczenie. Myśl trzeba łapać na gorącym uczynku, in statu nascendi, te bowiem chwile są najcenniejsze: w nich czasem rodzi się pomysł twórczy artysty, albo człowieka nauki, w nich też odbywa się owa tajemna a niezbadana dotąd praca samodzielna duszy dziecięcej, odbywa się jakby błyskami, przelotnie, jak gość pożądany przychodzi niespodzianie. Uczący niech chwyta te chwile, niech umie je wyczuwać.

Tak barwność i rozmaitość nauczania są potrzebne; one są jak słońce, pod którem rośnie dusza dziecka. Kto rozczytywał się kiedy w poetycznie skomponowanych zadaniach indyjskich, gdzie pszczoły, kwiaty, perły i t. p. są przedmiotami, do których matematyk pierwotny przyczepia liczby i kombinacje, ten rozumie, że barwność wykładu może mieć dużą wartość. Tylko w dojrzałej umysłowości wyróżniczkowują się odrębne dziedziny duchowe, które nabierają wartości jakby same przez się; u dziecka wszystko jest razem. Wielu uważa, że nadmienianie w zadaniach o przedmiotach dziecku znanych (w najlepszym razie!) już wystarcza do poglądowości, i że dość ograniczać się na niewielu obrazach. Potrzebne tu jest stopniowanie: wychodzimy zawsze od tego, co można widzieć, słyszeć w danej chwili lub wogóle czuć, potem możemy mówić o rzeczach znanych dzieciom z doświadczenia, nakoniec o takich, które widziały na obrazku, o których słyszały z opowiadania. Najgłówniejszą jednakże rolę zawsze odgrywać winno to, co jest bezpośrednio dane. Oszczędzanie „okazów" jest pozostałością z czasów mnemonicznego formalizmu, który więcej cenił paragrafy książki, niż żywą rzeczywistość.

Nauczyciel powinien starać się o zachowanie w zadaniach rzeczywistych stosunków życia. Nieraz się zdarza, że dzieci rozwiązują zadania, do których wchodzą ceny np. towarów znanych, nie mające nigdzie zastosowania, albo tylko w odległych miejscowościach kuli ziemskiej, lub w przeszłej albo przyszłej dobie historycznej. Zadań nie może układać ten, kto nie poznał w rzeczywistości stosunków, jakie stanowią treść zadania. O tem pomówimy jeszcze później; tu wspominamy dlatego, iż rzecz ma bliższy związek z poglądowością.

Do przedmiotów naturalnych należą też organy naszego ciała, a przedewszystkiem palce, które, jak to stwierdzono niezbicie, odegrały w historji rozwoju człowieka, w powstaniu pierwszych pojęć liczbowych dużą rolę. Jak wiadomo, tak zwane cyfry rzymskie wyraźnie wskazują na swe pochodzenie z rachunku na palcach. Przytrzymując dużym palcem mały palec i 2 średnie i pozostawiając otwarty tylko wskazujący, mamy uzmysłowienie jedności; podnosząc do tego średni większy — uzmysłowienie dwójki; 2 średnie — trójki; a jeżeli podniesiemy wszystkie cztery prócz dużego, mamy uzmysłowienie czwórki. Wszystkie palce uzmysławiają piątkę, i jeżeli teraz złączymy cztery palce, poczynając od wskazującego, otrzymamy obraz, przypominający piątkę rzymską. W ten sposób możnaby korzystać z jednej ręki przy nauczaniu; ale ponieważ w pierwszym dziesiątku trzeba będzie wziąć na uwagę rękę drugą, nauczyciel, obróciwszy obydwie dłonie w stronę klasy, może zaczynać od małego palca na ręce prawej; szóstym palcem będzie duży palec na ręce lewej. Ważne, jest aby dzieci też operowały tym przyrodzonym przyrządem i dlatego należy zaczynać rachunek od małego palca u ręki lewej, przyczem obydwie ręce znajdują się na pulpicie, z dłońmi skierowanemi ku dołowi. W taki sposób, co jest ciekawe, używają rąk przy rachunku wszystkie niemal ludy pierwotne. W podobnych nawet drobnych pozornie rzeczach należy każdy szczegół obmyślić, gdyż nieporządne używanie jakiegoś środka gorsze bywa często, niż zupełne zaniechanie go. Do tego ostatniego sposobu nauczyciel musi się też przystosować, jak zaznaczyliśmy wyżej, przez złożenie rąk na krzyż i zwrócenie dłoni ku sobie. Należy jeszcze zwrócić uwagę, że dotykanie pulpitu jest bardzo pożądane dla dzieci, ponieważ nawet człowiek starszy ma palce za mało nieraz posłuszne, aby mógł otworzyć tylko ten palec, który jest potrzebny.

b) P r z y r z ą d y   r a c h u n k o w e.

Od wieków już wynajdywano różne przyrządy rachunkowe do ułatwienia rachunku i notowania liczby oraz wykonywania działań. Tak zw. liczydło rosyjskie „szczoty" np. jest udoskonaleniem tablicy rachunkowej (suanpana), używanej przed wiekami przez Chińczyków i Tatarów. Niemieckie „rechenbanke" i „abakus" też należą do przyrządów bardzo dawnych. Już w XVII wieku wielki filozof Leibniz rzuca myśl i daje wskazówki co do urządzenia maszyny rachunkowej, która dziś w udoskonalonej formie tak wybitne oddaje usługi, a w przyszłości jeszcze większe znajdzie rozpowszechnienie i zapewne w szkole znajdzie się w ręku ucznia. Nauczanie początkowe ma oprócz dokładnego i szybkiego rachunku na celu głównie u n a o c z n i e n i e. Stąd wynika, że przyrządy rachunkowe n i e   m o g ą   b y ć   z ł o ż o n e; nie może to być maszyna bardziej skomplikowana, gdyż samo jej urządzenie nie do uzmysłowienia elementarnych operacyj służyćby mogło, ale do zagmatwania. Trudno tu wyliczać wszelakie pomysły przyrządów, jakie w ciągu wieku XIX do unaocznienia początkowych operacyj arytmetycznych wynaleziono. Nie przechodzi rok jeden, aby kilka podobnych przyrządów nie zaproponowano z tej lub innej strony, jako narzędzi pomocniczych przy nauczaniu. Wszystkie te przyrządy wszakże posiadają jedną kardynalną wadę: jeżeli usiłują uzmysłowić działania, nie dają dobrego unaocznienia liczby (z różnych względów) i naodwrót. W razie zaś, gdy udaje się jako tako zrobić jedno i drugie, przyrząd jest tak skomplikowany i często drogi, że o szerszem jego rozpowszechnieniu trudno mówić. Wypada nam więc zatrzymać się na dwóch przyrządach.

Pierwszy z nich jest skonstruowany w celu odtworzenia szeregu Borna. Jest to podłużna deska (1 metr długości i 4 decymetry szerokości), na której zrobiono z jednej strony 20 okrągłych wydrążeń w 2 szeregach poziomych (dłuższe brzegi deski ustawiają się poziome), przyczem każde wydrążenie ma około $4^1/_2$ cm. w średnicy, a środki owych wydrążeń, zarówno należących do tego samego szeregu poziomego, jak i do sąsiedniego, znajdują się od siebie w odległości 9 cm. W środku deska przedzielona jest pionowo przyklejoną listewką na dwie części, z których każda posiada po 10 wydrążeń (wydrążenia te nie przechodzą na wylot). U dołu do deski przymocowane jest korytko, w którem składają się krążki drewniane, wchodzące łatwo w owe wydrążenia (ale nie całkowicie, bo nie możnaby było ich wyjmować). U góry do deski przymocowuje się listewka, na której można ustawiać różne przedmioty. Krążki te są pomalowane z jednej strony np. na kolor ciemno-niebieski, z drugiej na czerwony; deskę całą też można pomalować, dajmy na to na ciemniejszy kolor zielony. Liczby uzmysławiamy, wkładając w wydrążenia krążki w ten sposób, jak to wynika z tworzenia szeregu Borna. Kolor dwojaki krążków służy do tego, by uzmysławiać działania, np. dopełnianie liczby lub rozkładanie jej. Gdy mowa o danej liczbie, znajduje się ona stale na przyrządzie; na nim odbywają się również stale (na początku) te same operacje rachunkowe, jakie nauczyciel wykonywa z klasą. Uczeń, który w kursie wstępnym zapoznał się z szeregiem Borna, znajdzie go tu znowu, ale dalej już dokonywać będzie dokładniejszej analizy przedstawionych obrazów.

Opisany przyrząd pomocnym może być tylko w pierwszym roku nauczania. Dobrze jest wspomnieć tu przy sposobności, że deska przyrządu może być podzielona cienkiemi linjami koloru czarnego na decymetry kwadratowe. Obraz tego podziału utkwić może w pamięci uczni i potem przy sposobności łatwo go przypomnieć. Dla dalszych stadjów nauczania najwygodniejszym przyrządem jest liczydło (rosyjskie) w dużym formacie, pozbawione, oczywiście, niepotrzebnych kulek. Kulki powinny mieć znaczną wielkość, aby oko łatwiej je oddzielnie chwytać mogło. Dla przeciętnej klasy wystarczą 3 cm. średnicy. Ponieważ przejście od jednego przyrządu do drugiego nie powinno być raptowne, nauczyciel powinien stopniowo już w pierwszym roku przechodzić od jednego do drugiego, pokazując na liczydle te same operacje, szczególniej w dziesiątku drugim, co i na pierwszym przyrządzie. Należy przytem na liczydle uwzględnić udoskonalenie, jakie wprowadził nauczyciel szwajcarski Szneider, polegające mianowicie na tem, że kulki na liczydle są pomalowane 2 barwami: jedna półkula na jasno-żółty kolor, druga na czerwony, pomalowane w ten sposób, że każdą kulkę można przesuwać wzdłuż drucika, pokazując tylko jeden jej kolor. W razie działań, np. jak powyżej dopełniania i rozkładania, odpowiednie kulki obracamy dokoła drutu i występuje kolor odmienny. Liczydło to ma duże braki, np. po wykonaniu działań z większemi liczbami nie widać, z jakiemi liczbami działanie było wykonane, wyraźny jest tylko rezultat. Pomimo to prostota, cechująca ten przyrząd, przemawia za jego wprowadzeniem. W praktyce za granicą, we Francji, używają czasem liczydła zmodyfikowanego, w którem druty biegną pionowo. Komplikuje to przyrząd, ale ma tę wygodę, że lepiej uzmysławia system pozycyjny.

Zwrócę tu uwagę czytelników na jedną rzecz, która może wywołać pewne nieporozumienie. W kursie wstępnym zatrzymaliśmy się na szeregu Borna dla nadania określonym zbiorom pewnych poglądowo ujmowanych cech charakterystycznych. Dalej w pierwszym roku polecam używanie liczydła rosyjskiego obok pierwszego przyrządu, jakkolwiek jest ono w swej konstrukcji oparte na zwyczajnym szeregu, t. j. kulki następują jedna za drugą. Ten szereg poprzedzał obrazy Borna we wstępnym kursie, a tu znowu następuje po nich. Stąd właśnie nieporozumienie możliwe, a jednakże pozorne. Nie chodzi mi o wdrożenie w pamięć ucznia owych obrazów liczbowych i o rachunek w wyobraźni na ich tle; ale jeżeli obrazy te się wdrożą (ile że będzie na to czas) i, co ważniejsza, pomogą któremu z uczniów, tem lepiej. W kursie wstępnym przejście od szeregu zwykłego do szeregu Borna było wywołane potrzebą uwypuklenia zapomocą wyraźnej jakości geometrycznej jednakowej zawartości zbiorów równych. Tylko w ten sposób można było tę rzecz w początku zaznaczyć. Poźniej, gdy celem naszym jest pojęcie liczby, owa forma geometryczna ma tylko znaczenie pomocnicze, a nie zasadnicze, i dlatego należy obok niej używać innych konfiguracyj.

c) Z a p i s y w a n i e   l i c z b.

Uważam to za środek paglądowy, gdyż sądzę, że ręka ucznia przejść musi te same stopnie rozwojowe, jak i myśl przez oko. Może się źle wyraziłom, ale chodzi o podkreślenie znaczenia pracy ręcznej jako środka poglądowego i o jednolitość w traktowaniu różnych czuć. Jeżeli oko ujmuje — sit venia verbo — „liczbę konkretną“, to ręka wtedy pisze zwyczajne cyfry. Doskonalsza odpowiedniość pomiędzy szeregami czuć, z jednej strony wzrokowych, z drugiej mięśniowo-ruchowych, jest konieczna dla naturalności, równowagi, wzajemnego wspierania się i harmonji rozwojowej. Na to zwykle nie zwraca się uwagi. Z drugiej strony organizm młody, rosnący, o mało rozwiniętej woli i koncentracji uwagi, szybko się, że tak powiem, dezorjentuje. Fala energji nerwowej przelewa się z jednego pola pracy do drugiego, a jeżeli dzieci nie mają rąk zajętych jaką czynnością, trudniej skupiają uwagę. Jako środek zaradczy widziałem stosowane zakładanie rąk z tyłu na krzyż, przyczem nauczycielka, wałkując w nudny sposób jakieś liche zadanie, chciała przez całą godzinę niemal w takiem położeniu utrzymywać dzieci. Jako środka do skupiania uwagi uczniów przy rachunku Pestalozzi używał poprzednio dostatecznie zmechanizowanej pracy ręcznej. Oczywiście, środek ten może być w szkole stosowany, ale do tego taka zmechanizowana praca ręczna jest potrzebna. Prócz niej, albo jeżeli jej wogóle niema, niestety, należy używać innych środków, mianowicie, odpowiedniego zapisywania liczb. Przedmiotowi temu tu kilka słów poświęcimy.

Pisanie w nauczaniu elementarnem wogóle należy do zajęć bardzo ważnych, a metoda nauczania tego przedmiotu pozostawia u nas bardzo wiele do życzenia. Jeżeli powyżej okazywaliśmy ostrożność w stosowaniu wyrazu—liczebnika, to tutaj ta ostrożność wskazaną jest również. Pismo jest również wyrazem treści psychicznej i takim samym znakiem, jak słowo. Rzeczy te łączą się z sobą nierozerwalnie i dotąd jest kwestją nierozstrzygniętą zasadniczo, czy lepiej jest naukę początkową zaczynać od pisania, czy też od czytania, czy stosować przy pisaniu metodę analityczną na początku (t. j. zaczynać od pisania słów), czy też syntetyczną (od pisania sylab i liter). Faktem jest w historji rozwoju człowieka, że pisanie przechodziło, jak to zaznacza C. J. Taylor (nie Tylor, autor przełożonych na nasz język, a bardzo pożytecznych w tym względzie książek: Cywilizacja pierwotna i Antropologja), cztery stopnie rozwoju. Najpierw występowało ono w postaci m n e m o n i c z n e j, t. j. w postaci pewnych środków do zapamiętania pewnych faktów ważnych. Np. gdy zawiązujemy węzeł na chustce od nosa, aby nie zapomnieć czegoś, — używamy najpierwotniejszej metody pisania. Karby wycięte na kiju, kreski postawione na deseczce albo węzły zawiązane na sznurku przy procesie odwzorowywania, są to znowu przykłady pisania mnemonicznego. W Peru istniał cały system notowania w ten sposób ważnych zdarzeń życia państwowego (E. Clodd. The story of the alphabet. Str. 40 — 1, 1900). Istniał tam specjalny długi sznur, do którego przywiązane były inne sznury kolorowe. Każdy z tych ostatnich odpowiadał pewnemu określonemu zakresowi życia państwowego, a na nim zapomocą węzłów specjalny urzędnik notował wybitne zdarzenia tego życia. W ten sposób tworzyła się historjografja, uprawiana również przez oddzielne rody.

Obok mnemonicznego pisania uprawiane było obrazowe, w którem rzeczy i zjawiska przedstawiane były zapomocą narysowanych obrazów. Jeżeli te obrazy ilustrowały zdarzenia lub fakty psychiczne, pisanie przybierało charakter t. zw. ideograficzny. Np. liczby u Egipcjan starożytnych były oznaczane symbolami, niczem nie przypominającemi rachunku; żabka oznaczała 100.000, a człowiek z podniesionemi w górę rękami — miljon. Nasze dzisiejsze pismo jest fonetyczne i przytem oparte jest na oznaczaniu oddzielnych prostych dźwięków, z których się składają wyrazy, a nie jak chińskie na oznaczaniu wyrazów.

Ponieważ dziecko początkujące myśli obrazami, jak to stwierdza badanie psychologiczne, metoda pisania początkowego przy nauce arytmetyki musi się z tem liczyć i nie wprowadzać odrazu oznaczania cyfr zwyczajnych, ale używać innych środków pomocniczych. Tylko przy takiem stosowaniu metody pisania możemy zadośćuczynić zasadzie poglądowości. Cyfra jest końcowym aktem procesu pisania i odpowiada wyrobionemu pojęciu liczby. Można przy nauczaniu używać różnych środków, jak układania klocków, krążków, pisania znaczków na tabliczce szyfrowej i t. p. Wogóle nie należy nigdy zapominać, że w nauczaniu początkowem jak najwięcej wskazanem jest łączenie myślenia z pracą ręczną, wykonaniem, odbiciem obrazowem procesów myślenia. Pożyteczne jest, jeżeli nauczanie posiada tu pewną organiczną jednolitość i jeżeli sposób zapisywania, uprawiany przez dzieci, zgadza się z używanym przez nauczyciela w klasie, a więc jeżeli jest zasadniczo jednorodny z przyrządem głównym, stosowanym do poglądowego nauczania.

Odpowiednio do pierwszego ze wspomnianych przyrządów, dzieciom można rozdać tabliczki tekturowe, na których, tak jak na desce wydrążenia, wykreślone są kółka. Prócz tego dzieci posiadają krążki tekturowe, pomalowane odpowiednio do wspomnianych krążków drewnianych, i te krążki w taki sam sposób, jak na tablicy, nakładają. Ponieważ przy rachunku ciągle odbywają się zmiany liczb, dzieci muszą być ciągle zajęte. To pierwsza faza.

Dalej na tabliczkach szyfrowych lub ołówkiem na papierze mogą dzieci stawiać kreski w szeregu zwyczajnym, albo kółeczka. Tutaj należy podkreślić niestosowność np. podobnego oznaczenia:

$$| \; | \; | \; | + | \; | \; | = | \; | \; | \; | \; | \; | \; |$$

„Plus" zjawia się wtedy, gdy występuje cyfra i jest znakiem działania. W danym przypadku nie mamy liczb, lecz grupy kresek, oznaczenie takie może więc wprowadzać zamęt w pojęciach. Wogóle dokładność i ścisłość nie przeszkadzają łatwości.

Kółeczka mogą być stawiane w postaci obrazów Borna, albo w szeregu, a zmiana barw oznacza się tem, że jedne kółeczka są zakreskowane, a drugie nie.

Następnie możnaby przejść do układania z kresek niektórych chociażby cyfr, jak to pokazano wyżej, nakoniec do zapisywania ich linją ciągłą.

d) Obrazki i ryciny.

Jedną z zalet dobrego nauczania jest umiejętność korzystania z każdej okoliczności, a tem bardziej takiej, która nasuwa się siłą rzeczy. Wcześniej czy później uczeń dostaje książkę do ręki, a stąd wynika potrzeba, by ta książka zawierała najwięcej pouczającego materjału, by układem swym odpowiadała naturze umysłu dziecka. Książki arytmetyczne, szczególniej nasze, są suche i nudne, przepełnione kolumnami przykładów liczbowych, zadań często nieumiejętnie dobranych albo peror teoretycznych, które zdradzają małe przygotowanie do tego rodzaju twórczości. Jeżeli popularyzowanie wiedzy jest jakby stwarzaniem jej na nowo, to dobry podręcznik zawsze jest pisany, jak dzieło głębszej nauki i sztuki, przez ludzi talentu, ludzi żywych i umiejących niejako wczuć się w jaźń duchową dziecka. Dobra książka jest żywa. Żywość tę jej wzmagają dobre ilustracje, obrazki, rysowane ręką artysty, a nie byle rysownika. Taki obrazek może przedstawiać nawet jakąś scenę z życia, jedną chwilę, jeden moment kalejdoskopowej jego zmiany, ale moment tak uchwycony, tak ułożony, by mała pomoc uczącego wystarczała uczniowi do znalezienia w nim treści arytmetycznej. Czy to jest szkodliwe? Nikt chyba tego powiedzieć nie może. W takim razie obojętne? Również nie, bo obrazek taki uzmysławia liczbę, wdraża się łatwo w pamięć, ożywia naukę, niejako nawołuje do szukania liczby nawet w dalekich pozornie od niej okolicznościach. Budzi on myśl, obserwację, a z tej racji czyż może być obojętnym? Książeczki francuskie i amerykańskie do nauki rachunku dla dzieci są przepełnione tego rodzaju ilustracjami; jest tu pole bardzo wdzięczne dla władców ołówka. Nasze wydawnictwa dla dzieci w ostatnich czasach ożywiły się i ulepszyły między innemi przyczynami dzięki temu, że produkcji tej dotknęła się ręka artysty. Niechże to dotknięcie rozszerzy się i pogłębi, a wniesie ono nawet w szary świat liczb barwę i życie.

Powyżej nadmienione zasady dydaktyczne przenikają głęboko w każdy przedmiot nauczania, są ze sobą organicznie związane i stosowanie ich wymaga pilnej uwagi i umiejętności ze strony nauczyciela. W tym rozdziale nadmienimy jeszcze o jednej bardzo ważnej sprawie, bezpośrednio związanej z zasadami powyższemi.

Do ważnych rzeczy przy nauczaniu rachunku początkowego należy również używanie słowa terminologja. Racjonalna dydaktyka musi utrzymywać doskonałą odpowiedniość pomiędzy słowem a myślą. Słowo musi być wykładnikiem faktu psychicznego, a nie pustym dźwiękiem, jak to, niestety, nieraz bywa przy panującym tu i owdzie werbalizmie. Nadzwyczajnie trudno ustrzec się tego pierworodnego grzechu dydaktycznego. Nauczyciel, człowiek starszy, mający inne pojęcia, operuje odruchowo słowami, które dla niego są pełne treści, a jakże często o sto mil się znajdują od myśli dziecka. Nawet wtedy, gdy uczący zdaje sobie sprawę ze swego postępowania i usiłuje przystosować się do poziomu dzieci, nawet wtedy często błądzi, bo przecież nic dziwnego: tak trudno jest zdać sobie sprawę z tych rzeczy przy naszej małej znajomości natury dziecka i przy wadach naszej własnej natury. Wszak wiemy, że przystosowywanie się wymaga wysiłku, a tu trzeba je robić z uśmiechem, naturalnie i przytem nie strzelać w pustą przestrzeń. Dlatego też potrzebna jest wielka w tej dziedzinie ostrożność.

Ponieważ na początku mamy do czynienia z t. zw. arytmetyką zmysłową, więc w niektórych wyrażeniach słownych zupełnie jest zrozumiała i dozwolona pewna swoboda, zależna od charakteru nieraz rozpatrywanych konkretnych zbiorów. Jeżeli np. na przyrządzie zwiększamy liczbę krążków lub kulek, możemy powiedzieć „dokładamy", opiszemy bowiem w sposób wyraźny ten fakt, jaki zachodzi. Inne znowu wyrażenia, jak np. mniej, więcej, równo, wiele, nic, o ile, zmniejszyć, zwiększyć, ile razy, nazwy liczebników— zmianie nie ulegają; konkretne przykłady wyjaśniają tylko ich treść. Nawet zaleca się w pierwszym przypadku używanie rozmaitych wyrazów, znanych z praktyki codziennej, w odniesieniu do przedmiotów konkretnych, ujmowanych zmysłowo lub omawianych w zadaniach. Tak samo jak rozpatrywanie najrozmaitszych zbiorów o pięciu przedmiotach prowadzi do pojęcia liczby 5, wspomniane nazwy prowadzą do terminu używanego przy działaniach na liczbach t. zw. oderwanych. Liczba nazw się zmniejsza, gdy myśl wykryje identyczność ich treści logicznej; ale ta myśl musi to wykryć, i w tem jest poważne zagadnienie dydaktyczne. Weźmy kilka przykładów.

Każdy wie, że równania $b = x - a$ i $a = b + x$ nie wymagają żadnych innych działań dla wykrycia x prócz dodawania i odejmowania, ale dla początkującego matematyka w jego konkretnych zadaniach nie jest to jasne. Wykonywamy więc z nim razem np. działania dopełniania i rozkładania, póki nie zrozumie ich identyczności z poprzedniemi działaniami. Znany jest również dwojaki charakter dzielenia, który wyrażają słowa: „dzielenie“ (na równe części) i „mierzenie“ albo „mieszczenie“. Taka dwoistość jest znowu dotąd potrzebna, póki uczący się nie zrozumie tu formalnej jednakowości. Mamy w danym przypadku przykłady wnioskowania, które poprzedza drobiazgowy, na konkretnych przykładach wsparty proces indukcyjny.

ROZDZIAŁ III.

Powyżej zaznaczyliśmy, że jedną z głównych zasad dydaktycznych jest zasada indukcji. Tej właśnie zasadzie i wyjaśnieniu związanych z nią pojęć dydaktycznych poświęcimy w tym rozdziale naszą główną uwagę, uprzedzając czytelnika że należyte zrozumienie tej zasady ma w stosunku do naszego przedmiotu pierwszorzędne znaczenie.

Jedną z głównych kwestyj, o których zawsze nauczyciel pamiętać winien, jest dobra znajomość tego przedmiotu, którego uczyć zamierza. Jeżeli się przyjrzymy dzisiejszej nauce w seminarjach nauczycielskich, to łatwo zauważyć możemy, że w tych zakładach przez dobrą znajomość przedmiotu zwykle rozumie się praktyczne jego opanowanie. Nader ważną jest rzeczą, gdy nauczyciel potrafi szybko, wprawnie i dokładnie rachować sam, ale nie jest to jeszcze dobrem przygotowaniem. Maszyna rachunkowa daleko prędzej, wprawniej może wykonać wszystko, czego rachmistrz od niej żąda. Tak, możnaby powiedzieć, ale maszyna nie rozwiązuje zadań, maszyna nie rozumie, dlaczego tak robi, a nie inaczej. Słusznie; ale co to znaczy rozumieć to, co się robi? Co to znaczy np. rozumieć dodawanie? Cóż łatwiejszego, — niejeden powie — jak odpowiedzieć na to pytanie: rozumieć dodawanie znaczy to samo, co zdawać sobie sprawę z każdego kroku w tem działaniu. Ludzie zwykle nie zastanawiają się nad tem, że słówko „rozumiem" u różnych ludzi miewa różne znaczenia. Jeżeli dziecko lub człowiek mało inteligentny uchwyci pewien sposób postępowania (np. przy dodawaniu podpisywanie, dodawanie jedności i t. d.), wydaje mu się, iż rzecz rozumie: on wie, jak się robi, i to mu wystarcza. „Młodość chce przedewszystkiem tworzyć" — mówi Herbart; ale młodość również powinna myśleć. Otóż często to „zdawanie sobie sprawy" z każdego kroku jest niczem innem, jak tylko znajomością tego, co trzeba robić. Czyż to jest rozumienie? Nie, jest to ten sam niemal stan umysłu, jaki np. znajdujemy u człowieka kierującego subtelną maszyną, dajmy na to, rachmistrza w biurze. Może on sobie wcale nie zdawać sprawy ze szczegółów konstrukcji, ale umie używać maszyny w praktyce. Rozumiem dodawanie, jeżeli mogę wykazać przesłanki, na których proces ten się opiera, i jeżeli umiem z tych przesłanek (pewników) konsekwentnie i logicznie wyprowadzać wnioski. starając się przytem, aby liczba owych przesłanek nie była niepotrzebnie za wielka, a także, aby nie były one od siebie zależne. Rozumiem zjawisko przyrody, jeżeli potrafię przyczyny jego wyeliminować i następstwa przewidzieć. Umysł mniej wytrawny, mniej krytyczny posługuje się zwykle większą liczbą podstawowych przesłanek, używając ich często nieświadomie; krytyczniejszy z każdego kroku swego zdaje sobie sprawę i stara się zrobić zeń jedno z ogniw logicznego ciągu myśli. Naukowy, ścisły wykład arytmetyki wymaga właśnie takiego ciągu myśli, w którym wszystkie przesłanki podstawowe są jasno wyznaczone, a wszystkie ogniwa znajdują się ze sobą w ścisłej spójni logicznej. Rzecz jasna, że taki wykład nie może być przystępny dla dzieci; ale, pytam teraz, czy znajomość jego nie jest potrzebna nauczycielowi, czy nie ma znaczenia dla metody wykładu? Na to odpowiem stanowczo twierdząco. Kto nie zna naukowego wykładu, nie potrafi odróżnić błędnych „ułatwień" metodycznych od ułatwień dopuszczalnych i potrzebnych, a co ważniejsza, może się zgubić w różnych sztucznych sposobach, zamiast szukać tych momentów, które, po odpowiedniem ich przedstawieniu dzieciom, mają istotną wartość zarówno metodyczną, jak naukową. Jak może jasno przedstawić rzecz ten, kto sam nie odróżnia tego, co zasługuje na większą uwagę, od tego, co jest tylko podrzędnym szczegółem? Teorja ścisła nas uczy, że do tego, aby dodawanie stać się mogło jasnym procesem myśli, potrzebne są prawa przemienności i łączności, potrzebne są twierdzenia o dodawaniu sumy i różnicy, o dodawaniu do sumy. Jeżeli nauczyciel, pomimo całego poglądowego aparatu, pomimo wszystkich badań psychologicznych, na te rzeczy uwagi nie zwróci, czy może być, pytam, proces dodawania zrozumiałym? Rachunek elementarny, czyli arytmetyka początkowa, jak to wskazuje historja, związany był ściśle z pewnemi zagadnieniami życia. Piętno to wyraźnie dla wszystkich pozostało w t. zw. regułach działu trzeciego, pozostało również w interpretacji rozumienia, gdzie ujęcie samego procesu działania stanowi rzecz główną, a nie te logiczne pierwiastki myśli, z których proces ten konsekwentnie wynika. Poznanie reguły działania zgodnie z tradycją dydaktyki mnemotechnicznej stanowi punkt główny nauczania. Cały aparat metodyczny jest przystosowany do tego, pomimo że wielu metodyków już tak znacznie przerosło ową dawną metodę nauczania. Najczęściej metodycy ci nie są matematykami, w seminarjach uczą ich matematyki „praktycznej", i oto nie potrafią sobie zdać sprawy, co w tem wszystkiem jest najgłówniejsze. Praktyka wykazuje, jak dalecy są nasi uczniowie od rozumienia rzeczy, poucza nas, że owładnięcie praktyczne działaniem jest wogóle głównym rezultatem i poniekąd celem nauczania. Myśl dzieci kształci się przez dobre prowadzenie zadań, ale i tutaj są często wady, z których wynika, że cała nauka arytmetyki staje się nie tyle organem rozwijania samodzielnej myśli, ile narzędziem, myśl tę tamującem.

Naturalnie, można mi zarzucić, iż wymagam od uczni takiego rozumienia, jakie jest dostępne dojrzałemu umysłowi. Wiem jednakże, że to jest niemożliwe, ale wobec tego nie upada słuszność poprzednich uwag. Nie myślę żądać, by dzieci były w stanie konstruować w myśli ciągi logiczne, wychodzące z pewnych przesłanek, bo wiem, że do tego potrzeba myślenia sprawnego i wyrobionego, operującego ogólniejszemi symbolami liczbowemi; lecz za rzecz pożądaną i potrzebną uważam, aby zwracano w nauczaniu główną uwagę na to, co gra rolę pierwszorzędną, a nie na kombinacje tego lub innego pomysłowego metodyka. Dzieci powinny poznawać prawdy podstawowe, jak np. prawo rozdzielnościowe przy mnożeniu, nie jako twierdzenia w rozumowaniu dedukcyjnem, ale również jako prawdy przemawiające przez pogląd do wyobraźni, a przez nią dopiero do myśli. Psychologja nie może naruszyć wartości logicznej danych pojęć, może ona natomiast dać genezę ich rozwoju, dać sposoby wprowadzenia ich do myśli ucznia. Psychologiczne nauczanie musi być zawsze nauczaniem czegoś. Żeby zaś wiedzieć, czego mamy uczyć, musimy mieć cel jasny, obraz wypukły nauki, całą jej konstrukcję logiczną. Inaczej będziemy błądzili po omacku i nie będziemy wiedzieli, o co tu właściwie chodzi. Tę rzecz uważam za bardzo ważną, jakkolwiek niemal stale omijaną i nierozumianą.

Myśl ucznia dojrzewa powoli, a poznanie pogłębia się i systematyzuje, różniczkując się jednocześnie. Podobnie jak embrjon ludzki zawiera w sobie wszystkie dane po temu, by się rozwinąć na przedstawiciela rodzaju „człowiek", tak samo w nauczaniu, jeżeli chcemy, by myśl dzieci dojrzewała, by się rozwijała, trzeba jej dać te wszystkie pierwiastki, które dojrzewać mogą. Dojrzałość, wyrażająca się w sprawności wnioskowania dedukcyjnego, musi więc być rezultatem dłuższego procesu rozwojowego. Widzieliśmy wyżej, że jednem z zadań nauczania jest wytworzenie pojęcia liczby. To pojęcie przychodzi powoli, rozwija się od wyobrażeń zmysłowych. Tak samo powinny być poznawane prawa wiążące liczby. Uczeń spostrzega na oddzielnych przedstawionych przez nauczyciela przykładach jakąś własność liczb, zastosowuje tę własność do nowego przykładu, na którym również może się przekonać, że jest słuszną, i powoli zaczyna ją uważać za prawo ogólne. Uczeń w tym wypadku rozumuje indukcyjnie.

Dobrze będzie w kilku słowach scharakteryzować bliżej własności indukcyjnego rozumowania, gdyż w tej materji nie zawsze panują jasne pojęcia. Zaczniemy od przykładów.

Chcemy, dajmy na to, udowodnić cechę podzielności przez 3. Na kilku kolejnych przykładach liczb konstatujemy, że „suma cyfr" daje przy dzieleniu przez 3 taką samą resztę, jak cała liczba. Sprawdza się to bez zaprzeczenia na liczbach jednocyfrowych, dwucyfrowych w drugim dziesiątku i nawet dalej (zbyteczne brać wiele liczb, wystarcza właściwie bodaj jedna). Powiadam, gdyby ta własność była słuszna dla jakiejkolwiek liczby ciągu naturalnego, będzie natychmiast słuszna dla liczby następnej. Istotnie, przypuśćmy, że obrana liczba, zarówno jak jej „suma cyfr", daje przy dzieleniu przez 3 resztę 2. W takim razie następna liczba w ciągu naturalnym będzie dawała resztę 0, t. j. podzieli się przez 3. Wytwarza się ona z poprzedniej przez dodanie jedności. Co się stać może z jej „sumą cyfr"? Jeżeli obrana liczba kończy się na 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, to dodanie jedności zwiększa tę sumę o 1, co sprawdza twierdzenie powyższe. Jeżeli liczba kończy się na 9, to dodanie jedności zmniejsza jej sumę cyfr o $8=2 \cdot 3+2$, a więc nowa suma cyfr podzieli się również przez 3. Gdyby druga od końca cyfra była dziewiątką, suma cyfr zmieni się o $17=3 \cdot 5+2$. Wogóle suma cyfr zmieni się o pewną liczbę razy po 9 mniej 1. I w tym przypadku twierdzenie jest słuszne. Stąd słuszne jest zawsze. Z tego wniosek, że wszystkie liczby posiadają wspomnianą własność, bo sprawdziliśmy, dajmy na to, rzecz dla 12 pierwszych liczb, będzie więc ona słuszna dla 13-u, a jeżeli dla 13-u, to i dla 14-u i t. d., więc zawsze.

Z jakich części składa się podobne rozumowanie? Z dwóch: w pierwszej dostrzegamy własność na kilku liczbach początkowych, w drugiej wykazujemy, że jeżeli jest ona słuszna dla jakiejś liczby N, to będzie słuszna dla $N+1$. Ta druga część rozumowania jest trudniejsza. Ciekawy jest fakt, że podobnym sposobem można udowadniać wszystkie twierdzenia z arytmetyki liczby całkowitej. To też jest on w użyciu w teorji ścisłej [1]).

---

[1]) Patrz książkę prof. S. Zaremby: «Zarys pierwszych zasad teorji liczb całkowitych». Nakł. Akad. Um. w Krakowie. 1907.

Jaki stąd wypływa wniosek dla nauczania? Ażeby rzecz jeszcze jaśniej przedstawić, weźmy znowu przykład. Wezmę znane zadanie. Mam n kulek jednakowych i uszeregowanych jedna za drugą. Nazwijmy te kulki po kolei K_1, K_2, K_3, ... K_n. Rozpatrywane razem stanowią one pewne ugrupowanie. Przestawiam 2 z nich. Znowu otrzymam ugrupowanie z tych samych kulek złożone, ale inaczej uporządkowane. Pytam się teraz, ile takich różnych ugrupowań z tych kulek otrzymać można. Nazwę tę liczbę przez Π_n.

Próbuję zaczynać od małej liczby kulek. Jeżeli jest jedna, to takich ugrupowań jest również tylko 1. To jasne. Jeżeli mamy 2 kulki, np. K_1 i K_2, to ugrupowań jest 2: $K_1\,K_2$ i $K_2\,K_1$. Jeżeli weźmiemy 3 kulki: K_1, K_2, K_3, to ugrupowań będzie 6: $K_1\,K_2\,K_3$, $K_1\,K_3\,K_2$, $K_3\,K_1\,K_2$. $K_3\,K_2\,K_1$, $K_2\,K_3\,K_1$, $K_2\,K_1\,K_3$. Więcej niema. Zapiszmy teraz otrzymane liczby tak:

$$\Pi_1 = 1$$
$$\Pi_2 = 2 = 1 \,.\, 2$$
$$\Pi_3 = 6 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3.$$

Możnaby jeszcze spróbować utworzyć wszystkie ugrupowania dla 4 kulek, otrzymalibyśmy $\Pi_4 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$.

Widoczne jest prawidło tworzenia szukanej liczby. Ale czy matematyk rozumujący ściśle może na tem poprzestać? Nie, bo często mógłby się omylić. Np., gdyby na zasadzie spostrzeżeń na liczbach: 7, 14, 21 powziął myśl, że te liczby dzielą się przez 7, których „suma cyfr" jest liczbą pierwszą, toby był w błędzie, bo zaraz następna liczba 28 nie sprawdza twierdzenia. Wzięliśmy tutaj przykład oczywisty, ale są mylne twierdzenia, które sprawdzają się dla bardzo wielu liczb. Do takich np. należy t. zw. twierdzenie chińskie, według którego wyrażenie $\frac{2^n - 2}{n}$ jest liczbą całkowitą, gdy n jest pierwszą liczbą, a ułamkiem, gdy n jest liczbą złożoną. Twierdzenie to sprawdza się dla wszystkich wartości n od 1 do 341. To też matematycy chińscy złapali się na tym przykładzie. Ale wróćmy do naszego rozumowania.

Jeżeli nie można poprzestać na powyższych spostrzeżeniach, to trzeba wykazać ogólną słuszność prawa tworzenia żądanej liczby Π_n. Gdyby powyższe prawo było słuszne dla jakiejś liczby m kulek, będzie słuszne, powiadam, dla $m+1$. Niech $\Pi_m = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,....m$. Nową kulkę K_{m+1} mogę dołączyć do każdego z otrzymanych Π_m ugrupowań, i przytem dołączyć $m+1$ sposobami, bo mogę tę kulkę postawić przed pierwszą kulką w tem ugrupowaniu, przed drugą i t. d. i nakoniec po ostatniej. Z tego wynika, że z każdego z poprzednich Π_m ugrupowań mogę otrzymać $m+1$ nowych, należących do liczby Π_{m+1}.

Ale w ten sposób wszystkie możliwe ugrupowania po $m+1$ wyczerpię, bo kulki K_1, K_2, K_3 .... K_m w ugrupowaniach po m stoją na wszystkich możliwych miejscach, a nową kulkę postawiliśmy też na wszystkich możliwych miejscach. Z tego wynika, że jeżeli $\Pi_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$, to $\Pi_{m+1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ $(m+1)$. Przez m oznaczamy dowolną liczbę całkowitą, więc m może się równać 1, 2, 3, 4 i t. d., ale twierdzenie było słuszne dla 4, więc będzie słuszne dla 5, a jeżeli dla 5, to dla 6 itd. Jest więc słuszne zawsze.

Rzecz jasna, że pierwsza część powyższego dowodu może być nawet pokazana dzieciom, — jest prosta, składa się z jasnych spostrzeżeń; ale druga wymaga już rozumowania więcej skomplikowanego, trudniejszego. Takie rozumowanie nie jest dostępne dla dzieci. W podobny sposób można wykazać, że jeżeli znany proces dodawania jest słuszny dla liczb o m cyfrach, to będzie słuszny dla liczb o $m+1$ cyfrach. Tego rozumowania dzieciom nie podajemy. A w jaki sposób dochodzą one do przekonania o słuszności tego twierdzenia? Oto na zasadzie spostrzeżeń, zrobionych na liczbach dwucyfrowych. trzycyfrowych i t. d., po uogólnieniu na wszystkie. W tem uogólnieniu tkwi brak ścisłości, bo niema dowodu. Co go zastępuje? Zastępuje go przekonanie, zdobyte niejako doświadczalnie, że istota procesu dodawania nie zależy od liczby cyfr, że wszystko będzie się odbywało tak samo, jak na liczbach poznanych. Takie przekonanie opiera się więc na pewnem założeniu o jednorodności procesu dodawania.

Weźmy teraz przykład z innej dziedziny. Przekonywamy się doświadczalnie, że wszystkie dane nam w doświadczeniu naszem ciała spadają: spada kamień, spada kawałek drzewa, spadamy my sami i t. d. Czy to doświadczenie może wyczerpać kiedykolwiek wszystkie istniejące na kuli ziemskiej ciała małe i duże, lekkie i ciężkie, tworzące się na nowo, jak gwiazdki śniegu lub krople deszczu i t. p.? Rzecz jasna, że nie; a tymczasem twierdzimy, że „wszystkie ciała spadają". Jakiem prawem? Oto zakładamy jednostajność działań przyrody, niezmienne powtarzanie się zjawisk, jeżeli powtarzają się te same warunki. Zakładamy to uprzednio i na tem opiera się nasz wniosek ogólny, na tem opiera się wnioskowanie przez indukcję.

Łatwo widzieć analogię pomiędzy tym przykładem a powyższem rozumowaniem ucznia w arytmetyce. On tam też rozumuje indukcyjnie. Nauczyciel wie, że dzieci czasem zbyt pośpiesznie robią uogólnienia, ale na to jedyna rada dać przykład, w którym twierdzenie się nie sprawdza. Jedna, druga taka korekta – a młody matematyk poczuje, że potrzebna jest większa ostrożność i cierpliwość przy wnioskowaniu.

Z drugiej strony rozumiemy, że indukcyjne rozumowanie nie jest dla arytmetyki właściwe; a z tego rozumienia wypływa, iż trzeba stopniowo doprowadzić ucznia do tego, aby mu indukcja służyła tylko do odkryć, do prób, ale stwierdzenia prawdy ma szukać na drodze dedukcyjnej. To jest zadaniem dalszych stopni nauczania matematyki; dla nas wystarcza poznanie samego charakteru dopuszczalnego i możliwego rozumowania ucznia. Nie będę się tu wdawał w szczegóły; nauczyciel, który zrozumiał istotę rzeczy, da sobie łatwo radę z każdym oddzielnym momentem. Jedno tylko nadmienię: — ponieważ proces indukcyjnego rozumowania stosuje się do poszczególnych liczb, musi być powtarzany w miarę ich wzrostu, a tem samem rzecz każda musi się rozkładać na dłuższe okresy czasu, jak to już nieraz wyżej wspominaliśmy.

Jeżeli nauczyciel zrozumie, że rzecz dana jest już dobrze przez uczni przetrawiona, może wyraźnie i ściśle sformułować prawidło, dać określenie. Bez tego niemożliwe byłoby przejście od rozumowania indukcyjnego do dedukcyjnego. Tu się znajduje jedna z częstych omyłek w nauczaniu. Mianowicie zapominamy, przechodząc do zupełnie odmiennego traktowania przedmiotu, przerzucić mosty, które pozostawiamy domyślności uczni. Można pozostawić tej domyślności wiele rzeczy takich, o których szeroko się nieraz mówi, ale wspomnianej sprawy nie można. Sformułowanie może być słowne, jeśli nie jest za długie i nie nastręcza trudności stylistycznych. Legem brevem esse oportet.... Może być też, i to właśnie w tych przypadkach, gdzie są powyższe trudności, z pożytkiem zastosowana formuła t. zw. algebraiczna. Niech się czytelnik tem nie przestrasza. Tam, gdzie jest pewność zrozumienia, taka formuła nie utrudnia rzeczy, lecz ułatwia Np. prawo rozdzielności można przedstawić tak: $(a+b)\times c = a\times c + b\times c$. Później można znak mnożenia opuścić. Takie formuły z pożytkiem stosuje prof. Dewey w nauczaniu elementarnem, a własne doświadczenie moje wykazało ich pożytek. Są one razem z formułami słownemi tem naturalnem przejściem od rozumowania indukcyjnego do dedukcyjnego. Można je stosować już w 3-im roku nauczania, ale dobrego nauczania, kiedy nauczyciel wie, czego nauczył.

Dedukcyjne rozumowanie przejawia się zwykle w zadaniach o charakterze oderwanym i nawet w takich nieraz, gdzie fabuła ma treść konkretną. Trzeba wielkiej ostrożności, żeby nie przesadzić i nie liczyć zbyt pochopnie na sprawność myślową ucznia. Często się w praktyce zdarza, że zadania dawane są za trudne. Rodzice i korepetytorzy (oby ich było najmniej!) nazywają je łamigłówkami. Właściwie nie są to łamigłówki, ale zadania takie, w których liczymy na wyższą zdolność dedukcyjnego rozumowania, niż uczniowie faktycznie posiadają. Zadania często dzielą na typy, przyczem principium divisionis jest: albo zakres rzeczowy (t. zw. materjalistyczny pogląd), albo powody natury formalnej. Często też, szczególniej tam, gdzie zadania właściwie są „powyżej uczniowskich głów", wchodzą w grę czynniki natury sztucznej, np. zadania na tworzenie nowej jednostki i t. p. Zakres rzeczowy trudno faktycznie wyczerpać, ale idea wspomnianej zasady dzielenia na typy jest słuszna, bo zadania muszą być bliskie otoczenia ucznia i rozmaite, jak to już wspominaliśmy. Podział, oparty na powodach natury formalnej, bierze pod uwagę następstwo i związek różnych działań. Np. zadania typu: $\frac{x}{a}+b=c$. Tego rodzaju podział ma również swoje znaczenie, szczególniej tam, gdzie w grę wchodzą już wszystkie działania; np. można posługiwać się niem w roku drugim i dalej. Tak zw. dopełnianie i rozkładanie przy dodawaniu i odejmowaniu wiąże się z tem. Układanie zadań według takiego podziału musi uwzględniać następujące 2 momenty: 1° wyczerpanie wszelkich pytań co do danego działania, 2° stopniowe łączenie kilku różnych działań.

W arytmetyce początkowej zadanie ma bardzo duże znaczenie: nie służy ono tylko do zastosowania wiedzy, z niego nieraz wiedza płynie. W literaturze naszej mamy nawet podręcznik (Arytmetyka w zadaniach prof. Dicksteina), w którym stopniowo rozwijający się szereg zadań zapoznaje ucznia z własnościami liczb, uczy rachunku [1]).

Wobec wielkiego znaczenia jakie, ma dla nauczania zasada indukcji, będzie pożytecznem przytoczenie tutaj kilku miejsc ze znakomitej książki prof. J. Deweya p. t. „Jak myślimy" (How we think). W książce tej znakomity pedagog amerykański, profesor filozofji w uniwersytecie kolumbijskim (w New Yorku) porusza i rozpatruje szczegółowiej wspomniane wyżej zagadnienie procesu rozumowania naszego w różnych dziedzinach życia i nauki. Przytaczamy tu najpierw jeden z przykładów podanych w tej książce, żeby później jaśniej wystąpiła podana przez Deweya charakterystyka ogólna rozumowania.

