

INŻ. WŁODZIMIERZ DOŁĘGA DZIAKIEWICZ
PUŁKOWNIK SAPERÓW W. P.

GEODEZJA

Z 203 RYSUNKAMI W TEKŚCIE



WARSZAWA ——— KRAKÓW
NAKŁADEM KSIĘGARNI J. CZERNECKIEGO

10-1/2-1/2
ZALESKI MARIAN
Kraków, ul. 18 Stycznia 43

Trzeciemu i Piątemu Pułkowi Saperów, Którymi miałem zaszczyt dowodzić, poświęcam tę pracę w dowód wdzięcznej pamięci i szczerych uczuć jakie żywię dla Towarzyszków broni z miłych a nigdy nie zapomnianych, chociaż pełnych trosk i trudów lat służby frontowej.

W. Dziakiewicz
pułkownik sap.

OD AUTORA

Geodezja jest nauką o pomiarach ziemi, tak dawna jak astronomja i matematyka — jest bowiem jedną z działów geometrii, mającą dawną bardzo i piękną tradycję, jaśniejącą w czasach starożytnych imionami: Pitagorasa w XVI w. przed Chryst., Eratostenesa w III w., który obliczył obwód ziemi, Pesidoniusa, Euklidesa, Hippaocha, Ptolomeusa i t. d. Podziw wzbudzają obliczenia wymiarów ziemi, dokonane przez tych myślicieli, ze stosunkowo niewielkim błędem, bo jeżeli zważymy, że kąty mierzyli oni długością cienia tyczki, a odległość czasem podróży, to błąd 100% jaki popełnili przy tych obliczeniach, jest, w porównaniu z najnowszymi pomiarami, wykonanymi z pomocą precyzyjnych przyrządów, bardzo mały.

Wynalezienie lunety przez Keplera i szybkie udoskonalenie jej, następnie wynalezienie libeli przez francuza Thévenot'a w r. 1660 — oraz zastosowanie jej do przyrządu niwelacyjnego, potem zastosowanie lunety i libeli do teodolitu, dało tej nauce tak potężne środki, że odtąd rozwinęła się niesłychanie. Teoria najmniejszych kwadratów i zbudowana na niej teoria błędów posunęły geodezję na wyższy poziom. Trudno tu wyliczać zasługi wszystkich uczonych, jacy w tym dziale nauki pracowali. Dość wskazać na to, że około 500 lat temu, istniały wprawdzie mapy topograficzne w niektórych krajach, lecz po największej części bardzo fantastyczne. Dzisiaj natomiast, możemy nawet w codziennem życiu, momentalnie, zapomocą mapy ściśle określić odległość któregokolwiek punktu na ziemi, od dowolnego punktu w Europie i być pewnym tego określenia.

Ówczesne pomiary ziemi rozpoczyna Akademia francuska w r. 1683. Rozchodziło się głównie o kształt ziemi. Badania naukowych ekspedycji trwały niemal do połowy XVIII w. i skończyły się przyznaniem racji wywodom Newtona o elipsoidalnym kształcie ziemi. Francuzom: Delambre i Méchain, zawdzięczamy pomiar południka i jednostkę miary t. j. metra, jako jednej dziesięciomiljonowej części ćwiartki południka. W ubiegłym wieku wszystkie państwa europejskie dokonały pomiarów swych obszarów. Podstawą była tryangulacja

IV

na której oparte są mapy katastralne, tak niezbędne do uregulowania gospodarstwa w kraju. Następnie przyszedł do wykonania karty topograficzne, które ustawicznie się uzupełnia.

Z biegiem czasu, ulepszono przyrządy i teorię pomiarów, powstały nowe metody. Obecnie rozporządzamy ogromną literaturą i masą doświadczeń. Geodezja stała się nauką, wymagającą specjalizacji. Ona jest podstawą topografji, a jako pomocnicza, stała się niezbędną wszystkim działom inżynierji. Jak ważną rolę odgrywa topografja i mapy topograficzne w przygotowaniu wszelkich działań wojennych, wyjaśnić nie potrzeba, jako już sprawy powszechnie znanej.

Literatura polska geodezyjna, jest jak świadczy przytoczony w dalszym ciągu, spis dzieł, jeszcze bardzo ubogą. Czas największego rozwoju teorii tej nauki, przypada właśnie na nasze nieszczęśliwe lata, a dopiero w drugiej połowie ubiegłego wieku, powstała jedyna polska politechnika we Lwowie, gdzie z natury rzeczy, skoncentrować się mogły techniczne siły naukowe polskie i skąd nauka rozchodzić się mogła. Okres około 70 lat, z ostatnią przerwą z powodu wielkiej wojny, przy braku środków i wszelkiego rodzaju trudnościach, nie jest tak dużym, by w tym czasie zapełnić mógł lukę w literaturze, a raczej stworzyć ją dopiero. Spodziewać się należy, że sprawa ta, teraz szybszym postąpi krokiem, tembardziej, że w tym właśnie kierunku, czekają nas bardzo obszerne prace: nowe zdjęcia kraju, nowoczesne pomiary katastralne i zdjęcia topograficzne.

Autor

Warszawa, w listopadzie 1927.

SPIS DZIEŁ TRAKTUJĄCYCH O GEODEZJI, W JĘZYKU POLSKIM WYDANYCH.

- 1) Grzepski Stanisław, „Geometria t. j. miernicka nauka po polsku krótko napisana z greckich i łacińskich ksiąg“. Kraków 1566 r. 10^o str. 27.
- 2) Kaufman Oberst Lt. Początki miernictwa wojennego dla szlacheckiej młodzieży, szkoły rycerskiej Króla Jegomości polskiego. Toruń 1766 r. str. 33.
- 3) Bystrzycki Bazyli. Geometria, albo niektóre łatwiejsze sposoby do rozmierzania wszelkich długości, szerokości, wysokości lub grubości, ku uczciwej i pożytecznej zabawie każdego kawalera, z francuskiego na ojczysty język przełożona. Warszawa 1769 r. Cieciszewski Colonno. Początki miernictwa Kraków 1786 r.
- 4) Hagreve. Teoria i praktyczna nauka żołnierskich rozmiarów, czyli miernictwo wojenne, do użycia oficerom i początkowym inżynierom ułożona. Warszawa 1790 r. 18^o str. 355.
- 5) Mases. Wielki geometryczny wynalazek celownicy trzymiennej. Warszawa 1867 r.
- 6) Zaborowski X. J. Geometria praktyczna Edycja nowsza. Warszawa 1861 r. str. 386.
Zaborowski X. J. Drugie wydanie, Warszawa 1820 r.
- 7) Paliński P. M. „Z geodezji“. Wilno 1816 r. str. 58 4^o.
- 8) Calberg Juljusz. „Sposób dochodzenia powierzchni płaskich bez użycia rachunku, zapomocą nowo wynalezionego instrumentu, Planimetrem zwanego“, Warszawa 1824 r. 28^o str. 18.
- 9) Szachin. „Miernictwo i równoważenie“, Wilno 1859 r. str. 727.
Tenże Geodezja wyższa, Wilno 1829 r. str. 232.
- 10) Wrześniowski. „Miernictwo niższe“, Warszawa 1841 r. str. 256.
- 11) Józefowicz W. „Wykład praktyczny miernictwa i niwelacji z wszelkimi zastosowaniami dla potrzeb gospodarzy wiejskich“, Warszawa 1841 r. str. 243.
- 12) Gerschowa A. Poziomowanie topograficzne. Wykład teoretyczny i praktyczny, Warszawa 1852 r. str. 37.
- 13) Mauklanowicz H. Trójkątowanie II. rzędu, Warszawa 1852 r. str. 37.
- 14) Nuka pomiaru gruntów do praktycznego użytku właścicieli ziemskich, Lwów 1853 r.
- 15) Zbrożek D. „Teoria planimetru biegu nowego“, Kraków 1876 r.

- 16) Tenże. Teoria najmniejszych kwadratów. Podług wykładów.
- 17) Zaleski. Planimetria wykładana w technice krakowskiej.
- 18) Regiec. O wytyczaniu łuków przy budowlach lądowych Kraków, 1895 r. str. 6.
- 19) Folkierski W. „Orjentowanie trasy i sprawdzanie jej wymiarów kątowych zapomocą obserwacji słońca“. Lwów 1897 r. str. 25.
- 20) Laska W. „Astronomja sferyczna i geodezja wyższa“. Lwów 1899 r.
- 21) Kucharzewski.. Planimetry polskie i ich wynalazcy. Warszawa 1902 r. str. 46.
- 22) Wawrzykiewicz. Słowniczek mierniczy, Warszawa 1903 r. str. 1138.
- 23) Dziakiewicz W. Miernictwo. Wydanie I, II i III. Kraków 1921 r. 198 i 192 str.
- 24) Lewakowski Jerzy. Terenoznawstwo i kartografja wojskowa, Lwów 1916.
- 25) Tenże. Wydanie II.
- 26) Latinek St. Praktyczne przykłady pomiarów metodą polymgonalną. Przekład z czeskiego. Kraków 1902 r.
- 27) Dziakiewicz W. Zdjęcia większych obszarów, Kraków 1921 r.
- 28) Kpt. Gąsiewicz i por. Rössler. Zarys topografji dla szkół wojskowych“, Warszawa 1922 r.
- 29) Barczewski W.
- 30) Dziakiewicz W. Geodezja, Warszawa 1927 r.

SPIS RZECZY

ROZDZIAŁ I.	1
Merkury	8
Wenus	9
Układ Marsa	10
Planetoidy	15
Układ Jowisza	16
Układ Saturna	18
Układ Urana	19
Układ Neptuna	19
Pomiary na ziemi	21
ROZDZIAŁ II.	21
Miara metryczna i miary dawniejsze	21
Miary kątowe	23
Oznaczanie punktów w polu i tyczenie linii prostych	26
Tyczenie kątów o stałej wielkości i przyrządy do tego celu służące	28
Węgielnica zwierciadlana	29
Krzyż zwierciadlany	31
Węgielnica pryzmatyczna pojedyncza	32
Krzyż pryzmatyczny	34
Węgielnica bębnekowa	35
Sprawdzanie i rektyfikacja węgielnic	36
Pomiary długości, błędy pomiarów i wyrównanie błędów. Plany	37
ROZDZIAŁ III.	37
Przyrządy do pomiarów długości	37
Łata miernicza	37
Taśma miernicza	38
Poziom pozorny i geodezyjny	41
Plany	42
O błędach pomiarów	45
Pojedyncza średnia arytmetyczna i jej błąd, oraz błąd pojed. spostrzeżenia	54
Pomiar parami	58
O wadze spostrzeżeń	60
Sprawdzanie przyrządów do mierzenia długości	74
Dokładność pomiarów długości	76
Pomiary długości zapomocą kroków i czasu	78
Ogólne uwagi	78
Zdjęcia mniejszych obszarów, oraz zagadnienia z tyczenia i pomiarów długości	80
ROZDZIAŁ IV.	80
Planimetria	91
ROZDZIAŁ V.	91
Dokładność pomiaru powierzchni	94
Podział powierzchni	97
Przyrządy do pomiaru powierzchni z planów	99
Kierunki i współrzędne, wieloboki. Tryangulacja	108

ROZDZIAŁ I.

§ 1. Geodezja jest nauką o pomiarach tak poszczególnych części powierzchni ziemi, jak i całej ziemi.

Przed przystąpieniem do właściwego przedmiotu, wypada zdać sobie sprawę choćby w krótkości: czem jest ziemia, jakie zajmuje miejsce we wszechświecie, w jakim pozostaje stosunku do innych, widzialnych lub znanych nam światów, jaki ma kształt, wogóle określić jej stanowisko.

W zamierzchłej starożytności uważano ziemię za środek wszechświata, około którego słońce, księżyc i gwiazdy krążyły. Pewniejsze wiadomości, jakie nas doszły od starożytnych co do kształtu ziemi, pochodzą od Pitagorasa z VI-go wieku przed Chrystusem. Z obserwacji statków, które zbliżając się do obserwatora, coraz to bardziej wynurzają się z poza wypukłości morza, doszedł Pitagoras do przekonania, że ziemia jest kulą. Arystoteles w IV w. przed Chr. oświadczył się stanowczo za kulistym kształtem ziemi, zaś Erostotenes w III w. przed Chr. obliczył nawet obwód ziemi na 250.000 stadjów, co wynosi 46.250 km. W porównaniu z najnowszymi pomiarami, popełnił on 15% błędu (za wiele), lecz zważywszy, że kąty mierzył długością cienia pionowo wbitej tyczki, odległość zaś czasem, jaki był potrzebny do jej przebycia, musimy przyznać, że na takie środki, dokładność była zadziwiająca. W II w. przed Chr. obliczył Posidonius, że obwód ziemi wynosi 240.000 stadjów, zatem dokładniej niż poprzednik.

Prawdopodobnie asyryjscy astronomowie, a raczej astrologowie, uważali ziemię również za kulę.

Dopiero od XVI wieku począwszy, usiłowania w kierunku dokładnego pomiaru ziemi są coraz częstsze. W r. 1525 francuz Fernol pomierzył odległość pomiędzy Paryżem i Amiens, leżących na tym samym południku, oraz szerokości geograficzne obu tych punktów, na tej zaś podstawie obliczył promień ziemi. Wynik jego obliczeń różni się zaledwie o 0.1% od najnowszych. W r. 1610 Niderlandczyk Willebrord Snel von Roien, nazywający siebie z łacińska Snelliusem,

zastosował do pomiarów tryangulację i temsamem dał początek nowoczesnej metodzie. Pomiarzy Snelliusa dały ten wynik, że $\frac{1}{4}$ część południka miała mierzyć 9660 km. zatem około 30% za mało, co przypisać należy tylko niedokładności przyrządów, zwłaszcza do pomiaru kątów, do czego używał zwykłych dioptrów. W połowie XIII w. dzięki Akademii paryskiej, sprawa postąpiła naprzód. Zbadano i dowiedziano, że ziemia jest na obu biegunach spłaszczoną, że spłaszczenie to wynosi $\frac{1}{300}$ promienia równika, że więc ziemia nie jest regularną kulą, lecz elipsoidą obrotową. Staraniem Akademii paryskiej wykonane pomiary, rozpoczęte przez Picarda, a skończone przez Cassiniego wykazały, że ziemia nie jest kulą. — Cassini jednak przypuszczał, że ziemia ma kształt jajowaty, wydłużony w kierunku osi, co znowu stało w sprzeczności z rozważaniami Newtona („*Philosophia naturalis principia mathematica*“). Newton dowodził, że ziemia musi być na biegunach spłaszczoną, na równiku natomiast bardziej wypukłą.

Spór uczonych francuskich z angielskimi, co do kształtu ziemi, wywołał ekspedycję naukową w r. 1735 do 1736, która, na podstawie pomiarów, wykonanych w Peru i Laponji, przyznała zupełną rację Newtonowi. Przyjęto więc elipsoidalny kształt ziemi, lecz na tem nie poprzestano, prowadząc dalej badania w drugiej połowie XVIII i pierwszej XIX wieku.

Francuzi: Delambre i Méchain wykonali w r. 1792 wielki pomiar południka, celem ostatecznego ustalenia długości jednostki miary, przyjętej jako jedna czterdziesto milionowa część długości południka. W ten sposób określona jednostka miary,¹ nie może zaginąć, choćby nawet wzory jej były zniszczone. Wzór tej jednostki, wyrobiony w platynie, t. z. „*mètre des archives*“, przechowuje się w Paryżu. W r. 1872 sporządzono 30 takich wzorów, jak najdokładniej co do długości zgodnych z pierwowzorem i rozesłano do państw, które przyjęły system metryczny. Właściwie, wzór jednostki tej, nie odpowiada ściśle rzeczywistości, bo południk jest nieco dłuższy, lecz znając błąd, można było przyjętą jednostkę pozostawić.

Na podstawie szeregu dalszych pomiarów ziemi, już bardzo dokładnych dzięki ulepszonym przyrządom, okazuje się, że ani południki nie są elipsami, ani równoleżniki kołami. Idealna powierzchnia ziemi, t. j. taka, jaką utworzyłaby powierzchnia wody oblewającej całą ziemię, gdyby nie ulegała wpływom przyciągania słońca i księżyca, nie jest sferoidą, chociaż ta najwięcej zbliża się do kształtu ziemi, lecz t. z. geoidą. Nazwę tę podał uczony Liecting w r. 1873. On też zaproponował międzynarodowej komisji pomiaru ziemi przyjęcie za podstawę idealnej sferoidy, mającej z geoidą równą objętość.

Powierzchnia ziemi, nie uwzględniając wzniesień i zagłębień, jest w wielkim przybliżeniu taką samą, jaką zakresliłaby słabo ekscentryczna elipsa po obrocie jej około małej osi. Ćwiartka południka tej elipsoidy ma długość okrągło 10,000.000 m., spłaszczenie zaś wynosi $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299}$ gdzie a i b są połowami obu osi.

Według Bessla (r. 1842) ćwiartka południka ziemi wynosi 10,000.856 \pm 498 m., zaś spłaszczenie $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299 \pm 5}$ w czem liczby oznaczone znakiem \pm są obliczonymi błędami pomiarów. Połowa wielkiej osi $a = 6, 377.397$ m. — połowa drugiej osi $b = 6, 356.079$ m., średnia geometr. trzech głównych osi elipsoidy obrotowej wynosi: $\sqrt[3]{a a b} = 6,370.283$ m. Jest to promień kuli, mającej z elipsoidą tę samą objętość. Średnia arytmetyczna tych trzech osi, t. j.

$$\frac{a + a + b}{3} = 6,370.291 \text{ m.}$$

przedstawia promień kuli, o równej z elipsoidą powierzchni.

Pomiary na ziemi dzielą się na dwa główne działy: pomiary t. z. horyzontalne i pomiary wysokości.

Co do pierwszych, to możemy ziemię uważać:

- a) jako płaszczyznę o ile rozchodzi się o przestrzenie nie większe od jednej mili kwadratowej, t. j. do 60 km²;
- b) jako kulę dla przestrzeni do 50.000 km²;
- c) jako elipsoidę o wymiarach poprzednio podanych, dla przestrzeni do 100.000 km² a nawet i więcej.

W pomiarach wysokości natomiast, kulistość ziemi uwzględnia się zawsze, bo n. p. na długość 1 km. różnica wysokości między powierzchnią idealnej elipsoidy, względnie kuli, a styczną, wynosi już 8 cm. Sposób uwzględnienia poznamy przy opisie tych pomiarów.

Przyjmijmy kulisty kształt ziemi i obliczmy długości łuków dla kątów środkowych 10' i 15' tudzież długości stycznych do tychże łuków, zawartych między obu promieniami, to otrzymamy:

Łuk dla 10' wynosi 18.521·05 m. styczna 18.521·11 m.

„ „ 15' „ 27.781·57 „ „ 27.781·65 „

Różnice tych długości są tak małe, że przy bezpośrednim pomiarze, zrobilibyśmy niewątpliwie daleko większe błędy, czyli, że różnic tych, zapomocą pomiarów, nie potrafimy skonstatować. Stąd wynika, że bardzo wielkiej długości linje, mierzyć możemy uważając ziemię jako płaszczyznę.

W następującej tabeli podano główne wymiary elipsoidy ziemskiej według autorów, w metrach:

Bessel 1841 r.	Listing 1872 r.	Clark 1880 r.
Połowa wielkiej osi a =		
6,377.397·15	6,377.365	6,378.249
Połowa małej osi b =		
6,356.078·96	6,355.298	6,356.515
Spłaszczenie p =		
1 : 299·1528	1 : 289	1 : 293·466
Ćwiartka południka		
10,000.855·76	10,000.218	10,001.871

§ 2. Ziemia należy jako planeta do układu planetarnego, krążącego dookoła słońca. Układ ten składa się z następujących planet, wyliczonych poniżej w porządku odległości ich od słońca: Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz, Saturn, Uran i Neptun. Między Marsem a Jowiszem znajduje się wielka gromada planetoid, o czym wspomnimy w dalszym ciągu.

Ziemia krąży około słońca po drodze eliptycznej, t. z. ekliptyce. W jednym ognisku tej elipsy znajduje się słońce. Połowa wielkiej osi ekliptyki ma długość 149,500.000 km. i tę długość przyjęto w astronomji za jednostkę planetarną odległości (w skróceniu jdnstka plnt.). Wskutek krążenia po tej drodze eliptycznej, odległość ziemi od słońca zmienia się. Gdy ziemia znajduje się na końcu osi eliptyki bliżej słońca, to powiadamy, że ziemia jest w punkcie przysłonecznym, podczas gdy przeciwległy punkt nazywamy odsłonecznym. Odległość punktu odsłonecznego, od słońca, wynosi 1·017 jdnstk plnt., przysłonecznego 0·983. Tem samym zmienia się i kąt, pod jakim widzimy średnicę słońca, w granicach od 31' 31·48" do 32' 28·9". Wyobraźmy sobie na miejscu słońca kulę ziemską — to średnicę jej widzielibyśmy w średniej odległości, pod kątem 8·80" — kąt ten nazywa się paralaksą słońca. Promień kuli słonecznej jest 109·3 razy większy od promienia ziemi, zatem objętość słońca jest 1,306.000 razy większa.

Okres czasu, w którym ziemia okrąży słońce, nazywamy rokiem gwiazdowym i wynosi on 365 dni, 6 godzin, 9 minut i 9·5 sekund. Nadto ziemia obraca się około swej osi, której kierunek określony jest na niebie przez punkty, nie biorące udziału w pozornym ruchu dziennym sklepienia niebieskiego, a nazwane biegunami świata. Północny

taki punkt znajduje się w bliskości gwiazdy α Małej Niedźwiedzicy, zwanej także gwiazdą biegunową. Punkt ten i środek ziemi wyznaczają kierunek osi ziemskiej. Południowy biegun świata nie jest widzialny z naszej półkuli.

Obrót ziemi około swej osi, odbywa się w ciągu jednej doby gwiazdowej. Za podstawę jednak rachuby czasu, służy średnia doba słoneczna, w której uwzględnia się i postępowy ruch ziemi około słońca. Jest ona o $3' 56''$ dłuższą od poprzedniej. Doba gwiazdowa jest wielkością niezmienną i według niej reguluje się zegary w obserwatorjach. Jak powiedzieliśmy wyżej, odległość ziemi od słońca zmienia się w małych granicach; skutkiem zaś tego, ziemia otrzymuje od słońca prawie że stałą ilość światła i ciepła. Na 1 cm^2 powierzchni ziemi, przy prostopadłym kierunku padania promieni słonecznych wypada $2\cdot5$ kalorii ciepła. Jest to t. z. stała słoneczna.

Oś ziemi nachylona jest do płaszczyzny ekliptyki, pod kątem $66^{\circ} 33'$ — czyli, płaszczyzna równika ziemi nachylona jest do ekliptyki, pod kątem $23^{\circ} 27'$. Obie te płaszczyzny przecinają się w prostej, która znów przecina drogę ziemi około słońca, czyli ekliptykę w dwóch punktach t. z. równonocnych, bo gdy ziemia znajduje się w nich, wówczas długość nocy i dnia są równe. Prostopadła linja do poprzedniej, przecina ekliptykę w dwóch punktach t. z. przesilenń dnia z nocą. Są to cztery kardynalne punkty ekliptyki, a chwile, w których ziemia przez nie przechodzi, są początkami pór roku.

Prócz obu wyżej opisanych ruchów, t. j. po ekliptyce i około swej osi, posiada ziemia jeszcze trzeci ruch t. z. procesyjny. Oś ziemską mianowicie zatacza stożek około kierunku prostopadłego do ekliptyki. Skutkiem tego ruchu, płaszczyzny: ekliptyki i równika ziemskiego, przecinają się w coraz to innej prostej, a że ta linja przecięcia wyznacza na ekliptyce punkty równonocne, więc i położenie tych obu punktów jest zmienne. Cofanie się punktów kardynalnych po ekliptyce powoduje to, że okres czasu, jaki upływa między jednym a drugim przejściem ziemi przez jeden z tych punktów, n. p. wiosenny, jest krótszy niż rok gwiazdowy i wynosi 365 dni, 5 godz., 48 \cdot 46 sek. i nazywa się rokiem zwrotnikowym. Zmiana kierunku osi ziemskiej wynosi rocznie $50\cdot2$ sek., zatem całkowity okres trzeciego ruchu trwa 26.000 lat. Jest to t. z. okres wielkiego roku Platona.

Badania wykazały, że gęstość ziemi wynosi $5\cdot55$. Ponieważ zaś na powierzchni ziemi nie mamy ciał o tak znacznej gęstości, to musimy przyjąć, że wewnątrz ziemi je posiada. Ze spostrzeżeń nad temperaturą wnętrza ziemi, w miarę głębokości wynikałoby, że w głębokości 100 km. powinna panować temperatura 2.000° , w której

wszystkie ciała powinny się roztopić. Ciśnienie w głębokości 50 km. powinno dochodzić do 15.000 atmosfer, zaś w środku ziemi do 3,000.000 atm., czyli, że ziemia jest ogromną bombą.

Atmosfera ziemi składa się z powietrza, t. j. mieszaniny tlenu i azotu, z domieszką pary wodnej i kilku gazów, jak: argonu, neonu, helu, kwasu węglowego tudzież pyłu tak ziemskiego, jak kosmicznego — atmosfera, w miarę wznoszenia się w górę, staje się coraz rzadszą. Promienie słoneczne, przechodząc przez atmosferę, załamują się, tudzież odbijają się tak od cząsteczek wody, jak i od pyłu, rozpraszając się na wszystkie strony, czemu zawdzięczamy jednostajne oświetlenie. Gdyby nie było atmosfery, byłyby oświetlone tylko powierzchnie przedmiotów zwróconych ku słońcu, inne byłyby zupełnie ciemne — wszędzie widzielibyśmy ostre światła, albo czarne cienie. Zmienność atmosfery pod względem jej czystości, zawartości pary wodnej i t. p. odgrywa wielką rolę tak w obserwacjach astronomicznych stawiając im częstokroć przeszkody, jak i pomiarach na ziemi, zmuszając nas do stosowania różnych, doświadczalnych współczynników co szczególnie uwidocznia się w trygonometrycznych i barometrycznych pomiarach wysokości. Wreszcie powoduje i błędy pomiarów zapomocą optycznych przyrządów wykonywanych.

Ziemia wraz z księżycem, stanowi układ drugorzędny w stosunku do układu planetarnego słońca. Środek ciężkości układu ziemia-księżyc, znajduje się jeszcze wewnątrz ziemi w odległości $\frac{3}{4}$ długości promienia ziemi, od jej środka. Ten środek ciężkości, nie zaś środek ziemi opisuje drogę eliptyczną dokoła słońca.

Księżyc okrąża ziemię po drodze eliptycznej, w której ognisku znajduje się ziemia, w czasie 27 dni, 7 godz., 43 min. i 11 \cdot 5 sek. zwanym miesiącem gwiazdowym. Średnia odległość księżyca od ziemi wynosi 384.000 km.; w punkcie przyziemnym, zbliża się księżyc na 359.000 km., w punkcie odziemnym oddala się na 410.000 km. od ziemi. Odległość średnia pozwala widzieć na księżycu, pod kątem 1 sek. przedmioty o średnicy 1.860 m. Gęstość księżyca wynosi 0 \cdot 604 gęstości ziemi, czyli 3 \cdot 35 w porównaniu z wodą. Odpowiednio do masy, przyspieszenie na księżycu wynosi 1 \cdot 570 m. w sek., zaś 1 kg. na ziemi, ważyłby tam tylko 164 gramów. Droga księżyca ulega ciągłym, perjodycznym zmianom.

Księżyc niema atmosfery, lub, jeżeli ją ma, to bardzo rzadką, dlatego rzeźbę jego powierzchni możemy tak wyraźnie widzieć.

Między ziemią a słońcem, znajdują się dwie planety: Merkury i Wenus — nazywamy je planetami dolnymi, planety zaś dalej niż ziemia się znajdujące, górnymi.

Łuk na niebie, między planetą a słońcem, mierzony z obserwatorium, określa kątową odległość planety od słońca, czyli t. z. elongację. Planety górne widzicie możemy w kierunku słońca i wtedy znajdują się w połączeniu, czyli konjunkcji ze słońcem, albo też, gdy elongacja wynosi 180° , to znajdują się w przeciwstawieniu, czyli opozycji ze słońcem. Dla planet górnych zatem, elongacja mieści się w granicach od 0 do 180° . Natomiast planety dolne mogą znaleźć się w połączeniu, lecz w opozycji być nie mogą, krążąc między ziemią a słońcem i około słońca. Może tu być elongacja wschodnia po lewej stronie słońca, lub zachodnia po prawej. Po osiągnięciu największej elongacji, planeta zbliża się do słońca i elongacja maleje.

Planety nie mają własnego światła, otrzymując je od słońca. Drogi planet około słońca, są elipsami, niewiele różniącemi się od kół. Elipsy te mają wspólne ognisko, w którym znajduje się słońce. Im dalej znajduje się planeta od słońca, tem dłuższego potrzebuje czasu na odbycie swej drogi, co wyraził Keppler prawem: Kwadraty z czasów obiegu planet pozostają do siebie w takim stosunku, jak sześciiany średnich ich odległości od słońca, t. j. $t_1^2 : t_2^2 = s_1^3 : s_2^3$.

Średnie odległości planet naszego układu od słońca, wynoszą: Merkurego 0.39, Wenus 0.72, Ziemi 1.0, Marsa 1.52, Jowisza 5.20, Saturna 9.56 jednostek planetarnych, (t. j. po 149,500.000 km.).

Ponieważ natężenie promieni słonecznych maleje odwrotnie proporc. do kwadratów z odległości, więc, im dalej znajduje się planeta, tem bardziej mniej korzysta ze słońca. Nazwijmy natężenia promieni dla dwóch planet przez n_1 i n_2 — odległości ich od słońca l_1 i l_2 , przyczem niech $l_1 = 2$, $l_2 = 4$ to

$$n_1 : n_2 = l_2^2 : l_1^2 \text{ czyli} \\ n_1 : n_2 = 16 : 4 \text{ lub } n_1 : n_2 = 4 : 1$$

zatem $n_2 = \frac{n_1}{4}$ t. j. jeżeli odległość planety od słońca jest dwa razy większa od odległości innej planety, to korzysta ona 4 razy mniej z promieni słońca. Tak n. p. Neptun, jako najdalszy, otrzymuje od słońca przeszło 6.000 razy mniej ciepła niż Merkury. Stąd też wynika, że na różnych planetach, muszą być też różne warunki życia.

To, co dotychczas wiemy o przyrodzie planet, pochodzi z bezpośrednich obserwacji teleskopowych, z analizy widmowej, wreszcie z fotografii, w najnowszych czasach zastosowanej.

Fotometria pozwala nam mierzyć jasność. Wszystkie, jak wiemy, planety, otrzymują światło od słońca, odbijając jego promienie. Nie wszystkie jednak ciała odbijają tę samą ilość promieni jaka na nie pada i nie wszystkie odbijają promienie tego samego gatunku. Mimo

więc tego samego źródła oświetlenia, różne przedmioty różnią się jasnością i barwą. Stosunek ilości promieni odbitych od jakiegoś ciała oświetlonego przez słońce, do ilości promieni nań padających, nazywamy: albedo. Jeżeli albedo jakiejś planety jest takie samo jak albedo pewnego ciała na ziemi, to wnosić stąd można o naturze powierzchni planety. Do badania atmosfery planet stosuje się analizę widmową.

MERKURY.

§ 3 Merkury jest najbliższym słońca. Elongacja jego jest mała, bo dochodzi tylko do 26° , co bardzo utrudnia obserwacje. Widzialny on jest przy elongacji wschodniej, po zachodzie słońca, lub zachodniej przed wschodem słońca i to zaledwie przez półtorej godziny. W czasie tym, światło przechodzić musi długą drogę przez atmosferę zwykle bardzo gęstą, dochodzi więc do nas bardzo osłabione. Badanie Merkurego wymaga zatem szczególnie dogodnych warunków atmosferycznych.

Dotychczasowej badania drogi eliptycznej Merkurego, około słońca, dowiodły, że w ciągu stulecia droga ta doznaje pewnych odchyłek, których nie można usprawiedliwić oddziaływaniem znanych już planet. Stąd hipoteza, że między Merkurym a słońcem znajduje się musi nieznaną dotąd planeta. Nazwano ją nawet Wulkanem, lecz obserwacje nie dały dotąd rezultatu. Także zdjęcia fotograficzne, prowadzone wytrwale w czasie, gdy mniemana planeta przechodziłaby musiała przez tarczę słoneczną i ukazać się na niej jako ciemna plamka, pozostały bez skutku. Wreszcie, gdy wykazano, że nieregularność ruchu Merkurego pochodzić również może od działania materji światła zodiacalnego, otaczającego słońce wielkim pierścieniem, zarzucono hipotezę Wulkana.

Średnia odległość Merkurego od słońca 0.387 jdnstk plnt. czyli około $59,000,000$ km. Rzeczywista zaś odległość, zmienia się w granicach od $46,000,000$ w punkcie przysłonecznym, do $70,000,000$ km. w punkcie odslonecznym. Gdy Merkury znajduje się w dolnym połączeniu ze słońcem, wtedy jest zarazem najbliższej ziemi, mianowicie w odległości $77,000,000$ km. W górnym zaś połączeniu, oddala się od ziemi o $222,000,000$ km. Średnica Merkurego mierzy 4.800 km. — powierzchnia jego jest więc 7 razy mniejsza od powierzchni ziemi, objętość znów 19 razy mniejsza. Gęstość Merkurego wynosi 6.3 , czyli jest większą niż ziemi. Wskutek mniejszej masy, czyli słabszego przyciągania, ciężar ciał na Merkurym wynosi 0.43 ciężaru tychże na ziemi.

Merkury obiega słońce w ciągu 87·97 dni, a jasnością swą dorównywa najjaśniejszym gwiazdom; albedo jego wynosi 0·14. Taką samą albedo ma margiel ilitowy oraz nasz księżyc. Powierzchnia Merkurego ma też kolor dość ciemny i światło matowo-olowiane. Merkury posiada prawdopodobnie bardzo rzadką atmosferę. Długie i trudne obserwacje dowiodły, że Merkury obraca się około swej osi w takim samym czasie, w jakim okrąża słońce. Jest on do słońca zwrócony zawsze tą samą stroną, podobnie jak księżyc do ziemi, czyli, że jedna jego półkula pogrążona jest w wiecznej nocy — panuje tam ciemność, zimno i martwota. Część powierzchni Merkurego jest zawsze oświetlona, na niej więc panuje dzień, część zaś ma naprzemian dzień i noc, trwające po 88 naszych dni. Zresztą mamy o nim zbyt skąpe wiadomości.

WENUS.

§ 4. Piękną tę „gwiazdę“ nazwali Grecy Wenerą, dając jej jeszcze poetyczne nazwy: porannej czyli jutrzeźki „Fosforos“ wieczornej Hesperos. Ruchy jej zupełnie są podobne do ruchów Merkurego, ale odległość jej jest większa, bo 0·723 jdnstk plnt., więc i elongacje są także większe, bo dochodzą do 48°. Świeci ona przy elongacji wschodniej, wysoko na niebie po zachodzie słońca, jak również przy elongacji zachodniej znajduje się wysoko nad horyzontem. Okres obiegu Wenery dokoła słońca, czyli rok Wenery wynosi 224·7 dni. Mimośród drogi eliptycznej Wenery dokoła słońca jest bardzo mały, tak, że droga jej bardzo zbliża się do koła, zatem i odległość planety od słońca mało się zmienia, bo gdy średnia odległość = 108,000.000 km, to różnica między największą a najmniejszą odległości wynosi tylko 1,500.000 km. Natomiast odległość Wenery od ziemi, zmienia się w szerokich granicach, bo od 38,000.000 km do 261,000.000 km, a stąd i wielkość jej pozorna zmienia się tak, że widzimy ją raz pod kątem 10" drugi raz pod 69". Wielkością zbliża się Wenus do ziemi, bo średnica jej wynosi 0·997 średnicy ziemi. Natomiast gęstość = 4·37. Albedo Wenery = 0·76, takie samo jak dla śniegu, skąd wniosek, że powierzchnia jej jest białą. Jasność Wenery jest 5 razy większą niż Merkurego. Wenus, z powodu swej jasności widzialną jest nawet w dzień, podczas bardzo czystego powietrza. O warunkach na powierzchni Wenery wiemy mało, a to skutkiem bardzo gęstej jej atmosfery. Stąd też pochodzi i białość Wenery, bo promienie słońca odbijają się od jej atmosfery nie dochodząc do właściwej powierzchni planety. Na Wenerze zatem panuje wieczny mrok, podobnie jak u nas podczas bardzo zachmurzonego

nieba, a mieszkańcy jej, o ile są, nigdy nie widzą ani słońca, ani gwiazd. Analiza atmosfery Wenus, stwierdziła w niej zawartość pary wodnej.

Obserwacja ruchu Wenusy dokoła jej osi, jest bardzo utrudniona z powodu właśnie atmosfery, nie dopuszczającej do uchwycenia jakiegoś punktu stałego.

UKŁAD MARSA.

§ 5. Mars, dzięki sprzyjającym okolicznościom, jest najlepiej ze wszystkich zbadaną planetą. Krąży on około słońca po drodze eliptycznej, której połowa wielkiej osi wynosi 1·524 jdnstk plnt. Mimośród zaś wynosi 0·093; jeżeli więc średnia jego odległość od słońca jest 1·524 j. p. czyli 228,000.000 km. to rzeczywista zmienia się od 207,000.000 do 249,000,000 km. Rok Marsa, czyli okres jego obiegu dokoła słońca trwa 686·98 naszych dni. Promień Marsa jako kuli = 3.400 km. — spłaszczenie na biegunach jest tak małe, że określić go nie zdołano. Gęstość Marsa = 3·83, zatem znacznie jest mniejsza od ziemi, masa znów = 0·105 masy ziemi. Ciężar naszego kilograma wynosi na Marsie tylko 371 gr. W największym oddaleniu średnica Marsa widzialna jest pod kątem 3·5". Mars widzialny jest gołym okiem jako jasna gwiazda o czerwonym świetle — z powodu wielkich zmian odległości i faz, jasność Marsa zmienia się w szerokich granicach; albedo jego wynosi tylko 0·25, co przypisać należy rzadkiej jego atmosferze.

Dzień Marsa, czyli okres obrotu około własnej osi, co da się obserwować, gdyż widoczne są na nim stałe plamy, wynosi 24 godz. 37 min. 22·65 sek. — jest to wynik przeszło 200-letnich obserwacji i bardzo dokładny. Dzień i noc zatem zmieniają się tam w taki sam sposób jak na ziemi, doba marsowa jest tylko o 41 min. 18 sek. dłuższa od ziemskiej, rok zaś ma 652·4 dni marsowych. Nachylenie płaszczyzny równika Marsa do jego ekliptyki, zmienia się dość szybko, bo 1·5 min. rocznie, podczas gdy na ziemi zmiana tego rodzaju wynosi niespełna 0·5" rocznie.

Średnia temperatura na Marsie musi być znacznie niższą niż na ziemi z tego powodu, że skutkiem większej odległości od słońca, otrzymuje on tylko 0·4 tego ciepła jakie otrzymuje ziemia na tę samą jednostkę powierzchni. Mars ma takie same pory roku jak ziemia, trwają one jednak dłużej, bo dłuższy jest i rok.

Czerwone światło Marsa wskazuje, że jest on otoczony podobną do naszej atmosferą. Jest to hipotezą bardzo prawdopodobną. Z drugiej strony badania każą przyjąć bardzo przezroczystą i rzadką atmo-

sferę, a zatem czerwone światło pochodzący musiało od powierzchni planety, przez odbicie od niej promieni słońca. Na Marsie nigdy nie ukazują się chmury, natomiast tylko lekkie mgły i to zwykle na tej półkuli, na której panuje właśnie zima. Badania widmowe wykazały jednak niewątpliwie obecność pary wodnej w atmosferze.

Na Marsie zauważono wiele szczegółów dzięki temu, że w czasie opozycji zwraca się on ku nam całą oświetloną półkulą, świecąc wprost naprzeciw słońca, wschodzi równocześnie z zachodem słońca i widzialny jest przez całą noc. Następnie dzięki jego przezroczystej atmosferze nie absorbującej promieni. W różnych czasach obserwowano tam szczegóły stałe, nie zmieniające się, obok innych, zmiennych, a ściśle zależnych od pór roku.

Zasadnicza barwa powierzchni Marsa jest żółta, z odcieniem czerwonym — na tem tle występują plamy szare lub szaro-niebieskie i czasem białe. Jasne plamy przyjęto za lądy, ciemne, duże za morza. Jasne na ciemnym tle są to wyspy, zaś ciemne na jasnym, jeziora. Podobnie zatoki, cieśniny, półwyspy i t. p. Niektóre plamy jednak zmieniają barwę, tak, że nie wiadomo do czego je zaliczyć. W r. 1864 opracował Flammarion mapę Marsa, zużytkowując do tego celu około 1000 rysunków wykonanych przez astronomów w ciągu 200 lat.

W badaniach Marsa zapoczątkował Schiaparelli nową epokę. Mapa jego polega na sieci triangulacyjnej złożonej ze 114 punktów, pomierzonej mikrometrycznie — w niej podał ten astronom mnóstwo nowych szczegółów.

