

ZAGADNIENIA TECHNICZNE ODBUDOWY KRAJU

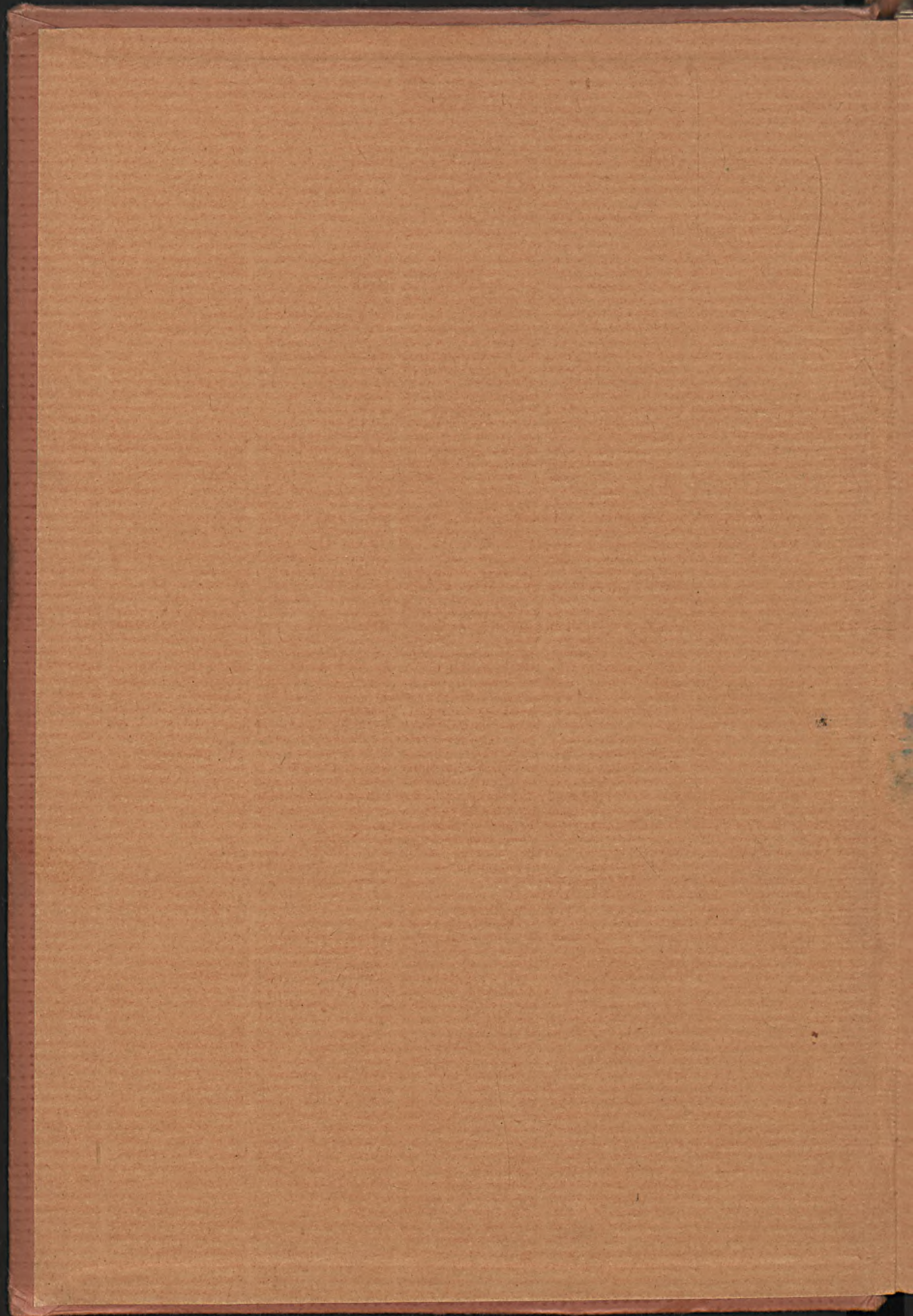
17

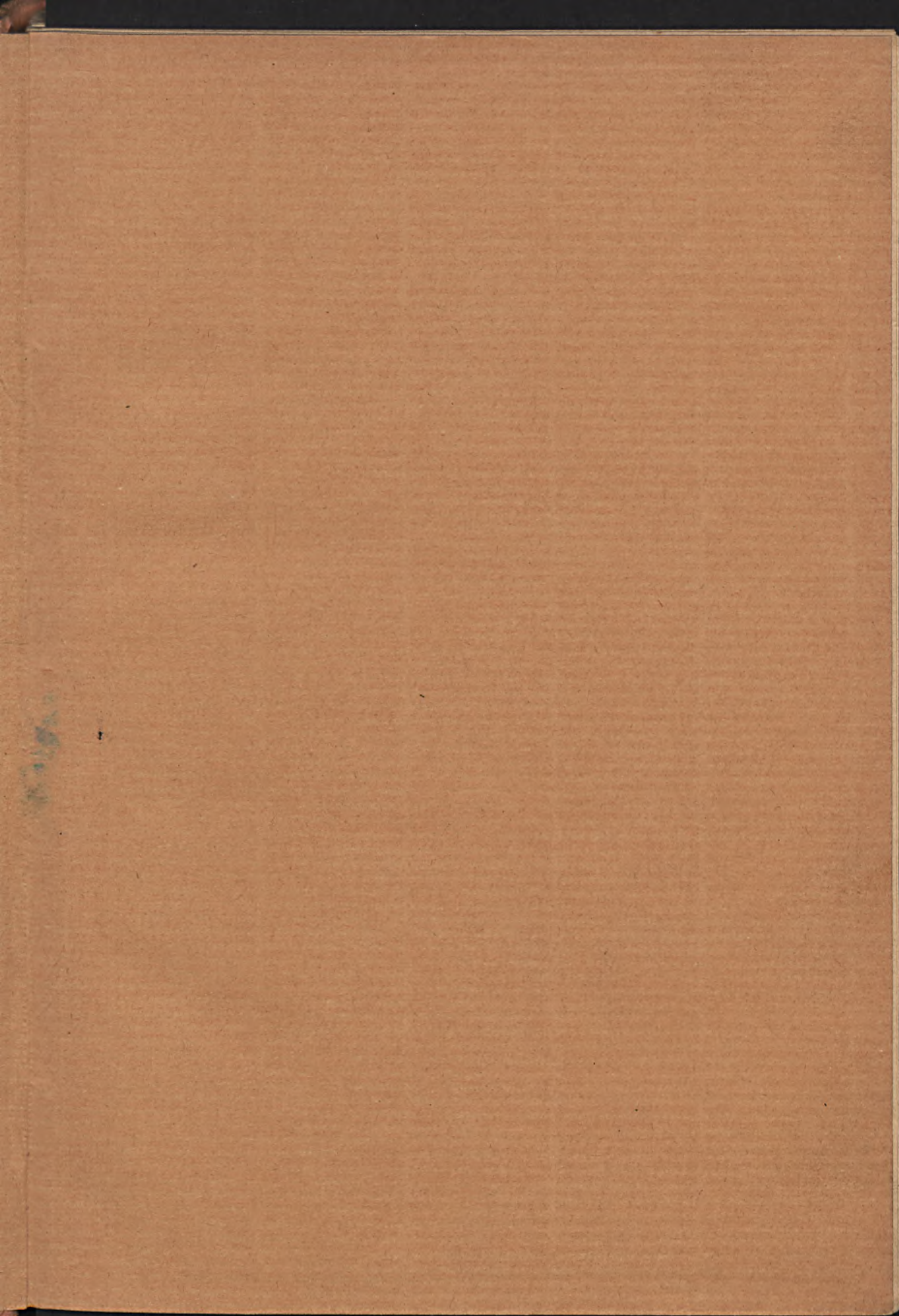
INŻ. W. DZIAKIEWICZ

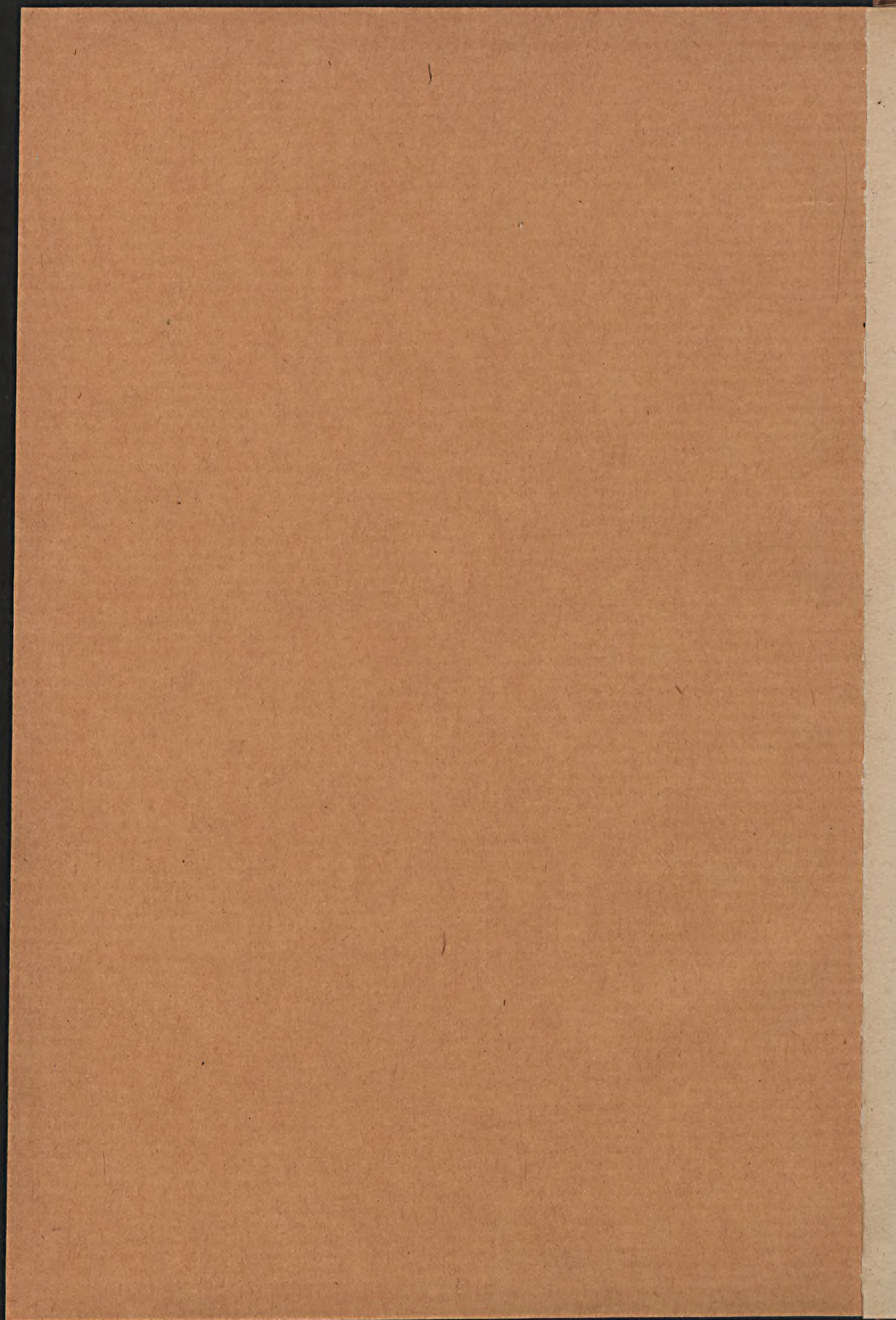
MIERNICTWO

K. 20'—, Mk 16'—

INŻ. W. DZIAKIEWICZ: MIERNICTWO







MIERNICTWO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

LIBRARY

1911

OP 0 1
2
31 / VII
1535
81.

2.40

ZAGADNIENIA TECHNICZNE ODBUDOWY KRAJU.

17

INŻ. WŁODZIMIERZ DZIAKIEWICZ

CYW. INŻ. BUDOWNICTWA W KRAKOWIE

MIERNICTWO

Z 175 RYCINAMI W TEKŚCIE

WYDANIE DRUGIE

Olech Świątek

LWÓW 1918

NAKLAD I WŁASNOŚĆ KSIĘGARNI POLSKIEJ BERNARDA POŁONIECKIEGO

WARSZAWA: GEBETHNER I WOLFF.

WYKONANO W ZAKŁADZIE DRUKARSKIM „GRAFIA”, LWÓW,
ULICA CHORĄŻCZYNY LICZBA 27. — NUMER TELEFONU 1998.

SPIS ROZDZIAŁÓW.

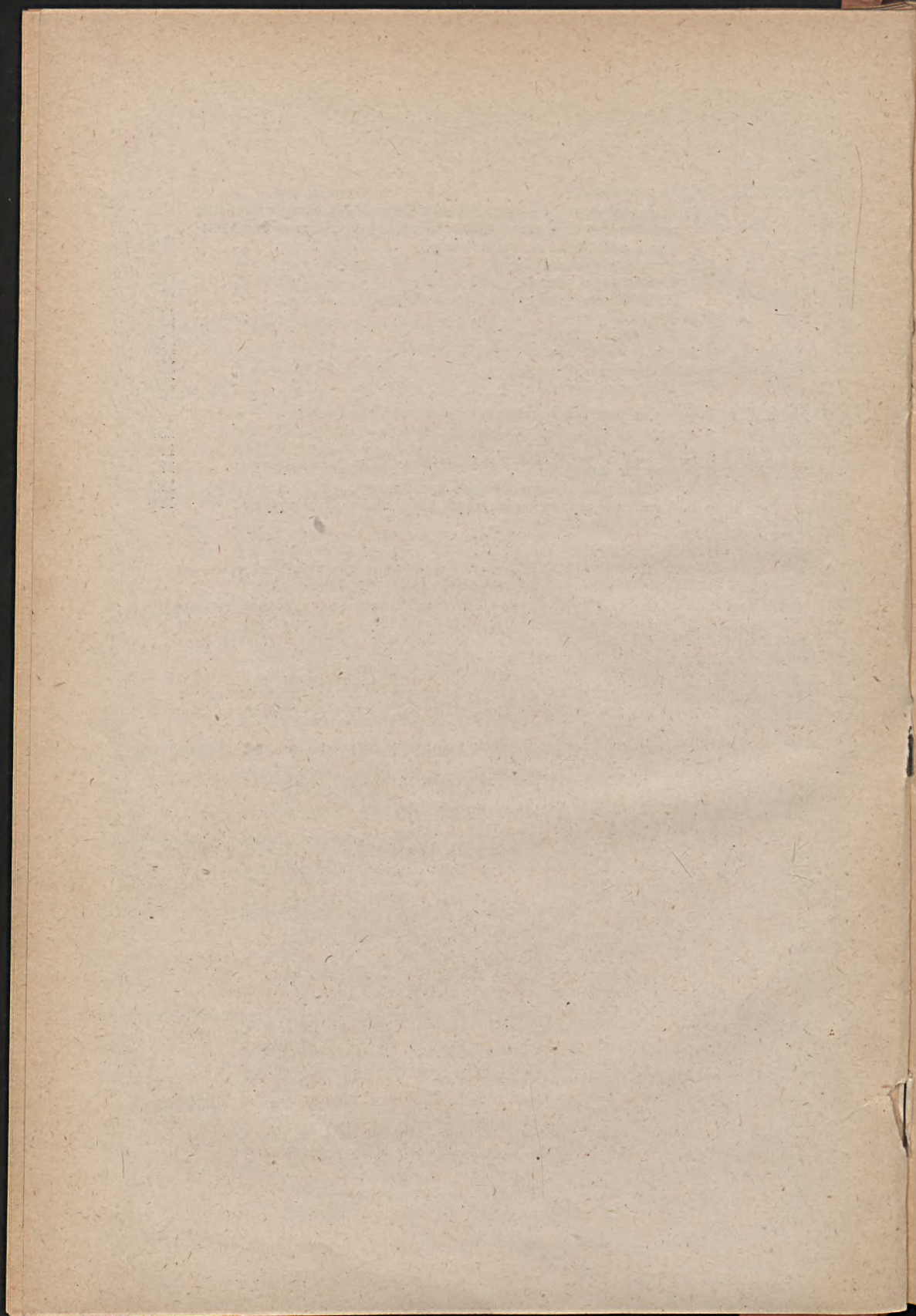
	Str.
Wstęp.	
Rozdział I. Ogólny.	
§ 1. Kształt ziemi. Jednostka miary	1
§ 2. Miary dawniejsze	4
§ 3. Miara kątowna. Wzory trygonometryczne	5
§ 4. Poziom geodezyjny i pozorny	9
§ 5. Plany	9
§ 6. Układ katastru austriackiego	10
§ 7. Punkty i proste. Repetytorium niektórych zagadnień z geom. analizy	13
Rozdział II. Tyczenie linii prostych i kątów o stałej wielkości.	
§ 1. Oznaczanie i utrwalanie punktów w polu	16
§ 2. Tyczenie prostych	17
§ 3. Przyrządy do wyznaczania kątów stałej wielkości	18
a) węgielnica zwierciadlana	19
b) krzyż zwierciadlany	20
c) węgielnica pryzmatyczna pojedyncza	21
d) krzyż pryzmatyczny Bauerfeinda	23
e) węgielnica bębnowa	24
f) węgielnica krzyżowa	24
§ 4. Sprawdzanie i rektyfikacja węgielnic	25
Rozdział III. Pomiar długości.	
§ 1. Przyrządy do mierzenia długości	25
1. Łata miernicza	25
2. Stalowa taśma miernicza	27
3. Inne przyrządy	28
4. Sprawdzanie śródwagi	28
5. Protokół pomiarów	28
§ 2. Wyrównanie błędów pomiaru: średnia wartość pomiaru; średni błąd pojedynczego spostrzeżenia; średni błąd średniej arytmetycznej	26
§ 3. Dokładność pomiaru długości	36
§ 4. Pomiar długości parami. Granice błędów według austriackiej instrukcji polygonalnej z r. 1904.	37
§ 5. O wadze spostrzeżeń. Najprawdopodobniejsza wartość; średni błąd pojedynczego spostrzeżenia; średni błąd najprawdopodobniejszej wartości	40
§ 6. Zastosowanie parami	44

Rozdział XII. Zdjęcia wielobokowe.

§ 1. Prace przygotowawcze. Tryangulacja IV-rzędna, obliczenie współrzędnych i azymutów dla trójkąta. Obliczenie azymutów i odległości ze współrzędnych	170
§ 2. Pomiary wieloboków:	
1. Polygony otwarte	175
2. Polygony między punktami stałymi	177
§ 3. Przykłady	179
§ 4. Polygony zamknięte	183
§ 5. Punkty węzłowe	185
§ 6. Wcinanie wstecz	186
§ 7. Wcinanie wprzód	188

Rozdział XIII. Zdjęcia za pomocą kompasu.

§ 1. Diopter i teodolit kompasowy	189
§ 2. Sprawdzanie kompasu	191
§ 3. Pomiar polygonu	192
§ 4. Dokładność pomiaru kątów kompasem	193
§ 5. Graficzne wyrównanie zdjęć wieloboków zamkniętych	194



SPIS DZIEŁ

wydanych w języku polskim, traktujących o miernictwie.

1. Grzepski Stanisław: „Geometrya t. j. miernicka nauka po polsku krótko napisana z greckich i łacińskich ksiąg“. Kraków 1566. r. 8° str. 127.
2. Kaufman Oberst Lt.: „Początki miernictwa wojennego dla szlacheckiej młodzieży szkoły rycerskiej króla Jęgomości polskiego“. Toruń 1766. r. str. 133.
3. Bystrzycki Bazyli: „Geometrya, albo niektóre łatwiejsze sposoby do rozmierzania wszelkich długości, szerokości, wysokości lub głębokości, ku uczciwej i pożytecznej zabawie każdego kawalera, z francuskiego na ojczysty język przełożona“. Warszawa 1769. r.
4. Cieciszewski Colonna: „Początki miernictwa“. Kraków 1786. r. 8°.
5. Hagreve: „Teorya i praktyczna nauka żołnierskich rozmiarów, czyli miernictwo wojenne, do użycia oficerom i początkowym inżynierom ułożone“. Warszawa 1790. r. 8° str. 355.
6. Mases: „Wielki geometryczny wynalazek celownicy trzyramiennej“. Warszawa 1806. r.
7. Zaborowski X. J.: „Jeometrya praktyczna“. Edycya nowsza. Warszawa 1806. r. str. 386.
8. Zaborowski X. J.: Drugie wyd. Warszawa 1820.
9. Paliński P. M.: „O geodezyi“. Wilno 1816. r. str. 58 4°.
10. Colberg Juliusz: „Sposób dochodzenia powierzchni płaskich bez użycia rachunku, za pomocą nowo wynalezionego instrumentu, Planimetrem zwanego“. Warszawa 1824. r. 8° str. 58.
11. Szachin: „Miernictwo i równoważenie“. Wilno 1829. r. str. 727.
12. Tenże. „Jeodesya wyższa“. Wilno 1829. r. str. 231.
13. Wrześniowski: „Miernictwo niższe“. Warszawa 1841. r. str. 256.
14. Józefowicz W.: „Wykład praktyczny miernictwa i niwelacyi z wszelkimi zastosowaniami dla potrzeb gospodarzy wiejskich“. Warszawa 1843. r. str. 243.
15. Gerschow A.: „Poziomowanie topograficzne. Wykład teoretyczny i praktyczny“. Warszawa 1851. r. str. 430.
16. Mukłanowicz H.: „Trójkątowanie II. rzędu“. Warszawa 1852. r. str. 137.
17. „Nauka pomiaru gruntów do praktycznego użytku właścicieli ziemskich“. Lwów 1853. r.
18. Zbrożek D.: Teorya planimetru biegunowego“. Kraków 1876. r. str. 11.
19. Tenże: „Teorya najmniejszych kwadratów“. Podług wykładów napisał Witkowski. Lwów 1878. r. str. 119.
20. Zaleski: „Planimetrya wykładana w technice krakowskiej“ str. 99.
21. Regiec L.: „O wytyczaniu łuków przy budowach lądowych i wodnych“. Kraków 1895. r. str. 61.

22. Falkierski W.: „Oryentowanie trasy i sprawdzenie jej wymiarów kątowych za pomocą obserwacji słońca“. Lwów 1897 r. str. 23.
23. Łaska W.: „Astronomia sferyczna i geodezja wyższa“. Lwów 1899. r.
24. Kucharzewski: „Planimetry polskie i ich wynalazcy“. Warszawa 1902. r. str. 46.
25. Wawrzykiewicz: „Słowniczek mierniczy“. Warszawa 1903. r. str. 38.
26. Dziakiewicz Włodzimierz: „Miernictwo“, nakładem Spółki Wydawniczej polskiej w Krakowie. 1906. r. str. 353 (pierwsze wydanie).
27. Lewakowski Jerzy: „Terenoznastwo i kartografia wojskowa“. Lwów 1916. str. 200.
28. Dziakiewicz Włodzimierz: „Miernictwo“, nakładem Księgarni B. Polonieckiego, Lwów 1918 r. Drugie wydanie przerobione i rozszerzone.

OD AUTORA.

Pierwsze wydanie „Miernictwa“, przychylnie przyjęte, rozeszło się w krótkim czasie. Zajęty pracą zawodową, nie mogłem przystąpić do opracowania drugiego, zwłaszcza, że miałem zamiar traktować przedmiot w szerszych granicach. Odkładałem więc pracę z roku na rok, aż wybuchła wojna, która przyniosła nam ze sobą niesłychane zniszczenie wsi i miast, szczególnie w Królestwie.

W miarę, jak front bojowy oddalał się na wschód, zaczęto myśleć o odbudowie kraju. Ażeby nie tylko odbudować to, co wojna zniszczyła, ale zarazem ulepszyć warunki bytu, zwłaszcza pod względem higienicznym i naprawić dawniejsze zaniedbanie — równocześnie zaś nie stać się przedmiotem eksploatacji obcych spekulantów, potrzeba nam przedewszystkiem własnych sił technicznych, których, jak się okazuje, mamy za mało.

Akcję ratunkową, czyli t. zw. sprawę odbudowy kraju w Galicyi, wziął w ręce rząd; sprawa ta więc, jak każda inna, bodaj najpoważniejsza, weszła na zbyt nam już znaną drogę, by warto było o niej wspominać. Natomiast z najszczerzem zainteresowaniem patrzymy na akcję w Królestwie, która, w przeciwieństwie do Galicyi, opiera się na własnych siłach ludności i rzeczywiście bratniej pomocy Księstwa Poznańskiego. W tym, strasznie zniszczonym kraju, z którego wyciągnięto wszelkiego rodzaju kontrybucye, który żywić musi inne kraje, z którego lasów odbudowano Prusy wschodnie, zabierając mu równocześnie milion robotników, ster spraw odbudowy ujął Główny Komitet Opiekuńczy, wskazując nam właściwą drogę do celu. Obok całego szeregu bieżących czynności, zakłada G. K. O. szkoły techniczne w celu uzupełnienia potrzebnych sił technicznych i uniezależnienia się od obcych.

Nie mogąc brać bezpośredniego udziału w pracy w Królestwie, bo pełnić muszę służbę jako inżynier wojskowy, korzystam tak z urlopu, jak z miesięcy zimowych, które na tym odcinku frontu dają dość wolnego czasu, i opracowałem drugie wydanie „Miernictwa“ z myślą, że w ten sposób wypełniam swój obowiązek wedle możliwości i ułatwię pracę w tworzonych przez G. K. O. szkołach technicznych.

Mimo trudności, jakie napotkać musiałem pracując w niekorzystnych warunkach, zakres tego wydania, w porównaniu z pierwszym, jest obszerniejszy i powinien wystarczyć w praktyce.

Nie ulega wątpliwości, że wydanie książki w obecnym czasie, jest bardzo trudne: brak bowiem papieru, sił roboczych, trudności w wykonaniu klisz i t. p.,

niemal, że zamiar uniemożliwiają. Pomimo przeszkód i wielkiej drożyzny materiałów, firma Bernarda Połonieckiego we Lwowie, uznawszy potrzebę tej książki, podjęła się wydawnictwa i wykonała je, przyłączając się z tą samą myślą do celu, jakim przy pracy przyświecał.

M... na froncie 7. Armii 30. I. T. D.
w lutym 1917. r.

Inż. Włodzimierz Dziakiewicz.

ROZDZIAŁ I. OGÓLNY.

§ 1. Miernictwo, z greckiego: geodezya, jest nauką o pomiarach-ziemi. Odróżnić tu musimy geodezyę niższą, zajmującą się pomiarami mniejszych obszarów ziemi w celach praktycznych, od geodezyi wyższej, której zadaniem jest pomiar wielkich obszarów: łądów i całej ziemi. Pierwsza zatem zajmuje się pomiarami na płaszczyźnie o ile rozchodzi się o plany pewnych obszarów, druga uwzględnia kształt ziemi, co, jak dowiodły ostatnie badania, jest rzeczą bardzo skomplikowaną.

Przedmiotem niniejszej książki jest geodezya niższa, lecz wspomniawszy wyżej o kształcie ziemi, poświęcimy tej sprawie, w ogólniejszych zarysach, nieco miejsca.

Pojęcia nasze o kształcie i wymiarach ziemi zmieniły się od dwóch tysięcy lat niezbyt wiele. Ciekawą jest rzeczą, jak później zobaczymy, że gdy, z powodu niewydoskonalonych jeszcze przyrządów mierniczych, nie było można wyrobić sobie na podstawie pomiarów ziemi dokładnego pojęcia o jej kształcie (XVIII wiek), to już spostrzeżenia z doświadczeń mechaniki teoretycznej (Newton) wskazywały i dowodziły, że ziemia nie jest kulą, za jaką ją uważano.

Chronologicznie, pierwszy Pitagoras w VI wieku przed Chr. oświadczył się za kulistym kształtem ziemi, a to na podstawie obserwacji statków, wynurzających się coraz bardziej z poza wypukłości powierzchni morza, w miarę, jak się zbliżają do stanowiska obserwatora. Arystoteles w IV wieku przed Chr. jeszcze wyraźniej i zupełnie stanowczo, jak świadczy jego dzieło, uznał kulisty kształt ziemi. Uczeni greccy nie poprzestali jednak na określeniu kulistej postaci ziemi i przytaczaniu na to dowodów, lecz starali się obliczyć jej wymiary. Eratostenes w III wieku przed Chr. obliczył obwód ziemi w następujący sposób:

Zauważył on, że w Syenie, w Egipcie południowym, słońce oświecało całe wnętrze głębokiej studni w czasie letniego przesilenia dnia z nocą. Wynikało stąd, że promienie słońca padają w tem miejscu pionowo na ziemię. Równocześnie w Aleksandryi, w północnej części kraju, tworzyły promienie słoneczne z pionem pewien kąt, który, jak to już łatwo zrozumieć, równa się kątowi środkowemu łuku na ziemi, między Syeną a Aleksandryą. Znając łuk i kąt, można za pomocą zwykłej proporcji obliczyć obwód ziemi. Długość łuku oszacował Eratostenes na podstawie czasu potrzebnego do przebycia drogi ze Syeny do Aleksandryi i przyjął go na 5.000 stadyów, kąt zaś pomierzył za pomocą cienia pionowo białej tyczki, jako $\frac{1}{50}$ kąta pełnego. Z tych dwóch ilości obliczył obwód ziemi na 250.000 stadyów. Ponieważ 1 stadyon = 185 m więc według Eratostenesa obwód ziemi wynosił 46.250 km, zatem przeszło 15% za wiele. Przyczyną tego błędu były niedokładne pomiary, bo i nie było wówczas nawet odpowiednich środków. W II wieku przed Chr. wykonał Posidonius podobny pomiar, lecz w inny sposób, i otrzymał wynik, że obwód ziemi mierzy 240.000 stadyów, czyli 44.400 km, t. j. około 10% za wiele.

Wyniki tych pomiarów, wobec braku przyrządów, należy uznać jako stosunkowo bardzo dobre.

Nowy pomiar ziemi wykonali dopiero w roku 817 przed Chr. Arabowie. Zmierzyli mianowicie stopień południka na wielkiej równinie niedaleko Bagdadu z wynikiem $56\frac{2}{3}$ mili arabskiej. Dopiero od XVI w. usiłowania dokładnego pomiaru

ziemi stają się coraz częstsze, a sprawę tę wzięli w swe ręce Francuzi i Anglicy. W roku 1525 Francuz Fernel pomierzył drogę z Paryża do Amiens, leżących na tym samym południku, jakoteż szerokości geograficznej obu miast, a wynik jego obliczeń różni się od najnowszych zaledwie o 0'1%. W roku 1610 Niderlandczyk Willebrord Snell van Roien, nazywający się z łacińska także Snelliusem, ur. 1850 r. w Leiden, pierwszy zastosował tryangulację i od tego czasu rozpoczyna się nowy okres w historii pomiarów naszej ziemi. Pomiar Snelliusa między dwoma punktami w Alkmaar i Bergen, służące do dalszych obliczeń, dały wynik: $\frac{1}{4}$ część południka miała według niego mierzyć 9.660 km (już po zamianie prętów na metry), zatem przeszło 3% za mało, co należy złożyć na karb niedokładności instrumentów. Do pomiaru kątów służył bowiem wówczas zwykły dioptry. Od tego czasu przedsiębrali Anglicy, Francuzi i Włosi pomiary ziemi różnymi metodami i z różnymi wynikami. Dopiero w pierwszej połowie XVIII w., dzięki staraniom Akademii paryskiej, sprawa znowu postąpiła naprzód. Znalezione bowiem, że ziemia jest na biegunach spłaszczone, że spłaszczenie to wynosi $\frac{1}{300}$ promienia równikowego, zatem, kulisty kształt ziemi zmienił się na elipsoidalny.

Pomiary, wykonane staraniem Akademii paryskiej w latach 1683—1713 między Collioure a Dunkierką, rozpoczęte przez Picarda, skończył słynny matematyk Jakób Cassini. Okazało się, że stopnie południka nie są równe, co dowodzi, że ziemia nie jest kulą.

To samo wykazał Newton w swem dziele z r. 1686 („*Philosophiae naturalis principia mathematica*“). Wyniki pomiaru Cassiniego jednak, zdające się dowodzić, że ziemia ma kształt jajowaty, wydłużony w kierunku osi obrotu, nie zgadzały się z rozważaniami Newtona na podstawie wykrytego przezeń prawa o wzajemnem przyciąganiu, gdyż z nich wypadało wręcz przeciwnie, że ziemia jest na równiku więcej wypukła, niż przy biegunach. Zgadzała się więc w tem, że ziemia nie jest kulą, nie zgadzali się uczeni francuscy z angielskimi co do kształtu ziemi. Spór ten wywołał ekspedycje naukowe, wysłane w celu pomiaru ziemi, do Peru i Laponii w r. 1735—1736, w których brali udział przeważnie Francuzi, w mniejszej części Anglicy. Wyniki ekspedycji przyznały najzupełniejszą rację Newtonowi. Teraz przyjęto elipsoidalny kształt ziemi i na tem opierały się dalsze pomiary w drugiej połowie XVIII i pierwszej XIX w.

W roku 1792 wykonali Francuzi: Delambre i Méchain „wielki pomiar południka“. Celem tego pomiaru było oznaczenie rzeczywistej długości jednostki nowej miary, t. j. metra, określonego jako jedna dziesięciomilionowa część ćwierci południka sferoidy ziemskiej. Jednostka miary, w powyższy sposób określona, nie mogła nigdy zaginąć, nawet w razie zniszczenia wzorów metalowych.

Wprawdzie, ustalona długość metra nie zgadza się z przyjętą zasadą $\frac{1}{10000000}$ części ćwiartki południka, lecz już ją zatrzymano. Wzór jednostki, t. z. „*mètre des archives*“, wykonano w platynie i przechowuje się w Paryżu.

Na mocy uchwały komisji międzynarodowej w r. 1872 wykonano 30 wzorów platynowych metra z najwyższą możliwą dokładnością i rozesłano do państw, które system metrowy przyjęły. Sprawa ustalenia i zabezpieczenia miary długości jest więc dzisiaj załatwiona.

Badając do połowy XIX wieku nagromadzony materiał z różnych pomiarów ziemi, po zastosowaniu zwłaszcza wynalezioną przez matematyków: Legendrea i prawie równocześnie przez Gaussa teorii najmniejszych kwadratów, doszli uczeni do przekonania, że różnice wyników, różnych i w różnych miejscach wykonanych pomiarów, nie należy przypisywać li tylko nieuniknionym błędom w pomiarach.

Tymczasem dokonano cały szereg nowych pomiarów, rozporządzając już ulepszonymi przyrządami. Rezultatem tych trudnych i kosztownych prac są spostrzeżenia, nie ulegające już wątpliwości, że: ani południki nie są elipsami, ani równoleżniki kołami, choć kształtem zbliżają się do nich — że idealna powierzchnia ziemi, t. j. bez uwzględnienia wypukłości gór i głębiny morza, nie jest sferoidą, jakkolwiek ta najlepiej ze wszystkich innych kształtów odpowiada kształtowi ziemi.

Rzeczywisty kształt ziemi możnaby określić tylko w ten sposób, że tworzyłoby go zwierciadło wody, zostającej w spoczynku, a oblewającej bez wyjątku całą ziemię.

Uczony niemiecki Listing nazwał kształt ziemi geoidą i zaproponował komisji międzynarodowej pomiaru ziemi w 1873 r. przyjęcie za podstawę idealnej sferoidy,

któraby miała z geoidą równą objętość, oraz że suma wzniesień i obniżen geoidy, względnie sferoidy, ma być możliwie najmniejsza.

Poniżej podano tabelę z głównymi wymiarami sferoidy ziemskiej.

Tabela 1.

Według Bessla 1841 r.	Według Listinga 1872 r.	Według Clarkea 1880 r.
Połowa osi wielkiej a =		
6377397·15	6377365	6378249
Połowa osi malej b =		
6356078·96	6355298	6356515
Spłaszczenie p =		
1 : 299·1528	1 : 289	1 : 293·466
Ćwiartka południka		
10000855·76	10000218	10001871

Prace międzynarodowej komisji pomiaru ziemi dotyczą także badań odchyłki pionu, co zależne jest od struktury skorupy ziemi i ustosunkowania mas w pobliżu siebie, badań magnetycznych, obserwacji stanu wody w morzach, która nigdy nie jest w spoczynku, jak tego pojęcie o geoidzie wymaga — dalej ruchu osi ziemskiej. W roku 1886, na konferencji reprezentantów państw, należących do pomiaru ziemi, zorganizowano międzynarodowy związek, w którym biorą udział uczeni prawie wszystkich narodów cywilizowanych.

Kształt ziemi uwzględnia się tylko w niektórych pracach geodezyjnych. W granicach geodezyi niższej i pomiarach długości, nawet na obszarach mierzących tysiące km², uważać możemy ziemię jako płaszczyznę. Ażeby to uzasadnić, przyjmijmy na razie kulisty kształt ziemi o promieniu 6370000 m i obliczmy łuki, odpowiadające kątom środkowym 10' i 15', tudzież długości stycznych tychże kątów i porównajmy je ze sobą.

Otrzymamy więc dla kąta	10'	15'
długość łuku	18521·05 m	27781·575 m
„ styczney	18521·11 „	27781·65 „

Różnice są tak małe, że daleko większe będą błędy bezpośrednich pomiarów tych długości, czyli, że różnic powyższych, za pomocą pomiaru, nie jesteśmy w stanie wykazać. Ta świadomość upraszcza wielce zdjęcia i pomiary; nie potrzebujemy się bowiem nawet przy znacznych długościach, troszczyć o matematyczne poprawki, jakiby były konieczne, gdybyśmy uwzględniać musieli kulistość ziemi.

Prócz pomiarami długości, zajmować się będziemy pomiarami wysokości, czyli niwelacją. Tutaj już nie będzie można, jak pierwszej, powierzchni ziemi uważać za płaszczyznę. Przyjąwszy bowiem powierzchnię ziemi jako kulistą, to powierzchnia ta będzie rzeczywistym poziomem, w odróżnieniu od poziomu pozornego, jakim jest płaszczyzna styczna do kuli, w którymkolwiek jej punkcie. Ten właśnie poziom pozorny oddala się od rzeczywistego coraz więcej, w miarę oddalania się od punktu

styczności i to tak dalece, że już w odległości 1000 m — różnica wysokości obu poziomów wynosi 8 cm. Jeżeli w pomiarze długości, różnicy tej prawie że nie dałoby się skonstatować, to w pomiarze wysokości, dzięki wydoskonalonym przyrządom, błąd 8 cm łatwo wykazać, czyli, błąd tak wielki nie jest dopuszczalny.

Szczęściem, sam sposób wykonywania tych pomiarów uwzględnia automatycznie, bez matematycznych poprawek, kształt ziemi, o ile nie rozchodzi się także o ogromne odległości, należące już zresztą do geodezyi wyższej.

Wreszcie, mieć jeszcze będziemy pomiary kierunków, czyli kątów, zapomocą odpowiednich przyrządów.

Pomiary kątów i długości pozostają ze sobą w pewnym związku. Pomierzwszy n. p. jeden bok i kąty w trójkącie, obliczyć potrafimy inne boki, lub mając wszystkie trzy boki, obliczymy kąty, czyli pomierzmy jedno pośrednio za pomocą drugich.

Powierzchni nie mierzymy nigdy bezpośrednio, lecz zawsze tylko pośrednio, przez pomiar długości i kierunków. Geometria analityczna odgrywa, jak wogóle matematyka, bardzo ważną rolę w miernictwie, prace zaś rysunkowe są równorzędne z bezpośrednimi pomiarami w polu. W wielu wypadkach wykonywać będziemy pomiary tylko na planach.

§ 2. Jednostka długości i miary dawniejsze.

Poprzednio mówiliśmy, w jaki sposób powstała, w większości państw europejskich dzisiaj używana jednostka miary, t. j. metr.

A. Metr podzielono na 100 cm, wzgl. na 1000 mm. Jako większe jednostki, przyjęto $100\text{ m} = 1\text{ hkm}$ i $1000\text{ m} = 1\text{ km}$.

Na oznaczenie powierzchni przyjęto: 1 m^2 , $1\text{ ar} = 100\text{ m}^2$, $1\text{ ha} = 100\text{ ar}^2 = 10000\text{ m}^2$ i $1\text{ km}^2 = 1000000\text{ m}^2 = 100\text{ ha}^2$.

B. Dawne miary francuskie:

- 1 m = 443·296 linii paryskich
- 1 m = 0·513074074 prętów paryskich
- 1 m = 3·0784444 stóp paryskich
- 1 mm = 0·443296 linii paryskich
- 1 pręt = 6 stóp paryskich = 1·9490363107 m
- 1 stopa par. = 12 cali par. = 144 linii par. = 0·3248394 m
- 1 cal par. = 12 linii par. = 0·02706995 m
- 1 linia par. = 2·255829063 mm.

C. Dawne miary polskie:

- 1 sążen = 6 stóp = 1·728 m,
- 1 łokieć = 2 stopy = 0·576 m,
- 1 mila = 8534 m.

D. Dawne miary pruskie:

- 1 m = 3·186199957 stóp pruskich
- 1 m = 38·2343995 cali "
- 1 m = 0·2655167 prętów "
- 1 mm = 0·4588128 linii "
- 1 m² = 0·0704991 prętów² "
- 1 ha = 3·9166165 morgów "
- 1 stopa pruska = 0·313853497 m
- 1 cal pruski = 0·0261545 m
- 1 pręt pruski = 3·7662420 m
- 1 linia pruska = 2·1795382 mm
- 1 morg pruski = 0·2553224 ha.

E. Dawne miary austriackie:

- 1 stopa wiedeńska = 0·3160806 m
 1 sążen wiedeński = 6 stóp = 1·89648384 m
 1 sążen□ = 3·596652 m²
 1 stopa□ = 0·099907 m²
 1 mórg = 1600 s² = 0·5754642 ha
 1 mila□ = 57·54642 km²
 1 m = 0·5272916 sążni wied.
 1 m² = 0·278036 " "
 1 a = 27·803639 " "
 1 ha = 1·737727 morgów.

F. Miary angielskie i półn. amerykańskie:

- 1 yard = 3 stopy = 0·9143918 m
 1 pręt = 2·13151116 jardów
 1 stopa = 0·30479727 m
 1 cal = 2·539977 cm
 1 mila ang. = 1·60933 km
 1 akr = 40·46784 a
 1 m = 1·093623 jardów.

G. Miary rosyjskie:

- 1 stopa = 0·30479727 m
 1 sążen = 2·13358079 m
 1 stopa = 12 cali
 1 cal = 10 linii
 1 sążen = 3 arszynom
 1 arszyn = 28 cali = 16 merszkom
 1 merszek = 1³/₄ cala
 1 wiorsta = 500 sążni = 1066·79 m.

H. Miary międzynarodowe:

- 1 mila geogr. = 7·42 km = 1·15° na równiku
 1 mila morska = 1' dług. geogr. na równ. = 1855·109 m.

J. Przyrządy, służące do pomiaru długości, powinny być przed użyciem ich w urzędzie dla miar i wag sprawdzone, a błąd, pochodzący z wykonania ich, nie powinien przekraczać oznaczonej, dozwolonej granicy, mianowicie:

a) Jednometrowa łąta drewniana do mierzenia towarów, w handlu używana, podzielona na cm może mieć błąd 2 mm; zaś łąta długości 0·5 m może mieć błąd 1·5 mm.

b) Dozwolony błąd łąty metalowej, o długości 2 lub 1 m, wynosić może odpowiednio 1·5 wzgl. 1·0 mm.

c) Taśmy stalowe mogą mieć, zależnie od długości, następujące błędy:

długość	20	10	5	2	1 m
błąd	7·0	4·5	3·5	2·5	1·5 mm.

d) Podziałki, używane do prac rysunkowych, wykonane z metalu, drzewa twardego lub kości, długie od 0·1 do 0·5 m, mogą mieć błąd nie większy jak 0·5 mm.

§ 3. Miara kątowna.

Za jednostkę miary kątowną przyjęto już od dawnych czasów $\frac{1}{360}$ część kąta pełnego, czyli 1°, który znów podzielono na 60', każdą zaś minutę na 60". Obok tego podziału używany jest we Włoszech, Szwajcaryi i niektórych krajach podział kąta pełnego na 400°, 1° na 100', 1' na 100". Podział ten, wprowadzony przez

wielką rewolucję francuską, nie przyjął się nawet we Francji. W ostatnich czasach coraz więcej rozpowszechnia się podział na 360° , lecz stopnia na $100'$ a minuty na $100''$, jako bardzo wygodny w liczeniu. Prof. A. W. Witkowski podaje w swych tablicach matematyczno-fizycznych (1904 r.) logarytmy funkcji kątowych dla tegoż podziału.

Długość łuku, zakreślonego promieniem r , jest również miarą kątową. Łuk i promień wyrażone być naturalnie muszą w tych samych rodzajach miar. Zakreślmy koło o prom. $r = 1$, a następnie szereg innych kół o różnych promieniach, lecz współśrodkowych, to łuki, odpowiadające równym kątom, będą miały wprawdzie różne długości, lecz te będą do siebie pozostawały w takim stosunku, jak ich promienie. Ustawić więc możemy następującą proporcję:

$$\begin{array}{l} \text{Ł} : \text{r} = R : r \quad \text{a gdy } r = 1 \\ \text{to } \text{Ł} : \text{r} = R : 1 \\ \text{czyli } \text{Ł} = \text{r} R \end{array} \dots \dots \dots (1)$$

Obliczywszy przeto długości łuków dla $1''$ $2''$ \dots $1'$ \dots $2'$ i t. d. o promieniu $r = 1$ m, wyrachować możemy bardzo łatwo z równ. 1 łuk dla prom. R .

Również długości łuków są proporcjonalne do odpowiadających im kątów, stąd wynika, że:

$$2r\pi : \text{ł} = 360^\circ : \alpha^\circ \dots \dots \dots (2)$$

przyjmijmy $r = 1$, to otrzymamy:

$$\text{ł} = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot r \cdot \alpha^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot r \cdot \alpha^\circ = 0.017453292 r \alpha^\circ$$

podobnie w minutach i sekundach:

$$\text{ł} = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \cdot r \cdot \alpha' = 0.00029088682 r \cdot \alpha'$$

$$\text{tudzież } \text{ł} = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \cdot r \cdot \alpha'' = 0.00000484814 r \cdot \alpha''$$

Odwrotnie, mając dany promień r i pomierzony łuk, względnie element długości, który uważać można jako łuk, obliczymy odpowiedni kąt w sekundach:

$$\alpha'' = \frac{\text{ł} \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi r} = 206264.80625 \cdot \frac{\text{ł}}{r}$$

Najprostszą zaś rzeczą będzie zapamiętać długość łuku, odpowiadającą środkowemu kątowi $1''$ — i długości promienia $r = 1$ m

$$\text{ł}_{1''} = 0.00000484814 \text{ m} \dots \dots \dots (3)$$

Za pomocą równ. 3. łatwo n. p. zdamy sobie sprawę z wielkości możliwego błędu, jeżeli przy pomiarze kąta nie możemy go dokładniej odczytać, jak tylko z dokładnością $\pm 5''$, oraz, jeżeli wierzchołek leży w odległości 300 m.

Wówczas

$$\text{ł} = 0.00000484814 \cdot 5 \cdot 300 = 0.00727 \text{ m,}$$

zaś w odległości 1000 m

$$\text{ł} = 0.0242 \text{ m.}$$

W pierwszym wypadku 7.27 mm, w drugim 24.2 mm przedstawiają błędy w wytyczeniu.

Ponieważ w dalszym ciągu mieć będziemy do czynienia z wzorami goniometrycznymi i trygon., przeto przytoczono je poniżej:

Tabela 2.

Kąt	sin.	cos.	tg.	cotg.
0°	0	+ 1	0	∞
90° - α	+ cos α	+ sin α	+ cotg α	+ tg α
90°	+ 1	0	∞	0
90° + α	+ cos α	- sin α	- cotg α	- tg α
180° - α	+ sin α	- cos α	- tg α	- cotg α
180°	0	- 1	0	- ∞
180° + α	- sin α	- cos α	+ tg α	+ cotg α
270° - α	- cos α	- sin α	+ cotg α	+ tg α
270°	- 1	0	- ∞	0
270° + α	- cos α	+ sin α	- cotg α	- tg α
360° - α	- sin α	+ cos α	- tg α	- cotg α
360°	0	+ 1	0	∞
360° + α	+ sin α	+ cos α	+ tg α	+ cotg α

Tabela 3.

Znaki funkcyi trygon.:

Ćwiartka:	1	2	3	4
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
cotg	+	-	+	-

Wzory goniom. i trygonom.:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \dots \dots \dots (4)$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \dots \dots \dots (5)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \dots \dots \dots (6)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha \dots \dots \dots (7)$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha \dots \dots \dots (8)$$

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \dots \dots \dots (9)$$

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \dots \dots \dots (10)$$

$$\sin 2 \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \dots \dots \dots (11)$$

$$\cos 2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \dots \dots \dots (12)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \dots \dots \dots (13)$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta - 1}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta} \dots \dots \dots (14)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \dots \dots \dots (15)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \dots \dots \dots (16)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \dots \dots \dots (17)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \dots \dots \dots (18)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \dots \dots \dots (19)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \dots \dots \dots (20)$$

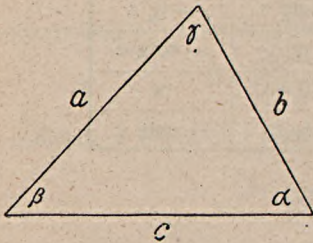


Fig. 1.

$$a = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (21)$$

$$a = \frac{e}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (22)$$

$$b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta \text{ i t. d.} \dots \dots \dots (23)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \dots \dots \dots (24)$$

$$\text{Powierzchnia } F = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} \dots \dots \dots (25)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b \cdot c}} \dots \dots \dots (26)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \dots \dots \dots (27)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \dots \dots \dots (28)$$

gdzie $2s = a + b + c$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \dots \dots \dots (29)$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \dots \dots \dots (30)$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} \dots \dots \dots (31)$$

§ 4. Poziom geodezyjny i poziom pozorny.

Wyobraźmy sobie, że całą ziemię oblewa jedno morze, na które nie wywiera wpływu ani księżyc, ani słońce, czyli, że zostaje ono w zupełnej równowadze — to wówczas powierzchnia wody przedstawiałaby t. z. poziom geodezyjny. Jesliby powyższa powierzchnia wody przechodziła przez powierzchnię morza Adryatyckiego, jak to przyjęto w Austrii, to poziom ten byłby zerowym i służyłby jako podstawa do pomiaru innych poziomów.

Każda inna powierzchnia, w całej swej rozciągłości równoległa do pierwszej opisanej, byłaby także poziomem geodezyjnym czyli rzeczywistym, lecz wyższym lub niższym od poprzedniego o odcinek pionu, zawarty między obu poziomami. Poziom geodezyjny zatem jest w każdym punkcie ziemi prostopadły do pionu tegoż punktu.

Płaszczyznę styczną do poziomu geodezyjnego w którymkolwiek punkcie ziemi, nazywamy poziomem pozornym. Jest ona prostopadłą tylko do pionu w punkcie styczności.

Płaszczyzna południka, przechodząca więc przez oś obrotu ziemi, przecina poziom pozorny w linii południe — północ, którą przyjmujemy jako oś odciętych (x), zaś linię prostopadłą do niej, przechodzącą przez punkt styczności poziomu pozornego, idącą od wschodu na zachód, jako drugą oś układu współrzędnych, t. j. oś rzędnych (y).

Taki układ współrzędnych przyjmujemy dla pewnych obszarów, uważanych jeszcze za płaszczyznę, o czem już była poprzednio mowa — i nawiązujemy doń pomiary, podobnie zupełnie, jak postępujemy z punktami i prostymi w geometrii analitycznej.

Powierzchnia ziemi jednak nie schodzi się ani z poziomem geodezyjnym ani pozornym — jest bowiem najrozmaiciej pofalowana. Wyobraźmy sobie teraz pewien obszar na ziemi, podzielony na parcele. Pomierzmy te parcele, podzieliwszy je n. p. na trójkąty, tj. pomierzmy wszystkie ich boki, ale tak, jak są, tj. mierząc wprost po ziemi, tj. po pochyłościach i starajmy się następnie skonstruować te trójkąty na poziomie pozornym. Wówczas otrzymalibyśmy rysunek na płaszczyźnie zupełnie niepodobny do rzeczywistości — powierzchnie na tej płaszczyźnie wydawałyby się większe. Natomiast wierny obraz otrzymamy tylko wówczas, gdy wykonamy rzut poziomy danych parcel na poziom pozorny, a co za tem idzie, gdy boki trójkątów nie będziemy mierzyli po pochyłościach, lecz w poziomie, czyli, gdy mierzyć będziemy ich rzuty poziome. Stąd wynika, że wszelkie pomiary długości wykonywać będziemy tylko w poziomie.

Zdawałoby się, że mierząc pewne obszary w poziomie, postępujemy fałszywie. Przypuśćmy bowiem, że mamy przed sobą dwie parcele równe co do powierzchni mierzonych wprost po terenie. Jedna z nich jednak leży rzeczywiście w poziomie, druga zaś na stoku. Obie te parcele nie będą równe na rysunku, bo druga wyjdzie mniejszą. Tymczasem faktem jest, że wszelkie rośliny nie rosną prostopadle do powierzchni, lecz pionowo, czyli, że właściciel powierzchni, leżącej na stoku, nie może mieć większego pożytku ze swej parceli, niż jakoby miał z jej rzutu poziomego. Tak więc i praktyka nie stoi w sprzeczności z metodą pomiarów w rzucie poziomym.

§ 5. P l a n y.

Planem nazwano rysunek pewnego obrazu, sporządzony na podstawie pomiarów. Zależnie od celów praktycznych rozróżniamy: 1) plany katastralne, na których oznaczone są nie tylko granice poszczególnych własności, t. j. parcel, lecz nadto parcele budowlane i rodzaj uprawy gruntów; 2) plany gospodarcze, na których podano rodzaj kultury, dobroć ziemi, stosunki klimatyczne, ulepszenia rolne i t. p. daty, konieczne w wielkiem gospodarstwie rolnem; 3) plany lasowe podają obszary z oznaczeniem rodzaju i wieku drzewostanu, kultury leśne, wyręby. Jeżeli, prócz wszelkich szczegółów, jak dróg, kolei, budynków, obszarów leśnych, rzek, potoków i t. p., podane są jeszcze wysokości terenu, to plan taki nazywamy sytuacyjnym. Wreszcie mamy karty topograficzne, wykonane w znacznem zmniejszeniu, rysowane według przyjętych prawideł i zaopatrzone znakami raz na zawsze ustalonymi, celem orientowania się; karty topograficzne zawierają wszelkie szczegóły terenowe

tak w planie, jak i wysokościowe. Wszelkie plany są zoryentowane według linii południe północ, tak, że przyłożony do lewej lub prawej linii brzegowej planu busole, ustawimy się w tej chwili wraz z kartą w kierunku północnym. Napisy leżą na liniach zachód — wschód. Plany rysuje się w zmniejszeniu, czyli skali; n. p. w 500-krotnym zmniejszeniu sporządza się plany regulacyjne ważniejszych części miasta, gdzie grunta są drogie; w 1000-krotnym zmniejszeniu, czyli skali 1:1000 wykonywamy zwykle plany regulacyjne i sytuacyjne, służące do studyów trasy dróg i kolei, robót wodnych i t. p. W skali 1:10000 lub 1:25000 rysuje się plany sytuacyjne celem t. zw. generalnych studyów. Karty topograficzne mają skalę 1:75000 i 1:200000.

Austriackie plany katastralne, wykonane jeszcze przed wprowadzeniem miary metrycznej, posiadają następującą skalę: 1 cal na rysunku oznacza 40 sążni w naturze, czyli $40 \times 6 \times 12 = 2880$ cali w rzeczywistości; wyjątkowo, dla niektórych miejscowości przyjęto dwa razy większą skalę, t. j. 1:1440.

Przy sporządzaniu nowych planów katastralnych przyjęto skalę 1:2500, dla miast zaś 1:1250.

(W celu zaznajomienia się ze znakami topograficznymi, jak i w ogóle z kartografią w zakresie praktycznie wystarczającym, zalecam usilnie książkę Jerzego Lewakowskiego p. t. Terenoznastwo i kartografia wojskowa, Lwów, 1916).

§ 6. Układ katastru austriackiego.

Podstawę pomiarów katastralnych austriackich stanowi sieć tryangulacyjna, pokrywająca całe państwo, a oparta na czterech bezpośrednio pomierzonych podstawach:

1. Podstawa koło Wiener Neustadt o dług. 12158'175 m
2. " " Wels w niższej Austrii o dług. 14989'453 m
3. " " Radowce na Bukowinie " " 9860'958 "
4. " " Hall w Tyrolu " " 5671'215 "

Nadto nawiązywano tę sieć z wojskową siecią tryangulacyjną.

Sieć trygonometryczna, zależnie od długości boków trójkątów, ma 4 stopnie, 1. Pierwszorzędna składa się z trójkątów o bokach 15 do 30 km długości i oparta jest wprost na pomierzonej podstawie;

2. Drugorzędna składa się z trójkątów o dług. boków od 9 do 15 km — oparta jest na poprzedniej sieci;

3. Trzeciorzędna, o dług. boków 4 do 9 km, jest tak założona, że na każdą milę kwadratową, t. j. 5754'6 ha wypada jeden trójkąt;

4. Czwartorzędna wychodzi z punktów tryangulacyjnych 3-ciorzędnych i podaje na każde 500 austr. morgów (287'73 ha) trzy punkty tryangulacyjne, jako nawiązanie do zdjęć szczegółowych.

Do r. 1858 wykonywano zdjęcia tryangulacyjne graficznie, do czego używano, jako stoliczków mierniczych, płyt szklanych.

Ażeby przy zdjęciach szczegółowych parcel i t. p. zużytkować stałe punkty tryangulacyjne w jak najprostszym sposobie, przyjęto prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie, względem którego oznaczono położenie punktów tryangulacyjnych. Ażeby znów z drugiej strony uniknąć błędów, powstać mogących wskutek nieuwzględnienia kształtu ziemi, musiano przyjąć dla pojedynczych krajów, lub ich grup, osobne układy współrzędnych, dla których jeden z punktów I-rzędnej sieci przyjmowano jako początek układu.

Przez ten punkt przechodzący południk ziemski przyjęto jako oś odciętych, zaś prostopadłą do osi odciętych, jako oś rzędnych układu współrzędnych danego kraju. Z powodu stosunkowo niezbyt wielkich rozciągłości powierzchni ziemi, należącej do przyjętych poszczególnych systemów, można było osie współrzędnych traktować jako proste na płaszczyźnie. W taki sposób urządzono w Austrii siedm różnych układów.

Dla Galicyi przyjęto początek układu współrzędnych na kopcu Unii lubelskiej. Położenie geogr. określa: długość geogr. $41^{\circ} 42' 29''$. 5684 i szer. geogr. $49^{\circ} 50' 55''$. 2429.

Celem t. zw. zorientowania sieci trygon. w danym kraju, oznaczono asymuty boków pierwszego trójkąta, wychodzącego z początku układu, albo za pomocą bez-

pośrednich astronomicznych pomiarów, albo geodezyjnie, za pomocą pomiarów kierunków, względem innego trójkąta, którego asymuty pierwszej oznaczono. Mając już ściśle określone geogr. położenie wszystkich punktów tryangulacyjnych, można już łatwo, za pomocą odpowiednich pomiarów i nawiązań, znaleźć położenie geogr. każdego, dowolnego punktu na terenie, lub w mapie katastralnej.

Obliczenie współrzędnych, jak to już wspomniano, wykonano według reguł trygonometrii na płaszczyźnie. Pomiar kierunków odbywa się zawsze od linii równoległej do osi odciętych, przez dany wierzchołek, w kierunku ruchu wskazówek na zegarze, t. j. przez zachód, północ i wschód, aż do 360°. — Te kąty kierunkowe, dla odróżnienia od pomiaru asymutów, liczonych od rzeczywistego południka danego punktu, nazwano kątami południowymi (Süd-winkel).

Fig. 2 przedstawia układ współrzędnych w danym punkcie O, jako wierzchołku. Linia MM' jest równoległą do południka, idącego przez początek krajowego układu współrzędnych — prostopadła do niej jest osią rzędnych.

Kierunek linii OA określa kąt α — podobnie
 " " OB " " β
 " " OC " " γ
 " " OD " " δ .

Z długości boków i wielkości kąta kierunkowego dadzą się obliczyć rzędne powyższych punktów, t. j. p r_2 r_3 r_4 jakoteż i odcięte $m_1 \dots m_4$, które dodane do współrzędnych punktu O, dadzą wartość współrzędnych punktów A.... D — względem kraj. układu.

Odcięte oznaczają się jako południowe (S) — lub północne (N) zależnie czy leżą na południe lub północy od osi rzędnych — podobnie rzędne wschodnie (O) lub zachodnie (W), leżące odpowiednio, względem osi odciętych.

Na fig. 2. wskazano zarazem znaki przyjęte dla poszczególnych kierunków układu współrzędnych.

Jak wskazuje fig. 3, podzielono całą powierzchnię kraju, należącą do pewnego układu współrzędnych, liniami równoległymi do obu osi, na kwadraty o bokach dług. jednej mili, t. j. 7585'9 m. Pasy podłużne nazwano kolumnami, poprzeczne zaś, t. j. od zachodu na wschód, warstwami lub wierszami. Pierwsze ponumerowano cyframi rzymskimi, począwszy od osi xx (południka) na wschód w jednym kierunku i na zachód w drugim. Drugie cyframi arabskimi, począwszy od najbardziej na północ wysuniętego wiersza, ku południowi.

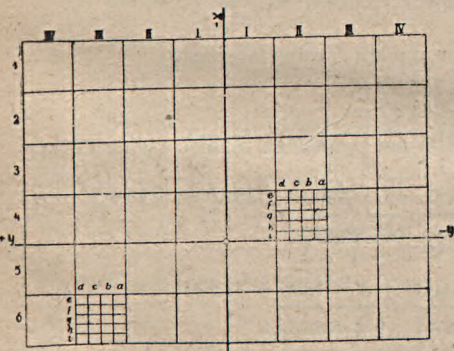


Fig. 3.

Kwadrat o pow. 1 mili kwadratowej stanowi sekcję, której położenie określa się numerem kolumny z dodaniem: na wschód (O) lub zachód (W), oraz numeru wiersza.

Każdą znow sekcję podzielono na mniejsze części, t. zw. sekcje szczegółowe, mianowicie na 4 kolumny i 5 wierszy, oznaczając je (fig. 3) literami.

Położenie sekcji szczegółowej określa się najpierw sekcją główną, a następnie literami.

Sekcja szczegółowa przedstawia więc prostokąt o dług. 1000 sążni (1896'5 m), szer. 800 sążni (1517'2 m) i powierzchni 500 morgów (287'7 ha).

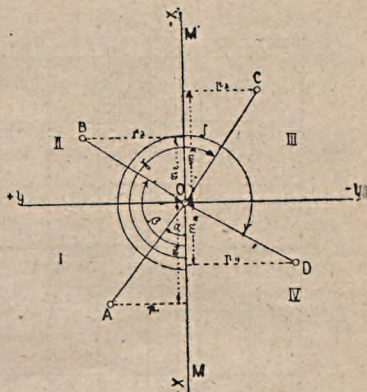


Fig. 2.

Plany katastralne, wykonane za pomocą zdjęć stolikowych, mają skalę 1:2880. Wyjątkowo tylko plany niektórych miast i obszarów wykonano w skali 1:1440 — plany zaś Wiednia w skali 1:720.

Dla nowych zdjęć i pomiarów w mierze metrycznej, przyjęto (rozp. z r. 1873) skalę 1:2500.

Również wprowadzono nowy podział na sekcye, przedstawiony na fig. 4. ćwiartki, powstałe przez przecięcie powierzchni kraju osiami wsp., nazwano:

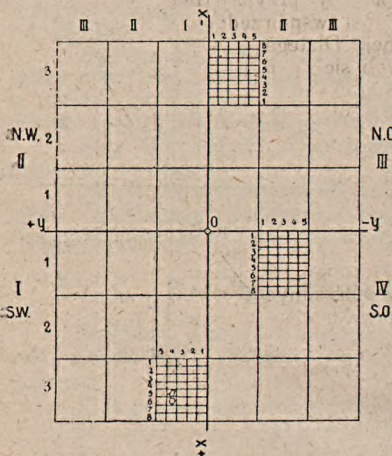


Fig. 4.

- I. S. W. (płd. zach.)
- II. N. W. (płn. zach.)
- III. N. O. (płn. wsch.)
- IV. S. O. (płd. wsch.).

Kolumny mają szer. 8.000 m, wiersze 10000 m. Oznaczenie kolumn i wierszy widoczne jest z rysunku, sekcye główne, powstałe w ten sposób, określa się przez podanie ćwiartki, następnie numeru kolumny i wiersza — n. p.:

- sekcya A: S. W. II. 2.
- „ C: N. O. I. 2.

Każdą sekcję główną podzielono w końcu na 5 kolumn i 8 wierszy, t. j. 40 sekcji szczegółowych po 1600 m dług. i 1250 m. szer., oraz 200 ha. pow. Plan sekcji szczegółowej w skali 1:2500 ma 64 cm dług. i 50 cm szer. Sposób numerowania jest uwidoczniiony na fig. 4.

Położenie sekcji szczegółowej określa się, pisząc numer kolumny w liczniku, wiersza w mianowniku, obok naturalnie

sekcja szczegółowa A leży: S. W. I. 3. $\frac{4}{6}$.

Przypuśćmy, że dane są współrzędne punktu tryangulacyjnego:

$$y = + 35.735 \cdot 50 \text{ m}$$

$$x = + 54.548 \cdot 20 \text{ m}$$

mamy znaleźć sekcję szczegółową, w której ten punkt leży. Znając wymiary sekcji, obliczymy:

$$y = + 35.735 \cdot 50 = \underbrace{4 \times 8000}_{\text{kolumny}} + \underbrace{2 \times 1600}_{\text{sek. szczeg.}} + 535 \cdot 50 \text{ m}$$

$$4 + 1 = V \quad 2 + 1 = 3$$

$$x = + 54.548 \cdot 20 = \underbrace{5 \times 10.000}_{\text{wiersze}} + \underbrace{3 \times 1250}_{\text{sek. szczeg.}} + 798 \cdot 20$$

$$5 + 1 = 6 \quad 3 + 1 = 4$$

+ y oznacza zachód, + x południe.

Punkt tryang. leży zatem: S. W. V. 6. $\frac{3}{4}$ a to + 535·50 m na zachód od wschodniej, i + 798·20 m na południe od północnej linii sekcyjnej.

Punkty tryangulacyjne, oznaczone zrazu w polu zapomocą pali, zostały później, już po wykonaniu zdjęć parcel, utrwalone w znacznej części za pomocą osadzonych w ziemi kamieni z literami K. V. (Katastral-Vermessung).

W ostatnich latach wzięto się do rewizji katastru, Prace rozpoczęto w Austrii niższej i wyższej, Salzburgu i Karyntyi, od wyszukania dawnych punktów tryang. i założenia nowych.

Reambulację przeprowadza się dalej metodą stolikową, w przyszłości zaś należy być od ministerstwa skarbu, gdzie i jakiej metody należy używać. Metodę zdjęć teodolitowych (polygonalną czyli wielobokową) stosować należy tam, gdzie się rozchodzi o większą dokładność, n. p. z powodu wysokiej ceny gruntów i t. p.

§ 7. Punkty i proste.

W opisie urządzenia katastru austr. poznaliśmy przyjęty tam układ współrzędnych, różniący się w oznaczeniu kierunków osi współrzędnych, od przyjętego w układzie, używanym w geometrii analitycznej. Dlatego potrzebne jest krótkie przynajmniej repetytorium zagadnień, odnoszących się do punktów i prostych, z zastosowaniem układu geodezyjnego.

Położenie punktu w którejkolwiek ćwiartce określa się za pomocą odcinków współrzędnych, mianowicie odciętej x i rzędnej y — z odpowiednimi znakami, zgodnymi z kierunkiem osi układu.

Prosta, co do swego położenia i kierunku, będzie ściśle oznaczona: albo za pomocą jednego punktu i kąta, jaki tworzy z dodatnią stroną osi x , t. j. kąta mierzonego od równoległej do osi $+x$, przechodzącej przez dany punkt a daną prostą, albo za pomocą dwóch punktów. Kąt, czyli kierunek, mierzy się zawsze od równoległej do osi $+x$ w stronę ku osi $+y$, czyli w kierunku ruchu wskazówek na zegarze. Na fig. 2 przedstawiono kierunki osi współrzędnych i oznaczono ćwiartki I. . . . IV. Na fig. 5a natomiast wskazano parę przykładów, mianowicie:

- a) Kierunek prostej MN , czyli według przyjętego sposobu oznaczania (MN), przedstawia kąt (α) oznaczony łukiem ze strzałką.

Oznaczmy różnicę rzędnych przez Δy ,
a różnicę odciętych przez Δx , to:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (MN) = \frac{+\Delta y}{+\Delta x} = +m$$

- b) Kierunek prostej PM , t. j. od punktu P ku M (PM) = ($90 + \alpha$). Oznaczmy różnicę rzędnych przez $\Delta_1 y$ odciętych przez $\Delta_1 x$, to styczną kąta (α) określimy jak poprzednio stosunkiem $\frac{y}{x}$ lecz z uwzględnieniem znaków — zatem

$$\operatorname{tg}(PM) = \frac{+\Delta_1 y}{-\Delta_1 x} = \frac{+\Delta x}{-\Delta y} = -\frac{1}{m}$$

bo, jak z konstrukcyi widać, bezwzględne wartości odcinków wynoszą:

$$\Delta_1 y = \Delta x \text{ i } \Delta_1 x = \Delta y;$$

- c) Kierunek (NM) = ($180 + \alpha$)

$$\operatorname{tg} (NM) = \frac{-\Delta y}{-\Delta x} = +m$$

- d) Kierunek (MP) = ($270 + \alpha$)

$$\operatorname{tg} (MP) = \frac{-\Delta_1 y}{+\Delta_1 x} = \frac{-\Delta x}{+\Delta y} = -\frac{1}{m}$$

Ogólne równanie prostej ma kształt:

$$y = mx + b \dots \dots \dots (32)$$

gdzie $m = \operatorname{tg} \alpha$, t. j. kąt między dodatnią stroną osi x a danym kierunkiem, zaś b jest odcinkiem, jaki dana prosta odcina na osi y .

Jeżeli prosta ma przechodzić przez punkt, dany za pomocą współrzędnych $x_1 y_1$, to jej równanie:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \dots \dots \dots (33)$$

gdzie m ma znaczenie wyżej określone i musi być dane, inaczej przez dany punkt możnaby wykreślić nieskończenie wiele linii.

Jeżeli dane są dwa punkty: (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , to równanie prostej przybierze formę:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \dots \dots \dots (34)$$

Przy zestawianiu powyższego równania, należy uważać na kierunek prostej. Równanie prostej, odcinającej na osi x odcinek a zaś na osi y odcinek b:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \dots \dots \dots (35)$$

Równanie prostej, prostopadłej do danej prostej:

dane jest równanie $y = a x + b \dots \dots \dots (36)$

to prosta prostopadła wyrazi się przez równanie

$$y_1 = -\frac{1}{a} x_1 + b_1 \dots (36a)$$

Długość odcinka prostej, między punktami:

$$A(x_a, y_a) \text{ i } B(x_b, y_b):$$

$$AB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}.$$

Przykład 1. (fig. 5).

Dany punkt A $x_1 = 8$ $y_1 = 6$ $m = \frac{5}{4}$, $y - y_1 = m(x - x_1)$

wstawmy za x_1 i y_1 wartości: $y - 6 = \frac{5}{4}(x - 8)$. . . $y - 6 = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4} \cdot 8$ czyli

$$y = \frac{5}{4}x - 4.$$

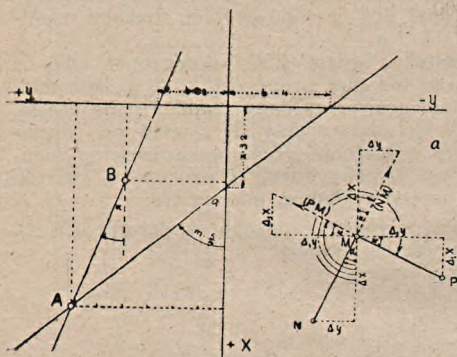


Fig. 5.

Punkt przecięcia z osią x otrzymamy, wstawiając w powyższe równanie $y = 0$ - zatem $\frac{5}{4}x = 4$, stąd $x = 3 \cdot 2$.

Przykład 2.

Dane: A . . . [$x_1 = 8$] [$y_1 = 6$] i B . . . [$x_2 = 3$] . . . [$y_2 = 4$] $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$

wstawmy tu wartości, to $y - 6 = \frac{-2}{-5}(x - 8)$ $y = \frac{2}{5}x - \frac{2}{5} \cdot 8 + 6$ czyli $y = \frac{2}{5}x + 2 \cdot 8$.

Równanie prostej, przechodzącej przez początek układu:

$$y = m x \dots \dots \dots (37)$$

Równanie osi (y): $x = 0 \dots \dots \dots (38)$

„ „ (x): $y = 0 \dots \dots \dots (39)$

Równanie prostej równoległej do osi y:

$$x = n \dots \dots \dots (40)$$

podobnie, do osi x:

$$y = n \dots \dots \dots (41)$$

Punkt przecięcia dwóch prostych:

$$y_1 = a_1 x_1 + b_1$$

$$y_2 = a_2 x_2 + b_2.$$

Ponieważ obie proste mają mieć wspólny punkt, więc, dla tego punktu muszą mieć te same x i y .

Wstawiliśmy więc y_2 za y , otrzymamy x a następnie obliczymy y_1 .

Zagadnienie:

Przyjmijmy, że mamy dane lub obliczone współrzędne jakiegoś punktu A , leżącego w sekcji szczegółowej: Z II pld. $2 - \frac{2}{4}$ (fig. 4) — t. j. $A \dots x = 14420$ m $y = 13680$ m. Punkt ten chcemy jak najdokładniej oznaczyć na planie.

Współrzędne sekcji szczegółowej, a raczej równania linii sekcyjnych jako równoległych do osi x i y będą:

1. Równ. prawej linii sekc. $y = 8000 + 3 \cdot 1600 = 12800$ m
2. „ lewej „ „ $y_1 = 12800 + 1600 = 14400$ m
3. „ górnej „ „ $x = 10000 + 3 \cdot 1250 = 13750$ m
4. „ dolnej „ „ $x_1 = 13750 + 1250 = 15000$ m

Oberzmy teraz prawą i górną linię sekc. jako nowe osie według fig. 6 — to wówczas równanie dolnej osi sekc. (na rys. kreskowanej) będzie miało wartość

$$y_1 = 14400 - 12800 = 1600$$

i podobnie lewej osi:

$$x = 15000 - 13750 = 1250$$

równ. zaś nowych osi współrzędnych będą $y = 0$ i $x = 0$.

Rzecz prosta, zmniejszyć też należy współrzędne punktu, odnosząc je do nowych osi, zatem

$$A \begin{cases} x = 14420 - 13750 = 670 \text{ m} \\ y = 13680 - 12800 = 880 \text{ m} \end{cases}$$

Przesuniemy teraz przez punkt A prostą, idącą przez początek układu, której ogólne równanie będzie miało kształt:

$$y = m x$$

$$\text{gdzie } m = \text{tg } \alpha = \frac{y}{x} = \frac{880}{670} = \frac{88}{67}$$

i znajdziemy punkt przecięcia tej prostej $y = \frac{88}{67} x$ z dolną linią

sekcijną, której równ.: $x_1 = 1250$. Ponieważ punkt przecięcia jest obu tym prostym wspólny, więc wstawmy x_1 za x , czyli:

$$y = \frac{88}{67} x 1250 = 1641'641 \text{ m,}$$

punkt przecięcia się B , odmierzony na dolnej linii sekcyjnej, wypada nieco poza sekcją. Połączywszy początek układu z punktem B , otrzymamy prostą, na której leży punkt A . Obliczywszy teraz odległość OA — z równ.: $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $OA = \sqrt{670^2 + 880^2} = 1106'029$ m odetniemy ją na prostej, począwszy od punktu O i położenie punktu A będzie wyznaczone.

Możemy też, mając prostą OB , ułożyć równanie prostej CA — i narysować ją — punkt przecięcia obu linii będzie punktem A .

Dane:

$$A (x = 670 \quad y = 880)$$

$$C (x_1 = 0 \quad y_1 = 1600)$$

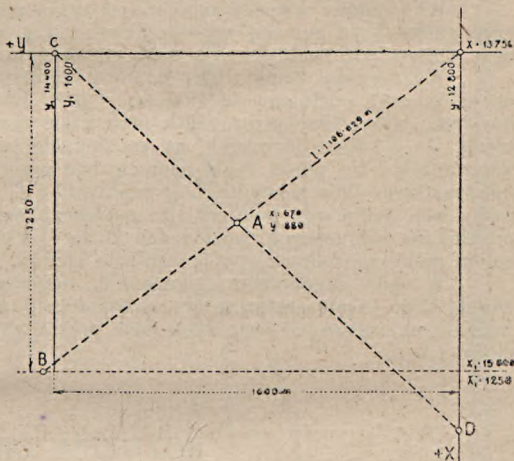


Fig. 6.

Prosta CA odcina na osi y długości $b = 1600$, zatem ogólne równ. jej będzie $y = mx + b$ czyli $y = mx + 1600$, zaś dla $y = 0$ otrzymamy $mx = -1600$, stąd $x = -\frac{1600}{m}$. Teraz znajdziemy m — na co mamy podane pewne warunki, mianowicie, że prosta przechodzi przez oba punkty, które muszą ją sprawdzać, zatem:

$$\begin{aligned} y &= mx + b & i \\ y_1 &= mx_1 + b & \text{po odjęciu dostaniemy} \\ y - y_1 &= m(x - x_1), & \text{a że } x_1 = 0, \text{ więc} \\ m &= \frac{y - y_1}{x} = -\frac{720}{670} = -\frac{72}{67} \end{aligned}$$

wstawwszy to w poprzednie równ. otrzymamy

$$x = -\frac{1600}{-\frac{72}{67}} = +\frac{1600 \times 67}{72} = 1488.88 \text{ m.}$$

Odejmijmy teraz na osi $x - 1488.88$ m do punktu D i połączmy punkty C i D , obie proste przetną się w punkcie A .

Wypadałoby w końcu zapytać, co zyska powyższa praca, jeżeli zamiast wyznaczyć punkt A za pomocą współrzędnych x i y , wyznaczymy go powyższym sposobem. Odpowiedź znajdziemy w nast. rozważaniu:

Wyznaczając punkt A za pomocą rzędnych, wykonamy pomiar długości „ y “ na osi Y , czyli odejmiemy tę długość — przy tej czynności, popełnimy jakiś błąd — następnie wykreślimy prostopadłą, przy czem mamy też sposobność do popełnienia błędu — w końcu odejmiemy na prostopadłej wartość x także z pewnym błędem. Wyznaczając zaś punkt A za pomocą dwu przecinających się prostych, mamy przede wszystkim linie sekcyjne, t. j. punkty O i C ustalone jak najdokładniej. Wykonamy więc tylko dwa pomiary i to na kierunkach linii sekcyjnych. Błędy przy tem popełnione, zmniejszają się idąc od B do O i od D do C . W tym wypadku mamy zatem mniej sposobności po popełnianiu błędów.

W ogóle zagadnienia geom. analit., odnoszące się do prostych na płaszczyźnie, znajdują dość częste zastosowanie w miernictwie, zwłaszcza przy sporządzaniu planów. Jedno z najczęstszych jest: dane dwie proste, znaleźć współrzędne ich punktu przecięcia i t. p.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Tyczenie linii prostych i kątów o stałej wielkości.

§ 1. Oznaczanie i utrwalanie punktów w polu.

Wszelkie zdjęcia w polu ograniczają się do zdjęć punktów. Określiwszy *n. p.* za pomocą pomiarów wzajemne położenie wierzchołków jakiegoś wieloboku, tworzącego parcelę gruntową, możemy następnie położenie ich odpowiednio przedstawić na rysunku, a łącząc je prostymi, kształt i granicę danej parceli. Przy pomiarach wysokości zdejmujemy także tylko poszczególne punkty. Proste, t. j. ich kierunki lub odcinki, oznaczamy za pomocą punktów. Stąd wynika, że przed każdym pomiarem poznać musimy lub obrać potrzebne punkty na terenie i oznaczyć je odpowiednio do celu, jaki mamy przed sobą.

Przy pomiarach poszczególnych parcel, mających granice w postaci *n. p.* miedz, oznacza się punkty załamania kierunków za pomocą małych palików, 30 cm dług., 4 cm średnicy. Granice większych obszarów oznacza się albo palami, albo odpowiednio osadzonymi w ziemi kamieniami granicznymi, także na załomach, wreszcie kopcami. Trasę dróg lub kolei oznacza się linią osiową, tę zaś palikami około 40 cm dług. i 5 do 6 cm średn., wystającymi parę cm nad teren. Wierzchołki kierunków, t. j. punkty, w których dwa kierunki się przecinają, oznacza się za pomocą większych

pali, około 1·0 m dług. i 10 cm śred., wkopanych w ziemię i zaopatrzonych u dołu dwoma poprzeczkami, na górnej zaś, często ściętej powierzchni, gwoździem wbitym w punkcie przecięcia się kierunków (fig. 7).

W podobny sposób oznacza się też na terenie t. z. stałe punkty wysokości (repery). W miastach, do oznaczania stałych punktów niwelacyjnych, używa się bolców żelaznych, około 20 cm dług. i 5 do 8 cm średn., wmurowanych w cokoły domów i wystających około 3 do 4 cm. Na takim bolcu ustawia się łątę niwelacyjną, a ponieważ ma on kształt walca, więc łąta staje zawsze na najwyższym punkcie. Numery i nazwy punktów umieszcza się na drewnianych deszczółkach, wbitych obok palika.

Przy zdjęciach miast, należy szczególnie starannie oznaczyć punkty wierzchołkowe wieloboków oraz punkty tryangulacyjne.

W powyższy sposób oznaczone punkty, byłyby jednak podczas pomiarów zazwyczaj niewidoczne. Ażeby je chwilowo uwidocznić, używa się do tego tyczek mierniczych, długich 2 do 4 m i 3 cm śred., zupełnie prostych i jednostajnie obrobionych, pomalowanych na biało i czerwono w pasach co 20 cm.

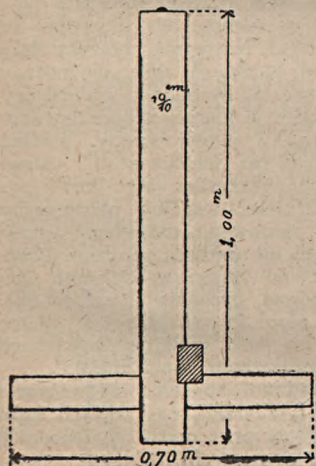


Fig. 7.

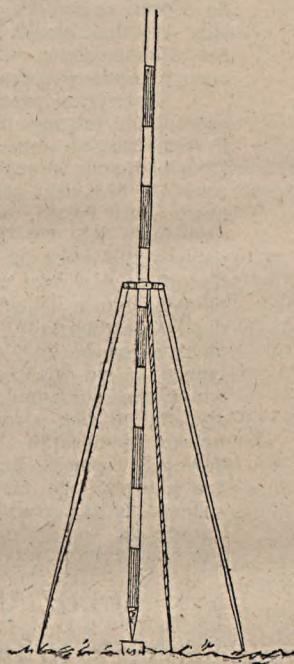


Fig. 9.

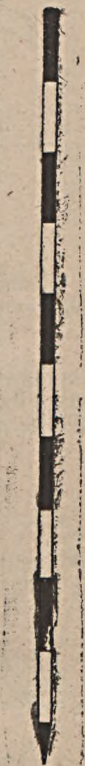


Fig. 8.

Dolny koniec tyczki jest starannie okuty, a ostrze powinno znajdować się dokładnie na środku. Tyczkę taką ustawia się pionowo na paliku (względnie na gwoździu) lub też wbija się w teren. Do utrzymywania jej w położeniu pionowym służy odpowiednio skonstruowany trójnóg, lub też opiera się ją na dwóch innych tyczkach, wbitych ukośnie w ziemię i przywiązuje szpagatem.

Do uwidocznienia punktów w większych odległościach położonych, używa się sygnałów (fig. 10), t. j. słupów 15 do 20 cm średn., prostych, do 8 m długich, ustawionych dokładnie na danym punkcie.

§ 2. Tyczenie prostych.

Ustawmy w dwóch punktach terenu dwa pionowe i przesuwmy przez nie płaszczyznę — to płaszczyzna ta, przecnie powierzchnię terenu w jakiejś, mniej lub więcej pofałdowanej linii, której jednak rzut na poziom pozorny będzie linią prostą.

Ściśle więc rzecz biorąc, pod tyczeniem prostych rozumiemy wytyczenie śladu płaszczyzny pionowej na terenie.

Dwa punkty wystarczają do wyznaczenia powyższej płaszczyzny, bo bez żadnych bliższych określeń przyjmujemy z góry, że płaszczyzna przechodzi przez pion w obu punktach, zatem przez dwie linie. Ponieważ, jak to już poprzednio omówiliśmy, wykonujemy pomiary w rzucie na poziom pozorny, przeto nie określamy zwykle w praktyce linii prostej, jako śladu płaszczyzny pionowej i t. d., lecz wprost powiadamy, że przez dwa punkty mamy wytyczyć prostą.



Fig. 10.

Przyrządem do tyczenia linii jest, po największej części, opisana poprzednio tyczka miernicza. Niezbyt długie linie, do 300 m, można dokładnie wytyczyć za pomocą tyk, od oka; do 800 m. za pomocą połowej lunety, jeżeli teren jest sprzyjający, t. j. dość płaski. Sposobów tych używa się przy zwykłych, nie wymagających wielkiej dokładności pracach — w przeciwnym razie wytyczamy linie za pomocą instrumentu.

Zazwyczaj rozchodzi się albo o wyznaczenie punktów pośrednich między dwoma danymi, albo o przedłużenie linii. Przypuścimy, że dane są dwa punkty (fig. 11) A i B, między którymi mamy wyznaczyć punkt pośredni C.

W tym celu ustawiamy w obu danych punktach pionowo dwie tyczki, wbijając je w ziemię, lub używając do ustawienia ich, trójnogów (fig. 9). Następnie, tycząc linię ustawia się kilka kroków przed tyczką A, tak, by patrząc wprost na nią, miał zakrytą tyczkę B. Pomocnik, trzymający pionowo tyczkę C, przesuwa powoli w kierunku poprzecznym dopóty, aż tyczący, patrząc raz z jednej strony, wzdłuż płaszczyzny bocznej $a' b'$ — drugi raz wzdłuż $a'' b''$, ustawi tyczkę C we właściwym miejscu. Wszystkie więc tyczki powinny się dokładnie kryć czyli mieć wspólne płaszczyzny styczne po obu stronach. Do pionowego ustawienia tyczki używa się ciężarka zawieszonoego na cienkim sznurku. Przesuwając ciężarek na parę cm. do tyczki w kierunku linii i w kierunku do niej prostopadłym, możemy łatwo, od oka, ustawić tyczkę równoległą do pionu, czyli pionowo. W ten sposób da się wytyczyć dowolną ilość punktów pośrednich lub też punktów leżących w przedłużeniu danej linii.

O ściśle, możliwie dokładnym sposobie wyznaczania punktów prostej, czy to przy pomiarach, czy trasach kolei lub tunelów i t. p., mówić będziemy przy opisie odpowiednich instrumentów, czyli przyrządów optycznych.

§ 3. Przyrządy do wyznaczania kątów o stałej wielkości.

Najczęściej, przy zwykłych pomiarach, zachodzi potrzeba wytyczenia kąta prostego (90°) — rzadziej już innych. Naturalnie, obracamy się w zakresie najprostszych pomiarów. Do wytyczania lub odcięcia kątów dowolnej wielkości, z wszelką możliwą dokładnością, służą specjalne przyrządy, które później poznamy.

Bardzo prostym sposobem wyznaczenia linii prostopadłej do danego kierunku jest następujący (fig. 12):

Przypuścimy, że dany jest kierunek AB, zaś w punkcie A mamy wytyczyć

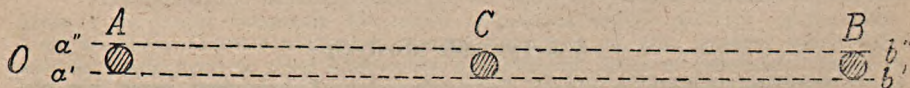


Fig. 11.

prostopadłą. W tym celu wytyczny punkt pośredni C w odległości 3 dowolnie przyjętych jednostek długości. Przytrzymajmy teraz w punkcie A koniec cieńkiego, giętkiego druta o długości 4 takichże samych jednostek, a w punkcie C drugiego druta o długości 5 powyższych jednostek. Złączymy wreszcie końce obu drutów, dobrze napiętych, otrzymamy punkt D, czyli linię AD prostopadłą do AB. Że AD jest prostopadłą do AB, wynika to z własności trójkąta prostokątnego, którego dwie przyprostokątne AC i AB mają długości 3 i 4 jednostek, czyli suma ich kwadratów wynosi $9 + 16 = 25$, a zatem przeciwprostokątna mieć musi długość 5. Takie krótkie prostopadłe najlepiej jest tyczyć za pomocą dwóch taśm mierniczych, przyjmując za jednostkę miary n. p. 2 metry. Ujmując taśmę na sześciu metrach, kierujemy tyczkę przytrzymaną w jej punkcie początkowym, dokładnie w linię AB. Pomocnik, stojący w punkcie C, trzyma zarazem za koniec drugiej taśmy, drugi zaś pomocnik ujmuje pierwszą taśmę w punkcie $3 \times 2 + 4 \times 2 = 14$ m, a drugą w punkcie $2 \times 5 = 10$ m — wyciągnąwszy obie taśmy tak, by oba punkty powyższe się zeszły, otrzymamy punkt D. Nieco dłuższą prostopadłą wytyczymy przyjąwszy za jednostkę 3 lub 4 m.

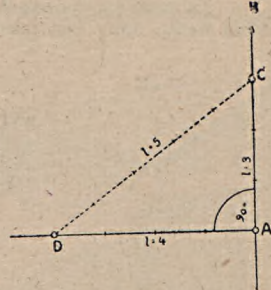


Fig. 12.

Do tyczenia prostopadłych, o długości do 40 m, służą następujące przyrządy:

a) Węgielnica z zwierciadłana.

Przyrząd ten (fig. 13) polega na znanem prawie optyki, że kąt padania promienia światła równa się kątowi odbicia. Konstrukcja przyrządu jest prosta i łatwa do zrozumienia już z rysunku. Główną część stanowią tu dwa podłużne zwierciadła, umocowane na ścianach bocznych metalowego pudełka od przodu otwartego i mającego okienka nad zwierciadłami, nachyleni ku sobie pod kątem 45° .

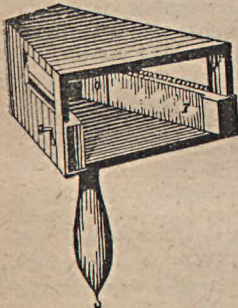


Fig. 13.

Zasadę urządzenia objaśnia fig. 14, mianowicie:

Przyjmujemy, że linie AB i AC przedstawiają poziomy przekrój powierzchni zwierciadeł, nachylenych do siebie pod α .

Promień światła, wychodzący z punktu P, pada na zwierciadło AB w punkcie B — tworząc z prostopadłą doń γ , odbija się następnie pod tym samym kątem i pada na drugie zwierciadło, w punkcie C pod kątem β , odbija się od niego i dochodzi do oka, znajdującego się na kierunku CQ. Skutkiem tego oko widzi obraz punktu P w przedłużeniu linii CQ. Promień padający i odbity tworzą ze sobą kąt φ który,



Fig. 14.

jako kąt zewnętrzny trójkąta BCD równy jest sumie dwóch kątów wewnętrznych nieprzyległych, czyli:

$$\varphi = 2 (\gamma + \beta) \dots \dots \dots (1)$$

Z trójkąta zaś ABC otrzymujemy:

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ \dots \dots \dots (2)$$

a równocześnie, uwzględniając konstrukcję rysunku, t. j. prostopadłe

$$\text{podania mamy: } \alpha_1 = 90^\circ - \gamma \text{ i } \alpha_2 = 90^\circ - \beta \dots \dots \dots (3)$$

wstawiwszy w równ. 2 wartości α_1 i α_2 z równ. 3 — dostaniemy:

$$\alpha + 90 - \gamma + 90 - \beta = 180^\circ \text{ czyli: } \alpha = \beta + \gamma \text{ lub } 2\alpha = 2(\beta + \gamma) \dots \dots \dots (4)$$

Porównawszy 1) z 4) otrzymamy:

$$\varphi = 2\alpha \dots \dots \dots (5)$$

*

t. j. kąt, jaki tworzy promień padający na pierwsze zwierciadło, z promieniem odbitym od drugiego, jest dwa razy większy, niż kąt nachylenia obu zwierciadeł.

Jeżeli więc $\alpha = 45^\circ$, to $\varphi = 90^\circ$, gdy $\alpha = 30^\circ$, to $\varphi = 60^\circ$ i t. p.

Tyczenie kąta odbywa się w następujący sposób:

Za pomocą tyczek M i N (fig. 15) wyznaczony jest kierunek linii prostej, na której nadto dany jest punkt A, w którym mamy wytyczyć prostopadłą. Ustawiamy węgielnicę nad punktem A w ten sposób, by pion, zawieszony u niej, znajdował się dokładnie nad wierzchołkiem. Teraz posyła się pomocnika z tyczką w kierunku mniej więcej prostopadłym, n. p. na punkt P₁.