„Z górnego pokładu promu, na którym codziennie przejeżdżam rzekę, wystaje — podnosząc się prawie pionowo — długi, biały drąg z pozłoconą kulą na wierzchołku. Gdym pierwszy raz go zobaczył, zdawało mi się, że jest to drążek do chorągiewki. Jego kolor, forma i pozłocona kula zdawały

[1]) Sprawy tu omawiane nieco obszerniej poruszyłem w N-rze 1-ym z r. 1911 czasopisma matematycznego p. t. «Wektor» (wychodzi w Warszawie).

się sprzyjać temu przypuszczeniu i z tego powodu pozornie utwierdzały mnie w mem przekonaniu. Wkrótce jednakże trudności zjawiły się same przez się. Drąg sterczał prawie poziomo, w pozycji niezwykłej dla drążka z flagą; co więcej, nie było przy nim ani bloku, ani pierścienia, ani sznurka do przyczepienia chorągiewki; nakoniec, w innem miejscu znajdywały się dwa pionowe kije, na których okolicznościowo powiewały chorągiewki. Wydawało mi się prawdopodobnem, że drąg nie był przeznaczony do wywieszania chorągiewki.

„Wtedy starałem się wyobrazić sobie wszelkie możliwe zastosowania podobnego drążka i rozpatrzeć z nich najodpowiedniejsze: a) Być może było to upiększenie; lecz z racji, że wszystkie promy i nawet statki holownicze posiadały podobne drążki, ta hipoteza była odrzucona. b) Być może, było to zakończenie potrzebne do telegrafu bez drutu; lecz powyższe rozważanie czyniło i to również nieprawdopodobnem. Z drugiej strony, o wiele odpowiedniejszem miejscem dla podobnego zakończenia byłaby najwyższa część łódki, na wierzchu budki sternika. c) Być może, drążek był ustawiony w celu wskazywania kierunku, w którym łódka miała się poruszać.

„Na poparcie tego wniosku odkryłem, że drążek był umieszczony niżej, niż budka sternika, tak aby sternik mógł łatwiej go widzieć. Prócz tego koniec był o tyle wzniesiony ponad podstawę, żeby mógł się wydawać wystającym poza łódkę z miejsca sternika. Dla sternika, znajdującego się w pobliżu przedniego brzegu łódki, potrzebna byłaby podobna wskazówka kierunku. Dla statków holowniczych także potrzebneby były podobne drążki. Ta hipoteza o tyle była prawdopodobniejszą od innych, że przyjąłem ją. Wywnioskowałem, że drążek ustawiony był w celu pokazywania sternikowi kierunku, w którym się posuwa łódka i pomagania mu w dobrem jej kierowaniu." (Str. 69 — 70).

Przytoczyliśmy ten przykład dlatego, żeby później jaśniejszą była podana przez Deweya charakterystyka procesu zwykłego myślenia. Weźmy teraz przykład z dziedziny rachunku, w którym przedstawimy podobnyż proces rozumowania.

Dajmy na to, mamy przed sobą zagadnienie: jakie liczby dzielą się przez 5? Przypuśćmy, że zagadnienie to rozpatrujemy na razie w zakresie pierwszej setki.

Dzieci widzą z przykładów, że jedne liczby dzielą się przez 5, drugie — nie, przyczem stosują (o czem niżej) metodę rozkładania dzielnej na 2 składniki sposobem oddzielania jedności od dziesiątków.

S p o s t r z e ż e n i e p i e r w s z e. Takie liczby, jak 20, 30 i t. d., t. j. składające się z samych dziesiątków, dzielą się przez 5. Spostrzeżenie to popieramy różnemi przykładami z zakresu 100.

Spostrzeżenie drugie. Takie liczby, jak 34, 26 i t. d., przez 5 się nie dzielą, to znaczy, że po przyłączeniu jednostek do dziesiątków, otrzymanej liczby nie można podzielić przez 5.

Pierwsza hipoteza. Tylko liczby, kończące się na 0, dzielą się przez 5.

Sprawdzanie hipotezy. Nauczyciel podaje przykład 15, 25 i t. d., to jest liczb kończących się na 5 i dzieci przekonywają się, że te liczby przeczą poprzedniej hipotezie.

Spostrzeżenie trzecie. Razem z uczniami nauczyciel sprawdza, że wszelka liczba z zakresu 100, kończąca się na pięć, dzieli się przez 5.

Hipoteza druga i ostatnia. Liczby, zakończone na 0 i 5, dzielą się przez 5. Hipoteza zostaje sprawdzona w całym zakresie.

Rzecz jasna, że teraz możnaby rozumowo wyjaśnić' dlaczego ona jest słuszna, przez zwrócenie uwagi uczniów, że na to, aby liczba się dzieliła, potrzeba, by każdy jej składnik się dzielił, t. j. oddzielnie dziesiątki i jedności, a z jedności tylko 5 się dzieli.

Przy zwiększaniu się zakresu liczbowego prawidło zmianie nie ulega, gdyż zasadniczy podział na dziesiątki i jedności pozostaje słusznym. O tem mówimy w nauczaniu we właściwem miejscu.

Nie zawsze rozumowanie jest tak proste i np. Dewey podaje inny przykład, w którym dlatego, żeby sprawdzić hipotezę, trzeba wykonać eksperyment, co w świecie liczb polega na obiorze dowolnej liczby.

„...każdy przykład — powiada Dewey (str. 72) — przy rozpatrzeniu wykazuje mniej lub więcej jasno 5 logicznie różnych stopni: 1° poczucie trudności; 2° umiejscowienie tej trudności i jej określenie; 3° przypuszczenie możliwego rozwiązania; 4° wysnuwanie wniosków oraz rozumowanie nad wynikami przypuszczenia; 5° obserwacja i eksperyment, prowadzące do przyjęcia lub odrzucenia, a tem samem do wniosku przekonywającego lub nie".

Widzimy tutaj pewien naturalny cykl rozumowania, który wychodzi ze spostrzeżeń faktów i do nich ostatecznie wraca z osnutą na nich i sprawdzoną hipotezą. Dobre nauczanie powinno zarówno w swej całości, jak w każdym oddzielnym momencie, z zastosowaniem tego cyklu się liczyć. Dzieci mogą się uczyć in verba magistri, ale w ten sposób zdobywają tylko ciężką, urzędową wiedzę, tak mało potrzebną zarówno jednostce, jak społeczeństwu, wiedzę, która nie rozwija ich umysłu, nie budzi dla siebie szacunku i nie podnosi wiary jednostki we własne siły, a więc nie daje woli człowieka tego poparcia, jakie dać może i powinna. Należyte kształcenie władz umysłowych to wielka siła wychowawcza, to pierwsze, zasadnicze zadanie wychowania, wobec którego fakty wiedzy są tylko środkiem, który stać się może walorem pierwszorzędnej wartości społecznej, jeżeli będzie w posiadaniu człowieka silnego charakteru i silnej woli. Wątpliwą jest wielce rola nauczyciela w szkole elementarnej i średniej przenikniętego tylko szacunkiem dla nauki, a pozostawiającego na uboczu swe zadania wychowawcze. Nawet tego szacunku do nauki nie potrafi on dzieciom udzielić. Cóż dopiero powiedzieć można o tych ludziach, którzy bodaj tej jednej własności dobrego nauczyciela nie posiadają?

„Wyrobionym umysłem jest ten, który najlepiej potrafi uchwycić stopień dokładności obserwacji, tworzenia pomysłów, rozumowania i sprawdzania doświadczalnego w każdym oddzielnym przypadku; to ten umysł, który potrafi dla myślenia przyszłego najlepiej korzystać z omyłek zrobionych w przeszłości." (Str. 78).

W tych kilku wierszach tkwi cała rewolucja dydaktyczna. Wszak my nie pozwalamy naszym uczniom mylić się, a najlepszym nazywamy tego, który najmniej się myli, t. j. najczęściej, najlepiej odtwarza nasze pouczenia i podane prawidła. Nieraz już zastanawiano się nad tem, dlaczego tak często dobrzy uczniowie w szkole są takimi niedołęgami w życiu. Jedną z przyczyn jest właśnie to, że ucząc, nie uczyliśmy dzieci myśleć, nie pozwalaliśmy im mylić się tam, gdzie te omyłki uczą. Uczeń bał się omyłki nie dlatego, że to jest omyłka, ale że spotka się ze złą oceną; nie interesowała go sama rzecz, ale zewnętrzne warunki nauczania. Stąd wynik— słabość myślenia, nieumiejętność korzystania ze swych omyłek. Tu właśnie tkwi również jedna z podstaw przedstawionej poprzednio zasady samodzielności.

W powyżej zaznaczonym cyklu myślenia można wyeliminować 2 strony: pierwszą — opierającą się o pierwszą obserwację i postawienie pierwszej hipotezy; drugą—o sprawdzenie tej hipotezy przez zastosowanie jej znowu do spostrzeżeń. Pierwsza ma charakter indukcyjny, druga — dedukcyjny. Jednostronność nauczania przeciętnego właśnie polega na tem, że tak często tę pierwszą część omijamy albo traktujemy zbyt powierzchownie. Z tego wynika, że proces indukcyjny jest normalnym poprzednikiem dedukcyjnego, że te dwa procesy stanowią dwie strony jednego i tego samego normalnego biegu myślenia. Zdobyte na zasadzie pierwszych spostrzeżeń prawidło stosuję do rzeczywistości, sprawdzam przez to zastosowanie i stąd albo się umacniam w przekonaniu, albo odrzucam przyjętą hipotezę.

Indukcja i dedukcja przeplatają się ze sobą w procesie myślenia, są jak dwie strony tego samego medalu, jak dwa korrelaty pojęciowe. Zdobyte indukcyjnie prawidło arytmetyczne jako własność ogólną, stosujemy w zadaniu, wyciągając z niej wnioski dedukcyjnie. Dlatego to, osobliwie w początkach nauczania, tak ważne znaczenie posiada zadanie, uzupełniające proces myślenia matematycznego bardzo ważnem ogniwem, jak również przygotowujące grunt do właściwego matematyce rozumowania. W późniejszej, dojrzalszej formie nauki zjawia się dedukcja w wykładzie t. zw. teorji i stąd zadanie ma znaczenie dla ćwiczenia samodzielności myślowej i opanowania przedmiotu, ale mniejsze, niż w pierwszych początkach nauczania.

Metoda wykładu początkowego „zapomocą zadań", „arytmetyka w zadaniach" opiera się na słusznej myśli, ale nie da się przeprowadzić systematycznie w praktyce i w podręczniku z powodu niemożliwości dokładniejszego przystosowania tegoż do danych konkretnych warunków. Natomiast zwyczajny zbiór zadań powinien się liczyć z kolejnem następstwem głównych elementów nauczania. Dedukcja nie zależy od czasu i miejsca, gdy tymczasem indukcja w dużym stopniu jest z niemi w związku, a nawet z właściwościami indywidualnemi ucznia. Stąd niemożliwy jest podręcznik, jako „arytmetyka w zadaniach", ponieważ w nauczaniu początkowem tak ważną rolę odgrywa indukcyjne myślenie. W każdym razie zadanie jest doniosłym elementem nauczania i powinno się wielką zwrócić uwagę zarówno na jego fabułę, jak na treść istotną.

ROZDZIAŁ IV.

W niniejszym rozdziale zajmujemy się kilkoma zagadnieniami metodycznemi, które szczególniej w nauczaniu pierwszych początków odgrywają bardzo ważną rolę. Rozwiązanie tych zagadnień mniej lub więcej dokładne wypływa z umiejętnego stosowania poprzednio wyłuszczonych zasad dydaktycznych. Nie przemawia przeze mnie skłonność do matematycznego sposobu myślenia, jeżeli sądzę, że całość nauczania da się wywnioskować z tych zasad, które nie powstały odrazu niby Minerwa z głowy Jowisza, lecz są wynikiem wysiłku myśli w dziedzinie pedagogiki całego szeregu wielkich jej przedstawicieli, są rezultatem doświadczenia pokoleń. Takie doświadczenie co najmniej jest tyle warte, co naukowo i ze znajomością rzeczy skonstruowany eksperyment pedagogiczny. Ta wartość tem większą się staje, im więcej ten eksperyment stwierdza swoją zgodność z temi zasadami. Zapewne, są to zasady żywe, wymagające giętkości w zastosowaniu, która płynie z inteligencji, wiedzy i nawet talentu nauczyciela, jako dobrego obserwatora dzieci. Tej ostatniej zdolności właśnie potrafi go nauczyć pedagogika eksperymentalna. Dlatego nauczyciel musi mieć obustronne wykształcenie pedagogiczne — z dziedziny historji i z dziedziny badań doświadczalnych, dlatego to zwracamy w niniejszej książce taką uwagę na historję myślenia arytmetycznego, dlatego nie zgadzamy się z Meumannem i wieloma innymi autorami, którzy jednostronnie rozumieją proces nauczania i jego podstawy. Tak samo jak mądrość życiowa wspiera się o znajomość tego co jest i o wiedzę historyczną, tak też i mądrość nauczania, jako żywego procesu obcowania z dziećmi, ma te same podstawy. O sprawie fachowego przygotowania nauczyciela rachunku należałoby gruntowniej pomyśleć, obecnie nadmieniamy o tem, aby wyjaśnić, dlaczego w specjalnej metodzie tak często poruszamy sprawy ogólnodydaktyczne. Dydaktyka nie zna przepisów, ale ma żywe zasady, przeznaczone dla stosowania ich przez żywych ludzi. Na nic wszelkie przepisy, jeżeli nauczyciel nie dorósł do wykonania swego zadania.

Jednem z głównych zagadnień, które teraz mamy zamiar poruszyć, jest sprawa monograficznego czyli oddzielnego i kolejnego traktowania liczb pierwszych szeregu naturalnego.

Monograficzne traktowanie liczb stanowi w metodyce ważną i trwałą zdobycz, którą zawdzięczamy głównie Grubemu. Niema obecnie kierunku w metodyce, któryby przynajmniej w głównych zasadach nie uznawał, że monograficzne traktowanie liczb pierwszego przynajmniej dziesiątka jest potrzebne i celowe. Rzecz ta i u nas jest dość rozpowszechniona, co w niemałej mierze zawdzięczać należy ś. p. Jeskemu. Ponieważ znajomość liczb pierwszego dziesiątka stanowi podstawę dalszego rachunku, gruntowne poznanie ich jest niezbędne; a takie poznanie można osiągnąć tylko w ten sposób, że każdą z liczb będziemy dokładnie rozpatrywali zosobna, gdyż zjawia się ona przed umysłem dziecka jako fakt oddzielny. Tutaj warto zwrócić uwagę na jedną rzecz wielkiej doniosłości. Na czem polega, prócz innych rzeczy, nasza pewność i łatwość w wytwarzaniu liczb szeregu naturalnego i w działaniach? Na zrozumianych i stosowanych niemal automatycznie pewnych jednostajnych, stałych prawach, rządzących w świecie liczb. Wiemy, jak się wytwarzają następne liczby szeregu naturalnego, zrozumieliśmy prawidłowość tu panującą, poznaliśmy sposoby wykonywania działań, stąd nasza pewność. Tego wszystkiego dziecko nie ma: każda liczba występuje wobec tego jako zjawisko oddzielne, należy więc powiązać ją z sąsiedniemi liczbami, wykryć pewne prawidłowości i t. d. Ciekawe jest, że gdy człowiekowi, władającemu dokładniej rachunkiem zwyczajnym, a nawet wyższą teorją liczb, napiszemy bardzo dużą liczbę i zapytamy go o jej własności, trudno sobie z tem radzi: musi wykonywać cały szereg badań, aby oznaczyć np., czy liczba jest pierwszą, czy nie. W takiem samem położeniu, a nawet jeszcze trudniejszem, jest dziecko wobec liczb pierwszego dziesiątka.

Nie wątpimy o znaczeniu monograficznego traktowania liczb, ale powinniśmy się zastanowić, w jakiej formie to prowadzić. Tu właśnie występują u różnych metodyków różnice i niezgodność poglądów, wobec czego należy stanowisko nasze wyraźnie zaznaczyć.

Co to znaczy poznać liczbę? Przedewszystkiem wytworzyć sobie pojęcie tej liczby. Ale jakże można wytworzyć to pojęcie w oderwaniu od innych liczb, bez związku z niemi i porównania? O ile z historycznych danych możemy wnioskować, człowiek najpierw posiadał trzy pojęcia: jednego, dwóch i wielu. Przejawia się to np. w t. zw. liczbie podwójnej, którą spotykamy w językach starożytnych. Pojęcie jednego nie mogłoby się najpierw samo wytworzyć, gdyby brakowało tu porównania z innym, bodaj jednym objektem tej samej kategorji. Gdyby świat był jednokolorowy, czy mielibyśmy pojęcie koloru? Czy fizyk stwarzałby swoje teorje wibracyjne? Ten fakt przejawia się również u dzieci. Bez wątpienia, przeciwstawienie początkowe: „jeden i wiele", jakkolwiek nawet nie wyrażane słowem, odgrywa tu swoją rolę. Zaznaczyliśmy wyżej, że niesłuszne jest twierdzenie Sterna, iż dzieci posiadają najpierw pojęcie liczby porządkowej. Takie pojęcie byłoby zupełnie jednoznaczne z pojęciem liczby wogóle. Niewątpliwą natomiast jest rzeczą, że na dnie pojęcia leży proces odwzorowania, a więc podstawowy moment liczenia, w którym występuje zawsze rozpatrywanie zbiorów złożonych z większej, niż jeden, liczby przedmiotów. Ten właśnie fakt da się wyrazić zapomocą powyższej interpretacji, a mianowicie: niemasz pojęcia liczby powyżej jednego bez porównania.

A jeżeli tak, to w czem te związki między liczbami się wyrażają? Wyrażają się one w działaniach, w sposobach przejścia od jednej liczby do drugiej. Poznanie liczby niemożliwe jest bez działań. Wobec tego Grube radził odrazu stosować do każdej niemal liczby wszystkie działania arytmetyczne. Pytanie teraz polega na tem, czy należy stosować wszystkie działania odrazu, czy też również wprowadzić tutaj stopniowość i dawać tylko to, co jest istotnie ważne. Historja daje wskazówki, że „wszystkie działania" nie odrazu się rozwinęły. Są ślady nawet w pracach takiej miary matematyków, jak np. znany autor wiekopomnego dzieła „Elementy" — Euklides, że t. zw. podwajanie uważane było jakby za działanie osobne. Zresztą czytelnik więcej z rzeczą obeznany zrozumie, że liczba działań jest kwestją poniekąd *względną*, że w arytmetyce jest więcej działań, niż cztery, np. pierwiastkowanie, logarytmowanie. Odgrywa tu wielką rolę znaczenie *praktyczne* (w szerszym stylu) danej operacji arytmetycznej. Znane jest stare i słuszne twierdzenie dydaktyczne: od prostego do więcej złożonego. Jest ono wynikiem umiejętnego stosowania zasady ciągłości w nauczaniu, jakkolwiek może być nieraz w niedbałem nauczaniu powodem jednostronnego stosowania systematycznej metody. Odejmowanie i dodawanie są działaniami prostemi, bez których pojmowanie i używanie mnożenia oraz dzielenia jest utrudnione, a więc powyższe twierdzenie można i trzeba tu zastosować.

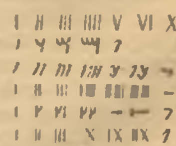
W arytmetyce początkowej chodzi, *mówiąc ogólnie*, o wytworzenie szeregu naturalnego. Gdybyśmy abstrahowali od znaczenia praktycznego działań takich, jak mnożenie i dzielenie oraz od systemu pozycyjnego (t. zw. zwykłego pisania liczb), od opartego na tem udogodnienia w wymawianiu tychże liczb, — do wytworzenia szeregu naturalnego potrzebne byłoby tylko jedno działanie — dodawanie, a w rachunku wstecznym — odejmowanie.

Te właśnie dwa działania stanowią podstawę, szczególniej w pierwszym dziesiątku, gdzie sam charakter liczb nie wymaga innych działań. Z tego bynajmniej nie wynika, abyśmy w konkretnej formie w zadaniach lub pytaniach nie poruszali pozostałych dwóch działań; ale należy tu zachować stopniowanie. Mnożenie zjawiać się winno, ze względów ekonomji pracy, jako skrócone dodawanie, np $3+3+3 = 9 = 3$ razy 3, ale oprzeć się musimy na poprzedniem dodawaniu. Tak samo odejmowanie gruntownie poznane poprzedza t. zw. mierzenie. Nauczyciel sam wyczuje, kiedy dostateczna znajomość dodawania i odejmowania pozwoli mu na tego rodzaju rozszerzenie. W tem więc z Grubem nie możemy się zgodzić; działania również wymagają stopniowego traktowania, nie są wszystkie niczem pierwotnem, lecz wyrastają na tle dojrzewania myśli arytmetycznej. To jedno.

Po drugie: nie możemy się zgodzić z tem, jak to się zwykle robi, że po wykonaniu szeregu pewnych operacyj: liczenia, dodawania, odejmowania i t. p., przy każdej oddzielnej liczbie dochodzimy do jej pojęcia. Np. zadajemy szereg pytań, przykładów i t. p. i oto dochodzimy do pojęcia jedności, potem tak samo dwóch i t. d. Wydaje mi się więcej racjonalnem podzielenie pierwszego dziesiątka na 2 części, od 1 do 5 i od 5 do 10.

Zakresy liczb od 1 — 5 i od 5 — 10 posiadają bardzo ważne i znaczne różnice. W grę wchodzi nie tylko różnica wielkości liczb tych zakresów, ale również pewnych cech natury o wiele głębszej. Ze stosowania zasady poglądowości wiadomo, że liczby początkowe staramy się przedstawić poglądowo zapomocą zbiorów przedmiotów widzialnych, zjawisk następujących w czasie i t. p. Otóż bardzo ważny jest stosunek nasz do tych zbiorów, stosunek zależny od ich zawartości, a więc od reprezentowanej przez nich liczby. Zbiory ilustrujące liczby pierwszego zakresu mogą być przez nas ujmowane jakby za jednym zamachem, t. j. ujmujemy jednocześnie całość zbioru i odróżniamy w nim jego oddzielne elementy. Tymczasem zbiory ilustrujące liczby drugiego zakresu tej własności nie posiadają: przy ujmowaniu ich mimowoli dzielimy rozpatrywany zbiór na dwie części, z których każda należy do pierwszego zakresu. Np. gdy mam przed sobą cztery jednorodne kulki, blisko siebie położone, z łatwością odczytuję liczbę i widzę w całości zbioru oddzielne elementy. Tymczasem, gdy mam przed sobą 7 kulek, dzielę ten zbiór na 4 i 3 (lub odwrotnie), albo na 5 i 2 (ew. 2 i 5); mogą też wchodzić 3 składniki. Pozornie prosty ten fakt ma dzięki temu dla nauczania początkowego, tak bardzo związanego z bezpośredniem oglądaniem przedmiotów konkretnych, duże znaczenie. Zjawisko zanotowane nie tylko dotyczy czuć wzrokowych, ale z łatwością da się przenieść na słuch i dotyk, zapewne też dotyczyć musi wyobrażeń odtwórczych czyli obrazów przedmiotów, które były ujmowane. Np. słuchem nie możemy odróżnić więcej, niż 8 rytmicznych uderzeń podwójnych metronomu, a Braille — wynalazca liter dla ślepych — nie używa do oznaczenia ich z tego samego powodu więcej, niż 6 punktów wypukłych. Zjawisko poddane było badaniu doświadczalnemu. „Przy tych badaniach okazało się — pisze Wundt (Grundzüge der physiologischen Psychologie, T. 3, str. 325, 1911)—że można jeszcze ujmować jasno jednocześnie od 4 — 6 niezależnych od siebie wrażeń (linij, liter, cyfr), przyczem mniejsza z tych liczb odpowiada obserwatorom mniej wprawnym, a większa — więcej". Wspomniana szóstka stanowi maximum najwygodniejszego jednoczesnego ujmowania, które nie może być przekroczone nawet przy większej wprawie. Tak samo, jeżeli dźwięki następują po sobie arytmicznie, możemy ujmować tylko 6 oddzielnych dzwięków, przy rytmicznem następstwie, jak wspomnieliśmy, 8 podwójnych. To ciekawe zjawisko psychiczne w połączeniu ze wspomnianem już zastosowaniem ręki w pierwszych początkach rachunku, jako jednego z podstawowych aparatów odwzorowujących, jest również powodem, że przy zapisywaniu liczb u różnych ludów przeważnie pierwsze 4 liczby oznaczone są kreskami oddzielnemi, a dopiero przy piątej zjawia się osobny znak. Weźmy kilka przykładów.

T. zw. cyfry rzymskie . . . . .
Hieratyczne znaki liczbowe egipskie:
Znaki liczbowe fenickie . . . . .
Cyfry palmirskie . . . .
Cyfry syryjskie . . . .
Cyfry induskie (szryft Kharosthi) [1]



Te przykłady wystarczą, aby wyprowadzić z nich powyższy wniosek:

Pierwsze 4 liczby mają tę właściwość, że odpowiadające im zbiory są wyobrażalne, przyczem każdy z elementów jest jakby odczuwany oddzielnie zarówno w spostrzeganiu, jak w wyobrażaniu.

[1] Löffler. l. c.

Jak widzimy, zgadza się to z wymienionem powyżej prawem psychologicznem: fakty spółczesnego doświadczenia psychologicznego i fakty historyczne są z sobą w zgodzie. Czyż taka rażąca zgodność nie daje wiele do myślenia o powstawaniu pierwszych pojęć liczbowych? Wyobrażalne są tylko zbiory, odpowiadające pierwszym czterem liczbom, dalsze liczby t w o r z y m y już na podstawie dzielenia odpowiednich zbiorów na grupy, składające się z poprzednich.

W tym fakcie tkwi podstawa rozszerzenia zakresu liczbowego i stanowi on jedno z największych odkryć matematycznych. Gdybyśmy nie byli w stanie ujmować jednocześnie niewielkich grup przedmiotów, gdybyśmy większego zbioru nie potrafili ujmować jako całości złożonej z mniejszych, nie byłoby ciągu naturalnego, istniałoby tylko ogólne „poczucie" wielkości, jak u ludzi pierwotnych. W powstawaniu większych liczb tkwi akt twórczy i z niego tylko wynika nasza pewność logiczna, nasza swoboda ruchów w tej dziedzinie. W tym akcie twórczym, w zaraniu dziejów człowieka powstałym, jest podstawa późniejszej definicji dojrzalszego matematyka.

Wszystko to dobrze — mogą nam powiedzieć zwolennicy monografji Grubego — ale ujmowanie liczby większej w zakresie pierwszego dziesiątka możliwe jest również, jeżeli już nie przez jednoczesne ujmowanie poszczególnych elementów, to grup tych elementów, a w takim razie cóż stoi na przeszkodzie kolejnemu ich rozpatrywaniu? Rzecz jasna, odpowiemy, że tam, gdzie powstanie liczby zależy od pewnego sposobu jej tworzenia, tam rozpatrywanie kolejne każdej liczby oddzielnie ma mniejszą znacznie wartość, niż mogłoby mieć, gdyby każda liczba większa od pięciu była niezależna od tego sposobu tworzenia. Monografja Grubego jest wyłącznie procesem a n a l i t y c z n y m, gdy tu wchodzi w grę synteza, bez której ta liczba większa nie może być nam dana. Stąd wynika, że ponieważ proces tworzenia wszystkich liczb drugiej piątki jest ten sam, nie różnią się one między sobą tak znacznie, aby należało stopniowo i kolejno je rozpatrywać, można natomiast przechodzić je razem, co nie przeszkadza bliższemu poznaniu każdej z nich [1]). W poznawaniu liczb pierwszego dziesiątku, jak również dalszych, nie tylo odgrywają rolę po-

---

[1]) Patrz Dr. E. W i l k. Das Rechnen der Volksschule 1. Lehrerheft. Dresden — Blaschwitz 1909. Bleyl & Kaemmerer. Inne prace tegoż autora: «Das Werden der Zahlen und des Rechnens im Menschen und in der Menschheit auf Grund von Psychologie und Geschichte» 1905 i «Neue Rechenmethode gegründet auf das natürliche Werden der Zahlen und des Rechnens 2-e wyd. 1911. Na fakcie tym nadmieniony autor, idąc drogą pośrednią pomiędzy teorją liczenia i obrazów liczbowych, buduje swój system metodyczny».

szczególne liczby, ile uświadomienie sobie i wyjaśnienie procesu ich tworzenia, a więc ujmowania grupami, systemu dziesiętnego i pozycyjnego.

Lecz pierwsza piątka nietylko tem się odróżnia od liczb pozostałych. Posiada ona jeszcze inną ważną własność, opartą na obserwacjach nad dziećmi, wstępującemi do szkoły w wieku około 6 lat.

Okazuje się, że zakres liczbowy, znany dokładniej tym dzieciom z własnego życiowego doświadczenia, nie przekracza przeciętnie 5 — 6. Przy 6 zatrzymuje się w tym wieku rozwój rachunkowy, jeżeli nie brać pod uwagę klepania liczebników, które może być posunięte znacznie wyżej. Nadmienioną znajomość rachunku posiadają dzieci z własnego doświadczenia, ale tam, gdzie zajmowano się ich nauczaniem przed 6-ym rokiem, mogą posiadać o wiele szerszą sprawność arytmetyczną. Czy ta sprawność pomaga do późniejszego rozwoju matematycznego — można bardzo wątpić, jak również, czy istotnie jest prawdziwą wiedzą aż do 1000 (z relacji jednego z badaczy, cytowanych w dziele wspomnianem Meumanna) rozciągająca się znajomość liczb. Dużo zależy od stosowanych przy ocenie kryterjów. Ponieważ w zwykłej szkole wiejskiej i miejskiej nauczyciel nie może liczyć na przygotowanie dzieci w rachunku, więc powyższy zakres jest dla niego niejako sprawdzianem, a zarazem może oddać usługi przy zaznajamianiu się z dziećmi na początku nauczania. Tutaj zgodnie z zasadą ciągłości, która wymaga znajomości tego, co dzieci już umieją, aby oprzeć umiejętnie na tem dalsze nauczanie, powinien nauczyciel zadawać pytania treści arytmetycznej właśnie z tego zakresu. Będzie to materjałem do przedwstępnego badania umysłowości dzieci, w czasie którego zdobywa nauczyciel nie tylko pojęcie o ich przygotowaniu, ale może zapamiętać ich imiona i nazwiska oraz pewne potrzebne okoliczności i warunki życia. Wszystko to jest dla dobrego nauczania potrzebne.

Pierwsza piątka ma jeszcze jedną ważną cechę. Po skończeniu jej uczący powinien starać się wytworzyć o niej w umyśle dzieci pojęcie, jako o pewnej całości. Oczywiście, to samo możnaby zrobić z 3 i 4 i t. p., ale piątka ze względu na to, że poglądowo łatwo bardzo i przejrzyście ilustruje ją właśnie ręka, do tego szczególnie się nadaje. Celem jest tu pierwsze rozbudzenie zasadniczej myśli systemu pozycyjnego pisania i tworzenia liczb, t. j. takiego systemu, w którym pewna grupa jedności niższego rzędu tworzy jedność wyższego i odróżnia się od niej miejscem zapisywania. Bez jasnego uświadomienia sobie tej idei nie będą zrozumiałe dostatecznie wszystkie późniejsze działania z liczbami większemi.

Dlatego to nauczyciel podkreśla piątkę jako całość i będzie się starał później tę całość stosować do tworzenia liczb i działań z liczbami drugiej piątki. W ten sposób przygotuje sobie na liczbach mniejszych grunt do zrozumienia 10, jako zasadniczej grupy naszego systematu liczenia. Muszę tu nadmienić, że dziesiętny systemat liczenia nie jest jedynym, że u różnych ludów istnieją systematy liczenia: 2-wy, 5-wy, 20-wy i nawet 60-ny, że są jasne wskazówki natury filologicznej, iż u ludów indoeuropejskich, do których należą również Słowianie, był w użyciu w odległych czasach systemat liczenia 2-wy, a nawet są pozostałości, jak np. u Francuzów, systematu 20-wego, a nawet 60-nego, co np. nietylko u nas wyraża się w specjalnem słowie na oznaczenie 60 — „kopa".

Prócz powyżej zaznaczonych kwestyj, pierwsza piątka dotyka jednej istotnej cechy samej metody monograficznego traktowania liczb, używanej przez Grubego. Grube tworzy liczby ciągu naturalnego w zakresie pierwszej setki, na którą rozciąga swoją monograficzną metodę, przez dodawanie jedności. Zapewne ze względu na uporządkowanie tych liczb z punktu widzenia logicznego jest to rzucająca się w oczy właściwość, ale przeciw niej, jako podstawowej metodzie rozszerzenia zakresu liczbowego w pierwszym dziesiątku, przemawiają względy natury psychologicznej, które decydować muszą o sprawie. Fakt ujmowania większych zbiorów zapomocą grupowania mniejszych jest tu całkiem pominięty. Jak widzieliśmy, ten fakt ma za sobą rację natury psychologicznej. Daleko łatwiej trafić może do świadomości początkującego matematyka 7 jako 5+2, niż jako 6+1 i stąd, jeżeli chodzi o punkt wyjścia, wygodniejsze jest to pierwsze, niż drugie postępowanie. Poza pierwszym dziesiątkiem zjawi się nowa podstawowa grupa, ale przedewszystkiem zjawi się nowy zasadniczy moment w myśli matematycznej, który decyduje o przyszłości — moment myślenia, oderwania się od konkretu, a wtedy wielkość zbioru przestaje odgrywać rolę, stanie się stopniowo rzeczą prawie obojętną. W pierwszym dziesiątku tego oderwania się jeszcze niema, bo ten zakres do tego głównie przygotowuje. Stąd takie znaczenie przedstawiania liczb w formie uchwytnej. To jedno. Z drugiej strony, jak powiedzieliśmy wyżej, pierwsza piątka ujęta jako całość może służyć za dobre przygotowanie do podobnego postępowania z dziesiątkiem, a więc do wytworzenia głównej idei tworzenia i pisania liczb ciągu naturalnego, do zrozumienia systemu pozycyjnego. Ciekawem jest, i tu znowu widzimy zgodność pomiędzy obserwacją psychologiczną a wiadomościami z etnografji, że w rachunku plemion pierwotnych pierwsza piątka właśnie wspomnianą rolę bardzo często odgrywa. Np. Pott [1]) przytacza, śród wielu innych, taki przykład nazw liczebników u pewnego plemienia afrykańskiego:

1 enory,
2 kookaba,
3 sisaje,
4 sibakeer,
5 footuk,
6 footuk — enory,
7 footuk — kookaba,
8 footuk — sisaje,
9 footuk — sibakeer,
10 sibankonjem.

Zapewne przyczyną tego zjawiska jest związek pierwotnego rachunku z ręką, dzięki czemu nawet sama nazwa piątki była taka sama, jak ręki; tem niemniej jednakże fakty podobne, jeżeli się zgadzają ze spostrzeżeniami psychologa, wzmacniają nasze przekonanie o ich ważnem dla naturalnego rozwoju myśli ludzkiej znaczeniu.

Tak samo jak indukcja i dedukcja, w nauczaniu splatają się ze sobą dwa inne ważne procesy: analityczny i syntetyczny. Nie jest łatwy proces analityczny w myśleniu rozwiniętem, w zagadnieniach oderwanych, ale synteza jest nieraz o wiele trudniejsza, zupełnie tak samo, jak krytyka pewnych sposobów postępowania jest często łatwiejsza, nawet gdy jest uczciwa, niż samo tworzenie, sama praca krytykowana. W początku nauczania proces analityczny koncentruje się na przedmiotach i zjawiskach obserwowanych, dotyczy danych zmysłowych. Później przechodzimy do wytworów wyobraźni i myśli, do zjawisk wytwórczych. Analiza prowadzi do zróżniczkowania, do elementów, gdy tymczasem, jeżeli chcemy, by proces analityczny posunął się wyżej do wspomnianych zjawisk wytwórczych, musi on być poparty przez syntezę, przez powstanie tych samych zjawisk. Stąd współzależność tych dwóch procesów. Z drugiej strony większa trudność syntezy wymaga ułatwienia, a takie ułatwienie przyjdzie, jeżeli damy nić przewodnią dla syntezy, pewną wewnętrzną jednostajność postępowania. Dlatego tworzenie wszystkich liczb drugiej piątki przez odwołanie się do pierwszej, jako całości, ułatwia proces syntetyczny i tem samem powstanie pojęć liczbowych. W ten

[1]) Cytuję według wskazań Dr J. Eisenstädtera w jego: Elementargedanke und Uebertragungstheorie in der Völkerkunde. Stuttgart. 1912. Stron. 188. Samego Potta dotąd nie udało mi się mieć w ręku wobec wyczerpania książki, która wyszła w r. 1847 p. t.: Die quinale und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Welteile. Halle.

sposób nawet działania należy oprzeć na tej podstawie w zakresie drugiej 5. Te rzeczy Grube w swej monograficznej metodzie przeoczył, wobec czego jego metoda wymaga w tem miejscu, jak i w wielu innych, poważnego uzupełnienia.

Grube za daleko posunął swoją metodę, radząc nawet liczby pierwszej setki traktować, co prawda, prędzej, ale monograficznie. Nawet już w drugim dziesiątku dużo rzeczy się powtarza takich, które znane były i przerobione w pierwszym, a działania wogóle z liczbami dwucyfrowemi wymagają stopniowań, ale opartych na innych zasadach. Wobec łatwo dostrzegalnej jednostajności tworzenia liczb i powtarzania się przy działaniach znanych procesów, monograficzne traktowanie według Grubego jest tu zbyteczne. Co je zastąpi, zobaczymy niżej.

Należy się przytem zastrzec wogóle co do pedanterji w monografji oddzielnej liczby. Uczeń, słysząc często tę samą odpowiedź, odruchowo, nie myśląc, gotów ją dawać; i dlatego należy pytania urozmaicać przez powtarzanie dawnego.

Przy praktycznem wykonaniu metody monograficznej wielką rolę odgrywają zadania konkretne i przykłady liczbowe. Przeciętne podręczniki początkowej arytmetyki są wprost przepełnione całemi drabinkami przykładów liczbowych. To wygląda tak, jakbyśmy doradzali wykonywanie kunsztownych skoków tym ludziom, którzy nie umieją chodzić. Przykład liczbowy jest zakończeniem całego procesu poznawania liczby, a stąd wynika, że powinien zjawiać się po unaocznieniu, po zadaniach na przedmiotach obserwowanych i wogóle zagadnieniach z treścią konkretną. Uczeń, który przerabia przykład liczbowy, musi już mieć gotowe pojęcie liczby, a to przecież jest zadaniem głównem. W jakiż sposób zapomocą przykładów liczbowych samo to pojęcie zdobyć można?

Rzecz jasna, że kwestja tu poruszona dotyka jednego z podstawowych zagadnień metodyki rachunku początkowego, mianowicie — przejścia od konkretu do owej pożądanej abstrakcji. Czytelnik z łatwością zauważył już z poprzednich wywodów, że w wielu miejscach to zagadnienie w książce niniejszej występuje, że przy każdej sposobności staraliśmy się dać bodaj pewien przyczynek, rzucający choć drobne światło na istotę tego zagadnienia. Teraz staje ono przed nami znowu, ale już w formie więcej ryczałtowej, kategorycznej, żądając odpowiedzi.

Dlatego zmuszeni jesteśmy nieco bliżej w tę trudną sprawę wejrzeć, przyczem to, co tu powiemy, nie wyczerpie jeszcze kwestji całkowicie, ale dla nauczania w zakresie pierwszego dziesiątka wystarczy.

Grube i jego naśladowcy nie zwrócili uwagi na wewnętrzny, gruntowny podział każdej monografji oddzielnej liczby. Każda taka monografja dzielić się winna na dwie części: konkretną, w której występuje tylko t. zw. „liczba mianowana" i oderwaną, — w której mamy do czynienia z „liczbą oderwaną." W pierwszej przerabiamy zadania i przykłady konkretne, w drugiej — występują zadania i przykłady z liczbami oderwanemi. Te dwie części wiążą się ze sobą szeregiem przejść stopniowych, które mają bardzo ważne znaczenie. Podać te przejścia, wypełnić lukę pomiędzy „liczbą konkretną" i „oderwaną", jest to dać odpowiedź na powyższe zagadnienie.

Wundt (Völkerpsychologie. T. II, cz. 2-ga, Lipsk 1912, str. 27 — 28) tak pisze o nauce rachunku dziecka współczesnego a pierwotnego człowieka: „Nie byłoby rzeczą odpowiednią przenosić bez zastrzeżeń fazy rozwoju indywidualnego na rozwój rodzaju ludzkiego. Istnieje między niemi zgodność pod tym względem, że pojęcia oderwane powoli rozwijają się z konkretnych wyobrażeń. Sposób natomiast, w jaki to się odbywa, jest zasadniczo różny, co widać z tego, że dziecko bardzo wcześnie przejmuje liczebniki ze swego otoczenia, gdy u człowieka pierwotnego liczebniki powstają dopiero z oddzielnych wyobrażeń konkretnych i ich nazw, przyczem nazwę pewnego przedmiotu, np. „palce strusia", przenoszono na jakiekolwiek inne składające się z 4 elementów przedmioty, a obraz tych palców za każdym razem kojarzono z nowym objektem". (str. 27). „W pierwszym przypadku proces polega na wykluczaniu zmiennych, konkretnych wyobrażeń rzeczy z ich związku z liczebnikiem, w drugim na przenoszeniu danego wyobrażenia konkretnego na inne przedmioty i kojarzeniu z niemi". (str. 28). Zapewne różnica tu jest; ale w jaki sposób dziecko może porównywać dwa zbiory ze sobą, które przekraczają siłę jego spostrzegania dokładnego i wyobrażania? Tylko w taki sposób, jak to robił człowiek pierwotny. Porównywanie takie zaś jest konieczne, gdy chcemy owo „wykluczanie" wykonać i nie zależy wcale od tego, czy mamy nazwę, liczebnik, czy też nie. Właśnie dzięki takiemu porównaniu nastąpić może eliminacja. W każdym razie proces odwzorowania wskazuje, że nawet nie znając liczby w sensie Grubego, możemy wytwarzać zbiór o tej samej, co dany, zawartości, a to znowu podkopuje jego pojęcie o liczbie początkowej ciągu naturalnego jako o oddzielnym fakcie. Możnaby na to wszystko odpowiedzieć, że proste przeliczenie każdego zbioru wystarczy do przekonania się, że odpowiada mu ten sam liczebnik, poczem następuje wspomniany powyżej przez Wundta proces wytwarzania się pojęcia liczby. Zapewne stanowisko zasady liczenia jest najmocniejsze, to też na tem stanowisku stała i stoi największa liczba metodystów. Lecz proces liczenia wobec nazywania kolejnych liczebników jest zjawiskiem wtórnem: opiera się on na procesie odwzorowania, a ciąg naturalny jest tylko ostatnim szczeblem w rozwoju t. zw. aparatów odwzorowujących. Czy dobrze jest odrazu korzystać z liczebnika i pominąć proces odwzorowania? Pomijając już wielce w dzisiejszej pedagogice rozpowszechnioną t. zw. zasadę biogenetyczną, należy tu przedewszystkiem zanotować, iż wobec zaznaczonego powyżej faktu rozwijania się ciągu naturalnego dzięki tworzeniu wyższych jedności, powstawaniu grup, zasada liczenia nie może mieć wyjątkowego i jedynego stanowiska. System dziesiętny, dzięki któremu powstała i rozwinęła się arytmetyka, nie opiera się na zasadzie liczenia i jest zjawiskiem sui generis, faktem odrębnym. Pomimo to liczenie znaczenie i wartość swą ma i mieć musi. Mieć musi dlatego, że są własności liczb niezależne od żadnego systemu, np. prawa rozdzielności, przemienności i łączności, twierdzenie o własnościach działań wogóle z sumami i różnicami i t. p.

Według zdania Grubego (a tem bardziej wszystkich jego mniej lub więcej gorących zwolenników), monografja każdej liczby ostatecznie doprowadza do jej pojęcia. Bardzo jest trudne pytanie o przejściu od wyobrażenia do pojęcia, od konkretnych zbiorów do symbolu zawartości, i przytem nie tylko trudne i skomplikowane, ale wprost czasem nieuchwytne. W praktyce nauczania początkowego bardzo często się zdarza, że po dość krótkiej monografji na przykładach konkretnych przechodzi się do przykładów oderwanych i uczący ma to przekonanie, że pojęcie danej liczby jest już gotowe. Jakie są po temu kryterja? Prócz niejasnego nieraz poczucia możliwości, najczęściej w praktyce nauczania przeciętnego żadnych kryterjów ścisłych niema. To, że uczeń odpowiada na pytania, często nie może być sprawdzianem dostatecznym. Przeciętny uczeń odpowiada na pytania takie, na które odpowiedział już jego kolega albo nauczyciel. Bardzo trudno jest wyeliminować element pamięciowy, który z drugiej strony popiera przeważnie cała praktyka przeciętnego nauczania. Z pojęciem liczby dzieje się to samo, co z samodzielnością ucznia, która jest u wielu na ustach, a tak rzadko spotyka się w rzeczywistości. Tu, jak tam, brak kryterjów do odpowiednich wniosków, brak znajomości mechanizmu duchowego, jakby powiedział Pestalozzi. Dlaczego, dalej, przerobienie z daną liczbą wszystkich operacyj, które wskazuje Grube, ma wystarczać do wytworzenia jej pojęcia? Właściwie operacyj z daną liczbą jest nieskończenie wiele. Weźmy np. 7. Kiedy mamy pojęcie siedmiu, czy wtedy, gdy wykonamy wszelkie rozkłady 7 na elementy, czy gdy dowiemy się, że jest to liczba pierwsza, że taką a taką ma cechę podzielności, że dostajemy pełny cykl przy zamianie ułamków zwyczajnych, o mianowniku 7 na dziesiętne, że siedmiokątów foremnych jest 3, że równanie 7-go stopnia nie da się rozwiązać ogólnie i t. p., i t. p. Kiedy mamy pojęcie 7? Przypuśćmy, że pewna określona zupełnie liczba działań dobrze wykonywanych wystarczy, aby to pojęcie praktycznie, t. j. do stosowania rachunku zwykłego w zadaniach wytworzyć: w takim razie powstaje kwestja, jaka to ma być liczba działań i czy nie zależy ona od właściwości indywidualnych ucznia. Wszystkie granice są tu niepewne, a w takim razie, czy wiemy, co może nam dać w tej dziedzinie monografja? Że tu musi chodzić o coś innego, niż o zwyczajne oderwanie nazwy od treści konkretnych zbiorów, o tem przekonywa nas nieskończoność ciągu naturalnego. W dalszych jego dziedzinach obracamy się swobodnie nie na zasadzie monograficznego poznania poszczególnych liczb, lecz na zasadzie uświadomionych sposobów tworzenia tego ciągu, t. j. właściwości systemu dziesiętnego liczenia, jak to słusznie zaznacza D-r Wilk we wspomnianych pracach. To samo prawo tworzenia, jak zaznaczyliśmy, istnieje już w pierwszym dziesiątku i uchwycenie jego stanowi kapitalny moment w powstawaniu pojęcia liczby. Pojęcia nie tworzą się, gdy nie są potrzebne. Gdybyśmy, jak mówi Galileusz, posiadali boską świadomość, moglibyśmy w dowolnie wielkim zbiorze konkretnym odróżniać poszczególne przedmioty, świat przedstawiałby się nam naprawdę pluralistycznie. My tej świadomości nie posiadamy, a gdybyśmy nawet ją posiadali, wyraz może byłby nam potrzebny ze względów społecznych, a może nawet dla nas samych. Byłby może potrzebny wyraz, nazwa, ale nie byłoby potrzebne pojęcie liczby. Boska świadomość ma też nieskończoną pamięć, nie robiłaby jej trudności nieskończona liczba nazw, a więc niepotrzebne byłyby dla niej zarówno tworzenie liczb przez grupowanie, jak system liczenia i wszelkie prawa działań. Boska świadomość nie mogłaby się zajmować geometrją, jak sądził Plato. Geometrja, jak i arytmetyka jest systemem pojęciowym, odrębnym światem idei, w którym potrzebne jest prawo tworzenia, jakby powiedział Wroński. To „prawo tworzenia" wyrasta z potrzeby praktycznej, najpierw elementarnej, później coraz więcej złożonej.