Z map i rysunków okazuje się, że na Marsie jest w przeciwieństwie do ziemi, wielka przewaga lądów nad morzami, bo aż trzykrotna. Rozkład mórz jednak jest nierównomierny — przeważają one na półkuli południowej, podczas gdy kanały na północnej. Charakterystyczne są na Marsie białe plamy biegunowe. Wielkość ich jest zmienną, zależnie od pór roku, co zdaje się potwierdzać twierdzenie, że są to masy lodów i śniegów. Obie plamy biegunowe zachowują się jednakowo — jedna z nich się zwiększa, druga maleje i tak naprzemian, w miarę, jak zbliża się okres letni, aż wreszcie znika. Nie ulega też wątpliwości, że zmniejszanie się tych plam i znikanie, jest skutkiem działania promieni słońca.

Rzeczą jest też pewną, że na Marsie istnieją łańcuchy gór, zresztą o konfiguracji jego powierzchni, wiemy niewiele.

Najważniejszym odkryciem Schiaparelli'ego, są t. z. kanały na Marsie (w r. 1877). Są to cienkie linje na tle lądów, łączące ze sobą w różnych kierunkach morza i jeziora, nie kończąc się nigdy w środku lądów. Biegają one zwykle w prostych, lub tylko lekko zakrzywio-

nych kierunkach, barwę mają ciemną, chociaż zabarwieniem się często różnią. Kanały te czasami przecinają się, nawet po kilka w jednym, ciemnym miejscu t. j. jeziorze. Długość ich jest różna, od 10 do 100⁰ czyli od 600 do 6000 km. W korzystnych warunkach, można dostrzec na Marsie przedmioty, mające szerokości 0·1" — temu odpowiada kąt środkowy Marsa 0·5⁰ czyli 30 km długi. i najwęższe kanały mają właśnie tę szerokość — o ile są jeszcze węższe, to tych widzieć nie możemy. Są jednak kanały 100, 200, a nawet 320 km szerokie. Kanały te podlegają różnym zmianom, a nawet znikają, gdy jednak są widzialne mają zawsze to samo położenie. Ilość dotąd odkrytych kanałów dochodzi do 600. Olbrzymia ilość obserwacji zgodną jest w tem, że na Marsie występują często zmiany: na morzach występują lądy, kanały znikają i pojawiają się, oraz że zmiany te pozostają ze sobą w ścisłym związku n. p. gdy kanały znikają to i barwa przyległych lądów staje się jaśniejszą, a ciemnieje znowu, gdy kanały występują — nadto, iż zmiany te zależne są od pór roku. W czasie, gdy zanikają białe plamy biegunowe, pojawiają się kanały, od bieguna począwszy, wzdłuż południków. Schiaparelli obserwował i stwierdził, że niektóre kanały rozdwojały się, t. j. kanał zniknął, a na jego miejscu, już drugiego dnia pojawiały się dwa, równoległe kanały i to w odległości paru set km od siebie. Wypadki te zachodziły w czasie wiosennego i jesiennego porównania dnia z nocą. Zjawisko to obserwowało tylko paru astronomów, inni zaprzeczają, przypisując je złudzeniu optycznemu.

Lowell stwierdził, że białe plamy biegunowe, w lecie znikają, w zimie tworzą się na nowo od bieguna, rozszerzając się aż do 70⁰ szer. geogr. Gdy plama wzrasta, brzeg jej jest biały, gdy maleje, brzeg jej staje się niebieskim. Światło tego niebieskiego brzegu jest spolaryzowane, zatem odbite zostało od cieczy. Wynika stąd, że plamy znikają wskutek tajania — ciecz ta jednak nie pozostaje na miejscu, lecz odpływa. Nowe zatem plamy w następnej zimie nie tworzą się skutkiem zamrożenia cieczy, lecz powoduje je osadzenie się jakiejś substancji z atmosfery. Najprostszym byłoby przypuszczenie, że białe te plamy są śniegiem, chociaż dotąd nie stwierdzono z wszelką pewnością zawartości pary wodnej⁴ w atmosferze Marsa. Chmury na Marsie są rzadkiem zjawiskiem. Astronomowie wnioskują, że w atmosferze Marsa jest bardzo mało wody, a mgły tworzyć się mogą tylko w nocy, gdy temperatura spadnie; na biegunach zaś osadza się szron podczas nocy podbiegunowej, co jest dla obserwacji niedostępne.

Z drugiej strony, wskutek większej odległości od słońca, Mars otrzymuje znacznie mniej ciepła i temperatura jego jest znacznie

niższą niż 0° — teoretycznie nawet — 34° . Istnienie zatem wody byłoby niemożliwe. Wskutek tego powstała hipoteza, że białe plamy są to osady kwasu węglowego, znajdującego się w dużych ilościach w atmosferze Marsa, który w bardzo niskiej temperaturze biegunowej osiada w stanie stałym. Ale hipoteza ta nie da się utrzymać z tego powodu, że tajanie lodów biegunowych powoduje odpływ cieczy do kanałów — kwas węglowy zaś wymagałby znacznego ciśnienia do trwałego utrzymywania się w stanie ciekłym. Lecz właśnie obecność kwasu węglowego w atmosferze Marsa, mogłaby umożliwić istnienie wody. Kwas węglowy bowiem, przepuszcza ciepło promieni słonecznych, ale zatrzymuje ciemne promieniowanie ciepła. Obliczono nawet, że gdyby dało się usunąć z atmosfery ziemi kwas węglowy, znajdujący się tam w małej ilości, bo pod względem objętości, stanowi on zaledwie jedną trzecie tysięczną część, to temperatura powierzchni ziemi obniżyłaby się o 21° . Gdyby więc w atmosferze Marsa znajdowała się odpowiednia ilość tego kwasu, to temperatura Marsa mogłaby być taką, jak na ziemi, lub i wyższą. Mimo więc tego, że nie znamy jakości cieczy, napełniającej morza na Marsie, możemy postawić hipotezę, że jest to woda. Na Marsie, jak to już mówiliśmy, jest niewiele wody. To też parowanie jej z mórz i jezior i przeniesienie na bieguny, gdzie osadza się jako śnieg, wywołuje znaczne zmiany. Wiele kanałów i jezior wysycha, morza nawet przybierają jaśniejszą barwę i zmieniają swe brzegi. Natomiast na biegunach nie zbiera się wiele śniegu, skoro część lata wystarcza do ich stopienia. Że ta, niewielka ilość wody wystarcza na napełnienie kanałów i jezior, nawet do pokrycia znacznych obszarów lądów i nadania im charakteru morskiego, powodem tego musi być tylko niewielka ich głębokość. Dowodzi tego okoliczność, że jeziora w ciągu lata znikają, zapewne więc warstwa wody jest tam cienką. Stąd wynika znowu, że na Marsie niema takich różnic wysokości jego powierzchni, jak na ziemi.

Masa danej planety oddziaływa również w wysokim stopniu na skład atmosfery. Z kinetycznej teorii gazów wiemy, że cząstki gazów poruszają się z wielką prędkością, zależnie od ich ciężaru drobinowego i temperatury. Na ziemi n. p. nie może w atmosferze utrzymać się wolny wodór i hel, bo cząsteczki ich mają większą prędkość niż $11\cdot01$ km sek., która to prędkość wystarcza, by ciało wyrzucone pionowo w górę, więcej na ziemię już nie powróciło. Dla księżyca wystarcza prędkość $2\cdot38$ km sek. Dlatego, z powodu znacznie mniejszej masy księżyca i mniejszej siły przyciągania, nie może w jego atmosferze utrzymać się wolny tlen i azot, mimo że ciężar ich atomowy znacznie

jest większy niż wodoru. Podobnie para wodna na Marsie, wskutek małej jego masy, nie może się stale utrzymywać w jego atmosferze, lecz z powodu znacznej prędkości, musi się rozprószyć w przestrzeni. Możliwym więc jest, że na Marsie znajdują się tylko resztki mas wodnych, jakie tam niegdyś były, oraz, że Mars byłby bezwodną pustynią, gdyby nie arterje, któremi woda dopływa w głąb łądów.

Istnienie kanałów, biegnących w liniach prostych, łączących jeziora i morza, zbiegających się w jakichś węzłach, wychodzących wreszcie od biegunów, dało pochap do twierdzenia, że są to urządzenia celowe, zatem powstać musiały z inicjatywy istot rozumnych. Podobieństwo warunków na ziemi i Marsie, także do tego się przyczynia. Ponieważ na Marsie panuje ubóstwo wody, opady zaś atmosferyczne mogą mieć miejsce tylko na biegunach, przeto tylko kanały łączące morza i wychodzące od biegunów, skąd sprowadzają topniejącą wodę, mogłyby rzeczywiście spełniać zadanie irygacji bezwodnych łądów, koniecznych do utrzymania roślinności a więc i życia. Zdawałoby się tedy, że w miarę jak ubywało wody, istoty tam żyjące musiały tej kłęsce zapobiegać. Myśl ta żyje ciągle na ziemi i nie przestano nawet zajmować się sposobami porozumienia się z istotami na Marsie.

Z drugiej strony, regularność kanałów budzi wątpliwości co do budowy ich przez istoty rozumne. Przecież na Marsie znajdują się łańcuchy gór i wyniosłości. Byłoby więc marnowaniem energii, gdyby budowano kanały w liniach regularnych, przecinając góry — przeciwnie, trasa kanałów prowadziłaby nieregularnie, omijając trudności w budowie. Również nie do wytłumaczenia jest ogromna ich szerokość. Najwęższe mierzą 30 km — a znajdują się i mierzące do 320 km. Do irygacji wystarczyłyby bez porównania węższe. Obliczono, że ażeby wykopać istniejące na Marsie kanały, musiałoby bez przerwy pracować 200,000.000 ludzi przez tysiąc lat, lub 1,000.000 ludzi przez 200.000 lat. Należałoby więc przyjąć, że praca trwała setki tysięcy lat i mieszkańcy Marsa mieli nadto nadzwyczajne maszyny. To, że praca tam jest łatwiejsza, bo ciała są lżejsze, nie może wchodzić w rachubę, albowiem istoty żyjące tam, byłyby zastosowane do do przyrody, zatem odpowiednio słabsze niż na ziemi.

Zresztą, co do istoty kanałów na Marsie, zdania są podzielone. Niektórzy uczeni uważają je za doliny nawodnione, pokrywane się w lecie roślinnością, skąd też pochodzi i zmiana barwy. W r. 1909 spostrzeżono nawet dwa nowe kanały szer. przeszło 30 km. a długi. zwyż po 5.000 km, w czym Lowell widzi ustawiczną pracę mieszkańców Marsa, zdobywających nowe przestrzenie, dotąd nieuprawne

Szereg najpoważniejszych astronomów w ostatnich paru dziesiątkach lat, przeczy istnieniu kanałów. Obserwacje zapomocą nowych przyrządów wykazują, że kanałów niema, lecz mnóstwo oddzielnych, różnej wielkości plam. Kanały więc są złudzeniem optycznym, łączącym szeregi plam w linje. Liczne doświadczenia wykazały słuszność tego poglądu i zdaje się, iż legenda o kanałach Marsa, zajmująca ludzi od 70 lat, już się rozwiła. Pozostaje tylko fakt tajania śniegów na biegunach, skąd woda rozlewa się na łądy, nie mające na znacznych przestrzeniach wyniosłości i tworzy płytkie, duże jeziora. Tylko w zagłębieniach pozostaje ona przez czas dłuższy.

Mars posiada dwa księżyce. Odkrycie ich zawdzięczamy prof. A. Hall'owi w Waszyngtonie w r. 1877 — i największemu wówczas refraktorowi średn. 66 cm. Dnia 16. sierpnia, odkrył on w odległości zaledwie 1' od Marsa małą plamkę świecąca, następnego zaś dnia jeszcze drobniejszą, drugą w odległości 31". Szukano ich oddawna, lecz głównie z powodu zbyt słabych przyrządów, nie zdołano ich ujrzeć. Prof Hall nadał bliższemu księżycowi imię Fobos t. j. strach, drugiemu Deimos, t. j. przerażenie, imiona towarzyszy boga Marsa. Są to najmniejsze ze wszystkich znanych nam księżyców; mają one średnice po 17 km zatem ich powierzchnie po 900 km². Średnia odległość Fobosa od środka Marsa wynosi 2·7 promieni Marsa, Deimosa 6·73 tychże promieni, czyli odpowiednio 9.200 i 22.900 km. Okresy ich obiegu są bardzo krótkie, Deimos obiega Marsa w ciągu 30 godz. 17 min. 56 sek., Fobos natomiast w 7 godz. 39 min. 14 sek., a że obrót Marsa około osi wynosi 24 godz. 37 min. więc jeden miesiąc Marsa, okreśłany przez obieg Deimosa trwa małego dłużej niż jedną dobę, drugi, według Fobosa 0·31 doby, czyli na 1 dzień Marsa, wypada 3·2 tych miesięcy księżycowych.

PLANETOIDY.

§ 6. Średnie odległości wielkich planet od słońca dadzą się wyrazić prawem ustalonym przez prof Titiusa, mianowicie:

1	0·4	
2	0·4 + 0·3 × 2 ⁰	
3	0·4 + 0·3 × 2 ¹	
4	0·4 + 0·3 × 2 ²	
5	0·4 + 0·3 × 2 ³	jednostek planetarnych.
6	0·4 + 0·3 × 2 ⁴	
7	0·4 + 0·3 × 2 ⁵	
8	0·4 + 0·3 × 2 ⁶	

Pomiędzy Marsem a Jowiszem, mimo, że według powyższego prawa powinna znajdować się planeta, nie było jej. Na tę lukę i zbyt wielką odległość obu planet, zwracał uwagę Keppler. Fakt ten sprawdził się w ten sposób, że między Marsem a Jowiszem znalazła się wkrótce cała gromada małych planet, zamiast jednej. W r. 1801 astronom włoski Piazzzi odkrył małą gwiazdę w odległości 2·8 jdnstk. plnt. od słońca, którą zrazu przyjęto za nową planetę zgadzającą się z prawem Titiusa i nazwano ją Cererą. W r. następnym, odkryto drugą taką gwiazdę Palladę, w 1804 trzecią Junonę, w 1807 czwartą Westę. Wszystkie one krążą między Marsem a Jowiszem, rozmiarami są małe, bo największa ma średnicę około 700 km. Dlatego, celem odróżnienia ich od wielkich planet, nazwano je planetoidami. Odkrycie planetoidy wśród setek tysięcy gwiazd podobnych do niej, odróżnienie je na podstawie tylko drobnej zmiany miejsca względem innych gwiazd jest trudne, dokładnych zaś map nieba wówczas nie było. To też dopiero w r. 1845 odkryto piątą Astraeę — odtąd niemal co roku odkrywano nowe, a do dnia dzisiejszego znaleziono ich około 800 głównie dzięki metodzie fotograficznej, zastosowanej przez Wolfa w Heidelbergu. Stałe gwiazdy rysują się na kliszy jako punkty, planety zaś jako małe kreski skutkiem zmiany miejsca w czasie wystawienia kliszy. Planetoidy dadzą się obserwować w czasie bliskim swej opozycji a to skutkiem wielkiej odległości i równocześnie małych wymiarów — należy więc czekać na nie, gdy znajdą się najbliżej ziemi. Czas ich obserwacji jest zatem krótki.

Astronom Leverier obliczył, że masa wszystkich planetoid nie może być większą niż $\frac{1}{4}$ masy ziemi, gdyż w przeciwnym razie musiałyby one spowodować perturbacje w ruchu przysłonecznym Marsa. Jest to zatem górna granica ich masy. Przyjmując po 100 km dług. średnicę dla każdej z 800 planet i $\frac{1}{2}$ gęstość ziemi, to stanowiłyby one masę $\frac{1}{2400}$ część ziemi. Lecz 100 km średnica jest za dużą. Stąd wynika, że jeszcze bardzo wielka ilość planetoid jest nieznaną, jak przypuszczają uczeni, przyjmując pewne założenia, że przynajmniej około 1,500.000, w czem zapewne jest olbrzymia ilość drobniotkich, których nigdy nie ujrzymy, a krążących między Marsem a Jowiszem. Odkryto też planetoidę „Eros“, która przekracza granicę tamtego pierścienia i krąży już między Marsem a ziemią — ma ona średnicę 25 km. Podobnie odkryto kilka planetoid, których drogi sięgają poza Jowisza.

UKŁAD JOWISZA.

§ 7. Z dotąd opisanych planet Ziemia jest największą. Teraz przystępujemy do opisu dalszych, daleko jednak większych objęto-

ściami od wszystkich poprzednich, razem wziętych. Z tych Jowisz jest największą. Jowisz krąży dokoła słońca po drodze eliptycznej, której połowa wielkiej osi wynosi 5·203 jdnstk. plnt. Średnia jego odległość od słońca mierzy 778,000.000 km, najmniejsza 740,000,000, a największa 815,000.000 km. Odległość od ziemi w czasie opozycji 628,000.000, a w czasie połączenia 927,000.000 km. Najmniejszy kąt widzenia średnicy Jowisza, w czasie połączenia = 30·3". Średnica Jowisza jest 11·14 razy większą od ziemskiej, objętość 1.306 razy większa. Gęstość Jowisza = 1·31, masa 310 razy większa od masy ziemi; ciało ważące 1 kg na ziemi, ważyłoby na Jowiszu 2·5 kg. Jowisz świeci jasno-żółtawym światłem. Okres obiegu jego koło słońca wynosi 11·862 lat, czyli 4.332·6 dni. Jowisz ma kształt sferoidalny, podobnie jak ziemia. Wielka oś ma długości 142.000 km, mała 134.000 km. Spłaszczenie powstało niewątpliwie wskutek ruchu wirowego. Oś obrotu nachylona jest o 3° 4' do płaszczyzny drogi Jowisza. Okres obrotu około osi wynosi 9 godz. 55 min. — czyli Jowisz obraca się bardzo szybko, tak, że punkty na jego równiku mają prędkość 27 razy większą niż odpowiednie punkty na ziemi. Powierzchnia Jowisza podlega ustawicznym zmianom — nie znaleziono dotąd na niej stałego punktu i z tego też powodu nie zbadano ściśle okresu jego obrotu około własnej osi.

Charakterystycznymi dla Jowisza są pasy równoległe do równika, na obu półkulach, ciemne i jasne naprzemian, lecz zmienne co do ilości i szerokości, jakoteż plamy uszeregowane także w równoleżnikach, zmieniające swe położenie, t. j. będące w ruchu prawie ściśle równoległym do równika. Zjawisko to pochodzi prawdopodobnie od prądów (wiatrów) w atmosferze Jowisza, mających niesłychanie wielką prędkość.

Prawdopodobnie Jowisz znajduje się jeszcze w stadium koncentrowania materji, o czym świadczy mała jego gęstość, a zarazem mamy zdaje się dość poważne dowody na to, że posiada on jeszcze własne światło, przeciwko czemu znowu świadczą zaćmienia jego księżyców. Wchodząc w stożek cienia, rzuconego przez kulę Jowisza, księżyce znikają, podczas gdy musiałyby być widzialne, gdyby je Jowisz oświetlał własnym światłem.

Jowisz posiada ośm księżyców — z tych 4 odkrył Galileusz, a dopiero 200 lat później, w r. 1892 Barnard, odkrył piąty księżyc, najbliższy planety — jest on mały i widzialny być może tylko przez wielkie przyrządy. W r. 1904 odkrył Perrine dwa nowe księżyce, w bardzo wielkich odległościach 11,400.000 i 11,900.000 km od Jowisza. W r. 1908 odkryto ósmy księżyc w odległości 28,000.000 km.

Ruch tego księżycza odbywa się w przeciwnym kierunku niż wszystkich innych. Ruchy tego księżycza podlegają takim zmianom, że wywołują twierdzenie, jakoby nie należał on pierwotnie do układu Jowisza, lecz zbliżywszy się zbyt, został do jego układu wciągnięty.

UKŁAD SATURNA.

§ 8. Średnia odległość Saturna od słońca wynosi 9·56 jdnstk. plnt. czyli 1.390.000.000 km i zmienia się wskutek ekscentryczności drogi, od 9·02 do 10·09 jdnstk. plnt. Odległość od ziemi, w opozycji wynosi średnio 8·56 — i zmienia się od 8·0 do 9·11 tych jednostek, zaś w połączeniu 11·11 jdnstk. plnt. Odległość zatem Saturna od ziemi, zmienia się w granicach od 1.197.000.000 do 1.660.000.000 km.

Okres obiegu Saturna około słońca trwa 29 lat 167 dni. Galileusz w r. 1610 pierwszy odkrył z obu stron tarczy Saturna jasne plamy. Lecz Huygens w r. 1656 dopiero dowiódł, że jest to pierścień otaczający planetę w pewnym od niej odstępie. Później przekonano się, że pierścieni tych jest więcej, a wkońcu, że pierścienie składają się z poszczególnych brył, odpowiednio ugrupowanych.

Saturn ma jeszcze większe spłaszczenie niż Jowisz. Średnica równikowa jego wynosi 123.000 km, biegunowa 112.200 km, średnica pierścienia 227.000 km. Gęstość Saturna = 0·64. Na tarczy Saturna widać, podobnie jak na Jowiszu, jasne i ciemne pasy, równoległe do równika. Dowodzi to wielkiego podobieństwa Saturna z Jowiszem. Saturn znajduje się w fazie koncentracji swej materji, silne spłaszczenie dowodzi, że posiada on ruch wirowy, a nawet zdołano obserwacjami stwierdzić, że obraca się on około swej osi w ciągu około 10 godzin 14 min. 20 sek. Działanie ciepła słonecznego na Saturnie jest 90 razy słabsze niż na ziemi. Źródłem ciepła zatem jest tutaj ciepło wewnętrzne planety — Saturn jest bowiem kulą z gazów, o wnętrzu bardzo gorącym — znajduje się on, jak na początku powiedzieliśmy, dopiero w stadium koncentracji.

Saturn zresztą, jest zupełnie podobnym do Jowisza, z wyjątkiem swego pierścienia, którego pochodzenia ani znaczenia nie wyjaśniono dotąd, mimo różnych hipotez. Czem jest ten pierścień i jaka jest jego budowa, tego obserwacje teleskopowe rozwiązać nie mogą. Według Maxwella, składa się on z mnóstwa ciał, między którymi przerwy są za małe, by je przez najpotężniejsze dotychczas przyrządy skonstatować było można. Jest to zatem zbiorowisko drobnych księżyców, wirujących koło Saturna.

Saturn posiada 10 księżyców, wszystkie są niewielkie, mniejsze od naszego księżycza.

UKŁAD URANA.

§ 9. Uran jest zbyt odległy od ziemi, ażebyśmy zapomocą obserwacji, najpotężniejszymi przyrządami, mogli zdobyć o nim jakieś szczegółowe wiadomości. Droga Urana około słońca jest elipsą o mimośrodku 0.046 — połowa wielkiej osi = 19.218 jdnstk. plnt. Średnia odległość od słońca = 2.859,000.000 km i wzrasta do 3.006,000.000 km w punkcie odśrodkowym oraz spada do 2.740,000.000 w przysłonecznym. W średnim połączeniu, odległość od ziemi = 20.22 jdnstk. plnt. a największa dochodzi do 3.158,000.000 km. Średnica Urana wynosi 54.000 km; gęstość = 0.97. Okres obiegu Urana około słońca = 84 lata i 7 dni. Ruch Urana, obserwowany z ziemi, jest bardzo powolny, bo dziennie przesuwa się tylko o 42". Działanie ciepła słonecznego jest tam 370 razy słabsze niż na ziemi. Znajduje się on już na granicy widzialności gołym okiem, ale trudno go odróżnić od mnóstwa gwiazd stałych. Wiadomości o Uranie mamy mało. Schiaparelli w r. 1883 znalazł, że spłaszczenie na biegunach wynosi $\frac{1}{11}$, a okres obrotu 8 godz. 15 min. Widziano też na Uranie pasy, równoległe do równika podobnie jak na Jowiszu i Saturnie.

Płaszczyzna równika Urana jest prawie prostopadłą do ekliptyki, ruch zaś obrotowy jest wsteczny. Zresztą znajduje się on w podobnych warunkach jak Saturn i Jowisz.

Uran posiada 4 księżyce, obracające się około niego w płaszczyźnie równika, t. j. nachylonej pod 82° do ekliptyki. Ruch ich jest przeciwny w stosunku do ruchu Urana dookoła słońca, t. j. wsteczny. Księżyce Urana są stosunkowo małe, bo mierzą: I-szy — 690 km, II-gi — 630 km, III-ci — 942 km, IV-ty — 875 km w średnicach. Z powodu wielkiej odległości obserwacje są trudne i o przyrodzie tych księżyców nic nie wiemy.

UKŁAD NEPTUNA.

§ 10. Neptun jest najdalszą z dotąd znanych nam planet, leży więc na krańcu układu słonecznego. Średnia jego odległość od słońca wynosi 4.500,000.000 km. Odległość od ziemi w czasie opozycji równa się 4.300,000.000 km, a w czasie połączenia 4.700,000.000 km. Średnica Neptuna = 54.850 km, gęstość 1.4.

Neptun nie może być widzialny gołym okiem. Okres jego obiegu wynosi 164 lata i 280 dni, przesuwa się więc pośród gwiazd dziennie o 21.5". Odkrycie jego zapomocą obserwacji, poprzedziło odkrycie teoretyczne. Nieprawidłowości bowiem w obiegu Neptuna, mogły być tłumaczone jedynie tylko działaniem planety dalej od niego się znajdującej. Astronom Leverrier podjął się obliczyć drogę tej spodzie-

wanej nowej planety, na podstawie ruchów Neptuna. W obliczeniu swem wskazał na miejsce, gdzie planeta znajdować się powinna, a co niemal zupełnie ściśle sprawdziło się. Jest to jeden z największych triumfów astronomji. Przyroda Neptuna jest tego samego typu co Urana, Saturna i Jowisza. Z powodu zbyt wielkiej odległości niema nadziei otrzymania bliższych szczegółów o Neptunie. Natężenie światła słonecznego jest na Neptunie 900 razy mniejsze niż na ziemi. Neptun ma ruch wsteczny, podobnie jak Uran.

Neptun posiada jeden księżyc w odległości 404.000 km, o którego przyrodzie nic także nie wiemy.

Czy Neptun jest rzeczywiście ostatnią planetą w naszym układzie planetarnym, tego z pewnością twierdzić nie można. Pewne perturbacje w ruchach Saturna, nie znajdują dostatecznego usprawiedliwienia w oddziaływaniu Neptuna i każą się domyślać istnienia dalszych planet. Od czasu odkrycia zakresił Neptun dopiero część swej drogi, co nie daje jeszcze dostatecznej ilości obserwacji do obliczeń i wskazania miejsca dalszych planet.

POMIARY NA ZIEMI.

ROZDZIAŁ II.

MIARA METRYCZNA I MIARY DAWNIEJSZE.

§ 1. Przy omawianiu kształtu ziemi w rozdz. I. mówiliśmy o nowej miarze metrowej, której jednostka, t. j. metr, jest jedną dziesięciomilionową częścią długości południka ziemskiego. Metr dzieli się na 100 cm, lub 1000 milimetrów, zatem $1\text{ m} = 100\text{ cm} = 1000\text{ mm}$. Najmniejszą miarą jest mikron t. j. jedna tysięczna część milimetra $1\ \mu = 0.001\text{ mm}$. Jako większą jednostkę przyjęto 1 kilometr, t. j. 1000 m. — $1\text{ km} = 1000\text{ m}$.

Metryczne miary powierzchni przyjęto:

$$100\text{ m}^2 = 1\text{ ar} \quad - \quad 100\text{ m}^2 = 1\text{ a.}$$

$$10.000\text{ m}^2 = 1\text{ hektar} \quad - \quad 10.000\text{ m}^2 = 1\text{ ha}$$

$$1.000.000\text{ m}^2 = 1\text{ kilometr kwadratowy} \quad - \quad 1.000.000 = 1\text{ km}^2.$$

Poniżej podajemy dawniejsze miary w porównaniu do metra:

a) miary francuskie:

$$1\text{ m} \quad . \quad . \quad = 443.296 \quad \text{paryskich linji}$$

$$1\text{ m} \quad . \quad . \quad = 0.513074074 \quad \text{„ sążni}$$

$$1\text{ m} \quad . \quad . \quad = 3.0784444 \quad \text{„ stóp}$$

$$1\text{ mm} \quad . \quad = 0.443296 \quad \text{„ linji}$$

$$1\text{ sążeń} = 6\text{ par. stóp} = 864\text{ par linji} = 1.9490363107\text{ m}$$

$$1\text{ par. stopa} = 12\text{ par. cali} = 144\text{ par. linji} = 0.3248394\text{ m}$$

$$1\text{ par. cal} = 12\text{ par. linji} = 0.02706995\text{ m}$$

$$1\text{ par. linja} = 2.255829063\text{ mm.}$$

b) miary niemieckie (pruskie):

$$1\text{ pruska stopa} = 139.12\text{ paryskich linji}$$

$$1 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad = 0.313853497\text{ m}$$

$$1\text{ pruski cal} = 0.0261545\text{ m}$$

$$1\text{ pruska linja} = 2.1795382\text{ mm}$$

$$1\text{ pruski pręt} = 3.7662420\text{ m}$$

$$1\text{ pruski pręt kwadratowy} = 14.1845786\text{ m}^2$$

$$1\text{ pruski mórg} = 0.2553224\text{ ha}$$

1 m = 3·186199957	pruskich stóp
1 m = 38·2343995	„ cali
1 mm = 0·4588128	„ linji
1 m = 0·2655167	„ prętów
1 m ² = 0·0704991	„ „ kwadrat.
1 ha = 3·9166165	„ morgów
1 ha = 3 morgi 164·99	prętów kwadr.

c) miary austriackie :

1 wiedeński sążeń = 6 stóp = 1·896484 m
1 „ „ kwadr. = 36 stóp kw. = 3·596652 m ²
1 mórg = 1600 sążni kwadr. = 0·575464 ha
1 m = 0·5272916 wiedz. sążni
1 m ² = 0·278036 sążni kwadr.
1 ar = 27·803639 sążni kwadr.
1 ha = 1·737727 morgów

d) miary angielskie i półn. amerykańskie :

1 yard = 3 stopy = 0·91439180 m
1 m = 1·09362311 yarda
1 stopa = 0·30479727 m
1 cal = 2·539977 cm
1 mila = 1·60933 km

e) miary rosyjskie :

1 ros. stopa = 1 angielskiej stopie = 0·30479727 m
1 ros. sążeń = 7 stóp = 2·13358079 m

Miary geodezyjne milowe :

1 mila geograficzna = $\frac{1}{15}$ stopnia na równiku elipsoidy ziemi
1 mila morska = $\frac{1}{4}$ mili geograficznej.

Miary milowe :

1 mila geogr. ($\frac{1}{15}^0$ na równiku) = 7·42043854 km
1 francuska linja ($\frac{1}{25}^0$ na równiku) = 4·45226 km
1 angielska mila = 1·60933 km
1 austriacka mila = 7·58594 km
1 pruska mila = 7·53248 km
1 ruska wiorsta = 1·06679 km

Według instrukcji we wszystkich państwach obowiązujących, powinny być przyrządy, służące do pomiaru długości sprawdzone w urzędzie miar i wag, przed użyciem ich, błąd zaś w wykonaniu takiej miary, nie powinien przekraczać dozwolonej granicy, mianowicie:

1. Jednometrowa łąta drewniana do mierzenia towarów, używana w handlu, podzielona na cm może mieć błąd ± 2 mm, zaś łąta półmetrowa może mieć błąd $\pm 1\cdot5$ mm.

2. Błąd łąty 2 lub 1 metrowej metalowej, może mieć błąd odpowiednio 1·5 i 1 mm.

3. Taśmy stalowe mogą mieć, zależnie od długości nast. błędy:

długość:	20	10	5	2	1 m
błąd:	7·0	4·5	3·5	2·5	1·5 mm.

4. Podziałki używane do prac rysunkowych, wykonane z metalu, twardego drzewa lub kości, długie 10 do 50 cm nie powinny mieć większego błędu jak $\pm 0\cdot5$ mm.

Przyrządy mające większe błędy nie są dozwolone.

MIARY KĄTOWE.

§ 2. Jako jednostkę miary kątowej przyjęto 1 stopień = 10 t. j. $\frac{1}{360}$ część kąta pełnego. Stopień dzieli się na 60 minut (60'), minuta na 60 sekund (60''). Podczas wielkiej rewolucji francuskiej wprowadzono nowy podział kąta pełnego na 400⁰ — stopnia na 100', minuty na 100''. Podział ten jednak nie przyjął się, natomiast coraz bardziej rozpowszechnia się podział pełnego kąta na 360⁰ — stopnia na 100', minuty na 100''. Prof. Witkowski podaje w swych tablicach matematyczno-fizycznych logarytmy funkcji kątowych tegoż podziału.

Miarą kąta może być także łuk koła, zakreślonego promieniem r . Tak łuk jak promień muszą być naturalnie wyrażone tą samą miarą.

Zakreślmy koło o prom. = 1 m — a zarazem szereg innych kół współśrodkowych, to łuki odpowiadające tym samym kątom, będą pozostawały do siebie w takim samym stosunku co do długości, jak ich promienie, zatem:

$$\text{Ł} : \text{ł} = R : r, \text{ a gdy } r = 1 \text{ to } \text{Ł} : \text{ł} = R : 1 \text{ — a stąd } \text{Ł} = \text{ł} \cdot R \dots 1$$

t. j. długość łuku o prom. R równą jest długości łuku o prom. = 1 m pomnożonej przez dług. R (kąty są te same).

Długości łuków, dla tego samego promienia, proporcjonalne są do odpowiadających im kątów środkowych — możemy więc napisać:

$$\text{stąd } 2 r \pi : \text{ł} = 360^0 : \alpha^0 \dots \dots \dots 2$$

$$\text{to } \text{ł} = \frac{2 \pi \cdot \alpha^0}{360^0} \cdot r = \frac{\pi}{180^0} \cdot r \cdot \alpha^0 \dots \dots \dots 3$$

Wyrażmy tu kąty w sekundach, to otrzymamy:

$$\text{ł} = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \cdot r \cdot \alpha'' = 0\cdot00000484814 r \cdot \alpha'' \dots \dots 4$$

Równanie 4 służy do obliczenia długości łuku odpowiadającego promieniowi r i kątowi α'' .

Przykład: jeżeli przy tyczeniu punktu, w odległości 1000 m. popełnimy błąd 10" przy odmierzeniu kierunku, jakie będzie przesunięcie w jedną lub drugą stronę, tegoż punktu?

$$\alpha'' = 10'' \quad r = 1000 \text{ m}$$

$$\text{Z równ. 4: } \lambda = 0.00000484814 \cdot 1000 \cdot 10 = 0.048... \text{ m}$$

t. z., że przesunięcie żądanego punktu wynosić może 48 mm.

Odwrotnie, mając promień r i długość łuku w tych samych jednostkach, t. j. metrach, obliczymy odpowiadający łukowi kąt:

$$\text{Z równ. 4: } \alpha'' = \frac{\lambda}{0.00000484814 \cdot r} = 206264.806635 \cdot \frac{\lambda}{r} \quad . . . \quad 5$$

Długość łuku, odpowiadająca kątowi 1" i $r = 1 \text{ m}$ wynosi:

$$\frac{\lambda}{r} = 1 \alpha = 1'' = 0.00000484814 \text{ m} \quad \quad 6$$

n. p. dla $r = 500 \text{ m}$ i $\alpha = 15''$ otrzymamy:

$$\lambda = 0.00000484814 \cdot 500 \cdot 15 = 0.003631 \text{ m.}$$

Ze względu na stosowanie, w dalszym ciągu wzorów goniometrycznych i trygonometrycznych, zestawiono je w tab. 1.

TABLICA 1.

Kąt	sin.	cos.	tg.	cotg.
0°	0	+ 1	0	∞
90 - α	+ cosα	+ sinα	+ cotgα	+ tgα
90°	+ 1	0	∞	0
90 + α	+ cosα	- sinα	- cotgα	- tgα
180 - α	+ sinα	- cosα	- tgα	- cotgα
180°	0	- 1	0	- ∞
180 + α	- sinα	- cosα	+ tgα	+ cotgα
270 - α	- cosα	- sinα	+ cotgα	+ tgα
270	- 1	0	- ∞	0
270 + α	- cosα	+ sinα	- cotgα	- tgα
360 - α	- sinα	+ cosα	- tgα	- cotgα
360	0	+ 1	0	∞
360 + α	+ sinα	+ cosα	+ tgα	+ cotgα

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta - 1}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

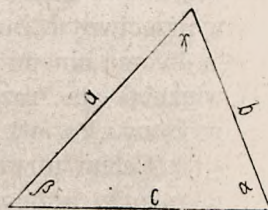
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$a = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \alpha \quad a : b = \sin \alpha : \sin \beta$$

$$a = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha \quad a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$$

$$b = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$



Rys. 1.

$$\text{Powierzchnia } F = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad \text{gdzie } 2s = a + b + c$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}$$

OZNACZANIE PUNKTÓW W POLU I TYCZENIE LINJI PROSTYCH.

§ 2. Do uwidocznienia w polu punktów oraz do tyczenia kierunków służą tyczki miernicze (rys. 2) — 2 do 4 m dług. średn. 3 do 4 cm, pomalowane biało i czerwono pasami 20 cm. dług. Dolny koniec tyczki jest okuty stożkowato z ostrym końcem. ostrze to znajdować się powinno w osi tyczki. Dany punkt w polu uwidacznia się, wbijając weń tyczkę, jeżeli rozchodzi się o chwilowe oznaczenie. Celem trwalszego oznaczenia punktu, wbija się weń palik 5 lub 8 cm średn. 30 do 50 cm dług. tak, by nad teren wystawał 2 do 3 cm.

Na tym paliku oznacza się punkt, zapomocą gwoździa o małej główce, wbitego w wierzch palika. Chcąc teraz punkt ten uwidocznić, stawia się tyczkę ostrzem na gwoździu — pomocnik trzyma ją stojąc z boku, o ile uwidocznienie to nie ma trwać długo — w przeciwnym razie, podpieramy ją dwoma innymi tyczkami, przewiązując je razem sznurkiem w t. zw. kozioł.

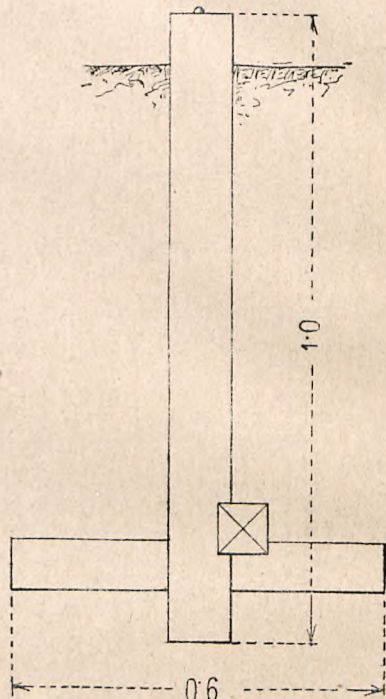
Celem utrwalenia punktów, n. p. przy budowie kolei i t. p. używa się pali według rys. 3 — wkopanych w ziemię i obłożonych kamieniami. Celem utrwalenia ważnych punktów w polu, na długi czas, stosowano różne sposoby, zawsze zapomocą odpowiednio osadzonych kamieni.

Jednym ze sposobów jest przedstawiony na rys. 4. (str. nast.).

Jest to gruba płyta kamienna, osadzona w ziemi, w głąb 0·8 do 1·0 m. Na jej powierzchni wryte są dwie linie przecinające się, przecięcie ich oznacza dany punkt. Zamiast dwóch, wrytych linii, osadza się w płycie kwadratową płytkę miedzianą, grub. 3

Rys. 2. do 5 mm z wrytymi na niej dwoma linjami przecinającymi się.

Na tej płycie stawia się słupek kamienny, wystający około 20 cm nad teren, na wierzchu którego, ryje się tak samo dwie przecinające się linie na oznaczenie punktu.

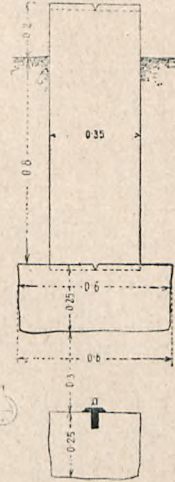


Rys. 3.

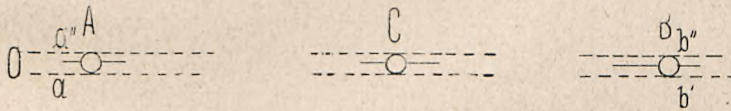
Ustawienie słupek nad płytą, musi być bardzo dokładne. Jeżeli chodzi o zdjęcia szczegółowe, to wystarczy górny znak do tyczenia linii. Celem pomiaru kątów, do nawiązania się do innych punktów stałych, w ważnych wypadkach, odsłania się dolną płytę i nad punktem ustawia się sygnał.

Konstrukcje zresztą mogą być rozmaite — rozchodzi się tu o to, by materiał był trwały, a urządzenie takie, ażeby nie mogło być łatwo uszkodzone. Punkty takie zakłada się zawsze w miejscach nieuprawnych.

Przez pion ustawiony w danym punkcie, da się przesunąć nieskończenie wiele płaszczyzn pionowych. Dwa jednak piony określają jedną płaszczyznę pionową, przechodzącą przez dwa punkty w danym kierunku. Płaszczyzna ta przecina powierzchnię ziemi, czyli teren, w linii falistej lub wogóle łamanej. Wyobraźmy sobie jednak, że w jednym z danych punktów, przesunęliśmy płaszczyznę styczną do kuli, względnie sferoidy ziemi. Wówczas rzut przecięcia płaszczyzny pionowej, z płaszczyzną styczną, będzie linią prostą. Jeżeli więc mówimy o tyczeniu linii prostej na terenie, to rozumiemy przez to wyznaczenie kierunku płaszczyzny pionowej. Dopiero ślad tej płaszczyzny na płaszczyźnie stycznej, czyli na poziomie poziomym danego punktu, jest linią prostą, jaką też otrzymamy i na rysunku. Rzeczywisty przekrój płaszczyzny pionowej w danym kierunku, z powierzchnią ziemi, nazywamy przekrojem pionowym danego



Rys. 4.