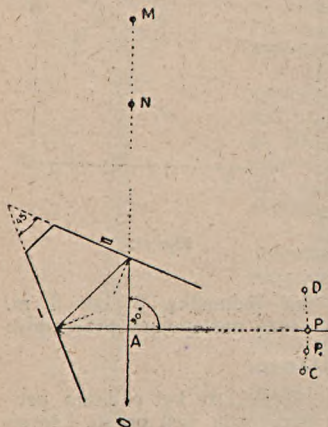


Fig. 15.

Wówczas promień od tyczki P₁ odbity, pada na zwierciadło I, odbija się od tegoż a następnie od II. i dochodzi do oka, które widzi obraz tyczki w przedłużeniu promienia odbitego od zwierciadła II., a równocześnie przez otwór nad tym zwierciadłem widzi też tyczkę N. Jeżeli obraz w zwierciadle nie schodzi się z widzianą tyczką N, wówczas pomocnik posuwa się po linii poprzecznej CD — aż dojdzie do punktu P — t. j. do tego punktu, na którym ustawiona tyczka daje w zwierciadle II, obraz będący dokładnym przedłużeniem widzianej przez otwór tyczki N. Wówczas kierunek AP jest prostopadłym do AN, jeżeli kąt nachylenia obu zwierciadeł wynosi 45° .

W rzeczywistości jednak kąt prosty nie będzie dokładnie wyznaczony. Z rys. 14 widać, że punkt A, w którym promień padający przecina się z odbitym, jest właściwie wierzchołkiem kąta prostego i ten punkt powinien znajdować się nad punktem A (w fig. 15). Położenie punktu A jest zmienne, zależnie od punktów B i C, gdy tymczasem węgielnicę ustawiamy zawsze w jeden i ten sam sposób, jak gdyby punkt A był stałym. Błąd stąd pochodzący jest na szczęście bardzo mały. Inny znów błąd popełnia się skutkiem tego, że oko widzi równocześnie i obraz w zwierciadle i tyczkę N odległą kilkadziesiąt m; musi się więc natężyć, co jest przyczyną nowego błędu. Sprawdzając kąty, tyczone tą węgielnicą, zapomocą precyzyjnego instrumentu, przekonano się, że przeciętny błąd wytyczonego kąta wynosi około 1', czemu odpowiada przesunięcie punktu P o 11 mm jeżeli AP = 40 m. Dłuższych prostopadłych nie powinno się tym przyrządem wytyczać.

Tą samą węgielnicą możemy wykonać inne zadanie, mianowicie znaleźć rzut punktu P (fig. 16) na kierunek MN, jeżeli zwierciadła są nachylone pod kątem 45° , t. j. węgielnica urządzona jest do tyczenia kątów prostych.

Ustawiając węgielnicę w sposób na rysunku wskazany, posuwamy się powoła po linii MN, patrząc na tyczki przed nami stojące przez otwór nad zwierciadłem. Podczas tego widzimy, jak obraz tyczki P przesuwają się w zwierciadle, zbliżając się coraz bardziej ku tyczce N, aż wkońcu stanie się jej przedłużeniem. W tym punkcie stanie węgielnica na wierzchołku kąta prostego N A P, czyli punkt A będzie rzutem punktu P na kierunek MN.

Jeżelibyśmy mieli wytyczyć inny kąt, n. p. 60° , a raczej znaleźć jego wierzchołek, to użyjemy węgielnicy, mającej zwierciadła nachylone pod kątem 30° — zresztą postępować będziemy w ten sam sposób.

b) Krzyż zwierciadlany.

Przyrząd ten składa się z dwu zwierciadeł, umieszczonych w odpowiedniej oprawie, leżących ponad sobą pod kątem prostym. Na przedłużeniu linii skrzyżo-

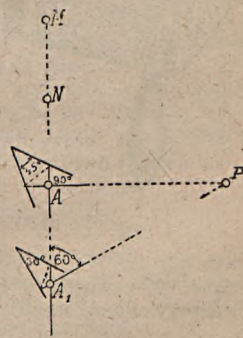


Fig. 16.

wania obu zwierciadeł, u dołu, znajduje się rękojeść z uszkiem do zawieszania pioną, lub tulejka do nasadzania przyrządu na tyczkę wbitą w ziemię. Krzyża zwierciadłanego używa się do tyczenia kąta 180° , względnie do wyznaczenia punktów pośrednich na prostej.

Przypuśćmy, że dany jest kierunek AB (fig. 18), zaznaczona w polu zapomocą dwu tyczek A i B , wyznaczyć zaś mamy punkt pośredni. Jeżelibyśmy z przyrządem tak stanęli na linii AB , że linia AB przechodziłaby przez pion, t. j. przez skrzyżowanie zwierciadeł, to obraz tyczki A ujrzymy w tejże linii skrzyżowania E w zwierciadle I, zwróconem ku tyczce. Promień AE pada na zwierciadło I, pod kątem α do prostopadłej padania, którą w tym wypadku jest ślad płaszczyzny zwierciadła i odbija się od niego pod tym samym kątem, dostając się do oka leżącego na kierunku EA' . Równocześnie obraz tyczki B znajdzie się w zwierciadle II, także na linii skrzyżowania, padając i odbijając się od zwierciadła pod kątem β — do prostopadłej padania, którą tu znów jest ślad płaszczyzny zwierciadła I. i dochodzi do oka także na linii EA' . Obydwa przeto obrazy w obu zwierciadłach leżą ponad sobą i przedłużają się nawzajem, nie zmieniając położenia podczas małych ruchów przyrządu około osi pionowej.

Jeżeli jednak przyrząd nie znajduje się na linii AB , jak to wskazano na fig. 19, to w zwierciadle I. utworzy się obraz tyczki A , który widzimy w A' i podobnie drugi obraz tyczki B , ujrzymy osobno w B' — obrazy więc nie schodzą się na jednej pionowej. Dopiero, przesuując przyrząd w kierunku poprzecznym do AB , spostrzeżemy, że obrazy obu tyczek coraz więcej się zbliżają, aż w końcu znajdują się w jednej pionowej. Wówczas pion, zawieszony u dołu przyrządu, wyznacza na terenie punkt na linii AB .

Gdyby konstrukcja przyrządu była fałszywa, t. j. zwierciadła nie krzyżowałyby się pod kątem prostym, to rzecz prosta, musielibyśmy otrzymać fałszywe rezultaty. Węgielnicę tę sprawdzimy najłatwiej w następujący sposób: Wyznamy na terenie 3 punkty linii prostej, wytyczając ją dokładnie. Nad środkowym punktem nastawimy teraz węgielnicę. Jeżeli obrazy dwu tyczek stojących na końcach odcinka nie schodzą się w jednej pionowej, wówczas należy zapomocą odpowiednich śrubek poprawić nachylenie zwierciadeł i znowu sprawdzać, dopóki nie dostaniemy pożądanego rezultatu.

c) Węgielnica przyzmatyczna pojedyncza.

Jest to przyzmat szklany, w odpowiedniej oprawie metalowej, widocznej w rysunku. U dołu wśrubowana jest rączka z kołkiem do zawieszania pioną. Przyzmat jest w przekroju poziomym trójkątem prostokątnym, równoramiennym. Sciana naprzeciw kąta prostego jest zwierciadłem. Przyjmijmy, według fig. 21, że na przyprostokątnej CC , pada promień AB — pod kątem α do prostopadłej padania. Promień

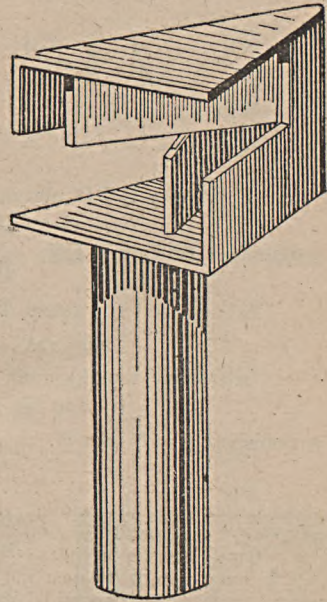


Fig. 17.

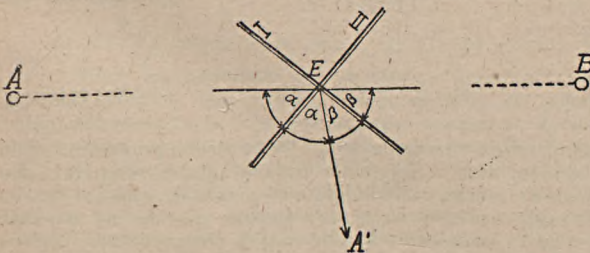


Fig. 18.

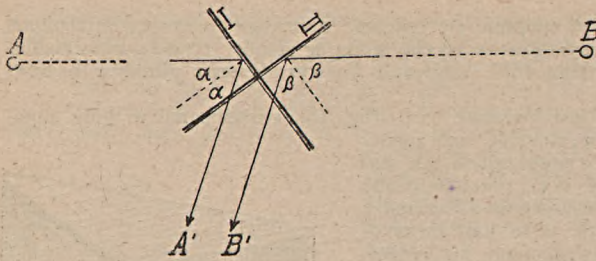


Fig. 19.

światła, wchodząc z powietrza w szkło, t. j. w środek gęstszy, załamuje się ku prostopadłej, zatem pod kątem β mniejszym niż α — w punkcie D natrafia na zwierciadło, odbija się i dochodzi do drugiej przyprostokątnej w punkcie E, tworząc z prostopadłą padania kąt δ . Wychodząc z pryzmatu, załamuje się znów od prostopadłej, t. j. pod kątem ϵ .

Z trójkąta BCD otrzymamy

$$45^\circ + (90 + \beta) + \gamma = 180^\circ \dots (1)$$

podobnie z trójkąta DEF

$$45^\circ + (90 + \delta) + \gamma = 180^\circ \dots (2)$$

$$\text{zatem } 45^\circ + 90 + \beta + \gamma = 45^\circ + 90 + \delta + \gamma \dots (3)$$

$$\text{stąd zaś } \beta = \delta \dots (4)$$

Nazwijmy współczynnik załamania przez n

$$\text{to } \sin \alpha = n \cdot \sin \beta = \sin \epsilon = n \cdot \sin \delta \dots (5)$$

a ponieważ $\beta = \delta$ więc i

$$\alpha = \epsilon \dots (6)$$

Z rysunku zaś widać, że kąt φ t. j. kąt, jaki tworzą promienie AB i EG, jest równy $90 + \alpha + \epsilon$

$$\text{czyli } \varphi = 90 + 2\alpha \dots (7)$$

Z fig. 22 zaś widocznem jest, że jeżeli promień pada z przeciwnej strony prostopadłej,

$$\text{to } \varphi = 90 - 2\alpha \dots (8)$$

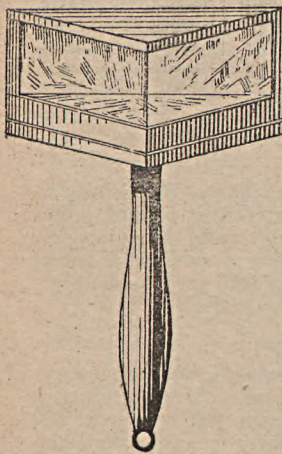


Fig. 20.

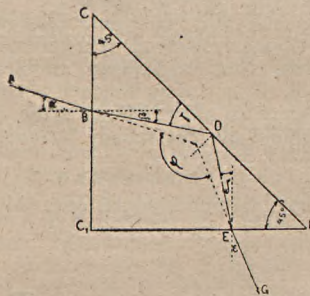


Fig. 21.

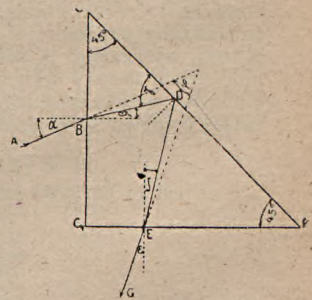


Fig. 22.

Zmianę kąta α wywołamy przez obracanie w tę i tamtą stronę pryzmatu, około osi pionowej — a ponieważ zmiana kąta α wywołuje zmianę kąta φ , więc też oko będzie widziało w pryzmacie obraz tyczki, zmieniający swe położenie, chociaż tyczka nie zmienia swego stanowiska; gdy nadto, w powyższy sposób nie da się uzyskać dla φ wartości stałej 90° — więc to urządzenie byłoby wogóle nieprzydatne. Dopiero Bauerfeind wskazał w r. 1851. sposób odpowiedniego zastosowania tego pryzmatu, mianowicie:

Niech trójkąt BAC przedstawia przekrój pryzmatu (fig. 23), a linia PR , promień padający blisko krawędzi A , pod kątem α do prostopadłej padania. Promień ten, wchodząc w pryzmat załamie się, tworząc z prostopadłą kąt β , dojdzie do punktu D , odbije się całkowicie wewnątrz i w punkcie E natrafi na zwierciadło, padając nań pod kątem γ , odbija się i przychodzi do punktu F na przyprostokątnej, blisko krawędzi C . W końcu wychodzi z pryzmatu w kierunku FS , tworząc z kierunkiem PR kąt φ .

Z trójkąta $EF C$ otrzymamy:

$$(90^\circ - \gamma) + (90^\circ - \delta) + 45^\circ = 180^\circ \dots \dots \dots (9)$$

a z trójkąta DEC :

$$\beta + (90 + \gamma) + 45^\circ = 180^\circ \dots \dots \dots (10)$$

z równania 9 wynika, że $\gamma + \delta = 45^\circ \dots \dots \dots (11)$

a „ „ 10 „ „ $\gamma + \beta = 45^\circ \dots \dots \dots (12)$

stąd zaś, że $\delta = \beta \dots \dots \dots (13)$

ponieważ $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$, więc dla tych samych materiałów musi być $\frac{\sin \delta}{\sin \epsilon} = \frac{1}{n}$ zatem

$$\frac{\sin \epsilon}{\sin \delta} = n \dots \dots \dots (14)$$

czyli $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \epsilon}{\sin \delta} \dots \dots \dots (15)$

uwzględniając teraz równ. 13, łatwo wydedukujemy,

$$\text{że } \sin \alpha = \sin \epsilon \text{ czyli } \alpha = \epsilon \dots \dots \dots (16)$$

$$\text{a więc } \varphi = 90^\circ \dots \dots \dots (17)$$

Warunkiem odpowiedniego celowi używania przyrządu jest, by go tak ustawić, ażeby promień padał blisko krawędzi A , oko zaś szukać ma obrazu blisko krawędzi C . Jeżeli, wykonując małe obroty około osi pionowej, widzimy obraz zawsze w tym samym miejscu, to jest znakiem, że przyrząd był dobrze ustawiony. Wówczas też promień, padający i wychodzący z pryzmatu, tworzą ze sobą kąt prosty. Równocześnie widzimy przez otwór nad pryzmatem tyczkę stojącą przed nami, której przedłużeniem będzie obraz tyczki leżącej na linii prostopadłej, pryzmat zaś znajduje się na wierzchołku kąta prostego.

Działanie przyrządu polega więc, jak to widać z konstrukcji, na tem, że promień PR załamuje się w pryzmacie, tworząc kąt β tak mały, że już wyjść z pryzmatu nie może, lecz musi się całkowicie odbić. Jest to rzecz znana z fizyki i dłużej nad nią zastanawiać się nie możemy.

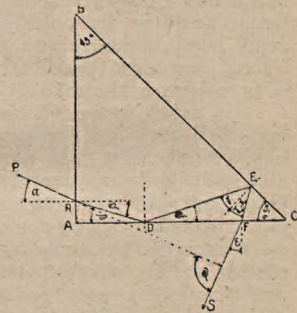


Fig. 23.

d) Krzyż pryzmatyczny, czyli pryzmat Bauerfeinda (fig. 21).

Służy on, podobnie jak węgielnica krzyżowa zwierciadlana, do tyczenia pośrednich punktów wzdłuż linii prostej. Składa się z dwóch pojedynczych pryzmatów tak nad sobą ustawionych, że ściany przeciwprostokątne są do siebie prostopadłe. Jeżeli pryzmat znajduje się na prostej, między punktami $A-B$ (fig. 25), to obrazy obu tyczek, jakie się utworzą w pryzmatach I. i II., znajdą się nad sobą, przedłużając się nawzajem. Chcąc przeto wyznaczyć punkt pośredni na prostej danej na terenie, posuwać się będziemy z pryzmatem w kierunku poprzecznym do linii $A-B$, dopóki obrazy tyczek w obu pryzmatach nie zejdą się. Oko ujrzy wówczas obraz obu tyczek, schodzących się w jednej pionowej, na promieniu w kierunku D , a pion zawieszony u pryzmatu wyznaczy żądany punkt na terenie.

Pryzmat krzyżowy da się łatwo sprawdzić w sposób pod b) opisany, za pomocą zaś odpowiednich śrubek można położenie pryzmatów uregulować. Pojedyncze pryzmaty muszą już z fabryki wyjść dobre.

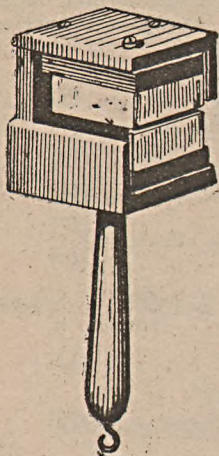


Fig. 24.

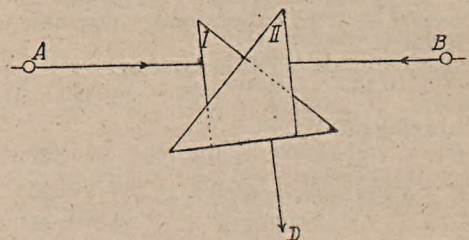


Fig. 25.

e) Węgielnica bębenkowa.

Jest to zazwyczaj wałek lub graniastosłup ośmioboczny, wewnątrz pusty, opatrzony u dołu tulejką do nasadzania na krótką tyczkę, wbity w ziemię. W bocznych ścianach znajdują się podłużne otwory, mianowicie, otwór wąziutki, t. zw. okular, naprzeciw niego zaś szerszy otwór, zwany obiektywem, w którym naciągnięty jest wzdłuż, pionowo, włos. Okular, przez który patrzymy, i przeciwny włos, wytyczają linię, drugą zaś, prostopadłą do poprzedniej, wytyczają takie same otwory w innych ścianach. Węgielnica zwykle jest też urządzona i do wytyczania kątów 45° . Z rysunku widać także, że pod każdym okularzem znajduje się obiektyw, na przeciwnej zaś do nich ścianie, odwrotnie. Możemy więc, zachodząc na przeciwną stronę, wytyczać przedłużenie linii w przeciwnym kierunku.

Chcąc wytyczyć w danym punkcie jednej linii, prostopadłą do niej, umieszczamy nad nim węgielnicę, wbijając zazwyczaj tyczkę, na której przyrząd jest nasadzony, w ziemię i ustawiamy ją za pomocą pionu we właściwym położeniu. Następnie obraca się węgielnicę, patrząc przez okular, tak, by włos padał na środek tyczki B. Wreszcie przychodzimy do okularu, leżącego w płaszczyźnie o 90° obróconej względem pierwszej, i patrząc przezzeń, kierujemy pomocnika, aż stanie w punkcie C, leżącym w linii, wyznaczonej przez okular i włos. Jedną i drugą linię możemy też łatwo przedłużyć w przeciwnie strony w ten sam sposób.



Fig. 26.

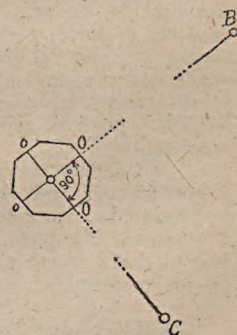


Fig. 27.

f) Węgielnica krzyżowa.

Już z rysunku widocznym jest, że węgielnicę tę zbudowano na tej samej zasadzie jak bębenkową. Różnica polega tylko w konstrukcyi, tudzież w tem, że odległości między obiektywem a okularzem są większe, czyli, że i tyczenie tym przyrządem będzie dokładniejsze.

§ 4. Sprawdzenie i rektyfikacja węgielnic.

Ażeby sprawdzić, czy węgielnica jest dobrą, t. j. czy za pomocą niej da się wytyczyć dość ściśle ten właśnie kąt, dla którego jest urządzona, postępujemy w następujący sposób:

Przyjmijmy, że węgielnica jest urządzona do tyczenia kątów prostych; wytyczmy w pierw prostą ABC (fig. 29), za pomocą trzech tyczek w odległości około 50 m jedna od drugiej. Ustawmy węgielnicę w punkcie środkowym B i wytyczmy rzekomy kąt prosty ABD . Teraz wytyczmy drugi raz ten sam kąt od linii BD — zatem DBE . Jeżeli węgielnica byłaby dobrą, to punkt E musiałby zejść się z punktem C . W danym jednak wypadku, oba punkty nie zeszły się, czyli, że dwukrotne wytyczenie kąta prostego, nie dało kąta 180° lecz mniejszy. Łatwo więc zrozumieć, że błąd węgielnicy wynosi połowę kąta CBE i o tyleż należy konstrukcję jej poprawić. Niektóre węgielnice, jak zwierciadlane lub bębnowe, dadzą się za pomocą odpowiednich śrubek zrektyfikować. Inne, n. p. pryzmatyczna, poprawić się nie da.

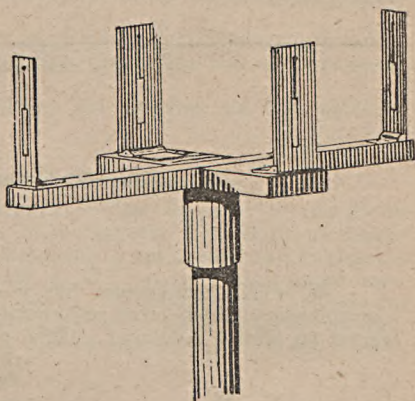


Fig. 28.

ROZDZIAŁ III.

Pomiar długości.

§ 1. Przyrządy do mierzenia długości.

1. Łata miernicza

służy do najdokładniejszych pomiarów długości. Jest to beleczka od 3 do 5 m długa, o przekroju kwadratowym, czasami okrągłym lub eliptycznym, w środku 35 do 40 mm grubości, przy obu końcach około 25 mm tak, by podparta na obu końcach, nie ugięła się pod własnym ciężarem. Zwykle do sporządzenia takiej łaty używa się drzewa jodłowego, bez sęków, zabezpieczając ją od wilgoci pomalowaniem olejną farbą, przyczem znaczą się całe metry naprzemian czerwoną i białą farbą, prócz tego decymetry. Drobniejsze części odczytuje się za pomocą przyłożenia dokładnej podziałki. Końce łaty powinny być bardzo troskliwie okute metalem, a nadaje się im albo segmentowy kształt, albo płaskich ostrzy według fig. 30.

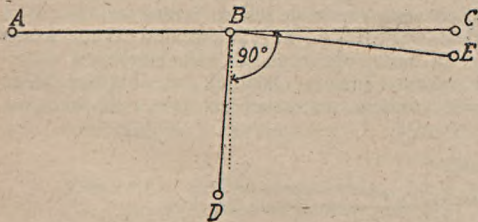


Fig. 29.

Fig. 31 przedstawia łatę mierniczą, 5 m długą, na której poszczególne metry są oznaczone odmienną barwą, decymetry zaś małymi główkami gwoździ.

W terenie równym i poziomym mierzy się długość linii prostej za pomocą dwu łat, w następujący sposób: Linie prostą należy wytyczyć i oznaczyć palikami w odstępach około 40 m. Od palika do palika wyciąga się sznur, ażeby kierunek jak najdokładniej wyznaczyć i ułatwić układanie łat. Do mierzenia używa się dwóch pomocników, z których pierwszy będzie przykładał i liczył nieparzyste, drugi pa-

rzyste łątę. Łatę układa się wzdłuż sznura, dokładnie w danym kierunku; następnie drugi pomocnik przykłada drugą łątę, stykając ją lekko z końcem pierwszej, przyczem pierwszy kieruje ją w linię. Teraz pierwszy pomocnik odejmuje swoją łątę, wymawiając głośno: „pierwsza“ lub „piąta“ i t. p., przenosi ją i przykłada do poprzedniej. Drugi pomocnik postępuje tak samo ze swoją łątą. Liczy się głośno, zawsze już po odjęciu łąt.



Fig. 30.



Fig. 31.

W terenie pochylonym lub w ogóle falistym, pomiar jest daleko trudniejszy i mozolniejszy. Jeżeli teren jest równy i jednostajnie pochylony, to można mierzyć wprost po terenie redukując później pomiar na poziom, mianowicie, mnożąc pomierzoną długość przez cos kąta nachylenia terenu. Zatem rzeczywista długość L w poziomie wynosić będzie:

$$L = L_1 \cdot \cos \alpha$$

jeżeli L jest pomiarem po terenie, zaś α kątem nachylenia terenu, do poziomu.

Do pomiaru kąta nachylenia używa się przyrządu, łatwo zrozumiałego z rysunku 32.

Jest to drewniany trójkąt, mający na łuku podział kątowy, u wierzchołka zaś zawieszony jest na osi pion. Jeżeli podstawę trójkąta umieścimy na pochylej podporze, to pion wychyli się i wskaże kąt nachylenia podstawy.

W normalnym położeniu, gdy podstawa jest pozioma, pion wskazuje O . Odczyt kąta, z dokładnością $10'$ jest zupełnie wystarczający.

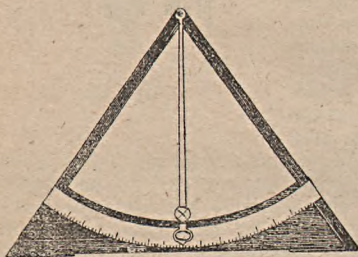


Fig. 32.

Jeżeli teren jest niejednostajnie pochylony, pomiar zaś ma być wykonany precyzyjnie, to koniecznym będzie wykonanie rusztowania według fig. 33.

Rusztowanie urządza się z palików wbitych w ziemię i prostych łąt, o przekroju prostokątnym 4×6 cm, przybitych z boku gwoździami do palików, w położeniu poziomem. Paliki powinny być wbijane nie rzadziej jak w 3 metrowych odstępach. Jeżeli rusztowanie w dolnym końcu wznosi się już $1:20$ m nad teren, wtedy przerywa się je i urządza drugie niżej, jak wskazuje rysunek. Po zupełnym wykonaniu pomiaru według reguł, o których mówić będziemy później, na długości 50 do 100 m, jeżeli rozchodzi się o oszczędność, można, uważając już tę część jako po-



Fig. 33.

mierzoną, rozebrać rusztowanie i użyć je w dalszym ciągu. Samo przez się rozumie się, że całe rusztowanie powinno być jak najdokładniej, w prostym kierunku zbudowane.

Pomiar wykonujemy w tym wypadku tak, jak na poziomym terenie. Od czasu do czasu jednak nie będziemy mogli przykładać łąt bezpośrednio do siebie, lecz pod

sobą. Do dokładnego ułożenia końców łań w linii pionowej używa się zwykle pionu, na cienkim, jedwabnym sznurku. Używa się też pionowo ustawianych za pomocą pudełkowej libeli łań, a nawet specjalnych instrumentów. Tego rodzaju pomiary, stosowane tylko przy bardzo dokładnie mierzonych podstawach tryangulacyjnych, są bardzo rzadkie. Częściej trafia się pomiar łańami, właśnie w trudniejszych warunkach, przy wytyczaniu dłuższych mostów konstrukcji żelaznej, a raczej przy wytyczaniu osi filarów i przyczółków.

Zazwyczaj mieć tam będziemy i teren niejednostajnie połaďowany i wodę; ponieważ zaś pomiar musi być dokładny, więc bez urządzenia opisanego powyżej rusztowania, wykonać się nie da.

Pomiar łańami, jak to widać z poprzedniego, jest żmudny, ale też najdokładniejszy ze wszystkich innych sposobów.

2. Stalowa taśma miernicza.

Zajmuje ona drugie miejsce po łańce mierniczej. Jest to pasek 20 do 25 m szerokości, z miękkiej stali, zwykle 10, 20 lub 25 m długości, podzielony na metry i decymetry. Metry oznaczone są mosiężnymi blaszkami z numerami, co 5 m blaszka jest większa; decymetry oznaczają wybite dziurki, co 0.5 jest znów mały guzik mosiężny. Zakończenie taśmy przedstawia fig. 33; jest to rękojeść mosiężna, służąca do wyciągania taśmy, opatrzona rowkiem, który przykładą się do wbitej w ziemię szpilki, t. j. druta, 5 mm grubego, do 30 cm długiego, ostro zakończonego u dołu, u góry zaś mającego ucho.

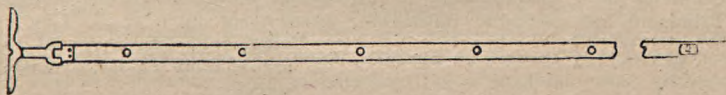


Fig. 34.

Pomiar wykonuje się jedną taśmą, wyciągniętą po terenie w danym kierunku. Po wyciągnięciu taśmy, wbija się przy końcu szpilkę, potem przenosi się ją dalej, przykładą do szpilki, wyciąga, wbija się przy drugim końcu szpilki, pierwszą się wyjmując i t. d. Ilość szpilek wyjętych z ziemi i trzymany przez pierwszego pomocnika, oznacza ilość przyłożonych taśm. W terenie płaskim i poziomym pomiar jest łatwy i dokładny. W terenie jednostajnie pochylonym, o znanym kącie nachylenia, można łatwo zredukować pomiar po terenie na poziom, tak samo, jak przy pomiarze łańami, t. j. $L = L_t \cdot \cos \alpha$.

Natomiast w terenie różnie połaďowanym, musi się taśmę podtrzymywać w powietrzu i wyciągać na oko poziomo. Wówczas używa się wprawdzie tylko 5 lub 10 m długich taśm, koniec taśmy odrzuca się za pomocą pionu na teren, lecz przy tem jest tak wiele sposobności do przesunięć, do niedokładnych przyłożeń i t. p., prócz ugięcia się taśmy, że wszystko to powoduje błędy w pomiarach, nieraz znaczne.

Przy zmianach temperatury musi się zmienić i długość taśmy. Zwykle podział taśm urządza się w fabryce w taki sposób, że odpowiada on temperaturze 15° C. Jeżeli współczynnik rozszerzalności dla 1 m przy powiększeniu ciepłoty o 1° C wynosi α , to długość l ogrzana o t ° C wyniesie

$$l_t = 1 + l \alpha t = 1(1 + \alpha t) \dots \dots \dots (1)$$

Odwrotnie, znając temperaturę, przy której taśmę sporządzono i podzielono (15° C.) i temperaturę w czasie pomiaru, obliczymy rzeczywistą długość taśmy w danej chwili według równania 1. (uwzględniając dodatnie lub ujemne „ t “) — albo zredukujemy pomiar w temperaturze „ t “, t. j. L_t na rzeczywistą wartość L , według wzoru

$$L = \frac{L_t}{1 + \alpha t} \dots \dots \dots (2)$$

pomnóżmy tu licznik i mianownik przez $(1 - \alpha t)$, to otrzymamy

$$L = \frac{L_t (1 - \alpha t)}{1 - \alpha^2 t^2} \dots \dots \dots (3)$$

Ponieważ α jest ilością bardzo małą, przeto $\alpha^2 t^2$, jako ilość bardzo małą drugiego rzędu, możemy opuścić, a wówczas wzór 3. będzie miał kształt

$$L = L_t (1 - \alpha t) \dots \dots \dots (4)$$

jako wzór, służący do redukcji pomiaru.

Przyjawszy długość taśmy $l = 20$ m i współczynnik $\alpha = 0.0001079$ dla miękkiej stali, obliczymy, że przy zmianie temperatury

- o 10° C. długość taśmy zmieni się o 2.15 mm
- o 20° C. " " " " o 4.30 mm
- o 30° C. " " " " o 6.45 mm.

Zmiany te są w ogóle małe i, jak o tem później będziemy mówili, mieszczą się w granicach błędów pomiaru tak, że tylko w szczególnych wypadkach uwzględnić będziemy wpływ temperatury.

3. Inne przyrządy.

Prócz powyższych dwóch najważniejszych, używa się także taśmy płóciennej, z wkładkami z mosiężnych drutów, dalej: sznura od 20 do 50 m długiego, koła mierniczego, wreszcie można mierzyć krokami lub wnosić o odległości z czasu marszu. Wszystkie te jednak narzędzia i sposoby są już mało dokładne, podrzędne, tak, że do pomiarów, we właściwym ich znaczeniu, nie są używane.

4. Sprawdzanie śródwagi.

Jak już poprzednio mówiliśmy, do pomiaru kąta nachylenia terenu przy pomiarze łałami, lub do ułożenia łał poziomo, używa się śródwagi, za pomocą której zmierzyć można kąt z dokładnością $10'$. Śródwaga powinna być tak skonstruowana, ażeby, ustawiona na poziomej podstawie, wskazywała kąt $0^\circ 0' 0''$. Czy śródwaga

odpowiada stawianym jej warunkom, przekonamy się łatwo w następujący sposób:

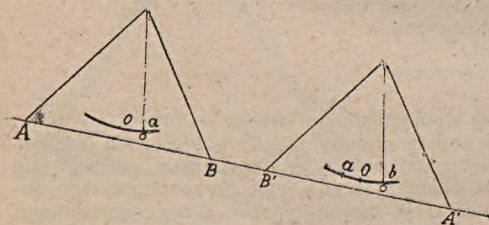


Fig. 35a i 35b.

Ustawiamy śródwagę na dowolnie pochylonej płaszczyźnie, n. p. stole i zaznaczamy punkt „a”, jaki wówczas wskazuje pion; następnie obracamy ją w temsamem miejscu (fig. 35a i 35b i zaznaczamy położenie piona w punkcie „b”. Punkty a i b powinny leżeć po obu stronach punktu zerowego, w równym od niego odaleniu. W przeciwnym razie należy podziałkę odpowiednio przesunąć.

5. W następnej tabeli podano jako przykład, protokół z pomiarów długości, taśmą i łałami. Mierzono w poziomej podwójnie, raz od punktu początkowego do końcowego i w przeciwnym kierunku.

Tabela 4.

Mierzona odległość		Ilość całych		Uzupełnienie długości	Całkowita odległość	Różnica	Średnia odległość	Uwaga
od punktu	do punktu	taśm 20 m	łał 4 m					
1	2	7	—	19.720	159.72	1.0	159.725	
2	1	7	—	19.730	159.73			
2	3	7	—	12.125	152.125	0.5	152.127	
3	2	7	—	12.130	152.130			
3	4	9	—	1.18	181.18	4.0	181.16	
4	3	9	—	1.14	181.14			
4	1	8	—	12.91	172.91	2.0	172.925	
1	4	8	—	12.93	172.93			
7	8	—	20	1.33	81.33	1.0	81.335	
8	7	—	20	1.34	81.34			

§ 2. Wyrównanie błędów pomiaru.

Każdy pomiar: czy to długości, czy wysokości, lub kąta, nazywamy spostrzeżeniem. W praktyce nie można nigdy znaleźć tak idealnych warunków do wykonania zamierzonych pomiarów, jakie teoria przypuszcza, lecz zawsze zależni jesteśmy od rozlicznych wpływów, nie dających się usunąć.

Mimo n. p. największej staranności, nie ułożymy nigdy łań idealnie dokładnie w żądanym kierunku, lecz w jakiejś linii łamanej, skutkiem czego wynik pomiaru będzie za wielki. Wprost znów przeciwnie wpływa na rezultat niedokładne przykładanie łań do siebie, czy to skutkiem tego, że między końce łań dostaną się choćby bardzo drobne przedmioty, czy też skutkiem samego przykładania — rezultat pomiaru będzie wówczas za mały.

Takie błędy, wywołane jakimiś, zewnętrznymi, od nas niezależnymi wpływami, nazywamy błędami nieregularnymi. Mogą one po części znosić się nawzajem, jak n. p. oba poprzednio opisane błędy, po części zaś sumować się, gdy n. p. obok błędu w kierunku przykładania łań, popełniamy błąd skutkiem niedokładnego w poziomie układania ich — te dwa błędy będą się sumowały.

Obok powyższych powstać jeszcze mogą t. zw. błędy grube, n. p. wskutek opuszczenia przy liczeniu jednej lub więcej taśm lub łań, albo też wskutek złego odczytu długości. Takie błędy są łatwe do skonstatowania i wyeliminowania. Każdy bowiem pomiar wykonywa się co najmniej dwa razy. Przy porównaniu więc obu wyników, spostrzeżemy natychmiast, w oczy się rzucający, gruby błąd i naprawimy go, mierząc trzeci raz.

Inną kategorię tworzą znów błędy regularne. Te zależą już od przyrządów, n. p. łań lub taśm użyta do pomiarów, jest o pewną ilość za długa lub za krótka, niż jej nominalna wartość. Błąd taki łatwo jest też wyrugować znając go, do czego potrzeba tylko sprawdzić dany przyrząd za pomocą porównania go z miarą normalną. Niektóre podobne błędy widzieliśmy już u węgielnic, inne poznamy przy opisie instrumentów optycznych.

Nazwijmy nominalną długość taśmy przez l_u , zaś jej rzeczywistą długość, otrzymaną przez sprawdzenie, przez l — to stosunek $\frac{l}{l_u} = r$ jest współczynnikiem, przez który należy wynik pomiaru, błędną taśmą wykonanego, pomnożyć, ażeby otrzymać pomiar wolny od tegoż błędu. N. p.: taśma nominalnie mierząca 20 m ma w rzeczywistości długość 20'10 m. Przykładając taką taśmę na pewnym odcinku raz po raz, otrzymamy rzecz prosta wynik za mały, bo taśma jest za długa. Jeżeli jednak wynik ten pomnożymy przez współczynnik $r = \frac{20'10}{20'00} = 1'005$, to wyeliminujemy zupełnie ów błąd regularny.

Inaczej jest z błędami przypadkowymi czyli nieregularnymi. Widzieliśmy już, że jedne błędy wpływają na drugie znosząc się, lecz nie mamy żadnej podstawy do twierdzenia, że skutkiem wzajemnego oddziaływania błędów, pomiar stał się zupełnie wolnym od nich, jak również, że błędy działają znowu ujemnie, sumując się. Dowodem będzie fakt, że mierząc n. p. pewną długość kilka razy, zawsze dostaniemy wyniki różne. Będą to wprawdzie różnice nawet bardzo małe, ale będą. Doświadczenie to wskazuje, że przecież działały tam i przeważały jakieś wpływy, a to każdym razem w różnym stopniu — dalej, na podstawie podobnych doświadczeń dojdziemy do wniosku, że prawdziwej długości mimo wszystko poznać nie jesteśmy w stanie, lecz tylko jej wartość przybliżoną i to tem więcej zbliżoną do prawdziwej, im dokładniej wykonany pomiar i im więcej mieć będziemy spostrzeżeń do oceny tej długości.

W niektórych wypadkach mamy ściśłą kontrolę pomiarów. Mierząc n. p. kąty w trójkącie, lub w zamkniętym wieloboku, możemy łatwo obliczyć popełniony błąd — jak go uwzględnić, to już jest rzeczą inną. Znamy tu bowiem sumę błędów a nie pojedyncze. Podobnie, niwelując od punktu A do B i z powrotem od B do A, powinniśmy dostać tę samą wysokość punktu A, gdy tymczasem dostaniemy inną. Mając kontrolę, znajdziemy sposób usunięcia błędów. Inaczej rzecz się ma przy pomiarach długości i zdjęciach, o ile nie odbywają w granicach oznaczonych przez punkty, których położenie zostało pierwiej ustalone. Ale przy ustalaniu położenia owych punktów, nie była dana kontrola w tem znaczeniu, jak n. p. przy pomiarze kątów w trójkącie, lecz dopiero trzeba ją było stworzyć za pomocą bardzo dokła-

dnych pomiarów. Takie same kontrole tworzyć sobie musimy przy naszych codziennych pomiarach, powtarzając spostrzeżenia i porównując je ze sobą.

Przypuśćmy, że mierząc pewną długość n razy, otrzymaliśmy n różnych wartości pomiarów. Spostrzeżenia te nazwijmy przez

$$l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad \dots \quad l_n$$

to na określenie prawdopodobnej wartości, mamy tylko jeden sposób, mianowicie średnią arytmetyczną z danych spostrzeżeń, t. j.

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \dots \dots \dots (1)$$

Uważając na razie x za prawdziwą wartość pomiaru, znajdziemy różnice między nią a poszczególnymi spostrzeżeniami. Różnice te (v) nazwijmy błędami pozornymi, w odróżnieniu od nieznanymi nam błędów prawdziwych. Zatem

$$\begin{aligned} x - l_1 &= v_1 \\ x - l_2 &= v_2 \\ x - l_3 &= v_3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x - l_n &= v_n \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Sumując ten szereg równań otrzymamy;

$$\begin{aligned} nx - (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n) &= v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n \\ \text{czyli } nx - [l] &= [v] \dots \dots \dots (3*) \end{aligned}$$

wstawmy za x wartość z równania 1, to

$$\begin{aligned} n \frac{[l]}{n} - [l] &= [v] \text{ czyli} \\ [l] - [l] &= [v] = 0 \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

Równanie 4. powiada, że algebraiczna suma błędów dąży do zera, czyli że błędy przypadkowe mają tendencję do wzajemnego zniszczenia się.

Wykonując pomiar tej samej długości n_1 razy, otrzymamy jakąś średnią arytmetyczną x_1 — podobnie z n_2 innych pomiarów, dostaniemy prawdopodobną wartość x_2 , różną od x_1 . Stąd wynika, że na oznaczenie długości tego samego odcinka znaleźć możemy wiele wartości, różniących się między sobą, każdą z nich jednak uważać można za prawdopodobną.

To doświadczenie i rozumowanie prowadzi do przekonania, że prawdopodobna wartość zawiera się w pewnych granicach, w których zmieniać się może bez uszczerbku dla dokładności pomiaru, czyli, że i ona mieć musi pewien błąd, t. zw. błąd średniej arytmetycznej. Granice dla błędów średniej arytmetycznej oznaczono doświadczalnie i przekraczać ich nie wolno. Teraz, zadaniem naszym jest wskazać sposób obliczania błędu średniej arytmetycznej, obliczonej z szeregu bezpośrednich spostrzeżeń, by następnie, na podstawie porównania obliczonego błędu, z błędem dozwolonym, wnioskować o dokładności pomiaru.

Dotychczas rozporządząmy szeregiem błędów pozornych $v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n$. Zdawałoby się, że najprościej będzie, utworzyć średnią arytmetyczną z tych błędów. Tymczasem, na przeszkodzie temu stoi równanie 4. $[v] = 0$. Można by jeszcze utworzyć błąd przeciętny t. zw. z bezwzględnych wartości v, t. j. opuszczając ich znaki, t. j.

$$\pm t = \frac{[\pm v]}{n} \dots \dots \dots (5)$$

lecz wówczas znak błędu przeciętnego $\pm t$ zależałby tylko od naszej woli, co znów nie odpowiada pojęciu o błędach nieregularnych, które są zarówno dodatnie jak ujemne i co z rachunku samo wynikać powinno. Ostatecznie, błąd przeciętny t

*) Klamer użyto tutaj na oznaczenie sumy odnośnych wyrazów, celem skrócenia.

według równania 5. nie charakteryzuje, jak widzimy, dokładności spostrzeżeń. Okaze się to z następującego przykładu:

$$\begin{array}{ll} l_1 = 100.01 \text{ m} & v_1 = L - l_1 = -1 \text{ cm} \\ l_2 = 99.90 \text{ „} & v_2 = L - l_2 = +10 \text{ „} \\ l_3 = 99.99 \text{ „} & v_3 = L - l_3 = +1 \text{ „} \\ l_n = 100.10 \text{ „} & v_n = L - l_n = -10 \text{ „} \\ \hline [l] = 400.00 \text{ m} & [v] = 0 \end{array}$$

$$L = \frac{[l]}{n} = \frac{400}{4} = 100.00 \text{ m}$$

Błąd przeciętny zaś byłby:

$$t = \frac{1 + 10 + 1 + 10}{4} = 5.5 \text{ cm} - \text{ze znakiem dowolnym, t. j. } \pm t = \pm 5.5 \text{ cm.}$$

Przyglądając się spostrzeżeniom, widzimy, że pojedyncze błędy są albo bardzo małe ± 1 cm, albo 10 razy większe, t. j. ± 10 cm. Błąd zaś przeciętny ± 5.5 cm wcale nic nie mówi ani nie wskazuje wpływu błędów pomiaru na wartość prawdopodobną. Dlatego, uwzględniając nadto dowolność znaku, brać go nie możemy w rachubę.

Powyższej trudności zaradził Gauss, wprowadzając na oznaczenie błędu średniego pojedynczego spostrzeżenia, kwadraty pojedynczych błędów. Równanie Gaussa opiewa:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n}} \dots (6)$$

gdzie m jest średnim błędem pojedynczego spostrzeżenia, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ są prawdziwymi błędami pojedynczych spostrzeżeń, n zaś jest ilością spostrzeżeń.

Średni błąd m ma dwa znaki $+$ albo $-$, co wynika z pierwiastkowania a zarazem odpowiada naszym pojęciom o błędach przypadkowych; nadto, ponieważ w rachunek wprowadzono kwadraty błędów, więc większe błędy będą skutkiem tego miały wybitniejszy wpływ na wynik, a że one mają również udział w tworzeniu prawdopodobnej wartości, więc słusznem jest, że i wybitniej wpływają na określenie jej błędu.

Zastosujmy teraz wzór 6. do poprzedniego przykładu, to:

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1^2 = 1 \\ \varepsilon_2^2 = 100 \\ \varepsilon_3^2 = 1 \\ \varepsilon_n^2 = 100 \\ \hline [v^2] = 202 \end{array} \quad m = \pm \sqrt{\frac{202}{4}} = \pm 7.1 \text{ cm}$$

Obliczony tu błąd ± 7.1 cm nazywa się średnim błędem pojedynczego spostrzeżenia.

Następujący przykład wzięty z dzieła: Jordan, Vermessungskunde II. Bd. § 4. pozwoli na porównanie przeciętnego błędu t i błędu średniego:

Dane są 2 szeregi błędów (bez względu na znaki):

$$\begin{array}{l} \text{I. } v = 5, 6, 2, 7, 3, 8, 10, 9, 3, 5 - [v] = 58 \quad [v^2] = 402 \\ \text{II. } v = 14, 3, 0, 0, 6, 20, 2, 2, 1, 10 - [v] = 58 \quad [v^2] = 750. \end{array}$$

Stąd dla obu szeregów $t = \frac{58}{10} = 5.8$ mimo, że pierwszy szereg wskazuje, że spostrzeżenia były daleko staranniej wykonane niż w drugim, gdzie obok 0 mamy błąd 20. Jasnym jest, że średni błąd w pierwszym wypadku powinien być mniejszy niż w drugim. Według Gaussa, dostaniemy:

$$m_I = \pm \sqrt{\frac{402}{10}} = \pm 6.34 \quad \text{tudzież} \quad m_{II} = \pm \sqrt{\frac{750}{10}} = \pm 8.66.$$

t. j. w drugim wypadku średni błąd pojedynczych spostrzeżeń jest większy, zupełnie racjonalnie i logicznie, gdyż tego samego spodziewaliśmy się, widząc już pojedyncze różnice, czyli błędy pozorne.

Jeżeli długość x , mającą średni błąd $\pm m$, pomnożymy przez a , to iloczyn $X = a \cdot x$ będzie miał średni błąd $M = \pm a \cdot m$ (7)

Powyższe twierdzenie możemy najwidoczniej udowodnić w następujący sposób: Przypuśćmy, że mierzymy jakąś długość taśmą, mającą błąd $+m$, t. j. o m za długą. Jasnym jest, że przykładając tę taśmę x razy, otrzymamy rezultat za mały o ilość a m. Podobnie, używając do pomiaru taśmy z błędem $-m$, otrzymamy rezultat za wielki o iloczyn a m. Czyli, mierząc taśmą, której długość jest o $\pm m$ niepewną, dostaniemy rezultat niepewny o ilość $M = \pm a$ m.

Przypuśćmy, że mamy dwa niezależne spostrzeżenia x i x' o średnich błędach $\pm m$ i $\pm m'$ i zapytajmy, jaki będzie błąd ich sumy?

Dodając rezultaty obu spostrzeżeń, otrzymamy $X = x + x'$. Skutkiem zesumowania obu rezultatów, wraz z zawartymi w nich błędami, otrzymamy następujące możliwości sumy błędów:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } M = +m + m' \\ \text{b) } M = -m - m' \end{array} \right\} \text{jako błędy największe,}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } M = +m - m' \\ \text{d) } M = -m + m' \end{array} \right\} \text{jako błędy najmniejsze.}$$

Rozchodzi się nam jednak o błąd średni. Pomyślmy sobie w tym celu, że tak x jak x' powstały z całego szeregu n spostrzeżeń, dla których x i x' są średnimi arytmetycznymi, czyli:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \dots \dots \dots (8)$$

$$x' = \frac{x_1' + x_2' + x_3' + \dots + x_n'}{n} \dots \dots \dots (9)$$

Z powyższych średnich arytm. x i x' tudzież z pojedynczych spostrzeżeń $x_1 \dots x_n$ i $x_1' \dots x_n'$ otrzymamy szereg błędów pojedynczych:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = x - x_1 & \varepsilon_1' = x' - x_1' \\ \varepsilon_2 = x - x_2 & \varepsilon_2' = x' - x_2' \\ \varepsilon_3 = x - x_3 & \varepsilon_3' = x' - x_3' \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon_n = x - x_n & \varepsilon_n' = x' - x_n' \dots \dots (10) \end{array}$$

Dodając parami spostrzeżenia $x_1 + x_1'$, $x_2 + x_2'$, \dots otrzymamy dla każdej sumy błąd, równy sumie $\varepsilon_1 + \varepsilon_1'$, zatem:

$$\begin{array}{l} \delta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1' \\ \delta_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_2' \\ \delta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_3' \\ \vdots \\ \delta_n = \varepsilon_n + \varepsilon_n' \dots \dots \dots (11) \end{array}$$

Powyżej zestawiliśmy szereg sum spostrzeżeń i dla każdej sumy błąd δ , z których znowu, według równ. 6. obliczymy średni błąd spostrzeżenia. W tym celu obliczymy kwadraty:

$$\begin{array}{l} \delta_1^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_1' \\ \delta_2^2 = \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2'^2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_2' \\ \vdots \end{array}$$

$$d_n^2 = \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n'^2 + 2\varepsilon_n\varepsilon_n'$$

$$[\delta^2] = [\varepsilon^2] + [\varepsilon'^2] + 2[\varepsilon\varepsilon']$$

$$\text{a stąd } \frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} + \frac{2[\varepsilon\varepsilon']}{n} \dots \dots \dots (12)$$

W równ. 12. mamy, według poprzednich definicji, kwadraty średnich błędów, mianowicie:

$$\frac{[\delta^2]}{n} = M^2 \dots \frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 \text{ i } \frac{[\varepsilon'^2]}{n} = m'^2$$

odpowiadających wzorowi 6. Ostatni wyraz zawiera sumę iloczynów $[\varepsilon \varepsilon']$; iloczyny te powstają z pojedynczych błędów, po części dodatnich, po części ujemnych — zatem część iloczynów będzie dodatnia, część ujemna a — że nie mamy najmniejszego powodu do przypuszczenia, by dodatnie miały przeważać nad ujemnymi lub odwrotnie, gdyż jedne i drugie mają równą prawa istnienia, co już wypływa z ich natury, więc suma tych iloczynów zdąży do zera. Ostatni przeto wyraz, jako nic nie znaczący, możemy opuścić, równanie zaś 12. otrzyma wówczas formę:

$$\frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} \dots \dots \dots (13)$$

czyli $M^2 = m^2 + m'^2$

lub $M = \pm \sqrt{m^2 + m'^2} \dots \dots \dots (14)$

Jest to ważny bardzo wzór na wyrażenie średniego błędu sumy dwóch spo- *algebraiczne wzór Pitagorasa*
strzeżeń x i x' mających błędy $\pm m$ i $\pm m'$.

Równanie 14. można przedstawić za pomocą trójkąta prostokątnego, o prostokątach m i m' tudzież przeciwprostokątnej M .

W ten sam sposób można dowieść, że równanie (14) jest ważne również i dla różnicy dwóch spostrzeżeń:

$$D = (x \pm m) - (x' \pm m')$$

t. j. że i dla różnicy średni błąd będzie

$$M = \pm \sqrt{m^2 + m'^2}.$$

W poprzednim bowiem wywodzie, dostalibyśmy kwadrat różnicy, t. j.

$$[\delta^2] = [\varepsilon^2] + [\varepsilon'^2] - 2[\varepsilon \varepsilon']$$

w którym ostatni wyraz byłby ujemny, a że ten wyraz jako prawie równy zeru opuszczamy, więc tem samem nic się nie zmienia, czyli równ. 14. odnosi się nie tylko do sumy, lecz także i do różnicy dwu spostrzeżeń.

Podobnie, jak to już łatwo wynioskować, wzór 14. stosuje się i do sumy iluokółwiek spostrzeżeń: $X = (x \pm m) + (x' \pm m') + (x'' \pm m'') + \dots$

t. j. $M^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 \dots \dots \dots (15)$

W szczególnym wypadku mogą być błędy pojedyncze równe, t. j. $m = m' = m'' \dots$

a wówczas $M^2 = m^2 + m^2 + m^2 + \dots = n \cdot m^2$

czyli $M = \pm m \sqrt{n} \dots \dots \dots (16)$

Jako przykład przyjmijmy, że przy pomiarze zupełnie dobrmi łątami, popełniamy tylko błąd w przykładaniu łąt i błąd ten wynosi $\pm m$ na każdą łątę. W tym wypadku równ. 16. mówi, że średni błąd pomiaru jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z ilości przyłożonych łąt a zatem i proporcjonalny do całej długości L , bo ta jest proporcjonalną do ilości łąt.

Prócz błędów przypadkowych, czyli nieregularnych, powstają przy pomiarze jeszcze inne błędy, działające jednostronnie, n. p. wskutek niedokładnie poziomego, lub niedokładnego w danym kierunku układania łąt, okaże się mierzona długość nieco za wielka. Nazwijmy błąd wskutek tego powstały, na jedno przyłożenie przez A , to jasnym jest, że po n krotnem przyłożeniu łąt, błąd dojdzie do $n \cdot A$.

Prócz tego istnieje jeszcze błąd przyłożenia łąt, o czym mówiliśmy powyżej, mający wartość B na jedną łątę, czyli średni błąd całego pomiaru wyniesie według równ. 16. $\dots B \sqrt{n}$.

Błędy te działają równocześnie, więc przypuściwszy, że się sumują, otrzymamy średni błąd pomiaru według równania 14.:

$$M = \pm \sqrt{(A n)^2 + (B \sqrt{n})^2} = \pm \sqrt{A^2 n^2 + B^2 n} \dots \dots (17)$$

W ogóle, mając szereg spostrzeżeń a, a', a'', \dots o średnich błędach $a, a', a'' \dots$ możemy na podstawie poprzednich rozumowań powiedzieć, że suma lub różnica ich, t. j.

$$\begin{aligned} X &= ax + a'x' + a''x'' + \dots \\ \text{lub } X' &= ax - a'x' - a''x'' - \dots \end{aligned} \quad (17a)$$

będzie miała średni błąd według równania 14.:

$$M = \pm \sqrt{(am)^2 + (a'm')^2 + \dots} \quad (18)$$

Dotychczas mówiliśmy o średnim błędzie pojedynczego spostrzeżenia, t. j. o błędzie, jaki przypisać możemy każdemu z danych spostrzeżeń.

Przyjmując jednak średnią arytmetyczną L z danych spostrzeżeń l_1, l_2, l_3, \dots jako najprawdopodobniejszą wartość, nie możemy do niej odnosić tego samego błędu, jaki przypisujemy poszczególnym spostrzeżeniom. Ażeby obliczyć średni błąd średniej arytmetycznej L , przedstawionej równaniem

$$L = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{n},$$

napiszmy to równanie w kształcie:

$$L = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \frac{1}{n} l_3 + \dots + \frac{1}{n} l_n \quad (19)$$

Współczynniki $\frac{1}{n}$ uważać możemy jako analogiczne do $a, a', a'' \dots$ w równ. 17a), zatem i średni błąd dla L znajdziemy, jako średni błąd sumy, według równ. 18.

$$M = \pm \sqrt{(am)^2 + (a'm')^2 + \dots} \quad \text{gdzie}$$

$$a = a' a'' \dots = \frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad m = m' m'' = \dots = m$$

$$\text{zatem } M = \pm \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + \left(\frac{m}{n}\right)^2 + \dots} = \pm \sqrt{n \left(\frac{m}{n}\right)^2}$$

$$\text{czyli } M = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \quad (20)$$

t. j. średni błąd M średniej arytmetycznej L równy jest ilorazowi średniego błędu pojedynczego spostrzeżenia M , przez pierwiastek kwadratowy ilości spostrzeżeń \sqrt{n} , oraz widzimy, że błąd ten jest mniejszy od średniego błędu pojed. spostrzeżenia.

W powyższych obliczeniach opieraliśmy się na następujących ilościach:

a) na średniej arytm. L z danych pojedynczych spostrzeżeń l_1, l_2, l_3, \dots , którą przyjęliśmy jako najprawdopodobniejszą wartość zamiast nieznannej prawdziwej X ;
b) na błędach pozornych v_1, v_2, \dots obliczonych jako różnice między L i pojedynczymi l_1, l_2, \dots t. j.

$$v = L - l \quad (21)$$

zamiast nieznananych błędów prawdziwych

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon = X - l \quad (22)$$

Z równ. 21. otrzymamy: $l = L - v$

co wstawmy w równ. 22., to $\varepsilon = X - L + v$

$$\text{czyli } \varepsilon = v + (X - L) \quad (23)$$

mając n spostrzeżeń, czyli równocześnie n wartości na v , otrzymamy też n wartości dla ε :

$$\varepsilon_1 = v_1 + (X - L)$$

$$\varepsilon_2 = v_2 + (X - L)$$

$$\varepsilon_3 = v_3 + (X - L)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_n = v_n + (X - L) \quad (24)$$

a stąd:

$$\varepsilon_1^2 = v_1^2 + (X - L)^2 + 2 v_1 (X - L)$$

$$\varepsilon_2^2 = v_2^2 + (X - L)^2 + 2 v_2 (X - L)$$

·

·

$$\varepsilon_n^2 = v_n^2 + (X - L)^2 + 2 v_n (X - L)$$

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + n (X - L)^2 + 2 (X - L) (v_1 + v_2 + \dots + v_n) \dots (25)$$

a ponieważ według równ. 4. $[v] = 0$

$$\text{czyli } (v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n) = 0$$

więc ostatni wyraz w równ. 25. odpadnie, a pozostanie

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + n [X - L]^2 \dots \dots \dots (26)$$

Drugi wyraz w równ. 26. nie da się oznaczyć, zawiera bowiem X, które, jako prawdziwa wartość (bezbłędna) nigdy nie będzie wiadomą.

Zamiast jednak różnicy $(X - L)$, t. j. różnicy między wartością prawdziwą a prawdopodobną, możemy podstawić najlepszą jaką mamy, t. j. średni błąd średniej arytmetycznej

$$(X - L) = M = \frac{m}{\sqrt{n}} \text{ według równ. 20.,}$$

$$\text{stąd } (X - L)^2 = \frac{m^2}{n} \dots \dots \dots (27)$$

a wracając do równ. 26., otrzymamy

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + n \cdot \frac{m^2}{n} \text{ czyli}$$

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + m^2 \dots \dots \dots (28)$$

$$\text{Ponieważ według równ. 6.: } m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}$$

$$\text{czyli } [\varepsilon^2] = n \cdot m^2 \dots \dots \dots (29)$$

więc wstawiając powyższą wartość w równaniu (28) dostaniemy:

$$n m^2 = [v^2] + m^2 \text{ a stąd}$$

$$[v^2] = m^2 (n - 1)$$

$$\text{a wkońcu } m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n - 1}} \dots \dots \dots (30)$$

jako ostateczny wzór na średni błąd pojedynczego spostrzeżenia, w miejsce przybliżonego wzoru (6)

$$\text{t. j. zamiast } m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n}}$$

Wstawiając obliczoną w równ. (30) wartość w równanie (20), otrzymamy

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n - 1)}} \dots \dots \dots (31)$$

jako wzór na wartość średniego błędu średniej arytmetycznej, wyrażoną za pomocą błędów pozornych v

Że równ. (30) lepiej odpowiada naszym pojęciom o błędach, przekonamy się z następującego rozważania: Przypuśćmy, że mamy tylko jedno spostrzeżenie. W takim razie nie jesteśmy w stanie skontrolowania tego pomiaru, nie możemy zatem powiedzieć, czy jest dobre czy nie, czyli musimy przyznać, że jest niepewne.

Z równ. (6) nie dowiemy się tego, bo ponieważ jedno jedyne spostrzeżenie jest zarazem swoją własną średnią aryt., czyli więc z równ. (6):

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n}} = \sqrt{\frac{0}{1}} = 0$$

otrzymalibyśmy wynik wskazujący, że spostrzeżenie nie ma błędu. Tymczasem z równ. (30) dostaniemy:

Jeżeli przyjmiemy, że przykładanie łąt odbywało się bardzo starannie, tak, że błąd stąd powstały jest nadzwyczaj mały, nie wchodzący w rachubę, czyli $\beta = 0$, natenczas

$$m = \pm \alpha \sqrt{l} \dots \dots \dots (34)$$

We wzorze 34 — α ma znaczenie średniego błędu pomiaru jednostki długości. Możemy więc powiedzieć, że średni błąd pomiaru jest proporcjonalny do pierwiastka kwadr. mierzonej długości, albo, że średni błąd pomiaru wzrasta proporcjonalnie do \sqrt{l} . Za pomocą doświadczeń ustalono granicę błędu dla układania łąt $\alpha = 0.003$, dla taśm stalowych $\alpha = 0.005$.

Na tej podstawie obliczono poniżej następującą tabelkę:

Tabela 5.

Mierzona długość l	błąd m = ± α √ l	
	dla łąt	dla taśmy stalowej
10 m	± 0.01 m	± 0.02 m
50 „	0.02 „	0.04 „
100 „	0.03 „	0.05 „
200 „	0.04 „	0.07 „
300 „	0.05 „	0.09 „
400 „	0.06 „	0.10 „
500 „	0.07 „	0.11 „
1000 „	0.09 „	0.16 „

§ 4. Pomiar długości parami.

Zwykle pomiar długości wykonywa się dwa razy: raz od punktu początkowego do końcowego, drugi raz w przeciwnym kierunku. Otrzymamy zatem dwa spostrzeżenia l_1 i l_2 , z których obliczymy średnią arytm.

$$L = \frac{l_1 + l_2}{2} \dots \dots \dots (35)$$

jakoteż błędy pojedynczych pomiarów

$$\begin{aligned} v_1 &= L - l_1 \\ v_2 &= L - l_2 \dots \dots \dots (36) \end{aligned}$$

Nazwijmy różnicę obu pomiarów literą d

to $l_2 - l_1 = d$. . . czyli $l_2 = l_1 + d$

stąd $L = \frac{l_1 + l_1 + d}{2} = \frac{2l_1 + d}{2} = l_1 + \frac{d}{2} \dots \dots \dots (37)$

następnie $v_1 = l_1 + \frac{d}{2} - l_1 = + \frac{d}{2}$ $v_1^2 = \frac{d^2}{4}$
 $v_2 = l_1 + \frac{d}{2} - l_1 - d = - \frac{d}{2}$ $v_2^2 = \frac{d^2}{4}$
 $[v] = 0$ $[v^2] = \frac{d^2}{2} \dots \dots \dots (38)$

wedle zaś równania 30. dostaniemy

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \pm \frac{d}{\sqrt{2}} = \pm 0.71 d \dots \dots (39)$$

oraz według 31:

$$M = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{2}} = \pm \sqrt{\frac{d^2}{4}} = \pm \frac{d}{2} \dots (40)$$

Równanie 40. dowodzi, że średni błąd średniej arytmetycznej dwu pomiarów równy jest połowie różnicy obu pomiarów, t. j. $\pm \frac{d}{2}$. Daną długość mierzymy dwa razy łałami lub taśmą stalową, z największą starannością, w obu kierunkach. Średnie arytmetyczną zaś przyjmujemy jako najprawdopodobniejszą wartość pomiaru wówczas, gdy połowa różnicy obu pomiarów, jako średni błąd średniej arytmetycznej nie przekracza granicy dozwolonego błędu pomiaru.

Co do granic dozwolonych błędów, to istnieją w tym względzie różne instrukcje. Tak n. p. austriacka instrukcja z r. 1904, odnosząca się do pomiaru długości przy zdjęciach polygonalnych, powiada:

1. Pomiar długości boków ma być wykonywany w terenie płaskim taśmą stalową 20 m długą i około 20 mm szeroką; w terenie pochyłonym trzema łałami po 5 m długości w stopniach (zatem układanych w poziomie).
2. Tam, gdzie warunki tego wymagają, a zwłaszcza przy pomiarach głównych polygonów i pomiarach łałami, należy, celem ułatwienia w układaniu łał lub taśm, wyciągnąć sznur w danym kierunku.
3. Używane do pomiarów przyrządy należy sprawdzić za pomocą porównania z miarą normalną i sprawdzanie to od czasu do czasu powtarzać.
4. Pomiar długości należy wykonywać dwa razy, mianowicie raz w danym kierunku, drugi raz w przeciwnym, przyczem odczytuje się tylko całe centymetry.

Wyniki obydwu pomiarów nie powinny przekraczać dozwolonej granicy (według poniżej podanej tabeli) — w przeciwnym razie należy pomiar powtórzyć.

Przy obliczaniu średniej arytmetycznej pomiarów danej linii, należy milimetry poniżej 5 opuścić, powyżej zaś, zaokrąglić na 1 cały cm.

5. Wyniki pomiarów należy wciągać w protokół (którego wzór podano niżej), bezpośrednio, w polu, atramentem. W uwagach zaznaczyć należy wszelkie okoliczności, mogące wpływać na pomiar, jako też wyniki i daty sprawdzania przyrządów.

Granica błędów pomiaru długości:

Tabela 6.

Długość boku s metrów	Δs cm	Długość boku s metrów	Δs cm	Długość boku s metrów	Δs cm	Długość boku s metrów	Δs cm	U w a g a
1	2	88	8	262	14	475	20	Granica błędów obliczona według wzoru $\Delta s = 0.00015 s +$ $+ 0.005 \sqrt{s} + 0.015$ ma ważność w warunkach średnich. W warunkach dogodnych należy granicę obniżyć o 25% — natomiast w trudnych o 25% podwyższyć.
4	3	113	9	295	15	513	21	
14	4	140	10	329	16	551	22	
27	5	168	11	365	17	591	23	
45	6	198	12	401	18	631	24	
65	7	229	13	437	19	671	25	
88		262		475		712		

Powyzsza tabela, jak to jest zresztą widocznem, służy tylko jako przykład. Według punktu 4. poprzednio przytoczonej instrukcji, różnica obu pomiarów nie

powinna przekraczać dozwolonej granicy, jaką określa wzór

$$\Delta s = 0\cdot00015 s + 0\cdot005 \sqrt{s} + 0\cdot015 \dots \dots \dots (41)$$

gdzie Δs jest różnicą obu pomiarów, s długością boku — wszystko wyrażone w metrach.

Protokół pomiaru długości boków. (Wzór):

Tabela 7.

Nr. Polygonu	B o k		Ilość		Reszta	Długość boku w metrach	Średnia	U w a g a
	od	do	łat	taśm stalowych				
	Punkt Nr.							
1	2		3	4	5	6	7	8
Pomiar sieci polygonalnej								
1	Δ 35	65		8	2:42	162:42	162:53	Taśma 20 m. Sprawdzono taśmę d jako dobrą.
	"	"		8	2:64	162:64		
	65	66		6	19:92	139:92	139:82	
	"	"		6	19:72	139:72		
	66	67		7	12:05	152:05	152:13	
	"	"		7	12:21	152:21		
	67	68		6	18:16	138:16	138:23	
	"	"		6	18:31	138:31		
	68	69		6	10:40	130:40	130:44	
	"	"		6	10:47	130:47		
	69	70		6	15:39	135:39	135:33	
	"	"		6	15:26	135:26		

W myśl poprzednich wywodów, średni błąd średniej arytmetycznej wynosi połowę różnicy obu pomiarów (równ. 40.), o czym nie powinno się zapominać, jakoteż, że wzór (41.) odnosi się do dozwolonej różnicy dwu pomiarów, a nie do średniego błędu.

Zależnie od warunków terenu, dozwala austr. instrukcja na trzy rodzaje różnic, przy pomiarze podwójnym.

1. W terenie płaskim, wygodnym dla pomiarów

$$\Delta s = 0\cdot00011 s + 0\cdot004 \sqrt{s} + 0\cdot011 \dots \dots \dots (41 a)$$

2. W terenie średnio trudnym

$$\Delta s = 0\cdot00015 s + 0\cdot005 \sqrt{s} + 0\cdot015 \dots \dots \dots (41)$$

3. W terenie trudnym

$$\Delta s = 0\cdot00019 s + 0\cdot006 \sqrt{s} + 0\cdot019 \dots \dots \dots (41 b)$$

§ 5. O wadze spostrzeżeń.

Średnia arytmetyczna L , mająca średni błąd $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ (równ. 31.) powstaje, jak wiemy, z szeregu pojedynczych spostrzeżeń l_1, l_2, \dots, l_n , mających każde średni błąd m .

Tę średnią aryt. możemy uważać na nowe, idealne spostrzeżenie, tem dokładniejsze, im mniejszy będzie jego średni błąd M , który znów zależy od błędu m i od ilości spostrzeżeń n , co wynika z równ. 31. $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$, z którego dostaniemy

$$n = \frac{m^2}{M^2} \dots \dots \dots (42).$$

Ilość spostrzeżeń n , niewątpliwie charakteryzuje dokładność średniej aryt. w stosunku do dokładności pojedynczego spostrzeżenia, czyli n jest miarą ważności albo wagi arytmetycznej.

Jeżeli do oznaczenia średniej wartości mamy dany szereg spostrzeżeń, każdemu jednak z nich musimy z różnych przyczyn przypisać inną, większą lub mniejszą dokładność, to zwykła średnia arytmetyczna utworzona z takich spostrzeżeń o różnych stopniach dokładności, nie może być najprawdopodobniejszą wartością. Zwykła średnia aryt. miałaby rację tylko wtedy, gdyby wszystkie spostrzeżenia wykonane były równie starannie, w tych samych warunkach, czyli, gdyby im można dać równe wagi; jeżeli jednak z góry wiemy, że jedne pomiary są dokładniejsze, drugie mniej, to popełnilibyśmy świadomie błąd, przyjmując przeciętną wartość jako najprawdopodobniejszą.

Mamy więc przed sobą zadanie: Znaleźć sposób obliczenia prawdopodobnej wartości pomiaru z szeregu danych spostrzeżeń o różnych wagach.

Przypuśćmy, że mamy do rozporządzenia pięć spostrzeżeń

$$l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4 \quad l_5$$

Średnia arytmetyczna z nich byłaby:

$$X = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5}{5} \dots \dots \dots (43)$$

Rozdzielmy te spostrzeżenia na dwie grupy i obliczmy dla każdej grupy średnie arytmetyczne l_1 i l_2

$$l_1 = \frac{l_1 + l_2}{2} \quad \text{i} \quad l_2 = \frac{l_3 + l_4 + l_5}{3} \dots \dots \dots (44)$$

stąd otrzymamy:

$$2l_1 = l_1 + l_2 \quad \text{i} \quad 3l_2 = l_3 + l_4 + l_5 \dots \dots \dots (45)$$

Powyższe ilości $2l_1$ i $3l_2$ możemy uważać za jakieś nowe spostrzeżenia, z których otrzymać mamy poprzednią wartość X (równanie 43)

$$X = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_5}{5} = \frac{2l_1 + 3l_2}{2 + 3} \dots \dots \dots (46)$$

co jest zupełnie słusznem. Zamiast pięciu spostrzeżeń l_1, l_2, \dots, l_5 mamy tu dwa: l_1 i l_2 o wagach 2 i 3. — Analogicznie więc, mając grupy l_1, l_2, l_3, \dots złożone z p_1, p_2, p_3, \dots ilości spostrzeżeń jednakowo dokładnych, możemy utworzyć z nich średnią wartość według równania (46)

$$X = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[p l]}{[p]} \dots \dots \dots (47)$$

Mówiliśmy dotychczas o spostrzeżeniach wykonywanych z równą dokładnością, czyli równoważnych. Tworząc zaś z nich grupy a z tych średnie wartości, dostaliśmy nowy szereg spostrzeżeń, z których te będą dokładniejsze, które w myśl wywodu na początku tego § mają większe n , czyli składają się z większej ilości pomiarów.

Takie spostrzeżenia, będą miały dla nas większą wagę. W dalszem zaś, konsekwentnem rozumowaniu, możemy zamienić współczynniki $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, oznaczające ilości spostrzeżeń, na wagi tych nowych spostrzeżeń t. j. średnich l_1, l_2, \dots, l_n .

Rozważając rzecz dalej, powiemy, że tak samo, jak powyższe średnie l_1, l_2, \dots, l_n , którym przypisaliliśmy różne wagi, zależne od ilości składających się na nie bezpośrednich pomiarów, motywując większą wagę większą dokładnością, pochodzącą właśnie od ilości spostrzeżeń w równych warunkach przeprowadzonych; tak samo, traktować możemy i pojedyncze spostrzeżenia, nadając im różne wagi, zależnie od warunków, w jakich pomiary te były wykonane. Tak n. p. na podstawie doświadczenia możemy twierdzić, że pomiar wykonany podczas złej pogody, nie był tak dokładny jak w czasie pogodnym, że gdy w ostatnim razie wystarczyłyby dwa pomiary, to w pierwszym trzeba je 6 razy powtórzyć, ażeby otrzymać podobny wynik. Jeżeli więc wagę pomiaru w niekorzystnych warunkach przyjmiemy za jednostkę, to pomiarowi w dobrych warunkach wykonanemu, nadamy wagę n. p. 3, bo rzeczywiście jest w porównaniu do tamtego o tyle dokładniejszy, jak gdyby był rezultatem 6-ciu spostrzeżeń. Widzimy stąd, że nadawanie wag spostrzeżeniom jest uzasadnione. Naturalnie, w miejsce szeregu wag nadanych szeregowi spostrzeżeń, użyć możemy liczb do tych wag proporcjonalnych — rachunek na tem wcale nie ucierpi, co zresztą widoczne jest z równania (47.), w którym p_1, p_2, \dots, p_n w liczniku i mianowniku możemy przez tę samą liczbę pomnożyć, nie zmieniając wartości stosunku, czyli współczynniki p_1, p_2, \dots zastąpić ilościami do nich proporcjonalnymi.

Mając to wszystko na uwadze, możemy postąpić dalej w rozumowaniu i przyjąć dwie wartości średniej arytmetycznej M i M' , pochodzące z dwóch szeregów spostrzeżeń o ilościach n i n' ale wykonanych z jednakową dokładnością, tak, że każdemu z tych pomiarów w obu grupach przypada ten sam błąd m. — Jedyne tylko średnie arytmetyczne będą miały, jak już to wiemy, różne średnie błędy, zależnie od ilości spostrzeżeń n i n' .

$$\text{Zatem } M = \frac{m}{\sqrt{n}} \text{ i } M' = \frac{m}{\sqrt{n'}} \text{ stąd zaś}$$

$$\text{otrzymamy } \frac{M}{M'} = \frac{\sqrt{n'}}{\sqrt{n}} \dots \dots \dots (48)$$

Jak dla M i M' są wagami n i n' tak dla pojedynczych spostrzeżeń wprowadziliśmy, zależnie znów od warunków wykonania, wagi p i p' . W ogóle wyniki naszych rozważań, odnoszące się do średnich z szeregu spostrzeżeń, uważanych za pojedyncze spostrzeżenia, możemy stosować do rzeczywiście pojedynczych spostrzeżeń, którym jednak, przez nadanie wag, nadaliśmy charakter tamtych. Na tej podstawie napiszemy

$$\frac{M}{M'} = \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}} \text{ lub } \frac{M^2}{M'^2} = \frac{p'}{p} \dots \dots \dots (49)$$

t. j. wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów średnich, lub, błędy średnie są odwrotnie proporcjonalne do pierwiastków z wag.

Niech będą dane spostrzeżenia l_1, l_2, \dots, l_n

z wagami p_1, p_2, \dots, p_n

to na podstawie równania 47. otrzymamy średnią wartość pomiaru:

$$X = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[p l]}{[p]} \dots \dots \dots (50)$$

dla $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ otrzymamy zwykłą średnią arytm. $X = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n}$

t. j. w wypadku, gdy wszystkie pomiary były wykonane w takich samych warunkach, równie dokładnie.

Z wartości średniej X i poszczególnych spostrzeżeń l_1, l_2, \dots, l_n obliczymy błędy:

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = X - l_1 \\ v_2 = X - l_2 \\ v_3 = X - l_3 \\ \vdots \\ v_n = X - l_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{z wagą } p_1 \\ \text{„ „ } p_2 \\ \text{„ „ } p_3 \\ \dots \\ \text{„ „ } p_n \end{array} \dots \dots \dots (51)$$

Jako kontrola rachunku służy warunek

$$[v] = 0 \text{ i } [p v] = 0 \dots \dots \dots (52)$$

Analogicznie do wzoru: $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ oraz konsekwentnie do poprzednich

wywodów, z których powtarzamy, że wprowadzając wagi i przypisując je pojedynczym spostrzeżeniom, uważamy je niejako za średnie z pewnej, mniejszej lub większej ilości spostrzeżeń; że zatem nie możemy już tych spostrzeżeń uważać za jednako dokładne i mające wspólny błąd m , lecz zgodnie z dotychczasowymi wynikami, należy formę błędu przyjąć taką, jaka odnosi się do średniego błędu średniej arytmetycznej, zastępując n przez p . Otrzymamy więc dla

$$\begin{array}{c} \text{spostreżeń } l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad \dots \quad l_n \\ \text{błędy pojedyncze } \frac{m}{\sqrt{p_1}} \quad \frac{m}{\sqrt{p_2}} \quad \frac{m}{\sqrt{p_3}} \quad \dots \quad \frac{m}{\sqrt{p_n}} \dots \dots (53) \end{array}$$

Każde spostrzeżenie będzie teraz miało inny błąd, tem mniejszy, im większą jest jego waga, czyli im większą była dokładność pomiaru, co jest słuszną i logiczną rzeczą. Jest to to samo, jak gdybyśmy jakąś długość mierzyli n_1 razy, potem n_2 razy i t. d., wreszcie z każdej grupy pomiarów, uważanych za jednako dokładne, utworzyli średnie i obliczyli ich średnie błędy. Ta średnia będzie miała najmniejszy błąd, na którą składa się najwięcej spostrzeżeń. W zestawieniu 53. mamy rzecz zupełnie podobną, tylko w miejsce n wstawiono wagi dla pojedynczych pomiarów. Wprowadzenie wag jest więc niczem innym, jak uproszczeniem pracy, zastąpieniem szeregu pomiarów przez jeden pomiar, którego dokładność rozważono i scharakteryzowano nadaniem pewnej wagi.

Dlatego też poszczególne spostrzeżenia nie mogą już mieć, jak poprzednio, wspólnego błędu m , lecz różne błędy (zestawienie 53.), zależnie od stopnia dokładności.

$$\text{Równanie 47.: } X = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

możemy napisać w innym kształcie, mianowicie:

$$X = \frac{p_1}{[p]} l_1 + \frac{p_2}{[p]} l_2 + \dots + \frac{p_n}{[p]} l_n \dots \dots \dots (54)$$

co odpowiada równaniu 17 a:

$$X = a x + a' x' + \dots \dots \dots$$

$$\text{w którym } a = \frac{p_1}{[p]} \quad a' = \frac{p_2}{[p]} \dots \dots \dots \text{ i t. d.}$$

$$\text{zaś } x = l_1 \quad x' = l_2 \dots \dots \dots$$

Zatem średni błąd M dla X obliczy się według równania (18.):

$$M = \pm \sqrt{(a m)^2 + (a' m')^2 + \dots \dots \dots}$$

podstawiając za m m' . . . wartości z (53.)

$$M^2 = \left(\frac{p_1}{[p]} \cdot \frac{m}{\sqrt{p_1}} \right)^2 + \left(\frac{p_2}{[p]} \cdot \frac{m}{\sqrt{p_2}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{p_n}{[p]} \cdot \frac{m}{\sqrt{p_n}} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{czyli } M^2 &= \left(\frac{m}{[p]}\right)^2 \left\{ \left(\sqrt{p_1}\right)^2 + \left(\sqrt{p_2}\right)^2 + \dots + \left(\sqrt{p_n}\right)^2 \right\} \\ M^2 &= \frac{m^2}{[p]^2} (p_1 + p_2 + \dots + p_n) = \frac{m^2}{[p]^2} [p] \\ \text{ostatecznie } M &= \pm \frac{m}{\sqrt{[p]}} \dots \dots \dots (55) \end{aligned}$$

t. z. średni błąd średniej wartości pomiaru, równa się średniemu błędowi pojedynczych spostrzeżeń (m) obliczonemu na podstawie zwykłej średniej arytmetycznej, podzielonemu przez drugi pierwiastek sumy wag.

Mając szereg spostrzeżeń l_1, l_2, \dots o wagach p_1, p_2, \dots nie możemy właściwie obliczyć błędów pozornych v_1, v_2, \dots bo tak zwykła średnia arytmetyczna nie jest wyrazem prawdopodobnej wartości, jak również spostrzeżenia, jako mające różne dokładności nie mogą być z nią porównywane. Należy więc błędy pozorne sprowadzić pierwaj do tej samej wagi, na podstawie relacji (49.).

$$\frac{M}{M^1} = \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p}} \quad \text{wprowadzając tutaj za } M \text{ i } M^1$$

odpowiednio v i v_1 i przyjmując $p = 1$

$$\text{otrzymamy } \frac{v}{v} = \frac{\sqrt{p_1}}{1} \quad \text{a stąd } v = v_1 \sqrt{p_1} \dots \dots \dots (56)$$

jako wyrażenie na błąd pozorny spostrzeżenia sprowadzonego do wagi 1.

Na tej podstawie napiszemy:

wagi:	p_1	błędy pozorne	v_1	wagi	1	błędy zredukowane	v_1	$\sqrt{p_1}$
	p_2		v_2		1		v_2	$\sqrt{p_2}$
	p_3		v_3		1		v_3	$\sqrt{p_3}$
	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	\vdots

Sprowadziwszy błędy pozorne do wagi 1 — możemy teraz obliczyć średni błąd według równania (30.):

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \quad \text{wstawiając powyższe wartości za } v -$$

$$\text{więc } m^2 = \frac{(v_1 \sqrt{p_1})^2 + (v_2 \sqrt{p_2})^2 + \dots + (v_n \sqrt{p_n})^2}{n-1} = \frac{[p v^2]}{n-1}$$

$$\text{czyli } m = \pm \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-1}} \dots \dots \dots (57)$$

jako średni błąd pojedynczych spostrzeżeń, sprowadzonych do tej samej dokładności czyli wagi.

Wstawiając w końcu w równanie (55.) t. j. $M = \pm \frac{m}{\sqrt{[p]}}$ — wartości m z równania (57.) dostaniemy

$$M = \pm \sqrt{\frac{[p v^2]}{[p](n-1)}} \dots \dots \dots (58)$$

jako średni błąd najprawdopodobniejszej wartości pomiaru wyrażonej równaniem (46.) — n oznacza tutaj ilość spostrzeżeń.

W powyższych wywodach doszliśmy do następujących głównych pojęć i rezultatów:

1. Do wzoru wyrażającego najprawdopodobniejszą wartość szeregu spostrzeżeń wykonanych z równą dokładnością, jako średniej arytmetycznej — do wzoru m określającego średni błąd każdego ze spostrzeżeń; w końcu do wzoru M , określającego średni błąd średniej arytmetycznej.

2. Do wzorów na wyrażenie najprawdopodobniejszej wartości X — błędów m i M — szeregu spostrzeżeń, którym, zależnie od warunków należało przypisać różne dokładności czyli wagi.

§ 6. Zastosowanie pomiaru parami.

Przyjmijmy, że wykonano pomiar kilku boków danego wieloboku dwa razy, w jedną i drugą stronę, tudzież, że warunki wykonania pomiarów były wszędzie jednakowe, zatem: teren równie korzystny i boki prawie równe, czyli, że wszystkim pomiarom przypisać należy jednakową dokładność (wagę). To samo tyczyłoby się i niwelacji.

Z podwójnego pomiaru każdej długości otrzymamy pewną różnicę d obu spostrzeżeń. Przez dodanie średnich wartości poszczególnych boków, dostaniemy łączną długość całego wieloboku. Chcielibyśmy zaś obliczyć błąd sumy tych długości, zatem i różnicę D odnoszącą się do tej sumy.

Nazwijmy różnice obu pomiarów każdego boku, kolejno przez

$$d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad \dots \quad d_n$$

to, ponieważ przy podwójnym pomiarze różnice te mają charakter błędów prawdziwych, przeto do obliczenia podobnej różnicy sumy wszystkich boków: D , zastosujemy wzór 6:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n}}$$

$$\text{t. j. } D^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n}$$

$$\text{czyli } D^2 = \frac{[d^2]}{n} \quad \text{lub} \quad D = + \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \dots \dots \dots (59)$$

gdzie n oznacza ilość d — czyli ilość boków wieloboku.

Błąd jednego pomiaru całego wieloboku obliczymy z równ. 39.: $m = \pm \frac{d}{\sqrt{2}}$

stawiając D zamiast d , zatem:

$$m = \pm \frac{D}{\sqrt{2}} \quad \text{a uwzględniając równ. (59):}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \dots \dots \dots (60)$$

Podobnie średni błąd średniej arytmetycznej według równania 40: $M = \pm \frac{d}{2}$

$$\text{zatem: } M = \pm \frac{D}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \dots \dots \dots (61)$$

Gdyby różnice $d_1 \quad d_2 \quad \dots$ należały do podwójnych pomiarów długości lub niwelacji o różnych wagach, co by miało miejsce wówczas, gdyby boki wieloboku nie były równe lub warunki pomiaru były niejednakowe, to i różnicom tym przypisałybyśmy musieli różnice wagi $p_1 \quad p_2 \quad \dots$

W takim razie różnicę D obliczymy, dla zredukowanej wagi do 1 — według wzoru (57.) i (59.):

$$D^2 = \frac{p_1 d_1^2 + p_2 d_2^2 + \dots + p_n d_n^2}{n}$$

$$\text{czyli } D = + \sqrt{\frac{[p d^2]}{n}} \dots \dots \dots (62)$$

stąd zaś błąd pojedynczego pomiaru całej długości wieloboku

$$m = \pm \frac{D}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{[p d^2]}{2n}} \dots \dots \dots (63)$$

i średni błąd średniej arytmetycznej:

$$M = \pm \frac{D}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[pd^2]}{n}} \dots \dots \dots (64)$$

Zastosowanie tych obliczeń trafia się często w praktyce, bo tak pomiary długości, jak niwelację, wykonywamy zwykle dwa razy; natomiast trudno jest żądać, by wszystkie boki miały równe długości, dlatego też wprowadzić się musi różne wagi spostrzeżeń.

Ażeby spostrzeżeniom nadać odpowiednie wagi, weźmy na uwagę równ. (49.), które mówi, że wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów średnich błędów; wiemy też, że wagi zastąpić można ilościami do nich proporcjonalnymi, a szukając tych ilości, oprzyjmy się na równaniu (16.): $M = \pm m \sqrt{n}$ i równaniu (34.): $m = \pm \alpha \sqrt{l}$, z których wynika, że błędy są proporcjonalne do drugiego pierwiastka z ilości przyłożeń łań lub taśm, t. j. do \sqrt{n} oraz (34.) do \sqrt{l} , lub oznaczwszy długości przez s , będzie błąd proporcjonalny do \sqrt{s} . Jeżeli więc wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów średnich błędów, te zaś są proporcjonalne do pierwiastków odpowiednich długości, przeto wagi będą też odwrotnie proporcjonalne do długości — t. j. $p_1 = \frac{1}{s_1}$ $p_2 = \frac{1}{s_2}$

Podstawmy teraz w równaniu (62.): $D = \pm \sqrt{\frac{[pd^2]}{n}}$ powyższe wartości; w miejsce p_1 p_2 to otrzymamy:

$$D^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2} + \frac{d_3^2}{s_3} + \dots + \frac{d_n^2}{s_n} \right)$$

$$D^2 = \pm \frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right] \text{ czyli } D = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \dots \dots (65)$$

Zapomocą wzoru (65.) możemy obliczyć różnicę dwu pomiarów całego wieloboku, na podstawie różnic d podwójnych pomiarów poszczególnych boków.

Błąd pojedynczego pomiaru obliczymy według równania (60.):

$$m = \pm \frac{D}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \dots \dots \dots (66)$$

W końcu średni błąd średniej arytmetycznej według równania (61):

$$M = \pm \frac{D}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \dots \dots \dots (67)$$

Jeżeli s wyrażone jest w metrach, to równania (66.) i (67.) dadzą wartość błędów na 1 m, jeżeli w km, to na 1 km długości.

§ 7. Przykłady.

1. Przykład:

Pomierzono dwa razy boki a, b, c, d polygonu (wieloboku), mianowicie:

I. pomiar $a = 400.08$ m $b = 650.90$ m $c = 890.78$ m $d = 1250.40$ m
 II. „ 400.00 650.80 890.66 1250.25

różnice	$d = 8$ cm	$d_2 = 10$ cm	$d_3 = 12$ cm	$d_n = 15$ cm
okrągło	$s_1 = 0.4$ km	$s_2 = 0.65$ km	$s_3 = 0.89$ km	$s_n = 1.25$ km
	$d_1^2 = 64$	$d_2^2 = 100$	$d_3^2 = 144$	$d_n^2 = 225$
	$\frac{d_1^2}{s_1} = 160$	$\frac{d_2^2}{s_2} = 153.8$	$\frac{d_3^2}{s_3} = 161.8$	$\frac{d_n^2}{s_n} = 180$

$$\left[\frac{d^2}{s} \right] = 160 + 153.8 + 161.8 + 180 = 655.6$$

$$\sqrt{\left[\frac{d^2}{s} \right]} = 25.6 \quad n = 4 \text{ (ilość boków).}$$

$$\text{Według równania (65.): } D = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} = \pm 12.8 \text{ cm}$$

t. j. różnica dwu pomiarów całego wieloboku.

Z równania (66.) i (67.): średni błąd pojedynczego pomiaru

$$m = \pm \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} = \pm \frac{25.6}{\sqrt{8}} = \pm 9.04 \text{ cm na 1 km długości}$$

Średni błąd średniej arytmetycznej.

$$M = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} = \pm 6.04 \text{ cm na 1 km. długości.}$$

I. pomiar: $a + b + c + d = 3192.16 \text{ m}$ czyli 3.19216 km

II. „ „ „ $= 3191.71$ „ „ 3.19171 „

Średnia aryt. $L = \frac{l_1 + l_2}{2} = 3191.935 \text{ m}$ z błędem $M = 6.4 \text{ cm}$ na 1 km czyli na całą długość 20.43 cm .

Prawdopodobna długość całego wieloboku wynosi $L = 3191.935 \text{ m} \pm 0.204 \text{ m}$.

Średni zaś błąd pojedynczego pomiaru wynosi 9.04 cm na 1 km , czyli 28.85 cm na całej długości.

Według instrukcji austriackiej dozwolona różnica pomiarów wynosiłaby dla całej długości

$$\triangle s = \pm 77 \text{ cm.}$$

2. Przykład:

Kąt pomierzono 5 razy; różnice pomiarów okazały się w sekundach, dlatego powtarzanie stopni i minut opuszczono.

Nr. spostrzeżenia:	1.	$l = 35^\circ 26' 16''$	różnica $v = + 2.8''$	$v^2 = 7.84$
	2.	$20''$	$- 1.2''$	1.44
	3.	$18''$	$+ 0.8''$	0.64
	4.	$25''$	$- 6.2''$	38.44
	5.	$15''$	$+ 3.8''$	14.44
	Suma	$94''$	0.0	$[v^2] = 62.80$

Średnia arytmetyczna $35^\circ 26' 18.8''$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Bezwzględna suma } v = 14.8'' \\ t = \frac{14.8}{5} = 2.96'' \end{array} \right]$$

Średni błąd pojedynczego spostrzeżenia:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{62.80}{4}} = \pm 3.96''$$

Średni błąd średniej arytmetycznej:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \frac{3.96}{\sqrt{5}} = \pm 1.77''$$

Pojedynczemu pomiarowi, wykonanemu równie starannie, o ilebyśmy na nim poprzestali, przypisaćby należało, względnie spodziewać się błędu $\pm 3.96''$. Gdy jednakże wykonaliśmy 5 pomiarów, to rzecz prosta, idealne spostrzeżenie z nich obliczone, t. j. średnia arytmetyczna będzie dokładniejsze od poszczególnych pomiarów, co wykazuje też rachunek, nadając średniej arytmetycznej błąd $\pm 1.77''$. W przeciwieństwie do powyższych m i M , zwykły, t. j. przeciętny błąd $\pm 2.96''$ nie pozwala na odróżnienie tych stopni dokładności.

Ostatecznie, właściwa wartość kąta wynosi:

$$\alpha = 35^\circ 26' 18.8'' \pm 1.8''.$$

3. Przykład. (Według Jordana — 1904 — str. 22).

W swem „Pomiar kątów w Prusach Wschodnich“ podaje Bessel 18 niezależnych od siebie pomiarów kąta na stacyi Trenk, wraz z obliczeniem błędów.

Tabela 8.