W ostatnich czasach podniesiono sprawę badań eksperymentalnych nad rozwojem pojęć liczbowych u dzieci. Wykonano już cały szereg doświadczeń, ale z tych doświadczeń, jak dotąd, pożytku dla nauczania, jak również dla poznania tej sprawy bardzo mało. Przyczem nieudolność eksperymentu leży nie w samej myśli eksperymentalnego badania, która w zasadzie jest słuszna, raczej w niewiadomości, tego, co chcemy przez eksperyment sprawdzić, o czem właściwie się przekonać. Jeżeli ktoś robi doświadczenie nad momentalnem odczytywaniem liczby ze zbiorów punktów odpowiednio ukształtowanych, może tylko wnioskować o tem, że ze zbioru takiego lub innego kształtu dzieci, które już znają liczby początkowe, najprędzej te liczby odczytują i... nic więcej. O genezie pojęć liczbowych nie może tu być mowy. W badaniu eksperymentalnem, ważna jest hipoteza, którą sprawdzić lub obalić chcemy, ważną jest interpretacja otrzymanych danych cyfrowych przy metodzie ankietowej. Zarówno jedna, jak druga postulują już pewne określone pojęcia o rozwoju liczby; a stąd często dany eksperyment lub zespół danych cyfrowych może być dowolnie interpretowany. W jednym z zeszytów poważnego czasopisma niemieckiego: Zeitschrift für pädagogische Psychologie und experimentelle Pädagogik (Zesz. 1), pewien autor [1]) zajmuje się sprawą wyeliminowania tych zasadniczych elementów myśli, które się dają wyprowadzić z faktu istnienia ciągu naturalnego i następnie proponuje każdy z tych elementów poddać eksperymentalnemu badaniu.

Autor znajduje następujące własności: 1° Reihenform, 2° Ordnungsbedeutung, 3° Zusammenfassen mehrerer Glieder, 4° gegenseitige Beziehung des „grösser und kleiner" zweier Zahlen i 5° jedes folgende Glied der Zahlenreihe ist um eins grösser als das vorausgehende. [2]) Każda z tych własności poddana ma być specjalnemu badaniu doświadczalnemu, z dziećmi zupełnie nie umiejącemi rachować, aby stąd wywnioskować, jak się ona rozwija. To samo stosuje się do działań. Już pierwszy rzut oka wystarczy, aby powiedzieć, że ten powierzchowny czysto opis własności może nie doprowadzić do celu chociażby dlatego, że te własności mogą być od siebie zależne lub odgrywać rolę podrzędną, a wtedy wnioski z doświadczenia nie będą miały wartości. W każdym razie jest to pewien postęp w porównaniu z metodami Lay'a, Walsemanna, Nanu i t. p. Należy najpierw wysegregować na drodze logicznej, na podstawie innych badań elementy niezależne od siebie, przekonać się o ich istotnej wartości, a potem umiejętnie eksperymentować nad tem, jak się mogą rozwijać w umyśle dziecka. Z tego pierwszego stanowiska metoda Grubego nie wytrzymuje kry-

---

[1]) G. Deuchler. Psychologische Vorfragen des ersten Rechenunterrichts.

[2]) Wiedza nasza jest dotąd pod względem znajomości tajników procesu abstrahowania niewielka, w praktyce nauczania jednakże musimy posuwać się drogą celowego postępowania. Dla tego potrzebne są bodaj ogólne wskazówki.

tyki, czy wytrzyma ze stanowiska psychologji dziecka, można wątpić, ale trzeba się o tem przekonać. Idźmy jednakże dalej.

Jeżeli przypominam sobie jakiś dobrze mi znany przedmiot, np. piec w moim pokoju, to mimowoli powstają przy dłuższem skupieniu uwagi w mojej świadomości szeregi wspomnień, dotyczących tego pieca, t. j. szeregi poprzednio otrzymanych wrażeń. Te wrażenia były otrzymywane w różnych okolicznościach: przy innem położeniu mem względem pieca, przy innem oświetleniu, wobec innego ogólnego nastroju psychicznego i t. p. Każde z tych wrażeń posiada z innemi cechy wspólne i różne. Tłoczą się one w mojej świadomości jako wspomnienia i dzięki temu, że posiadają różnice, coraz bardziej zaczynają wyłaniać się ich podobieństwa. Różnice wzajemnie się znoszą, zaciemniają i w ten sposób całość wspomnienia składać się zaczyna z dwóch części: 1° z cech podobnych, zawsze identycznych we wszystkich wspomnieniach i 2° z cech różnych. Moje wspomnienie pieca da się tedy przedstawić symbolicznie jako zespół: $P + R$, gdzie P symbolizuje cechy podobne, a R — różne.

Nietrudno zrozumieć, że im większa jest rozmaitość wrażeń otrzymanych przeze mnie, a wywołanych przez piec w danych warunkach, tem więcej zmniejsza się zakres cech podobnych, zmniejsza się P, a wzrasta R.

To samo, co dotyczy każdego oddzielnego przedmiotu, rozpatrywanego z różnych stanowisk, może być przeniesione na k a ż d y s z e r e g j e d n o r o d n y c h p r z e d m i o t ó w. Jeżeli słowo: „piec" symbolizuje wszystkie przeze mnie widziane piece, to moje o nich wspomnienie da się również przedstawić jako zespół dwóch części: $P + R$, gdzie w P będą zawarte wszystkie cechy podobne tych pieców (np. istnienie otworu do wkładania paliwa, podłużna forma i t. p.), a w R — cechy różne (np. kształt okrągły lub prostopadłościenny, kolor kafli lub blachy żelaznej i t. d.). Gdy skupimy naszą uwagę na wspomnieniu pieca, w świadomości naszej narazie niejasne i zespolone zjawisko psychiczne dzielić się zaczyna i rozpadać na wspomnienia oddzielnych pieców lub fantastyczne ich obrazy.

Powyższe schematyczne przedstawienie rozpatrywanego zjawiska, przedstawienie dość grube, gdyż samo zjawisko jest bardzo skomplikowane, ma jednakże wartość dla nas i może pomóc przy przejściach od t. zw. „liczby konkretnej" do „oderwanej." Rzecz jasna, że nastąpić tu muszą pewne modyfikacje, zależne od natury samej rzeczy.

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z monografją 7.

Wychodząc z podstawowego działania $5 + 2 = 7$, przedstawiamy 7 na przyrządzie, ilustrujemy tę liczbę zapomocą palców i różnych przedmiotów, znajdujących się w klasie albo bezpośrednio obserwowanych, niezależnie od tego, czy to będą przedmioty widziane, słyszane, dotykane lub też ruchy członków naszego organizmu. Mamy tu zawsze przed sobą odpowiednio ugrupowany zespół konkretnych rzeczy w rodzaju: 5 kulek i 2 kulki wynosi 7 kulek. Z jakich elementów składa się cały ten zespół? Przedewszystkiem z konkretu w postaci kulki, potem słów „pięć," „dwie" i „siedem," dalej łączników: „i" albo „a," „razem" oraz „wynosi" lub „jest" i nakoniec towarzyszącego zawsze temu wszystkiemu procesu szybkiego przeliczania, w danym razie, jeżeli opieramy się na piątce jako całości, zaczynającego się od dołączania kolejnych 2 jedności. W szeregu różnych przykładów o tej samej treści liczbowej zmienia się konkret, zmienić się mogą w pewnych granicach łączniki, zmienia się końcówka wyrazu „dwie" (może być „dwa"), ale reszta pozostaje bez zmiany. W ten sposób po przerobieniu całego szeregu przykładów z przedmiotami, znajdującemi się w klasie, wytwarza się wspomniany zespół: P + R, w którym w P pozostają liczebniki, nadmieniony proces liczenia oraz cecha istotna dodawania, jako pewnego łączenia dwóch zbiorów. Pozostaje jeszcze jedna ważna rzecz, którą możnaby wyrazić w postaci sądu: dla wszystkich przedmiotów pokazywanych w klasie istnieje zależność, że 5 tych przedmiotów i 2 takie same przedmioty stanowią 7 tych przedmiotów.

W dalszym ciągu przechodzimy do konkretów, znanych dzieciom z doświadczenia, ale nie znajdujących się w klasie. Przytem sąd powyższy przedstawia się tak: dla wszystkich przedmiotów znanych nam istnieje zależność, że 5 takich przedmiotów i t. d.

Następnie nauczyciel przerabia przykłady, w których wchodzą przedmioty nieznane dzieciom z doświadczenia, lecz z opowiadania, obrazka i t. p. Tutaj sąd przekształca się na całkiem ogólny: dla wszystkich przedmiotów istnieje zależność i t. d.

Teraz można przerobić kilka takich przykładów, w których mowa o przedmiotach dowolnych, np. w jednym sklepie kupiono 5 przedmiotów potrzebnych do pisania, a w drugim 2 jakieś inne przedmioty; ile razem przedmiotów kupiono? Tutaj używamy już przedmiotów niejednorodnych. Rzecz jasna, że nauczyciel może zacząć od przykładów, gdzie wchodzą najpierw przedmioty otoczenia.

Po szeregu tych ćwiczeń stopniowych można wprowadzić już liczbę oderwaną; znajdzie ona wtedy należyty grunt pod sobą.

Dla każdego nauczyciela matematyki jest jasnem, że przygotowane w ten sposób pojęcie liczby jest dopiero czemś początkowem, że to pojęcie kształci się przez cały szereg lat nauki zarówno w szkole elementarnej, jak średniej, że pojęcie liczby całkowitej dojrzewa dopiero (a przynajmniej powinno dojrzeć) w 4-ym roku nauczania, gdzie można i nawet pożądanem jest wprowadzenie ogólnego symbolu literowego na oznaczenie dowolnej liczby całkowitej.

Nauczanie, jak to wszyscy wiemy, nie jest bezładną pracą. Na każdym kroku musi tu panować porządek i celowość, w każdem postępowaniu winno też zawierać się przewidywanie, co z niego wyniknie i myśl o tem, co będzie potrzebne później. Z drugiej strony przyswajanie sobie nowego materjału naukowego przez ucznia czyli, jak to często nazywają, proces apercepcji jest zjawiskiem złożonem, w którem rządzą pewne prawa psychologiczne, a więc wymagającem od uczącego przystosowania się do tych praw według starej zasady Bacona: naturam natura vincere (przezwyciężać przyrodę znajomością jej). W popularnem nauczaniu posługujemy się mglistemi pojęciami, jak „dobrze wytłumaczyć", „często powtarzać", „jasno wykładać" i t. p.

Mglistość tych pojęć pochodzi stąd, że nie możemy sobie zdać sprawy rozumowo, na czem polega jasny wykład, dobre wytłumaczenie i t. p. Z tego wynika, że, pragnąc świadomie kierować swojem postępowaniem w nauczaniu, trzeba sobie dokładniej odpowiedzieć na pytania powyższe. Nie jest to rzecz łatwa, ale bez pokonywania trudności niczego zrobić nie można i jakkolwiek bardzo niedokładnie rozumiemy jeszcze proces poznawania ludzkiego, trzeba chociaż w przybliżeniu, chociaż zgruba narysować drogę, na której nauczyciel najmniej omyłek zrobić może i która go pewniej do celu doprowadzi. Przy tem wszystkiem mocno komplikuje sprawę ta okoliczność, że każdy przedmiot nauczania, każda klasa, każde warunki odmienne wymagają liczenia się ze sobą, aby nauczanie było dobrem. Wobec tego ogólne wskazówki metodyczne muszą być zawsze przystosowane do tych zmiennych okoliczności, bez czego najlepsze z nich mogą się stać nieraz przeszkodą i nie dawać pożądanych rezultatów.

W związku z zagadnieniem należytego uporządkowania nauczania powstała myśl t. zw. stopni formalnych przy nauczaniu. Niezależnie od treści tej nauki, którą podajemy, możemy to podawanie w ten lub inny sposób zrobić, tak lub inaczej uporządkować. Doświadczenie, nawet przeciętne, uczy, że rezultat, czas nauczania w dużej mierze zależy od tego, jak to nauczanie było prowadzone, jakie stopniowania były zastosowane przy wprowadzaniu nowego materjału, jak go wiązano z poprzednim, w jaki sposób go utrwalano i t. p.

Sprawa ta nie należy u nas do popularnych, kierujemy się tak często przy nauczaniu zwyczajem, wspomnieniem swoich lat szkolnych i intuicją. Intuicja nie zawodzi ludzi talentu, ale przeciętnemu nauczycielowi nie jest tak pomocną i dlatego dobrze jest jaśniej o tych rzeczach pomyśleć, trochę głębiej, niż zwykle, nad niemi się zastanowić.

Głośny w Niemczech dydaktyk Ziller, rozwijając teorję Herbarta, przyjmuje w podstawie formalnego procesu nauczania 5 głównych stopni: 1° przygotowanie do ujęcia przedmiotu, 2° przedstawienie tego przedmiotu, 3° porównanie z innemi pokrewnemi przedmiotami, 4° uogólnienie związane z tem porównaniem i 5° zastosowanie otrzymanej wiedzy.

Dla ilustracji tego sposobu wykładu przytoczymy przykład.

Przypuśćmy, że chcemy dać dzieciom pojęcie o zamku starożytnym. Najpierw w kilku słowach charakteryzujemy potrzebę wznoszenia specjalnych budowli w dawnych czasach ze względu na konieczność obrony, jak również z powodów natury społecznej: istnienia nielicznej grupy wielkich posiadaczy ziemskich i poddanych, a stąd silnie zaznaczającej się różnicy stanu i różnych warunków życia. Dalej pokazujemy uczniom (co może być zrobione na wycieczce, gdzie odbywa się początek całej pogadanki) ruiny zamku lub zamek w całości, o ile jest to wogóle możliwe, przyczem nauczyciel objaśnia każdy szczegół zachowany, uzupełnia słowami braki. Po powrocie pokazuje w klasie cały szereg obrazków lub tablic, przedstawiających różne zamki w różnych miejscach, wskazuje na zasadnicze podobieństwa i różnice. Gdy to zostało zrobione, systematyzuje otrzymaną wiedzę, wyznaczając główne charakterystyczne cechy zamku dawnego, czyli stara się, aby u uczniów wytworzyło się p o j ę c i e tego rodzaju budowli. Następnie przedstawia na przechadzce lub na obrazku inne podobne budowle i wypytuje uczniów, czem się różnią od zamku oraz jakie cechy mają wspólne. Z tego oczywiście może wyniknąć zapytanie, dlaczego te lub inne cechy przechowały sie albo zniknęły, a więc — głębsze wejrzenie w stosunki życia, głębsze pouczenie.

Niewątpliwie przedstawiony krótki obraz zastosowania wspomnianych stopni formalnych ma swoje bardzo ważne i dobre strony: daje nam niezależną od treści przedmiotu metodę postępowania, która porządkuje i robi celową pracę nauczyciela. W całej budowie stopni formalnych niema omyłki, są one naturalnem odbiciem zwykłego procesu myślenia, a pomimo to posiadają wadę bardzo ważną, która nieraz może zadecydować o tem lub innem ich zastosowaniu. Tą wadą jest punkt wyjścia. Herbart, a za nim Ziller oraz bardzo wielu dydaktyków niemieckich posługują się ważnem dla zrozumienia ich teorji stopni formalnych pojęciem a p e r c e p c j i, rozumając przez to, po prostu, proces zasymilowania, przyswojenia nowego materjału naukowego przez umysł człowieka. Znanym jest fakt, że wyobrażenie lub pojęcie całkiem obce umysłowości danej jednostki nie może być należycie przyswojone. Np. przypuśćmy, że chcemy małym dzieciom przedstawić teorję określania podstawowych pojęć matematycznych. Tylu jest ludzi starszych, którzy tego nie rozumieją, których myśl biegnie zupełnie innemi drogami, a stąd ta rzecz nawet dla nich wymagałaby dłuższego przygotowania. Podawanie takich niestrawnych, obcych rzeczy jest wielkim błędem dydaktycznym. Zasada ciągłości wymaga, by nowy materjał miał w umyśle dziecka przedtem przygotowany grunt w postaci znanych już poprzednio wyobrażeń i pojęć. Asymilacja czyli apercepowanie nowego materjału właśnie polega na tem, by te pokrewne wyobrażenia i pojęcia, które już są w umyśle, pobudzić, wywołać i następnie dzięki temu ich pokrewieństwu połączyć z niemi nowy materjał. Otóż pierwszy stopień wspomnianego szeregu ma na celu głównie wywołanie pokrewnych danemu przedmiotowi wyobrażeń i pojęć. W sposobie tego wywołania tkwi główna wada powyższych stopni formalnych. Poznawanie nie jest procesem sztucznym, nie można go „zrobić" bez żywego udziału samej jednostki poznającej. Jeżeli ta jednostka bierze żywy udział w pracy poznawczej, jeżeli uczuciowo jest zainteresowana przedmiotem, jeżeli w jej świadomości jasno staje omawiane zagadnienie, i pociąga ku sobie żywą pracę myśli, wtedy mamy najlepszy, bo istotnie właściwy grunt poznawczy, jak tego wymaga zasada samodzielności. Zagadnienie, sztucznie postawione i nawet z całą precyzją formalną wykonywane, jest zagadnieniem tak czy owak obcem, robionem: w rozwiązywaniu jego głównym pracownikiem jest nauczyciel, nie uczeń, a stąd nie ma ono dla umysłu ucznia istotnej wartości, nie rozwija dostatecznie jego umysłu.

Linja biegu poznawania nie jest tak prosta, jak to przedstawiają stopnie formalne. Nieraz myśl się cofa, zbacza na chwilę z drogi: stawiamy różne hipotezy i odrzucamy je wielokrotnie, zanim dojdziemy do właściwej odpowiedzi. Rzecz ta przedstawia się bardzo jasno szczególniej w arytmetyce. Nadmieniliśmy już wyżej, że omyłka, wniosek pochopny uczy, że nie należy karcić zbytnio mylenia się, aby móc wyciągnąć z niego naukę. Dawna dydaktyka mnemotechniczna podawała odrazu bez osłonek prawdę do nauczenia się; stopnie formalne ubierają to podawanie w szaty żywiej pobudzające myśl ucznia, zgodniejsze z zasadami dydaktyki, ale jeszcze wadliwe, jeszcze zbyt wielką rolę przypisujące „uczeniu", zamiast „uczeniu się".

Jedną z ważnych wad stopni formalnych w nauce rachunków, jak również w innych przedmiotach, jest odsunięcie t. zw. zastosowania na sam koniec. Już mówiliśmy poprzednio, że w myśleniu postawienie hipotezy wymaga jej zastosowania. Ta hipoteza może być mylna, a stąd trzeba ją zmienić i znowu próbować. Gdybyśmy byli w tem szczęśliwem położeniu, że zawsze myśl nasza zdoła wyrobić właściwą hipotezę, rzecz byłaby jasna i stopnie formalne miałyby bezwzględną rację bytu, ale tak nie jest i stąd moment zastosowania jest o wiele ważniejszą rzeczą, niż się wydaje twórcom stopni formalnych. Zastosowanie pobudza zainteresowanie, które u dzieci mogą budzić właśnie tylko rzeczy, nie idee; tylko na tle tych rzeczy może powstać poczucie wartości idei, przez przeniesienie na idee uczuciowego pierwiastku związanego z rzeczami, przez zrozumienie ich znaczenia faktycznego.

Są rzeczy, których bez zastosowania nauczyć się nie można. A takie rzeczy coraz częściej występują w polu jasnej świadomości spółczesnego człowieka, zwłaszcza odkąd coraz wyraźniejszą się staje rola, którą w poznaniu odgrywa doświadczenie. Nie jest tu mojem zadaniem wdawać się w dalszą krytykę stopni formalnych Zillera, zaznaczę tylko jedno, że w rachunku początkowym uczymy się, stosując i stosujemy, ucząc się. Przez zastosowanie samodzielne urabiają się nasze pojęcia. W zasadniczym procesie poznania liczby, w tworzeniu się pojęcia o niej, zastosowanie odgrywa taką samą rolę, jak własnoręczna gra na fortepianie dla tego, kto mając poczucie muzykalne, tej gry rzeczywiście nauczyć się pragnie.

Zastosowanie przejawia się w zadaniach konkretnych. Zadania te winny brać pod uwagę stosunki realne otaczającego życia. W ten sposób dają one mocne tym stosunkom oświetlenie, poruszają sferę naturalnych zainteresowań dziecka, budzą jego myśl i zdolność obserwacyjną. „Więc powiadasz pan, że nad morzem muszą być inne zadania, a w górach znowu inne?" — zarzuci mi zwolennik uniwersalnej nauki rachunku. — Ależ tak — odpowiem, napewno tak na każdym stopniu elementarnego nauczania, a tem bardziej na pierwszym. Tam, gdzie linje życia się schodzą, tam i zadania będą te same; a przytem w tej materji tak samo istnieć winno stopniowanie: rozszerza się horyzont myśli ucznia, rozszerza się również zakres zagadnień. Ale najpierw zacznijmy od tego, co go otacza. Czy nauka co straci na tem? Nie tylko nie straci, ale wygra, bo się na trwalszych oprze podstawach, przez zmysły niejako wejdzie do wnętrza. Cześć mam wielką dla wielkiej nauki matematycznej, ale może dlatego właśnie widzę jej znaczenie, budzące duchowo i praktycznie na każdym kroku życia. Przypomina mi się nieraz obraz zapalonego przyrodnika-nauczyciela, który w pierwocinach swej praktyki rad byłby bodaj w 3-ej klasie rozwijać teorję ewolucyjną i dziwy pochodzenia gatunków. Teraz on wie, że taki deser byłby czczy bez pożywniejszego obiadu faktów konkretnych.

Dobrze jest, gdy nauczyciel, znając wspomniane stosunki realne, sypać może zadaniami jakby z kieszeni, ale nie łatwo tego wymagać. Stąd potrzeba dobrych zbiorków dla nauczyciela, póki uczeń czytać nie umie, a później również dla ucznia. Oczywiście, jest jeszcze lepiej, jeżeli zadanie wyrasta wprost z potrzeb życia dziecięcego, jeżeli jest oddźwiękiem nie tylko realnych zagadnień, ale i wyrazem głębszego, wewnętrznego zainteresowania. Trudno w ten sposób uczyć w szkole dzisiejszej, ale któż to lepiej powinien rozumieć, niż przewodnik młodzieży, niż pedagog, w którego rękach umysł młody i wiara młoda, świeże siły życia, najcenniejszy żywy skarb narodu.

Pomimo zarzutów, uczynionych przez nas powyżej stopniom formalnym Herbarta, mogą one mieć i mają niezaprzeczoną wartość przy nauczaniu. Tę właśnie ich stronę podnosi we wspomnianej powyżej cennej książce Dewey. Jeśli sam proces nauczania nie może być tak często w zgodzie ze stopniami formalnemi, to natomiast dają one wskazówkę wielkiego znaczenia dla nauczyciela przy przygotowaniu się do prowadzenia lekcji. Każdy materjał, który nauczyciel ma zamiar przedstawić dzieciom, powinien być opracowany przez niego zgodnie z wymaganiami, postawionemi w stopniach formalnych. Nauczyciel ma wtedy gotowy, przetrawiony i powiązany materjał, co wykład jego uczyni przystępnym i więcej wartościowym. Niema wątpliwości, że przeciętny wykład w naszych szkołach jest o wiele gorszym od wymaganego przez stopnie formalne. Dlatego mogą one stanowić nawet w zastosowaniu do praktyki nauczania w wielu razach postęp w porównaniu z zupełnym brakiem świadomej metody. Dzisiejsze nasze wykłady posiadają wszystkie te wady, które mają stopnie formalne, ale prócz tego wiele innych,—jak brak celowości i porządku, jak nieumiejętny rozkład materjału nauczania, jak brak częsty w procesie myślowym pewnego ogniwa koniecznego i t. p. Zapewne, nieumiejętne i przesadne stosowanie stopni formalnych może zepsuć wykład i pozbawić go żywości i zainteresowania, ale tam, gdzie używamy tych stopni umiejętnie, ekonomizują one znacznie pracę nauczyciela i dają lepsze wyniki.

Niektórzy niemieccy metodycy dla zastosowania stopni dzielą cały kurs na t. zw. jednostki metodyczne. Każda taka jednostka posiada to minimum zamknięte materjału nowego, które należy podać dzieciom odrazu. W ten sposób cały kurs dzieli się na wielką liczbę oddzielnych cząsteczek, powstaje zawiła koronkowa robota, przeciw której słusznie protestował u nas jeszcze Estkowski. Pedanterja jest prawie zawsze rzeczą niedobrą, a w naszym przypadku może być nawet szkodliwą.

Pozostaje nam jeszcze z tych kwestyj głównych, które w tym rozdziale omówić zamierzyliśmy, zagadnienie traktowania liczb drugiego dziesiątka. Występują tu tak ważne charakterystyczne cechy, że opuszczenie ich byłoby nieracjonalne. Te rzeczy teraz zamierzamy poruszyć.

Pierwszą zasadniczą cechą, odróżniającą dziesiątek drugi od pierwszego, jest wystąpienie nowej jednostki — dziesiątka. Z tym faktem liczyć się tu trzeba przy wykonywaniu wszelkich działań, prowadzących do liczb 2-go dziesiątka, a z drugiej strony jest on jeszcze z innego względu tak ważny, że gruntowne jego przyswojenie przez uczniów jest niezbędne. Weźmy najpierw jakikolwiek przykład. Dajmy na to, mamy wykonać dodawanie: 6 + 7. Dodawanie takie składa się z następujących momentów: 1-o skonstatowania liczby potrzebnej do tego, by dopełnić 6 do dziesiątka; 2-o rozłożenia 7 na dwa składniki: 4 i 3; 3-o dodania 4 do 6 i 3 do 10. Stąd widoczne jest przedewszystkiem, że do szybkiego wykonania tych działań w pamięci konieczne jest gruntowne władanie działaniami w zakresie pierwszego dziesiątka, t. j. konieczne jest tutaj szybkie dodawanie grupami jedności bez pośrednictwa liczenia, które było potrzebne i ważne w dziesiątku pierwszym. Obecnie liczenie byłoby tylko przeszkodą, skutkiem większych liczb. Wyseparowanie dziesiątka jest celowe również z tego powodu, że poglądowe przedstawienie liczb jest już utrudnione dla przyczyny wspomnianej. Na przyrządzie jednym i drugim z nadmienionych można z łatwością działania uzmysłowić, idąc w kolei wskazanej powyżej. Więc najpierw układamy 6 krążków (lub kulek), potem uzupełniamy do 10 innym kolorem. Uczniowie widzą, ile brakuje do 7. Znów uzupełniamy liczbę krążków w tym samym kolorze i nakoniec cały dziesiątek układamy jednym kolorem. Wogóle na przyrządzie należy się starać dla podkreślenia znaczenia dziesiątka układać go w odmiennym kolorze, niż dołączone jednostki. Poprzednio przez nas podkreślone wyseparowanie pierwszej 5, jako całości odrębnej, jest przygotowaniem do wyseparowania 10.

Uzmysłowienie liczby jest tu trudniejsze i dla nauczyciela, i dla ujęcia dzieci, a dlatego traci już na wartości. Cóż jest w stanie zastąpić je częściowo? Pytanie to bardzo ważne z tego powodu, że w nauczaniu trzeba zdać sobie wyraźnie sprawę w tej materji. Otóż uzmysłowienie liczby zastępuje tutaj moment logiczny, inaczej, rozumowanie. Bo czyż nie jest rozumowaniem przerobienie świadome w myśli wskazanych trzech momentów przy wspomnianem dodawaniu? Widzimy tutaj, że pierwszy dziesiątek, w którym zbieraliśmy jakby podstawowy materjał faktyczny, musi mieć inną metodę nauczania i jakkolwiek tam również każda monografja liczby drugiej piątki już się opiera na znanych poprzednio działaniach, do pomocy jednakże powołujemy uzmysłowienie, na niem więcej się opieramy i możemy oprzeć, niż teraz. Im większa liczba, tem wyraźniej występuje rozumowanie. Rzecz ważna, aby to istotnie było świadome rozumowanie. A czegóż do tego potrzeba? Prócz szybkiego wykonywania działań, koniecznej wprawy w dopełnianiu i rozkładaniu liczb, potrzebna jest jeszcze znajomość szeregu faktów w rodzaju: rezultat dodawania nie zależy od porządku dodawanych składników. Bo czy tak nie jest? Dopełniamy 6 do 10 przez dodanie 4, a następnie dodajemy 3. Stąd wynika, że zamiast dodać 7 odrazu, dodajemy składniki 7 i przytem tak, jak nam jest wygodniej. Pytam się, czy ten fakt nie powinien być świadomie przez ucznia wykonany? Według mego przekonania, tak; inaczej bowiem będziemy już na początku mieli sztuczki metodyczne zamiast świadomego rachunku. Ciekawe jest, że metodycy niemieccy, którzy tak lubią powoływać się na znane zdanie Hentschela: „uczeń powinien myśląc rachować i rachując myśleć", nie zwracają na to większej uwagi. Przyczyna znajduje się w tem, że metodycy w nauczaniu wszędzie widzą psychologję, nawet tam, gdzie potrzebna jest przedewszystkiem logika. Trudno mi to bliżej tutaj wyjaśniać, a przytem czytelnik zrozumie znaczenie rzeczy bez tych rozważań o przyczynach. Jestem więc zdania, że dlatego, aby w drugim dziesiątku dodawanie wykonywane było ze świadomością, należy fakty: 1-o dodawania i odejmowania kolejnego składników zamiast całej ich sumy, 2-o niezależności sumy od porządku składników, jeszcze w pierwszym dziesiątku na zadaniach konkretnych, przykładach konkretnych i liczbowych podkreślać i wyjaśniać. Fakty te nie są same przez się zrozumiałe. Wszak dla dziecka początkującego nie jest wszystko jedno: 4+3 czy 3+4. Fakt ten nazywa się w arytmetyce teoretycznej prawem przemienności owem, a dodawanie składników zamiast odrazu ich sumy figuruje często jako jedno z twierdzeń. Te same uwagi stosować należy i do odejmowania. W tym przypadku powołujemy się na tę własność odejmowania sumy, że można po kolei odejmować składniki, co też przy nauce pierwszego dziesiątka musi być przez uczącego odpowiednio zaznaczone.

Zjawisko tu przez nas podkreślone ma niezmiernie doniosłe znaczenie dla nauczania. Wszak każdy z czytelników wie, że w matematyce ścisłość rozumowania odgrywa najważniejszą rolę, że ten pierwiastek stanowi w każdej nauce zasadniczy moment. Z drugiej strony jasno zdajemy sobie sprawę, iż dziecko nie potrafi odrazu rozumować ściślew z naczeniu naukowem, a więc nauczyciel powinien tego uczyć! Jest to sprawa długa bardzo i kończąca się dopiero w szkole wyższej, ale jej istotne początki tkwią w elementarnej. Nauczyciel tej szkoły kładzie fundamenty, pierwsze podstawy myśli ucznia, ma pozornie skromną, ale bez wątpienia zasadniczo ważną pracę do wykonania. Złe początki tylko w wyjątkowych razach dadzą się poprawić, a większość ludzi dzięki nim nie potrafi nigdy odczuć potrzeby i wartości ścisłego rozumowania, co na każdym kroku stwierdzić możemy w życiu praktycznem, gdzie nieraz niemniej potrzebna jest dokładność myślenia, niż w nauce.

Monograficzne traktowanie liczb traci w drugim dziesiątku również sporo ze swej wartości. Naturalnie, nauczyciel stopniuje liczby, nie prowadzi rzeczy bezładnie, bo nigdzie tak nie ma znaczenia stare przysłowie łacińskie: festina lente (śpiesz się powoli), jak tutaj.

ROZDZIAŁ V.

W rozdziale niniejszym będziemy usiłowali wykazać, w jaki sposób to, co powiedziane było powyżej, może być zastosowane w praktyce nauczania przedszkolnego.

Zwykle sądzą, że nauczanie elementarne zaczynać się winno od nauki czytania i pisania oraz rachunku, jak to się dzieje faktycznie w przeciętnej szkole elementarnej i nauce domowej. Wprowadzono tu i owdzie t. zw. pogadanki o różnych rzeczach otaczającego dziecko świata. Jest to znaczny krok naprzód do głębszego zrozumienia zadań elementarnego nauczania. Pogadanki te bez wątpienia mają duże znaczenie: uczą patrzeć, obserwować, kształcą zdolność uwagi dowolnej, dają wiedzę i t. p. Ale czyż istotnie rozwój psychiczny i poznanie, zdobywane przez te pogadanki, są tego rodzaju, by można je było nazwać pogadankami o rzeczach? Niewiele rzeczy poza obrazkami może nauczyciel w szkole pokazać, a czasem nawet obrazków, choćby jakich takich, nie posiada. Czyż wtedy to, o czem mówimy, będzie nauką o rzeczach, a nie o słowach? Uczymy się widzieć i obserwować faktycznie, patrząc na rzeczy rzeczywiste. Dalej: nie tylko przez patrzenie na świat otaczający nas poznajemy, ale *przez przezwyciężanie i odczuwanie oporu, jaki stawiają rzeczy otaczające naszym chceniom i celom*. Formalny sposób nauczania zwraca główną uwagę na mowę, na t. zw. „pełne zdania", na obfitość i bogactwo słownictwa, nie troszcząc się często o to, co istotnie w głowach dziecięcych dźwiękom mowy odpowiada. Wprowadzane sporadycznie do elementarnego nauczania rysunek i roboty ręczne na razie sytuacji nie ratują, gdyż samo to wprowadzenie nie dowodzi jeszcze rozumienia doniosłości podobnych przedmiotów. W nich właśnie tkwią siły, które rozsadzą obecny formalizm szkoły elementarnej i samo pojęcie nauczania elementarnego przeobrażą, zmienią również jego metodę. Szkoła elementarna nie jest niczem zdeklarowanem. W różnych krajach np.

w różnym wieku zaczynają dzieci naukę elementarną. Zależy to od wielu przyczyn; odgrywają tu rolę czynniki rasowe, narodowe, ale niemałe ma też znaczenie samo pojmowanie elementarnego nauczania. Wiek dzieci przyjmowanych do szkoły elementarnej waha się pomiędzy 5 a 8 latami w różnych miejscowościach kuli ziemskiej. Ciekawe jest właśnie, że, gdzie, jak w Ameryce, w nauczaniu elementarnem t. zw. metody praktyczne odgrywają większą rolę, tam przyjmowane są dzieci młodsze. Zwróćmy uwagę dalej, że obecnie nierzadko już dzieci zaczynają się „uczyć" w t. zw. np. szkołach macierzystych, ochronach i t. p. znacznie wcześniej, niż to zwykle jest przyjęte w szkole elementarnej. Naturalnie, uczą się tu dzieci, dla których utrudnione jest normalne wychowanie domowe, ale takich dzieci jest legjon, który stale wzrasta. Z drugiej strony „normalne" wychowanie domowe musi też podlegać modyfikacjom, których żąda czas i życie, a tem samem niejedno musi się w niem zmienić, na niejedną sprawę zaniedbaną i niedostrzeganą trzeba będzie zwrócić uwagę. Nauczanie rachunków musi też ulec zmianie. Jestem zdania, że baczne oko wychowawcy jeszcze przed szkołą elementarną w tę dziedzinę wejrzeć powinno. Wszystko, o czem dalej będzie mowa, dotyczy nie tylko ochronki np., ale i domu.

Czytelnik, który uważnie przeczytał poprzednie rozdziały, zrozumie, że można podkreślić pewne przygotowawcze momenty powstawania pojęć liczbowych, wcale nie używając słów, liczebników. Jest to jakby „arytmetyka bez słów", jeżeli mogę tak nazwać to, o czem chcę pisać. Pojęcia odwzorowania, niezależności zbioru konkretnego od porządku, od formy przedmiotów, ich układu i wogóle jakości zmysłowej, mniejszość, większość i równość zbiorów co do ich zawartości — oto treść podstawowa tej „arytmetyki". Niesłusznie zwykle te rzeczy pozostawiane są czasem w całości własnemu doświadczeniu dziecka i jego pracy duchowej; bo, nawet gdyby można było istotnie na to doświadczenie liczyć, to w każdym razie uczący powinien dbać o porządek w tej dziedzinie i wiedzieć dokładniej o tem, by przystosować odpowiednio swe postępowanie. Jakie znaczenie ma kwestja tu omawiana, wyrażą dobitnie słowa wybitnego matematyka szwedzkiego S. Mittag-Lefflera: „Bez specjalnej zdolności myśli do odwzorowywania jednego objektu w drugim, t. j. bez liczenia, matematyka nie istniałaby" (Compte rendu du Congrés des mathématiciens à Stockholm, 1909, str. 16). Jakże mało jednakże na tę kwestję zwraca się uwagi! Być może, że tu niejeden praktyk zrobi zarzut, że głos matematyka mało może decydować w sprawie tak elementarnego nauczania. Nauka jest jednakowo wielka wszędzie, czy w drobnych zaczątkach, czy u szczytu, a głęboki znawca przedmiotu wskazuje nam na te momenty podstawowe, których znaczenie dopiero on potrafi ocenić, psycholog zaś z rzeczą nieobeznany może tylko czasami zgadnąć. Dla stworzenia dobrej metody nauczania trzeba wyzyskać wszystkie możliwe dane; trzeba oprzeć się nie tylko na osobistem doświadczeniu, które jest zawsze ograniczone i z konieczności bardzo jednostronne i niedostateczne, lecz i na psychologji rachunku, na znajomości sposobu powstawania pojęć liczbowych w umyśle dziecka, i na historji rachunku, jak również na umiejętnej obserwacji metod rachunkowych, używanych przez ludy pierwotne, pomimo że E. Meumann uważa to za zbyteczne (patrz Vorlesungen T. III, wyd. 2-e, str. 666). Obserwacja ta wymaga kontroli psychologa, ale często podpowiada mu ważne fakty i jest w zgodzie z jego badaniami. Trzeba dalej znać lepiej samą naukę arytmetyczną, bo tylko ten, kto panuje nad przedmiotem, może go zrobić bez uszczerbku dla praw myśli giętkim i przystępnym. Jest więc pięć źródeł, z których płynie wiedza potrzebna dla nauczania rachunku. Dlatego też nieraz staraliśmy się odwoływać do każdego z tych źródeł.

Zaznaczono powyżej, iż odróżnienie wielkości dwóch zbiorów, zasadnicze ich porównanie może być osiągnięte bez liczebników, że to odróżnienie poprzedza powstanie tych ostatnich w rozwoju myśli arytmetycznej. Liczne fakty świadczą o tem wymownie. Podróżnicy np. często zaznaczają, że dzicy ludzie, nie umiejący liczyć dalej niż do kilku pierwszych liczb, potrafią orjentować się szybko w zmianach, jakie następują w zbiorach przedmiotów budzących ich zainteresowanie. Np. odrazu dostrzegają zniknięcie jednej z licznych łódek uwiązanych u brzegu rzeki lub też nieobecność psa na polowaniu w całem stadzie tych ostatnich. Niewątpliwie odgrywa tu rolę nie używany przez nas sposób rachunku, ale dokładna pamięć wzrokowa. Fakty podobne spostrzec się dadzą nie tylko śród ludzi. Np. John Lubbock (Conant, The number concept, str. 3 — 4) opowiada o sprycie wron, które nie dopuszczają do siebie na bliższą metę myśliwca i z trudnością dały się podejść. Plan polegał na tem, że najpierw dwóch ludzi weszło do pewnego domu, stojącego oddzielnie w polu i następnie jeden tylko wyszedł. Myśliwy sądził, że wrony nie zdołają dostrzec tej różnicy, ponieważ nie umieją liczyć. Jednakże tak nie było: wrony nie chciały się zbliżyć do domu. Po kilku próbach ze zwiększającą się stale liczbą ludzi udało się pomylić wrony w ich kalkulacji, posławszy 5 albo 6 ludzi, z których później jeden pozostał. Tego rodzaju fakty nieraz dają się zaobserwować w świecie zwierzęcym. Dowodzą one pewnej orjentacji rachunkowej, oczywiście

„bez liczebników" i „liczenia". Nasze metody rachunkowe są bez zaprzeczenia wyższe, ale nie jedyne. Obserwacja małych dzieci nieraz wykazuje umiejętność ich orjentowania się w zbiorach przedmiotów, wchodzących w zakres żywego zainteresowania, przyczem dzieci odruchowo posługiwać się zaczynają palcami, stosując nieświadomie metodę odwzorowywania. Należytą obserwację w tej dziedzinie utrudniają, jak zresztą w wielu innych, pewne przyzwyczajenia ludzi obserwujących i nieumiejętność należytego postawienia celu obserwacji. Otoczenie dziecka jest przyzwyczajone do pewnego sposobu rachowania, który mimowoli usiłuje poddać temu dziecku i w ostateczności najczęściej potrafi tylko zauważyć, jaki rezultat osiągnęło to poddanie. Np. taki bystry badacz jak Stern (Die Kindersprache, str. 248 - 51) stwierdza używanie przez dzieci liczebników bez treści, przyczem łudzi się, że liczba porządkowa powstaje w umyśle dziecięcym wcześniej niż kardynalna, jakkolwiek słowa odpowiadające tej liczbie (pierwszy, drugi i t. p.) zjawiają się później. Z tego, że dziecko odruchowo wykonywa proces odwzorowania, nie wynika powyższy wniosek, a używanie liczebników bez treści przez samo powtarzanie ich oczywiście niczego nie mówi o procesach rachunkowych w umyśle dziecka. Tenże Stern, jak również wielu innych badaczy, stwierdza dwa podstawowe i niewątpliwe fakty: 1-o dzieci najłatwiej stosują rachunek względem przedmiotów ich interesujących i 2-o jeżeli potrafią liczyć niewielkie zbiory przedmiotów znanych sobie, to nie umieją tegoż zrobić z przedmiotami nieznanemi, niezwykłemi, chociażby ich liczba była ta sama. Te same dwa fakty można zanotować z całą dokładnością u człowieka pierwotnego i, jeżeli np. pewien mały chłopiec, jak opowiada Stern, na prośbę dziadka, by przeliczył jego palce, odpowiedział, że on może liczyć tylko swoje, to u plemion dzikich nieraz się zdarza, że liczebniki odpowiadające tym samym zbiorom przedmiotów żywych są inne niż—martwych, a okrągłych inne niż podłużnych i t. p. Ten ostatni fakt wykazuje całą konieczność wprowadzenia metody odwzorowywania do nauczania, gdyż w ten sposób jedynie można osiągnąć możność porównania 2 zbiorów ze sobą, a więc zdobycia zasadniczego kroku naprzód na drodze do pojęcia liczby. Wczesne imputowanie dzieciom nowej wyrobionej metody rachunku jest szkodliwe, gdyż nienaturalnie przyśpiesza proces abstrakcji, a w ten sposób krzewi werbalizm już w zaraniu rozwoju umysłowego człowieka.

Z poprzednich uwag wyłania się myśl przedszkolnego nauczania rachunku, które stworzyłoby odpowiedni grunt dla wprowadzenia liczebnika. Tu i owdzie w literaturze pedagogicznej ta myśl znajduje swe zrealizowanie, należy jednakże stwierdzić dotychczasową nowość sprawy i konieczność usilnej pracy w tym kierunku, gdyż chodzi tu o kwestję podstawową. Coraz bardziej staje się nam jasnem znaczenie wczesnego dzieciństwa i coraz baczniejszą uwagę pedagoga koncentruje ono na sobie.

Nauczanie przedszkolne rachunku można podzielić na 3 stopnie. Nauka całkowicie jest związana z pracą ręczną.

Pierwszy stopień — odwzorowywanie podobne.

Na tym stopniu dzieci układają figury podobne do tych, które mają podane we wzorcu. Taki wzorzec powinien być przygotowany odpowiednio z klocków, np. przymocowanych do tektury, ustawionej na tablicy. Układanie odbywa się zapomocą klocków takich samych, które, jak we wzorcu, mogą być różnokolorowe. Później można figury wyrysowywać na tablicy kredkami. Wzorcami mogą być zarówno proste figury geometryczne, jak schematyczne rysunki różnych przedmiotów otoczenia. Zajęcie, o którem tu mowa, ma wartość zarówno ze względu na cel swój rachunkowy, jak i na ogólny rozwój umysłowy, gdyż kształci dokładność obserwacji i uwagę, łącząc się w ten sposób z nauką rysunku.

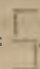
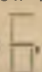
Wysuwają się następujące momenty:

1-o. Układanie figur identycznych do podanych. Te ostatnie należy stopniowo zmieniać, zarówno modyfikując kształt, jak liczbę szczegółów i tem samem klocków. Takie układanie może trwać dość długo, stanowi ono bowiem ćwiczenie ważne, przy którem dzieci zdobywają doświadczalnie dokładniejszą znajomość różnych figur i uczą się je umiejętnie obserwować.

2-o. Układanie figur odmiennych od podanych, ale o tej samej liczbie klocków. Np. na figurze mamy trójkąt. Dzieci układały poprzednio bramę , więc teraz możemy im zaproponować, by te same klocki, które zużyły na ułożenie trójkąta, były zastosowane do ułożenia bramy. Ten stopień ma na celu kontrolowanie i wspieranie dokładności przedstawień odtwórczych, a jednocześnie budzenie poczucia jednakowości dwóch zbiorów pomimo różnicy formy.

3-o. Układanie z tych samych klocków, które są potrzebne do zrobienia danej figury nowych, figur o mniejszej liczbie klocków. Najpierw układają dzieci taką figurę, jaka jest podana, a później nauczyciel proponuje, by z tych samych klocków ułożyły inną. Może się okazać, że wystarczy tych klocków na ułożenie kilku innych figur. W każdym razie wystąpić tu mogą słowa „mniej", „więcej" tak samo, jak w poprzednim przypadku słowa: „tyle samo". Celem tego momentu jest jeszcze ściślejsza analiza figury i uwypuklenie wspomnianych pojęć wielkościowej natury. Za analizą -- może i powinna następować synteza, np. z kwadratu i trójkąta uczniowie mogą ułożyć domek i t. p., przyczem nauczyciel zastrzega, żeby przynajmniej jedna z figur nie była zepsuta. W tym ostatnim momencie występować zaczynają również pojęcia: „dobierania", „dołączania", „odłączania" i t. d.

Podobne zajęcia mogą dotyczyć również figur przestrzennych, ale to wymaga większej sprawności technicznej od dzieci i większego zachodu ze strony nauczyciela. Np. można używać do łączenia patyczków, kulek z plasteliny lub gotowanego, ale nie rozgotowanego grochu i t. p. W ten sposób dzieci mogłyby wyrabiać z 6 patyczków czworościany, z 12 sześciany i t. d.

Nasuwa się tu przytem cały szereg różnych innych „zadań". Np. macie trójkąt, weźcie po klocku i zróbcie kwadrat, jeszcze po klocku i zróbcie domek i t. p. Wogóle dla figur dobrzeby było obmyślić odpowiednie nazwy, przynajmniej dla niektórych częściej używanych, a układać nawet podobieństwo liter, cyfr, przedmiotów znanych i t. p. Np. mamy zbiór klocków, w jakikolwiek sposób ułożonych (dajmy na to 5), układamy z nich taką figurę: . To samo można zrobić dla innych zbiorów nie przekraczających liczb pierwszego dziesiątka. Np. 6: , 8:  i t. d. Jeżeli figura przez częste użycie, dajmy na to do zabawy lub opowiadania, jest dobrze znana, możemy dzieciom powiedzieć, by ułożyły ją bez wzoru z pamięci, co jest ważne, gdyż nadaje pewność i kontroluje wyobraźnię geometryczną.