Rys. 5.

kierunku. Poziom pozorny, o którym wyżej mówiliśmy, odróżnić należy od poziomu rzeczywistego, t. j. kuli lub sferoidy ziemi. Poziom rzeczywisty, utworzyłaby powierzchnia wody, oblewająca całą ziemię, gdyby na nią nie działały żadne siły przyciągające z zewnątrz.

Tyczenie linii prostych w polu, polega na wyznaczeniu albo punktów pośrednich między dwoma danymi punktami, albo punktów dalszych, leżących w przedłużeniu kierunku. Przypuśćmy, że mamy dane dwa punkty A i B. (rys. 5). Ustawmy w tych punktach tyczki — to płaszczyzny, których ślady przedstawiają proste a—a' i b b' styczne

do obu tyczek i równo oddalone od punktów A i B — zamykają między sobą cały szereg punktów danej prostej.

Ażeby wyznaczyć punkt pośredni, n. p. C — przesuujemy tyczkę w kierunku poprzecznym do A B — tak długo, aż wejdzie między obie płaszczyzny. Wówczas ostrze tyczki wskazuje dany punkt. W tym celu posyła się pomocnika z tyczką, który, trzymając tyczkę C pionowo, powoli posuwa się w kierunku poprzecznym. Równocześnie tyczący, stając za tyczką A — w ten sposób, że tyczka A kryje zupełnie tyczkę B — widzi, czy tyczka C znajduje się z boku, czy też weszła między obie płaszczyzny styczne. Skoro wszystkie trzy tyczki pokrywają się, co sprawdza się po lewej i prawej stronie, wówczas tyczka C znajduje się w danym kierunku. W ten sam sposób przedłuża się dany kierunek.

W podobny sposób wyznacza się punkt przecięcia dwu kierunków. Najprościej wykona się to zadanie, wyciągając cienki sznurek w jednym z danych kierunków. Pomocnik wówczas przesuwa ostrzem tyczki nad sznurkiem trzymając ją, dopóki tyczka nie wejdzie w drugą linię, co sprawdza się tak samo, jak w wyznaczeniu punktu pośredniego.

Warunkiem dobrego wytyczenia punktów w pewnych kierunkach jest, dokładne pionowe ustawienie tyczek. Do tego używa się t. zw. pionów, t. j. ciężarków zawieszonych na sznurkach. Odstąpiwszy parę kroków od tyczki, podnosi się pion tak, by oko widziało napięty sznurek w małym odstępnie od brzegu tyczki. Wówczas widać bardzo wyraźnie, czy tyczka stoi równolegle do pionu i da się ją łatwo ustawić. Pionowanie tyczki wykonać należy w danym kierunku i kierunku do poprzedniego prostopadłym.

Okiem możemy tyczyć do 300 m długości. Większe długości tyczy się już z pomocą lornetki, do 1000 m. Do dokładnego wytyczenia punktów używa się instrumentów: uniwersalnego, lub teodolitu zwłaszcza dla większych odległości.

TYCZENIE KĄTÓW O STAŁEJ WIELKOŚCI I PRZYRZĄDY DO TEGO CELU SŁUŻĄCE.

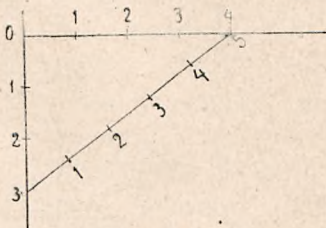
§ 4. Najpospolitszym wypadkiem jest tu tyczenie prostopadłych, czyli kąta 90° .

W bardzo prosty sposób wytyczymy kąt prosty zapomocą taśmy, mianowicie: odetnijmy na kierunku, do którego mamy wytyczyć prostopadłą, 3 jednostki długości — przyłożmy do jednego końca tego odcinka, t. j. do punktu, z którego ma wychodzić prostopadła, koniec taśmy, następnie trzymając ją w punkcie na takich samych

czterech jednostkach, przyłożmy punkt oznaczający 9 jednostek, do drugiego końca odcinka. Po napięciu taśmy, otrzymamy kierunek prostopadłej, wyznaczony bokiem 4-ch jednostek. Powstanie tu bowiem trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątne mają 3 i 4 m dług. przeciwprostokątnia zaś 5 m, czyli

$$3^2 + 4^2 = 25 \text{ czyli } \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

jak wskazuje rys 6. Przyjąwszy za jednostkę 2 m — dostaniemy rzędną, prostopadłą 8 m dług., którą łatwo przedłużyć bez widocznego błędu, do 15 m. Dłuższych prostopadłych, zwłaszcza przy dokładnych tyczeniach, sposobem powyższym wyznaczać się nie powinno.



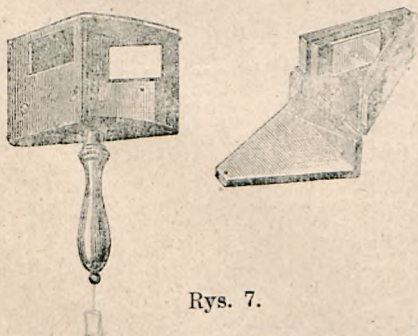
Rys 6.

Do tyczenia krótkich rzędnych, do 5 m używać można kąta prostego, sporządzonego z dwóch drewnianych listew. Jedno ramię układa się w danym kierunku, drugie wówczas daje kierunek rzędnej. Sposobu tego używa się często w miastach, celem zdjęć granic przyległych do ulic posiadłości. Osie są zwykle wytyczone wzdłuż chodników, zatem blisko granic parcel — przeto opisanym tu przyrządem najprędzej znajduje się rzuty punktów na oś.

Do tyczenia dłuższych rzędnych, do 40 m używa się opisanych niżej przyrządów:

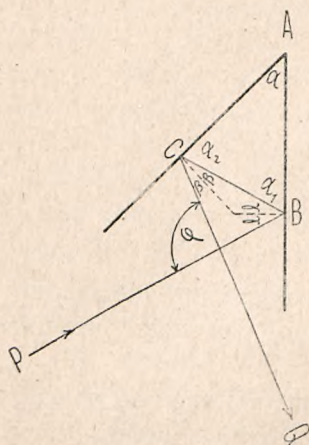
1. Węgielnica zwierciadlana (rys. 7).

Zasada tego przyrządu polega na znanym prawie optyki, że promień światła odbija się pod tym samym kątem, pod jakim pada na zwierciadło. Konstrukcja przyrządu widoczna jest i łatwa do zrozumienia z rysunku. Na wewnętrznych ścianach pudełka nachylonych do siebie pod kątem 45° znajdują się, naprzeciw siebie, dwa podłużne zwierciadła, nad którymi są wolne otwory. Przyjmijmy, że linje AB i AC (rys. 8 str. nast.) przedstawiają poziomy przekrój przez zwierciadła, nachylone do siebie pod kątem α . Promień światła, wychodzący z punktu P. pada na zwierciadło AB w punkcie B, tworząc z prostopadłą do AB, kąt γ — t. j. kąt padania. Pod tym samym



Rys. 7.

kątem γ odbija się i pada na drugie zwierciadło w punkcie C pod kątem β do prostopadłej, odbija się również pod kątem β i dochodzi do oka w kierunku CQ, skutkiem czego, oko widzi obraz punktu P w przedłużeniu linii CQ. Promień padający PB i odbity CQ tworzą ze sobą kąt φ który, jako kąt zewnętrzny trójkąta BCD, równy jest sumie dwóch kątów wewnętrznych, nieprzyległych doń, t. j.



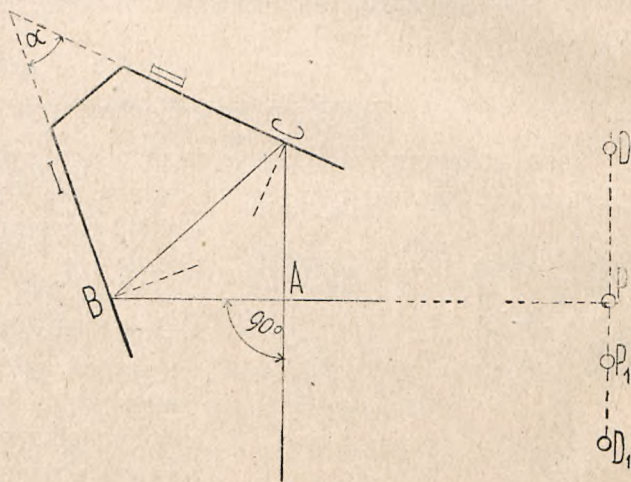
Rys. 8.

$\varphi = 2(\gamma + \beta)$ 1
 Z trójkąta ABC zaś mamy:
 $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 180^\circ$ 2
 a że $\alpha_1 = 90 - \gamma$ i $\alpha_2 = 90 - \beta$. . . 3
 to po wstawieniu tych wartości w równ. 2
 otrzymamy $\alpha + 90 - \gamma + 90 - \beta = 180$
 czyli $\alpha = \beta + \gamma$ lub $2\alpha = 2(\beta + \gamma)$. . . 4
 Z porównania równań 1 a 4 dostaniemy
 $2\alpha = \varphi$ 5
 t. j. kąt, jaki tworzy promień padający,

z odbitym, jest dwa razy większy od kąta, jaki tworzą oba zwierciadła. Jeżeli więc $\alpha = 45^\circ$ to $\varphi = 90^\circ$ i t. p.

Tyczenie kąta: Dany jest punkt A w polu i punkt M oznaczony tyczką. — Oba te punkty wyznaczają prostą AM — do której, w punkcie A ma być wytyczona prostopadła (rys 9).

Ustawiamy węgielnicę nad punktem A zapomocą pionu, zawieszzonego u węgielnicy, zaś pomocnika posyła się z tyczką w kierunku mniej więcej prostopadłym, ku P₁. Obraz tyczki pada



Rys. 9.

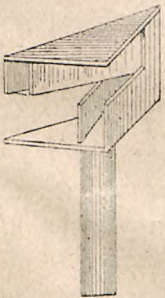
na zwierciadło I — odbija się od niego, pada na zwierciadło II i odbiwszy się drugi raz przychodzi do oka O. Oko widzi wtedy obraz tyczki w kierunku przedłużonej linii OA, równocześnie zaś, przez otwór nad zwierciadłem, widzi tyczkę M. Jeżeli obraz tyczki P₁ nie

schodzi się z widoczną przez otwór tyczką M, tak, że obie nie znajdują się we własnym przedłużeniu, to pomocnik porusza się wolno w kierunku poprzecznym od P₁ ku P — jeżeli tyczka znajdzie się w P₁ a równocześnie jej obraz jest przedłużeniem tyczki M to pion węgielniczy wskazuje punkt będący wierzchołkiem kąta prostego, jeżeli zwierciadła nachylone są pod kątem 45°. Ściśle biorąc, punkt A zależny jest od punktów B i C i nie koniecznie musi znajdować się nad pionem, podczas gdy pion jest stały — stąd wynika, że popełniamy błąd, ten jednak jest na szczęście bardzo mały. Doświadczenia wykazały, że przeciętny błąd w wytyczaniu, wynosi 1'. Dla ramienia 100 m popełniłoby się zatem błąd, według równ. 4 § 1 $l = 0.000004.84814 \cdot 100 \cdot 60 = 29 \text{ mm}$. Dlatego dłuższych prostopadłych jak 40 m, nie powinno się wytyczać tym przyrządem.

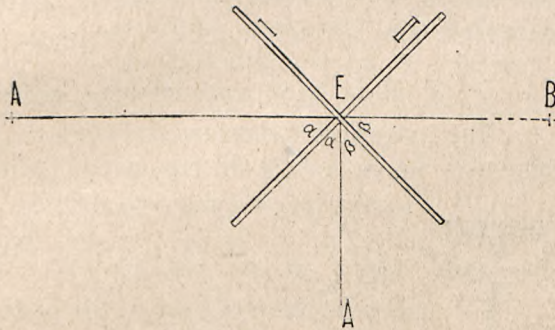
W powyższym przykładzie wytyczaliśmy linię AP — prostopadłą do AM. Odwrotnie, mając tylko kierunek OM i punkt P możemy znaleźć punkt A, jako rzut prostopadły punktu P na poprzedni kierunek. Postępujemy tutaj w ten sposób, że posuwamy się wolno w kierunku OP — trzymając węgielnicę przy oku, aż do tej chwili, gdy obraz tyczki P zejdzie się z widzialną przez otwór tyczką M i będzie przedłużeniem jej. Wówczas A będzie rzutem punktu P na kierunek OM.

2. Krzyż zwierciadlany (rys. 10).

Przyrząd ten składa się z dwóch zwierciadeł, ustawionych do siebie pod kątem prostym w odpowiedniej oprawie, widocznej z rys. 10.



Rys. 10.



Rys. 11.

Używa się go do tyczenia kąta 180° wzgl. do tyczenia punktów pośrednich na danym kierunku.

Przyjmijmy że punkty A i B uwidocznione tyczkami, wyznaczają w polu kierunek (rys. 11) — wyznaczyć zaś mamy punkt pośredni. Przypuśćmy, że przyrząd trzymany rzeczywiście na kierunku

AB — t. j. że pion zawieszony pod punktem E skrzyżowania obu zwierciadeł, wyznacza istotnie punkt pośredni na kierunku AB, to wówczas obraz tyczki A ujrzymy w zwierciadle I zwróconem do tej tyczki na linii skrzyżowania zwierciadeł. Promień AE pada na zwierciadło I pod kątem α do prostopadłej padania, którą w tym wypadku jest ślad zwierciadła II — i odbija się pod takimże kątem, dochodząc do oka w kierunku EA'. Równocześnie obraz tyczki B utworzy się w zwierciadle II na linii skrzyżowania, następnie odbija się pod kątem β i dochodzi do oka w kierunku EA', jak poprzedni. Obrazy tyczek A i B leżą więc w linii pionowej, nawzajem się przedłużając i nie zmieniają położenia podczas małych ruchów przyrządu około osi pionowej. Gdyby jednak przyrząd, a właściwie linja skrzyżowania zwierciadeł, nie znajdowała się w kierunku AB — to obrazy tyczek A i B nie będą leżały w linii pionowej, lecz każdy z osobna w swoim zwierciadle, nie przedłużając się. W takim razie trzeba przyrząd przesunąć w kierunku poprzecznym do AB — obrazy będą coraz bardziej się zbliżały, aż w końcu znajdą się w jednej linii pionowej — wówczas pion wyznacza na terenie położenie żadanego punktu pośredniego.

Jeżeli zwierciadła nie są ustawione pod kątem 90° do siebie to otrzymamy fałszywe wyniki. Węgielnicę należy zatem sprawdzić przed użyciem jej w polu. W tym celu wytyczamy 3 punkty, dokładnie w jednym kierunku. Nad punktem środkowym ustawiamy węgielnicę — jeżeli ta jest dobrą, to obrazy obu tyczek znajdą się na linii pionowej — jeśli nie, to będzie oznaką, że nachylenie obu zwierciadeł jest fałszywe — wówczas, zapomocą śrubek poprawimy ustawienie ich. Po kilku takich próbach, węgielnica będzie dobrą.

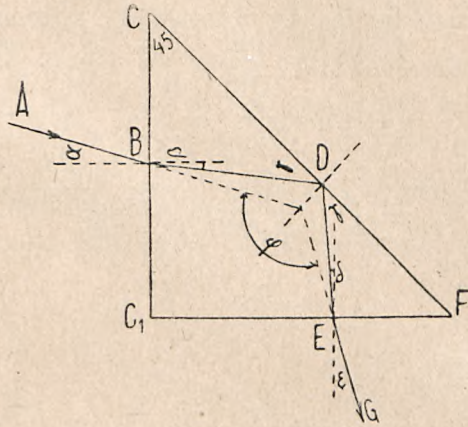
3. Węgielnica pryzmatyczna pojedyncza (rys. 12).

Jest to pryzmat szklany w oprawie metalowej, mający pod dolnem denkiem rączkę do trzymania i zawieszania piona. W przekroju poziomym pryzmat jest trójkątem prostokątnym, w którym przeciwprostokątnia jest przekrojem zwierciadła — jak przedstawia to rys. 13 (str. nast). Przypuśćmy, że na ścianę CG (rys. 13) pada promień AB — odbity od tyczki, pod kątem α do prostopadłej padania. Promień ten wnikając z powietrza w szkło, załamuje się ku prostopadłej, tworząc z nią kąt β , mniejszy od kąta α — w punkcie D natrafia na zwierciadło, odbija się w kierunku DE i dochodzi do drugiej przyprostokątnej w punkcie E, padając pod kątem δ do prostopadłej — w końcu wychodzi z pryzmatu, załamując się od prostopadłej, t. j. pod kątem ϵ .



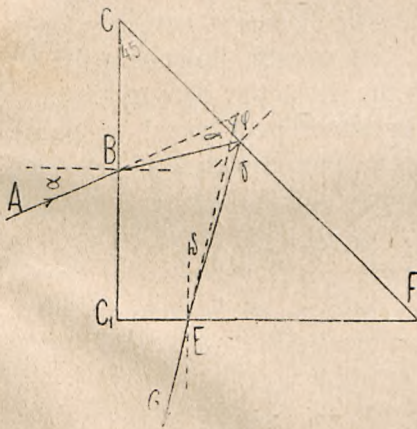
Rys. 12.

Z trójkąta BCD otrzymamy: $45^{\circ} + (90 + \beta) + \gamma = 180^{\circ} \dots 1$
 podobnie z trójkąta DEF: $45^{\circ} + (90 + \delta) + \gamma = 180^{\circ} \dots 2$
 zatem! $45^{\circ} + 90^{\circ} + \beta + \gamma = 45^{\circ} + 90^{\circ} + \delta + \gamma \dots 3$
 czyli $\beta = \delta \dots 4$
 zarazem musi również być $\alpha = \varepsilon \dots 5$
 Promienie AB i EG przedłużone wewnątrz pryzmatu tworzą ze sobą kąt φ z rys. zaś wynika że $\varphi = 90 + \alpha\varepsilon$ czyli $\varphi = 90 + 2\alpha \dots 6$
 Natomiast z rys. 14 — na którym w porównaniu do rys. 13 — promień AB pada z przeciwnej strony prostopadłej padania, a więc i wychodzi z pryzmatu w kier. EG także po przeciwnej stronie, widocznym jest, że $\varphi = 90^{\circ} - 2\alpha \dots 7$



Rys. 13.

Kąt α zmienić się może skutkiem małych obrotów pryzmatu około osi pionowej, padając raz z jednej, drugi raz z drugiej strony prostopadłej padania, a ponieważ zmiana kąta α wywołuje zmianę kąta φ , zatem oko w pobliżu punktu E się znajdujące, będzie widziało obraz tyczki raz w kierunku GE (rys. 13) drugi raz w kier. GE (rys. 14)



Rys. 14.

czyli, że obraz tyczki będzie zmieniał swe położenie w miarę małych obrotów pryzmatem. Gdyby więc pryzmat znajdował się w wierzchołku kąta prostego, to i tak kąt φ będzie zmiennym i nie może uzyskać stałej wartości 90° — czyli pryzmatu nie moglibyśmy użyć do tyczenia kąta prostego.

Dopiero Bauerfeind wskazał (1851 r.) sposób właściwego użycia pryzmatu, a mianowicie:

Trójkąt BAC niech będzie poziomym przekrojem pryzmatu, linja PR promieniem, padającym blisko krawędzi A pod kątem α do prostopadłej padania. Promień PR wnikając w pryzmat, załamie się ku prostopadłej, pod kątem β i dojdzie do punktu D na drugiej przyprostokątnej — odbije się całkowicie wewnątrz pryzmatu i w punkcie E natrafi na zwierciadło, padając nań pod kątem γ — pod tym

samym kątem odbije się, dojdzie do punktu F na przyprostokątnej AC i wyjdzie z pryzmatu, załamując się pod kątem E do prostopadłej padania, zatem w kierunku FS, w którym też w pobliżu krawędzi C, znajduje się oko obserwatora. Kierunki PR i FS tworzą ze sobą kąt φ .

$$\text{Z trójkąta EFC : } (90 - \gamma) + (90 - \delta) + 45^\circ = 180 \quad \dots \quad 8$$

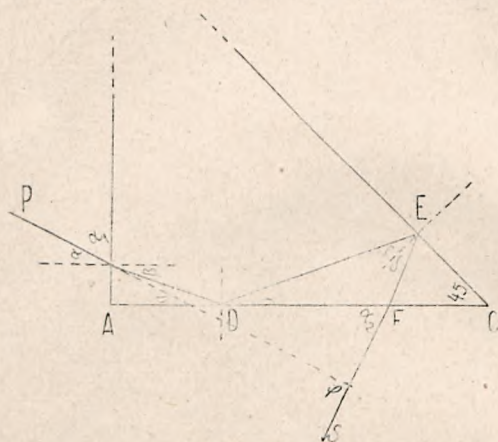
$$\text{„ DEC : } \beta + (90 + \gamma) + 45^\circ = 180 \quad \dots \quad 9$$

$$\text{z równania 8 : } \gamma + \delta = 45^\circ \quad \dots \quad 10$$

$$\text{„ 9 : } \gamma + \beta = 45^\circ \quad \dots \quad 11$$

zatem $\delta = \beta$ równocześnie musi być $\alpha = \varepsilon \quad \dots \quad 12$

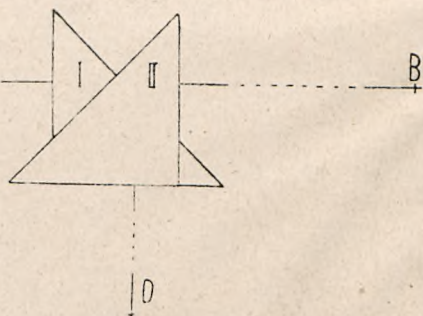
a więc $\alpha_1 = \alpha_2$ czyli $\varphi \equiv 90^\circ \quad \dots \quad 13$



Rys. 15.

Pryzmat należy tak ustawić ażeby promień padał blisko krawędzi A, oko zaś znajdować się powinno blisko krawędzi C. Jeżeli, wykonując małe obroty pryzmatem, około osi pionowej, widzicie będziemy obraz tyczki zawsze w tym samym miejscu mimo obrotów, to jest oznaką, że pryzmat jest dobrze ustawiony, a promienie wchodzący i wychodzący, tworzą ze sobą kąt prosty. Równocześnie wi-

dzimy przez otwór nad pryzmatem tyczkę stojącą w danym kierunku jeżeli obraz tyczki w pryzmacie jest przedłużeniem tyczki widocznej przed nami, to pryzmat znajduje się w wierzchołku kąta prostego. Jeżeli obraz nie schodzi się z widoczną tyczką w jednej pionowej to tyczkę na ramieniu prostopadłym należy powoli przesuwać, skutkiem czego obrazy będą się zbliżały, aż się zjedną, a wówczas kierunek prostopadły będzie wytyczony.

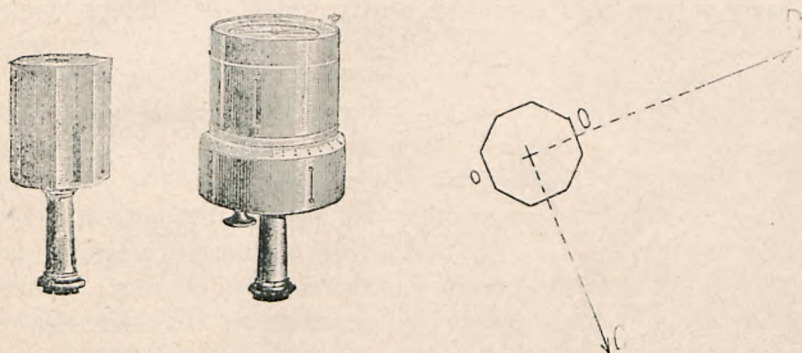


Rys. 16.

4. Krzyż pryzmatyczny (rys. 16).

Krzyż pryzmatyczny konstrukcji Bauernfeinda, służy podobnie jak krzyż zwierciadlany, do wyznaczania punktów pośrednich na

danym kierunku. Składa się z dwóch pojedynczych przyzmatów w oprawie, tak jednak umieszczonych, że przeciwprostokątne przecinają się pod kątem prostym. Ustawmy przyzmat na kierunku AB (rys. 16) to obrazy obu tyczek, utworzonych w przyzmatkach I i II, znajdą się nad sobą w kierunku pionowym. Ażeby więc na kierunku AB wyznaczyć punkt pośredni, posuwamy się powoli w kierunku poprzecznym do AB aż obrazy obu tyczek, ukazujące się zrazu oddzielnie, zejdą się i przedłużą nawzajem. Wtedy pion wyznacza żądany punkt na terenie. Krzyż przyzmatyczny sprawdza się tak samo jak zwierciadlany, a położenie obu przyzmatów da się poprawić za pomocą odpowiednich śrubek.



Rys. 17.

5. Węgielnica bębenkowa (rys. 17).

Jest to walec z blachy mosiężnej lub graniastostup ośmioboczny mający u spodu tulejkę do nasadzania na tyczkę lub trójnóg. W bocznych ścianach wycięte są podłużne otwory mianowicie otwór wąziutki, t. z. okular, naprzeciw zaś szerszy, t. z. obiektyw, z naciągniętym wzdłuż w środku otworu włosieniem. Okular i włosień wyznaczają prosty kierunek — prostopadle do tego kierunku mamy także same otwory, czyli kierunek prostopadły do poprzedniego. Prócz tego urządzone są otwory w kierunkach 45° . Ażeby dane kierunki można było przedłużać w kierunkach wprost przeciwnych, znajduje się pod każdym okularzem obiektyw i odwrotnie.

Zastosowanie tej węgielnicy jest bardzo łatwe i proste. Ustawiamy ją w danym punkcie na linji, wbijając tyczkę, na której jest nasadzona węgielnica, pionowo w ziemię — następnie, patrząc przez okular, obracamy węgielnicę, aż włosień padnie na środek tyczki. Przechodzimy wówczas do okularu na kierunku prostopadłym do

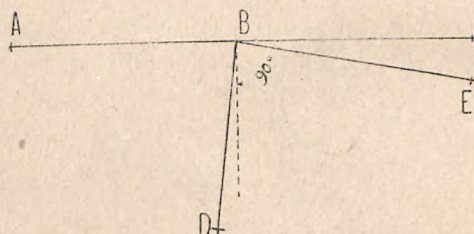
poprzedniego i patrząc przez otwór, kierujemy tyczkę dopóty, aż znajdzie się na linii wyznaczonej przez okular i włosień.

Zupełnie podobnie stosuje się t. z. węgielnice krzyżową. Od bębnekowej różni się ona tem, że zamiast walca lub graniastostłupa, mamy tu blaszki, umieszczone na końcach ramion krzyża poziomego. Okulary i obiektywy są takie same.

SPRAWDZANIE I REKTYFIKACJA WĘGIELNIC.

§ 4. Celem sprawdzenia czy węgielnica jest dobra, t. j. czy zapomocą niej da się rzeczywiście wytyczyć taki kąt, do jakiego jest urządzona, postępujemy w następujący sposób :

Przypuśćmy, że mamy sprawdzić węgielnice prostokątną (rys. 18). Wytyczmy w tym celu kierunek prosty, zapomocą trzech punktów



Rys. 18.

A, B i C. Ustawmy na środkowym punkcie B węgielnice, a wytyczmy kąt rzekomo prosty ABD.

Teraz wytyczmy z punktu B prostopadłą do BD, czyli drugi kąt prosty. Przypuśćmy, że ten drugi kąt przez węgielnice wyznaczony, dał ramię rzekomo prostopadłe, w kierunku BE.

Ponieważ pierwiej wytyczona prosta ABC tworzy kąt 180° w wierzchołku B dwa razy zaś wytyczony kąt prosty zapomocą węgielnicy, powinien dać przy punkcie B także kąt 180° , a nie wyznaczył go, bo punkty C i E nie schodzą się, więc połowa kąta CBE jest błędem przyrządu, który należy odpowiednio poprawić, o ile konstrukcja jego na to dozwala. Przyrządu n. p. poprawić się nie da, bo już z fabryk powinien wyjść bez błędu.

POMIARY DŁUGOŚCI, BŁĘDY POMIARÓW I WYRÓWNANIE BŁĘDÓW. PLANY.

ROZDZIAŁ III.

PYZYRZĄDY DO POMIARÓW DŁUGOŚCI.

1. Łata miernicza.

§ 1. Łata miernicza używana do najdokładniejszych pomiarów. Zazwyczaj pojedyncza łata ma długości 3 do 5 metrów, sporządzona z drzewa jodłowego, celem zabezpieczenia od wilgoci powleczona farbą olejną — przekroju kwadratowego, okrągłego lub eliptycznego, w środku długości 40 mm gruba, w końcach po 25 mm. Końce łaty są starannie mosiądzem okute i zakończone płaskimi ostrzami: jeden koniec ma ostrze poziome, drugi pionowe. Otrza te ułatwiają dokładne przykładanie łat, w kierunku długości jednej za drugą. Łata podzielona jest na metry i decymetry. Drobniejsze długości mierzy się przykładając podziałkę.

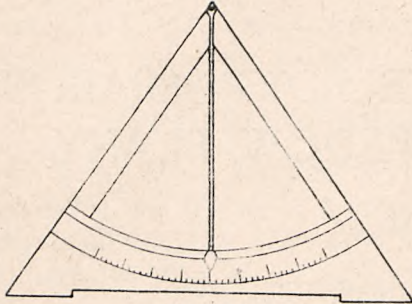
W terenie płaskim i poziomym, pomiar łatami odbywa się w ten sposób, że dany kierunek wytycza się dokładnie i palikuje co 20 do 30 m. Między palikami wyciąga się sznur, celem ułatwienia w układaniu łat. Używa się zwykle dwu lub trzech łat. Łatę pierwszą układa się starannie przy sznurze, następnie drugą, bacząc by ostrza przylegały do siebie oraz, by między nie nie dostał się jakiś niepotrzebny przedmiot, n. p. trawa lub t. p. — po ułożeniu drugiej łaty, przenosi się pierwszą i t. d. Każdy pomocnik liczy ile razy łatę przykładają, a prócz tego mierzący zapisuje każdą łatę.

W terenie jednostajnie nachylonym, pomiar wykonywa się tak samo, należy jednak linię zniwelcować, względnie pomierzyć kąt nachylenia jej do poziomu. Po zmierzeniu danej długości, trzeba ją zredukować na poziom, mnożąc ją przez cos kąta nachylenia terenu, zatem zredukowana długość l' wyniesie:

$$l' = l \cdot \cos \alpha \quad 1$$

Do pomiaru kąta nachylenia terenu, używa się t. z. śródwagi. Jest to trójkąt drewniany (rys. 19), na którym oznaczone są stopnie

z wierzchołka trójkąta zwiesza się pion na cienkim sznurku. Jeżeli podstawa trójkąta spoczywa na poziomie, to pion wskazuje 0° — jeżeli zaś jest nachylona do poziomu, to pion wychyla się i wskazuje

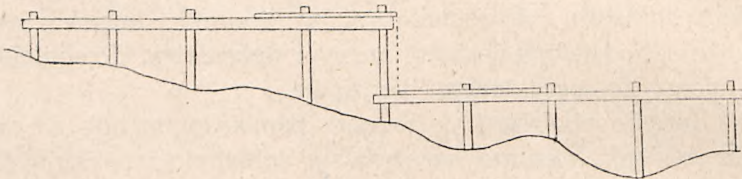


Rys. 19.

odpowiedni kąt na podziałce. Dokładność pomiaru na 10 minut zupełnie jest wystarczającą. Śródwagę sprawdza się w następujący sposób: ustawiamy ją n. p. na stole i zaznaczamy położenie pionu. Następnie obraca się ją o 180° , stawiając ją w temsamem miejscu i znowu zaznaczamy położenie pionu. Punkt zerowy podziałki, leżąc powinien w środku, między obu

położeniami pionu. W przeciwnym razie, należy odpowiednio podziałkę przesunąć.

W terenie pofalowanym lub niejednostajnie pochylonym pomiar łątami jest trudny. O ile rozchodzi się o ważny pomiar i wielką dokładność, to wypadnie często stosować rusztowanie, przedstawione na rys. 20. W tym celu, co 3 do 4 m. wbija się paliki i do nich umocowuje się gwoździami, poziomo, łąty, dług. 6 do 8 m. dokładnie



Rys. 20.

w żądanym kierunku. Łaty miernicze układa się na tem rusztowaniu. Ostatnia łąta zawsze wystaje — koniec jej odpionowuje się, przykładając na niższem rusztowaniu, koniec łąty do sznurka od pionu i t. d. Używa się nawet specjalnych instrumentów do pionowania końców łąt wystających.

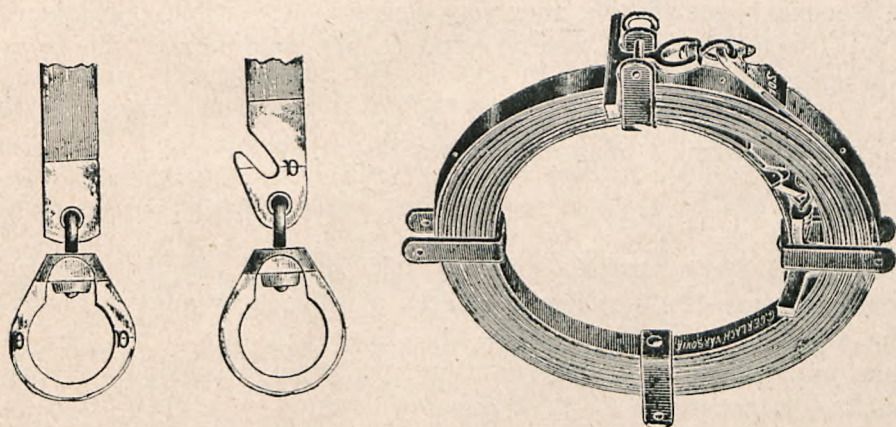
Pomiar łątami jest żmudny, wymaga długiego czasu, zatem jest kosztowny. Stosuje się go do pomiarów podstawy tryangulacji, przy tyczeniu mostów żelaznych, a raczej osi filarów i przyczółków.

2. Taśma miernicza.

Jest to wstęga z blachy stalowej, 20 do 25 mm szer. około 0.3 mm grub. Zazwyczaj używane są taśmy 10, 20 i 25 m dług. podzielone na metry i 0.5 m. Co jeden m. umieszczona jest blaszka mosiężna

z odpowiednim numerem — co 0·5 m. wybita jest mała dziurka we wstędze. Drobniejsze części odmierza się na taśmie podziałką. Zakończenie taśmy u obu końców wskazuje rysunek 21. jest to uchwyt mosiężny mający w osi taśmy półkolisty rowek „a“, do tykać mający szpilki, wbitej w teren. Szpilkę drucianą, średnicy 2·5 mm dług. 30 cm. wbija się w teren po ułożeniu taśmy i wyciągnięciu jej dokładnie w danym kierunku — powinna ona wejść do połowy grubości w rowek „a“.

Pomiar odbywa się zwykle jedną taśmą. Po ułożeniu jej i wbiciu przedniej szpilki, t. j. na początku taśmy, przenosi się taśmę dalej, układa i wyciąga, poczem wbija się na początku szpilkę, drugą zaś wyciąga się. Pomocnik trzymający koniec taśmy, zbiera szpilki, co



Rys. 21.

stanowi kontrolę, bo tyle taśm zostało już położonych, ile on zebrał szpilek. Używa się też zawsze tylko 5 szpilek, wystarczających na 100 m. dług. Gdy więc pierwszy pomocnik wyciąga szóstą taśmę, to już nie ma szpilki i musi dostać wszystkie pięć od drugiego. Jest to znakiem, że rozpoczęto pomiar nowego hektometra.

Pomiar taśmą w terenie płaskim, lub jednostajnie pochylonym jest łatwy i dokładny. Natomiast w terenie falistym, jest trudny i znacznie mniej dokładny — trudno bowiem utrzymywać taśmę w poziomie — trzeba ją wspierać, co wykonują pomocnicy, podtrzymując ją rękami. Mimo to, taśma zwisa. Podniesiony nad teren koniec taśmy, trzeba odpionować i wbić szpilkę w tym końcowym punkcie. Odpionowanie, z powodu pewnego szarpania taśmy nie może być dokładne i powoduje błędy przyłożenia.

Także temperatura powoduje błędy, które ile możliwości trzeba przynajmniej zredukować. Zwykle, w fabryce urządza się podział

taśmy na metry w temperaturze 15°. Jeżeli mierzymy w innej temperaturze, to należy uwzględnić wydłużenie lub skrócenie taśmy, odpowiadające różnicy temperatury: $T - 15^\circ$ co oznaczmy przez małe „t“ z odpowiednim znakiem, + powyżej 15° C i — poniżej. N. p. przy + 20° C będziemy uwzględniali temperaturę $20 - 15 = 5^\circ$ C; przy - 3° C uwzględnimy $- 3 + 15 = - 18^\circ$ C.

Wogóle wprowadzimy do rachunku $\pm t^\circ$ C jako poprawkę.

Przyjmijmy, że współczynnik rozszerzalności taśmy stalowej o dług. 1 m = α — długość taśmy = 1, różnica temperatur = $+t^\circ$ C, w takim razie długość l_1 będzie rzeczywistą długością taśmy wskutek działania temperatury t. j. $l_1 = 1 + 1 \cdot \alpha \cdot t = 1 (1 + \alpha t)$. . . 2

Zamiast mierzyć taśmą o długości 1 w której taśma została wykonaną i sprawdzoną, mierzymy długością l_1 — zatem popełniamy błąd. Długość l_1 zatem należy odpowiednio zredukować zapomocą równania 2:

$$l = \frac{l_1}{1 + \alpha t} \quad 3$$

pomnożmy licznik i mianownik przez $(1 - \alpha t)$ to otrzymamy

$$l = \frac{l_1 (1 - \alpha t)}{1 - \alpha^2 t^2}, \text{ a że } \alpha \text{ jest wogóle ilością bardzo małą}$$

to α^2 będzie tem bardziej znikomą, tak, że $\alpha^2 t^2$ jako ilość bardzo małą drugiego rzędu możemy opuścić, a wówczas w miejsce równania 3 dostaniemy: $l = l_1 (1 - \alpha t)$ 4

jako wzór do redukcji długości taśmy, przyczem uwzględnić się musi znak $\pm t$, zatem dla $(-t)$ otrzymamy $l = l_1 (1 + \alpha t)$ dla $(+t)$ natomiast $l = l_1 (1 - \alpha t)$. Temperaturę „t“ wyraża się w stopniach α zaś jest wsp. rozszerzalności dla taśmy stalowej dług. 1 m. o 1° C.

Analogicznie, zamiast redukować długość taśmy, możemy cały pomiar zredukować według równania:

$$L = L_1 (1 - \alpha t) \quad 5$$

gdzie L_1 jest wynikiem pomiaru, zaś L jest już zredukowaną długością.

Przeciętnie przyjąć można $\alpha = 0.00001079$ — zatem przy różnicach temperatury 10°, 20° lub 30° otrzymamy nast. zmiany długości taśmy 20-metrowej:

dla 10° C	długości	zmieni się	o	2.15 mm.
20° C	„	„	„	4.30 „
30° C	„	„	„	6.45 „

Zmiany te są małe i mieszczą się w granicach błędów. Przy zwykłych tedy pomiarach, nie uwzględnia się tej poprawki — gdy jednak rozchodzi się o bardzo dokładny pomiar, wówczas nie możemy świadomie pozostawiać błędu i uwzględnia się poprawkę działania temperatury

Dwa, wyżej opisane przyrządy do pomiaru długości, są najważniejsze i najdokładniejsze. Prócz nich, do pobieżnych pomiarów użyć można taśmy parciaanej, t. j. wstęgi lnianej z wkładkami z drutów miedzianych. Taśma ta jednak wyciąga się, jest zbyt lekka tak, że wiatr wygina ją i do pomiarów w polu nieprzydatna. Tem mniej nadaje się sznur 20 do 25 m długi. Do szkiców i szacowania odległości stosować można pomiar krokami, lub też czas potrzebny do przebycia marszem danej odległości.

POZIOM POZORNY I GEODEZYJNY.

§ 2. Przy sposobności opisu wykonywania pomiarów długości, zastanowimy się nad uwzględnieniem kształtu ziemi przy tych pomiarach.

Już w rozdz. I wspomniano o poziomie geodezyjnym i poziomie pozornym. Gdyby więc całą ziemię oblewało morze, ale zarazem, gdyby zwierciadło wody znajdowało się w zupełnej równowadze, t. j. gdyby nie ulegało sile przyciągania z zewnątrz, to utworzyłoby powierzchnię kształtu geoidy i to byłby poziom geodezyjny. W którym zaśkolwiek punkcie tej powierzchni, płaszczyzna styczna, utworzyłaby t. z. poziom pozorny. Im dalej od punktu styczności, tem więcej różni się poziom pozorny od geodezyjnego, czyli rzeczywistego.

Poziomów geodezyjnych możemy mieć wiele, zależnie od wysokości, wzgl. odległości od środka ziemi. Jeden z nich należy przyjąć jako zasadniczy t. zn. zerowy, n. p. poziom morza Adriatyckiego, względem którego określać będziemy wysokości t. j. położenia różnych innych poziomów, do jakich sięgają n. p. wyniosłości (góry) na powierzchni ziemi, lub wklęsłości (dna mórz). Wysokości nad poziomem zerowym, przyjmujemy jako dodatnie, poniżej jako ujemne.