Nr.	Pomiar	v	v ²
1	83° 30' 36.25"	— 1.38"	1.90
2	7.50	— 2.63	6.92
3	6.00	— 1.13	1.28
4	4.77	+ 0.10	0.01
5	3.75	+ 1.12	1.25
6	0.25	+ 4.62	21.34
7	3.70	+ 1.17	1.37
8	6.14	— 1.27	1.61
9	4.04	+ 0.83	0.69
10	6.96	— 2.09	4.37
11	3.16	+ 1.71	2.92
12	4.57	+ 0.30	0.09
13	4.75	+ 0.12	0.01
14	6.50	— 1.63	2.66
15	5.00	— 0.13	0.02
16	4.75	+ 0.12	0.01
17	4.25	+ 0.62	0.38
18	5.25	— 0.38	0.14
Suma	87.59	+10.71 —10.64	[v ²] = 46.97

Średnia arytmetyczna 83° 30' 34.87"

Średni błąd pojedynczego pomiaru:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{46.97}{17}} = \pm 1.66$$

Średni błąd średniej arytmetycznej:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{1.66}{\sqrt{18}} = \pm 0.39''$$

Wartość kąta:

$$83^\circ 30' 34.87'' \pm 0.39''.$$

4. Przykład (Jordan 1904. str. 27. i 28.):

Dane są wysokości punktów A, B, C, D, E, F, pomierzono zaś trygonometrycznie wysokość punktu P względem tamtych (fig. 37.)

W tabeli 9. wyszczególniono: w rubryce 1 — odległości punktu P od pozostałych, w 2 — dane wysokości A . . . F, w 3 — pomierzone bezpośrednio trygo-

nometrycznie różnice wysokości, w 4. obliczono wysokości punktu P przez dodanie pomierzonych różnic, do znanych już wysokości z rubryki 2. Ponieważ przy poszczególnych pomiarach, mimo ich staranności, popełniono błędy, przeto rubryka 4. podaje na wysokość P różne wartości. Zadaniem naszym będzie błędy te wyrównać, czyli znaleźć najprawdopodobniejszą wysokość punktu P, na podstawie wykonanych pomiarów.

Tabela 9.

Odległości	Dane wysokości	Pomierzone różnice wysokości	Obliczona wysokość P
AP = 2010 m	A = 1043·64 m	$h_1 = -314·73$ m	728·91 m
BP = 8903 „	B = 619·02 „	$h_2 = +109·20$ „	728·22 „
CP = 5820 „	C = 480·81 „	$h_3 = +248·24$ „	729·05 „
DP = 3002 „	D = 1247·01 „	$h_4 = -518·43$ „	728·58 „
EP = 6197 „	E = 928·18 „	$h_5 = -199·16$ „	729·02 „
FP = 5800 „	F = 418·71 „	$h_6 = +310·13$ „	728·84 „

(Średnia arytmetyczna = 728·77 m).

Pomiary nie były wykonane w równych warunkach, bo jak widzimy, odległości są bardzo różne. Średniej arytmetycznej zatem nie możemy przyjąć jako rezultatu dla pomiarów, wykonanych z różną dokładnością.

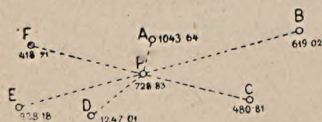


Fig. 37.

Z teorii trygonometrycznych pomiarów wysokości można przyjąć, że popełnione przy tem błędy, są w przybliżeniu proporcjonalne do odległości s , zatem, na podstawie teorii błędów, wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów; ponieważ zaś za wagi można podstawić ilości proporcjonalne, więc przyjmijmy, że wagi są odwrotnie pro-

porcjonalne do odległości s , t. j. $p = \frac{1}{s}$. Odległości wyrazimy tu w km. zaokrąglając je, co nie zrobi żadnej ujemy rachunkowi.

Tabela 10.

Obliczone wysokości punktu P (do wyrównania)	s km	$p = \frac{1}{s^2}$	$p \cdot l$	$x =$ [p] [p]	$v =$ $= x - l =$ $= 0·83 - l$	$p \cdot v$	$p \cdot v^2$
7·28 + 0·91	2·0	0·25	0·2275	—	-0·08	-0·0200	0·0016
+ 0·22	8·9	0·01	0·0022	—	+0·61	+0·0061	0·0037
+ 1·05	5·8	0·03	0·0315	—	-0·22	-0·0066	0·0015
+ 0·58	3·0	0·11	0·0638	—	+0·25	+0·0275	0·0070
+ 1·02	6·2	0·03	0·0306	—	-0·19	-0·0057	0·0011
+ 0·84	5·8	0·03	0·0252	—	-0·01	-0·0003	0·0000
Suma		0·46	0·3808	0·83		+0·0336 -0·0326	0·0149

Jako spostrzeżenie 1 traktujemy tu nadwyżkę pomierzonej wysokości ponad 728 m jako wspólne wszystkim pomiarom.

Jako kontrola powinno być $[p]=0$, lub bardzo mała liczba, różna od zera skutkiem uproszczeń w rachunkach.

Średni błąd pojedynczego spostrzeżenia

$$m = \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.0149}{5}} = \pm 0.055 \text{ m}$$

i średni błąd najprawdopodobniejszej wartości X

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{0.055}{\sqrt{0.46}} = \pm 0.080.$$

Zatem $H = 728 + X = 728.83 \text{ m}$ ze średnim błędem $\pm 0.08 \text{ m}$.

§ 8. Wyrównanie błędów pomiaru kątów w trójkącie płaskim.

Mierząc trzy kąty w płaskim trójkącie, dostaniemy, wskutek błędów pomiaru, jakąś różnicę sumy tych kątów w porównaniu z 180°

$$\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = w.$$

Najprostszym sposobem wyrównania błędów byłby: różnicę „ w ” rozdzielić równomiernie na wszystkie 3 kąty. Do tego samego wniosku dojdziemy za pomocą następującego rozważania:

Uważajmy na razie jeden kąt jako niewiadomy. Dla pierwszego kąta mamy dwa niezależne spostrzeżenia:

$$x_1 = \alpha \text{ z wagą } p_1 = 1 \dots \dots \dots (68)$$

$$\text{i } x_2 = 180^\circ - (\beta + \gamma) \text{ z wagą } p_2 = \frac{1}{2} \dots \dots \dots (69)$$

Waga $p_2 = \frac{1}{2}$ na następującej podstawie:

Średni błąd dla x_1 jest $m_1 = \pm m$, a średni błąd dla x_2 złożonego z dwu pomiarów, będzie $m_2 = \pm m \pm m = m\sqrt{2}$ na podstawie równania (16).

$$\text{Zatem } m_1 : m_2 = 1 : \sqrt{2}$$

$$\text{więc } p_1 : p_2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} = 1 : \frac{1}{2}$$

Mając wagi, obliczymy średnią z x_1 i x_2 według wzoru $x = \frac{[p x]}{[p]}$ t. j.:

$$x = \frac{1 \times \alpha + \frac{1}{2} \times [180 - (\beta + \gamma)]}{1 + \frac{1}{2}} \dots \dots \dots (70)$$

$$\text{Ponieważ } \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = w \dots \dots \dots (71)$$

zatem $180 - (\beta + \gamma) = \alpha - w$, co wstawivszy w (70) otrzymamy:

$$x = \frac{\alpha + \frac{1}{2} (\alpha - w)}{1 + \frac{1}{2}} \quad \text{czyli:}$$

$$x = \frac{2\alpha + (\alpha - w)}{2 + 1} = \frac{3\alpha - w}{3} = \alpha - \frac{w}{3} \dots \dots \dots (72)$$

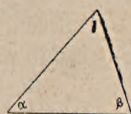


Fig. 38.

To samo stosuje się także i do dwóch innych kątów trójkąta, które oznaczamy przez y i z , a wówczas otrzymamy:

$$x = \alpha - \frac{w}{3}$$

$$y = \beta - \frac{w}{3}$$

$$z = \gamma - \frac{w}{3}$$

$$\text{Suma } x + y + z = \alpha + \beta + \gamma - w.$$

Zatem różnicę w dzielimy równomiernie między wszystkie 3 kąty w trójkącie, celem wyrównania błędów pomiaru.

Chcąc obliczyć średnie błędy, powróćmy do równań (68.) i (69.), przedstawiających dwa spostrzeżenia.

Poprawka v_1 dla pierwszego spostrzeżenia x_1 wynosi:

$$v_1 = \frac{w}{3} \dots \dots \dots (73)$$

a poprawka v_2 dla x_2 wynosi:

$$v_2 = + \frac{w}{3} + \frac{w}{3} = \frac{2w}{3} \dots \dots \dots (74)$$

Średni błąd pojedynczego obliczenia, o wadze 1, obliczy się według wzoru

$$m = \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-1}} \text{ — t. j.}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2}{2-1}} = \pm \sqrt{\left(\frac{w}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2w}{3}\right)^2} = \pm \frac{w}{\sqrt{3}} \dots (75)$$

Ponieważ pomiarom kątów przed wyrównaniem przypisano wagę 1 z powodu równej dokładności pomiarów, przeto m przedstawia średni błąd kąta, lecz przed wyrównaniem.

Po wyrównaniu błędów otrzymaliśmy większą dokładność, zatem i waga tych nowych spostrzeżeń będzie większą. Waga mianowicie dla x będzie miała wartość

$$p_1 + p_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

a stąd średni błąd dla x , y lub z według wzoru $M = \frac{m}{\sqrt{[p]}}$ (równ. 55.)

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{w \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \pm \frac{w}{3} \sqrt{2} \dots \dots \dots (76)$$

§ 9. Wyrównanie błędów pomiaru kątów w trójkącie, gdy wagi są różne.

Przyjmijmy teraz pomiary kątów w trójkącie, wykonane z różną dokładnością, czyli mające różne wagi i postawmy sobie zadanie wyrównania błędów, mając jako kontrolę sumę kątów w trójkącie.

Dane są pomiary trzech kątów $\alpha \quad \beta \quad \gamma \dots \dots \dots (77)$

o wagach $p_\alpha \quad p_\beta \quad p_\gamma \dots \dots \dots (78)$

oraz różnica $\alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = w \dots \dots (79)$

Jeżeli m jest średnim błędem dla wagi $= 1$, to na podstawie wywodów i równania (53.) napiszemy:

$$m_\alpha = \frac{m}{\sqrt{p_\alpha}} \quad m_\beta = \frac{m}{\sqrt{p_\beta}} \quad m_\gamma = \frac{m}{\sqrt{p_\gamma}} \dots \dots \dots (80)$$

$$\text{czyli } m^2_{\alpha} = m^2 \left(\frac{1}{p_{\alpha}} \right) \quad m^2_{\beta} = m^2 \left(\frac{1}{p_{\beta}} \right) \quad m^2_{\gamma} = m^2 \left(\frac{1}{p_{\gamma}} \right) \quad \dots (81)$$

$$\text{według zaś równania (18.): } m^2_{\beta} + m^2_{\gamma} = m^2 \left(\frac{1}{p_{\beta}} + \frac{1}{p_{\gamma}} \right) \quad \dots (81a)$$

Ponieważ według równania (15.)

$$M^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 \dots$$

wagi zaś są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów, t. j.

$$M^2 = \frac{1}{p} \quad m^2 = \frac{1}{p} \quad m'^2 = \frac{1}{p'} \quad \text{i t. d.,}$$

więc podstawiając te wartości w równanie (15.), otrzymamy:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''} \dots = \left[\frac{1}{p} \right] \dots (82)$$

i podobnie według równania (16.) $M^2 = n \cdot m^2$

$$\frac{1}{p} = n \frac{1}{p} \dots (83)$$

Naznaczmy przez p_1 wagę pomierzonego kąta α , zaś przez p_2 wagę sumy pozostałych kątów β i γ — to analogicznie do równania (82.) i (83.) będzie:

$$p_1 = \frac{1}{\frac{1}{p_{\alpha}}} = p_{\alpha} \quad \text{i} \quad p_2 = \frac{1}{\frac{1}{p_{\beta}} + \frac{1}{p_{\gamma}}} \dots (84)$$

Teraz mamy zadanie podobne do 70., t. j. mając wagi, obliczyć średnią

$$x = \frac{[p_1]}{[p]}$$

$$x = \frac{p_1 \alpha + p_2 [180 - (\beta + \gamma)]}{p_1 + p_2} = \frac{p_1 \alpha + p_2 (\alpha - w)}{p_1 + p_2}$$

czyli po rozwinięciu i uproszczeniu

$$x = \alpha - \frac{p_2}{p_1 + p_2} \cdot w.$$

Wstawmy teraz za p_1 i p_2 wartość z równania (84.), to ostatecznie dostaniemy

$$x = \alpha - \frac{\frac{1}{p_{\alpha}}}{\left[\frac{1}{p} \right]} \cdot w \dots (85)$$

$$\text{gdzie } \left[\frac{1}{p} \right] = \frac{1}{p_{\alpha}} + \frac{1}{p_{\beta}} + \frac{1}{p_{\gamma}}$$

Po zredukowaniu wag, na podstawie równania (56.) i (57.), otrzymamy dla wagi = 1

$$m = \frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p} \right]}} \dots (86)$$

Następnie średni błąd któregośkolwiek kąta przed wyrównaniem, n. p.

$$m_{\alpha} = \frac{m}{\sqrt{p_{\alpha}}} = w \frac{\sqrt{\frac{1}{p_{\alpha}}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p} \right]}} \dots (87)$$

i wreszcie średni błąd któregokolwiek kąta po wyrównaniu, n. p.

$$M_{\alpha} = w \frac{\sqrt{\frac{1}{p_{\alpha}} \sqrt{\frac{1}{p_{\beta}} + \frac{1}{p_{\gamma}}}}}{\left[\frac{1}{p} \right]} \dots \dots \dots (88)$$

Zastosowanie powyższych wzorów wykaże się najlepiej na następnym przykładzie, wyjętym z pomiarów badęńskich. Wprawdzie wprowadzanie tego rodzaju, jak zaraz zobaczymy, wag spostrzeżeń, powoduje wątpliwości i niepotrzebne zagmatwanie, czego zresztą w praktyce się unika, lecz jako przykład może być z korzyścią przytoczone.



Fig. 39.

Dane:

z pomiarów:	$\alpha = 72^{\circ} 16' 44.86''$	Wagi: $p_{\alpha} = 27$ $p_{\beta} = 42$ $p_{\gamma} = 65$
	$\beta = 90^{\circ} 1' 56.46''$	
	$\gamma = 17^{\circ} 41' 17.43''$	
	$\text{Suma} = 179^{\circ} 59' 58.75''$	
	powinna zaś być $180^{\circ} 0' 0.29''$	
	$w = -1.54''$	

Z powyższych danych obliczono:

$$\frac{1}{p_{\alpha}} = 0.037 \quad \frac{1}{p_{\beta}} = 0.024 \quad \frac{1}{p_{\gamma}} = 0.015 \quad \left[\frac{1}{p} \right] = 0.076$$

stąd poprawki kątów

$$v = \frac{\frac{1}{p}}{\left[\frac{1}{p} \right]} \cdot w$$

$$v_{\alpha} = \frac{0.037}{0.076} \cdot 1.54'' = +0.75'' \quad v_{\beta} = +0.49'' \quad v_{\gamma} = +0.30''$$

Pomiar:	Poprawki:	Wyrównanie:
$72^{\circ} 16' 44.86''$	$+ 0.75''$	$72^{\circ} 16' 45.61''$
$90^{\circ} 1' 56.46''$	$+ 0.49''$	$90^{\circ} 1' 56.95''$
$17^{\circ} 41' 17.43''$	$+ 0.30''$	$17^{\circ} 41' 17.73''$
$179^{\circ} 59' 58.75''$	$+ 1.53''$	$180^{\circ} 0' 0.29''$

Według równania 86. znajdziemy średni błąd dla jednostki wagi

$$m = \pm 5.59''$$

zaś według 88. — średni błąd wyrównanych kątów i zestawimy następujący rezultat:

$$\alpha = 72^{\circ} 16' 45.61'' \pm 0.77''$$

$$\beta = 90^{\circ} 1' 56.95'' \pm 0.72''$$

$$\gamma = 17^{\circ} 41' 17.73'' \pm 0.61''$$

Wyrównanie błędów pomiaru kątów, w ścisłym znaczeniu, stosuje się przy pomiarach sieci tryangulacyjnej. Nauka o tem sięga paruset lat i ma już bogatą własną historję. Pierwszym, który zastosował pomiary tryangulacyjne, był Willebrord Snel van Roien (Snellius). On przeprowadził około 1610 r. tryangulację w Niderlandach. Następnie wykonali Francuzi bardzo ważne pomiary, mianowicie pomiary południka w Preru i Laplandzie w r. 1736. Podobnie też Méchain i Delambre wykonali pomiary między Düńkirchen a Barceloną w r. 1792.

W końcu 18. wieku podjęli Anglicy pomiar kraju na podstawie tryangulacji; w Rosyi 1821 do 1831 r.; w Danii 1816 r. Od tego czasu począwszy, teoria wyrównania błędów weszła na właściwe tory, zwłaszcza po ogłoszeniu dzieła Gaussa 1826 r.

Niemal wszystkie tego rodzaju prace ogłoszone są drukiem, zatem przystępne. Wiadome są więc dokładności pomiarów, błędy i kontrole, słowem materiału jest dosyć, by na tej podstawie stworzyć instrukcje, na których oparte są i ustalone w poszczególnych państwach metody tryangulacyjne, t. j. sposoby wykonywania pomiarów i obliczania wyników.

Dotycząca literatura zawiera liczne teorie, biorące zazwyczaj swe nazwy od wynalazców; wszystkie one zdążają jednak do jednego celu: ujęcia niewidocznych podczas wykonywania pomiarów, a jednak istniejących błędów w pewne formuły, obliczenia ich i poprawienia spostrzeżeń za pomocą rachunku. Tam, gdzie niema kontroli teoretycznej, zastąpiono ją granicami wziętymi z doświadczeń.

W zwykłych warunkach, nie będziemy mieli do czynienia z tryangulacją, chyba czwartorzędną i z wyznaczeniem punktów, nawiązanych do tej tryangulacji — niekiedy do 3-ciorzędnej.

Natomiast często spotykać się będziemy ze zdjęciami wieloboków. Pamiętając więc o bliższym celu praktycznym, pomijamy dalsze wywody dotyczące się pomiarów tryangulacyjnych, zwłaszcza I, II i III-rzędnych. Zarazem pozostawiamy opis pomiarów kierunków, obliczenia współrzędnych i wyrównanie na później, do dalszych rozdziałów.

§ 10. Sprawdzenie łąt i taśm mierniczych.

Wszystkie przyrządy służące do pomiaru długości, powinny być tak przed użyciem, jak i od czasu do czasu badane i porównywane z miarą normalną, względnie jej kopia, urzędownie sprawdzoną z podaniem skonstatowanego błędu.

Błędy miar używanych w polu, przy uwzględnieniu działania temperatury podczas sprawdzania, nie powinny przekraczać następujących granic:

1.	dla taśmy stalowej 20 m długiej	± 3.5 mm
2.	" " " 10 " "	± 2.4 "
3.	" łąty 5 " "	± 1.6 "
4.	" " 3 " "	± 1.3 "
5.	" " 2 " "	± 1.1 "

przy temperaturze $+15^{\circ}$ C.

Do sprawdzania miar służy urządzenie, zwane komparatorem (fig. 40). Jest to brus dębowy, mający w odstępie nieco większym niż długość łąty, dwa ostrza stalowe S i S'. Odstęp obu tych ostrzy mierzy się łątą normalną w ten sposób, że przykładając się ją jednym końcem do jednego ostrza, między zaś drugi koniec a ostrze



Fig. 40.

wsuwa się klin z odpowiednio urządzoną podziałką, za pomocą którego można bardzo łatwo zmierzyć ów odstęp z dokładnością 0.1 mm, szacując nadto setne części mm. Znając teraz długość komparatora, kładziemy w miejsce łąty normalnej inną, której długością ma być zbadana i mierzymy znowu za pomocą klina odstęp między końcem łąty a ostrzem.

Nazwijmy znaną odległość obu ostrzy przez $S S'$, długość sprawdzanej łąty przez l , zaś przez o zmierzony odstęp za pomocą klina, to

$$S S' = l + o$$

a stąd niewiadoma $l = S S' - o$.

Taśmę stalową sprawdza się, wyciągając ją na podłodze lub odpowiednim rusztowaniu, i mierząc następnie jak najdokładniej jej długość za pomocą łąt. Do wyciągania taśmy używa się 10-kilowych ciężarków, zawieszonych za pośrednictwem bloków u końców taśmy.

Pomiar ten powtarza się kilka razy, oblicza w znany sposób średnią arytmetyczną i błąd, sprawdza się odstęp między poszczególnymi metrami czyli podział

taśmy. Błąd taśmy nie powinien przekraczać połowy dozwolonego błędu odpowiedniej długości.

Pod błędem taśmy rozumiemy różnicę między jej rzeczywistą a nominalną długością. Taśmę powinno się sprawdzać przy temperaturze 15° C.

§ 11. Wyznaczenie punktu pośredniego, w danej odległości od początku, na prostej, której długość jest znana.

Niech będzie dana długość (fig. 41.) $AB = L$, na której mamy wyznaczyć punkt C w odstępnie l od A . W tym celu odmierzymy odcinek l od punktu A , następnie odcinek $l' = L - l$ od punktu B .

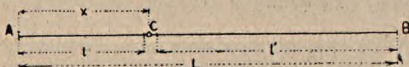


Fig. 41.

Z powodu nie dających się uniknąć błędów w pomiarze l i l' , jakoteż i dlatego, że odcinek AB , ma także pewien błąd, chociaż długość jego uważamy w tym wypadku jako już ustaloną, pomiary wogóle się nie zejdą. Albo między l i l' pozostanie jakiś

nie jakiś odstęp, albo te odcinki częściowo się nakryją, wogóle powstanie jakiś błąd „w”.

Na oznaczenie długości L mamy teraz spostrzeżenie:

$$L = l + l' + w \dots \dots \dots (1)$$

Uważajmy długość $AC = x$ jako niewiadomą, to na oznaczenie jej mamy następujące spostrzeżenia:

$$x_1 = l \quad \text{z wagą } p_1 = \frac{1}{l} \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{i } x_2 = L - l' \quad \text{„ „}$$

$$\text{lub } x_2 = l + w \quad \text{„ „ } p_2 = \frac{1}{l'} \dots \dots \dots (3)$$

Wagi przyjmujemy, w myśl poprzednich wywodów, jako odwrotnie proporcjonalne do długości. Z równania 2. i 3. obliczymy

$$x = \frac{[p_1 l]}{[p]} = \frac{p_1 l + p_2 (l + w)}{p_1 + p_2} = \frac{p_1 l + p_2 l + p_2 w}{p_1 + p_2}$$

$$\text{czyli } x = \frac{l(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2} + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \cdot w = l + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \cdot w \dots \dots \dots (4)$$

wstawiając za p_1 i p_2 wartości z 2. i 3. otrzymamy

$$x = l + \frac{1}{1 + l'} \cdot w = l + \frac{1}{L} \cdot w = l + \frac{w}{L} \cdot l \dots \dots \dots (5)$$

t. z. ażeby wyznaczyć punkt C należy dodać (ewentualnie odjąć) do błędnego pomiaru l , część „w” proporcjonalną do długości l .

Teraz znajdziemy błędy:

$$v_1 = x - x_1 = l + \frac{w}{L} \cdot l - l = \frac{w}{L} \cdot l \dots \dots \dots (6)$$

$$\text{i } v_2 = x - x_2 = x - (l + w) = l + \frac{w}{L} \cdot l - l - w$$

$$v_2 = \frac{1}{L} \cdot w - w = w \left(\frac{1}{L} - 1 \right) \text{ czyli}$$

$$v_2 = w \frac{1 - L}{L} = \frac{-l'}{L} \cdot w \dots \dots \dots (7)$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p_1 v_1]}{n - 1}} \quad \text{i} \quad M = \pm \frac{m}{\sqrt{[p]}}$$

$$\text{w końcu } m = \pm \frac{w}{L} \sqrt{1+l'} = \pm \frac{w}{L} \sqrt{1+l'} \quad \text{i} \quad M = \pm \frac{w}{L} \sqrt{1+l'} \dots (7a)$$

największy błąd będzie dla $l=l' = \frac{L}{2}$ mianowicie:

$$M = \pm \frac{w}{L} \cdot \frac{L}{2} = \pm \frac{w}{2}$$

ROZDZIAŁ IV.

§ 1. Zagadnienia o tyczeniu i pomiarach długości.

Przez dany punkt C (fig. 42.) wytyczyć prostą, równoległą do linii AB.

Jeżeli odległość punktu C od linii AB nie przenosi 50 m, to zadanie jest łatwe do wykonania.

Za pomocą jakiegokolwiek węgielnicy znajdziemy punkt D jako rzut punktu C na kierunek AB — wyznaczony w polu palikami i tyczkami. — Następnie, zmierzmy długość CD i wytyczymy w innym punkcie, n. p. w B, tą samą węgielnicą, drugą prostopadłą do AB — na której odmierzymy odcinek BE=CD. Wówczas punkty C i E wyznaczą nam kierunek linii, równoległej do AB.

Jeżeli odległość punktu C jest zbyt wielką dla węgielnicy, to postąpimy w inny sposób, przedstawiony na fig. 43.

Obierzemy mianowicie na kierunku AB dowolny punkt D i zmierzmy długości AC, CD i AD. Długość CD przepołowimy, t. j. wyznaczmy punkt F, podobnie punkt E w połowie długości AD. Przedłużmy w końcu linię EF i odmierzymy na niej długość

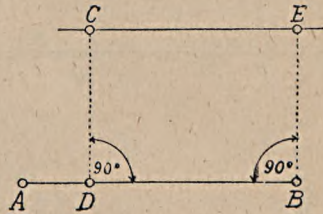


Fig. 42.

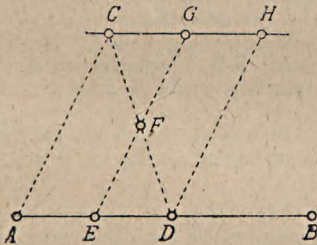


Fig. 43.

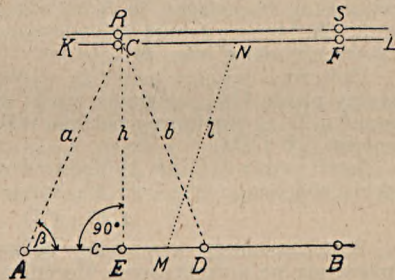


Fig. 44.

$EG = AC$. Wówczas kierunek CG jest równoległy do AB. — Linię CG możemy albo przedłużyć, albo w ten sam sposób wyznaczyć jeszcze n. p. punkt H. Konstrukcja powyższa jest tak jasną i łatwą, że dowodu na jej słuszność nie ma potrzeby przeprowadzać.

2. W danej odległości l od prostej AB (fig. 44.) wytyczyć prostą, równoległą do AB.

Jeżeli odległość jest niewielką, to prosto w dwóch punktach n. p. A i B, wytyczymy za pomocą węgielnicy prostopadłe, na których odmierzymy długość l, i otrzymamy dwa punkty nowej prostej, równoległej do AB (na fig. 44. nie wykreslano nawet tej konstrukcji).

Jeżeli jednak odległość jest większa, to postąpimy w następujący sposób:

Wyznamy kierunek MN w przybliżeniu prostopadły do AB i odmierzymy $MN = l$.

Następnie wyznaczmy prostą NF w sposób opisany pod 1, t. j. NF będzie równoległą do AB, lecz odległość tych dwóch równoległych będzie prawdopodobnie mniejszą od l.

Należy więc teraz przedewszystkim zbadać, jaka jest odległość obu tych linii (NF przedłużmy w obie strony do K i L).

Obierzmy na kierunku KL dowolny punkt C i na kierunku AB punkt D; pomierzmy boki AC = a, CD = b, AD = c. Z tych długości obliczymy:

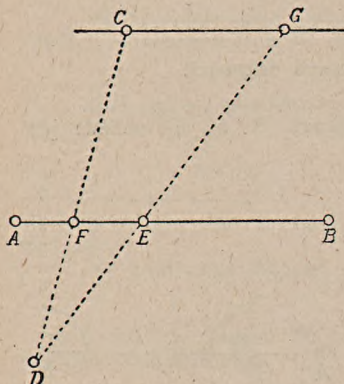


Fig. 45.

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$$

$$\text{następnie } \sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\text{a stąd } h = a \cdot \sin \beta$$

Dla kontroli obliczymy jeszcze

$$AE = a \cdot \cos \beta$$

$$\text{gdzie } \cos \beta = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

Odcinek AE odtniemy od punktu A ku B i zmierzmy EC = h jako kontrolę obliczonego już poprzednio h. To „h“ jest teraz dokładną odległością obu linii równoległych AB i KL i będzie się nieco różniła od żądanej odległości l.

W końcu, za pomocą węgielnicy wytyczymy w punktach C i F dwie prostopadłe i odmierzymy na nich różnicę l-h, skutkiem czego dostaniemy dwa punkty R i S naszej prostej, równoległej do AB i odległej od niej rzeczywiście o l.

3. Za pomocą tyczek i taśmy wyznaczyć linię równoległą do AB, przechodzącą przez punkt C (fig. 45).

Obierzmy dowolny punkt D, wytyczmy i pomierzmy długość DC. Następnie wytyczmy prostą DE, obierając punkt E na kierunku AB, i przedłużmy ją dalej w kierunku DG. Pomierzmy odcinki DF i DE znalazłszy punkt F, jako przecięcie kierunków AB i DC.

Jeżeli prosta CG ma być równoległą do AB, to trójkąty FDE i CDG będą do siebie podobne, zatem boki ich muszą być proporcjonalne, czyli:

$$CD : FD = GD : ED.$$

W tej proporcji nie znamy tylko długości GD, którą też zaraz obliczymy i odmierzymy na wyznaczonym kierunku, a otrzymamy punkt G, leżący na równoległej do AB.

Inny sposób rozwiązania (fig. 46.):

Wytyczmy i pomierzmy długości AC, BC i AB. Obierzmy punkt D na linii AB i zmierzmy odcinek BD.

Na podstawie fig. 46. wstawmy proporcję:

$$AB : BD = BC : BE,$$

z której obliczymy BE i punkt E wyznaczmy.

Wytyczmy w końcu i przedłużmy kierunek DE, na którym odmierzymy DF = AC, wówczas wyznaczony punkt F leży na CF równoległej do AB.

Kierunek CF możemy przedłużyć lub w podobny sposób wyznaczyć jeszcze dalszy punkt G.

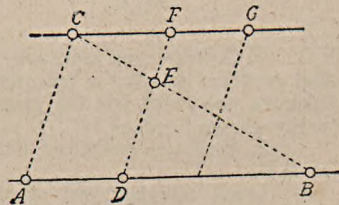


Fig. 46.

Inny sposób rozwiązania podaje fig. 47.:

Dany jest kierunek AB i punkt C . Wytoczmy BC , obierzmy na niej punkt D i wytoczmy kierunek AD , przedłużając go poza punkt D . Pomierzmy w końcu długości AD , BD i DC . Jeżeli prosta CX ma być równoległą do AB , to trójkąty ADB i CDF muszą być podobne. Z podobieństwa zaś trójkątów wynika, że

$$BD : AD = CD : DF,$$

$$\text{stąd zaś obliczymy } DF = \frac{AD \times CD}{BD}$$

i odcinek DF odmierzymy na przedłużeniu AD — otrzymamy punkt F , który wraz z punktem C wyznacza kierunek równoległy do AB .

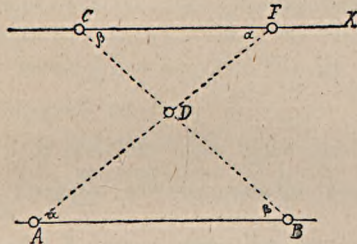


Fig. 47.

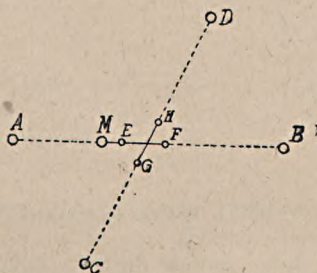


Fig. 48.

4. Wyznaczyć w polu punkt przecięcia się dwóch kierunków AB i CD (fig. 48):

Wytoczmy za pomocą tyczek dwa punkty E i F na prostej AB , leżące w pobliżu spodziewanego punktu przecięcia się obu linii. W punktach E i F wbijemy dwie szpilki od taśmy i w ten sam sposób wytoczmy punkty G i H na drugim kierunku CD . Przeciągnąwszy przez E i F jeden sznurek, zaś przez G i H drugi, otrzymamy na skrzyżowaniu ich żądany punkt.

Drugi sposób: Ustawmy na kierunku AB tyczkę w punkcie M , natenczas tyczki A i M wyznaczają kierunek, na którym pomocnik z tyczką poruszać się będzie powoli wstecz, ku B . Ustawiliśmy się teraz za tyczką C , czekać będziemy, aż posuwający się pomocnik znajdzie się wraz z tyczką na kierunku CD . Ponieważ w tej chwili tyczka stanie tak na linii AB , jak i na CD , zatem wyznaczy ich punkt przecięcia.

5. Na linii AB wyznaczyć kilka punktów pośrednich, jeżeli wskutek przeszkód, n. p. domów, nie widać punktu B ze stanowiska A i odwrotnie (fig. 49).

Obierzmy dowolny punkt C , wytoczmy i pomierzmy długości CA i CB , na których znów odmierzymy odcinki: $CD = n \cdot CA$ i $CE = n \cdot CB$. W takim razie trójkąty ACB i DCE są podobne.

Ażeby wyznaczyć punkt leżący na kierunku $C1'$ — wytoczmy ten kierunek, znajdziemy jego punkt przecięcia F z prostą DE i pomierzmy odcinek CF . Jeżeli punkt 1 ma leżeć na linii AB , to musi zachodzić relacja:

$$CF = n \cdot C1 \quad \text{czyli} \quad C1 = \frac{CF}{n}$$

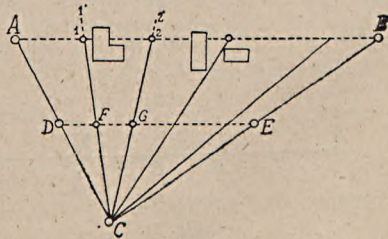


Fig. 49.

Obliczywszy długość $C1$ i odmierzymy ją na kierunku $C1'$, a otrzymamy punkt 1 , leżący na AB . Podobnie wytoczmy punkt $2, 3$ i t. d.

6. Z punktu C (fig. 50.) wytyczyć prostopadłą na kierunek AB za pomocą taśmy i tyczek.

Obierzmy na prostej AB dwa punkty E i F, tak, by na oko szacując, leżały po obu stronach przyszłej prostopadłej. Wytyczmy i pomierzmy $EC = a$, $CF = b$ i $EF = c$. Niech na rysunku będzie CD prostopadłą do AB. Nazwijmy $CD = c$, $ED = d$, $DF = e$, to $d + e = m$. Z trójkątów prostokątnych EDC i FDC otrzymamy:

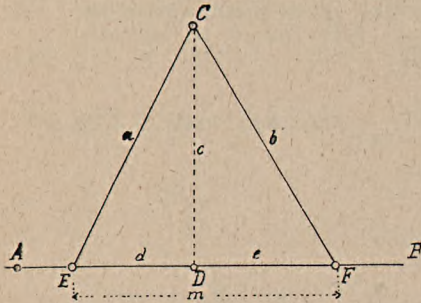


Fig. 50.

punktu E do D. Wówczas punkt D jest rzutem C na kierunek AB, czyli CD jest prostopadłą do AB.

Drugi sposób (fig. 51.) Obierzmy na prostej AB, dwa punkty E i F; wytyczmy i zmierzmy długości $CF = a$, $CE = b$, $EF = e$, $DE = d$. Jeżeli CD = c przedstawia na rysunku prostopadłą do AB to $DF = m = d + e$. Z trójkątów prostokątnych CDE i CDB otrzymamy:

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 - d^2 & \text{czyli} & & b^2 - d^2 &= a^2 - m^2 & \text{a ponieważ} \\ c^2 &= a^2 - m^2 & & & m &= d + e & \text{więc} \\ b^2 - d^2 &= a^2 - d^2 - 2d \cdot e - e^2 & \text{stąd zaś} & & 2 \cdot d \cdot e &= a^2 - e^2 - b^2 & \text{czyli} \\ d &= \frac{a^2 - e^2 - b^2}{2e} \end{aligned}$$

Obliczywszy d odetniemy ją na AB, od punktu E do D, który to punkt, będzie rzutem punktu C, czyli $CD \perp AB$.

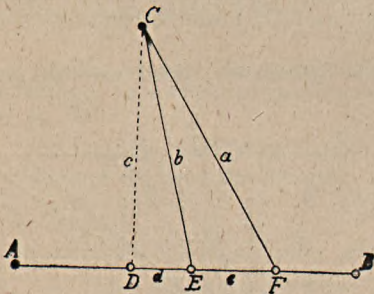


Fig. 51.

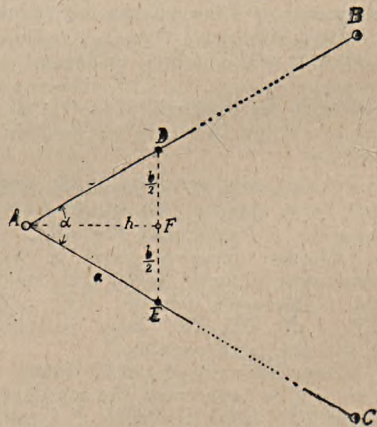


Fig. 52.

7. Za pomocą taśmy zmierzmy kąt α między danymi kierunkami AB i AC (fig. 52.)

Odmierzmy na obu kierunkach dowolną długość $AD = AE = a$, 20 do 100 m zależnie od długości ramion i warunków terenowych. Następnie zmierzmy długość $DE = b$

i wyznaczmy punkt środkowy na tej linii, t. j. F — tak, że $DF = EF = \frac{b}{2}$, w końcu, zmierzmy długość $AF = h$. Ponieważ trójkąt DAE jest równoramienny, więc h jest jego wysokością i dzieli go zarazem na dwa przystające, prostokątne trójkąty AFD i AFE. Z elementów jednego z tych trójkątów otrzymamy:

$$\frac{b}{2} : a = \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{czyli} \quad \frac{b}{2a} = \sin \frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad \frac{h}{a} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{stąd zaś} \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{bh}{a^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4h^2 - b^2}{4a^2} \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{lub:} \quad \frac{b}{2} : h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{czyli} \quad \frac{b}{2h} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \dots \dots \dots (3)$$

za pomocą logarytmów lub tablic, znajdziemy α lub $\frac{\alpha}{2}$.

Powyższe zadanie możemy też rozwiązać w inny sposób, wskazany na fig. 53.

Na kierunku AB odmierzymy dowolną długość AD = a, podobnie na kierunku AC . . . AE = b i zmierzmy długość DE = c. Mamy więc trójkąt, w którym długości wszystkich boków są znane. Oznaczymy kąty przez $\alpha \beta \gamma$, odpowiednio do figury, obliczymy:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \quad \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \quad \text{gdzie} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

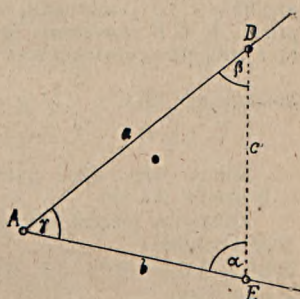


Fig. 53.

podobnie obliczymy $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ i $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} \dots$ wzgl.

$\alpha \beta$ i γ dostaniemy za pomocą logarytmów.

8. Znaleźć długość prostej AB (fig. 54.), jeżeli z powodu przeszkód, nie można jej bezpośrednio pomierzyć.

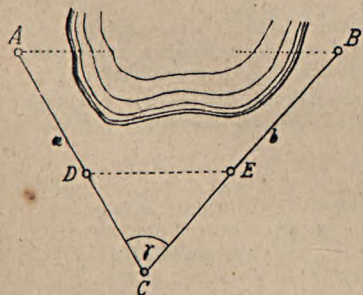


Fig. 54.

Obierzmy dowolny punkt C tak, by AC i BC można było pomierzyć. Po zmierzeniu otrzymamy $AC = a$ $BC = b$. Odmierzymy teraz na obu kierunkach odcinki proporcjonalne $CD = \frac{a}{n}$ i $CE = \frac{b}{n}$, naten-
 czastrójkąty ACB i DCE są podobne czyli $DE = \frac{AB}{n}$. Zmierzwszy wreszcie długość DE, obliczymy $AB = n \cdot DE$.

Można również, pomierzwszy w znany już sposób kąt γ , oraz a i b, obliczyć z twierdzenia Carnotta:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

9. Wyznaczyć odległość punktów A i B, jeżeli tylko jeden z nich jest dostępny fig. 55.

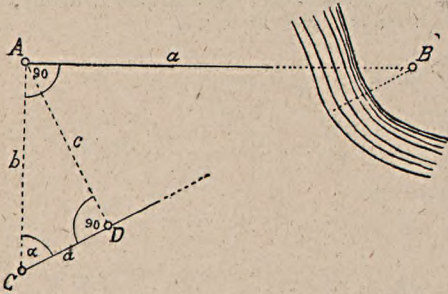


Fig. 55.

W punkcie dostępnym A, wytyczmy prostopadłą do AB i odmierzymy na niej dowolną długość $AC = b$. Wytyczmy teraz z punktu C część prostej w kierunku CB, i zmierzmy w znany sposób kąt α . Natenczas z trójkąta prostokątnego CAB obliczy się

$$AB = a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Drugi sposób: Prócz prostopadłej b na fig. 55, wytyczmy jeszcze AD prostopadłe do CB.

$$\begin{aligned} \text{Oznaczmy: } AB &= a & AD &= c \\ AC &= b & CD &= d. \end{aligned}$$

Z rysunku widać, że $ABC \sim CDA$ zatem $a : b = c : d$ a stąd $a = \frac{bc}{d}$.

10. Wyznaczyć odległość dwu punktów nieprzystępnych A i B (fig. 56.)

Obierzmy dowolny punkt C, z którego oba punkty A i B są widoczne. Wytyczmy linię CD prostopadłą do CA i CE prosp. do CB. Zmierzmy teraz kąty α i β to z trójkątów prostokątnych DCA i ECB

dostaniemy: $AC = CD \operatorname{tg} \alpha$
i $BC = CE \operatorname{tg} \alpha$

Mamy więc dane boki AC i BC w trójkącie ACB.

Zmierzmy jeszcze kąt γ i obliczymy według Cartotta
 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \gamma$,
a stąd AB.

Drugi sposób według fig. 57.

Obierzmy punkt C i dwa dowolne kierunki CE i CD, na których wyznaczmy rzuty punktów A i B.

Zmierzmy długość CD i CE i odetnimosy: $CG = \frac{CD}{n}$ i $CF = \frac{CE}{n}$

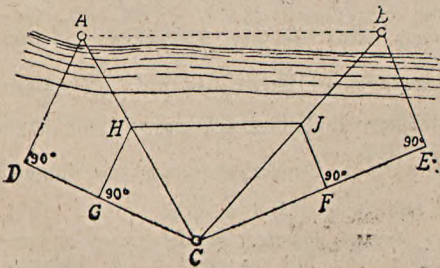


Fig. 57.

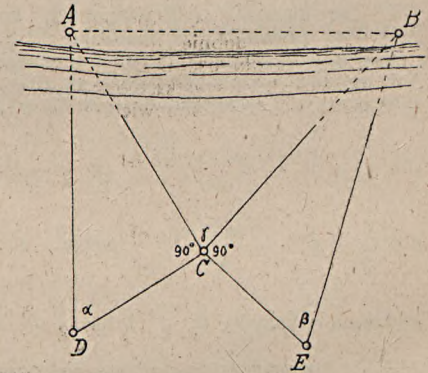


Fig. 56.

w punktach zaś G i F wytyczmy prostopadłe aż do przecięcia z kierunkami CA i CB, t. j. do punktów H i I.

Z rysunku jest widocznym, że trójkąty HCI i ACB są podobne, tudzież że

$$CI = \frac{CB}{n} \text{ i } CH = \frac{CA}{n} \text{ zatem}$$

$$HI = \frac{AB}{n} \text{ czyli stąd } AB = n \cdot HI.$$

HI, pomierzmy bezpośrednio.

§ 2. Zdjęcia małych obszarów.

Pod zdjęciem jakiegoś obszaru rozumiemy pomiary odpowiednich elementów wykonane według zasad nauki o miernictwie w ten sposób, że zebrane daty umożliwią narysowanie planu danego obszaru, zatem jego granic i wszelkich przedmiotów na nim się znajdujących, jak: budynków, dróg i t. p. Rysunek wykonany na podstawie pomiarów, powinien być wiernym obrazem zdjętego obszaru, naturalnie w pomniejszeniu, czyli skali. Na podstawie planu możemy obrachować powierzchnię lub podzielić ten obszar na części.

Na razie mówić będziemy o zdjęciach granic czyli katastralnych a nie topograficznych. Przy tej sposobności należy przypomnieć, że wszelkie pomiary i zdjęcia wykonywa się w rzucie na poziom pozorny.

Różne metody zdjęć poznamy najlepiej z przykładów.

1. Dana jest parcela, której granice mają kształt trójkąta.

Pomierzwszy wszystkie 3 boki trójkąta, będziemy już mogli trójkąt narysować i obliczyć jego powierzchnię.

2. Zdjąć parcelę, której granice mają kształt jakiegokolwiek czworoboku (fig. 58.) lub wieloboku (fig. 59.)

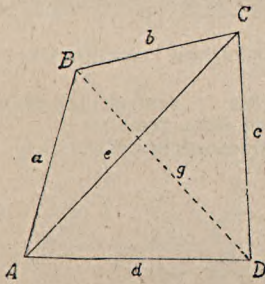


Fig. 58.

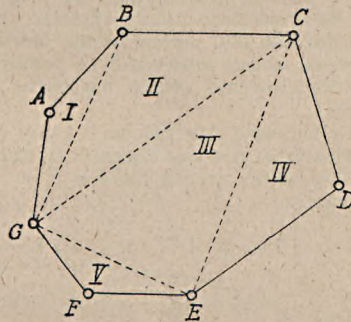


Fig. 59.

W pierwszym wypadku wystarczy pomierzyć boki czworoboku a, b, c, d , i przekątnią $AC = e$. Mamy wówczas wszystko, czego nam potrzeba do narysowania obu trójkątów i obliczenia ich powierzchni, według wzoru:

$$F_1 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)}$$

gdzie a, b, c są bokami trójkąta ABC ;

$$\text{zaś } s = \frac{a+b+e}{2}.$$

W ten sam sposób obliczymy powierzchnię drugiego trójkąta ADC

$$F_2 = \sqrt{s(s-d)(s-c)(s-e)}$$

cała zaś powierzchnia czworoboku $F = F_1 + F_2$.

W drugim wypadku (fig. 59.) podzielimy wielobok na trójkąty I. II. . . V, i pomierzmy wszystkie ich boki.

Wówczas potrafimy całą parcelę i narysować i obliczyć jej powierzchnię złożoną z powierzchni poszczególnych trójkątów. Przy wykonywaniu pomiarów należy położenie granic i linii pomocniczych wytyczyć tyczkami a zarazem i naszkicować.

3. Parcelę (fig. 60.) zdjąć za pomocą rzędnych i obliczyć jej powierzchnię.

O ile poszczególne rzędne nie są zbyt długie, t. j. nie przekraczają 50 m, możemy użyć węgielnicy zwierciadlanej lub przyzmatycznej. Przedewszystkiem przyjmujemy i wytyczymy palikami główną oś pomocniczą AB . Następnie, punkty załamania granic oznaczmy za pomocą pionowo wbitych tyczek. Posuwając się z węgielnicą wzdłuż osi AB , którą najlepiej byłoby wyznaczyć także wyciągniętym sznurem lub taśmą, znajdziemy rzuty punktów: 1, 2, 3, 4 . . . 7, które uwidocznimy w polu za pomocą palików ponumerowanych odpowiednio do punktów, których są rzutami.

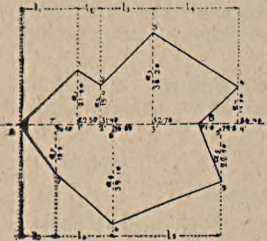


Fig. 60.

Po tem przygotowaniu wykonamy pomiary. Zatem najpierw pomiar osi, począwszy od punktu A , odczytując na taśmie odległości poszczególnych punktów rzutowych, zawsze jednak w pomiarze bieżącym, tak jak to naznaczono na fig. 60, nie zaś od palika do palika.

Mierząc drugi raz w przeciwnym kierunku, dobrze będzie na boku szkicu obliczać różnice odciętych i porównywać z poprzednim pomiarem, ażeby uniknąć błędów grubych, n. p. przez złe odczytanie na taśmie, opuszczenie taśmy i t. p.

W końcu pomierzmy poszczególne rzędne 1 — 1', 2 — 2' i t. d.

Równocześnie należy rysować szkic, ile możności w skali.

Różnice obu pomiarów nie powinny przekraczać dozwolonej granicy, co zaraz na miejscu należy sprawdzić za pomocą tabeli.

Narysowanie granic parceli na podstawie szkicu, nie przedstawia żadnych trudności.

Obliczenie powierzchni: Dany obszar składa się z samych trapezów, trójkąty można tu również uważać za trapezy, w których jeden bok = 0.

Nazwijmy rzędne literami $a_1 a_2 . . . a_7$; zaś odpowiednie odcięte: $l_1 l_2 . . . l_7$, otrzymamy:

$$F = \frac{1}{2} \left[(0 + a_1) l_1 + (a_1 + a_2) l_2 + (a_2 + a_3) l_3 + (a_3 + a_4) l_4 + (a_4 + a_5) l_5 + \right. \\ \left. + (a_5 + a_6) l_6 + (a_6 + a_7) l_7 + (a_7 + 0) l_7 \right] - a_4 \frac{h_1}{2} - a_5 \frac{h_2}{2}$$

Przy końcu należało powierzchnie dwóch trójkątów odjąć, gdyż poprzednio powierzchnie ich były wliczone w trapezy.

Dotychnąc mieliśmy proste przypadki tak, że można było powierzchnię obliczać wprost z dat zebranych w polu, na podstawie szkicu. Zazwyczaj jednak powierzchnię obliczać będziemy z planu, po narysowaniu zdjęcia, o czym będzie mowa w następnym rozdziale.

Opisując sposoby zdjęć poszczególnych parcel czy też całych ich kompleksów, nie wdajemy się w szczegóły pomiarów, bo samo przez się rozumie się, że pomiary powinny być wykonane starannie; gdzie tylko można, tam należy się kontrolować, różnice dwu pomiarów nie powinny wychodzić z przepisanych granic. Nigdy nie powinno się oszczędzać czasu i pracy na dokładne wytyczenie osi i wypalikowanie punktów, które mamy zdjąć. Szkice zwłaszcza, powinny być prowadzone jasno i bardzo wyraźnie.

Za pomocą tyczek i taśmy stalowej, nawet bez węgielnicy, można wykonywać bardzo dokładne i stosunkowo duże zdjęcia. Jeżeli rozczytuje się o drogie parcele, zwłaszcza w sporach sądowych, to zdjęcia musi się wykonać z największą dokładnością. Niekiedy, ażeby w sporze odszukać i wskazać właściwą granicę, potrzeba będzie wykonać zdjęcie nie tylko danej parceli, ale i sąsiednich, czasem nawet na większej przestrzeni, aż uzyska się punkty pewne, jakimi są n. p. stare budynki murowane, skrzyżowania dróg, niektóre granice, zwłaszcza ogrodzone murami i t. p. Na podstawie tych punktów, porównując położenie ich wzajemne z mapą katastralną, da się dopiero rozwikłać granice, które, jak się to często zdarza, uległy rozlicznym zmianom na znacznych nawet obszarach. Zresztą reguły w postępowaniu przy zdjęciach nie ma. Są tylko ogólne metody, które zazwyczaj najzupełniej wystarczają.

4. Fig. 61. przedstawia szkic zdjęcia.

Osie pomocnicze oznaczone grubszymi liniami przerywanymi oraz wierzchołki (punkty) oznaczone numerami w kółkach, są to boki wieloboków zdjęte poprzednio i ustalone. Linie cieńkie, przerywane są osiami pomocniczymi dla zdjęć szczegółowych. Zresztą rysunek jest zrozumiały. Należy tylko zwrócić uwagę, że celem określenia położenia pewnego punktu, często używa się trójkątów, nie zaś węgelnic i prostopadłych.

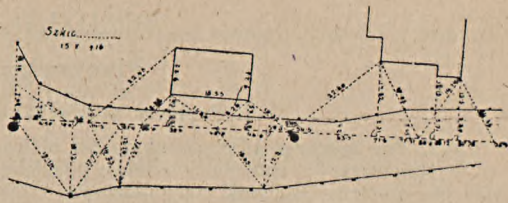


Fig. 61.

5. Fig. 62. przedstawia zdjęcie budynków, jakie wykonywa się zwykle przy trasowaniu kolei. Tutaj oś dla zdjęć stanowi wytyczona oś kolejowa. Niekiedy jednak okazuje się potrzeba przyjęcia nowych, pomocniczych osi. Położenie tych nowych osi względem osi kolejowej określa się najwygodniej za pomocą trójkąta, którego wszystkie boki się pomierzy. Jeden, przedłużony bok trójkąta stanowi oś pomocniczą, która służy do zdjęcia szczegółów.

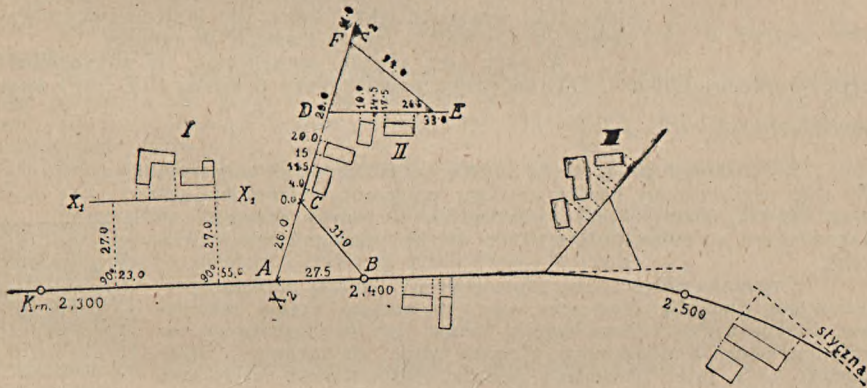


Fig. 62.

6. Austriacka instrukcja katastralna przeznaczona na każdych 287-73 ha powierzchni, 3 punkty tryangulacyjne IV-go rzędu. Prócz tych punktów, a więc i linii jako osi do zdjęć szczegółowych, przypada na każdy km kwadr. 20 do 50 punktów polygonowych, których położenie jest ściśle ustalone i nawiązane do punktów tryangulacyjnych.

Osie pomocnicze, jakie były potrzebne do szczegółowych zdjęć parcel, wychodziły bądź to z powyższych punktów, bądź też obierane były na bokach trójkątów i wieloboków (polygonów), zatem położenie ich łatwe było do określenia. Punkty na granicach poszczególnych parcel, a tem samem i granice, zdejmowano po największej części za pomocą przecięcia pomocniczych osi z kierunkami tych granic. Węgelnic używano tylko do wytyczania krótkich rzędnych. Na płaszczyźnie wolno było wytyczać rzędne do długości 50 m, w terenie falistym do 25 m. Pomierzone długości zaokrąglano na całe decymetry, licząc od 5 cm w górę całe dcm, poniżej opuszczano cm. Tylko miary budynków przyjmowano w cm.

ROZDZIAŁ V.

Planimetria.

§ 1. Pomiary powierzchni na planach.

1. Powierzchnie zdjętych obszarów oblicza się zwykle z planów.

Najprostszym sposobem byłoby: podzielić parcelę, przedstawiającą się zwykle jako nieregularny wielobok, na pojedyncze trójkąty, pomierzyć na planie podstawy i wysokości, poczem obliczyć ich powierzchnie i zesumować.

Przedziej do celu doprowadzi zamiana wieloboku (fig. 62.) na trójkąt i obliczenie jego powierzchni.

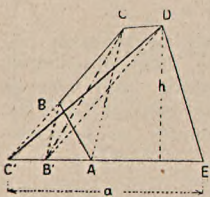


Fig. 63.

Przyjmijmy, że dany jest wielobok $ABCDE$. Przedłużmy jego podstawę AE , połączmy wierzchołki AC i wykreślmy przez B równoległą do AC aż do przecięcia się z przedłużoną podstawą w punkcie B' . Łącząc teraz $B'C$, otrzymamy nowy wielobok $B'CDE$, mający o jeden bok mniej, gdyż odpadł wierzchołek B .

Dowód jest prosty i znany z geometrii: część $ACDE$ zostaje wspólna w pierwszym i drugim wieloboku, dodawszy do niej zamiast trójkąta ABC , trójkąt $AB'C$, otrzymamy ten drugi wielobok. Oba powyższe trójkąty mają tę samą podstawę AC , wysokości także równe, jako leżące między równoległymi $AC // BB'$ — zatem zamienić je możemy.

W takiż sam sposób pozbędziemy się wierzchołka C czyli otrzymamy trójkąt $C'DE$, w którym pomierzysz podstawę $C'E = a$ i wysokość h obliczymy $F = a \cdot \frac{h}{2}$.

2. Niezłe usługi też może oddać rozkładanie danej powierzchni na prostokąty

Do tego użyć możemy bardzo prostego przyrządu, mianowicie według fig. 63., szeregu linii równoległych o stałym odstępnie „ a ” nakreślonych na kalce, lub też jako włosieni naciągniętych w ramkach.

Z rysunku widać, że linie równoległe wyznaczają na danej parceli szereg trapezów. Wystarczy więc, za pomocą cyrkla zesumować średnie wartości równoległych boków, jak to oznaczono na rysunku liniami kreskowanymi, a potem sumę ich pomnożyć przez wartość „ a ”. Jeżeli pozostaną jeszcze części parceli czy to jako trójkąty, czy prostokąty i t. p. obliczy się je osobno.

Przy odpowiedniej wprawie, osiąga się dobre rezultaty, i przyrząd taki używany jest bardzo chętnie.

3. Wykonywując na rysunku kwadrat (fig. 64.), który skutkiem skurczenia się papieru, stracił na długości boków poziomych po $p\%$, na prostokądnym zaś do tamtych po $q\%$ i zastanówmy się, jaki to wpływ wywarło na długość odcinka ukośnego l , jakoteż na powierzchnię.

Jeżeli a , b i l są pierwotnymi wartościami długości odcinków na bokach kwadratu i linii ukośnej, zaś a' , b' i l' zmienionymi, to:

$$l = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{tudzież} \quad l' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

Zmniejszone długości odcinków wyniosą:

$$a' = a \left(1 - \frac{p}{100}\right) \quad b' = b \left(1 - \frac{q}{100}\right) \quad l' = l \left(1 - \frac{p'}{100}\right) \quad \dots (1)$$

$$\text{stad} \quad a'^2 = a^2 \left(1 - \frac{2p}{100} + \frac{p^2}{10,000}\right) \quad \text{i} \quad b'^2 = b^2 \left(1 - \frac{2q}{100} + \frac{q^2}{10,000}\right)$$

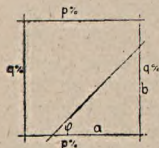


Fig. 64.

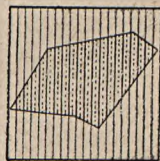


Fig. 64.

wyrazy $\frac{p^2}{10,000}$ i $\frac{q^2}{10,000}$ jako mające znikomą wartość, możemy opuścić, a wówczas

$$a'^2 = a^2 \left(1 - \frac{2p}{100}\right) \text{ i } b'^2 = b^2 \left(1 - \frac{2q}{100}\right)$$

zatem $a'^2 + b'^2 = (a^2 + b^2) - \frac{2}{100}(a^2 p + b^2 q)$ czyli po wyjęciu $(a^2 + b^2)$

$$\text{za nawias: } a'^2 + b'^2 = (a^2 + b^2) \left(1 - \frac{2}{100} \cdot \frac{a^2 p + b^2 q}{a^2 + b^2}\right)$$

a stąd, ponieważ $(a'^2 + b'^2) = l'^2$ i $(a^2 + b^2) = l^2$, otrzymamy:

$$l' = l \left(1 - \frac{2}{100} \cdot \frac{a^2 p + b^2 q}{a^2 + b^2}\right) \dots \dots \dots (2)$$

porównawszy równanie 2. z równaniem 1. dla l'

$$\text{widzimy, że } \frac{p'}{100} = \frac{2}{100} \cdot \frac{a^2 p + b^2 q}{a^2 + b^2}$$

$$\text{czyli } p' = 2 \frac{a^2 p + b^2 q}{a^2 + b^2} \dots \dots \dots (3)$$

Równanie 3. powiada, że p' jest średnią arytmetyczną z p i q , którym dano jako wagi a^2 i b^2 .

Wartość p' możemy zatem obliczyć według równania 3. ale do tego musimy mieć wartości a i b , podczas gdy plan daje nam tylko a' i b' . Nie ma więc innej rady, jak a i b odszukać w polu według mapy i pomierzyć. Wówczas dostaniemy równocześnie, także p i q .

Przy pomiarze jednak powierzchni z planu, nie będziemy potrzebowali p' , jak się to zaraz okaże, lecz p i q .

Przypuśćmy, że mamy z planu obliczyć powierzchnię prostokąta o bokach m i n (fig. 65.), ukośnych względem brzegów planu, zatem mających skurczenie $p\%$ i $q\%$, podczas gdy brzegi planu mają $p\%$ i $q\%$.

Z fig. 64. otrzymamy:

$$\frac{b}{a} = \text{tg } \varphi$$

z równania zaś 3. przez podzielenie licznika i mianownika przez b^2 dostaniemy:

$$\frac{p'}{2} = \frac{\frac{a^2}{b^2} p + q}{\frac{a^2}{b^2} + 1} = \frac{p \text{tg}^2 \varphi + q}{\text{tg}^2 \varphi + 1}$$

$$\text{a że } \text{tg}^2 \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \text{ zaś } \text{tg}^2 \varphi + 1 = \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

$$\text{zatem } \frac{p'}{2} = \left(p \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + q\right) \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\text{ostatecznie } \frac{p'}{2} = p \sin^2 \varphi + q \cos^2 \varphi \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{i analogicznie } \frac{q'}{2} = p \cos^2 \varphi + q \sin^2 \varphi \dots \dots \dots (4a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a stąd } \frac{p' + q'}{2} = p + q \\ \text{czyli } p' + q' = 2 \cdot (p + q) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

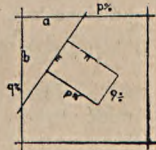


Fig. 65

Biorąc miary z rysunku do obliczenia powierzchni, otrzymalibyśmy powierzchnię $F' = m' \cdot n'$ zamiast $F = m \cdot n$. Stąd wynika, że m' i n' należy zwiększyć o odpowiedni procent skurczenia papieru, t. j.:

$$m = m' \left(1 + \frac{p'}{100}\right) \quad \text{i} \quad n = n' \left(1 + \frac{q'}{100}\right)$$

$$\text{zatem } m \cdot n = m' \cdot n' + \frac{m' \cdot n' \cdot p'}{100} + \frac{m' \cdot n' \cdot q'}{100} + \frac{m' \cdot n' \cdot p' \cdot q'}{10,000}$$

a opuszczając ostatni wyraz jako znikomo mały, dostaniemy

$$m \cdot n = m' \cdot n' + \frac{m' \cdot n'}{100} \cdot (p' + q')$$

a gdy według równania 5. $p' + q' = 2(p + q)$, więc

$$F = m \cdot n = m' \cdot n' \left(1 + \frac{2(p + q)}{100}\right) \quad \dots \dots \dots (6)$$

Wywód powyższy ma znaczenie tylko teoretyczne. Przedewszystkiem nachylenie danej linii do brzegów planu może być rozmaite. Przy małych kątach, skrócenie będzie bardzo zbliżone do skrócenia brzegów i odwrotnie. Praktycznie zaś rzecz biorąc, nie da nam wzór 6. żadnych korzyści, bo jeżelibyśmy mieli sprawdzać za pomocą pomiarów skrócenie odpowiadające co do położenia i kierunku linii brzegowych planu katastralnego, a następnie obliczać z wątpliwym nadto wynikiem skrócenie jakiegokolwiek linii ukośnej, to daleko prostszem byłoby, wyszukać w polu odpowiednie stałe punkty i przybliżony kierunek, i wprost doświadczalnie skrócenie to wypośrodkować. Tak też postępuje się zawsze w praktyce. Dodać w końcu należy, że każdy plan, każda karta katastralna, mają różne współczynniki zmiany długości, zależnie od materiału i czasu. Skrócenia dochodzą niekiedy do 6‰.

§ 2. Dokładność pomiarów powierzchni.

Błędy w pomiarach długości, muszą wywierać też wpływ na wyniki obliczenia powierzchni. Przyjmijmy najprostszyp wypadek, t. j. prostokąt (fig. 66.) o długości boków a i b . Powierzchnia jego wyniesie:

$$F = a \cdot b, \quad \dots \dots \dots (1)$$

Jeżeli błędy pomiaru boków mają wartości $\pm \Delta a$ i $\pm \Delta b$, to powierzchnia mieć będzie jakiś błąd $\pm \Delta F$, mianowicie:

$$F \pm \Delta F = (a \pm \Delta a) \cdot (b \pm \Delta b), \quad \text{t. j.}$$

$$F \pm \Delta F = a \cdot b \pm a \Delta b \pm b \Delta a \pm \Delta a \Delta b,$$

a opuszczając ostatni wyraz jako bardzo mały drugiego rzędu otrzymamy:

$$\pm \Delta F = \pm a \Delta b \pm b \Delta a \quad \dots \dots \dots (2)$$

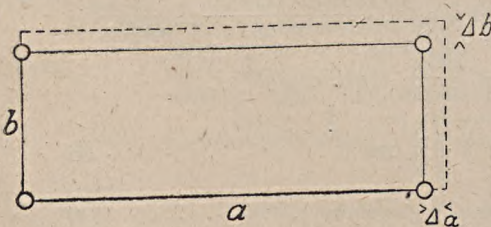


Fig. 66.

Przypuścimy, że $\Delta a = \Delta b$, natomiast a jest w porównaniu do b znacznie większe. W takim razie iloczyn $a \Delta b$ musi być w porównaniu do $b \Delta a$ bardzo wielki, stąd zaś wynika, że błąd Δb wywiera wielki wpływ na wynik obliczenia, bo może być wielokrotnie powiększony, zależnie od czynnika a , czyli większej długości. Dlatego, gdy mamy obliczyć powierzchnię parceli wąskiej a długiej, to szerokość powinno się starannie pomierzyć na gruncie, podczas gdy długość można

wziąć z planu. Przypuszczenie, w powyższym wywodzie, że $\Delta a = \Delta b$ jest zupełnie słuszne, jeżeli pomiar wykonywa się na planie za pomocą podziałki — bo, czy

na planie zmierzmy 20 mm czy 200 mm, to w obu wypadkach zrobimy to z jednakową dokładnością i popełnimy ten sam błąd zależny jedynie od odczytania miary a nie od długości.

Jeżeli Δa i Δb są średnimi błędami pomiarów, to średni błąd powierzchni obliczymy według wzoru:

$$\Delta F = \sqrt{(a \Delta b)^2 + (b \Delta a)^2} \dots \dots \dots (3)$$

Co do Δa i Δb , to możemy przyjąć:

$$1. \quad \Delta a = \Delta b = c \dots \dots \dots (4)$$

t. j., że błąd pomiaru długości jest stały i niezależny od długości, co, jak pierwiej wytłumaczyliśmy, zdarza się przy pomiarze długości, za pomocą podziałki, na planie. Wstawivszy wartości z 4. w równanie 3. otrzymamy:

$$\Delta F = \pm c \sqrt{a^2 + b^2} \dots \dots \dots (5)$$

Jeżeli a i b są bokami prostokąta, to $\sqrt{a^2 + b^2}$ jest długością jego przekątnej, czyli, że błąd powierzchni prostokąta, jest w powyższych warunkach proporcjonalny do długości jego przekątnej.

2. Przyjmijmy, że stosunek boków prostokąta

$$\frac{a}{b} = n \text{ czyli } a = bn \dots \dots \dots (6)$$

i wstawmy to w równanie $F = a \cdot b$, t. j.

$$\left. \begin{aligned} F = b \cdot b \cdot n = b^2 n \text{ czyli } b &= \sqrt{\frac{F}{n}} \\ \text{podobnie } F = \frac{a^2}{n} \text{ czyli } a &= \sqrt{F \cdot n} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

wstawmy te wartości w równanie 5.

$$\text{to } \Delta F = \pm c \sqrt{F n + \frac{F}{n}} = \pm c \sqrt{\frac{F n^2 + F}{n}}$$

$$\text{czyli } \Delta F = \pm c \cdot \sqrt{F} \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n}} \dots \dots \dots (8).$$

Wzór 8. powiada, że dla stałego stosunku boków $\left(\frac{a}{b} = n\right)$ błąd powierzchni jest proporcjonalny do pierwiastka kwadr. tejże powierzchni. Abyż w wzór 8. praktycznież użytkować, wprowadźmy do rachunku rzeczywiste wartości za $\Delta a = \Delta b = c$ t. j. na błąd w odmierzeniu długości z planu. Wartość tego błędu wynosi w praktyce 0.1 mm. Przyjąwszy wkońcu różne wartości na F i n otrzymamy wielkości błędów powierzchni, mierzonych na planie.

Tabela 10.

Powierzchnia F cm ²	\sqrt{F}	n = 1	n = 2	n = 5	n = 10
1	1	$\Delta F \text{ cm}^2 = 0.01$	$\Delta F \text{ cm}^2 = 0.02$	$\Delta F \text{ cm}^2 = 0.02$	$\Delta F \text{ cm}^2 = 0.03$
25	5	0.07	0.08	0.11	0.16
100	10	0.14	0.16	0.23	0.32
225	15	0.21	0.24	0.34	0.46
400	20	0.28	0.32	0.46	0.64
900	30	0.42	0.47	0.68	0.95

Zestawienie powyższe wykazuje ΔF w cm^2 , dla powierzchni wyrażonych w cm^2 . Ponieważ w skali 1:1000, każdy cm^2 przedstawia w naturze 100 m^2 , więc błąd w naturze obliczy się, mnożąc odpowiednie liczby z tabeli przez 100 i uważając wynik jako metry kwadratowe.

Jeżeli tedy mamy plany dwóch parcel w kształcie prostokątów i stosunku boków $n = 2$, z których pierwsza ma powierzchnię na rysunku wynoszącą 1 cm^2 czyli 100 m^2 w naturze, druga zaś 900 cm^2 czyli 90.000 m^2 lub 9 ha w naturze, to błąd w obliczeniu pierwszej wyniesie $\pm 0.02 \text{ cm}^2$ czyli 2 m , t. j. $\pm 2\%$, drugiej $\pm 0.47 \text{ cm}^2$ czyli $\pm 47 \text{ m}^2$, t. j. 0.052% , zatem w porównaniu z pierwszym będzie bardzo mały.

3. Przyjmijmy, że błąd pomiaru długości jest proporcjonalny do tejże długości, t. j.

$$\Delta a = c \cdot a \quad \text{i} \quad \Delta b = c \cdot b \quad \dots \dots \dots (9)$$

to po wstawieniu powyższych wartości w równanie (3.) otrzymamy:

$$\Delta F = c \sqrt{(ab)^2 + (ab)^2} = c \cdot F \cdot \sqrt{2} \quad \dots \dots \dots (10)$$

czyli, w tym wypadku byłby błąd powierzchni proporcjonalny do tej powierzchni i niezależny od jej kształtu. Takiego wypadku nie ma jednak w rzeczywistości, bo założenie było niesłuszne.

4. Przyjmijmy teraz, zgodnie z teorią błędów, że błąd pomiaru długości jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego długości, t. j. do \sqrt{l} czyli, że:

$$\Delta a = k \sqrt{a} \quad \text{i} \quad \Delta b = k \sqrt{b} \quad \dots \dots \dots (11)$$

natenczas według równania (3.):

$$\begin{aligned} \Delta F &= \pm \sqrt{a^2 k^2 b + b^2 k^2 a} = \pm k \sqrt{a b^2 + b^2 a} \\ \text{lub} \quad \Delta F &= \pm k \sqrt{a b (a + b)} \quad \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

Wprowadzimy w równanie 12. wartości z równania (7.), t. j.

$$a = \sqrt{F \cdot n} \quad \text{i} \quad b = \sqrt{\frac{F}{n}} \quad \text{to otrzymamy:}$$

$$\Delta F = \pm \sqrt{\sqrt{F \cdot n} \cdot \frac{F}{n} \left(\sqrt{F \cdot n} + \sqrt{\frac{F}{n}} \right)}$$

$$\Delta F^2 = k^2 F \left(\sqrt{F \cdot n} + \sqrt{\frac{F}{n}} \right)$$

$$\Delta F^4 = k^4 F^2 \left(F \cdot n + \frac{F}{n} + 2 \cdot F \right)$$

$$\Delta F^4 = k^4 F^3 \left(\frac{n^2 + 1}{n} + 2 \right)$$

$$\Delta F^4 = k^4 F^3 \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n} \right) = k^4 F^3 \frac{(1 + n)^2}{n}$$

$$\text{w końcu: } \Delta F = \pm k \cdot \sqrt[n]{F^3} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt{1+n} \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$\text{Dla } n = 1 \dots \Delta F = \pm 1.414 k \sqrt[n]{F^3} \quad \dots \dots \dots (14)$$

$$\text{Dla } n = 10 \dots \Delta F = \pm 1.865 k \sqrt[n]{F^3} \quad \dots \dots \dots (15)$$

Przyjawszy średni błąd pomiaru długości

$$\Delta a = 0.005 \sqrt{a} \quad \text{czyli dla } 1 \text{ m} \dots \dots k = 0.005 \text{ m,}$$

$$\text{to dla kwadratu, czyli } n = 1 \dots \Delta F = 0.00707 \sqrt[n]{F^3} \quad \dots \dots \dots (16)$$

$$\text{a dla prostokąta i } n = 10 \dots \Delta F = 0.00932 \sqrt[n]{F^3} \quad \dots \dots \dots (17)$$

n. p. według równania 16. dla $F = 1 \text{ ha}$ $\Delta F = 7.1 \text{ m}^2$

a „ „ 17. dla $F = 1 \text{ ha}$ $\Delta F = 9.3 \text{ m}^2$

W praktyce jednak błędy będą większe, bo więcej jest źródeł błędów, niż tutaj je teoretycznie przyjęto. W każdym razie wzór 13. wskazuje kształt funkcji błędu, sprzeciwiający się stanowczo kształtowi w równ. 10 — lub też określaniu granicy błędów w ‰ powierzchni, jak się to zdarza w niektórych instrukcjach, bo błąd, jak to wyżej wykazano, zależy także i od kształtu powierzchni. Nie można więc, dla różnych stosunków, jakie się w rzeczywistości zdarzają, przyjmować jednakowo błąd, zależny tylko od wielkości powierzchni.

Instrukcja katastralna austriacka z r. 1904 pozwala na następujące błędy w pomiarze i obliczaniu powierzchni z planów:

Dla skali planów 1:2500 i 1:2880 $\Delta F = 0.001 F + 0.500 \sqrt{F}$

1:1250 i 1:1440 $\Delta F = 0.001 F + 0.250 \sqrt{F}$

1:625 i 1:720 $\Delta F = 0.001 F + 0.125 \sqrt{F}$

1:2000 $\Delta F = 0.001 F + 0.400 \sqrt{F}$

1:1000 $\Delta F = 0.001 F + 0.200 \sqrt{F}$

Instrukcja ta przypisuje, że obliczenie każdej powierzchni parceli na mapie, należy dwa razy, za pomocą różnych sposobów wykonać. Gdyby różnica obu obliczeń przekraczała granicę z powyższych wzorów wypadającą, to obliczenie należy powtórzyć.

Jeżeli jednak obliczenie powierzchni przeprowadza się za pomocą ustalonych już współrzędnych, to oba pomiary muszą się ze sobą zgadzać bez różnicy.

Skrócenia, skutkiem ściągnięcia się papieru, należy uwzględnić, nie powiedziano jednak w jaki sposób.

W § 56. p. 1. instrukcja przypisuje, że obliczenie powierzchni parcel wąskich a długich, ma być dokonane za pomocą bezpośredniego pomiaru szerokości w polu, podczas gdy długości mogą być brane z planu. Powierzchnie oblicza się, rozkładając parcele na trójkąty, których podstawy tworzą pomierzone szerokości.

§ 57. Z reguły, średnią arytmetyczną z wyników podwójnie przeprowadzonego obliczenia powierzchni, należy przyjąć jako właściwą powierzchnię. Gdyby jednak, jednemu z obliczeń wypadło przypisać większą wagę, to okoliczność tę należy uwzględnić przy obliczeniu średniej.

Jeżeli obliczenie powierzchni zostało wykonane na podstawie oryginalnych dat pomiarowych, to ono będzie miarodajne, obliczenie zaś graficzne z planu, służyć ma jako kontrola.

Instrukcja austr. wprowadza również kontrolę obliczeń powierzchni, co jest łatwe do zrozumienia, bo przedewszystkiem kontrolę stanowi arkusz sekcji szczegółowej, o pewnej stałej powierzchni — (nowe sekcje mają 200 ha) — następnie powierzchnie objęte polygonami, dadzą się ściśle za pomocą współrzędnych obliczyć; wkońcu linie sekcyjne (brzegi sekcji szczegółowej) dzieląc obszary objęte polygonami, będą także pomocne przy obliczeniach.

W każdym państwie istnieją przepisy co do dozwolonych granic błędów w pomiarach powierzchni. Austriacka ustawa dozwala 0.5‰ powierzchni, jako różnicę dwu obliczeń danej powierzchni.

Mając pomierzyć jakiś obszar, postępujemy przy zdjęciach i pomiarach długości według znanych już reguł, kontrolując poszczególnie pomiary, które muszą być przynajmniej dwa razy wykonane i obliczając różnice i błędy, które dozwolonych granic nie powinny przekroczyć. Z planu obliczymy następnie powierzchnię i to dwa razy w różne sposoby. Różnica wyników obu obliczeń nie powinna przekroczyć dozwolonej granicy.

§ 3. Przyrządy do pomiaru płaskich powierzchni t. z. planimetry.

Obliczanie powierzchni na podstawie elementów bezpośrednich pomiarów w polu, n. p. za pomocą podziału parceli na trójkąty i pomierzenia wszystkich ich boków, lub zdjęcia obszaru metodą polygonową i obliczenie powierzchni za pomocą obli-

czonych współrzędnych, jest bardzo dokładne, lecz wymaga dużego nieraz nakładu pracy, więc i kosztów. Mimo to, w miastach, gdzie grunty są drogie, używa się tych metod w razie kupna lub sporów. Zresztą pomiar powierzchni odbywa się na planach, a nadto zwykle za pomocą przyrządów, zwanych planimetrami.

Najwięcej rozpowszechnionym jest planimetr Amslera t. z. biegunowy, wynaleziony przez Amslera w r. 1856. Fig. 67. przedstawia ten planimetr, ulepszone przez Coradiego.

Ramię R' , opatrzone ostrzem „O” służącym do ustalenia przyrządu, nazywa się biegunem, drugie ramię R z ostrzem „W” służącym do obwodzenia danej powierzchni na planie, zwie się wodzidłem. Oba ramiona połączone są przegubem S . Na przedłużeniu wodzidła umieszczone jest kółko A poruszające się po papierze stosownie do ruchów wodzidła. Jeżeli n. p. ruch wodzidła odbywać się będzie w kierunku jego podłużnej osi, to kółko musi się ślizgać po papierze, nie obracając się wcale. W innych wypadkach kółko będzie się obracało. Z kółkiem A , połączone jest za pomocą śruby bez końca i kółka ząbionego, liczydło L , wskazujące ilość obrotów kółka A . W starszej konstrukcji tego planimetru, oś kółka A musiała być równoległą do wodzidła; w nowszej, w której pozwala na przerzucenie wodzidła nad biegunem, warunek ten nie jest koniecznym, natomiast trzeba wykonać dwa pomiary, a przerzuceniem wodzidła i wziąć z nich średnią.

Gdy wodzidło obraca się około przegubu, to i kółko A się obraca i tem więcej zrobi obrotów przy obwodzeniu tej samej powierzchni, im krótsze jest ramię wodzące. Gdy wodzidło odbywa ruch obrotowy i postępowy, to kółko A będzie się po części obracało, po części ślizgało po papierze.

Pomijając inne wywody teoretyczne, powiemy jako wynik: powierzchnia, po obwodzie której przeprowadziliśmy wodzidło, jest proporcjonalna do ilości obrotów kółka A .

Rozróżnić jednak musimy tutaj dwa wypadki:

1. Przy obwodzeniu granic danej powierzchni, umieszczamy biegun zewnątrz tej powierzchni.

Nazwijmy w tym razie powierzchnię przez P_z

$$\text{to } P_z = C_1 n_1 \dots \dots \dots (1)$$

gdzie n_1 jest ilością obrotów kółka A , odczytaną na liczydłe L , zaś C_1 jest ilością stałą mianowicie

$$C_1 = 2 \cdot R \cdot r' \cdot \pi \dots \dots \dots (2)$$

przy czym R jest długością wodzidła od środka przegubu do ostrza, r' jest promieniem kółka A
 $\pi = 3 \cdot 141592$.

2. Biegun znajduje się wewnątrz obwodu danej powierzchni. Wówczas powierzchnia

$$P_w = C_1 n_2 + C_2 \dots \dots \dots (3)$$

C_1 jest ilością według równania (2.) znaną,

n_2 jest ilością obrotów kółka A .

C_2 jest drugą stałą planimetru:

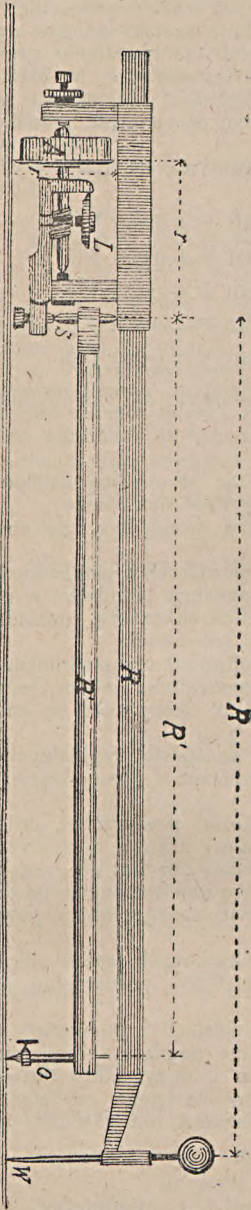
$$C_2 = \pi (R'^2 + R^2 - 2 Rr) \dots \dots (4)$$

gdzie R' jest długością ramienia biegunowego,

R „ „ „ wodzącego,

r „ „ „ odstęp płaszczyzny kółka A od środka przegubu.

Fig. 67.



Uzyskanie dokładnych wartości na R' , R i r za pomocą bezpośredniego pomiarzenia ich, byłoby dość trudnem. Mamy jednak inny, praktyczny sposób znalezienia stałych C_1 i C_2 z pominięciem R mianowicie:

Powierzchnię, n. p. koła, o znanej wielkości, mierzymy planimetrem, ustawiając biegun na zewnątrz i obwodząc granicę wodzidłem.

$$\text{Wtedy } P_z = C_1 n_1 \dots \dots \dots (5)$$

gdzie P_z jest ilością znaną, n_1 zaś odczytamy na liczydłe. Z równania (5.) obliczy się

$$C_1 = \frac{P_z}{n_1} \dots \dots \dots (6)$$

Następnie umieszczamy biegun wewnątrz obwodu znanej powierzchni i powtórzymy pomiar. Otrzymamy teraz:

$$P_w = C_1 n_2 + C_2 \dots \dots \dots (7)$$

gdzie tylko C_2 jest niewiadomą, reszta jest znana. Robiąc doświadczenie z tą samą powierzchnią $P_w = P_z$ otrzymamy:

$$P_w - P_z = 0 = C_1 n_1 - C_1 n_2 - C_2$$

a stąd $C_2 = C_1 (n_1 - n_2)$ wstawivszy zaś wartość na C_1 z równ. (6.):

$$C_2 = \frac{P_z}{n_1} (n_1 - n_2) = P_z \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \dots \dots \dots (8)$$

gdzie P_z , n_1 i n_2 są znane.

Powtarzając powyżej opisane doświadczenie kilka razy i obliczwszy średnie C_1 i C_2 wyznaczmy obie ilości z wystarczającą dokładnością.

Do każdego przyrządu dodana jest płytka metalowa, na której znajduje się wykreślony obwód koła, jako rowek, z podaniem powierzchni koła. Płytkę tę służy do powyżej opisanych doświadczeń.

Przed rozpoczęciem obwodzenia danej powierzchni, odczytuje się stan liczydła m_1 — po ukończeniu zaś drugi jego stan m_2 . — Różnica $m_2 - m_1 = n_1$ jest ilością obrotów kółka A .

Poprzednio wspomniano, że planimetr Amslera, ulepszony przez Coradiego, ma wodzidło urządzone do przerzucania. Obwodzimy więc daną powierzchnię i odczytujemy ilość obrotów n — następnie przerzucamy wodzidło i znowu opisujemy obwód, przy czem otrzymamy ilość obrotów n' . Z tych dwóch ilości n i n' oblicza się średnią arytmetyczną $\frac{m + m'}{2}$ i przyjmuje się ją jako n_1 lub n_2 w równ. (1) lub (3). Za pomocą tego podwójnego odczytu eliminuje się błąd, jaki powstaje skutkiem nierównoległości osi kółka A do osi podłużnej wodzidła.

Ilość obrotów kółka A przy opisywaniu tego samego obwodu, zależna jest przede wszystkim od promienia r' tegoż kółka, oraz od długości ramienia wodzącego R . Promień r' jest stały, natomiast wodzidło jest tak urządzone, że da się skracać lub przedłużać, czyli że i ilość obrotów kółka A podczas opisywania tego samego obwodu, może być zmienną, zależnie od długości R .

Ramię wodzące jest skonstruowane z rurki wzdłuż przeciętej, w którą wchodzi druga rurka, dająca się przesuwac w tamtej i dowolnem położeniu utwierdzać za pomocą śrubki. Można zatem tak dobrać długość ramienia R , że stała C_1 będzie liczbą okrągłą, n. p. 200, 300 i t. p., o czem przekonać się możemy z równ. 2.

Oznaczmy pewną długość wodzidła przez R_1 i znajdmy za pomocą doświadczenia stałą C_1 . Im krótsze jest wodzidło, tem większe być musi n , a więc tem mniejsze będzie C_1 — czyli stała C_1 jest w prostym stosunku do R_1 .

Zmieńmy teraz długość wodzidła na R_2 — natenczas otrzymamy inny odczyt n'_1 i inną stałą C'_1 .

Z równ. (2.) wynika, że

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 2 R_1 r' \pi \\ i \quad C'_1 &= 2 R_2 r' \pi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

$$\text{a stąd } \frac{C_1}{C'_1} = \frac{R_1}{R_2} \dots \dots \dots (9)$$

Znając stałą C_1 i odpowiednią długość R_1 a przyjmując na C'_1 jakąś liczbę okrągłą, znajdziemy za pomocą równania (9) odpowiednią wartość R_2 .

Długości R_1 i R_2 w ścisłym rozumieniu nie potrzebujemy. Wodzydło bowiem opatrzone jest podziałką na wysuwalnej części, dla której koniec rurki zewnętrznej stanowi wskazówkę. Ustaliwszy więc za pomocą śrubki długość ramienia wodzącego, odczytamy stan podziałki, odpowiadający długości R_1 . Teraz zmienimy tę długość, n. p. wysuwając wodzydło o długość a , czyli $R_2 = R_1 + a$, gdzie a oznacza pewną ilość odstępów na podziałce.

Dla obu tych ramion, t. j. dla R_1 i $R_1 + a$ znamy stałe C_1 i C_1' tudzież n_1 i n_2 , zatem, dla tej samej powierzchni P otrzymamy:

$$\text{ij} \left. \begin{array}{l} P = C_1 n_1 = 2 R_1 r' \pi n_1 \\ P = C_1' n_2 = 2 (R_1 + a) r' \pi n_2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

stąd zaś $R_1 n_1 = (R_1 + a) n_2$ czyli:

$$R_1 (n_1 - n_2) = a \cdot n_2 \text{ więc } R_1 = \frac{a n_2}{n_1 - n_2} \dots \dots \dots (12)$$

t. j. otrzymaliśmy długość wodzydła, wyrażoną w jednostkach podziałki. Chcąc mieć stałą C_0 w pewnej okrągłej liczbie, dobrać musimy odpowiednie R_0 z następującej proporcji:

$$C_0 : C_1 = R_0 : R_1 \text{ a stąd}$$

$$R_0 = \frac{C_0}{C_1} \cdot R_1 \dots \dots \dots (13)$$

a wstawiając za R_1 wartość z równania (12.) dostaniemy:

$$R_0 = \frac{C_0}{C_1} \cdot \frac{n_2}{n_1 - n_2} \cdot a \dots \dots \dots (14)$$

Stan podziałki dla R_1 znamy — chcąc więc ustawić wodzydło tak, by długość jego odpowiadała wartości R_0 , zmienimy poprzednią długość o różnicę $R_1 - R_0$.

Dla każdej skali rysunku będzie stała C_1 miała inną wartość, jeżeli wyniki mamy otrzymać odpowiednio do skali, o czym trzeba pamiętać.

Przy operowaniu planimetrem należy uważać, ażeby kąt rozwarcia obu ramion, podczas opisywania obwodu, mieścił się w granicach między 60 a 120° — co zależy od odpowiedniego ustawienia przyrządu. Obwódzić należy daną figurę raz w jednym kierunku, odczytując na początku i przy końcu stan liczydła, potem drugi raz, w przeciwnym kierunku i znowu odczytać stan liczydła. Następnie przesuwa się wodzydło i tak samo obwódzi się dwa razy figurę. Z obu, podwójnych odczytów, dla n_1 oblicza się średnią arytmetyczną.

Planimetr Amslera nie daje zbyt dokładnych rezultatów, które częstokroć zależne są od rodzaju papieru, bo od tego zależy ślizganie się kółka.

Wymaga też częstej kontroli stałej C_1 , nadto, już z powodu konstrukcji przyrządu, nie nadaje się do pomiaru dużych powierzchni, a przy mierzeniu małych, błędy są duże. Ponieważ jednak jest tanim, łatwym w użyciu, a błędy pomiarów przy należytej uwadze zawsze mieszczą się w granicach dozwolonych, więc też jest najczęściej rozpowszechniony.

O wiele dokładniejszym a nawet wogóle najlepszym, jest planimetr precyzyjny Coradiego. Można nim mierzyć powierzchnie bardzo małe, lub stosunkowo bardzo duże, bo mające rzeczywistą szerokość 40 cm. na planie a dowolną długość, — zawsze z nadzwyczajną dokładnością. Jeżeli bowiem planimetr Amslera daje wyniki dokładne do $\frac{1}{250}$ mierzonej powierzchni, to Coradiego dokładność jest 10 razy większą.

Znając planimetr Amslera, łatwo damy sobie radę z używaniem planimetra Coradiego. Dlatego też dalszy opis opuszczamy. Przyrząd ten jest drogi i dlatego rzadko używany.

§ 4. Zagadnienia o podziale obszarów powierzchni.

1. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt D na boku AC (fig. 68). Przeprowadzić przez punkt D linię działową DE , która ma z powierzchni trójkąta odcinać część F , na rysunku zakreskowaną.

Najprostsze rozwiązanie jest następujące:
Wytoczmy w polu, z punktu D prostopadłą na AB
i pomierzmy jej długość h.
Następnie z relacji:

$$F = \frac{m \cdot h}{2} \text{ obliczymy.}$$

$$m = \frac{2F}{h} \text{ i obliczone } m \text{ odetnijmy na boku } AB.$$

2. Jako zadanie mieć możemy warunek, ażeby przez punkt D podzielić powierzchnię trójkąta na 2 części, w stosunku a : b.

Nazwijmy jedną część powierzchni F_1 drugą F_2 i $F_1 + F_2 = F$.

Na podstawie prostego rachunku spółki, obliczymy:

$$F_1 = \frac{F}{a+b} \cdot a \quad \text{i} \quad F_2 = \frac{F}{a+b} \cdot b$$

Zresztą, mając określone F_1 rozwiążemy zadanie jak pod 1. odcinając z trójkąta część F_1 linią przechodzącą przez D — pozostała reszta będzie F_2 .

3. Jeżeli mamy podane wszystkie trzy boki trójkąta (fig. 68.) i wykonać zadanie podane pod 1., lecz nie możemy podziału wykonać w polu, na rysunku zaś nie byłby dość dokładnym, wówczas postąpimy w sposób następujący:
Z twierdzenia Carnotta:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \alpha$$

obliczymy $\cos \alpha$, następnie $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$.

Ponieważ dany jest punkt D, więc i długość AD — określająca położenie tego punktu.

Stąd tedy obliczymy dokładnie:

$$h = AD \sin \alpha$$

$$\text{a wkońcu} \quad m = \frac{2F}{h}$$

Możemy więc zupełnie dokładnie miary podać i wpisać na rysunku.

4. Dany trapez ABCD (fig. 69.) podzielić prostą, równoległą do podstawy na dwie części o powierzchni F_1 i F_2 .

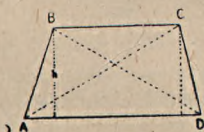


Fig. 69.

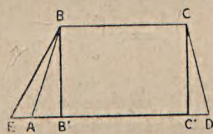


Fig. 70.

Rozumie się, że trapez zdjęto w polu, t. j. pomierzono wszystkie boki i przekątne, czyli rozkładając go jedną przekątną, obliczymy powierzchnię, drugi raz drugą i znowu obliczymy powierzchnię jako kontrolę. Wysokość można łatwo obliczyć mając dwa boki równoległe i powierzchnię. Ażeby zadanie jak najdokładniej rozwiązać, postąpimy w następujący sposób, zaznaczając, że postępowanie to odnosi się tylko do pracy na planie.