Stopień drugi — odwzorowywanie w szeregu. Uczący pokazuje na tekturze figurę, ułożoną z klocków w ten sposób, aby każdy klocek wyróżniał się np. barwą. Następnie, zachowując barwę, układa w szeregu jeden za drugim takie same klocki, ale inne. Zaznacza, że klocków tu i tam jest „tyleż", „równo". Takie przejście od dowolnej konfiguracji do szeregu stanowi główną treść tego stopnia.

Tak samo, jak poprzednio, pożytecznem jest w tym przypadku wyróżnienie kilku odmiennych momentów.

1-o. Układanie szeregu na zasadzie danej na tablicy figury, z zachowaniem podobieństwa barw i bez niego. W tym momencie, jak zresztą na całym tym stopniu, winno się mieć głównie na widoku oderwanie odwzorowania od figury geometrycznej, a więc podkreślenie silniejsze samej zawartości zbioru. Z tego wynika, że jest to następny krok w procesie abstrahowania, prowadzącym do pojęcia liczby. Najpierw uwzględniać należy identyczność koloru, gdyż w ten sposób oczywiście, łatwiej układać szereg; później można tę identyczność odrzucić. Figury używane do odwzorowania powinno się stopniowo komplikować, jakkolwiek cały ten moment nie zajmie dużo czasu.

2-o. Układanie szeregu na zasadzie dowolnej grupy podanych klocków, bez widocznego powiązania ich i porządku następstwa, z zachowaniem podobieństwa barw i bez niego. Tutaj ostatecznie następuje zerwanie z określoną prostą figurą geometryczną. Czytelnik bez trudności zauważy, że w ten sposób jeszcze bliżej przysuwamy się w dążeniu do celu — wyrobienia pojęcia o liczbie, jako o pewnej treści myślowej niezależnej ani od jakości przedmiotów ani w danym przypadku kształtu zbioru i jego uporządkowania.

3-o. Układanie szeregu na zasadzie przedmiotów otoczenia (jednorodnych, później niejednorodnych), jak również zjawisk w rodzaju uderzeń zegara i nastawionego na wolne tempo metronomu. W przypadku niniejszym zjawiają się przedmioty odmienne od rozpatrywanych dotąd, a więc zaczyna się uniezależnianie procesu odwzorowania od jakości przedmiotów. Jest to ważny moment i na nim można się zatrzymać dłużej, dopóki dzieci nie nabiorą należytej wprawy. Zajęcie, tutaj omawiane, daje im duże zadowolenie i posuwa proces analityczny o krok dalej oraz wyostrza wszechstronniej obserwację.

4-o. Odwzorowywanie w szeregu tworzonym z innych przedmiotów niż klocki, np. krążków tekturowych, palców, kresek stawianych kredą lub węglem i t. p. Należy tu najpierw zacząć od przedmiotów znanych, a więc figur geometrycznych i dowolnego układu klocków, krążków na tekturze przylepionych, później przechodzić do innych przedmiotów, np. ustawionych na listewce żołnierzyków, rozłożonych orzechów, później zjawisk i t. p. Może tu powstać pytanie, dlaczego palce zjawiają się tak późno, wbrew temu, co widzimy w bezpośrednich, odruchowych czynnościach dzieci i w historji. Nauczanie nie jest obowiązane niewolniczo powtarzać następstwo faktów historycznych, jakby to wypadało ze stosowania bezkrytycznego t. zw. zasady biogenetycznej, która głosi, że oddzielna jednostka w swym rozwoju powtarza w skróceniu przebieg procesu rozwojowego rasy, do której należy. Obserwacja ludów pierwotnych i znajomość historji rachunków dają ważne wskazówki co do istoty zachodzących w myśli człowieka procesów, ale nie wymagają niewolniczego podporządkowania się następstwu pewnych faktów. Ważnem jest stosowanie metody odwzorowania jako jednej z dźwigni w powstawaniu pojęć liczbowych, ale z tego nie wypływa jeszcze identyczność środków. Palce jako środek poglądowy mają wielkie znaczenie, o czem była mowa wyżej, ale nie koniecznie muszą być punktem wyjścia. Zresztą należy o nich nie zapomnieć.

Stopień trzeci — odwzorowywanie w szeregu specjalnie skonstruowanym (szereg Borna).

Celem, który sobie tu postawić mamy, jest nadanie zmysłowo wyraźnego piętna charakterystycznego zbiorom o równej zawartości. Zwyczajny szereg stanowi przejście do tego stopnia; w nim to nie jest tak widoczne, gdyż przy dość dużej liczbie uszeregowanych przedmiotów trudno odróżnić, który zbiór jest większy, a który mniejszy. W ten sposób zużytkowujemy doświadczenie zwolenników zasady obrazów liczbowych. Układanie w tym szeregu pozwala wygodnie porównywać zawartość dwóch równych zbiorów. Używamy tutaj krążków tekturowych. Np. mamy zbiór stalek i orzechów. Odwzorowujemy zapomocą krążków zbiór jeden i drugi. Okazuje się, że otrzymujemy np. tę samą figurę szeregu Borna w pierwszym dziesiątku. Liczenia tu jeszcze niema, ale nic nie staje na przeszkodzie, by nazywać figury Borna: dwójką, trójką i t. p.

Takie nazwy nie utrudnią później przejścia do słów: dwa, trzy i t. d., natomiast mają na oku wyrażenie słowem zrodzonego już w myśli dziecka pierwszego ujęcia zawartości w postaci figur Borna, a więc w postaci pierwszych przedstawień, które reprezentują zbiory o jednakowej zawartości. Do tego dąży cały tu opisany proces. Przedstawienia te, jak zobaczymy niżej, nie mogą zawsze sięgać wyraźnie poza pierwszą 5, ale stanowią ważny bardzo krok naprzód w kierunku abstrakcji.

Zrozumiała rzecz, że nieumiejętne prowadzenie tego rodzaju operacji może dzieci nudzić, ale przeplatane zabawą, rozmową i innemi rzeczami, przy rozmaitości zadań, figur, rozmaitości przedmiotów odwzorowywanych, nudnem nie będzie. Być może, że plan, tu naszkicowany, posiada wady, które praktyka poprawić może, i luki, które może uzupełnić; ale mam to głębokie przeświadczenie, że istota rzeczy ostać się musi i jest pożyteczna. Jest do życzenia, by myśl tu wyłuszczona była rozwijana.

Powiedziałem powyżej, że jeszcze niema liczenia po przejściu ostatniego stopnia. Muszę tu sprawę tę bliżej wyjaśnić, gdyż mogą powstać różne wątpliwości z tego powodu, iż poprzednio powiedzieliśmy, że proces odwzorowania jest zasadniczym momentem liczenia. Liczenie w rozwiniętej swej postaci zawiera trzy momenty: 1) odwzorowanie, 2) ujęcie treści psychicznej skończonego danego procesu odwzorowania, jako szeregu aktów uwagi, w pewną psychiczną całość i 3) naznaczenie tej całości słowem. Wadą jest pojmowania liczenia, jeżeli ono tylko ten ostatni moment bierze pod uwagę odrazu na początku myślenia arytmetycznego. Nie jest wadą, ale nawet koniecznością myśli, jeżeli to z pewnemi zastrzeżeniami stanie się później. Dwa pierwsze momenty w miarę postępu nauczania i rozwijania się logicznych funkcyj umysłu zostaną zastąpione, przemienią się w treść inną, do czego potrzebną będzie określona konstrukcja myślowa, wyrażająca się w systemie pozycyjnym i związanych z nim funkcjach myślenia. Rzeczy te poprzednio jużeśmy omawiali.

Dobre nauczanie ma to do siebie, że w ostatecznej analizie wyzwala przedewszystkiem więcej swobodnej energji ducha ludzkiego, jakkolwiek może się wydawać pozornie kłopotliwem. Uważniejsze zajęcie się umysłowością dziecka w każdym kierunku jest jednym z warunków dobrego nauczania, a tego właśnie pragniemy w tym rozdziale.

ROZDZIAŁ VI.

Teraz przejdziemy do nauczania w pierwszym roku w zwykłej szkole elementarnej (dzieci sześcio- lub siedmioletnie), ale zanim na przyadkach zilustrujemy sam sposób wykładu, zastanowimy się nad kilkoma ważnemi kwestjami.

Przedewszystkiem zakres nauki. Nie może on obejmować więcej, jak liczby od 1 do 20. U nas, niestety, jeszcze trzeba zaznaczyć, że nigdzie zbytni pośpiech nie jest tak szkodliwy dla całego rozwoju umysłowego dziecka, jak w arytmetyce. Osiągane szybko pozornie dobre rezultaty są zwodne, wiedza jest nietrwała i nad wyraz mglista, wyuczona, skutkiem czego później tyle się zjawia dzieci „niezdolnych" do matematyki, tyle nieprzyjemnych i próżnych wysiłków kosztuje uczniów i uczennice posuwanie się za „kursem". Nie może być wątpliwości, że sprawdziany są trudne, ale tylko niedoświadczony i lekkomyślny nauczyciel będzie się tu śpieszył wtedy, gdy trochę wysiłku z jego strony nadać może przedmiotowi pożądaną rozmaitość, a uczniom dostarczyć trwałych podstaw. Procesów psychicznych przyśpieszać nie można; odbywają one taką samą ewolucję, mniej lub więcej powolną, w różnych osobnikach, jak wszystko na świecie. Powstawanie pojęć liczbowych, ów kapitalny moment psychologiczny nauczania początkowego rachunku, jest rzeczą powolną i trudną. Sama wszak logika poucza, że liczby np. pierwszego dziesiątka mają fundamentalne znaczenie dla wszystkich dalszych operacyj arytmetycznych. Nie chcieć się z tem liczyć przez śpieszenie się, to albo nie rozumieć zupełnie rzeczy, albo łatwowiernie dać się zwodzić nietrwałej pamięci dziecięcego wieku. Już doświadczenie indywidualne poucza, że nader często uczeń, pozornie łatwo dający sobie radę z rachunkiem na początku, później jakby stępiał całkowicie, — nie umie wziąć się do prostych rzeczy, nie umie myśleć, ba, nawet nie czuje tego potrzeby. W pierwszym roku *stanowczo* nie można przechodzić więcej, sztuka zaś nauczania powinna polegać na tem, aby nuda nie wchodziła do pokoju szkolnego, aby nauczyciel umiał zrobić przedmiot urozmaiconym i interesującym. Pośpiech jest pozostałością dawnej dydaktyki mnemotechnicznej. Wszak dawniej jeszcze prędzej dochodzono do liczb dużych, i jak opowiada jeden z historyków, uczniowie zapominali dodawania, gdy byli w trakcie, dajmy na to, dzielenia, co wcale nie budziło podziwu. Jeszcze teraz, szczególniej przy zajęciach z kilkoma oddziałami, nauczyciel daje jednemu z tych oddziałów dla „zużytkowania czasu" kilka liczb decymetrowej długości do dodawania. Oczywiście, uczniowie siedzą „cicho", ale czasu nie zużytkowują i pod względem umysłowym nie mogą się rozwijać.

Zapewne, jak na pierwszy rok, niemały to program (u nas wobec domniemanej genjalności naszych dzieci może i za mały!), ale stosując się do zasady uczenia uczniów, a nie przechodzenia programów, nauczyciel doświadczony i trzymający dłoń, że tak powiem, na pulsie klasy, zrobi tyle, ile będzie można, t. j. może z r o b i ć m n i e j, a w nauczaniu indywidualnem czasem więcej [1]). Pamiętać zawsze należy, że to są podstawy, rzeczy niezmiernej doniosłości dla całego gmachu matematyki, że tylko trzeba umieć szukać, aby znaleźć tu tyle zagadnień wartości zasadniczej, że dziwić się tylko trzeba, jak ludzie dla ślepego, mechanicznego wykonywania działań, dla pozornego rwania się w tym kierunku młodzieży poświęcają kwestje wielkiej doniosłości dla żywej myśli i rozwoju duchowego tejże młodzieży. Wszak maszyna rachunkowa zawsze sprawniej będzie liczyła, bo nie zna afektów, nie ma życia psychicznego ani zmysłów, które czasem myśl odciągają w stronę i powodują omyłki. Dla tego, kto objąć jest w stanie szerszą dziedzinę nauki, jest zrozumiałem, jaką wartość ma pierwszy i drugi dziesiątek. Nie trzeba do tego powoływać się aż na psychologję.

Jak wielkie znaczenie ma sprawa omawiana, dowodzą chociażby różnice w poglądach różnych metodystów na zakres pierwszego roku nauczania. Pomimo jednakże tych różnic tylko nieliczni metodyści pozwalają sobie na przekroczenie pierw-

---

[1]) Wydaje mi się naturalnem i nie obciążającem kursu w normalnych warunkach nauczania indywidualnego wprowadzenie w całej rozciągłości mnożenia liczb przez 2, czyli podwajania, a więc pierwszego stopnia t. zw. tabliczki mnożenia. Zarówno dodawanie liczb pierwszego dziesiątka, jak i mnożenie ich przez 2 zamykają się w tym zakresie, i nie widzę przeszkód żadnych natury dydaktycznej, któreby nie pozwalały wprowadzić podwajania. Rozróżnianie liczb drugiego dziesiątka wobec osłabienia poglądowości jest już więcej sprawą formalną, a tem samem dodanie przynajmniej jednego z takich kryterjów odróżniania może być pożyteczne. Wprowadzenie mnożenia pociąga za sobą pojęcie o dzieleniu, znajdywaniu połówek, ćwiartek, a także o rozróżnianiu liczb parzystych i nieparzystych.

szych 2 dziesiątków, większość obstaje za nieprzekraczaniem, a nawet pozostawaniem w obrębie 1-go dziesiątka.

W rozdziale niniejszym omówimy nieco bliżej liczby z zakresu od 1 — 20, aby w ten sposób dać przykład, jak prowadzić należy nauczanie w tym zakresie. Znajdzie tu czytelnik tylko krótki szkic; uczący powinien sam uzupełnić ten wykład, jak również zastosować ogólny bieg do innych liczb pierwszego dziesiątku.

Weźmy na początek np. liczbę 4 z pierwszej piątki.

Stopień I. a) Na przedmiotach otaczających wprowadzamy liczbę 4 w związku z działaniami: $3+1$ i $1+3$.

Przystępując do monografji oddzielnej liczby, jeżeli chcemy być w zgodzie z tem, co było powiedziane poprzednio, musimy zacząć od zagadnienia poruszającego umysł uczni, interesującego ich. W ten sposób najlepiej uczynimy zadość wymaganiom zarówno stopni formalnych, jak i naturalnego procesu myślenia. Mając zamiar wprowadzić do zajęć szkolnych nową liczbę, nauczyciel obmyśla sobie zagadnienie, wzięte z życia dzieci, ze sfery ich przeciętnych zainteresowań i zabaw. Oczywiście, powinien przynieść do szkoły odpowiednie przedmioty, używane przez dzieci w zabawach albo też znajdujące się w codziennem ich użyciu lub dobrze im znane. Do takich przedmiotów mogą należeć np. bułki, pieniądze, kręgielki i t. p. Nauczyciel musi przytem obserwować zabawy dzieci, a nawet sam odpowiednich zabaw nauczyć. Tylko taki punkt wyjścia jest godny polecenia, ponieważ tylko wtedy przedmiot omawiany przez nauczyciela może mieć realną wartość dla ucznia, a więc pobudzić naprawdę jego myśl. Rzecz jasna, że najlepiej byłoby, aby zadanie nie było „zadane", żeby samo niejako wyszło z zajęć dzieci, ale, jak to już mówiliśmy, takie postawienie rzeczy może być wykonane tylko w warunkach szkolnych odpowiednich i daleko odbiegających od dzisiejszych. Im młodsze są dzieci, tem liczenie się z głębszem ich zainteresowaniem naturalnem jest ważniejsze. Można czasem zamiast przedmiotów użyć tablicy kolorowanej, przedstawiającej jakąś bliską dzieciom scenę z życia, a wtedy następujące niżej punkty, należy przestawić, wysuwając d) na czoło. Przy omawianiu 4 możnaby np. zacząć w ten sposób: Nauczyciel przynosi do klasy 2 klatki z kanarkami: w jednej 3, a w drugiej 1. Stawia te klatki na miejscu widocznem i pyta się, ile kanarków jest razem w obu klatkach. Poruszające się, żywe przedmioty bardzo interesują dzieci. Być może, taki przykład w danych warunkach jest niewykonalny, wtedy, oczywiście, można użyć innego. Rzecz główna polega na tem, by nie zaczynać od teoretycznych przykładów pomimo ich poglądowości, lecz od rzeczy poruszających uczuciową stronę i wogóle głębsze struny dziecięcej duszy.

Potem mogą nastąpić inne przykłady konkretne. Np. ile stół ma nóg? Liczymy: 3 i jeszcze jedna. Razem 4. Tak samo np.: ile pokój ma ścian? ile kątów? ile książka rogów? ile razy uderzę w stół? i t. d. Nauczyciel może jeszcze przygotować szereg przedmiotów, w których występuje liczba 4, np. skrzypce mają 4 struny, 4 kołki, tabliczka szyfrowa jest otoczona 4 deseczkami i t. p. Dalej nauczyciel rysuje na tablicy różne przedmioty, w których wyraźnie zaznaczyć można liczbę 4, np. czworokąt, koń, schodki i t. d. Tak samo usuwamy z danego zbioru 4 przedmiotów jeden z nich. Np.: Oto 4 patyczki. Wezmę jeden. Ile zostało?

b) Na przyrządzie i palcach. Ile widzicie krążków na przyrządzie? Dokładam (dodaję) jeszcze jeden (czerwony). Ile razem? Wezmę stąd jeden, ile zostało? A stamtąd, ile zostało? Uczniowie robią podobneż operacje sami na przyrządzie i jeżeli są odpowiednie tabliczki, układają na nich krążki tekturowe.

Schowajcie palec duży u ręki lewej. Nauczyciel pokazuje sam manipulację (odwracając dłoń ku sobie). Ile palców zostało? Schowajcie wskazujący. Ile zostało? Uczniowie dalej wykonywają te rzeczy sami na zapytanie nauczyciela.

c) Rysowanie kółek i kresek. Narysujemy 3 kółka. Nauczyciel sam rysuje na tablicy w takiej postaci, jak na przyrządzie znajdują się krążki. Dorysujemy jeszcze jedno. Ileśmy otrzymali? To samo z kreskami w szeregu zwyczajnym.

d) Rozpatrywanie obrazków w książeczkach. Obrazka tu nie podaję, ale łatwo zrozumieć, że treść jego jest tak ułożona, aby zawierała przedmioty w liczbie równej 4 lub mniejszej niż 4. Przedmioty są połączone w całość żywą, ilustrującą jakiś moment z życia człowieka lub przyrody. Mogą być również oddzielne przedmioty (małe obrazki) w odpowiedniej liczbie.

Rozróżniamy przykłady konkretne i zadania. Jeżeli pokazuję przedmioty i zapomocą rąk lub przyrządu jednocześnie mogę uzmysłowić samo działanie — jest to przykład konkretny. Jeżeli zaś daję pytanie, w które wchodzą oddzielne przedmioty znane dzieciom w pewnej liczbie, i trzeba wykonać działanie tylko w myśli, mamy zadanie konkretne.

Przy każdej liczbie w monograficznem jej traktowaniu występuje szereg działań, które trzeba przerobić dla całkowitego porównania tej liczby z poprzedniemi. Przy czwórce mamy następujące działania:

$$\begin{array}{ll} 3+1, & 4-1, \\ 2+2, & 4-2, \\ 1+3, & 4-3, \\ & 4-4. \end{array}$$

Działania te stanowią treść przykładów i zadań na 4 i powinny być przechodzone w pewnym porządku. Ponieważ używane przez nas na tym stopniu 2 działania mogą być zrozumiane jaśniej wtedy, gdy je porównywamy ze sobą, należy na początku jednocześnie przechodzić odpowiednie przykłady z dodawania i odejmowania. To jedno. Dalej, dla uwypuklenia prawa przemiennościowego, przykład różniący się od poprzedniego tylko przestawieniem składników, powinien być traktowany zaraz po nim. Z tego wynika, że powyższa tabliczka w celu przystosowania jej do powyższych wymagań, winna być przekształcona w ten sposób:

$$\begin{array}{r} 3+1 \text{ i } 4-1, \\ 1+3 \text{ i } 4-3, \\ 2+2 \text{ i } 4-2, \\ 4-4. \end{array}$$

Co się tyczy działania ostatniego: 4 — 4, to odpowiedzią nań w przykładach konkretnych jest: „nic się nie zostanie", później przez skrócenie „nic".

W monografji liczb pierwszej 5 wprowadzamy każdą liczbę przez dołączenie jedności do poprzedniej. Tem się odróżnia ona od monografji liczb drugiej piątki, gdzie, jak to już było wyżej nadmienione, użyjemy innego sposobu, biorąc za podstawę 5. Tak samo, jak przerobiliśmy powyżej na konkretnych przykładach jedną parę działań: 4 + 1 i 4 — 1, należy przerobić pozostałe: 1 + 3 i 4 — 3, 2 + 2 i 4 — 2 oraz 4 — 4. W ten sposób przerabiamy pierwszy moment z tych, które należy uwzględnić przy przejściu od „liczby konkretnej" do „abstrakcyjnej",[1]) jak to było zaznaczone wyżej. Na tem jednakże, co powiedziane zostało, nie kończy się ten moment. Nauczyciel powinien się starać doprowadzić uczniów do tego, aby działania, wykonywane przez nich w obecności

[1]) Muszę tu nadmienić, że w matematyce takie odróżnianie nie jest właściwe, gdyż nauka ta nie posiada innych liczb, jak tylko abstracyjne. Podział powyższy jest wywołany potrzebami natury dydaktycznej w danym przypadku.

przedmiotów znajdujących się w klasie były wykonywane możliwie prędko. Dalej, winien unikać pewnego stałego następstwa działań, żeby usunąć niewłaściwe zastosowanie pamięci. Np. zamiast zacząć od przykładu na 2 + 2, może to zrobić wychodząc z 4 — 2 i t. p. Później, gdy zauważy, co zresztą dość prędko następuje, że dzieci dają odpowiedzi pewne i dosyć szybkie, wcale nie stosuje łączności wspomnianej działań, lecz daje przykłady luźne. Takie postępowanie jest potrzebne, aby przejść do następnego momentu. Zanim się jednakże do niego przejdzie, dobrze jest zapoznać dzieci z miarami związanemi z daną liczbą przez bezpośrednie używanie tych miar. W danym przypadku może być prócz zwykłego mierzenia długości zastosowany np. garniec i kwarta. Nie jest stratą czasu, jeżeli dzieci doświadczalnie się przekonają o zawartości garnca przez bezpośrednie jego wymierzenie kwartą. W ten sposób, chociaż potrosze, w sposób w warunkach nauczania dzisiejszego możliwy, wejdzie pedagogicznie doniosły czynnik w y t w a r z a n i a   l i c z b y, wydostawania jej z rzeczy nie będących zbiorami przedmiotów jednorodnych, a więc poniekąd jej zastosowania głębszego. Z drugiej strony, po przerobieniu przykładów nauczyciel nie powinien zapominać porównania dokładniejszego liczb według pojęć „większy", „mniejszy", „równy". Te pojęcia stanowią uzupełnienie ujęcia liczby, są najpierw związane z konkretem, później również według formuły: P+R przekształcają się dalej i oddzielają od bezpośredniego związku z konkretem. To samo dotyczy takich działań, jak: „dołączanie", „dokładnie", „odsuwanie", „odejmowanie" i t. p.

Gdy się teraz przyjrzymy bliżej opisanemu powyżej sposobowi postępowania, bez trudności zauważymy, że rozwój postępowania tego przy nauczaniu jest zgodny ze stopniami formalnemi. Rzeczywiście, najpierw zaczynamy od przykładu, który pobudza energję umysłową dziecka, budzi jego ciekawość, a więc stanowi najlepsze przygotowanie do wprowadzenia nowego przedmiotu: liczby 4. Następnie na różnych przykładach, zapomocą różnych środków poglądowych przedstawiamy tę liczbę. Potem pogłębiamy jej znajomość przez przerobienie różnych zawartych w niej działań, a więc przez wszelkie możliwe porównanie jej z poprzedniemi. Łączymy ją z poprzedniemi. Gdy to jest wykonane, usuwamy pewne związki, czyli stale połączone ze sobą grupy przykładów, a więc uniezależniamy działanie jako takie od innego i możemy wprowadzić systematycznie następujące szeregi: 3 + 1, 2 + 2 i 1 + 3; 4 — 1, 4 — 2, 4 — 3 i 4 — 4. Wkońcu na przykładzie mierzenia stosujemy do przedmiotów nie będących zbiorami.

Powyższy szereg rozwija się zupełnie naturalnie i nie posiada nic sztucznego. Jeżeli nauczyciel wspomniany schemat będzie jasno miał przed oczami i przygotuje odpowiednie przykłady, starając się nie śpieszyć, ale rzecz urozmaicać, nie popełni żadnego błędu dydaktycznego, jakkolwiek, powtarzam jeszcze raz, należy być zawsze dalekim od pedanterji i liczyć się z danemi warunkami.

Stopień II. Przechodzimy teraz do zastosowania zadań konkretnych, t. j. do używania przedmiotów nieobecnych w klasie. Zaczynamy, jak to było wyjaśnione wyżej, do przedmiotów dobrze znanych dzieciom z doświadczenia. Rzecz jasna, że na początku znowu bierzemy takie zadania, w których będą wchodziły przedmioty interesujące bliżej dzieci. Można więc użyć tych samych przedmiotów, od których zaczęto w powyższym cyklu, ale, oczywiście, bez pokazywania ich. W ten sposób z liczbą wiąże się już nie wrażenie bezpośrednie, ale wspomnienie przedmiotów znanych. Treść konkretna jest, że tak powiem, biedniejsza. Przerabiamy w tej samej kolei, co poprzednio, ten sam szereg działań, przyczem możemy się posługiwać w rachunku przyrządem, a dzieci wspomnianemi tabliczkami lub palcami. Czytelnik z łatwością zauważy że to posługiwanie się różnemi przyrządami jest związano z procesem odwzorowania, ale nieco zawilszym i zmodyfikowanym, bo przedmiotów, o których mowa niema pod ręką, są tylko zastępujące je zbiory krążków lub palce. Tu jeszcze raz widzimy, jakie głębokie znaczenie ma proces odwzorowywania. Nauczyciel się stara (i to jest cel tego stopnia) doprowadzić do tego, by dzieci dawały odpowiedzi bez pomocy przyrządów. W ten sposób proces liczenia pamięciowego, wyobraźnia u jednych, kolejne powtarzanie liczebników (a więc swojego rodzaju odwzorowanie) u drugich dzieci usamodzielniają się, odrywają od konkretu. Rzecz jasna, że zastosowanie jest zawsze tem samem, że mogą tylko modyfikować się przedmioty mierzone lub ważone, ale zawsze są to przedmioty obecne. Z tego wynika, że nie koniecznie powinno ono występować zawsze na końcu, może niem przeplatać, tak samo jak zadaniami na liczby mniejsze, wszystkie wykonywane w tym stopniu zadania konkretne. Tutaj czytelnik widzi, na czem polega brak pedanterji przy stosowaniu stopni formalnych. Ważnem jest dalej, by nauczyciel zwracał uwagę na pewne uporządkowanie przedmiotów, przechodząc od więcej znanych do rzadziej spotykanych w doświadczeniu dzieci, nawet od łatwo przystępnych dla wyobraźni do przedmiotów większych, np. od krów, koni i t. p. do kawałków pola, do odległości większych od mniejszych. Takie uporządkowanie pozornie zbyteczne i drobne ma też swoje znaczenie. Ten stopień wogóle nie zajmie tyle czasu, co poprzedni, ale nie zawsze tak się może zdarzyć. Jeżeli dzieci bez pomocy przyrządów dają odpowiedzi przy zastosowaniu różnych przedmiotów, można iść dalej. Oczywiście 4 jest tak małą liczbą, że w całości nie zajmie dużo czasu, ale zawsze pamiętać należy o wadach zbytniego pośpiechu.

Stopień III. Gdy poprzednie zadania z przedmiotami znanemi z doświadczenia doprowadziły do postawionego powyżej celu, przechodzimy do stosowania tejże drabinki działań w kolei tej samej, co poprzednio, do zadań z przedmiotami znanemi nie z bezpośredniego doświadczenia, lecz z opowiadania i obrazka lub też takiemi, które przekraczają swemi wymiarami zwykłe przedmioty otoczenia. W razie, gdy jakieś działanie sprawia trudności uczniowi, staramy się najpierw dać z temiż liczbami zadanie, w którem będą wchodziły przedmioty poprzedniego zakresu. Dopiero później, gdy to nie doprowadzi do rezultatu, udajemy się do pomocy przyrządów lub palcy. W każdym razie należy tu zauważyć, że to ostatnie wskazywałoby na brak gruntowego przerobienia poprzedniego, stopniowanie bowiem, którego tu używamy ma na celu nie tylko przygotowanie pojęcia odnośnej liczby, ale też danie dostatecznego czasu i materjału wszechstronnego do ćwiczeń, zmierzających w ostatecznym celu do zmechanizowania działania. Niniejszy stopień jest ostatni, w którym używamy jednorodnych zbiorów. Obserwacja psychologiczna poucza, że dzieci, które umieją wykonywać rachunek ze zbiorami przedmiotów jednorodnych, często nie są wstanie zrobić tegoż z przedmiotami niejednorodnemi. Z tego wynika, że stopień trzeci powinien już dać dostateczną wprawę w danym rachunku, żeby później ta nowa trudność łatwiej się dała zwalczyć. Zasługuje na tym stopniu na uwagę okoliczność, że tutaj przy sprawdzaniu rachunku, w razie trudności tegoż dla ucznia z jakichkolwiek powodów, proces odwzorowania odbywa się całkowicie w myśli, że już się oderwał od konkretu, stał się zjawiskiem wyłącznie wewnętrznem. Znaczenia tego faktu nie można niedocenić, — stanowi on bardzo ważne przejście do operowania liczbą jako „rzeczą samą w sobie". Czytelnik widzi, że w nauczaniu nawet tak pozornie prostych rzeczy może istnieć i istnieje doprawdy szereg głębokich zagadnień psychologicznych, które szczególniej są ważne wtedy, gdy nauczanie jest masowe, w klasie, gdy mamy uczniów o różnych zdolnościach, gdzie tak czy owak trzeba się starać nauczyć możliwie wszystkich. Stopnie formalne obecnie również nie mają w całej rozciągłości swego znaczenia, co jeszcze raz wykazuje względną ich wartość.

Stopień IV. Przechodząc do zadań z niejednorodnemi przedmiotami należy sobie zdać sprawę przedewszystkiem z tego, że mamy do czynienia z nowym momentem psychologicznym, z usunięciem ostatniej przeszkody na drodze do tej możliwej abstrakcji, którą osiągnąć można z dziećmi w tym wieku.

W poprzednich trzech grupach zmienialiśmy przedmioty liczone zarówno pod względem ich treści konkretnej jak i jasności tej treści, ale zawsze pozostawał znamiennym jeden fakt, mianowicie jednorodność tych przedmiotów. Obecnie usuwamy to ograniczenie, ale dlatego właśnie, że jednorodność powtarzała się we wszystkich poprzednich stopniach, należy przebiec w krótkości wszystkie działania z usunięciem jednorodności z przedmiotami należącemi do każdego z 3 powyższych stopni. Więc najpierw zaczniemy dawać przykłady, w których będziemy używali różnych przedmiotów otoczenia, potem przedmiotów znanych dobrze z doświadczenia, a następnie należących do trzeciego stopnia. Niepotrzebne tu jest pedantyczne przerabianie powtórne, w całej kolejności, powyżej zaznaczonej drabinki działań, gdyż główny cel nie polega na wprawie w rachunku, którą należy osiągnąć w dostatecznym stopniu poprzednio, a na usunięciu przeszkody natury czysto konkretnej. Jak tylko nauczyciel się zorjentuje, że dzieci dają szybkie odpowiedzi na zadanie z przedmiotami drugiego stopnia, - przechodzi do następnego. Tu, jak i wszędzie w nauczaniu, nie można powiedzieć, że coś się ma robić koniecznie tyle a tyle dni albo tygodni, gdyż nie można nigdy przewidzieć różnych specjalnych okoliczności w jakich się znajdzie nauczyciel, okoliczności zależnych zarówno od jakości uczniów, od liczności klasy, jak od całego szeregu innych warunków nauczania. Nieraz w oficjalnych podręcznikach metodyki na Zachodzie (u nas np. u W. Krzanowskiego w jego „Przewodniku metodycznym do nauki rachunków"), szczególnie w Niemczech, podane są odpowiednie przeciągi czasu wyznaczone dla przejścia określonego pensum kursu. Jeżeli rzecz ta dotyczy większych przeciągów czasu (np. miesiąc), z pewnych praktycznych względów może być uznana za właściwą, gdyż daje nauczycielowi pewną wskazówkę, nieraz pożądaną, szczególniej dla nauczycieli młodych i nie umiejących jeszcze liczyć się z czasem i wyczuwać postępów swych uczni. Niektórzy z nich albo zbytnio się śpieszą, albo też zabardzo opóźniają przechodzenie kursu, co zależne jest od indywidualnych właściwości nauczyciela, a nawet od umiejętności zadawania pytań i oczekiwania oraz wydobywania odpowiedzi. Ale, jeżeli wskazania podane dotyczą dni, bardzo często mijają się z rzeczywistością i dlatego są niepraktyczne.

Z drugiej strony główną rzeczą jest zawsze uczenie uczniów, nie przechodzenie programów. To ostatnie może być celem tylko w nauczaniu liczącem głównie na pamięć, nie zaś na wszechstronny rozwój i samodzielność ucznia. Nauczyciel musi mieć gwiazdę przewodnią w postaci jasno rozumianych zasad nauczania, dość obycia się praktycznego z dziećmi i tyle inteligencji oraz zmysłu obserwacyjnynego, żeby umieć przystosować się najlepiej do warunków i wydobyć z nich maximum pożytku dla uczniów. Jest sprawą niezmiernej doniosłości dobre kształcenie nauczycieli, którzy zarówno ze względu na swój osobisty honor, jak przedewszystkiem na wielkość sprawy, do której są powołani, powinni dbać o swój własny rozwój umysłowy, o doskonalenie się stałe w swym zawodzie. Życie nie da się podzielić na fragmenty, nie da się ująć w biurokratyczne przepisy. Żywy do niego stosunek, ujmowanie syntetyczne jego drgającej całości wymaga żywego człowieka, całości jego żywej duszy, która jedynie w stanie jest tę całość ująć. Jeśli do nauczyciela wołamy w imię świętości jego obowiązku, aby nie zapomniał o kształceniu samego siebie, nie mniej też stawiać musimy jako naczelny obowiązek wszelkich czynników miarodajnych ułatwienie nauczycielowi tej jego moralnej i rozumnej tendencji, bo każda wartość duchowa nauczyciela zamienia się na kapitał społeczny nie mijającej trwałości w duszach dzieci.

Czytelnik wybaczy mi tę małą dygresję, gdyż nie jest ona bez wartości dla pojmowania zasad metody. Byłbym w sprzeczności z głównemi zasadami tej książki, gdybym od czasu do czasu nie wyjaśniał pewnych rzeczy nie zupełnie u nas popularnych i w ten sposób nie usuwał możliwych nieporozumień. Pedagogika nie składa się z niezależnych od siebie dziedzin: zagadnienia wychowania i nauczania są w najściślejszym ze sobą związku, a związek ten przedewszystkiem powinien się realizować w duszy nauczycielskiej.

Na czwartej grupie kończy się stopień konkretny każdej monografji oddzielnej liczby. Ostatnia grupa jest przejściem do następnego stopnia—abstrakcyjnego, gdzie występują przykłady oderwane.

Stopień V. Przykłady te przedewszystkiem na tym poziomie służą do ostatecznego zmechanizowania odpowiednich działań, stanowią kamień próbny całej poprzednio wykonanej pracy. Nauczyciel winien dążyć do tego z całą usilnością, gdyż tylko zupełnie pewne i szybkie odpowiedzi dać mogą gwarancję, że wysiłki jego nie poszły na marne. Najpierw kolejność wybrania oddzielnych działań musi być taka sama, jak poprzednio, później zaś nastąpić winny ćwiczenia z dowolnemi przykładami danego zakresu, oczywiście przeplatane przez poprzednie przykłady z mniejszego zakresu liczbowego. Rzecz jasna, że przytem wszystkiem również nie należy zupełnie zaniedbywać zadań, miar i t. p., gdyż nie trzeba rozumieć, że tak powiem „szufladkowo" wspomnianych grup: w ciągu pracy nad każdą z nich mają zupełne prawo obywatelstwa należące do poprzednich przykłady i zadania. Ożywia to wykład przez urozmaicenie, a jednocześnie służy do powtórzenia poprzedniego.

Gdy nauczyciel przekonał się, że dzieci już panują nad 4, przechodzi do 5, przy której powtarzają się w tej samej kolei zarówno wspomniane grupy, jak wogóle sposób ich traktowania. Właściwie każda liczba prócz ogólnych własności posiada jeszcze swoje indywidualne, które w wykładzie należy uwzględnić. Te indywidualne własności mogą dotyczyć konkretów związanych z liczbą albo zasadniczych spraw wewnętrznych. Np. liczba 5 z jednej strony wiąże się w takim ważnym dla początkowego rachunku konkretem, jak ręka, a z drugiej jest podstawą do tworzenia się pierwszego pojęcia systemu pozycyjnego; liczba 3—z pewnemi miarami stale używanemi, jak sążeń i łokieć, a 7 — z dniami tygodnia i t. p.

Kończąc piątkę, należy przystosować się do jej własności i podkreślić ją jako całość, do czego nie małą pomocą może być uzupełnienie w postaci takich konkretów, jak „pięść", moneta pięciokopiejkowa, związanych razem 5 patyczków i t. p.

Już powiedzieliśmy wyżej, że sposób uczenia liczb pierwszej piątki musi być inny, niż drugiej. Wobec tego musimy tutaj wziąć również z tej dziedziny jeden przykład, przyczem zwrócimy uwagę głównie na te rzeczy, któremi się różni traktowanie liczb drugiej piątki w porównaniu z pierwszą. Weźmy, np. liczbę 7.

Działania z tą liczbą dadzą się ułożyć w następujące szeregi:

$$
\begin{array}{ll}
6 + 1, & 7 - 1, \\
5 + 2, & 7 - 2, \\
4 + 3, & 7 - 3, \\
3 + 4, & 7 - 4, \\
2 + 5, & 7 - 5, \\
1 + 6, & 7 - 6, \\
 & 7 - 7,
\end{array}
$$

Te działania grupujemy tak, że

$$
\begin{array}{ll}
5 + 2, & 7 - 2, \\
2 + 5, & 7 - 5,
\end{array}
$$

stanowią pierwsze działania, z których wychodzimy;

$$
\begin{array}{ll}
6 + 1, & 7 - 1, \\
1 + 6, & 7 - 6,
\end{array}
$$

stanowią drugą czwórkę działań;

$$
\begin{array}{ll}
4 + 3, & 7 - 3, \\
3 + 4, & 7 - 4,
\end{array}
$$

oraz 7 — 7 są kolejno ostatniemi wykonywanemi działaniami.

Takie uszeregowanie, zupełnie tak samo jak powyżej, stosujemy we wszystkich wspomnianych (I, II, III, IV i V) 5 stopniach. Punktem wyjścia zgodnie z tem, cośmy powiedzieli na początku monografji 4, powinno być zadanie w ten lub inny sposób żywiej interesujące dzieci. Np. tutaj takim punktem wyjścia może być zadanie dotyczące dni w tygodniu, niedzieli i t. p. Weźmiemy np. zadanie takie. Dziś jest piątek; który to dzień w tygodniu? Dzieci liczą — piąty. Jak się nazywa dzień jutrzejszy? Sobota. Po sobocie następuje jaki dzień? Niedziela. Na niedzieli kończy się tydzień, więc ile dni zostało do końca tygodni, a ile przeszło? Teraz główne pytanie: ile ma tydzień dni? Rzecz zrozumiała, że może się zdarzyć taki uczeń (dość często nawet), który na to pytanie nie da odpowiedzi. Na tej trudności polega właśnie, między innemi rzeczami, ważna właściwość punktu wyjścia, o czem nauczyciel winien pamiętać. Jeżeli zaczynamy od zadania, w którem występują przedmioty nie należące do pierwszego kolejnego ugrupowania, t. j. nie będące przedmiotami otoczenia, robimy to właśnie celowo dlatego, aby wzbudzić poczucie trudności i związane z niem myślenie. Rzecz jasna, że trudność nie jest tutaj wielka i że wkrótce, gdy zajdzie potrzeba, będzie pokonana przez odwołanie się do konkretów i odwzorowanie, ale właśnie na tem umiarkowaniu w doborze trudności, nie na unikaniu ich, polega jedna z cech sztuki nauczania. W pierwszej 5 było to mniej właściwe ze względu na małe obycie się dzieci z liczbą,— tutaj jest możliwe, wykonalne i odpowiednie. Następnie pierwszą grupę przykładów konkretnych przerabiamy, jak powyżej, trzymając się stopni formalnych, a dalej zachowujemy wskazania podane przy monografji 4.

Przy działaniach w zakresie 7, jak i we wszystkich liczbach drugiej 5, występuje jeden bardzo ważny moment, na który trzeba baczną zwrócić uwagę. Przypuśćmy, że mamy do wykonania następujący przykład (na początku oczywiście konkretny): $4 + 3 = 7$. Ponieważ punktem wyjścia jest dla nas nie $6 + 1$, ale $5 + 2$, ponieważ uważaliśmy za potrzebne pierwszą 5 przyjąć za pewną całość, więc i podobne przykłady, jak powyższe, należy wykonywać w odniesieniu do tej 5, co będzie ćwiczeniem przygotowawczem do podobnych ćwiczeń w zakresie 2-go dziesiątka i następnych liczb. Dlatego szukamy dopełnienia 4 do 5 na zasadzie znanej rzeczy: $4 + 1 = 5$; potem rozkładamy 3 na $1 + 2$ i wykonywamy dopełnienie, wobec czego $4 + 3$ zamieni się na $5 + 2$, t. j. sprowadzi się do przykładu zasadniczego. Może się wydać, że to jest utrudnianiem zagadnienia, że lepiej jest na poglądzie bezpośrednim przekonać się o wartości sumy $4 + 3$. Jeżeli jednakże jasno sobie zdamy sprawę z tego, że później przy dodawaniu np.

7 do 8 będziemy musieli zastosować ten sam sposób i że powyższa przeróbka zupełnie naturalnie da się zilustrować na przyrządzie o dwubarwnych krążkach, to sprawa ta przedstawi się nam właściwie. Na wspomnianym przyrządzie najpierw nauczyciel kładzie 4 i 3 obok siebie różnemi barwami, potem jedną z kulek odwraca, przyczem następuje zmiana barwy i mamy 5 + 2.

Potrzebne są tu dwa działania w postaci dopełniania i rozkładania, które są dobrem ćwiczeniem na liczby niższego zakresu, a z drugiej strony patrzebna też jest inna własność sumy, wyrażająca się w formule: żeby dodać sumę można pokolei dodawać jej składniki. Otóż, na te dwie rzeczy należy uprzednio przy 6 i nawet wcześniej zwrócić uwagę. Np. w takiem zadaniu z niższego zakresu fakt ten znajdzie swoje zilustrowanie. U Janka było 2 gruszki, ciocia dała mu 1 i wujaszek też 1. Ile ma teraz gruszek? Takie zadanie można robić albo kolejno dodając składniki 1 i 1, albo też odrazu ich sumę. Czytelnik, który zdaje sobie sprawę ze znaczenia tego faktu dla całej następnej nauki rachunku, zrozumie jego wartość tutaj i konieczność odnośnych ćwiczeń. Bez nich, bez zastosowania tej własności dodawania w małym zakresie i w ten sposób odpowiedniego przygotowania dzieci, późniejsze dodawanie liczb większych wisi w powietrzu. Wszak przy dodawaniu liczb dwucyfrowych stosujemy na każdym kroku tę własność sumy, a to stosowanie musi się oprzeć o trwały grunt ćwiczeń poprzednich w mniejszym zakresie liczbowym.

Takie postępowanie jest zgodne z wymaganiami zasady indukcji, o której tyle mówiliśmy wyżej. W nauczaniu, jak w życiu świadomego człowieka— nasze dzisiejsze postępowanie nie tylko jest skierowane do zaspokojenia potrzeb obecnych, ale ma w jasnem polu widzenia dzień jutrzejszy i całość życia. Takie nauczanie rozwija umysł i jest jednym z czynników kształcących charakter człowieka.

To samo, cośmy powiedzieli w odniesieniu do dodawania, da się zastosować w całości do odejmowania. Tutaj też każdy przykład i zadanie możemy robić przez pośrednictwo 5. Np. mamy odjąć: 7 — 4. Dopełniamy 5 do 7, rozkładamy czwórkę na 2 + 2, odejmujemy dwójkę i następnie od 5 drugą. Ale takie postępowanie dopiero może mieć zastosowanie później. Najpierw w związku z przyrządem i innemi przedmiotami odejmowanie występuje jako odwrotność dodawania, co wykonywa się zupełnie naturalnie. W ten sposób nauczyciel przerabia całą pierwszą grupę działań związanych z przedmiotami bezpośrednio danemi. Dopiero później, gdy praca odbywa się w następnych grupach i gdy suggestja bezpośredniego oglądania przedmiotów nie będzie przeszkadzała, należy się starać o wprowadzenie powyższej rzeczy. Bez wątpienia nasuwa ona trudności, ale to trudności trzeba zwalczyć, jeżeli chcemy należycie przygotować następne stopnie nauki. Unikanie takich rzeczy jest właśnie jednym z dowodów, że traktowanie pierwszego dziesiątka nie spełnia należytej służby dydaktycznej.

Wskazany wyżej sposób wymaga zastosowania twierdzenia (którego oczywiście dzieciom nie formułujemy, ale ilustrujemy na przykładach i zadaniach): żeby odjąć sumę można po kolei odejmować składniki. Tak jak powyżej, rzecz tę wyjaśniamy na szeregu odpowiednich zadań.

Odejmowanie i dodawanie wymagają jeszcze zastosowania dwóch twierdzeń: żeby odjąć od sumy można odjąć od któregokolwiek składnika i żeby dodać do sumy można dodać do któregokolwiek składnika. Uwypuklenie wyraźne w świadomości ucznia tych twierdzeń pozostawiamy do woli nauczycielowi, gdyż można odsunąć je dalej do drugiego dziesiątka, a w pierwszym oprzeć się tylko na jasnem przedstawieniu 2 poprzednich. Jeżeli nauczyciel widzi, że jego uczniowie z łatwością dają sobie radę ze stosowaniem tych poprzednich, może wskazać wyraźnie na ostatnie. Naprzykład przy odejmowaniu według wskazanego schematu: $(5 + 2) - (2 + 1)$ można 2 odjąć od 5, a 1 od 2, jednem słowem wykonać działania inaczej.

Trzeba jeszcze tu wyraźnie nadmienić, co rozumiemy przez jasne uświadomienie sobie tych twierdzeń. Rozumiemy przez to tylko świadome ich używanie jako rzeczy nieraz wygodnych, celowych i możliwych. Takie używanie może być rezultatem zwykłego przerabiania dawanych w tym celu zadań.

Wśród liczb pierwszego dziesiątka zasługuje na szczególną uwagę liczba 10, jako znowu liczba znajdująca się na pograniczu dwóch ważnych zakresów liczbowych i posiadająca w naszym systemie liczenia tak wielkie znaczenie. O niej w ścisłem tego słowa znaczeniu powiemy parę słów niżej, teraz zaś musimy zwrócić uwagę na związaną z nią kwestję, dotyczącą działań i pisania cyfr.

Dotąd stosowaliśmy tylko działania dwuczłonowe, najprostsze, ale po skończeniu pierwszego dziesiątka, zarówno ze względu na wyrobienie należnej wprawy, jak powtórzenie i przygotowanie do dalszych działań wygodnie będzie, a nawet potrzeba zwiększyć liczbę elementów działań, dawać przykłady więcej skomplikowane, np. $3 + 5 - 7$ i t. p. Tego rodzaju przykłady mogą być zarówno konkretne jak abstrakcyjne, mogą przybierać również postać rozmaitych zadań wziętych z otoczenia.