Mierząc w różnych poziomach długości odpowiadające równym kątom środkowym, otrzymamy na poziomach geodezyjnych różne rezultaty. Najlepiej to wykazać na przykładzie: Przyjmijmy długość promienia ziemi $R = 6,370.000$ m i w tej odległości od środka ziemi, poziom geodezyjny zerowy. Następnie przyjmijmy jakąś wyżynę o 2000 m wyższą, zatem i poziom geodezyjny w odległości 6,372.000 m od środka ziemi. Przypuśćmy, że zmierzylismy na poziomie zerowym łuk o długości 1000 m i obliczmy, jak długi będzie odpowiedni mu łuk na poziomie + 2000 m. Pierwszy łuk nazwijmy przez ł , drugi Ł to długości ich pozostają do siebie w prostym stosunku jak ich promienie, zatem $\text{ł} : \text{Ł} = 6,370.000 : 6,372.000$ stąd zaś

$$\text{Ł} = \frac{1.000 \times 6,372.000}{6,370.000} = 1000,314 \text{ m.}$$

t. j. łuk na poziomie + 2000 m. odpowiadający łukowi na poziomie zerowym, jest o 314 mm dłuższy. Mierząc bezpośrednio, nie skostatowalibyśmy tej różnicy, znajdującej się już w granicach dozwolonych błędów pomiaru. Lecz do tak wysokiego poziomu, n. p. w Europie, sięgają tylko niektóre pasma górskie. Olbrzymie przestrzenie znajdują się blisko zerowego poziomu, wzniesione do paruset metrów i mniej, nie mówiąc już o morzach. W takich poziomach różnica długości łuków będzie już znikoma i bezpośrednimi pomiarami nie da się sprawdzić. Również, w rozdz. I. § 2 wykazaliśmy, że na znacznych nawet długościach, różnica między długością łuku, a długością styczną do tegoż łuku, zawartej między odpowiednimi promieniami, jest wprost znikomą, bo np. dla 15' kąta środkowego, długość łuku = 27781·57 m. styczną zaś, mierzonej w poziomie pozornym = 27781·65 m czyli wynosi zaledwie 8 cm czego bezpośrednim pomiarem żadną miarą nie jesteśmy w stanie sprawdzić. Stąd wynika, że w zwykłych warunkach, gdy nie rozchodzi się o pomiary ogromnych przestrzeni, lecz o długości choćby nawet kilkuset km nie potrzebujemy się troszczyć o uwzględnienie kształtu ziemi lub poziomów. Zresztą już sam sposób pomiarów, gdzie długości mierzymy, dzieląc je na części t. j. boki wieloboku opisującego, uwzględnia kulistość ziemi.

PLANY.

§ 3 Pomiary długości, obok pomiarów kierunków i wysokości, są elementami zdjęć bezpośrednich, służących do sporządzania planów t. j. rysunków w pewnym pomniejszeniu, przedstawiających na płaszczyźnie wszelkie szczegóły terenu i przedmiotów sztucznych na nim się znajdujących. Mamy różne rodzaje planów: katastralne, przedstawiające na rysunku parcele, posiadłości, drogi, koleje rzeki i t. p. narysowane w rzucie poziomym; plany gospodarcze, na których podaje się rodzaj kultury, gatunek ziemi uprawnej, stosunki klimatyczne, ulepszenia rolne i t. p. daty, potrzebne w gospodarstwie rolnem; plany leśne, podające prócz granic obszarów, rodzaj i wiek drzewostanu, kultury leśne, wyreby. Jeżeli prócz powyższych szczegółów podane są jeszcze wysokości terenu, to taki plan nazywa się sytuacyjnym. Wreszcie mamy karty topograficzne, w znacznym zmniejszeniu, 25.000, 75.000, 100.000 i 200.000 razy mniejszem od natury, przedstawiające dość wiernie wszystkie szczegóły terenu. O kartach topograficznych mówić będziemy oddzielnie.

Plany wykonywa się zwykle w większej skali, a to: 1000, 2500 razy mniejsze niż w naturze. Skala, czyli podziałka planu, wy-

raza stosunek między długościami w planie a odpowiednimi długościami na terenie. Np. skala 1 : 1000 oznacza, że jednostka długości na planie, odpowiada tysiącu takichże jednostek w rzeczywistości, t. j. 1 mm na planie przedstawia 1000 mm czyli 1 m w rzeczywistości, lub 1 m na planie = 1000 m w naturze.

Do odmierzania długości na planach, używa się podziałek, sporządzonych z twardego drzewa lub kości, urządzonych odpowiednio do skali, więc dla 1 : 1000 podzielonych na milimetry i połowy tychże, tak, że wprost odczytywać można 0·5 m, względnie i ten podział łatwo szacować na połowę, czyli odmierzać z dokładnością 25 cm. Przy dostatecznej wprawie można dobrze szacować podziałkę na 0·2 mm, czyli 20 cm w skali 1 : 1000, a nawet na 0·1 mm t. j. na 10 cm. Podobnie używa się podziałek w skali 1 : 2500 gdzie 0·4 mm na rysunku = 1 m w naturze, czyli na tej podziałce można dokładnie odczytywać 0·2 mm co odpowiada 50 cm w naturze.

Długości mierzymy zawsze w rzucie na poziom pozorny. Jest to usprawiedliwione także względami praktycznymi. Przypuśćmy bowiem, że jakaś parcela położona jest na stoku. Wymiary jej, mierzone po pochyłości, będą większe, niż w rzucie poziomym. Zdawałoby się, że wówczas plan katastralny, wykazuje mniejszą powierzchnię niż w rzeczywistości, krzywdzi więc właściciela pod tym względem, z drugiej zaś strony krzywdzi skarb państwa, zmniejszając w ten sposób wysokość podatku płaconego od obszaru. Tymczasem okazuje się, że na stoku nie rośnie więcej roślin niż na powierzchni jego rzutu, wszystkie rośliny bowiem rosną pionowo, nie zaś prostopadle do płaszczyzny gruntu. Właściciel zatem nie może mieć więcej pożytku ze stoku, niż z jego rzutu.

Jak wogólności urządzone są plany katastralne, wykażemy to w dalszym ciągu, przytaczając, jako przykład urządzenie katastru austriackiego.

Płaszczyzna południka, przechodzącego przez oś obrotu ziemi i dany punkt na terenie, przecina płaszczyznę poziomu pozornego danego punktu, w linii południe—północ (płd.—płn.), którą przyjmujemy jako oś odciętych (x). Dany punkt przyjmujemy jako początek układu (O) — oś x idącą na południe jako dodatnią ($+x$), na północ jako ujemną ($-x$) — linię prostopadłą do poprzedniej, idącą od wschodu na zachód, jako oś rzędnych (y), na wschód ($-y$, na zachód ($+y$). Jest to geodezyjny układ współrzędnych (rys 22). Osie współrzędnych dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki, których numeracja postępuje w kierunku ruchu wskazówek na zegarze. Podstawę pomiarów katastralnych tworzyła sieć tryangulacyjna, pokrywająca

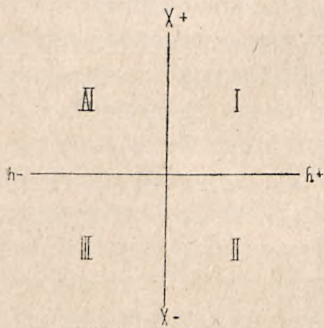
całe państwo, a oparta na czterech, bezpośrednio pomierzonych podstawach. Sieć tę nawiązano do wojskowej sieci tryangulacyjnej. Sieć tryangulacyjna, czyli trygonometryczna składa się z czterech stopni:

a) Pierwszorzędna sieć, złożona z trójkątów o długości boków 15 do 30 km oparta na własnej pomierzonej podstawie.

b) Drugorzędna, z trójkątów o długości boków 9 do 15 km oparta na poprzedniej sieci.

c) Trzeciorzędna, z trójkątów o bokach 4 do 9 km dług. tak założona, że na każdą milę kwadratową, t. j. 5754·6 ha wypada jeden trójkąt.

d) Czwartorzędna wychodzi z punktów sieci 3-rzędnej i daje na każde 500 morgów t. j. 287·73 ha trzy punkty trygonom. jako nawiązanie dla zdjęć szczegółowych.



Rys. 22.

Do r. 1858 wykonywano tryangulację graficzną, za pomocą stolika mierniczego.

Ażeby do zdjęć szczegółowych zużytkować stałe punkty trygonometryczne w jak najprostszy sposób, przyjęto prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie, względem którego oznaczono położenie punktów trygonom. Ażeby jednak uniknąć błędów, powstać mogących z powodu nieuwzględnienia kulistości ziemi, przyjęto dla poszczególnych krajów lub ich grup,

osobne układy współrzędnych, dla których, jeden z punktów I-rzędnej sieci trygonom. obierano za początek układu; południk przechodzący przez dany początek układu, stanowi oś odciętych, prostopadły zaś doń kierunek, oś rzędnych. Ponieważ poszczególne te systemy obejmowały niezbyt wielkie powierzchnie, można było ich osie współrzędnych traktować jako proste na płaszczyźnie.

Małopolska posiada swój układ współrzędnych — początek jego leży na kopcu Unji lubelskiej we Lwowie. Celem zorjentowania sieci trygon. w danym kraju, oznaczono asymuty boków pierwszego trójkąta albo za pomocą bezpośrednich astronomicznych pomiarów, albo geodezyjnie, za pomocą pomiarów kierunków ich względem innego trójkąta, którego asymuty pierwiej oznaczono. Obliczenie współrzędnych punktów wykonano według reguł trygonometrii płaskiej.

Całą powierzchnię kraju, należącego do jednego z układów współrzędnych, podzielono liniami równoległymi do obu osi na kwa-

draty o bokach długości jednej mili t. j. 7585·9 m. Pasy w kierunku południka nazwano kolumnami, poprzeczne zaś, idące od wschodu ku zachodowi, warstwami lub wierszami. Pierwsze ponumerowano liczbami rzymskimi, począwszy od osi x—x w obie strony, drugie arabskimi, począwszy od wiersza najbardziej wysuniętego na północ, ku południowi.

Kwadrat powyższy, o powierzchni jednej mili kwadr. stanowi sekcję. Każdą taką sekcję, podzielono na mniejsze, szczegółowe sekcje, mianowicie na 4 kolumny i 5 wierszy. Sekcja szczegółowa, czyli arkusz, przedstawia prostokąt o dług. 1000 sążni (1896·5 m) i szerokości 800 sążni (1517·2 m) oraz powierzchni 500 morgów (287·7 ha). Brzegi arkusza, czyli sekcji szczegółowej, biegną więc równolegle do osi układu współrzędnych.

Plany te, wykonane jeszcze przed wprowadzeniem miary metrycznej, mają następującą skalę: 1 cal na ryfunku = 40 sążniom w naturze, czyli $40 \times 6 \times 12 = 2880$ cali, zatem i skala 1:2880. Do pomiarów na planach służą osobne podziałki w skali katastralnej.

Nowe zdjęcia katastralne, rozpoczęte przed wojną, miały być oparte na tryangulacji i zdjęciach wielobokowych dla szczegółów i wykonane w skali 1:2500. Wprowadzono też nowy podział mianowicie: kolumny o szerokości 8000 m wiersze 10.000 m t. j. sekcje główne. Sekcja główna dzieli się na 5 kolumn i 8 wierszy, to jest 40 sekcji szczegółowych po 1600 m. dług. i 1250 m. szer. oraz powierzchni 200 ha. Plan sekcji szczegółowej ma 64 cm dług. i 50 cm szerok. Ponieważ tryangulacja stolikowa oparta była na punktach, oznaczonych w polu drewnianymi palami, które z czasem spróchniały i zanikły, przeto rozpoczęto pracę od odszukania dawnych punktów i utrwalenia ich zapomocą osadzenia w ziemi kamieni, względnie założenia nowych punktów. Prace te przerwała wojna.

Z powyższego widzimy, że w planach katastralnych znaczne obszary traktowano jako zdjęcia na płaszczyźnie.

O BŁĘDACH POMIARÓW.

§ 4. Bezpośrednio wykonany pomiar: czy to długości, czy wysokości lub kierunku, nazywamy spostrzeżeniem. Warunki, w jakich wykonywamy prace w polu, dalekie są zawsze od wymaganych przez teorię. Mimo n. p. wszelkiej staranności, nie jesteśmy w stanie ułożyć idealnie w danym kierunku łat, tak, że wynik pomiaru z tego powodu będzie zawiłki. Również przykładanie łat nie będzie teoretycznie dokładne, skutkiem czego wynik będzie za mały. Popełniamy więc błędy, wywołane wpływami od nas niezależnymi. Błędy tego rodzaju

nazywają się błędami nieregularnymi. Błędy te mogą się nawzajem znosić, jak n. p. powyżej przytoczone w układaniu i przykładaniu łąt, inne zaś mogą się sumować n. p. gdy zamiast w poziomie, układamy łąty w spadkach — ten błąd może się sumować z błędem układania w kierunku.

Obok nieregularnych, istnieją błędy regularne. Zależą one od przyrządów, np. gdy łąta lub taśma użyta do pomiarów jest za krótka lub za długa czyli ma błąd stały. Błąd taki, o ile jest znany, łatwo wyrugować. Miary porównujemy zawsze z miarą normalną, zatem błąd jest wiadomy. Nazwijmy nominalną długość taśmy przez l_n — rzeczywistą zaś jej długość otrzymaną przez sprawdzenie przez l — to stosunek $\frac{l}{l_n} = r$ jest współczynnikiem, którym należy wynik pomiaru błędną taśmą pomnożyć, ażeby błąd wyrugować.

Wreszcie trafiają się t. z. błędy grube, powstałe n. p. przez opuszczenie jednej lub paru taśm przy liczeniu, albo wskutek złego odczytu długości czy kąta. Taki błąd jest łatwy do skonstatowania. Pomiar powtarza się bowiem przynajmniej 2 razy. Otrzymawszy rażącą różnicę obu pomiarów, odrazu spostrzeżemy się, że zrobiono gruby błąd. Wówczas pomiar należy jeszcze raz powtórzyć.

Wracając do błędów nieregularnych, zwanych także przypadkowemi, widzieliśmy, że jedne na drugie często wpływają, znosząc się lub sumując. Nie mamy jednak tutaj żadnej podstawy do twierdzenia, że pomiar stał się wolnym od błędów wskutek wzajemnej redukcji błędów, równocześnie nie możemy także zaprzeczyć, że błędy się sumowały. Faktem jest, że n. p. mierząc jakiś odcinek kilka razy, dostaniemy zawsze różne rezultaty. Różnice mogą być bardzo małe, lecz będą. Tak samo mierząc 3 kąty w trójkącie, z reguły dostaniemy taki rezultat, że suma ich będzie mniejszą lub większą od 180° . Doświadczenie wskazuje, że podczas każdego pomiaru przeważały pewne wpływy, każdą razą w innym stopniu. Wkońcu przyjsć musimy do wniosku, że prawdziwej wartości, mimo wszystko poznać nie jesteśmy w stanie, że znać możemy tylko jej przybliżenie, i to tem więcej zbliżone do prawdziwej, im dokładniej wykonamy pomiar im więcej mieć będziemy spostrzeżeń, do jej oceny.

W niektórych wypadkach możemy mieć zupełnie ścisłą kontrolę n. p. mierząc wszystkie kąty w trójkącie lub zamkniętym wieloboku, możemy łatwo obliczyć popełniony błąd i to błąd prawdziwy. Lecz i w tym wypadku możemy poprawić pomiar, ale tylko w sumie kątów. Pojedynczych kątów w ich, prawdziwej wielkości znać nie

będziemy, bo choć je poprawimy, to na podstawie rozumowania i prawdopodobieństwa.

Podobnie niwelując od punktu A do B, a następnie od B do A, otrzymać powinniśmy dla punktu A, jako różnicę wysokości zero. Tymczasem, skutkiem błędów w pomiarze otrzymamy jakąś różnicę. Ścisłą kontrolę mamy tutaj, usuniemy błąd rozdzielając różnicę i poprawiając wysokość punktu B. Nie możemy jednak być pewni, czy pierwszy, czy drugi pomiar był dobrym, względnie gorszym. Poprawiona wysokość punktu B będzie prawdopodobna.

Zapomocą tryangulacji, ustalimy położenie i odległość n. p. dwóch punktów (1) i (2). Celem zdjęć szczegółowych, założymy między tymi punktami wielobok, nawiązując się do kierunku (1)—(2). Z pomiaru kierunków i długości boków wieloboku, nawiązanego do (1) i (2) obliczymy odległość obu tych punktów i kierunek (1)—(2) i porównamy je z wynikami otrzymanymi z tryangulacji. Otrzymamy pewną różnicę, czyli błąd, który trzeba będzie odpowiednio rozłożyć, by obydwa wyniki uzgodnić. Punkty tryangulacyjne (1) i (2), jakkolwiek ustalone, mają swoje błędy. Pomiar wieloboku po wyrównaniu, także będzie miał i musi mieć błędy. Błędy te jednak są zredukowane do minimum i mieszczą się w granicach dozwolonych, nie są więc szkodliwe. Granice dozwolone błędów tworzymy sobie jako kontrole, zapomocą bardzo dokładnych spostrzeżeń.

Przypuścimy, że mierząc „n” razy pewną długość (wzgl. kąt) otrzymaliśmy „n” różnych spostrzeżeń, które nazwiemy przez

$$l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad l_n$$

to na określenie prawdopodobnej wartości pomiaru mamy tylko jeden sposób, mianowicie średnią arytmetyczną, t. j.

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_n}{n} = \frac{[l]}{n} 1$$

Sumę oznaczać zawsze będziemy odpowiednią literą w graniastym nawiasie. Uważając na razie x za prawdziwą wartość pomiaru, znajdziemy różnice między nią, a poszczególnymi spostrzeżeniami, t. j.

$$\begin{aligned} x - l_1 &= v_1 \\ x - l_2 &= v_2 \\ x - l_3 &= v_3 \\ & . \\ & . \\ & . \\ x - l_n &= v_n 2 \end{aligned}$$

Sumując powyższy szereg równań, dostaniemy:

$$nx - (l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n) = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n \text{ czyli} \\ n \cdot x - [l] = [v] \dots \dots \dots 3$$

wstawiając za x wartość z równania 1-go otrzymamy

$$n \cdot \frac{[l]}{n} - [l] = [v] = 0 \dots \dots \dots 4$$

Błędy v nazywamy błędami pozornymi, bo x nie jest wartością prawdziwą, a więc i $v_1 \dots v_n$ nie są błędami prawdziwymi. Równanie 4 powiada, że suma błędów pozornych dąży do zera, czyli, że suma błędów, powstałych z błędów przypadkowych, nieregularnych, ma tendencję zbliżać się do zera. Zgadza się to z rozumowaniem wyrażeniem poprzednio, że błędy przypadkowe, mogą się nawzajem znosić.

Wykonajmy poprzedni pomiar drugi raz, powtarzając go nie „ n ” razy, lecz n_1 razy — otrzymamy wówczas prawdopodobną wartość x_1 różną od x . — Podobnie poraz trzeci, zapomocą n_2 spostrzeżeń dostaniemy wartość x_2 i t. d. wogóle x_n — a wszystkie będą się między sobą różniły. Wynika stąd, że na oznaczenie wartości jakiegokolwiek pomiaru, znaleźć możemy dowolną ich ilość, różniących się między sobą, a mimo to każdą z nich uważamy za prawdopodobną. Daświadczenia zatem zgodnie z rozumowaniem dowodzą, że prawdopodobna wartość mieści się w pownych granicach, w których zmieniać się może bez szwanku dla dokładności pomiaru, czyli że i ona ma pewien błąd, t. z. błąd średniej arytmetycznej. Zadaniem naszym będzie teraz wskazać sposób obliczenia błędu średniej arytmetycznej.

Z wartości prawdopodobnej i poszczególnych spostrzeżeń, jako ich różnic, dostaliśmy szereg błędów pozornych $v_1 v_2 \dots v_n$.

Zdawałoby się, że średni błąd da się wyrazić jako średnia arytmetyczna tych błędów, t. j. że $t = \frac{[v]}{n} \dots \dots \dots 5$

Jedne z tych błędów v są dodatnie, drugie ujemne a suma ich, jak to wynika z równ. 4. $[v] = 0$ — czyli utworzenie średniego błędu według równ. 5. jest niemożliwe. Utworzenie średniej z bezwzględnych wartości v , t. j. opuszczając znaki \pm byłoby dowolnością, niczem nieusprawiedliwioną, w takim razie „ t ” nie miałyby znaku, wzgl. nadanie mu wartości dodatniej lub ujemnej, zależałoby tylko od naszej woli, to zaś nie odpowiada pojęciu o naturze błędów nieregularnych, z których znów powstały błąd średniej arytmetycznej powinien być prawdopodobnym, a więc powinien być zarówno dodatni jak ujemny, a co z rachunku wyniknąć powinno. Następujący przykład okazuje,

że błąd przeciętny, według równ. 5, nie charakteryzuje dokładności spostrzeżeń, mianowicie:

$l_1 = 100\cdot01$ m	$v_1 = L - l_1 = -1$ cm
$l_2 = 99\cdot90$ „	$v_2 = L - l_2 = +10$ „
$l_3 = 99\cdot99$ „	$v_3 = L - l_3 = +1$ „
$l_4 = 100\cdot10$ „	$v_4 = L - l_4 = -10$ „
$[l] = 400\cdot00$ m	$[v] = \quad \quad = 0$ cm

średnia arytmetyczna $L = \frac{[l]}{n} = \frac{400}{4} = 100$ m.

Błąd przeciętny, według r. 5 byłby $t = \frac{1+10+1+10}{4} = 5\cdot5$ cm ze

znakiem dowolnym, a raczej nieokreślonym. Jak z szeregu błędów v widać, niektóre spostrzeżenia różnią się od L tylko o ± 1 cm, inne zaś 10 razy więcej. Błąd przeciętny wcale nie charakteryzuje tu dokładności spostrzeżeń, mieszcząc się akurat pośrodku, nie zbliżając się ani do pierwszej, ani do drugiej granicy, by w ten sposób uwzględnić wpływ mniejszych lub większych błędów pojedynczych — dlatego nie ma on dla nas żadnej wartości. Poniżej przytaczamy drugi przykład mierzenia kątów:

$l_1 = 35^{\circ}26'16''$	$v_1 = +2\cdot8''$	$[+v] = +7\cdot4''$
20''	$v_2 = -1\cdot2''$	$[-v] = -7\cdot4''$
18''	$v_3 = +0\cdot8''$	$[v] = 0$
25''	$v_4 = -6\cdot2''$	
15''	$v_5 = +3\cdot8''$	
$[l] = 94''$	$14\cdot8''$	

Średnia arytm. $x = 35^{\circ}26'18\cdot8''$ $t = \frac{14\cdot8}{5} = 2\cdot96''$ także nic nie mó-

wiące określenie średniego błędu.

Gdy błąd przeciętny nie nadaje się z powodów wyżej opisanych do określenia dokładności pomiaru, utwórzmy nowe wyrażenie według Gaussa, z szeregu n błędów prawdziwych $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n$ mianowicie:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \dots \dots \dots 6$$

gdzie m jest średnim błędem, który przypisać zatem należy każdemu z danych spostrzeżeń, t. j.: l_1 ma błąd $\pm m$, taksamo l_2 ma tenże błąd i t. d. co jest słusznem, bo wszystkie te spostrzeżenia odnoszą się do pomiaru tej samej wielkości kąta lub długości, i robione są

z tym samym nakładem pracy, uwagi i dokładności. Podwójny znak \pm wynika z pierwiastkowania.

Przyjmijmy dwa błędy prawdziwe ε_1 i ε_2 to:

$$\text{błąd przeciętny } t = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \quad \text{a błąd średni } m = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2}}$$

$$t^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} \quad \text{zaś } m^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2} = \frac{2\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2}{4}$$

$$\text{stąd różnica } m^2 - t^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2}{4} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4}$$

Różnica ta, jako kwadrat jest dodatnią, zatem m^2 musi być większy niż t^2 czyli średni błąd, będzie zawsze większy niż przeciętny, utworzony z bezwzględnych wartości pojedynczych błędów. Tylko, gdy $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ będzie $m = t$.

Celem uwidocznienia wpływu większych pojedynczych błędów na wartość średniego błędu, co jest zupełnie słusznem, a zarazem, celem wykazania, że błąd przeciętny nie daje dobrej miary na scharakteryzowanie dokładności pomiarów, przytaczamy poniżej dwa szeregi błędów pomiarów tej samej wielkości:

$$\text{I. } 5 \quad 6 \quad 2 \quad 7 \quad 3 \quad 8 \quad 10 \quad 9 \quad 3 \quad 5 \quad | \quad [\varepsilon] = 58 \quad | \quad [\varepsilon^2] = 402$$

$$\text{II. } 14 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 6 \quad 20 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \quad 10 \quad | \quad [\varepsilon] = 58 \quad | \quad [\varepsilon^2] = 750$$

Przeciętny błąd, obu szeregów będzie takż sam $t = 5.8$.

Natomiast błędy średnie

$$m_I = \pm \sqrt{\frac{402}{10}} = \pm 6.34 \quad \text{i} \quad m_{II} = \pm \sqrt{\frac{750}{10}} = \pm 8.66$$

Jak z porównania obu szeregów widzimy, pierwszy szereg spostrzeżeń wykonany był lepiej, różnice bowiem poszczególnych błędów nie są zbyt rażące, podczas gdy w drugim szeregu obok zera, widzimy błędy 14 i 20 — zatem bardzo niejednostajne. Pierwszemu zatem szeregowi wypada przypisać większą dokładność niż drugiemu, co też z rachunku wynika, podczas gdy błąd przeciętny określa oba szeregi jako równoważnościowe.

Dla przytoczonego wyżej przykładu pomiaru kąta otrzymaliśmy przeciętny błąd $t = 29.6''$ — natomiast średni błąd wypada:

$$v_1 = + 2.8'' \quad v_1^2 = 7.84$$

$$v_2 = - 1.2'' \quad v_2^2 = 1.44$$

$$v_3 = + 0.8'' \quad v_3^2 = 0.64$$

$$v_4 = - 6.2'' \quad v_4^2 = 38.44$$

$$v_5 = + 3.8'' \quad v_4^2 = 14.44$$

$$[v] = 0.0$$

$$[v^2] = 62.80$$

średnia arytm. $35^{\circ} 26' 18.8''$

średni błąd:

$$m = \pm \sqrt{\frac{62.80}{5}} = \pm 3.54''$$

ten średni błąd m należy do każdego ze spostrzeżeń i dlatego nazywa się średnim błędem pojedynczego spostrzeżenia.

Przed przystąpieniem do dalszych obliczeń i rozważań, wypada rozstrzygnąć kwestję, w jaki sposób oddziałują średnie błędy m , pewnych pomierzonych wartości, na powstałe z nich skutkiem rachunku, nowe wartości *n. p.* przez pomnożenie ich jakąś liczbą, lub dodanie ich.

Przypuśćmy, że wartość pomierzona x ma średni błąd $\pm m$ — pomnóżmy ją liczbą a — zatem liczbą, nie mającą błędu,

$$\text{t. j. } X = ax \quad x = a \cdot x$$

Jasną jest rzeczą, że gdy x ma wartość $x \pm m$, gdy uwzględnimy należny jej błąd, to przez pomnożenie jej przez a pomnoży się i błąd, t. j. wielokrotności x należy się wielokrotność m , zatem średni błąd iloczynu będzie M :

$$M = a \cdot m \quad \dots \quad 7$$

Następujące rozważanie przyzna słuszność równaniu 7:

Przypuśćmy, że do pomiaru pewnej długości użyliśmy łąty mającej błąd $\pm m$ t. j. niepewnej o $\pm m$, natomiast sam pomiar wykonaliśmy bez błędu. Zupełnie słusznie w tym wypadku możemy wnioskować, że jeżeli przy pomiarze, przyłożyliśmy a razy niepewną łątę o $\pm m$, to nie popełniając innych błędów, otrzymamy w rezultacie a razy powtórzony ten sam błąd, czyli cała długość będzie niepewną o $M = a \cdot m$, względnie $\pm M = \pm a \cdot m$.

Przyjmijmy teraz dwa różne i niezależne od siebie spostrzeżenia, *n. p.* pomiary dwóch różnych długości, x i x' . Rozchodzi się o błąd sumy $X = x + x'$ jeżeli błędy ich wynoszą odpowiednio $\pm m$ i $\pm m'$. Zdawałoby się rzeczą najprostszą, że błąd sumy M będzie sumą poszczególnych błędów. Lecz mieć tu możemy różne kombinacje, zależnie od znaków.

Ażeby dojść do rezultatu, pomyślmy sobie, że mamy cały szereg podobnych sum, mianowicie:

$$X_1 = x_1 + x'_1 \quad \text{z błędem} \quad \delta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon'_1$$

$$X_2 = x_2 + x'_2 \quad \text{„ „} \quad \delta_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon'_2$$

$$X_3 = x_3 + x'_3 \quad \text{„ „} \quad \delta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon'_3$$

$$\dots$$

$$X_n = x_n + x'_n \quad \text{„ „} \quad \delta_n = \varepsilon_n + \varepsilon'_n$$

pod warunkiem, że $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 \dots$ są to błędy o jednakowych znakach, zatem błąd sumy (δ) musiałby bezwarunkowo być równym sumie błędów pojedynczych (ε).

Obliczmy teraz kwadraty

$$\delta_1^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2 + 2 \varepsilon_1 \varepsilon_1'$$

$$\delta_2^2 = \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2'^2 + 2 \varepsilon_2 \varepsilon_2'$$

$$\delta_3^2 = \varepsilon_3^2 + \varepsilon_3'^2 + 2 \varepsilon_3 \varepsilon_3'$$

·

·

·

$$\delta_n^2 = \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n'^2 + 2 \varepsilon_n \varepsilon_n'$$

$$\frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} + 2 \frac{[\varepsilon\varepsilon']}{n} \quad \text{oraz średni kwadrat}$$

$$\frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} + 2 \frac{[\varepsilon\varepsilon']}{n} \quad \text{są to według definicji średniego}$$

błędu, kwadraty tegoż, zatem

$$\frac{[\delta^2]}{n} = M^2, \quad \frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 \quad \text{i} \quad \frac{[\varepsilon'^2]}{n} = m'^2$$

Zobaczmy teraz jaka może być wartość $\frac{[\varepsilon\varepsilon']}{n}$?

Jest to przeciętna wartość iloczynów $\varepsilon\varepsilon'$. W rzeczywistości będą one dodatnie i ujemne, nie zaś o jednakowych znakach. Nie mamy najmniejszej bowiem podstawy do twierdzenia, by sumowały się tylko dodatnie lub tylko ujemne, lub by dodatnie nad ujemnymi przeważały i odwrotnie. W takim razie suma $[\varepsilon\varepsilon']$ zdąża do zera, czyli możemy napisać że $\frac{[\varepsilon\varepsilon']}{n} = 0$ czyli i $2 \frac{[\varepsilon\varepsilon']}{n} = 0$. Stąd powyższe

równanie $\frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} + 2 \frac{[\varepsilon\varepsilon']}{n}$ otrzyma wartość

$$\frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} \quad \text{czyli} \quad M^2 = m^2 + m'^2$$

zatem $M = \pm \sqrt{m^2 + m'^2} \dots \dots \dots 8$

Jest to bardzo ważne prawo w całej teorii wyrównania. Równ. 8 da się graficznie przedstawić w formie trójkąta prostokątnego, w którym m i m' są przyprostokątniami, zaś M przeciwprostokątnią. Równ. 8 powiada: tworząc sumę dwóch niezależnych spostrzeżeń, otrzymamy błąd tej sumy M równy drugiemu pierwiastkowi z sumy kwadratów pojedynczych błędów m i m' .

To samo prawo odnosi się i do różnicy $x - x'$. Rozważając tok rachunku powyżej przytoczonego, którego rezultatem jest równ. 8 widzimy, że w rozwiniętych kwadratach zawsze otrzymamy x^2 i x'^2 jako dodatnie, tylko iloczyny $2xx'$ względnie $2\varepsilon\varepsilon'$ będą ujemne, a że suma ich jest równą 0, pozostanie więc $[\varepsilon^2]$ i $[\varepsilon'^2]$ jako doda-

tnie. Stąd wynika, że dla $D = x - x'$ mieć będziemy takż sam błąd M jak dla sumy $X = x + x'$ czyli

$$M = \pm \sqrt{m^2 + m'^2} \dots \dots \dots 9$$

To samo, co dla dwóch spostrzeżeń, odnosi się również do sumy lub różnicy ilukolwiek, zatem

$$M^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 + \dots \dots \dots$$

czyli $M = \pm \sqrt{m^2 + m'^2 + m''^2 + \dots \dots \dots} \dots \dots \dots 10$

Jeżeli w szczególnym wypadku $m = m' = m''$ to

$$M^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 + \dots \dots = n \cdot m^2$$

lub $\pm M = \pm m \cdot \sqrt{n} \dots \dots \dots 11$

gdzie n jest ilością dodajników.

Przyjmijmy, że pewną długość mierzymy łatami, nie mającemi błędu w długości, lecz popełniamy błąd w przykładaniu łat. Ponieważ łatę przykładamy z taką samą starannością, czyli dokładnością, więc błędy przyłożenia będą jednakowe co do swych bezwzględnych wartości. Po przyłożeniu łat n razy, dostaniemy średni błąd

$$\pm M = \pm m \cdot \sqrt{n}$$

a że n jest proporcjonalne do długości zmierzonej L , więc i średni błąd M jest proporcjonalny do pierwiastka z L .

Na podstawie praw, wyrażonych równaniami 7 i 8 wynika nast. wzór na błąd sumy iloczynów:

$$X = ax + a' \cdot x' + a'' \cdot x'' + \dots \dots \dots 11a$$

gdzie x, x', x'' są spostrzeżeniami, a a, a', a'' współczynnikami, czyli $ax, a'x', a''x''$ wielokrotnościami tychże spostrzeżeń, mającemi, według równ. 7 błędy a, m, a', m', a'', m'' to średni błąd ich sumy t. j. M według równ. 8. mieć będzie wartość

$$\pm M = \pm \sqrt{(am)^2 + (a'm')^2 + (a''m'')^2 + \dots \dots \dots} 12$$

Jak już poprzednio mówiliśmy, rozróżniamy błędy regularne i nieregularne. Ponieważ oba rodzaje ich równocześnie się przytrafiają, więc muszą i równocześnie współdziałać i wpływać na wynik pomiaru. To współdziałanie mamy zbadać i wyrazić odpowiednim wzorem matematycznym.

Jako przykład weźmy w tym wypadku pomiar łatami. Mimo całej staranności, łaty nie będą zupełnie idealnie ułożone w kierunku. — Wychylać się będą to na lewo, to na prawo. Również nie da się je układać ściśle w poziomie, lecz także z tego poziomu wychylać się będą. Będą to wprowadzić bardzo małe błędy, ale działają one jednostronnie, zawsze mając znak dodatni, a skutkiem tego jest że wynik pomiaru będzie za duży. Te błędy mają zatem charakter błędów regularnych.

Nazwijmy błąd jednego przyłożenia łąty przez A, to po n przyłożeniach otrzymamy błąd, według równ. 7 o wartości A. n.

Błędy nieregularne, niezależne również od sposobu wykonywania pomiaru, bo przyjmujemy, że wykonywa się go z wszelką dokładnością i starannością, uważać musimy jako równe przy każdym przyłożeniu, spowodują średni błąd wyrażający się według równania 11, gdy przez B nazwiemy błąd jednego przyłożenia, a przez n ich ilość, w formie $B \cdot \sqrt{n}$. Skutkiem sumowania ilości łąt, błąd całego pomiaru obliczymy według równ. 8. t. j.

$$\pm M = \pm \sqrt{(A n)^2 + (B \sqrt{n})^2} = \pm \sqrt{A^2 n^2 + B^2 \cdot n} \dots 13$$

POJEDYNCZA ŚREDNIA ARYTMETYCZNA I JEJ BŁĄD, ORAZ BŁĄD POJEDYNCZEGO SPOSTRZEŻENIA.

§ 5. Mierzac jakąś n. p. długość czy kąt, powtarzamy pomiar n razy. Przyjmijmy zatem, że wykonaliśmy szereg takich spostrzeżeń: $l_1 \ l_2 \ l_3 \ \dots \ l_n$.

Jako wartość prawdopodobną mamy, według równ. 1. średnią arytmetyczną

$$L = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \dots 14$$

Różnice, między L a $l_1 \ l_2$ i t. d. dają nam wartości błędów pozornych v t. j.

$$v_1 = L - l_1$$

$$v_2 = L - l_2$$

$$v_3 = L - l_3 \text{ i t. d.}$$

suma zaś błędów pozornych zdąża do zera, t. j. $[v] = 0$.

według zaś równ. 6 błąd pojedynczego spostrzeżenia:

$$\pm m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n}} \dots 15$$

Zadaniem naszym jednak jest określić wartość błędu średniej arytmetycznej.

Jeżeli każdemu z danych spostrzeżeń $l_1 \ l_2 \ l_3 \ \dots$ przypisujemy taki sam błąd m, to do obliczenia błędu średniej aryt. L — wyrażonej równ. 14 — zastosujemy wzór 12, mianowicie: równanie 14 napiszemy w formie

$$L = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \frac{1}{n} l_3 + \dots + \frac{1}{n} l_n \dots 16$$

mamy zatem analogiczne wyrażenie jak w równ. 11a, gdzie za x x' x'' wstawimy $l_1 \ l_2 \ l_3 \ \dots$ zaś zamiast a a' a'' — wstawimy $\frac{1}{n}$, błędy zaś m' m'' i t. d. w równ. 12 — są w danym wypadku równe t. j. m.

Stosując więc równ. 12 otrzymamy:

$$M = \sqrt{(a m)^2 + (a' m')^2 + (a'' m'')^2 + \dots} \quad 17$$

czyli gdy $m = m' = m'' \dots$ to $M = m \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots}$. 18

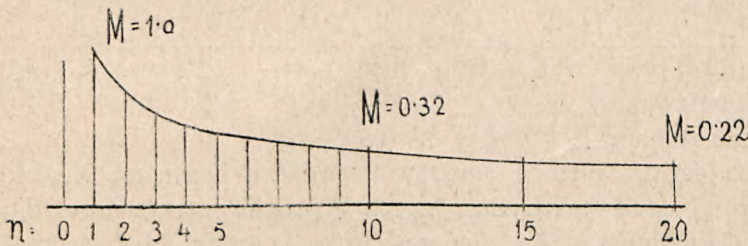
$$a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots = n \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} \quad 19$$

wstawmy za sumę $a^2 + a'^2 + \dots$ w równ. 18 — wartość z równ. 19

$$\text{to } M = m \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} = \pm \frac{m}{\sqrt{n}} \quad 20$$

t. z. średni błąd średniej arytmetycznej jest równy ilorazowi z średniego błędów pojedynczego spostrzeżenia przez pierwiastek z ilości spostrzeżeń.

Równ. 20 przedstawiono na rys. 23.



Rys. 23.

Na osi poziomej przyjęto wartości $n = 1, 2, 3 \dots$ na rzędnych zaś wartości wynikające z równ. 20. W ten sposób narysowana krzywa wskazuje zależność M od ilości pomiarów, t. j. n . Jeżeli dla $n = 1$ $M = 1$, to dla $n = 10$, $M = 0.32$, czyli M spada do 32% — po dalszych 10 spostrzeżeniach, t. j. dla $n = 20$ — wartość M spada tylko o 10% czyli tylko do 22% w porównaniu z poprzednią, dla $n = 10$. Wynika stąd, że wartość M spada, lecz nie w prostym stosunku do ilości n . Najszybciej spada do $n = 5$ — a nawet możnaby przyjąć $n = 10$ jako granicę wyraźnego, szybkiego spadania wartości M — dalej zaś zmniejsza się już bardzo powoli. Na tej podstawie możemy wnioskować, że celem obliczenia średniej arytm. i średniego jej błędów, wystarczy 5, najwyżej 10 spostrzeżeń, że dalsze nie przyczynią się wybitnie do powiększenia dokładności i zmniejszenia M . Naturalnie, mowa tu jest o spostrzeżeniach z jednakową starannością i uwagą wykonywanych. Gdy z drugiej strony, koszta pomiarów pozostają w prostym stosunku do czasu, zatem i do n , to widocznem jest, że zbyt wielka ilość spostrzeżeń nie jest wskazana.

Dotychczas mieliśmy do czynienia z wartością L t. j. średnią arytmetyczną jako najprawdopodobniejszą, zamiast wartości X której nigdy znać nie będziemy, jakoteż z błędami pozornymi $v \dots$ zamiast nieznanymi błędów prawdziwych ϵ . Starajmy się dojść, jeżeli nie do prawdziwych wartości, to przynajmniej do jaknajwiększych ich przybliżeń.

W tym celu napiszemy:

$$\epsilon = X - l, v = L - l \text{ czyli } l = L - v \text{ zatem}$$

$$\epsilon = v + (X - L) \dots \dots \dots 21$$

dla szeregu spostrzeżeń otrzymamy na podstawie równ. 21:

$$\epsilon_1^2 = v_1^2 + (X - L)^2 + 2 v_1 (X - L)$$

$$\epsilon_2^2 = v_2^2 + (X - L)^2 + 2 v_2 (X - L)$$

.

.