Wykreślmy (fig. 70) CC' prostopadłe do podstawy, którą przedłużmy i odetnijmy $AE = C'D$, tudzież wysokość BB' .

Ponieważ trójkąt AEB jest równy co do powierzchni trójkątowi $CC'D$, bo mają równe podstawy i wysokości, zatem, zamiast poprzedniego trapezu będziemy mieli figurę, złożoną z prostokąta $BCC'B'$ i trójkąta $EB'B$. Prostokąt byłoby łatwo podzielić — trudność sprawia łączność jego z trójkątem.

Weźmy teraz na uwagę osobno trójkąt i osobno prostokąt.

Podzielmy trójkąt (fig. 71.) liniami równoległymi do podstawy, na pewną ilość części, dzieląc bok BB' na równych 10 części. Z własności trójkątów podobnych wiemy, że wówczas:



Fig. 71.

$$a_1 = \frac{a}{10} \quad a_2 = \frac{2a}{10} \quad \text{i t. d. podobnie}$$

$$h_1 = \frac{h}{10} \quad h_2 = \frac{2h}{10} \quad \text{„}$$

$$\text{Wogóle } a_1 = \frac{a}{n} \quad a_2 = \frac{2a}{n} \quad \dots \quad a_n = \frac{n \cdot a}{n} \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{i } h_1 = \frac{h}{n} \quad h_2 = \frac{2h}{n} \quad \dots \quad h_n = \frac{n \cdot h}{n} \quad \dots \quad (2)$$

$$\text{Powierzchnia trójkąta } EBB' = F \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

Powierzchnia poszczególnych trójkątów o podstawach $a_1 a_2 \dots a_n$ i wysokościach $h_1 h_2 \dots h_n$

$$\text{będą: } F_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{h}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot h}{n^2} = \frac{F}{n^2}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{n} \cdot \frac{2h}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot a \cdot h}{n^2} = \frac{4F}{n^2}$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{n} \cdot \frac{3h}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9 \cdot a \cdot h}{n^2} = \frac{9 \cdot F}{n^2} \dots \dots \dots (3)$$

⋮

$$F_n = \dots \dots \dots = \frac{n^2 F}{n^2}$$

Ilości: F i n są stałe, zatem $\frac{F}{n^2} = C$ jest wspólnym czynnikiem; podstawwszy to w powyższe równanie (3.) otrzymamy:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1^2 \cdot C \\ F_2 &= 2^2 \cdot C \\ F_3 &= 3^2 \cdot C \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{wogóle } F_x &= x^2 \cdot C \\ \text{lub } y &= x^2 \cdot C \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

gdzie $x = 1, 2, 3, \dots, n$, odpowiada ilości podziału trójkąta,

$$\text{zaś } C = \frac{F}{n^2} \dots \dots \dots (5a)$$

Równanie (5.) przedstawić możemy graficznie jako linię krzywą. W tym celu przyjmijmy układ współrzędnych, jaki zwykle przyjmuje się w geometrii analitycznej (fig. 72.). Na osi $+x$ — odetnijmy podziałkę $n=1, 2, \dots, 10$, a przyjmując za x wartości $x=1, x=2 \dots$ aż do $x=n=10$, obliczymy z równania (5.) odpowiednie y , które odetniemy na rzędnych.

Wówczas poszczególne rzędne, odczytane w przyjętej podziałce, przedstawiać

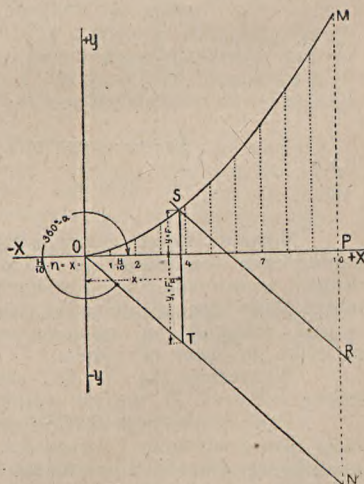


Fig. 72.

będą części powierzchni trójkąta, a to $y_1 = F_1 = \frac{F}{10}$ $y_2 = \frac{2}{10} F \dots y_4 = F_4 = \frac{9}{10} F \dots$
 Różnice rzędnych, dają znowu powierzchnie poszczególnych trapezów, zawartych między poziomymi liniami podziału.

Jeżeli prostokąt BCC'B' podzielimy w ten sam sposób, wartość powierzchni całego prostokąta odetniemy na rzędnej odpowiadającej $n = x = 10$, to rzędna PN przedstawi rzecz prosta, w odpowiedniej liniowej podziałce, powierzchnię tego prostokąta. Połączmy początek układu O z punktem N, to poszczególne rzędne tej prostej, odpowiadają wartościom x ; n. p. $x = 4$, ma wartość $0.4 F_p$ jeżeli F_p jest powierzchnią całego prostokąta.

Suma rzędnych między krzywą OM i prostą ON daje łączną powierzchnię części trójkąta i prostokąta dla pewnej wysokości, liczonej od wierzchołka B, o czym musimy pamiętać.

Równanie prostej ON, przechodzącej przez O i tworzącej z dodatnią częścią osi x , kąt $360 - \alpha$ ma kształt

$$y_1 = -m x_1 \dots \dots \dots (6)$$

gdzie m jest styczną kąta i da się łatwo przedstawić jako stosunek $\frac{-y}{x}$ któregośkolwiek punktu prostej ON.

Teraz przystąpimy do właściwego rozwiązania zadania, t. j. mamy odciąć z trapezu powierzchnię F_1 . W tym celu odetniemy na rzędnej PN wartość $F_1 = NR$ w odpowiedniej podziałce, i przez R poprowadzmy równoległą do ON aż do przecięcia z krzywą OM w punkcie S. Rzędnia ST zawarta między krzywą OM a prostą ON równa odcinkowi RN, co wynika z konstrukcji, przedstawia również wartość F_1 , a składa się z części należącej do trójkąta SZ i z części prostokąta ZT. Wysokość odcięta jest na osi x i przedstawia się odcinkiem OZ. Będzie to wspólna wysokość trójkąta i prostokąta, mierzona od wierzchołka B.

Konstrukcyjnie byłaby sprawa załatwiona, lecz gdy rozchodzi się o dokładne podanie położenia linii podziału, a skala rysunku jest małą, tak, że graficzna dokładność nie wystarcza, to musimy ją obliczyć analitycznie.

W tym wypadku rozchodzi się o odciętą (x) punktu S, t. j. odciętą punktu przecięcia się krzywej OM z prostą SR.

Położenie linii RS jest określone za pomocą punktu R i kierunku jej, równoległego do ON, czyli stycznej kąta nachylenia z równania (6.)

Rzędne punktu R są dane: x_r i y_r .

Równanie linii przechodzącej przez punkt R i równoległej do ON przybierze więc kształt:

$$(y - y_r) = -m(x - x_r) \dots \dots \dots (7)$$

wstawiwszy odpowiednie wartości na x_r i y_r , obliczymy y . To y , ma dla punktu przecięcia, sprawdzać też równanie krzywej (5.) Wstawiwszy wkońcu y z równania (7.) w równanie (5.), obliczymy x dla punktu S, a temsamem i wysokość, jaką należy odmierzyć od punktu B, ażeby wyznaczyć położenie linii, odcinającej w trapezie żadaną część powierzchni F_1 .

$$\text{Wysokość ta wyniesie: } h' = \frac{x \cdot h}{n} \dots \dots \dots (8)$$

Przykład.

Dany jest trapez o następujących wymiarach:

$$\begin{array}{l|l} a = 30 \text{ m} & h = 25 \text{ m} \\ b = 60 \text{ „} & F_t = 1125 \text{ m}^2 = 11 \text{ a } 25 \text{ m}^2, \end{array}$$

który mamy podzielić linią równoległą do podstawy na dwie części:

$$\begin{array}{l} F_1 = 860 \text{ m}^2 \\ F_2 = 265 \text{ „} \\ F_t 1125 \text{ m} =^2 \end{array}$$

Przyjmijmy, że F_1 ma być odcięte w górnej części trapezu.
 Uwaga: Odetnijmy $C'D = EA$ i potoczmy EzB , to trójkąt EBB' i łącznie z prostokątem $BCC'B'$ jest równy co do powierzchni trapezowi. Ponieważ $C'D = EA$, więc i wszystkie równoległe do podstawy tego trójkąta CBA , będą równe takimże równoległym w trójkącie $C'CD$ w tych samych wysokościach wykreślonym a zawartym między bokami trójkąta.

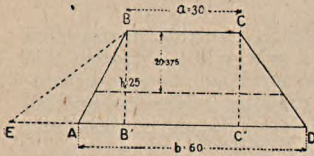


Fig. 69.

Oznaczenia, przyjęte w poprzednim wywodzie, oraz $n = 10$, pozostaną w dalszym rachunku niezmiennione.

Powierzchnia prostokąta $B'BCC'$	$F_p = 750 \text{ m}^2$
„ trójkąta	$F = 375 \text{ „}$
	$F_t = 1125 \text{ m}^2$

$$C = \frac{F}{n^2} = \frac{375}{100} = 3.75 \quad \dots \dots \dots (9)$$

$$y = Cx^2 = 3.75 \cdot x^2 \quad \dots \dots \dots (10)$$

jako równanie krzywej OM.

Dla prostej ON znajdziemy:

współrzędne punktu N: $x_n = 10 \quad y_n = -750 \dots (F_p)$

„ początku układu $x_o = 0 \quad y_o = 0$.

$$\text{tg } \alpha = \frac{-y_n}{x_n} = -75 \quad \dots \dots \dots (11)$$

przez te 2 punkty przechodzi prosta ON, zatem

$$y_1 - y_n = m(x_1 - x_n) \text{ a po wstawieniu } y_n \text{ i } x_n :$$

$$y_1 + 750 = -75(x_1 - 10) \text{ czyli równanie linii ON:}$$

$$y_1 = -75x_1 \quad \dots \dots \dots (12)$$

Odetnijmy na rzędnej MN odcinek $NR = F_1 = 860$ t. j. żadaną część trapezu, w podziałce liniowej, to współrzędne punktu R będą:

$$R \dots \dots x_r = 10 \quad y_r = 860 - 750 = 110.$$

Przez ten punkt R przeprowadźmy linią równoległą do ON aż do przecięcia z krzywą OM w punkcie S.

Równanie tej linii określa punkt R oraz kąt nachylenia, wyrażony przez $\text{tg } \alpha = m$ w równaniu (11.)

$$y - y_r = m(x - x_r) \quad \dots \dots \text{ gdzie } m = -75$$

$$y - 110 = -75(x - 10) \text{ a w końcu}$$

$$y = -75x + 860 \quad \dots \dots \dots (13)$$

jako równanie linii RS. Celem odróżnienia x i y w równaniu (13.) od x i y w równaniu (10.) dajmy im znaczki „s“ czyli równanie (13.) będzie teraz wyglądało:

$$y_s = -75x_s + 860 \quad \dots \dots \dots (14)$$

to y_s wstawmy teraz w równanie (10.) ażeby otrzymać odciętą punktu S:

$$-75x + 860 = 3.75x^2 \text{ a po uporządkowaniu}$$

$$x^2 + \frac{75}{3.75}x = \frac{860}{3.75} \text{ a stąd}$$

$$x = -\frac{37.5}{3.75} \pm \sqrt{\left(\frac{37.5}{3.75}\right)^2 + 229.33}$$

$$x = -10 \pm 18.15, \text{ stąd } x = 8.15 \quad \dots \dots \dots (15)$$

drugi znak nie ma w tym wypadku znaczenia.

Wstawmy znalezione $x = 8.15$ w równanie (10.)

$$y = 3.75x^2 \text{ — zatem } y = 3.75 \cdot 66.42 = 249.07 \quad \dots \dots \dots (16)$$

Rzędna $y = 249.07$ przedstawia ilość m^2 do odcięcia z trójkątów.

Dla tej samej wartości $x = 8.15$ znajdziemy odpowiadającą jej rzędną linii NO wstawiając ją w równanie (12.)

$$y_1 = -75x, \text{ czyli } y_1 = 8.15 \cdot 75 = 611.25 \dots \dots \dots (17).$$

Znak (-) w równaniu (17.) został opuszczony, gdyż y_1 przedstawia tu część powierzchni jaką należy odciąć z prostokąta, zatem bezwzględną wartość.

Kontrola: $y + y_1 = 249.07 + 611.25 = 860.32 \text{ m}^2$, zatem o 0.32 m^2 za wiele, co pochodzi ze skrótów w rachunkach i przedstawia w ogóle mały błąd.

Teraz przystąpimy do wyznaczenia linii działowej. Leżeć ona będzie według równania (8.) na wysokości: $h' = \frac{x \cdot h}{n} = \frac{8.15 \cdot 25}{10} = 20.375 \text{ m}$, mierząc od wierzchołka B w dół.

Sprawdzenie:

1. Powierzchnia części prostokąta

$$F_p = 20.375 \cdot 30 \dots \dots \dots = 611.25$$

2. Łączna powierzchnia części trójkątów

$$F = a' \cdot \frac{h}{2} = x \cdot a \cdot \frac{h}{2} = 8.15 \cdot 30 \cdot \frac{20.375}{2} = 249.08$$

$$\text{Razem } F_t = F_p + F = 860.33 \text{ m}^2$$

co zgadza się z postawionem zadaniem.

Zatem w wysokości 20.375 m od wierzchołka B w dół, wytyczymy równoległą do podstawy jako dokładną linię działową.

Do powyżej wskazanego sposobu obliczenia, jak widzimy zupełnie dokładnego, nie potrzeba wcale wykreślać ani krzywej OM ani wogóle żadnego grafikonu. Wystarczy fig. 72., jako ilustracja do rachunku, a zresztą wypadnie ustawić i obrachować kilka łatwych równań.

Tego samego sposobu użyć można, gdy mamy podzielić trapez równoległe do podstawy na kilka czy to równych części, czy w stosunku $a : b : c$.

5. Dany jest nieregularny czworobok ABCD (fig. 74.), z którego mamy wydzielić część jego powierzchni F_1 za pomocą linii równoległej do podstawy AD.

Czworobok zdjęto w polu za pomocą pomiaru wszystkich boków i obu przekątni.

Jako warunek stawia się jak największą dokładność, zatem przy rozwiązaniu zagadnienia nie możemy się posługiwać pomiarami na planie.

Z wyżej podanych dań, potrafimy jednak zadanie rozwiązać, mianowicie:

Przedłużmy boki AB i DC aż do przecięcia się ich w punkcie E i rozwiążmy ten nowy trójkąt AED, t. j. obliczmy jego wysokość H i powierzchnię F_t uwzględniając wyżej podany warunek.

Ażeby uzyskać potrzebne dane do obliczenia H i F_t wykreślimy CF równoległe do AB, wówczas trójkąty FCD i AED będą podobne, zatem z proporcji:

$$FD : DC = AD : DE$$

obliczymy DE, a wreszcie z równania: $H = DE \cdot \sin \beta$, znajdziemy H. a tem samym i powierzchnię

$F_t = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot H$. W pierwszym rzędzie potrzebna jest długość DF, którą znajdziemy z równania:

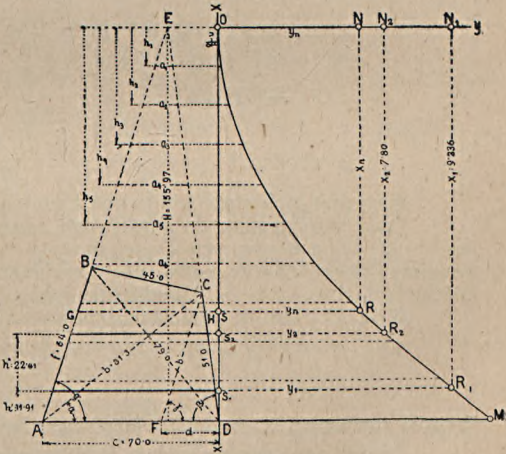


Fig. 74.

$$d = DF = a \cdot \cos \beta + b' \cos \gamma \quad \dots \quad (1)$$

gdzie: $\cos \beta$, $\cos \gamma$ i b' są dotąd nieznanne.

Ponieważ jednak mamy boki czworoboku i przekątnie pomierzone, więc z własności trójkątów obliczymy:

z trójkąta ACD , o powierzchni F_I

$$F_I = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta \quad \text{czyli} \quad \sin \beta = \frac{2 F_I}{a \cdot c}$$

$$\text{zatem} \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2 F_I}{a \cdot c}\right)^2} \quad \dots \quad (2)$$

z trójkąta ABD o powierzchni F_{II} .

$$F_{II} = \frac{1}{2} c \cdot f \cdot \sin \gamma \quad \text{czyli} \quad \sin \gamma = \frac{2 F_{II}}{c \cdot f}$$

$$\text{zatem jak} \quad \text{pierwej} \quad \cos \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{2 F_{II}}{c \cdot f}\right)^2} \quad \dots \quad (3)$$

Z trójkąta FCD :

$a : b' = \sin \gamma : \sin \beta$ a stąd

$$b' = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{2 \cdot a \cdot F_I \cdot c \cdot f}{2 \cdot a \cdot c \cdot F_{II}} = \frac{F_I}{F_{II}} \cdot f \quad \dots \quad (4)$$

Teraz możemy rozwiązać równanie (1):

$FD = d = a \cdot \cos \beta + b' \cos \gamma$, po wstawieniu wyżej obliczonych wartości, dostaniemy

$$d = a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 F_I}{a \cdot c}\right)^2} + \frac{F_I}{F_{II}} \cdot f \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2 F_{II}}{c \cdot f}\right)^2} \quad \dots \quad (5)$$

Uwaga: Powierzchnia trójkąta oblicza się za pomocą boków, z wzoru

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{gdzie} \quad a, b, c \quad \text{są bokami, zaś} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Wreszcie z trójkątów FCD i AED :

$$a : d = DE : c \quad \text{stąd:} \quad DE = \frac{a \cdot c}{d} \quad \dots \quad (6)$$

$$i \quad H = DE \sin \beta = \frac{a \cdot c}{d} \cdot \frac{2 F_I}{a \cdot c} = \frac{2 F_I}{d} \quad \dots \quad (7)$$

$$a \quad \text{wkońcu} \quad F_t = \frac{c \cdot H}{2} = \frac{c \cdot 2 F_I}{2 \cdot d} = \frac{c}{d} \cdot F_I \quad \dots \quad (8)$$

Wszystkie powyższe obliczenia opierają się tylko na bezpośrednich pomiarach.

Teraz przystąpimy do właściwego zadania. Wysokość H podzielmy, podobnie jak w ust. 4. na n równych części (n . p. $n = 10$) i przez punkty podziału przeprowadzimy równoległe do podstawy. Otrzymamy w takim razie n trójkątów o wysokościach h_1, h_2, \dots, h_n i podstawach a_1, a_2, \dots, a_n (fig. 74.)

Wzór (5.) ust. 4. przedstawia powierzchnię każdego z tych trójkątów:

$$y = x^2 C \quad \dots \quad (9)$$

$$\text{gdzie} \quad \dots \quad C = \frac{F_t}{n^2} \quad \dots \quad (10)$$

Wogóle równanie (9.) przedstawia powierzchnię trójkąta o dowolnej wysokości x .

Zresztą postąpimy zupełnie analogicznie jak w fig. 73. Przyjmijmy zatem początek układu w punkcie O (fig. 74.), oraz oś x i y . Dla odciętych $x = n = 1, 2, \dots, 10$ zgodnych z podziałem wys. H , obliczmy z równania (9.) i (10.) rzędne y . Otrzymamy w ten sposób krzywą OM mającą tę własność, że jej rzędne przedstawiają w podziałce liniowej, wartości powierzchni trójkątów o wysokościach $x \dots$ zaś różnice rzędnych, wartości powierzchni trapezów, o wysokościach odpowiadających różnicy odciętych.

Jeżeli więc, w myśl zadania, mamy odciąć część, o powierzchni F_1 z danego czworoboku linią równoległą do podstawy, to na osi y , począwszy od punktu O do N odetniemy wartość $y = F_1 - F_1$ i poprowadzimy równoległą do osi x aż do przecięcia z krzywą OM w punkcie R , stąd zaś wykreślimy rzędną i przedłużmy ją, ażeby przecięła trójkąt, to linia HG będzie żadaną granicą.

To samo wykonamy za pomocą rachunku: Równanie linii NR równoległej do osi x jest

$$y = y_n \dots \dots \dots (11)$$

wartość za y z równania (11.) wstawmy w równanie (9.)

$$y_n = x^2 C \dots \dots \dots (12)$$

a z tego obliczymy dokładne x , czyli wysokość trójkąta, jaką należy odciąć na H od wierzchołka E , ażeby otrzymać punkt, przez który przechodzi granica, równoległa do podstawy.

$$\text{Wysokość trapezu } h' = H - x \cdot h_1 = \frac{H}{n} \cdot x \dots \dots \dots (13)$$

$$\text{długość linii } GH = x \cdot a = \frac{c}{n} \cdot x \dots \dots \dots (14)$$

W praktyce nie potrzebujemy wykreślać krzywej OM , posługując się tylko fig. 74., jako ilustracją przy obliczaniu.

Przykład:

Dany jest czworobok (fig. 74.) $ABCD$, w którym pomierzono boki i przekątne. Odnośne miary wypisane są na rysunku.

Czworobok $ABCD$ należy podzielić liniami równoległymi do podstawy AD na 3 części, których powierzchnie pozostawałyby do siebie w stosunku: $1:5:2:5:2$ t. j. $F_1:F_2:F_3 = 1:5:2:5:2$ zatem, według znanej reguły spółki:

$$F_1 = \frac{F_c}{6} \cdot 1 \cdot 5, F_2 = \frac{F_c}{6} \cdot 2 \cdot 5, F_3 = \frac{F_c}{6} \cdot 2 \dots \dots \dots (15)$$

$$\text{Obliczmy z wzoru (7.) } H = 2 \frac{F_1}{d}$$

do czego potrzeba F_1 t. j. powierzchnię trójkąta ACD :

$$F_1 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{51+81 \cdot 3+70}{2} = 101 \cdot 15 \text{ m.}$$

$$F_1 = \sqrt{101 \cdot 15 \times 50 \cdot 15 \times 19 \cdot 85 \times 31 \cdot 15} = 1771 \cdot 4 \text{ m}^2 \quad \lg F_1 = 3 \cdot 248228$$

z równania (5.):

$$d = a \sqrt{1 - \left(\frac{2F_1}{ac}\right)^2} + \frac{F_1}{F_{II}} \cdot f \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2F_{II}}{cf}\right)^2}$$

$$F_{II} = \sqrt{106 \cdot 5 \times 27 \cdot 5 \times 42 \cdot 5 \times 36 \cdot 5} = 2131 \cdot 5 \text{ m}^2 \quad \lg F_{II} = 3 \cdot 328682$$

$$d = 6 \cdot 36 + 16 \cdot 35 = 22 \cdot 71 \text{ m}$$

$$\text{z równania: (7.) } H = \frac{2F_1}{d} = 155 \cdot 97 \text{ m}$$

$$\text{i } F_t = \frac{H \cdot c}{2} = 5458 \cdot 9 \text{ m}^2.$$

Według równania (15.) obliczymy F_1, F_2, F_3 , znając F_c t. j. powierzchnię czworoboku. Część F_1 już mamy, pozostaje do obliczenia trójkąt ABC t. j.:

$$F_{III} = \sqrt{95 \cdot 15 \times 13 \cdot 85 \times 31 \cdot 15 \times 50 \cdot 15} = 1434 \cdot 8 \text{ m}^2.$$

$$\text{Zatem } F_c = F_1 + F_{III} = 3206 \cdot 20 \text{ m}^2$$

$$\text{a stąd: } F_1 = 801 \cdot 6 \text{ m}^2 \quad F_2 = 1335 \cdot 9 \text{ m}^2 \quad F_3 = 1068 \cdot 7 \text{ m}^2 \dots \dots (16)$$

Ażeby odgraniczyć pierwszą parcelę F_1 , odetnijmy na osi y rzędną $y_1 = F_1 - \bar{F}_1 = 4657.3$ od O do N_1 i znajdziemy odpowiednie x_1 t. j. odciętą x_1 punktu przecięcia R_1 z krzywą OM

$$\text{równanie tej równoległej: } y_1 = 4657.3 \dots \dots \dots (17)$$

$$\text{równanie krzywej (9) i (10) } y = x^2 \cdot 54.589 \dots \dots \dots (18)$$

wstawmy y_1 za y w równanie (18.):

$$4657.3 = x^2 \cdot 54.589$$

$$\text{stąd } x = 9.236.$$

$$\text{Wysokość trapezu } h' = H - \frac{H}{n} \cdot x = 11.91 \text{ m.}$$

$$(n = 10)$$

Długość boku równoległego (linii granicznej)

$$a' = \frac{c}{n} \cdot x = \frac{70}{10} \cdot 9.236 = 64.65 \text{ m.}$$

Kontrola:

$$F_1 = \frac{c + a'}{2} \cdot h' = \frac{70 + 64.65}{2} \cdot 11.91 = 801.78 \text{ m}^2$$

Różnica wynosi 0.18 m^2 i pochodzi od skrótów w obliczeniach, lecz jest zbyt małą, ażeby wpływać mogła na dokładności.

Celem odcięcia drugiej parceli $F_2 = 1335.9 \text{ m}^2$, wyznaczmy na osi y rzędną

$$y_2 = F_1 - F + F_2 = 2137.5 \text{ od } O \text{ do } N_2$$

i znajdziemy, analogicznie do poprzedniego, odciętą x_2 dla punktu R_2 , w którym równoległe do osi x przechodząca przez N_2 przecina się z krzywą OM .

$$y_2 = 3321.4 \text{ wstawione w równanie (18.) da:}$$

$$3321.4 = x_2^2 \cdot 54.589$$

$$\text{stąd } x_2 = 7.80$$

zatem $h = H - \frac{H}{n} \cdot x_2 = 155.97 - 121.65 = 34.32$ h , jest to wysokość obu trapezów $F_1 + F_2$, zatem

$$h'' = h - h' = 34.32 - 11.91 = 22.41 \text{ m}$$

$$a'' = \frac{c}{n} \cdot x_2 = 54.6 \text{ m.}$$

$$\text{Kontrola: } F_2 = \frac{a' + a''}{2} \cdot h'' = \frac{64.65 + 54.6}{2} \cdot 22.41 = 1335.5 \text{ m}^2.$$

Różnica wskutek niedokładności w rachunku wynosi 0.4 m^2 na 1335 m^2 .

Ponieważ F_1 i F_2 zostały odgraniczone z wszelką ścisłością, więc pozostałość z czworoboku musi odpowiadać ostatniej części F_3 .

Ten sam sposób zastosować można i do poprzedniego zadania pod 4.

6. Dany czworobok $ABCD$ (fig. 75.) podzielić na części o powierzchni F_1 i F_2 linią prostopadłą do podstawy AD .

Wykreślmy BE i CF prostopadłe do AD — powstaną wtedy dwa trójkąty ABE o powierzchni f_1 i FCD o powierzchni f_2 .

$$f_1 = \frac{1}{2} AE \cdot h_1 \quad f_2 = \frac{1}{2} FD \cdot h_2 \dots \dots \dots (1)$$

$$h_1 = AB \cdot \sin \alpha \quad h_2 = CD \cdot \sin \beta \dots \dots \dots (2)$$

$$AE = AB \cdot \cos \alpha \quad FD = CD \cdot \cos \beta \dots \dots \dots (3)$$

Z trójkąta ABD , w którym są znane wszystkie trzy boki, obliczymy:

$$\sin \alpha = \frac{2 F'}{a_2 a_3}$$

a z trójkąta ACD: $\sin \beta = \frac{2 F''}{a_3 b_2} \dots \dots \dots (4)$

gdzie F' i F'' są powierzchniami trójkątów, obliczonymi za pomocą boków.

W końcu $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ i $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \dots \dots (5)$

Mamy więc wszystko do obliczenia f_1 i f_2 .

Odrzuciwszy teraz oba trójkąty, będziemy mieli do podzielenia trapez EBCF linią równoległą do podstawy CF na dwie części, których powierzchnie wyniosą:

pierwszej $F'_1 = F_1 - f_1$ a drugiej $F'_2 = F_2 - f_2 \dots \dots (6)$

Zresztą postępowanie będzie takie same, jak w poprzednich zadaniach. — Otrzymamy więc podział na 2 lub więcej części, liniami prostopadłymi do podstawy.

7. Większy obszar, w kształcie wieloboku ABCDEFGH, podzielić na dziewięć równych części liniami prostopadłymi do AH (fig. 75).

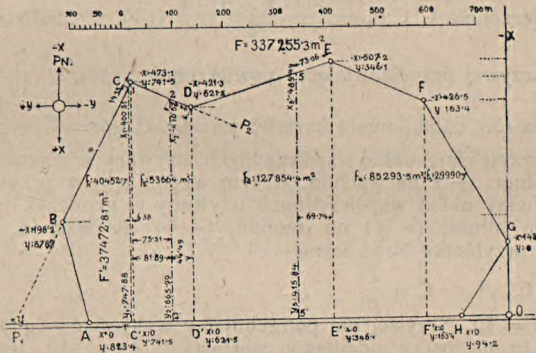


Fig. 75.

Granice obszaru zdjęto metodą polygonową, o której mówić będziemy później; w tem miejscu wypada tylko zaznaczyć, że podane na rysunku długości boków, oraz współrzędne wierzchołków, są już ustalone, t. j. wyrównane na podstawie pomiarów.

Cała powierzchnia $F = 337,255 \cdot 3 \text{ m}^2 \dots \dots \dots (1)$

zatem każda $\frac{1}{9}$ części wyniesie: $F' = 37,472 \cdot 81 \text{ m}^2 \dots \dots \dots (2)$

Wykreślmy z wierzchołków CDEF równoległe do osi x — to powierzchnię F podzielimy na 5 części o pow. f_1, f_2, \dots, f_5 bardzo łatwych do obliczenia, jako trapezy lub trójkąty — tak boki równoległe, jak i wysokości są bowiem dane za pomocą współrzędnych. Dla punktów C', D', E', F' obliczymy bez trudu współrzędne: odcięte ich = 0 — rzędne zaś odpowiadają punktom CDEF.

Porównując F z F' widzimy, że już z pierwszego czworoboku ABCD odgraniczyć trzeba będzie część $F' = 37,472 \cdot 81 \text{ m}^2$, pozostała zaś reszta $f_1 - F' = 2979 \cdot 89 \text{ m}^2$ pozostanie dla nowej, sąsiedniej parceli. $\dots \dots \dots (2a)$

Mamy zatem zadanie zupełnie podobne do 6-go, t. j. z czworoboku ABCD, odciąć części o pow. F' linią równoległą do podstawy.

Przedłużmy bok BC aż do przecięcia z osią y w punkcie P_1 i obliczmy współrzędne tego punktu.

Zadanie mamy tu ułatwione w porównaniu z poprzednim, mianowicie:

Równanie prostej BC, t. j. przechodzącej przez punkty B i C, których współrzędne są dane, ma kształt

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \dots \dots \dots (3)$$

Nazwijmy współrzędne B (y_1 x_1) zaś C (y_2 x_2) to, przy uwzględnieniu znaków osi x i y , otrzymamy:

$$y - 878.2 = \frac{741.5 - 878.2}{-473.1 - (-198.2)} \cdot [x - (-198.2)]$$

$$\text{czyli } y = 0.4972 x + 976.745 \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{Równanie osi } y \text{ (rzędnych): } x = 0 \dots \dots \dots (5)$$

Punkt przecięcia znajdziemy, wstawiając z równania (3.) $x = 0$ w równanie (4.) zatem

$$\left. \begin{array}{l} y = 976.74 \\ \text{i } x = 0 \end{array} \right\} \text{ dla } P_1 \dots \dots \dots (6)$$

Ponieważ rzędna punktu C' wynosi: $y = -741.5$, zatem wysokość trójkąta C'CP₁ t. j.

$$C'P_1 = 976.74 - 741.5 = 235.24 \text{ m} \dots \dots \dots (6a)$$

$$\text{a stąd powierzchnie } C'CP_1 = \frac{235.24 \times 473.1}{2} = F_t = 55646 \text{ m}^2 \dots (7)$$

Równanie krzywej przedstawiającej powierzchnie $\frac{1}{10} F_t$, $\frac{2}{10} F_t \dots$ według

ustępu 4. równania (5.) i (5a.) miało kształt: $y = C \cdot x^2$ gdzie $C = \frac{F_t}{n^2}$ dla $n = 10$, wówczas jednak przyjęliśmy układ współrzędnych, używany w geometrii analitycznej, t. j. oś $+y$ na północ, $+x$ na wschód. W tym wypadku i w przyszłości wprowadzać zawsze będziemy układ współrzędnych używany w geodezyi, t. j. oś $(+x)$ na południe, $(-x)$ na północ, $(+y)$ na zachód, $(-y)$ na wschód. Skutkiem tego równanie krzywej przybierze teraz formę:

$$x = C \cdot y^2 \quad C = \frac{F_t}{n^2} \dots \dots \dots (8)$$

gdzie jak dotąd $n = 10$. Krzywej nie potrzebujemy wykresłać — gdyby jednak przyszło do wykresu, to na osi y odcinamy wartości 1, 2 \dots 10, lecz za jednostkę służy tu wartość $\frac{C'P_1}{10}$ czyli wogóle $\frac{1}{10}$ część wysokości trójkąta, na co zwracamy uwagę, bo wówczas ułatwia się wykreślenie linii podziału.

Wstawmy w równaniu (8.) wartość F_t z równania (7.), to otrzymamy

$$x = 556.46 y^2 \dots \dots \dots (9)$$

Z trójkąta C'CP₁ mamy odciać taką część, ażeby pozostało jeszcze 2979.89 m², według obliczenia pod (2a), zatem część $F_t - 2979.89 = 52666.11$ m².

Odejmijmy więc na osi x powyższą wartość

$$x = 52666.11 \dots \dots \dots (10)$$

to równanie (10.) będzie równaniem prostej równoległej do osi y . Znajdźmy teraz punkt przecięcia R tej prostej z krzywą, wstawiając x z (10.) w równanie (9.)

$$52666.11 = 556.46 y^2 \dots \dots \dots (11)$$

$$\text{a stąd } y = 9.7285 \dots \dots \dots (12)$$

W równaniu (12.) wyrażone jest y w jednostkach przyjętych do podziału wysokości trójkąta na 10 części $\left(\frac{1}{10} H\right)$ — zatem właściwe y wyrażone w metrach

$$\text{wyniesie } y' = 9.7285 \frac{235.24}{10} = 228.86 \text{ m} \dots \dots \dots (13)$$

Odejawszy od rzędnej punktu P₁ — równanie (6.) — rzędną z równania (13.) otrzymamy rzędną linii granicznej

$$y_1 = 976.74 - 228.86 = 747.88 \text{ m} \dots \dots \dots (14)$$

Odciętą x_1 znajdziemy z przecięcia linii BC — równanie (4.) — z równoległą według równania (14.), t. j. $747.88 = 0.4972 x_1 + 976.745$

$$\text{stąd } x_1 = -\frac{228.865}{0.4972} = -460.31 \text{ m} \dots \dots \dots (15)$$

Kontrola.

Nowa odcięta x , odcina wraz z odciętą CC' z czworoboku $ABCC'$ trapez, o wysokości $y_1 - y_c = 6.38$ m.

Powierzchnia trapezu

$$f = \frac{460.31 + 473.10}{2} \cdot 6.38 = 2977.55 \text{ m}^2 \dots \dots \dots (16)$$

Jest to reszta, która miała wejść w skład drugiej parceli. Z obliczenia pod (2a) wynika, że ta reszta powinna wynosić 2979.89 m^2 . Różnicę 2.34 m^2 odnieść należy do całej parceli $F' = 37472.81 \text{ m}^2$ jako błąd, powstały ze skrótów rachunkowych. Jest to jednak błąd tak mały, że wymagałby przesunięcia linii granicznej o 5 mm, zatem nie może wchodzić w rachubę.

Po odcięciu pierwszej parceli, pozostało z czworoboku $ABCC' \dots 2979.89 \text{ m}^2$, a ponieważ nowe parcele mają mierzyć po 37472.81 m^2 , więc z następnego trapezu $C'CD D'$ trzeba będzie odgraniczyć części o powierzchni F'' .

$$F'' = 37472.81 - 2979.89 = 34492.92 \text{ m}^2 \dots \dots \dots (1)$$

resztę zaś trapezu (fig. 75.), t. j.

$$53664 - 34492.92 = 19171.08 \text{ m}^2 \dots \dots \dots (2)$$

dołączy się do parceli trzeciej.

Poniżej przeprowadzono cały tok rachunku z uwagą, że postępując systematycznie, oszczędzimy sobie pracy; wiele np. logarytmów powtarza się.

A. Przedłużenie boku CD aż do przecięcia z osią y w punkcie P_2 :

Kierunek CD mierzony od kierunku $(+\times)$ ma wartość $(270^\circ + \alpha)$, czyli leży w czwartej ćwiartce, zatem $\text{tg } \alpha$ będzie miał znak $(-)$.

Równanie prostej CD:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

y_1 i x_1 należy do punktu C, y_2 i x_2 do D.

$$y - 741.5 = \frac{621.5 - 741.5}{-421.3 + 473.1} (x + 473.1)$$

$$y = \frac{120.0}{51.8} x - \frac{120.0}{51.8} \cdot 473.1 + 741.5$$

$$y = -2.3166x - 354.48 \dots \dots \dots (3)$$

dla $x = 0$ otrzymamy

$$y = -354.48 \dots \dots \dots (4)$$

jako położenie punktu P_2 — stąd wysokość H trójkąta CP_2C' :

$$C'P_2 = H = y_c - (-y) = 741.5 + 354.48 = 1095.98 \dots \dots (5)$$

Powierzchnia trójkąta CP_2C' :

$$F_t = \frac{CC' \cdot H}{2} = \frac{473.1 \cdot 1095.98}{2} = 259254.7 \dots \dots \dots (6)$$

Z tej powierzchni należy według (1) część F'' odciąć, pozostanie więc reszta z trójkąta

$$x' = F_t' = 259254.7 - 34492.92 = 224761.78 \dots \dots \dots (7)$$

Równanie (7.) jest zarazem równaniem prostej równoległej do osi y.

B. Równanie krzywej

$$x = C \cdot y^2 \quad C = \frac{F_t}{n^2} \quad n = 10 \dots \dots \dots (8)$$

Wstawiwszy wartość za C a zarazem x' z równania (7.) za x, dostaniemy rzędną punktu przecięcia R:

$$224761.78 = 2592.547 y^2 \text{ czyli}$$

$$y = 9.311 \dots \dots \dots (9)$$

stąd wysokość odciętej części trójkąta

$$H' = y \cdot \frac{H}{10} = 9 \cdot 311 \cdot 109 \cdot 598 = 1020 \cdot 47 \dots \dots \dots (10)$$

Rzędną y_2 otrzymamy, dodając do rzędnej punktu P_2 z równ. (4.) wysokość H' :

$$y_2 = -354 \cdot 48 + 1020 \cdot 47 = 665 \cdot 99 \dots \dots \dots (11)$$

Jest to zarazem równanie linii granicznej, równoległej do osi x . Jeden punkt tej linii, leżący na osi y , określony jest powyższem y_2 z równania (11.), tudzież $x_2 = 0$. Drugi punkt leżący na boku CD , będzie miał y_2 to samo, odciętą zaś znajdziemy z przecięcia linii y_2 i linii CD z równ. (3.) wstawiając tam y_2 za y :

$$665 \cdot 99 = -2 \cdot 3166 x_2 - 354 \cdot 48 \text{ czyli} \\ x_2 = -\frac{1020 \cdot 47}{2 \cdot 3166} = -440 \cdot 50 \dots \dots \dots (12)$$

C. Jako kontrolę, obliczmy powierzchnię trapezu, którego bokami równoległymi są:

$$x_2 = 440 \cdot 50 \text{ i } CC' = 473 \cdot 10, \text{ a wysokością} \\ H - H' = 1095 \cdot 98 - 1020 \cdot 47 = 75 \cdot 51 \dots \text{ równ. (5.) i 10.} \\ F'' = 456 \cdot 8 \times 75 \cdot 51 = 34492 \cdot 97 \dots \dots \dots (13)$$

w porównaniu z równ. (1.) zupełnie zgodnie.

Cała powierzchnia drugiej parceli składa się z wąskiego paska, pozostałego z czworoboku $ABCC'$ o powierzchni rzeczywistej $\dots \dots \dots 2977 \cdot 55 \text{ m}^2$
i z odciętej dopiero $F'' \dots \dots \dots 34492 \cdot 97 \text{ „}$
razem $\dots \dots \dots 37470 \cdot 52 \text{ m}^2$

Według założenia powinno być $\dots \dots \dots F' = 37472 \cdot 81 \text{ „}$
Powstała więc różnica $\dots \dots \dots -2 \cdot 29 \text{ m}^2$
którą, jako znikomo mały błąd pomijamy.

W taki sam sposób obliczono rzędne granicy piątej parceli, t. j. $y_5 = 415 \cdot 84$ i $x'_5 = 0 - y_5$ i $x_5 = -485 \cdot 44$, fig. 75, zostawiając resztę jako ćwiczenie.

Na linii przyjętej jako oś y — położenie punktów linii granicznych jest ściśle oznaczone. Pozostaje jeszcze oznaczyć je także na bokach BC , CD , $DE \dots \dots \dots$ a to w tym celu, by za pomocą zmierzenia odpowiedniej długości od wierzchołków, można było punkty te w polu wyznaczyć.

Obliczenie to jest proste, mianowicie: długość $C(1)$ obliczy się jako przeciwprostokątną trójkąta, którego prostokątami są różnice współrzędnych punktów C i (1) .

$$a) \quad C(1) = \sqrt{(y_c - y_1)^2 + (x_c - x_1)^2} = 14 \cdot 13 \text{ m.}$$

Odmierzwszy tę długość od punktu C w kierunku do B , wyznaczmy dokładnie położenie punktu (1) a tem samem i linii $(1) - (1')$ w polu, poczem ją można wytyczyć.

b) Położenie punktu (2) :

$$D(2) = \sqrt{44 \cdot 49^2 + 19 \cdot 2^2} = 48 \cdot 46 \text{ m.}$$

c) Położenie punktu (5) :

$$E(5) = \sqrt{69 \cdot 74^2 + 21 \cdot 76^2} = 73 \cdot 06 \text{ m.}$$

8. Dwie parcele Nr. 1 i Nr. 2 przytykające do drogi, mają wspólną granicę AB , ukośną do kierunku drogi, fig. 76.

Zadanie: Zmienić kierunek granicy AB na prostopadły do drogi, przyczem jednak powierzchnie obu parcel Nr. 1 i Nr. 2 muszą pozostać niezmienione.

W polu zdejmujemy kierunek drogi i granicy w następujący sposób:

Obierzmy punkty C i D na granicach parcel i pomierzmy wszystkie długości boków w obu trójkątach ABC i ABD .

Na razie nie będziemy mieli w polu nic więcej do roboty, a wrócimy tam dopiero do wytyczenia nowej granicy.

Nazwijmy boki trójkątów: abc i bde i obliczmy ich powierzchnie:

$$F_1 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (1)$$

$$F_2 = \sqrt{s_1(s_1-b)(s_1-d)(s_1-e)} \quad (2)$$

gdzie, jak poprzednio, $s = \frac{a+b+c}{2}$. . . (3)

$$s_1 = \frac{b+d+e}{2} \quad (4)$$

Mamy więc teraz czworobok $ACBD$ podzielony linią AB na dwie części F_1 i F_2 .

Jeżeli ten czworobok podzielimy linią prostą AD także na dwie części o powierzchniach F_1 i F_2 , to byłoby to najprostsze rozwiązanie. Ponieważ jednak poprzednie sposoby nie dadzą się w tym wypadku bezpośrednio zastosować, więc musimy dopiero odpowiednio warunki stworzyć, mianowicie, skonstruować nowy trapez, którego boki równoległe byłyby prostopadłe do linii AD , a linia AB pozostałaby nadal jako jego przekątna i dopiero ten trapez odpowiednio podzielić.

Z powierzchni F_2 trójkąta ABD i długości boków, obliczmy:

$$F_2 = \frac{b \cdot e \cdot \sin \delta}{2} \quad \text{stąd zaś} \quad \sin \delta = \frac{2 F_2}{be} \quad (5)$$

$$\text{zarazem} \quad h = OB = b \cdot \sin \delta = \frac{2 F_2}{e} \quad (6)$$

$$AO = b \cdot \cos \delta = b \sqrt{1 - \sin^2 \delta} = b \sqrt{1 - \left(\frac{2 F_2}{be}\right)^2} \quad (7)$$

Przyjmijmy teraz układ współrzędnych, mianowicie punkt O jako początek, OB jako $(-x)$, OA jako $(+y)$.

W takim razie współrzędne punktu A i B mamy powyżej obliczone, a to:

$$A \dots y_a = AO \text{ (równ. 7)} \dots x_a = 0$$

$$B \dots y_b = 0 \dots (-x_b) = -h = -OB \text{ (równ. 6)}$$

Teraz należy znaleźć współrzędne punktu C .

Z trójkąta ABC znajdziemy:

$$F_1 = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} \quad \text{czyli} \quad \sin \gamma = \frac{2 F_1}{ab} \quad (8)$$

Ponieważ $\varphi = 180 - (\gamma + \delta)$.

$$\text{więc} \quad \sin \varphi = \sin(\gamma + \delta) = \sin \gamma \cdot \cos \delta + \cos \gamma \cdot \sin \delta \quad (9)$$

$$\sin \varphi = \frac{2 F_1}{ab} \sqrt{1 - \left(\frac{2 F_2}{be}\right)^2} + \frac{2 F_2}{be} \sqrt{1 - \left(\frac{2 F_1}{ab}\right)^2} \quad (10)$$

$$\text{stąd} \quad C'C = X_c = a \cdot \sin \varphi \quad (11)$$

$$\text{i} \quad C'A = a \cdot \cos \varphi = a \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \quad (12)$$

Współrzędne punktu C :

$$C \dots y_c = OA + AC' \dots -x_c = -CC' \quad (13)$$

Za pomocą współrzędnych punktów B i C — znajdziemy równanie tej prostej BC :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \begin{matrix} x_1 \dots y_1 \text{ należą do } C. \\ x_2 \dots y_2 \text{ „ „ } B. \end{matrix}$$

$$y - y_e = \frac{y_b - y_c}{x_b - x_c} (x - x_c) \quad (14)$$

Jeżeli wkońcu przeprowadzimy przez punkt A linię AE równoległą do osi x — której równanie jest $y_a = AO$ (15) i znajdziemy punkt E jako przecięcie prostych CB i AE — a to przez podstawie-

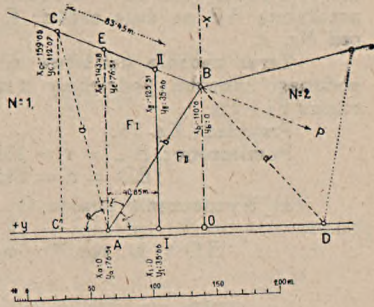


Fig. 76.

nie y_a z równ. (15.) za y w równ. (14.), to otrzymamy trapez $AEBO$, podzielony przekątnią AB na dwie części: F_I należącą do parceli Nr. 1 i F_{II} należącą do parceli Nr. 2.

Teraz zadanie jest łatwe do rozwiązania, mianowicie, za pomocą poprzednio podanego sposobu, podzielimy trapez linią równoległą do podstawy AE , na dwie części F_I i F_{II} .

Przykład: fig. 76.

Pomierzono: $AC = a = 162$ m. $AB = b = 134$ m. $CB = c = 122$ m.
 $BD = d = 145$ m. $AD = e = 171$ m.

a) Wyznaczenie punktu O : z równania (7.):

$$AO = b \cdot \cos \delta = b \sqrt{1 - \left(\frac{2 F_2}{b \cdot e}\right)^2} = 134 \cdot 0.571 = 76.514 \quad (1)$$

$$OB = h = b \sin \delta = b \frac{2 F_2}{b e} = 110 \text{ m.} \quad \dots \dots \dots (1a)$$

Współrzędne punktów:

$$\begin{array}{l} A \quad x_a = 0 \\ \quad y_a = + 76.514 \\ B \quad x_b = - 110.0 \\ \quad y_b = 0. \end{array} \quad \dots \dots \dots (2)$$

b) Z trójkąta ABC : z równania (8):

$$\sin \gamma = \frac{2 F_1}{ab} = 0.7376 \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\sin \varphi = \frac{2 F_1}{ab} \sqrt{1 - \left(\frac{2 F_2}{b e}\right)^2} + \frac{2 F_2}{b e} \sqrt{1 - \left(\frac{2 F_1}{ab}\right)^2} = 0.9756 \quad (4)$$

$$CC' = a \cdot \sin \varphi = 159.05 \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$AC' = a \cdot \cos \varphi = 35.56 \text{ m.} \quad \dots \dots \dots (6)$$

Współrzędne punktu C :

$$\begin{array}{l} y_c = + 112.07 \\ x_c = - 159.05 \end{array} \quad \dots \dots \dots (7)$$

c) Równanie prostej CB :

$$y - y_c = \frac{y_b - y_c}{x_b - x_c} (x - x_c)$$

$$y - 112.07 = \frac{0 - 112.07}{-110 + 159.05} (x + 159.05)$$

$$y = -2.284 x - 251.20 \quad \dots \dots \dots (8)$$

d) Równanie linii AE :

$$y = 76.51 \quad \dots \dots \dots (9)$$

Punkt przecięcia: równanie (8.) i (9.).

$$76.51 = -2.284 x - 251.20$$

$$2.284 x = -327.71 \text{ czyli}$$

$$\begin{array}{l} x_e = -143.48 \\ y_e = 76.51 \end{array} \text{ współrzędna } E \quad \dots \dots \dots (10)$$

e) Mamy więc dany trapez $AEBO$ o powierzchni $F = F_I + F_{II}$.

$$F_I = \frac{x_e \cdot y_e}{2} = 5488.83 \text{ m}^2 \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$F_{II} = \frac{y_a \cdot x_b}{2} = 4208.05 \text{ m}^2 \quad \dots \dots \dots (12)$$

Trapez ten należy podzielić na części F_I i F_{II} linią równoległą do podstawy AE .

Pomyślmy sobie linię CB — równ. (8.) przedłużoną, aż do przecięcia z osią y w punkcie P .

$$\text{Równ. linii } CB \quad \dots \quad y = -2.284 x - 251.20$$

$$\text{„ osi } y \quad \quad \quad y = 0$$

stąd otrzymamy:

$$y_p = -251 \cdot 20 \dots \dots \dots (13)$$

Nowo powstały trójkąt AEP ma za podstawę

$$AE = 143 \cdot 38 \text{ m, a wysokość } H = AO + OP = 327 \cdot 71 \text{ m} \quad (14)$$

$$\text{Powierzchnia trójkąta } F_t = \frac{327 \cdot 71 \times 143 \cdot 38}{2} = 23493 \cdot 58 \dots \dots \dots (15)$$

$$\text{Równ. krzywej: } x = C \cdot y^2 \quad C = \frac{F_t}{n^2} \quad n = 10$$

$$\text{t. j. } x = 234 \cdot 9358 y^2 \dots \dots \dots (16)$$

Ażeby z trójkąta pozostała nam część F_t — musimy odciąć zeń różnicę $F_t - F_t' = F_t'$.

$$F_t' = 23493 \cdot 58 - 5488 \cdot 83 = 18004 \cdot 75 \dots \dots \dots (17)$$

Równ. (17.) będzie więc równaniem prostej równoległej do osi y :

$$X_r = 18004 \cdot 75, \text{ co wstawione w równanie (16.) da punkt przecięcia}$$

$$18004 \cdot 75 = 234 \cdot 9358 y_r^2 \text{ a stąd}$$

$$y_r = \sqrt{\frac{18004 \cdot 75}{234 \cdot 9358}} = 8 \cdot 7542 \dots \dots \dots (18)$$

y_r wyrażone jest w jednostkach podziału wysokości H , więc wysokość odciętej części trójkąta H_1' znajdziemy:

$$H' = y_r \frac{H}{10} = 8 \cdot 7542 \cdot 32 \cdot 771 = 286 \cdot 86 \text{ m} \dots \dots \dots (19)$$

Różnica $H - H' = 327 \cdot 71 - 286 \cdot 86 = 40 \cdot 85 \text{ m}$ odjęta od rzędnej punktu A ($y_a = 76 \cdot 51$) da nam równanie linii działowej:

$$y_I = 35 \cdot 66 \dots \dots \dots (20)$$

Współrzędne punktu przecięcia z osią y :

$$y_I = 35 \cdot 66 \quad x_I = 0 \dots \dots \dots (21)$$

Zaś z linią CB — znajdziemy, wstawiając wartość y_I z równn. (20.) w równ. (8.):

$$35 \cdot 66 = -2 \cdot 284 x - 251 \cdot 20$$

$$x_{II} = -\frac{286 \cdot 66}{2 \cdot 284} = -125 \cdot 51 \quad y_{II} = 35 \cdot 66 \dots \dots \dots (22)$$

Kontrola:

Powierzchnia odciętego trapezu F_t .

$$F_t = \frac{143 \cdot 38 + 125 \cdot 61}{2} \cdot 40 \cdot 85 = 5491 \cdot 87 \text{ m}^2,$$

a że F_t powinien wynosić $5488 \cdot 83 \text{ m}^2$, więc różnica $3 \cdot 04 \text{ m}^2$ przedstawia błąd, jaki popełniono w rachunku skutkiem opuszczania dalszych miejsc dziesiętnych. Jest to w porównaniu z powierzchnią zbyt mała różnica, ażeby ją brać w rachubę.

Linia I—II tworzy teraz nową granicę obu parcel i ma kierunek prostopadły do drogi.

Do wytyczenia tej granicy w polu, mamy położenie punktu I określone rzędną $y_I = 35 \cdot 66 \text{ m}$ od punktu 0 lub $40 \cdot 85 \text{ m}$ od A. Położenie punktu 0 jest także określone rzędną y_a t. j.

$$76 \cdot 51 \text{ m od A} \dots \dots \dots (23)$$

Potrzeba jeszcze dokładnie oznaczyć punkt II na linii CB.

Współrzędne punktów C i II są dane, zatem długość CII znajdziemy z trójkąta prostokątnego, w którym jedna przyprostokątnia wynosi $y_c - y_{II}$ a druga $x_c - x_{II}$.

$$\text{więc } CII = \sqrt{76 \cdot 41^2 + 33 \cdot 54^2} = 83 \cdot 45 \text{ m} \dots \dots \dots (24)$$

9. Podzielić obszar jakiegokolwiek kształtu (fig. 77.) na dowolną ilość części liniami, równoległymi do pewnego kierunku.

Przypuśćmy, że dany kierunek jest w tym wypadku zgodny z kierunkiem osi x . Poprzednio, w kilku przykładach rozwinięty sposób podziału polega na tem, że dany obszar w kształcie jakiegoś nieumiarowego wieloboku dzielimy za pomocą

rzędnych na trapezy, których powierzchnie łatwo jest obliczyć, mając do dyspozycji współrzędne. Te poszczególne powierzchnie w porównaniu z zadaniem, wskazują, ile powierzchni z którego z nich należy odciąć i jak te odcinki ze sobą łączyć, ażeby otrzymać żądany podział. Rachunek ten nie przedstawia żadnych trudności.

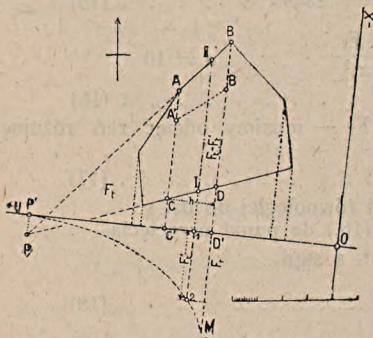


Fig. 77.

MD' przedstawia w odpowiedniej, linijnej podziałce powierzchnię całego trójkąta F_t , inna rzędna, n. p. 1—2 przedstawia powierzchnię reszty trójkąta F_t' , o wysokości $P'-1$ i t. d. Chcąc odciąć jakąś część z trapezu o powierzchni F_t wyznaczamy na rzędnej $D'M = F_t$ odcinek $F_t' = F_t - F_1$ i kreślimy równoległą do osi y aż do przecięcia z krzywą w punkcie 2 (fig. 77.), stąd zaś kreślimy równoległą do osi x , która podzieli trapez na żądane części. Powyższy podział przeprowadzamy jednak nie graficznie, lecz rachunkiem, ze względu na dokładność.

W zupełnie ten sam sposób wykonamy podział i wówczas, gdy, jak n. p. na fig. 77. oś y nie schodzi się z bokiem CD , lecz ma doń kierunek ukośny.

Odejmijmy długości $A'C' = AC$ i $B'D' = BD$, to powierzchnie obu trapezów $ABDC$ i $A'B'D'C'$ będą sobie równe, bo wysokość h się nie zmieniła. Sprowadziliśmy zatem konstrukcję do poprzedniego wypadku. Wysokość trójkąta BPD pozostanie zawsze tą samą $P'D'$. Możemy więc podział wykonać tak, jak pierwiej, nie zważając na względny ukos współrzędnych. Jedyne musi się o tem pamiętać, że punkt P jest przecięciem obu boków nierównoległych, poczem obliczy się wysokość $P'D$. Punkty I i II znajdziemy tak samo, jak poprzednio.

Zdejmując podzielić się mający obszar w polu, należy odpowiednio nawiązać się do danego kierunku celem obliczenia współrzędnych, jak to dostatecznie fig. 77. wyjaśnia, czyli dany kierunek przyjmiemy ze względu na podział, jako tymczasową oś x .

W praktyce zdarzyć się może, zwłaszcza w projekcie regulacji miasta, że przez pewien kompleks gruntu wypadnie zaprojektować nową ulicę, a grunt podzielić na parcele w kierunku prostym do ulicy. Równocześnie, ze względu na drogi grunt, wymagana jest jak największa dokładność. Takie zadanie możemy we wskazywany sposób rozwiązać, bezwzględnie zupełnie ściśle.

Jak już poprzednio zauważyliśmy, nie trzeba wcale wykreślać krzywej pomocniczej ani obliczać jej współrzędnych, z wyjątkiem jednej, odpowiadającej całej powierzchni pomocniczego trójkąta, podział bowiem przeprowadza się rachunkiem.

Obmyślony powyżej sposób podziału parcel da się zastosować w każdym wypadku, o ile tylko linie działowe mają być prostymi.

10. Czworobok $ABCD$ podzielić na dwie części bądź równe, bądź w pewnym stosunku, ale w ten sposób, ażeby linia działowa przechodziła nie tylko przez dany punkt M leżący na jednym z boków, ale i przecinała przeciwległy bok.

Zadanie to nie zawsze da się rozwiązać, t. j. nie zawsze obydwie warunki mogą być równocześnie spełnione.

Przypuśćmy, że wyznaczaliśmy znanym sposobem linię działową EF , dzielącą dany czworobok na dwie części o powierzchni F_1 i F_2 . Linia EF przecina bok

Podział trapeza na części o danych powierzchniach uskutecznialiśmy w ten sposób, że gdy jeden z jego nierównoległych boków był zarazem osią y , to drugi przedłużaliśmy aż do przecięcia się z tą osią w punkcie P_n — w ten sposób powstawał trójkąt pomocniczy, którego podstawą był naturalnie dłuższy bok równoległy (odcięta x), wysokością zaś odnośny odcinek y między punktem P_n a podstawą.

Dzieląc wysokość trójkąta na 10 części, a tem samem i trójkąt, równoległami do podstawy, mogliśmy łatwo obliczyć poszczególne trójkąty o wysokościach $\frac{H}{10}, 2 \frac{H}{10}$ i t. d. a odci-

nając wartości tych powierzchni na prostopadłych do wysokości t , j. do y w liniach podziału, mogliśmy wykreślić krzywą $P'M$ (fig. 77.), która ma tę własność, że n. p. rzędna

AB i przeciwny BC, lecz nie przechodzi przez wskazany punkt M. Należy więc położenie jej odpowiednio zmienić, przy czem jednak wartości F_1 i F_2 nie mogą uleść zmianie.

Połączmy punkty M i F, to otrzymamy trójkąt MEF, w którym wysokością jest $EE' = h$ wykreślone prostopadłe do podstawy MF.

Wykreślmy teraz linie EG równoległe do MF, to trójkąt MGF będzie co do powierzchni równy poprzedniemu, bo: $MF = MF$ jako wspólna podstawa, tudzież $GG' = EE' = h$, co wynika z konstrukcji.

Zatem oba trójkąty, mające tę samą podstawę i równe wysokości, muszą mieć równe powierzchnie.

Możemy więc obydwa trójkąty ze sobą zamienić, czyli do powierzchni ABFM dodać trójkąt MGF zamiast MEF, a wówczas otrzymamy nowy czworobok AMGB i zadanie jest spełnione.

Gdy punkt M zbliża się do punktu A, to równocześnie punkt G posuwa się po linii BC i może zająć wypadek, jak na fig. 79., że wyjdzie poza C, w takim razie zadanie pod danymi warunkami nie da się rozwiązać.

Wracając do fig. 78. należy jeszcze dodać, że gdy położenie punktów ABCD określone jest za pomocą współrzędnych, to współrzędne punktów E i F na linii działowej także obliczymy. Jeżeli punkt M podany jest tylko za pomocą długości AM, a tem samem i MD, to współrzędne jego także obliczymy przy pomocy dwóch podobnych trójkątów AA'D i MM'D. Mając punkty M i F, czyli równanie prostej MF, łatwo skonstruować równanie linii EG, przechodzącej przez punkt E i równoległej do MF ($m = \tan \alpha$ w obu równaniach jest to samo), a wreszcie znaleźć przecięcie linii BC z EG, czyli współrzędne punktu G oraz długość FG.

W praktyce zagadnienie 10. może się zdarzyć w następującym, opisanym pod 11. wypadku.

11. Parcele podaną na fig. 80, podzielić wzdłuż, na dwie części o powierzchniach F_1 i F_2 .

Z pomiarów jakkolwiek metodą, zależnie od warunków, mamy podane wszelkie potrzebne nam dane, jak to zresztą widziliśmy w poprzednich przykładach.

Z powierzchni poszczególnych czworoboków i warunków, pod jakimi podział ma być dokonany, obliczymy $F_1 = f_1 + f_2 + f_3$ i $F_2 = f_1' + f_2' + f_3' \dots$ gdzie $f_1, f_1' - f_2, f_2'$ należą do poszczególnych czworoboków.

Wyznaczymy linie graniczne 1-2, 3-4, 5-6, oddzielnie dla każdego z czworoboków. Następnie, uważając np. punkt 2 jako stały, zmienimy położenie linii 3-4 na 2-7 według poprzedniego ustępu 10., a podobnie linię 5-6 na linię 7-8.

W ten sposób zadanie będzie rozwiązane.

W razie, gdyby w jednym z czworoboków zaszedł wypadek poprzednio także przewidziany, t. j. gdyby linia działowa po wyrównaniu jej, nie przecięła przeciwnego boku, lecz inny, wówczas dany czworobok podzielimy inaczej, nie stosując doń postawionego warunku co do f i f' , lecz inny, natomiast wprowadzimy odpowiednie poprawki w innych czworobokach, tak, by w sumie F_1 i F_2 odpowiadały warunkom.

12. Granicę parceli Nr. 1, fig. 81. od strony parceli Nr. 2, uregulować w ten sposób, ażeby zamiast linii łamanej A_{123456} B była granica linią prostą, wychodzącą z punktu A i przecinała się z przedłużeniem drugiej granicy BC.

Jest to bardzo proste zadanie i może być rozwiązane w następujący sposób:

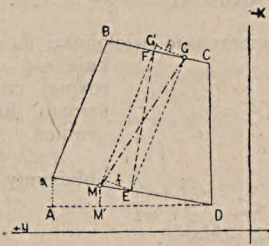


Fig. 78.

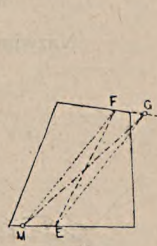


Fig. 79.

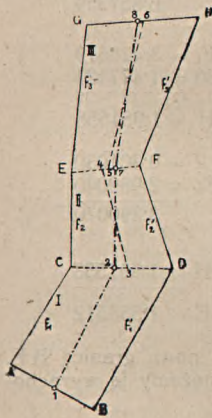


Fig. 80.

Odmierzmy dowolną długość BC i pomierzmy długość AC i AB. Za pomocą tych trzech boków możemy trójkąt rozwiązać.

Powierzchnia trójkąta $F_t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots \dots \dots (1)$

Ponieważ dana jest podstawa b i powierzchnia F_t

więc wysokość $H = \frac{2F_t}{b} \dots \dots \dots (2)$

Nazwijmy powierzchnię wieloboku $A_1 \dots B$ przez F_w , to całe zadanie redukuje się do odcięcia z trójkąta ABC części, równej co do powierzchni wielobokowi, a tem samym linia działowa trójkąta będzie nową granicą.

Z danej powierzchni F_w i wysokości H obliczymy podstawę

$BE = \frac{2F_w}{H} \dots \dots \dots (3)$

a linia AE będzie teraz granicą parceli Nr. 1.

Przykład:

Według podanych miar, powierzchnia wieloboku $F_w = 975.08 \text{ m}^2$.

Z trójkąta ABC obliczymy:

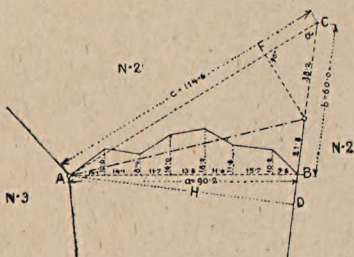


Fig. 81.

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{264.8}{2} = 132.4 \text{ m} \quad \log. s = 2.121888$$

$$(s-a) = 132.4 - 90.2 = 42.2 \quad \log. (s-a) = 1.625312$$

$$(s-b) = 132.4 - 60.0 = 72.4 \quad \log. (s-b) = 1.859739$$

$$(s-c) = 132.4 - 114.6 = 17.8 \quad \log. (s-c) = 1.250420$$

6.857359

$$F_t = \sqrt{132.4 \cdot 42.2 \cdot 72.4 \cdot 17.8} = 2683.62 \text{ m}^2$$

Według równania (2.):

$$H = \frac{2F_t}{b} = \frac{2F_t}{60} = \frac{F_t}{30}$$

$H = 89.44 \text{ m}$

W końcu, według równania (3.):

$$BE = \frac{2F_w}{H} = \frac{2 \cdot 975.08}{89.44} = 21.80 \text{ m} \quad \log. BE = 1.338512$$

Odciąwszy $BE = 21.80 \text{ m}$ na kierunku BC, wyznaczmy nową granicę AE. Gdyby rozchodziło się o obliczenie długości AE — to możemy ją wyrachować w następujący sposób:

Z trójkąta ABC..... $\sin. \alpha = \frac{2F_t}{bc} \dots \dots \dots (4)$

Wykreślmy EF prostopadle do AC, to w trójkącie CFE

$CF = EC \cdot \cos \alpha = (BC - BE) \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \dots \dots \dots (5)$

$FE = EC \cdot \sin. \alpha \dots \dots \dots (6)$

w końcu $AF = AC - CF$

i $AE = \sqrt{AF^2 + FE^2} \dots \dots \dots (7)$

13. Celem następującego przykładu jest prócz rozwiązania właściwego zagadnienia jeszcze wskazać, że za pomocą stosunkowo małej ilości pomiarów w polu, można dość zawiłe prace z teoretyczną niemal dokładnością wykonać. Zawsze powinniśmy dążyć do tego, by ile możności uprościć roboty w polu; te bowiem wymagają i dużo czasu i kosztów, nie licząc trudów, a zarazem sposobności do błędów, bo w polu nie da się dane zadanie tak łatwo objąć, jak na rysunku. Unikać więc należy wytyczenia linii równoległych w znacznej odległości od siebie, linii prostopadłych i t. p., a ile możności, przy pracach odnoszących się do powyższych zagadnień, ograniczyć się do niewielu pomiarów długości, lecz za to z możliwą dokładnością, oraz do wytyczenia kilku linii, także jak najdokładniej. W ogóle, poza użyciem taśmy stalowej, tyczek i co najwyżej małego instrumentu do tyczenia prostych, o ile długość ich przekracza 300 m, niczego więcej nie potrzebujemy.

Z tego jednak nie wynika, ażebyśmy w rozwiązaniu zadań polegali tylko na wykresie na planie. Przeciwnie, plan będzie dla nas tylko szkicem, rezultaty zaś otrzymamy z rachunku, zatem bardzo dokładnie.

Zwracając uwagę na przytoczone wyżej szczegóły, przystępujemy do zadania.

Granicę w kształcie wieloboku $A_1 A_2 \dots B$ wyrównać linią równoległą do AB tak, by mimo regulacji granicy, ani powierzchnia danej parceli Nr. 1, ani sąsiedniej, nie uległa zmianie. AA' i BB' są kierunkami przyległych granic — fig. 82.

W polu wykonamy następujące pomiary:

a) Wytyczymy i pomierzymy dokładnie linię $AB = 482.4$ m, będącą zarazem podstawą do pomiarów granicy $A_1 A_2 \dots B$.

b) Wytyczymy część linii BB' i zdejmujemy jej kierunek względem AB w ten sposób, że na przedłużeniu kierunku BB_1 odmierzymy $BC = 50$ m — następnie $BD = 50$ m i $DC = 62.3$ m.

c) W ten sam sposób pomierzmy: $AE = 50$ m, $AF = 50$ m i $EF = 71.4$ m, czyli określimy dokładnie kierunek AA' .

d) Wielobok $A_1 A_2 \dots B$ — zdejmujemy w sposób na fig. 82. wskazany. Powierzchnia F_w zawarta między bokiem AB a wielobokiem $A_1 A_2 \dots B$ — wynosi $F_w = 20426$ m² (1)

Na powyższych pomiarach długości i wytyczeniu kilku linii, prócz zdjęcia granicy wielobokowej, skończymy na razie całą pracę w polu, a powrócimy później tylko w celu wytyczenia żądanej nowej granicy, równoległej do linii AB .

Zresztą całe obliczenie poniższe przeprowadzi się w biurze.

Z rysunku widzimy, że skutkiem wytyczenia linii AB dodaliśmy parceli Nr. 1 powierzchnię F_w . Ażeby spełnić zadanie, należy trójkątowi APB dodać poniżej linii AB pas gruntu o pow. F_w , z warunkiem, że druga granica tego pasa będzie równoległa do AB .

Zadanie rozwiążemy przy zastosowaniu trójkąta i krzywej pomocniczej. W tym celu obierzmy na kierunku AA' punkt H w odległości okrągłej, n. p. 100 m, t. j. $AH = 100$ m i z tego punktu wykreślimy linie HI równoległą do AB , którą przyjmujemy za podstawę trójkąta pomocniczego HPI .

W tem miejscu zwracamy uwagę, że ułatwiłoby się obliczenie za pomocą wytyczenia linii HI w polu, pomierzenia jej i zdjęcia trapezu $ABIH$ przez pomierzenie boków i przekątni. Byłaby to jednak praca w polu niezbyt łatwa wobec znacznych długości i wymagałaby najmniej pół dnia czasu, podczas gdy w biurze załatwimy ją dokładniej w ciągu godziny.

Mamy znaleźć wysokość trójkąta HPI , t. j. $h = PK$ i powierzchnię F_i .

Wykreślimy $AL \perp HI$, $BM \perp HI$ i $CR \perp AB$.

Z trójkąta HAL obliczymy

$$AL = 100 \sin \alpha \text{ i } HL = 100 \cdot \cos \alpha \dots \dots \dots (2)$$

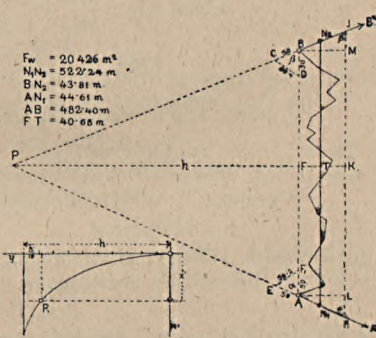


Fig. 82.

Niewiadome $\sin \alpha$ obliczymy z trójkąta AEF, w którym są dane wszystkie boki, a to według wzorów:

$$\sin \alpha = \frac{2F}{bc} = \frac{2F}{50 \cdot 50} = \frac{F}{1250} = 0.91097 \dots (3)$$

$$\text{gdzie } F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = 0.41248 \dots (4)$$

$$\text{zatem według równania (2.) } AL = 91.097 \text{ i } HL = 41.248 \dots (5)$$

W ten sam sposób obliczymy z trójkąta MBI:

$$IM = IB \cdot \cos \beta \dots (6)$$

lecz tutaj tak IB jak $\cos \beta$ są niewiadome. Natomiast z trójkąta BCD obliczymy analogicznie do (3.) i (4.), tudzież $BM = AL$ według założenia

$$\sin \beta = 0.93007 \quad \cos \beta = 0.36738 \dots (7)$$

$$\text{zatem } IB = \frac{BM}{\sin \beta} = \frac{91.097}{\sin \beta} = \frac{100 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = 97.946 \dots (8)$$

$$IM = BI \cdot \cos \beta = \frac{100 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta} = 35.984 \dots (9)$$

Z powyższych rezultatów obliczymy podstawę

$$HI = LM + HL + MI = 482.4 + 41.248 + 35.984$$

$$\text{gdzie } LM = AB \quad HI = 559.632 \text{ m} \dots (10)$$

Wysokość $h = PK$ obliczymy z wzoru:

$$h = HP \cdot \sin \alpha \dots (11)$$

gdzie jednak HP jest niewiadome. Ażeby je znaleźć, utwórzmy z boków obu trójkątów: $ABP \sim HIP$ następującą proporcję:

$$AB : HI = (PH - AH) : PH$$

a po rozwinięciu i podstawieniu wartości:

$$PH = 724.61 \text{ m} \dots (12)$$

$$\text{skąd } h = PH \cdot \sin \alpha = 660.1 \text{ m}$$

$$\text{wreszcie } F_t = HI \cdot \frac{h}{2} = HI \cdot \frac{PH \cdot \sin \alpha}{2} = 184706.08 \text{ m}^2 \dots (13)$$

Mamy już rozwiązany trójkąt HPI, a całe obliczenie trwało rzeczywiście godzinę. Rachunek jednak przeprowadzać należy systematycznie, notując logarytmy, które często się powtarzają. Jeszcze łatwiej i bez wszelkich omyłek przeprowadzi się obliczenie za pomocą maszyny do rachowania.

Po powyższym przygotowaniu możemy przystąpić do ostatecznego załatwienia.

Rozchodzi się teraz o to, by do powierzchni trójkąta APB, dodać pasek o powierzchni $F_w = 10326 \text{ m}^2$ (1).

$$\text{Powierzchnia APB} \dots F_t' = \frac{1}{2} AB \cdot (h - AL)$$

$$F_t' = 241.2 \times 569.003 = 137243.52 \text{ m}^2 \dots (14)$$

$$F_t' + F_w = 157669.52 \text{ m}^2 \dots (15)$$

Pomyślmy sobie, że linie KP i KH tworzą układ współrzędnych, a punkt K jest początkiem układu, jak to obok naszkicowano, wraz z krzywą pomocniczą.

Równanie krzywej:

$$x = C \cdot y^2 \quad C = \frac{F_t'}{n^2} \quad n = 10 \dots (16)$$

$$\text{czyli } x = 1847.061 y^2 \quad (F_t' \text{ z równ. (13.)}) \dots (17)$$

Odetnijmy na osi x wartość $x' = F_t' + F_w$ z równ. (15.), przez punkt W przesuniemy prostą WR równoległą do osi y i znajdziemy współrzędne punktu przecięcia R.

Równanie prostej WR: $x' = 157669 \cdot 52$ (18)
 wartość x' wstawmy za x w równanie (17.), to otrzymamy:
 $157569 \cdot 52 = 1847 \cdot 061 y^2$

$$\text{a stąd } y = \sqrt{\frac{157669 \cdot 52}{1847 \cdot 061}} = 9 \cdot 2363 \text{ (19)}$$

y wyrażone jest w jednostkach przyjętych na osi y do wykreślenia krzywej, mianowicie, za jednostkę przyjęto $\frac{h}{10}$; zatem y_r dla punktu R wyrażone w metrach, otrzymamy z relacji:

$$y_r = y \cdot \frac{h}{10} = 9 \cdot 2363 \times 66 \cdot 01 = 609 \cdot 68 \text{ m (20)}$$

Ponieważ wysokość

$$PF = h - AL = 569 \cdot 003 \text{ m}$$

zatem nowa linia graniczna przechodzić będzie równoległe do AB, w odległości FL od tejże, t. j.

$$FT = 569 \cdot 003 - 609 \cdot 68 = -40 \cdot 677 \text{ m (21)}$$

znak (—) wskazuje, że linia ta znajdzie się poniżej AB.

Położenie tej nowej granicy jest już określone, lecz ażeby ją wytyczyć w polu i dokładnie oznaczyć, potrzebne są punkty przecięcia jej z bokami AH i BI — t. j. punkty N_1 i N_2 .

Punkty N_1 i N_2 — czyli długości AN_1 i BN_2 oraz długość N_1N_2 mogliśmy obliczyć za pomocą proporcji boków odpowiednich trójkątów podobnych. Praca ta jednak nie będzie mniejszą od obliczenia analitycznego:

$$\text{Współrzędne punktu P } y_p = h = 660 \cdot 1 \text{ . . . } x_p = 0$$

$$\text{„ „ A } y_a = KF = 91 \cdot 097 \text{ . . . } x_a = AF = + 257 \cdot 64$$

$$\text{„ „ B } y_b = 91 \cdot 097 \text{ . . . } x_b = FB = - 229 \cdot 76.$$

Równanie linii przechodzącej przez punkty A i P:

$$y - y_p = \frac{y_p - y_a}{x_p - x_a} (x - x_p) \quad y = - \frac{569 \cdot 003}{257 \cdot 64} x + 660 \cdot 1 \text{ (22)}$$

$$\text{Równanie linii } N_1N_2: \text{ . . . } y_n = 50 \cdot 42 \text{ (23)}$$

wstawmy y_n za y w równ. (22) to otrzymamy x_n

$$\frac{569 \cdot 003}{257 \cdot 64} x_n = 609 \cdot 68 \quad x_n = TN_1 = 276 \cdot 06 \text{ (24)}$$

Położenie punktu N_1 jest przez x_n y_n oznaczone.

Podobnie równanie prostej PB:

$$y - y_p = \frac{y_p - y_b}{x_p - x_b} (x - x_p) \quad y = \frac{569 \cdot 003}{229 \cdot 76} x + 660 \cdot 1 \text{ . . (25)}$$

za y wstawmy z równ. (23.) y_n nazwawszy je y'_n , to otrzymamy:

$$- 609 \cdot 68 = \frac{569 \cdot 003}{229 \cdot 76} \cdot x'_n \quad \text{stąd } x'_n = - 246 \cdot 18 \text{ (26)}$$

$$\text{Położenie punktu } N_2: \quad y'_n = 50 \cdot 42 \quad x'_n = - 246 \cdot 18.$$

Długość N_1N_2 otrzymamy, dodając bezwzględne wartości x'_n i x_n

$$N_1N_2 = 522 \cdot 24 \text{ m.}$$

Wkońcu, położenie punktów N_1 i N_2 na liniach AH i BI:

$$AN_1 = \sqrt{(y_a - y_n)^2 + (x_n - x_a)^2} = 44 \cdot 61 \text{ m (27)}$$

$$BN_2 = \sqrt{(y_b - y'_n)^2 + (x'_n - x_b)^2} = 43 \cdot 81 \text{ m (28)}$$

Kontrola:

Powierzchnia części ABN_2N_1 obliczona jako trapez, wynosi:

$$F_w = \frac{522 \cdot 24 + 482 \cdot 40}{2} \cdot 40 \cdot 677 = 20429 \cdot 3 \text{ m}^2 \dots \dots (29)$$

zgodnie z założeniem, bo bardzo znikomą różnicę wynoszącą $3 \cdot 3 \text{ m}^2$ można pominąć.

Linia $N_1 N_2$ stanowi więc nową granicę parceli Nr. 1.

Powyższe obliczenie kosztuje wprawdzie trzy godziny czasu, lecz daje rezultaty pewne i oszczędza wiele pracy w polu.

ROZDZIAŁ VI.

O przyrządach do pomiaru wysokości.

§ 1. Libella.

Libella służy do wyznaczania poziomu w danym punkcie. W jaki sposób poziom wyznaczymy, to poznamy w dalszym ciągu, przy opisie przyrządu.

Najważniejszą częścią libelli jest naczynie szklanne, zawierające alkohol lub eter, zwykle zwane rurką, choć niesłusznie, bo „rurka“ ta nie jest prostą, lecz przedstawia powierzchnię obrotową, powstałą przez obrót łuku $\text{Ł} - \text{Ł}$ około osi AB . Po wypełnieniu rurki alkoholem lub eterem, ale niezupełnie, tak, że części objętości wypełni się parą tej cieczy tworzącą „bańkę“ — zatapia się drugi jej koniec. Na po-

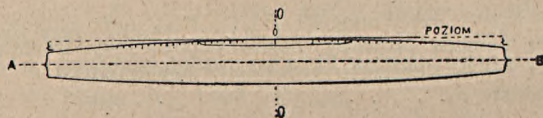


Fig. 83.

wierzchni obrotowej znajduje się prócz innych mniejszych, jedno koło, zakreślone przez środek łuku, t. zn. koło wielkie lub zerowe, naznaczone na libelli kreską. Z obu stron punktu zerowego, jako początkowego, urządzi się podziałkę, zwykle w milimetrach lub liniach paryskich, podczas gdy bańka ma zwyczajnie długość $\frac{1}{3}$ części długości rurki.

Bańka, jako lżejsza od płynu, zajmuje zawsze najwyższe położenie. Jeżeli jeden koniec libelli obniżymy, to bańka przesunie się w przeciwnym kierunku, ku wyższemu końcowi; po nastaniu równowagi, zajmie więc bańka miejsce najwyższe, lecz oś libelli będzie pochylona, gdy zaś ustawimy libellę tak, że środek bańki złoży się z punktem zerowym, to oś libelli będzie poziomą. Lecz środek bańki nie może mieć i nie ma żadnego znaku, któryby wskazywał jego położenie, to zaś, jak widzimy, musi być w każdym położeniu libelli określone, ażebyśmy byli pewni, że punkt zerowy jest zgodny z położeniem środka bańki. Do takiego określenia służy jednak podziałka na libelli, na bańce zaś, jej widoczne obydwie końce. Nazwijmy położenie środka bańki przez s , lewego końca przez l , wyrażone w jednostkach podziałki, prawego końca przez p . Przyjmijmy, że podziałka na lewo jest ujemna, na prawo dodatnia. To położenie punktu s określi równanie:

$$s = \frac{(l) + (p)}{2} \dots \dots \dots (1)$$

przyczem l i p mają odpowiednie znaki. Jeżeli n , p .

$$l = -3, p = +4, \text{ to } s = \frac{-3 + 4}{2} = +\frac{1}{2}$$

oznacza, że środek bańki wychylony jest o pół przedziałki na prawo. Położenie środkowe będzie n , p . $l = -5, p = +5, s = 0$.

Zależnie od celu, do jakiego ma służyć libella, otrzymuje odpowiednią oprawę. Fig. 84, n . p . przedstawia libellę stolikową, którą można postawić na płaszczyźnie. Mosiężna oprawa rurki ma wycięcie, przez które widoczna jest bańka wraz z po-

działką, oboma zaś końcami odpowiednio urządzonymi, spoczywa w ramionach: w r_1 przegubowo, tudzież w r_2 na śrubce zwanej „i“. Przykręcając śrubkę „i“ można ten koniec libelli podnieść lub obniżyć i dlatego właśnie urządzono tę śrubkę, ażeby libellę można było rektyfikować i sprawdzać. Wreszcie podstawa p uzupełnia urządzenie libelli stolikowej.

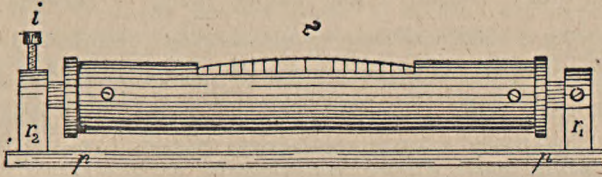


Fig. 84.

Przypuśćmy, że płaszczyzna, na której ustawiliśmy powyżej opisaną libellę, jest poziomą, odczyty zaś obu końców libelli wskazują, że środek bańki nie znajduje się w punkcie zerowym, lecz n. p. wychylony jest na prawo: $s = +2$. To położenie środka bańki wtedy, gdy libella spoczywa na płaszczyźnie poziomej, nazywamy punktem normalnym. W danym wypadku, punkt normalny $N = s = +2$. Jeżeli tedy tę samą libellę umieścimy na innej płaszczyźnie, i odczytamy, że $s_1 = -3$, to, ponieważ s_1 nie zgadza się z punktem normalnym $N = +2$, powiemy, że płaszczyzna nie jest poziomą. Możemy jednak, ze względu na wygodę, sprowadzić punkt normalny do punktu zerowego za pomocą śrubki „i“.

Inaczej urządzona jest oprawa libelli służącej do nasadzania jej na lunetę. Urządza się też libelle pudełkowe w formie krążka i t. p.

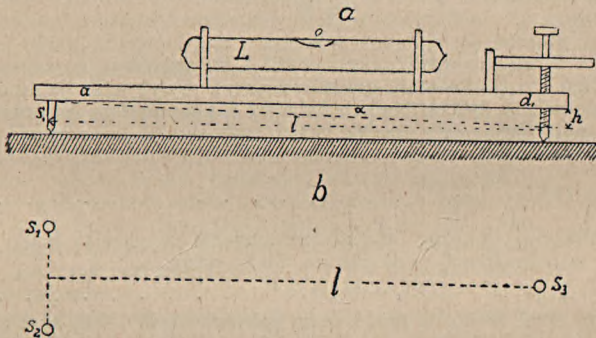


Fig. 85.

Libella odpowiadać powinna pewnym warunkom:

- Powinna być czułą, t. z. wychylenie o bardzo mały kąt, zaznaczyć się powinno przesunięciem bańki;
- Równym kątom nachylenia osi libelli, odpowiadać winny równe wychylenia bańki;
- Długość bańki, przy różnych wychyleniach, lecz przy niezmienniej temperaturze, nie powinna się zmieniać. Zależy to od dokładnego oszlifowania wewnętrznej powierzchni, a także pozornie od dokładnie urządzonej podziałki.

Zazwyczaj podziałka urządzona jest w liniach paryskich, t. j. odstęp kresek wynosi po 2.26 mm. Wartość kąta, o jaki nachylić potrzeba oś libelli, ażeby środek bańki przesunął się o jedną przedziałkę, oznaczamy przez „ ω “ i nazywa się przewagą libelli. Za pomocą przyrządu przedstawionego na fig. 85. możemy nie tylko obliczyć przewagę libelli, ale też własności danej libelli sprawdzić i przekonać się,

czy odpowiadają warunkom. Jak widać z rysunku w rzucie poziomym, s_1 i s_2 są to dwie nóżki, na których opiera się podstawa a d, na tej zaś umieszczona jest badana libella. Śruba s_3 stanowi trzeci punkt podparcia podstawy, a zaopatrzona jest u góry w kółko z podziałką na 120 lub 240 równych części. Wykręciwszy zupełnie śrubę s_3 , możemy gwinty odcisnąć na papierze i dokładnie zbadać, o ile to jest możebne, ich odstępy, oraz zmierzyć długość n gwintów, a podzieliwszy ją przez n , obliczyć wysokość kroku śruby. Długość l jest również zwaną — nazwijmy krok śruby

przez h , to $\frac{h}{l} = \operatorname{tg} \alpha$, a stąd znajdziemy α odpowiadające nachyleniu podstawy, więc i osi libelli. Jeżeli podziałka na krążku wynosi 120 podziałek, to taki obrót śruby, który odpowiada tylko jednej przedziałce, wychyli libellę o $\frac{\alpha}{120}$, czyli o bardzo drobny kąt. Na podstawie powyższych danych, zbadanie przewagi libelli (ω) nie przedstawia żadnej trudności. Dodać jednak należy, że doświadczenia powinno się wykonać przynajmniej 20 do 30 razy i obliczyć średnią. Równocześnie zbadać należy, czy równym kątom nachylenia odpowiadają równe wychylenia bańki i t. p.

Dobre libelle, używane do instrumentów niwelacyjnych, powinny mieć przewagę nie większą jak 5'' na jedną linię paryską (2·26 mm).

Znając wartość przewagi libelli, możemy za pomocą libelli znaleźć kąt nachylenia płaszczyzny PP_1 fig. 86. do poziomu P_1P_2 t. j. α .

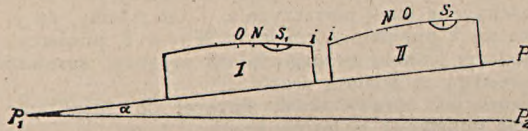


Fig. 86.

Ustawmy w tym celu libellę w pozycji I i przypuśćmy, że znamy położenie punktu normalnego N (jakkolwiek go nie znamy). Gdyby libella spoczywała na płaszczyźnie poziomej, to środek bańki zgadzałby się z punktem N , ponieważ jednak płaszczyzna jest nachylona, więc środek bańki znajdzie się w punkcie S_1 , którego położenie określi równanie:

$$s_1 = OS_1 = \frac{l_1 + p_1}{2} \dots \dots \dots (2)$$

Kąt α'' obliczymy, mnożąc długość przesunięcia się środka bańki od punktu norm. wyrażoną w jednostkach podziałki na libelli, przez ω , t. j.

$$\alpha'' = NS_1 \cdot \omega'' = (OS_1 - ON) \cdot \omega'' \dots \dots \dots (3)$$

Przerzucmy teraz libellę w ten samem miejscu o 180° , tak, ażeby śruba „i“, będąca pierwaj na prawej stronie, znalazła się teraz na lewej. W tej, II. pozycji, punkt O (zerowy) nie zmieni swego położenia, natomiast punkt normalny N będzie teraz po lewej stronie, zaś środek bańki przesunie się do punktu S_2 .

$$s_2 = OS_2 = \frac{l_2 + p_2}{2} \dots \dots \dots (4)$$

i, podobnie jak poprzednio, obliczymy:

$$\alpha'' = NS_2 \cdot \omega'' = (OS_2 + ON) \cdot \omega'' \dots \dots \dots (5)$$

Dodajmy do siebie równania (3.) i (5.):

$$2 \alpha'' = \omega'' (NS_1 + NS_2) = (OS_1 + OS_2) \cdot \omega$$

$$\text{czyli } \alpha'' = \frac{s_1 + s_2}{2} \cdot \omega'' \dots \dots \dots (6)$$

Z równania (6.) widzimy, że kąt nachylenia płaszczyzny, możemy znaleźć za pomocą libelli, nie znając wcale położenia punktu normalnego, t. j. nie wiedząc, czy oś libelli jest równoległą do jej podstawy.

Odejmijmy teraz równanie (3.) od (5.):

$$\alpha'' - \alpha' = 0 = \omega'' (OS_2 - OS_1 + 2ON) \text{ czyli} \\ \omega'' (s_2 - s_1) + \omega'' \cdot 2 \cdot ON = 0 \text{ zatem}$$

$$ON = -\frac{s_2 - s_1}{2} \dots \dots \dots (7)$$

Równanie (7.) określa położenie punktu N, możemy więc za pomocą śrubki „i“ poprawić, czyli zrektyfikować libellę, t. j. sprowadzić punkt N do punktu O (zerowego).

W praktyce rektyfikujemy zwykle libellę w następujący sposób:

Ustawmy libellę na jakiejś płaszczyźnie, której położenie następnie tak uregulujemy, że środek bańki znajdzie się w punkcie O. Naturalnie, w jakim nachyleniu do poziomu znajduje się płaszczyzna, tego nie wiemy i nie jest nam to potrzebne. Po ustaleniu się bańki, przierzucimy libellę w tem samym miejscu o 180° i odczytamy w znany sposób położenie środka bańki, który, przypuścimy, wychylił się o n przedziałek. Wówczas za pomocą śrubki „i“ przesuniemy środek bańki o $\frac{n}{2}$

przedziałek, o drugie zaś $\frac{n}{2}$ za pomocą odpowiedniego nachylenia płaszczyzny. Po parukrotnem powtórzeniu doświadczenia, środek bańki nie będzie się wychylał po przierzuceniu libelli, czyli libella będzie zrektyfikowana.

Skutkiem ogrzewania libelli n. p. przez słońce, długość bańki się skraca w miarę podwyższenia temperatury, co, jak doświadczenia wykazały, ma wpływ nie tylko na czułość libelli, ale i na wartość przewagi ω ; przy pracy w polu, należy więc libellę ochraniać za pomocą parasola przed działaniem słońca.

§ 2. Luneta.

1. Oko ludzkie, którego poziomy przekrój przedstawia fig. 87., jest układem powierzchni kulistych, łamiących promienie świetlne. Za rogówką R—R, którą tworzy silna błona przezroczysta i wypukła, znajduje się komora wypełniona płynem wodnistym. Tylną jej ścianę zajmuje tęczówka T, rozmaicie u różnych ludzi zabarwiona i mająca mały otwór ab, t. z. źrenicę, zwięzającą się pod silnem działaniem światła. Do niej przytyka soczewka SS, utworzona z przezroczystej, chrząstkowatej materii, mająca przednią ścianę słabiej, tylną silniej wypukłą. Białko zajmuje część, oznaczoną ciemno na rysunku. Wnętrze „G“ gałki ocznej, poza soczewką, zajmuje gęsta, galaretowata masa. Tylną ścianę gałki ocznej wyściela siatkówka ss, pozostająca w związku z nerwem ocznym N. Najczulszą na światło, jest część siatkówki M, t. z. żółta plamka, położona naprzeciw źrenicy.