Obok komplikacji działań, a więc zwiększenia elementów działania i używania jednoczesnego kilku działań, co znalazło swoje zastosowanie poprzednio już w traktowaniu liczb drugiej 5, ale w stopniu prostszym, ważne bardzo znaczenie ma pisanie cyfr. Początek pisania cyfr najwłaściwiej da się umieścić w końcu pierwszego dziesiątka, gdyż tutaj przy przejściu do drugiego wymaga tego sama natura rzeczy, a z drugiej strony dzieci przez jednoczesną naukę czytania i pisania doszły już w pisaniu do pewnej wprawy, bez której porządne pisanie cyfr zajmowałoby za wiele czasu, traconego na czynność dla rachunku samego niepożyteczną. Trzeba sobie jasno zdać sprawę, iż wcześniejsze rozpatrywanie pisania nie ma żadnej wartości dydaktycznej dla samego rachunku, cyfra bowiem niczem poglądowo nie przypomina danej liczby. Zupełnie co innego jest przy czytaniu, gdzie dużo powodów przemawia za tem, by rozpoczynać od pisania właściwie złączonego z rysunkiem i bezpośrednio zeń wypływającego. Z drugiej strony cyfra jest symbolem abstrakcyjnym, znakiem, który odpowiada wyrobionemu pojęciu danej liczby. Tylko w końcu pierwszego dziesiątka możemy mieć po należytej pracy przekonanie, że dzieci zaczynają należycie pojmować l i c z b ę p r z e z p o r ó w n a n i e w i ę k s z e j l i c z b y jej przejawów, a w drugim dziesiątku pisanie ze względu na system pozycyjny odgrywa już rolę środka pomocniczego przy poznawaniu dalszych liczb. Dlatego tutaj właśnie ten środek powinien być wprowadzony, tem bardziej, że dzieci przedtem mają inne środki ujmowania liczby, środki opierające się jeszcze na ważnym procesie odwzorowywania konkretnego, które stopniowo od nauki przedszkolnej przechodzi na zwykły sposób liczenia z zapisywaniem.

Nie można dla celów związanych z przygodnemi warunkami życia szkoły paczyć niemal kompletnie nauki, tem bardziej, że te rzeczy nie wchodzą w zbytnią i niemożliwą do usunięcia kolizję z temi warunkami. Wiadomo wszystkim, że nauczyciel szkoły dzisiejszej elementarnej zmuszony jest zajmować się kilkoma oddziałami jej jednocześnie, a dlatego wczesne pisanie jest mu potrzebne, bo daje zajęcie dzieciom wtedy, gdy z innymi pracuje nad czemś innem. Kwoli zadośćuczynienia tej potrzebie, jak na to posiadam liczne dowody, nauczyciele używają nawet pisania ogromnych liczb, przekraczających nieraz miljardy i zmuszają dzieci do tej żmudnej a bezcelowej i niepraktycznej pracy. Czyż można istotne wymagania nauczania poświęcać dla takich celów, tem bardziej, gdy jest na to rada, gdy są takie środki, jak: kaligrafja, przepisywanie, rysunek i t. p.?

Nauczanie arytmetyki w pierwszym roku już ze względu na samo pisanie odbywać się winno bez zadawania do domu, bez wyznaczania jakiegoś pensum do odrobienia po właściwej lekcji. Wypracowanie domowe z arytmetyki (jeżeli nie jest po prostu krótkiem, ciekawem, ustnie zakomunikowanem zadaniem) może być tylko piśmienne. Jeżeli zaś zważymy, że początkujący uczeń powinien pisać przynajmniej w pierwszym roku tylko pod kontrolą nauczyciela, takie zadawanie chybia celu i jest nawet szkodliwe, bo uczeń w domu bardzo często dzięki różnym przyczynom pisze prędzej, mniej ostrożnie, a więc z łatwością niszczy cierpliwie przez szkołę urabiane przyzwyczajenia kaligraficzne. Wiemy, że w dziedzinie przyzwyczajeń jedno odstępstwo potrafi zepsuć długą pracę.

Rzecz jasna, że byłoby dobrze, gdyby nauczyciel przystępując do pisania cyfr mógł wyjaśnić, chociaż sztucznie, raczej dla celów pamiętania, sposób zapisywania, samą formę liczby. Np. może być z pożytkiem przy niektórych liczbach stosowany tego rodzaju obraz dajmy na to dla czwórki:

W ten sposób poglądowo da się zilustrować, że znak sam, cyfra wiąże się ze zbiorem o czterech przedmiotach. Niestety, nie można tego przeprowadzić już dla 2 i 3, a więc nie może ta metoda mieć zasadniczej wartości, gdyż cyfra jest znakiem dźwięku mowy, środkiem pisania fonetycznego nie ideograficznego albo obrazowego. Taki znak odpowiada wyrobionemu pojęciu i jest końcowym aktem sposobów odzwierciadlania naszych myśli. Przedtem, na lekcji, przy pracy wspólnej z nauczycielem dzieci mogą używać innych środków, więcej odpowiednich, konkretnych i związanych ze sposobem ich myślenia. Do takich należą, jak już mówiliśmy, kreślenie kresek, krzyżyków lub kółek, układanie krążków i t. p.

Wtedy kiedy zjawia się cyfra, powinien wejść też cały szereg znaków działań i porównania liczb, a więc na początku $+$, $-$ i $=$. Tych znaków nie wolno używać swobodnie; mają ono ściśle określone znaczenie i dlatego tylko ściśle do pewnych celów używane być mogą. Bardzo częsty jest błąd spotykany w kajetach uczniów, polegający na złem używaniu znaku $=$. Np. przy wykonaniu przykładu: $2 + 6 - 5$, dzieci nieraz tak piszą:

$$2 + 6 = 8 - 5 = 3.$$

Wszak tu tkwi gruby błąd logiczny, który jest zupełnie identyczny z równością następującą:

$$2 + 6 = 3.$$

Poprawne zapisywanie wymaga takiego oznaczenia działań:

$$2 + 6 = 8; \quad 8 - 5 = 3.$$

Zaniedbanie tych rzeczy jest zaniedbaniem logiki, nawet wprost zdrowego rozsądku, a tymczasem tak często się trafia.

Przy prowadzeniu lekcji pisanie w pierwszych dwóch dziesiątkach używane musi być przeważnie w ten sposób, żeby było tylko odbiciem, nie pomocą w rachunku. To ostatnie rozumiemy jak następuje. Nieraz się zdarza spotkać w praktyce nauczania tego rodzaju zapisywanie:

$$\begin{array}{r} 12 \\ +\ 7 \\ \hline 19 \end{array}$$

Otóż tutaj ci, którzy radzą dzieciom tak zapisywać działania, używają odrazu takiego sposobu jaki jest stosowany przy liczbach większych, odrazu wprowadzają pewien schemat nieusprawiedliwiony żadnemi powodami natury rzeczowej. Dziecko w tym zakresie wykonywa rachunek w pamięci, schemat żadnej pomocy mu nie daje (np. przy dodawaniu $7 + 8$), a więc zapisywanie nie ma znaczenie istotnego tylko przygotowawcze, jako środek np. do lepszego zapamiętania kolejności działań w zadaniu. Takie zapisywanie w tym zakresie jeszcze nie wykazuje tej szkodliwości, jak później, np. przy liczbach dwucyfrowych, gdzie odrazu niszczy samodzielność rachunku i osłabia rachunek pamięciowy. Nauczyciel powinien dbać usilnie, żeby zapisywanie odbywało się równo, czysto, porządnie, żeby odpowiednie znaki były postawione na właściwych miejscach. Powyższy przykład należy zapisywać tak:

$$12 + 7 = 19.$$

Wobec tego, że pisanie w dużej mierze zależy od wprawy i że wprawa ulega prawom przyzwyczajenia, śród których jedno zasadnicze twierdzi, iż nie należy dopuszczać żadnego wyjątku, jeżeli chcemy wyrobić trwałe przyzwyczajenie, — dla każdego nauczyciela musi być rzeczą jasną, że dzieci wogóle muszą na lekcjach rachunku tak samo starannie pisać, jak na lekcji kaligrafji. Dlatego nie trzeba pozwalać na niedbałe zapisywanie, nie należy również przesadzać w zapisywanie mian przy liczbach, co tak często się robi. To zapisywanie mian odbywa się w skróceniu i mniejszemi literami, niż dzieci zwykle piszą, a stąd na lekcjach arytmetyki psują to przyzwyczajenie, które zdobywają w kaligrafji oraz stopniowość konieczną przy wyrobieniu ładnego, wyraźnego charakteru pisma. Mian wcale można nie pisać albo pisać tak, jak się pisze zwykle, t. j. literami takiej samej wielkości, jaka używana jest na lekcjach języka i kaligrafji.

W końcu pierwszego dziesiątka należy wprowadzić miary metryczne, a więc trzeba przynieść do klasy metr podzielony na decymetry. Te miary odgrywają już taką rolę na całym świecie, są tak wygodne, że zapomnienie o nich byłoby niesłuszne, tem bardziej, że przeniknęły one do nas również w różnych dziedzinach życia praktycznego. Nauka ułamków ma zwykłe nieuzasadniony przywilej do systemu metrycznego, w którym tkwią przecie podstawowe zasady naszego systemu liczenia. Jeżeli chcemy ten fakt wyzyskać należycie już nie tylko dla względów praktycznych, ale też kwoli zasadzie poglądowości, powinniśmy system metryczny wprowadzić jak najwcześniej. Koniec pierwszego dziesiątka jest tym momentem, w którym da się to zrobić z pożytkiem i bez trudności.

Zajmiemy się teraz drugim dziesiątkiem. Wspominaliśmy już poprzednio o niektórych ważnych szczegółach nauczania w tym zakresie. Jedną z głównych rzeczy tutaj jest wyseparowanie pierwszego dziesiątka w oddzielną grupę. Takie wyseparowanie musi być również *unaocznione*. Do tego służyć mogą przedmioty różne, przyrząd i rysunek, t. j. te same, co powyżej, środki pomocnicze, poglądowe.

Nauczyciel przynosi do klasy zbiór patyczków dość dużych, aby klasa cała mogła rzecz dobrze widzieć. Oblicza dziesięć patyczków, wywołuje ucznia, aby sprawdził, trzymając patyczki przed sobą i przed klasą. Dziesięć patyczków, inaczej dziesiątek patyczków, związuje sznureczkiem. Na przyrządzie opisanym powyżej dziesiątek przedstawiony jest również poglądowo dzięki temu, że zajmuje całą lewą połowę przyrządu, a na liczydle można dlań zostawić cały oddzielny drut. Potem do tej grupy dołącza jeden (trochę oddzielony od związanych). Mamy tu jeden i dziesięć, inaczej jedenaście patyczków. Ile trzeba dodać do dziesięciu, żeby otrzymać jedenaście? Ile trzeba odjąć od jedenastu, żeby otrzymać dziesięć? To samo zaraz przerabiamy na przyrządzie. Połóż dziesięć krążków, dołącz jeden (czerwony). Ile razem? Dalej te same pytania. (Należy też nie zapominać, jak i poprzednio przy mniejszych liczbach, o pytaniach w rodzaju: co jest większe, czy jedenaście orzechów, czy też dziesięć? i t. d.). Potem następują inne przykłady konkretne, aby rzecz się należycie utrwaliła. Na pierwszych liczbach drugiego dziesiątka należy dłużej się zatrzymać, żeby proces powstawania dobrze się wyklarował. Dalej w ten sposób można przejść cały drugi dziesiątek, przyczem prócz pisania cyfr dobrze jest używać układania krążków tekturowych. Pisanie kresek i kółek też trzeba stosować, jakkolwiek nie jest to operacja krótka. Ta żmudność rękoczynu daje dobre pojęcie o wartości cyfr, a po drugie, wraża w wyobraźnię budowę liczby. Przejście podobne całego pierwszego dziesiątka sprawi, że dzieci będą umiały liczyć od 1 do 20. Nie należy swoją drogą zbytniej na to zwracać uwagi, gdyż przez częste powtarzanie działania i t. p. liczenie prawidłowe stanie się własnością pamięci. Takie szybkie przebieżenie drugiego dziesiątka może tu być dozwolone, gdyż właściwie proces sam staje się więcej formalnym, bo wyobraźnia odmawia już posłuszeństwa, a jeżeli liczby pierwszego dziesiątka są dobrze znane i sam sposób tworzenia liczb drugiego jasno zrozumiany, trudności innych niema.

Nauczyciel nie omieszka również zadawać pytań w rodzaju: Jak się otrzymuje trzynaście? Jest to 10 i 3. Przytem, rzecz jasna, na kilku przykładach odpowiedź tę powinien sam podsunąć. Otrzymując bystre i jasne odpowiedzi przy łączeniu liczby z różnemi przedmiotami i bez tego, może nauczyciel wnioskować o jasności przyswojenia. To pierwszy cykl operacji w drugim dziesiątku.

Drugi cykl polega na rozszerzeniu komplikacji działań, o której mówiliśmy w końcu pierwszego dziesiątka. To rozszerzenie polega na tem, że jednym z elementów liczbowych jest stale dziesiątek, suma zaś dwóch innych nie przekracza nigdy dziesiątka, a różnica większa jest od 0. Ile będzie 11 a 2? Jedenaście jest to 10 a 1. Do tego trzeba dodać jeszcze dwa. Dwa a jeden jest 3, dziesięć a 3 jest 13. Rzecz ta doskonale jest widoczna na przyrządzie (pierwszym lub drugim z podanych), jeżeli dziesiątek zawsze przedstawiamy krażkami lub kulkami jednej barwy, a dodatki drugiej. Tak samo z odejmowaniem. Cała rzecz polega znowu na umiejętnem przejściu do działań właściwie zawartych w pierwszym dziesiątku. Wyjaśnienie tego stanowi tu najistotniejszą trudność i na największą uwagę zasługuje. Da się to zrobić tylko poglądowo. Czytelnik widzi, z jaką jaskrawością występuje tu twierdzenie o dodawaniu i odejmowaniu sumy. Jako jeden z dobrych środków może służyć sposób polegający na tem, że dzieci rysują kółka u siebie na tabliczce i przytem tak, że cały dziesiątek jest narysowany z początku w jednym wierszu, a w drugim liczby dodatkowe. W ten sposób widoczne jest, jak na przyrządzie, że działanie odbywa się tylko w drugim wierszu. Po kilku takich pokazach naurzyciel zwraca uwagę w ten szczegół i pokazuje skrócony sposób działania, Do szeregu pytań, które tutaj nasuwają się, należą, prócz odnoszących się do odejmowania, jeszcze, jak zwykle, pytania na rozkładania i dopełnianie. Ile trzeba dodać do 14, aby otrzymać 16? Dwie liczby stanowią razem 15, jedna z nich jest 13; czemu się równa druga? Rozumie się, pytania te podawać należy najpierw w formie konkretnej. Np. W dwóch łódkach, dużej i małej, płynie 15 osób, w jednej z nich usiadło 13, ile usiadło w drugiej?

Przy tem wszystkiem wprowadzamy cyfry, przechodząc kolejno i stopniowo wszystkie liczby drugiego dziesiątka: Nie należy jednakże, jak i wszędzie, pedantycznie się trzymać szeregów wzrastających lub malejących, np. 12 + 1, 12 + 2, 12 + 3, bo dla dzieci nie może stąd płynąć nauka, że z łatwością i mechanicznie z liczenia odgadują odpowiedź. Lepiej na wyrywki zadawać pytania, a potem układać szeregi, co nie przeszkadza, żeby np. wspomniany szereg należał również do używanych. Czytelnik z łatwością zauważy, ile w tym cyklu różnych kombinacji działań oraz że główną treść stanowią działania w zakresie pierwszego dziesiątka. Dlatego należy ten pierwszy dziesiątek gruntownie opracować.

Trzeci cykl dotyczy tworzenia liczb drugiego dziesiątka z liczb pierwszego. Najtrudniejsza to bodaj rzecz w całym tym kursie. W poprzednich cyklach dziesiątek był niejako dany, tu go trzeba już wytworzyć. Nadmieniałem poprzednio o gównym sposobie wykonywania działań, który tu stosować należy, nie będę więc dalej się nad tem rozwodził, opiszę tylko jeden z ważniejszych momentów umysłowienia. Mamy dodać 7 i 8. Kładę na przyrzadzie 7 krążków, a potem po kolei 8 krążków innej barwy. Otrzymuję odrazu w ten sposób liczbę potrzebną, przyczem na pierwszym przyrządzie musiałem przejść poza listewkę przybitą w środku, a w drugim przesunąć się po uzupełnieniu dziesiątka na drugi drut. Ponieważ odrazu widoczne jest, że dziesiątek składa się z 7 krążków (kulek) jednego koloru i trzech drugiego, zaznaczam, że mogę to działanie wykonać, dodając najpierw do 7 liczbę 3, wziętą z 8. Otrzymam w ten sposób dziesiątek, a potem do niego dodaję pozostałe 5. Trzeba więc najprzód zrobić dopełnienie do 10, potem rozkładanie 8 i nakoniec dodawanie do 10. Otrzymam 15 (krążki w liczbie trzech należące do pierwszego dziesiątka, mogę teraz odwrócić, by posiadały tę samą barwę, co reszta krążków należących do tegoż dziesiątka). Jak widzimy, natura samych przyrządów prowadzi do tego sposobu. Nie jest on rzeczą dla dzieci prostą i dlatego ćwiczenia odpowiednie w zakresie drugiej piątki, okazać mogą tutaj swoją pomoc. Trudność zwiększa się przy przejściu do zadań i przykładów oderwanych, gdy przyrząd nie podpowiada już więcej samego rozwiązania. Tę samą bowiem operację wykonywają dzieci przy tablicy, a piśmiennie można ją przedstawić tak:

$$7 + 8 = 7 + 3 + 5 = 10 + 5 = 15.$$

Przytem dobrze jest również zapisywać ogniwa pośrednie:

$$10 = 3 + 7; \quad 8 = 3 + 5.$$

Naturalnie, poprzednie równości $7 + 3 = 10$ i $8 = 3 + 5$ muszą być znane. Gdy uczniowie wprawiają się w ten rachunek, co nieprędko przychodzi, można ogniwa pośrednie oczywiście wyłączać.

Podzieliliśmy cały przebieg nauczania w drugim dziesiątku na trzy grupy. W pierwszej wprowadzamy liczby tego zakresu, w drugiej cokolwiek bliżej je poznajemy, a w trzeciej wiążemy z dziesiątkiem pierwszym przez działania wskazujące, jak od jednych przejść do drugich. W każdej z tych grup należy przerobić wszystkie ze wspomnianych wyżej stopniowań, a więc od konkretu bezpośredniego przechodzić do rzeczy znanych z doświadczeń i t. d. aż do przykładów oderwanych. W ten sposób każda z tych grup zastępuje monografję liczby oddzielnej w pierwszym dziesiątku. Mamy tu przed sobą ważną i ciekawą modyfikację monograficznej metody, która, jak zresztą sporo innych rzeczy w tej książce, nie należy do spraw świadomie przez metodyków stosowanych. Idea Grubego, która w pierwszej swej postaci nie wytrzymuje krytyki, zawiera zdrowe jądro prawdy dydaktycznej i dzięki temu da się w odpowiedni sposób przekształcić, przystosować do warunków, zachowując swoją istotę, jak wszystko żywe i mocne na świecie. W drugim dziesiątku te grupy działań, które stanowią treść jednej monografji są jeszcze nieduże, później, w miarę wzrastania zakresu liczbowego, grupy te będą wzrastały, jak to zobaczymy niżej. Główna idea Grubego — łączenia w jedną organiczną całość pewnego jednorodnego materjału naukowego i wszechstronnego poznania tej całości, jako jednego ze stopni uszeregowanych w kolejnem następstwie trudności i logicznej konsekwencji, pozostaje i pozostanie słuszną niezależnie od wszelkich nowych badań i odkryć w dziedzinie poznania rozwoju rachunkowych zdolności u dzieci.

To jedno. Po drugie wspomniane grupy nie wyczerpują jednakże całej treści nauki w drugim dziesiątku. Pozostaje dokładniejsze usystematyzowanie zdobytej wiedzy. Rzecz tu głównie dotyczy takich właściwości, jak prawo przemienności, sposób dodawania i odejmowania sumy, dodawanie do sumy, odejmowanie od sumy i pewne dodatkowe kwestje, o których niżej parę słów powiemy.

Jeżeli teraz dołączymy ostatni moment do poprzednich 3 grup, stanie się jasnem, że mamy przed sobą jakby znowu 4 kolejne stopnie t. zw. stopni formalnych. Nie będę usilnie tego w tem miejscu podkreślał, bo powstałe uszeregowanie momentów nauczania wynika raczej z samej istoty rzeczy, niż ze świadomego stosowania tych stopni. Czytelnik jednakże zwróci uwagę, że w pierwszym dziesiątku wspomniane stopnie stosowano były na tle zasadniczego procesu przejścia od konkretu do abstrakcji w szeregu różnych grup o zmniejszającej się konkretnej treści, a tutaj dotyczą już pewnych zespołów liczbowych. Przedmiotem badania myśli staje się powoli sama liczba, wchodzi, jak powiedzieliśmy wyżej, logika w szerszym zakresie. Pomimo wszystko ostatnie ogniwo stopni formalnych, t. j. zastosowanie, jeżeli rzecz dotyczy zadań i przykładów, zawsze jest w użyciu niezależnie od kolejności, a jeżeli jest pewnym zespołem prawd podstawowych, dotyczy nie tyle tego zakresu, w którym zostały te prawdy wyjaśnione, ile dalszych następnych, gdzie liczba jest większa. W ten sposób w różnych dziedzinach nauczania, a szczególniej w arytmetyce, stopnie formalne służą poniekąd zasadom ciągłości i indukcji— przy odpowiedniem ich rozumieniu i stosowaniu. Nauczyciel, pragnący głębiej ująć metodę nauczania i należycie uporządkować swoje postępowanie, zechce na to zwrócić większą uwagę.

Poprzednio nadmieniliśmy, że sposoby odejmowania od sumy i dodawania do sumy (wyrażające się w następujących twierdzeniach: żeby dodać do sumy, można dodać do któregokolwiek składnika i to samo z odejmowaniem), mogą być przeniesione wyżej. Otóż w drugim dziesiątku jest na to miejsce. Tutaj w związku z zadaniem i przykładami należy rzecz jasno przedstawić. Np.: w trzech pudełkach mam stalówki: w jednem 5, w drugiem 8, a w trzeciem 3. Dostałem jeszcze 3 stalówki. Ile mam razem? Mogę robić w ten sposób, że najpierw dowiem się, ile stalówek miałem, potem dodam nowe, albo dołączę otrzymane stalówki do któregokolwiek pudełka i potem wszystko dodam. Takie samo zadanie można zastosować przy odejmowaniu. Jeszcze raz tu podkreślam, że unaocznienia i gruntownego przygotowania wymagają nie tylko same liczby, ale i działania, nie tylko oddzielne objawy arytmetyczne w postaci oddzielnych liczb, ale i prawa ich łączenia. Właściwie te ostatnie są nawet rzeczą główniejszą, zasadniczą, gdyż później w nauce arytmetyki ta lub inna liczba ustępuje na plan ostatni, —główną rolę zaczynają odgrywać związki formalne pomiędzy liczbami, np. w t. zw. algebrze. Co więcej, te związki są istotą myśli matematycznej, one zachowują się mają „tendencję" do niezmienności pomimo coraz to innej postaci w jakiej się zjawia liczba, czy to jako cakowita, czy też ułamek lub ujemna i dodatnia i t. d. Nauczyciel szkoły elementarnej, tworząc fundamenty myśli matematycznej, musi być o tyle świadom swej pracy, żeby nie popełniał błędów szkodliwych dla przyszłości. Nie jest to pomimo wszystko trudne i niewykonalne.

Pewne kwestje dodatkowe, o których wspomniałem powyżej dotyczą mnożenia i dzielenia. Jeżeli przyjęliśmy wyżej zasadę zatrzymania się w pierwszym roku tylko nad dwoma działaniami to przemawiały z naszej strony wszelkie względy natury dydaktycznej. Pomimo to, z tego powodu, że zasady nauczania nie mają nigdy charakteru doktrynerskiego, nie są twierdzeniami oderwanemi i jak łoże Madejowe wymagającemi obcinania lub gwałcącego naturalność i realne warunki życia wydłużania żywych jego organów, początki, pierwsze przebłyski mnożenia i dzielenia mogą się już zjawić w pierwszym roku. Np. takie pytania, jak połówka 4, jak dwa razy dwa, jak wogóle drobne ułamki w postaci $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$ (oczywiście, bez zapisywania) lub podwajanie, potrajanie małych liczb tak ważne w praktyce codziennego życia, mogą tu znaleźć swoje miejsce bez szkody, a nawet z pożytkiem umotywowanym właśnie przez realność stawianych zadań i tem samem związek z życiem. A związek z życiem — to związek z zainteresowaniem dzieci, to oparcie się na trwarlszym gruncie psychologicznym, czego nauczyciel nigdy omijać nie powinien. Z tego wynika, że podobne z zamiarem zrobione ustępstwo nie jest odstępstwem od reguł, słabym kompromisem, ale umotywowaną i przewidującą czynnością, a takiemi być muszą wszelkie działania wychowawcze. Wprowadzenie małych ułamków z poglądową ich ilustracją, w bezpośrednim związku z praktyką i konkretnemi rzeczami jest ważnem przygotowaniem dla późniejszej nauki ułamków; ma więc niezaprzeczalne znaczenie dydaktyczne.

Nie trzeba chyba tutaj znowu usilnie podkreślać, że razem z rozwojem liczby posuwać się winno zapoznawanie z używanemi miarami, np. z takiemi faktami, jak to, że rok ma 12 miesięcy i jakich, że pół łokcia wynosi 12 cali, że 15 inaczej nazywa się czasem „mendlem", a 12 tuzinem, że na zegarze mamy wskazane 12 godzin, co należy nauczyć odczytywać oraz używać i t. p. Nie trzeba nigdy jednakże mówić o miarach bez ich pokazania i nawet zastosowania w klasie w odpowiedni sposób.

Zakres wiedzy rachunkowej, objętej powyższym kursem, w każdym razie nie jest za mały, raczej być może za duży; wszystko bowiem zależy od warunków, w jakich uczymy. Z dziećmi inteligentniejszemi, w nauczaniu indywidualnem przejdziemy więcej, w szkole wiejskiej lub przytulonej gdzieś na przedmieściu przejść możemy znacznie mniej. To też nauczyciel niech liczy się z temi warunkami i zdaje sobie sprawę, że w nauce rachunku, jak nigdzie, właśnie jakość zdobytej wiedzy, a nie ilość, ma największe znaczenie. Jeżeli potrafi w ciągu roku w szkółce wiejskiej, wobec krótkości czasu nauczania zapoznać dzieci dobrze tylko z liczbami pierwszego dziesiątka, zrobił już niemało, tem bardziej, że wśród dzieci tych spotykają się różne. Bywają często takie, których rozwój nakazywałby sumieniu pedagoga na Zachodzie odesłać je do szkoły specjalnej, dla dzieci niedorozwiniętych. A u nas takie dzieci często idą pod stół życia...

ROZDZIAŁ VII.

Materjał podany wyżej, jak nadmieniliśmy, jest obfity— i może być w różnych okolicznościach mniej lub więcej wyzyskany, co zależy od taktu pedagogicznego nauczyciela. Pomimo to nazwaliśmy omówiony zakres programem pierwszego roku nauczania, przystosowując się do wyraźnych wymagań teorji i poniekąd praktyki nauczania. Z tego wynika, że to, o czem dalej mówić będziemy, należeć ma do drugiego roku nauczania. Zakres liczb, należących do programu roku drugiego, zawiera się w obrębie pierwszej setki, która stanowi drugi stopień nauki, ważny zarówno ze względu na swoje praktyczne znaczenie, jak zawarte w nim w wyraźniejszej formie elementy myślenia arytmetycznego, które występują z powodu zwiększenia się liczby i komplikowania oddzielnych działań. To zwiększenie jest, oczywiście, pierwszą cechą odróżniającą rok drugi od poprzedniego. Są jednakże inne cechy, na które tu przedewszystkiem zwrócimy uwagę czytelnika.

Najpierw musimy sobie zdać w krótkości sprawę z pewnej różnicy charakterystycznej, jaka występuje tutaj w porównaniu z pierwszym rokiem. Wspominaliśmy już, że w miarę wzrastania zakresu liczbowego wyobraźnia odmawiać zaczyna posłuszeństwa, t. zw. „wyobrażenie liczby" traci swój grunt i poglądowość modyfikuje się, ścieśnia, ustępuje, a natomiast zjawia się czynnik inny, nader ważny: rozumowanie oparte na dostrzeżonych i n d u k c y j n i e własnościach formalnych działań i podobieństwach w tworzeniu liczb. Jak wszystko w nauczaniu, tak i ten czynnik zjawiać się winien stopniowo, powoli, powinien być wprowadzany z ostrożnością wielką. Nic bowiem łatwiejszego tutaj, jak przesadzić i niemal na zawsze zabić zdolności matematyczne dzieci. Mówiliśmy już o t. zw. prawie przemiennościowem przy dodawaniu, o własnościach dodawania i odejmowania sumy. W drugim dziesiątku zrobiony był kapitalny krok naprzód przez wytworzenie pojęcia dziesiątka i sposobu powstawania liczb na zasadzie systemu dziesiątkowego i pozycyjnego. Pewien myślący metodyk nazywa wynalezienie systemu pozycyjnego jednym z największych wynalazków ludzkich. Czyż nie jest to słuszne? Tymczasem nieraz obchodzimy się z tem w nauczaniu pobieżnie, jakbyśmy mieli do czynienia z rzeczą, której się na pamięć nauczyć można.

Prócz wspomnianych własności działań należy zwrócić uwagę w następstwie między innemi jeszcze na p r a w o ł ą c z n o ś c i o w e przy dodawaniu, polegające na tem, że składniki można łączyć w różne grupy po dwa lub kilka i przez to suma się nie zmienia. Tak samo na prawa rozdzielnościowe i przemiennościowe przy mnożeniu, z których wynika np., że $(5+2)\ 3 = 3 \,.\, 5 + 3 \,.\, 2$ i $3 \,.\, 5 = 5 \,.\, 3$. Są to te kapitalne kwestje formalne, które wyjaśnić winno indukcyjne rozumowanie przez przykłady konkretne i zadania. Na nich oprzemy ważne wnioski metodyczne.

Im przestronniejszym dalej się staje zakres liczbowy, tem częściej występować zaczynają s z e r e g i, wytwarzane przez uczni. Np. $21+2 = 23$; $31+2 = 33$ i t. d. Znaczenie tych szeregów jest podwójne: wskazują podobieństwa tworzenia liczb niezależnie od wielkości tychże, a po drugie, zbędnem czynią ściślejsze monograficzne traktowanie. Poprzednio toż mieliśmy szeregi np. $7+1 = 8$; $6+2 = 8$ i t. d., ale te szeregi różnią się od wspomnianych, gdyż każdy wyraz musi być oddzielnie poznany, uzmysłowiony, gdy tymczasem w poprzednim szeregu odgrywają rolę czynniki formalne, uczniowie sami go w y t w a r z a j ą. Dojrzałość myśli również polega na tem, że przejawia się w niej świadome, celowe operowanie pojęciami. W takich szeregach mamy jeden z ciekawych przykładów tego.

Jedną z głównych atoli kwestyj, jaką poruszamy w roku drugim, są nowe działania: mnożenie, mieszczenie i dzielenie. Jak już było powyżej zaznaczone, odróżniamy mieszczenie i dzielenie ze względu na ich treść konkrentą, nie zaś na proces formalny, który wyraża się w jednem i tem samem działaniu. Jak mnożenie wynika z dodawania, tak samo mieszczenie i dzielenie — z odejmowania. Nie należy o tem pamiętać tylko na początku, ale i w dalszych stadjach nauki w drugim roku. Z mnożeniem związana jest t. zw. tabliczka mnożenia, z której wynika tabliczka dzielenia. Zaznajomienie z temi tabliczkami jest rzeczą nader ważną i nie może się opierać tylko na „wykuwaniu". Takie wykuwanie niczego nie uczy i nawet jest zwodnicze, bo pamięć w wieku młodym jest świeża, ale i nader nietrwała w takich rzeczach.

W roku drugim nauczania komplikują się dalej, rzecz jasna, dwa znane działania: dodawanie i odejmowanie, a szereg trudności, który tu się nasuwa zmusza nas do odpowiedniego stopniowania całego materjału i tem samem podzielenia go na pewne wyraźne grupy. Stosowanie monograficznej metody z jej odpowiedniem rozszerzeniem będzie tu również nam pomocne, trzeba tylko monografję rozumieć tak, jak to było wyjaśnione powyżej. Każda ze wspomnianych grup ma być oddzielną monografją, traktującą o pewnym ważnym dla następnej nauki zespole pojęć. Prócz tego wewnątrz każdej monografji podzielimy materjał nauczania na części drobniejsze, obejmujące pewne pokrewne kwestje, i przedstawimy je w odpowiedniem stopniowaniu.

Takich głównych grup w zakresie pierwszej setki jest trzy: 1° wprowadzenie pojęć mnożenia i dzielenia w znanym obrębie liczbowym dwóch pierwszych dziesiątków, 2° dodawanie i odejmowanie liczb pierwszej setki i 3° tabliczka mnożenia do 50.

Pierwsze dwie grupy zapewne nie budzą żadnej wątpliwości, gdyż jasnem musi być dla każdego, że wprowadzenie mnożenia najlepiej się odbyć może w zakresie dzieciom znanym, a dodawanie i odejmowanie jako oddzielne grupy też chyba wątpliwości nie budzą. Inaczej się rzecz może przedstawiać z uporządkowaniem tych grup, t. j. z kolejnem ich następstwem i 2° z zawartością trzeciej grupy. Temi ostatniemi sprawami najpierw się zajmiemy.

Pierwsza z nich nie przedstawia również wielkich trudności, jest bowiem rzeczą jasną, że zanim przejdziemy do nowego zakresu liczbowego, musimy gruntownie poznać poprzedni. Z tego wynika, że zwrócenie się ponowne do dwóch pierwszych dziesiątków dla wyjaśnienia tam pierwszych pojęć o mnożeniu i dzieleniu, a tem samem poznania ich jeszcze z tej nowej strony, jest zupełnie naturalnem postępowaniem, które stanie się jeszcze zrozumialszem, jeżeli zwrócimy uwagę na konieczność powtórzenia pensum poprzedniego roku po dłuższej przerwie wakacyjnej. Przy tem powtórzeniu, które, notabene, nieraz wykaże nauczycielowi zarówno słabe punkty jego nauczania, jak i dodatnie strony (zdarzają się czasem niespodzianki wtedy, gdy nauka była prowadzona dobrze w poprzednim roku) w postaci daleko większej pewności i łatwości w rachunku u niektórych dzieci. Pochodzi to stąd, iż pewne pojęcia niejasne dla dzieci przy pierwotnem z niemi zapoznaniu się, po pewnym czasie wyklarowują się, jak uczy doświadczenie, prawie samorzutnie, bez pomocy z naszej strony. Stwierdzam ten fakt, nie wchodząc wcale w wyjaśnienie i umotywowanie jego psychologiczne.

Im człowiek jest starszy, tem — zdaje się — podobne zjawisko częściej się przytrafia.

Wprowadzenie pierwszych pojęć o mnożeniu i dzieleniu nie pociąga za sobą jednakże natychmiastowego rozszerzenia tych pojęć na większy zakres. Dlatego, żeby nauka mnożenia i dzielenia w tym zakresie była istotnie „nauką mnożenia i dzielenia", a nie „nauką o mnożeniu i dzieleniu", że użyjemy tu zwrotu Deweya, stosowanego przez niego do kształcenia moralnego, konieczne jest dłuższe zatrzymanie się na tym początkowym zakresie. Przebrnąwszy pierwsze trudności wyjaśnienia tych pojęć i zdobycia jakiej takiej wprawy w ich stosowaniu, nauczyciel, nie ustając w ćwiczeniach i stosowaniu ich w zadaniach i przykładach, przechodzi do następnej grupy drugiej. W czasie pracy nad nią te pojęcia wyklarują się należycie i umocnią, mogą stać się naprawdę własnością umysłu dziecięcego. Tam, gdzie ma się do czynienia z bardzo ważnemi rzeczami, tam szczególnie, gdzie chodzi o naukę zbiorową, taka ostrożność, jak uczy doświadczenie, jest konieczna i potrzebna.

Przejście do grupy trzeciej będzie możliwe wtedy, gdy dzieci owładną materjałem dwóch pierwszych. Może to być w pewnych warunkach nawet niewykonalnem, ale staje się rzeczą naturalną, gdy nauczyciel posiada dowody praktyczne i pewność wspomnianego opanowania.

Trudniejszą jest druga sprawa. Dlaczego mamy zatrzymać się tylko w obrębie 50? Do czego potrzebny jest taki mistycyzm liczbowy? Otóż tutaj należy nieco głębiej wejrzeć w istotę rzeczy.

Tabliczka mnożenia, która jest podstawą zarówno mnożenia, jak i dzielenia liczb, ma wielkie znaczenie w nauczaniu rachunku, a ponieważ w praktyce potrzebne jest możliwie wprawne liczenie, więc musi być przyswojona dokładnie, rzetelnie opanowana pamięciowo. Do takiego opanowania prowadzą dwie drogi: 1° przez zwyczajne uczenie się jednorazowe oddzielnych części tabliczki na pamięć i 2° przez rozłożenie tego uczenia się na dłuższy okres czasu i stosowanie obok „kucia" praktyki, t. j. ćwiczeń poprzedzających oddzielne jednorazowe uczenie się na pamięć. Ta pierwsza droga była i jest często stosowana, gdyż wydaje się prostszą i nawet łatwiejszą. Podobna prostota nie jest zaletą, a tem bardziej argumentem, a łatwość podlega bardzo poważnym zarzutom.

Jak już nieraz podkreślaliśmy wyżej, nauczanie jest nie tylko podawaniem wiedzy, ale procesem wychowawczym. Wspomnianą prostą drogą można papugę nauczyć tabliczki mnożenia, ale nie można rozwinąć jej umysłu. Nauczanie danego przedmiotu ma swój cel wewnętrzny — osiągnięcie panowania nad tym przedmiotem, ale obok niego nie mniej, jeżeli nie więcej ważny,—rozwój sił psychicznych ucznia. Bierne wykuwanie temu zadaniu nie tylko sprostać nie może, ale wprost przeciwdziała. Z drugiej strony psychologja poucza, że takie bierne jednorazowe wykuwanie prowadzi przy stosunkowo małym rezultacie do wielkiego wydatkowania energji umysłowej. Lepszą jest metoda rozkładania danego materjału na dłuższy okres czasu oraz dzielenia go na jednorodne, spójne części i opanowywania stopniowego tych części. Fakt ten, udowodniony drogą eksperymentu przez szereg psychologów, ma doniosłe znaczenie dydaktyczne i przechyla właśnie szalę na korzyść drugiej metody.

Tabliczkę mnożenia wogóle można podzielić na 3 główne części, uszeregowane według stopnia trudności. Ażeby otrzymać te części, wypiszmy liczby pierwszego dziesiątka w następny sposób:

1 2
3
4 5
———————————
6
8 7
9
10

Kreska, postawiona w środku, dzieli zespół liczb na dwie grupy, które symbolicznie nazwiemy A i B. Mnożenie przez siebie liczb pierwszej grupy (za wyjątkiem $5 . 5 = 25$) daje rezultat, zawarty w dwóch pierwszych dziesiątkach i stanowiący tem samem pierwszy, zasadniczy, przygotowawczy stopień tabliczki mnożenia. Mnożenie liczb pierwszej grupy przez liczby drugiej daje iloczyny nie przekraczające 50. Nakoniec mnożenie liczb drugiej grupy przez siebie prowadzi do liczb, zawartych przeważnie w drugiej połowie setki. Nazwijmy zespół iloczynów pierwszej grupy przez A^2, drugiej przez AB, a trzeciej przez B^2. W ten sposób zgodnie z wymaganiem, poprzednio wyrażonem, do drugiego roku nauczania należałyby tylko dwie części A^2 i AB w całości, a więc, jeżeli nie uwzględnimy iloczynów otrzymanych od mnożenia przez 1, różnych iloczynów mamy 39, które muszą być dokładnie opanowane i wprost zmechanizowane. Nie jest to mało, co tem bardziej się uwidoczni, jeżeli zważymy, iż na tym materjale wyjaśniać mamy pojęcie mnożenia, a z niem dzielenia oraz zastosować do przykładów więcej skomplikowanych w rodzaju: $12 \times 2 = 24$ i t. p. Z drugiej strony należy też zaznaczyć, że nieraz bardzo wybitni pedagogowie są zdania, iż w drugim roku wcale nie należy poruszać mnożenia i dzielenia i, jakkolwiek ten pogląd zdaniem mojem nie da się utrzymać, to jednakże świadczy on o tej ostrożności, jaką należy zachować względem rzeczy tak podstawowych dla rachunku.

Powyższe uszeregowanie liczb pierwszego dziesiątka posiada jeszcze inną lukę. Widzimy tu, że liczby te tworzą pewne kolumny, np. 2, 4, 8. Otóż te kolumny złożone są z liczb o wspólnym podstawowym dzielniku, dzięki czemu np. iloczyn przez 4 dostaje się z iloczynu przez 2 zapomocą powtórnego podwojenia. Takie szeregi warto mieć na widoku przy dobieraniu kolejnych przykładów na mnożenie (i zadań) oraz odwoływać się do mnożenia przez mniejszą liczbę (np. przez 3), przy mnożeniu przez większą (np. przez 6). Że nie jest to tylko formalna błahostka, świadczy o tem eksperymentalnie stwierdzony fakt, iż iloczyn 7×8 jest najtrudniejszy ze wszystkich w tabliczce mnożenia. Liczba 7 stoi samotnie i oddzielnie i dlatego pamiętanie iloczynu przez nią jest trudniejsze, a z drugiej strony iloczyny 7 przez 9 i 10 są łatwiejsze, bo $7 . 9 = 7 . 10 - 7$, a iloczyny przez liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6 dotyczą liczb mniejszych. Pozostają iloczyny 7×7 i 7×8. Otóż łatwiej wrażają się w pamięć te rzeczy, które mają specjalną cechę, w danym przypadku taką jest równość mnożnej i mnożnika (7×7), co przeważa szalę trudności na 7×8. Rzecz jasna, że podane wyjaśnienie może nie wystarczać, ale wydaje się słusznem. Oddzielnie stoi również jednostka, ale iloczyny przez nią nie przedstawiają trudności, jakkolwiek niesłusznie sądzą ci, którzy uważają, że należy od tych iloczynów zaczynać. Tu zupełnie ta sama zachodzi okoliczność, jak przy dodawaniu lub odejmowaniu 0. Może to być początkowem działaniem w znaczeniu formalnem, ale nie w znaczeniu konkretnem, z którem tak związane jest nauczanie początkowe. System i logika w danym razie muszą ustąpić psychologji, jak zresztą w wielu innych miejscach.

Z tego, co powyżej zostało powiedziane, stanie się zrozumiałem, że podział tabliczki mnożenia na wspomniane 2 główne części jest racjonalny ze względu na inną, niż zwykle, pożyteczniejszą metodę nauczania, wobec czego znika nadmieniony mistycyzm, a wchodzą w swe prawa ważne czynniki natury pedagogicznej. Zdanie: agendo discimus (uczymy się przez czyn) znajduje w tym przypadku swoje zastosowanie, jak wogóle wszędzie, gdzie sięga zasada samodzielności.

W ten sposób przedstawia się całość nauczania w drugim roku. Mamy tu przed sobą trzy główne grupy, trzy oddzielne monografje, które należy traktować z odpowiedniem stopniowaniem, o którem była mowa w poprzednich rozdziałach. Niżej o tem kilka szczegółów głównych podamy, a dlatego przejdziemy do omówienia bliższego każdej z tych grup.

Zaczniemy od wprowadzenia pojęcia mnożenia. Rzecz jasna, że nauczyciel, zanim przejdzie do dalszych stopni nauki, powinien powtórzyć poprzednie. Jeżeli rzecz się dzieje po wakacjach, kiedy zmienna i silna fala nowych, żywych i interesujących wyobrażeń przemknęła przez dusze dzieci, takie powtórzenie jest konieczne, jak to wie każdy doświadczony nauczyciel. Otóż powtarzamy dadawanie, odejmowanie, dopełnianie i rozkładanie w pierwszych dwóch dziesiątkach, powtarzamy dotąd, urozmaicając rzecz zadaniami, póki się nie przekonamy, że średni uczeń włada tem należycie. Wtedy zaczynamy rzeczy nowe. Nie skończyliśmy jeszcze z liczbami 1-go dziesiątka, nie rozkładaliśmy ich na czynniki. To właśnie stanowi przedmiot dalszych zajęć. Nauczyciel przypomina to, co mogło być zrobione w tej materji i idzie dalej. Zrozumiałem jest, że wprowadzając nowe pojęcie, należy wytworzyć takie warunki, aby to pojęcie w najjaśniejszej wystąpiło formie, i dlatego bardzo ważne jest zagadnienie o środkach uzmysławiających mnożenie. Mogą to być przedmioty różne, ale związane są z tem wielkie trudności: bardzo trudno bez ż m u d n e g o l i c z e n i a oceniać otrzymany rezultat. Stąd, jakkolwiek środka tego nie odrzucamy (może kto obmyśli dobry sposób i zaradzi brakowi), główny nacisk kładziemy na przyrządy. Tu, jak nigdzie, wyraźnie zaznacza się potrzebą znanej podwójnej barwy krążków i kulek. Np. chcemy uzmysłowić, że 3 × 4 = 12. Układamy na przyrządzie krążki w następujący

sposób:
∘ ∘ • • ∘ | ∘
∘ ∘ • • ∘ | ∘

Kreska pionowa oznacza przegródkę na przyrządzie. Dzieci rzecz widzą odrazu. Tak samo można zrobić na liczydle, pokręcając pewne kulki, aby odwróciły się

inną barwą:
∘ ∘ ∘ ∘ • • • • ∘ ∘
∘ ∘

Liczydło ma nawet pewną przewagę nad poprzednim przyrządem, gdyż 1-o dziesiątek (a p ó ź n i e j d z i e s i ą t k i) występuje oddzielnie i 2-o grupy kulek są zawsze jednostajnie uszeregowane. Weźmy np. przypadek taki: 3 × 5 = 15. Wtedy na przyrządzie pierwszym

figura wypadnie taka:
∘ ∘ ∘ • • | ∘ ∘ ∘
∘ ∘ • • • | ∘ ∘

. Tutaj widocznem jest, że druga piątka jest odwrócona (symetrycznie względem punktu), a stąd nie tak łatwo ją okiem chwytać, jakkolwiek przewidujący nauczyciel może rzecz tę usunąć, przyzwyczajając dzieci do chwytania figur podobnie odwróconych.

Przy uzmysławianiu mają nieraz znaczenie czynniki niespodziewane i jakby uboczne, które podsuwa czasem przypadek lub inwencja uczącego. Z samego np. sposobu uzmysłowienia widocznem jest, że dla dzieci łatwiej jest chwytać rzecz, gdy mnożna jest większa, więc np. rozkładamy 14 na dwie grupy po 7, 16—po 8, 18—po 9, dalej 15 na trzy grupy po 5 i t. d. Prawo przemiennościowe przy mnożeniu również uzmysławiamy w ten sam sposób, np. 4×3, gdzie występują 4 trójki różnobarwne. Można też używać sposobu prostokąta, np.

$$\begin{matrix}\circ & \bullet & \circ & \bullet\\ \circ & \bullet & \circ & \bullet\\ \circ & \bullet & \circ & \bullet\end{matrix}$$

Stąd widocznem jest, że $4 \times 3 = 3 \times 4$. Tyle o uzmysłowieniu mnożenia, a tem samem i związanego z niem dzielenia. Należy teraz powiązać to uzmysławianie z samym procesem wyjaśniania pojęć związanych z mnożeniem.