.

$$\epsilon_n^2 = v_n^2 + (X - L)^2 + 2 v_n (X - L)$$

$$[\epsilon^2] = [v^2] + n(X - L)^2 + 2(v_1 + v_2 + \dots + v_n)(X - L) \dots 22$$

$$\text{Ponieważ } (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = [v] = 0$$

przeto pozostaje $[\epsilon^2] = [v^2] + n(X - L)^2 \dots \dots \dots 23$

$(X - L)$ jest to różnica między prawdziwą wartością X , której nie znamy, i średnią arytm. L . Za tę różnicę wstawimy tu wartość możliwie najlepszą, jaką mieć możemy, t. j. średni błąd średniej arytm.

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = (X - L) \text{ wówczas z rów. 23:}$$

$$[\epsilon^2] = [v^2] + n \cdot \frac{m^2}{n} = [v^2] + m^2 \dots \dots \dots 24$$

a ponieważ według równ. 6. $m^2 = \frac{[\epsilon^2]}{n}$ zatem analogicznie

$$m^2 \cdot n = [\epsilon^2] \text{ a więc } m^2 n = [v^2] + m^2 \text{ czyli}$$

$$m^2 (n - 1) = [v^2] \text{ i } m^2 = \frac{[v^2]}{n - 1} \text{ ostatecznie}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n - 1}} \dots \dots \dots 25$$

jako wzór na średni błąd pojedynczego spostrzeżenia w miejsce poprzedniego (r. 6) jako przybliżonego. Wzór 25 odpowiada lepiej rzeczywistości niż 6. gdy $n = 1$ to logika powiada, że jedno spostrzeżenie jest niepewne, niema bowiem żadnej kontroli. Z równ. 6

$$\text{otrzymamy } m = \sqrt{\frac{[v]}{1}} \text{ a że } v = l_1 - l_1 = 0 \text{ więc } m = \sqrt{\frac{0}{1}} = 0.$$

czyli, że spostrzeżenie nie miałyby żadnego błędu, co jest nieprawdą, natomiast z równ. 25, dla $v = 0$ i $n = 1$ wypada $m = \sqrt{\frac{0}{0}} = \frac{0}{0}$ symbol niepewności. Wzór 25 daje wogóle większe wartości niż 6, co jest widocznym już z mianownika, mniejszego w r. 25 niż w 6. Wstawmy teraz za m wartość z równ. 25 w równ. 20.

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad \text{to} \quad M = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \quad \dots \quad 26$$

Przykład. Dla danych 5 spostrzeżeń, obliczyć m i M .

1.	l ₁ = 35° 26' 16"	v ₁ = + 2·8"	v ₁ ² = 7·84
2.	l ₂ = 20	v ₂ = — 1·2	v ₂ ² = 1·44
3.	l ₃ = 18	v ₃ = + 0·8	v ₃ ² = 0·64
4.	l ₄ = 25	v ₄ = — 6·2	v ₄ ² = 38·44
5.	l ₅ = 15	v ₅ = + 3·8	v ₅ ² = 14·44
Suma		94	[v] = 0·0
			[v ²] = 62·80

$$\text{Średnia arytm. } L = 35^{\circ} 26' 18\cdot8''$$

Średni błąd pojedynczego spostrzeżenia

$$\pm m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{62\cdot80}{4}} = \pm 3\cdot96$$

Średni błąd średniej arytmetycznej

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \frac{3\cdot96}{\sqrt{5}} = \pm 1\cdot77''$$

to znaczy poprzestając na któremkolwiek, ale tylko jednym spostrzeżeniu, spodziewamy się błędu $\pm 3\cdot96''$.

Gdy jednak obliczymy średnią arytmetyczną i ją przyjmiemy w miejsce pojedynczego spostrzeżenia, to spodziewamy się mniejszego błędu: $\pm 1\cdot77''$.

W tem miejscu należy zwrócić uwagę na spostrzeżenie 4-te, dla którego $v_4 = -6\cdot2''$ a które uwidacznia bardzo wyraźnie $v_4^2 = 38\cdot44$ w szeregu v^2 — wyróżniając je bardzo wyraźnie od innych. Takie spostrzeżenie należałoby odrzucić jako mniej dokładnie od innych wykonane.

Odrzucając je otrzymamy:

1.	35° 26' 16"	v ₁ = + 1·25"	v ₁ ² = 1·5625
2.	20	v ₂ = — 2·75"	v ₂ ² = 7·5625
3.	18	v ₃ = — 0·75"	v ₃ ² = 0·5625
(5) 4.	15	v ₄ = + 1·25"	v ₄ ² = 5·0625
[l] = 69		[v] = 0·00	[v ²] = 14·7500

$$L = \frac{[l]}{4} = 35^{\circ} 26' 17.25''$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{14.75}{3}} = \pm 2.22'' \quad M = \frac{m}{\sqrt{n}} = 1.2''$$

W pierwszym wypadku prawdopodobna wartość wynosi

$$L = 35^{\circ} 26' 18.8'' \pm 1.8'' \text{ (zaokrąglone), w drugim}$$

$$L = 35^{\circ} 26' 17.25'' \pm 1.2'' \text{ — różnica} = 1.55'' \pm 0.6''$$

Na tym przykładzie sprawdza się to, cośmy poprzednio już mówili, że na prawdopodobną wartość pomiaru, mieć możemy więcej różnych wartości, zależnie od ilości spostrzeżeń, lecz gdy różnice ich mieszczą się w granicach błędów dozwolonych, to zarówno są dobre.

POMIAR PARAMI.

§ 6. Zwykle pomiar długości powtarzamy dwa razy, raz od punktu początkowego do końcowego, drugi raz odwrotnie. Otrzymamy tedy dwa spostrzeżenia l_1 l_2 z których obliczymy średnią arytmetyczną

$$L = \frac{l_1 + l_2}{2} \dots \dots \dots 27$$

stąd błędy pozorne $v_1 = L - l_1$ i $v_2 = L - l_2 \dots \dots \dots 28$

Nazwijmy różnicę obu pomiarów przez d to

$$l_2 - l_1 = d \text{ czyli } l_2 = l_1 + d \text{ stąd}$$

$$L = \frac{l_1 + l_2}{2} = \frac{2 l_1 + d}{2} = l_1 + \frac{d}{2} \dots \dots \dots 29$$

następnie $v_1 = L - l_1 = l_1 + \frac{d}{2} - l_1 = + \frac{d}{2}$ i $v_1^2 = \frac{d^2}{4}$

$$v_2 = L - l_2 = l_1 + \frac{d}{2} - l_1 - d = - \frac{d}{2} \text{ i } v_2^2 = \frac{d^2}{4}$$

$$[v] = 0 \quad [v^2] = \frac{d^2}{2} \quad 30$$

stąd $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \pm \frac{d}{\sqrt{2}} = \pm 0.71 d \dots \dots \dots 31$

wreszcie $M = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{2}} = \sqrt{\frac{d^2}{4}} = \pm \frac{d}{2} = \pm 0.5 d \quad 32$

t. zn. średni błąd średniej arytmetycznej dwu pomiarów równy jest połowie różnicy obu pomiarów.

Daną długość mierzymy więc dwa razy łątami lub taśmą stalową. Średnią aryt. obu pomiarów przyjmujemy jako najprawdopodobniejszą wartość wtedy, gdy połowa różnicy obu pomiarów, jako

średni błąd średniej arytm. nie przekracza dozwolonej granicy dozwolonego błędu.

Co do dozwolonych granic błędu, to w każdym państwie istnieją odpowiednie przepisy. Tak n. p. austriacka instrukcja z r. 1904 odnosząca się do pomiarów długości przy zdjęciach wielobokowych powiada:

1. Pomiar długości boków wieloboku ma być wykonywany w terenie płaskim, taśmą stalową 20 m długą, 20 mm szer.; w terenie pochyłym, trzema łaćmi po 5 m dług.

2. Tam, gdzie warunki tego wymagają, zwłaszcza przy pomiarach głównych wieloboków i pomiarach łaćmi, należy celem dokładnego układania łać lub taśm, wyciągnąć sznur w danym kierunku.

3. Używane do pomiarów przyrządy, należy sprawdzić zapomocą porównania z miarą normalną i sprawdzanie to od czasu do czasu powtarzać.

4. Pomiar długości powtarzać należy dwa razy, raz w jednym kierunku, drugi raz w przeciwnym, przyczem odczytuje się tylko całe centymetry.

5. Wyniki obydwu pomiarów nie powinny przekraczać dozwolonej granicy — w przeciwnym razie, należy pomiar powtórzyć.

6. Przy obliczaniu średniej arytm. należy milimetry poniżej pięciu opuścić, powyżej zaś, zaokrąglić na całe cm.

7. Wyniki należy wpisywać do protokołu, w polu, atramentem. W uwagach należy zaznaczyć wszelkie okoliczności, mogące wpływać na pomiar, jakoteż wyniki i daty sprawdzania przyrządów.

WZÓR PROTOKOŁU POMIARU DŁUGOŚCI: BOKÓW WIELOBOKU.

N. wiel.	Bok		Ilość		Reszta metrów	Długość boku w metrach	Średnia	Uwaga
	od punktu N.	do N.	łać	taśm stal.				
1	2	3	4	5	6	7	8	
1	△ 35	65		8	2·42	162·42		Taśma 20 m Sprawdzona d. jako dobra.
				8	2·64	162·64	162·53	
	65	66		6	19·92	139·92		
				6	19·72	139·72	139·82	
	66	67		7	12·05	152·05		
				7	12·21	152·21	152·13	
	67	68		6	18·16	138·16		
				6	18·31	138·31	138·23	
	68	69		6	10·40	130·40		
				6	10·47	130·47	130·44	
	69	70		6	15·39	135·39		
				6	15·26	135·26	135·33	

Wymieniona instrukcja pozwala na 3 rodzaje różnic przy podwójnym pomiarze, mianowicie:

1. W terenie płaskim, wygodnym do pomiarów

$$\Delta s = 0.00011 s + 0.004 \sqrt{s} + 0.011$$

2. W terenie średnio trudnym

$$\Delta s = 0.00015 s + 0.005 \sqrt{s} + 0.015$$

3. W terenie trudnym

$$\Delta s = 0.00019 s + 0.006 \sqrt{s} + 0.019$$

W instrukcji jest mowa o dozwolonej różnicy Δs obu pomiarach, nie zaś o średnim błędzie średniej arytm., którym jest połowa różnicy.

O WADZE SPOSTRZEŻEŃ.

§ 7. Średnia arytm. L mająca błąd M powstaje z szeregu pojedynczych spostrzeżeń l_1, l_2, \dots, l_n z których każda ma średni błąd m . Tę średnią arytm. możemy uważać za nowe, idealne spostrzeżenie, tem dokładniejsze, im mniejszy będzie jego błąd M , który znów zależy od

błędu m i od ilości n co wynika z równania $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$ czyli:

$$M^2 = \frac{m^2}{n} \text{ lub } \frac{m^2}{M^2} = n \dots \dots \dots 33$$

Stosunek m^2 do M^2 określa ilość n podająca, ile trzeba złożyć spostrzeżeń pojedynczych, ażeby otrzymać było można średnią, o dokładności określonej przez M . Średnia arytm. zatem, traktowana jako nowe spostrzeżenie, jest ważniejszą od pojedynczych pomiarów i to tembardziej, im większe jest n które też z tego powodu nazywamy wagą tej średniej, przyjąwszy, że pojedyncze spostrzeżenie ma wagę = 1. W poprzednich paragrafach mówiliśmy o szeregach spostrzeżeń, z jednakową dokładnością wykonanych. Tworzenie z nich pojedynczej średniej arytm. jako najprawdopodobniejszej wartości było zatem zupełnie usprawiedliwione. Inaczej rzecz się mieć będzie, gdy różnym pojedynczym pomiarom nie będziemy mogli przypisać jednakowej dokładności.

Wiemy, że ta sama wielkość, może mieć wiele, mało się różniących wprawdzie, ale mimo to różnych, wartości. Gdy n . p. pomierzemy pewną długość n razy i obliczymy średnią arytm. L — oraz jej błąd M , następnie pomierzemy ją n_1, n_2 i t. d. razy, to średnie L_1, L_2, \dots mieć będą błędy M_1, M_2, \dots . L, L_1, L_2, \dots będą prawdopodobnymi wartościami, bo ich błędy mieszczą się w dozwolonych granicach, ale w ogólności będą się między sobą różniły. To średnie

dnie L, L_1, L_2, \dots uważać możemy za pojed. spostrzeżenia, przypisując jednemu większą dokładność, co ocenić możemy z wartości M która znów zależną jest od n — wreszcie poszczególne błędy porozne v_1, v_2 o ile w jednym wypadku nie wiele się między sobą różnią, w drugim zaś znaczne różnice wykazują, dają nam wskazówki do oceny dokładności. Jeżeli jednak pomiary robione są z możliwą jednakową starannością, to M zależy głównie od n . Im większe będzie n tem dokładniejszą otrzymamy wartość na L , czyli tem większą wagę będzie miało dane L . To samo odnosi się do pojedynczych pomiarów, którym z różnych względów przypisać wypadnie różne wagi.

Przypuśćmy, że dane są spostrzeżenia równowartościowe l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 . Utwórzmy z nich zwykłą średnią arytm.

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5}{5} \dots \dots \dots 34$$

Rozdzielmy ten szereg spostrzeżeń na dwie grupy z dwóch i z trzech pomiarów złożone i utwórzmy dwie średnie:

$$l_1 = \frac{l_1 + l_2}{2} \text{ i } l_2 = \frac{l_3 + l_4 + l_5}{3} \dots \dots \dots 35$$

stad $2 l_1 = l_1 + l_2$ i $3 l_2 = l_3 + l_4 + l_5$ mamy tu dwa spostrzeżenia l_1 i trzy spostrzeżenia l_2 — z których średnia arytm.:

$$x = \frac{2 l_1 + 3 l_2}{2 + 3} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5}{5} \dots \dots \dots 36$$

traktując każdą grupę jako pojedyncze spostrzeżenie, powiemy, że współczynniki 2 i 3 przy l_1 i l_2 są wagami tych spostrzeżeń. W rzeczywistości tak jest, bo jeżeli wszystkie spostrzeżenia uważać musimy jako równowartościowe, bo były z jednakowym nakładem pracy i uwagi wykonane, a więc mimo różnic jakie są między niemi, nie mamy najmniejszej podstawy do uważania jednego za więcej, drugiego za mniej dokładne, to już grupy l_1 i l_2 nie są równowartościowe — l_1 będzie mniej dokładne, bo składa się tylko z dwóch pomiarów ($n = 2$), l_2 zaś więcej dokładne, bo $n = 3$. Dlatego 2 i 3 charakteryzują ich dokładności, stają się wagami spostrzeżeń l_1 i l_2 .

Na podstawie powyższego rozważania i analogicznie do równ. 36, nazywając ogólnie wagi poszczególnych spostrzeżeń przez p_1, p_2, p_3, \dots napiszemy:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots} = \frac{[pl]}{[p]} \dots \dots \dots 37$$

przyczem już l_1, l_2, l_3, \dots są pojedynczemi spostrzeżeniami o różnych wagach. Wartość równ. 37 wcale się nie zmieni, gdy wagi p_1, p_2, \dots

w liczniku i mianowniku przez ten sam współczynnik pomnożymy. Stąd wynika dalej, że zamiast wag $p_1 p_2 p_3 \dots$ wstawić możemy liczby do nich proporcjonalne.

Przyjmijmy dwa szeregi spostrzeżeń równowartościowych, w których zatem średni błąd pojed. spostrzeżeń jest takiż sam $= m$ — to średnie arytm. z tych szeregów utworzone, mieć będą średnie błędy M i M' w wartościach swych zależne od n i n' t. j.

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad \text{i} \quad M' = \frac{m}{\sqrt{n'}} \quad \text{ponieważ } n \text{ i } n' \text{ mają w tym wypadku}$$

charakter wag tych spostrzeżeń, uważanych jako pojedyncze, więc

$$M = \frac{m}{\sqrt{p}} \quad \text{i} \quad M' = \frac{m}{\sqrt{p'}} \quad \text{gdzie } p \text{ i } p' \text{ są wagami} \dots \dots \dots 37a$$

$$\text{stąd } \frac{M^2}{M'^2} = \frac{p'}{p} \quad \text{lub} \quad \frac{M}{M'} = \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}} \quad \dots \dots \dots 38$$

zatem wagi pozostają do siebie w odwrotnym stosunku niż kwadraty średnich błędów lub średnie błędy dwóch spostrzeżeń są odwrotnie proporcjonalne do pierwiastków ich wag.

W jaki sposób wagi dadzą się wyrazić w pewnych cyfrach i zastosować do obliczeń, nie da się ogólnie powiedzieć. W praktyce zachodzą jednak różne wypadki. Niwelując n. p. od punktu A do B — po pewnej drodze, otrzymamy wysokość punktu B. Gdy, celem kontroli, niwelujemy między obu tymi punktami, ale po innej dłuższej drodze, czyli więcej mieć będziemy sposobności do omyłek, to powiemy, że pierwszy pomiar ma większą wagę niż drugi. Mierząc kąty, możemy mieć ramiona jednego kąta długie, tak że trudno jest nitkę pionową dokładnie nastawić na sygnał, bo go zakrywa — drugi zaś kąt przeciwnie, można lepiej pomierzyć. W takim razie, wyrównując pomiar kątów, pierwszemu przypiszemy mniejszą wagę. Sposób uwzględnienia wag widzieć jeszcze będziemy w dalszym ciągu.

Pojęcie wagi, jest pokrewne pojęciu dokładności pomiaru. Im średni błąd M jest mniejszy, tem dokładniejszy jest pomiar. Lecz gdy wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów średnich błędów, to dokładność jest odwrotnie proporcjonalna do pierwszej potęgi średnich błędów.

Przyjmijmy szereg pomiarów $l_1 \ l_2 \ l_3 \ \dots \ l_n$
z wagami $p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_n$

stąd średnia arytm. według równ. 37:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 \dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{[p l]}{[p]} \quad \dots \dots \dots 39$$

Utwórzmy teraz błędy pozorne:

$$\begin{array}{llll} v_1 = x - l_1 & \text{z wagą} & p_1 & \\ v_2 = x - l_2 & \text{" " } & p_2 & \\ v_3 = x - l_3 & \text{" " } & p_3 & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ v_n = x - l_n & \text{" " } & p_n & \end{array} \quad \dots \dots \dots 40$$

jako kontrola służy warunek: $[v] = 0$ i $[pv] = 0 \dots \dots \dots 41$

Wprowadzając do rachunku wagi i przypisując je pojedynczym spostrzeżeniom, nie możemy już tych spostrzeżeń uważać za równowartościowe, t. j. jednakowo dokładne, mające wspólny średni błąd m , jak dotychczas, lecz uważać je niejako za średnie arytm. i przyjąć odpowiednią do tego formę średniego błędu, zastępując n przez p , na podstawie dotychczasowych wywodów. Zatem dla szeregu spostrzeżeń $l_1 l_2 \dots$ o wagach $p_1 p_2$ i t. d. otrzymany średnie błędy:

$$M_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}} \quad M_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}} \quad \dots \quad M_n = \frac{m}{\sqrt{p_n}} \quad \dots \dots \dots 42$$

teraz więc każde z tych spostrzeżeń mieć będzie inny średni błąd. — Tylko spostrzeżenie, mające wagę $p = 1$ a takie pomyśleć możemy, będzie miało błąd $M = m$.

Równ. 39 napisać możemy w formie:

$$X = \frac{p_1}{[p]} l_1 + \frac{p_2}{[p]} l_2 + \frac{p_3}{[p]} l_3 + \dots + \frac{p_n}{[p]} l_n \quad \dots \dots 43$$

Równ. 43 odpowiada zupełnie formie równania 11a

$$\text{t. j. } X = ax + a'x' + a''x'' + \dots \dots$$

w którym $a = \frac{p_1}{[p]}$ — i t. d. zaś $x = l_1$ $x' = l_2$ i t. d.

Zatem średni błąd obliczymy według równ. 12:

$$\text{t. j. według: } M = \pm \sqrt{(am)^2 + (a'm')^2 + \dots \dots}$$

podstawiając w niem wartości z równ. 42 —

$$\text{t. j. } M_1 \quad M_2 \quad M_3 \dots \text{ za } m \quad m' \dots \left(M = \frac{m}{\sqrt{p}} \right) -$$

oraz za $a = \frac{p_1}{[p]}$, $a' = \frac{p_2}{[p]}$ i t. d. wówczas dostaniemy

$$M^2 = \left(\frac{p_1}{[p]} \cdot \frac{m}{\sqrt{p_1}} \right)^2 + \left(\frac{p_2}{[p]} \cdot \frac{m}{\sqrt{p_2}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{p_n}{[p]} \cdot \frac{m}{\sqrt{p_n}} \right)^2 \quad \dots \dots 44$$

$$\text{czyli } M^2 = \left(\frac{m}{[p]} \right)^2 (p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n)^2 \quad \dots \dots 45$$

$$\text{a więc po uproszczeniu } M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} \quad \dots \dots \dots 46$$

t. z. średni błąd średniej wartości pomiaru równy jest średniemu błędowi pojedynczych spostrzeżeń (m) obliczonemu na podstawie zwykłej średniej arytmetycznej, podzielonemu przez drugi pierwiastek sumy wag.

Dążymy teraz do ustalenia wzoru na obliczenie średniego błędu dla pojedynczych spostrzeżeń, mających różne wagi. Ponieważ wraz ze spostrzeżeniami i ich błędy pozorne mają różne wagi, a więc są różnowartościowe, zatem zwykła średnia arytm. nie może być już wyrazem najprawdopodobniejszej wartości, ani też spostrzeżenia o różnych wagach, nie mogą być z nią porównywane, przeto musimy przede wszystkim błędy pozorne zredukować do jednostki wagi, t. j. do $p = 1$. a to na podstawie równ. 38,

$$\frac{M}{M_1} = \frac{V_{p_1}}{V_p} \text{ wprowadzając za } M \text{ i } M_1 \dots v \text{ i } v_1$$

i przyjmując $p = 1$. otrzymamy wtedy $\frac{v}{v_1} = \frac{V_{p_1}}{1}$ a stąd

$$v = v_1 V_{p_1} \dots \dots \dots 47$$

jako wzór na redukcję błędu pozornego do wagi = 1.

Niech będą dane:

wagi p_1	błędy poz. v_1	wagi 1	błędy zreduk. v_1	V_{p_1}	47a
p_2	v_2	1	v_2	V_{p_2}	
p_3	v_3	1	v_3	V_{p_3}	
.	
.	

Mając błędy pozorne zredukowane do wagi = 1 — możemy już dla nich, jako różnowartościowych, zastosować poprzednie wzory

zatem $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$ (równ. 25 wstawiając za v — błędy zredu-

rowane, więc $m^2 = \frac{(v_1 V_{p_1})^2 + (v_2 V_{p_2})^2 + \dots + [p v^2]}{n-1}$

$$\text{t. j. } m = \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-1}} \dots \dots \dots 48$$

jako wzór na obliczenie średniego błędu pojed. spostrzeżeń o różnych wagach, ale sprowadzonych do tej samej dokładności t. j. wagi.

Wstawmy w równ. 46 t. j. $M = \frac{m}{\sqrt{[p]}}$ wartość m z równ. 48

to otrzymamy $M = \sqrt{\frac{[pv^2]}{[p][n-1]}}$ 49

jako wzór na obliczenie średniego błędu najprawdopodobniejszej wartości, obliczonej według równ. 37 — n oznacza tu ilość spostrzeżeń.

W powyższych wywodach doszliśmy do następujących rezultatów:

równ. 1. najprawdopodobniejsza wartość szeregu spostrzeżeń jednakowo dokładnie wykonanych X albo L t. j. średnia arytm.

$$X = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n} \text{ gdzie } n \text{ jest ilością spostrz.} \dots 1$$

równ. 2. błędy pozorne $v_1 = x - l_1$
 $v_2 = x - l_2$

$$\text{warunek } [v] = 0$$

równ. 6. średni błąd pojedynczego spostrzeżenia, m — dla całego szeregu spostrzeżeń o jednakowej dokładności

$$m = \pm \sqrt{\frac{[e^2]}{n}} \text{ albo } = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n}} \dots 6$$

ale tylko jako przybliżona wartość tegoż błędu.

równ. 7. średni błąd wielokrotności „ a ” danego spostrzeżenia mającego błąd $\pm m$. $M = \pm a \cdot m$ 7

równ. 8. średni błąd sumy spostrzeżeń o błędach m m'

$$M = \pm \sqrt{m^2 + m'^2 + m''^2 + \dots} \dots 8$$

równ. 9. średni błąd różnicy

$$M = \pm \sqrt{m^2 + m'^2} \dots 9$$

równ. 12. średni błąd sumy wielokrotności

$$M = \pm \sqrt{(am)^2 + (a'm')^2 + \dots} \dots 12$$

równ. 13. współdziałanie błędów regularnych z nieregularnymi

$$M = \pm \sqrt{A^2 n^2 + B^2 n} \dots 13$$

równ. 25. średni błąd pojedynczego spostrzeżenia

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \dots 25$$

jako dokładna wartość —

równ. 26. średni błąd średniej arytmetycznej szeregu jednakowo dokładnych spostrzeżeń

$$M = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \dots 26$$

równ. 31. średni błąd pojed. spostrzeżenia pomiaru podwójnego (parami)

$$m = \pm 0.71 d \quad \text{gdzie } d = \text{różnicy obu pomiarów} \quad . . . \quad 31$$

równ. 32. średni błąd średniej arytm. obu pomiarów

$$M = \pm 0.5 d \quad \quad 32$$

równ. 37. średnia arytm. szeregu spostrzeżeń o wagach $p_1 p_2 \dots$

$$x = \frac{[pl]}{[p]} \quad \quad 37$$

równ. 38. stosunek wag do średnich błędów

$$\frac{M}{M'} = \frac{V_{p'}}{V_p} \quad \quad 38$$

równ. 48. średni błąd pojedynczego spostrzeżenia o różnych wagach

$$m = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \quad \quad 48$$

równ. 47a wzór na redukcję błędu v do wagi $p = 1$

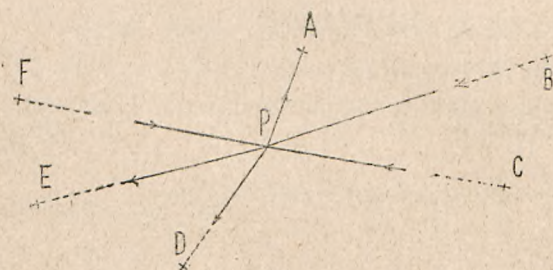
$$v = v_1 \sqrt{p_1} \quad \quad 47a$$

równ. 49. śr. błąd średniej arytm. (r. 37) z uwzględnieniem wag

$$M = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{[p](n-1)}} \quad \quad 49$$

PRZYKŁADY.

§ 8. 1. Jako przykład wyrównania błędów pomiarów, podajemy tu pomiar wysokości metodą trygonometryczną — z zastosowaniem wag do wyrównania, według Jordana.



Rys. 24.

Dane są wysokości punktów A B C D E F pomierzono zaś trygonometrycznie wysokość punktu P rys. 24.

W następującej tabeli zestawiono odległości punktów i dane wysokości. W trzeciej rubryce podano pomierzone róż-

nice wysokości na liniach podanych w I. rubryce, w ostatniej zaś obliczoną wysokość punktu P. Jak widzimy, powstały tam różnice skutkiem błędów pomiarów, zadaniem zaś naszym jest, błędy wyrównać.

Odległości metrów	Dane wysokości w metrach	Pomierzone różnice wysokości w metrach	Obliczona wysokość P w m.
A—P = 2010	A = 1043·64	$h_1 = - 314·73$	728·91
B—P = 8903	B = 610·02	$h_2 = + 109·20$	728·22
C—P = 5820	C = 480·81	$h_3 = + 248·24$	729·05
D—P = 3002	D = 1247·01	$h_4 = - 518·48$	728·58
E—P = 6197	E = 928·18	$h_5 = - 199·16$	729·02
F—P = 5800	F = 418·71	$h_6 = + 310·13$	728·84

Pomiary nie były wykonane w równych warunkach, bo jak z zestawienia widać, odległości, które przy tego rodzaju pomiarach mają znaczny wpływ są bardzo różne. Zwykłej średniej arytm. nie możemy więc przyjąć jako prawdopodobną wartość spostrzeżeń w różnych warunkach i z różną dokładnością wykonanych.

Z teorii trygonometrycznych pomiarów wysokości, należy przyjąć, że popełnione błędy są w przybliżeniu proporcjonalne do odległości s, zatem, na podstawie teorii błędów, wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów błędów. Ponieważ zaś za wagi podstawić można ilości proporcjonalne, więc przyjmujemy, że wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów odległości t. j. $p = \frac{1}{s^2}$. Odległość wyrazimy tu w km zaokrąglając je, co nie zrobi ujemny rachunkowi.

Obliczone wysok. P do wyrównania	s km	$p = \frac{1}{s^2}$	p l	$\frac{x}{[p]}$	$\frac{v-x-1}{0·83-1}$	p v	p v ²
728 + 0·91	2·0	0·25	0·2275		- 0·08	- 0·0200	0·0016
+ 0·22	8·9	0·01	0·0022		+ 0·61	+ 0·0061	0·0037
+ 1·05	5·8	0·03	0·0315		- 0·22	- 0·0066	0·0015
+ 0·58	3·0	0·11	0·0630		+ 0·25	+ 0·0275	0·0070
+ 1·02	6·2	0·03	0·0306		- 0·15	- 0·0057	0·0011
+ 0·84	5·8	0·03	0·0252		- 0·01	- 0·0003	0·0000
Suma		0·46	0·3808	0·83		+ 0·0336 - 0·0326	0·0149

Na podstawie obliczonej tabeli otrzymamy :
 średni błąd pojedynczego spostrzeżenia

$$m = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.0149}{5}} = \pm 0.055 \text{ m}$$

i średni błąd najprawdopodobniejszej wartości X

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{0.055}{\sqrt{0.46}} = \pm 0.080$$

$$\text{Wkońcu } H = 728 + X = 728.83 \pm 0.080$$

2. Wyrównanie pomiaru kątów w trójkącie płaskim.

Z powodu błędów pomiarów, suma pomierzonych kątów w trójkącie, będzie się wogóle różniła od 180°

$$\text{t. j. } \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ = w \dots \dots \dots 50$$

Najprostszym sposobem, byłoby rozdzielić różnicę „w” na wszystkie

trzy kąty równomiernie. Do tego samego rezultatu dojdziemy też na podstawie rozważania. Uważajmy na razie tylko jeden kąt jako niewiadomy. Dla pierwszego kąta α mamy zatem dwa spostrzeżenia niezależne:



Rys. 25.

$$x_1 = \alpha \text{ z wagą } p_1 = 1 \dots \dots \dots 51$$

$$\text{i drugie } x_2 = 180 - (\beta + \gamma) \text{ z wagą } p_2 = \frac{1}{2} \dots \dots 52$$

Waga $p_2 = \frac{1}{2}$ na nast. podstawie: średni błąd dla $x_1 = m_1 = \pm m$

zaś średni błąd dla x_2 złożonego z dwu pomiarów będzie

$$m_2 = \pm m \pm m = m \sqrt{2} \text{ na mocy równ. 11}$$

zatem $m_1 : m_2 = 1 : \sqrt{2}$ więc

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} = 1 : \frac{1}{2}$$

określwszy wagi, obliczymy średnią z x_1 i x_2 z wzoru

$$x = \frac{[pl]}{[p]} \text{ t. j. } x = \frac{1 \cdot \alpha + \frac{1}{2} [180 - (\beta + \gamma)]}{1 + \frac{1}{2}} \dots \dots \dots 53$$

Ponieważ $\alpha + \beta + \gamma - 180 = w$ więc $180 - (\beta + \gamma) = \alpha - w$,
 wstawmy to w równ. 53 — to

$$x = \frac{\alpha + \frac{1}{2} (\alpha - w)}{1 + \frac{1}{2}} \text{ czyli}$$

$$x = \frac{2\alpha + (\alpha - w)}{2 + 1} = \frac{3\alpha - w}{3} = \alpha - \frac{w}{3} \dots \dots \dots 54$$

To samo stosuje się i do dwóch pozostałych kątów w trójkącie, które po wyrównaniu nazwiemy przez y i z — to:

$$x = \alpha - \frac{w}{3}$$

$$y = \beta - \frac{w}{3}$$

$$z = \gamma - \frac{w}{3}$$

Suma $x + y + z = \alpha + \beta + \gamma - w$ 55

Różnicę w dzielimy zatem równomiernie na wszystkie 3 kąty w trójkącie celem wyrównania błędów pomiaru.

Obliczmy teraz średnie błędy pomiarów:

Dla spostrzeżeń (równ. 51 i 52)

$$x_1 = \alpha \quad \text{z wagą } p = 1$$

$$\text{i } x_2 = 180 - (\gamma + \beta) \quad \text{z wagą } p_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{mamy: dla } x_1 \text{ poprawkę } v_1 = \frac{w}{3}$$

$$\text{a dla } x_2 \quad \text{„} \quad v_2 = \frac{w}{3} + \frac{w}{3} = \frac{2w}{3}$$

średni błąd pojedynczego spostrzeżenia o wadze 1 obliczy się według wzoru

$$m = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2}{2-1}} = \sqrt{\left(\frac{w}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2w}{3}\right)^2} = \pm \frac{w}{\sqrt{3}} \dots 56$$

$$\text{wstawiliśmy } p_1 = 1 \quad p_2 = \frac{1}{2}$$

równ. 56 przedstawia wartość średniego błędu kąta, ale przed wyrównaniem, albowiem jako równie dokładnym pomiarom, przypisaliśmy im wagę = 1. Po wyrównaniu błędów, otrzymaliśmy większą dokładność, zatem i waga tych nowych spostrzeżeń będzie większą, mianowicie równą sumie $p_1 + p_2 = \frac{3}{2}$

Stąd też średni błąd kątów x y i z (po wyrównaniu) będzie

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{w}{3} \sqrt{2} \dots \dots \dots 57$$

według równania 46.

3. Wyrównanie pomiaru długości wieloboku.

Dany jest wielobok, którego boki pomierzono po dwa razy. Warunki wykonania pomiarów wszędzie były jednakowe: teren równo dla wszystkich boków korzystny, boki prawie równe, czyli, że wszystkim pomiarom przypisać można równą dokładność (wagę).

Z podwójnego pomiaru każdej długości otrzymamy pewną różnicę „d“. Przez dodanie średnich wartości poszczególnych boków, otrzymamy łączną długość całego wieloboku. Zadaniem naszym jest obliczyć błąd sumy tych długości, zatem i różnicę D odnoszącą się do tej sumy.

Nazwijmy różnice obu pomiarów każdego boku, kolejno przez $d_1 \ d_2 \ d_3 \ \dots$ to, ponieważ różnica dwu pomiarów ma charakter błędu prawdziwego, przeto do obliczenia różnicy obu sum pomiarów boków wieloboku zastosujemy wzór:

$$D = \pm \sqrt{\frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \dots + \epsilon_n^2}{n}} \dots \dots \dots 58$$

t. j. $D^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots + d_n^2}{n}$ a stąd $D = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \dots \dots \dots 59$

gdzie n oznacza ilość „d“ czyli ilość boków.

Mając D obliczymy błąd jednego pomiaru całego wieloboku z równania:

$$m = \pm \frac{D}{\sqrt{2}} \text{ a po wstawieniu za D wartości 59:}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \dots \dots \dots 60$$

Podobnie średni błąd średniej arytm. $M = \pm \frac{d}{2}$ wstawiając D za d

zatem $M = \pm \frac{D}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \dots \dots \dots 61$

Przyjmijmy teraz, że różnice $d_1 \ d_2 \ d_3 \ \dots$ należą do podwójnych pomiarów czy to długości, czy wysokości, lecz nie są równoważnościowe — n. p. d_1 należy do pomiaru któremu trzeba przypisać wagę p_1 d_2 zaś ma wagę p_2 i t. d. to średnią różnicę D nie będziemy obliczali według wzoru 61, lecz analogicznie do równania 48 i 49 jednakże z mianownikiem „n“ dlatego, że różnice podwójnych pomiarów mają charakter błędów prawdziwych a nie pozornych

zatem $D^2 = \frac{p_1 d_1^2 + p_2 d_2^2 + \dots + p_n d_n^2}{n} \dots \dots \dots 62$

powtóre, mamy tu podwójne pomiary „n“ boków różnych a nie „n“ pomiarów jednego boku, czyli n niezależnych podwójnych różnych spostrzeżeń, różnicę zaś obliczamy dla sumy tych n boków. Wagi błędów zredukować należy do jednostki wagi według równ. 47a.

$$\text{z równ. 62} \dots D^2 = \frac{[pd^2]}{n} \text{ i } D = \sqrt{\frac{[pd^2]}{n}} \dots \dots \dots 63$$

Następnie, według równ. 31: $m = \pm \frac{d}{\sqrt{2}}$ — otrzymamy dla sumy boków średni błąd pojedynczego pomiaru, wstawiając „D” zamiast „d” — t. j.

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}} \dots \dots \dots 64$$

a wkońcu średni błąd średniej wartości obu pomiarów, zredukowanych do wagi = 1

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[pd^2]}{n}} \dots \dots \dots 65$$

Powyższe wzory mają częste zastosowanie w praktyce, bo nawet dokładne pomiary długości wieloboków wykonywamy podwójnie raz w jednym, drugi raz w drugim kierunku — to samo ma miejsce w niwelacji. Przyjmijmy, zgodnie z dotychczasowymi rozważaniami, że średnie błędy rosną proporcjonalnie do drugiego pierwiastka odległości „s” oraz, że wagi są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów średnich błędów to jest do $(V_s)^2$ czyli do „s” — natenczas, według równ. 63, 64 i 65 dostaniemy:

$D^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{s_1} d_1^2 + \frac{1}{s_2} d_2^2 + \dots + \frac{1}{s_n} d_n^2 \right)$ jako średnią wartość kwadratu różnicy D, a stąd średni błąd

$$m = \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{1}{s} d^2 \right]} \dots \dots \dots \text{dla } s = 1 \text{ t. j. dla jednostki} \dots \dots \dots 66$$

długości w jakiej s jest wyrażone: jeżeli s wyrażamy w metrach, to m jest błędem długości 1 m — jeżeli s w km to m odnosi się do błędu na długi 1 km.

Wkońcu średni błąd średniej całego pomiaru:

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{1}{s} d^2 \right]} \dots \dots \dots 67$$

także dla tej jednostki długi, w jakich wyrażone jest s.

Jako przykład przytoczymy poniżej pomiar Bessela. Mierzył on podstawę, podzieloną na dwie części —

1-szy pomiar	1. część: 441·1852 m	2. część	1381·1571 m
2-gi	441·1839 „	„	1381·1632 „
	różnica	$d_1 = +1·3 \text{ mm}$	$d_2 = -6·1 \text{ mm}$

Wyrażmy odległości w km, to: $s_1 = 0·441$, $s_2 = 1·381$ — $n = 2$.

Teraz obliczmy według równ. 66:

$$m^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1·3^2}{0·441} + \frac{6·1^2}{1·381} \right) = 7·70 \text{ czyli } m = \pm 2·78 \text{ mm na 1 km}$$

tudzież średni błąd średniej z sumy pomiarów

$$M = \frac{m}{V_2} = \frac{2.78}{V_2} = \pm 1.96 \text{ mm na 1 km.}$$

Średnia arytmetyczna całej długości, obliczona z pomiarów, wynosi $s_1 + s_2 = 1822.3447 \text{ m}$. Średni zaś błąd M' jej obliczymy według $M' = M \sqrt{s_1 + s_2} = 1.96 \sqrt{18.22} = \pm 2.65 \text{ mm}$, poprzednie bowiem błędy obliczone były na jednostkę długości.

Cała więc długość podstawy wynosi $1822.3447 \text{ m} \pm 0.027 \text{ m}$.

Drugi przykład.

Pomierzono dwa razy boki a, b, c i d wieloboku:

I. pomiar: a = 400.08 m b = 650.90 m c = 890.78 m d = 1250.40 m

II. „ 400.00 „ 650.80 „ 890.66 „ 1250.25 „

różnice $d_1 = 8 \text{ cm}$ $d_2 = 10 \text{ cm}$ $d_3 = 12 \text{ cm}$ $d_4 = 15 \text{ cm}$

okrągło $s_1 = 0.4 \text{ km}$ $s_2 = 0.65 \text{ km}$ $s_3 = 0.89 \text{ km}$ $s_4 = 1.25 \text{ km}$

$d_1^2 = 64$ $d_2^2 = 100$ $d_3^2 = 144$ $d_4^2 = 225$

$\frac{d_1^2}{s_1} = 160$ $\frac{d_2^2}{s_2} = 153.8$ $\frac{d_3^2}{s_3} = 161.8$ $\frac{d_4^2}{s_4} = 180$

$$\left[\frac{d^2}{s} \right] = 160 + 153.8 + 161.8 + 180 = 655.6$$

$$\sqrt{\left[\frac{d^2}{s} \right]} = 25.6 \quad n = 4 \text{ (ilość boków)}$$

według równ. 63 $D = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} = \pm 12.8 \text{ cm} \dots \left(p = \frac{1}{s} \right)$
t. j. dla całego wieloboku.

Z równ. 66: $m = \pm \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{1}{s} \cdot d^2 \right]} = \pm \frac{25.6}{\sqrt{8}} = \pm 9.04 \text{ cm na 1 km}$

oraz $M = \pm \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{1}{s} \cdot d^2 \right]} = \pm 6.04 \text{ cm na 1 km.}$

I. pomiar wieloboku $a + b + c + d = 3192.16 \text{ m}$ czyli 3.19216 km

II. „ „ „ „ $3192.71 \text{ „ „ } 3.19271 \text{ „}$

średnia arytm. $L = \frac{l_1 + l_2}{2} = 3191.935 \text{ m}$ z błędem $M = 6.4 \text{ cm}$.

na 1 km. Stąd błąd całej długości

$$M' = M \sqrt{[s]} = \pm 6.04 \sqrt{3.1918} = \pm 10.75 \text{ cm.}$$

Według instrukcji, byłby tu dozwolony błąd $\pm 77 \text{ cm}$.