Fig. 87.

Obrazy oglądanych przedmiotów tworzą się na siatkówce, pomniejszone i odwrócone. Warunkiem wyraźnego widzenia jest, ażeby obrazy były dostatecznie oświetlone, niezbyt małe, tudzież, by tworzyły się na żółtej plamce. Wskutek silnej aberacji sferycznej, tylko środkowa część pola widzenia, wytworzona przez promienie środkowe, jest wyraźna. Oko jednak radzi sobie za pomocą ruchów gałki ocznej, kierując się ku rozmaitym punktom oglądanych przedmiotów.

Oko jest więc przyrządem optycznym. Pierwsze ognisko F oka, patrzącego w dal, znajduje się w odległości około 14 mm przed wierzchołkiem A rogówki, drugie F' na siatkówce w odległości około 23 mm od A. Punkty główne P i P' leżą o 1·7 i 2 mm od A, węzły W i W' w odległości 7 i 7·3 mm.

Położenie tych punktów, o których mówić będziemy obszerniej przy soczewkach, nie jest stałe i zmienia się, zależnie od odległości przedmiotów, co nazywamy akomodacją, czyli przystosowaniem się oka do odległości. Patrząc n. p. w dal, oko nie widzi bliższych przedmiotów, a przynajmniej widzi niewyraźnie, to obrazy ich tworzą się za siatkówką. Przy patrzeniu na blizkie przedmioty, mięśnie oczne działają w ten sposób, że wypuklają bardziej soczewkę i wysuwają ją nieco ku przodowi. Ta akomodacja jednak ma pewne granice, n. p. oko normalne i zdrowe nie zdoła już skupić wzroku na przedmiotach bliższych, aniżeli około 8 cm, jest to

stronie soczewki — ten punkt będzie t. z. obrazem pozornym. Jeżeli poprzednie obrazy można było rzucić poza soczewką na białą tablicę lub szybę matową, to pozornego nie można; dlatego tamte, w odróżnieniu od ostatniego, nazywamy obrazami rzeczywistymi. Obraz pozorny można widzieć okiem.

Po powyższem, krótkim wyjaśnieniu, należącem zresztą do optyki, przejdźmy do wskazania, w jaki sposób tworzą się obrazy przedmiotów za pomocą działania soczewki i do konstrukcyi lunety, jako przyrządu mierniczego.

Jeżeli jest więcej punktów świecących A, B, S, fig. 89. — jednakowo odległych od powierzchni kulistej K, zatem przypuszczamy, że one leżą także na pewnej kulistej powierzchni, to każdy z nich utworzy osobny obraz A', B', S' na własnej osi AO, BO, SO... Częstka powierzchni kulistej o promieniu $SO = x + r$, odbije się w ten sposób na cząstce drugiej kuli A'S'B' mającej promień $(y - r)$. Ponieważ, jak już poprzednio była o tem mowa, ograniczać się musimy do promieni środkowych, czyli do punktów leżących bardzo blisko osi soczewki, przeto obie cząstki tych powierzchni kulistych są tak małe, że uważać je możemy za cząstki równoległych do siebie płaszczyzn. Są to płaszczyzny sprzężone. Każdy promień, przechodzący przez jeden z punktów sprzężonych, przejdzie po załamaniu przez drugi. W ogóle, każdy rysunek na jednej z płaszczyzn sprzężonych, daje swój obraz na drugiej. Obraz i rysunek są do siebie geometrycznie podobne, a rozmiary ich pozostają do siebie w takim stosunku, jak $(y - r) : (x + r)$.



Fig. 89.

Punkt, leżący w obrębie soczewki, przez który przechodzą wszystkie promienie wychodzące od przedmiotu, nazywamy optycznym środkiem soczewki. Jeżeli obie krzywizny są równe, to punkt ten leży w środku, w innym wypadku dzieli on grubość soczewki w osi na 2 części w stosunku promieni krzywizn. Leży zatem zawsze bliżej soczewki więcej wypukłej, jako mającej mniejszy promień a większą krzywiznę.

Na podstawie tego, cośmy powyżej powiedzieli, możemy skonstruować obraz przedmiotu z tą uwagą, że posługujemy się promieniami środkowymi; luneta bowiem opatrzona jest t. z. diafragmą, t. j. przeponą metalową z małym w środku otworem, przepuszczającym tylko wiązkę promieni centralnych.

Niech na fig. 90. linie I i II przedstawiają elementy kulistych powierzchni soczewki, na małej powierzchni w pobliżu osi, P'—P₁' oś soczewki, F i F' ogniska,



Fig. 90.

PP' przedmiot. Promień PP' równoległy do osi, po przejściu przez soczewkę przejdzie przez ognisko w kierunku P'F' — inny promień, PF wyjdzie z soczewki równoległy do osi i przetnie się z pierwszym w punkcie P', który będzie obrazem punktu P i leży na płaszczyźnie sprzężonej z płaszczyzną przedmiotu. Na tejże płaszczyźnie musi się utworzyć obraz punktu P' w P₁', oraz cały szereg obrazów innych punktów. Mamy więc P'P₁' jako obraz przedmiotu PP'. Obraz jest odwrócony,

i pomniejszony. Połączmy punkt P z P' — to prosta PP' przetnie oś soczewki w punkcie s — który nazywamy środkiem projektywności. Punkt s nie jest stałym, bo zależy od odległości przedmiotu. W środku projektywności schodzą się wszystkie promienie, wychodzące od przedmiotu.

Konstrukcyja lunety powinna nam dać nie tylko sam obraz utworzony przez soczewkę wyżej opisaną, stanowiącą w lunecie szkło przedmiotowe, czyli t. z. obiektyw. Obraz ten bowiem jest mały, a tem samem dla oka niezbyt wyraźny, dalej, nie mielibyśmy tutaj żadnej linii, jaką n. p. wyznaczają węgielne bębenkowe i dioptry. Brakom tym zaradzimy przez zastosowanie lupy, czyli szkła powiększającego.

3. Lupa. Dwa, blisko siebie punkty świecące widzimy tylko wtedy oddzielnie, gdy odległość ich obrazów na siatkówce wynosi co najmniej 0.005 mm. Przyczyną tego jest sama budowa siatkówki, składająca się z systemu malutkich, ale oddzielnych elementów nerwowych; drugą przyczyną jest aberacyja sieryczna oka, trzecią jest uginanie się światła, wskutek którego obraz punktu, nie jest punktem, lecz jasną plamką o wymiarach skończonych. Ażeby przecież te dwa punkty odróżnić, zblizamy je do oka, jak tylko na to zakres akomodacyi oka dozwala, n. p. na 20 cm,

skutkiem czego powiększa się ich pozorna odległość na siatkówce. Jeżeli rzeczywisty odstęp punktów w tem oddaleniu od oka wynosi 0,06 mm, to obrazy ich możemy rozróżnić oddzielnie — jest to bowiem najmniejszy rozmiar, jaki się da jeszcze nieuzbrojonym okiem spostrzedz. Ażeby widzieć przedmioty mniejsze, lub, ażeby rozróżnić drobniejsze szczegóły, używa się szkła powiększającego, czyli lupy.

Jest to w najprostszej postaci zwykła soczewka zbierająca, przez którą patrzymy na prosty, nieodwrócony, pozorny obraz $A'B'$ fig. 91. przedmiotu AB . Przedmiot znajdować się musi między ogniskiem a soczewką, ażeby powstać mógł obraz pozorny. Ażeby ten obraz można było dobrze widzieć, należy przedmiot umieścić w takim położeniu względem soczewki, ażeby obraz utworzył się w odległości d od oka, t. j. w odległości wyraźnego widzenia.

Oko należy trzymać jak najbliżej soczewki, wtedy bowiem wzrok obejmuje największy obszar obrazu, a nadto, dostają się do oka promienie, przechodzące przez soczewkę blisko jej środka, wskutek czego jest mniejsza aberacja sferyczna.

Powiększenie uzyskane przez lupę wynosi:

$$W = \frac{A'B'}{AB} = \frac{-y}{x} \quad \text{gdzie } -y = -(d - a)$$

$$\text{lub } W = \frac{d - a}{f} + 1 \quad (\text{z teorii soczewki}).$$

Lupa powiększa tem silniej, im krótsza jest jej odległość ogniskowa, czyli im silniejsze są wypukłości soczewki — ale, że wtedy powstaje tem większa aberacja sferyczna, więc za pomocą jednej soczewki trudno jest uzyskać znaczniejsze powiększenie jak 10-krotne.

4. Konstrukcja lunety.

Urządzenie lunety, składa się, na podstawie poprzednich wywodów, z soczewki wypukłej przedmiotowej czyli obiektywu P , fig. 92., która utworzy obraz a, b .

Obraz od obiektywu pochodzący, jest znów przedmiotem dla lupy czyli okularu O . Ostatecznie oko widzi obraz a, b , w odległości wyraźnego widzenia, w odpowiednim powiększeniu.

Powiększenie lunety v , równa się stosunkowi odległości ogniskowej F obiektywu, do odległości ogniskowej f okularu. W praktyce można łatwo obliczyć powiększenie lunety. Wyjmuje się obie soczewki, a zwracając każdą z nich do słońca, rzuca się obraz słońca na papier zbliżając lub oddalając soczewkę, aż obraz stanie się wyraźnym, a papier zacznie się przepalać. Zmierzywszy odległości ogniskowe po-

działką, obliczymy $v = \frac{F}{f}$. Zwykle używane są lunety o powiększeniu od 20 do 45.

Obiektyw P ujęty jest w odpowiednią oprawę i umieszczony u końca rury metalowej. Wewnątrz rury w odległości ogniskowej obiektywu, fig. 93., umieszczona jest t. z. diafragma D , o której mówiliśmy już poprzednio, a która służy do przepuszczania tylko promieni centralnych. Średnica a otworu w diafragmie wynosi zwykle: $a = \frac{f}{2}$, gdzie f jest odległością ogniskową okularu.

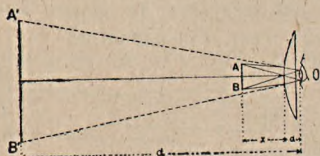


Fig. 91.

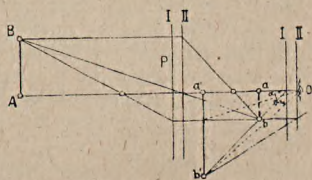


Fig. 92.

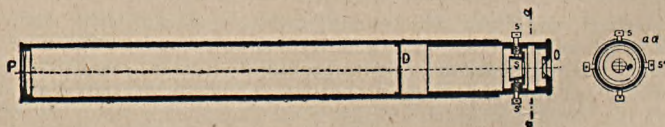


Fig. 93.

Stożek promieni, jaki przypuszcza diafragma, przedstawia w przekroju fig. 94. Ponieważ kąt α jest mały, więc wielkość jego obliczymy według wzoru:

$$\alpha'' = \frac{a}{F} \cdot 206264 \dots \dots \dots (1)$$

czyli $\alpha'' = \frac{f}{2F} \cdot 206264$, a że $\frac{F}{f} = v$, więc

$$\alpha'' = \frac{s}{2v} = \frac{206264}{2v} = \frac{103132}{v} \dots \dots \dots (2)$$

Równanie (2.) powiada, że kąt α , czyli pole widzenia jest odwrotnie proporcjonalne do powiększenia lunety v , czyli, im znaczniejsze jest powiększenie, tem mniejsze pole widzenia.

Każdemu punktowi na przedmiocie odpowiada punkt na obrazie utworzonym przez obiektyw, a tem samym i na obrazie należącym do okularu, linie zaś, łączące te punkty, nazywamy celową. Celowych takich mamy więc nieskończoną ilość, bo cały stożek o wierzchołku leżącym w środku projektywności. Gdybyśmy więc na płaszczyźnie obrazu zaznaczyć mogli jakiś punkt, to oś celowa, przechodząca przez ten punkt i środek projektywności, byłaby stale w lunecie ustalona. Do tego celu służy właśnie krzyż S z nitek pajęczych, napięty w pierścieniu fig. 93., który to pierścień, jak widać z rysunku, daje się za pomocą śrubek s' przesuwac w kierunku poziomym i pionowym. Punkt przecięcia obu nitek, połączony ze środkiem projektywności, wyznacza oś celową. Zamiast pojedynczego krzyża, używa się także siatki, złożonej z trzech nitek poziomych i jednej pionowej. Wtedy mamy trzy celowe, średnią, górną i dolną.



Fig. 94.

Siatka powinna leżeć w płaszczyźnie obrazu, wtedy bowiem odpowiedni punkt obrazu jest środkiem siatki wyraźnie naznaczony, a tem samym i sprzężony punkt przedmiotu, czyli oś celowa jest ściśle określona. Jeżeli jednak płaszczyzna siatki i płaszczyzna obrazu nie schodzą się, to zależnie od pozycji oka, widzieć będziemy coraz to inne punkty zakryte środkiem siatki. Nazywamy to paralaksą siatki, a skonstatujemy ją w ten sposób, że patrząc przez lunetę, zniżamy i podnosimy naprzemian pozycję oka, czyli poruszamy głową w kierunku pionowym. Jeżeli tylko spostrzemy względny ruch przedmiotu wobec siatki, która wydaje się być stałą, to jest to oznaką istnienia paralaksy.

Paralaksę usunąć jest łatwo; wystarczy bowiem okular „O“ fig. 93. (t. j. lupę) wykręcić lub wkręcić w rurkę, w której jest umieszczony, skutkiem tego bowiem przesunie się i obraz utworzony przez lupę, aż zejdzie się z płaszczyzną siatki.

Położenie obrazu utworzonego przez obiektyw nie jest stałe, lecz zależne od odległości przedmiotu. Równocześnie jednak lupa powinna być tak umieszczona, ażeby pierwszy obraz znajdował się w jej odległości ogniskowej. Wynika stąd, że okular powinien być tak urządzony, ażeby się dał względem obiektywu przesuwac bliżej lub dalej. Urządzenie to przedstawione jest na fig. 93. U końca rury metalowej, wewnątrz poczernionej, znajduje się obiektyw złożony z dwóch soczewek: wypukłej i wklęsłej, z flintglasu i kronglasu, czyli t. z. soczewki achromatycznej; w miejscu D znajduje się diafragma, a wreszcie w osobnej rurce, dającej się wsuwać i wysuwać w poprzedniej, czyli w t. z. wyciągu okularowym, umieszczona jest lupa „O“ w oprawie, która daje się wkręcać i wykręcać z wyciągu, tudzież siatka S, regulowana śrubkami s' w kierunku poziomym i pionowym.

Jest to pojedyncza luneta keplerowska, czyli astronomiczna, złożona tylko z obiektywu i pojedynczej lupy. Daje ona obraz odwrócony, do czego łatwo się przyzwyczaić.

Prócz poprzednio opisanej, używane są lunety o złożonych okularach:

Luneta Ramsdena, szematycznie przedstawiona na fig. 95., w której okular złożony jest z dwu soczewek płaskowypukłych, t. j. soczewki ocznej L i t. z. kolektywu L' , umieszczonych w wyciągu okularowym. Siatka znajduje się w miejscu s.

Fig. 96. przedstawia lunetę z okularnym systemem Huyghensa. Kolektyw jest tu w porównaniu z poprzednią konstrukcją odwrócony, a siatka znajduje się między nim a lupą.

Kollektyw załamuje promienie wychodzące z obiektywu i skraca odległość obrazową, a temsamem i lunety.

Nazwijmy: v = powiększeniu lunety, α = kąt pola widzenia, h = jasność widzenia, odnosząc je do lunety keplerowskiej, to w porównaniu z nią mają

$$\text{okular Ramsdena } v' = \frac{10}{9} v \quad \alpha' = \frac{9}{10} \alpha \quad h' = \frac{81}{100} h$$

$$\text{okular Huyghensa } v'' = \frac{2}{2} v \quad \alpha'' = \frac{3}{2} \alpha \quad h'' = \frac{9}{4} h.$$

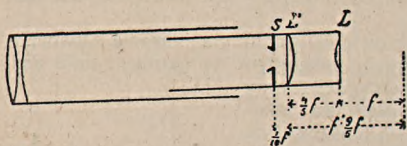


Fig. 95.

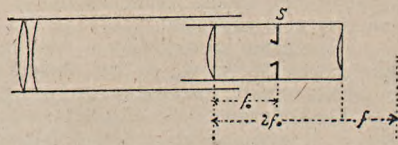


Fig. 96.

Ponieważ jasność obrazu jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu powiększenia, a wprost proporcjonalna do powierzchni obiektywu, przeto, im większe jest powiększenie lunety, tem większy też stosuje się obiektyw. Od obiektywu zależy też i t. z. zdolność rozpoznawcza lunety, t. j. zdolność uwydatniania drobnych szczegółów w obrazie. Aby n. p. odróżnić w lunecie szczegóły rozmiarów 1'', potrzebny jest obiektyw o średnicy 12 cm. Skoro więc każdy obiektyw ma właściwe sobie granice dla wyrazistości obrazu, więc nie byłoby celu, stosować zbyt silnie powiększających okularów, lecz tylko takie, które są niezbędne do oglądania tych drobnych szczegółów, jakie obraz rzeczywisty jeszcze uwydatnia. Zatem, powiększenie lupy pozostaje w związku ze średnicą obiektywu i powinno być odpowiednio dobrane.

§ 3. Łata niwelacyjna.

Konstrukcyje łat są rozmaite: łata składana, wysuwana dwu lub trzykrotnie i t. p., podobnie w przekroju poziomym są łaty pełne lub skrzynkowe. Długość łaty wynosi zwykle 4 do 6 m, sporządza się ją z suchego drzewa sosnowego i kilkakrotnie powleka się farbą olejną celem ochrony od wilgoci. Fig. 97. wskazuje podział łaty na decymetry i centymetry w naturalnej postaci numerów, lub też w odwróconej, ze względu na łatwiejsze odczytywanie lunetą astronomiczną. Jeżeli używa się równocześnie dwóch łat, to jedna służy tylko do pomiaru punktów pośrednich, druga zaś tylko do odczytów na stanowiskach, gdyż z powodu różnic w podziałce, powstawałyby błędy w pomiarach.

Jest to zresztą tak prosty przyrząd, że nie ma co go opisywać.

§ 4. Instrument niwelacyjny.

W poprzednich ustępach poznaliśmy konstrukcyję lunety i libelli. Za pomocą pierwszej możemy dokładnie, na odległość do 60 m odczytywać na łacie milimetry, do 100 m możemy je szacować, do 300 m możemy odczytywać centymetry. Nadto, za pomocą odpowiedniego urządzenia siatki, zdołaliśmy utrwalić i uczynić użyteczną dla praktycznych celów, idealną linię: oś celową. Za pomocą drugiej jesteśmy w stanie oznaczyć poziom. Jeżeli te dwa przyrządy złączymy ze sobą w ten sposób, że oś libelli będzie równoległą do osi celowej, to ustawiając libellę poziomo, do czego służy bańka, ułożymy w poziomie i tamtą. Gdy prócz tego, luneta obracać się będzie około osi pionowej, to jej oś celowa utworzy podczas obrotu płaszczyznę poziomą, czyli poziom pozorny. Wkońcu, mierząc odstęp pionowy między tą



Fig. 97.

idealną wprawdzie, ale dla nas uchwytną płaszczyzną, a różnymi punktami terenu, znajdziemy ich wzajemne różnice wysokości względem danego poziomu.

Powyższy cel spełnia instrument niwelacyjny, bez względu na konstrukcję, których jest kilkanaście.

Opiszemy tu po kolei wszystkie części składowe instrumentu niwelacyjnego, oraz role, jakie one w całości odgrywają.

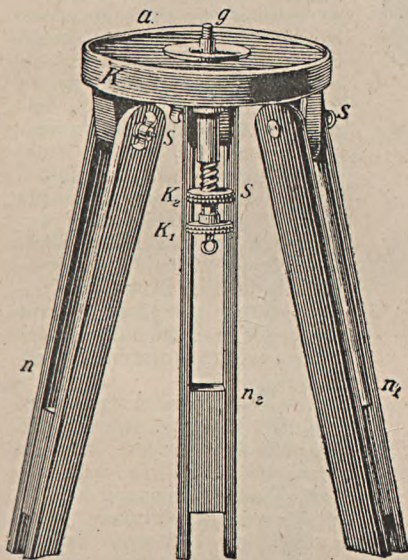


Fig. 98 a.

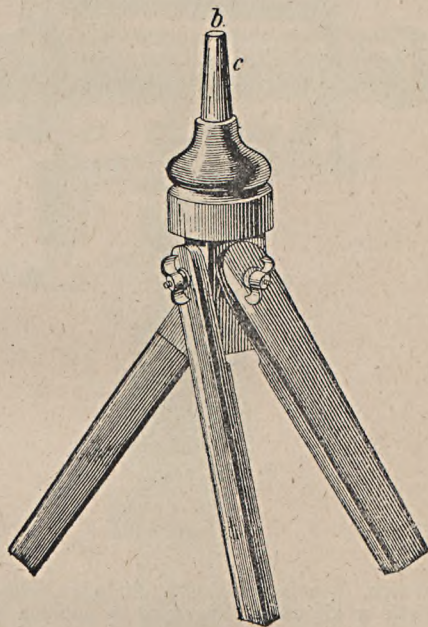


Fig. 98 b.

1. Statyw. Na nim umieszcza się właściwy instrument. Fig. 98 a przedstawia t. z. statyw krążkowy. Składa się on z krążka K i trzech nóg n_1 n_2 n_3 . Statyw ustawia się na terenie, zwalniając najpierw śruby s , następnie wciska się nogi silnie w ziemię, zważając równocześnie na to, by krążek K był w przybliżeniu poziomy. Potem przykręca się mutry śrub s , a wówczas statyw będzie dobrze usztywniony. Śruba S widoczna na rysunku pod krążkiem, służy do umocowania instrumentu na statywie, mianowicie, w odpowiednią część podstawy instrumentu wkręca się wystający nad krążkiem koniec g tej śruby, za pomocą obracania tarczy K_1 . Za pomocą zaś tarczy K_2 , która jest właściwie mutrą poruszającą się na poprzednio opisanej śrubie, ściska się sprężynę i skutkiem tego przyciąga się instrument silnie do krążka.

Na fig. 98 b widzimy inną konstrukcję statywu, t. z. czopowego. Różni się on tem od krążkowego, że zamiast krążka, posiada czop c , na który nasadza się instrument, zaopatrzony w swej podstawie w tulejkę, ściąganą śrubą, celem silnego osadzenia.

2. Podstawa instrumentu, którą nazywamy spodarką, może być różnie skonstruowana. Fig. 99. przedstawia typ spodarki, stosowany przy najmniejszych instrumentach niwelacyjnych. Spodarka S ma w tym wypadku kształt walca, zakończonego śrubą, którą się wkręca do statywu, albo też nasadza się na czop.

Na fig. 100. widzimy inny rodzaj spodarki S , zakończonej tulejką T do nasadzenia na czop. W spodarce mają wloty dwie śruby, t. zw. wstawowe W_1 i W_2 — naprzeciw których znajdują się dwie sprężyny stalowe, ukryte w odpowiednich walcach s_1 i s_2 , a przyciągające wyższą część instrumentu do spodarki. Często, zamiast

dwóch śrub i sprężyn, urządza się trzy śruby wstawowe, a takie urządzenie jest i lepsze i praktyczniejsze.

3. Na spodarce opiera się limbus. W typie fig. 100. limbus jest krążkiem,

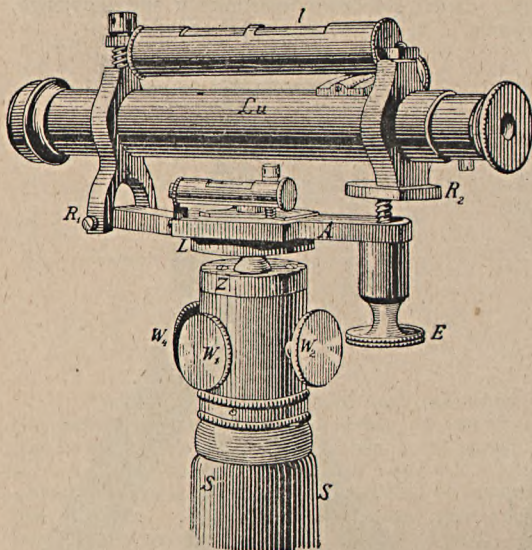


Fig. 99.

z nich, R_1 połączone jest z alhidadą zawiasowo, podczas gdy drugie ramie może się podnosić w kierunku pionowym za pomocą odpowiednio urządzonej śruby elewacyjnej E.

spoczywającym na śrubach wstawowych, a połączonym nadto przegibnie ze spodarką. W typie fig. 99. limbus L zakończony jest u spodu wydłużeniem kulistym z widocznym na rysunku a wchodzącym w wałek S, w ten sposób, że część kulista opiera się od spodu o górne denko walca, dalsze zaś jej przedłużenie sięga dolnego denka i znajduje się między śrubami W_1 W_2 W_3 . Tutaj więc śruby wstawowe W są poziome i za ich pomocą można pionowe wydłużenie walca wychylać w dowolną stronę, skutkiem czego pochyła się równocześnie limbus. Dodać tutaj należy, że oba powyższe typy nie są wygodne i ustępują zawsze instrumentom ze statywem krążkowym.

4. Na limbusie spoczywa alhidada A, złączona z nim tak, że może się obracać około osi pionowej. Alhidada opatrzona jest dwoma ramionami R_1 i R_2 przytrzymującymi lunetę. Jedno

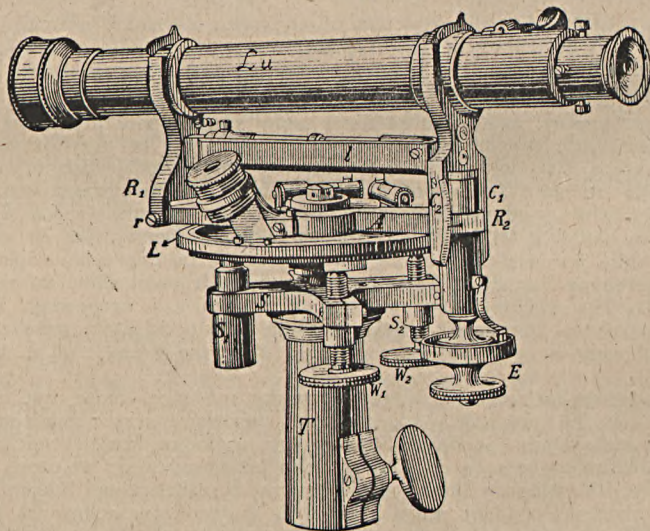


Fig. 100.

Urządzenie śruby elewacyjnej uwidacznia fig. 101. a i b. Na ramieniu R_2 spoczywa luneta L_u , którą przytrzymuje nadto haczyk h (na rys. otwarty). W dolnej części ramię R_2 tworzy dwa ramiona C_1 i C_2 , obejmujące alhidadę, względnie odpowiednią wystającą jej część A . Od spodu przytwierdzony jest stale do alhidady walec próżny w , wewnątrz którego znajduje się śruba S i obejmująca ją sprężyna s , oparta u dołu walca, a odpychająca u góry ramię R , co widać z przekroju. Na gwinty śruby S wchodzi mutra G śruby elewacyjnej, której kształt i konstrukcja jest zrozumiała z rysunku.

Przez przykręcenie mutry G opartej o walec w , ściąga się śrubę s w dół, wraz z nią zaś i ramię R , przez odkręcenie natomiast śruba s podchodzi do góry, a sprężyna s_1 odpycha ramię R_2 , a tem samym i lunetę ku górze.

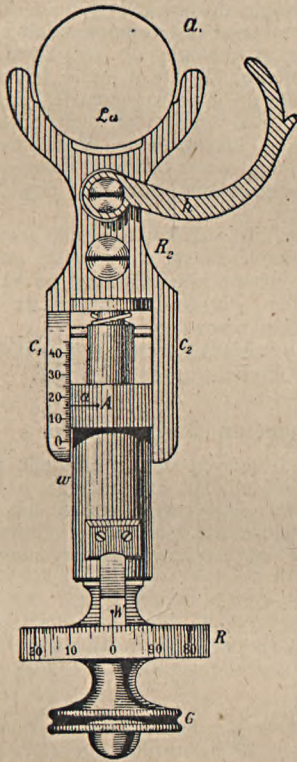


Fig. 101 a.

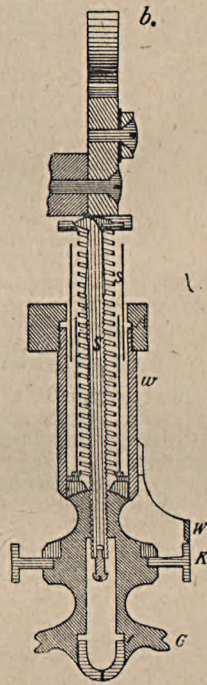


Fig. 101 b.

Na mutrze G umieszczony jest krążek K , podzielony na obwodzie na 100 równych części. Do walca w przytwierdzona jest u dołu wskazówka W , która wskazuje setne części obrotu śruby, na ramieniu zaś C_1 umieszczona jest druga podziałka, wskazująca całe, pełne obroty śruby, zatem jedna jej przedziałka musi być równa wysokości jednego kroku śruby — odpowiednia wskazówka a wyryta jest na alhidadzie A . Obie zatem podziałki i wskazówki pozwalają na dokładne odczytanie, o ile podniosło się ramię R razem z lunetą, i to tak w całych obrotach śruby, jak i w setnych ich częściach. Na fig. 99. urządzona jest śruba prościej i mniej dokładnie.

Limbus ma niekiedy, jak n. p. na fig. 100. — podział na stopnie, alhidada zaś ma noniusz i lupę do odczytywania kątów.

5. Na alhidadzie umieszczona jest luneta L_u i libella l . Pod względem urządzenia lunety i libelli, rozróżniamy 3 typy instrumentów:

1. Pierwszy typ: luneta stale przytwierdzona do alhidady, libella zaś stale do lunety (fig. 99.).
2. Drugi typ: luneta daje się wyjmować, przekładać i obracać około własnej osi podłużnej, natomiast libella jest stale z alhidadą złączona (fig. 100.).
3. Trzeci typ: luneta jak w typie drugim, libella nasadkowa, dająca się zdejmować z lunety.

Instrument niwelacyjny powinien odpowiadać następującym warunkom, przedstawionym graficznie na fig. 102.

1. Oś geometryczna lunety, t. j. oś walca metalowego lunety, powinna być identyczna, a przynajmniej równoległą do osi celowej CC .

2. Oś libelli $l-l$ powinna być równoległą do osi celowej.

Jeżeli te dwa warunki istnieją, to instrument jest zupełnie zdalny do pomiarów.

3. Jeżeli płaszczyzna limbusu $\lambda\lambda$ jest równoległą do osi libelli, to zarazem i oś pionowa instrumentu, II , która już w fabryce musi być urządzonej prostopadle do limbusu, będzie rzeczywiście pionową — ponieważ zaś, około tej osi obraca się alhidada wraz z lunetą i libellą, więc libella będzie podczas obrotu zawsze poziomą, a oś celowa, jako równoległa do osi libelli, zakreśli płaszczyznę poziomą, czyli horyzont poziorny.

Warunek trzeci nie jest koniecznym, lecz ze względu na wygodę i oszczędność czasu, staramy się zwykle o zachowanie go. Inaczej bowiem, musielibyśmy po każdym zwrocie lunety, przed odczytem, sprowadzać bańkę za pomocą śrub wstawowych do punktu zerowego.

Przed rozpoczęciem niwelacji, należy zawsze sprawdzić, czy instrument odpowiada powyższym warunkom, względnie zrektyfikować go.

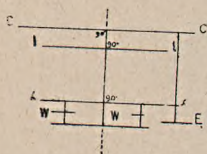


Fig. 102.

§ 5. Rektyfikacja instrumentu niwelacyjnego.

1. Rektyfikacja typu I, t. j. libella i luneta są stale z alhidadą połączone.

Przed właściwą rektyfikacją sprawdzić należy, czy nie ma paralaksy siatki. W tym celu zwracamy lunetę na daleki jakiś a wyraźny punkt, lub na łata ustawioną w odległości około 100 m i patrząc przez nią, poruszamy głową w kierunku pionowym. Jeżeli przytem wydaje się, że łata wykonuje ruchy pionowe, to para-

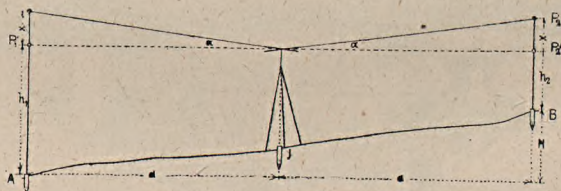


Fig. 103.

laksza istnieje. Usuwa się ją za pomocą odkręcania lub przykręcania lupy, o czym już mówiliśmy poprzednio. Naturalnie, wyciąg okularowy należy przytem tak uregulować, ażeby przedmiot był wyraźnie widziany, a nitki w siatce rysowały się wybitnie. Po tem przygotowaniu przystąpimy do rektyfikacji.

Ustawmy instrument w punkcie I fig. 103. w równej odległości między punktami A i B tak, że $AI = IB = d$.

Sprowadźmy środek bańki, za pomocą śrub wstawowych, do punktu zerowego, to, jak wiemy, oś libelli będzie poziomą. Czy jednak podstawa, na której libella spoczywa, jest poziomą, tego nie wiemy, a zależy to od ramion podpierających libellę.

Tak samo nie wiemy, czy oś geometryczna i oś celowa są do osi libelli równoległe i czy one obie schodzą się lub są do siebie równoległe. To wszystko dopiero mamy sprawdzić i ewentualnie błędy poprawić.

Po skierowaniu lunety na łąkę, ustawioną dokładnie pionowo w punkcie A, sprowadzimy bańkę do punktu zerowego, odczytamy na łacie stan P_1 . Obróćmy teraz lunetę na łąkę w punkcie B i odczytawszy ją, dostaniemy stan P_2 .

W tym wypadku przypuściliśmy, że oś celowa nie była równoległą do poziomu ustawionej osi libelli, gdyż wtedy dostalibyśmy w punkcie A odczyt P'_1 a w punkcie B odczyt P'_2 , gdyby $P'_1 P'_2$ była poziomą.

Ponieważ dobraliśmy odległości AI i IB równe, więc już z samej konstrukcji wynika, że $P_1 P'_1 = P_2 P'_2$.

Różnicę wysokości obu punktów A i B, która, jak z rysunku wynika, wynosi $H = h_1 - h_2$ licząc od rzeczywistego poziomu $P_1 P'_1$ — otrzymamy także za pomocą odczytów przy nachylonej osi celowej bo wtedy

$$H = (h_1 + x) - (h_2 + x) = h_1 - h_2 \dots \dots \dots (1)$$

Czyli, mimo że oś celowa nie jest poziomą, pomierziliśmy spad między punktami A i B tak dobrze, jak gdybyśmy to zrobili, gdyby oś celowa była poziomą.

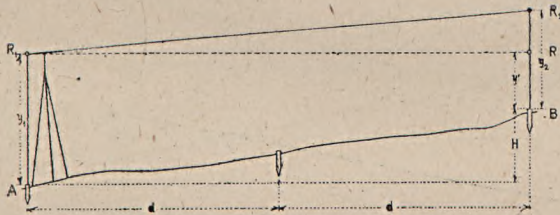


Fig. 104.

Mając więc rzeczywistą różnicę wysokości obu punktów A i B, przenieśmy instrument do punktu A, ustawmy go i zmierzmy znowu spad między obu punktami. Zatem, skierujemy lunetę na łąkę w B, sprowadzimy znowu za pomocą śrub wstawowych bańkę do punktu zerowego, i odczytamy na łacie punkt R_2 , następnie zmierzmy dokładnie wysokość od palika w punkcie A do punktu R, t. j. do środka okularu — odczytu na łacie w tym punkcie nie możemy wykonać, bo z powodu zbyt małej odległości nie byłoby nic widać na łacie. Z rys. fig. 104. widać, że teraz różnica wysokości, obliczona na podstawie odczytów, wyniosłaby

$$H_1 = y_1 - y_2 \dots \dots \dots (2)$$

Ten obliczony z równania (2.) spad, będzie inny niż wypada z równania (1.). Ponieważ pierwszy był dobrym, więc otrzymana różnica $H - H_1$ już wskazuje, że oś celowa nie jest równoległą do osi libelli.

Ponieważ odczyt R_1 uważać możemy jako dobry, bo z powodu zbyt małej odległości, błąd, jakoby wyniknął w pomiarze od palika do środka lunety, gdyby luneta nawet nie była poziomo ustawiona, będzie nieznaczny; nadto, ponieważ znamy prawdziwą różnicę wysokości H z równania (1.) — więc będziemy mogli obliczyć, jaki właściwie powinien być odczyt na łacie w B ustawionej.

Mianowicie, powinno być:

$$H = y_1 - y' \quad \text{zamiast równania (2.).}$$

$$\text{stąd zaś} \quad y' = y_1 - H \dots \dots \dots (3)$$

y_1 i H jest znane, zatem y' da się łatwo obliczyć.

Teraz, za pomocą śruby wstawowej skierujemy lunetę, aż środek siatki padnie na punkt R, odpowiadający wysokości y' według równania (3.). Wskutek pochylania lunety, wyjdzie znow libella z równowagi. Za pomocą jednak śrubki „i” sprowa-

dzimy środek bańki do punktu zerowego i całe opisanе doświadczenie powtórzymy n. p. w punkcie B, ewentualnie trzeci raz w punkcie A.

W ten sposób, gdy przy powtórzeniu dostaniemy zgodny spad z równania (1.), będziemy mieli oś celową równoległą do osi libelli.

Czy oś geometryczna jest równoległą, względnie identyczną z osią celową, tego bez odejmowanie lunety, co przy tym typie jest dość trudne, sprawdzić nie możemy.

2. Rektyfikacja instrumentu typu II. t. j. luneta do przekładania, libella stale z alhidadą połączona.

Ponieważ luneta da się przekładać, więc najpierw sprawdzimy, czy oś celowa jest identyczną, względnie równoległą do osi geometrycznej lunety, t. j. do osi walca, jaki przedstawia luneta. Mogą tu zajść dwa wypadki, które omówimy po kolei.

a) Oś celowa jest to linia, łącząca środek projektywności ze środkiem siatki. Możliwym więc jest, że siatka nie jest centrycznie umieszczona w lunecie, skutkiem czego oś celowa krzyżuje się z osią geometryczną.

Przypuśćmy, że wypadek ten w istocie zachodzi, t. j. że środek projektywności p leży na osi geometrycznej (pg) fig. 105. Ustawmy taką w punkcie A, odległym około 80 m i odczytajmy za pomocą lunety jej stan P_1 .

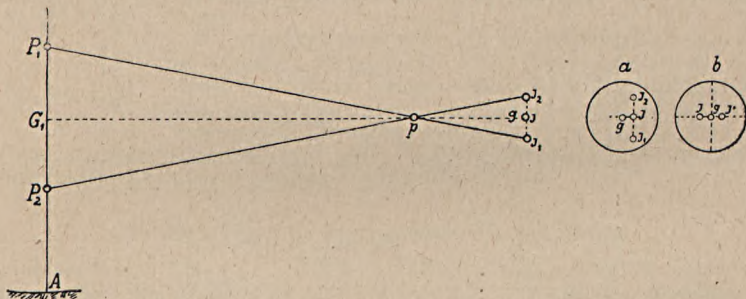


Fig. 105.

Teraz obróćmy lunetę w łożyskach około jej osi geometrycznej o 180° , nie ruszając zresztą położenia instrumentu, to środek siatki, który był poprzednio pod osią geometryczną, znajdzie się teraz nad nią, w punkcie s_2 a oś celowa s_1p trafia łatę w punkcie P_2 . Łatwo jest już z rysunku wywnioskować, że gdyby środek siatki leżał na osi geometrycznej gp , w punkcie s , to nie byłoby dwóch różnych odczytów na łacie, tylko jeden G_1 mimo obrócenia lunety, tudzież, że $P_1G_1 = P_2G_1$ czyli, że średni odczyt $G_1 = \frac{P_1 + P_2}{2}$, odpowiada właściwemu położeniu osi celowej.

W tym wypadku poprawimy położenie osi celowej za pomocą śrubek s fig. 93. Zwalnając dolną śrubkę, a przykręcając górną, przesuniemy siatkę tak, że oś celowa wskazywać będzie odczyt G_1 .

Jeżeli rzeczywiście oś celowa schodzi się teraz z osią geometryczną, to czybyśmy łatę ustawili dalej, czy bliżej niż w punkcie A i powtórzyli doświadczenie, to zawsze dostaniemy taki sam odczyt przed i po obróceniu lunety.

Oś celowa może być jednak przesunięta w kierunku poziomym, jak wskazuje fig. 105 a. Prócz rektyfikacji poprzedniej, trzeba więc przeprowadzić i tę drugą w następujący sposób:

Po pierwszej rektyfikacji, obróćmy lunetę o 90° około osi geometrycznej. Wówczas te śrubki $s's'$, które leżały w płaszczyźnie poziomej (fig. 93.), będą leżały teraz w pionowej i rektyfikację poprzednią powtórzymy.

Patrzając teraz przez lunetę na jakiś punkt i obracając ją równocześnie około osi geometrycznej, nie zauważymy żadnego ruchu względnego tego punktu, około

środku siatki, co będzie dowodem, że środek siatki znajduje się na osi geometrycznej.

b) Trudniejszą jest sprawa, gdy obiektyw nie jest centrycznie osadzony, czyli gdy środek projektywności nie znajduje się na osi geometrycznej.

Przypuśćmy, że linia gP , fig. 106., jest przedłużoną osią geometryczną lunety, czyli, że gdyby oś celowa z nią się schodziła, to musielibyśmy dostać odczyt P na łacie w A ustawionej. Dalej, przypuśćmy, że środek siatki znajduje się w punkcie s_1 nad osią geometryczną, a środek projektywności w p_1 . Ta oś celowa $s_1 p_1$ da odczyt P_1 na łacie. Obróćmy teraz lunetę w łożyskach o 180° , jak poprzednio przy rektyfikacji, to s_1 znajdzie się w s_2 , a p_1 w p_2 — odczyt zaś otrzymamy w P_2 . Poprawkę siatki wykonamy tak samo jak poprzednio i to w obu kierunkach, czyli, że oś celowa dawać będzie przy obrocie odczyt P .

Jak widzimy jednak z rysunku, środek projektywności nie zmienił swego położenia, a nowe celowe $s'_1 p_1$ i $s'_2 p_2$ schodzą się w punkcie P , lecz nie są identyczne z osią geometryczną.

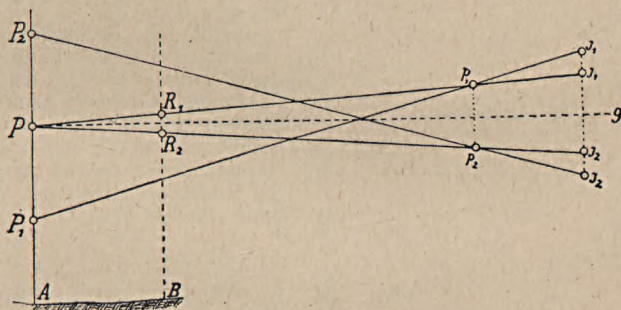


Fig. 106.

Ustawmy teraz łąkę w punkcie B i powtórzmy odczyty z obróceniem lunety. Teraz już obie te celowe nie zejną się jak pierwiej w punkcie P , lecz otrzymamy dwa odczyty R_1 i R_2 . Jeżelibyśmy znowu przeprowadzili rektyfikację, to wprowadzić sprowadzilibyśmy celowe do przecięcia się w tym samym punkcie na łacie leżącym, lecz odsunąwszy łąkę napowrót do A , dostalibyśmy znowu różne odczyty. Trzeba więc odpowiednio przesunąć środek projektywności, czyli obiektyw, co nie zawsze jest możliwe i zależy od konstrukcji lunety. W takim razie, zrezygnujemy ze ścisłej rektyfikacji osi celowej i sprowadzimy ją tylko do równoległości z osią geometryczną.

W tym celu zwracamy lunetę na jakiś wyraźny, ale daleki punkt (w odległości kilkuset metrów). Nastawiwszy dokładnie środek siatki na ten punkt, obrócimy lunetę około osi geometrycznej o 180° i zauważymy w pobliżu inny punkt, na który teraz środek siatki pada. Wreszcie przesuniemy siatkę tak, by jej środek padł w połowie odległości obu poprzednich punktów. Doświadczenie to powtórzmy kilkakrotnie, dopóki nie otrzymamy zgodności. Ponieważ punkt służący do rektyfikacji osi celowej leżał daleko, więc, mimo że właściwie obie osie w tym punkcie się schodzą, możemy jednak uważać je za równoległe.

Łatwo zrozumieć, że w powyższym wypadku oś celowa znajdować się będzie zawsze pod, albo nad osią geometryczną. Podczas niwelacji zatem nie można lunety obracać, lecz powinna znajdować się w ciągu całej pracy, w tem samym położeniu, które oznaczymy w ten sposób, że śruba wyciągu okularowego będzie się znajdowała stale po prawej, lub po lewej stronie.

Po zredukowaniu osi celowej, nie można już przy dalszej rektyfikacji instrumentu, poprawiać jej położenia.

Przyjmijmy, że oś celowa $L-L$, fig. 107., nie jest równoległą do osi libelli $\lambda\lambda$ (rys. a). Sprowadzimy za pomocą śrub wstawowych środek bańki do punktu zerowego. Wtedy oś libelli będzie pozioma, natomiast oś celowa da na łacie odczyt P_1 .

Obróćmy teraz alhidadę o 180° , to i luneta obróci się obiektywem w przeciwną do poprzedniej stronę. Obrót ten będzie wykonany około pionowej osi instrumentu, prostopadłej do limbusu. Następnie, wyjmijmy lunetę z łożysk i przelóżmy ją obiektywem w poprzednim kierunku, czyli przelóżmy ją o 180° . Celowa zajmie teraz położenie $L'L'$, a oś libelli $\lambda'\lambda'$ (rys. b.). Sprowadźmy bańkę do punktu zerowego, skutkiem czego celowa zajmie położenie $L''L''$ i da odczyt P_2 — oś libelli będzie znów pozioma.

Z rys. (c) fig. 107. widać, że odczyty P_1 i P_2 leżą symetrycznie do punktu P , jakoby celowa pozioma trafić musiała na łacie.

Samej osi celowej, po poprzedniej rektyfikacji, zmieniać nie możemy. Podniesiemy więc lunetę za pomocą śruby wstawowej tak, by celowa wskazywała odczyt P — ponieważ jednak wskutek tego oś libelli zajmie położenie $\lambda''\lambda''$ a środek bańki się wychylił, więc sprowadzimy ją do położenia poziomego za pomocą śrubki „i“. Innymi słowy: połowę błędu usuniemy przez obrót celowej za pomocą śruby wstawowej, drugą połowę przez pochylenie w przeciwną stronę osi libelli za pomocą śrubki „i“.

Przykład.

Wycelowawszy lunetę dokładnie na łatę, sprowadzamy bańkę do punktu zerowego, następnie odczytujemy na łacie n. p. 2186 mm. Teraz przekładamy lunetę obiektywem w przeciwną stronę w łożyskach, obracamy alhidadę o 180° i powtórnie celujemy na łatę, poczem sprowadzamy znowu bańkę do punktu zerowego i wkońcu odczytujemy na łacie n. p. 2024 mm. Z po-

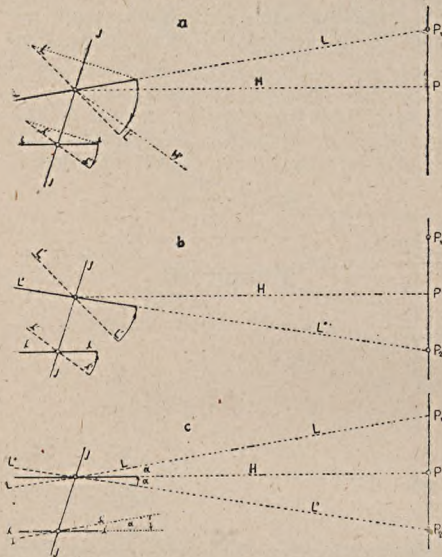


Fig. 107.

przednich rozważań wiemy, że gdyby oś celowa była poziomą, to powinna wskazywać średnią z obu odczytów, t. j.

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2} = \frac{2186 + 2024}{2} = 2105 \text{ mm.}$$

Za pomocą więc śruby wstawowej, obracając ją spokojnie i powoli i równocześnie patrząc przez lunetę, nastawimy środek siatki na odczyt 2105 mm, zaś środek bańki, który teraz wychylił się z punktu zerowego, sprowadzamy doń za pomocą śrubki „i“.

Doświadczenie powyższe powtórzymy, a gdy wynik dostaniemy zgodny, to uważać możemy instrument jako zrektifikowany, o ile nie zachodzą inne błędy w stosunku osi celowej do osi libelli, o czym już poprzednio mówiliśmy.

3. Rektyfikacja instrumentu typu III., t. j. tak luneta jak libella, daje się przekładać w łożyskach.

Przedewszystkiem sprowadzimy oś celową do identyczności z osią geometryczną, a przynajmniej, w najgorszym razie, do równoległości, według opisu rektyfikacji poprzedniego typu.

Potem sprowadzimy oś libelli do równoległości z osią geometryczną lunety, bo ta będzie już identyczną z osią celową.

W tym celu wycelujemy na łatę ustawioną w odległości 60 do 80 m, fig. 108., sprowadzimy bańkę do punktu zerowego, poczem odczytamy na łacie P_1 . Libella

znajdzie się w położeniu $\lambda - \lambda$ (rys. A), podczas gdy luneta będzie miała kierunek zgodny z celową LL, a to dlatego, że ramiona podtrzymujące libellę na lunecie, t. j. a i a' wogóle nie były równe, zatem oś libelli nie mogła być równoległą do osi geometrycznej lunety, a tamsamem i do osi celowej.

Nie ruszając lunety, przekładamy libellę o 180° tak, że gdy poprzednio śrubka „i“ była po lewej stronie, to teraz będzie po prawej. Luneta pozostała nienaruszona i skierowana na łatę; tymczasem libella, po przełożeniu jej, skutkiem nierówności ramion a i a' musiała zająć położenie $\lambda' - \lambda'$, odchylone od poprzedniego o kąt 2α . Sprowadzimy teraz, za pomocą śruby wstawowej, bańkę do punktu zerowego, czyli oś libelli z położenia $\lambda' - \lambda'$ w poprzek: $\lambda\lambda$. Jeżeliśmy libellę obrócili, względnie odchylili o kąt 2α , to i luneta musiała się o ten sam kąt obrócić i przyjść w położenie L'L', dając odczyt P₂ na łatce. Wkońcu skierujemy lunetę śrubą wstawową na średni odczyt P, a wychyloną skutkiem tego bańkę, sprowadzimy do punktu zerowego, za pomocą śrubki „i“.

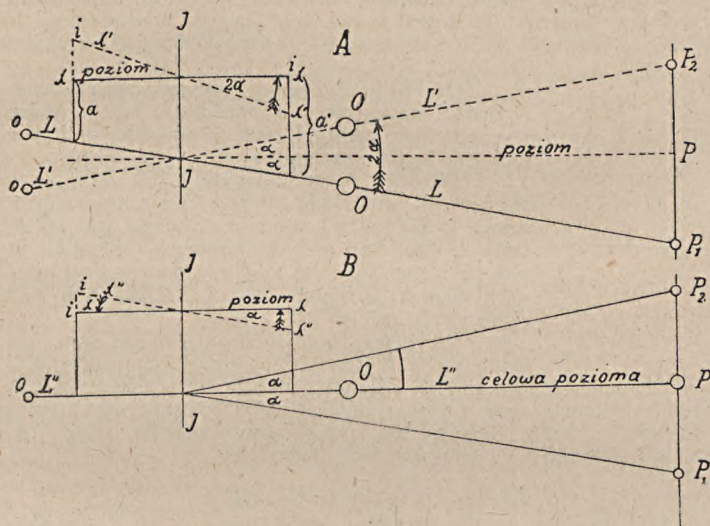


Fig. 108.

Z rysunku poznamy łatwo (rys. B.), że lunetę wraz z osią celową obróciliśmy o kąt α , zatem o połowę błędu, a podobnie libellę także o tę samą ilość, t. j. o kąt α .

Raz jeszcze należy przypomnieć, że oś celowa została względem osi geometrycznej poprzednio zrektyfikowaną i podczas dalszej rektyfikacji musi pozostać niezmienną, tudzież, że oś celowa i geometryczna tworzą jedną linię po rektyfikacji, o ile w grę nie wchodzi ekcentryczność obiektywu.

Tego typu instrument możemy zrektyfikować, nie robiąc żadnych odczytów na łatce, jedynie tylko za pomocą libelli. Pierwej jednak musimy sprowadzić oś celową do identyczności z osią geometryczną, poczem już będziemy mieli do czynienia tylko z osią geometryczną pod warunkiem, że walec lunety, względnie pierścienie, na których spoczywa libella za pośrednictwem ramion a i a' (fig. 108.) mają zupełnie równe pierścienie.

Ustawiamy mianowicie libellę, nasadzoną na lunetę, za pomocą śrub wstawowych, do poziomu. Następnie przekładamy libellę i odczytujemy położenie środka bańki, które wynosi n. p. $s = \frac{+16-6}{2} = +5$, t. j. o 5 przedziałek przesunięte na prawo. Podnieśmy przeto odpowiedni koniec libelli za pomocą śrubki „i“ w ten spo-

sób, ażeby stan środka bańki wynosił $+2,5$, co po paru odczytach libelli w miarę regulowania śrubki „14” łatwo osiągniemy. Resztę przesunięcia środka bańki do punktu zerowego skuteczniejszym, podnosząc lunetę wraz z libellą za pomocą śruby wstawowej.

Rektyfikacja instrumentu obejmuje zatem następujące czynności:

a) Usunięcie paralaksy siatki.
 b) Sprowadzenie osi celowej do identyczności z osią geometryczną i to nie tylko w płaszczyźnie pionowej, ale i poziomej, wogóle tak, by obracając lunetę około jej osi geometrycznej w łożyskach, środek siatki nie opisywał koła.

c) Sprowadzenie równoległości osi libelli z osią geometryczną.

Tak zrektfikowanym instrumentem możemy już wykonywać pomiary wysokości, lecz niewygodnie, bo przed każdym odczytem trzeba by sprowadzać bańkę do punktu zerowego, o ile limbus nie jest poziomy.

Dlatego przy rektyfikacji, oprócz wyżej opisanych czynności, sprowadzamy też i limbus do równoległości z osią libelli w następujący sposób:

Ustawiamy statyw wraz z instrumentem tak, by płaszczyzna limbusu była mniej więcej zbliżona do poziomu, lunetę zaś obróćmy i ustawmy równoległe do linii przechodzącej przez dwie śruby wstawowe, poczem sprowadzimy bańkę do punktu zerowego. Wówczas wzajemne położenie osi będzie takie, jak je przedstawia fig. 109., t. j.:

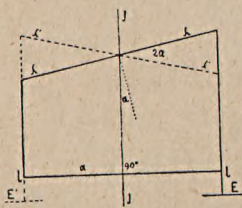


Fig. 109.

Oś libelli ll będzie poziomą, płaszczyzna limbusu ll będzie nachyloną do poziomu o kąt α , wreszcie pionowa oś instrumentu I , zawsze prostopadła do płaszczyzny limbusu, będzie nachyloną do pionu także pod kątem α .

Obróćmy teraz alhidadę o 180° tak, że śruba elewacyjna E , która była po prawej stronie, będzie teraz po lewej, w miejscu E' , luneta zaś będzie jak pierwiej równoległą do linii dwu śrub wstawowych, natomiast libella zajmie położenie ll' , jak to jest widoczne z rysunku i będzie nachyloną do poziomu o kąt 2α . (Obrót odbywa się naturalnie około osi I).

Przyczyną tego położenia libelli jest to, że gdy jedno ramię R (fig. 100.) podpierające lunetę jest stałe, to drugie R_2 może zmieniać swą długość wskutek działania śruby elewacyjnej, za pomocą której można było lunetę wraz z libellą podnieść i stąd powstała owa nierównoległość limbusu do libelli. Nadto, limbusu nie ustawialiśmy poziomo, więc i oś pionowa instrumentu jest właściwie nie pionową, lecz nachyloną do pionu.

Z rys. na fig. 110. widzimy, że ażeby sprowadzić ślad płaszczyzny limbusu ll do poziomu, wystarczy podnieść ją śrubą wstawową z jednej strony o kąt α , do (l') — (l') — zatem nie przyjdzie jeszcze do równowagi, natomiast oś pionowa II , obróciwszy się również o kąt α , będzie teraz rzeczywiście pionową. Pozostaje więc jeszcze do poprawienia położenie libelli. Śrubki „14” ruszać już nie możemy, boibyśmy zepsuli poprzednią rektyfikację — tak samo nie możemy ruszać śruby wstawowej, bo limbus wyszedłby z poziomu. Pozostaje więc tylko śruba elewacyjna i tylko za jej pomocą obrócimy oś libelli z położenia (l') — (l') do poziomego $ll''ll''$, skracając w tym wypadku ramię R_2 . Ostatecznie będziemy mieli: limbus poziomy, oś II pionową, oba ramiona R_1 i R_2 równaj się. Siatki, ani śrubki „14” nie ruszaliśmy, zatem oś libelli pozostała równoległą do geometrycznej. Śruba elewacyjna przyjdzie z położenia E' do E'' .

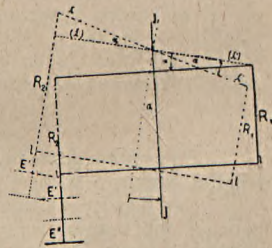


Fig. 110.

Mówiliśmy dotąd o płaszczyźnie limbusu, którą z nachylenia $l-l$ sprowadzamy do poziomu $ll''ll''$. Nie jest to słusznie, bośmy mieli do czynienia tylko z jedną linią limbusu, wyznaczoną przez dwie śruby wstawowe, do których równoległe ustawialiśmy lunetę z libellą.

Chcąc mieć całą płaszczyznę limbusu poziomą, obrócimy teraz alhidadę o 90° około osi pionowej wraz z libellą, i o ile libella wyjdzie z równowagi, sprowadzimy

bańkę do punktu zerowego za pomocą pozostałej śruby wstawowej. Ponieważ ułożyliśmy w powyższy sposób dwie linie na limbusie poziomo, więc i cała płaszczyzna jego będzie pozioma.

Cały ten opis ujmijmy teraz krótko, mianowicie: Po rektyfikacji lunety i libelli, należy ustawić limbus równoległe do osi libelli, a w końcu i instrument poziomo, czyli, jak się w praktyce wyrażamy: ustawić instrument.

W tym celu ustawia się statyw silnie na terenie, wbijając jego nogi w ziemię, przyczem krążek powinien być w przybliżeniu poziomy lub czop pionowy.

Następnie ustawiamy lunetę równoległe do dwóch śrub wstawowych i sprowadzamy bańkę do punktu zerowego.

Potem obracamy alhidadę wraz z libellą o 180° , odczytujemy wskazówki śruby elewacyjnej, czyli jej stan i za pomocą tej śruby sprowadzamy bańkę do punktu zerowego, poczem znowu odczytamy stan śruby E. N. p. pierwszy stan śruby wynosił $10'65$, drugi $18'33$.

Ponieważ śrubą elewacyjną mieliśmy usunąć tylko połowę błędu, a usunęliśmy cały, wykręcając ją o $18'33 - 10'65 = 7'68$ przedziałek, więc teraz popelnimy rozmyślnie połowę błędu, wkręcając śrubę o $\frac{7'68}{2} = 3'84$ przedziałek, a resztę błędu usuniemy, sprowadzając bańkę do punktu zerowego za pomocą śruby wstawowej. Zazwyczaj liczymy w ten sposób, że bierzemy średnią obu odczytów śruby E, zatem:

$\frac{18'33 + 10'65}{2} = 14'49$ i na ten odczyt ją ustawiamy. Nazywamy to marką i notujemy ją. Wreszcie obracamy alhidadę o 90° i sprowadzamy bańkę do punktu zerowego.

Zwykle przy wyznaczaniu marki potrzeba doświadczenie powtórzyć dwa razy lub i więcej.

Gdy instrument jest gruntownie zrektyfikowany, to ustawienie go odbywa się szybko.

Nastawiamy przedewszystkiem śrubę E na markę, potem obracamy alhidadę tak, by luneta była równoległą do linii dwu śrub wstawowych i za pomocą nich sprowadzamy libellę do równowagi. W końcu obracamy alhidadę o 90° i znowu sprowadzamy libellę do równowagi i ustawienie jest skończone.

Często alhidada opatrzona jest dwoma małemi libelkami, ustawionemi w kierunkach prostopadłych do siebie, czyli t. zw. libelkami krzyżowemi. Są one znacznie mniej czułe, niż główna libella i służą do ustawienia instrumentu w przybliżeniu, bez obracania alhidady o 90° , bo równocześnie regulujemy dwie linie przecinające się, zatem całą płaszczyznę limbusu. Potem dopiero ustawiamy instrument z pomocą libelli głównej. Libelki krzyżowe rektyfikuje się w ten sposób, że po zupełnej rektyfikacji i ustawieniu instrumentu przy pomocy libelli głównej, poprawiamy je, za pomocą śrubek „i“, przyprowadzając do zgodności z libellą główną.

Podczas pracy w polu należy instrument chronić za pomocą parasola przed działaniem ciepła słonecznego, które wpływa szkodliwie na czułość libelli i nierównomierne rozszerzanie się różnych części instrumentu, wskutek czego muszą też powstawać błędy w pomiarach. Używać też należy nicianych, cieńkich rękawiczek, bo wskutek dotykania rękami, polerowane części instrumentu, zwłaszcza podziałka, śniedzieją. Naturalnie, tembardziej trzeba chronić instrument przed deszczem i kurzem, nie mówiąc już o ostrożnem transportowaniu go.

O rektyfikacji instrumentu uniwersalnego, która zresztą jest taka sama, o ile używa się go tylko do niwelacji, będziemy mówili później.

ROZDZIAŁ SIÓDMY.

§ 1. Niwelacja.

Pomiar względnych wysokości punktów, nazywamy niwelacją.

Przyjmijmy dwa punkty A i B, fig. 111., leżące w odległości około 4 m. od siebie; tę różnicę wysokości punktu B nad A znajdziemy, jeżeli przez punkt B pomyślimy przechodzący horyzont rzeczywisty, lub ze względu na zbyt małą różnicę

między tym horyzontem, a pozornym, przyjmijmy horyzont pozorny, naznaczony na rysunku linią kropkowaną — i zmierzmy pionowy odstęp punktu *A* od tegoż horyzontu. Odcinek *h* przedstawiać będzie różnicę wysokości obu punktów. Mówimy, że teren od punktu *A* wznosi się ku *B*, w odwrotnym, spada.

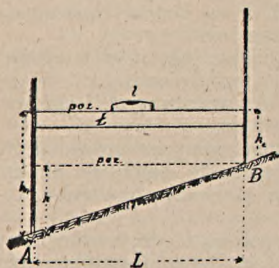


Fig. 111.

W rzeczywistości wysokość punktu *B* nad punktem *A* pomierzyć możemy w następujący sposób:

Ustawmy w obu punktach łąty, mające podziałki na metry i cm. Następnie łąkę *L*, zwykle 4 metry długą, przyłożmy do pionowej w *B* i to tak, by górna krawędź jej zrównała się z pewną okrągłą liczbą centymetrów, n. p. $h_2 = 40$ lub 50. Ustawmy na łące libellę i drugi jej koniec tak uregulujmy, ażeby libella była w równowadze. Wówczas łąta będzie także pozioma a jej górna krawędź wskaże na pionowej w *A* odcinek h_1 . Z rysunku widocznym jest, że różnica $h_1 - h_2 = h$. W punkcie *B* ustawiliśmy łąkę w pewnej wysokości nad terenem tylko dlatego, opierając łąkę *L* na trawie i t. p. nie

mierzylibyśmy dokładnie, natomiast pionową łąkę, cieńką, łatwiej jest oprzeć na ziemi, usunąwszy pokrycie.

Figura 112. wskazuje pomiar wysokości poszczególnych punktów, za pomocą łąty i libelli.

Mianowicie, zdjęć mamy profil między punktami *A* *B*, t. j. pomierzyć długości i wysokości.

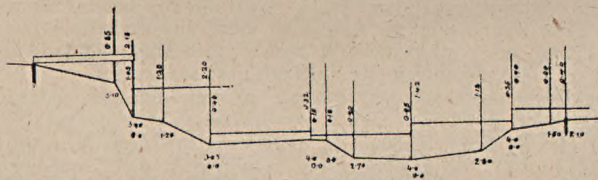


Fig. 112.

Do pomiarów tego rodzaju używa się łąty t. zw. poziomej, długiej 4 do 5 metrów, z podziałem na metry i decymetry, 25 mm. grubej i 25 cm. szerokiej, oraz trzech łąt t. zw. pionowych, 20/20 mm. w przekroju i 3 m. długich, podzielonych na metry i centymetry. Zaczynamy od punktu *A*: kierunek *AB* jest wytyczony i widoczny. Układamy koniec łąty na paliku *A*, gdzie ją pomocnik przytrzymuje, kierując równocześnie drugiego pomocnika, który podtrzymuje, przy łące pionowej, drugi koniec łąty poziomej. Na łące układa się libellę i reguluje się położenie łąty, aż środek bańki znajdzie się w punkcie zerowym, czyli łąta będzie pozioma. Wreszcie trzecią łąką pionową mierzy się odstęp między punktami terenu a dolnym brzegiem łąty poziomej, odczytując równocześnie odległości. Potem, drugi pomocnik pozostaje na swoim miejscu, pierwszy zaś przenosi łąkę. W ten sam sposób przykłada się łąkę do ostatniej pionowej, przy której został drugi pomocnik, pierwszy zaś poszedł naprzód — i znowu mierzy się wysokości i odległości.

Przy pomiarze szkicuje się postęp pracy tak, jak to widać z rysunku. Na fig. 112. narysowana jest tylko pierwsza łąta pozioma; dalsze oznaczone są liniami poziomymi, jak to zwykle się robi na szkicu. Odległości notujemy na szkicu pod linią terenu, tak, jak je odczytujemy na poszczególnych łątach. Początek każdej łąty oznaczamy przez 0'0. Na pionowych wypisuje się odpowiednie odczyty. Z liczb odnoszących się do pomiaru długości i wysokości, z pomocą szkicu, poznać łatwo, do jakich punktów się odnoszą tak, że omyłka jest wprost wykluczona.

Rysunek profilu wykonywa się według szkicu w ten sam sposób, jak się profil zdejmowało, rysując poziome i odcinając w odpowiednich punktach, w dół, pionowe miary w odpowiedniej skali. Po narysowaniu profilu i wyciągnięciu tuszem przekroju terenu, ściera się linie pomocnicze, jako już niepotrzebne.

Wyżej opisanego sposobu niwelacji używa się w pomiarach nie wymagających zbytnej dokładności a w terenie nierównym, n. p. do zdjęć profili poprzecznych trasy kolejowej lub drogi. Jeżeli profile takie mają być dłuższe i teren nie jest zbyt spadzisty, to prędzej wykonamy je z pomocą taśmy i instrumentu niwelacyjnego.

2. Większe pomiary, wymagające większej dokładności, wykonywamy tylko instrumentem niwelacyjnym. Z opisu w poprzednim rozdziale poznaliśmy instrument niwelacyjny i jego własności, z których najważniejszą jest ta, że instrument ten wyznacza nam w danym punkcie, w którym go ustawimy, płaszczyznę poziomą pozornego i pozwala zarazem na pomiar odstępów pionowego, między tym poziomem a punktem terenu. Mając dla większej ilości punktów taki wspólny poziom pozorny, zwany zwykle jednym słowem: horyzontem, możemy, przez porównanie wielkości pomierzonych odstępów, czyli odczytów na łacie, łatwo obliczyć różnice ich wzajemnego położenia pod horyzontem, czyli ich wysokości. Znając wysokość punktu, nad którym ustawiony jest instrument, oraz wysokość instrumentu, t. j. pionowy odstęp między tymże punktem a horyzontem, co możemy wprost zmierzyć łatą, stawiając ją na danym punkcie i odczytując miarę do środka okularu — obliczymy wysokość horyzontu przez dodanie powyższych ilości. N. p. wysokość punktu wynosi 300.056 m. — wysokość instrumentu = 1.426 m. — stąd wysokość horyzontu $H = 300.056 + 1.426 = 301.482$ m. nad poziom morza (n. p. m.). W monarchii austriackiej przyjęto jako zero poziom morza Adryatyckiego w Tryeście i wszystkie wysokości w mapach wojskowych odnoszą się do tej podstawy. Punkty stałe na stacjach kolejowych i wzdłuż rzek nawiązane są, względnie powinny być, do państwowej sieci niwelacyjnej.

Wypada nam teraz zastanowić się, jaki wpływ na pomiar wysokości wywiera to, że przyjmujemy poziom pozorny, zamiast rzeczywistego.

Przyjmijmy w tym celu kulisty kształt ziemi, według fig. 113. A, B, C, D... niech będą punktami na kuli, równoległy zaś łuk ξ w odstępnie a od pierwszego przedstawia horyzont rzeczywisty.

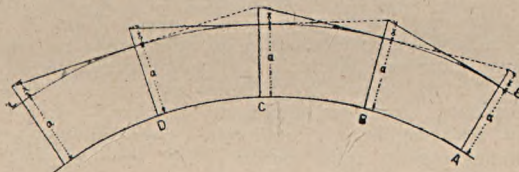


Fig. 113.

Przypuśćmy, że za pomocą instrumentu ustawionego na punkcie A wyznaczyliśmy poziom pozorny H, który przecina łatę w punkcie B ustawioną, w wysokości $a + x$ od kuli ziemskiej, podczas gdy poziom pozorny przecinałby łatę w wysokości a . Różnica $a + x - a = x$ przedstawia błąd, jaki popełniamy przyjmując poziom pozorny. Nadto, różnica wysokości x wskazywałaby, że punkt B leży niżej o x względem punktu A i wogóle, pod powierzchnią kuli ABC... Ustawmy instrument w ten sam sposób na punkcie B — to, jeżeli $AB = BC$, otrzymamy również za pomocą wyznaczonego horyzontu H_2 położenie punktu C, jako o x niższe od punktu B, czyli o $2x$ niższe od punktu A i t. d.

Postępując z pomiarem w ten sposób, popełnialibyśmy niewątpliwie błąd coraz to więcej rosnący.

Ustawmy teraz instrument w punkcie B, t. j. w środku między A i C. Wówczas na łacie w A dostaniemy odczyt $a + x$ i takż sam na łacie w C — zatem różnicę h wysokości punktów A i C obliczymy, odejmując oba odczyty, zatem $h = (a + x) - (a + x) = 0$.

Stąd wynika, że ustawiając instrument w środku między dwoma punktami, eliminujemy zupełnie błąd wskutek nieuwzględnienia poziomu rzeczywistego. Mamy przytem i tę korzyść, że choćby instrument nie był należycie zrektyfikowany, to wynik pomiaru mimo to, będzie dobry, jak to widziliśmy przy rektyfikacji instrumentu typu I.

Inna jest rzecz, że w rzeczywistości różnice x są bardzo małe, większe niż błędy przy pomiarze popełniane, o ile celowe nie są dłuższe jak 100 m. Niwelując jednak linię kilkudziesiąt km. długą, w sposób pierwszy, musiałby błąd być już znaczny; co zaś gorsza, że przy niwelacji napowrót, od ostatniego do pierwszego punktu, dostalibyśmy taki sam błąd, a że ostatni punkt byłby o $n \times$ niższy pozornie od pierwszego, więc pierwszy okazałby się o $2n \times$ niższym od swej własnej wysokości.

Dlatego zasadą jest, by przy niwelacji punktów podstawowych, służących jako nawiązanie dla innych, przyjmować ile możności celowe wprzód i wstecz równe.

Rozstrzygnąwszy tę kwestyę, przystąpimy do opisu metod niwelacji.

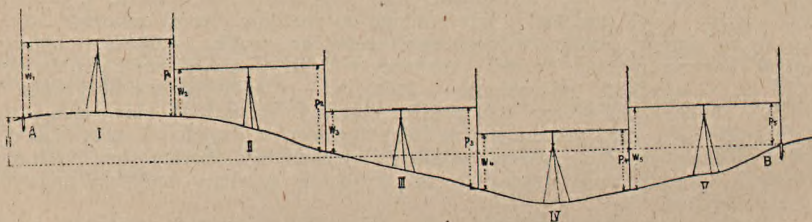


Fig. 114.

Na fig. 114. przedstawiono przekrój terenu AF, który mamy zniwelować.

a) Przypuśćmy, że zadaniem naszym jest znaleźć różnicę wysokości punktów A i F. Ustawmy instrument w pozycji I., t. j. około 40 do 60 m. od punktu A, zależnie od dobroci lunety — i po ustawieniu go, odczytajmy na łać w A stan W_1 — odczyt ten nazywamy odczytem „wstecz“. Następnie odczytamy łać w B ustawioną, a ten odczyt „wprzód“ niech wynosi p_1 . Różnica $w_1 - p_1 = h_1$ reprezentuje tu t. zw. spadek między obu punktami. Podobnie otrzymamy $h_2 = w_2 - p_2$ i t. d. $h_5 = w_5 - p_5$. Jeżeli spadki między poszczególnymi punktami, z uwzględnieniem znaków, dodamy do siebie, to otrzymamy ogólny spadek między A i F, czyli różnicę wysokości tych punktów.

$$\text{Zatem} \quad H = h_1 + h_2 + \dots + h_5 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{lub} \quad H = (w_1 - p_1) + (w_2 - p_2) + \dots + (w_5 - p_5) \quad \dots \dots (2)$$

$$\text{wreszcie} \quad H = (w_1 + w_2 + \dots + w_5) - (p_1 + p_2 + \dots + p_5) \quad \dots (3)$$

t. j. różnicę wysokości dwu punktów obliczymy, jeżeli od sumy odczytów wprzód odejmiemy sumę odczytów wstecz.

Wykonajmy teraz niwelację od A do F, a potem wróćmy od F do A, czyli znajdziemy różnicę wysokości tego samego punktu, która, oczywiście, powinna być równa zeru.

Nazwijmy: $w_1 p_1 \dots$ odczyty w kierunku A—F, zaś $w'_1 p'_1 \dots$ odczyty w kierunku F—A, to, jeżeli między A i F był spadek $+H$, to w przeciwnym kierunku będzie $-H$,

$$\text{zatem} \quad +H = (w_1 + w_2 + \dots + w_5) - (p_1 + p_2 + \dots + p_5) \quad (4)$$

$$\text{zaś} \quad -H = (w'_1 + w'_2 + \dots + w'_5) - (p'_1 + p'_2 + \dots + p'_5) \quad (5)$$

Dodawszy oba równania, dostaniemy:

$$H - H = 0 = (w_1 + w_2 + \dots + w_5 + w'_1 + w'_2 + \dots + w'_5) - (p_1 + p_2 + \dots + p_5 + p'_1 + p'_2 + \dots + p'_5) \quad \dots \dots (6)$$

Różnica po prawej stronie równania wtedy będzie zerem, gdy

$$(w_1 + w_2 + \dots + w'_1 + w'_2 + \dots + w'_5) = (p_1 + p_2 + \dots + p'_1 + p'_2 + \dots + p'_5) \quad (7)$$

czyli: w niwelacji linii zamkniętej, suma odczytów wstecz jest równa sumie odczytów wprzód.

Jeżeli więc wyjdziemy z pewnego punktu i wrócimy do niego z powrotem, tą samą drogą lub inną, to jako kontrola niwelacji, służy powyższa formułka.

Przypuśćmy, że wysokość punktu A (fig. 114.) nad poziom morza jest dana i wynosi n, to wysokość horyzontu, wynosić będzie:

$$H_1 = n + w_1 \dots \dots \dots (8)$$

zaś wysokość n_1 punktu B obliczymy, odejmując p_1 od H_1

$$\text{t. j. } n_1 = H_1 - p_1 = n + w_1 - p_1 \dots \dots \dots (9)$$

$$\text{a że } w_1 - p_1 = h_1 \quad \text{więc } n_1 = n + h_1 \dots \dots \dots (10)$$

t. z. wysokość punktu B obliczymy, dodając do wysokości punktu A spad między nim a punktem B. Podobnie, dodając do n sumę spadów między A i F, otrzymamy wysokość punktu F.

Zamiast określenia: wysokość punktu, używa się „znamię punktu“ lub „kota punktu“.

Lecz nie tylko kotę punktu B otrzymamy według równania (2.) $n_1 = H_1 - p_1$, ale także i wszystkich innych punktów, dla których porobiliśmy odczyty ze stanowiska I.

Mając tedy kotę punktu A, nawiązujemy się do niego w ten sposób, że ze stanowiska I. odczytujemy łąkę na tym punkcie ustawioną, odczyt zaś w_1 dodajemy do koty n i otrzymamy t. z. horyzont H. Ażeby zaś znaleźć kotę któregośkolwiek punktu zdjętego ze stanowiska I. czyli zniwelowanego, wystarczy odpowiedni odczyt łąki, odjąć od horyzontu H.

Po zniwelowaniu punktu B i wszystkich innych, zwanych bocznymi, przenosimy się na stanowisko II., nawiązujemy się do punktu B, którego wysokość już mamy obliczoną i prowadzimy pomiary dalej w ten sam sposób.

Niwelując jedną linię już wytyczoną i wypalikoną, postępujemy w ten sam sposób, t. j. nawiązujemy się odczytem wstecz, następnie pomocnik stawia łąkę na punktach pośrednich, aż wreszcie dojdzie do punktu B, na którym kończymy niwelację z danego stanowiska instrumentu odczytem wprzód. Z następnego stanowiska rozpoczynamy nawiązaniem się i t. d. W ten sposób niweluje się wszelkie t. z. profile, n. p. profil podłużny trasy kolei, kanału, drogi i t. p.

Jeżeli na danym obszarze mamy grupę punktów rozrzuconych do niwelacji, to wprzód należy te punkty znanymi nam sposobami zdjąć w planie, potem zniwelować. Z jednego stanowiska, po nawiązaniu się, niweluje się wszystkie punkty, jakie tylko są widoczne i jakie znajdują się w promieniu około 80 a nawet 100 m, potem obieramy jeden punkt jako odczyt wprzód, przenosimy się na drugie stanowisko i t. d.

Jeżeli niwelacya ma wypaść dobrze, t. j. z jak najmniejszym błędem, to należy się starać, by odległość między łąką „wstecz“ a łąką „wprzód“ była ile możności równą. Nadto bardzo trzeba zważać na ustawianie łąki. Jeżeli pomocnik stawia łąkę pochylając ją naprzód lub wstecz, to dostajemy odczyty za wielkie. Najlepiej postępować przy odczytach wstecz i wprzód, jako najważniejszych, w następujący sposób: Ustawwszy łąkę na paliku lub podstawie, staje pomocnik za łąką, pochyla ją w swoją stronę, następnie powoli odchyła od siebie naprzód. Patrząc przez lunetę widzimy, jak odczyt staje się coraz mniejszym, najmniejszym będzie, gdy łąka przechodzi przez położenie pionowe, poczem, gdy pochyla się naprzód, staje się znowu coraz większy. Najmniejszy odczyt, jest więc najlepszy. Zwykle łąka opatrzona jest pionem, lub libelką tak urządzoną, że gdy libella jest poziomą, to łąka pionową.

Następujący przykład protokołu niwelacyjnego wskazuje tok postępowania przy niwelacji w polu:

Profil podłużny km 6'0 do dnia

Stanowisko instrumentu	Nazwa punktu niwelowanego	Odległość od początku	O d c z y t			Horyzont	Kota
			wstecz	pośredni (lub w bok)	wprzód		
I.	Rp.	6 + 000 km	1'395	—	—	201'445	200'050
		+ 015'5	—	1'862	—	—	—
		+ 020'0	—	1'983	—	—	—
		+ 032'0	—	2'397	—	—	—
		+ 040'0	—	2'710	—	—	—
		+ 060'0	—	3'123	—	—	—
		+ 078'0	—	3'389	—	—	—
		+ 091'0	—	3'632	—	—	—
	6 km 100 m	+ 100'0	—	—	2'973	—	198'772
II.	6 km 100 m	—	1'421	—	—	199'893	—
		+ 120'0	—	1'853	—	—	—
	P. Ł.	+ 132'5	—	2'296	—	—	—
		+ 140'0	—	3'125	—	—	—
	S. Ł.	+ 175'32	—	3'002	—	—	—
		+ 190'00	—	3'816	—	—	—
	6 km 200 m	+ 200'0	—	—	3'426	—	196'467
III.	6 km 200 m	—	1'105	—	—	197'572	—
	K. Ł.	+ 218'14	—	1'422	—	—	—
		+ 240'0	—	1'796	—	—	—
		+ 255'5	—	2'635	—	—	—
		+ 262'1	—	1'381	—	—	—
		+ 275'3	—	2'365	—	—	—
		+ 280'0	—	2'623	—	—	—
		+ 300'0	—	—	3'062	—	194'510
IV.	6 km 300 m	—	0'321	—	—	194'831	—
		+ 315'2	—	0'896	—	—	—
		+ 325'0	—	1'423	—	—	—

Suma odczytów wstecz, nie licząc stanowiska IV. jako nieskończonego, wynosi 3'921 — suma ich wprzód = 9'461, zatem $w - p = 3'921 - 9'461 = -5'540$. Różnica koty punktu + 300 m z punktu I. wynosi $194'510 - 200'050 = 5'540$. Świadczy to tylko, że nie było omyłki w rachunku, lecz nie o niwelacji, która nie była kontrolowana.

§ 2. Poprawka odczytów na łącie, wskutek nachylenia środka bańki libelli.

a) Dokładność pomiarów wszelkiego rodzaju, zatem i niwelacji, ma pewne granice. Im więcej poświęcimy czasu i uwagi, zatem i kosztów, tem pomiar będziemy

mogli wykonać dokładniej. Zbyt daleko jednak w praktyce posuwać się nie możemy, już z tego powodu, że zbytnia dokładność mogłaby się niejednokrotnie nieopłacić jednej, lub drugiej stronie, czyli, dokładność zastosować należy do celu, jaki mamy przed sobą. Jako przykład weźmy niwelację trasy kolejowej, długiej 50 km. Błąd średnio 2 cm na 1 km da wprawdzie niepewność 1 m na całej długości w wypadku, gdy błędy się sumują, ale to nie będzie wcale szkodliwym dla budowy tej kolei, gdyż 2 cm na 1 km nie wpłynie wcale na zwiększenie spadków, a temsamem i ruchu. Moglibyśmy tu pójść nawet dalej, lecz w praktyce, jedynie tylko poświęciwszy więcej staranności, nie dojdziemy nawet do takiego błędu. Nie mówimy tu o niwelacji ściśle, przepisanej w pewnych warunkach z przeznaczeniem odpowiednich kosztów z góry, lecz o zwykłych pracach inżynierskich. Stosunkowo największa dokładność jest potrzebna przy niektórych robotach wodnych, n. p. zakładach turbinowych, lub n. p. budowach kanałów spławnych, wreszcie miejskiej kanalizacji, jeżeli miasto leży na równinie i wogóle brak jest spadku. Zresztą, jeżeli można osiągnąć większą dokładność przy dozwolonym niejako nakładzie czasu i pracy, zwłaszcza, gdy właściwości używanych do robót przyrządów wskazują konieczność pewnych, dodatkowych zabiegów, to zdecydować się musimy na nie.

Tak właśnie rzecz się ma przy niwelacji zwykłej, a jednak wymagającej większej staranności; przyczyną zaś jest tutaj libella. Wiadomą jest rzeczą, że libella potrzebuje dłuższego czasu do przyjęcia do równowagi, tudzież, że mimo najstaranniejszej rektyfikacji i ustawienia instrumentu, okazuje się potrzeba małych poprawek położenia bańki za pomocą śruby elewacyjnej, przed odczytem. To regulowanie zabiera stosunkowo dużo czasu.

Jeżeli więc chcemy pomiar wykonać dokładnie, a równocześnie nie tracić wiele czasu na regulowanie libelli podczas pomiaru, to postąpimy według sposobu niżej opisanego, z tą uwagą, że za to poświęcimy znów nieco czasu na poprawki rachunkowe, lecz przy tem zyskamy większą pewność.

Przy tym sposobie niwelacji, bardzo użyteczną będzie libella mająca podział bieżący, od 0 do 50, przyczem ustawiamy libellę tak, by zero znalazło się po stronie obiektywu, co wyklucza wszelką sposobność do wątpliwości i omyłek.

Środek bańki, powinien zatem znajdować się na kresce 25 — a znajdziemy go, odczytując położenie obu końców bańki i biorąc z nich średnią. N. p. odczytamy

$$s_1 = \frac{9 + 32}{2} = \frac{41}{2} = 20.5, \text{ t. z. } \text{środek bańki leży o } 25 - 20.5 = 4.5 \text{ przedziałek po}$$

stronie obiektywu, czyli, że oś celowa mierzy za wysoko na łacie. Wątpliwości tu niema, podobnie, gdy $s_2 = \frac{18 + 41}{2} = \frac{59}{2} = 29.5$, to wiemy na pewno, że środek bańki znajduje się 4.5 przedziałek po stronie okularu, więc oś celowa mierzy za nisko.

Odczyt jest łatwy, rachunek nie sprawia żadnych trudności i może być nawet w pamięci łatwo wykonany, a tylko wynik zanotowany w protokole niwelacyjnym, chociaż lepiej jest notować odczyty.

Znaną musi być nadto przewaga libelli, t. j. wartość kątowna w sekundach, odpowiadająca przesunięciu bańki o jedną przedziałkę.

Po odczytaniu na łacie, odczytamy stan bańki i obliczymy położenie jej środka, które oznaczymy przez n . Jeżeli wartość przewagi wynosi ω'' , to kąt nachylenia osi celowej wyniesie

$$\alpha'' = n \cdot \omega'' \dots \dots \dots (1)$$

Przyjmijmy, że odległość łaty od instrumentu = 1 m, to łuk, odpowiadający kątowni α'' , będzie miał długość

$$p = 1 \cdot n \cdot \omega'' \cdot \xi \cdot m \dots \dots \dots (2)$$

jeżeli ξ jest długością łuku, odpowiadającego jednej sekundzie i promieniowi $r = 1$ m.

$$\xi = 0.00000484 \text{ m} \dots \dots \dots (3)$$

Chcąc mieć poprawkę wprost w milimetrach, przyjmiemy

$$\xi_1 = 0.00484 \text{ mm} \dots \dots \dots (4)$$

$$\text{t. j. } 1000 \times \xi \quad \text{więc } p = 1 \cdot n \cdot \omega \xi_1 \text{ mm} \dots \dots \dots (5)$$

Zazwyczaj n , t. j. odchyłka środka bańki jest mała i rzadko przekracza jedną przedziałkę. Przyjmijmy:

$$n = 1 \quad \omega = 5'' \quad l = 100 \text{ m}$$

wówczas długość łuku, czyli poprawka odczytu wynosi

$$p = 1.5 \cdot 100 \cdot 0.00484 = 2.42 \text{ mm}$$

i to (—) jeżeli środek bańki leży po stronie obiektywu, (+) jeżeli po stronie okularu, co znów poznamy z odczytów. l wyraża się w metrach.

Rozchodzi się jeszcze o odległość łąty, która nie musi być zupełnie dokładną, lecz gdyby wymagała pomiaru, to już lepiej byłoby regulować położenie bańki, bo zabrałoby mniej czasu. Mamy jednak także inny szybki sposób, stosunkowo bardzo dokładnego pomiaru długości, mianowicie za pomocą siatki w lunecie, złożonej z trzech nitok. Średnia nitka oznacza nam oś celową równoległą do osi libelli i używamy jej do niwelacji. Odstęp jednak między górną a dolną nitką jest tak dobrany, że różnica odczytów na łacie tych dwóch celowych, pomnożona przez stałą liczbę 100, daje wprost odległość łąty od instrumentu — n . p. odczyt górnej celowej = 3.145 m — dolnej = 2.216 m — różnica = 0.929 m, czyli odległość = 92.9 m, którą zaokrąglimy na 93. Wogóle możemy bez szkody dla dokładności poprawki, zaokrąglać odległości na całe metry.

Poprawkę obliczamy, jak z powyższego opisu widać, za pomocą bardzo łatwego rachunku, wartość $\zeta_1 = 0.00484$ mm, łatwo spamiętać używając ją często, odczyty stanu bańki i obu nitok w lunecie nie zabiorą więcej jak 20 sekund czasu, a nawet odczyty górnej i dolnej nitki będą poniekąd kontrolą odczytu średniej nitki, więc, o ile chodzi o większą dokładność, to sposób ten należy polecić.

b) W związku z powyższym sposobem jest t. z. nastawianie osi celowej na środek pola odczytu.

Mianowicie: łąta jest podzielona na metry, decymetry i centymetry, milimetry szacuje się na oko. Otóż liczne doświadczenia wykazały, że najdokładniej odczytać milimetry, gdy środek siatki pada na środek pola centymetra, czyli wskazuje 5 mm. Oko łatwo ocenia równość pola pod i nad nitką, podczas gdy w innym położeniu dokładność wynosi w porównaniu z tąmtą $\frac{3}{4}$. Spostrzeżono też, że inne są niedokładności w odczytach od 0 do 5 mm, a inne powyżej. Dlatego używa się często następującego sposobu:

Za pomocą śruby elewacyjnej, patrząc przez lunetę, nastawiamy oś celową na środek najbliższego centymetra, poczem postępujemy tak, jak wyżej opisano, t. j. odczytujemy stan bańki, odległość i wprowadzamy poprawkę p .

Sposób ten jest przez wielu geodetów zalecany, wymaga jednak pewnego czasu do nastawienia celowej i rzecz prosta, większe będą poprawki p .

§ 3. Błędy niwelacji.

A) Przypuśćmy, że niwelacja była przeprowadzona między dwoma punktami A i B fig. 115., na długości L , że instrument ustawiano w środku poszczególnych odcinków, tak, że długości celowych s były zawsze równe. Zatem cała długość

$$L = n \cdot s \dots \dots \dots (1)$$

Ilość stanowisk, czyli przestawień instrumentu będzie w tym wypadku wynosiła $\frac{n}{2}$.

Przy każdym odczycie, popełnimy jakiś błąd $\pm \varepsilon$, na który składa się błąd celowej i libelli, jeżeli nie działają inne wpływy, n . p. wibracja powietrza, lub mgła, jeżeli łątę ustawia się zawsze pionowo, a podział jej jest dokładny, że długość s jest tak dobrana, że odczyt jest wyraźny.

W takim razie możemy przyjąć, że błąd $\pm \varepsilon$ jest proporcjonalny do długości celowej, czyli że

$$\pm \varepsilon = k \cdot s \dots \dots \dots (2)$$

gdzie k jest współczynnikiem, na razie nieznanym.

W takich warunkach, jakie powyżej wymieniono, innego błędu zrobić nie można, jak tylko w odczycie. Mimo wszelkiej staranności bowiem, może być drobny

błąd w rektyfikacji, który znów może się sumować z błędem ustawienia libelli — wreszcie, bańka libelli, ściśle biorąc, wskutek tarcia o ściany, nie może przyjść prędko do równowagi — jest to błąd niezmiernie drobny, ale istnieje.

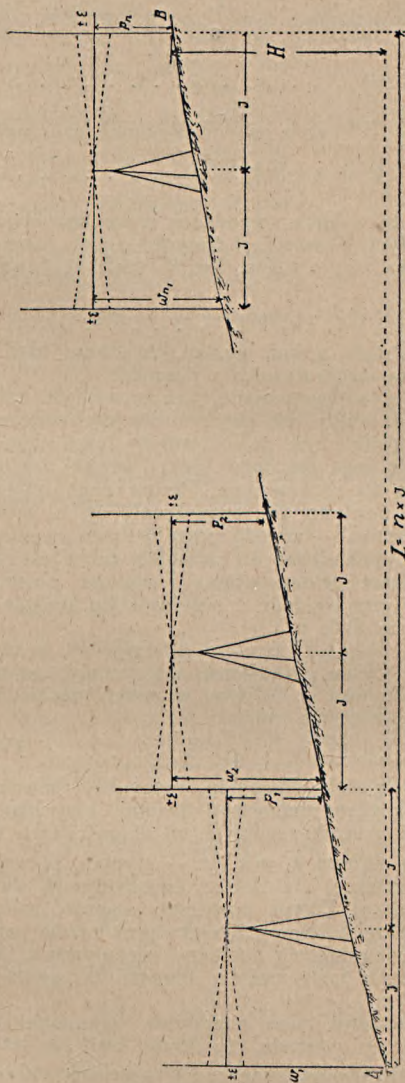


Fig. 115.

Różnicę wysokości punktów A i B, otrzymamy, według równania 6. poprzedniego § 2.

$$H = (w_1 + w_2 + \dots + w_n) - (p_1 + p_2 + \dots + p_n) \dots (3)$$

Ta ilość H, będzie miała błąd ΔH złożony z pojedynczych błędów celowych, których mamy n, zatem

$$\Delta H = \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm \varepsilon \pm \dots \pm \varepsilon \dots \dots \dots (4)$$

a stąd średni błąd według znanej nam już teorii błędów:

$$M = \pm \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^2} = \pm \sqrt{n \cdot \varepsilon} \dots \dots \dots (5)$$

Z równania (1.) dostaniemy: $n = \frac{L}{s}$ co wstawmy w równanie (5.):

$$\text{to } M = \pm \sqrt{\frac{L}{s} \cdot \varepsilon^2} \dots \dots \dots (6)$$

a że według równania (2.) $\varepsilon = k \cdot s$, zatem równanie (6.) otrzyma kształt:

$$M = \pm \sqrt{\frac{L}{s} \cdot k^2 s^2} = \pm k \sqrt{L \cdot s} \dots \dots \dots (7)$$

Przypuśćmy teraz, że w kilku wypadkach wykonano niwelacje, biorąc zawsze takie same długości celowych s natomiast długości ciągów niwelacyjnych były różne: $L_1 L_2 \dots L_n$. W takim razie s jest ilością stałą, a równanie (7.) napiszemy w formie:

$$M = \pm (k \sqrt{s}) \sqrt{L} = k_1 \sqrt{L} \dots \dots \dots (8)$$

współczynnik k_1 jest więc stały, a stąd wynika, że średni błąd niwelacji jest proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z długości.