Najpierw nauczyciel stara się uprzytomnić uczniom używanie takich wyrazów, jak „raz", „dwa razy" i t. p. Oczywiście, na początku chodzi o praktyczne ich stosowanie w codziennem życiu. Pyta się więc, ile razy chodzisz do szkoły, ile razy jesz obiad, ile razy machnąłem ręką lub uderzyłem nią po stole i t. p. Dalej przypomina takie sumy, jak $2 + 2$, $2 + 2 + 2$, $3 + 3$ i t. p., t. j. składające się z jednakowych składników i uzmysławia te sumy w sposób powyżej nadmieniony na przyrządach, przyczem zadaje pytania, ile razy wchodzi tu 2, 3 i t. p. Stąd wniosek: dwa razy dwa jest cztery, dwa razy trzy jest 6 i t. d. Opieramy się na dodawaniu, a więc wiążemy nowe pojęcie z poprzednio znanem — dodawaniem. To wiązanie występuje na początku ciągle, później opuszczamy dodawanie i wprost posługujemy się tylko pytaniami w rodzaju: ile będzie 2 razy 4. W razie braku następnej odpowiedzi nauczyciel znowu odwołuje się do przyrządu i dodawania.

Gdy dzieci uświadomią sobie, że można prędko odpowiadać na podobne pytania, a więc po należytej wprawie, wprowadzamy nazwę: m n o ż e n i e. W ten sposób przechodzimy najpierw mnożenie przez 2, dające iloczyny zawarte w pierwszym dziesiątku, potem takie same iloczyny przy mnożeniu przez 3, 4 i 5, przyczem z początku bezpośrednio, konkretnie dzieci przekonywają się o tem, że np. 2×3 jest tem samem, co 3×2, to jest poznają p r a w o p r z e m i e n n o ś c i, które, jak to powyżej nadmieniliśmy, może być w odpowiedni sposób uzmysłowione. Prawa tego, oczywiście, nie formułujemy, ale stosujemy go w zadaniach konkretnych w rodzaju: jeden chłopiec posadził na 3 grządkach po 2 krzaczki malin, a drugi na 2 grządkach po 3; ile posadził każdy?

Przerobiwszy w ten sposób odpowiednie przykłady na mnożenie w pierwszym dziesiątku, zwracamy uwagę na związki pomiędzy niemi, przyczem występuje p r a w o r o z d z i e l n o ś c i. Np. $2 \times 4 = 2 (2 + 2) = 2 \times 2 + 2 \times 2$. Tę rzecz należy wyjaśniać w zadaniach. Np.: dwaj bracia dostali od mamy po

2 gruszki, a potem jeszcze raz po 2; ile dostali gruszek? Można to zadanie zrobić dwoma sposobami i stąd wypada stosowanie prawa rozdzielności. Rzecz prosta, że to prawo nie odrazu stanie się jasnem, że trzeba szeregu cierpliwych i żmudnych dla nauczycieli, ale nie nudnych dla uczni ćwiczeń.

Nauczyciel bierze dwa piórniki i przed oczami dzieci wkłada do jednego np. 3 stalki, a do drugiego 2. Pyta się, ile włożył do obu? Następnie wkłada znowu do pierwszego 3, a do drugiego 2. Znowu, ile włożyłem? Razem ile włożyłem? A teraz powiedz mi, ile razy włożyłem po 5 do obu piórników? Dalej, ile razy włożyłem po 3 do pierwszego piórnika? Ileż tam będzie? Ile razy włożyłem po 2 do drugiego piórnika? Ileż tam będzie? Ile razem będzie? Odpowiedź ta sama. Zadanie można zrobić 2 sposobami, jakiemi? Zapiszmy pierwszy sposób: 3 s. + 2 s. = 5 s.; 2 × 5 s. = 10 s. Zapiszmy drugi sposób: 2 × 3 s. = 6 s.; 2 × 2 s. = 4 s.; 6 s. + 4 s. = 10 s. Stąd widzimy, że można napisać: 2 × 5 s. = 6 s. + 4 s. = = 2 × 3 s. + 2 × 2 s.

Oczywiście, należy podać szereg różnych co do treści, ale podobnych przykładów. Następnie uzmysławiamy rzecz na liczydle, używając do tego kilka drutów. Np., mamy pomnożyć, jak powyżej: 2 × 5. Na pierwszym drucie układamy kulki tak: ∘ ∘ ∘ ∘ ∘ • • • • •. Na drugim notujemy zapomocą kulek: ∘ ∘ ∘ • •, t. j. 5 = 3 + 2. Na trzecim przez odpowiednią manipulację z kulkami wytwarzamy taką figurę: ∘ ∘ ∘ • • • ∘ ∘ • •. Nie trzeba chyba mówić, że nauczyciel omawia całą operację i daje zapytania.

Przy tem wszystkiem pomóc może dużo również zadanie. Np.: ciocia miała trzech siostrzeńców i dwie siostrzenice; każdemu dziecku dała po dwie śliwki; ile rozdała śliwek?

Po takich wyjaśnieniach, które przedłużamy dotąd, póki nie będziemy mieli pewności, że dzieci zrozumiały omawianą sprawę, zdobyć możemy czynnik nader ważny, jak to zaraz zobaczymy. Weźmy jako przykład podwajanie liczb pierwszego dziesiątka. Mamy dane do pomnożenia: 2 × 8. Notujemy natychmiast: 8 = 5 + 3. Stąd 2 × 8 = 2 × 5 + 2 × 3. Jeżeli dzieci przez naukę poprzedzającą dobrze umieją mnożyć liczby, których iloczyn nie przekracza 10, natychmiast powiedzą: 2 × 8 = 10 + 6 = 16. Można wprowadzić stały sposób rozdzielania liczb na piątkę i resztę, przez co znakomicie się ułatwi proces mnożenia. Wogóle należy szczególną uwagę zwrócić na mnożenie 5 i przez 5. Np. 4 × 5 jest to samo, co 5 × 4 na zasadzie pojmowania prawa przemienności. Stąd 5 × 2 = = 5 × 2 + 5 × 2 = 10 + 10 = 20. Podsunięcie takiego mechanizmu myślowego przy wykonywaniu mnożenia ma wielką wartość dydaktyczną.

Po opracowaniu pierwszego dziesiątka przechodzimy do drugiego, przyczem zaczynamy od mnożenia przez 2, tworząc szereg: 2 × 2, 2 × 3, 2 × 4, 2 × 5, a potem 2 × 6. Jak dać odpowiedź? Nauczyciel spróbuje najpierw zastosować prawo rozdzielności, a gdyby to nasuwało trudności, uda się do pomocy przyrządu, przyczem zwraca uwagę, że mamy tu 6 dwójek, t. j. podkreśla prawo przemienności i ilustruje prawidłowość przez odwołanie się do poprzednich przykładów, np. przy 2 × 5 jest 5 dwójek i t. p. Czemu się dalej równa 2 × 7?

Odpowiedź uczniowie mogą dać na zasadzie analogji: jest tu 7 dwójek, a więc 2 × 6 + 2 = 12 + 2 = 14. Tutaj znowu zwraca się uwagę na prawo rozdzielności (2 × 7 = 2 (5 + 2) = 14) i na prawo przemienności i t. d. Dalej następuje mnożenie przez 3 i 4 liczb pierwszej 5, można też dawać takie iloczyny, jak 3 × 6 i t. p. Ten ostatni iloczyn i 2 × 9 mogłyby pomóc do zwrócenia uwagi na prawo łączności przy mnożeniu, ale obecnie zbyt skomplikowałoby to pracę.

Rzecz jasna, że zapisywanie może być stosowane w całej rozciągłości, przyczem trzeba podkreślić, iż nauczyciel najpierw radzi zapisywać tak, jak się mówi i jak my robiliśmy powyżej, t. j. np. przy mnożeniu 3 przez 2 tak: 2 razy 3 czyli 2 × 3, gdzie × oznacza słowo „razy". Dopiero poznanie dokładniejsze i przyzwyczajenie się do prawa przemienności może pozwolić na przejście do zwykle używanego sposobu zapisywania. Kiedy to nastąpi, — nie można dokładnie powiedzieć i należy rzecz zostawić rozwadze uczącego. Jedno tu muszę podkreślić z całym naciskiem, że zwrócenie uwagi na prawa przemienności i rozdzielności jest rzeczą bardzo ważną i że nie trzeba szczędzić wysiłku, aby te podstawowe własności mnożenia wyklarować należycie już chociażby z tego względu, że proces zapamiętywania tabliczki mnożenia idzie dwoma drogami: 1° przez samo mechaniczne zapamiętywanie zdobywane przez częste przykłady i zadania i 2° przez stosowanie powyższych praw. Uczeń, który te prawa zna, umiejąc odpowiedzieć na pytania, zawarte w przykładzie: 2 × 3 = ?, odpowie też na drugie: 3 × 2 = ?. Tak samo, żeby odpowiedzieć na pytanie: 2 × 7 = ?, można stosować znane rzeczy w postaci pytań: 2 × 5 = ? i 2 × 2 = ?. W tym drugim wypadku udajemy się do pomocy t. zw. „logicznej pamięci".

Przy mechanizowaniu odpowiedzi nie należy też pomijać uszeregowania, o którem była mowa wyżej, np. 2 × 2, 4 × 2, 8 × 2 i t. p. Gdy materjał, zawarty w dwóch pierwszych dziesiątkach, zostanie należycie przerobiony, możemy przystąpić do zapisania pierwszej części tabliczki mnożenia, t. j. mnożenia liczb pierwszego dziesiątka przez 2 i ostatecznego utrwalenia jej w pamięci.

Czytelnik zechce zwrócić uwagę na to, w jaki sposób w powyższem uporządkowaniu nauczania stosujemy stopnie formalne. Na tem jednakże nie kończy się sprawa z 2 pierwszemi dziesiątkami. Mamy jeszcze dzielenie. Nie można rekomendować tak jak przy dodawaniu i odejmowaniu, aby mnożenie właściwe i dzielenie towarzyszyły sobie bezpośrednio. Nie jest to potrzebne dlatego, że mnożenie opiera się na dodawaniu i właściwie na tym stopniu tylko prawa przemienności i rozdzielności są czemś nowem i o tyle trudnem, że nie należy komplikować rzeczy przez wprowadzenie nowej trudności — dzielenia, które właściwie staje się dostępnem w całości tylko po dobrem zapoznaniu się z tabliczką mnożenia. Dzielenie jako proces formalny rozpada się ze względu na swe konkretne zastosowanie na dwie części: mieszczenie i właściwe dzielenie. Mieszczenie jest w związku konkretnym z odejmowaniem i można z tej strony wyjaśnienie tego działania otrzymać, ale dzielenie samo wygodniej jest oprzeć na znajomości dokładnej tabliczki mnożenia. Na tem polega jego trudność i potrzeba stosowania po mnożeniu. Rzecz jasna, że również dla tego powodu należy zacząć od mieszczenia, które łatwiej da się zilustrować i ma w odejmowaniu pomocnika, a potem dopiero wychodząc z mieszczenia i tabliczki mnożenia wprowadzić właściwe dzielenie. Gdybyśmy to wszystko robili odrazu na początku mnożenia, zbyt skomplikowałaby się cała procedura nauczania. Dlatego musimy odstąpić od zasady, stosowanej przy odejmowaniu i dodawaniu. Na to możnaby odpowiedzieć, że na razie dobrzeby było złączyć tylko mieszczenie z mnożeniem, a potem dopiero przejść do dzielenia. Takie postawienie sprawy jest niewygodne z tego powodu, że to przeczy zbyt wyraźnie zasadniczej jedności dzielenia, o którą nam powinno chodzić. Tej jedności zaprzecza konkretne stosowanie działania, a nie samo jego wykonanie.

Wyjaśnienie i ugruntowanie mnożenia pociąga za sobą zaraz mieszczenie. Przy tej sposobności należy przypomnieć znane dzieciom miary i faktycznie wykonać kilka przynajmniej rzeczywistych pomiarów. Używać można do tego łokcia, metra, decymetra, stopy i t. p. Pomiary te mogą być wykonane w klasie lub gdziekolwiek w innem miejscu, ale nauczyciel musi się do tego przygotować, aby rezultat nie zrobił kłopotu (mogą się zostawać reszty). Przyjęto mówić, że dana liczba tyle a tyle razy m i e ś c i się w drugiej, dana długość m i e - ś c i się w drugiej długości. Nie będę się spierał o słowa, ale w niektórych przykładach konkretnych takie wyrażenie czasem jest nietrafne. Np.: ile razy mieści się 5 domów w 15 domach? Inne wyrażenia, jak: „zawiera się”, „wchodzi” i t. p., posiadają te same wady, które jeszcze wyraźniej występują przy ułamkach. Pomimo to nowego wyrażenia stworzyć nie usiłuję. Po uzmysłowieniu mieszczenia, jak poprzednio, na krążkach, przykładach i t. p. przy uwzględnieniu jego zależności od odejmowania należy umieć zapisywać działanie. W „mieszczeniu" rezultat działania zawsze jest liczbą, wskazującą „liczbę razy". Możemy przy przykładach i zadaniach zapisywać z mianami, naprz. 15 guz. : 3 guz. = 5, a przy przykładach liczbowych tak samo bez mian. Niektórzy radzą przy dzieleniu prowadzić zapisywanie w ten sposób: $\frac{1}{5}$. 15 guz. = 3 guz. czyli piąta część piętnastu guzików jest 3 guziki. Podobny sposób zapisywania, nadający się w dzieleniu, ma swoje zalety, gdyż odrazu przyzwyczaja do szukania części z całości. Zdaje mi się jednakże, że sposobu zapisywania zmieniać niema potrzeby, gdyż powyższy jest zbyt skomplikowany i niejasny zwłaszcza na tym poziomie. Na początku dobrze jest również zapisywać dwie równości: 3 g. $\times$ 5 = 15 g., a potem 15 g. : 3 g. = = 5. Stawianie mian szczególnie dla dzieci, które niewprawnie piszą, sprawia niemałą stratę czasu i kłopot, ale wyzbyć się tego, znaczy to samo, co zwalczyć zakorzenione przyzwyczajenie.

Tak samo jak mieszczenie, właściwe pojęcie dzielenia nie jest obce dzieciom z własnego ich doświadczenia. To też zaczynamy od takich przykładów, które mogą być znane. Np.: ojciec miał trzy orzechy włoskie i rozdał je trojgu dzieciom swoim; ile dał każdemu dziecku? Podobnyż przykład, gdy mamy, dajmy na to, 6 orzechów. Jaką część wszystkiego dostało każde dziecko?

Takie są tu odnoszące się pytania. Rozwiązanie ich otrzymać można, jak to było już powiedziane, na dwóch drogach: 1° na tle mnożenia i 2° za pośrednictwem mieszczenia. Jeżeli uczeń wie, że 2 $\times$ 3 = 6, to przez odwrócenie zagadnienia w połączeniu z uzmysłowieniem odpowiedzieć może, ile będzie wynosiła trzecia część 6. Nauczyciel powinien się starać wydobyć odpowiedź tę na konkretne zadanie, odwołując się właśnie do odpowiedniego przykładu na mnożenie. Zapewne, że w tem zawiera się trudność, ale tę trudność można zwalczyć przez wprawę szczególnie w przerabianiu takich małych przykładów. Wogóle działania odwrotne posiadają tę trudność zawsze,—wszak nawet w odejmowaniu ona istnieje, ale w znacznie mniejszym stopniu. Z powodzeniem można też stosować metodę próbowania, polegającą na tem, że zakładamy najpierw, ile będzie wynosiła dana część, a później sprawdzamy rzecz przez mnożenie. Jeżeli wychodzimy z zagadnienia mieszczenia, t. j. jeżeli np. chcemy podzielić 6 przez 3 i dowiadujemy się najpierw, ile razy 3 mieści się w 6, a potem z tego, że 2 $\times$ 3 =

$= 3 \times 2$, wnioskujemy o pożądanej części, postępujemy inaczej niż poprzednio, bo opieramy się na znanym już rezultacie mieszczenia. W każdym razie obydwa te sposoby trzeba stosować i łączyć ze sobą, a dla ułatwienia używać przy tych zagadnieniach uzmysłowienia, które tu bardzo może być pomocne. Uzmysławiając na liczydle w ten sam sposób, jak poprzednio, pytamy się, jaką część te kulki stanowią całej liczby kulek. (Np. przedstawiono 6 podzielone na 3 dwójki. Ile tu tych dwójek? Każda para kulek [każda dwójka] stanowi część 6 kulek. Jaką część?). Takiej samej dyskusji powinny podlegać pytania: ile razy więcej? ile razy mniej? Opracowując każde z takich pytań, nauczyciel zadaje odpowiednie przykłady i zadania. Np.: Wicio ma 4 stalki, a Kazio 2 razy mniej; ile ma Kazio? Przerabiamy w taki sposób cały zakres od 1 — 20, póki się nie nabierze pewności, że dzieci rzecz zrozumiały.

Fakt, że zakres od 1—20 jest dzieciom znany z poprzedniej nauki, sprzyja właśnie dobremu ugruntowaniu pojęć mnożenia i dzielenia. Tworzenie szeregów na mnożenie i dzielenie w tym zakresie nie jest jeszcze wygodne, gdyż łatwo go przekroczyć, ale z tego nie wypada, by nauczyciel trzymał się byle jakiego porządku: pozostaje on przy dzieleniu tem samem, jak przy mnożeniu. Wyjaśnione dla innych liczb pojęcia mnożenia i dzielenia należy też zastosować do 1, którą powyżej ominęliśmy. Teraz dopiero jest to właściwe, gdyż w mnożeniu przez 1 nie jest zawarte dodawanie, a więc w tym przypadku należy wyrobione pojęcie mnożenia uogólnić. Kładę np. na liczydle 5 kulek i pytam: ile razy wziąłem 5 kulek? Raz — odpowiedź jasna. Ile razy 5 kulek mieści się w 5 kulkach? Raz — również dobrze. Ale jaką część stanowi 5 kulek pięciu kulek? Tutaj pytanie jest wprost dla dzieci niepotrzebne. Bawić się dalej w zapisywanie: $2 \times 1 = 2$, $3 \times 1 = 3$ i t. d. również niema potrzeby. Kiedyśmy już spostrzegli, że pojęcie mnożenia jest ugruntowane w tym zakresie, możemy na te rzeczy zwrócić uwagę; będzie to jakby uogólnieniem tego pojęcia, ale wyjście z takich przykładów nie jest racjonalne.

Prawo rozdzielności stosuje się też przy mieszczeniu i dzieleniu. Np.: $18 : 3 = 15 : 3 + 3 : 3 = 5 + 1$. Prawo rozdzielnościowe przy dzieleniu należy dłużej omawiać, bo rzecz ta zasługuje na szczególną uwagę. Jeżeli mnożenie jest dobrze poznane, proces uzmysławiania może być ten sam i trudności nie wywoła. Można także prawo rozdzielnościowe rozszerzyć na odejmowanie. Np.. $2 \times 9 = 2 \times 10 - 2 \times 1 = 20 - 2 = 18$. Zdaje mi się nawet, że wartoby poświęcić temu ostatniemu czas jeszcze w początku. Jak wielką rolę przy świadomym rachunku pamięciowym odgrywają takie rzeczy, wie każdy nauczyciel, a jeżeli mamy materjał nowy do myślenia, przykłady i zadania, mamy tem samem możność bez nudy dłużej zatrzymać się na małym zakresie liczb. Tego nikt nie pożałuje. Wielkie prawa myśli matematycznej w ten sposób przejawiają się w początkach, bo są niezbędne w dalszym rozwoju. Kto tego nie chce uznać, niech lepiej nie uczy matematyki.

Prawo rozdzielnościowe dalej podlega pogłębieniu przez to, że rozkładamy liczbę nie tylko na 2 składniki, ale na 3 i więcej. O tem jeszcze będzie mowa później.

W ten sposób znowu „z wyższego stanowiska" poznaliśmy zakres liczb od 1 — 20. Teraz trzeba iść dalej; a ponieważ mamy do rozporządzenia znacznie więcej działań, niż w roku pierwszym, pytanie polega na tem, jak będziemy rozkładali zarówno te działania, jak i liczby zakresu dalszego od 1—100, który ma być przedmiotem drugiego roku nauki. Nie łatwe to pytanie. Istnieje pogląd, broniony przez znanego prof. Reina z Jeny i wybitnego metodyka niemieckiego Hartmanna, że zakres wspomniany należy przejść przez 2 lata: w pierwszym roku rozpatrujemy liczby tylko z punktu widzenia dodawania i odejmowania, a w drugim na tle wszystkich działań. Nie znaczy to bynajmniej, abyśmy w pierwszym cyklu zupełnie pominęli łatwiejsze przypadki mnożenia, — byłoby to grzechem dydaktycznym, przeczyłoby zasadzie genetycznego rozwijania pojęć arytmetycznych; taki podział dotyczy głównie tabliczki mnożenia w całej jej rozciągłości, jako przedmiotu ważnego i trudnego w nauczaniu. Powyższy pogląd ma swoje zalety: układ materjału jest konsekwentny i prosty, czas, przeznaczony na jego przejście, pozwala na znakomite ugruntowanie rzeczy głównych, bo dłużej zatrzymuje uwagę uczącego się w tak ważnym zakresie; dla nauczyciela podobne „przechodzenie kursu" jest wygodniejsze i pomaga do łatwiejszego przystosowania do przedmiotu środków nauczania. Ma on jednakże i swoje wady: 1-o brak rozmaitości w zadaniach i pytaniach, który wynika z uszczuplenia zakresu działań, 2-o związany z tem brak zadośćuczynienia potrzebom praktycznym, nawet przez dzieci odczuwanym. To są główne zarzuty, które zdaniem mojem wystarczają one do tego, by przechylić szalę na stronę konkluzji kompromisowej, którą tu przyjęliśmy.

Druga część programu, o której mówiliśmy wyżej, dotyczy rozszerzenia zakresu liczbowego do setki i opracowania go pod względem dodawania i odejmowania. Ta część przedstawia więc odrębną monografję, którą należy przerobić z uwzględnieniem odpowiedniego stopniowania, i jak zawsze, gruntownie. Nie spotykamy w niej wielkich trudności, gdyż zasadniczo działania nie różnią się od wykonywanych już w drugim dziesiątku, są tylko więcej skomplikowane. Ta komplikacja głównie polega na prawach dodawania i odejmowania sumy oraz zwiększeniu się liczb samych, co odbija się na trudności poglądowego ich przedstawienia. Rozszerzanie zakresu liczbowego zaczynamy od tworzenia całych dziesiątków (20, 30 40 i t. d.) w połączeniu z przedstawieniem tychże na liczydle, a później, stopniowo uszeregowując materjał według trudności i logicznego związku, wprowadzamy coraz więcej skomplikowane działania.

Wogóle wyróżniamy tu następujące momenty: 1-o rozszerzenie zakresu liczbowego do 100 i działania z całemi dziesiątkami, 2-o tworzenie kolejne liczb porządkowych w całym zakresie, 3-o dodawanie liczby jednocyfrowej i odejmowanie takiejże liczby od liczb całego zakresu bez tworzenia lub pożyczania dziesiątka, 4-o takie same działania z tworzeniem i pożyczaniem dziesiątków, 5-o dodawanie do całkowitych dziesiątków liczby dwucyfrowej i odejmowanie od tejże całkowitych dziesiątków, 6-o dodawanie i odejmowanie liczb dwucyfrowych bez tworzenia i pożyczania dziesiątków, 7-o dodawanie i odejmowanie liczb dwucyfrowych z tworzeniem i pożyczaniem dziesiątka bez przekroczenia setki, 8-o ogólne dodawanie i odejmowanie liczb dwucyfrowych. Następstwo tych momentów jest zrozumiałe i specjalnych tłumaczeń chyba nie wymaga. Dodamy jeszcze, że naturalnie przy każdym z nich występują odpowiednie przykłady, zadania i zapisywanie, — o czem jeszcze pomówimy.

O pierwszych czterech momentach nie trzeba się długo rozwodzić, gdyż rzeczy te są proste i są powtórzeniem tego, co było w drugim dziesiątku. W momencie piątym występuje rzecz nowa, mianowicie dodawanie i odejmowanie liczby dwucyfrowej. Gdy np. do 20 mamy dodać 17, możemy to działanie przedstawić tak: $20 + 17 = 17 + 20 = (10 + 20) + 7 = 37$, a więc posługujemy się prawami przemienności i łączności przy dodawaniu i dodawaniem do sumy. To samo działanie można też wykonywać inaczej: $20 + 17 = 20 + (10 + 7) = (20 + 10) + 7$, t. j. posługiwać się prawem dodawania sumy. Nauczyciel nie powinien opuścić żadnego z tych sposobów, gdyż w każdym z nich jest dużo momentów pouczających i przygotowujących do następnych stopni nauki. Należy tu podkreślić szczególnie stosowanie prawa przemienności, które później szczególnie przy mnożeniu jest bardzo przydatne. Oczywiście, formułowanie tych praw nie może być wymagane; głównym sprawdzianem jest świadome i szybkie stosowanie.

W momencie 6-ym prawa dodawania i odejmowania sumy i do sumy występują jeszcze wyraźniej. Nie należy krępować ucznia pewnym schematem, a tem bardziej wprowadzać zapisywania z podpisywaniem składników, jak to się, niestety, często w praktyce dzieje. Rachunek pamięciowy odgrywać winien główną rolę, bo jeżeli chcemy, żeby dzieci rachowały myśląc, nie możemy krępować swobody tej myśli określonym schematem, który dopiero później, gdy liczby wzrosną, nabierze swego znaczenia i celowości. Jeżeli mamy np. dodać do 27 liczbę 32, możemy postępować tak: $27 + 32 = (2 + 7) + (20 + 30)$ albo $(20 + 30) + (2 + 7)$. W rachunku pamięciowym ten ostatni sposób jest nawet lepszy, jakkolwiek przy podpisywaniu liczb unikamy go. Przy działaniach z liczbami w tym momencie należy ostatecznie wyjaśnić wspomniane prawa dodawania i odejmowania, gdyż później działania się więcej skomplikują i tem samem możemy utrudnić sobie pracę.

Siódmy moment jest ostatnim w drugim roku nauczania, ponieważ 8-my prowadzi do przekroczenia setki, a więc zakresu liczbowego tego roku. W warunkach lepszych dla nauczania możnaby to przekroczenie zrobić, ale ostrożność nigdy nie zawadzi. Dla zilustrowania działań zwrócimy się do przykładów. Mamy np. dodać dwie liczby: 35 i 47. Działania można ułożyć tak: $35 + 47 = (30 + 5) + (40 + 7) = (30 + 40) + (5 + 7) = 70 + 12 = 82$. W ten sposób sprowadza się ostatecznie działanie do znanego poprzednio: $70 + 12$. Weźmy teraz przykład na odejmowanie. Mamy odjąć od 57 np. 39. Rozkładamy całość działania w ten sposób: $57 - 39 = (40 + 17) - (30 + 9) = (40 - 30) + (17 - 9) = 10 + 8 = 18$. Oczywiście, że zarówno tu, jak i w poprzednich przykładach, wszystkich pośrednich ogniw nie zapisujemy, ale wykonywamy w pamięci; zapisujemy tylko początek i koniec. Np. w pierwszym przykładzie tak: $35 + 47 = 82$.

Takie całkowite zapisywanie, jak to zrobiliśmy wyżej, może być z pożytkiem stosowane później, gdy będzie chodziło o uogólnienie praw dodawania i odejmowania, a więc przy wprowadzeniu do rachunku z symbolami literowemi. Nie można jednakże w tej mierze krępować nauczyciela: jeżeli będzie mógł nauczyć dzieci świadomie stosować wspomniane całkowite zapisywanie, niech od czasu do czasu to robi, gdyż w ten sposób dzieci uczą się dokładniej myśleć, przez jasne i wyraźne notowanie swych procesów myślowych. Trzeba jednakże do tego dość dużo taktu pedagogicznego i umiejętności. W nauczaniu, jak i w wychowaniu wogóle, nie da się przeprowadzić wyraźna granica pomiędzy tem, co można zrobić w danym kierunku, a czego nie można, gdyż sprawa ta głównie zależy od indywidualności nauczyciela, od jego wysiłku i zdolności. Takie przypadki, jak powyższy, spotykamy na każdym kroku w działalności pedagogicznej i wogóle w życiu.

Od sumy dwóch składników możemy dalej przejść do sumy o większej liczbie składników, gdzie prawo łącznościowe nabiera swego realnego znaczenia przez to, że dzieci uczą się tak grupować składniki, aby można było dodać najwygodniej. Np. w dodawaniu 12 + 37 + 18 możemy tak ułożyć działanie: (12 + 18) + 37 = 30 + 37 = 67.

Dalej, oczywiście, można wprowadzać działania wspólne, dodawanie i odejmowanie razem, zarówno w zadaniach z szeregiem „pytań", jak w przykładach. Tych pytań jednakże nie powinny zadania zawierać za dużo: 3 lub 4 najwyżej. Wielość pytań obarcza zbytnio umysł i nie daje wprawy w rachunku, gdyż ułożenie planu zadania zajmuje zbyt wiele czasu. W zadaniach tych stosujemy miary zawarte w zakresie 100, a więc większość miar używanych w praktyce. Miary te należy pokazywać, należy do nich dzieci przyzwyczajać, nie wyłączając metra z podziałem na decymetry i centymetry. Znaczną wartość praktyczną ma wprawa zmysłów w odróżnianiu miar, np. wprawa oka w ocenie długości. To osiągnąć można przez przyzwyczajenie tego oka do danej długości, co się stać może dzięki częstemu używaniu i stałemu oglądaniu tej miary w klasie. Nie należy zapominać o mierzeniu czasu, zapoznaniu się z zegarem, liczbą dni miesięcy, ich nazwami i t. p. Kalendarz musi być stale w klasie i każda lekcja powinna zaczynać się od wypisania bieżącej daty.

Trzecią i ostatnią częścią programu drugiego roku jest następny rozdział tabliczki mnożenia oraz odpowiednie zastosowanie tejże, mieszczenie i dzielenie, idące z nią równolegle. Jeżeli te działania dobrze były przerobione w zakresie pierwszych 2 dziesiątków i nauczyciel w zadaniach i przykładach nie zapomniał powtarzać ich przy nauce dodawania i odejmowania w drugiej części, to dalsza nauka trudności nie przedstawia, tem bardziej, że znajduje poparcie we wspomnianych działaniach: dodawaniu i odejmowaniu.

Tabliczka mnożenia ma wielkie znaczenie w rachunku, a dobre jej przyswojenie, t. j. takie, które jednocześnie wpływa na rozwój umysłowy dzieci, wymaga sporo czasu. Nauczyciele klas wyższych szkoły średniej wiedzą, jakie rezultaty może sprowadzić pośpiech forsowny w klasach niższych albo w szkole elementarnej. Stara metoda mnemoniczna jak najmniej tu się nadaje. Nauczyciel winien wszystkie środki wyzyskać, aby umocować, że tak powiem, tabliczkę mnożenia w pamięci dzieci, i to nie tylko przez częste powtarzanie, ale i przez powołanie do pomocy środków zmysławiających tam, gdzie można i nadewszystko logicznych czynników. Uczeń powinien znać nietrudną drogę, metodę do uzupełnienia zapomnianego ogniwa. Aby wytworzyć taką metodę, należy do pomocy powołać inne działania: dodawanie i odejmowanie, a także własności mnożenia: prawa przemiennościowe i rodzielnościowe. Np. uczeń zapomniał, ile będzie 6×7, a pamięta, dajmy na to, ile jest 5×7.

Pomaga mu tu zaraz dodawanie i prawo rozdzielnościowe. Z drugiej strony, jeżeli będziemy umieli organicznie, zapomocą wspomnianych działań i praw powiązać oddzielne momenty tabliczki mnożenia, tem samem stworzymy podstawę do tego, by uczeń wierzył nie tylko ślepej pamięci, ale i własnej głowie.

Zwrócenie uwagi na tę ostatnią stronę rzeczy daje nam w ręce sposób powiązania poprzednich działów. Uczniowie przez dodawanie i odejmowanie muszą poznać liczby w zakresie od 1—100 w takim stopniu, aby niezależnie od samej wartości tego poznania, mieli jeszcze możność świadomego przyswajania sobie tabliczki mnożenia. Stąd wynika, że poznawanie przez dodawanie i odejmowanie musi poprzedać tabliczkę mnożenia, która powinna się z temi działaniami przeplatać w organicznie powiązany ciąg. Przedstawimy teraz, jak się tę rzecz powinno traktować.

Przedewszystkiem muszę zaznaczyć, że nauczanie nie jest przechodzeniem oddzielnych paragrafów książki. Na każdej lekcji w zadaniach i przykładach możemy powtarzać rzeczy poprzednie, a więc wtedy, gdy główną treścią lekcji jest pewien moment dodawania i odejmowania w zakresie 100, nauczyciel może nieraz w zadaniu lub pytaniu przy sposobności sprawdzać umiejętność mnożenia i dzielenia w ramach poprzednio poznanych.

Mnożenie liczb pierwszego dziesiątka przez 2 powinno być już znane, tak tamo jak mnożenie przez siebie liczb pierwszej piątki prócz $5 \times 5 = 25$. Z kolei następuje teraz mnożenie dziewięciu liczb przez 4. Największym iloczynem, który był poznany dotąd, jest $4 \times 5 = 20$. Dalej mnożymy: 4×6. Stosujemy tu prawo rozdzielnościowe: $6 = 5 + 1$, $4 \times 6 = 4 \times (5 + 1) = 4 \times 5 + 4 \times 1 = 24$. Zwracamy uwagę, że, mając iloczyn przez 5, aby otrzymać iloczyn przez 6, należy do poprzedniego dodać jedną czwórkę. Tak samo, aby z iloczynu ostatniego otrzymać pierwszy, trzeba tę czwórkę odjąć. Uzmysławiamy naturalnie operację na liczydle. Dalej nauczyciel może zapytać, ile będzie 2×6. Jest to rzecz znana. Ile dziesiątków zawiera 12, a ile 24? Ile razy więcej w drugim przypadku? To samo o jednościach. Ile razy większe jest 24, niż 12? W odpowiedni sposób można to uzmysłowić i natychmiast zastosować do mnożenia: $12 \times 2 = 24$ na tle prawa rozdzielności. Tak samo postępujemy z iloczynami 4×7, 4×8, 4×9, 4×10. Tutaj można każdą liczbę: 7, 8, 9, 10 rozkładać na 2 części: $6 + 1$, $7 + 1$ i t. d., albo: $5 + 2$, $5 + 3$, $5 + 4$, $5 + 5$ i stosować prawo rozdzielnościowe. Można tu tworzyć następujące szeregi: 4×1, 4×2, 4×3 i t. d., albo: 4×1, 4×3, 4×5 i t. d., albo: 4×1, 4×4, 4×7, 4×10, albo: 4×1, 4×5, 4×9. Inne możliwe szeregi z 4 są bezużyteczne.

Nauczyciel, przy mnożeniu np. 4×7, powinien wobec pomyłki ucznia natychmiast nasuwać mu wspomniane sposoby wynajdywania iloczynu. Takich sposobów narazie jest trzy: 1-o na zasadzie zastosowania prawa rozdzielnościowego, np.: $4 \times (5+2)$, 2-o na zasadzie dodawania $4 \times 6 = 24$; $24 + 4 = 28$, 3-o na zasadzie odejmowania $4 \times 8 = 32$; $32 - 4 = 28$. Mniejsza, który z tych sposobów uczeń zastosuje, byle robił to świadomie. W każdym razie właściwie główną rolę odgrywa prawo rozdzielnościowe, zapomocą którego sprowadzamy tutaj tabliczkę mnożenia przez liczby pierwszej piątki do mnożenia tych liczb przez siebie, co znane jest z poprzedniego zakresu. W ten sam sposób traktujemy mnożenie przez 3 i przez 5. Jest to pierwsza część tabliczki mnożenia, w której iloczyny nie przekraczają 50 i pozwalają nam razem z dodawaniem i odejmowaniem poznać ten zakres bliżej. Gruntowne poznanie i utrwalenie w pamięci tej części tabliczki mnożenia zajmuje dużo czasu i dlatego wykraczanie poza ten zakres w drugim roku jest zawsze ryzykowne, chyba że mamy przed sobą nie zwykłą klasę, lecz kilku zdolnych uczni. Pamiętać należy jedno, że poznanie schematycznego wykonywania działań piśmiennych przy umiejętności dodawania i odejmowania liczb pierwszych 2 dziesiątków i „wykutej" tabliczki mnożenia jest możliwe, jak uczy codzienne doświadczenie, ale czy to jest nauczanie matematyki, to już inna kwestja.

Po zdobyciu przez uczni należytej wprawy nauczyciel nie omieszka, tak samo jak poprzednio z 2, ułożyć i zapisać tabliczki mnożenia przez 3, 4 i 5 oraz utrwalić w pamięci przez wyuczenie się, co przyjdzie łatwiej daleko i da rezultaty pewniejsze. Oczywiście, te tabliczki układać będzie nie jednocześnie, a stopniowo, po kolei.

Przy dzieleniu, nad którem musimy się teraz zatrzymać, występują specjalne trudności, wynikające z istoty tego działania. Jest rzeczą zrozumiałą, że w miarę poznawania liczb pierwszej setki i rozszerzania się tabliczki mnożenia, należy w odpowiedni sposób komplikować dzielenie i stopniować powoli cały narzucający się tu materjał. Głównej pomocy przy dzieleniu należy oczekiwać od tabliczki mnożenia. Dzielenie, rozpatrywane jako odwrócenie pewnego z poszczególnych przypadków mnożenia w tabliczce, stanowi właśnie pierwszy stopień nauki dzielenia. Np., jeżeli $5 \times 6 = 30$, to $30 : 6 = 5$ oraz $30 : 5 = 6$. Ilustrować to trzeba na zadaniach konkretnych i można się oczywiście uciekać do pomocy liczydła z dwubarwnemi kulkami. Mieszczenie, rzecz jasna, towarzyszy bezpośrednio dzieleniu właściwemu.

W początkowym okresie zapoznawania dzieci z dzieleniem radziliśmy oddzielić dzielenie od mnożenia i zapoznać najpierw gruntownie z tem ostatniem. Przyczyny tego były nadmienione. W danym przypadku przyczyny te nie odgrywają takiej roli i dlatego współrzędne prowadzenie obu działań jest bardziej uzasadnione, zwłaszcza, że środki poglądowe nie mają już należytej jasności. Nie znaczy to, żeby koniecznie, pedantycznie każdemu mnożeniu odpowiadało zawsze dzielenie, ale trzeba się starać częściej tak właśnie robić, aby przyzwyczaić umysł do szybkiej i wprawnej odpowiedzi.

Wspomniany wyżej pierwszy stopień dzielenia, związany z tabliczką mnożenia, nie wyczerpuje jednakże wszystkiego. Np. dzielenie: $24 : 2 = 12$ nie opiera się na tabliczce mnożenia. Żeby go wykonać w pamięci trzeba uświadomić sobie albo iloczyn $12 \times 2 = 24$, albo też stosować prawo rozdzielności przy dzieleniu. Ponieważ ostatecznie tabliczkę mnożenia staramy się zmechanizować, więc na niej można oprzeć pierwszy stopień dzielenia z większą pewnością. W takim jednakże przypadku, jak powyższy, mnożenie, opierając się na prawie rozdzielności: $12 \times 2 = (10 + 2) . 2 = 20 + 4 = 24$, nie należy jednocześnie do rzeczy, które dzieci zapamiętać mają, nie należy do tabliczki mnożenia. Stąd ważną jest rzeczą, aby przy odwróceniu działania, oprzeć je również na prawie rozdzielności, a więc rozumować tak: $24 : 2 = (20 + 4) : 2 = 20 : 2 + 4 : 2 = 10 + 2 = 12$. W p o j e n i e w u m y s ł y d z i e c i p r a w a r o z d z i e l n o ś c i w t e j f o r m i e n a l e ż y t u t a j d o n a j w a ż n i e j s z y c h r z e c z y. Zobaczymy później, jak wielką rolę odgrywa ono przy piśmiennem dzieleniu liczb dużych. Dlatego, żeby prawo rozdzielności przy dzieleniu stało się jasnem, należy uprzytomnić jego stosowanie przy liczbach małych, np. $9 : 3 = (6 + 3) : 3 = 6 : 3 + 3 : 3 = 2 + 1 = 3$, przyczem nie trzeba zapominać o odpowiednich zadaniach konkretnych i przykładach, które łatwo sobie dobrać. Takie same przykłady nauczyciel winien dawać również przy liczbach większych. Np. odnośnie do powyższego przypadku dzielenia może dać dla wyjaśnienia taki przykład: gospodarz sprzedał połowę posiadanych przez się 24 baranów, które mieściły się w dwóch zagrodach, tak że w jednej było 20, a w drugiej 4; ile sprzedał?

Tego rodzaju przykłady na właściwe dzielenie i mieszczenie w zakresie 100 s t a n o w i ą r a z e m z o d p o w i e d n i e m m n o ż e n i e m t r e ś ć d r u g i e g o s t o p n i a d z i e l e n i a. Można się tutaj ograniczać nie koniecznie do zakresu pierwszej 50, gdyż np. takie mnożenie: 34×2 przy zastosowaniu prawa rozdzielności sprowadza się do tego zakresu, jakkolwiek rezultat poza niego wykracza. Stąd np. tego rodzaju przypadek dzielenia: 36 : 3 może być stosowany, o ile prawo rozdzielności jest dobrze ugruntowane. Podobne przykłady na mnożenie i dzielenie są jednocześnie zastosowaniem tabliczki mnożenia, ćwiczą władze logiczne i rachunek pamięciowy. Nie trzeba tu chyba usilnie podkreślać, że wybieramy takie przykłady, w których obydwa składniki, jak powyżej, dzielą się przez daną liczbę.

Podział używany na tym stopniu przy rozkładaniu dzielnej na dwa składniki odpowiada sposobowi pisania liczb. Nazwiemy go sposobem pozycyjnym. Można jednakże stosować sposób inny, który nazwiemy sztucznym. Np. $65 : 5 = (50 + 15) : 5 = 10 + 3 = 13$. W danym razie rozkład zrobiony jest sztucznie w ten sposób, żeby obydwa składniki dzieliły się przez 5. Taki podział wymaga od ucznia większego wysiłku umysłowego i wprawniejszego władania prawem rozdzielności, które musi być zdobyte poprzednio. Wobec tego należy ten sposób wprowadzać ostrożnie i powoli i nie forsować zbytnio, jeżeli dzieci nie dają sobie rady. Nawet można go zostawić do roku przyszłego, gdzie wystąpią również inne formy dzielenia. Mamy tu do czynienia z bardzo ważnym dla rachunku pamięciowego momentem i jednocześnie widzimy, jakie podstawowe znaczenie posiada rozkładanie jeszcze w pierwszym dziesiątku. Porządne nauczanie — to porządna nauka myślenia, w której rozumna powolność i dokładne ćwiczenie, tak poważną rolę odgrywają. Z drugiej strony nigdy nie trzeba zapominać, że wszystko w nauczaniu winno się wiązać z życiem przez żywe, dotyczące rzeczy otaczających i zagadnień praktycznych przykłady i zadania. Zakres drugiego roku jest w ten sposób wyczerpany.

Jedną z ważnych zalet dobrej metody nauczania jest umiejętność uczenia dzieci dostrzegania pewnych cech charakterystycznych danej liczby. Pomaga to w rachunku pamięciowym, który przez to staje się mniej mechanicznym, a zarazem przygotowuje grunt do dalszych uogólnień. Podam tu kilka przykładów. Np. odróżnianie liczb parzystych i nieparzystych, liczb dzielących się przez 3 i nie, liczb dzielących się przez 5 i nie i t. p. Pogłębianie nauki daje coraz więcej potrzebnego materjału myślowego do tych spostrzeżeń. Indukcyjne rozumowanie w nauczaniu początków jest jedynie możliwe, a opiera się ono na materjale spostrzeżeń. Pamiętać zawsze należy o tem, co będzie dalej, i przygotowywać do tego grunt. Im ważniejsza jest rzecz, tem dłuższego dojrzewania wymaga; ale żaden nauczyciel nie pożałuje takiego rozkładania na dłuższe okresy czasu.

W literaturze pedagogicznej powtarza się stale jeszcze od czasów starożytnych przypowieść porównywająca pedagoga do ogrodnika, szczególnie lubi to porównanie Rousseau, który jest tak zapatrzony w indywidualność oddzielną i widzi w niej skoncentrowane wszelkie wartości życiowe. Nauka historji i głębsze pojmowanie kultury i cywilizacji wskazują na wartość i znaczenie czynników pozajednostkowych (transsubjektywnych) i dlatego pojmowanie Roussa, które na wielu taki wpływ dotąd wywiera, jest jednostronne, ale w zaznaczonem porównaniu jest zdrowe ziarno, które ujmuje zasada samodzielności. Są w każdej jednostce naturalne siły rozwojowe, wymagające określonego czasu dla swego wielkiego dzieła: wzrostu duchowego człowieka. Nauczyciel powinien umieć te siły rozpoznawać, oceniać, kierować niemi, a także czekać, być cierpliwym, dzięki czemu cierpliwość ma wartość nie tylko przed trybunałem etyki, lecz i rozumu, co jeszcze raz wskazuje, że obydwie te dziedziny wartościowania mają i muszą mieć głęboką jedność wewnętrzną.

ROZDZIAŁ VIII.

Trzeci rok obejmuje zakres od 1—1000. Odpowiada on naszej klasie wstępnej w szkole średniej. Praktycznie zakres ten ma największą wartość, gdyż w życiu codziennem rzadko rachunek wychodzi poza te ramy, szczególniej w tej sferze ludzi, do której należą dzieci naszych szkół elementarnych. Nauczanie w tym zakresie wyróżnia się przez następujące momenty: 1-o udoskonalenie i pogłębienie rachunku pamięciowego, 2-o poznanie czterech działań arytmetycznych w większej rozciągłości, 3-o wprowadzanie rachunku piśmiennego, 4-o planowe rozwiązywanie zadań i wprowadzenie liczb t. zw. wielorakich.

Rachunek pamięciowy wszechwładnie panuje w 1-ym i 2-im roku, gdzie zapisujemy tylko rezultaty obliczeń, ale obraca się on jeszcze w dość szczupłych ramach. W trzecim roku gruntowniejsza znajomość własności działań i sposobu tworzenia liczb pozwoli na lepsze jego ugruntowanie. Nie przestaje on mieć tutaj swej wartości: uczeń powinien dość swobodnie we wspomnianym zakresie władać rachunkiem pamięciowym, jakkolwiek nie jest to możliwe do osiągnięcia tylko w trzecim roku, ale wymaga również dalszej wprawy. W pierwszych 2 latach poznajemy dokładniej dodawanie i odejmowanie, w trzecim roku kończy się nauka tabliczki mnożenia, wchodzi również dzielenie z resztą, wchodzą działania z liczbami wielorakiemi, których wartość metodyczna polega głównie na uogólnieniu sposobów działań.

Ponieważ wprawa w pamięciowem wykonywaniu działań, jako rezultat znajomości ich własności i budowy liczby, jest w tym wypadku dostateczną gwarancją owładnięcia materjałem nauki, można już przejść do stworzenia schematu piśmiennego, tem bardziej, że nieraz wymaga tego sama siła rzeczy przez wzrost liczby i związaną z tem trudność spamiętania większego szeregu drobnych operacyj przy wykonywaniu działań. Wobec tego wszystkiego pierwsze trzy lata stanowią podstawę całego rachunku. Jeżeli ta podstawa jest dobrze ugruntowana, reszta idzie bez wielkich trudności. Nauczanie w tych latach wymaga wielkiej cierpliwości i staranności, ale zato dobre nauczanie później sowicie się opłaca.