Przykład:

Bessel podaje w swej publikacji „Pomiar kątów w Prusach Wschodnich“ 18 niezależnych od siebie pomiarów jednego kąta wraz z obliczeniem błędów, mianowicie:

Średnia arytmetyczna:

$$L = 83^{\circ} 30' 34.87''$$

Średni błąd pojedynczego pomiaru

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{46.97}{17}} = \pm 1.66$$

Średni błąd średniej arytm.

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{1.66}{\sqrt{18}} = \pm 0.39$$

Wartość kąta:

$$83^{\circ} 30' 34.87'' \pm 0.39''$$

Uw. pomiar Nr 6 należałoby raczej odrzucić, z powodu wielkiej różnicy, błędu pozornego v , w porównaniu do innych, a co uwydatnia się wyraźnie w zestawieniu v^2 .

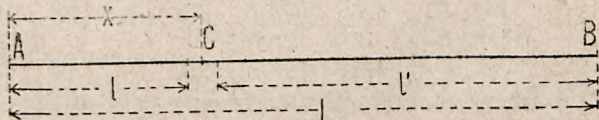
Nr	Pomiar	v	v^2
1	83°30'36.25''	-1.38''	1.90
2	7.50	-2.63	6.92
3	6.00	-1.13	1.28
4	4.77	+0.10	0.01
5	3.75	+1.12	1.25
6	0.25	+4.62	21.34
7	3.70	+1.17	1.37
8	6.14	-1.27	1.61
9	4.04	+0.83	0.69
10	6.96	-2.09	4.37
11	3.16	+1.71	2.92
12	4.57	+0.30	0.06
13	4.75	+0.12	0.01
14	6.50	-1.63	2.66
15	5.00	-0.13	0.02
16	4.75	+0.12	0.01
17	4.25	+0.62	0.38
18	5.25	-0.38	0.14
Suma	87.59	+10.71 -10.64	$[v^2] =$ 46.97

WYZNACZENIE PUNKTU POŚREDNIEGO.

§ 9. Wyznaczenie punktu pośredniego w danej odległości od punktu początkowego, na prostej, której długość jest znana.

Niech będzie dana długość prostej $AB = L$ na której mamy wyznaczyć punkt C w odstępnie „ l ” od A rys. 26.

W tym celu odmierzymy odcinek l od punktu A , następnie odcinek $l' = L - l$, od punktu B .



Rys. 26.

Z powodu nie dających się uniknąć błędów w pomiarze l i l' jakoteż i dlatego, że odcinek AB ma także pewien błąd pomiaru, obydwaj pomiary l i l' wogóle się nie zjadą,

bo albo między nimi pozostanie pewien odstęp, albo częściowo się nakryją; słowem, powstanie pewien błąd „w“.

Na oznaczenie długości L mamy teraz spostrzeżenie:

$$L = l + l' + w \dots \dots \dots 68$$

Uważajmy długość AC = X jako niewiadomą, to na określenie jej mamy następujące spostrzeżenie:

$$x_1 = l \quad \text{z wagą } p_1 = \frac{1}{l} \quad \text{i} \quad \dots \dots \dots 69$$

$$x_2 = L - l' \quad \text{lub } x_2 = l + w \quad \text{z wagą } p_2 = \frac{1}{l'} \quad \dots \dots 70$$

W myśl bowiem poprzednich rozumowań, przyjmujemy, że wagi są odwrotnie proporcjonalne do długości.

Z równań 69 i 70 obliczymy:

$$x = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{p_1 l + p_2 (l + w)}{p_1 + p_2} = \frac{p_1 l + p_2 l + p_2 w}{p_1 + p_2} \dots$$

$$\text{czyli } x = \frac{l(p_1 + p_2)}{p_1 + p_2} + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \cdot w = l + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \cdot w \dots \dots 71$$

wstawmy teraz za p_1 i p_2 wartości z równ. 69 i 70:

$$x = l + \frac{1}{1 + l'} \cdot w = l + \frac{1}{L} \cdot w = l + \frac{w}{L} \cdot l \dots \dots \dots 72$$

t. zn. punkt C wyznaczmy dodając (lub odejmując) do długości odpowiednią część „w“ proporcjonalną do długości l.

Wkońcu znajdziemy błędy:

$$v_1 = x - x_1 = l + \frac{w}{L} \cdot l - l = \frac{w}{L} \cdot l \dots \dots \dots 73$$

$$v_2 = x - x_2 = x - (l + w) = l + \frac{w}{L} \cdot l - l - w$$

$$\text{czyli } v_2 = \frac{1}{L} \cdot w - w = w \cdot \left(\frac{1}{L} - 1 \right) = w \frac{1 - L}{L} = \frac{-l'}{L} \cdot w \dots \dots 74$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \quad \text{i} \quad M = \pm \frac{m}{V[p]}$$

$$\text{zatem } m = \pm \frac{w}{L} \sqrt{1+l'} = \pm \frac{w}{L} \quad \text{i} \quad M = \pm \frac{w}{L} \sqrt{1+l'} \dots \dots 75$$

Największy błąd będzie dla $l = l' = \frac{L}{2}$ to jest

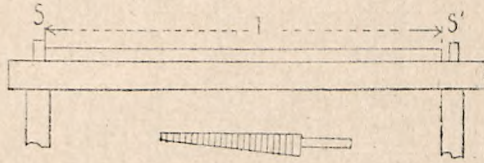
$$M = \pm \frac{w}{L} \cdot \frac{L}{2} = \pm \frac{w}{2} \dots \dots \dots 76$$

SPRAWDZANIE PRYZRZĄDÓW DO MIERZENIA DŁUGOŚCI.

§ 10. Przyrządy służące do pomiaru długości, powinny być sprawdzone przez urząd miar i wag przy czem określa się ich błędy. Odnośne instrukcje przepisują maksymalne błędy, których dana

miara przekraczać nie powinna — w przeciwnym razie używać jej nie wolno.

O tych dozwolonych błędach, mówiliśmy na początku tego rozdziału. Do sprawdzania łąt, służy urządzenie, zwane komparatorem (rys. 27). Na odpowiedniej podstawie dębowej, z suchego materiału impregnowanego zabezpieczonego przed działaniem wilgoci, ustawione są dwa ostrza S i S' w odstępnie nieco większym, niż wynosi długość łąty. Odstęp tych dwóch ostrzy zmierzony jest jak najdokładniej zapomocą miary normalnej. Długość komparatora jest zatem znana.



Rys. 27.

Nazwijmy długość komparatora przez k , długość sprawdzanej łąty przez l , zaś różnicę między k i l , przez w . Ułożmy teraz łątę na komparatorze, przysuwając ją do jednego ostrza — to między drugim końcem łąty, a drugim ostrzem powstanie odstęp w . Długość odstępu w zmierzy się zapomocą klina mającego podziałkę tak urządzoną, że odczytywać można łatwo setną część milimetra. Konstrukcja klina łatwą jest do zrozumienia z rysunku. Z pomiaru więc dostaniemy:

$$k = l + w \dots\dots\dots 77$$

$$\text{a stąd niewiadoma } l = k - w \dots\dots\dots 78$$

gdzie tak k jak w są znane.

Jakie mogą być różnice, t. j. błędy w sprawdzanych miarach, podano niżej przykładowo, według Jordana, wyniki sprawdzenia dwóch łąt mosiężnych ze stalowymi końcami, należących do szkoły politechnicznej w Hannoverze (w r. 1884). Komisja sprawdzająca podała następujący rezultat:

łąta I. . . . 1 m + 0·04 mm + t . 0·0182 mm przy 0° C

„ II. . . . 2 m + 0·09 mm + t . 0·0182 mm przy 0° C .

Pierwsza zatem była o 0·04 mm za długa, druga o 0·09 mm za krótka — wydłużanie się łąt wraz z temperaturą wyrażoną przez t w stopniach, określa współczynnik 0·0182, w milimetrach. Na podstawie powyższego wyniku obliczono tabelę celem uwzględnienia rozszerzalności łąt przy pomiarach. Przy + 30° C łąta I. będzie miała długość 1 m + 0·59 mm, łąta II.: 1 m + 0·46 mm.

Poniżej podajemy tabelę dla rozszerzalności łąty długiej 1·0 m.

Mosiądz				Żelazo				Drzewo jodłowe			
C ⁰	mm	C ⁰	mm	C ⁰	mm	C ⁰	mm	C ⁰	mm	C ⁰	mm
1	0·02	16	0·30	1	0·01	16	0·18	1	0·00	16	0·06
2	0·04	17	0·32	2	0·02	17	0·19	2	0·01	17	0·07
3	0·06	18	0·34	3	0·03	18	0·20	3	0·01	18	0·07
4	0·08	19	0·36	4	0·05	19	0·21	4	0·02	19	0·08
5	0·09	20	0·38	5	0·06	20	0·23	5	0·02	20	0·08
6	0·11	21	0·40	6	0·07	21	0·24	6	0·02	21	0·08
7	0·13	22	0·41	8	0·08	22	0·25	7	0·03	22	0·09
8	0·15	23	0·43	7	0·09	23	0·26	8	0·03	23	0·09
9	0·17	24	0·45	9	0·10	24	0·27	9	0·04	24	0·10
10	0·19	25	0·47	10	0·11	25	0·28	10	0·04	25	0·10
11	0·21	26	0·49	11	0·12	26	0·29	11	0·04	26	0·10
12	0·23	27	0·51	12	0·14	27	0·30	12	0·05	27	0·11
13	0·25	28	0·53	13	0·15	28	0·32	13	0·05	28	0·11
14	0·26	29	0·55	14	0·16	29	0·33	14	0·06	29	0·12
15	0·28	30	0·56	15	0·17	30	0·34	15	0·07	30	0·12

Długość komparatora znaną jest w różnych temperaturach i od czasu do czasu także sprawdzaną.

Taśmę stalową sprawdza się, mierząc jej długość jak najstaranniej łatami, 10 razy, przyczem uwzględnia się temperaturę i oblicza się średnią arytm. oraz błąd pomiarów.

DOKŁADNOŚĆ POMIARÓW DŁUGOŚCI.

§ 11. Jak już mówiliśmy poprzednio, pomiárom długości towarzyszą zawsze błędy, bądźto t. z. nieregularne z wszelkiem prawdopodobieństwem zarówno dodatnie jak ujemne, bądźto regularne, lub działające jednostronnie, a odpowiednie prawo dla powstającego stąd błędu, określiliśmy w § 4. równ. 13:

$$m = \sqrt{A^2 n^2 + B^2} n \dots \dots \dots 79$$

przyjmując m zamiast M. — Zatem m jest średnim błędem pomiaru, wskutek n-krotnego przyłożenia łaty lub taśmy. Ponieważ n jest proporcjonalne do długości l możemy więc napisać:

$$A^2 n^2 = \beta^2 l^2 \quad \text{i} \quad B^2 n = \alpha^2 l^2 \quad \text{czyli}$$

$$m = \sqrt{\alpha^2 l + \beta^2 l^2} \dots \dots \dots 80$$

Cheąc rozpatrywać przede wszystkim wpływ błędów nieregularnych, przypuścmy, że błędów regularnych niema, czyli $\beta = 0$.

W takim razie z równ. 80 dostaniemy

$$m = \sqrt{\alpha^2 l} = \alpha \sqrt{l} \dots \dots \dots 81$$

współczynnik α ma tutaj charakter średniego błędu jednostki długości danego pomiaru. Równ. 81 wyraża więc, że średni nieregularny błąd pomiaru, m , jest proporcjonalny do drugiego pierwiastka długości pomierzonej, a w dalszej konsekwencji, że waga tego pomiaru jest odwrotnie proporcjonalną do długości l . Ze zwiększeniem długości, zmniejsza się waga pomiaru.

Przyjmując n podwójnych pomiarów o różnicach: $d_1 d_2 d_3 \dots d_n$, możemy utworzyć średnią różnicę, którą nazwiemy przez d

$$d = \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{l} \right]} \dots \dots \dots 82$$

gdzie d odnosi się do jednostki długości, bo wprowadzono w mianowniku l .

Na podstawie zaś równań 31 i 32 otrzymamy średni błąd jednego pomiaru

$$m = \frac{d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d^2}{l} \right]} \dots \dots \dots 83$$

i średni błąd podwójnego pomiaru m' :

$$m = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{l} \right]} \dots \dots \dots 84$$

m i m' odnosi się do jednostki długości w jakiej wyrażone jest l , n. p. $l = 1$ m lub $l = 100$ m i t. d.

Następujący przykład wyjaśni zastosowanie powyższych wzorów:

Nr	I. pomiar l_1	II. pomiar l_2	$d=l_2-l_1$	d^2	$\frac{d^2}{l}$	lub $100 \frac{d^2}{l}$
1	153·135 m	153·120 m	+ 15 mm	225	1·47	147
2	102·180	102·180	0	0	0·00	000
3	158·055	158·068	-13	169	1·07	107
4	95·498	95·490	+ 8	64	0·67	67
5	154·862	154·870	- 8	64	0·41	41
6	94·400	94·408	- 8	54	0·68	68
7	81·764	81·763	+ 1	1	0·01	1
					4·31	431

zapomocą przedostatniej kolumny dostaniemy błąd jednostki długości t. j. 1 na 1 m — zapomocą ostatniej dla 100 m.

$$\text{Średnia różnica } d = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot 4 \cdot 31} = 0 \cdot 78 \text{ mm na } 1 \text{ m}$$

$$\text{lub } d = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot 431} = 7 \cdot 8 \text{ mm na } 100 \text{ m}$$

$$\text{średni błąd pojedynczego pomiaru } m = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0 \cdot 55 \text{ mm na } 1 \text{ m}$$

$$\text{lub } 5 \cdot 5 \text{ mm na } 100 \text{ m}$$

$$\text{wkońcu średni błąd podwójn. pomiaru } m' = \frac{m}{\sqrt{2}} = 0 \cdot 39 \text{ mm na } 1 \text{ m}$$

$$\text{lub } 3 \cdot 9 \text{ mm na } 100 \text{ m.}$$

Wyżej podane wzory stosuje się do oceny dokładności zdjęć, złożonych z większej ilości podwójnych pomiarów. Tak n. p. przypuśćmy, że zdjęto jakiś obszar zapomocą wieloboków, mających 120 różnych boków, podwójnie pomierzonych. Każdy podwójny pomiar ma swoją różnicę d — zaś suma $\left[\frac{d^2}{l} \right]$ wszystkich niech będzie:

$$\left[\frac{d^2}{l} \right] = 92 \text{ — w takim wypadku średnia różnica}$$

$$d = \sqrt{\frac{92}{120}} = 0 \cdot 87 \text{ mm na } 1 \text{ m}$$

$$\text{lub } d = 8 \cdot 7 \text{ mm na } 100 \text{ m.}$$

POMIARY DŁUGOŚCI ZAPOMOCA KROKÓW I CZASU.

§ 12. Długości mierzyć można również krokami. Długość kroku zależy od wysokości człowieka, spadku terenu, rodzaju drogi, n. p. na piaskach długość jest mniejsza, wreszcie od wieku i od znużenia. Zważywszy, że tysiące doświadczeń wykazały znaczne różnice długości tego rodzaju pomiarów, oraz sposobność do błędów w liczeniu kroków, zboczenia w kierunku i t. p. przyjdziemy do przekonania że ściśle tej metody traktować nie można, jakkolwiek niekiedy oddaje i ten sposób usługi jako przybliżone szacowanie odległości.

Czas podróży oddaje, zwłaszcza geografom w pustyniach, na wielkich obszarach znaczne usługi. Koń lub wielbłąd, używany wyłącznie do jazdy pod wierzch, chodzi wybitnie jednostajnie, tak, że błędy zwyczajnie nie przekraczają 5 do 6%.

OGÓLNE UWAGI.

§ 13. Do pomiarów długości, mamy dotąd dwa przyrządy: łątę i taśmę stalową. Zazwyczaj pracuje się dwiema łątami, do czego potrzeba dwóch pomocników. Jeden z nich układa nieparzyste łąty,

t. j. 1-szą, 3-cią, 5-tą i t. d. drugi parzyste. Po ułożeniu obu łąt, przenosi się pierwszą i układa jako trzecią — podobnie parzyste. Pomocnik odejmując łątę, głośno wymienia jej liczbę porządkową, n. p. 5-tą, 7-ma . . . Łąta przyłożona, lecz nie odjęta, nie liczy się. Jest to kontrola liczenia ilości łąt. Porządek ten należy ściśle zachować. Zazwyczaj, mają łąty obydwia końce okute mosiądzem i ścięte prostopadle do osi, t. z. tępe końce, lub okucie mosiężne jest kształtu klina — jedna łąta ma ostrze klinów poziome, druga pionowe. Ten rodzaj łąt okazał się w praktyce lepszym, dał bowiem mniejsze błędy pomiarów. Z setek doświadczeń obu rodzajami łąt, okazuje się, że ostro zakończone łąty dały lepsze rezultaty, bo około 20% mniejszy błąd niż tępe przy tymsamym nakładzie pracy i uwagi.

Jakie różnice ew. błędy osiąga się przy pomiarze łątami, wykazuje poniższe zestawienie wzięte z doświadczeń.

	l = 100 m	200 m	300 m	500 m	1000 m
różnica 2-ch pomiarów d =	10.0 mm	14.1	17.3	22.4	31.6 mm
średni błąd m =	7.1 „	10.0	12.3	15.8	22.4 „
śr. błąd średniej arytm. m' =	5.0 „	7.1	8.7	11.2	15.8 „
śr. błąd pojed. pomiaru w %	0.007 %	0.005	0.004	0.003	0.002 %

W § 11. podano przykład znacznie mniejszych błędów pomiarów. Wogóle pomiar łątami daje rezultaty bardzo dokładne.

Pomiar podstawy triangulacji, wykonany w Bonn w r. 1892 dał następujące rezultaty:

I.	podwójny pomiar łątami	2512.995 m	średnio
II.	4-krotny „ „	2512.984 „ „	
	różnica	11 mm	

Austrjacka instrukcja trygonometryczno-polygonalna nakazuje pomiar boków wieloboku w terenie falistym, wykonywać łątami, w płaskim taśmą. Dozwołoną różnicę dwóch pomiarów w jedną i drugą stronę, oblicza się z wzoru:

$$\Delta s = 0.0006 s + 0.02 \sqrt{s} \quad 85$$

gdzie Δs jest dozwołoną różnicą, s jest długością boku.

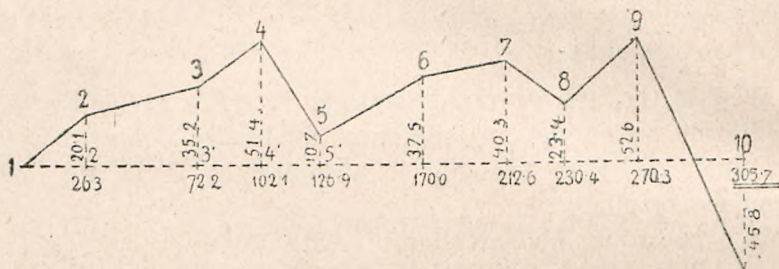
Pomiary taśmą stalową są mniej dokładne, lecz za to szybsze i mniej nużące. W terenie równym, wystarcza najzupełniej pomiar taśmą stalową. Naturalnie pomiar musi być wykonany bardzo starannie.

ZDJĘCIA MNIEJSZYCH OBSZARÓW, ORAZ ZAGADNIENIA Z TYCZENIA I POMIARÓW DŁUGOŚCI.

ROZDZIAŁ IV.

§ 1. Przyjmijmy, że dana jest granica jakiegoś obszaru (rys. 28) i tę mamy zdjąć i narysować jej plan.

W tym celu punkty załamania granicy uwidaczniamy w polu tyczkami i wytyczamy dowolną oś 1—1'' w ten sposób, by oś ta nie była zbyt odległą od poszczególnych punktów granicy. Postępując



Rys. 28.

po osi, znajdziemy zapomocą węgielnicy, (zwykle przyrządycznej) rzuty punktów 2, 3, . . . 7 — na tę oś. Odpowiednie punkty, oznaczmy na osi albo zapomocą palików, albo tyczek. Następnie pomierzmy odległości 1—2', 2'—3', 3'—4' i t. d. nie jako oddzielne odcinki, lecz w sposób bieżący od punktu początkowego, jak to widać na rysunku. Miary wypisuje się przy punktach 1, 2', 3' . . . wzdłuż osi. Ostatnią miarę przy 7' podkreśla się dwa razy, co oznacza, że miara ta odnosi się do całej długości 1—7'. Chcąc otrzymać poszczególne odcinki n. p. 5'—6' — odejmiemy od miary przy 6', miarę przy 5'. Następnie pomierzmy długości rzędnych 2—2', 3—3' i t. d. Rzędne nie powinny być dłuższe jak 40 m jeżeli używamy węgielnicy.

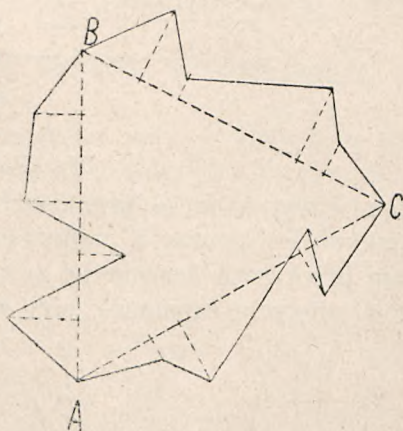
Celem narysowania planu, postępujemy tak, jak w polu: przyjmujemy oś 1—1'', odcinamy na niej w skali odcięte 1—2', 1—3',

1—4 , w punktach 2', 3' . . . 7' wykreślamy rzędne i odcinamy na nich odpowiednie długości. Wówczas plan odpowiada rzeczywistości.

W polu, równocześnie z pomiarem, należy całą pracę naszkicować, w zbliżeniu w skali.

Byłaby to najprostsza praca. Często wypadnie przyjąć więcej osi, których wzajemne położenie również musi być zdjęte, inaczej nie możnaby wykonać planu.

Rys. 29 przedstawia obszar, do zdjęcia którego wytyczono trzy osie AB, BC i CA tworzące trójkąt. Położenie osi zdejmujemy, mierząc wszystkie boki trójkąta, następnie pomierzmy odcięte i rzędne. Wiemy, że gdy dane są 3 boki trójkąta, to trójkąt da się ściśle skonstruować, da się obliczyć jego powierzchnia i kąty. Mamy więc w tym wypadku wszystko, czego potrzebujemy do nakreślenia planu.



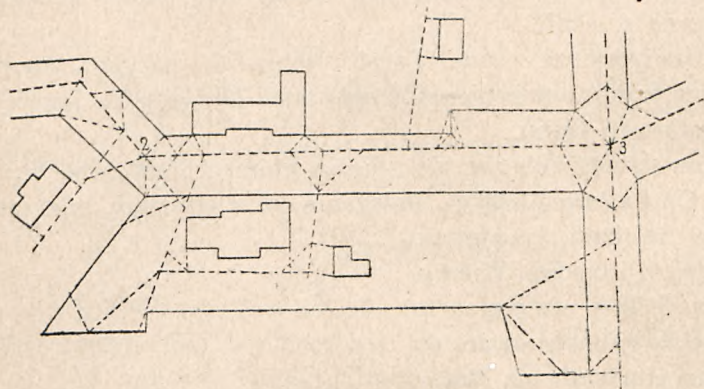
Rys. 29.

Zdjęcia szczegółowe opierają się na wielobokach pomierzonych tak co do kierunków jak długości, bardzo dokładnie, a opartych znów na punktach czwartorzędnej triangulacji. Wierzchołki wieloboków po wyrównaniu pomiarów, są więc punktami stałymi. Szczegóły zdejmuje się, przyjmując dowolne osie, nawiązane do boków wieloboków, względnie ich wierzchołków. O pomiarach kierunków, czyli kątów, mówić będziemy w dalszym ciągu. Mając jednak do dyspozycji tylko taśmę stalową i tyczki, możemy przyjęte osie zupełnie dokładnie nawiązać do danego wieloboku.

Posługujemy się w tym celu trójkątami, mierząc wszystkie ich boki, co pozwala na ściśle skonstruowanie trójkąta na planie, a temsamem i kierunku przyjętej osi, którą jest jeden z boków trójkąta. Rys. 30 podaje przykład zdjęcia szczegółowego, nawiązanego do wieloboku.

Wytyczanie rzędnych prostopadłych zapomocą węgielnic, dłuższych niż 40 m należy bezwarunkowo unikać. O ile punkty wieloboków są zbyt od siebie odległe, to zakładamy drugie i trzeciorzędne wieloboki mierząc kierunki i długości, a że mieszczą się one między punktami już ustalonymi, więc wyrównanie pomiarów jest zapewnione. Dopiero drobne szczegóły, jak pojedyncze parcele, zdejm-

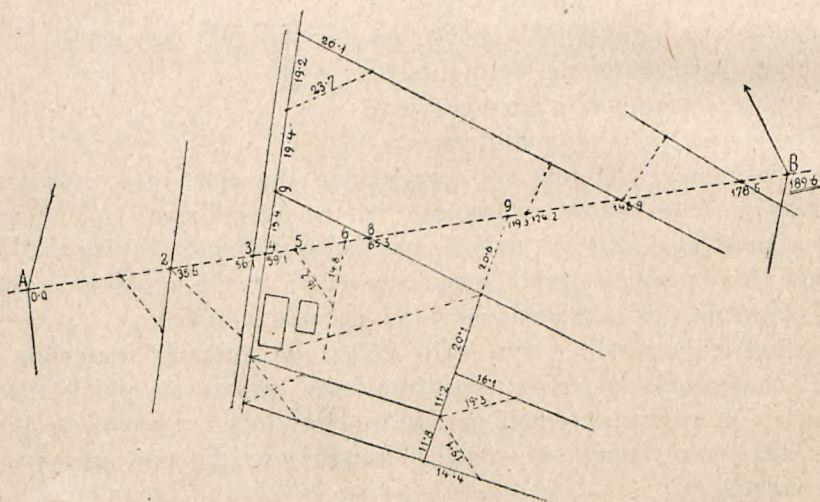
ujemy zapomocą pomocniczych osi, które wytycza się jako proste, ile możliwości między poszczególnymi punktami wieloboków. Wówczas bowiem łatwa jest kontrola i wyrównanie błędów pomiaru. Przy-



Rys. 30.

puśmy n. p. że oś pomocnicza łączy dwa punkty A—B. wieloboków (rysunek 31). Punkty te mają już ustalone współrzędne, zatem i odległość A—B jest także usta-

loną i wynosi l . — Natomiast z pomiaru wypada odległość $AB = l_1$. Jakkolwiek pomiar l_1 wykonany jest dobrze, różnica obu pomiarów nie przekracza dozwolonej granicy, to jednak ani tej osi ani szczegółów zdjętych zapomocą niej, nie moglibyśmy wrysować w plan, na



Rys. 31.

którym narysowane są już wieloboki, bo albo l_1 nie zmieniałaby się między punktami A i B będąc większą od l , albo, gdyby była mniejszą, powstałaby luka. Musimy pomiar ten poprawić, mianowicie:

$l - l_1 = w$ 1
różnicę w rozdzielimy proporcjonalnie na poszczególne odcinki osi A-B.

Naturalnie, różnica w mieścić się musi również w dozwolonych granicach.

Przypuśćmy, że pomierzona długość $AB = 189.61$ m. Obliczona zaś zapomocą danych współrzędnych odległości $AB = 189.86$ m zatem $l - l_1 = 189.86 - 189.61 = 25$ cm.

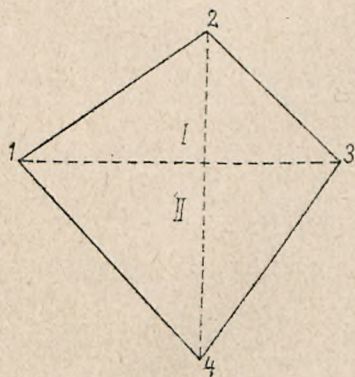
Dozwolona różnica Δs według wzoru $\Delta s = 0.0006 s + 0.02 \sqrt{V_s} = 38$ cm. Różnicę 25 cm rozdzielimy proporcjonalnie na wszystkie odcinki pomierzone na osi, a mianowicie:

$25 : 189.6 = 0.132$ cm na 1 m czyli na każdy 1 m dodamy 1.32 mm.

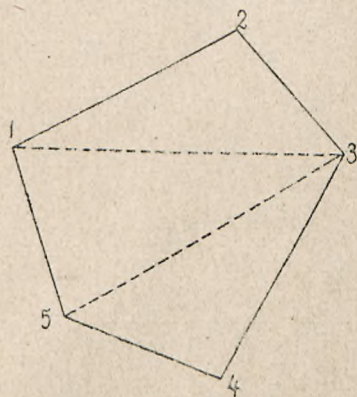
Stąd zamiast pierwszego odcinka dług. 35.62 m otrzymamy $35.62 + 35.62 \cdot 0.00132 = 35.67$ m i t. d. podobnie ostatni odcinek, czyli całą długość

$l = 189.61 (1 + 0.00132) = 189.8602$ m czyli 189.86 m zgodnie z długością l .

Na rys. 31 — dano również przykład zdjęcia kierunków poszczególnych granic, zapomocą pomierzonych trójkątów: (1) (2) (3) — (4) (8) (9) — (5) (6) (7) przyczem (6)—(7) jest kierunkiem pomocniczej osi celem zdjęcia budynków, i t. d.



Rys. 32.



Rys. 33.

Mniejsze, nieregularne obszary, najlepiej jest zdjąć, rozkładając je na trójkąty i mierząc wszystkie ich boki. Tak n. p. rys. 32 podaje zdjęcie czworoboku, przez rozłożenie go na dwa trójkąty. Wytyczymy przekątnię 1—3 — pomierzmy ją i wszystkie boki czworoboku. Mając wszystkie boki trójkątów I i II możemy je narysować czyli narysować plan danego obszaru. Celem kontroli, pomierzmy drugą przekątnię 2—4 — i sprawdzimy plan.

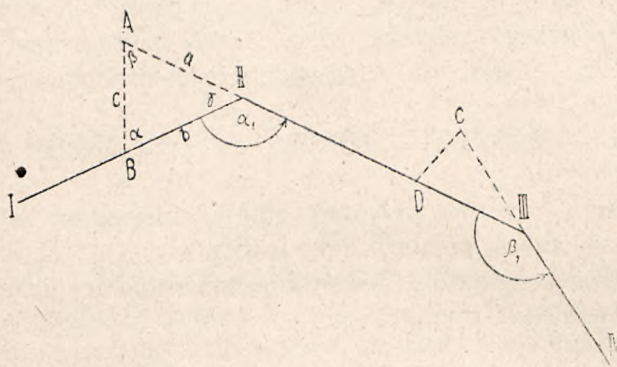
Granice obszaru przedstawionego na rys. 33 zdejmujemy rozkładając tę nieregularną figurę na trójkąty.

Zapomocą danych długości boków trójkąta, obliczymy też i powierzchnię trójkąta z wzoru

$$f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots \dots \dots 2$$

gdzie a, b, c , są bokami, zaś $s = \frac{a+b+c}{2}$ a temsamem i powierzchnię całego obszaru.

§ 2. Zapomocą pomiarów długości możemy bardzo nawet dokładnie pomierzyć kierunki, czyli kąty. Na rys. 34. mamy dane kierunki osi np. kolejki,



a poniżej mamy kąty α_1 i β_1 . Odmierzmy w tym celu na kierunku II—I długość II—B n. p. = 50 m — podobnie na przedłużeniu kierunku III—II odetnijmy II—A = II—I i zmierzmy długość AB.

Rys. 34.

Z trójkąta równoramiennego A B II —

w którym znane są długości boków, obliczymy według rozdz. II § 1:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \text{ stąd kąt } \gamma$$

$$\text{a wreszcie } \alpha_1 = 180 - \gamma \dots \dots \dots 3$$

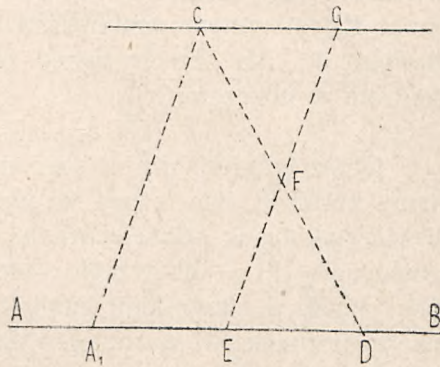
podobnie obliczymy wszystkie inne kąty załamania kierunków.

WYTYCZENIE PRZEZ DANY PUNKT C, RÓWNOLEGŁEJ DO DANEGO KIERUNKU.

§ 3. Gdyby rozchodziło się o niewielką odległość obu równoległych, to zadanie byłoby bardzo proste. Wystarczy znaleźć zapomocą węgielnicy przyrzątecznej lub innej, rzut punktu C na dany kierunek, zmierzyć rzędną, następnie obrać drugi punkt na tymże kierunku, wytyczyć prostopadłą o takiej długości jaką miała poprzednia rzędna i otrzymamy drugi punkt żądanej równoległej, czyli wytyczoną linię.

Przypuśćmy jednak, że punkt C znajduje się w większej odległości od kierunku AB (rys. 35), tak, że węgielnicy użyć nie można. W takim razie, obierzmy na prostej AB punkt A_1 i wytyczmy, prostą AC, zmierzmy teraz długość AC, następnie, obierzmy punkt D i zmierzmy długość DC — oraz $A_1 D$. Przepołowiwszy $A_1 D$ i DC —

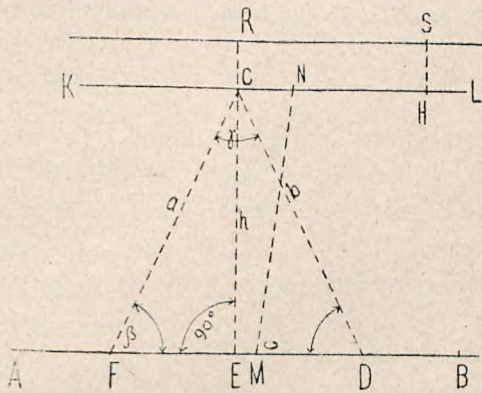
otrzymany punkt E i F które wytyczają kierunek EF równoległy do A₁C — przedłużmy linię EF i odmierzymy na niej EG = A₁C to otrzymany punkt G jako drugi punkt prostej CG równoległej do AB. Punkty A₁ i D powinny być dość dalekie, przynajmniej tak, jaką jest odległość obu równoległych. Gdy nie rozchodzi się o wielką dokładność, to sposób powyższy wystarczy. Wytyczając trzeci punkt w ten sam sposób, otrzymamy 3 punkty nie leżące ściśle na jednej prostej. Trzebaby wówczas wytyczyć linię pośrednią, co nie jest łatwym i wymagałoby za wiele czasu, tak, że raczej opłacałoby wytyczać linię dokładnie, za pomocą instrumentu uniwersalnego.



Rys. 35.

W DANEJ ODLEGŁOŚCI h WYTYCZYĆ RÓWNOLEGLĄ DO PROSTEJ AB.

§ 4. W tym celu obierzmy punkt C w odległości mniej więcej żądanej, mierząc tę odległość po linii na oko prostopadłej do AB — w sposób podany w poprzednim paragrafie. Stąd prosta KL przechodząca przez C będzie równoległą do AB — lecz w innej odległości niż h. Wypada więc potrzeba zmierzenia odległości obu równoległych, a więc znalezienia punktu E jako rzutu punktu C na kierunek AB. W tym celu obierzmy punkty F i D i zmierzmy wszystkie boki trójkąta FCD t. j. a b i c. Z długości boków obliczymy



Rys. 36.

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\text{i } \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \text{ za pomocą zaś } \sin \frac{\beta}{2} \text{ i } \cos \frac{\beta}{2}$$

obliczy się $\sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}$ i $\cos \beta = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}$

Wkońcu rzut $FE = a \cdot \cos \beta$. Odmierzmy więc długość FE to punkt E jest rzutem punktu C a zarazem kierunek EC jest prostopadłym do AB . Zmierzywszy odległość EC mamy równocześnie kontrolę w obliczeniu:

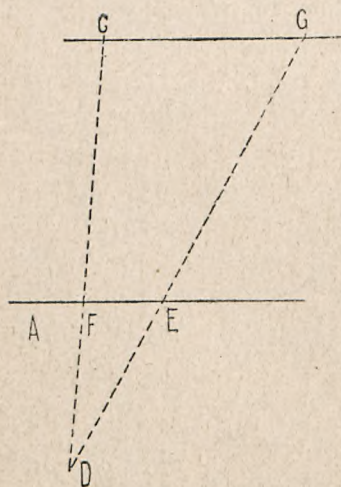
$$EC = h_1 = a \cdot \sin \beta.$$

Teraz odmierzymy na kierunku FC żadaną długość h i otrzymamy punkt P jako leżący w danej odległości h od kierunku AB . W którymkolwiek punkcie prostej KL n. p. w H wytyczymy krótką prostopadłą HS — bo wogóle ilości h i h_1 nie będą się wiele między sobą różniły, i otrzymamy punkt S , który, razem z punktem R wyznacza kierunek RS równoległy do linii AB — i odległy od niej o h .

PRZEZ DANY PUNKT C WYTYCZYĆ RÓWNOLEGLĄ DO AB.

§ 5. Jest to drugi sposób rozwiązania zadania z § 3.

Obierzmy dowolny punkt D (rys. 37) — wytyczmy prostą DC . Znajdźmy punkt przecięcia F i pomierzmy długości DF i DC . Obierzmy następnie punkt E na kierunku AB — wytyczmy prostą DE przedłużając ją dalej. Na podstawie rys. 37 powiemy, że o ile CG



Rys. 37.

ma być równoległą do AB , to musi być spełniony warunek, że trójkąty EDF i CDG są do siebie podobne. Z podobieństwa zaś trójkątów wynika, że $DF : DC = DE : DG$ w tej proporcji DG nie jest znane zatem $DG = \frac{DC \cdot DE}{DF}$

Po odmierzeniu długości DG otrzymamy punkt G , który razem z punktem C wyznacza kierunek równoległy do AB , przechodzący przez C .

Inny sposób rozwiązania przedstawia rysunek 38.

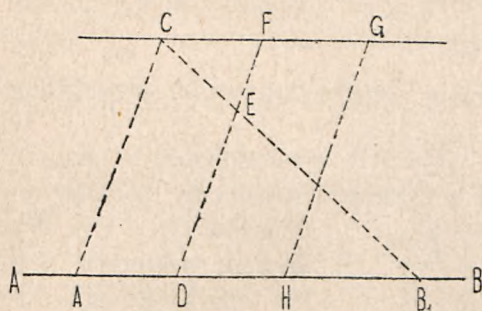
Obierzmy na kierunku AB — dwa punkty A_1 i B_1 . Wytyczmy proste $A_1 C$ i $B_1 C$ i pomierzmy ich długości. Następnie obierzmy punkt D na $A_1 B_1$ w ten sposób, że długość

$B_1 D = \frac{A_1 B}{n}$ oraz punkt E na $B_1 C$ w ten sam sposób, to jest

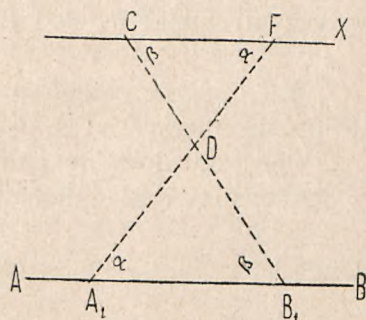
$B_1 E = \frac{B_1 C}{n}$. W takim razie trójkąty $A_1 C B$ i $D E B$ są podobne,

a zatem linia DE jest równoległa do $A_1 C$. Jeżeli teraz odmierzymy na przedłużonym kierunku DE długość $DF = A_1 C$ — to punkt F leży na prostej równoległej do AB i przechodzącej przez C.

Jeszcze jeden sposób podaje rysunek 39.



Pys. 38.



Rys. 39.

Na kierunku AB obieramy dwa punkty A_1 i B_1 — tudzież punkt D między kierunkiem AB a punktem C na $B_1 C$. Wytyczymy kierunek $A_1 D$ i przedłużmy go, oraz $B_1 C$ — następnie pomierzmy długości $B_1 D$ i DC tudzież $A_1 D$ — Z rys. widzimy, że trójkąty $A_1 D B_1$ i $C D F$ są podobne, więc stąd:

$A_1 D : DF = B_1 D : DC$ — gdzie DF jest niewiadomą,

zatem $DF = \frac{A_1 D \cdot DC}{B_1 D}$ Po odmierzeniu długości DF otrzymamy punkt F czyli żądany kierunek CF.