Jak już mówiliśmy o tem poprzednio, już ze względu na kulistość ziemi, powinny być celowe s równe. Nadto, nie powinno się je obierać za długie ze względu na wyrażne widzenie, za krótkie zaś, powodowałyby tylko niepotrzebną stratę czasu.

Te warunki określają więc dla danej lunety pewną najkorzystniejszą długość celowej, którą też powinno się zachowywać. Pewne małe odchyłki nie wpłyną na dobroć niwelacji, lecz nie powinno się dopuszczać, by n. p. celowa wstecz miała długość 20 m a wprzód 100 m — zresztą mogą być poszczególne stanowiska krótsze od innych, bo wtedy błąd pochodzący od kulistości ziemi jest tak mały, że go pominąć można bez żalu, lecz celowe wstecz i wprzód, powinny być ile możności równe a przynajmniej w przybliżeniu, z różnicą kilku kroków. Do tak przeprowadzonej niwelacji, stosuje się wzór (8.).

Jeżeli jednak, mimo powyższych uwag, zdarzyło się, że niwelowano tak, że celowe mają różne długości. Celem porównania, przyjmijmy, że niwelację wykonano kilka razy na tej samej długości L. W tym wypadku będzie L ilością stałą, zaś s zmienną, a równanie (7.) otrzyma kształt:

$$M = \pm (k \cdot \sqrt{L}) \cdot \sqrt{s} = \pm k_2 \sqrt{s} \dots \dots \dots (9)$$

gdzie $k \sqrt{L} = k_2$ jest ilością stałą. Mamy tu średni błąd niwelacji proporcjonalny do długości celowej. Na każdym stanowisku zrobimy inny błąd, złożony z dwóch błędów odczytów wstecz i wprzód, zależnych od długości tych celowych.

Z równania (8.), w którym $k_1 = k \sqrt{s}$ — wynika, że współczynnik k_1 będzie tem mniejszy, im s jest mniejsze, a w dalszej konsekwencji, że im s jest mniejsze, tem i błąd M będzie mniejszy. Zdanie powyższe rozumieć należy w ten sposób, że powinno się unikać zbyt długich celowych, a jako praktycznie najkorzystniejsze, obierać takie długości, które pozwalają na dokładne odczytywanie łaty i szacowanie milimetrów. Dla najmniejszych instrumentów długość ta wynosi około 40 m, dla lepszych od 60 do 80 m.

W rachubę brać możemy tylko poprawnie wykonane roboty. Dlatego zajmujemy się wzorem (8.), który powiada, że średni błąd M, jest proporcjonalny do \sqrt{L} . Zatem, według teorii błędów, wagi p i p' pomiarów niwelacyjnych, wykonanych starannie, między dwoma tymi samymi punktami, ale wzdłuż różnych dróg, fig. 116, będą odwrotnie proporcjonalne do tych długości ciągów niwelacyjnych:

$$p : p' = \frac{1}{L} : \frac{1}{L'} \dots \dots \dots (10)$$

W rzeczywistości, wielkość błędów zależy od czułości libelli, zatem od rodzaju instrumentu i powiększenia lunety. Zazwyczaj używane są instrumenty o następujących własnościach:

	czułość libelli	powiększenie lunety
a) do prac podrzędnych, jak n. p. profilu poprzecznych	15 do 30"	15 do 25
b) do prac ważniejszych	10 „ 15"	25 „ 30
c) do ścisłych niwelacyi	3 „ 6"	35 „ 45

Przewaga libelli odnosi się tutaj do podziałki jej w liniach paryskich.

Jeżeli łąta ustawioną jest pionowo i ma dokładny podział, tudzież, gdy oś celowa jest równoległa do osi geometrycznej i osi libelli, to błąd odczytu zależy tylko od dokładności, z jaką potrafimy ustawić oś celową, czyli od kąta, jaki celowa ta tworzy rzeczywiście z poziomem jakoteż od odległości, co zresztą widzieliśmy w poprzednim § 2.

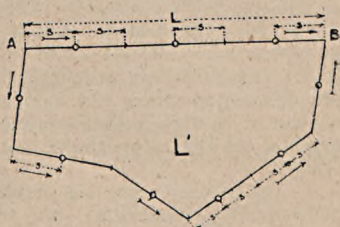


Fig. 116.

Przypuśćmy, że przewaga libelli ma wartość 30" a błąd w ustawieniu libelli odpowiada $\frac{1}{10}$ części podziałki, t. j. 0.23 mm — to wówczas celowa tworzy z poziomem kąt $\frac{30''}{10} = 3''$. —

W tych samych warunkach błąd celowej wyniesie $\frac{3''}{10} = 0.3''$, jeżeli libella jest czulszą i przewaga jej ma wartość 3".

Jeżeli błąd ustawienia libelli, według równania 1. poprzedniego § wynosi α'' , to błąd odczytu będzie miał wartość (§ 2. równania 5.)

$$p = l \cdot n \cdot \omega'' \cdot \zeta_1 \text{ mm}$$

przyjmując zaś $n \cdot \omega'' = \alpha''$ i $l = 1 \text{ m}$ otrzymamy

$$p' = \alpha \cdot \zeta_1, \text{ zaś średni błąd niwelacyi na długości } L_1 \text{ obli-}$$

czymy z równania 7. wstawiając: $k = \alpha \cdot \zeta_1$

$$\text{czyli } M = \pm \alpha'' \cdot \zeta_1 \sqrt{L \cdot s} \dots \dots \dots (11)$$

W drobnych instrumentach α nie przenosi 1". Przyjmując różne długości dla s — otrzymamy średni błąd M na $L = 1 \text{ km}$, t. j. na 1 km długości ciągu niwelacyjnego, wyrażony w mm zależnie od różnych czułości libelli używanych w praktyce. Wartość średniego błędu M na 1 km zestawiono w następującej tabeli:

Dokładność ustawienia libelli	Długość celowej s w metrach:							
	$s=20 \text{ m}$	40 m	50 m	75 m	100 m	150 m	200 m	300 m
$\alpha = \pm 1'' M = \dots \dots$	mm ± 0.7	± 1.0	± 1.1	± 1.3	± 1.5	± 1.9	± 2.2	mm ± 2.7
$\alpha = \pm 2'' M = \dots \dots$	1.4	1.9	2.2	2.7	3.1	3.8	4.3	5.3
$\alpha = \pm 5'' M = \dots \dots$	3.4	4.8	5.4	6.6	7.7	9.4	10.8	13.3

Ponieważ 100 m jest już najdalszą granicą dla długości celowych s , więc przy zwykłej staranności i uwadze, średni błąd niwelacyi na długości 1 km nie przekroczy 3 mm.

§ 4. Podwójna niwelacya.

a) Zazwyczaj niwelację wykonywa się dwa razy, od punktu A do B i z powrotem od B do A. Niezgodność wyników obu niwelacyi, nie powinna przekraczać dozwolonej granicy.

Przypuśćmy, że niwelacja i kontrola wykonane były wzdłuż tej samej linii, wówczas i wagi ich muszą być równe, bo długość w obu razach jest ta sama, zatem, gdy d przedstawia różnicę obu niwelacji, to średni błąd pojedynczej niwelacji wyniesie, według rozdziału III. § 4. równania (39.):

$$m = \pm \frac{d}{\sqrt{2}} = \pm 0.71 d \dots \dots \dots (1)$$

a średni błąd średniej arytmetycznej, według równania (40)

$$M = \pm \frac{d}{2} \dots \dots \dots (2)$$

Zatem średnia arytmetyczna będzie najprawdopodobniejszą wartością, błąd jej przedstawia równanie (2.), podczas, gdybyśmy poprzestali na rezultacie pojedynczej niwelacji, to błąd byłby, według równania (1.) większy. Naturalnie, nie można poprzestać na jednej niwelacji, bo wówczas nie mamy najmniejszej podstawy do jej oceny.

b) Inaczej rzecz się przedstawia, gdy niwelację między dwoma punktami przeprowadzimy kilkakrotnie, ale różnymi drogami, na każdej jednak dwa razy, lecz zawsze w kierunku strzałek na fig. 116., t. j. od A do B. Wówczas dla każdej pary pomiarów otrzymamy inną wagę, bo wogóle długości ciągów będą różne, a wartości błędów obliczymy według rozdziału III. § 6., mianowicie:

Nazwijmy różne pomiary przez d_1, d_2, \dots, d_n i odpowiednie długości ciągów niwelacyjnych l_1, l_2, \dots, l_n , to średnią różnicę D , dla 1 km długości, obliczymy według równania (62.)

$$D = \pm \sqrt{\frac{[p d^2]}{n}} \quad \text{wstawiając } p = \frac{1}{l}$$

otrzymamy dla niwelacji

$$D = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{d_1^2}{l_1} + \frac{d_2^2}{l_2} + \dots + \frac{d_n^2}{l_n} \right)} = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{l} \right]} \quad (3)$$

Średni błąd pojedynczej niwelacji, t. j. którejkolwiek z wykonanych, według równania (63.)

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d^2}{l} \right]} \dots \dots \dots (4)$$

wkońcu średni błąd średniej arytmetycznej z równania (64.)

$$M = \pm \frac{D}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{l} \right]} \dots \dots \dots (5)$$

Wyraziwszy w tych równaniach l w km, zaś d w mm, otrzymamy m i M w mm na 1 km długości.

We wzorach (4.) i (5.) n oznacza ilość podwójnych niwelacji, nie zaś ilość wszystkich razem, którychby było wówczas dwa razy tyle.

Wogóle wzorów (1.) (2.) (3.) i (4.) nie można stosować w tych wypadkach, gdy niwelację między dwoma punktami A i B powtórzono dwa razy, ale każdym razem inną drogą. Postępowanie takie nie miałoby wogóle celu, bo jeżeli jedna z tych dróg jest krótsza i zarazem wygodniejsza dla niwelacji, to pocóżbyśmy mieli niwelację kontrolną prowadzić drogą dłuższą i niewygodniejszą, gdy obie te okoliczności i każda z osobna wpływają na powiększenie błędów? Jeżeliby zaś droga krótsza była niewygodniejszą, n. p. górzystą, wymagającą częstych przestawień, przy-czem celowe musiałyby być nierówne, to obierzemy raczej drogę dłuższą, która przedstawia mniej sposobności dla błędów. Dlatego powinno się kontrolę niwelacji przeprowadzić na tej samej drodze.

c) Dłuższą niwelację, już ze względów praktycznych, dzielimy na części o długości około 1 km każda, urządzając w odpowiednich miejscach punkty stałe, zwane reperami. Między reperami niweluje się dwa razy i sprawdza się niwelację. O ile zgodność jest dostateczna, prowadzimy robotę dalej, w przeciwnym razie trzeba szukać błędu, niwelując trzeci raz daną część. Możliwym jest, że była omyłka w odczycie, lub instrument mógł być ustawiony na grzązkim terenie w pewnym punkcie,

lata, którąśmy odczytali jako „wprzód“, a która powinna pozostać na tem samym miejscu, dopóki, po przestawieniu instrumentu nie odczyta się na niej odczytu „wstecz“ — mogła być poruszona, t. z. ustawioną na wyższym lub niższym punkcie, słowem, jest dosyć przyczyn, które wywołać mogły zbyt wielką różnicę. Taki błąd usuwa się, niwelując odpowiednią część, między reperami trzeci raz. Ma to tę znaczną korzyść, że gdybyśmy przeniwelowali całą drogę 10 lub więcej km i dopiero znaleźli zbyt wielką różnicę, to kontrola kosztowałaby zbyt wiele pracy i czasu.

Przy takim urządzeniu pomiarów, otrzymamy między dwoma punktami końcowymi, szereg poszczególnych, częściowych pomiarów, niejako boków wieloboku, obliczamy dla nich różnice d , i obliczamy m i M według równań (4) i (5) wstawiając w nich d w mm a l w km. Jako rezultat, dostaniemy wartość błędu w mm na 1 km — n oznacza ilość podwójnych pomiarów, względnie ilość boków w tym poligonie.

Następujący przykład uwidoczni najlepiej sposób postępowania.

Między punktem (1.) a (5.) mamy cztery repery, czyli niwelacya podzielona jest na 4 części. Każdą część niwelujemy podwójnie.

Przykład:

Tabela 11.

Punkt	Odległość l w km	Niwelacya		d I.—II. mm	\sqrt{l}	$\frac{d}{\sqrt{l}}$	$\frac{d^2}{l}$	Średnia arytm. $\frac{I+II}{2}$
		I. Różnica wysokości m	II. Różnica wysokości m					
(1)	0.64	1.425	1.428	— 3	0.8	3.75	14.06	1.4265
(2)	0.81	2.631	2.626	+ 5	0.9	5.55	30.80	2.6285
(3)	0.49	2.856	2.860	— 4	0.7	5.71	32.60	2.8580
(4)	1.00	2.260	2.256	+ 4	1.0	4.00	16.00	2.2580
(5)	2.94	9.172	9.170	+ 2			93.46	9.1710
$n = 4$								

$$\text{stad } M = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{l} \right]} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{93.46}{4}} = \pm 2.21 \frac{\text{mm}}{1 \text{ km}} \quad \dots (6)$$

Przyjmując średnią arytmetyczną jako prawdopodobną wartość, spodziewamy się błędu 2.21 mm na 1 km długości.

Z wyniku powyższej niwelacyi na długości 2.94 km możnaby sądzić, że niwelacya była nadzwyczajnie dokładnie wykonana, bo ostateczna różnica wynosi 2 mm między punktem (1.) a (5.). Według równania (2.) średni błąd średniej arytmetycznej wynosiłby

$$\pm \frac{d}{2} \text{ t. j. tylko 1 mm na 2.94 km } \dots \dots \dots (7)$$

Przypatrzwszy się jednak częściowym niwelacyom, przyjdziemy do przekonania, że ten ostateczny wynik jest przypadkowym. Pojedyncze różnice, na mniejszych znacznie długościach, są daleko większe. N. p. dla części (1)—(2) różnica wynosi 3 mm, zatem błąd średniej arytmetycznej dla tej długości 0.64 km wynosiłby 1.5 mm, byłby więc większy niż dla całości. Ponieważ 1.5 mm odnosi się do długości 0.64 km, więc błąd średniej arytmetycznej przeliczony na długość 1 km niwe-

lacy, wyniósłby $\frac{1.5}{0.64} = 2.34$ mm. Podobnie dla długości 0.81 km między (2)—(3)

otrzymamy $M = 2.5$ mm, zatem na 1 km: $\frac{2.5}{0.81} = 3.08$ mm.

To też wynik obliczenia pod (6.), charakteryzujący dokładność niwelacji, w granicach błędu 2.21 mm na 1 km przemawia sam za swoją słusznością, podczas gdy wynik pod (7.) — dający błąd 1 mm na 2.94 km czyli $\frac{1}{3}$ mm na 1 km jest, w porównaniu z częściowymi wynikami nieprawdopodobny. Wzór (1.) i (2.) może więc być stosowany dla krótkich ciągów niwelacyjnych, gdy wprost nie mamy innych danych do obliczenia błędu, a gdy kontroli nie wykonywa się zwykle inaczej, jak na tej samej drodze, przeto dla dłuższych ciągów niwelacyjnych nadaje się tylko sposób, na powyższym przykładzie wskazany.

d) Przypuśćmy, że przeprowadzamy niwelację między dwoma punktami stałymi, których wysokość jest już określona i niezmienna. Wychodząc n. p. z punktu A, do którego się nawiązaliśmy, przyjdziemy do punktu B z różnicą „w“ między naszym pomiarem, a podaną już kotą punktu B. Ponieważ wysokości punktu B zmienić nie można, więc nie możemy inaczej postąpić, jak tylko uznać nasz pomiar jako błędny, a różnicę „w“ rozdzielić na poszczególne punkty, proporcjonalnie do długości, przyczem punkt A, jako początkowy, pozostanie niezmieniony. Jeżeli długość ciągu wynosi L metrów, zaś odległości poszczególnych punktów od początku są $l_1 l_2 l_3 \dots l_n$, to poprawki wysokości dla nich, będą następujące:

$$\frac{W}{L} \cdot l_1, \frac{W}{L} \cdot l_2, \dots$$

Błąd każdego z tych punktów, przed wyrównaniem, ma, według równania (7 a.) § 11. rozdziału III. — wartość:

$$m = \pm \frac{W}{L} \dots \dots \dots (8)$$

zaś średni błąd poprawionych wysokości, według równania (7 a.) § 11. rozdziału III. będzie

$$M = \pm \frac{W}{L} \sqrt{1 \cdot l} \dots \dots \dots (9)$$

gdzie L oznacza całą długość ciągu niwelacji, l odległość danego punktu od początku, t. j. od A, zaś l' odległość od końca, t. j. od B.

Dla punktów końcowych, t. j. A i B, błąd $M = 0$ według równania (9.), bo dla pierwszego $l = 0$, dla drugiego $l' = 0$. Jest to zupełnie słusznem, bo wysokości tych punktów są ustalone i dla naszej niwelacji pewne. Mają one swój błąd, ale ten odnosi się do tej niwelacji, która ich wysokość ustaliła, lecz w danym wypadku nie mamy z nimi nic do czynienia.

„M“ osiągnie największą wartość dla $l = l' = \frac{L}{2}$, t. j. w środku długości.

Wówczas

$$M = \pm \frac{W}{L} \sqrt{\frac{L^2}{4}} = \pm \frac{W}{2} \dots \dots \dots (10)$$

e) Cały powyższy ustęp odnosi się także do niwelacji wieloboku zamkniętego. Wróćmy bowiem do punktu, z któregośmy wyszli, powinniśmy mieć różnicę = 0.

Różnicę „w“, jaka okaże się po przeprowadzonej niwelacji, rozdzielimy na punkty pośrednie proporcjonalnie do długości, jak poprzednio. W środku długości wieloboku będzie największy błąd, według równania (10.)

$$M = \pm \frac{W}{2}$$

f) Wróćmy teraz znowu do ustępu c. Mieliśmy tam długość ciągu niwelacyjnego L, podzieloną na części między reperami, o długościach $l_1 l_2 \dots$

Niwelację rozpoczynamy od pierwszego repera, do którego się nawiązujemy, zatem mającego już ustaloną kotę, niwelujemy do drugiego i wracamy napowrót do pierwszego, gdzie otrzymamy różnicę d_1 .

Jest to bezwątpienia to samo, co wielobok zamknięty. Różnicę d_1 mielibyśmy zatem rozdzielić na całą długość wieloboku, czyli na $2l_1$. Największy błąd, wynoszący $\frac{d_1}{2}$ będzie w środku, zatem na drugim reperze.

Innemi słowy: Połowę różnicy d_1 , t. j. $\frac{d_1}{2}$ otrzymaną między wysokością pierwszego repera a niwelacją, dodamy z tym samym znakiem do obliczonej z pomiaru wysokości drugiego repera; wówczas dostaniemy ustaloną wysokość tegoż repera. Gdyby były punkty pośrednie, to rozdzielimy na nie $\frac{d_1}{2}$ proporcjonalnie. Każdy pośredni punkt, będzie miał po wyrównaniu błąd M według równania (9.), w którym za W , wstawimy $\frac{d_1}{2}$.

$$\text{zatem } M = \pm \frac{d_1}{2l_1} \sqrt{1l} \dots \dots \dots (11)$$

l i l' mają tu to samo znaczenie co w równaniu (9.).

Po ustaleniu wysokości drugiego repera, przeprowadzamy w ten sposób niwelację między nim, a trzecim.

Z tego, cośmy omówili w ustępie C i niniejszym, wynika, że: każdy z reperów ma przedewszystkiem swój własny błąd, wynikający z własnej średniej arytmetycznej, o wartości ogólnej ujętej równaniem

$$M_1 = \pm \frac{d}{2} \dots \dots \dots (12)$$

Następnie, błąd z ogólnej niwelacji całej linii, według równania (5.) charakteryzujący dokładność tej niwelacji jako całości.

Prócz tego, poszczególne punkty między reperami będą wyrównane przez rozdzielenie różnic d_1, d_2, \dots proporcjonalnie do długości.

Pewne podejrzenie wzbudza tylko równanie (5.):

$$M = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{l} \right]}$$

odnoszące się do niwelacji całej linii, pod tym względem, że podział n części jest dowolny. Przy podwójnej ilości części, jakkolwiek poszczególne l_1, l_2, \dots byłyby mniejsze, lecz zarazem d_1, d_2, \dots mogłyby być, zależnie od przypadku takie, że i rezultat obliczenia M , wypadłby, dla tej samej zresztą niwelacji, inaczej. Jest to zupełnie możliwe, lecz o ile poszczególne „ d “ leżą w granicach dozwolonych, to i niwelacja, mimo nieco odmiennego M , będzie dobrą. Podobnie miałyby się rzecz, gdyby przeprowadzono dwie niezależne niwelacje na tej samej linii. Obie mogłyby być dobre, chociażby miały pewne różnice i inne M , utrzymujące się jednak w granicach dozwolonych.

Wzór (5.) miałby najlepsze wyniki wtedy, gdyby było tyle części l_1, l_2, \dots, l_n ile jest przestawień instrumentu, czyli, tyleż reperów. Praktycznej jednak wartości by to nie miało, bo przy odpowiednim nakładzie pracy i staranności, zawsze otrzymamy rezultaty bardzo do siebie zbliżone, tak, że różnice ich nie wpływają na dokładność pomiaru.

§ 5. Granice dokładności niwelacji.

Prócz olbrzymiego materiału z praktyki, będącego do dyspozycji w celu określenia granicy, do jakiej dokładność niwelacji bez nadzwyczajnego nakładu pracy, dochodzi, badano także w pracowniach geodezyjnych zależność błędów od różnych wpływów, ażeby granice dokładności określić teoretycznie.

Na błędy w niwelacji mają wpływ:

Podział łaty na centymetry lub półcentymetry, długość celowej, czułość libelli powiększenie lunety, jasność obrazu, szacowanie odczytu w milimetrach, przyjąwszy, że łąta ustawiana jest zawsze pionowo.

Opuszczając opis doświadczeń i teoretyczne wywody, przytaczamy następujący wzór, mający określać prawo błędów w niwelacji:

$$M = k \cdot \sqrt{L} \dots \dots \dots (1)$$

gdzie wstawiając $k = 0.0832$ i $L = 1000$ m, otrzymamy

$$M = 2.5 \text{ mm na } 1 \text{ km} \dots \dots \dots (2)$$

odpowiadający powiększeniu lunety $v = 37$ krotnemu.

Podobnie, wzorowi $M_1 = \frac{16}{\sqrt{v}}$ odpowiada:

Dla v (powiększenia lunety):	20	30	40	50	
Błąd niwelacyjny na 1 km:	3.6	2.9	2.5	2.3	mm . (3)

Według Kummera, popełnia się, zależnie od długości celowej, następujące błędy, przy 30 krotnym powiększeniu lunety:

Długość celowej	$l = 25$ m	50	75	100	125 m
Błąd w odczycie	$\mu = 0.3$	0.42	0.54	0.67	0.79 mm
Błąd celowej	$\alpha'' = 2.5''$	1.7''	1.5''	1.4''	1.3''

Dla długości celowych praktycznie dobrze dobranych między 60 a 80 m odpowiada powyższe zestawienie błędowi 2 mm na 1 km. Okazało się również, że najmniejsze błędy powstają wówczas, gdy celową nastawia się na połowę pala najbliższego centymetra i uwzględni się poprawkę nachylenia celowej, rachunkiem, o czym już mówiliśmy poprzednio.

Na podstawie bardzo licznych przykładów z praktyki, możemy ostatecznie przyjąć, że niwelacja, której odpowiada błąd $\sqrt{10}$ mm na 1 km, t. j. 3.2 mm na 1 km, jest bardzo dobrą i ta granica da się nietrudno osiągnąć.

Jednym z najważniejszych czynników wpływających na błędy niwelacji, jest podział łaty. Na tę okoliczność należy zwrócić szczególną uwagę i łątę najtroskliwiej zbadać, zanim się ją kupi, a tembardziej użyje do pomiarów.

Przy odczytach wprzód i wstecz, należy zawsze używać podstawki pod łątę, którą łatwo sporządzić z kawałka blachy 5 do 6 mm grubej, kształtu trójkąta równobocznego, o bokach 20 cm długich. Trzy ostrza kątów zagina się na długość około 6 cm, w środku nituje się głowę dużego nita 30 mm średnicy, na której ustawia się łątę, fig. 117.



Instrument powinno się ustawiać na twardym gruncie, na statywie szeroko rozpartym i silnie wciśniętym w ziemię.

Łata powinna być zawsze zaopatrzoną w pion.



Fig. 117.

Używać należy zawsze parasola do ochrony instrumentu przed silnym ogrzewaniem przez słońce. W godzinach południowych, podczas upału, powinno się pracę przerwać, bo wówczas wibracja powietrza skutkiem silnego parowania, uniemożliwia odczyty.

Wreszcie: to wszystko, co w niniejszym rozdziale przytoczono o niwelacji, wystarczy w zakresie zadań, jakie mamy przed sobą. Nie omawiamy tu ściślej niwelacji sieci punktów stałych, zakładanej przy pomiarach kraju, ani też wyrównania jej.

ROZDZIAŁ VIII.

§ 1. Instrument uniwersalny.

Instrument ten jest urządzony do pomiaru kątów poziomych i pionowych, nadto zaś także jako instrument niwelacyjny. Fig. 118. i 119. przedstawiają ten instrument z tą tylko odmianą, że na fig. 118. mamy libelkę nasadkową, dającą się łatwo zdejmować i przekładać 180°; na fig. 119. natomiast mamy libelkę stale na lunecie

osadzoną, lecz za to z t. z. rewersyjną, t. z. szkło libelli jest tak od góry jak dołu widzialne i posiada dwie podziałki. Po obróceniu lunety około osi poziomej, libella znajdzie się pod lunetą, a wówczas dolna podziałka i bańka są widoczne z góry.

Inny typ tego instrumentu ma znów i lunetę i libellę do przekładania, gdy tymczasem w obu powyższych luneta jest osadzona na osi poziomej i wprawdzie da się wyjąć z łożysk, ale już wraz z osią, po odpowiedniem zdemontowaniu, zatem z pewną trudnością.

Limbus może być stały, albo też daje się, podobnie jak alhidada, obracać.

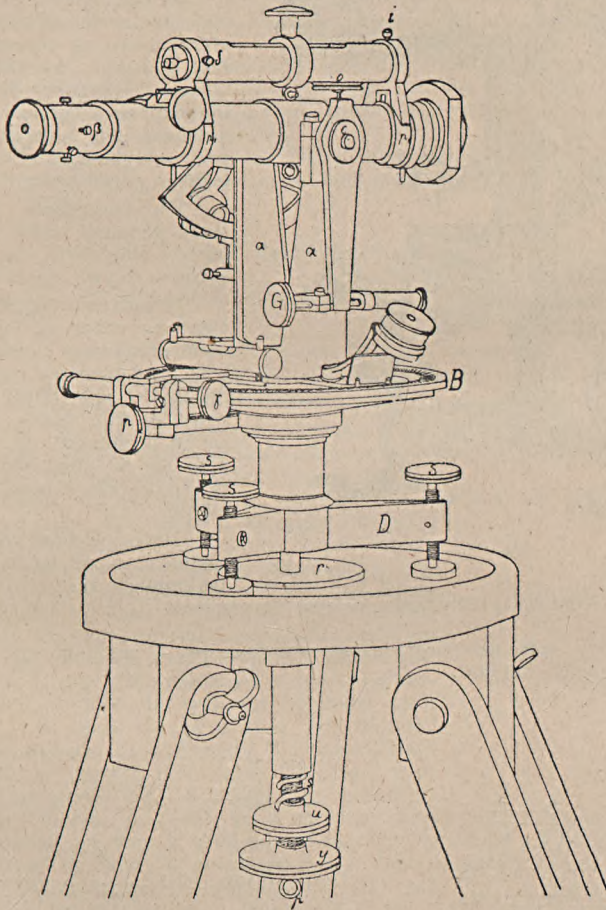


Fig. 118.

Do tego instrumentu używa się zwykle krążkowego statywu, jak na fig. 118. Śrubę *p r* znamy już z poprzedniego opisu. Koniec jej *r* służy do umocowania spodarki, kółko *p* lub haczyk do zawieszania pionu na cienkim sznurku.

Spodarka *D* jest trójramienna z trzema śrubami wstawowemi *s* do ustawiania instrumentu. Limbus *B* jest podzielony na 360° , te zaś mają jeszcze drobniejszy podział na 10, 15 lub 20 minut. Jeżeli limbus jest obracalny, to instrument taki nazywamy repetycyjnym. Wówczas alhidada daje się związać z limbem na 0° , co jest potrzebnem przy niektórych metodach pomiaru kątów poziomych.

Na limbusie obraca się około osi pionowej, t. j. osi instrumentu, alhidada, opatrzona dwoma ramionami, na których znajdują się noniusze, wraz z lupami, służące do odczytów kątów poziomych. Dwie libelki krzyżowe na alhidadzie służą do ustawiania instrumentu w przybliżeniu. Śruba przy limbusie służy do sprzęgnięcia spodarki z limbusem, a śruba γ (fig. 118.) do wykonywania t. z. leniwych ruchów alhidady po sprzęgnięciu jej z limbusem.

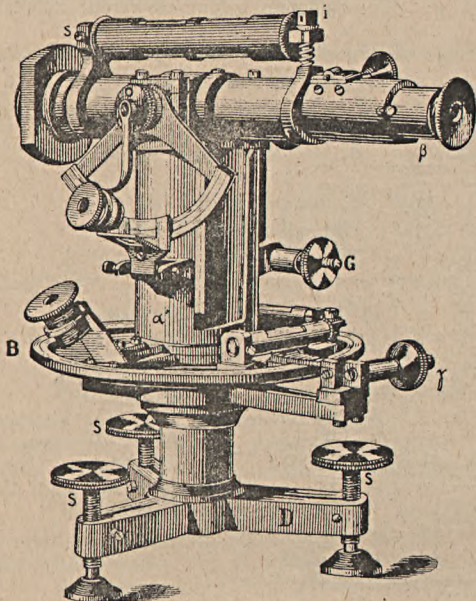


Fig. 119.

pionowego. Noniusz przytwierdzony jest do ramienia α . Lupa ma ułatwiać odczytanie kąta.

Niekiedy instrument posiada całe koło pionowe i dwa noniusze, niekiedy tylko część koła i jeden noniusz.

W ramionach $\alpha\alpha$ umieszczona jest luneta na osi poziomej, około której może się obracać w płaszczyźnie pionowej. Łożyska, w których obraca się pozioma oś lunety, są tak urządzone, że jedno z nich daje się podnosić, gdy tego zajdzie potrzeba przy rektyfikacji. Urządzenie tego łożyska przedstawia fig. 120.

Do sprzęgnięcia osi poziomej, służy podobna śruba jak przy limbusie i alhidadzie, do leniwych zaś ruchów, używa się śruby G.

Urządzenie lunety i libelli niczem nie różni się od znanych już nam urządzeń. Siatka ma zawsze trzy nitki poziome i jedną pionową. Śrubki $\delta\delta$ przy libelli służą do przesuwania tego końca libelli w kierunku poziomym, aż oś libelli znajdzie się w płaszczyźnie pionowej, razem z osią lunety i osią instrumentu.

Na osi C umieszczone jest koło pionowe, z podziałem podobnym jak na limbusie, służące do pomiaru kąta

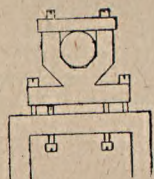


Fig. 120.

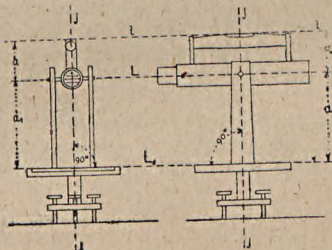


Fig. 121.

Instrument uniwersalny odpowiadać powinien następującym warunkom, przedstawionym graficznie na fig. 121.:

1. Oś celowa powinna być identyczną z osią geometryczną lunety.
2. Oś libelli I—I powinna być równoległą do osi celowej C—G.
3. Płaszczyzna limbusu L—L równoległa do osi libelli.

4. Oś instrumentu I—I prostopadła do limbusu.
5. Oś celowa, zatem i geometryczna, powinny się przecinać z osią instrumentu.
6. Oś obrotu lunety p—p (oś pozioma) powinna być równoległa do limbusu.
7. Oś celowa (i geometryczna) powinna być prostopadłą do osi poziomej p—p.
8. Oś instrumentu I—I powinna przechodzić przez środek limbusu — w przeciwnym razie powstaje t. z. ekscentryczność lunety, mająca wpływ na pomiar kąta poziomego.

9. Noniusze powinny być centrycznie osadzone.
10. Podział limbusu powinien być dokładny.
11. Pierścienie na lunecie, na które nasadza się libellę, powinny mieć dokładnie równe średnice.

Warunki 1., 2., 3., 6. i 7. dadzą się zawsze zachować, względnie można instrument odpowiednio zrektyfikować. Inne powinny być już w fabryce, przy budowie instrumentu uwzględnione, bo później po części nie dadzą się zrektyfikować po sprawdzeniu błędów, albo bardzo trudno.

Później zobaczymy, że niektóre błędy w urządzeniu instrumentu nie będą wpływały na błąd pomiaru, a to skutkiem odpowiedniej metody wykonywania pomiarów.

§ 2. Rektyfikacja.

Warunek 1. i 2.: Oś celowa powinna być identyczną z osią lunety oraz równoległą do osi libelli

Zależnie od typu instrumentu, możemy tu mieć następujące wypadki:

a) Luneta do przekładania, libella także, jako nasadkowa. Rektyfikację przeprowadzimy tak, jak przy instrumencie niwelacyjnym typu III.

b) Luneta stale na osi poziomej osadzona. W takim razie trzebaby lunetę wyjąć razem z osią z łożysk i obrócić około osi geometrycznej, co jednak jest trudniejszą rzeczą. Możemy więc postąpić inaczej, mianowicie:

Jeżeli libelka jest nasadkowa, to sprowadzimy najpierw oś libelli do równoległości z osią lunety. W tym celu ułożymy libellę na lunecie, t. j. na pierścieniach do tego przeznaczonych, a mających równe średnice, lunetę sprowadzimy od ręki do położenia ile możności poziomego według libelli, następnie sprzgniemy silnie oś poziomą i za pomocą śruby do ruchu leniwego, sprowadzimy środek bańki do punktu zerowego, skutkiem czego oś libelli zajmie położenie poziome II, fig. 122., natomiast oś lunety położenie LL. Nierównoległość obu tych osi pochodzi stąd, że ramiona R_1 i R_2 libelli nie są równe. Nie ruszając lunety, zdejmijmy libellę i przelóżmy ją. Wówczas krótsze ramie przyjdzie w miejsce pierwotnie dłuższego, a oś libelli zajmie położenie $l_1 l_1$. Sprowadzimy powtórnie środek bańki do punktu zerowego, czyli obróćmy lunetę wraz z libellą około osi poziomej instrumentu, za pomocą śruby G, o kąt α , to oś libelli przyjdzie w położenie poziome ll — zaś oś lunety w położenie $L_1 L_1$. Już z rysunku widać, że oś lunety powinna zajmować położenie pośrednie między LL a $L_1 L_1$. Za pomocą więc śruby G obróćmy lunetę o połowę kąta w położenie $L_0 L_0$, a że teraz środek bańki wyjdzie z punktu zerowego, więc sprowadzimy go doń za pomocą śrubki „i“.

Celem ułatwienia, odczytamy kąt na kole pionowym, gdy luneta jest w położeniu LL, potem w $L_1 L_1$ — wreszcie nastawimy ją śrubą G tak, by noniusz wskazywał na kąt wynoszący połowę różnicy obu odczytów, czyli na średnią arytmetyczną. Doświadczenie to trzeba powtórzyć 3 do 4 razy, dopóki po przełożeniu libelli nie będzie żadnej odchyłki bańki.

Po zrektyfikowaniu osi libelli względem osi lunety, nie możemy już operować śrubką „i“, bo zniweczylibyśmy tę rektyfikację.

Teraz przystąpimy do rektyfikacji osi celowej względem osi libelli.

Przełożenie libelli nie da nam teraz żadnej wskazówki, bo libella będzie w obu położeniach wskazywała poziom.

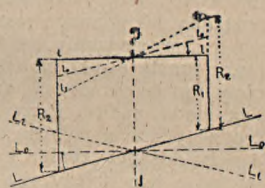


Fig. 122.

Przypuśćmy, że oś celowa $C_1 C_1$ fig. 123. przecina się z osią lunety GG, lecz nie jest identyczną z nią. Ustawmy więc libellę II poziomo i odczytajmy na łacie, ustawionej w odległości około 100 m, n. p. stan 2056 mm. Obróćmy alhidadę o 180° , zatem okular w przeciwną stronę od łaty, zdejmijmy libellę i wkońcu obróćmy lunetę około osi poziomej zwolniwszy sprzęg.

Nałożywszy znowu libellę, sprzęgniemy lunetę silnie na osi poziomej i sprowadzimy bańkę do punktu zerowego za pomocą obrotu lunety śrubą G. Wtedy celowa wskaże odczyt n. p. 1824 mm. Konstrukcja rysunku wykazuje już jasno, że celowa leżeć powinna po środku, t. j. dać odczyt $\frac{2056 + 1824}{2} = 1940$. Ponieważ li-

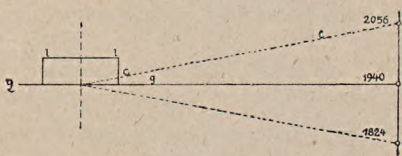


Fig. 123.

bella była już zrektifikowaną, więc nie możemy nastawić lunety na ten nowy odczyt śrubą G, bo wówczas libella nie byłaby poziomą i musielibyśmy ją poprawić za pomocą śrubki „i“, co by nam popsuło poprzednią rektyfikację. Pozostaje tylko przesunięcie siatki za pomocą śrubek „s“. Tak też postąpimy, zwolnimy w tym wypadku górną śrubkę a przyciągniemy dolną, aż środek siatki padnie na odczyt 1940.

Także i to doświadczenie potrzeba powtórzyć, dopóki nie dostaniemy zupełnej zgodności.

Przyjęliśmy wyżej, że oś celowa przecinała się z osią lunety, skutkiem czego łatwo sprowadziliśmy je do identyczności. Jak jednak przekonamy się o tej identyczności, względnie, jak przeprowadzimy rektyfikację, gdy osie te się nie przecinają?

Ażeby się przekonać, czy oś geometryczna i celowa schodzą się, wystarczy, po przeprowadzeniu opisanej rektyfikacji, ustawić łatę w dwa razy większej odległości i odczytać ją raz w położeniu normalnym lunety, drugi raz po przrzuconiu jej. Jeżeli odczyty są zgodne, to i osie są zgodne. W przeciwnym razie, możliwym jest, że albo oś lunety nie przecina się z osią poziomą, albo oś celowa leży niżej lub wyżej. Wtedy kierujemy lunetę na jakiś odległy punkt i przeprowadzamy poprzednią rektyfikację jeszcze raz, t. z.:

Sprowadzamy bańkę do zera, zauważymy jakiś odległy, wyraźnie widzialny przez lunetę punkt, potem zdejmijmy libellę, obróćmy alhidadę o 180° , wkońcu obróćmy lunetę około osi poziomej, nałożymy libellę i sprowadzimy ją do poziomu. Środek siatki padnie teraz na jakiś inny punkt, więc przesuniemy siatkę tak, by jej środek padał w połowie odległości obu poprzednich punktów. Po powtórzeniu 2 do 3 razy doświadczenia, będziemy mieli oś celową równoległą do osi lunety, lecz pamiętać o tem należy, że przy niwelacji musi być luneta zawsze w tem samym położeniu, nie wolno jej przerzucać.

U w a g a :

W praktyce, pierwszą część rektyfikacji, t. j. osi libelli z osią lunety możemy ułatwić w ten sposób, że przed przełożeniem i po przełożeniu libelli, odczytamy łatę, zamiast kąta na kole pionowym, poczem połowę błędu usuniemy, nastawiając lunetę śrubą G na średni odczyt, resztę śrubką „i“, jak poprzednio. Potem zrektifikujemy oś celową za pomocą przesunięcia siatki, czego nie trzeba mieszać z pierwszą częścią rektyfikacji.

c) Luneta stale na osi poziomej osadzona jak pod b), libella także stale utwierdzona na lunecie, ale rewersyjna.

Taki instrument posiada zawsze drugą, zapasową libellę nasadkową, dającą się ustawić na lunecie. Nie zważając na razie na stałą libellę, zrektifikujemy oś libelli nasadkowej względem osi lunety zupełnie tak samo jak pod b), poczem poprawimy oś libelli stałej za pomocą śrubki „i“, t. j. doprowadzimy ją do zgodności z libellą nasadkową.

Gdy już oś stałej libelli jest równoległa do osi lunety, przystąpimy do rektyfikacji osi celowej względem osi libelli, mianowicie:

Wykierujemy lunetę na łatę ustawioną w odległości około 100 m, sprowadzimy środek bańki do zera i odczytamy łatę; następnie, obróćmy alhidadę o 180° , obró-

cimy lunetę około osi poziomej i sprowadziwszy bańkę do zera za pomocą śruby G, znowu odczytamy łatę. Jeżeli drugi odczyt nie zgadza się z pierwszym, wówczas przesuniemy siatkę w kierunku pionowym za pomocą śrubek s tak, ażeby środek siatki padł na średni, z obu odczytów na łatę. Powtórzywszy to doświadczenie, aż odczyty będą zupełnie zgodne, przesuniemy łatę dalej i skontrolujemy rektyfikację. Jeżeli odczyty na łatę okażą się znowu niezgodne, to jest znakiem, że oś celowa nie przecina się z osią lunety, lecz leży niżej lub wyżej. W tym wypadku powtórzymy rektyfikację za pomocą obserwacji odległego punktu, jak pod b).

Przypuszczamy przytem, że libella rewersyjna jest zupełnie dobrą, t. j. obie jej osie, za jakie przyjmujemy styczne do krzywizny libelli w punktach zerowych, są równoległe.

Warunek 3.: Płaszczyzna limbusu ma być równoległą do osi celowej.

Ustawiamy lunetę równoległe do dwóch śrub wstawowych, sprowadzamy bańkę libelli do zera, poczem obracamy alhidadę o 180° , t. j. lunetę w tem położeniu ustawiamy także równoległe do tych samych śrub. Jeżeli środek bańki wychylił się, to odczytujemy jego nowe położenie. Ponieważ oś libelli i celowa są już zrektyfikowane, więc nie można przesuwac ani siatki, ani śrubki „i“. Natomiast mamy śrubę G, zastępującą tu śrubę elewacyjną i śrubę wstawową. Za pomocą pierwszej nachylamy oś libelli o połowę kąta, t. j. przesuniemy bańkę o połowę poprzedniego wychylenia, o resztę zaś za pomocą śruby wstawowej. W ten sposób jedna linia na limbusie byłaby równoległą do osi libelli. Ażeby odpowiednio ustawić jeszcze drugą linię, obrócimy alhidadę o 90° i trzecią śrubą wstawową sprowadzimy środek bańki do zera. Całą tę operację trzeba jeszcze raz powtórzyć, poczem płaszczyzna limbusu będzie równoległą do osi libelli, a obracając alhidadę w koło, przekonamy się, że bańka libelli pozostaje zawsze w punkcie zerowym.

Na alhidadzie znajdują się jeszcze dwie małe libelki krzyżowe. Gdy już limbus ustawimy równoległe do osi libelli na lunecie, wówczas za pomocą śrubek „i“, zrektyfikujemy obie libelki krzyżowe do zgodności z główną libellą.

Wskutek poprawek wykonywanych za pomocą śruby G, zajmie koło pionowe takie położenie, że punkt zerowy podziału na kole przesunie się względem odpowiedniej wskazówki na noniuszu, czyli, przy poziomej osi celowej, noniusz wskazywać będzie jakiś kąt, zamiast $0^\circ 0' 0''$. Dlatego, przy pomocy odpowiednich śrubek przesuniemy noniusz na właściwe miejsce.

Poprzednio wspomnieliśmy, że pierścienie na lunecie, na które nasadza się libellę, powinny mieć równe średnie. Ażeby się o tem przekonać, wyjmujemy lunetę wraz z osią z łożysk i układamy ją na stałej podstawie w specjalnie urządzonych dźwigarkach. Następnie nasadzamy libellę i odczytujemy środek bańki s_1 . Potem przekładamy libellę i odczytujemy nowe s_2 . Wkońcu przekładamy lunetę w dźwigarkach o 180° i w ten sam sposób odczytamy s_3 i s_4 . Jeżeli pierścienie są równe, to $s_1 + s_2 = s_3 + s_4$. W przeciwnym razie będzie to znakiem, że średnice pierścieni nie są równe, a wówczas poprawa ich jest prawie niemożliwa, bo n. p. naklejanie na pierścieniu pasków cienkiego papieru i t. p. jest i trudne i nie przedstawia trwałości.

Warunek 4.: t. j. że oś instrumentu II powinna być prostopadłą do płaszczyzny limbusu, powinien być zachowany przy budowie instrumentu, w fabryce.

Warunek 5.: Oś celowa będzie się przecinała z osią instrumentu II wtedy, gdy jest identyczną z osią lunety, oraz gdy luneta jest centrycznie osadzoną, bo wówczas oś lunety musi się przecinać z osią instrumentu. O ekscentryczności lunety mówić będziemy przy warunku 8.

Warunek 6.: Oś pozioma, t. j. oś obrotu lunety pp, powinna być równoległą do limbusu.

Ażeby się przekonać, czy ten warunek istnieje, postępujemy w następujący sposób:

Ustawiamy limbus poziomo i kierujemy środek siatki albo na krawędź muru wysokiego budynku, albo na długi sznur, uczepiony na drzewie i obciążony ciężarem, czyli pion. Opuszczając powoli lunetę wzdłuż jednego lub drugiego pionu, badamy, czy środek siatki zeń nie schodzi. Jeżeli zejdzie, to będzie dowodem, że płaszczyzna, jaką oś celowa zakreśliła, nie jest pionową, czyli oś obrotu lunety nie jest równoległą do limbusu. Wówczas trzeba jeden koniec osi, względnie łożyska podnieść lub obniżyć, co łatwo uskutecznić za pomocą odpowiednich śrubek, przedstawionych na fig. 120.

Rektyfikację powyższą można jeszcze za pomocą innych sposobów przeprowadzić, mianowicie:

Ustawmy dość szerokie naczynie z wodą, w którym, jak w zwierciadle odbija się obraz jakiegoś wysokiego punktu. Wycelujmy lunetę, po ustawieniu limbusu poziomo, na ten punkt tak, by środek siatki padał nań dokładnie, następnie obróćmy lunetę około osi poziomej i zbadajmy, czy środek siatki pada na obraz punktu. Jeżeli spostrzeczemy zboczenie, to łożysko osi uregulować musimy w ten sposób, by zboczenie znikło.

Inny sposób polega na tem, że po ustawieniu limbusu do poziomu, celujemy do jakiegoś wyraźnego, wysoko położonego punktu P, fig. 124. — potem obniżamy lunetę i odczytujemy na łacie, ułożonej na ziemi w odległości około 20 m równoległe do osi pp, punkt P_1 . Obróćmy teraz alhidadę o 180° , a lunetę około osi poziomej i skierujmy znowu środek siatki na punkt P, następnie odczytamy na łacie punkt P_2 .

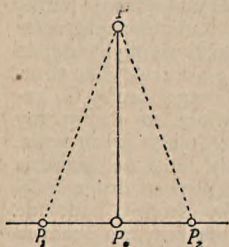


Fig. 124.

Łatwo zrozumieć, że właściwym odczytem powinien być punkt P_0 leżący w środku między P_1 i P_2 . Zatem uregulujemy odpowiednio oś poziomą, ażeby środek siatki padał na ten punkt P_0 .

Warunek 7.: Oś celowa powinna być prostopadłą do osi poziomej pp, czyli osi obrotu lunety — w przeciwnym razie powstaje t. z. błąd kolimacyjny.

Tę rektyfikację uskutecznić możemy w następujące dwa sposoby:

1. Obierzmy na dogodnym, równym terenie, n. p. na kraju prostej drogi punkt A, wbijmy tam palik i oznaczmy na nim punkt, za pomocą gwoździa o małej główce. Ustawmy nad tym punktem instrument (o ustawieniu instrumentu nad punktem mówić będziemy w innym miejscu) i obierzmy najpierw punkt B w odległości 200 do 300 m, oznaczysz go w ten sam sposób. Na punkcie B, t. j. na gwoździu ustawi pomocnik tyczkę, a teraz skierujmy lunetę tak, by środek siatki padał dokładnie na ostrze tyczki jak najniżej, przyczem alhidada musi być silnie sprężona z limbusem, drobne zaś przesunięcia wykonamy śrubą do ruchu leniwego. Gdy kierunek celowej ustalimy, wtedy pomocnik z tyczką idzie na odległość 200 do 250 m dalej i ustawia się mniej więcej na przedłużeniu linii AB. Patrząc przez lunetę kierujemy go dokładniej w lewo lub w prawo za pomocą znaków, aż wreszcie tyczka znajdzie się na właściwym kierunku. W tym punkcie wbija pomocnik palik, potem ustawia tyczkę na paliku, a za pomocą lunety i znaków, przesuniemy tyczkę już na wierzchu palika tak, by ostrze jej leżało dokładnie na przedłużonej linii AB. W tym punkcie wbija się gwoździe. Mamy więc trzy punkty ABC oznaczone gwoździami i leżące bezwątpienia na osi celowej, czyli w jednej linii dokładnie.



Fig. 125.

Instrument przeniesiemy teraz na punkt B, fig. 125., ustawimy go nad nim i do poziomu, skierujemy środek siatki na tyczkę

trzymaną w punkcie A, sprężniemy silnie alhidadę, poczem obrócimy lunetę około osi poziomej. Jeżeli błędu kolimacyjnego nie ma, to środek siatki będzie padał dokładnie na ostrze tyczki w punkcie C.

Przypuśćmy jednak, że błąd istnieje, czyli oś obrotu ma kierunek $p_1 p_2$ a oś celowa kierunek BC_1 . Łatwo poznać, że gdy oś $p_1 p_2$ jest odchylona o kąt α od właściwego swego kierunku pp, to oś celowa BC_1 odchyła się o 2α . Punkt C_1 wytoczmy więc dokładnie tak, jak punkt C, zmierzmy odległość CC_1 i w środku jej, w punkcie C_2 ustawimy tyczkę na paliku. Teraz, nie ruszając lunety, przesuniemy siatkę za pomocą poziomych śrubek $\beta\beta$ (fig. 118.) aż jej środek padnie na ostrze tyczki w punkcie C_2 — a wkońcu, za pomocą śruby do ruchu leniwego, obrócimy nieco alhidadę i skierujemy środek siatki na punkt C. Wskutek przesunięcia siatki, obróciliśmy oś celową o kąt α , t. j. z kierunku BC_1 do BC_2 , przez obrót zaś alhidady obróciliśmy oś $p_1 p_2$ w położenie pp prostopadłe do AC i o tenże sam kąt α oś ce-

lową, w kierunku linii AC. Jeżeli teraz, dla kontroli, obrócimy lunetę około osi poziomej pp — to środek siatki padnie już dokładnie na punkt A — w razie potrzeby, drobną poprawkę przeprowadzimy w taki sam sposób, jak poprzednio i rektyfikacya będzie skończoną.

2. Ustawmy instrument nad obranym punktem A, fig. 126. — skierujmy ją na widoczny w polu punkt B, oznaczony n. p. tyczką, sprzęgnijmy silnie alhidadę i obrócmy lunetę około osi poziomej pp, tworząc n. p. kąt α z celową AB. Po obrocie, celowa znajdzie się w położeniu AB, tworząc z osią pp ten sam kąt α jak poprzednio. Punkt B, oznaczmy tyczką, zwolnimy sprzęg alhidady i obrócmy ją około osi pionowej po limbusie, kierując lunetę napowrót na punkt B, poczem znowu sprzęgniemy alhidadę z limbusem.

Z rysunku łatwo poznać, że oś pozioma zajmie teraz położenie $p_1 p_1$ odchylone od poprzedniego o kąt β — jednak kąt α między osią $p_1 p_1$ a celową AB pozostanie, jak dotąd, niezmienny. Obrócmy lunetę około osi poziomej $p_1 p_1$ to przyjdzie ona w położeniu AB₂ — punkt B zaznaczmy tyczką.

Nie ulega wątpliwości, jak to zresztą rysunek pokazuje, że gdy oś $p_1 p_1$ obrócimy tak, że przepołowi kąt β między kierunkiem $p_1 p_1$ a pp, to będzie prostopadłą do linii AB — razem z osią obróci się także celowa AB₂ i zajmie położenie AB₄ połowiąc kąt β — musimy więc o dalsze $\frac{\beta}{2}$ obrócić celową za pomocą przesunięcia siatki, a wówczas otrzymamy kierunek AB₃ prostopadły do osi obrotu.

W praktyce postępujemy w następujący sposób: Wyznaczamy punkt B₃ w połowie drogi A₁B₂ i B₄ w połowie B₂B₃, następnie obracamy alhidadę tak, by środek siatki padł na tyczkę B₄, czyli obrócimy temsamem

oś $p_1 p_1$ o $\frac{\beta}{2}$, wreszcie przesuwamy siatkę, ażeby celowa padła na tyczkę B₃. Doświadczenie to trzeba powtórzyć, bo punkty B₄B₃ wyznaczamy na cięciwach, powtórę, w pomiarze długości i wytyczeniu pozostaje zawsze błąd, który znika po trzecim zwykle powtórzeniu rektyfikacyi.

Warunek 8.: Oś instrumentu II powinna przechodzić przez środek limbusu, a równocześnie powinna przecinać się z osią lunety i identyczną z nią osią celową, jakoteż z osią poziomą obrotu lunety. Słowem: oś pionowa instrumentu, oś pozioma i oś celowa wraz z geometryczną, powinny przecinać się w jednym punkcie, na pionowej przechodzącej przez środek limbusu, około której obraca się alhidada.

Przypuśćmy, że punkt A na fig. 127. jest środkiem limbusu, natomiast linia pionowa, przechodząca przez skrzyżowanie osi celowej z osią poziomą, nie przechodzi przez środek limbusu, czyli nie schodzi się z pionową osią instrumentu, lecz jest od niej odsunięta o ζ , zatem przy obrocie alhidady, punkt skrzyżowania tych obu osi, zakreśla koło o promieniu ζ . Ten promień ζ jest miarą ekscentryczności osadzenia lunety. Każda więc celowa jest styczną do koła ekscentryczności. Jeżeli więc przy pomiarze kąta ustawimy środek limbusu nad wierzchołkiem kąta, to oś celowa nie będzie leżała dokładnie w kierunku ramienia danego kąta, przechodzącego przez środek limbusu, lecz nieco z boku, zależnie od wielkości promienia ζ .

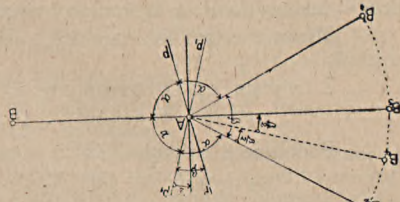


Fig. 126.

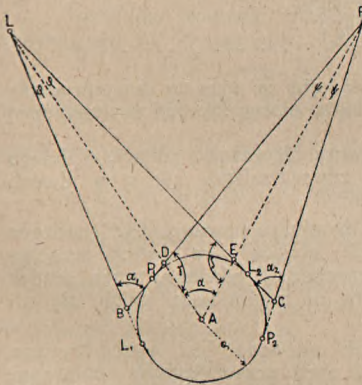


Fig. 127.

Niech linie AL i AP przedstawiają ramiona kąta $LAP = \alpha$, zaś koło o promieniu ξ ekscentryczność lunety. Mierząc kąt α , wycelujemy do punktu L, a potem do P — przyciem celowa L_1L będzie jednym ramieniem kąta, następnie celowa P_1P drugim ramieniem. Przedłużymy obie celowe do przecięcia w punkcie B, spostrzegamy, że kąt między nimi zawarty, ma wartość α_1 , podczas gdy rzeczywisty kąt jest α .

Obróćmy teraz lunetę około osi poziomej, a następnie alhidadę i skierujmy lunetę na punkt L. Wówczas celowa będzie miała położenie L_2L — podobnie P_2P druga celowa do P, a kąt między nimi zawarty będzie miał wartość α_2 .

Mierząc zatem ten sam kąt, w dwu położeniach lunety, otrzymamy nań dwie wartości α_1 i α_2 .

Z trójkąta LBD otrzymamy:

$$\alpha_1 + \varphi + \gamma = 180^\circ \dots \dots \dots (1)$$

Podobnie z trójkąta PCE:

$$\alpha_2 + \psi + \delta = 180^\circ \dots \dots \dots (2)$$

Dodajmy oba równania do siebie, to otrzymamy

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \varphi + \gamma + \psi + \delta = 360^\circ \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{czyli } \alpha_1 + \alpha_2 = 360^\circ - (\varphi + \gamma + \psi + \delta) \dots \dots \dots (4)$$

Z trójkąta LAE:

$$\varphi + \alpha + \delta = 180^\circ \dots \dots \dots (5)$$

a wreszcie z trójkąta PAD:

$$\psi + \alpha + \gamma = 180^\circ \dots \dots \dots (6)$$

z równań (5.) i (6.) po dodaniu ich dostaniemy:

$$2\alpha + \varphi + \psi + \delta + \gamma = 360^\circ \dots \dots \dots (7)$$

$$\text{czyli } 2\alpha = 360^\circ - (\varphi + \psi + \delta + \gamma) \dots \dots \dots (8)$$

zaś z porównania równań (4.) i (8.) mamy relację

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha \quad \text{a więc } \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \dots \dots \dots (9)$$

Równanie (9.) dowodzi, że z obu pomiarów kąta za pomocą ekscentrycznie osadzonej lunety, otrzymamy rzeczywistą wartość kąta, biorąc średnią arytmetyczną z obu spostrzeżeń.

W ten sposób wyeleminować można wpływ ekscentryczności lunety. Dlatego przy pomiarze kątów, zawsze mierzy się je w dwóch położeniach lunety.

Warunek 9.: Noniusze powinny być osadzone centrycznie, t. z. linia łącząca zera dwóch przeciwnych noniuszów, przechodzić powinna przez środek limbusu, czyli odczyty na noniuszach różnić się powinny o 180° .

Przypuśćmy, że alhidada jest ekscentryczna, a linia 1—2, łącząca zera przeciwnych noniuszów, nie przechodzi przez środek limbusu A, fig. 128. Po obrocie alhidady o pewien kąt, linia 1—2 zajmie położenie 1'—2' i będzie także styczną do koła ekscentryczności alhidady.

Odczytując na limbusie łuk 1—1' dostaniemy kąt α_1 — zaś z łuku 2—2' dostaniemy kąt α_2 .

Z rysunku zestawimy następujące relacje:

Połączmy punkt 1' z 2 — to:

Kąt środkowy α_1 wspiera się na łuku 1—1' — na tym samym zaś łuku wspiera się kąt obwodowy 1—2—1', stąd wynika, że kąt ten jest połową kąta środkowego. Podobnie kąt α_2 i kąt obwodowy 2'—1' 2 mają wspólny łuk.

Z trójkąta 1'B2 otrzymamy, z uwagi że kąt α jest kątem zewnętrznym:

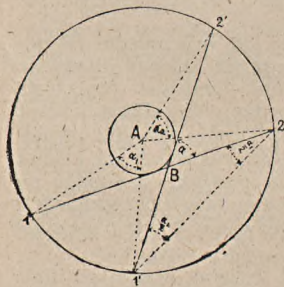


Fig. 128.

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \dots \dots \dots (10)$$

Z równania (1.) wynika, że błąd ekscentryczności alhidady wyeleminuje się za pomocą odczytu kąta na dwóch noniuszach i obliczenia z nich średniej arytmetycznej.

Gdyby instrument miał tylko jeden noniusz, to kąt mierzylibyśmy w dwóch położeniach lunety, przyczem odczytalibyśmy dwa razy noniusz, na przeciwległych częściach podziału limbusowego, skutkiem czego byłby błąd ekscentryczności alhidady usunięty — a średnia arytmetyczna obu odczytów będzie rzeczywistą wartością wolną od powyższego błędu.

Warunek 10.: Podział limbusu powinien być dokładny.

Błąd podziału limbusu poprawić się nie da i musi już pozostać. Powstaje on wskutek niejednakowych odstępów między kreskami podziałki.

Badanie podziału odbywa się w ten sposób, że za pomocą noniusza badamy odstęp kresek jeden po drugim, lub jeden i ten sam kąt mierzymy w polu różnemi miejscami łuku limbusu, porównując wyniki. Odpowiednią metodą pomiaru kąta, o czem mówić będziemy później, możemy zmniejszyć błędy w pomiarze kątów, wynikię z niedokładnego podziału.

§ 3. Noniusz.

Limbus podzielony jest na 360° , każdy zaś stopień, zależnie od wielkości średnicy limbusu, na 3 części, zatem każda podziałka odpowiada $\frac{1}{3}$ stopnia t. j. $20'$; na 4 części, zatem po $15'$; 6 części po $10'$ i t. d.

Do alhidady zaś przytwierdzony jest noniusz, posuwający się po zewnętrznym łuku limbusa. Podziałka noniusza jest nieco mniejsza od podziałki limbusa, mianowicie $(n-1)$ części limbusu, podzielone są na n części na noniuszu.

Nazwijmy jednostkę podziałki na limbusie przez L , na noniuszu przez N , to możemy ustawić następujące równanie, ze względu na równość obu łuków:

$$(n-1)L = n \cdot N \quad \text{czyli } n \cdot L - L = n \cdot N \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{stad } n(L-N) = L \quad \text{lub } L-N = \frac{L}{n} = a \dots \dots \dots (2)$$

gdzie a nazywa się wartością noniusza.

$$\text{n. p. } 9L = 10N \quad \text{czyli } L-N = \frac{L}{10} = a \dots \dots \dots (3)$$

Przypuśćmy, że stopień na limbusie podzielony jest na 4 części, po $15'$ czyli $L = 15'$,

zaś 29 części na limbusie, podzielone na 30 części na noniuszu.

W takim razie ponieważ n odnosi się do ilości przedziałek na noniuszu, otrzymamy wartość noniusza

$$\frac{L}{30} = a \quad \text{t. j. } \frac{15'}{30} = 0'5'' = 30'' = a \dots \dots \dots (4)$$

Gdy podział na limbusie ma wartość $10'$ a $n = 20$

$$\text{to } a = \frac{10}{20} = 0'5'' = 30''$$

Z takiego urządzenia noniusza wynika, że gdy któraś kreska noniusza zgadza się z jedną z kreszek na limbusie, to sąsiednia kreska przesunięta jest o a , druga o $2a$ i t. d. Przypuśćmy, że zero noniusza przesunięte jest o a od sąsiedniej kreski na limbusie, to już pierwsza kreska noniusza zgadza się z następną kreską na limbusie; jeżeli zero przesunięte jest o $2a$, to druga kreska się zgadza i t. d. Wogóle, jeżeli n. p. ósma kreska noniusza zgadza się z jakąś kreską limbusu, to zero noniusza jest przesunięte poza ostatnią po sobie kreską limbusu o $8a$. Znając wartość noniusza a , łatwo obliczymy odpowiedni kąt.

Fig. 129. przedstawia przykład podziału noniusza. Mianowicie 9 części na limbusie podzielonych jest na 10 części na noniuszu. Gdy zaś jedna przedziałka limbusu wynosi $20'$, to wartość noniusza $a = \frac{20'}{10} = 2'$. Teraz możemy odczytać kąt, jaki zero noniusza wskazuje.

Widzimy z rysunku, że zero noniusza przekroczyło $22^\circ 20'$, tudzież, że trzecia kreska noniusza, zgadza się z jedną z kresek limbusu, czyli, że zero noniusza przesunięte jest poza najbliższą kreskę na limbusie o wartość kątową $3a = 3 \cdot 2' = 6'$. Zatem kąt, jaki noniusz wskazuje, wynosi $22^\circ 26'$.

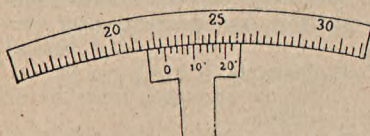


Fig. 129.

Poza zerem noniusza i przy końcu noniusza znajduje się zwykle jeszcze po jednej kresce. Służą one do dokładnego ustawiania zera noniusza na kąty, odpowiadające całym odstępom kresek na limbusie. Prócz bowiem kreski zerowej noniusza, która ma się zgadzać z pewną kreską na limbusie, mamy obok dwie kreski, które będą systematycznie nieco przesunięte względem sąsiednich kresek limbusu, co ułatwia dokładne nastawienie zera noniusza.

Jeżeli, co się z czasem zdarza, właściwie żadna kreska noniusza nie zgadza się dokładnie z którąkolwiek kreską na limbusie, wówczas przyjmujemy dwie, najbliższe leżących względem limbusowych i obliczamy z ich wartości średnią arytmetyczną.

Pomiar kąta wykonywa się zawsze w jeden i ten sam sposób, t. j. w kierunku ruchu wskazówek na zegarze.

Przedewszystkiem trzeba ustawić instrument nad punktem wierzchołkowym.

Staramy się więc instrument odrazu tak postawić, ażeby potem nie wymagał przesunięcia. Jak wiemy, przez krążek w statywie, przechodzi śruba do przymocowania

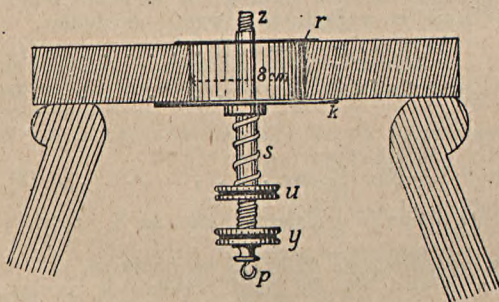


Fig. 130.

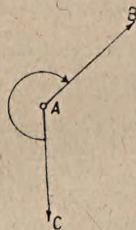


Fig. 131.

spodarki do statywu. Śruba ta, fig. 130., może się w otworze w krążku, mającym 8 cm średnicy, przesunąć we wszystkich kierunkach, a utrzymują ją dwa krążki blaszane, od góry r, od dołu k. Na haczyku p zawieszają się pion. Skoro więc ustawimy statyw nad danym punktem w ten sposób, że krążek jest w przybliżeniu poziomy, do czego używa się zwykłej libelki stolikowej, a pion znajduje się nad punktem, oznaczonym czy to gwoździem, czy dwoma przecinającymi się kreskami, wówczas umocujemy na nim instrument i ustawimy go do poziomu. Po pierwszym ustawieniu zobaczymy, że pion zboczył nieco, wówczas zwolnimy śrubę trzymającą instrument, za pomocą odkręcenia matry y i przesuniemy go na krążku, przykręcimy matry y i limbus ustawimy do poziomu. Zwykle po drugiej lub trzeciej poprawce, instrument będzie dokładnie ustawiony, tak, że jego oś pionowa, przedłużona, przechodzi przez wierzchołek kąta.

Po ustawieniu instrumentu w punkcie A, kierujemy lunetę na sygnał lub tyczkę w punkcie B ustawioną, sprzęgamy alhidadę z limbusem i za pomocą śruby dla ruchu leniwego nastawimy środek siatki na sygnał, jak najniżej, ile możności n. p. na ostrze tyczki. Potem odczytujemy noniusz I, później II. Następnie obracamy alhidadę, po zwolnieniu sprzęgu, w kierunku ruchu wskazówek na zegarze i kierujemy ją na sygnał C, odczytujemy oba noniusze i zapisujemy w protokole.

Po tym pomiarze, obraca się lunetę około osi poziomej i powtarza się pomiar w ten sam sposób. Z otrzymanej wartości kąta oblicza się średnią arytmetyczną.

Jeżeli instrument jest repetycyjny, wówczas ustawia się alhidadę dokładnie na $0^{\circ} 0' 0''$ i sprzęga się ją limbusem, lunetę wraz z limbusem zwracamy ku pierwszemu sygnałowi A, ustawiamy zrazu w przybliżeniu, potem sprzęga się limbus ze spodarką a środek siatki nastawia się na sygnał śrubą do leniwego ruchu, nie ruszając zupełnie alhidady. Po dokładnem nastawieniu, sprawdza się, czy alhidada nie była przypadkiem poruszona, zwalnia się sprzęg jej z limbusem i kieruje się lunetę na sygnał C.

Wskutek odczytywania obu noniuszów, eliminuje się, jak wiemy, błąd z powodu ekscentryczności alhidady, zaś podwójny pomiar w dwu pozycjach lunety eliminuje błąd ekscentryczności lunety. W zwykłych warunkach, taki pomiar kąta wystarcza. Dopiero przy robotach wymagających większej dokładności, jak przy pomiarze polygonów, stosujemy jeszcze metodę celem zmniejszenia błędu pomiaru z powodu niedokładnego podziału na limbusie. O tej metodzie mówić będziemy później. Przy zdjęciach tachymetrycznych, dla poszczególnych punktów nie odczytuje się nawet obu noniuszów, tylko jeden. Kąt poziomy bowiem służy li tylko do narysowania kierunku na planie w małej skali, w jakiej mały jego błąd nie da się nawet skonstatować.

ROZDZIAŁ IX.

Zdjęcia tachymetryczne.

§ 1. Pomiar długości.

Metoda tachymetryczna, co możnaby z greckiego po polsku nazwać metodą szybkich pomiarów, usprawiedliwia w rzeczywistości swoją nazwę. Nie używa się jej do pomiarów t. z. geometrycznych, t. j. do zdjęć parcel i wogóle planów katastralnych, natomiast w zdjęciach topograficznych, zwłaszcza, gdy przygotowano dla niej odpowiednią podstawę, oddaje, tak skutkiem swej szybkości, jak i dokładności, ogromne usługi. Z jednego n. p. punktu, o ile konfiguracja terenu dozwala, można zdjąć wszystkie punkty terenu, tak co do ich położenia w planie, jak i wysokości, w promieniu 300 do 400 m, nie ruszając się ze stanowiska instrumentu. Błędy, jakie są możliwe zawsze przy pomiarach, są tu zawsze lokalne, n. p. błąd w pewnym punkcie, nie ma wpływu na błąd pomiaru innego punktu. Potrzebna jest tylko pewna wprawa i systematyczność w pracy.

W dalszym ciągu przedstawimy metodę zdjęć tachymetrycznych za pomocą zwykłego instrumentu uniwersalnego, który dopiero co we wszystkich szczegółach poznaliśmy, i łaty niwelacyjnej. Zacniemy od pomiaru długości, wspominając tylko, że pomiar długości i wysokości wykonywa się równocześnie za pomocą tych samych odczytów na łacie.

Siatka w lunecie instrumentu składa się z trzech nitek poziomych, stale umocowanych w równych od siebie odstępach. Nazwijmy odstęp skrajnych nitek przez p , to ponieważ odstęp ten jest stały, więc i wielkość obrazu niemi ograniczona, będzie zawsze równą p i niezmienną, podczas gdy celowe, przechodzące przez obie skrajne nitki, odcinają na łacie długości l_1, l_2, l_3, \dots coraz większe, w miarę odległości od instrumentu (fig. 132.). Wielkość odcinków na łacie l_1, l_2, l_3 jest wprost proporcjonalna do odległości D_1, D_2, D_3, \dots

Oznaczmy: przez p . . . odstęp skrajnych nitek siatki,
 f . . . odległość ogniskową obiektywu,
 d . . . odległość obrazu od obiektywu,
 D . . . odległość łaty od obiektywu,

to możemy ułożyć proporcję:

$$p : d = 1 : D \dots \dots \dots (1)$$

gdzie d jest zmienne, zależnie od D.

Związek pomiędzy powyższymi ilościami określa optyka równaniem:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \dots \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{z równania (1.) otrzymamy: } \frac{1}{d} = \frac{1}{p \cdot D} \\ \text{i podobnie z równania (2.) } \frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

zatem $\frac{1}{p \cdot D} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} = \frac{D-f}{f \cdot D}$ czyli

$$\frac{1}{p} = \frac{D-f}{f} \quad \text{a stąd } D-f = \frac{f}{p} \cdot l \dots \dots \dots (4)$$

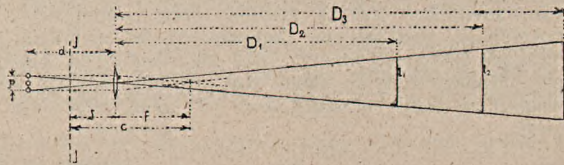


Fig. 132.

Równanie (4.) otrzymaliśmy dla lunety pojedynczej. Dla innych konstrukcji, otrzymamy nieco odmienny wzór, na związek między D i l ale podobnej formy.

Ostatecznie z równania (4.) otrzymamy:

$$D = \frac{f}{p} \cdot l + f = K \cdot l + f \dots \dots \dots (5)$$

t. j. odległość łaty od obiektywu równą jest stałej K pomnożonej przez wartość odcinka l na łacie, zawartego między skrajnemi celowemi, plus odległość ogniskowa f. Równanie to odnosi się do wypadku, gdy średnia celowa jest prostopadła do łaty, n. p. gdy jest pozioma, a łata pionowa.

Ponieważ f i p są dla tej samej lunety ilościami stałemi, więc iloraz ich $\frac{f}{p}$ jest ilością stałą K. Przy urządzeniu siatki dobiera się zawsze wielkość p tak, ażeby K było okrągłą ilością, n. p. K = 100 lub 200

Odległość mierzymy zawsze od danego punktu, na którym stoi łata, do środka instrumentu, ustawionego nad pewnym punktem, którego położenie jest określone, a nie do obiektywu. Dlatego do obu stron równania (5.) dodać należy odpowiednią ilość δ , a więc:

$$L = D + \delta = K l + \delta + f \dots \dots \dots (6)$$

a ponieważ δ i f są ilościami stałemi, więc nazwijmy $\delta + f = e$, a stąd równanie (6.) będzie miało kształt

$$L = K l + e \dots \dots \dots (7)$$

gdzie L jest odległością łaty od środka instrumentu. Stałą ilość e można przyjąć w średniej wartości $e = 0.5$ m, lub też zupełnie ją opuścić, a wówczas mielibyśmy uproszczony wzór:

$$L = K l \dots \dots \dots (8)$$

Dla danego instrumentu można ilość e łatwo oznaczyć: wyjawszy obiektyw, zwrócimy go do słońca, rzucając obraz słońca na papier. Gdy znajdziemy taką od-

ległość szkła od papieru, że ten zaczyna się palić, to będzie ona równą f ; co można wprost zmierzyć podziałką.

Najprostszym sposobem stałego uwzględnienia wartości c na planie, jest: naznaczymy raz na zawsze na podziałce nowe O , odległe o δ od punktu początkowego, czyli powiększymy wszystkie odcinki na planie mierzone, niejako automatycznie o δ .

Stałą K możnaby obliczyć jako iloraz $K = \frac{f}{p}$ lecz, że pomiar tych ilości z dostateczną dokładnością jest trudny, więc K wyznaczmy zwykle w następujący sposób:

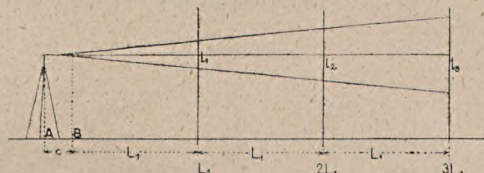


Fig. 133.

Ustawiamy instrument w punkcie A , fig. 133., odmierzymy od środka instrumentu najpierw $AB = c$, następnie długości $L_1, L_2 = 2L_1, L_3 = 2L_2$ i t. d., n. p. co 50 m. W tych punktach $CDE \dots$ stawia figurant łąkę, na której odczytamy po kolei $l_1, l_2, l_3 \dots$.

Na podstawie wiadomych $L_1, L_2 \dots$ i $l_1, l_2 \dots$ obliczymy z równania (7.):

$$\begin{aligned} L_1 + c &= K_1 l_1 + c && \text{czyli } K_1 = \frac{L_1}{l_1} \\ L_2 + c &= K_2 l_2 + c && \text{„ } K_2 = \frac{L_2}{l_2} \dots \dots \dots (9) \\ L_3 + c &= K_3 l_3 + c && \text{„ } K_3 = \frac{L_3}{l_3} \end{aligned}$$

Stałe $K_1, K_2 \dots$ będą się między sobą nieco różniły wskutek błędów w odczytach; obliczymy przeto średnią arytmetyczną

$$K = \frac{K_1 + K_2 + \dots + K_n}{n} \dots \dots \dots (10)$$

i zaokrągliwszy ją, przyjmiemy, jako stałą instrumentu. Gdyby n. p. wypadło $K = 99.92$, to przyjmiemy $K = 100$.

Zastanówmy się teraz nad wypadkiem, gdy średnia celowa nie będzie poziomą, lecz nachyloną do poziomu o kąt α . Przypuśćmy, że instrument stoi w punkcie A , fig. 134., na terenie pochyłym, łąka zaś ustawiona jest w punkcie B prostopadłe do celowej. Rzecz prosta, że jest to taki sam wypadek jak poprzednio, tylko że odległość L należałoby mierzyć pochyło. Zatem pozioma odległość $L_h = L \cos \alpha$ lub

$$L_h = K \cdot l \cdot \cos \alpha + c \cdot \cos \alpha \dots \dots \dots (11)$$

Ustawianie łąty zawsze prostopadłe do celowej, nie jest łatwe i wymagałoby specjalnych przyrządów. Dlatego łąkę stawia się pionowo, fig. 135., natomiast musimy odpowiednio przekształcić wzory.

Z rysunku fig. 135. można przyjąć, że $l' = l \cdot \cos \alpha$, a wstawiwszy to w równanie (11.) otrzymamy:

$$L_h = K l \cdot \cos^2 \alpha + c \cos \alpha \dots \dots \dots (12)$$

opuszczając zaś drugi wyraz, dostaniemy

$$L_h = K \cdot l \cdot \cos^2 \alpha \dots \dots \dots (13)$$

jako ostateczny wzór na obliczenie odległości łąty od środka instrumentu, na podstawie odczytu na łącie i pomiaru kąta pionowego α .

Wprawdzie równania (12.) i (14.) nie są zupełnie ściśle, zwłaszcza wyrażenie $l = L \cdot \cos \alpha$, lecz dla małych kątów α można bez praktycznej szkody przyjąć je jako słuszne.

Kąt α odczytuje się na kole pionowym, w takiż sam sposób, jak na limbusie. Łatwo też zrozumieć, że będzie wielkiem uproszczeniem, gdy noniusz na kole pionowym wskazuje $0^\circ 0' 0''$ lub $90^\circ 0' 0''$ wtedy, gdy oś celowa jest pozioma. W przeciwnym razie musielibyśmy notować stan noniusza przy celowej poziomej, a potem odejmować odczyty, co by zawsze było pewną stratą czasu, zwłaszcza przy wielkiej ilości punktów. Dlatego, przy rektyfikacji instrumentu, zawsze regulujemy odpowiednio ten noniusz.

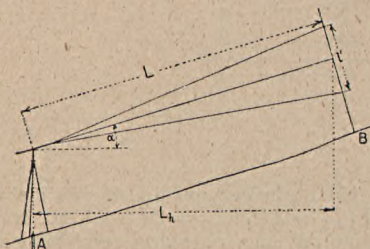


Fig. 134.

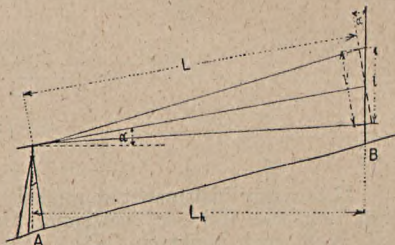


Fig. 135.

Kąty pionowe w górę oznaczamy w protokole znakiem (+), w dół znakiem (-), co będzie miało znaczenie przy obliczaniu wysokości punktów, na razie jednak, dla długości, jest obojętne.

Tachymetryczny pomiar długości nie jest tak dokładny jak pomiar taśmą, lecz odznacza się nadzwyczajną szybkością i wygodą, w terenie zaś górskim i dokładność nie pozostawia nic do życzenia.

Równanie (7.) $L = K \cdot l$ powiada, że odległość L jest proporcjonalna do odcinka l — zatem i błąd pomiaru, nazwijmy go $m(L)$, zależny jest od błędu tegoż odcinka $m(l)$, tak że

$$m(L) = K \cdot m(l) \dots \dots \dots (14)$$

Błąd w odczycie l zależny jest niewątpliwie od odległości L , z jakiej odczytujemy łątę, czyli

$$m(l) = L \cdot \epsilon \dots \dots \dots (15)$$

wstawivszy to w równanie (14.) otrzymamy

$$\frac{m(L)}{L} = K \cdot \epsilon \dots \dots \dots (16)$$

Z równania (16.) wynika, że dokładność pomiaru zyska, gdy K będzie mniejsze i odwrotnie. To samo zresztą można wywnioskować wprost z wzoru (7.), bo im K jest większe, ten bardziej powiększa się w iloczynie $K \cdot l$ każdy błąd odczytu. Otrzymamy więc większą dokładność dla $K = 100$, aniżeli dla $K = 200$.

Praktyka dowodzi, że błąd pomiaru długości, nie przekracza 0.3% tej długości przeciętnie, jeżeli pracujemy z wszelką starannością. Najgorszy wpływ wywiera na dokładność pomiarów wibracja powietrza podczas upału, czego należy też unikać, pracując w godzinach rannych i popołudniowych.

§ 2. Pomiar wysokości.

Przypuśćmy, że teren się wznosi według fig. 136., pomierzyć zaś mamy różnicę wysokości między punktami A i B.

Nazwijmy:

I = wysokość instrumentu, t. j. pionowa odległość od palika w punkcie A do środka lunety.

L_h = odległość obu punktów.

α = kąt nachylenia osi celowej (średniej) do poziomu.

l = odcinek na łacie między skrajnymi celowami.

l_s = odczyt średniej celowej na łacie.

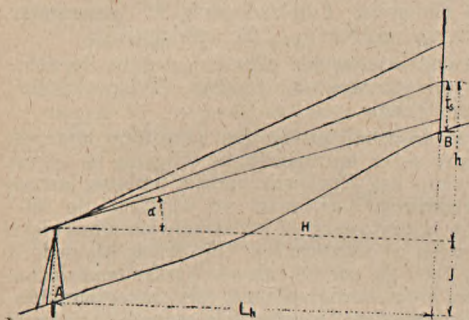


Fig. 136.

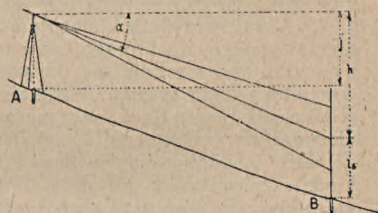


Fig. 137.

To, na podstawie rysunku, mamy:

$$s = I + h - l_s \quad \dots \dots \dots (1)$$

a ponieważ $h = L_h \cdot \operatorname{tg} \alpha$, oraz
 $L_h = K \cdot l \cos^2 \alpha + c \cdot \cos \alpha$

więc, po wstawieniu w równanie (1.) otrzymamy

$$s = I + K l \cdot \cos^2 \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + c \cdot \cos \alpha \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - l_s$$

czyli $s = I + K \cdot \cos \alpha \sin \alpha + c \cdot \sin \alpha - l_s \quad \dots \dots \dots (2)$

ponieważ jednak, jak wiemy z trygonometrii,

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha \quad \text{czyli} \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2} \quad \dots (3)$$

więc po wstawieniu wartości (3.) w równanie (2.) otrzymamy nowe równanie:

$$s = I + \frac{1}{2} K l \sin 2\alpha + c \sin \alpha - l_s \quad \dots \dots \dots (4)$$

lub po opuszczeniu małej wartości $c \sin \alpha$:

$$s = I + \frac{1}{2} K l \sin 2\alpha - l_s \quad \dots \dots \dots (5)$$

gdzie $h = \frac{1}{2} K l \sin 2\alpha \quad \dots \dots \dots (6)$

Jeżeli teren opada, jak to widzimy na fig. 137. — to różnicę wysokości, według rysunku, przedstawia relacja:

$$-s_1 = -(h + l_s - I) \quad \dots \dots \dots (7)$$

gdzie h ma wartość wyrażoną równaniem (6.).

Mając kąt punktu A, obliczymy kąt B, dodając do kąta A ujemną wartość s. Nazwijmy kąt punktu A przez N_a — zaś kąt B przez N_b , to powyższe określenie wyrazimy wzorem:

$$N_b = N_a - s_1 = N_a + I - (h + l_s) \dots \dots \dots (8)$$

wstawivszy a a h poprzednio obliczoną wartość, dostaniemy ostatecznie:

$$N_b = N_a + I - \left(\frac{1}{2} K l \sin 2\alpha + l_s \right) \dots \dots \dots (9)$$

w terenie wznoszącym się, dostaniemy analogicznie:

$$N_b = N_a + I + \frac{1}{2} K l \sin 2\alpha - l_s \dots \dots \dots (10)$$

Kąt pionowy α mierzy się na kole pionowym, z dokładnością $30''$, oznaczając znakiem (+), kąt dla terenu wznoszącego się znakiem (-) dla spadającego.

Stanowisko, na którym stoi instrument, jest zwykle określone tak co do położenia, jak wysokości, za pomocą zdjęcia polygonowego i niwelacji. Tylko niektóre, pośrednie stanowiska zdejmują się tachymetrycznie.

Ustawivszy instrument na danem stanowisku, mamy już określony kierunek do następnego, do którego też nawiązujemy się w ten sposób, że celujemy na sygnał i odczytujemy na limbusie odpowiadający mu kąt. Ponieważ podział limbusu jest we wszystkich instrumentach jednakowo urządzone, t. j. idzie od $0^\circ 0' 0''$ do 360° w kierunku wskazówek na zegarze, przeto, odczytawszy na jakimkolwiek stanowisku kierunek do następnego, wyrażający się n. p. w odczycie $102^\circ 20'$, wiemy dokładnie, że zero znajduje się po lewej stronie, 180° po prawej, słowem, potrafimy się dokładnie zorientować na planie. Mając więc prócz nawiązania się, cały szereg punktów, któreśmy zdjęli, mierząc kąty na limbusie, potrafimy z łatwością odnośne kierunki wyznaczyć na planie. O tem mówić jeszcze będziemy przy rysowaniu planów ze zdjęć tachymetrycznych.

Poniżej podajemy wzór protokołu zdjęć tachymetrycznych, wraz z wyjaśnieniami:

Tabela 12.

Protokół zdjęcia tachymetrycznego.

K = 100·00

Dnia

Stanowisko	Wysokość instrumentu	Cel do punktu	Kąt poziomy	Odczyt łąty górny średni dolny mm	Kąt pionowy		Odcinek l m	$L_h = K l \cos^2 \alpha$ m	$h = \frac{1}{2} K l \sin 2\alpha$ m	+ -		Horyzont m	Kota m	Uwagi
					+	-				$h - l_s$ m	$h + l_s$ m			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X.	1·45	42	$190^\circ 20'$	3268 2280 1292	$2^\circ 5'$	—	1·976	197·20	7·17	4·89	—	205·00	209·89	Kota punktu X: 203·55
XV.	1·45	—	—	3268 2280 1292	—	$2^\circ 5'$	1·976	197·20	7·17	—	9·45	205·00	195·55	

W powyższym przykładzie podano te same odczyty i kąty pionowe dla dwóch punktów, raz przy terenie wznoszącym się, drugi przy spadającym, jako przykład obliczenia.

W rubryce 2. podana jest wysokość instrumentu I, zmierzona wprost w polu, o czym już mówiliśmy. W uwadze podano kąt stanowiska X:203'55. Jeżeli do tej koty dodamy $I = 1'45$, to otrzymamy 205'00 jako wysokość horyzontu, którą wpisujemy w rubrykę 13.

Rubryki 5., 6. i 7. nie wymagają objaśnień.

W rubryce 8. wpisujemy różnicę między odczytem dolnym i górnym, obliczonym z rubryki 5.

Rubryka 9.: $K = 100 - l$ obliczono w rubryce 8. $\cos^2 \alpha$ wyjmuje się z tablic specjalnie w tym celu ustawionych, zatem iloczyn $Kl \cos^2 \alpha$ oblicza się z tych danych i wpisuje do rubryki 9. Podobnie rzecz się ma z iloczynem w rubryce 10.

Rubryki 11. i 12. nie wymagają wyjaśnień; l_s jest odczytem średniej celowej 2'280 m.

Rubryka 14. Ponieważ w rubryce 13. mamy podany już horyzont, t. j. według poprzedniego oznaczenia, horyzont $= N_a + I$, przeto, chcąc obliczyć kąt punktu, jeżeli teren się wznosi (kąt pionowy jest dodatni), dodamy do horyzontu wartość z rubryki 11. — jeżeli zaś teren opada, odejmiemy wyrażenie obliczone w rubryce 12. W celu uniknięcia pomyłki, rubryki 11. i 12. oznaczono nawet znakami (+) i (—).

§ 3. Porządek pracy w polu.

Tachymetrycznie zdejmując się takie szczegóły terenu, których pomiar inną metodą kosztowałby zbyt wiele czasu i pracy, większa zaś dokładność przytem osiągnięta nie przyniosłaby w porównaniu do nakładu, istotnej korzyści.

Zdjęcia tachymetryczne opierają się z reguły na sieci punktów, których położenie, tak w planie, jak co do wysokości, zostało w inny sposób określone, n. p. za pomocą zdjęć polygonalnych, opartych na punktach tryangulacyjnych. Wszelkie szczegóły zawarte na terenie pokrytym wspomnianą siecią punktów, zdejmują się tachymetrycznie.

N. p. w celu wystudowania trasy kolei, potrzeba zdjąć pas terenu od 200 do 500 m szeroki, między danymi miejscowościami. Podstawą zdjęć jest wówczas polygon, wytyczony i nawiązany do punktów trygonometrycznych. Wszystkie jego boki są pomierzone i zniwelowane. Wierzchołki tego wieloboku, a w razie zbyt długich boków, pośrednie punkty na nich, stanowią znów oparcie dla zdjęć tachymetrycznych.

Z danego stanowiska, którego położenie i wysokość są znane, zdejmują się tachymetrem obszar terenu, w promieniu około 300 m, a nawet i większym. Sama czynność przy instrumencie, t. j. odczytywanie kątów poziomych, pionowych i łąty, nie jest jeszcze wszystkim, bo ta wymaga tylko nieco wprawy i uwagi. Ważniejszą jest dyspozycja, które punkty mają być zdjęte, bo plan powinien być wiernym obrazem terenu. Należy więc wyszukiwać charakterystyczne punkty terenu i te wskazywać do zdjęcia, równocześnie zaś szkicuje się te punkty jak wogóle całą sytuację, co wymaga już większego doświadczenia i rozumienia celu zdjęć. Jeżeli zajdzie potrzeba wyznaczenia nowego stanowiska, ażeby zdjąć większy obszar w pewnym miejscu, to odbiera się je i zdejmuje odpowiednią metodą.

Co się tyczy czynności przy instrumencie, to należy mieć ile możności wzgląd na ułatwienie dalszych prac, t. t. obliczenia i rysowania. Dlatego powinniśmy się starać zdejmować jak najwięcej punktów przy osi celowej poziomej, lub, gdy to jest już niemożliwe, przy stałych kątach nachylenia tej osi. To ułatwia obliczenie, bo gdy mamy więcej punktów, dla których kąt pionowy α jest ten sam, to tylko raz wyszukamy lub wykreślimy $\cos^2 \alpha$ i $\sin 2\alpha$ — zarazem oszczędzamy czasu i pracy na ciągłe odczyty nowych kątów. Kąty poziome mierzy się zwykle tylko jednym noniuszem. Przy nawiązaniu się, powinno się odczytać ze względu na kontrolę, dwa noniusze.

Zdjęcia odbywają się zazwyczaj z pomocą trzech łąt, ażeby nie tracić czasu na czekanie, aż pomocnik przejdzie z jednego punktu na drugi. Odczytuje się łąty po kolei, numerując zdjęte punkty bieżąco, lecz od czasu do czasu powinno się sprawdzać zgodność numerów w protokole, z numerami szkicującego.

Z podobieństwa trójkątów $a_2 OP$ i $a_4 a_3 P$ wynika, że

$$a' : l_1 = a_2 O : OP \text{ a w uwzględnieniu równania (1)}$$

$$a' : l_1 = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 15^\circ \dots \dots \dots (2)$$

Jeżeli więc l jest wiadome, bo odcięte na podziałce, to

$$a' = l_1 \operatorname{tg} \alpha \text{ w danym przykładzie } a' = l_1 \operatorname{tg} 15^\circ \dots \dots \dots (3)$$

Lecz obliczyć mamy iloczyn $K \cdot l \cdot \cos^2 \alpha$ — czyli wogóle iloczyn

$$n \cdot \cos^2 \alpha = x \dots \dots \dots (4)$$

Znowu przyjmijmy przykład $\alpha = 15^\circ$.