Cały materjał w trzecim roku, jak poprzednio, rozpada się na dwie główne części: uzupełnienie wiadomości z pierwszej setki oraz rozszerzenie zakresu liczbowego do 200 i tworzenie dalszych liczb szeregu naturalnego. Zwrócimy tu uwagę na zalety podobnego rozkładu materjału. Zdobywamy przez to konieczną ciągłość w nauczaniu. Nauczyciel, który musi jeszcze uzupełnić niektóre działy z poprzedniego zakresu, z konieczności lepiej powtórzy poprzednie, a powtórzenia nigdy się nie żałuje. To jedno. Po drugie, znany jest fakt psychologiczny, że pewien okres pracy nad pewnym przedmiotem jeszcze nie wystarcza: służy on niejako do rozpędu, do wyprowadzenia z równowagi sił psychicznych, które później pracują jakby same przez się, jak mówią n i e ś w i a d o m i e. Przejawia się to i w małych rzeczach i w większych. Każdy wie, że w toku pracy nad jakimś nowym przedmiotem, wobec mnóstwa powstających pytań, wątpliwości, jesteśmy jakby w chaosie. Dopiero później pytania te albo znajdą odpowiedzi, albo ustępują i rozhukane morze uspokaja się, wschodzi słońce jasności. Po trzecie, uważamy za jedną z podstawowych zasad nauczania — rozkładanie materjału na dłuższe okresy czasu. Zwykle to się nazywa koncentrycznem przechodzeniem przedmiotu. Coś podobnego tu jest, ale wolelibyśmy nazwać to lepiej metodą genetyczną. Duże dawki nie są strawne, a nawet w najmniejszych liczbach przejawiają się te same prawa, co w większych. Powolne i stopniowe zaznajamianie się z niemi, stopniowy wzrost głównych pojęć, wyrażających się we własnościach działań i tworzeniu liczb szeregu naturalnego, a także powolne, ale trwałe rozwijanie się wprawy w wykonywaniu działań, może być osiągnięte tylko przez takie traktowanie.

Głównym materjałem w pierwszej części jest zakończenie dodawania i odejmowania liczb dwucyfrowych i zakończenie tabliczki mnożenia z towarzyszącem jej dzieleniem.

Zanim przejdziemy do zakończenia dodawania, t. j. do wprowadzenia sumy większej, niż 100, należy najpierw zwrócić uwagę na 2 rzeczy ważne: 1-o powtórzenie i ugruntowanie lepsze poprzedniego i 2-o rozszerzenie zakresu liczbowego do 200.

Pierwszy punkt wymaga przedewszystkiem zwykłego powtórzenia wszystkich odnośnych działań używanych w 2-im roku. Przy tej sposobności dla pogłębienia samej rzeczy można prowadzić dodawanie i odejmowanie liczb wielorakich o dwóch wyrazach, przyczem metr i decymetr mogą służyć tutaj za bardzo odpowiedni przykład. Rzecz jasna, że miary te powinny być dobrze poznane przez używanie i przyzwyczajenie do nich oka. Dobrze jest mieć w klasie stale okazy miar (na początku długości, a potem inne), aby uczniowie przez ciągłe przypatrywanie się zdobyli jasne wyobrażenia. Zaleca się jednakże unikać tablic, na których skupione są różne miary (np. powierzchni, długości, objętości), gdyż takie skupienie nie pozwala skoncentrować uwagi. Na jednej tablicy mogą być miary jednego rodzaju; później do niej dostawiamy miary inne, odpowiednio ułożone i t. d. Zapisywanie odbywa się zwyczajnie: 2 m. 4 dm. + + 3 m. 5. dm. = 5 m. 9 dm.

Takie jednoczesne zaznajamianie z liczbami wielorakiemi pozwala ugruntować samo pojęcie dodawania i odejmowania oddzielnie dziesiątków i jedności. Ludzie przyzwyczajeni do tego, by z liczb wielorakich robić osobny dział, gotowi są posądzić mnie o herezję. Nic innego nie robię, jak tylko stosuję zasadę rozkładania na dłuższe okresy czasu. Z drugiej strony wiara w nadzwyczajne własności liczb wielorakich, dzięki którym wytwarza się z nich osobny dział, nie ma najmniejszej podstawy, ani naukowej, ani dydaktycznej. Działania z liczbami wielorakiemi mają wartość dydaktyczną tylko jako wygodne unaocznienie i uogólnienie działań.

Gdy nauczyciel przekona się, że zarówno poprzednio znane przypadki dodawania i odejnowania, jak podobneż działania z dwuczłonowemi liczbami wielerakiemi i znane rzeczy z tabliczki mnożenia są wykonywane świadomie i wprawnie, przystępuje do rozszerzenia zakresu liczbowego do 200. Przytem należy zdawać sobie sprawę, że poglądowe przedstawienie liczby nie jest już prawie zupełnie pomocne, że nasuwa wielkie trudności. Pomimo to nie należy kompletnie go pomijać, gdyż mamy tu do czynienia z rzeczą bardzo ważną dla ugruntowania budowy liczby. Prócz liczydła, które wobec samego braku odpowiedniej liczby kulek może odmówić pomocy, można zastosować znany śród ludów pierwotnych sposób uzmysłowienia. Sposób ten polega na tem, że najpierw jeden człowiek zaczyna odwzorowywanie danych przedmiotów na swych palcach, i gdy dojdzie do 10, t. j. zużyje obydwie ręce, występuje drugi i podnosi palce do góry; poczem pierwszy znowu powtarza poprzednią operację, a drugi po skończeniu jej podnosi 2 palce do góry i t. d. Gdy drugi podniesie do góry obydwie ręce, wtedy występuje trzeci i podnosi jeden palec do góry, a drugi opuszcza swe ręce. Obraz trzech ludzi uszeregowanych kolejno w ten sposób przedstawia zasadniczą ideę numeracji i bez wątpienia w szkole może być pomocnym. Nauczyciel może do tego powołać uczniów, którzy powinni stanąć zwróceni twarzą do swych kolegów i przytem pierwszy z prawej strony przedstawia jedności, drugi dziesiątki, a trzeci — setki. W ten sposób można oznaczać różne liczby; np. przy omawianiu 173 pierwszy uczeń podnosi do góry lewą rękę z trzema wyprostowanemi palcami, drugi — lewą całkowicie otwartą, a na prawej 2 palce wzniesione, a trzeci trzyma podniesiony jeden palec lewej ręki. Uczniowie jednocześnie zapisują liczbę i oczywiście wprawiają się w liczenie do 200, co nie przedstawia żadnych trudności. Uczący powinien podkreślać fakt, że jedności stoją na pierwszem miejscu, dziesiątki — na drugiem i t. d. Cała ta rzecz nie zajmie wiele czasu, ale, jak wszystko w nauczaniu, musi być zrobiona starannie i dokładnie.

Po rozszerzeniu zakresu liczbowego nauczyciel przystąpi do zakończenia dodawania i odejmowania w pierwszej setce, nie zapominając nigdy o ćwiczeniach z zakresu wszystkich poprzednich działań. Przytem trzeba również postępować ostrożnie i stopniowo. Pożądane jest najpierw równoległe stosowanie działań. Np. dodajemy: $53 + 9 = 62$, a jednocześnie w drugiem zadaniu lub przykładzie: $153 + 9 = 162$. Na tym stopniu setka wchodzi niezależnie od działania i nie jest jego rezultatem. Drugi stopień będzie polegał na ominięciu równoległości, np.: $147 + 8 = 155$ i dalej $153 + 12 = 165$ oraz t. p. W ten sposób w drugiej setce przerobimy to samo, co było zrobione w pierwszej. Rzecz jasna, że przykłady na odejmowanie prowadzone są równolegle. Potem przystępujemy do prostych przykładów związanych z przekroczeniem i znikaniem setki przy dodawaniu i odejmowaniu liczb dwucyfrowych. Np.: $96 + 7 = 103$, $88 + 13 = 101$, $162 - 75 = 162 - (62 + 13) = 100 - 13 = 87$ i t. p. Przykłady te coraz więcej komplikujemy, starając się, by zbytni pośpiech nie utrudnił rzeczy i nie prowadził do mechanicznego jedynie wykonywania działań. Takie mechaniczne wykonywanie, jakkolwiek praktycznie potrzebne, dydaktycznie jest nieraz szkodliwe, co szczególnie jasno występuje przy zbyt wczesnem wprowadzaniu piśmiennego wykonywania działań. Nieraz się zdarza widzieć, że już w drugim roku używane jest podpisywanie liczb i stosowanie zwykłego mechanizmu piśmiennego wykonywania odnośnych działań. Właśnie w roku trzecim jest to dopiero na miejscu, gdyż liczby staja się większe, pamięć nieraz odmawia posłuszeństwa, wobec czego rachunek piśmienny ma poza sobą istotną wewnętrzną przyczynę.

Możemy już wobec tego wprowadzić zwyczajny schemat, używany przy rachunku piśmiennym, przyczem trzeba zawsze pamiętać, że rachunek pamięciowy nie odbywa się koniecznie w ten sam sposób. W rachunku pamięciowym wygodniej często dodawać poczynając od większych jedności porządkowych, a w piśmiennym robimy naodwrót. Daje się często zauważyć, że dzieci tak samo pamięciowo rachują, jak piśmiennie. Przyczyną tego jest zawczesne wprowadzenie schematu piśmiennego wykonywania działań, albo niezdawanie sobie sprawy, że rachunek pamięciowy z natury rzeczy musi być wolny od schematów podobnych i przystosowywać się do danych okoliczności, do natury liczb. Np. zwrócenie uwagi ucznia, że przy mnożeniu 2×19 można postępować w pamięci tak: $2 \cdot (20 - 1) = 40 - 2 = 38$, jest zupełnie na miejscu. Przy zapisywaniu liczb odgrywa dużą rolę porządek i pisanie wyraźne. Tego nauczyciel powinen *stanowczo* wymagać. Nieporządne i rozrzucone rachunki są często powodem błędów i niedopatrzeń, które przy tem wszystkiem trudno jest sprawdzić i poprawić. Znaczny bardzo procent uczniów klas wyższych szkoły średniej posiada tę wadę, z której nie tak łatwo później wyleczyć. Jednocześnie z rachunkiem piśmiennym utrwalić się winny ostatecznie terminologja, a więc nazwy liczb wchodzących do działania, i używanie znaczków.

Utrwalenie tych rzeczy jest tu konieczne, gdyż później przy formułowaniu własności działań oraz wogóle przy bliższem ich poznawaniu, bez jasnego używania potrzebnych terminów, spotkać możemy trudności i mimowoli oprzemy się na pamięci uczniów w większym stopniu, niż na ich rozumieniu rzeczy.

Wprowadzenie rachunku piśmiennego ze względu na wspomniane potrzeby nie powinno jednakże wyłączać obliczeń pamięciowych. Nauczyciel winien się trzymać zasady, że w nauczaniu potrzeba zakres pamięciowego obliczania rozszerzyć, o ile się da, powinien zawsze próbować dane zadanie rozwiązywać pamięciowo albo przynajmniej te jego części, które mogą być z łatwością rozwiązane. Tylko wtedy gdy wytrwale i celowo dążymy do celu, osiągnąć możemy rezultaty odpowiednie. Należy pobudzać uczniów do samodzielnego rozwiązywania zadań w pamięci, w każdem zadaniu szukać innego sposobu rozwiązania, popierać ze wszech miar wysiłki w tym kierunku uczącego się. Najłatwiej być bezwzględnym sędzią i posiadaczem niezwruszonej mądrości, ale rola pedagoga jest inna: jest to rola tak silnie uwypuklonego w postaci Sokratesa akuszera samodzielnej myśli człowieka. Rachunek pamięciowy na każdej lekcji *musi znaleźć poczesne miejsce.*

Drugim zasadniczym momentem w programie trzeciego roku jest ostateczne zakończenie i ugruntowanie tabliczki mnożenia i związane z nią mnożenie i dzielenie. Możnaby dla różnych względów od tego momentu zacząć, t. j. postąpić analogicznie do wprowadzenia początków mnożenie w drugim roku. Nie kładziemy na to uporządkowanie szczególnego nacisku jako na rzecz szkodliwą; ma ono jednakże tę wadę, że rozszerzenie zakresu liczbowego i związane z tem działania w tym zakresie byłyby opóźnione znacznie, przez co mogłoby się, nieraz przytrafić, że za słabo zostaną ugruntowane. Z drugiej strony działania mnożenia i dzielenia w drugim roku, jak wykazaliśmy powyżej, posiadają tyle szczegółów i tyle trudności, a potrzeba wprawnego wykonywania ich jest tak ważną, że pożytecznem będzie pozostawienie jeszcze w trzecim roku pewnego czasu na ćwiczenia bez rozszerzenia treści. Te ćwiczenia jak wspomnieliśmy, odbywają się obok powyżej rozwiniętych szczegółów pierwszego momentu programu.

Z tabliczki mnożenia pozostała jeszcze jedna ważna część, mianowicie mnożenie liczb grupy B przez siebie, czyli, jak oznaczyliśmy to symbolicznie: B^2. Jest to część najtrudniejsza, wymagająca pomocy i dokładnego poznania poprzednich; zawierają się w niej najbardziej zawiłe przypadki i dlatego wszystkie poprzednio wspomniane środki pomocnicze muszą być stosowane. A więc: unaocznienie i prawa rozdzielności oraz przemienności muszą tu znaleźć swoje zastosowanie. Weźmy przykład. Mamy do pomnożenia, dajmy na, to 7 przez 9. Stosujemy prawo rozdzielności i przemienności: $7 \times 9 = 9 \times 7 = (10 - 1) 7 = 70 - 7 = 63$. W przykładach mniejszych, np. w iloczynie: 6×6 można z powodzeniem stosować unaocznienie, w większych jest to rzecz dość już żmudna i niewdzięczna, bo nie daje należytej ilustracji. Po wykonaniu najcięższej pracy, a więc przerobieniu w ten sposób całego zakresu tej pozostałej części tabliczki, rzecz jasna, nauczyciel stara się przez częste zastosowania osiągnąć u uczniów pożądaną wprawę i następnie układa do nauczenia się, tak jak to robiliśmy w drugim roku, odpowiednie tabliczki mnożenia przez 6, 7 i t. p. Oczywiście, robi to nie odrazu, ale stopniowo. W zadaniach, które dajemy dzieciom, nie zapominamy również o dodawaniu i odejmowaniu w całym poznanym zakresie.

Z zakończeniem tabliczki mnożenia jeszcze nie kończy się poznanie pierwszej setki, gdyż pozostaje dzielenie we wszystkich postaciach w tym zakresie i mnożenie nie wchodzące w tabliczkę. Takie przypadki, jak 39×2 lub $84 : 7$, jak 17×5 i $96 : 8$, wogóle wszelkie możliwe przypadki mnożenia i dzielenia przez liczbę jednocyfrową w tym zakresie winny być następnym przedmiotem nauki. Tutaj znowu wprawę zdobywamy przez rozwiązynie większej ilości zadań i stosowanie poprzednio zaznaczonych metod. Rzecz zrozumiała, że tabliczka mnożenia, jak również powyższe przypadki mnożenia i dzielenia, należą do rachunku pamięciowego. Uczeń, rozwiązując zadanie piśmiennie, może używać schematu piśmiennego przy dodawaniu i odejmowaniu, jeżeli nie da sobie rady pamięciowo, ale zapisuje mnożenie i dzielenie tylko w jednym wierszu.

Prócz nadmienionych w pierwszej setce, pozostają jeszcze przypadki dzielenia z resztą i przez liczbę dwucyfrową. Jeżeliby celem naszym było przedewszystkiem całkowite poznanie pierwszej setki, należałoby, oczywiście, te pozostałe przypadki dzielenia uwzględnić. Nie może być wątpliwości, że takie poznanie pierwszej setki jest przedewszystkiem zadaniem trzeciego roku nauczania, ale należy się zastanowić, czy ma rację bytu wprowadzenie dzielenia przez liczbę dwucyfrową już zaraz przed rozszerzeniem zakresu liczbowego do 1000. Nie można na to dać odpowiedzi kategorycznej, gdyż niema wątpliwości, że np. taki przypadek dzielenia 24 : 12 = 2 jest łatwy i może być używany wcześniej nawet, niż w obecnym momencie programu trzeciego roku; jeżeli więc może być kwestja, to tylko w odniesieniu do przypadków trudniejszych, np. 65 : 13. Z drugiej strony nawet takie przypadki nieraz z łatwością się rozwiązują, jeżeli zastosujemy metodę równoległości mnożenia i dzielenia. Odpowiedź na pytanie: $13 \times 5 = ?$, pozwoli uczniowi odpowiedzieć również na zagadnienie powyższe. Z tego wynika, że możliwe są do przerabiania w tym momencie te przypadki dzielenia przez liczbę dwucyfrową, w których, jak zwykle, wchodzi tylko rachunek pamięciowy i stosowana jest metoda równoległości mnożenia. Co się tyczy dzielenia z resztą, stanowi ono tak ważną rzecz i związane jest z tak istotną cechą późniejszego wykonywania tego działania, że właśnie w tym niniejszym zakresie pierwszej setki należy postawić pierwsze kroki decydujące.

Powyżej były nadmienione 3 stopnie dzielenia: dzielenie związane bezpośrednio z tabliczka mnożenia, dzielenie z podziałem pozycyjnym i nakoniec — z podziałem sztucznym. Te trzy stopnie dotyczą tylko prawa rozdzielności przy dzieleniu, nie poruszają jeszcze innych ważnych rzeczy, o których teraz jest pora pomówić.

Najpierw zwrócimy uwagę na resztę. Na małych przykładach, jeżeli dzieci same tego nie odkryły już (co prawie zawsze się zdarza), pokazujemy, że dzielenia czasem nie można wykonać, że się otrzymuje reszta. W niektórych przypadkach, jak np.: 7 : 2, może nam pomóc stosowanie drobnych ułamków początkowych, przyczem uczeń może dać stanowczą odpowiedź, ale wogóle dzielenie nie prowadzi do pożądanego rezultatu. Te przypadki wprowadzają w kłopot dzieci i nie mniejszy nauczyciela. Pożyteczne jest w takich przypadkach stosowanie w zadaniach takich konkretnych przedmiotów, w których, jak np. łokieć, wyjście da się znaleźć albo zapomocą mniejszych jednostek długości, albo wyrażenia ułamkowego. W zapisywaniu jednakże ułamka używać nie należy jeszcze, np. przy dzieleniu 15 : 4 zapiszemy tak: 15 : 4 = 3 i reszta 3. Zapewne jest to sposób długi, ale właśnie dlatego później zastosowanie ułamka wykaże większą wygodę i tem samem nabierze więcej znaczenia realnego. Po zapoznaniu się z mniejszemi przykładami. gdzie występuje reszta i sposobami jej ominięcia, możemy przejść do przykładów większych z pierwszej setki i następnie do zastosowania reszty w dzieleniu liczb dwucyfrowych przez jednocyfrową dzięki prawu przenoszenia reszty. Czem jest to prawo przenoszenia reszty, zrozumiemy łatwo z przykładu. Mamy, dajmy na to, do podzielenia 65 : 5. Stosujemy podział pozycyjny: (60 + 5) : 5. Dzieląc dziesiątki, otrzymamy jeden dziesiątek jako resztę i następnie tę resztę przenosimy do 5 jedności, łącząc w jedną całość, którą w dalszym ciągu dzielimy przez 5. W ten sposób reszta, otrzymana od podzielenia jednego składnika dzielnej, przenoszona jest i łączona z następnym, który po tem złączeniu poddajemy dzieleniu. Na tem właśnie polega prawo wspomniane. Łatwo zrozumieć, jakie ważne zastosowanie mieć ono później będzie przy dzieleniu liczb wielocyfrowych; również łatwo uprzytomnić sobie, że bez takich poprzedzających ćwiczeń na liczbach małych, prawo to później jest zgoła niezrozumiałem, a sam proces dzielenia dzięki temu czemś czysto mechanicznem. Ale na tem nie koniec. W poprzednim przykładzie dzielenie można wykonać w ten sposób: $65 : 5 = (60 + 5) : 5 = 60 : 5 + 5 : 5 = 12 + 1 = 13$. W tym przypadku nie trzeba prawa przenoszenia reszty. Czy będziemy dzieciom w rachunku pamięciowym przeszkadzali wykonywać ten rachunek prawidłowo, ale tak, jak im się podoba? Oczywiście, że nie. Wszak, główną zaletą rachunku pamięciowego jest jego swoboda ruchów, obliczona na budzenie samodzielności myślenia. Możliwe jest więc przy małych liczbach i pamięciowem rachowaniu używanie innych sposobów przez dzieci, a nawet nauczyciel winien je popierać, lecz to nie przeszkadza zapoznaniu się dobremu przez dzieci z prawem przenoszenia reszty. Robimy to celowo, przygotowując grunt do przyszłego dzielenia liczb wielocyfrowych, co nie tylko wolno, ale się nawet zaleca.

Prawo przenoszenia reszty nie wyczerpuje jednakże wszystkiego. Jeżeli porównamy dwa powyższe sposoby dzielenia 65 przez 5, z łatwością zauważymy, że przy pierwszym sposobie otrzymujemy najpierw tylko same dziesiątki, a przy drugim dziesiątki z jednościami. Fakt ten w rachunku pamięciowym nie odgrywa żadnego znaczenia, ale później, gdy będzie chodziło o dzielenie liczb większych, zaważy on wielce na sposobie wykonania. Wszak właściwie przy piśmiennem wykonywaniu działań dostajemy kolejno wszystkie jedności porządkowe ilorazu odrazu, t. j. najpierw, dajmy na to, setki, potem dziesiątki, a na koniec jedności. Staje się to możliwem, jak wiemy, w ten sposób, że staramy się podzielić dzielną na takie dwa składniki, żeby w pierwszym z nich dzielnik mógł się mieścić. Ten pierwszy składnik zawiera pewną liczbę pewnych jedności porządkowych, a w ilorazie dostajemy odrazu te właśnie jedności. Wielce to upraszcza proces dzielenia, a stąd ma ważne znaczenie praktyczne. Dlatego, żeby dzieci przygotować do podobnego postępowania później, żeby jasno zrozumiały, dlaczego dobieramy np. jeszcze nową cyfrę, czyli zwiększamy pierwszy składnik dzielnej, ważnem jest umiejętnie i stopniowo (jak zwykle to robić winniśmy) rzecz tę poruszyć wcześniej, co szczególniej jasno wystąpi przy dalszem dzieleniu liczb trzycyfrowych, gdzie właśnie tę rzecz wyraźniej wyjaśnimy, nazywając ją prawem porządkowania jedności. W pierwszej setce pomimo istnienia różnych sposobów dzielenia prawo to nie występuje jeszcze jasno i dlatego niema tu miejsca na bliższe z niem zapoznanie się, ale, gdy posuniemy się dalej, np., gdy mamy do podzielenia $132 : 2$, z łatwością znaczenie tego prawa da się uwypuklić. Można dzielenie wykonywać tak: $132 : 2 = (100 + 32) : 2 = 50 + 16 = 66$, albo tak: $132 : 2 = (130 + 2) : 2 = (120 + 12) : 2 = 60 + 6 = 66$. Ten drugi sposób związany z podziałem sztucznym może się wydać trudniejszym, ale dostateczna liczba ćwiczeń przygotowawczych, właśnie ze względu na przyszłość, jest konieczna.

Po zaznajomieniu się z mnożeniem i dzieleniem w pierwszej setce posuwamy te działania dalej w rozszerzonym zakresie do 200, przyczem wykonywamy najpierw łatwe przykłady w rodzaju $60 \times 3 = 180$, a później coraz trudniejsze. Wszystkie jednak przykłady mnożenia w zakresie 200 muszą być z początku wykonywane w pamięci, dopiero później przy przejściu 200, dla ilustracji piśmiennego mnożenia przez liczbę jednocyfrową, należy kilka takich przykładów przerobić piśmiennie. Dzielenie również trzeba się starać wykonywać w pamięci, jeżeli nie chcemy usilniej podkreślić prawa porządkowania jedności. Co się tyczy dzielenia w prostych przypadkach przez liczby dwucyfrowe, to wyjątku ono stanowić nie powinno, np. $120 : 12 = 10$, ale w przykładach więcej złożonych, o których będzie mowa później, piśmienny rachunek jest już na miejscu tak samo, jak wtedy, gdy będziemy mieli do czynienia z dzieleniem, w którem stosujemy prawo porządkowania jedności. Mnożenie i dzielenie w drugiej setce wobec porządnego opracowania ich w pierwszej, nie przedstawi żadnych istotnych trudności. Np.: $58 \times 3 = (50 + 8) 3 = 150 + 24 = 174$. W tym przykładzie stosujemy znane prawo rozdzielności i tabliczkę mnożenia. To samo przy dzieleniu. Np.: $165 : 3 = (150 + 15) : 3 = 50 + 5 = 55$. Gdyby w dzieleniu wypaść miała reszta, zjawi się ona przy podziale sztucznym w drugim składniku, pierwszy zaś zawsze dobieramy w pamięci tak, żeby dzielenie się odbyło bez reszty. W tych przypadkach, gdzie chcemy wprowadzić prawa przenoszenia reszty i porządkowania jedności, a więc przy piśmiennem wykonaniu dzielenia, rzecz jasna, podział robić musimy pozycyjny. Tylko bowiem przy piśmiennem wykonaniu zjawią się wypukle wspomniane prawa. Piszemy tak: 1'6'5 : 3 = 55, to jest używamy zwykłego

```
1'6'5 : 3 = 55
1 5
———
  1 5
  1 5
  ———
```

sposobu zapisywania, przyczem dajemy objaśnienie znaczenia przecinków stawianych nad cyframi. Przecinki te oznaczają podział na 2 składniki. Pierwszy podział nie udaje się, bo nie dostaniemy ani całych setek, ani wszystkich dziesiątków (jeszcze jest 6). Resztę po odjęciu dodajemy do pozostałego składnika, co się wykonywa przez zwykłe dopisywanie, bo ta reszta jest dziesiątkiem.

W ten sposób cały zakres 200 będzie opracowany, poczem musi nastąpić nowe rozszerzenie do 1000. Rozszerzenie to robimy najpierw setkami, później dziesiątkami, a nakoniec jednościami. Jednocześnie, oczywiście, występuje zapisywanie liczb. Rozszerzenie to nie nasuwa żadnych trudności, ale ze zwiększonym zakresem musimy również rozszerzyć stosowanie działań. Cały zespół ich stanowi tutaj trzeci główny moment w programie nauczania trzeciego roku.

Nietrudno zrozumieć, że w pierwszym stopniu w tym zakresie będzie wprowadzenie dodawania i odejmowania, a drugim — mnożenie i dzielenie. Jeżeli weźmiemy pod uwagę jakąkolwiek oddzielną setkę, np. czwartą, to dodawanie i odejmowanie można w niej podzielić na dwie grupy. Do pierwszej należą takie przykłady w których do liczby trzycyfrowej (lub od takiejże) dodajemy (ew. odejmujemy) liczbę dwucyfrową. Np. do 325 dodajemy 87 lub od 367 odejmujemy 75. Takie przykłady prawie niczem się nie różnią od odnośnego dodawania i odejmowania liczb trzycyfrowych w drugiej setce, a stąd, jeżeli tamto było przerobione dobrze, możemy z łatwością stosować sposób wykonania i w tym zakresie. Poprzednio, na właściwem miejscu, pozornie kwestji nie wyczerpaliśmy, więc tu parę słów dodamy. Najtrudniejszą rzeczą jest, oczywiście, odejmowanie w tym rodzaju: 153 — 86, gdzie trzeba „pożyczać" od setki. Trudność ta jednakże nie jest tak wielką, by nauczyciel, który wniknął w treść poprzednich rozważań tej książki, nie potrafił sobie z nią dać rady. Można postępować tak: $153 - 86 = 153 - (53 + 33) = 100 - 33 = 67$. Dalsze wyjaśnienia z naszej strony są zbyteczne.

Zupełnie nową, natomiast, rzeczą jest druga grupa dodawania i odejmowania, gdzie wchodzą 2 liczby trzycyfrowe. Ta nowość, rzecz jasna, jest względna, bo dotyczy tylko właściwie skomplikowania działania, a nie samej istoty rzeczy, a dlatego nie wymaga od nas specjalnych omówień. Rzecz prosta, nie dajemy w tym roku takich zadań i przykładów, w których suma przekroczyłaby 1000, nie dajemy dotąd, oczywiście, póki prostsze przykłady nie będą wykonywane szybko i wprawnie. Na to trzeba czasu, a program, jak widzimy, jest duży i cały czas pochłonie w zupełności, o ile szczególnie dogodne warunki nie ułatwią nauczania. Zrozumiałą jest rzeczą, że działania wspomniane z liczbami trzycyfrowemi w obu grupach wykonywamy już piśmiennie, za wyjątkiem łatwych przykładów.

Na drugim stopniu w tej trzeciej części programu traktujemy mnożenie i dzielenie w całym zakresie. Jakkolwiek powyżej poruszaliśmy sprawę mnożenia i dzielenia przez liczbę dwucyfrową, co w rachunku pamięciowym, szczególniej w dzieleniu, gdzie iloraz jest jednocyfrowy, nie przedstawia zbyt wielkich trudności, musimy tu wyraźnie zaznaczyć, że w 3-im roku główną jednakże treścią tych działań może być tylko mnożenie i dzielenie przez liczbę jednocyfrową. Z poprzedniego można się było przekonać, ile różnych pozornie drobnych szczegółów musi uczący uwzględniać, żeby nauczanie posiadało wewnętrzną moc stopniowo i spokojnie rozwijającego się procesu, żeby w zgodzie było z głównemi zasadami dydaktyki: ciągłością i indukcją. Wprowadzenie dzielenia i mnożenia przez liczbę dwucyfrową pociągałoby za sobą niepotrzebne trudności i skomplikowanie, które, oczywiście, nie pomogłyby sprawie nauczania. Nie nalegam jednakże na to usilnie, bo, jak zwykle, sądzę, że uczący sam powinien wiedzieć, co robi. Jeżeli jest przekonany, że może wprowadzić tę rzecz—niech zrobi na swoją odpowiedzialność, ale ostrożnie, bo lepiej mniej przejść, a dobrze, niż wiele i bez pożytku umysłowego dla dzieci. Poza lasem cyfr i działań arytmetycznych, poza różnego rodzaju sztucznemi zadaniami i szarym tak często dniem szkolnym, trzeba widzieć powolne wzrastanie duchowe. Jasne widzenie tego jest główną cechą pedagoga. Program jest rzeczą względną i zawsze sztuczną, ale żywe odczucie możliwości, gruntowne przekonanie nauczyciela, że umysł dziecięcy dorósł do stawianych mu zadań, jest najlepszym probierzem i zawsze nim będzie pomimo rozmaitości przepisów, programów i wogóle zmiennej kolei wymagań stawianych szkole.

Dzielenie i mnożenie piśmienne przez liczbę jednocyfrową jest zakończeniem i ostatecznem ugruntowaniem wszystkich poprzednio zaznaczonych cech tych działań oraz przygotowaniem zasadniczem do dalszego nauczania. Dziecko, które te rzeczy robi świadomie i wprawnie, jest już przygotowane, ale żeby to osiągnąć, trzeba nie mało cierpliwości i spokoju, trzeba czasu.

Zapisywanie mnożenia piśmiennego powinno się odbywać nie przez podpisywanie mnożnika, lecz przez pisanie go obok mnożnej. Tak robią w rachunku praktycznym i mają po temu ważne powody, śród których skrócenie samego procesu mnożenia nie małą odgrywa rolę. Z drugiej strony taki sposób jest zupełnie naturalnem przejściem od zapisywania przy rachunku pamięciowym, które stosowaliśmy poprzednio. Prócz tego przy podobnem zapisywaniu unikamy nieuzasadnionego schematu mnożenia, który używany jest w praktyce szkolnej. Wyjaśnimy to na przykładzie. Weźmy liczby większe, nie należące do zakresu programowego, o którym mówimy, dla jaśniejszego przedstawienia rzeczy. Np. mamy do pomnożenia 378 przez 15. Zapisujemy tak:

$$\begin{array}{l} 378 \times 15 = 5670 \\ 1890 \\ 5670 \end{array}$$

Odrazu widzimy, że ominęliśmy jeden z cząstkowych iloczynów przy zapisywaniu, gdyż właściwie był on już gotowy, przyczem mnożenie zaczęliśmy nie od jedności, ale od setek. To ostatnie może być robione i przy zwykłem podpisywaniu mnożnika, ale ominięcie, skracające mnożenie nie da się już wykonać. Przy zwykłym sposobie mnożenia u dzieci utrwala się przekonanie, że zawsze trzeba zaczynać mnożenie od jedności, co jest zupełnie niesłuszne i niepotrzebne. Jakkolwiek w trzecim roku zgodnie z rekomendowanym tam zakresem mnożenia nie będziemy mnożyli, wogóle mówiąc, przez liczby dwucyfrowe, a więc używali wspomnianego ominięcia, należy jednakże odrazu dzieci do tego sposobu zapisywania przyzwyczajać. Muszę przytem nadmienić, że iloczyn 5670 można w poprzednim przykładzie pisać tylko raz, mianowicie odrazu w tem miejscu, gdzie jest mnożna i mnożnik. Wymaga to jednakże najpierw pewnej wprawy. Zapisywanie przy dodawaniu i odejmowaniu pozostaje tem samem, co zwykle, a wyjaśnienie tego nie budzi trudności.

Na tem się kończy program zasadniczy trzeciego roku nauczania. Pozostaje nam jeszcze parę kwestyj, o których warto kilkoma słowami wspomnieć.

Środek ciężkości nauczania zarówno ze względu na wprawę, jak zainteresowanie, jest w zadaniu, które dzieciom dajemy do rozwiązania. Powiedzieliśmy wyżej, że już w drugim roku zadania komplikują się przez występowanie szeregu pytań i tem samem wymagają więcej namysłu. Nie można jednakże radzić, by tych pytań było więcej, jak 3—4. Nie zapominajmy bowiem nigdy, że na tym stopniu większą korzyść odnoszą dzieci z rozwiązania kilku zadań mniejszych, niż jednego lub dwóch większych. W tej dziedzinie konieczne jest również stopniowanie, a każdą rzecz dzieci powinny robić dobrze, gruntownie. Liczny szereg pytań przy tej samej treści konkretnej nuży umysł jeszcze mało wyrobiony, a niewiele daje pola do wprawy w rachunku. Przy rozwiązywaniu zadania należy nieraz wychodzić z pytania głównego i następnie drogą analityczną posuwać się do rzeczy znanych, w zadaniu danych; następnie przejść odwrotną drogę, która daje plan zadania. Naturalnie, nie w każdem zadaniu tak trzeba robić: podobne postępowanie byłoby przedewszystkiem nudne; ale przynajmniej te zadania, w których układ działań jest mniej znany dzieciom, wymagają takiego postępowania na początku. Ze wszystkiego można zrobić bezduszny schemat; otóż nauczyciel powinien pamiętać, że pragnie dać uczniowi pewną często przydatną metodę, ale nie krępować jego intuicji i sił twórczych. W każdej dziedzinie nauczania spotykamy się z pytaniami, w których odpowiedź nie da się nigdy wyrazić ogólnem, niewzruszonem prawidłem: uczymy żywe dzieci, które same myślą i myśleć winny, a stąd potrzeba nie dającej się uchwycić w stałe karby teorji umiejętności w metodzie nauczyciela.

Z poprzedniej nauki uczniowie mają pojęcie o niektórych własnościach działań; ma również duże znaczenie podkreślanie wczesne zmiany sum, iloczynów i t. p. skutkiem zmiany elementów działania. Każdy doświadczony nauczyciel wie, że uczniowie nie zdają dobrze sprawy sobie z takiego faktu: mnożną zwiększyliśmy 2 razy, mnożnik 3 razy; ile razy zwiększy się iloczyn? Fakt to jeden z wielu. Nie chcę tu zaznaczać, że jest zadaniem trzeciego roku nauczania wyjaśnianie tych rzeczy, podkreślam tylko, że w tej dziedzinie, jak i w innych, powinien mieć miejsce układ metodyczny. Zmiany sumy przez dodawanie i odejmowanie od składników mogą być zilustrowane nawet na liczydle i dlatego nadają się bardzo do wczesnego zaznaczenia. Trudniej dać sobie radę w tym względzie ze zmianami iloczynu i ilorazu, ale taki fakt, że zamiast jednorazowego mnożenia przez 6 można, dajmy na to, pomnożyć najpierw przez 2, potem to, co otrzymamy, przez 3, nie powinien nawet na tem stadjum nauczania być obcym uczniowi. Wczesne wprowadzenie pojęcia pola prostokąta np. daje bardzo dobry sposób do uzmysłowienia tych rzeczy; ale dlatego trzeba pewne pojęcia geometryczne wcześnie wprowadzać, czego się u nas nie robi. Używanie prostokątów, ułożonych z kulek liczydła, może być również przydatne, jak dobrze dobrane przykłady konkretne i zadania.

Zakres liczbowy w tym roku pozwala na rozszerzenie odpowiedniego zakresu miar. Mogą występować miary duże, jak kilometr, mila, liczba dni w roku i t. p. Nieraz nie zdajemy sobie sprawy, że te duże miary są dla dzieci tylko słowami: nie odpowiada im żadne konkretne wyobrażenie. Stąd wynika, że tak samo, jak każdą mniejszą miarę uczeń musi mieć przed oczami i nieraz w ręku trzymać, a także używać, tak też i duże miary również wymagają bliższego poznania. Dlatego dobrze jest wyzyskać wycieczkę, dać przykład z otaczającej miejscowości i t. p. Działania z liczbami wielorakiemi uprawiamy dalej: mogą występować teraz obok dwuczłonowych już liczby o trzech jednostkach miar, np. 3 m. 7 dm. 8 cm. Zadania na obliczenie czasu w zakresie jednego roku również mogą mieć miejsce. Niemałe ma znaczenie dokładne prowadzenie kalendarzyka w szkole. Kalendarzyk ten dobrze jest urządzić w ten sposób, aby uczniowie codzień sami nastawiali datę, a w odpowiednim czasie miesiąc. Do tego zwyczajny kalendarzyk ścienny, w którym kartki zdzieramy, nie nadaje się. Manipulacja z nim może być wykonywana przez uczniów jeszcze w drugim roku nauki. Zaleca się również przyzwyczajenie dzieci do tego, aby przy każdem zajęciu piśmiennem w klasie czy w domu, np. przy ogólnem rozwiązywaniu zadań lub t. zw. klasówce, przy odrabianiu zadanej lekcji dokładnie opatrywały datą każdą podobną czynność. Świadomość czasu biegnącego, wartości różnych jego części jest rzeczą ważną pod względem praktycznym. Różni ludzie w tym samym czasie różne mogą robić rzeczy nie tylko z powodu różnic indywidualnych, przyrodzonych, ale i z powodu pewnych przyzwyczajeń, mających początek często we wczesnem dzieciństwie. Umiejętność oszczędzania i oceny potrzebnego czasu jest rzeczą bardzo ważną. Ileż to czasu nieraz tracimy po próżnicy skutkiem tego, że nam nigdy w dzieciństwie nie zwracano uwagi, nigdy nie przyzwyczajano nas do liczenia się z temi chwilami, które przechodzą jednakowo dla każdego i nie wrócą już, chociaż nie były wyzyskane! Wyznaczanie czasu na określoną robotę, zapytania w tym rodzaju: jak długo idziesz do szkoły? ile na to lub owo tracisz czasu? mają swoje znaczenie nie tylko dla sprawy rachunku, nakazując szukanie i stosowanie liczby do codziennych spraw życiowych, ale i dla wychowania, dla wyrobienia poczucia obowiązku i woli.

Zadania z zastosowaniem miar czasu też nie powinny być omijane. Np. przebieg życia jednego człowieka, doba i jej godziny z minutami i sekundami, miesiąc i rok z liczbą jego dni; wszystko to może być materjałem do zadań i nie tylko może, ale powinno być.

Trzy pierwsze lata nauki, to właściwie kamień węgielny matematycznego przygotowania w przyszłości. W tych latach dzieci indukcyjnie poznają wszystkie główne własności 4 działań, a więc tę podstawową rzecz, bez której ani nauka ułamków, ani pojęcie o liczbie ujemnej, ani rozwiązanie równania nie jest możliwe i jasne. Ta doniosła praca przypada w udziale nauczycielowi elementarnemu i, jakkolwiek bardzo żmudna to praca, ale dobre jej wykonanie ma decydujące znaczenie dla przyszłości nie tylko samego wykształcenia matematycznego, ale przedewszystkiem rozwoju sił duchowych człowieka. Nauczyciel szkoły średniej na piasku buduje swój gmach, jeżeli niema tej dobrej trzyletniej podstawy, jeżeli praca jego nie jest ugruntowana przez ciężki trud kolegi ze szkoły elementarnej. Ten ciężki trud on przedewszystkiem musi jasno oceniać, bo wtedy tylko zrozumie głębokie węzły koleżeństwa pedagogicznego, organiczną łączność szkoły elementarnej ze średnią i, co więcej, prawdziwą jedność i wielkość samej nauki, jako potężnego środka wydobycia człowieka z moralnego i umysłowego niedołęstwa. Pragnijmy w szkole nauki wielkiej i żywej, dążmy do niej, bo ona da nam nie tylko stałą świeżość młodości potrzebnej w obcowaniu z dziećmi, ale i rezultat w postaci najwyższych dóbr cywilizacji.

ROZDZIAŁ IX

Rok czwarty jest ostatnim rokiem nauczania o liczbie całkowitej, rokiem w którym kończy się długi proces indukcyjnego poznawania własności działań oraz rozwija się obok i potężnieje tak potrzebna praktycznie wprawa w rachunku. Obie te rzeczy w dobrem nauczaniu są w bliskim ze sobą związku. Wprawa mechanizuje rozumiane jasno rzeczy, z których przez to ulatuje wieczny duch myśli, by się przenieść dalej po nowe zdobycze, sięgnąć po dalszy stopień rozwoju. Prawo redukcji, dzięki któremu świadomy wysiłek na tle ćwiczenia ustępuje miejsca mechanizacji, przejawia się tu w całej pełni, ale tylko w dobrem nauczaniu, t. j. takiem, które przy nauce arytmetyki nie zapomina o rozwijaniu myśli dziecięcej, o potęgowaniu woli.

Zakończenie wspomnianego procesu wymaga jasnego i dokładnego sformułowania poznanych właściwości liczby. Wymaganie to jest z tego względu potrzebne i konieczne, że wiedza prawdziwa bez takiego sformułowania nie istnieje. Oczywiście, zanim może być zdobyta formuła, muszą nieraz przechodzić dni, miesiące i lata doświadczeń i prób, ale cała ich praca byłaby w dużej mierze bezużyteczna, gdyby nie została zakończona, wyprowadzona z mglistych osłonek intuicji i poczucia w jaśniejsze światło sformułowania rozumowego. W ten sposób buduje się nauka, w ten sposób rośnie gmach wiedzy ludzkiej, mądrość życia i znajomość wszelkich jego przejawów. Nauczanie, któreby poprzestało na niedokładnie uświadomionej sprawności, na wiedzy praktycznej tam, gdzie może dać jasność uświadomienia, gdzie może dać formułę, byłoby niedokończonem, czemś niższem, niż wymagania wiedzy istotnej. Formuła kończy proces indukcyjnego poznawania, jest jego celem i niezbędnem ogniwem. Tylko taka całość może kształcić umysł i dawać wiedzę. Wynika to, szczególnie w matematyce, z istoty rzeczy, z natury umysłu ludzkiego. Formuła musi przyjść jednakże w porę.

Jeżeli zaczynamy od niej nauczanie, przeczymy najistotniejszym interesom myśli ludzkiej, która nie może być inna, niż samodzielna, która nie kształci się na cudzej pracy, nie żyje z niej, a wymaga własnej, zgodnie z naturalnemi drogami poznawania. Dlatego też wczesne podawanie formuł jest jednym z najcięższych grzechów dydaktycznych, przeczących wszystkim głównym zasadom dydaktycznym.

Co innego, gdy formuła wieńczy proces indukcyjnego poznawania, gdy się opiera na osobistem doświadczeniu, na całym szeregu odpowiednich faktów i spostrzeżeń. Wtedy ona jest potrzebna, nawet konieczna.

Czy wobec tego sformułowanie głównych własności działań w roku czwartym jest możliwe i uzasadnione? Jeżeli całe nauczanie w poprzednich trzech latach było prowadzone porządnie i gruntownie, to na to pytanie może być tylko jedna odpowiedź: tak. Rok czwarty jest ostatnim rokiem nauki o liczbie całkowitej w zakresie szkolnym, musimy więc w nim dać już wiedzę o tej liczbie, nie tylko sprawność mechaniczną, a wiedza bez jasnego sformułowania nie istnieje.

Sformułowanie może być rozmaite. Może ono wyrażać się w zdaniu słownem, streszczającem i wyrażającem daną własność, może też polegać na wprowadzeniu specjalnych symboli czyli, jak zwykle, liter. O tem już poprzednio była mowa, dlatego tutaj rozpatrzymy tylko możliwość zastosowania tego lub innego sposobu.

Formuła słowna wtedy jest dobra, gdy jest krótka i przejrzysta. Nie zawsze da się to uskutecznić i dlatego nie zawsze jest ona pożądana. Bez wątpienia dzieci na tym poziomie są jeszcze nie bardzo przygotowane do wprowadzenia ogólnego symbolu literowego na oznaczenie liczby. Takie oznaczenie wymaga specjalnego przygotowania i dłuższego wobec tego omówienia, ale po zdobyciu tej placówki, rzecz przedstawi się nieraz o wiele prościej i jaśniej, niż w formule słownej. Dlatego nie należy odrazu ustępować z placu i porzucać rzecz dzięki leniwemu twierdzeniu: nie można. Należy tylko robić to celowo, spokojnie, wytrwale i umiarkowanie. Np. pragniemy zapomocą symboli literowych przedstawić prawo rozdzielności przy mnożeniu, które właśnie nasuwa pewne trudności przy słownem sformułowaniu.

Przedewszystkiem nauczyciel powinien wprowadzić na jednej z lekcyj pojęcie „jakiejkolwiek liczby".

Dlatego, wywołując uczni, wymaga zapisania na tablicy szeregu różnych liczb zarówno przez siebie dyktowanych, jak pomyślanych przez ucznia. Zwraca uwagę klasy, że wszystkie zapisane liczby są różnemi oddzielnemi liczbami, których jest bardzo wiele, tak wiele, że nigdy nie można byłoby wszystkich wypisać. Następnie poleca uczniom pomyślenie sobie jakiejkolwiek liczby i pyta się kilku, jaką liczbę pomyśleli. Odpowiedzi są różne, liczby otrzymane są znowu poszczególne. Zwraca na to uwagę, zaznacza, że mu chodzi nie o poszczególną liczbę, lecz o jakąkolwiek i pyta się, jakby to można było wyrazić, powiedzieć lub zapisać, a przytem, żeby to nie było ani 4, ani 32, ani 378 i t. p. Pisze na tablicy „jakakolwiek liczba". Czy to dobry sposób wyrażenia, czyby nie można było krócej tego wyrazić? Np., gdybyśmy się umówili oznaczać to samo kwadracikami, czy wystarczałoby takie oznaczenie? Wystarczałoby dla nas, a nie dla innych ludzi, którzy też mogą myśleć o jakiejkolwiek liczbie. Jak ominąć tę trudność? Jaki znak wymyślić? Przychodzi teraz z pomocą, powiada, że jakąkolwiek liczbę przyjęto, umówiono się powszechnie oznaczać literami: a, b, c i t. d., więc, gdy napiszemy b lub a będzie to oznaczało liczbę wszelką i dużą, i małą, jakąkolwiek. Litera l też może być zastosowana. Takie omówienie, prowadzone w ostatnich dwudziestu minutach na kilku lekcjach wystarcza do zrodzenia pojęcia o znaczeniu symbolu literowego. Nauczyciel wtedy przechodzi do oznaczenia sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu. Przerobienie tego nie nasuwa już trudności.