§ 6 Na linii AB — wyznaczyć kilka punktów pośrednich, mimo, że z punktu A nie widać punktu B. rys. 40. Obierzmy dowolny punkt C i pomierzmy długości AC BC. Następnie wyznaczmy punkty D i E na poprzednich kierunkach w ten sposób, że długość

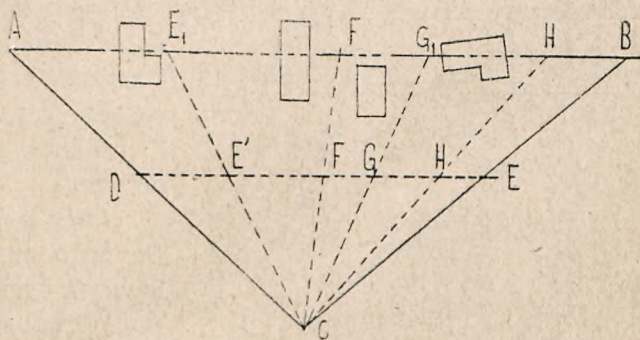
$$CD = \frac{AC}{n}$$

i podobnie

$$CE = \frac{BC}{n}$$

Trójkąty ACB i DCE są podobne. Na

prostej DE obierzmy teraz szereg punktów, łączących zarazem w kierunkach, na jakich chcemy mieć punkty pośrednie linii AB.

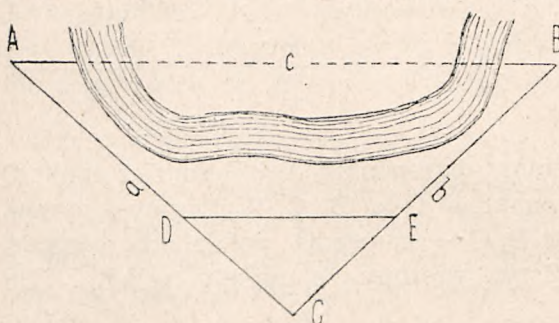


Rys. 40.

Z podobieństwa trójkątów: n. p. ACE_1 i DCE wynika, że $AC : DC = E_1 C : EC$ — stąd niewiadoma $E_1 C = \frac{AC \cdot EC}{DC}$.
Przez odmierzenie długości CE_1 dostaniemy punkt E_1 — podobnie wytyczymy punkt $F_1 G_1$ i t. d.

§ 7. Znaleźć odległość A—B — jeżeli z powodu przeszkody, nie da się mierzyć od A do B.

Obierzmy dowolny punkt C (rys. 41) w ten sposób, by sygnały w punktach A i B — były stąd widzialne, i wytyczmy i pomierzmy



Rys. 41.

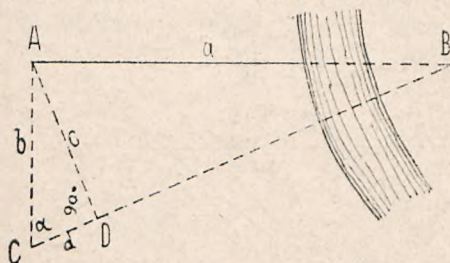
długości CA i CB. Wyznaczmy następnie punkty D i E tak, że $CD = \frac{AC}{n}$ i $CE = \frac{CB}{n}$ pomierzwszy długość DE otrzymamy: $DE = \frac{AB}{n}$ czyli $AB = n \cdot DE$.

Mając pomierzone boki AC i BC — tu-

dzież boki trójkąta DCE możemy obliczyć kąt $\cos \gamma$ a wkońcu $AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

ZNALEŹĆ ODLEGŁOŚĆ AB, GDY PUNKT B JEST NIEPRZYSTĘPNY
(Rysunek 42).

§ 8. W punkcie dostępnym A wytyczmy prostopadłą do AB i odmierzymy na niej dowolną długość $AC = b$. Wytyczmy z punktu C część prostej w kierunku CB i zmierzmy w znany dotychczas sposób, kąt α za pomocą taśmy. Z trójkąta prostokątnego CAB obliczymy



Rys. 42.

$AB = a = b \operatorname{tg} \alpha$
Do tego potrzebne są tablice logarytmiczne.

Drugi sposób: prócz prostopadłej „b” wytyczmy jeszcze AD prostopadłe do CB.

Oznaczmy $AB = a$ $AD = c$
 $AC = b$ $CD = d$

Na podstawie rysunku widzimy, że $ABC \sim CDA$
zatem $a : b = c : d$ a stąd

$$a = \frac{b \cdot c}{d}$$

Ten sposób jest prostszy, lecz o ile długości boków są dłuższe niż 50 m — to do tyczenia prostopadłych użyć należy instrumentu.

ZNALEŹĆ ODLEGŁOŚĆ DWÓCH NIEPRZYSTĘPNYCH PUNKTÓW A i B
(Rysunek 43).

§ 9. Z dowolnego punktu C z którego widać A i B wytyczmy CD i CE prostopadłe do CA i CB. Pomierzmy te długości i kąty α i β . Wówczas: $AC = CD \operatorname{tg} \alpha$ i $BC = CE \operatorname{tg} \beta$ a stąd i po zmierzeniu kąta γ dostaniemy:

$$\overline{AB^2} = AC^2 + BC^2 - 2 AC \cdot BC \cdot \cos \gamma$$

Drugi sposób rys. 44:

Obierzmy punkt C i dwa dowolne kierunki CD i CE, na których wyznaczmy rzuty punktów A i B, t. j. punkty D i E. Zmierzy długość CD i CE i ode-
tnijmy na nich $CG = \frac{CD}{n}$

i $CF = \frac{CE}{n}$. W punktach

G i F wytyczmy prostopadłe, aż do przecięcia się z kierunkami CA i CB w punktach H i I.

Trójkąty HCI i ACB są podobne $CI = \frac{CB}{n}$

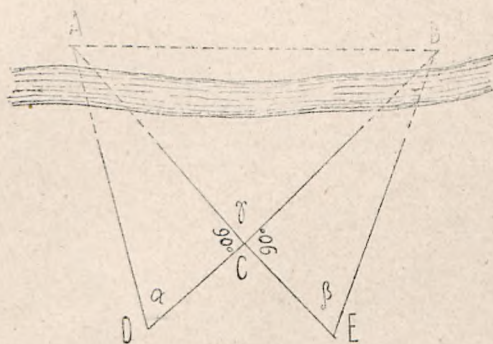
i $CH = \frac{CA}{n}$ więc $HI = \frac{AB}{n}$

a ostatecznie

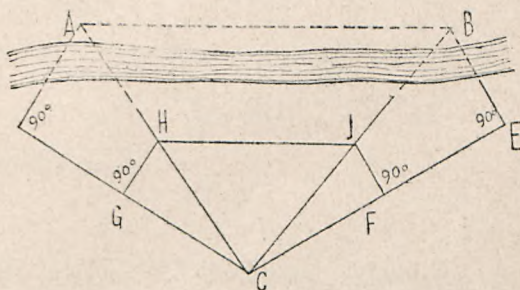
$$AB = n \cdot HI.$$

HI pomierzmy bezpośrednio.

§ 10. Do opisu zdjęć powrócimy jeszcze przy sposobności omawiania pomiarów wieloboków. W tem miejscu dodajemy: Instrukcja katastralna austriacka przeznaczona na każde 250 ha po-



Rys. 43.



Rys. 44.

wierzchni 3 punkty tryangulacyjne IV. rzęd. Prócz tych punktów, przypada na każdy km², 20 do 50 punktów wieloboków (wierzchołków), których położenie jest ustalone i nawiązane do tryangulacji.

Osie pomocnicze, jakie są potrzebne do zdjęć szczegółowych, wychodzą bądź to z powyższych punktów, bądź obierane być mogą na bokach, zatem położenie ich jest łatwe do określenia. Węgielnice można używać do wytyczania krótkich rzędnych, na terenie płaskim do 50 m, w terenie falistym do 25 m.

Pomierzone długości w zdjęciach szczegółowych, zaokrągląć należy na całe decymetry. Tylko miary budynków zdejmuje się dokładnie w cm.

PLANIMETRJA.

ROZDZIAŁ V.

§ 1. Powierzchnie zdjętych w polu obszarów oblicza się zawsze pośrednio i to zapomocą elementów pomierzonych, częściej, a raczej zwykle, oblicza się je z planu.

Pierwszy wypadek ma miejsce wtedy, gdy np. niewielką powierzchnię zdejmujemy rozkładając ją na trójkąty, lub po części na trójkąty, po części zaś zdejmujemy granice zapomocą rzędnych.

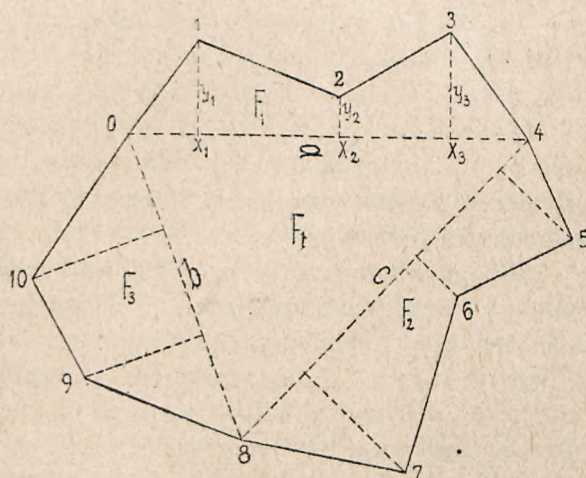
Tak n. p. powierzchnia na rys. 45 zdjęta jest w ten sposób, że 3 osie pomocnicze tworzą trójkąt. Nazwijmy je przez a b i c — to powierzchnię F_t tego trójkąta obliczy się

$$z \text{ wzoru } F_t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c) \dots \dots \dots 1}$$

$$\text{gdzie } s = \frac{a + b + c}{2}$$

Pozostaną do obliczenia części poza trójkątem składające się, jak wskazuje rysunek z trójkątów i trapezów. Weźmy pod uwagę część powierzchni powyżej osi 0—4, t. j. 0—1—2—3—4.

Na osi 0—4 pomierzono odcięte x_1 x_2 licząc miarą zawsze od punktu początkowego 0 — tak, że n. p. x_3 jest odciętą dla punktu 3 liczoną od punktu 0. Nazwijmy rzędne poszczególnych punktów



Rys. 45.

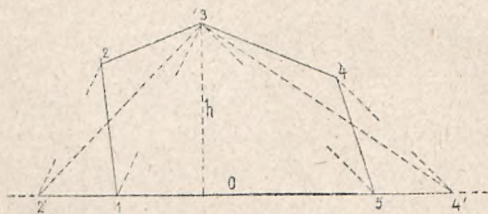
wierzchołkowych przez y_1, y_2, \dots oraz tę część powierzchni przez F_1 to $2 F_1 = x_1 y_1 + (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + (x_3 - x_2)(y_3 + y_2) + (x_4 - x_3) \cdot y_3 \dots$ pierwsza i ostatnia część są trójkątami inne trapezami.

W podobny sposób obliczymy F_2 i F_3 — a stąd całą powierzchnię F

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

Porządkując kolejno rzędne i odcięte, można analogicznie do równ. 2 ustawić formuły do obliczania powierzchni zapomocą rzędnych, co jednak opuszczamy, jako niepotrzebne obciążanie treści niniejszej pracy a wreszcie i pamięci.

Mając obliczyć powierzchnię jakiejś nieregularnej figury zdjętej w polu tak, że ani nie rozkładano jej na trójkąty, ani nie mierzono wszystkich rzędnych, to obliczenie wykonamy na planie. W prostszych wypadkach zamienimy daną figurę na trójkąt, jak to n. p. wskazuje



Rys. 46.

rys. 46 — poczem zmierzmy podziałką podstawę a i wys. h a wkońcu powierzchnia

$$F = \frac{a \cdot h}{2}$$

W wypadkach więcej złożonych, zwłaszcza gdy obszar jest większy, podzielimy go

na trójkąty i obliczymy każdy z osobna, mierząc elementy na planie podziałką, w odpowiedniej skali.

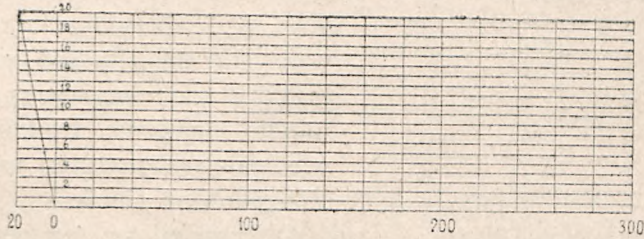
Długości odmierzamy na planie przykładając bezpośrednio podziałkę w danej skali urządzoną i odczytując długość. Im mniejsza skala, tem niedokładniejszy będzie pomiar. Jeżeli n. p. w skali 1:1000 (1 mm na planie = 1 m w naturze), da się dokładnie odczytać metry i szacować decymetry t. j. 0.1 mm na planie, to już w skali 1:2500, gdzie 0.5 mm przedstawia długość 1.25 m nie da się dokładniej miary odczytać jak na 25 cm. i to w najlepszym razie.

Używa się też t. zw. podziałki złożonej. Na rys. 47 przedstawiona jest taka podziałka dla skali 1:2500.

Od 0 — na prawo widzimy podział na 10 m — na lewo zaś odstęp 10 m przecięty jest linią ukośną. Długość w planie bierzemy w otwór cyrkla — następnie, prawe ramię cyrkla stawia się na odpowiedniej linii pionowej z prawej strony zera, na dolnej krawędzi tak, by lewe ramię sięgało na lewej stronie zera między 0 a 10 — teraz posuwamy cały cyrkiel w górę, bacząc, by, prawe ramię szło po linii pionowej, lewe zaś posuwało się równocześnie w górę, co ułatwiają linie poziome aż wkońcu lewe ramię stanie na linii ukośnej

podczas gdy prawe będzie w tej samej wysokości. Od zera na prawo odczytamy długość w setkach i dziesiątkach m; po lewej zaś stronie w metrach i częściach metra. W danym wypadku, na rys. 47 gdy lewe ramię natrafi na punkt przecięcia linii poziomej, oznaczonej przez 2 lub 4 i t. d.

z linią ukośną, to po lewej stronie mieć będziemy 2, 4 i t. d. metrów. Gdy zaś natrafi linię ukośną w połowie odległości dwóch linii poziomych n.p.



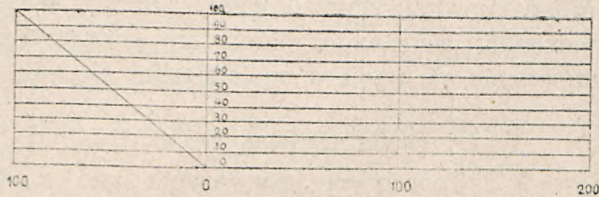
Rys. 47.

między 4 a 6 — to dostaniemy 5 m gdy natrafi w $\frac{1}{4}$ odległości, to będziemy mieli 0·5 m względnie 1·5 m. Im większy jest odstęp linii poziomych, tem dokładniej oszacujemy części metra.

Na rys. 48 urządzona jest podziałka do pomiarów długości z planów o małej skali. Na prawo mamy podział na 100, 200 i t. d. m na lewo możemy odczytywać co 10 m i szacować pojedyncze metry.

Zważywszy powyższy porządek postępowania w odmierzaniu długości, przenoszenie jej cyrklem na podziałkę i szukanie punktu przecięcia, dojdziemy do przekonania, że bezpośrednie przyłożenie podziałki da lepsze rezultaty, bo mniej jest sposobności do omyłki.

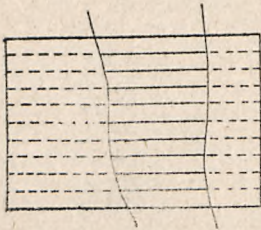
Natomiast podziałka tego rodzaju ma rację wtedy, gdy narysowana jest na planie. Z biegiem czasu bowiem papier kurczy się i ściąga, a z nim razem plan, długości stają się mniejsze, lecz równocześnie to samo dzieje się z podziałką, która w takim razie lepiej odpowiada pomiarom na planie niż podziałka do przykładania, nie podlegająca skurczeniu.



Rys. 48.

§ 2. Dobre rezultaty w obliczaniu powierzchni z planu daje rozkładanie jej na trapezy. Narysujmy na kalce szereg linii równoległych, w stałym odstepie jedna od drugiej, n. p. co 2 mm rys. 49. Przyłożmy następnie kalkę na plan, to daną powierzchnię rozłożą równoległe linie na szereg trapezów. Zapomocą cyrkla, mechanicznie dodamy długości pośrednich linii, (t. j. między dwoma równoległymi)

a otrzymaną łączną długość, pomnożymy przez stały odstęp n. p. 2 mm. Dostaniemy wówczas powierzchnię w mm² — którą przera-
chować należy na skalę planu. N. p. gdy plan narysowany jest
w skali 1:5000 — to, ponieważ 1 mm. przedstawia wartość 5 m —



Rys. 49.

to 1 mm² mieści 25 m². Mnożąc otrzymaną
ilość mm² przez 25, otrzymamy powierzchnię
w m². Na tej zasadzie urządzony jest nawet
przyrząd do pomiaru powierzchni. Jest to
ramka mosiężna, w której naciągnięte są
włosienie równoległe, w równych i stałych
odstępach od siebie.

Przykładając ten przyrząd na plan, po-
dzielią nam włosienie daną powierzchnię na
trapezy. Zresztą postąpimy zupełnie tak, jak wyżej opisano. Przy
odpowiedniej wprawie, sposób ten daje dobre rezultaty i chętnie
jest używany. Osobno jednak uwzględnić należy wpływ skurczenia
się papieru.

Z czasem papier ściąga się — i to inaczej w kierunkach do
siebie prostokątnych, inaczej w przekątniach, a także różne arkusze
ściągają się i kurczą różnie. Pomijamy w tem miejscu wywód teo-
retyczny, mający na celu uwzględnienie kurczenia się papieru,
w obliczeniach i pomiarach na planach, jako praktycznie nie mający
znaczenia. Jedynym sposobem jest, znaleźć w polu dwa punkty
stałe, oznaczone ściśle na planie, pomierzyć ich odległość tak w rze-
czywistości jak w planie. Z porównania tych odległości, sądzić mo-
żemy o ściągnięciu się papieru i uwzględnić to w dalszych pracach.

Każda karta topograficzna lub plan katastralny ujęte są w ramki
linijne o pewnej, stałej długości. Możemy więc pomierzyć te długości
podziałką, jak również przekątnie a otrzymamy stąd także wielkość
skurczenia się papieru na jednostkę długości, zwykle w procentach.

DOKŁADNOŚĆ POMIARU POWIERZCHNI.

§ 3 Teoretyczne rozważanie nad dokładnością pomiaru po-
wierzchni, na podstawie bezpośrednich pomiarów elementów, czy to
w polu, czy zwłaszcza w planie, dadzą nam ważne wskazówki do
praktycznego zastosowania.

Weźmy najprostszy wypadek, t. j. powierzchnię prostokąta
o bokach a i b. Powierzchnię jego F, wyrazi równanie:

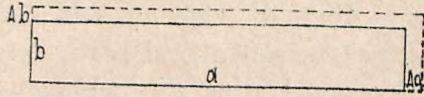
$$F = a \cdot b \quad \dots \quad 2$$

Przypuśćmy, że według rys. 50 boki a i b mają błędy $\pm \delta a$
i $\pm \delta b$ to i powierzchnia mieć będzie błąd $\pm \delta F$, a mianowicie:

$F \pm \delta F = (a \pm \delta a) \cdot (b \pm \delta b) = ab \pm a \cdot \delta b \pm b \cdot \delta a + a \delta \cdot \delta b$
ostatni wyraz, jako bardzo mały drugiego rzędu możemy opuścić,
a wtedy $\pm \delta F = \pm a \cdot \delta b \pm b \cdot \delta a$ 3

Jeżeli $\delta a = \delta b$, natomiast a jest w porównaniu z b bardzo duże, natenczas $a \cdot \delta b$ jest znacznie większe od $b \cdot \delta a$. Stąd wy-

nika, że długie a wąskie powierzchnie powinno się mierzyć w ten sposób, że szerokość zdejmuje się bardzo dokładnie, podczas gdy pomiar długości nie wymaga



Rys. 50.

takiej szczególnej staranności, lub długość wziąć można z planu — jeżeli pierwszą mierzymy na 1 cm dokładnie, to drugą wystarczy zmierzyć z dokładnością 1 dem.

Przyjmijmy teraz, że δa i δb przedstawiają średnie błędy, to średni błąd powierzchni $\delta F = \sqrt{(a \cdot \delta b)^2 + (b \cdot \delta a)^2}$ 4
przypuśćmy, że $\delta a = \delta b = c$ t. z. że błędy pomiaru są stałe, niezależne od mierzonej długości, co w pomiarach z planów ma właśnie miejsce, wówczas, z równ. 4 dla $\delta a = \delta b$ dostaniemy:

$$\delta F = c \sqrt{a^2 + b^2} 5$$

t. z. że średni błąd powierzchni jest proporcjonalny do długości przekątnej prostokąta.

$$\text{Jeżeli } \frac{a}{b} = n 6$$

$$\text{to ponieważ } ab = F \text{ więc } a = \sqrt{Fn} \text{ i } b = \sqrt{\frac{F}{n}} 7$$

$$\text{teraz według równ. 4: } \delta F = c \cdot \sqrt{F} \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n}} 8$$

Z równ. 8 wynika, pominąwszy n , że średni błąd powierzchni, obliczonej na podstawie pomiarów na planie, jest proporcjonalny do drugiego pierwiastka tejże powierzchni.

Przypuśćmy, że pomiar na planie wykonywamy z dokładnością 0.1 mm t. j. $c = \pm 0.1 \text{ mm}$ 9
to przyjmując różne n obliczymy nast. tabelę:

F cm ²	\sqrt{F}	n = 1	n = 2	n = 5	n = 10
		$\delta F =$	$\delta F =$	$\delta F =$	$\delta F =$
1	1	0.01 cm ²	0.02 cm ²	0.02 cm ²	0.03 cm ²
25	5	0.07	0.08	0.11	0.16
100	10	0.14	0.16	0.23	0.32
225	15	0.21	0.24	0.34	0.46
400	20	0.28	0.32	0.46	0.64
900	30	0.42	0.47	0.68	0.95

Widzimy stąd, że dla takiej samej powierzchni co do wielkości błąd staje się coraz większy im n jest większe.

Przyjmijmy teraz, że $\delta a = c \cdot a$ i $\delta b = cb$ 10
t. j. że błędy długości zależą od tej długości i są do niej proporcjonalne, natomiast, z równ. 4, wstawivszy wartości z 10 dostaniemy:

$$\delta F = c \sqrt{(ab)^2 + (ab)^2} = c \cdot F \sqrt{2} \quad 11$$

w tym wypadku błąd powierzchni jest proporcjonalny do tejże powierzchni i niezależny od stosunku boków n .

Wkońcu przyjmijmy, że

$$\delta a = k\sqrt{a} \quad \text{i} \quad \delta b = k\sqrt{b} \quad 12$$

t. j. że błędy długości są proporcjonalne do pierwiastków z długości co ma miejsce dla błędów nieregularnych. Wówczas z równ. 4 i 12 otrzymamy:

$$\delta F = k \sqrt{a^2b + b^2a} = k \sqrt{ab(a+b)} \quad 13$$

wprowadźmy tu stosunki boków t. j. n według równ. 7 to

$$\delta F = k \sqrt[4]{F^3} \sqrt{\frac{1}{n}} \cdot \sqrt{1+n} = k \sqrt[4]{F^3} \sqrt[4]{n} \sqrt{n + \frac{1}{n}} \quad 14$$

$$\text{dla } n = 1 \quad \delta F = k \sqrt[4]{F^3} \sqrt{2} = 1.414 k \sqrt[4]{F^3} \quad \text{oraz}$$

$$\text{dla } n = 10 \quad \delta F = k \sqrt[4]{F^3} \sqrt[4]{12 \cdot 1} = 1.865 \cdot k \sqrt[4]{F^3} \quad 15$$

Przyjmijmy wartość średniego błędu dla pomiaru łątami lub taśmą, z uwzględnieniem błędów nieregularnych i jednostronnie działających, 5 cm na 100 m, czyli 0.005 m na 1 m.

$$\text{t. j. } \delta a = 0.005\sqrt{a} \quad \text{czyli } k = 0.005 \text{ m}$$

to po wstawieniu w równ. 15 otrzymamy:

$$\text{dla } n = 1 \quad \delta F = 0.00707 \sqrt[4]{F^3} \quad \text{oraz}$$

$$\text{dla } n = 10 \quad \delta F = 0.00923 \sqrt[4]{F^3} \quad 16$$

Na tej podstawie zestawiono nast. tabelę teoretycznych błędów powierzchni:

F		Kwadrat	Prostokąt 1×10
1 m ²	= 1 m ²	$\delta F = 0.01 \text{ m}^2$	$\delta F = 0.01 \text{ m}^2$
10 „	= 10 „	0.04	0.05
1 ar	= 100 „	0.2	0.30
10 arów	= 1.000 „	1.3	1.70
1 ha	= 10.000 „	7.1	9.30
10 ha	= 100.000 „	39.8	52.40

Są to czysto teoretyczne granice błędów. W rzeczywistości, błędy będą większe z powodu większych błędów pomiarów długości. W praktyce powyższe wywody służyć mogą jako kształt funkcji błędu, który też nie powinien być obrany według równ. 11 — jak również nie mają racji przepisy, ustanawiające granice błędów w % wielkości powierzchni. Należałoby tutaj uwzględnić 8, 11 i 14 równanie i z nich wypośredkować formę wzoru dla dozwolonej granicy błędu.

Instrukcje różnych państw określają maksymalne dozwolone różnice dwóch obliczeń danej powierzchni. Austriacka dozwala 0·5%, Pruska instrukcja podaje następujący wzór:

$$\Delta = 0\cdot01 \sqrt{60F} + 0\cdot02 F^2 \text{ albo } \Delta = \sqrt{0\cdot006F} + 0\cdot00002F^2 \quad 17$$

gdzie $F \rightarrow$ powierzchnia w arach, zaś Δ jest różnicą dwóch obliczeń, także w arach.

Na podstawie wzoru 17-go — obliczona tabela służyć może jako przykład dozwolonych różnic dwóch obliczeń powierzchni:

F w arach	Dozwolona różnica Δ dwóch obliczeń		F w hektarach	Dozwolona różnica	
1 ar	8 m ² = 0·08 a	8·000	10 ha	2·8 a lub	0·28 ‰
2 „	11 „ = 0·11 „	5·5 „	20 „	4·5 „	0·225 „
4 „	16 „ = 0·16 „	4·0 „	40 „	7·5 „	0·188 „
6 „	19 „ = 0·19 „	3·2 „	60 „	10·4 „	0·173 „
8 „	22 „ = 0·22 „	2·8 „	80 „	13·3 „	0·166 „
10 „	25 „ = 0·25 „	2·5 „	100 „	16·1 „	0·161 „
20 „	35 „ = 0·35 „	1·75 „	200 „	30·3 „	0·152 „
50 „	55 „ = 0·55 „	1·10 „	300 „	44·4 „	0·148 „
100 „ = 1 ha	79 „ = 0·79 „	0·79 „	400 „	58·5 „	0·146 „
200 „ = 2 „	113 „ = 1·13 „	0·56 „	500 „	73·0 „	0·146 „
500 „ = 5 „	187 „ = 1·87 „	0·37 „	600 „	87·0 „	0·145 „
1000 „ = 10 „	283 „ = 2·83 „	0·28 „	700 „	101·1 „	0·144 „

Każdą powierzchnię obliczać należy dwa razy, różnymi sposobami.

PODZIAŁ POWIERZCHNI.

§ 4. Przed przystąpieniem do właściwego zadania, przytoczymy kilka przykładów obliczania powierzchni trójkątów i czworoboków:

1. O powierzchni trójkąta była już kilkakrotnie mowa.

Dane b , c i α

$$F = \frac{1}{2} bc \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18$$

Dane c oraz α i β

$$F = \frac{c^2}{2(\cotg \alpha + \cotg \beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19$$

Dane a , b i c

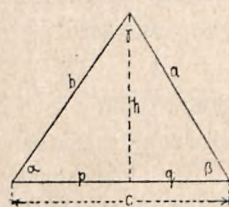
$$F = V s(s-a)(s-b)(s-c) \dots\dots\dots 20$$

$$\text{gdzie } s = \frac{a + b + c}{2}$$

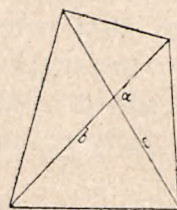
2. Czworobok rysunek 52.

Dane obie przekątne a i b oraz α

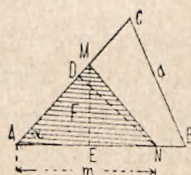
$$F = \frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2} \dots\dots\dots 21$$



Rys. 51.



Rys. 52.

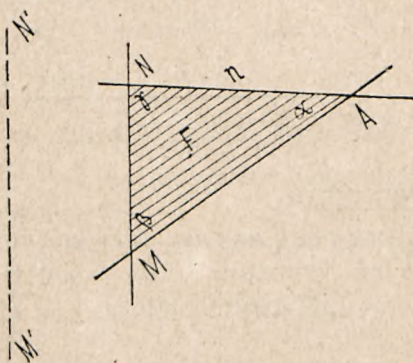


Rys. 53.

3. Dany jest trójkąt ABC rys. 53 oraz punkt M na jednym z boków — przez ten punkt przeprowadzić granicę, odcinając z danego trójkąta część MAN o powierzchni F . Najprostszy sposób byłoby: znaleźć długość prostopadłej $ME = h$ a następnie obliczyć potrzebną długość podstawy m

$$ME = h = AM \cdot \sin \alpha \quad F = \frac{mh}{2}, \quad m = \frac{2F}{h} \dots\dots\dots 22$$

4. Z powierzchni, której granice schodzą się w punkcie A tworząc kąt α odciąć część $MAN = F$ a to granicą równoległą do danego $M'N'$ (rys. 54). Dane są również kąty β i γ . Tem samym określony jest i stosunek $n : m$, bo $\frac{n}{m} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$ nadto, znamy też i relację: $2F = m \cdot n \cdot \sin \alpha$ Mamy więc dwa równania o dwóch niewiadomych m i n . Zatem



Rys. 54.

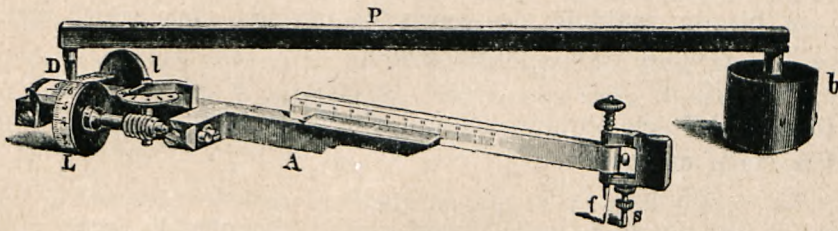
$$m = \sqrt{2F \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}}$$

$$n = \sqrt{2F \frac{\sin \beta}{\sin \alpha \sin \gamma}} \dots\dots\dots 23$$

Z paru powyższych przykładów przekonywujemy się, że poznał nawet tak prostych figur nie jest rzeczą prostą i łatwą, bo wymaga pomiarów kątów i stosunkowo wiele danych. Tembardziej

skomplikowanym być musi podział zupełnie nieregularnych wieloboków, a przecież trafia się to często w praktyce. Rozwiązywanie takich zagadnień praktycznie, przez próby, jak się to zwykle zdarza, nastęrcza tylko zbyt wiele sposobności do omyłek i błędów oraz dużych szkód dla interesowanych.

Z tego powodu podajemy w dalszym ciągu analityczny sposób podziału jakichkolwiek obszarów*), granicami w dowolnych kierunkach, z matematyczną dokładnością. Ponieważ jednak opis tego sposobu, poprzedzić musi wykład o pomiarach i obliczeniach kierunków oraz współrzędnych, przeto odkładamy ten opis do jednego z następnych rozdziałów.



Rys. 55.

PRZYRZĄDY DO POMIARU POWIERZCHNI Z PLANÓW.

§ 5. W r. 1856 wynalazł Amsler, przyrząd, zapomocą którego można pomierzyć powierzchnię dowolnej figury na planie, przez proste obwiedzenie jej granic; jest to t. z. planimetr Amslera rys. 55 lub biegunowy.

Ramię A opatrzone ostrzem f służącym do obwiedzenia granicy, zwie się wodzidłem, drugie zaś ramię P — opatrzone ciężarkiem b lub także ostrzem, celem ustalenia przyrządu na planie, nazywa się biegunem. Oba ramiona połączone są przegubem D. Na przedłużeniu wodzidła umieszczone jest kółko L poruszające się po planie odpowiednio do ruchów wodzidła. Jeżeli n. p. ruch wodzidła odbywa się w kierunku jego osi, to kółko L ślizga się po papierze nie obracając się. W innych wypadkach kółko będzie się obracało, lub też częściowo się ślizgało. Z kółkiem L połączone jest, zapomocą śruby bez końca i kółka zazębionego, liczydło, wskazujące ilość obrotów kółka L. W starszej konstrukcji planimetru, oś kółka L musiała być równoległą do osi wodzidła, w nowszej, pozwalającej na przerzucenie

*) Opublikowany przez autora tej pracy w III. wydaniu „Miernictwa“ z r. 1921 — i broszurze: „Zdjęcie i podział większych obszarów“ W. Dziakiewicz-Warszawa 1921. Księgarnia J. Czerneckiego w Warszawie.

wodzidła nad biegunem, warunek ten nie jest koniecznym, natomiast potrzeba wykonać dwa pomiary z przzerwaniem wodzidła i wziąć z nich średnią.

Gdy wodzidło obraca się około przegubu, to i kółko L obraca się i tem więcej zrobi obrotów przy obwodzeniu tych samych granic, im wodzidło jest krótsze.

Pomijając wywody teoretyczne, powiemy krótko: powierzchnia, po której obwodzie przeprowadziliśmy wodzidło, jest proporcjonalna do ilości obrotów kółka L.

Rozróżnić tu jednak należy dwa wypadki:

- 1. przy obwodzeniu danej powierzchni biegun znajduje się na zewnątrz jej granic, i
- 2. biegun znajduje się wewnątrz obwodu danej powierzchni.

W wypadku pod 1. powierzchnia

$$P_z = C_1 n_1 \dots \dots \dots 24$$

gdzie n_1 jest ilością obrotów kółka L odczytaną na liczydłe, zaś C_1 jest ilością stałą, mianowicie

$$C_1 = 2R r' \pi \dots \dots \dots 25$$

gdzie R jest długością wodzidła od środka przegubu do ostrza, r' jest znów promieniem kółka L, $\pi = 3.141592$.

W drugim wypadku powierzchnia

$$P_w = C_1 n_2 + C_2 \dots \dots \dots 26$$

C_1 jest stałą poprzednio podaną, n_2 jest ilością obrotów kółka L C_2 jest drugą stałą planimetru i

$$C_2 = \pi (R'^2 + R^2 - 2Rr) \dots \dots \dots 27$$

R' jest długością bieguna, R długością wodzidła jak poprzednio, r jest odległością płaszczyzny kółka L od przegubu.

Uzyskanie dokładnych wartości na $RR'r \dots$ byłoby, zapomocą bezpośredniego pomiaru trudnem. Mamy jednak inny, praktyczny sposób znalezienia stałych C_1 i C_2 , mianowicie:

Powierzchnię o znanej wielkości, n. p. koła, mierzymy planimetrem ustawiając biegun na zewnątrz — wówczas

$$P_z = C_1 n_1 \text{ gdzie } P_z \text{ [jest znane, } n_1 \text{ odczyta się na liczydłe, więc}$$

$$C_1 = \frac{P_z}{n_1} \dots \dots \dots 28$$

Następnie, umieszczamy biegun wewnątrz obwodu i powtarzamy pomiar, przyczem otrzymamy

$$P_w = C_1 n_2 + C_2 \text{ gdzie tylko } C_2 \text{ jest nieznanne, więc}$$

$$C_2 = P_w - C_1 n_2 \dots \dots \dots 29$$

lub: $P_w - P_z = 0 = C_1 n_1 - C_1 n_2 - C_2$ a stąd $C_2 = C_1 (n_1 - n_2)$. 30

wstawmy tu

$$C_1 = \frac{P_z}{n_1} \text{ to } C_2 = \frac{P_z}{n_1} (n_1 - n_2) = P_z \left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right) \quad . \quad . \quad 31$$

P_z , n_1 i n_2 są ilościami znanymi.

Doświadczenie to powtarzamy kilka razy, a po obliczeniu średnich wartości, otrzymamy C_1 i C_2 dostatecznie dokładne. Do każdego planimetru dodana jest płytka metalowa, na której wyznaczony jest rowkiem obwód koła i powierzchnia jego podana. Płytką tą służy do wyżej opisanych doświadczeń. Przed rozpoczęciem pomiaru, odczytuje się stan liczydła m_1 — podobnie po skończeniu — różnica $m_1 - m_2 = n_1$ jest ilością obrotów kółka L.

Planimetr Amslera, ulepszony przez Coradiego ma wodzidło urządzone do przerzucania nad biegunem. Mierzymy przeto pierwszy raz powierzchnię obwodząc ją wodzidłem, potem drugi raz po przerzuceniu wodzidła. W pierwszym razie dostaniemy n obrotów kółka, w drugim n' . Średnia $\frac{n + n'}{2} = n_1$ lub n_2 dla P_z i P_w . Zapomocą tego podwójnego pomiaru, eliminuje się błąd, powstający wskutek nierównoległości kółka L do wodzidła.

Ilość obrotów kółka L przy opisywaniu tego samego obwodu, zależną jest przede wszystkim od promienia r' tegoż kółka i od długości ramienia wodzącego A, które nazwijmy promieniem R. Promień r' jest stały, natomiast wodzidło jest tak urządzone, że da się wydłużać lub skracać, czyli, że i ilość obrotów kółka L, zależna od R, może być przy obwodzeniu tej samej powierzchni zmienną, a że stała $C_1 = 2Rr'\pi$ zależną jest od R, przeto i stała C_1 może się zmieniać wraz z R. Możemy więc R tak obrać, by C_1 było pewną okrągłą liczbą, co w wysokim stopniu ułatwia obliczanie.

Oznaczmy pewną długość wodzidła przez R_1 i zapomocą doświadczenia znajdziemy stałą C_1 odpowiadającą promieniowi R_1 . Im krótsze jest wodzidło, tem większe musi być n a więc tem mniejsze będzie C_1 — czyli stała C_1 jest wprost proporcjonalną do R_1 . Zmieńmy teraz długość wodzidła na R_2 n. p. skróćmy go, jeżeli chcemy otrzymać mniejszą stałą C_1 . Natenczas, w doświadczeniu z tą samą powierzchnią, otrzymamy inną ilość obrotów kółka L, n. n_1' i inną stałą C_1' .

Z równ. 25 wynika, że $C_1 = 2R_1 r'\pi$ a zarazem

$$C_1' = 2R_2 r'\pi$$

a stąd $\frac{C_1}{C_1'} = \frac{R_1}{R_2}$ znając C_1 i R_1 a przyjmując dla C_1' jakąś liczbę okrągłą, znajdziemy odpowiednią wartość dla R_2

$$C_1 R_2 = C'_1 R_1 \quad \text{czyli} \quad R_2 = \frac{C'_1}{C_1} \cdot R_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32$$

Długości R_1 i R_2 w ścisłym rozumieniu nie potrzebujemy. Wodzydło bowiem opatrzone jest na wysuwalnej części podziałką, dla której koniec drugiej części stanowi wskazówkę. Ustaliwszy więc zapomocą śrubki długość ramienia wodzącego, otrzymamy stan podziałki, odpowiadający długości R_1 . Teraz zmieńmy tę długość, wysuwając n. p. wodzydło o długość a czyli $R_2 = R_1 + a$, gdzie a oznacza pewną ilość odstępów na podziałce.

Dla obu tych ramion, tj. dla R_1 i $R_1 + a$ mamy stałe C_1 i C'_1 tudzież n_1 i n_2 zatem dla tej samej powierzchni P otrzymamy:

$$P = C_1 n_1 = 2R_1 r' \pi n_1 \quad \text{i}$$

$$P = C'_1 n_2 = 2(R_1 + a) \pi \cdot n_2 \quad \text{stąd zaś}$$

$$R_1 n_1 = (R_1 + a) \cdot n_2 \quad \text{czyli} \quad R_1 (n_1 - n_2) = a \cdot n_2 \quad \text{a wkońcu}$$

$$R_1 = \frac{a n_2}{n_1 - n_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33$$

Chcąc mieć stałą w pewnej, okrągłej liczbie n. p. C_0 — dobierzemy odpowiednie R_0 z proporcji $C_0 : C_1 = R_0 : R_1$ a stąd

$$R_0 = \frac{C_0}{C_1} \cdot R_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34$$

wstawmy tu za R_1 wartość z równ. 33 to dostaniemy

$$R_0 = a \cdot \frac{C_0}{C_1} \cdot \frac{n_2}{n_1 - n_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 35$$

Stan podziałki dla R_1 znamy — chcąc więc ustawić wodzydło tak, by długość jego odpowiadała wartości R_0 , zmienimy poprzednią długość o różnicę $R_1 - R_0$, skracając lub wydłużając o tę ilość wodzydło.

Dla każdej skali rysunku będzie miała stała C_1 inną wartość, jeżeli wyniki mamy otrzymać odpowiednie do skali.