Rzędna ab jak już wiemy ma wartość: $ab = \cos \alpha$ — z punktu b wykreślimy równoległą do ox aż do przecięcia z drugą krzywą w punkcie c to rzędna

$$c c_1 = \cos \alpha_1 \dots \dots \dots (5)$$

Przedłużmy rzędną cc_1 do punktu c_2 , to rzędna $c_1 c_2$ odpowiada wartości stycznej kąta α_1

$$\text{czyli } c_1 c_2 = 300 \operatorname{tg} \alpha_1 \dots \dots \dots (6)$$

a poprowadziwszy równoległą do osi ox dostaniemy punkt d czyli

$$Od = c_1 c_2 = 300 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \dots \dots \dots (7)$$

wreszcie kąt $dPO = \alpha_1$ analogicznie do poprzedniego wywodu dla kąta α .

Jeżeli teraz na promieniu Pd odetniemy długość PR , a z punktu R wykreślimy prostopadłą RR_1 do ox to PR_1 będzie rzutem odcinka PR ,

$$\text{czyli } PR_1 = PR \cdot \cos \alpha_1 \dots \dots \dots (8)$$

Lecz $\cos \alpha_1 = \cos^2 \alpha$ zatem

$$PR_1 = PR \cdot \cos^2 \alpha \dots \dots \dots (9)$$

Odcinek PR_1 możemy zmierzyć na linii RS , ażeby nie wykreślać prostopadłej RR_1 , zwłaszcza gdy cały wykres zrobiony jest na papierze milimetrowym. Jeżeli odcinek $PR = Kl$ to

$$PR_1 = PS = Kl \cdot \cos^2 \alpha \dots \dots \dots (10)$$

Opisany powyżej wykres urządzono dla promienia $r = 300$ mm, czyli w skali 1:1000 dla promienia 300 m dlatego, że dłuższych celowych przy zdjęciach tachymetrycznych, ze względu na błędy w odczytach, już nie dopuszczamy, czyli, że wykres ten służyć może do obliczania $Kl \cdot \cos^2 \alpha$ aż do wartości $Kl = 300$ czyli $K = 100$ i $l = 3$ m.

Ażeby uniknąć wykreślenia kątów, możemy promienie, podobnie jak Pd dla kątów $\alpha = 1^\circ 2^\circ \dots 20^\circ$ raz na zawsze narysować, a chociaż odnośne kąty będą miały właściwie inne wartości niż α , to jednak poznamy je przed $1^\circ 2^\circ \dots 20^\circ$.

Biorąc z protokołu tachymetrycznego odcinek l w metrach, pomnożymy go przez stałą $K = 100$, co nie przedstawia najmniejszej trudności, poczem za pomocą podziałki zaznamy na odpowiednim promieniu długości $PR = Kl$ — czyli punkt R a w końcu, na papierze milimetrowym odczytamy wprost wartość $RS = Kl \cos^2 \alpha$, lub cyrklem przeniesiemy ją na rysunek, bezpośrednio, nie odczytując nawet długości.

Do wykreślenia krzywych $y = \cos \alpha$, $y = \cos^2 \alpha$ i krzywej $y = 300 \cdot \operatorname{tg} \alpha$, podajemy poniżej tabelę. Kąty od 0 do 20° wystarczają, bo nawet rzadko kiedy dochodzi się w kącie pionowym do 20° .

Dokładności większej jak na $20'$ a już najwięcej $10'$ nie potrzeba. Minuty w obliczeniu długości nie grają nawet prawie żadnej roli.

O ilebyśmy koniecznie chcieli uwzględnić wyraz $c \cdot \cos \alpha$ w całkowitym wyrażeniu:

$$L_h = Kl \cdot \cos^2 \alpha + c \cdot \cos \alpha$$

to z wystarczającą dokładnością uczynimy to, gdy przyjmiemy $c = 0.6$ m i iloczyn Kl powiększymy o tę długość, zatem w powyższym obliczeniu będziemy odcinali:

$$PR = (Kl + 0.6) \text{ m} \dots \dots \dots (11)$$

2. Obliczenie „ h ” (rubryka 10. protokołu). Wiemy że

$$h = L_h \cdot \operatorname{tg} \alpha = Kl \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha + c \cdot \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots (12)$$

Zajmijmy się najpierw pierwszym wyrazem:

$$Kl \cdot \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = n \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad \dots \dots \dots (13)$$

gdzie $n = K \cdot l \cdot \cos^2 \alpha$, któreśmy poprzednio obliczyli.

Według równania (2.) otrzymaliśmy:

$$a' : l_1 = \operatorname{tg} \alpha \text{ czyli } a' = l_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

gdy zaś $l_1 = n = Kl \cos^2 \alpha$, to tem samem odcinek $a' = a_3 a_4$ przedstawia żadaną wartość

$$Kl \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha = a' \quad \dots \dots \dots (14)$$

Na osobnym rysunku, fig. 139., wykreślmy, podobnie jak poprzednio, krzywą $y = 300 \cdot \operatorname{tg} x$, to dla każdej odciętej, czyli kąta na podzielnicy ox otrzymamy po lewej stronie odpowiedni kąt rzeczywisty.

Odcinając na PO , od punktu P , długości $Kl \cos^2 \alpha$ otrzymane z poprzedniego obliczenia, n , p. PK , dostaniemy rzędne, przedstawiające wprost wartość $Kl \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$ w odpowiedniej skali, przyjętej dla długości n , p. KL .

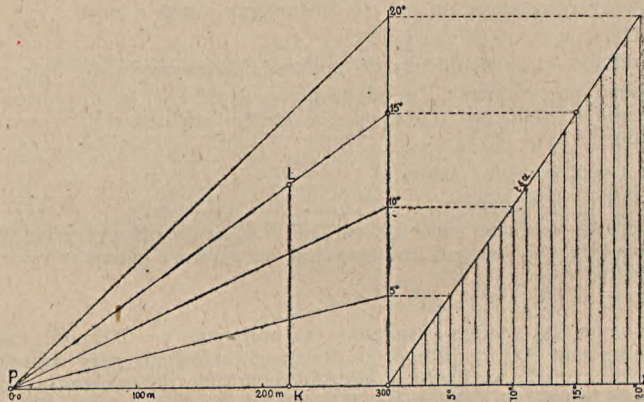


Fig. 139.

Szereg kątów co $20'$ możemy tutaj także z góry już wykreślić.

Rozchodziłoby się jeszcze o uwzględnienie drugiego wyrazu, t. j.

$$c \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Przyjmijmy $c = 0.6 \text{ m}$ i zobaczymy, o ile na obliczeniu wartości odcinka a' (równanie 14.) wpłynie ta okoliczność, że zamiast Kl wprowadzamy według równania (11.) wartość

$$(Kl + c) = (Kl + 0.6 \text{ m}).$$

Właściwie więc odległość L_h wynosić będzie:

$$L_h = (Kl + 0.6) \cdot \cos^2 \alpha \quad \dots \dots \dots (15)$$

którą to wartość użyjemy znowu do obliczenia wysokości, według wzoru

$$h = L_h \cdot \operatorname{tg} \alpha = (Kl + 0.6) \cdot \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad \dots \dots \dots (16)$$

zamiast wzoru

$$h = Kl \cdot \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha + c \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad \dots \dots \dots (17)$$

Wykonując mnożenie naznaczone w równaniu (16.) otrzymamy:

$$h = Kl \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha + 0.6 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha \quad \dots \dots \dots (18)$$

Teraz zbadajmy, jaką wartość może mieć w praktyce drugi wyraz: $0.6 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

W tym celu przyjmijmy jako granice $\alpha = 2^\circ$ i $\alpha = 20^\circ$.

a) dla $\alpha = 2^\circ \dots 0.6 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha = 2.1 \text{ cm}$;

b) dla $\alpha = 20^\circ \dots 0.6 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha = 19.1 \text{ cm}$.

Natomiast, ściśle biorąc, powinniśmy obliczać

$$c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha,$$

a) dla $\alpha = 2^\circ \dots c \cdot \sin \alpha = 2.1 \text{ cm}$;

b) dla $\alpha = 20^\circ \dots c \cdot \sin \alpha = 20.3 \text{ cm}$.

Jak widzimy, różnice są tak małe, że wobec wszelkich innych błędów, uznać je możemy jako nic nieznaczące.

Z tego, cośmy dotąd powiedzieli, wynika, że:

a) Odległość L_h obliczać będziemy graficznie, według wzoru:

$$L_h = (Kl + c) \cdot \cos^2 \alpha \dots \dots \dots (19)$$

b) Wysokość h zaś według wzoru

$$h = L_h \operatorname{tg} \alpha = (Kl + c) \cdot \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots (20)$$

gdzie: za c przyjmiemy dla każdej lunety, odpowiednią jej wartość.

Tabela do wykreślenia krzywych:

$$y = \cos \alpha, \quad y = \cos^2 \alpha \quad \text{i} \quad y = 300 \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Tabela 13.

α	$\cos \alpha$	$\cos^2 \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$300 \operatorname{tg} \alpha$
0° 0'	1.0000	1.0000	0.0000	0.000
0° 20'	—	—	0.00582	1.746
0° 40'	—	—	0.01164	3.492
1°	0.99984	0.9997	0.01746	5.235
1° 30'	—	—	0.02619	7.857
2°	0.9994	0.9988	0.03492	10.476
2° 30'	—	—	0.04366	13.098
3°	0.9986	0.9972	0.05241	15.723
4°	0.9975	0.9952	0.06993	20.979
5°	0.9961	0.9924	0.08749	26.247
6°	0.9945	0.9891	0.10510	31.530
8°	0.9903	0.9806	0.14054	42.150
10°	0.9848	0.9721	0.17633	52.890
12°	0.9781	0.9567	0.21256	63.750
14°	0.9703	0.9415	0.24933	74.790
16°	0.9613	0.9241	0.28674	86.010
18°	0.9511	0.9045	0.32492	97.470
20°	0.9397	0.8831	0.36397	109.20
22°	—	0.8596	—	—
24°	—	0.8346	—	—
26°	—	0.8078	—	—

Zamiast krzywych: $y = \cos \alpha$ i $y = \cos^2 \alpha$, możemy wprowadzić wprost kąt α , który obliczymy z następującego równania: $\cos \alpha_1 = \cos^2 \alpha$, stąd $\log \cos \alpha_1 = 2 \cdot \log \cos \alpha$ więc $\alpha_1 = N. 2 \log \cos \alpha$ dla kątów $\alpha = 1^\circ 2^\circ \dots 20^\circ$. Kąty α_1 dla których wykreśli się krzywą $y = \operatorname{tg} \alpha$, nie będą jednak na osi x oznaczone w swej rzeczywistej wartości α , lecz przez odpowiadające im α ; bo na kole pionowym mierzymy ten tylko kąt α nie inny.

Tabelę dla kątów α_1 podajemy na następnej stronie. Ten sposób jest dokładniejszy niż poprzedni.

Uwaga. Najdogodniejszą skalą dla grafikonu według fig. 138. jest 1:1000, bo w tej skali wykonywuje się zwykle plany sytuacyjne.

Natomiast dla grafikonu według fig. 139. wystarczającą skalą długości będzie 1 : 500, dla wysokości 1 : 200, ewent. 1 : 100.

Tabela 14.

$$\cos \alpha_1 = \cos^2 \alpha.$$

α	α_1	$\text{tg } \alpha_1$	α	α_1	$\text{tg } \alpha_1$
0°	0° 00'	0·0000	10°	14° 6'	0·2513
1°	1° 25'	0·0247	11°	15° 30'	0·2775
2°	2° 50'	0·0494	12°	16° 55'	0·3040
3°	4° 14'	0·0742	13°	18° 18'	0·3308
4°	5° 39'	0·0990	14°	19° 42'	0·3581
5°	7° 4'	0·1240	15°	21° 5'	0·3857
6°	8° 29'	0·1491	16°	22° 29'	0·4138
7°	9° 53'	0·1743	17°	23° 52'	0·4424
8°	11° 18'	0·1997	18°	25° 15'	0·4715
9°	12° 42'	0·2254	19°	26° 37'	0·5012
10°	14° 6'	0·2513	20°	27° 59'	0·5315

Na rysunku 138., osobno, dodano wzór skali według powyższej tabeli i wykreślono krzywą $100 \cdot \text{tg } \alpha_1$.

§ 3. Wykreślanie kątów poziomych na planie.

Podział limbusu idzie zawsze w kierunku ruchu wskazówek na zegarze. Ten właśnie przyjęty porządek w podziale kątowym, stanowi własność limbusu, pozwalającą nam łatwo i bez wprowadzania żadnych wątpliwości, nawiązywać się i rysować kąty. O sposobie nawiązywania się do danego kierunku, mówiliśmy poprzednio, teraz załatwimy kwestyę wykreślenia kierunków.

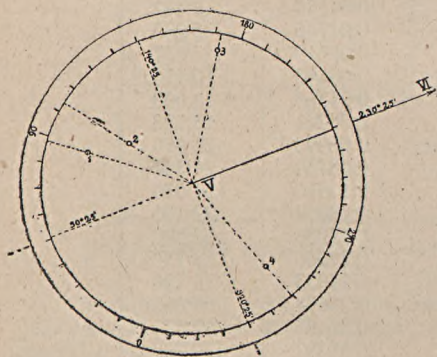


Fig. 140.

Fig. 140. przedstawia t. z. kątomierz lub transporter. Jest to pierścień z grubego papieru lub cienkiej blachy mosiężnej, mający na wewnętrznej stronie podział na stopnie i części stopni, zależnie od wielkości średnicy. Na fig. 140. naznaczono tylko kąty co 45° .

Przypuśćmy, że na pewnym stanowisku instrumentu oznaczonym przez V odczytaliśmy następujące kąty:

Stanowisko	Kierunek do	Kąt poziomy
V	stan. VI	230° 25'
	1	88° 31'
	2	100° 20'
	3	172° 40'
	4	300° 28'

Jak poprzednio mówiliśmy, kąty przy wierzchołkach polygonu, jak wogóle cały polygon był już pomierzony, a nam rozchodzi się tylko o punkty zdjęte z danego stanowiska.

O zdjęciach polygonowych zresztą będziemy mówili później.

Niech linia V—VI. na rys. fig. 240 przedstawia kierunek boku V—VI. Na punkcie V. mamy ułożyć transporter, czyli jego środek.

Zrobimy to w następujący łatwy sposób:

Przedłużmy linię VI—V. i wykreślmy w punkcie V. prostopadłą. W kierunku V—VI. odczytaliśmy w polu kąt $230^{\circ} 25'$; wprost przeciwny kierunek będzie $230^{\circ} 25' - 180^{\circ} = 50^{\circ} 25'$. Ustawmy kątomierz na rysunku tak, ażeby oba powyższe kąty znalazły się na kierunku V—VI. i jego przedłużeniu.

Prostopadła do powyższego kierunku powinna wskazywać: na lewo kąt $230^{\circ} 25' - 90^{\circ} = 140^{\circ} 25'$, na prawo $230^{\circ} 25' + 90^{\circ} = 320^{\circ} 25'$. Transporter posuwamy więc po linii V—VI., przyczem kąty $230^{\circ} 25'$ i $50^{\circ} 25'$ leżeć muszą na tej linii, aż wreszcie prostopadła padnie na kreski odpowiadające kątom $140^{\circ} 25'$ i $320^{\circ} 25'$. Wówczas środek pierścienia znajdować się musi w punkcie V. W tej pozycji utwierdzimy transporter za pomocą odpowiednich cieńkich gwoździków i rozpoczynamy pracę.

Kierunek do punktu 1. wyznaczmy, przykładając lineal wprost do punktu V. i do kreski $88^{\circ} 31'$ — na tym kierunku odrazu odmierzamy odległość punktu 1 od V. obliczoną n. p. graficznie, a wyznaczenie punktu będzie skończone.

W taki sam sposób wyznaczmy dalsze punkty 2, 3 i 4. — Dla planów sytuacyjnych, wykonywanych na podstawie zdjęć tachymetrycznych, jest to dokładność zupełnie wystarczająca, jak to w dalszym ciągu wykazemy.

Wielkość transportera powinna być tak dobraną, ażeby wewnątrz koła rysować było można wszystkie kierunki i wyznaczać na niej odległości — a że zdej-mować możemy punkty do 300 m. odległości, więc transporter powinien mieć odpowiednią średnicę, około 60 cm.

Transporter o średnicy 343.94 mm będzie miał podział tak duży, że łuk jednego stopnia wyniesie 3 mm; można więc za pomocą niego odmierzać kąty z dokładnością na $\frac{1}{4}$ mm, t. j. 5 minut. Podobnie, transporter o średnicy 687.9 mm

pozwała na rysowanie kątów z dokładnością dwa razy większą, więc na 2 do 2.5'. Większej dokładności nie możemy wymagać, bo drobniejszego podziału nie potrafimy w rysunku uwidocznić. Zważywszy nadto, że wszelkie błędy w rysowaniu kątów, mierzonych na obwodzie transportera, zmniejszają się dla mniejszych odległości, t. j. ku jego środkowi, to bezwątpienia przyznamy, że i dokładność i sam przyrząd, łatwy do sporządzenia, są zupełnie wystarczające. Gdy transporter ustawimy na danym punkcie, co jak widzieliśmy jest łatwym i nie zabierze więcej czasu jak dwie minuty, to już dalsza praca jest bardzo prosta i wyklucza omyłki, powstające wówczas, gdybyśmy chcieli rysować kąty, jako różnice odczytów na limbusie.

Używa się transporterów różnych konstrukcji i patentów, z bardzo dokładnymi noniuszami i t. p.

Dla naszych, w tym rozdziale omawianych celów, są one zupełnie zbyteczne.

§ 5. Plany warstwicowe.

Wyobraźmy sobie, że na terenie oznaczono palikami szereg punktów mających tę samą wysokość (kotę) — to linia łącząca te punkty, rozmaicie powyginana, zależnie od konfiguracji terenu, będzie linią poziomą w danej wysokości leżącą. Taką linię nazywamy linią warstwicową, lub według utartego wyrażenia, chociaż niewłaściwie: warstwicą. Używać będziemy zawsze pierwszego określenia, opuszczając często wyraz „linia“.

Linie warstwicowe dadzą się najprościej przedstawić w planie, jako rzuty poziome przekrojów stożka, płaszczyznami poziomymi fig. 141., n. p. co 1 m wysokości. Koła współśrodkowe, będą więc liniami warstwicowymi, co nie wymaga dalszych wyjaśnień.

Przekroje, n. p. góry takimi płaszczyznami, jako nieforemnego stożka, dają warstwicę przedstawioną na fig. 142. Liczby wzdłuż warstwic wypisane, oznaczają ich wysokości (koty).

Teren między dwoma bezpośrednimi liniami warstwicowymi, uważamy jako jednostajnie nachylony. Mając na planie

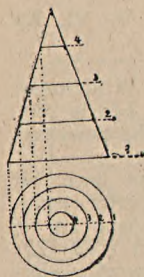


Fig. 141.

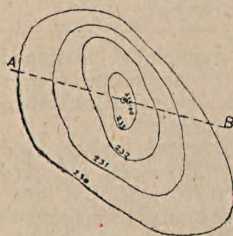


Fig. 142.

warstwicowym wykreślony jakiś kierunek n. p. AB , możemy łatwo narysować przekrój terenu płaszczyzną pionową, przez tę linię przechodzącą. Odległość bowiem między obu warstwicowymi dane są w planie w odpowiedniej skali, wysokości wypisane.

Fig. 143. przedstawia przekrój AB , czyli t. zw. profil podłużny AB .

Nie możemy tu opisywać wszystkich możliwych kształtów linii warstwicowych, bo krótka praktyka wystarczy najlepiej do poznania ich i przyzwyczajenia się do orientacji w planie warstwicowym lepiej, niż najszersze opisy. Wspomnieć jednak należy o rysowaniu warstwicowych. Zdjęcie tachymetryczne podaje nam grupy punktów z wypisanymi przy nich wysokościami. Z tych danych, przy pomocy szkiców polowych, skonstruować mamy plan warstwicowy.

Na terenie zdejmujemy punkty charakterystyczne w ten sposób, że teren między nimi uważać można jako jednostajnie pochyłony. Taką grupę punktów widzimy na fig. 144.

Dwa punkty: A i B , połączmy na planie linią prostą i przyjmijmy ją jako linię podstawową, leżącą na wysokości okrągłej, n. p. $220'00$. W takim razie punkt A leży nad nią $0'70$ m wyżej, zaś B $2'30$ m wyżej. Wykonajmy teraz kład obu pionowych na płaszczyznę rysunku, to punkt B znajdzie się w kładzie w B_1 , A w A_1 .

Odcinek AA_1 narysujemy w skali większej, n. p. $1:100$ i podobnie BB_1 . Ponieważ przyjęliśmy, że linia AB leży na wysokości $220'00$ — więc

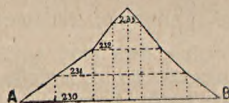


Fig. 143.

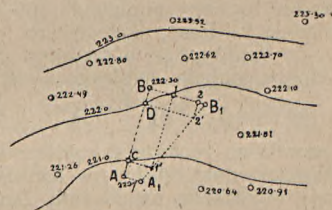


Fig. 144.

na linii BB_1 długiej $2'30$ m wyznaczmy punkt 1 leżący (w kładzie) o 1 m wyżej i punkt 2 o 2 m wyżej — wykreślmy teraz z obu punktów równoległe do AB , to one przetną linię A_1B_1 w punktach $1'$ i $2'$ będących kładami punktów C i D , leżących na wysokościach $221'00$ i $222'00$, przez które, odnośne warstwicowe muszą przechodzić. W ten sposób postępując, wyznaczmy wśród całej grupy punktów, takie punkty, których wysokości odpowiadają całym metrom, czyli wykreślmy linie warstwicowe co 1 m wysokości. W podobny sposób wyznacza się warstwicowe co 5 m lub co 10 m w dowolnych zresztą odstępach, zależnie od celu i potrzeby.

ROZDZIAŁ X.

Trygonometryczny pomiar wysokości.

§ 1. Ogólne uwagi.

Metodę trygonometrycznego pomiaru wysokości, będziemy w praktyce stosowali w rzadkich tylko wypadkach, zazwyczaj przy tachymetrycznych zdjęciach sytuacyjnych.

Sposobność do tego zdarzyć się może przy zdjęciach, celem studyów trasy kolei, czy to zwykłych, czy linowych, celem usytuowania zbiorników wody, prze-

kroczenia w tem lub innym miejscu, siodeł i t. p. Najczęściej w ogóle wtedy, gdy wypadnie zdjęć jakiś obszar nieprzystępnego terenu, leżącego obok podstawy naszych zdjęć, jaką stanowi zwykle wytyczony i pomierzony polygon. Wówczas za pomocą małej tryangulacji o długości boków do 3 km i trygonometrycznego pomiaru wysokości, przygotować możemy pewną ilość punktów, które następnie służyć będą jako stanowisko do pomiarów tachymetrycznych. Z góry więc przyjmujemy, że metodę tę stosować będziemy jako pomocniczą, do przygotowania dla zdjęć szczegółowych i rezygnujemy z takiej dokładności, jaką moglibyśmy osiągnąć przy znacznym nakładzie czasu i pracy inną, lub nawet i tą metodą, jak to w dalszym ciągu będziemy widzieli. Kosztem dokładności, uprościmy i skrócimy pracę, naturalnie nie wychodząc poza pewne granice.

Nie może tu być mowy o takich trygonometrycznych pomiarach wysokości, jakie wykonywa się przy zdjęciach krajów, z uwzględnieniem wpływów atmosferycznych, wymagających osobnych obserwacji — lecz tylko o pomiarach w takim zakresie, jaki może w praktyce, w zwykłych warunkach się zdarzyć i to nie często.

Przy odległościach większych jak 400 m będziemy musieli uwzględnić kulistość ziemi, co da się rachunkiem łatwo przeprowadzić, względnie ułożyć odpowiednie tabele celem ułatwienia rachunku. Trudniejszą jest rzeczą uwzględnienie t. z. refrakcji, t. j. załamania promieni. Jak wiadomo, promień świetlny, przechodząc z górnych warstw powietrza w dolne, zatem z rzadszych w gęstsze, załamuje się ku prostopadłej padania, a że powietrze nie składa się właściwie z odrębnych jakichś warstw, lecz gęstość jego ustawicznie się zmienia, stając się coraz większą, im niżej schodzimy, więc też i promień światła będzie linią krzywą. Każdy przedmiot na górze będący, widzicie będziemy w przedłużeniu ostatniego elementu tej krzywej, przychodzącej do oka, czyli w kierunku stycznej do niej, zatem wyżej, niż on się znajduje w rzeczywistości.

Nadto refrakcja jest, jak wykazały doświadczenia, różną, w różnych porach dnia: najmniejszą jest około południa, rano i wieczorem jest największą, przyczem też i zmiana temperatury odgrywa ważną rolę.

Z bardzo licznych doświadczeń, które już same dla siebie utworzyły pokaźny dział literatury w tym dziale geodezyi, wynika, że dla odległości do 5 km będziemy mogli przyjąć stały, przeciętny współczynnik refrakcji, co rzecz jasna, ułatwia nam rzecz w wysokim stopniu, tembardziej, że w zwykłych warunkach nawet tej odległości nie będziemy potrzebowali stosować.

§ 2. Teorya trygonometrycznych pomiarów wysokości.

Przypuśćmy, że tarcza sygnałowa znajduje się na pagórku, w punkcie B (fig. 145.), zaś oko w punkcie O na dole. Promień światła, wychodzący z B, załamuje się ciągle ku prostopadłej padania, skutkiem czego oko nie widzi tarczy w punkcie właściwym B, lecz w B' na przedłużeniu stycznej w punkcie O do krzywej, jaką opisuje promień światła.

Postawmy sobie teraz jako zadanie: Pomierzyć trygonometrycznie wysokość punktu B (fig. 146.) nad punktem A, jeżeli odległość obu punktów jest wiadoma. Za pomocą instrumentu ustawionego w punkcie A mamy wyznaczony poziom pozorny w tymże punkcie, t. j. styczną AD do poziomu geodezyjnego punktu A, t. j. do łuku AC — oraz pomierzmy kąt α , pod jakim widzimy punkt B' zamiast rzeczywistego kąta α' , a to skutkiem refrakcji promieni, o czem była mowa powyżej.

Zanim przejdziemy do właściwego obliczenia, musimy sobie zdać sprawę z następujących wielkości, o jakich rysunek, z konieczności przesadzony w stosunkach, daje fałszywy obraz. Przyjawszy, wystarczający dla nas w tym wypadku, kształt ziemi jako kulisty, o promieniu $r = 6\ 370\ 300$ m, łatwo obliczymy długość łuku l na ziemi odpowiadającą kątowi środkowemu $\gamma = 1''$ a to z proporcji

$$l : 2r\pi = 1'' : 360 \cdot 60 \cdot 60'' \dots \dots \dots (1)$$

Jeżeli przyjmujemy $r = 1$ m, to

$$l = 0.0000484814814 \dots \dots \dots (2)$$

Zatem dla promienia ziemi $r = 6\ 370\ 300$ m długość łuku, odpowiadająca kątowi środkowemu $r = 1''$ wyniesie

$$l_1 = Y \cdot r = 30'884158 \text{ m} \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{dla } n'' \text{ długość łuku } l_n = n \cdot Y \cdot r \dots \dots \dots (4)$$

a że według równania (3.) $Yr = l_1$ więc

$$l_n = n \cdot l_1 \dots \dots \dots (5)$$

Tak n. p. dla $l_n = 5000 \text{ m}$ obliczymy z równania (5.) kąt środkowy:

$$n = \frac{l_n}{l_1} = \frac{5000}{30'884158} = 161'73'' \text{ czyli } 2' 41'' .73 \dots \dots \dots (6)$$

podobnie n. p. dla $l_n = 10000 \text{ m}$ otrzymamy

$$n = 5' 23'' .46 \dots \dots \dots (7)$$

ilości te są proporcjonalne i łatwo je obliczyć. Jak widzimy, kąty środkowe, odpowiadające łukom na powierzchni ziemi, o znacznych nawet długościach, są wogóle małe; w naszych warunkach, dla długości do 4000 m, granicą dla kąta γ będzie: $\gamma = 2' 9'384'' \dots \dots l_n = 4000 \text{ m}$.

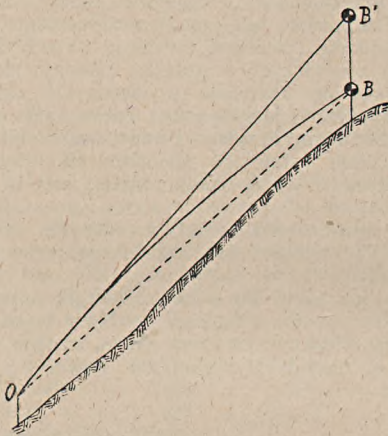


Fig. 145.

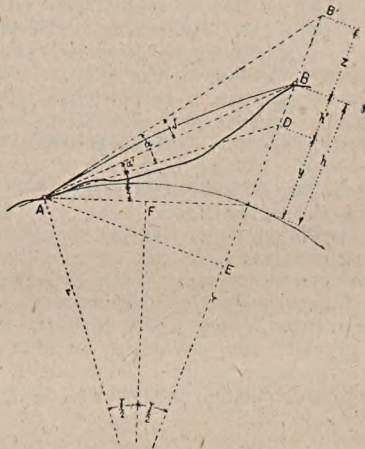


Fig. 146.

Ponieważ już poprzednio, w rozdziale I. udowodniliśmy rachunkiem, że różnica między długością łuku na ziemi, a długością stycznej, czyli między pomiarem na kuli a pomiarem w poziomie pozornym, nawet dla znacznych długości, jest tak mała, że jej za pomocą bezpośredniego pomiaru skonstatować nie możemy — n. p. dla kąta środkowego $\gamma = 15'$ długości łuku wynosił $= 27781'575 \text{ m}$ a stycznej $s = 27781'65 \text{ m}$. więc tembardziej, dla znacznie mniejszych kątów γ , długości: łuku AC (fig. 146.) jakoteż cięciwy AC oraz stycznej AD uważać będziemy za równe.

Kulistość ziemi uwzględnimy w następujący sposób:

Trójkąt ACD uważać możemy jako prostokątny (kąt prosty przy C) dlatego, że w odległości nawet 10 i 15 km piony w obu punktach można przyjąć jako równoległe do siebie, a zresztą kąt przy A t. j. $\frac{\gamma}{2}$ jest bardzo mały; czyli:

$$y = a \cdot \text{tg } \frac{\gamma}{2} \dots \dots \text{gdzie } AC = a \dots \dots \dots (8)$$

Jeżeli punkt O jest punktem przecięcia obu pionów w środku kuli ziemskiej to wykreśliwszy OF prostopadłą do cięciwy AC, otrzymamy z trójkąta COF, w którym:

$$CF = \frac{a}{2} = r \cdot \text{tg } \frac{\gamma}{2} \text{ a stąd } \text{tg } \frac{\gamma}{2} = \frac{a}{2r}$$

wstawmy tę wartość w równanie (8.), to dostaniemy

$$y = a \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = a \cdot \frac{a}{2r} = \frac{a^2}{2r} \dots \dots \dots (9)$$

Po wstawieniu wartości $r = 6\,370\,300$ m otrzymamy następujące wartości na y , jako poprawkę celem uwzględnienia kulistości ziemi dla różnych długości a :

Tabela 15.

a m	y mm	a m	y mm	a m	y mm	a m	y mm	a m	y mm
100	0·7	400	12·5	700	38·2	1000	78·3	4000	1253·7
200	3·1	500	19·6	800	50·1	2000	313·4	5000	1958·9
300	7·0	600	28·2	900	63·4	3000	705·2	10000	7835·8

Powyższą tabelę najlepiej jest przedstawić graficznie, odcinając „ a ” w skali 1:10000 na odciętych, od $a=0$ do $a=5000$ m, zaś „ y ” w skali 1:250 na rzędnych. Wówczas dla każdego „ a ” łatwo będzie odczytać odpowiednie „ y ” w mm.

Równocześnie z tabeli 15. widzimy, że już dla odległości $a=400$ m należy uwzględnić na wpływ kulistości ziemi, inaczej bowiem popełnialibyśmy świadomie i wcale niepotrzebnie, zbyt wielkie błędy.

Wkońcu musimy uwzględnić i wyrugować wpływ refrakcyi, wskutek której widzimy punkt B w niewłaściwym miejscu B', czyli mierzymy kąt α zamiast kąta α' .

Z trójkąta ADB' , który poprzednio już przyjęliśmy jako trójkąt prostokątny, a w którym znane są: kąt α i bok $a=AD$, obliczymy, według oznaczenia na fig. 146.:

$$h' + z = a \cdot \operatorname{tg} \alpha \dots \dots \dots (10)$$

Weźmy teraz pod uwagę trójkąt ABB' , w którym ani bok AB , ani $BB' = z$ ani kąt δ nie są znane. Wielkość kąta „ δ ” zależy od refrakcyi, ta zaś, jak w § 1. ogólnie wspomniano, jest zmienna, zależna od temperatury, wysokości, odległości, pory roku i dnia. Na odnośno obserwacje, celem dokładnego określenia wpływu refrakcyi, nie mamy czasu przy tego rodzaju zdjęciach, o jakich mówimy, nadto, cała metoda straciłaby wobec tego na znaczeniu. Mamy jednak liczne doświadczenia, na podstawie których te trudności pokonać możemy.

Według n. p. Laplace'a i Delambre'a wynosi: $\delta = 0\cdot08 \gamma$, czyli 8‰ kąta, jaki tworzą piony w punktach A i B — naturalnie jest to wartość przeciętna. Według zaś Garussa

$$\delta = 0\cdot0653 \gamma \quad \text{lub} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{a}{2r} \cdot k \dots \dots \dots (11)$$

stąd zaś, przyjąwszy w przybliżeniu, że $AB = a$, oraz że

$$z = a \cdot \operatorname{tg} \delta \quad \text{czyli} \quad z = a \cdot \operatorname{tg} (\alpha - \alpha') \dots \dots \dots (12)$$

uwzględniając równanie (11.) otrzymamy

$$z = a \cdot \operatorname{tg} \delta = \frac{a^2 k}{2r} \dots \dots \dots (13)$$

gdzie k jest współczynnikiem, dającym się wyznaczyć doświadczalnie, o czym będziemy mówili w dalszym ciągu.

Powyższe przyjęcia nie są wprawdzie ścisłe, ale wobec niepewności i zmienności współczynnika refrakcyi, są dopuszczalne i powodują tylko bardzo nieznaczne błędy.

Ponieważ rozchodzi się nam o różnicę wysokości „ h ” obu punktów A i B, więc według oznaczeń na fig. 146., napiszemy: $h = (h' + z) - z + y$, a uwzględniając równania (9.), (10.), (12.) i (13.) otrzymamy:

$$h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{a^2 k}{2r} + \frac{a^2}{2r} \text{ czyli}$$

$$h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha + a^2 \frac{1-k}{2r} \dots \dots \dots (14)$$

jako wzór na obliczenie różnicy wysokości obu punktów, jeżeli punkt B leży wyżej.

W równaniu (14.) mamy znane: a = odległość obu punktów, kąt α z pomiaru, r = promień ziemi; nieznaną zaś jest współczynnik refrakcji k, który możemy przyjąć w przybliżeniu

$$k = 0.13 \text{ z błędem około } 25\% \dots \dots \dots (15)$$

Współczynnik k można wyznaczyć doświadczalnie w ten sposób, że różnicę wysokości h zmierzmy za pomocą niwelacji, zaś z równania (14.) obliczymy

$$k = 1 - \frac{2r}{a^2} (h - a \cdot \operatorname{tg} \alpha) \dots (16)$$

Współczynnik k możemy też obliczyć w inny sposób, mianowicie:

W obu punktach A i B (fig. 147.) zmierzmy równocześnie kąty pionowe α i β między poziomami w obu tych punktach a celową. Natenczas:

$$k = 1 - \frac{r}{a} \left(\frac{\beta - \alpha}{\zeta} \right) \dots \dots (17)$$

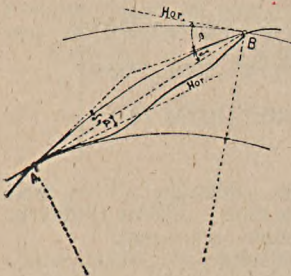


Fig. 147.

gdzie ζ = 206265. Z kilku pomiarów obliczymy średnią, jako najprawdopodobniejszą wartość.

Ażeby cyfrowo wykazać, jaki wpływ na obliczenie wywiera niepewność współczynnika k obliczymy wartość z = $\frac{a^2 k}{2r}$, przyjmując raz k = 0.13, drugi raz k₁ = 0.16 czyli k₁ = 1.25 k — dla a = 1000 i 5000 m.

1. Dla k = 0.13 i a = 1000 m . . . z₁ = 10.2 mm
2. „ k = 0.13 i a = 5000 m . . . z₅ = 255 mm
3. „ k₁ = 0.16 i a = 1000 m . . . z'₁ = 12.1 mm
4. „ k₁ = 0.16 i a = 5000 m . . . z'₅ = 314 mm.

Porównując z i z' otrzymamy następujące różnice:

1. Dla a = 1000 m z'₁ - z₁ 1.9 mm
2. „ a = 5000 m z'₅ - z₅ 59 mm

Zatem wpływ zmienności współczynnika k w granicach do 25% jest niewątpliwie bardzo mały, podczas, gdy wpływ kulistości ziemi dla a = 1000 m wynosi 78.3 mm, zaś dla a = 5000 m wynosi 1959 mm, zatem jest bez porównania większy.

Następująca tabela 16. podaje wartości wyrazu $\frac{1-k}{2r} \cdot a^2$ do równania (14.) dla różnych „a“.

Tabela 16.

a =	1000 m	2000	3000	4000	5000	6000	8000	10000 m
k = 0	0.08 m	0.31 m	0.71 m	1.25 m	1.96 m	2.82 m	5.01 m	7.83 m
k = 0.1	0.07	0.28	0.63	1.13	1.76	2.54	4.51	7.05
k = 0.13	0.07	0.27	0.61	1.09	1.70	2.45	4.36	6.82
k = 0.16	0.07	0.26	0.59	1.05	1.65	2.37	4.21	6.58
k = 0.20	0.06	0.25	0.56	1.00	1.57	2.26	4.01	6.27

Powyższa tabela dowodzi, że zmiana współczynnika k nawet o 100% t. j. od $k = 0.1$ do $k = 0.2$ aż do odległości 5000 m ma wogóle niewielki wpływ na wynik pomiaru, tembardziej zaś dla mniejszych odległości, do 3000 m, z jakimi możemy mieć do czynienia, czyli, że bez ujmy dla dokładności, możemy przyjąć przeciętną wartość dla k , t. j.

$$k = 0.13 \dots \dots \dots (18)$$

Następująca tabela 17. podaje obliczony wyraz $\frac{1-k}{2r} \cdot a^2$ dla równania (14.) celem ułatwienia w obliczaniu, dla a od 0 do 10000 m co 100 m odległości.

Tabela 17.

$$\frac{1-k}{2r} \cdot a^2 \text{ dla } k = 0.13.$$

a	0 m	100	200	300	400	500	600	700	800	900
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
0	0.000	0.001	0.003	0.006	0.011	0.017	0.025	0.033	0.044	0.055
1000	0.068	0.082	0.098	0.115	0.134	0.153	0.175	0.197	0.221	0.246
2000	0.273	0.300	0.33	0.36	0.39	0.43	0.46	0.50	0.53	0.57
3000	0.61	0.66	0.70	0.74	0.79	0.84	0.88	0.93	0.98	1.04
4000	1.09	1.15	1.20	1.26	1.32	1.38	1.44	1.51	1.57	1.64
5000	1.70	1.77	1.84	1.91	1.99	2.06	2.14	2.21	2.29	2.37
6000	2.45	2.54	2.62	2.71	2.79	2.88	2.97	3.06	3.15	3.25
7000	3.34	3.44	3.53	3.63	3.73	3.83	3.94	4.04	4.15	4.25
8000	4.36	4.47	4.58	4.70	4.81	4.93	5.04	5.16	5.28	5.40
9000	5.52	5.65	5.77	5.90	6.02	6.15	6.28	6.41	6.55	6.68
10000	6.82	6.95	7.09	7.23	7.37	7.52	7.65	7.80	7.95	8.10

N. p. mamy obliczyć poprawkę wysokości dla punktu odległego o 3245 m. Na skrzyżowaniu wiersza dla $a = 3000$ m i kolumny dla $a = 200$ m otrzymamy poprawkę $\dots \dots \dots 0.70$ m

Różnica między $a = 200$ i $a = 300$ m wynosi $0.74 - 0.70 = 0.04$ m, czyli dla jednego metra 0.0004 , zatem dla 45 m $\dots 0.0004 \cdot 45 = 0,0180$ którą dodamy do poprzednich 0.70 m $\dots \dots \dots 0.018$ m

Zatem cała poprawka wynosi $\dots 0.718$ m

Jest to zwykła interpolacja.

Na fig. 147. przyjęliśmy punkty A i B na terenie. Tymczasem, w punkcie A ustawia się instrument mający wysokość I , zaś w punkcie B stoi tarcza w pewnej wysokości nad terenem, którą oznaczamy przez t . Wzór (14.) należy więc odpowiednio uzupełnić, według rysunku fig. 148. i 149., mianowicie:

Jeżeli teren ku punktowi B się wznosi, to według fig. 148. otrzymamy:

$$H = h + I - t \quad \text{czyli}$$

$$H = a \cdot \text{tg } \alpha + a^2 + \frac{1-k}{2r} + I - t \dots \dots \dots (19)$$

Jeżeli zaś teren od punktu A do B spada, to na podstawie fig. 149. otrzymamy:

$$H = h - I + t \dots \dots \dots (20)$$

W tym wypadku zachodzą jeszcze pewne różnice w porównaniu z poprzednim. Przyjmijmy, jak wskazano na fig. 150., że punkt A, z którego mamy pomierzyć wysokość punktu B, znajduje się na górze.

Krzywa AB przedstawia refrakcję, łuk AD poziomy geodezyjny a styczna AC poziom pozorny punktu A — podobnie łuk BB₁ jest poziomem geodezyjnym punktu B. Punkt B widzimy, wskutek refrakcji, w kierunku stycznej do krzywej AB, zatem w B', a stąd wynika, że mierzymy kąt α zamiast α' i to kąt za

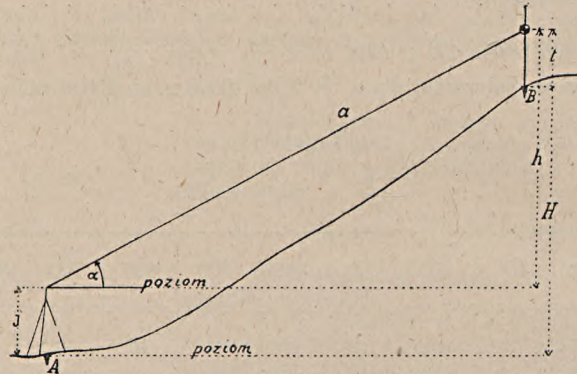


Fig. 148.

mały, przeciwnie jak poprzednio mierzyliśmy kąt za wielki. Zresztą poprawka wskutek kulistości ziemi nie zmienia się i dla niej pozostaje poprzedni wzór $y = \frac{a^2}{2r}$ podobnie poprawka wskutek refrakcji $z = \frac{a^2 k}{2r}$. Natomiast ilość z należy dodać, zaś

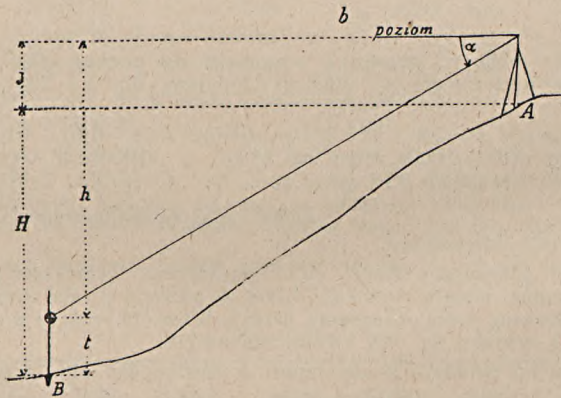


Fig. 149.

y odjąć od obliczonej ilości h' , co jest łatwo zrozumiałe z rysunku. Ostatecznie różnicę wysokości obu punktów wyraża równanie:

$$h = h' - y + z \quad \text{gdzie } h' = a \cdot \text{tg } \alpha \dots \dots \dots (21)$$

$$\text{czyli } h = a \cdot \text{tg } \alpha - \frac{a^2}{2r} + \frac{a^2 k}{2r} = a \text{tg } \alpha - a^2 \frac{1-k}{2r} \dots \dots \dots (22)$$

Uwzględniając zaś równanie (20.) otrzymamy:

$$H = a \operatorname{tg} \alpha - a^2 \frac{1-k}{2r} - I + t. \dots \dots \dots (23)$$

jako ostateczny wzór do obliczenia różnicy wysokości dwu punktów przy terenie spadającym.

Według fig. 150. mierzymy odległość obu punktów w poziomie punktu wyższego, podczas gdy poprzednio (fig. 147.) mierzyliśmy ją w poziomie niższym. Mogłaby stąd powstać pewna wątpliwość, którą jednak usuniemy w następujący sposób:

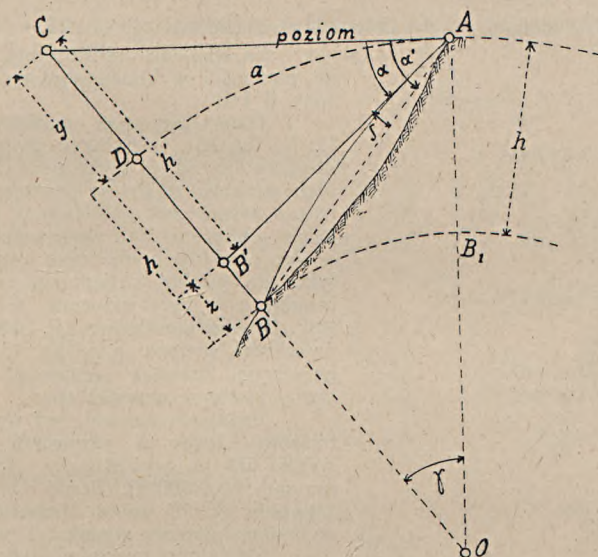


Fig. 150.

Przypuśćmy, że różnica obu poziomów jest znaczna i wynosi n. p. 1000 m, czyli promień obu poziomów geodezyjnych różnią się także o 1000 m. Przyjawszy promień ziemi $r = 6370300$ m i nazwijmy łuk odpowiadający temu promieniowi przez l , zaś łuk dla promienia większego przez l_1 , to obliczymy z proporcji:

$$l : l_1 = r : r + 1000$$

$$l_1 = l \frac{r + 1000}{r} = 1.000156 l$$

Przyjmując za l różne wartości, otrzymamy następujące porównanie:

jeżeli	$l =$	100 m	1000 m	5000 m	10000 m
to	$l_1 =$	100·0156 m	1000·156 m	5000·78 m	10000·66 m

Różnice między powyższymi długościami są o wiele mniejsze, niż wynoszą dozwolone błędy pomiaru. Tak n. p. dozwolony błąd pomiaru długości 1000 m wynosi 61·5 cm, podczas gdy powyżej mamy różnicę obu łuków 15·6 cm. Z tego wynika, że nawet przy tak znacznych różnicach poziomów, mierzyć możemy długości w niższym lub wyższym, bez obawy, by stąd powstać mogły jakiegokolwiek wątpliwości, tem więc bardziej, gdy różnice poziomów są mniejsze. Zatem praktycznie, długość łuku $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BB_1}$.

§ 3. Przykłady.

1. Dana jest odległość dwóch punktów A i B: $a = 2675$ m. Pomierzono ze stanowiska A, niższego od B:

$$\alpha = 0^\circ 32' 10'' \text{ — następnie } I = 1.20 \text{ t} = 3.00 \text{ m.}$$

Według równania (19.) otrzymamy:

$$H = a \cdot \operatorname{tg} \alpha + a^2 \frac{1-k}{2r} + I - t$$

$$\begin{array}{l} \log a = 2.42732 \\ \log \operatorname{tg} \alpha = 7.97112 - 10 \\ \log (a \cdot \operatorname{tg} \alpha) = 1.39844 \\ a \cdot \operatorname{tg} \alpha = 25.0288 \text{ m.} \end{array}$$

Z tab. 16.:

$$a^2 \frac{1-k}{2r} = 0.49 \text{ m}$$

$$\text{Zatem } H = 25.0288 + 0.49 + 1.20 - 3.00 = 23.72 \text{ m.}$$

Ze względu na kontrolę, powinno się, ile możliwości wykonać pomiary z obu stanowisk A i B.

Dana jest sieć punktów A, B, C, D, E, fig. 151. — służyć mająca jako stanowiska do zdjęć szczegółowych. Położenie tych punktów zdjęto za pomocą tryangulacji, równocześnie zaś pomierzono kąty pionowe celem obliczenia ich wysokości. Z każdego z tych punktów pomierzono kąty pionowe nie tylko do punktu sąsiedniego, lecz także do innych, o ile były widoczne, a to celem kontroli. Wyniki pomiarów, t. j. obliczenie różnic wysokości, podane są na fig. 151. — strzałki oznaczają kierunek wzniesień, zatem przeciwny kierunek oznacza spad.

Zadaniem naszym jest wyrównanie pomiarów. Liczby w nawiasach przedstawiają wyniki już po wyrównaniu. Kątę punktu A przyjęto jako 100.000 . Punkt D widoczny był z punktów A i B, zatem z obu tych stanowisk wykonano pomiary wysokości punktu D.

Odległości punktów są następujące:

AB = 340.0 m	AD = 820.0 m	CE = 350.0 m
AC = 380.0 „	CD = 450.0 „	BE = 400.0 „
BC = 320.0 „	ED = 410.0 „	BD = 710.0 „

a) Wyrównanie dla punktu D.

1. Pomiar bezpośredni z punktu A

$$\begin{array}{r} 100.00 \\ + 25.68 \\ \hline \text{Kota D} = 125.68 \end{array}$$

2. Pośrednio przez punkt B.

$$\begin{array}{r} 100.00 \\ - 5.35 \\ \hline 94.65 \\ + 31.10 \\ \hline \text{Kota D} = 125.75 \end{array}$$

3. Pośrednio przez B i C.

$$\begin{array}{r} 100.00 \\ - 5.35 \\ \hline 94.65 \\ + 15.70 \\ + 15.30 \\ \hline \text{Kota D} = 125.65 \end{array}$$

4. Pośrednio przez B i E.

$$\begin{array}{r} 100.00 \\ - 5.35 \\ \hline 94.65 \\ + 18.60 \\ + 12.40 \\ \hline \text{Kota D} = 125.65 \end{array}$$

5. Pośrednio przez B, C i E.

$$\begin{array}{r} 100.00 \\ - 5.35 \\ \hline 94.65 \\ + 15.70 \\ + 3.05 \\ + 12.40 \\ \hline \text{Kota D} = 125.80 \end{array}$$

Średnia arytm. z tych pięciu spostrzeżeń wynosi 125.706 m i ją przyjmujemy jako wysokość punktu D.

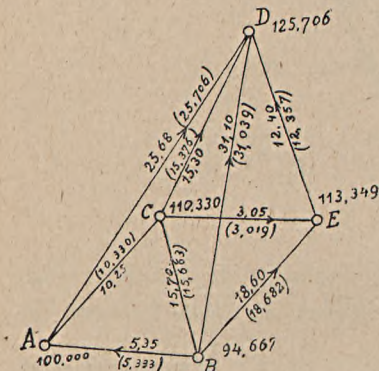


Fig. 151.

Mając ustalone wysokości punktów najdalszych, t. j. A i D, wyrównamy pomiary innych punktów pośrednich, mianowicie:

b) Wyrównanie dla punktu B.

1. Bezpośrednio z A. $\begin{array}{r} 100\cdot000 \\ - 5\cdot350 \\ \hline \text{Kota B} = 94\cdot650 \end{array}$	2. Bezpośrednio z D. $\begin{array}{r} 125\cdot706 \\ - 31\cdot100 \\ \hline \text{Kota B} = 94\cdot606 \end{array}$	3. Pośrednio z D przez C. $\begin{array}{r} 125\cdot706 \\ - 15\cdot300 \\ - 15\cdot700 \\ \hline \text{Kota B} = 94\cdot706 \end{array}$
4. Pośrednio z D przez E. $\begin{array}{r} 125\cdot706 \\ - 12\cdot400 \\ - 18\cdot500 \\ \hline \text{Kota B} = 94\cdot706 \end{array}$		

Średnia arytmetyczna tych spostrzeżeń wynosi 94·667 m.

c) Wyrównanie dla punktu E.

1. Bezpośrednio z B. $\begin{array}{r} 94\cdot667 \\ + 18\cdot600 \\ \hline \text{Kota E} = 113\cdot267 \end{array}$	2. Bezpośrednio z D. $\begin{array}{r} 125\cdot706 \\ - 12\cdot400 \\ \hline \text{Kota E} = 113\cdot306 \end{array}$	3. Pośrednio z D przez C. $\begin{array}{r} 125\cdot706 \\ - 15\cdot300 \\ \hline 110\cdot406 \\ + 3\cdot050 \\ \hline \text{Kota E} = 113\cdot456 \end{array}$
4. Pośrednio z A przez C. $\begin{array}{r} 100\cdot000 \\ + 10\cdot250 \\ + 3\cdot050 \\ \hline \text{Kota E} = 113\cdot300 \end{array}$	5. Pośrednio z B przez C. $\begin{array}{r} 94\cdot667 \\ + 15\cdot700 \\ + 3\cdot050 \\ \hline \text{Kota E} = 113\cdot417 \end{array}$	Średnia arytmetyczna dla punktu E = 113·349 m.

d) Wyrównanie dla punktu C.

1. Z punktu A. $\begin{array}{r} 100\cdot000 \\ + 10\cdot250 \\ \hline \text{Kota C} = 110\cdot250 \end{array}$	2. Z punktu B. $\begin{array}{r} 94\cdot667 \\ + 15\cdot700 \\ \hline \text{Kota C} = 110\cdot367 \end{array}$	3. Z punktu D. $\begin{array}{r} 125\cdot706 \\ - 15\cdot300 \\ \hline \text{Kota C} = 110\cdot406 \end{array}$
4. Z punktu E. $\begin{array}{r} 113\cdot349 \\ - 3\cdot050 \\ \hline \text{Kota C} = 110\cdot299 \end{array}$	Średnia arytmetyczna dla punktu C = 110·330 m.	

Z obliczonych wyżej kot punktów zestawiono na fig. 151. spady, t. j. różnice ich wysokości i wypisano wzdłuż danych kierunków w nawiasach.

Powyższe wyrównanie jest bardzo proste, lecz nie odpowiada teorii błędów. W dokładnem wyrównaniu musimy wziąć w rachubę wagi spostrzeżeń, które zależne są od odległości i od refrakcyi, zmieniającej się w ciągu dnia i zależnej od różnych czynników, między którymi, jak wskazuje tabela 16., najważniejszą rolę odgrywa odległość. Wpływ niepewności współczynnika k rośnie wraz z odległością; możemy więc powiedzieć, że na błąd pomiaru wpływa głównie odległość, że do niej błąd jest proporcjonalny, zatem wagi spostrzeżeń, jak to wiemy z teorii błędów, będą odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości.

Zatem $p = \frac{1}{s^2}$ gdzie p oznacza wagę, zaś s odległość.

Teraz możemy przystąpić do wyrównania.

A) Wyrównanie dla punktu D.

Według zestawienia pod A, otrzymaliśmy dla punktu D z pomiarów, następujące, różne wysokości:

1.	125·680	przyczem	AD = 820 m	okrągło	$s_1 = 0·8$ km
2.	125·750	odległości	AB + BD = 1050 m	"	$s_2 = 1·0$ "
3.	125·650	wynosiły:	AB + BC + CD = 1110 m	"	$s_3 = 1·1$ "
4.	125·650		AB + BE + ED = 1150 m	"	$s_4 = 1·1$ "
5.	125·800		AB + BC + CD + ED = 1420 m	"	$s_5 = 1·4$ "

Dalszy tok rachunku przedstawia tabela 18.

Tabela 18.

	l	s km	$p = \frac{1}{s^2}$	p · l	$v = \frac{v}{0.67 - 1}$	v^2	$p v^2$
1	125·600	0·8	1·56	0·936	+ 0·07	0·0049	0·0076
2	125·750	1·0	1·00	0·750	— 0·08	0·0064	0·0064
3	125·650	1·1	0·82	0·533	+ 0·02	0·0004	0·0003
4	125·650	1·1	0·82	0·533	+ 0·02	0·0004	0·0003
5	125·800	1·4	0·51	0·408	— 0·13	0·0169	0·0086
	średnia 125·706		4·71	3·100			0·0232

Objaśnienia: Rubryki l, s i $p = \frac{1}{s^2}$ nie wymagają bliższych wyjaśnień.

W rubryce p · l zawarte iloczyny powstały z pomnożenia l, lecz zmniejszonego o 125, jako wspólnej ilości wszystkim spostrzeżeniom; zatem w pierwszym n. p. wierszu $p l = 0·600 · 1·56 = 0·936$ — w następnych postąpiono tak samo, a to tylko ze względu na uproszczenie rachunku. Rubryka $v = 0·67 - 1$ — powstała z następujących relacji: średnia wartość $x = \frac{[p l]}{[p]} = \frac{3·16}{4·71} = 0·67$; poszczególne zaś błędy obliczamy jako $v = x - 1$, przyczem podobnie jak poprzednio odrzuciliśmy 125 z rubryki dla l, biorąc w rachubę tylko dziesiątne.

Zatem, prawdopodobna wartość koty punktu D wynosi $125 + x = 125·67$ m, podczas gdy poprzednio obliczona zwykła średnia arytmetyczna wynosiła 125·706 m.

Wreszcie obliczymy:

Błąd każdego z pojedynczych spostrzeżeń, t. j. m:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{0·0232}{4}} = \pm 0·076 \text{ m.}$$

Błąd prawdopodobnej wartości, t. j. M:

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \pm \frac{0·076}{2·17} = \pm 0·035 \text{ m.}$$

Wysokość punktu D, z uwzględnieniem obliczonego błędu, będzie zatem:

$$D = 125·67 \pm 0·035 \text{ m.}$$

W ten sam sposób wyrównamy i pozostałe punkty.

Różnice nie będą wprawdzie wielkie, lecz wyrównanie będzie przeprowadzone na słusznych podstawach, nie zaś dowolnie za pomocą zwykłej średniej arytmetycznej.

Trygonometryczny pomiar wysokości, wraz z obliczeniem i wyrównaniem, zajmuje znacznie mniej czasu niż niwelacja, zwłaszcza w terenie trudnym i dla

punktów rozrzuconych w większych odległościach. Jest on do polecenia szczególnie w terenie górzystym, w którym, z natury rzeczy podstawa pomiarów i punkty stałe znajdują się w większej odległości od miejsc trudnych.

Pomiar kąta pionowego wykonuje się w ten sam sposób, jak kąta poziomego, t. j. odczytuje się oba noniusze w dwóch położeniach lunety. Niekiedy używa się także instrumentu z kołem pionowym repetycyjnym, lecz takie urządzenia są rzadkie.

Dokładność trygonometrycznego pomiaru wysokości można znacznie zwiększyć w następujący sposób:

Przyjmijmy, że mamy dane 2 punkty w odległości n km jeden od drugiego. Obierzmy stanowisko w środku tej odległości i pomierzmy wysokości obu punktów, względem stanowiska instrumentu. Ponieważ oba pomiary wykonane będą niemal równocześnie, więc w różnicy wysokości obu punktów wpływ refrakcyi schodzi do minimum, a pozostaje tylko błąd wskutek nieuniknionej niedokładności pomiaru kąta pionowego. Możemy w ten sposób pomierzyć i obliczyć różnice wysokości całej grupy punktów, znając zaś kąt jednego z nich, obliczyć wysokości innych. Obierając stanowisko ile możności w środku, osiągniemy dokładność o 60% większą, niż mierząc wysokość jednego punktu, ze stanowiska drugiego punktu.

Jeżeli więc mamy instrument, za pomocą którego mierzyć możemy kąty z dokładnością 5", tudzież uwzględniając niepewność współczynnika k o 25% — popelniamy, przy starannych pomiarach przeciętnie błąd, którego wielkość wynosi

$$m = n \cdot \alpha \dots \dots \dots (24)$$

gdzie n oznacza odległość w km obu punktów, zaś α wynosi przeciętnie 3'5 cm, to przy pomiarze ze stanowiska pośredniego popelnimy błąd

$$m_1 = n \cdot 0'4 \alpha = n \cdot 1'4 \text{ cm} \dots \dots \dots (25)$$

o ile odległość n nie przekracza 10 km.

ROZDZIAŁ XI.

Pomiar kierunków.

§ 1. Przyrządy do pomiaru kątów.

Do pomiaru kątów poziomych służyć może opisany już poprzednio instrument uniwersalny, o ile podział limbusu pozwala na dokładność taką, jaka jest w danym razie wymagana. Do zdjęć tachymetrycznych wystarcza dokładność pomiaru kąta poziomego na 1' lub co najwyżej na 30" — natomiast do zdjęć t. zw. polygonalnych, wymagana jest znacznie większa dokładność, bo na 2 do 5", do tryangulacji na 1". Dlatego, do zdjęć dokładnych, używamy specjalnego przyrządu, t. zw. Teodolitu. Między instrumentem uniwersalnym a teodolitem zachodzi ta różnica, że teodolit ma limbus o większej średnicy czyli możliwy jest drobniejszy podział kątów, następnie, na osi poziomej obrotu lunety posiada libellę nasadkową poprzeczną, bardzo czułą, o wartości przewagi od 5 do 8"; zazwyczaj ma też dwa noniusze mikroskopowe (niekiedy cztery) — wreszcie lepszą lunetę, o długości do 40 cm o powiększeniu od 40 do 55-krotnym.

Rektyfikację tego instrumentu przeprowadza się w ten sam sposób, jak instrumentu uniwersalnego. Nadto, poprzeczna libella na osi poziomej służy do dokładnego zrektyfikowania i ustawienia tejże osi, co jest bardzo ważnem przy pomiarze kątów. Noniusz mikroskopowy urządzony jest w ten sposób, że posiada nitkę podobnie umieszczoną jak w okularze lunety i w normalnem położeniu zgadzającą się z zerem noniusza. Odległość między zerem noniusza a najbliższą kreską limbusu mierzy się za pomocą przesuwania tej nitki, do czego służy śruba, podobnie skonstruowana, jak śruba mikrometryczna, którą już znamy. Jeden obrót śruby zgadza się z jedną całą przedziałką na limbusie. Ponieważ tarcza śruby ma odpowiedni podział na obwodzie, a jest równocześnie dostatecznie wielką, więc też możemy bardzo drobne przesunięcia nitki, odczytać wygodnie na tarczy śruby. Stąd też pochodzi, że za pomocą takiego noniusza mikroskopowego, odczytać możemy kąt z dokładnością 1 do 2".

Zwykle mikroskop ma dwie nitki; w normalnem położeniu zero noniusza znajduje się w środku między oboma nitkami, a kąt mierzymy, przesuując nitki tak, by najbliższa kreska limbusea znalazła się także w środku między niemi. Doświadczenie bowiem wykazało, że znacznie dokładniej da się ocenić położenie kreski w środku między dwoma nitkami, niż za pomocą jednej nitki, któraby miała kreskę zakrywać.

Do dokładnych pomiarów kątów poziomych używa się zawsze instrumentu repetycyjnego, w którym także limbus daje się obracać naokoło osi pionowej. Limbus sprzęga się silnie z alhidadą odpowiednią śrubą, ustawivszy ją poprzednio w ten sposób, że zero limbusea zgadza się z zerem noniusza.

Kąty mierzy się zawsze w ten sam sposób, t. j. idąc w kierunku ruchu wskazówek na zegarze, powtarza się zaś pomiar w przeciwnym kierunku. Normalne położenie lunety jest takie, w którym koło pionowe znajduje się po lewej stronie; na tej samej stronie znajduje się noniusz Nr. I., na przeciwnej Nr. II. Odczytuje się też w normalnem położeniu najpierw noniusz I., potem II.

Często używa się też teodolitu, w którym luneta jest umieszczona ekscentrycznie, a to ze względów na lepszą konstrukcję instrumentu. Jak wiemy, odczyt kąta w dwu położeniach lunety, eliminuje wpływ ekscentryczności.

§ 2. Sposoby pomiaru kątów.

1. Pomiar metodą repetycyjną.

Ustawivszy instrument dokładnie nad wierzchołkiem kąta, nastawiamy alhidadę ściśle tak, by noniusz wskazywał na limbuseie kąt $0^{\circ} 0' 0''$ i sprzęgamy je ze sobą silnie. Następnie, zwalniamy sprzęg limbusea ze spodarką i obracamy limbus, celując lunetę do lewego sygnału, t. j. kierujemy lunetę na lewe ramię kąta. Skoro przez lunetę widać już sygnał, wówczas sprzęga się limbus ze spodarką, a za pomocą śruby do ruchu powolnego, kieruje się lunetę, a raczej oś celową na środek sygnału. Po starannem wycelowaniu, sprawdzamy, czy zero noniusza nie przesunęło się jakimkolwiek przypadkiem. Skoro celowa będzie dokładnie w kierunku ustawiona, a zero noniusza zgadza się z zerem limbusea, limbus zaś sprężnięty jest ze spodarką, wówczas zwalniamy sprzęg alhidady i obracamy ją po limbuseie, kierując do prawego sygnału. Gdy sygnał znajdzie się już w polu widzenia, blisko nitki pionowej, wówczas sprzęga się alhidadę z limbuseem, a dokładne skierowanie celowej na środek sygnału wykonywa się śrubą do ruchu powolnego.

Zatem celowaliśmy najpierw do lewego sygnału, przyczem odczyt na noniuszu Nr. I. był: $0^{\circ} 0' 0''$ — na noniuszu Nr. II. był odczyt $180^{\circ} 0' 0''$, lub bardzo mało odeń się różniący skutkiem ekscentryczności alhidady i pewnych błędów w podziale limbusea. Te dwa odczyty zapisuje się w protokole.

Po wycelowaniu do prawego sygnału, odczytujemy i zapisujemy także oba noniusze, lecz odczyt ten, jak później zobaczymy, służy tylko jako pomocnicza kontrola. Słowem, pomierzyliśmy raz kąt α .

Teraz, gdy limbus jest sprężnięty z alhidadą, zwalniamy sprzęg limbusea ze spodarką i obracamy limbus wraz z alhidadą, kierując lunetę na lewy sygnał, zupełnie tak, jak na początku pomiaru. Po ustawieniu celowej, przyczem znowu spodarka z limbuseem będzie sprężnięta, zwalniamy sprzęg alhidady i obracamy ją po limbuseie, kierując lunetę do prawego sygnału, jak poprzednio; po tem drugim wycelowaniu mieliśmy odczyt kąta 2α —; kąta jednak nie odczytujemy, tylko zapisujemy się w protokole numer pomiaru, poczem znowu wracamy do lewego ramienia, potem do prawego i t. d. W końcu, po 4 lub 6 krotnym, wogóle po n krotnym pomiarze, odczytujemy na noniuszach kąt $n\alpha$.

Celem lepszego zrozumienia zaznaczamy, że alhidadę obróciliśmy po limbuseie n razy w granicach łuku odpowiadającego danemu kątowi, zatem ostatnie odczyty na obu noniuszach odpowiadają n krotnej wartości kąta, którego wielkość również znamy w przybliżeniu po pierwszym odczycie kąta α na prawem jego ramieniu.

Następnie, ukonczyvszy wyżej opisany pomiar, zwalniamy sprzęg alhidady, obracamy lunetę około osi poziomej w drugie położenie i celujemy lunetę do prawego ramienia, przyczem spodarka jest sprężnięta z limbuseem. Zapisujemy przy tem pierwszym celowaniu oba noniusze, celujemy do ramienia lewego, potem wracamy do prawego, czyli zupełnie w ten sam sposób mierzymy n razy kąt α jedynie

tylko z tą zmianą, że idziemy od prawego ramienia do lewego. Znowu więc przy n tym pomiarze, dostaniemy wartość $n \cdot \alpha$.

Dla n krótniej wartości kąta, mamy więc 4 odczyty na noniuszach — z których obliczymy średnią wartość według równania:

$$\alpha = \frac{n \cdot \alpha_1 + n \cdot \alpha_2 + n \cdot \alpha_3 + n \cdot \alpha_4}{4n} = \frac{[n \alpha]}{4n} \dots \dots \dots (1)$$

Sposób ten stosuje się do pomiaru jednego kąta. Mierząc kąt n razy, na różnych łukach limbusu, zmniejszamy wpływ błędów w podziale limbusu do możliwego minimum, zależnie od ilości powtarzań pomiaru. Przez odczyt zaś obu noniuszów, w dwóch położeniach lunety, usuwamy znowu, jak wiadomo, wpływ ekscentryczności lunety i alhidady.

Następujący przykład wykazuje repetycyjny sposób pomiaru kąta:

Tabela 19.

Kąt	Powtórzenie Nr.	I. Położenie lunety		II. Położenie lunety		Uwaga
		I. Noniusz	II. Noniusz	I. Noniusz	II. Noniusz	
1	2	3	4	5	6	7
(1) I. (2)	0	0° 00' 00"	179° 59' 50"	180° 00' 10"	0° 00' 10"	n = 5
	1	120° 32' 20"	—	—	—	
	2	—	—	—	—	
	3	—	—	—	—	
	4	—	—	—	—	
	5	242° 41' 40"	62° 41' 50"	62° 41' 40"	242° 41' 30"	
		360° 00' 06"	540° 00' 00"	540° 00' 00"	360° 00' 00"	+
	$n \cdot \alpha =$	602° 41' 40"	602° 41' 50"	602° 41' 40"	602° 41' 30"	
	$[n \alpha] =$	2408° 164' 160"				
	$\frac{[n \alpha]}{4n} = \frac{[n \cdot \alpha]}{20} =$	120° 32' 20"				

Objaśnienia: Pierwszy odczyt 0° 00' 00", względnie na noniuszu II. odczyt 179° 59' 50", oznaczamy numerem 0 — bo to nie był jeszcze pomiar kąta, lecz tylko nastawienie celowej na sygnał. Dopiero po wycelowaniu do sygnału na prawem ramieniu kąta, którego wierzchołek oznaczyliśmy rzymską cyfrą I, lewe ramię cyfrą (1), prawe cyfrą (2) — dostajemy pomiar, który zapisano jako Nr. 1 — 120° 32' 20", a który służy do kontroli, jak w dalszym ciągu zobaczymy. Jeżeli zamierzaliśmy pięciokrotny pomiar, jak w powyższym przykładzie, to po piątym wycelowaniu do prawego sygnału, odczytamy kąt 242° 41' 40" — względnie 62° 41' 50" na II-gim noniuszu.

Wielkość kąta w przybliżeniu znamy (około 120° 32' 20"), zatem pięciokrotny kąt powinien wynosić około 5 · 120° 32' 20" = 602° 41' 40", skąd wnosimy, że podczas pomiaru zero noniusza I obiegło cały limbus i przeszło przez 360°. Odczyty na drugim noniuszu różnią się od pierwszych o 180° — zatem, ażeby je zrównać z pierwszymi, należy do nich dodać 360 + 180 = 540°. Przez dodanie 360° względnie 540° otrzymaliśmy wartość pomierzonych kątów na każdym noniuszu, t. j. $n \cdot \alpha$. — Jak widzimy, pomiary różnią się nieco w sekundach. Ponieważ ten kąt mierzyliśmy zawsze w tych samych warunkach, przeto najprawdopodobniejszą jego wartością będzie średnia arytmetyczna, która wyniesie: (40 + 50 + 40 + 30) : 4 = 40" — minuty i stopnie pozostaną niezmienione. Zatem 5-cioкратно wartość kąta wynosi 602° 41' 40",

a więc pojedyncza $(602^{\circ} 41' 40'') : 5 = 120^{\circ} 32' 20''$ — To samo otrzymamy z wzoru

$$\alpha = \frac{[n \alpha]}{4n}$$

Metody repetycyjnej używamy do pomiaru tylko jednego kąta.

Przy trygonometrycznym pomiarze wysokości mierzymy kąt pionowy w ten sam sposób. Jedno ramię kąta jest wówczas poziome i położenie lunety ustala libella, drugie ramię wyznacza sygnał w danym punkcie.

2. Do pomiaru kilku kątów, czyli kierunków, mających wspólny wierzchołek, stosujemy metodę pomiaru seryami.

Przypuśćmy, że mamy pomierzyć cztery kąty: α_1 α_2 α_3 i α_4 , mające wspólny wierzchołek w punkcie I. fig. 152.

Ustawiamy instrument nad wierzchołkiem, następnie sprzągamy alhidadę z limbusem na $0^{\circ} 0' 0''$.

Zwalniamy sprzęg limbusu ze spodarką, kierujemy lunetę na punkt (1), nastawiamy dokładnie celową na środek sygnału za pomocą śruby do ruchu powolnego po sprzągnięciu limbusu ze spodarką i kontrolujemy, czy zero noniusza nie przesunęło się.

W protokole zapisuje się oba odczyty, jak to wskazano w tabeli 20.

Następnie, zwalniamy alhidadę, celujemy do punktu (2) — sprzągamy limbus z alhidadą (spodarka z limbusem pozostaje przytem zawsze sprzągnięta), nastawiamy dokładnie celową za pomocą śruby do ruchu powolnego na sygnał i odczytujemy oba noniusze.

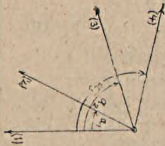


Fig. 152.

Podobnie postępujemy z odczytami do punktu (3) i (4), t. j. obracamy zawsze alhidadę, podczas gdy spodarka z limbusem jest sprzągnięta.

W końcu celujemy znowu do punktu (1) i odczytujemy oba noniusze, ażeby się przekonać, czy podczas pomiaru limbus się nie poruszył. Jeżeli się okazała widoczna różnica, większa niż $5''$, to należy cały pomiar powtórzyć.

Po wykonaniu powyższych pomiarów w kierunku od (1) do (4), przrzućmy lunetę, zwalniamy alhidadę, obracamy ją o 180° , celując do punktu (1), następnie do (4), (3), (2), a wreszcie wracamy do (1), czyli powtarzamy pomiar, idąc w kierunku przeciwnym.

Taki pomiar kilku kątów o wspólnym wierzchołku, nazywamy pierwszą seryą. Drugą seryę zaczynamy, sprzągając alhidadę z limbusem nie na $0^{\circ} 0' 0''$, jak przy rozpoczynaniu pomiarów pierwszej seryi, lecz w innym punkcie limbusu, zależnie od tego, ile seryi chcemy wykonać. N. p. dla ośmiu seryi, sprzągamy alhidadę na 45° przy drugiej, na 90° przy trzeciej seryi na 180° i t. d.; dla sześciu seryi sprzągamy alhidadę co 60° — dla 4-ch co 90° .

Następujący przykład podany w tabeli 20 (na str. 167.) — wraz z objaśnieniami, daje obraz, w jaki sposób przeprowadza się pomiar kątów seryami.

Rozpatrzymy się w protokole na str. 167., widzimy zupełnie jasno sposób pomiaru kątów — w tym wypadku w dwóch seryach — zupełnie zaś podobny będzie pomiar w kilku seryach.

W kolumnie 6 dodane są wierszami minuty i sekundy; jeżeliby w minutach nie było różnic, to dodaje się zwykle tylko sekundy.

Sumy minut i sekund poszczególnych kolumn, t. j. 2 do 5, dodane do siebie, zgodzić się powinny ze sumą w kolumnie 6. W kolumnie 7 obliczono średnie arytmetyczne z poszczególnych odczytów (wierszów), przyczem stopnie przyjęto z kolumny 1.

W końcu, kolumna 8 zawiera pomiary, zredukowane do $0^{\circ} 0' 0''$, t. z. odczyt do punktu (1) przyjmujemy jako $0^{\circ} 0' 0''$ — a ponieważ średnia arytmetyczna wykazuje $0^{\circ} 0' 10''$ — więc odczyt ten zmniejszamy o $10''$ — lecz równocześnie od wszystkich innych, obliczonych w kolumnie 7, odjąć musimy $10''$ — naturalnie tylko w pierwszej seryi. W drugiej seryi odjąć musimy $100^{\circ} 00' 05''$. Przez tę redukcję różnice między odczytami kątów się nie zmieniły, liczby zaś w kolumnie 8 przedstawiają skutkiem tego odrazu wartości kątów zawartych między ramieniem I. (1) a innym, n. p. w pierwszej seryi kąt (1) I. (4) wynosi $108^{\circ} 36' 02.5''$.

Tabela 20.

Pomiar trzech kątów, w dwóch seryach po 100°.

Cel do punktu	I. Potożenie lunety		II. Potożenie lunety		Suma	Średnia	Redukcyja na 0° 0' 0"
	Noniusz I.	Noniusz II.	Noniusz I.	Noniusz II.			
1	2	3	4	5	6	7	8
(1) Serya I.	0° 00' 00"	180° 00' 20"	180° 00' 10"	0° 00' 10"	00' 40"	0° 00' 10"	0° 00' 00"
(2)	31° 10' 10"	211° 10' 30"	211° 10' 40"	31° 10' 20"	40' 100"	31° 10' 25"	31° 10' 15"
(3)	72° 05' 20"	252° 05' 40"	252° 05' 50"	72° 05' 10"	20' 120"	72° 05' 30"	72° 05' 20"
(4)	108° 36' 00"	288° 36' 10"	288° 36' 20"	108° 36' 20"	144' 50"	108° 36' 12.5"	108° 36' 02.5"
(1) Serya II.	100° 00' 00"	280° 00' 10"	280° 00' 00"	100° 00' 10"	00' 20"	100° 00' 05"	0° 00' 00"
(2)	131° 10' 20"	311° 10' 20"	311° 10' 20"	131° 10' 30"	40' 90"	131° 10' 22.5"	31° 10' 17.5"
(3)	172° 05' 10"	352° 05' 50"	352° 05' 40"	172° 05' 10"	20' 110"	172° 05' 27.5"	72° 05' 22.5"
(4)	208° 36' 20"	28° 36' 20"	28° 36' 30"	208° 36' 30"	144' 100"	208° 36' 25"	108° 36' 20"
	102' 80"	102' 200"	102' 210"	102' 140"	408' 630"	102' 157.5"	

Suma: 408' 630"

$$(102' 157.5) \cdot 4 =$$

$$= 408' 630''$$

Z porównania odpowiednich wielkości w kolumnie 8, wynika, że w obu seryach mamy różnice w pomiarze kątów. Ponieważ pomiary obu seryj były robione w zupełnie tych samych warunkach, więc prawdopodobna wartość będzie średnią arytmetyczną, jak to obliczono w tabeli 21.

Tabela 21.

Cel	Serya I.	Serya II.	Suma	Średnia
(1)	0° 00' 00"	0° 00' 00"	00"	0° 00' 00"
(2)	31° 10' 15"	31° 10' 17.5"	32.5"	31° 10' 25"
(3)	72° 05' 20"	72° 05' 22.5"	42.5"	72° 05' 21.25"
(4)	108° 36' 02.5"	108° 36' 20"	22.5"	108° 36' 11.25"
	37.5"	60"		
	97.5"		97.5"	

Tabela 21. nie wymaga już bliższych wyjaśnień.

Poszczególne kąty obliczymy jako różnice odczytów, mianowicie:

$$1. \text{ Kąt (1) I. (2)} = 31^\circ 10' 25''$$

$$2. \text{ „ (2) I. (3)} = 72^\circ 05' 21.25'' - 31^\circ 10' 25'' = 40^\circ 54' 56.25''$$

$$3. \text{ „ (4) I. (3)} = 108^\circ 36' 11.25'' - 72^\circ 05' 21.25'' = 36^\circ 30' 50''.$$

Dokładne pomiary kierunków, zwłaszcza gdy odległości są większe niż 6 km, wykonywać się powinno w odpowiednim do tego czasie, t. j. podczas pogody i czystego powietrza; popołudniu, rano i w południe jest zwykle tak silne parowanie i wibracja powietrza, że cele nie są pewne. Przy mniejszych odległościach można pracować cały dzień, z wyjątkiem godzin południowych przy równoczesnym upale.

3. Jeszcze wypada nam zastanowić się nad obu powyższymi metodami, mianowicie nad błędami, jakie są możliwe przy stosowaniu ich, nie mówiąc już o błędach pomiaru kątów, które poprzednio opisaliśmy i które są niejako ogólną właściwością tego rodzaju spostrzeżeń.

Do pomiaru jednego kąta użyć możemy obu metod.

Na błąd pomiaru składają się: błąd w ustawieniu celowej, t. j. niedokładne skierowanie osi celowej na sygnał, który nazwijmy przez α , tudzież błąd w odczycie noniuszów β . Ponieważ mamy tu dwie celowe: do lewego i lewego ramienia, przy każdej zaś odczytujemy dwa noniusze i obliczamy z nich średnią, więc każdy błąd popełniamy dwa razy; średni więc błąd kąta, wyrazi się za pomocą równania:

$$M_1 = \pm \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)} \dots \dots \dots (1)$$

Przy metodzie repetycyjnej powtarzamy pomiar n razy, mamy zatem $2n$ celowych a tylko 2 odczyty, pierwszy i ostatni. W tym wypadku błąd całego pomiaru, uważanego jako jedno spostrzeżenie, wynosi

$$M' = \pm \sqrt{2n\alpha^2 + 2\beta^2} \dots \dots \dots (2)$$

Ponieważ zaś różnicę obu odczytów dzielimy przez ilość spostrzeżeń, t. j. przez n , ażeby otrzymać pojedynczą wartość kąta, więc dzielimy prztem przez n i błąd M' . Skutkiem tego, średni błąd pomiaru pojedynczego kąta wyniesie:

$$M_{rep} = \pm \frac{M'}{n} = \pm \sqrt{\frac{2n\alpha^2 + 2\beta^2}{n^2}} = \pm \sqrt{\frac{2}{n}(\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n})} \quad (3)$$

Przy metodzie seryami mierzymy kąt w każdej seryi niezależnie, sprzęgając limbus na 0°, 60°, 120° . . . lub w inny sposób, o czym była poprzednio mowa. W tym więc wypadku średni błąd pomiaru jednego kąta wynosi według równania (1.) M_1 , mając zaś n takich sprostżeń niezależnych, obliczymy błąd średniej arytmetycznej na podstawie teorii błędów, z równania:

$$M_{ser} = \pm \sqrt{\frac{M_1^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{2}{n} (\alpha^2 + \beta^2)} \dots \dots \dots (4)$$

Porównawszy wyniki (3.) i (4.) widzimy, że błąd pomiaru, metodą repetycyjną jest mniejszy, a gdy nadto metoda ta wymaga tylko dwu odczytów noniuszów, więc jest także łatwiejszą i zabiera mniej czasu.

Na podstawie licznych doświadczeń, możemy przyjąć w praktyce następujące wartości cyfrowe błędów α i β :

$\alpha = +1''$ $\beta = \pm 5''$, a wstawivszy je w równaniu (3.) i (4.) otrzymamy następujące zestawienie:

Tabela 22.

Ilość pomiarów n	$M_{ser} = \sqrt{\frac{52}{n}}$	$M_{rep} = \pm \sqrt{\frac{2}{n} \left(1 \pm \frac{25}{n}\right)}$
1	$M_{ser} = \pm 7.2''$	$M_{rep} = \pm 7.3''$
5	$= \pm 3.2''$	$= \pm 1.5''$
10	$= \pm 2.3''$	$= \pm 0.8''$

Metoda repetycyjna daje zatem bezwarunkowo większą dokładność, niż seryami; nadaje się więc lepiej do pomiarów zwłaszcza wówczas, gdy mamy teodolit o większej różnicy noniuszowej.

O wyrównaniu pomiaru kątów w trójkącie i obliczeniu wartości błędów, mówiliśmy w rozdziale III. § 8.

§ 3. Azymut.

O układzie współrzędnych geodezyjnych, przyjętym w Austrii, mówiliśmy w rozdziale I. §§ 6 i 7, a zastosowanie równań geometrii analitycznej mieliśmy w rozdziale V. § 4. Teraz, przy sposobności opisu pomiarów kątów, poznamy niektóre, nowe pojęcia geodezyjne i w krótkości przedstawimy zastosowanie do nich znanych już prawideł geometrii analitycznej.

Fig. 153. przedstawia znany już nam układ współrzędnych, dzielący płaszczyznę w kierunku południka, linią południe = północ i w kierunku równoleżnika, linię zachód = wschód, na 4 ćwiartki. Początek układu O leży na przecięciu obu osi współrzędnych.

Kąty mierzy się zawsze w kierunku ruchu wskazówek na zegarze, od lewej ku prawej.

Przyjmijmy kierunek OP w pierwszej ćwiartce, tworzący z osią $+x$ kąt α — to ten kąt α nazywamy kątem kierunkowym, albo azymutem kierunku OP , oznaczając go przez: (OP) , lub, gdy $OP = a$, to przez: (a) .

Przyjawszy początek układu w punkcie P , otrzymalibyśmy dla kierunku od P do O czyli (PO) kąt $\alpha_1 = \alpha + 180^\circ$. Z tego widzimy, że przez dodanie, względnie odjęcie 180° do danego azymutu, dostaniemy

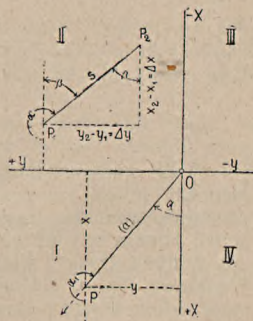


Fig. 153.

kierunek przeciwny. Byłoby to to samo, gdybyśmy odcinek OP, obrócili około punktu O o 180° . Obróciwszy go jednak o dalsze 180° , otrzymamy znowu poprzedni kierunek (OP). Zatem: przez dodanie lub odjęcie 180° do azymutu, zmieniamy kierunek na przeciwny, przez dodanie zaś 360° lub wielokrotności $n \cdot 360^\circ$ nie zmienia się azymut.

Możemy więc na tej podstawie napisać:

$$+ 180^\circ = - 180^\circ \text{ i } \pm 360^\circ = \pm n \cdot 360^\circ = 0 \dots \dots \dots (1)$$

jako wyrażenia słuszne geodezyjnie, jakkolwiek niesłuszne algebraicznie.

$$\text{Następnie: } (OP) = \alpha \dots (PO) = (OP) \pm 180^\circ \dots \dots \dots (2)$$

Przyjmijmy dwa punkty (fig. 153.) P_1 o współrzędnych (x_1, y_1) i P_2 (x_2, y_2) — kąt α przedstawia kierunek $(P_1 P_2)$. Nazwijmy jeszcze różnice współrzędnych $x_2 - x_1 = \Delta x$ i $y_2 - y_1 = \Delta y$, to na podstawie rysunku mamy:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } (180 + \beta) = \frac{\sin (180 + \beta)}{\cos (180 + \beta)} = \text{tg } \beta \dots \dots \dots (3)$$

Z trójkąta $P_1 P_3 P_2$ dostaniemy, uwzględniając znaki współrzędnych, tudzież to, że $y_1 > y_2$ oraz $x_2 > x_1$

$$\text{tg } \beta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\Delta y}{(-x_2) - (-x_1)} = \frac{-\Delta y}{-\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{zatem } \text{tg } \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \dots \dots \dots (4)$$

Za pomocą równania (4.) obliczamy wogóle tg kąta kierunkowego. Powyższy kąt $\alpha = 180 + \beta$ — jest większy niż 180° , zatem należy do ćwiartki III. W ćwiartce I. i III. tg jest dodatni, w II. i IV. ujemny.

Jeżeli $P_1 P_2 = s$, to z rysunku wynika, że: $y_2 - y_1 = \Delta y = s \cdot \sin \beta$ — wstawwszy zaś za $\beta = (\alpha - 180)$ dostaniemy $\Delta y = s \cdot \sin (\alpha - 180) = -s \cdot \sin \alpha$.

Wogóle dla znaków funkcji otrzymamy następującą tabelkę:

Tabela 23.

ćwiartka	I.	II.	III.	IV.
sin α :	+	+	-	-
cos α :	+	-	-	+
tg α :	+	-	+	-

Długość odcinka $P_1 P_2 = s$ w którejkolwiek ćwiartce, uważamy zawsze jako wartość dodatnią.

ROZDZIAŁ XII.

Zdjęcia wielobokowe.

§ 1. Prace przygotowawcze.

Za pomocą t. z. zdjęć wielobokowych czyli polygonalnych wykonuje się pomiary miast, co nas przedewszystkiem interesuje, następnie pomiary większych obszarów gruntów, lasów, zdjęcia dla regulacji rzek, jakkolwiek rzadko. Każda trasa kolei, kanału czy drogi, opiera się na zdjęciu wielobokowym, który stanowi podstawę do studyów trasy i służy następnie do szczegółowego wytyczenia osi tych budowli. Podstawą znowu dla wieloboków są punkty tryangulacyjne, których położenie zostało poprzednio zdjęte i określone tak, że punkty te są dla nas punktami stałymi.

Do punktów tryangulacyjnych nawiązuje się wieloboki; zatem dany wielobok, nawiązany do dwóch punktów stałych, musi się między nimi pomieścić. Kierunek

czyli $b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta \dots \dots \dots (2)$

podobnie $c = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma \dots \dots \dots (3)$

Mając obliczone boki I-go trójkąta, który ma wspólny bok C z trójkątem II. obliczymy w ten sam sposób boki tegoż trójkąta i t. d., aż dojdziemy do ostatniego. W ostatnim trójkącie, ze względu na kontrolę, należy bok a_4 , obliczony już za pomocą pomiarów pośrednich także zmierzyć bezpośrednio.

Pierwszy bok, jako podstawę tryangulacji, obiera się zwykle w dogodnym miejscu, na terenie równym i mierzy się bardzo starannie łątami w znany już nam sposób. Gdyby nie było dogodnego terenu dla podstawy długiej około 1000 do 1500 m, to poradzimy sobie w sposób przedstawiony na fig. 155.

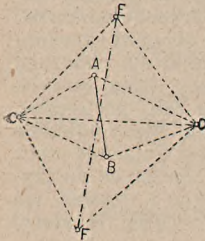


Fig. 155.

Obierzmy linię AB, około 300 m długą, oraz dwa punkty C i D przystępne i dobrze widoczne.

Pomierzwszy wszystkie kąty w obu trójkątach i bok AB, obliczymy współrzędne punktów C i D w sposób, jaki w dalszym ciągu podamy dla trójkątów, z tych współrzędnych obliczymy odległość CD — która może już wynosić około 800 m. — Gdyby i ta podstawa nie była dogodną, to obierzmy jeszcze dwa punkty E i F i pomierzmy kąty w trójkątach CDE i CDF a wreszcie obliczymy odległości EF, jako podstawę dalszych pomiarów.

Jako początek układu współrzędnych, możemy przyjąć jeden z wierzchołków trójkątów, kierunek jednego z boków jako oś rzędnych, prostopadły zaś doń, jako oś odciętych.

Kierunek pierwszego boku, nawiązać należy do przyjętego kierunku osi + x.

Wierzchołki trójkątów należy ustalić na terenie, za pomocą bloków kamiennych, według fig. 156. Jest to słupek kamienny lub betonowy, 30/30 cm w przekroju poziomym, 60 cm długości mający, na górnej powierzchni wpuszczony i zamocowany bolec miedziany, z wyrytymi dwoma liniami na krzyż. Punkt przecięcia obu linii jest wierzchołkiem trójkąta. Nad takim kamieniem ustawia się zwykle drewnianą piramidę, celem uwidocznienia punktu z daleka.

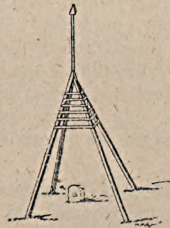


Fig. 156.

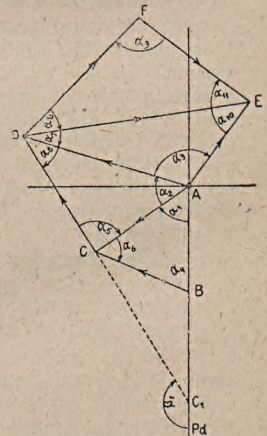


Fig. 157.

Przyjmijmy, według fig. 157., początek układu w wierzchołku A — zaś kierunek AB, jako oś + x. Następnie, przyjmijmy szereg trójkątów, w których pomierzono, według znanych zasad, kąty $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{11}$.

Zadaniem naszym jest obliczenie azymutów i współrzędnych wierzchołków, przyczem przypuścmy, że jako podstawę, pomierzono bok BC.

Długości boków obliczymy łatwo według równania (1.)—(3.).

Następnie azymuty, t. j. kierunki poszczególnych boków, względem osi + x. Kierunki oznaczono na rysunku strzałkami, n. p. kierunek (BC) oznacza strzałka, przeciwny zaś kierunek będzie (CB), t. j. od C ku B.

1. Azymut (AC) = $\alpha_1 \dots \dots \dots (4)$
2. „ (BC) = $180^\circ - \alpha_1$, t. j. kąt, jaki kierunek (BC) tworzy z dodatnim kierunkiem osi x, czyli kąt, o jaki mu-

siałaby się oś + x około punktu A obrócić, ażeby
przyjść w położenie równoległe do (BC) (5)

3. Azymut (CD) znajdziemy w następujący sposób: Przedłużmy bok CD aż do punktu C₁ — natenczas z trójkąta C₁DA otrzymamy, że kąt β jako zewnętrzny, równy jest dwóm innym kątom nieprzyległym doń, t. j.

$$\begin{aligned} (CD) &= \beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \text{ponieważ znów} \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 180 - \alpha_5 \text{ więc} \\ (CD) &= \alpha_1 + 180 - \alpha_5 \text{ (6)} \end{aligned}$$

Ten sam wynik otrzymamy z następującego rozumowania:

(CA) = (AC) ± 180° = α₁ ± 180°. Obróćmy teraz kierunek (CA) około punktu C w lewo o kąt α₅, zatem w stronę przeciwną kierunkowi ruchu wskazówek na zegarze, czyli o kąt - α₅, natenczas dostaniemy kierunek (CD) — zatem:

$$(CD) = (CA) - \alpha_5 = \alpha_1 \pm 180^\circ - \alpha_5 \text{ (7)}$$

Ponieważ ± 360° nie zmienia kierunku, więc odjawszy od równania (6.) 360° — otrzymamy

$$(CD) = \alpha_1 - 180 - \alpha_5 \text{ (8)}$$

$$\text{czyli (CD) } \alpha_1 \pm 180 - \alpha_5 \text{ (9)}$$

zgodnie z równaniem (7.).