Jeżeli potem pragnie sformułować prawo rozdzielności, dyktuje najpierw kilka przykładów tego rodzaju:

$$(5 + 13)\,2 = 5 \times 2 + 13 \times 2,$$

$$(178 + 34)\,15 = 178 \times 15 + 34 \times 15 \text{ i t. p.}$$

Wymaga, by uczniowie sami kilka podobnych przykładów podali i pyta się, czy sposób wykonania zależy od tego, jakie liczby zastosujemy, czy zawsze trzeba jednakowo postępować? Po otrzymaniu odpowiedzi, która nie nasunie trudności, stwierdza razem z uczniami, że jakiekolwiek liczby weźmiemy, zawsze trzeba najpierw pomnożyć jedną, potem drugą i wreszcie dodać iloczyny. Czy nie można tego wyrazić używając znaków na jakiekolwiek liczby? Zagadnienie również rozwiązuje się bez wielkiego zachodu i otrzymuje się formuła: $(a + b)\,c = ac + bc$.

Ta formuła wyraża dosadnie prawo rozdzielności. W ten sposób można będzie zastosować oznaczenia literowe i do innych formuł, o czem powiemy niżej.

Czwarty rok ma jako główne zadanie właśnie sformułowanie zasadniczych własności działań i usystematyzowanie ich, ale to nie następuje odrazu na początku tego roku. Trzeba przedtem te działania rozwinąć, rozszerzyć je na dowolny zakres liczbowy, a dlatego należy szczegółowiej o kolejności różnych momentów nauczania pomówić.

Zatrzymaliśmy się poprzednio na zakresie 1000, teraz należy po powtórzeniu działań w tym zakresie iść dalej, a więc ugruntować ostatecznie podstawy numeracji, nie starając się gromadzić i używać ogromnych liczb, ale przedewszystkiem zwracać uwagę na budowę liczby. Rozszerzamy najpierw zakres liczb do 10000 i przerabiamy w tym zakresie zadania na dodawanie i odejmowanie, przyczem jednocześnie ciągle używamy mnożenia i dzielenia przez liczbę jednocyfrową a przytem tak, że mnożna i dzielna mogą przekraczać tysiąc. To będzie pierwszy etap.

Dalej, gdy wspomniane rzeczy doszły do pewnej sprawności w wykonaniu, gdy nie budzą już zastanowienia i trudności, wprowadzamy mnożenie i dzielenie przez liczbę dwucyfrową, najpierw w znanym zakresie 1000, potem dalej. Mnożenie przez liczbę dwucyfrową wymaga już podwójnego zastosowania prawa rozdzielności i może być najpierw robione w postaci dwóch oddzielnych iloczynów. Np. $47 \times 23 = 47 . 20 + + 47 \times 3$ lub naodwrót. Pierwszy iloczyn daje 940, a drugi 141. Dodajemy i otrzymujemy rezultat. Po kilku takich przykładach dzieci się przekonywają, że zawsze jeden iloczyn kończy się na 0 i że przy dodawaniu można tego zera nie pisać. Nauczyciel proponuje skrócenie działania, wykonanie go w jednem miejscu, a nie w dwóch. Niedługa rozmowa z uczniami i pomoc ze strony nauczyciela wystarczy, aby dojść do zwykłego sposobu zapisywania $47 \times 23 = 1081$

$$\begin{array}{r} 940 \\ 141 \\ \hline 1081 \end{array}$$

Tu zaczęliśmy mnożenie od dziesiątków. Można też zacząć od jedności, trzeba tylko zwracać uwagę na to, co dostajemy w iloczynie i odpowiednio podpisywać. Rozszerzenie mnożenia na liczbę trzycyfrową w mnożnej nie zrobi już trudności.

Więcej ich będzie z dzieleniem. Tutaj konieczną rzeczą jest poprzednie wprawienie się w pamięciowe przykłady dzielenia przez liczbę dwucyfrową, o których mówiliśmy wyżej. Uczeń musi wprawnie odpowiadać, ile razy 12 mieści się w 40 i t. p. *Dlatego tę rzecz poprzednio stosowaliśmy.* Gdy ta wprawa jest dość dobrze ugruntowana, można przystąpić do piśmiennego dzielenia przez liczbę dwucyfrową. Jeszcze przy dzieleniu przez jednocyfrową liczbę, o czem nie wspomnieliśmy wyraźnie wyżej, należało stosować tę samą metodę oddzielnego dzielenia składników dzielnej, potem przenoszenia reszty, dalszego dzielenia i t. p. Szereg takich przykładów wyklaruje prawa dzielenia, a skrócony sposób zapisywania wykaże swój pożytek i celowość. To samo przerabiamy z liczbą dwucyfrową jako dzielnikiem, unikając z początku przykładów, gdzie występowałaby potrzeba dobrania trzeciej cyfry w dzielnej, t. j. robienia nowego podziału, co zjawić się powinno wtedy, gdy dzieci różne przykłady nie zawierające tej trudności nauczą się wprawniej dzielić. Wystąpienie potrzeby dobrania trzeciej cyfry wyraźnie podkreśla prawo porządkowania jedności; to trzeba zawsze w odpowiedniej formie zaznaczać.

Z poprzedniego uwidocznia się jeszcze bardziej, dlaczego nie polecaliśmy stosowania mnożenia i dzielenia przez liczbę dwucyfrową w trzecim roku. Jednym z powodów było większe skomplikowanie tych działań, a drugim wprawa należyta i przyzwyczajenie zarówno do odnajdywania odpowiedzi przy pamięciowem dzieleniu przez liczbę dwucyfrową, jak zrozumienie należyte skróconego sposobu zapisywania wykonywanego działania.

Gdy wprawa uczniów wykaże, że dzielenie i mnożenie przez liczbę dwucyfrową jest należycie opanowane, możemy jeszcze raz przystąpić do dalszego rozszerzenia zakresu liczbowego, nie krępując się już wielkością liczby lub, lepiej powiedziawszy, nie oznaczając ścisłej granicy. Nie należy jednakże uprawiać próżnej zabawy w miljardy i t. p. a tem bardziej używać takich liczb często w zadaniach, które, jak to nieraz już mówiliśmy, muszą być związane jak najściślej z rzeczywistością dostępną dzieciom. Można jednakże wykazać szereg następujących po sobie jedności porządkowych, dać pojęcie o klasie i t. p., jednem słowem, zakończyć z numeracją.

Działania w dalszym ciągu będą się już rozwijały bez większych trudności i dlatego poprzestaniemy tu na kilku krótkich uwagach, dotyczących głównie pewnych rzeczy często ignorowanych.

Przy dodawaniu i odejmowaniu nieraz praktykowane są t. zw. próby tych działań, które przy liczbie składników większej niż 3, są bezcelowe, bo prowadzą do podobnegoż szeregu nieraz trudniejszych działań i nie wiadomo czasem, gdzie uczeń się pomylił, czy w samem początkowem działaniu, czy też w jego „próbie". Więcej celową jest próba przy odejmowaniu, gdyż prowadzi do dodawania tylko, ale najcelowszem jest wczesne przyzwyczajenie ucznia do porządnego zapisywania i uważnego wykonywania działań. Powtarzając to samo po raz drugi, może się przekonać, czy nie popełnił błędu. Próby przy mnożeniu i dzieleniu są właściwsze jeszcze z innego względu, gdyż przyzwyczajają umysł do pojęcia zależności tych działań i przyszłego sformułowania zasadniczej własności dzielenia: dzielna równa się dzielnikowi pomnożonemu przez iloraz więcej reszta. Próby wogóle są pozostałością dawnej arytmetyki szkolnej, niemetodycznie prowadzonej, zaczynającej się od liczb dużych bez należytej wprawy w działaniach z mniejszemi i dlatego posługującej się różnemi sztucznemi metodami do sprawdzenia żmudnie otrzymanego rezultatu. Przylepszej metodzie nauczania, tracą one swoją pierwotną wartość, bo najlepszą próbą jest świadomy, porządny i uważny rachunek.

Gorzej się przedstawia sprawa z t. zw. teorją arytmetyki, od której wielu nauczycieli uwolnić się dotąd nie może. Jeżeli w szkole nie używa się podręcznika teorji, to nieraz nauczyciel malcom z pierwszej klasy dyktuje swoją teorję, która czasem wygląda, jak — arytmetyka czterowymiarowa, jeżeli użyjemy tego porównania geometrycznego. Np. widziałem zapiski uczniowskie, w których nauczyciel dyktował, kiedy się wykonywa odejmowanie. Rzecz jasna, że podobnych przypadków, jest bardzo wiele, że scharakteryzować ich konkretnie albo pojęciowo nie można, można natomiast przyzwyczajać do wykuwania niepotrzebnych recept tam, gdzie potrzebne jest z obu stron, t. j. i ze strony ucznia i ze strony nauczyciela, myślenie konsekwentne i samodzielne. Cały duch niniejszej książki jest żywym protestem przeciwko takiej metodzie nauczania i, kto zrozumiał jej intencje, temu nie podniesie się ręka do zrobienia takiej niedorzeczności dydaktycznej. Zapisywać można tylko jasne, świadomie stosowane prawa i własności działań arytmetycznych, nie zaś zgoła nieobliczalne przypadki ich stosowania. Teorja może być stosowana w ostatniej klasie przy powtarzaniu, ale teorja napisana przez człowieka, który zna naukę i jest doświadczonym oraz wykształconym nauczycielem. Inaczej będziemy dawali jako pokarm duchowy naszym dzieciom wytwory zgoła błędne i szkodliwe.

Najważniejszym podręcznikiem szkolnym przy nauce rachunku jest zbiór zadań, który przedewszystkiem musi być ułożony metodycznie przez doświadczonego i umiejętnego nauczyciela, gdyż w nim nie tylko stopniowanie odgrywa rolę, ale i liczba zadań, zależna od tego, czy może dać dostateczną wprawę, czy też nie. Takiego zbioru zadań nie posiadamy jeszcze i należy z naciskiem zaznaczyć pilność i znaczenie tej sprawy dla dobrego nauczania. Najlepiej podzielić zbiór zadań na 6 książeczek, z których każda mogłaby być napisana przez innego autora, ale pod warunkiem wspólnego porozumienia i jednolitości. Dlatego, żeby zadania były żywe i dotyczyły rzeczy dzieciom bliskich i znanych, dość trudno polegać na wynalazczości jednego człowieka.

Prócz wspomnianych kwestyj wysuwa się w czwartym roku cały szereg innych bardzo ważnych w nauczaniu. Jedną z nich jest omawiana już sprawa zmiany elementów działania i zależności od niej rezultatu. Byłoby niewłaściwem długie i w tym wieku niedostępne wałkowanie tych rzeczy w nauczaniu, co się nieraz robi, np. w zbiorach zadań w postaci oddzielnego szeregu zapytań i przykładów dotyczących tej kwestji. Działania poznajemy przez szereg lat nauki, przyczem jednocześnie możemy zwracać uwagę stopniowo na zmianę rezultatu zależnie od zmian w elementach działania. Oczywiście skomplikowane zapytania w rodzaju jednoczesnej zmiany kilku elementów należy usuwać, jako rzeczy praktycznie bezużyteczne, a teoretycznie mało potrzebne i istotne.

Są jednakże fakty, na które trzeba stopniowo zwracać uwagę. Do takich faktów należą np. zapytania w postaci: co się stanie z sumą, jeżeli jeden ze składników zwiększymy (ew. zmniejszymy) o pewną liczbę; co się stanie z różnicą, jeżeli odjemną (ew. odjemnik) zwiększymy (ew. zmniejszymy) o pewną liczbę; co się stanie z iloczynem, jeżeli jeden z czynników zwiększymy (ew. zmniejszymy) pewną liczbę razy; jak się zmieni iloraz, jeżeli dzielną (ew. dzielnik) zwiększymy (ew. zmniejszymy) kilka razy i t. p. Przy dzieleniu ma istotne znaczenie fakt jednoczesnego zwiększania lub zmniejszania dzielnej i dzielnika, który tak wielką rolę później odegra przy nauce ułamków. Równolegle można podobne zjawisko rozpatrzeć przy mnożeniu i stwierdzić, że tam ono nie istnieje i że dlatego, by iloczyn pozostał bez zmiany, trzeba jeden z czynników zwiększyć, a drugi zmniejszyć określoną liczbę razy. Te rzeczy można ilustrować na odpowiednio dobranych przykładach. Jednym z takich przykładów jest pole prostokąta, o którym zwykle się mówi w roku czwartym. Tutaj bardzo jasno można wyklarować powyższe własności ilorazu i iloczynu, co da się bez trudności przenieść na objętość prostopadłościanu. Zresztą, cały szereg zadań z życia praktycznego może być w tej mierze pomocnym. Np. liczba robotników i płaca dzienna przy danej zapłacie całkowitej.

Z naciskiem tu zaznaczam, że omawiana kwestja należy do tych, które w późniejszych latach nauczania odgrywają bardzo wielką rolę. Tam ona znajdzie i znaleźć winna dalsze swoje wyjaśnienie i ugruntowanie, a dlatego nie trzeba myśleć, że w czwartym roku wszystko da się zrobić w zupełności. W czwartym roku, tak samo, jak i w poprzednich, powoli kładziemy fundamenty, przygotowujemy grunt do jasnego rozumienia tych kwestyj. Doświadczenie uczy, że to rozumienie nieraz jest bardzo niejasne nawet u uczniów klas wyższych, co przedewszystkiem przypisać należy nieumiejętnemu i tylko formalnemu traktowaniu zmian rezultatu działań w klasach niższych. Nie dużo, ale stopniowo i mocno — oto główna zasada nauczania tutaj, jak wszędzie.

Własność niezmienności ilorazu przy jednoczesnem powiększeniu (ew. zmniejszeniu) dzielnej i dzielnika musi być nie tylko praktycznie poznana, ale i jasno sformułowana: „jeżeli dzielną i dzielnik jednocześnie zwiększymy albo zmniejszymy pewną liczbę razy, iloraz się nie zmieni". Mamy tu przed sobą formułę słowną. Przedstawienie jej w symbolach literowych jest na razie niepotrzebne, jakkolwiek przy nauce ułamków nastąpić może. Formuła ta jest prosta i jasna a dlatego nie udajemy się do drugiego sposobu formułowania.

Zajmiemy się teraz wyszczególnieniem tych głównych własności działań, które należy formułować, żeby nauka czteroletnia znalazła swoje naturalne uwieńczenie.

W dodąwaniu spotykamy następujące formuły: „suma nie zależy od uporządkowania składników" (prawa łączności i przemienności jednocześnie); „żeby dodać sumę można po kolei dodawać jej składniki", oraz, „żeby dodać do sumy jakąś liczbę można dodać ją do któregokolwiek składnika". Widoczną jest rzeczą, że np. ta ostatnia formuła również zależy i poniekąd wyraża zaznaczoną powyżej własność zmiany sumy od zmiany jednego ze składników. Wszystkie te formuły są słowne, jakkolwiek nie można usuwać i uważać za nieodpowiednie ujęcie ich w szatę symboli literowych.

W odejmowaniu spotykamy takie formuły: „żeby odjąć sumę można po kolei odejmować jej składniki" i „żeby odjąć od sumy pewną liczbę można ją odjąć od któregokolwiek składnika". Tu się stosuję ta sama uwaga, co poprzednio.

W mnożeniu występują formuły następujące: „iloczyn nie zależy od uporządkowania czynników" (prawa przemienności i łączności razem) i prawo rozdzielności w postaci: $(a + b)c =$ $= ac + bc$. To ostatnie oczywiście można również wyrazić słowami, ale wypadnie to dość niezdarnie i ciężko. Nauczyciel, który boi się liter, może to oczywiście zrobić.

Dzielenie posiada cały szereg własności, które jednakże nie zawsze można w roku czwartym sformułować. Przedewszystkiem formuła: $D = di + r$ daje główną własność dzielenia, gdzie D jest dzielna, d—dzielnik, i—iloraz, a r—reszta. O tej formule jeszcze będzie mowa później, teraz zaś zaznaczam tylko, że znaczenie jej jest bardzo szerokie i ważne. Wyprowadza się ona, rzecz jasna, stopniowo, indukcyjnie, na zasadzie przykładów dzielenia w roku czwartym, gdyż poprzednio można było notować tylko oddzielne fakty w rodzaju: jeżeli pomnożymy iloraz przez dzielnik, — otrzymamy dzielną. Fakty te wypływające z bezpośredniego związku dzielenia z mnożeniem są w każdym przypadku jasne, a przytem stwierdzają odwrotność tego działania w porównaniu z mnożeniem. Zdarza się czasem, że uczniowie klas średnich, szkoły średniej niejasno zdają sobie sprawę z zależności pomiędzy trzema liczbami. Gdy np. $ab = c$, równość $a = \frac{c}{b}$ jest niezupełnie oczywistą dla nich. Przyczyną, bezwarunkowo, jest zaniedbanie tej rzeczy w klasach niższych, gdzie to powinno być zrobione. Z prawa rozdzielności przy mnożeniu i z całego szeregu ćwiczeń wykonanych w poprzednich latach, wynika prawo rozdzielności przy dzieleniu. Sformułowanie tego prawa jest trudne i tu leży nie mały powód zaniedbania. Dlatego, jak również ze względu na praktyczną jedynie wartość tych praw dla wykonania dzielenia, prawa przenoszenia reszty i porządkowania jedności dobrze jest pozostawić bez formuły, opierając się głównie na praktycznem ich poznaniu. Jest to brak konieczny, wynikający z samej rzeczy, a dlatego będzie pożyteczna rozważna i celowa powolność stopniowania w nauczaniu i osiągnięcie należytej wprawy.

Prawo rozdzielności przy dzieleniu możnaby sformułować tak: „żeby podzielić sumę, można podzielić oddzielnie jej składniki, a potem otrzymane ilorazy dodać". Jest to formuła długa, ale bardzo potrzebna i ważna. Jasne pojmowanie prawa rozdzielności przy dzieleniu, pozwoli uczniom zrozumieć ważną własność reszty, która zawsze się dzieli przez te czynniki, które jednocześnie dzielą dzielną i dzielnik. Z drugiej strony prawo rozdzielności jest podstawą przy wyprowadzeniu t. zw. cech podzielności, z któremi należy zapoznać ostatecznie dzieci w roku czwartym. Indukcyjne zapoznawanie z temi cechami powinno być jednakże przedmiotem nauczania nietylko teraz, gdyż należy je poruszać również w latach poprzednich. Mówiliśmy już o tych rzeczach powyżej, wobec czego to tylko nadmienię, że każda cecha w roku tym musi być sformułowana. Mówiąc o cechach podzielności rozumiem te, które formułują możliwość podzielenia przez 2, 4, 8, 3, 5, 9, i 25. Podzielność przez 6, przez 12, 18 i t. p. daje dobre ćwiczenie na znajomość własności mnożenia i dlatego nie powinna być omijana. Liczbę cech można zwiększyć, np. dać podzielności przez 7, 11, 13, ale to nie zawsze się z powodzeniem i pożytkiem umysłowym udaje. Dzieci mogą zapamiętać sposób, lecz od sposobu samego do pożytku właściwego droga daleka.

Wobec znajomości cech podzielności można również w luźnych przykładach uczyć rozkładania prostych liczb na czynniki, co jest ćwiczeniem dość zajmującem dzieci. Nie należy jednakże robić z tego stereotypowo uprawianej i niepotrzebnej do niczego sztuki rozkładania obowiązkowego wielkich liczb. Jeżeli dzieci same się zainteresują, przyjdzie im to z łatwością.

Przy tej sposobności dzielimy liczby na pierwsze, względnie pierwsze i złożone, co ma znaczenie przy nauce ułamków.

Jedną z najbardziej zawiłych części programu zwykłego rachunku w roku czwartym czyli w pierwszej klasie szkoły średniej, jest dział o liczbach wielorakich, ze wszystkiemi jego szczegółami. W dziale tym rozszerza się znajomość miar, a nadewszystko prowadzi się działania skomplikowane, często niemal z łokciowemi liczbami wielorakiemi. Jeżeli zadania zwykłe nie powinny, o ile nie chcemy ze względu na słuszne wymagania pedagogiczne zbytnio przekraczać liczb 5-cyfrowych, to tem bardziej rzecz tę należy uwzględnić przy liczbach wielorakich, w praktyce mało stosowanych, a w nauczaniu nie mających większego znaczenia dydaktycznego. Główną ich wartość podkreśliliśmy już wyżej, a polega ona na tem, że liczby wielorakie dzięki dowolności przejścia od jednej jednostki porządkowej do drugiej mogą stanowić uogólnienie pewne liczb zwykłych, co dotyczy też tem samem i działań z niemi. Z tego stanowiska należy je zatrzymać w programie, ale bez dzisiejszej przesady w postaci robienia z nich osobnego działu. Powinny one integralnie należyć do kursu, mogą stopniowo się komplikować, ale nie o tyle, by operowanie niemi stawało się bezcelowem i nudnem. Oczywiście nie istnieją też specjalne działania w postaci „zamiany" i „rozmiany", gdyż jest to rzecz zupełnie naturalna i np. przy dzieleniu wyraźnie się zaznacza różnica konkretna t. zw. mieszczenia i właściwego dzielenia. Znaczenie liczb wielorakich, jako specjalnego ćwiczenia w zapoznaniu się z miarami, nie osiąga właściwie celu, jeżeli te ostatnie występują w postaci oddzielnego działu, gdyż jak uczy praktyka, znajomości miar przez to się nie zdobywa. Na to trzeba dłuższego czasu i ciągłego ćwiczenia, co wymaga znowu stosowania „liczb mianowanych" i wielorakich ciągle w toku nauczania i praktyki zadaniowej.

Oddzielne gatunki miar, jak np. polskie i metryczne miary długości, wagi i t. p. należy od czasu do czasu w miarę posuwania się naprzód kursu systematyzować, wymagając zapamiętania i utrwalając w pamięci przez ciągłe ćwiczenia. W ten sposób przyjdzie czas odpowiedni na miary powierzchni, a potem objętości, przyczem główne pojęcia o nich i najprostsze ich przejawy mogą być podawane znacznie wcześniej, gdyż już same związane z niemi pojęcia geometryczne wymagają utrwalenia się i rozwoju nawet w tym zakresie, jak to się zwykle robi.

To samo dotyczy miar czasu. W zbiorach zadań widzimy prawie zawsze té zadania, jak i wszystkie odnośne, zgromadzone w jednem miejscu, co odbiera żywość poprzednim zadaniom, a sztuczność nagromadzenia jednoczesnego „ćwiczących" zadań, robi całą rzecz nudna i nie prowadzącą do rezultatu.

W zadaniach na czas należy uwzględnić różne ważne rzeczy, dotyczące dwóch kalendarzy, lat przestępnych oraz odnośnych objaśnień przy rozwiązywaniu zadań. Takie objaśnienia, jeżeli są związane z konkretną potrzebą rozwiązania zadania, jeżeli są ilustrowane przykładami z historji i faktami z dziedziny kosmografji, stają się czemś naturalnem, żywem i tem samem pouczającem. W tym wieku, w jakim są dzieci w pierwszej klasie szkoły średniej, a w roku czwartym nauczania — elementarnej, jak uczy psychologja (przynajmniej stwierdzają to obserwacje poważnych psychologów) zaczynają się utrwalać więcej i rozszerzać pojęcia związane z czasem. Nie są one jednak jeszcze należycie rozwinięte, co jest niemałą przeszkodą w nauczaniu historji, jeżeli chcemy przy niem uwzględnić tok dziejowy. Nauka arytmetyki powinna dać dopiero właściwą konstrukcję temu rozwijającemu się pojęciu czasu i dlatego zjawia się wielką pomocnicą historji. Nauczyciel rachunku powinien o tem pamiętać i mieć to na widoku przy nauczaniu. Dopiero wobec tego w roku piątym możliwe jest pewne ciągłe opowiadanie historyczne zabarwione suto zdarzeniami i barwami, dotyczącemi osób i wypadków, barwami może przejaskrawionemi, ale właśnie dlatego odpowiedniemi.

Jedną z najbardziej zaniedbanych rzeczy przy nauczaniu rachunku jest nauka o pomiarze powierzchni i objętości [1]. Robi się to nieraz w sposób wprost karygodny. Rzeczy ciekawe, żywe, związane bezpośrednio z otaczającą dzieci rzeczywistością, stają się czemś nudnem i niezrozumiałem, wprost przejmującem wstrętem. Wykuwa się t. zw. miary kwadratowe i sześcienne i stosuje się je w nienaturalnych i sztucznie pomyślanych zadaniach, które tembardziej podnoszą niedowierzanie do nauki, polegającej na specjalnie obmyślonych trudnościach, a nie na chęci nauczania przez zastosowanie. Wobec tego musimy tutaj nieco dłużej zatrzymać się na tej sprawie.

Jeżeli miary długości mają bliski związek z konkretną rzeczywistością i pojęciami geometrycznemi, to miary powierzchni i objętości ten związek jeszcze bardziej pogłębiają. Nauczanie ich wymaga przynajmniej pewnego minimum zapoznania się z formą geometryczną, jej przejawami w najpospolitszych przedmiotach otaczających. Nie miejsce tu na bliższe wejrzenie w te sprawy, w dziedzinę bardzo ciekawą początkowego nauczania geometrji, pomimo to nie można zupełnie ominąć pewnych potrzebnych wyjaśnień. Ponieważ pomiar powierzchni

[1]) W części III-ej niniejszej książki zajmiemy się specjalnie nauczaniem geometrji. Następujące poniżej wskazania podaję, pragnąc w ten sposób przystosować się do utartego sposobu prowadzenia nauczania bez t. zw. propedeutyki geometrycznej.

i objętości dotyczy głównie prostokąta i prostopadłościanu, należy o tych figurach i związanych z niemi pojęciach geometrycznych pomówić uprzednio, o ile się nie prowadzi nauka planowa początkowej geometrji. Nauczyciel musi mieć przygotowane tekturowe prostokąty rozmaitych wymiarów i postaci a w pewnej chwili, która może również dobrze się przytrafić w trzecim, jak czwartym roku nauczania, te prostokąty przynieść ze sobą do klasy. Pierwsza lekcja polega: 1° na wskazaniu szeregu przedmiotów, w klasie i w znanem otoczeniu, które mają taki sam kształt jak tekturowe prostokąty i 2° na zapoznaniu się początkowem z elementami tego kształtu — kątami i bokami, ich długością oraz równością niektórych z nich. Pierwszy moment nie wymaga specjalnych objaśnień. Co się tyczy drugiego, środkiem pomocniczym może być wyrysowanie na tablicy prostokąta równego danemu przez to, że przykładamy tekturkę do tej tablicy i cienką kredą obrysowujemy ją dokoła. Po odjęciu tekturki dostaje się prostokąt, który jest odwzorowaniem danego. Teraz możemy wykonywać odnośne porównania. Tekturki mogą być zrobione tak, że jedną stronę mają jednego koloru, a drugą drugiego, przyczem dobrze jest również z obu stron przykleić wzdłuż przeciwległych boków różnobarwne paski papieru, aby w ten sposób odróżniać te boki, jak to zaraz się wyjaśni. Jeżeli tekturka była początkowo przyłożona do tablicy jedną stroną, to teraz przyłóżmy ją znowu tą samą, ale tak, aby zmieniły swe miejsca przeciwległe boki, co właśnie pokażą nam owe paski papieru. Widzimy z tego doświadczenia, że przeciwległe boki są równe, o czem można się jeszcze przekonać zapomocą bezpośredniego pomiaru. To samo możemy zrobić z innemi prostokątami. Będzie to pierwsze zapoznanie się z prostokątem.

Na następnej lekcji zapoznanie się to pogłębiamy przez porównanie kątów. Kąt „określamy" p r z e z p o k a z a n i e zarówno, na prostokątach, w otoczeniu jak tekturach. Różnego rodzaju sztuczne i gmatwające pierwsze ujęcie rzeczy objaśnienia nie są tu na miejscu. Prócz prostokąta nauczyciel może użyć do pokazania kąta jeszcze innych przedmiotów, np. dwie obsadki złączone końcami, dwa rozpostarte palce i t. p. Przykładanie w odpowiedni sposób prostokąta do jego odwzorowania na tablicy pozwoli przekonać się, że wszystkie jego kąty są równe.

Na trzeciej lekcji nauczyciel przynosi innego rodzaju tekturowe czworokąty, jak to równoległoboki, trapezy i dowolne czworokąty wypukłe. Następnie próbuje przy pomocy uczniów przerobić to samo, co z prostokątem. Okazuje się, że tego zrobić nie można, że nie zawsze kąty i boki są równe. To jeszcze więcej pogłębia pojęcie prostokąta. Przy równoległobokach można skonstatować zapomocą pomiaru lub przykładania tylko boków do boków odwzorowania, że przeciwległe boki są równe; w innych czworokątach nawet tego niema. Dalej, nauczyciel weźmie kwadrat i stwierdzi, że nie tylko kąty w nim są równe, ale i wszystkie boki. Stąd określenie: kwadrat jest to taki prostokąt, w którym wszystkie boki są równe. Możnaby na tem zapoznaniu się z prostokątem zakończyć, ale dobrzeby było cokolwiek dalej poprowadzić wyjaśnienie pojęcia kąta prostego, co da się uskutecznić wieloma sposobami, a najwygodniej dla celów następnego wykładu przez przyłożenie prostokątu którymkolwiek bokiem do jednego z boków jego odwzorowania tak, żeby 2 końce tych boków były razem (najlepiej to zrobić najpierw z równemi bokami) oraz ponowne obrysowanie. Wtedy przez przyłożenie linijki przekonywamy się, że dwa boki sąsiednie obu odwzorowań leżą na prostej linji. To samo doświadczenie z innemi czworokątami nie da tego zawsze, a jeżeli da, to jednakże kąty sąsiednie w odwzorowaniach (przyległe) nie są równe. Pojęcie kątów przyległych można zaraz wyjaśnić, a razem z niem kątów prostych, jako równych przyległych. Można w ten sposób sprawdzić, czy dany kąt jest prosty, czy też nie i t. p.

Z przedstawionego tutaj szeregu różnych stopni zapoznania się z prostokątem można znowu widzieć, że stosujemy w nim stopnie formalne, o których była mowa wyżej.

Następnem pojęciem wymagającem wyjaśnienia jest pojęcie pola figury jako wielkości. W całem wogóle nauczaniu matematyki w szkole elementarnej i średniej mało dbamy o dokładność zasadniczych pojęć. Ta dokładność nie polega tylko na precyzyjnych określeniach, jak to z pierwszego rzutu oka wyda się wykształconemu matematycznie nauczycielowi. Żadne, najbardziej odpowiadające wymaganiom ścisłości określenie, nie zjawia się, nawet w głowie dobrego matematyka, jak Deus ex machina: jest ono zwykle przygotowane przez szereg wniosków. Jeżeli jedno i drugie zgadza się ze sobą, t. j. nie zawiera wzajemnej sprzeczności i pozwala uogólnić wyniki, a tem samem wytworzyć jednolitą teorję, — określenie spełnia dobrze swoją służbę. Jednem słowem jest ono przecięciem się jakby dwóch linij: jedna, zwykle opuszczana, która prowadzi do zebrania doświadczeń w jedną formułę, druga, która tę formułę realizuje we wnioskach. Przygotować określenie znaczy tem samem dać taki szereg faktów, w których występuje pewien szczegół, pewna cecha z tego lub innego względu ważna, a tem samem godna specjalnego podkreślenia, wyseparowania i rozwagi. Zwykle bywa to cecha pożyteczna dla budowy teorji, a w nauczaniu ten jej pożytek musi mieć jeszcze walor praktyczny ze względu na konkretne zastosowanie. Definicja więc w nauczaniu, szczególnie elementarnem, powinna mieć nie tylko dwie poprzednie cechy, ale jeszcze trzecią — konkretne odzwierciedlenie. Wobec tego te definicje, które takiego konkretnego odzwierciedlenia i zastosowania nie mają, nie mogą być przedmiotem nauczania na tym stopniu.

Weźmy przykład.

Zwykłe, z „teorji arytmetyki" przeciętnej wzięte określenie wielkości jest najczęściej albo tautologją albo czemś nielogicznem. Np. jeżeli mówimy, że wielkością jest wszystko to, co może być mniejsze i większe, mamy przed sobą określenie spełniające dwa poprzednie zarzuty. Np. pies może być większy i mniejszy, a więc pies jest wielkością. Jeśli zbiór jakichś jednorodnych przedmiotów ma być zaliczony do kategorji wielkości, muszą przedmioty tego zbioru spełniać pewne warunki, które wyrazimy ogólnie, jeżeli trzy jakiekolwiek przedmioty tego zbioru oznaczymy A, B i C. Otóż, jeżeli ze względu na pewne okoliczności, umówimy się dwa jakiekolwiek przedmioty nazywać równemi i będziemy oznaczali tę równość zwykłym znakiem, zarówno o n a, jak w s p o m n i a n e p r z e d m i o t y powinny przedewszystkiem spełniać następujące warunki:

$$A = A \text{ — warunek tożsamości;}$$

jeżeli $A = B$, to $B = A$ — warunek odwracalności czyli symetrji;

jeżeli $A = B$, $B = C$, to $A = C$ — warunek przechodniości.

Mniejszość i większość powinny spełniać dwa warunki:

$$\text{jeżeli } A > B, \text{ to } B < A,$$

$$\text{i jeżeli } A \gtrless B, \text{ a } B \gtrless C, \text{ to } A \gtrless C,$$

a więc odwracalność i przechodniość.

Otóż, gdy przedmioty pewnego zbioru, np. nieskończonego zbioru różnych długości, warunki te spełniają, to ten zbiór jest wielkością, inaczej powiadamy, długość jest wielkością.

Rzecz jasna, że 1-o w ten sposób dzieciom nie można określać wielkości, bo to określenie nie spełnia trzeciego najważniejszego dla nauczania warunku, a po drugie należy w nauczaniu mieć taką konkretną podstawę dla mniejszości, większości i równości, którаby te warunki sama przez się poglądowo spełniała. Dla długości taką podstawą jest bezpośrednie przykładanie lub pośrednie przykładanie p r z e z m i e r z e n i e. To przykładanie wszystkie te warunki spełnia, a przytem mierzenie również jest pojęciem ogólniejszem. Stąd podstawa konkretną wprowadzenia wielkości jest m i e r z e n i e jej bezpośrednie — w doświadczeniu.. Gdybyśmy obrali taką podstawę konkretną porównania, która tych warunków nie spełnia.

popełnilibyśmy błąd naukowy, a więc rzecz niedopuszczalną. Np., gdyby ktoś za miarę szybkości poruszania się łódki w płynącej rzece wziął tylko czas trwania jazdy z jednego miejsca do drugiego, a nie uwzględnił siły prądu tej rzeki, nie byłoby spełnione prawo odwracalności. W różnych okolicznościach takie omyłki można popełniać czy to przez brak wiedzy realnej, czy też przez nierozumienie istoty pojęcia.

Wielkości mierzymy. Cóż to jest mierzenie? Jest to jednoznaczne podporządkowanie elementów zbioru, stanowiącego daną wielkość, elementom zbioru wszystkich liczb, przyczem między wielkościami i liczbami istnieją identyczne zależności co do cech „równy", „mniejszy", „większy", a jeden element określony podporządkowany jest liczbie 1. Ten element nazywa się jednostką miary. Np., obrawszy jednostkę miary, każdej długości możemy podporządkować jedną i tylko jedną liczbę.

Po tych wyjaśnieniach widzimy, że trzeba z największą ostrożnością dawać określenia, a na poziomie umysłu ucznia 1-ej klasy określenie wielkości jest rzeczą zbyteczną, bo główna treść jest w podstawie konkretnej, służącej do porównania różnych elementów zbioru charakteryzującego wielkość.

Teraz przejdziemy do pojęcia pola jako wielkości.

Rzecz oczywista, że bezpośrednie nakładanie jest podstawą porównania. Zapomocą nakładania przekonywamy się o równości pól dwóch figur równych i sprawdzamy prawa odwracalności i przechodniości, nie mówiąc o nich dzieciom wcale i nawet z powodu zupełnej jasności rzeczy nie zatrzymując się nad tem dłużej. Można to zrobić np. w ten sposób, że najpierw nakładamy jeden z równych prostokątów na drugi, potem odwrotnie, co sprawdza warunek odwracalności. Następnie, mając trzy prostokąty takie, że pierwszy i trzeci przystają do drugiego, możemy sprowadzić do przystawiania następnie dwa pierwsze. Można też zużytkować odwzorowanie na tablicy, robione tak, jak powiedziane było wyżej, przyczem wnioskujemy, że dwa odwzorowania są równe, jeżeli prostokąty im odpowiadające przystają do siebie i t. p. Ten moment posuwa rzecz dalej w kierunku abstrakcji.

Pomimo swej pozornej prostoty warunek tożsamości jest trudniejszy i odgrywa rolę zasadniczą: on daje najjaśniejsze pojęcie konkretne o wielkości. Główna myśl polega tu w nauczaniu na tem, żeby dany prostokąt zamieniać na inny w taki sposób, aby było widać, że przytem nie zmienia się pole. Można więc go pokrajać na dwa, trzy i t. p. równe prostokąty i te do siebie w odpowiedni sposób przyłożyć, żeby się otrzymał nowy prostokąt, który oczywiście ma to samo pole. Gdyby dzieci były więcej zapoznane z geometrją, rzecz ta byłaby doskonałym materjałem do zadań opartych na krajaniu figur papierowych i układaniu z części otrzymanych nowych. Przy tej sposobności nauczyciel powinien używać różnych konkretnych środków do uwypuklenia pojęcia pola. Porównanie pola podłogi i sufitu klasy, pola stołu prostokątnego i ściany, zapytania takie, jak: „ile trzeba farby, żeby pomalować równe prostokąty, nierówne?", „Ile trzeba ziarna, żeby zasiać dwa równe kawałki gruntu?"; pytania odwrotne: „czy są równe pola dwóch kawałków gruntu, jeżeli na zasianie kawałka wychodzi jednakowa ilość ziarna", „czy mają jednakowe pola dwa różne kawałki papieru, jeżeli każdy kawałek wystarcza do oklejenia tego samego pudełka?" i t. p. służą, jak i poprzednie, do tego, by wzbudzić w umyśle dzieci pojęcie pola niezależnie od kształtu, pola jako wielkości. Każdy nauczyciel, dla którego jest jasny cel tego rodzaju ćwiczeń, z łatwością sam je potrafi urozmaicać, co szczególnie łatwo przyszłoby przy istnieniu zajęć ręcznych w szkole. Jeżeli mamy przekonanie, że pojęcie pola wyrobiło się należycie, że w formule powyżej zaznaczonej: P + R, element P posiada już właściwą ogólną treść, przystępujemy do mierzenia pola. Dlatego wprowadzamy pojęcie i określenie jednostki kwadratowej poszczególnej: decymetrem kwadratowym nazywamy kwadrat, którego bok równa się jednemu decymetrowi. Taki kwadrat nauczyciel ma przygotowany i każe uczniom przygotować go sobie w domu z tektury albo z papieru milimetrowego. Następnie przygotowuje sobie przed lekcją spory prostokąt z bristolu o wymiarach, dajmy na to, 3 na 4 lub 4 na 5 decymetrów i przynosi ze sobą do klasy, gdzie przypina go lub przykleja na rogach do tablicy, oświadczając uczniom, że będzie razem z nimi mierzył decymetrem kwadratowym pole tego prostokąta. Dlatego wywołuje ucznia i każe mu, poczynając od jednego z rogów prostokąta, przykładać kolejno decymetr tekturowy i obrysowywać go przy każdem nowem przełożeniu naokoło węgielkiem lub miękkim ołówkiem, żeby linje były widoczne dla wszystkich. Taką operację może wykonywać po kolei kilku uczniów dopóty, dopóki cały prostokąt z bristolu nie będzie pokryty kwadratami. Następuje dalej liczenie tych kwadratów i wniosek: pole prostokąta wynosi tyle a tyle decymetrów kwadratowych. Liczenie kwadratów odbywa się najpierw zwykłą drogą kolejnego przeliczania, potem nauczyciel pyta, czy nie można tego zrobić prościej. Najczęściej uczniowie sami wpadają na pomysł policzenia najpierw pasm poziomych lub pionowych, złożonych z kwadratów, a potem liczby kwadratów w każdem pasmie i następnego pomnożenia obu liczb. Po tej zdobyczy nauczyciel jeszcze nie czuje się zadowolony, bo pyta dalej: a jak zrobilibyśmy z bardzo dużym prostkątem, np. z morgą na powierzchni ziemi albo chociażby z podłogą pokoju zastawioną ławkami? Bez wielkich trudności dzieci dochodzą do przekonania, że wystarcza zmierzyć długość prostokąta, a potem szerokość i nakoniec te liczby pomnożyć, żeby znaleźć liczbę jednostek kwadratowych zawartych w polu. Potem musi oczywiście nastąpić formuła skrócona: pole prostokąta równe jest iloczynowi długości przez szerokość.

W dalszym ciągu następują nowe jednostki kwadratowe: łokieć, metr, mila, sążeń i t. p. Nauczyciel nie powinien zapominać też o zadaniach tego rodzaju, jak: „narysujcie prostokąt mający 24 kratki pola", gdzie „kratka" jest kratką w kajecie do arytmetyki. Liczba 24 ma sporo dzielników i dzięki temu takich prostokątów może być kilka, co pomaga również do uwypuklenia pojęcia pola. Po otrzymaniu ostatecznego rezultatu w powyższej formie stosujemy go do zadań, a jeżeli przechodzimy w szkole geometrję początkową, rozciągamy go i na inne figury, jak trójkąt, równoległobok, trapez i figury z nich złożone. Zależności pomiędzy prostszemi miarami kwadratowemi staramy się również wyjaśniać poglądowo. Np. łokieć kwadratowy i stopa kwadratowa, cal kwadratowy i stopa kwadratowa.

Mierzenie objętości prostopadłościanu odbywa się w tej samej kolei, jak mierzenie pola. Najpierw nauczyciel zapoznaje dzieci z własnościami prostopadłościanu. Dlatego przynosi do klasy różnego rodzaju prostopadłościany z tektury lub drzewa, które rozpatruje najpierw ze względu na liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków, podając odpowiednie nazwy, potem zapomocą robionego przez dzieci na tablicy odwzorowania ścian, przekonywa, że przeciwległe ściany są równe, jak również krawędzie, że ściany te są prostokątami. Następuje później, jako zadanie, mierzenie powierzchni całego prostopadłościanu, wykonane przez pomiar bezpośredni. Dalej, rozpatruje różne przypadki prostopadłościanu, a więc prostopadłościany z podstawą kwadratową i sześcian, który jest zdefinjowany jako prostopadłościan, w którym wszystkie ściany są równe. Należy najpierw dać definicję taką: sześcian jest prostopadłościanem, w którym wszystkie krawędzie i ściany są równe: potem ją zwęzić, jak powyżej, co zwróci uwagę dzieci na to, że definicja jest lepsza, jeżeli zawiera tylko warunki konieczne i dostateczne. Przy rozpatrywaniu prostopadłościanu należy zaznaczyć, co i w jaki sposób możemy nazwać jego wysokością, szerokością i długością oraz, w którym prostopadłościanie te elementy są równe. Każdy z tych elementów nazywa się wymiarem prostopadłościanu, a stąd w sześcianie wszystkie wymiary są równe i można podać inną definicję tej bryły.

Dlatego, żeby przygotowywać pojęcie objętości, jako specjalnej wielkości, nauczyciel musi mieć szereg zrobionych ze szkła prostopadłościanów o różnej objętości, przyczem tak, że w każdym z nich brakuje jednej ściany (przykrywki) i można do nich bezpiecznie wlewać wodę. Jeżeli w ten sposób jeden z nich napełnimy wodą i po przelaniu jej do drugiego okaże się, że ten drugi napełniony jest tak samo, powiadamy, że mają równe objętości. W ten sam sposób można wykazać mniejszość i większość. Warunki powyżej wspomniane, które powinna spełniać każda wielkość, możnaby bez trudności ilustrować. Np. warunki odwracalności i przechodniości dadzą się ilustrować zapomocą przed chwilą nadmienionych szklanych prostopadłościanów, a warunek tożsamości zapomocą drewnianego prostopadłościanu, podzielonego na szereg równych prostopadłościanów i złożonego z nich, jak to bywa w tak zwanych modelach do nauki geometrji; można też do tego celu przygotować z gliny prostopadłościan, z którego po zgnieceniu otrzymać możemy bryłę dowolnego kształtu, ale tej samej objętości.

Mierzenie objętości zaczynamy od wyjaśnienia jednostki objętości jako sześcianu o wymiarach równych jednostce długości. Dzieci, przy pomocy linijki albo papieru milimetrowego, powinny skleić z tektury cal sześcienny i decymetr sześcienny. Nauczyciel musi posiadać w muzeum szkolnem spory zapas cali sześciennych zrobionych z drzewa i pomalowanych z różnych stron różnemi barwami, następnie specjalnie przygotowany szklany prostopadłościan o znanych dokładnie wymiarach, wyrażonych w calach. Te rzeczy przynosi do klasy i oświadcza, że zapomocą cala sześciennego będzie mierzył objętość tego prostopadłościanu. Poczem zaczyna układać cale sześcienne w tym prostopadłościanie. Najpierw kładzie jedną ich warstwę tak, żeby cale pewnym jednakowym kolorem były zwrócone na zewnątrz do dzieci; potem drugą, – zwracając cale w stronę dzieci innym kolorem i t. d. W ten sposób utworzy się wyraźnie szereg warstw. Następnie powstaje zadanie obliczenia wszystkich zawartych w prostopadłościanie cali. Policzyć kolejno bez wyjmowania nie można, wobec tego należy użyć sposobu innego. Ten sposób nie trudno odkryć i nakoniec wyprowadzić, że objętość prostopadłościanu równa jest iloczynowi trzech jego wymiarów. Rzecz jasna, że ta skrócona formuła musi być stopniowo wyprowadzana i naprawdę „skrócona", a nie podana odrazu.

Jeżeli wykładana jest w szkole geometrja początkowa, można związać z łatwością obliczanie objętości prostopadłościanu z obliczaniem tejże u innych brył, jak graniastosłup trójkątny, równoległościan i bryły z nich złożone.

Nie byłoby to sprzeczne z istotą rzeczy, gdybyśmy zaczęli nie od obliczania pola prostokąta, jak to się zwykle robi, a od objętości prostopadłościanu. W metodyce geometrji początkowej ustaliła się zupełnie słuszna i umotywowana zasada, że naukę geometrji należy zaczynać od brył, a nie od figur płaskich. Dlatego powyższe postanowienie byłoby nawet godne polecenia i to tem bardziej, jeżeli w szkole prowadzi się naukę geometrji początkowej. Zwracamy na to uwagę nauczycieli, którzy z łatwością zrozumieją, że bryła jest czemś bliższem rzeczy otaczających, niż figura płaska powstająca z bryły przez analizę tejże. Należy jednakże wtedy poczynić pewne modyfikacje w powyższym wykładzie.

Tyle o czwartym roku nauczania. Kończy się w nim nauka o liczbie całkowitej, a więc zasadniczy dział arytmetyki, w którym umysł ucznia musi nabrać pewnego wyrobienia matematycznego, być należycie przygotowanym do tego, by w następnych latach nauki zrozumieć odmienną już interpretację działań i mieć potrzebne wyrobienie do przetrawienia definicji tych działań. Dlatego tak ważne jest formułowanie własności działań, tak wielkie znaczenie ma ćwiczenie umiejętności definjowania przy nauce o obliczaniu objętości i pola oraz w innych przypadkach poprzedniego kursu. Kto się cokolwiek zechciał wgłębić w istotę procesów myślowych, zachodzących przy nauce liczby całkowitej, zrozumie jasno, że stanowią one podstawę całej dalszej nauki matematyki i że zaniedbanie tego wewnętrznego pierwiastka myśli samodzielnej ucznia jest nie tylko rzeczą niesłuszną, ale wprost szkodliwą. Próżne będą reformy późniejszego nauczania, jeżeli te pierwsze kroki w dziedzinie wielkiej naszej nauki będą chwiejne, jeżeli będą tylko poruszaniem nogami w powietrzu bez istotnego oparcia o matkę-ziemię myśli samodzielnej. Tak jednakże, niestety, często, bardzo często bywa...

Sprostowanie.

Zamiast (str. 44): «Zaznaczyliśmy wyżej», powinno być: «Zobaczymy niżej».

SPIS RZECZY.