Azymut (AD) = α₁ + α₂ (10)

” (AE) = α₁ + α₂ + α₃ (11)

” (DE) otrzymamy, obróciwszy kierunek (DA) około punktu D, w lewo o kąt α₇, zatem

$$\begin{aligned} (DE) &= (DA) - \alpha_7 = (AD) \pm 180^\circ - \alpha_7 = (DE) = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 \pm 180^\circ - \alpha_7 \text{ (12)} \end{aligned}$$

” (DF) otrzymamy, obróciwszy (DE) około punktu D w lewo o kąt α₆ zatem:

(DF) = (DE) - α₆ a uwzględniając równanie (12):

$$(DF) = \alpha_1 + \alpha_2 \pm 180 - \alpha_7 - \alpha_6 \text{ (13)}$$

” (FE) otrzymamy z kierunku (FD), obróciwszy go około punktu F w lewo o kąt α₉, więc uwzględniając równanie (13.) napiszemy:

$$(FE) = (FD) - \alpha_9 = \alpha_1 + \alpha_2 \pm 180 - \alpha_7 - \alpha_6 \pm 180 - \alpha_9$$

czyli, ponieważ ± 360° = 0, więc

$$(FE) = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_7 - \alpha_6 - \alpha_9 \text{ (14)}$$

Gdyby z któregośkolwiek z powyższych równań wypadła kąt ujemny, to wówczas dodamy w ogóle n. 360° — skutkiem czego unikniemy kierunków ujemnych.

Postępując systematycznie w wyżej wskazany sposób, obliczymy z łatwością azymuty wszystkich kierunków, a znając długości boków, przystąpimy do obliczenia współrzędnych.

Przyjmijmy, według fig. 158., że dane są:

1. Długości: a, b i c, boków trójkąta ABC.

2. Kąty α β i γ.

3. Azymut boku (AB) = (a).

4. Współrzędne punktu A: x_a i y_a.

Obliczyć mamy współrzędne innych punktów.

Na podstawie rysunku ustawmy następujące równania:

$$y_b - y_a = a \cdot \sin(a) \quad \text{zatem } y_b = a \cdot \sin(a) + y_a \text{ . (15)}$$

$$x_b - x_a = a \cdot \cos(a) \quad \text{” } x_b = a \cdot \cos(a) + x_a \text{ . (16)}$$

$$\text{czyli } y_c - y_b = b \cdot \sin [180 - (b)] \quad \text{” } y_c = b \cdot \sin(b) + y_b \text{ . (17)}$$

$$y_c - y_b = b \cdot \sin(b) \quad \text{” } y_c = b \cdot \sin(b) + y_b \text{ . (17)}$$

$$x_b - x_c = b \cdot \cos [180 - (b)] \quad \text{” } x_c = b \cdot \cos(b) + x_b \text{ . (18)}$$

$$\text{czyli } x_b - x_c = -b \cdot \cos(b) \quad \text{” } x_c = b \cdot \cos(b) + x_b \text{ . (18)}$$

czyli $y_c - y_a = c \cdot \sin [360 - (c)]$ zatem $y_c - y_a = -c \cdot \sin(c)$ „ $y_a = c \cdot \sin(c) + y_c$. (19)

czyli $x_a - x_c = c \cdot \cos [360 - (c)]$ „ $x_a - x_c = c \cdot \cos(c)$ „ $x_a = c \cdot \cos(c) + x_c$. (20)

Z powyższego wynika następująca formuła: Mając dane azymuty boków trójkąta (na fig. oznaczone strzałkami i łukami, między linią południkową danego punktu a kierunkiem boku), oraz idąc w kierunku ruchu wskazówek na zegarze, obliczymy rzędną któregoś wierzchołka, za pomocą rzędnej poprzedniego wierzchołka, długości boku i wstawy kąta kierunkowego, według równań (15.) (17.) lub (19.). Podobnie, według równania (16.) (18.) lub (20.) obliczymy odcięte.

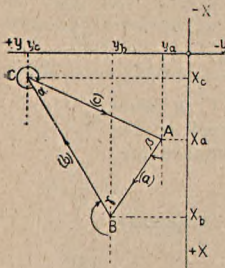


Fig. 158.

Formułę tę, względnie równania, jakoteż sposób oznaczania boków i wierzchołków według fig. 158. należy zapamiętać, bo postępując zawsze jednakowo systematycznie, unikniemy błędów i zamieszania, jakie łatwo może powstać przy obliczaniu większej ilości współrzędnych. Współrzędne jednego punktu, jakoteż azymut jednego boku, muszą być dane. Kąty w trójkącie pomierzymy, boki obliczymy, mając także jeden z nich wiadomy.

Gdy dany jest azymut (a) i kąty $\alpha \beta \gamma$, obliczymy inne azymuty w znany już sposób, który w tym wypadku powtórzymy ze względu na całość obliczenia:

$$(b) = (a) + 180^\circ - \gamma \dots \dots \dots (21)$$

$$(c) = (b) + 180^\circ - \alpha = (a) + 180 - \gamma + 180 - \alpha = (a) - \gamma - \alpha \quad (22)$$

w razie, gdyby z obliczenia wypadł kąt ujemny, dodaje się 360° lub $n \cdot 360^\circ$, gdzie $n = 1, 2 \dots$ w miarę potrzeby.

Równanie (21.) przedstawione jest graficznie na fig. 159., mianowicie:

Punkt B jest wierzchołkiem, BB_1 jest przedłużeniem kierunku (AB). Kąt (a) oznaczony łukiem i strzałką, zawarty między południkiem, czyli osią $+x$ i kierunkiem AB, jest azymutem kierunku AB. Jeżeli do kąta (a) dodamy 180° , to otrzymamy kierunek (BB_2) = $(a + 180)$ czyli według fig. 158. — kierunek (BA). Obróćmy teraz BB_2 około punktu B w lewo o kąt γ czyli o kierunek $(-\gamma)$, to otrzymamy kierunek (BC) = (b) równoległy do (BC) na fig. 158. — zatem: $(b) = (a) + 180^\circ - \gamma$.

Z równania (15.) i (16.) otrzymamy:

$$\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)} = \text{tg}(a) \text{ lub oznaczymy różnice współrzędnych:}$$

$y_b - y_a = \Delta y$; zaś $x_b - x_a = \Delta x$, dostaniemy:

$$\text{tg}(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \dots \dots \dots (23)$$

t. j. mając współrzędne dwóch punktów, obliczyć możemy według równania (23.) azymut danego kierunku. Tutaj także zachowany być powinien pewien porządek; obliczając bowiem różnice współrzędnych w porządku wyżej wskazanym, t. j. $y_b - y_a$ i $x_b - x_a$, otrzymamy z ich stosunku, jako wartości stycznej kąta, znaki $+$ lub $-$ w liczniku i mianowniku, wskazujące, w której ćwiartce dany kąt leży, zatem i dokładny kierunek, czyli azymut. Jeżeli n. p. według tabeli 23

wypada stosunek $\frac{+}{-}$ to widocznem jest, że kąt leży w ćwiartce II., t. j. ma wartości od 90° licząc od kierunku osi

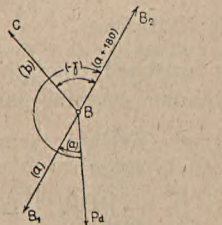


Fig. 159.

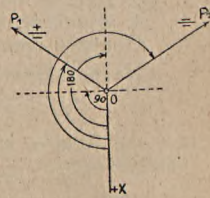


Fig. 160.

+ x, czyli będzie to kierunek OP_1 północno-zachodni, jak wskazano na fig. 160. — Podobnie stosunek $\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$ wskazuje na III. ćwiartkę, t. j. kąt większy od 180° licząc od (+ x) zatem kierunek OP_2 — północno-wschodni i t. p.

Mając dane współrzędne dwóch punktów, n. p. A (x_a, y_a) i B (x_b, y_b), fig. 158. — możemy obliczyć odległość AB, t. j. długość odcinka między tymi punktami a to z równania (15.):

$$a = \frac{y_b - y_a}{\sin(\alpha)} \dots \dots \dots (24)$$

lub z równania (16.):

$$a = \frac{x_b - x_a}{\cos(\alpha)} \dots \dots \dots (25)$$

i t. p. Czyli: za pomocą współrzędnych dwóch punktów, potrafimy obliczyć zarówno azymut, jak i długość odcinka.

Zastosowanie tego rodzaju obliczeń znajdziemy n. p. dla fig. 155.

Jeżeli pomierzmy szereg trójkątów i obliczymy ich współrzędne, to za pomocą powyższych równań łatwo znajdziemy odległość dwóch, dowolnych wierzchołków oraz kierunek przez te dwa wierzchołki wyznaczony. Będzie nam to później potrzebne do wyrównania błędów zdjęć wielobokowych.

Na tem zakończymy przygotowanie do zdjęć wielobokowych, uważając tryangulację IV-rzędną, o bokach 1 do 3 km długości, nawet bez nawiązania jej do ogólnej krajowej sieci tryangulacyjnej za zupełnie wystarczającą do naszych celów, byle tylko była starannie wykonaną.

§ 2. Pomiary wieloboków.

Przed rozpoczęciem pomiarów, należy przedewszystkiem polygon wytyczyć, t. j. utrwalić jego wierzchołki i tak je wybrać, ażeby z każdego wierzchołka widać było poprzedni i następny. Do utrwalenia wierzchołków, używa się w miastach zazwyczaj żelaznych rurek gazowych, stalowej średnicy, około 40 cm długich, które wbija się zazwyczaj przy lub w chodniku, zakrywając je następnie płytą, lub pokrywą używaną do hydrantów. Dokładny szkic położenia punktu, pozwala go łatwo odnaleźć. Rurki gazowe są do tego celu bardzo przydatne, bo stanowią dobrą osadę dla tyczki. W polu oznacza się te wierzchołki palami, 15 cm średnicy, zaopatrzonymi u dołu w dwie poprzeczki. Taki pał, wkopany w ziemię, zwłaszcza gdy jest z twardego drzewa sporządzony, może przetrwać do 10 lat. Punkt oznacza się zwykle gwoździem, wbitym w wierzchołki pala. Lepsze jest utrwalenie za pomocą słupków kamiennych lub betonowych, wkopanych w ziemię i mających na wierzchu wykute dwie przecinające się linie na oznaczenie wierzchołka. Jako sygnałów używa się tyczek mierniczych, które ustawia się nad punktem pionowo, za pomocą opisanych w rozdziale II. § 1. trójkątów.

Szereg punktów, połączonych między sobą liniami prostymi, tworzy wielobok, czyli, według utartego zwyczaju, polygon. Jeżeli taki polygon nie jest nawiązany w obu końcowych punktach do żadnych punktów stałych, to nazywamy go otwartym. Jeżeli punkt początkowy schodzi się z końcowym, lub gdy oba końcowe punkty nawiązane są do punktów stałych, to polygon nazywamy zamkniętym.

1. Polygony otwarte.

Fig. 161. przedstawia otwarty polygon. Z rysunku widzimy, że gdy polygon ma n boków, to mieć musi (n + 1) wierzchołków oraz (n - 1) kątów. Kąty mierzy się zawsze po lewej stronie przyjętego kierunku, o czem już poprzednio była mowa.

Mając dane kąty: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ i azymut pierwszego kierunku $(0 - 1) = (\alpha)$, obliczymy azymuty innych boków w następujący sposób, przyczem długości boków nazwiemy przez s_0, s_1, \dots, s_n , zaś azymuty przez $(s_0), (s_1), (s_2), \dots, (s_n)$.

Dany, względnie przyjęty jest azymut boku $(0 - 1) = (\alpha) = (s_0)$ — zatem $(s_0) = (\alpha)$. Azymut następnego boku $(1 - 2)$, t. j. (s_1) otrzymamy, na podstawie rysunku, jeżeli przedłużony kierunek s_0 obrócimy około punktu 1 — o kąt $\beta_1 - 180^\circ$. W ten sam

sposób otrzymamy azymuty innych boków, uważając jednakże na kierunek obrotu — n. p. przy (s_3) obracamy przedłużony kierunek s_2 około punktu 3 w lewo, zatem kąt obrotu będzie miał znak (—). Ażeby uniknąć ujemnych kątów, możemy w razie potrzeby dodać 360° lub wielokrotność kąta pełnego. Dalsze więc zestawienie będzie z powyższego zrozumiałe, mianowicie:

$$\begin{aligned} (s_0) &= (a). \\ (s_1) &= (s_0) + (\beta_1 - 180) + 360^\circ = (s_0) + \beta_1 \pm 180^\circ. \\ (s_2) &= (s_1) + (\beta_2 - 180) + 360 = s_0 + \beta_1 \pm 180 + \beta_2 - 180 \pm 360 = s_0 + \beta_1 + \\ &+ \beta_2 \pm 2 \cdot 180. \\ (s_3) &= s_2 - (180 - \beta_3) = s_2 - 180 + \beta_3 = s_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 2 \cdot 180 - 180 + \\ &+ 360 = s_0 + \beta_1 + \beta_2 = \beta_3 \pm 3 \cdot 180. \\ &\vdots \\ (s_n) &= s_0 + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \pm n \cdot 180 \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

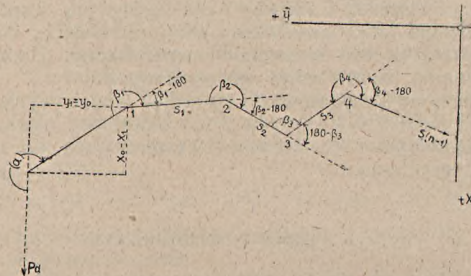


Fig. 161.

U w a g a: Przy obliczaniu (s_2) otrzymaliśmy między innymi: $\pm 180^\circ - 180^\circ$ a dodaliśmy $\pm 360^\circ$ jako niemające wpływu na kierunek, t. j. uwzględniając pierwsze znaki, otrzymamy $+180 - 180 + 2 \cdot 180 = 2 \cdot 180$. Uwzględniając zaś drugie znaki, dostaniemy $-180 - 180 - 2 \cdot 180 = -4 \cdot 180 = -2 \cdot 360$, które możemy opuścić, jako niezmienniące kierunku. Podobnie ma się rzecz i z (s_3).

Uwzględniając położenie poligonu względem układu współrzędnych na fig. 161. otrzymamy poniższe zestawienie, przyczem należy zauważyć, że reguły te odnoszą się do wszystkich ćwiartek.

$y_1 - y_0 = s_0 \sin(s_0)$ czyli	$x_0 - x_1 = s_0 \cos(s_0)$ czyli . (2)
$y_1 = y_0 + s_0 \sin(s_0)$	$x_1 = x_0 + s_0 \cos(s_0)$
$y_2 = y_1 + s_1 \sin(s_1) \dots \dots (2)$	$x_2 = x_1 + s_1 \cos(s_1) \dots \dots (3)$
$y_3 = y_2 + s_2 \sin(s_2)$	$x_3 = x_2 + s_2 \cos(s_2)$
\vdots	
$y_n = y_{(n-1)} + s_{(n-1)} \sin(s_{n-1})$	$x_n = x_{(n-1)} + s_{(n-1)} \cos(s_{n-1})$

Po zsumowaniu powyższych równań pod (2.) i (3.) otrzymamy:

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{(n-1)} + y_n = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{(n-1)} + s_0 \sin(s_0) + s_1 \sin(s_1) + \dots + s_{n-1} \sin(s_{n-1}).$$

czyli po zredukowaniu pozostanie:

$$y_n = y_0 + \sum_{s=0}^{s=(n-1)} s \cdot \sin(s) = y_0 + [s \sin(s)] \dots \dots (4)$$

i podobnież

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} + s_0 \cos x_0 + \dots + s_{n-1} \cos(s_{(n-1)})$$

$$\text{czyli } x_n = x_0 + \sum_{s=0}^{s=n-1} s \cdot \cos(s) = x_0 + [s \cos(s)] \dots \dots \dots (5)$$

t. z. mając dane współrzędne punktu początkowego, otrzymamy współrzędne któregośkolwiek innego wierzchołka, dodając odpowiednio do współrzędnych pierwszego, sumę utworzoną z iloczynów długości boków między tymi punktami zawartych i wstaw, względnie dostaw kątów kierunkowych tychże boków.

Z równań (2.) i (3.) otrzymamy dalej:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} s_0 \quad \text{lub} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}(s_1) \dots \dots \dots (6)$$

Analogicznie do równania (6.) napiszemy:

$$\frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \operatorname{tg}(n.0) \dots \dots \dots (7)$$

t. j. styczną kąta kierunkowego dla linii, łączącej pierwszy wierzchołek wieloboku z ostatnim, otrzymamy ze stosunku, po lewej stronie równania (7.) się znajdującego.

Wkońcu długość linii łączącej końcowe punkty polygonu „S” obliczymy z równań:

$$S = \frac{y_n - y_0}{\sin(0 - n)} \quad \text{lub} \quad S = \frac{x_n - x_0}{\cos(0 - n)} \dots \dots \dots (8)$$

albo też z równania

$$S = \sqrt{(y_n - y_0)^2 + (x_n - x_0)^2} \dots \dots \dots (9)$$

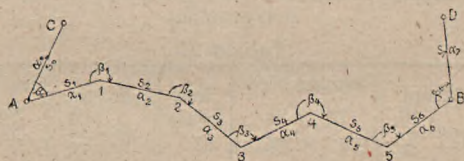


Fig. 162.

W powyższych wywodach przyjęliśmy, że dany jest azymut i współrzędne jednego punktu polygonu, czyli, że polygon byłby w jednym punkcie nawiązany do innych, stałych punktów. Gdyby jednak tych danych nie było, czyli polygon nie byłby nawiązany do stałych punktów, co w praktyce przy mniej ważnych zadaniach zdarzyć się może, wówczas pierwszy bok polygonu przyjmujemy jako oś + x, a pierwszy wierzchołek za początek układu, czyli tęsamem tak azymut pierwszego boku, jak i współrzędne pierwszego wierzchołka będą dane. O wyrównaniu błędów pomiaru, w ścisłym znaczeniu, nie może być wówczas mowy.

2. Polygony między punktami stałymi.

Polygony, nawiązane i oparte na punktach stałych, służą jako podstawy do zdjęć szczegółowych.

Fig. 162. przedstawia polygon między dwoma punktami stałymi A i B. Ponieważ polygon ten ma być nawiązany do sieci tryangulacyjnej, więc pomierzmy kąty zawarte między pierwszym bokiem polygonu a kierunkiem AC, tudzież ostatnim a kierunkiem BD; z punktów bowiem A i B będą widoczne inne punkty tryangulacyjne.

Już na podstawie tego, cośmy powiedzieli o polygonach otwartych, można wywnioskować, że:

a) Kąt kierunkowy (AB) obliczony na podstawie pomiaru polygonu, zgodzić się powinien z kierunkiem (AB) danym z tryangulacji.

b) Długość AB — obliczona z polygonu, powinna być zgodną z długością AB z tryangulacji.

Mieć więc będziemy kontrolę i podstawę do wyrównania błędów pomiarów. Ponieważ kierunki i współrzędne punktów stałych nie mogą być zmienione, więc niezgodność, jaka się pokaże po obliczeniu polygonu, idzie na karb błędów pomiaru i musi być stosownie wyrównana. Niezgodności, nie mogą też przekraczać pewnych granic dozwolonych błędów, o czym mówić będziemy w dalszym ciągu. Na razie wykazaliśmy jakie są podstawy kontroli.

Pomiar polygonu obejmuje:

a) Pomiar długości boków; b) pomiar kątów; c) niwelację.

a) O mierzeniu długości parami, jak przepisuje instrukcja, oraz o dozwolonych błędach pomiaru, mówiliśmy w rozdziale III. § 4. — powtarzać więc tego nie potrzebujemy.

b) Co się tyczy pomiaru kątów, to sprawę tę omówiliśmy już w rozdziale XI. § 2. Pozostaje tylko omówić granicę dozwolonych błędów.

Według austriackiej instrukcji polyg., błąd pomiaru kątów nie powinien przekraczać wartości $\pm 75'' \sqrt{n}$, gdzie n oznacza liczbę mierzonych kątów. Jako błąd uważać należy różnicę „ w ” między sumą wartości pomierzonych kątów [S]; a sumą wartości rzeczywistych S , otrzymaną z jakiegokolwiek kontrol, t. j.

$$[S] - S = w \sqrt{75'' \cdot n} \dots \dots \dots (10)$$

N. p. suma kątów w trójkącie wynosi: $S = 180^\circ$, tymczasem z pomiaru wypadło $[S] = 179^\circ 58'$. Zatem $w = [S] - S = -2'$, a ponieważ według równania (10.) dozwolony błąd w pomiarze trzech kątów może osiągnąć wartość $75'' \sqrt{3} = 130'' = 2' 10$, przeto powyższy pomiar uważać można jako dobry i różnicę $w = -2'$ rozdzielić na wszystkie kąty. Gdyby różnica była większa, to pomiar trzeba by powtórzyć.

Tabela dozwolonych błędów pomiaru n kątów polygonu, według austriackiej instrukcji polygonalnej.

Tabela 24.

Ilość kątów n	Waga $p = \frac{10}{n}$	Granica błędu $75'' \sqrt{n}$		Ilość kątów n	Waga $p = \frac{10}{n}$	Granica błędu $75'' \sqrt{n}$	
		'	''			'	''
1	10:00	1	15	21	0:48	5	44
2	5:00	1	46	22	0:45	5	52
3	3:30	2	10	23	0:43	6	00
4	2:50	2	30	24	0:42	6	07
5	2:00	2	48	25	0:40	6	15
6	1:70	3	04	26	0:38	6	22
7	1:40	3	18	27	0:37	6	30
8	1:30	3	32	28	0:36	6	37
9	1:10	3	45	29	0:34	6	44
10	1:00	3	57	30	0:33	6	51
11	0:91	4	09	31	0:32	6	58
12	0:83	4	20	32	0:31	7	04
13	0:77	4	30	33	0:30	7	11
14	0:71	4	41	34	0:29	7	17
15	0:67	4	50	35	0:29	7	24
16	0:63	5	00	36	0:28	7	30
17	0:59	5	09	37	0:27	7	36
18	0:56	5	18	38	0:26	7	42
19	0:53	5	27	39	0:26	7	48
20	0:50	5	35	40	0:25	7	54

Uwaga: Przy oznaczeniu ilości kątów, należy wliczyć kąt zamykający polygoń.

Błąd, a raczej różnicę „w“ należy porównać z powyższą tabelą, a gdy nie przekracza dozwolonej granicy, rozdzielić na wszystkie kąty, dodając do każdego z nich poprawkę $\frac{w}{n}$ ze znakiem przeciwnym. Ten, łatwy i prosty sposób wyrównania pomiaru kątów może być zastosowany tylko wtedy, gdy wszystkie kąty mierzone były równie dokładnie, zatem, gdy w pierwszym rzędzie długości ramion kątów były mniej więcej równe, lub, gdy według instrukcji austriackiej, stosunek najkrótszego do najdłuższego ramienia nie jest mniejszy niż $\frac{1}{4}$. W innych wypadkach różnicę „w“ rozdzieli się nierównomiernie, mianowicie proporcjonalnie do sumy z odwrotnych wartości długości ramion.

Nazwijmy poprawki kątów przez $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots$ a długości ramion, zamykających odpowiednie kąty przez $s_0 s_1; s_1 s_2; s_2 s_3$ i t. d. to „w“ = $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$

$$\text{zaś } \delta_1 : \delta_2 : \delta_3 : \dots = \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1} \right) : \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) : \dots \quad (11)$$

§ 3. Przykłady.

I. Dane są punkty tryangulacyjne za pomocą współrzędnych:

A ($x_a y_a$), B ($x_b y_b$), C ($x_c y_c$) i D ($x_d y_d$). Między punktami A i B (fig. 162.) wytyczono polygon: A₁ 2 3 4 5 B, pomierzono długości $s_1 s_2 \dots s_6$ i kąty $\beta_0 \beta_1 \dots \beta_6$.

Zadanie: obliczyć współrzędne wierzchołków polygonu i wyrównać błędy pomiarów.

1. Ze współrzędnych punktów tryangulacyjnych obliczymy azymuty kierunków: (AC) = α_0 i (BD) = α_7 w nast. sposób:

$$\text{tg } \alpha_0 = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ następnie } \alpha_0 \dots \dots \dots (12)$$

$$\text{tg } \alpha_7 = \frac{y_d - y_b}{x_d - x_b} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ „ } \alpha_7 \dots \dots \dots (13)$$

2. Azymuty boków wieloboku z równania (1.)

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \beta_0 + 180 \dots \dots \dots (14)$$

$$\alpha_2 = \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 + 2 \cdot 180 \dots \dots \dots (15)$$

$$\alpha_3 = \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + 3 \cdot 180 \dots \dots \dots (16)$$

$$\alpha_4 = \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 4 \cdot 180 \dots \dots \dots (17)$$

$$\alpha_5 = \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + 5 \cdot 180 \dots \dots \dots (18)$$

$$\alpha_6 = \alpha_0 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + 6 \cdot 180 \dots \dots \dots (19)$$

$$\alpha_7 = \alpha_0 + \beta_6 + 180 = \alpha_0 + \beta_0 + \dots + \beta_6 + 7 \cdot 180 \dots \dots (20)$$

Różnice: $\alpha_7 - \alpha_0$ z równania (12.) i (13.) oraz (20.) obliczone, powinny być zgodne. Z powodu jednak błędów w pomiarach, otrzymamy jakąś różnicę „w“, z obu obliczeń, a ponieważ ABC i D są punktami stałymi, więc ($\alpha_7 - \alpha_0$) obliczone z równania (12.) i (13.) jest ilością pewną i niezmienną, czyli „w“ odnosi się do błędów w pomiarach kątów β .

Przedewszystkiem więc musimy się przekonać, czy wielkość błędu „w“ nie przekracza dozwolonej granicy, mianowicie powinien być dochowany warunek, że dla siedmiu pomierzonych kątów,

$$w \geq 75'' \sqrt{7} \geq 3' 18'' \dots \dots \dots (21)$$

3. Jeżeli „w“ odpowiada powyższemu warunkowi, to wyrównamy błędy w pomiarze kątów, albo w ten sposób, że do każdego kąta dodamy poprawkę $-\frac{w}{7}$ jeżeli boki były mniej więcej równe, lub gdy stosunek długości najdłuższego do najkrótszego nie schodzi poniżej $\frac{1}{4}$; jeżeli stosunek jest mniejszy, to błędy wyrównamy według równania (11.).

4. Mając już poprawione kąty, obliczymy na nowo azymuty, zresztą w sposób poprzednio podany.

5. Na podstawie poprawionych azymutów, obliczymy współrzędne według wzorów (2.) i (3.):

$$y_1 = y_a + s_1 \sin \alpha_1 \dots \dots \dots (22)$$

$$y_2 = y_1 + s_2 \sin \alpha_2 = y_a + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 \dots \dots \dots (23)$$

$$y_3 = y_2 + s_3 \sin \alpha_3 = y_a + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + s_3 \sin \alpha_3 \dots \dots \dots (24)$$

w końcu:

$$y_b = y_a + s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + \dots + s_6 \sin \alpha_6 \dots \dots \dots (25)$$

$$\text{Z równania (25.): } y_b - y_a = [s \sin \alpha] \dots \dots \dots (26)$$

Podobnie obliczymy:

$$x_1 = x_a + s_1 \cos \alpha_1 \dots \dots \dots (27)$$

$$x_2 = x_1 + s_2 \cos \alpha_2 \dots \dots \dots (28)$$

.

.

$$x_b = x_a + s_1 \cos \alpha_1 + \dots + s_6 \cos \alpha_6 \dots \dots \dots (29)$$

$$\text{a stąd } x_b - x_a = [s \cos \alpha] \dots \dots \dots (30)$$

Różnice $(x_b - x_a)$ i $(y_b - y_a)$ obliczone z równania (30.) i (26.) powinny być zgodne z takimiż różnicami, obliczonymi ze współrzędnych punktów A i B, jakie były dane. Niezgodność, jaka się okaże, pochodzi już nie z błędów pomiaru kątów, bo te zostały wyrównane, lecz z błędów pomierzonych długości boków.

Wogóle więc otrzymamy:

$$(y_b - y_a) - [s \sin \alpha] = f_y \dots \dots \dots (31)$$

$$\text{i } (x_b - x_a) - [s \cos \alpha] = f_x \dots \dots \dots (32)$$

f_y i f_x przedstawiają tu błędy wartości współrzędnych, powstałe wskutek błędów w pomiarach boków polygonu. Przed wyrównaniem należy jeszcze sprawdzić, czy błąd w pomiarze boków nie przekracza dozwolonej granicy. Z powyższych f_y i f_x obliczymy błąd w długości boków f_s , z łatwo zrozumiałej relacji:

$$f_s = \sqrt{f_y^2 + f_x^2} \dots \dots \dots (33)$$

Gdzie f_s powinno być mniejsze, lub co najwyżej może być równe wartości $\angle s$ obliczonej z wzoru:

$$\angle s = 0.00015 s + 0.005 \sqrt{s} + 0.015 \dots \dots \dots (34)$$

według § 4. rozdz. III. i tabeli 6. równania (41.).

Jeżeli pod tym względem nie ma przeszkody, to możemy obliczyć poprawkę dla współrzędnych. Mianowicie, dla jednostki długości otrzymamy poprawkę:

$$d_y = \frac{-f_y}{[s]} \quad \text{i} \quad d_x = \frac{-f_x}{[s]} \dots \dots \dots (35)$$

gdzie $[s]$ jest sumą długości boków, d_y zaś i d_x są poprawkami współrzędnych dla jednostki długości.

Poprawki te rozdzielimy na wszystkie współrzędne, proporcjonalnie do długości boków. Nazwijmy poprawki rzędnych, dla punktów 1, 2, 3 . . . odpowiednio przez dy_1 dy_2 dy_3 . . . i podobnie dx_1 dx_2 dx_3 . . . to wartości ich wyrażają następujące równania:

$$dy_1 = \frac{-f_y}{[s]} \cdot s_1 \quad dy_2 = \frac{-f_y}{[s]} \cdot s_2 \dots \text{i t. d.} \dots \dots \dots (36)$$

$$\text{oraz } dx_1 = \frac{-f_x}{[s]} \cdot s_1 \quad dx_2 = \frac{-f_x}{[s]} \cdot s_2 \dots \text{i t. d.} \dots \dots \dots (37)$$

$(-f_y)$ i $(-f_x)$ oznacza sumy poprawek wzięte ze znakami przeciwnymi niż wypadają z równania (31.) i (32.), s_1 s_2 . . . długości boków. Równanie (22.) do (29.) zmienią się teraz w następujący sposób:

$$y'_1 = y_1 + dy_1 = y_a + s_1 \sin \alpha_1 + dy_1 \dots \dots \dots (38)$$

$$x'_1 = x_1 + dx_1 = x_a + s_1 \cos \alpha_1 + dx_1 \dots \dots \dots (39)$$

i t. d. Możemy także poprawić długości boków, o ileby to było potrzebne, a to według wzoru:

$$s_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{\sin \alpha_n} \quad \text{lub} \quad s_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\cos \alpha_n} \dots \dots \dots (39)$$

Teraz już mieć będziemy zupełną zgodność między polygonem a punktami tryangulacyjnymi.

6. Trudniejsze będzie wyrównanie kątów, gdy boki polygonu mają tak różne długości, że tę okoliczność trzeba brać w rachubę. W tym wypadku różnicę „w” rozdzielamy proporcjonalnie do sumy odwrotności z długości ramion.

Jako przykład przyjmijmy polygon o następujących długościach boków:

$$\begin{array}{ll} s_1 = 40.00 \text{ m} & s_3 = 200.00 \text{ „} \\ s_2 = 100.00 \text{ „} & s_4 = 300.00 \text{ „} \end{array}$$

Stosunek najkrótszego do najdłuższego boku wynosi $\frac{40}{300} = \frac{1}{7.5}$ jest zatem mniejszy niż $\frac{1}{4}$ i w zwykły sposób kątów już wyrównać nie można.

Przypuśćmy dalej, że $w = 150''$, to poprawki kątów będą wynosiły:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) : \left(\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \right) : \left(\frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} \right) \dots \dots (40)$$

Jest to zwykła reguła spółki, według której rozdzielimy błąd na poszczególne kąty.

Nazwijmy: $\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) = a$, $\left(\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \right) = b$ i $\left(\frac{1}{s_3} + \frac{1}{s_4} \right) = c \dots \dots (41)$

to $\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = a : b : c$, a stąd:

$$\delta_1 = \frac{-w}{a+b+c} \cdot a; \quad \delta_2 = \frac{-w}{a+b+c} \cdot b; \quad \delta_3 = \frac{-w}{a+b+c} \cdot c \quad (42)$$

poprawki mają znak przeciwny niż „w”, co uwidoczniliśmy w licznikach. Wracając do naszego przykładu, otrzymamy:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{100} \right) : \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200} \right) : \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{300} \right) \dots \dots (43)$$

gdzie $a = \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{100} \right) = 0.025$; $b = \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200} \right) = 0.015$; $c = \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{300} \right) = 0.00833$

$$\text{zatem: } \delta_1 = \frac{-150}{0.04833} \cdot 0.025 = 3104 \cdot 0.025 = -77.600'' \dots \dots (44)$$

$$\delta_2 = \frac{-150}{0.04833} \cdot 0.015 = 3104 \cdot 0.015 = -46.560'' \dots \dots (45)$$

$$\delta_3 = \frac{-150}{0.04833} \cdot 0.00833 = 3104 \cdot 0.00833 = -25.856'' \dots \dots (46)$$

Suma $-150.016''$

Poprawki te zaokrąglimy: $\delta_1 = 77.6''$, $\delta_2 = 46.5''$, $\delta_3 = 25.9''$ tak, że $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -150''$.

II. Obliczenie i wyrównanie współrzędnych polygonu.

Dane są stałe punkty A i C za pomocą współrzędnych oraz azymuty (AB) i (CD).

Pomierzono kąty przy wierzchołkach A, 1, 2 i C, oraz długości boków: A-1, 1-2, 2-C.

Obliczenie zestawiono w następującej tabeli:

Tabela 25.

1	2	3	4	5	6	7	8	Różnica		Poprawione		13	
								9	10	11	12		
Punkt	Kąt poly- gonu β	Azymut α	Dłu- gość boku m	$\log s + \log \sin \alpha$ = $\log (s \sin \alpha)$	$\log s + \log \cos \alpha$ = $\log (s \cdot \cos \alpha)$	Rzędne m	Od- cięte m	rzędnych m	odciętych m	$s \sin \alpha$ y	$s \cos \alpha$ x	U w a g a	
1	+ 15"	173° 56' 36.5"										Dane: $\alpha_0 = 173^\circ 56' 36.5''$ $\alpha_n = 253^\circ 39' 36.5''$ $\alpha_n - \alpha_0 = 79^\circ 43'$ różnica 1' = 60" popr. + $\frac{60}{4} = 15''$ $y_a = 1200.00$ $x_a = 435.12$ $y_c = 772.70$ $x_c = 145.92$	
A	126° 16' 10" + 15"	(300° 13' 01.5") 300° 12' 46.5"	125.15	2-09728 9-93658	2-09728 9-70179	1200.00	435.12	— 071	+ 033	— 108.036	62.994		
1	163° 08' 20" + 15"	(283° 21' 21.5") 283° 21' 06.5"	190.45	2-27968 9-98809	2-27968 9-36304			— 100	+ 049	— 185.190	44.029		
2	220° 15' 20" + 15"	(323° 36' 41.5") 323° 36' 26.5"	226.22	2-26777 9-77321	1-64332 9-90582			— 122	+ 060	— 185.190	44.029		
C	110° 02' 10" + 15"	(253° 38' 51.5") 253° 38' 36.5"	226.22	2-12774 9-90582	2-26035 9-90582	772.70	145.92	— 134.196	+ 182.117	— 134.074	182.177		
	619° 42' 00" 540° 79° 42'		541.82			427.30 427.593	289.20 289.058	427.593	289.058	— 427.30	289.20		

$$d_y = \frac{-f_y}{|s|} = dx = + 0.26 \frac{\text{mm}}{1 \text{ m}}$$

$$= -0.54 \frac{\text{mm}}{1 \text{ m}}$$

W rubryce 1. wypisane są nazwy wierzchołków, a obok, w rubryce 2. pomierzone kąty przy tych wierzchołkach.

Rubryka 3: Przedewszystkiem podany jest azymut kierunku (AB), jak to w uwadze naznaczono. Mając ten azymut i pomierzone kąty, obliczono azymuty innych boków polygonu i wypisano je bez nawiasów. Naturalnie, z pomiarów otrzymaliśmy jako wynik azymut kierunku (CD), różny od danego azymutu, jak to w uwadze obliczono, o 60". Różnicę tę rozdzielono w równych częściach na wszystkie kąty i poprawiono azymuty, podając odpowiednie im wyniki w nawiasach. Inne rubryki nie wymagają dalszych wyjaśnień, chyba to, że poprawki dy i dx obliczono w milimetrach na 1 m.

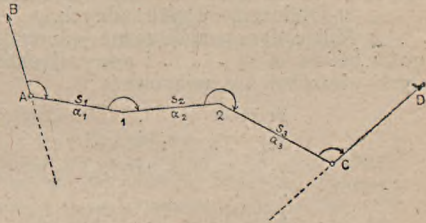


Fig. 163.

Wyrównanie wieloboku było możliwe, bo ani błąd w pomiarze długości, ani kątów, nie przekracza dozwolonych granic.

Pierwszy obliczymy w następujący sposób: $\sqrt{f_y^2 + f_x^2} = 0.32$ m, a ponieważ suma boków wynosi 541.82 m, dla tej zaś długości dozwolony błąd wynosi 0.79 m, więc pomiar był dobrym. Drugi obliczymy z wzoru $\Delta \alpha = 75'' \sqrt{n} = 75'' \sqrt{4} = 150''$, podczas gdy rzeczywista różnica wynosi tylko 60''.

§ 4. Polygony zamknięte.

Suma kątów wewnętrznych w wieloboku zamkniętym, wynosi:

$$[\alpha] = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (n - 2) \cdot 180^\circ \dots (47)$$

zaś suma kątów zewnętrznych:

$$[\beta] = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = (n + 2) \cdot 180^\circ \dots (48)$$

Równania (47.) i (48.) są warunkami, którym pomiar kątów w wieloboku zamkniętym powinien odpowiadać; w przeciwnym razie, błąd „w” rozdziela się w znany sposób na wszystkie kąty. Naturalnie, błąd „w” nie powinien przekraczać dozwolonej granicy, określonej równaniem $w \leq 75'' \sqrt{n}$.

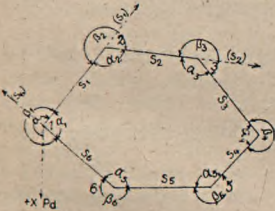


Fig. 164.

1. Obliczenie azymutów.

Przypuśćmy, że dany jest azymut boku s_1 za pomocą kąta α , natenczas, w znany sposób, wskazany na fig. 164., obliczymy kąty kierunkowe wszystkich innych boków, mianowicie:

$$(s_1) = \alpha,$$

$$(s_2) = (s_1) - 180^\circ + \beta_2 = (s_1) + \beta_2 \pm 180^\circ$$

$$(s_3) = (s_2) - 180^\circ + \beta_3 = (s_1) + \beta_2 + \beta_3 \pm 2 \cdot 180^\circ$$

⋮

$$(s_n) = (s_1) + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 \pm 5 \cdot 180^\circ$$

wreszcie azymut (s_1) jako azymut ostatniego boku:

$$(s_1) = (s_n) - 180^\circ + \beta_1 = (s_1) + \beta_1 + \dots + \beta_6 \pm 6 \cdot 180^\circ \quad (49)$$

Z ostatniego równania otrzymamy:

$$(s_1) - (s_1) = 0 = [\beta] \pm 6 \cdot 180^\circ \dots (50)$$

czyli ogólne dla wieloboku o n bokach:

$$[\beta] = \mp n \cdot 180^\circ, \text{ a ponieważ przez dodanie lub odjęcie } 2 \cdot 180^\circ \text{ azymut się nie}$$

zmienia, więc $[\beta] = \mp n \cdot 180^\circ \mp 2 \cdot 180^\circ$ lub

$$[\beta] = (n + 2) \cdot 180^\circ \dots \dots \dots (51)$$

Równania (50.) i (51.) określają ściśle warunki, jakie powinny być przy teoretycznie dokładnym pomiarze spełnione.

2. Obliczenie współrzędnych.

Mając dane współrzędne jednego punktu, n. p. punktu 1. (y_1 x_1), tudzież długości boków s_1 s_2 . . . i powyżej obliczone azymuty, obliczymy współrzędne innych wierzchołków, mianowicie:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \\ y_2 &= y_1 + s_1 \sin(s_1) \\ y_3 &= y_2 + s_2 \sin(s_2) = y_1 + s_1 \sin(s_1) + s_2 \sin(s_2) \end{aligned}$$

$$y_6 = y_1 + s_1 \sin(s_1) + s_2 \sin(s_2) + \dots + s_5 \sin(s_5)$$

a w końcu rzędną pierwszego punktu $y_1 = y_6 + s_6 \sin(s_6)$ czyli

$$y_1 = y_1 + s_1 \sin(s_1) + s_2 \sin(s_2) + \dots + s_6 \sin(s_6) \dots (52)$$

Z równania (52.) otrzymamy, jako warunek

$$y_1 - y_1 = 0 = [s \sin(s)] \dots \dots \dots (53)$$

Podobnie dla odciętych:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \\ x_2 &= x_1 + s_1 \cos(s_1) \\ \dots \\ x_6 &= x_1 + s_1 \cos(s_1) + \dots + s_5 \cos(s_5) \end{aligned}$$

i odcięta pierwszego punktu

$$x_1 = x_1 + s_1 \cos(s_1) + \dots + s_6 \cos(s_6) \dots \dots \dots (54)$$

$$\text{oraz } x_1 - x_1 = 0 = [s \cdot \cos(s)] \dots \dots \dots (55)$$

Równania (53.) i (55.) t. j. $[s \cdot \sin(s)] = 0$ i $[s \cdot \cos(s)] = 0$ są kontrolą pomiarów. Jeżeli powyższy warunek nie jest spełniony, to przyczyną błędów może być tylko błędny pomiar długości.

Wogóle oba warunki w praktyce nie mogą być ściśle zachowane, czyli że z obliczenia otrzymamy:

$$[s \sin(s)] = f_y \quad \text{i} \quad [s \cos(s)] = f_x \dots \dots \dots (56)$$

z tych zaś obliczy się błąd pomierzonej długości polygonu, według równania:

$$\sqrt{f_y^2 + f_x^2} = \Delta s \dots \dots \dots (57)$$

przyczem Δs nie powinno przekraczać dozwolonej granicy, w przeciwnym bowiem razie pomiar musiałby być powtórzony.

Wreszcie z równania 35. dostaniemy poprawkę dla współrzędnych:

$$dy = \frac{-f_y}{[s]} \quad \text{i} \quad dx = \frac{-f_x}{[s]} \dots \dots \dots (58)$$

i to w mm na 1 m, jeżeli f_y i f_x wyrazimy w mm, zaś $[s]$ w metrach, lub w cm na 1 m, jeżeli f_y i f_x są w cm a $[s]$ w m wyrażone. Z tych jednostkowych poprawek, otrzymamy poprawki dla odpowiednich długości współrzędnych, mnożąc je przez s_1 s_2 . . .

$$\text{w ogóle } dy_n = \frac{-f_y}{[s]} \cdot s_n \quad \text{i} \quad dx_n = \frac{-f_x}{[s]} \cdot s_n \dots \dots \dots (59)$$

Poprawione długości współrzędnych t. j. $s_n \sin(s_n) + dy_n$ i $s_n \cos(s_n) + dx_n$ uwidoczniły odpowiednio w protokole.

Polygonów zamkniętych używa się rzadko, zazwyczaj tylko wówczas, gdy nie mamy żadnej podstawy tryangulacyjnej do nawiązania polygonu i musielibyśmy założyć polygon otwarty, który, jak wiadomo, nie da się skontrolować.

Co do błędów, jakie przy najstaranniejszych pomiarach przecież popełniamy, to jako praktyczne granice, na podstawie doświadczeń, przyjąć możemy:

- a) Błąd wskutek ekscentrycznego ustawienia teodolitu, $e = \text{około } \pm 5 \text{ mm}$;
- b) wskutek ekscentrycznego ustawienia sygnału $e' = \pm 10 \text{ mm}$;
- c) średni błąd pomiaru kąta na limbusie $\mu = \pm 10''$;
- d) błąd celowej, zależnie od odległości sygnału; im bliżej jest sygnał, tem możliwszy jest większy błąd i odwrotnie. Unikać więc powinno się zbyt krótkich celowych a wogóle poniżej 50 m nigdy nie schodzić.

§ 5. Punkty węzłowe.

Często się zdarza, że dwa polygony, łączące po dwa punkty stałe, przecinają się, lub, że z tych czterech, względnie trzech lub więcej punktów stałych, wykonać wypadnie pomiar za pomocą polygonów, schodzących się w jednym punkcie. Fig. 165. przedstawia takie trzy polygony, wychodzące z punktów stałych A B i C, a schodzące się w punkcie D.

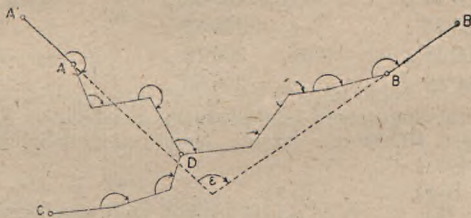


Fig. 165.

W rzeczywistości punkt D jest wspólnym punktem, lecz po wykonaniu pomiarów i obliczeniu współrzędnych okaże się zwykle, że z każdego polygonu otrzymamy inne wyniki, czyli, że dla tego samego punktu będziemy mieli:

Z pierwszego polygonu: $D_1 (y_1 x_1)$; z drugiego: $D_2 (y_2 x_2)$; z trzeciego: $D_3 (y_3 x_3)$. Przyczyną tych różnic są jedynie tylko błędy w pomiarze kątów i boków i te błędy mamy wyrównać. Gdyby wszystkie polygony miały te same warunki, t. j. odpowiednio długości boków byłyby prawie równe i ilość kątów w każdym z nich taka sama, tobyśmy pomiarom przypisali równe wagi i jako najprawdopodobniejszą wartość przyjęlibyśmy średnią arytmetyczną z obliczonych wartości współrzędnych. Trudno jednak szukać w praktyce takich warunków; zazwyczaj są one różne. W takim razie, najprawdopodobniejszą wartość obliczymy według teorii błędów, z równań:

$$y = \frac{[p y]}{[p]} \quad \text{oraz} \quad x = \frac{[p x]}{[p]} \quad \dots \quad (60)$$

gdzie y i x mamy dane z polygonów, zaś $[p]$ jest sumą wag, jakie nadamy każdemu z polygonów. Im dłuższy jest polygon, tem więcej mamy sposobności do błędów, tak w pomiarze kątów jak i długości, czyli, że wagi będą odwrotnie proporcjonalne do długości polygonów.

Nazwijmy te długości przez $s_I s_{II} \dots s_N$ to: $p_I = \frac{1}{s_I} p_2 = \frac{1}{s_{II}} \dots$
 $p_N = \frac{1}{s_N}$; zatem przyjęcie odpowiednich wartości dla wag, jak i zastosowanie wzoru (60.) nie przedstawia żadnych trudności.

Po ustaleniu współrzędnych punktu węzłowego, musimy go traktować tak samo, jak każdy punkt stały, zatem wyrównamy polygony między poszczególnymi punktami A, B, C . . . a punktem węzłowym w ten sam zupełnie sposób, w jaki robiliśmy to, gdy polygony były nawiązane do punktów tryangulacyjnych.

Pewne wyjaśnienia są tu jednak konieczne, mianowicie: Punkt węzłowy D znajdować się może w takim miejscu, że z niego nie widać żadnego punktu stałego, czyli nie jesteśmy w stanie pomierzyć kąta między ostatnim bokiem wieloboku, a kierunkiem DB, DC lub DA, co, jak wiemy, potrzebne jest do wyrównania kątów. Jako kontrolę bowiem mamy kąt zawarty między azymutami: ($\overline{AA'}$) i n. p. (DB), jeżeli chodzi o wielobok AD.

Tutaj, przy wierzchołku D, kąta takiego nie mamy. Poradzić sobie jednak możemy, bo mając ustalone współrzędne punktu D, możemy obliczyć azymut kierunku (DB), a mając ($\overline{AA'}$) obliczymy kąt (ϵ), który porównamy z kątem (ϵ'), zawartym między ($\overline{AA'}$) a (D_1B) gdzie D_1 jest pierwotnem, błędnem położeniem punktu D. W ten sposób wyrównać możemy kąty wszystkich wieloboków. Wyrównanie długości współrzędnych nie przedstawia już trudności i wykona się tak jak w poprzednich paragrafach wskazano.

Jako przykład obliczenia współrzędnych punktu węzłowego, przyjmijmy, że schodzi się w nim 5 wieloboków, z których obliczono:

$y_1 = 100\cdot05$ m	$x_1 = 200\cdot50$ m	$s_1 = 80\cdot0$ m
$y_2 = 100\cdot10$ „	$x_2 = 200\cdot60$ „	$s_2 = 120\cdot0$ „
$y_3 = 100\cdot25$ „	$x_3 = 200\cdot65$ „	$s_3 = 260\cdot0$ „
$y_4 = 100\cdot35$ „	$x_4 = 200\cdot70$ „	$s_4 = 350\cdot0$ „
$y_5 = 100\cdot40$ „	$x_5 = 200\cdot85$ „	$s_5 = 400\cdot0$ „

gdzie s_1 s_2 . . . s_5 są długościami odpowiednich wieloboków. Zwykła średnia arytmetyczna dałaby: $y = 100\cdot25$ $x = 200\cdot66$. Najprawdopodobniejszą jednak wartość obliczymy z równania:

$$y = \frac{[p y]}{[p]} \quad x = \frac{[p x]}{[p]} \quad \text{gdzie } p_1 = \frac{1}{80} = 0\cdot012500$$

$$p_2 = \frac{1}{120} = 0\cdot008333$$

$$p_3 = \frac{1}{260} = 0\cdot003846$$

$$p_4 = \frac{1}{350} = 0\cdot002857$$

$$p_5 = \frac{1}{400} = 0\cdot002500$$

$$[p] = 0\cdot030036$$

wkońcu $y = \frac{3\cdot0060018}{0\cdot030036} = 100\cdot08$ m, zatem najbardziej jest zbliżone do wyników otrzymanych z najkrótszych wieloboków, jako najpewniejszych. Natomiast średnia arytmetyczna nie charakteryzowałaby swą wartością, dokładności poszczególnych pomiarów wieloboków.

W podobny sposób obliczymy i odciętą x .

§ 6. Wcinanie wstecz.

Jest to sposób wyznaczenia współrzędnych punktu, za pomocą pomiaru dwóch tylko kątów, pod warunkiem, że z danego punktu nie tylko że trzy punkty stałe są widoczne, ale i współrzędne ich są znane.

W interesie dokładności pomiarów polygonalnych leży, mieć ile możności gęstą sieć punktów stałych, do których nawiązuje się polygony. Punkty zaś tryangulacyjne, z natury rzeczy nie mogą być tak gęsto rozmieszczone, skutkiem czego polygony muszą być nieraz długie, z uszczerbkiem dokładności. Stąd też pochodzi, że wszędzie tam, gdzie to jest tylko możebne, uzupełniamy sieć punktów stałych; wcinanie wstecz zaś właśnie służy do tego celu, bo za pomocą tej metody możemy niejednokrotnie otrzymać nowe punkty stałe.

Przyjmijmy, że dane są punkty stałe A B i C, fig. 166., t. j. ich współrzędne A (y_a x_a) B (y_b x_b) C (y_c x_c) tudzież, że z punktu D widoczne są tamte, tak, że kąty α i β można pomierzyć.

Ponieważ z danych współrzędnych można łatwo obliczyć azymuty i długości kierunków, przeto tak (a) = (AB) i (b) = (BC), jak długości a i b uważać musimy jako wiadome. Obliczyć zaś mamy współrzędne punktu D, do czego potrzebujemy kątów φ i ψ, tudzież długości AD i CD, dotychczas niewiadomych.

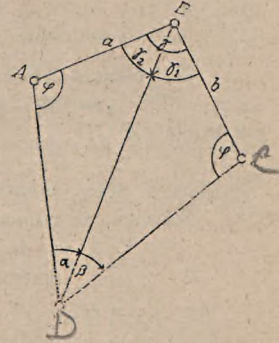


Fig. 166.

Z czworoboku ABCD otrzymamy:

$$(\alpha + \beta) + \gamma + \varphi + \psi = 360^\circ \text{ a stąd}$$

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{360 - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} \dots (61)$$

Następnie z trójkątów DAB i DBC:

$$DB = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \psi = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \varphi \text{ stąd zaś}$$

$$\sin \varphi : \sin \psi = \frac{a}{\sin \alpha} : \frac{b}{\sin \beta} \dots (62)$$

prawa strona powyższej proporcji składa się z ilości wiadomych, zatem da się obliczyć — nazwijmy więc

$$\frac{a}{\sin \alpha} : \frac{b}{\sin \beta} = \frac{1}{\operatorname{tg} \eta} \dots (63)$$

a wstawwszy to w równanie (62.) dostaniemy

$$\sin \varphi : \sin \psi = 1 : \operatorname{tg} \eta \dots (64)$$

Na podstawie znanych własności proporcji, przekształcimy równanie (64.) w następujący sposób:

$$\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{1 - \operatorname{tg} \eta}{1 + \operatorname{tg} \eta} = m \dots (65)$$

gdzie tg η, zatem i cała prawa strona równania jest ilością znaną.

Ponieważ, jak wiemy z geoniometrii:

$$\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right)} \dots (66)$$

gdzie znów $\left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right)$ jest ilością znaną z równania (61.), mianowicie

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{360 - (\alpha + \beta + \gamma)}{2}, \text{ zatem nazwijmy}$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right) = n \dots (67)$$

Z równania (66.) otrzymujemy:

$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2}$ a gdy pierwszy czynnik z prawej strony równania równy jest m według równania (65.) drugi zaś = n według (67.), przeto

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = m \cdot n \text{ skąd obliczymy już łatwo } \left(\frac{\varphi - \psi}{2} \right) \dots (68)$$

Mając $\frac{\varphi + \psi}{2}$ i $\frac{\varphi - \psi}{2}$ czyli $(\varphi + \psi)$ i $(\varphi - \psi)$ znajdziemy oba kąty φ i ψ przez proste rozwiązania dwu równań o dwóch niewiadomych, t. j.

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= n' \\ \varphi - \psi &= m' \end{aligned}$$

$$2\varphi = m' + n' \text{ czyli } \varphi = \frac{m' + n'}{2} \dots \dots \dots (69)$$

$$\text{i podobnie } \psi = \frac{n' - m'}{2}$$

W trójkącie ABD mamy zatem już kąty α i ψ , czyli obliczymy trzeci $\gamma_2 = 180 - (\alpha + \psi)$ (70)
i z trójkąta BCD:

$$\gamma_1 = 180 - (\beta + \varphi) \dots \dots \dots (71)$$

$$\text{czyli } \sin \gamma_1 = \sin (\beta + \varphi) \text{ i } \sin \gamma_2 = \sin (\alpha + \psi) \dots \dots \dots (72)$$

Wkońcu, za pomocą reguły wstaw otrzymamy:

$$CD = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin (\beta + \varphi) \dots \dots \dots (73)$$

$$\text{i } AD = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin (\alpha + \psi)$$

Mamy już tedy wszystko potrzebne do obliczenia współrzędnych punktu D, a zatem:

$$y_d = y_c + CD \sin (CD) \dots \dots \dots (74)$$

$$x_d = x_c + CD \sin (CD) \dots \dots \dots (75)$$

$$\text{gdzie } (CD) = (CB) - \varphi \dots \dots \dots (76)$$

§ 7. Wcinanie wprzód.

Przypuśćmy, że dane są współrzędne punktów: A ($y_a x_a$) B ($y_b x_b$) D ($y_d x_d$) i E ($y_e x_e$), tudzież że z punktu A punkt B jest niewidoczny, n. p. z powodu zabudowań lub konfiguracji terenu.

Natomiast punkt C można widzieć ze stanowiska A i ze stanowiska B, czyli że z obu tych stanowisk możemy zmierzyć kąty δ i ϵ .

Słowem, dane są cztery punkty stałe i zmierzone kąty δ i ϵ , obliczyć mamy współrzędne punktu C, czyli ustalić ten punkt do pomiarów polygonalnych potrzebny.

Z danych współrzędnych obliczymy:

$$\begin{aligned} \text{tg } (AD) &= \frac{y_d - y_a}{x_d - x_a} \\ \text{a stąd } (AD) &= (d) \dots (77) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tg } (AB) &= \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \\ \text{a stąd } (AB) &= (c) \dots (78) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tg } (BE) &= \frac{y_e - y_b}{x_e - x_b} \\ \text{a stąd } (BE) &= (e) \dots (79) \end{aligned}$$

Za pomocą pomierzonych kątów δ i ϵ otrzymamy:

$$(AC) = (AD) + \delta \text{ i } (BC) = (BE) - \epsilon \dots \dots \dots (80)$$

Z azymutów boków trójkąta ACB dostaniemy:

$$\alpha = (AB) - (AC) \quad \beta = (BC) - (BA) \quad \gamma = (CA) - (CB) \dots (81)$$

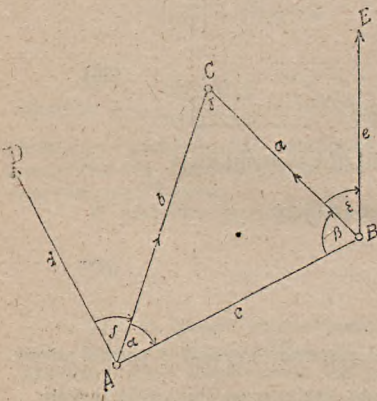


Fig. 167.

wreszcie długość boku $AB=c$:

$$AB = \frac{y_b - y_a}{\sin(\angle B)} \quad \text{i} \quad a = \frac{e}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha \quad b = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta \quad \dots (82)$$

Na podstawie wyżej obliczonych, dostaniemy:

$$\begin{aligned} y_c &= y_a + b \sin(\angle AC) \\ x_c &= x_a + b \cos(\angle AC) \quad \dots \dots \dots (84) \end{aligned}$$

$$\text{lub} \quad \begin{aligned} y_c &= y_b + a \sin(\angle BC) \\ x_c &= x_b + a \cos(\angle BC) \quad \dots \dots \dots (84) \end{aligned}$$

Położenie punktu C jest zatem ściśle oznaczone, czyli może on służyć, jako punkt stały, do nawiązania zdjęć polygalnych.

Wcinanie wprzód nadaje się zwłaszcza do zdjęcia takich punktów, jak szczyty wież i t. p. niedostępnych.

ROZDZIAŁ XIII.

Zdjęcia za pomocą kompasu.

§ 1. Diopter i teodolit kompasowy.

1. Fig. 168. przedstawia diopter kompasowy. Najważniejszą częścią tego przyrządu jest igła magnetyczna, umieszczona w pudełku mosiężnym „a” od góry przykrytym szkłem. Igła obraca się w płaszczyźnie poziomej na ostrzu. Na obwodzie pudełka, wewnątrz, znajduje się podziałka kątowa, podobnie jak na limbusie teodolitu. Igła

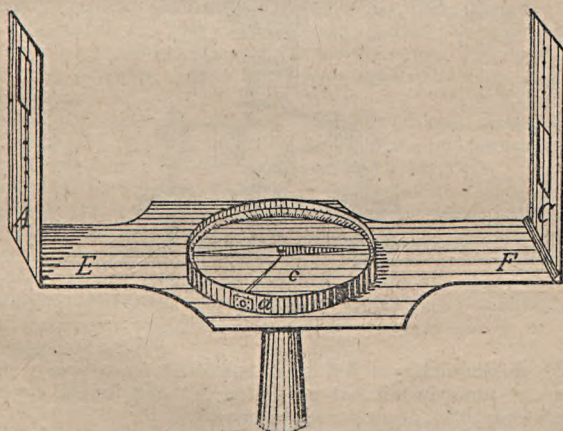


Fig. 168.

magnetyczna ma taką długość, że prawie dotyka końcami podziałki limbusowej, wskazując kąt. Kompas umocowany jest na płytce podłużnej EF, opatrzonej u dołu w tulejkę, celem nasadzania całego przyrządu na statyw czopowy. Na obu końcach płytki umieszczone są, jak to widać z rysunku, pionowe blaszki mosiężne z podłużnymi otworami, takimi samymi, jakie poznaliśmy u węgielnic bębnowych. Wązki otwór w blaszce A, tudzież napięty włos w szerszym, przeciwnym otworze w blaszce C wyznaczają oś celową; podobnie wązki otwór w C i włos w A, leżące ponad pierwszymi. Na tej osi celowej leży środek obrotu igły magnetycznej, t. j. ostrze, na którym igła się obraca, oraz zero podziałki limbusowej i naprzeciw niego kąt 180°.

Ustawwszy statyw na danym punkcie, obracamy diopter w ten sposób, by biegun północny igły wskazywał na limbusie 0° , wówczas diopter wyznacza linię południe—północ. Następnie zwracamy diopter w danym kierunku, celując na sygnał. Igła magnetyczna, po uspokojeniu się jej wahań, ustawi się znowu w linii południe—północ, podczas gdy zero podziałki zostało zwrócone w pewnym kierunku; temsamem koniec igły wskazuje na limbusie kąt, który możemy odczytać z dokładnością 5 do 10 minut, zależnie od wielkości busoli. Noniuszów nie ma. Busola zatem daje odrazu azymuty kierunków.

2. Teodolit kompasowy. Z poprzedniego opisu nietrudno dojść do przekonania, że diopter kompasowy jest w porównaniu ze znanymi nam instrumentami, przyrządem, stosunkowo bardzo niedokładnym. Nie tylko, że odczyty kątów pozostawiają wiele do życzenia, lecz także obracanie przyrządu około osi pionowej, jakoteż ustawienie go w poziomie muszą być bardzo niedokładne. To też diopter używa się bardzo rzadko, w lasach, do robót nie wymagających ściśłości.

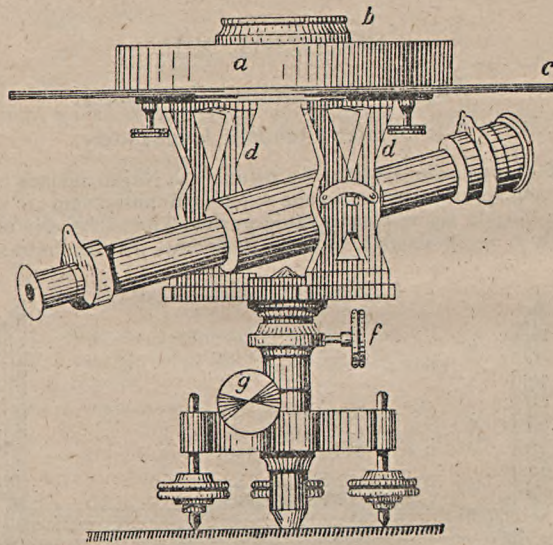


Fig. 169.

Już daleko dokładniejszym jest t. z. teodolit busolowy, przedstawiony na fig. 169. Busola „a” umocowana jest na płycie „c” nad lunetą, na niej zaś znajduje się libelka pudełkowa „b”.

Luneta umieszczona na osi poziomej w ramionach „d” jest w ten sposób skonstruowana, że daje się łatwo wyjmować z łożysk, przekładać w przeciwną stronę lub przekładać w łożyskach, t. j. obracać około jej osi geometrycznej, co jest wielką zaletą tego instrumentu. Śruba „i” służy do ustalenia lunety w danym kierunku, zaś śrubą „g” da się wykonywać ruch powolny, podobnie jak przy instrumencie uniwersalnym lub teodolicie. Przyrząd, przedstawiony na fig. 169. należy do mniej dokładnych, bo kąty odczytuje się na podziałce busoli tak samo, jak przy diopterze, nie można więc uzyskać większej dokładności.

Przy ustawieniu instrumentu i odczycie kątów postępujemy tak samo, jak z dioptrem, konstrukcja jednak tego przyrządu pozwala już na dokładniejsze pomiary.

3. Linia, jaką wyznaczają oba bieguny igły magnetycznej, nazywa się osią magnetyczną; płaszczyzna pionowa, przesunięta przez oś magnetyczną, przecina powierzchnię kuli ziemskiej w t. z. południku magnetycznym, różniącym się od po-

łudnika geograficznego. Kąt, zawarty między obu tymi południkami, t. j. magnetycznym i geograficznym, nazywamy zбочeniem igły, albo deklinacją. Deklinacja może być wschodnią, zachodnią, lub też równą zeru.

Linia krzywa, łącząca na powierzchni ziemi takie punkty, w których nie ma żadnego zбочenia igły, dzieli ziemię na dwie części — na jednej będziemy mieli zбочenie wschodnie, na drugiej zachodnie. Obecnie n. p. cała prawie Europa, z wyjątkiem północno-wschodniej Rosyi, dalej ocean Atlantycki i wschodnia część północnej Ameryki ma zбочenie zachodnie. Deklinacja nie jest jednak dla danego punktu na ziemi stałą, lecz zmienia się w ciągu bardzo długiego czasu, bo w ciągu około 480 lat ze wschodniej na zachodnią, t. j. od maximum do maximum. W XVI. wieku miała Europa zбочenie wschodnie, które powoli zmniejszało się, przeszło przez zero i teraz mamy zachodnie, które przed około 80 laty przeszło przez maximum i zmniejsza się, zdążając znowu do wschodniego.

Paryż miał w r. 1580 zбочenie wschodnie $11^{\circ} 5'$ — w r. 1663 zбочenie 0° , w r. 1700 zaś zбочenie zachodnie wynosiło $8^{\circ} 10'$, w r. 1780 $19^{\circ} 55'$, w r. 1805 $22^{\circ} 5'$, w r. 1814 $22^{\circ} 34'$, w r. 1816 $22^{\circ} 25'$, w r. 1892 $15^{\circ} 3'$, zatem przeszło już w międzyczasie przez maximum i zmniejszyło się.

Zбочenie igły magnetycznej zależne jest od długości i szerokości geograficznej. Wielkość zбочenia podają najwygodniej mapy, na których wykreślone są t. z. izogony, t. j. linie o takich samych zбочeniach.

Prócz poprzednio opisanej deklinacji, ma nadto igła magnetyczna zбочenia dzienne, mianowicie rano o godzinie 8 i wieczorem o 10, najwięcej zbaca na wschód, po południu o 2 i w nocy także o 2 godzinie najwięcej na zachód, czyli ma dwa maxima i dwa minima zбочeń dziennych. Te zбочenia dzienne rosną wraz z szerokością geograficzną, w lecie są większe niż w zimie, a zmieniają się w mniej więcej 10-letnich okresach.

Ażehy za pomocą busoli wyznaczyć kierunek południka geograficznego w danym punkcie, zatem o znanej szerokości i długości geograficznej, trzeba znać deklinację i to uwzględniającą rok, miesiąc, dzień i godzinę.

Oprócz deklinacji, ma igła magnetyczna jeszcze drugie zбочenie, w płaszczyźnie pionowej, t. z. inklinację, która jednak przy zdjęciach sytuacyjnych nie wchodzi w rachubę, a wpływ jej na pochylenie igły usuwa się za pomocą obciążenia drugiego jej bieguna.

Mimo deklinacji, igła magnetyczna może być zastosowaną do pomiarów azymutów aż do odległości punktów 8 do 10 km, bo na tej przestrzeni zбочenie jest jeszcze bardzo nieznaczne i mieści się w granicach błędów.

Jak z poprzednich opisów widzimy, igła magnetyczna nie może dawać stałych kierunków nawet w tym samym punkcie, w różnych tylko porach. Nadto, zmiana temperatury, zaburzenia atmosferyczne, a nawet jakość warstw geologicznych wywiera wpływ na busolę, zwłaszcza takie skały, jak: bazalt, serpentyn, granit lub porfir, zawierające żelazo. To też zdjęcia za pomocą busoli nie mogą iść w porównanie ze zdjęciami teodolitem; mimo to, oddaje teodolit kompasowy wielkie usługi w pomiarach lasowych, zwłaszcza wówczas, gdy można nawiązywać je do punktów stałych, w inny sposób wyznaczonych.

§ 2. Sprawdzenie kompasu.

1. Czułość igły sprawdza się w ten sposób, że zbliżamy do niej kawałek żelaza, wskutek czego igła wychyli się z pierwotnego położenia. Następnie żelazo usuwamy z pobliza, a gdy igła powróci do równowagi, sprawdzamy na podziałce, czy kąt, jaki teraz wskazuje, zgadza się dokładnie z poprzednim. Jeżeli się skonstatuje różnica, to albo siła magnetyczna igły jest osłabiona, albo tarcie na ostrzu jest zbyt wielkie. W każdym razie trzeba wówczas oddać igłę do laboratorium do naprawy.

2. Igła powinna obracać się w płaszczyźnie poziomej, w wysokości podziałki. Jeżeli busolę ustawimy za pomocą libelli do poziomu, to igła magnetyczna powinna być również poziomą; jeżeli jednak okazuje się inklinacja, to wystarczy przeciwny biegun nieco obciążyć kawałeczkiem wosku, a rektyfikacja skończy się na tem.

3. Podziałka na kole powinna być dobrą i nie zawierać grubych błędów — linie 0° — 180° i 90° — 270° powinny być prostopadłe. Celem sprawdzenia, wyjmuje

się koło podziałowe i za pomocą cyrkla mikrometrycznego się sprawdza. Błąd w podziale nie da się usunąć i wówczas musi się zamówić nowe koło.

4. Igła magnetyczna powinna być centrycznie osadzona. Ażeby to sprawdzić, odczytujemy kąty przy obu biegunach igły. Oba odczyty różnić się powinny o 180° , jeżeli różnica jest inną, to wskazuje, że igła jest osadzona ekscentrycznie. Błąd w pomiarze kąta, jaki się popełnia z powodu ekscentryczności igły, możemy wyeliminować, podobnie jak przy teodolicie, przez odczytanie kątów przez oba bieguny wskazanych obliczenie z nich średniej arytmetycznej.

5. Statyw, ani też sam przyrząd nie powinien mieć żadnych części składowych z żelaza.

§ 3. Pomiar polygonu za pomocą kompasu.

1. Przyjmijmy, że fig. 170. przedstawia polygon zamknięty, jaki mamy za pomocą teodolitu busolowego pomierzyć.

W tym celu ustawmy instrument w wierzchołku A, ale tak, by północny biegun igły wskazywał dokładnie 0° (czyli 360°) na podziałce. Następnie obrócimy alhidadę wraz z lunetą celując do punktu B. Wówczas 0° podziałki znajdzie się

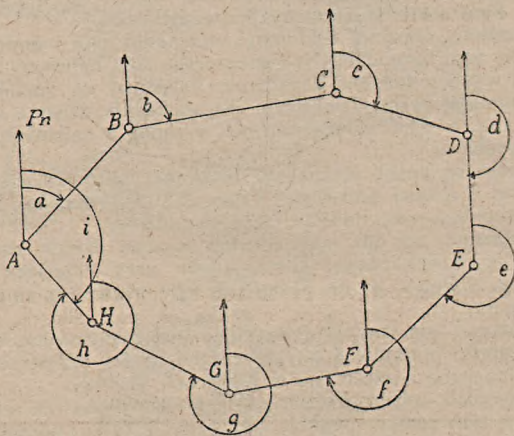


Fig. 170.

również w kierunku celowej AB, igła zaś, po uspokojeniu się jej wahań wskaże na kole podziałowem kąt $\alpha = 360 - a$; czyli chcąc otrzymać kąt „a“, t. j. azymut kierunku AB, należy odczyt na kole podziałowem odjąć od 360° $a = 360^\circ - \alpha$. Kąty mierzymy zawsze od lewej ku prawej, podobnie jak poprzednio — w tym samym kierunku postępuje też podziałka kątowa, natomiast pozorny ruch igły magnetycznej odbywa się w przeciwnym. Stąd wynika powyższe postępowanie przy obliczaniu azymutów. Otrzymane azymuty liczone są w tym wypadku nie od linii południe — północ, jak to mieliśmy w poprzednich rozdziałach, lecz od linii północ — południe. Ażeby otrzymać azymut liczony od kierunku południe — północ, trzeba dodać do powyższego $\pm 180^\circ$. W taki sam sposób pomierzemy azymuty innych boków wieloboku.

Pomiar długości boków, obliczenie współrzędnych i wyrównanie błędów pomiarów, nie różni się w niczem od tych, jakie poznaliśmy dotąd.

Zupełnie podobnie, jak przy zdjęciach teodolitowych, postąpimy także przy nawiązaniu polygonu do punktów stałych i wyrównaniu błędów pomiarów.

O ile zachodzi potrzeba, możemy uwzględnić i deklinację, a wówczas do obliczonych poprzednio wartości azymutów, dodać należy jako poprawkę, kąt deklinacyjny.

Zatem azymut kierunku AB będzie miał wartość:

$$(AB) = a + \delta \quad \text{gdzie } \delta = \text{deklinacji.}$$

2. Inny sposób pomiaru kątów polygonu, t. z. z omijaniem, przedstawiony jest na fig. 171.

Polega on na tem, że nie mierzymy kątów na każdym wierzchołku, lecz tylko co drugi, omijając pośrednie. Natomiast na każdym stanowisku mierzymy dwa kąty. N. p. w punkcie C zmierzony kąt c jest azymutem kierunku CD, zaś kąt oznaczony drugim łukiem, jest azymutem kierunku CB. Ażeby więc z azymutu (CB) obliczyć azymut (BC) = b , należy do pierwszego dodać 180° czyli $(BC) = b + 180^\circ$, jak to naznaczono na rysunku. Ten sposób upraszcza pomiar, oszczędzając czasu.

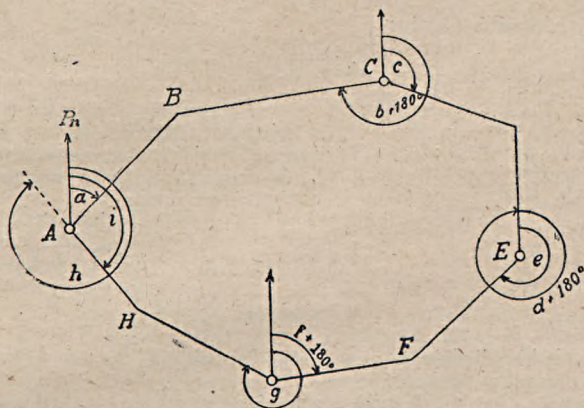


Fig. 171.

Niekiedy, ażeby oszczędzić czasu na odejmowanie pomierzonych kątów od 360° , o czem poprzednio mówiliśmy, urządza się podziałkę kątową w przeciwnym kierunku — wówczas odczytujemy wprost azymuty.

Wzór protokołu podajemy poniżej:

Protokół zdjęcia kompasem.

Stanowisko	Od punktu	Do punktu	Kąt odczytany β	Deklinacja δ	Kąt obliczony $a = 360^\circ - \beta + \delta$	Długość boku m	Uwaga
A	A	B	223° 15'	+ 1° 04'	137° 49'	22:20	

§ 4. Dokładność pomiaru kątów kompasem.

Jak już mówiliśmy, można mierzyć kąty kompasem z dokładnością 5 do 10 minut. W porównaniu z tem, daje zatem teodolit 100 razy większą dokładność.

Przypuśćmy, że polygon (0) (1) (2) . . . fig. 172., jest otwarty i prowadzi prawie w linii prostej, tudzież i wszystkie boki są równe; w takim razie, przy starannym pomiarze kątów, także i błędy pomiaru ich powinny być równe.

Niech błąd pomiaru kąta = ε , długość boku = l , to błąd w pomiarze kąta możemy przedstawić jako przesunięcie następnego wierzchołka w kierunku poprzecznym o długość

$$q' = \varepsilon \cdot l \dots \dots \dots (1)$$

Zatem całkowite przesunięcie ostatniego wierzchołka polygonu, złożonego z n boków, czyli średni błąd pomiaru polygonu, wskutek błędów w kątach, wyniesie według teorii błędów:

$$q = \pm \sqrt{(1\varepsilon)^2 + (1\varepsilon)^2 + \dots + (1\varepsilon)^2} = \sqrt{n \cdot (1\varepsilon)^2} = 1 \cdot \varepsilon \sqrt{n} \quad (2)$$

Ponieważ przyjęliśmy, że wszystkie boki są równe, więc nazwawszy całą długość polygonu przez L, otrzymamy:

$$L = n \cdot l \quad \text{stąd zaś } n = \frac{L}{l} \quad \dots \dots \dots (3)$$

co wstawmy w równanie (2) to:

$$q = \pm 1 \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{L}{l}} = \pm \varepsilon \sqrt{L \cdot l} \quad \dots \dots \dots (4)$$

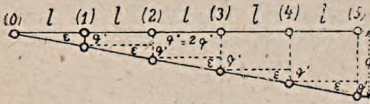


Fig. 172.

Przypuśćmy, że mamy dwa polygony o równych długościach L, natomiast pojedyncze boki w pierwszym mają długości po l₁, w drugim po l₂, to na podstawie równania (4.) otrzymamy:

$$q_1 = \pm \varepsilon \sqrt{L \cdot l_1} \quad \dots \quad (5)$$

$$q_2 = \pm \varepsilon \sqrt{L \cdot l_2}$$

$$\text{stąd zaś } \frac{q_1}{q_2} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \quad \dots \quad (6)$$

stosunek obu błędów będzie tem większy, im większe jest l₁ w porównaniu do l₂ przyjętego za normalną długość.

Stąd wynika, że im dłuższe są boki, tem większe popełniamy błędy w pomiarze kątów. Jako normalną długość boku, jak wykazała praktyka, powinno się przyjmować około 20 m. Wogóle przy zdjęciach busołą należy używać krótkich długości boków.

§ 5. Graficzne wyrównanie zdjęć wieloboków zamkniętych.

1. W niektórych wypadkach, zwłaszcza przy zdjęciach busołą, zatem mało dokładnych, nie opłaci się przeprowadzać rachunkiem wyrównania błędów pomiarów, natomiast wystarczy przybliżony, graficzny sposób, którego przebieg podajemy poniżej.

Przypuśćmy, że zdjęto wielobok ABCDEF za pomocą pomiaru kątów i długości boków. Wielobok tworzy w polu zamkniętą figurę; rysując plan, wyszliśmy z punktu A, a po dojściu do punktu D' powróciliśmy znowu do A, ażeby drugą część wieloboku wyznaczyć w planie i doszliśmy do punktu D''. Rysując w ten sposób, popełniamy mniejszy błąd rysunkowy, aniżeli w jednym ciągu od A przez B . . . DE . . . do A. Tak wskutek błędów w pomiarach jak w rysunku, otrzymaliśmy dwa punkty (fig. 173.) D' i D'' zamiast jednego: D.

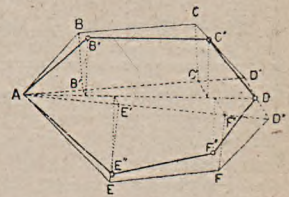


Fig. 173.

2. Ponieważ wszystkim błędom możemy w tym wypadku, w przybliżeniu, przypisać te same wagi, więc też przyjmijmy, że punkt D powinien leżeć w środku między D' i D''. Połączywszy obydwa te punkty, wyznaczmy w środku długości D' D'' punkt D. Lecz pozostają jeszcze inne wierzchołki, których położenie zrektyfikujemy w następujący sposób:

Połączymy A z D' i A z D'', ze wszystkich zaś wierzchołków wykreślmy rzędne BB' i CC' prostopadłe do AD', tudzież EE' i FF' prostopadłe do AD''. Teraz wykreślmy z B' C' E' F' równoległe do D' D'' aż do przecięcia się ich z przekątną AD, z tych zaś punktów wykreślmy wkońcu rzędne, prostopadłe do AD. Odcinawszy na tych nowych rzędnych długości poprzednich rzędnych, otrzymamy punkty B'' C'' E'' F'' jako wierzchołki wyrównanego wieloboku.

Zupełnie analogicznie postąpimy, gdy boki CD' i ED'' przecinają się. Wyrównanie jest zrozumiałe z fig. 174.

3. Trzeci wypadek przedstawia fig. 175., mianowicie gdy punkty A, D' i D'' leżą na jednej prostej. Punkt D oberzmy również pośrodku, między D' i D'' . Następnie promieniem AD zakreslimy łuk z punktu A i oberzmy na nim punkty M i N tak, że $DM = DN$.

Połączmy A z M i A z N . Wykreślimy następnie rzędne $BB', CC' \dots$ prostopadłe do AD — z punktów zaś $B', C' \dots$ wykreślimy linie $B'B_1, C'C_1 \dots$ równoległe do $D'M$ aż do przecięcia się ich z prostą AM ; wkońcu zatoczmy łuki $B_1B', C_1C' \dots$ z punktu A jako środka i w punktach $B', C' \dots$ wykreślimy znowu prostopadłe do AD , a odciąższy na nich długości poprzednich rzędnych, otrzymamy nowe położenie wierzchołków: $B'' C'' \dots$

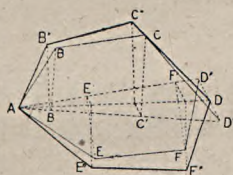


Fig. 174.

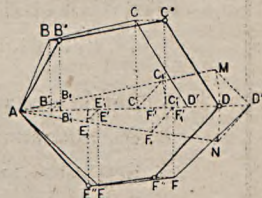


Fig. 175.

Jest to bardzo prosty i łatwy sposób wyrównania, ale jako przybliżony, niedokładny.

Jeżeli zwyczajny instrument uniwersalny, zwykle małego typu, uzbroimy w busolę umocowaną dość wysoko nad lunetą w przedłużonych ramionach i opatrzoną także w libellę, to będziemy mieli równocześnie teodolit busolowy i instrument uniwersalny, za pomocą którego możemy wykonywać pomiary wieloboków i tachymetryczne.

Teodolitu busolowego, jakoteż dioptrów różnej konstrukcyi, różniących się od teodolitu tylko tem, że nie mają lunety, natomiast busolę o wielkiej średnicy z dioptrami, obracającą się na spodarce, używa się zazwyczaj do pomiarów w lasach lub też szkiców sytuacyjnych.

Jak wiadomo, karty planów katastralnych ujęte są w ramy; lewy i prawy brzeg mają kierunek południe — północ. Dla zdjęć i pomiarów busolowych, mogą więc karty katastralne stanowić doskonałą podstawę, zamiast innych punktów stałych. Każdy bowiem kierunek na karcie, można za pomocą pomiaru kąta między nim a linią północną zawartego, pomierzyć, i dodawszy doń tylko odpowiednią deklinację, wytyczyć busolą w polu, odnalazszy jeden punkt na danym kierunku leżący. Mając w polu dwa punkty, zaznaczone także na karcie możemy użyć je jako punkty stałe, a kontrolę pomiaru mieć będziemy wówczas z dat zebranych z karty, z dostateczną dla tego rodzaju pomiarów, dokładnością. Wogóle, w bardzo wielu wypadkach użyć możemy z korzyścią busoli o ile tylko utworzymy sobie dostateczne podstawy kontroli i nie będziemy wymagać takiej dokładności, jaką dają precyzyjne instrumenty i metody poprzednio poznane.

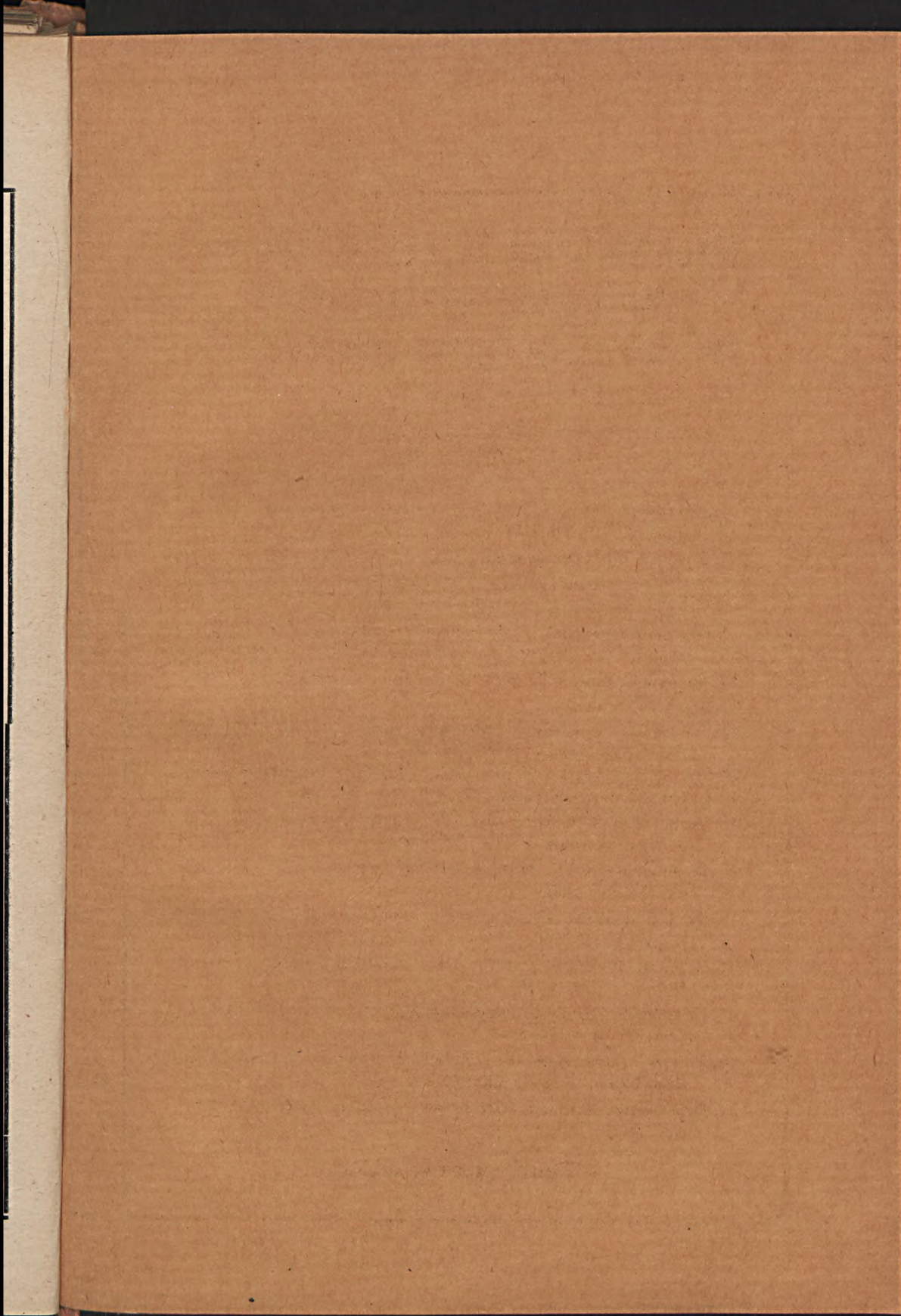
WYDAWNICTWO KSIĘGARNI POLSKIEJ
BERNARDA POŁONIECKIEGO WE LWOWIE.

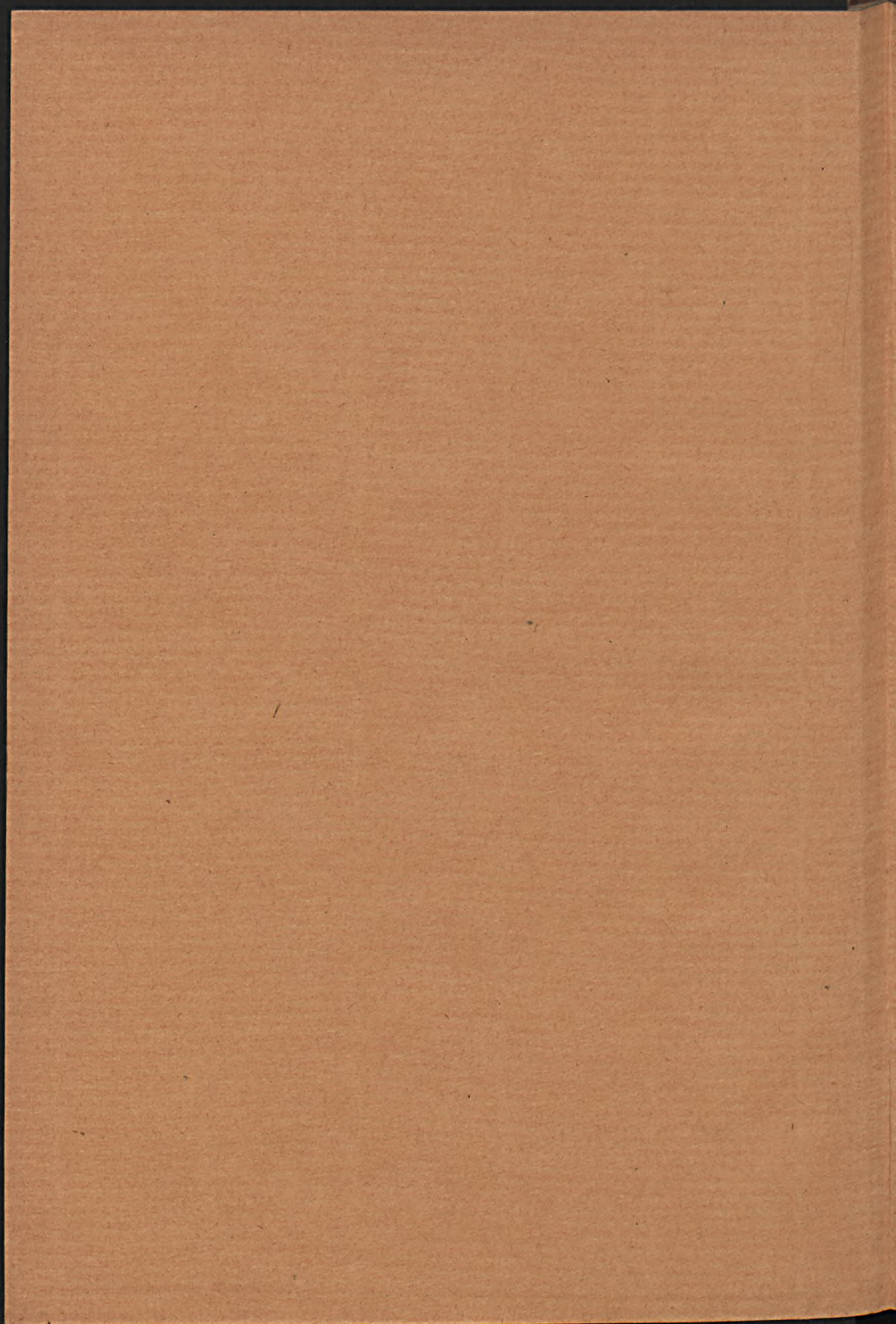
ZAGADNIENIA TECHNICZNE ODBUDOWY KRAJU

wydawnictwo o technicznej stronie odbudowy kraju.

1. Górski Kazimierz. Przedsiębiorstwa miejskie. Cena K. 1'50, Mk 1.20.
2. Dr. Pomianowski K., prof.: Wodociągi. Cena K. 1'50, Mk 1'20.
3. Krzyczkowski D. prof.: Materiały budowlane. Cena K. 2'—, Mk 1'60.
4. Rybczyński M. Kierownik kraj. biura hydrograficznego. Studnie. Cena K. 1'50, Mk 1'20.
5. Szaynok Wł., inż.: Rzeźnie. Cena 1'50, Mk 1'20.
6. A. Kühnel. Inżynier miejski we Lwowie. Drogi i ulice. Objąsnione 32 ilustracyami. Cena K. 2'—, Mk 1'60.
7. Dr. Jan Łopuszański prof. politechniki lwowskiej: Zakłady o sile wodnej. Objąsnione 38 ilustracyami. Cena K. 3'—, Mk 2'40.
8. Wacław Günther, doc. polit. lwow.: Motory etektryczne. K. 4'—, Mk 3'20.
9. Mieczysław Rybczyński, Kierownik kraj. biura hydrograficznego. Regulacja rzek. Cena K. 2'—, Mk 1'60.
10. Ignacy Drexler, docent politechniki lwowskiej. Odbudowanie wsi i miast na ziemi naszej. Cena K. 6'—, Mk 4'80.
11. Aleksander Wierzbicki, dyr. Biura melioracyjnego Wydz. Kraj. Melioracje rolne. K. 3'—, Mk 2'40.
12. Dr. Pomianowski R., prof.: Kanalizacja miejska. Z 44 ilustracyami. K. 3'—, Mk 2'40.
13. Dr. Chrzanowski Wiesław prof.: Wybór silnika. Z 5 tabelami w tekście i 10 tablicami osobnemi. Cena K. 6'—, Mk 4'80.
14. Dr. Matakiewicz M., prof.: Drogi wodne w Polsce. Z dwiema tablicami. K. 3'—, Mk 2'40.
15. A. Kühnel: Zasady budowy miast małych i miasteczek z 136 rys. Cena K. 10'—, Mk 8'—.
16. Roman Z. Ciesielski, inż.: Asfalt naturalny i sztuczny w budownictwie. K. 6'—, Mk 4'80.
17. Dziakiewicz W., inż.: Miernictwo. Z 175 rysunkami. K. 20'—, Mk 16'—.

Dalsze prace w druku.





10