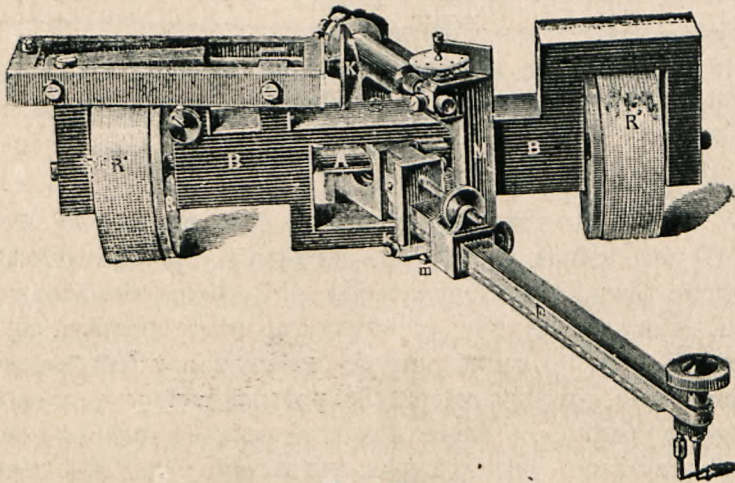
Przy obwodzeniu danej powierzchni, powinien być planimetr tak ustawiony, by kąt rozwarcia jego ramion mieścił się między 60° a 120° . — Daną figurę należy obwoździć, raz w jednym kierunku, odczytując na początku i przy końcu stan liczydła, potem drugi raz, w przeciwnym kierunku i znowu odczytać stan liczydła, który właściwie wykaże małą różnicę z początkowym odczytem. Następnie przerzuca się wodzydło i taksamo obwoździ się dwa razy figurę. Z obu podwójnych odczytów dla n_1 oblicza się średnią arytmetyczną.

Planimetr Amslera nie jest precyzyjnym — nie daje też zbyt dokładnych rezultatów, na co również ma wpływ i rodzaj papieru, po którym często kółko się ślizga, gdy jest bardzo gładki. Wymaga

on częstej kontroli stałej C , a z powodu samej konstrukcji, nie nadaje się do pomiaru dużych powierzchni. Jest jednak tani i łatwy w użyciu, błędy zaś pomiarów, przy należytej uwadze mieszczą się zawsze w granicach dozwolonych błędów — dlatego jest też najczęściej rozpowszechniony.

O wiele dokładniejszym, a nawet najlepszym, jest planimetr precyzyjny Coradiego rys. 56. Można nim mierzyć tak bardzo małe, jak i bardzo duże powierzchnie, bo mające rzeczywistą szerokość na rysunku 40 cm, a dowolną długość, z nadzwyczajną dokładnością.

Jeżeli bowiem planimetr Amslera daje dokładność do $\frac{1}{250}$ mierzonej powierzchni, to planimetr Coradiego daje 10 razy większą dokładność.



Rys. 56.

Konstrukcja planimetru spoczywa na ramie BB — pod którą, lub przez którą, przechodzi oś złączona z kółkami $R' R'$ mającymi szorstkie obwody. Każdy obrót kółek, przenosi się na tarczę K a stąd na liczydło.

Wodzydło F jest podobnie urządzone jak w planimetrze Amslera, da się zatem skracać i przedłużać. Stałą planimetru otrzymujemy podobnie jak poprzednio; również można wodzydło tak nastawiać, by stała była jakąś okrągłą liczbą. Zresztą postępuje się podobnie, jak z planimetrem biegunowym

Co do dokładności, jaką dają planimetry, to dotychczasowe badania dały następujące wyniki:

Planimetr Amslera, mający dokładnie, zapomocą wielu doświadczeń, nastawione wodzydło i obliczone stałe, nawet przy najsta-

Powierzchnia F cm ²	\sqrt{F}	Średni błąd jednego pomiaru t. j. jednego obwiedzenia powierzchni			
		bez uwzględnienia błędów regularnych $\pm 0\cdot003 \sqrt{F}$		z uwzględnieniem błędów regularnych $\pm 0\cdot03 \sqrt{F}$	
1	1\cdot00	$\pm 0\cdot003 \text{ cm}^2 \dots 0\cdot30\%$		$\pm 0\cdot03 \text{ cm}^2 \dots 3\%$	
10	3\cdot16	0\cdot009	0\cdot09	0\cdot09	0\cdot3
25	5\cdot00	0\cdot015	0\cdot06	0\cdot15	0\cdot6
100	10\cdot00	0\cdot030	0\cdot03	0\cdot30	0\cdot3
225	15\cdot00	0\cdot045	0\cdot02	0\cdot45	0\cdot2
400	20\cdot00	0\cdot060	0\cdot015	0\cdot60	0\cdot15
1000	31\cdot62	0\cdot095	0\cdot010	0\cdot95	0\cdot10

Granice błędów według $\Delta F = \pm 0\cdot03 \sqrt{F}$ mogą być dopuszczalne w praktyce w niektórych wypadkach, n. p. w obliczaniu profili poprzecznych, celem obrachowania kubatury robót ziemnych i t. p. Natomiast granica $\Delta F = \pm 0\cdot003 \sqrt{F}$ odpowiada tej dokładności, z jaką wogóle rysunek da się wykonać.

Jakkolwiek błędów regularnych, pochodzących od instrumentu, nie da się mimo wszystko zupełnie usunąć, to przecież można dojść blisko granicy $\Delta F = \pm 0\cdot003 \sqrt{F}$, jeżeli kontroluje się przyrząd przed pomiarem, przyczem obwodzi się znaną powierzchnię, mniej więcej zbliżoną wielkością do tej, jaką mamy mierzyć.

Wkońcu dodać wypada uwagę, że parcele wąskie a długie, nie nadają się wogóle do pomiaru planimetrem.

Z tego, cośmy wyżej powiedzieli o dokładności pomiarów planimetrem, wynika, że mimo to, że planimetry istnieją już dawno i są w użyciu powszechnem, określenie granicy błędów tego rodzaju pomiarów mało chyba postąpiło. Sam rodzaj pomiarów odgrywać tu musi ważną rolę. Mamy bowiem do czynienia z powierzchniami na planie, zatem w skali, z powierzchniami wogóle bardzo małymi. Każde zboczenie z obwodu powoduje błąd, oko i ręka mają więc duży wpływ — nadto sama konstrukcja przyrządów, lekkich zwłaszcza Amslera, gdzie małemu tarcu na obwodzie kółka L przeciwstawia się tarcie na osi i przenośni na liczydło, tak, że niekiedy, gdy papier jest gładki, kółko się nie obraca i daje liczne przyczyny do błędów. Na papierze chropawym znowu kółko przeskakuje wklęsłości, na czem cierpią odczyty ilości obrotów. Wszystkich tych błędów nieda się ogólnym wzorem objąć i uwzględnić. Ważną rzeczą jest tu do-

świadczenie i wprawa. Z tego wszystkiego jednak wypływa wskazówka, by ile możności, już w pomiarach w polu zbierać dane do obliczania powierzchni, względnie ułatwiać kontrole. Małe powierzchnie mierzyć należy w polu rozkładając je na pojedyncze figury. Dla większych lub wielkich, kontrolę tworzą stałe punkty tryangulacyjne i wierzchołki polygonów, które dadzą nam ramy dla mierzonych obszarów, mieszczących się w nich, tak, że do obliczenia pozostaną tylko pewne części, wchodzące lub wychodzące poza te ramy. Każdy arkusz planu ma określoną wielkość, a zatem i powierzchnię. Pomyślmy sobie, grupę różnych, większych i mniejszych obszarów, mieszczących się w ramach arkusza. Obliczmy ich powierzchnie każdą z osobna i porównajmy z powierzchnią arkusza. Z pewnością okaże się znaczna różnica. Różnicę tę potrzeba wówczas rozdzielić, ale jak? Teoria mówi, że nie można tego robić proporcjonalnie do wielkości poszczególnych powierzchni. Przyjmijmy więc równanie 56.

$$\Delta F = k \sqrt{f}.$$

i według niego obliczmy błędy.

Dane są powierzchnia arkusza F — oraz suma obliczonych powierzchni $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n = [f]$ 40

Następnie $F - [f] = w$ 41

Nazwijmy poprawione powierzchnie przez $f'_1 f'_2 \dots f'_n$ to

$$f'_1 = f_1 + k \sqrt{f_1}$$

$$f'_2 = f_2 + k \sqrt{f_2}$$

.
.
.

$$f'_n = f_n + k \sqrt{f_n}$$

$$F = [f'] = (f) + k [V f] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 42$$

stąd wynika, że $F - f = w = k [V f] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 43$

$$\text{a wkońcu } k = \frac{w}{[V f]} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44$$

Mając k obliczymy wyrównane powierzchnie $f'_1 f'_2$ i t. d.

$$f'_1 = f_1 + k \sqrt{f_1} \quad f'_2 = f_2 + k \sqrt{f_2} \quad \text{i t. d.} \quad . \quad . \quad . \quad 45$$

Przykład:

Przypuśćmy, że jakiś czworobok, którego wszystkie boki i obie przekątne pomierzono dokładnie i pomiary wyrównano, ma obliczoną na podstawie tych pomiarów powierzchnię rzeczywistą na planie

$F = 205.6 \text{ cm}^2$. Czworobok ten podzielono następnie na planie na trzy części i pomierzono poszczególne części planimetrem — miarownicie:

$f_1 = 72.4 \text{ cm}^2$ $f_2 = 51.5 \text{ cm}^2$ i $f_3 = 80.5 \text{ cm}^2$ $[f] = 204.4 \text{ cm}^2$
 $w = F - [f] = 1.2 \text{ cm}^2$. Mamy teraz wyrównać te pomiary.

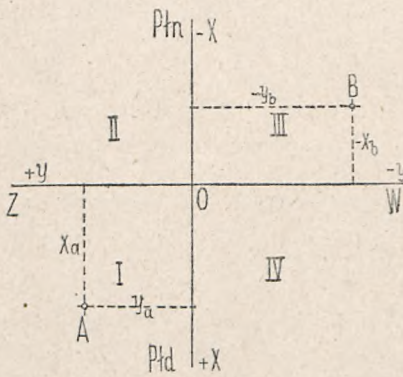
$\sqrt{f_1} = 8.509$	$k = \frac{w}{[V_f]} =$	$k \sqrt{f_1} = 0.414$	$f'_1 = 72.814$
$\sqrt{f_2} = 7.176$		$k \sqrt{f_2} = 0.349$	$f'_2 = 51.849$
$\sqrt{f_3} = 8.972$		$k \sqrt{f_3} = 0.437$	$f'_3 = 80.937$
$[V_f] = 24.657$	$k = 0.0487$	1.200	$F = 205.600 \text{ cm}^2$.

KIERUNKI I WSPÓLRZĘDNE. WIELOBOKI. TRYANGULACJA.

ROZDZIAŁ VI.

§ 1. Prostokątny układ współrzędnych, jako podstawa do obliczania współrzędnych punktów oraz zdjęć znacznych nawet obszarów, n. p. dla Małopolski przyjęto jeden taki układ, mający początek na Kopcu Unii Lubelskiej, dzieli dany obszar, linią $-x \dots +x$ idącą z południa na północ, na część wschodnią i zachodnią, następnie

linią $-y \dots +y$ na część północną i południową. Obie te osie, zwane ośmiami współrzędnymi, przecinają się w punkcie początkowym „O” czyli zerowym, tworząc t. z. układ współrzędnych rys. 57. Obie osie razem dzielą cały obszar na 4 ćwiartki oznaczone od I do IV w kierunku ruchu wskazówek na zegarze.



Rys. 57.

Położenie jakiegokolwiek punktu oznaczają współrzędne n. p. punkt A ma współrzędne $+y_a$ i $+x_a$, punkt B natomiast oznaczony jest przez $-y_b$ i $-x_b$.

Położenie punktu początkowego układu współrzędnych $y_0 = 0$
 $x_0 = 0$.

Równanie osi $+y \dots -y$ $x = 0$ 1

„ „ $+x \dots -x$ $y = 0$ 2

Równanie prostej, równoległej do osi $+x = x$, po prawej stronie układu ma kształt: $y = -b$ 3

gdzie $-b$ oznacza odległość na osi y mierzoną od punktu 0.

Podobnie równanie równoległej do osi y po stronie północnej:
 $x = -b_1$ 4

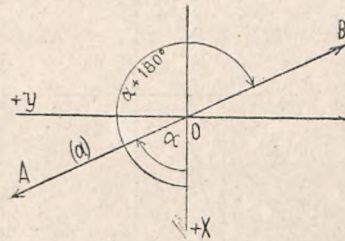
Taksamo, analogicznie do rów. 3 i 4 — równanie równoległych do osi

$$y = +b \quad \dots \dots \dots 5$$

oraz $x = +b_1 \quad \dots \dots \dots 6$

po stronie zachodniej i południowej.

Jakakolwiek linja prosta da się ściśle określić na płaszczyźnie układu, albo zapomocą dwóch punktów, albo zapomocą jednego punktu i kierunku. Jako kierunek, przyjmujemy kąt, zawarty między osią + x idącą ku północy, a daną linją. Kąt ten nazywa się azymutem. Na rys. 58 — kąt α pomierzony w kierunku ruchu wskazówek na zegarze, przedstawia wartość kierunku, czyli azymutu prostej OA, przechodzącej przez punkt „O” i oznacza się: $\alpha = (OA)$ lub $\alpha = (a)$. Prosta OA jest temsamem ściśle określona, bo przechodzi przez początek układu i idzie w kierunku OA od O ku A, tworząc z osią + x kąt α . Wprost przeciwny kierunek do poprzedniego, wskazuje kierunek prostej OB — czyli kierunek od A ku O na jego przedłużeniu.



Rys. 58.

Z rysunku widzimy,

$$\text{że } (OB) = (AO) = \alpha + 180^\circ = (a) + 180^\circ \quad \dots \quad 7$$

Kierunek ten dostaniemy gdy kierunek O—A obrócimy około punktu „O” o 180° w kierunku wskazówek na zegarze, a że ten kierunek obrotu przyjęto jako dodatni, więc w tym wypadku, do kąta α dodamy 180° . Ale ten sam kierunek otrzymamy, obracając O—A około punktu „O” o 180° , lecz od lewej ku prawej t. j. w przeciwnym kierunku niż ruch wskazówek na zegarze — kierunek ten przyjęto jako ujemny, a więc otrzymamy go odejmując 180° — czyli

$$(\dot{O}B) = (\dot{A}O) = \alpha - 180^\circ = (a) - 180^\circ \quad \dots \quad 8$$

W dalszej konsekwencji powiemy, że kierunek wprost przeciwny do danego kierunku (a) otrzymamy, dodając lub odejmując od niego 180° t. j.

$$(OB) = (AO) = (a) \pm 180^\circ \quad \dots \quad 9$$

Łatwo następnie wywnioskować, że, jeżeli dany kierunek obrócimy o 360° — to powrócimy doń, czyli dodanie lub odjęcie $360^\circ = 2 \cdot 180^\circ$ nie zmienia wcale kierunku, t. j.

$$(OA) = (a) = (a) \pm 360^\circ = (a) \pm 2 \cdot 180^\circ \quad \dots \quad 10$$

To samo tyczy się wszelkich innych kierunków, wychodzących nie z punktu „O” lecz z jakiegokolwiek bądź innego punktu. Kierunek mierzymy wówczas od równoległej do osi + x (rys. 5).

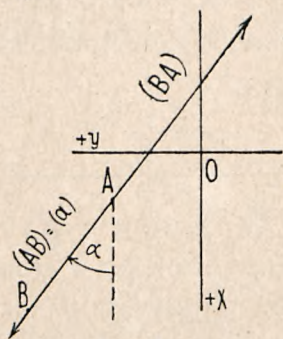
N. p. kierunek od A ku B — określony jest przez kąt α $(AB) = (a) = \alpha$, zaś wprost przeciwny kierunek

t. j. $(BA) = (AB) \pm 180^\circ = (a) \pm 180^\circ$,

a ponieważ dodanie lub odjęcie $2 \cdot 180^\circ$ nie zmienia kierunku, możemy więc napisać:

$(BA) = (AB) \pm 180^\circ \pm 2 \cdot 180^\circ = (AB) \pm 4 \cdot 180^\circ$ i t. d.

wogóle: $360^\circ, 2 \cdot 360^\circ, 4 \cdot 360^\circ - 2n \cdot 360^\circ$ — nie zmienia kierunku.



Rys. 59.

Przyjmijmy teraz kilka różnych kierunków, n. p. boków wieloboku A, B, C, D, E, F, tudzież że którykolwiek azymut jest znany n. p. azymut boku AA' — do którego dany wielobok mamy nawiązać zapomocą pomiaru kątów (rys. 60).

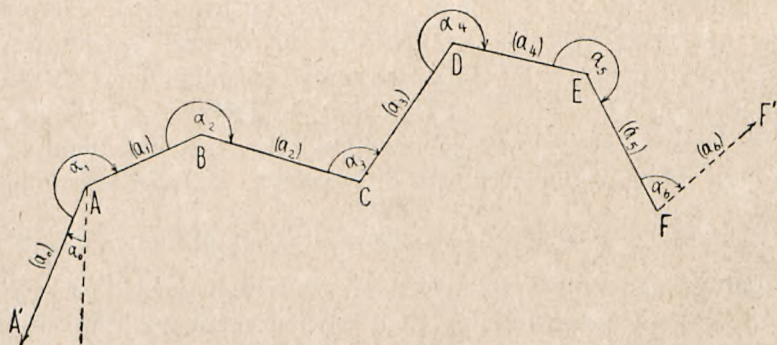
Dany jest zatem azymut (a_0) n. p. boku trójkąta z pomiaru tryangulacji. Wielobok A . . . F wychodzi z wierzchołka tegoż trójkąta i nawiązany jest doń zapomocą pomiaru kąta α_1 . — Następnie po-

mierzono kąty $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ i α_5 . Rozchodzi się o obliczenie kierunków boków wieloboku.

Kierunek $(AB) = (a_1)$ znajdziemy w ten sposób, że dany kierunek $A-A'$ obrócimy około punktu A o pomierzony w polu kąt α_1 zatem

$(a_1) = (AB) = a_0 + \alpha_1$ a ponieważ $(a_0) = \alpha_0$ więc

$(a_1) = (AB) = \alpha_0 + \alpha_1$ 11



Rys. 60.

Zapomocą obliczonego kierunku (a_1) i pomierzonego kąta α_2 obliczymy kierunek (BC) , jeżeli kierunek (BA) a zatem przeciwny do kierunku (AB) obrócimy około punktu B o kąt α_2 odpadnie na kierunek (BC) zatem

$(a_2) = (BC) = (BA) + \alpha_2$ — a że $(BA) = (a_1) \pm 180^\circ$ czyli
 $(BA) = (AB) \pm 180^\circ + \alpha_2 = (a_1) \pm 180^\circ + \alpha_2$ przeto
 $(BC) = \alpha_2 + (a_1) \pm 180^\circ$ a podstawiając za (a_1) według równ. 11
otrzymamy

$$(a_2) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 180^\circ \quad \dots \quad 12$$

Podobnie dostaniemy $(a_3) = (CD)$, obracając kierunek $(CB) =$
 $(a_2) \pm 180^\circ$ około punktu C, aż padnie na kierunek CD, zatem

$$(CD) = (a_3) = (a_2) + \alpha_3 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \pm 2 \cdot 180^\circ \quad 13$$

Tak samo:

$$(a_4) = (a_3) \pm 180^\circ + \alpha_4 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \pm 3 \cdot 180^\circ \quad 14$$

Wreszcie

$$(a_5) = (a_4) \pm 180^\circ + \alpha_5 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \pm 4 \cdot 180^\circ \quad 15$$

Wogóle

$$(a_n) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \pm (n-1) \cdot 180^\circ \quad \dots \quad 16$$

o ile znakowanie będzie takie, jak na rys. 60.

Mając zatem wielobok złączony z jakim danym kierunkiem
czyli nawiązany do pewnego azymutu, oraz pomierzone kąty wierz-
chołkowe, znajdziemy każdy inny kierunek któregokolwiek boku,
według równ. 16. Prócz kątów, mierzy się i długości boków, oraz
zamyka się wielobok, nawiązując go do drugiego kierunku, czyli
azymutu, już ustalonego i znanego, w danym razie do kierunku FF' ,
mierząc ostatni kąt α_6 . Ostatni ten kierunek (a_6) obliczamy według
równ. 15:

$$(a_6) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 \pm 5 \cdot 180^\circ \quad \dots \quad 17$$

tak, jak gdyby nie był znany, a po obliczeniu, porównujemy wynik,
z wartością podaną już i ustaloną, tj. (FF') . Różnica $(a_6) - (FF') = w$,
powstaje z powodu nieuniknionych błędów pomiarów kątów.

Nawiązanie do znanych kierunków, podanych zwykle zapomocą
tryangulacji, stwarza, jak na powyższym przykładzie widzimy, kontro-
le konieczną do wyrównania błędów pomiaru kątów. Bez nawią-
zania punktu początkowego i końcowego do znanych kierunków, nie
mielibyśmy tej kontroli, czyli byłby to wielobok otwarty, bez możli-
wości wyrównania. Gdybyśmy mieli wielobok zamknięty, t. j. punkt
początkowy schodziłby się z końcowym, wówczas suma kątów w ta-
kim wieloboku jest ściśle określoną bo $S = n \cdot 180^\circ - 360^\circ$, gdzie n
jest ilością boków i pomiar kątów ma kontrolę. Natomiast, jak to
wkrótce zobaczymy, przez nawiązanie do danych kierunków, a tem-
samem do punktów o znanych współrzędnych, mieć także będziemy
kontrolę pomiarów długości boków, zatem i możliwość wyrównania
błędów tych pomiarów. W wieloboku otwartym kontroli tej wcale nie

mamy. W wieloboku zamkniętym, ściśle biorąc, kontrolę mamy także, bo inaczej boki nie mogłyby się zejść w jednym punkcie, ale warunek ten nie odnosi się li tylko do tego wieloboku jaki pomierzyliśmy, ale do wszystkich do niego podobnych, mających więc równe z nim kąty, a boki proporcjonalne, czyli do nieskończonej ilości podobnych wieloboków. Mierząc zatem długości złą miarą, wynoszącą jakąś, n krotność normalnej, skonstatować tego nie potrafimy.

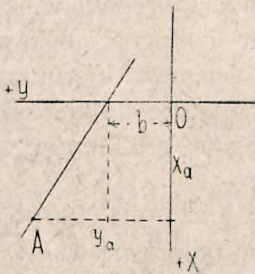
Poznawszy sposób obliczania azymutów czyli kierunków, przejdziemy do współrzędnych.

1. Kierunek prostej wyznacza punkt i kąt jaki ta prosta tworzy z dodatnią stroną osi x . Równanie tak określonej prostej ma kształt

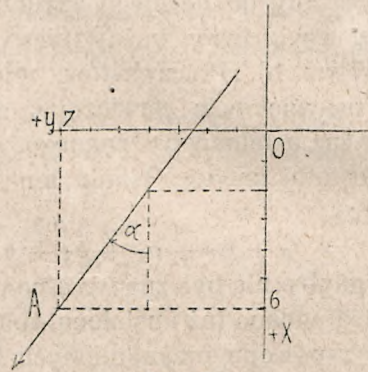
$$y = ax + b \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 18$$

gdzie a jest $\operatorname{tg} \alpha$, b jest odcinkiem na osi y , zaś x i y są współrzędnymi danego punktu A (rys. 61. N. p. rys. 62. Dane:

$$x_a = 6 \quad y_a = 7 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$



Rys. 61.



Rys. 62.

Wyznaczywszy położenie punktu A , narysujemy kąt α z pomocą $\operatorname{tg} \alpha = a$ t. j. odcinając na równoległej do osi y , poczynając od punktu A , 3 jednostki, na równoległej zaś do x , 4 jednostki — natenczas $\operatorname{tg} \alpha = a = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}$. Następnie z równania 18, podsta-

wiając w nim wartości $y = 7$, $x = 6$ oraz $a = \frac{3}{4}$ obliczymy:

$$7 = \frac{3}{4} \cdot 6 + b \quad \text{stąd} \quad b = 7 - \frac{18}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$$

Rzeczywiście dana prosta odcina na osi y tę wartość, poczynawszy od „0“.

2. Następnie, kierunek określają dwa punkty A i B rys. 63 zapomocą swych współrzędnych podane. Dane A (y_a, x_a) i B (y_b, x_b) z rys. wynika, że $\text{tg } \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{tg } (a)$ 19

Dla jakiegokolwiek punktu c o współrzędnych y i x stosunek $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ będzie stałym i równa się stosunkowi $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

czyli $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$ 20

jest równaniem kierunku (AB) przechodzącego przez punkt C. N. p. na rys. 66 dane dwa punkty (1) i (2) zapomocą współrzędnych

$$\begin{array}{l} y_1 = 4 \\ x_1 = -2.5 \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{l} y_2 = -2.0 \\ x_2 = -1.5 \end{array} \quad \left| \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \right.$$

a po wstawieniu wartości:

$$y - 4 = \frac{-2.0 - 4}{-1.5 - (-2.5)} \cdot [x - (-2.5)] \quad \text{czyli}$$

$$y - 4 = + \frac{-6.0}{+1.0} \cdot (x + 2.5) = -6x - 15 \quad \text{a wkońcu}$$

$$y = -6x - 11 \quad 21$$

$\text{tg } \alpha = -6$, t. z. kąt, czyli kierunek leży w IV ćwiartce, t. j. tworzy z dodatnią stroną x kąt $270 + \alpha$, odcina zaś na osi y część $b = -11$, zatem po wschodniej stronie.

3. Jeżeli dane są dwa punkty A i B rys. 63, zapomocą współrzędnych, to możemy obliczyć kierunek (AB), mianowicie

$$\text{tg } (AB) = \text{tg } (a) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad . \quad 22$$

4. Tak samo obliczyć możemy odległości punktu A od B, czy długość odcinka AB:

$$AB' = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \quad \text{a stąd } AB \quad . \quad . \quad 23$$

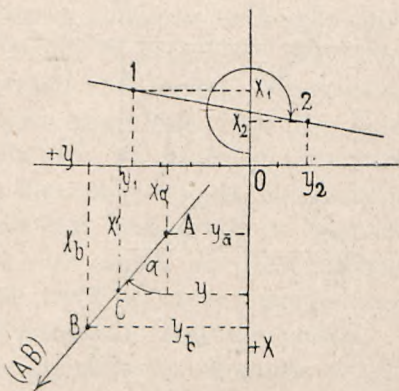
5. Podobnie, mając współrzędne jednego punktu, np. A (rys. 63) kierunek (a) i długość odcinka AB, znajdziemy współrzędne punktu B:

$$y_2 = y_1 + AB \cdot \sin(a) \quad \text{czyli } y_2 = y_1 + s \cdot \sin(a) \quad . \quad . \quad 24$$

$$\text{i} \quad x_2 = x_1 + AB \cdot \cos(a) \quad \text{czyli } x_2 = x_1 + s \cdot \cos(a) \quad . \quad . \quad 25$$

gdzie $AB = s$.

§ 2. Zależnie od ćwiartki, w której kąt się znajduje, funkcje jego będą miały różne znaki, i tak: w I. ćwiartce t. j. do 90° sin,



Rys. 63.

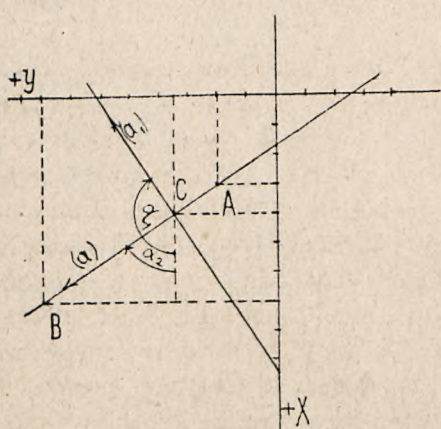
cos i tg są dodatnie; w II. ćwiartce sin +, cos —, tg —, jak to wykazuje nast. tabela:

Funkcje	Ć w i a r t k a			
	I	II	III	IV
sin α	+	+	—	—
cos α	+	—	—	+
tg α	+	—	+	—

Długość odcinka między dwoma punktami, uważamy zawsze jako dodatnią.

Niech będzie dany kierunek (a) . . . tg (a) = a, to kierunek do niego prostopadły (a₁) — utworzy z + x kąt $(\alpha + 90^\circ)^0 = \alpha_1$

$$\text{zatem } \text{tg} (a_1) = \text{tg} (\alpha + 90^\circ) = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{1}{a} \quad 26$$



Rys. 64.

Przyjmijmy, że mamy dany kierunek prostej AB i położenie jej zapomocą równania:

$$y = a x + b \quad 27$$

oraz punkt na tej prostej C — przez który mamy przesunąć prostopadłą. Wówczas równanie prostopadłej:

mając y_c i x_c znajdziemy

$$b_c \cdot y_c = -\frac{1}{a} x_c + b_c \quad 28$$

Przykład:

dane punkty A: $y_a = 3$ $x_a = 2$

B: $y_b = 7$ $x_b = 6$

stąd równanie:

$$y - y_a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} (x - x_a) \quad \text{a po wstawieniu wartości}$$

$$y = \frac{2}{3} x + \frac{5}{3} \quad 29$$

Prostą narysujemy w nast. sposób: dla $x = 0 \dots y = \frac{5}{3}$

podobnie dla $y = 0 \dots x = -\frac{5}{2}$. Mamy więc jeden punkt na osi y, drugi na osi x — czyli kierunek dany.

gdzie n jest ilością pomierzonych kątów. Jako błąd, należy uważać różnicę sumy pomierzonych wartości kątów, t. j. $[S]$ a sumą S wartości rzeczywistych, otrzymaną z jakiegokolwiek kontroli t. j.

$$[S] - S = w \leq 75'' \sqrt{V_n} \quad 37$$

Tak n. p. suma kątów w trójkącie $S = 180^\circ$ — tymczasem z pomiaru otrzymamy n. p. $[S] = 179^\circ 59'$ zatem $w = [S] - S = -60''$ — ponieważ według równ. 37 dozwolony błąd w pomiarze trzech kątów może osiągnąć wartość $75'' \sqrt{3} = 130''$, przeto powyższy pomiar uważać należy jako dobry i różnicę w rozdzielić na wszystkie kąty.

W nast. tabeli podajemy, według wzoru 37 — dozwolone błędy pomiaru n kątów, mianowicie:

Ilość kątów n	Waga $p = \frac{10}{n}$	Granica błędu $75'' \sqrt{V_n}$		Ilość kątów n	Waga $p = \frac{10}{n}$	Granica błędu $75'' \sqrt{V_n}$	
		'	''			'	''
1	10.00	1	15	21	0.48	5	44
2	5.00	1	46	22	0.45	5	52
3	3.30	2	10	23	0.43	6	00
4	2.50	2	30	24	0.42	6	07
5	2.00	2	48	25	0.40	6	15
6	1.70	3	04	26	0.38	6	22
7	1.40	3	18	27	0.37	6	30
8	1.30	3	32	28	0.36	6	37
9	1.10	3	45	29	0.34	6	44
10	1.00	3	57	30	0.33	6	51
11	0.91	4	09	31	0.32	6	58
12	0.83	4	20	32	0.31	7	04
13	0.77	4	30	33	0.30	7	11
14	0.71	4	41	34	0.29	7	17
15	0.67	4	50	35	0.29	7	24
16	0.63	5	00	36	0.28	7	30
17	0.59	5	09	37	0.27	7	36
18	0.56	5	18	38	0.26	7	42
19	0.53	5	27	39	0.26	7	48
20	0.50	5	35	40	0.25	7	54

Różnicę „ w ” rozdzielić należy równo na wszystkie kąty, po $\frac{w}{n}$ ze znakiem przeciwnym. Ten sposób rozdziału błędu może być zastosowany, tylko w tym wypadku, gdy wszystkie kąty były mierzone w jednakowych warunkach i z równą dokładnością — gdy zatem różnice między długościami ramion nie przenosiły w najgorszych warunkach stosunku $\frac{1}{4}$. W innych wypadkach, różnicę w rozdzielić

się nierównomiernie, a mianowicie proporcjonalnie do sumy odwrotnych wartości długości ramion.

Nazwijmy poprawki kątów przez $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots$ a długości ramion zamykające odpowiednie kąty przez $s_0 s_1 ; s_1 s_2 ; s_2 s_3 ; \dots$ to $w = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots$ jeżeli

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 - \dots = \left(\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_1} \right) : \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \right) : \left(\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} \right) \quad 38$$

Wróćmy teraz do naszego zadania.

Dany azymut (a_0) — kąty $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_6$

$$(a_1) = (a_0) + \alpha_0$$

$$(a_2) = (a_1) + \alpha_1 \pm 180^\circ = (a_0) + \alpha_0 + \alpha_1 \pm 180^\circ$$

$$(a_3) = (a_2) + \alpha_2 \pm 180^\circ = (a_0) + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \pm 2 \cdot 180^\circ$$

$$(a_4) = (a_3) + \alpha_3 \pm 180^\circ = (a_0) + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \pm 3 \cdot 180^\circ$$

$$(a_7) = (CD) = a_0 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6 + 5 \cdot 180^\circ$$

Ostatni kierunek (CD) jest dany, stały i niezmienny. Zapomocą pomiarów wieloboku doszliśmy także do tego samego kierunku, przyjmawszy go za ostatni bok i przyjmijmy, że jego azymut, teraz obliczony wynosi (a'_7), podczas gdy (CD) = (a_7). Różnica (a_7) — (a'_7) = w powstała wskutek błędów w pomiarach kątów, nie powinna przekraczać dozwolonej granicy,

$$\text{t. j. } w \leq 75'' \vee w \leq 3'18'' \text{ lub } \leq 198''.$$

Jeżeli różnica w nie przekracza dozwolonej granicy i gdy równocześnie pomiary były wykonywane w równych warunkach, wówczas różnicę w podzielimy na wszystkie kąty równo, dodając każdemu — $\left(\frac{w}{7} \right)$ — W przeciwnym razie wyrównamy błąd w myśl równania 38.

Przy wyrównywaniu kątów obliczymy na nowo azymuty, tak samo jak poprzednio.

Teraz na podstawie poprawionych azymutów, obliczymy współrzędne według równań 24 i 25:

$$y_1 = y_a + a_1 \sin(a_1)$$

$$y_2 = y_1 + a_2 \sin(a_2) = y_a + a_1 \sin(a_1) + a_2 \sin(a_2)$$

$$y_3 = y_2 + a_3 \sin(a_3) = y_a + a_1 \sin(a_1) + a_2 \sin(a_2) + a_3 \sin(a_3)$$

$$y_6 = \dots = y_a + a_1 \sin(a_1) + a_2 \sin(a_2) + a_3 \sin(a_3) + \dots + a_6 \sin(a_6) \quad 39$$

W ten sam sposób obliczymy odcięte:

$$x_1 + x_a + a_1 \cos(a_1)$$

$$x_2 + x_a + a_1 \cos(a_1) + a_2 \cos(a_2)$$

·
·
·

$$x_6 = x_a + a_1 \cos(a_1) + a_2 \cos(a_2) + \dots + a_6 \cos(a_6) \quad 40$$

Różnice $(y_b - y_a)$ i $(x_b - x_a)$ powinny być zgodne z danymi

$$(y_c - y_a) \text{ i } (x_c - x_a). \quad 41$$

Niezgodność pochodzi tu znowu od błędów pomiarów długości.

Wogóle dostaniemy różnice:

$$(y_c - y_a) - [a \cdot \sin(a)] = l_y \text{ tudzież } \dots$$

$$(x_c - x_a) - [a \cdot \cos(a)] = l_x \quad 42$$

Zapomocą obliczonych błędów l_y i l_x współrzędnych, obliczymy, w zrozumiały sposób, błąd długości boków:

$$l_a = \sqrt{l_y^2 + l_x^2} \quad 43$$

Gdzie l_a nie powinno przekraczać dozwolonej różnicy pomiaru podwójnego, obliczonej z cytowanego poprzednio wzoru:

$$\Delta a = 0.00015 a + 0.005 \sqrt{Va} + 0.015.$$

Jeżeli błąd mieści się w naznaczonych granicach, to możemy przystąpić do wyrównania błędów pomiaru długości, a wykonamy w następujący sposób:

$$d_y = -\frac{l_y}{[a]} \text{ i } d_x = -\frac{l_x}{[a]} \quad 44$$

gdzie $[a]$ jest sumą długości boków, zaś d_y i d_x poprawkami dla współrzędnych na jednostkę długości.

Poprawki te rozdzielimy na wszystkie współrzędne, proporcjonalnie do ich długości, zatem poprawki dy_1, dy_2, \dots będą:

$$dy_1 = \frac{l_y}{[a]} \cdot a_1 \quad dy_2 = \frac{l_y}{[a]} \cdot a_2 \text{ i t. d. } \quad 45$$

$$dx_1 = \frac{l_x}{[a]} \cdot a_1 \quad dx_2 = \frac{l_x}{[a]} \cdot a_2 \text{ i t. d. } \quad 46$$

Otrzymaliśmy tedy nowe rzędne:

$$y'_1 = y_1 + dy_1 = y_a + a_1 \sin(a_1) + dy_1 \text{ i t. d. i podobnie}$$

$$x'_1 = x_1 + dx_1 = x_a + a_1 \cos(a_1) + dx_1 \text{ ,, } \quad 47$$

Możemy także poprawić i długości boków o ile to nam jest potrzebne, według równania:

$$a_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{\sin(a_n)} \text{ lub } a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{\cos(a_n)} \quad 48$$

§ 4. Daleko trudniejsze będzie wyrównanie błędów w kątach, jeżeli długości ramion były bardzo różne. Różnicę w rozdzielimy teraz proporcjonalnie do sumy z odwrotności długości ramion.

$$\begin{array}{ll} \text{N. p. } a_1 = 40\cdot00 \text{ m} & a_3 = 200\cdot00 \text{ m} \\ & a_4 = 300\cdot00 \text{ „} \\ a_2 = 100\cdot00 \text{ „} & \end{array}$$

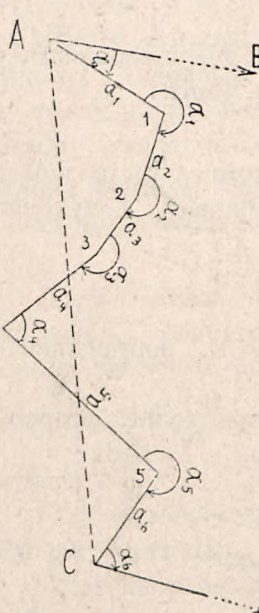
Stosunek najkrótszego ramienia 40·00 m do najdłuższego 300 m wynosi $\frac{1}{7\cdot5}$ — dozwolony zaś jest najwyżej $\frac{1}{4}$. W zwykły więc sposób kątów wyrównywać nie można.

Przypuśćmy, że $w = 150''$ to otrzymamy, według równ. 48

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) : \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) : \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 49$$

nazwijmy, celem uproszczenia $\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) = a$ — podobnie pozostałe b i c .

to $\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = a : b : c$ a stąd według reguły spółki



$$\delta_1 = \frac{-w}{a+b+c} \cdot a, \quad \delta_2 = \frac{-w}{a+b+c} \cdot b,$$

$$\delta_3 = \frac{-w}{a+b+c} \cdot c \quad . \quad . \quad . \quad 50$$

Poprawki mają jak zwykle znak przeciwny, co uwzględniono.

Wracając do przykładu, obliczymy :

$$a = \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{100}\right) = 0\cdot025, \quad b = \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200}\right) = 0\cdot015,$$

$$c = \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{300}\right) = 0\cdot00833, \quad \text{następnie}$$

$$\delta_1 = \frac{-150}{0\cdot04833} \cdot 0\cdot025 = -77\cdot6'' \quad . \quad . \quad . \quad 51$$

$$\delta_2 = \frac{-150}{0\cdot04833} \cdot 0\cdot015 = -46\cdot56'' \quad . \quad . \quad . \quad 52$$

$$\delta_3 = \frac{-150}{0\cdot04833} \cdot 0\cdot00833 = -25\cdot856'' \quad . \quad . \quad . \quad 53$$

$$\text{Suma} \quad . \quad . \quad . \quad -150\cdot016''$$

Powyższe poprawki zaokrąglimy :

$$\delta_1 = -77\cdot6'' \quad \delta_2 = -46\cdot5'' \quad \delta_3 = -25\cdot9'' \quad [\delta] = -150''$$

PRZYKŁAD.

§ 5. Dane są punkty A i C zapomocą współrzędnych (rys. 66) oraz azymuty (AB) i CD.

Pomierzono kąty $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_6$ i długości boków.

Całe obliczenie zestawione jest w nast. tabeli (według Jordana.)

W rubryce 2 wpisane są pomierzone w polu, kąty wierzchołkowe wieloboku. Pomiar kątów odbywa się albo serjami, albo metodą repetycyjną, jak to później zobaczymy — z kilku pomiarów, oblicza się średnią, stąd też rezultat pomiaru wyraża się w sekundach.

Suma wszystkich pomierzonych kątów wynosi $1353^{\circ}08'34''$, w czym jest 7-krotność z 180° t. j. 1260° — pozostaje $93^{\circ}08'34''$. Ponieważ z azymutów punktów A i B — wypisanych na początku i końcu kolumny 3 — wynika różnica: $278^{\circ}55'47'' - 185^{\circ}44'39'' = 93^{\circ}11'8''$ której zmieniać nie można i musi się uważać za dobrą, przeto niezgodność musi się przypisać błędom pomiaru kątów. Błąd ten wynosi $93^{\circ}11'8'' - 93^{\circ}08'34'' = +154''$. Błąd ten wyrównamy w prosty sposób, rozdzielając całą różnicę $154''$ na wszystkie kąty równo, t. j. dzieląc go na 9 równych części po $17''$ — a że pozostaje $1''$ więc dodamy ją do ostatniego kąta. Poprawki te wpisano w kolumnie 5, a nadto uwidoczono w rubryce 2, przy pomierzonych kątach. Mając wyrównany błąd w kątach, obliczymy azymuty w znany sposób. Rezultaty znajdują się w rubryce 3.

W rubryce 4 mamy długości boków i sumę ich, według pomiarów.

W rubrykach 6 i 7 obliczono logarytmy z $a \cdot \sin(\alpha)$ i $a \cdot \cos(\alpha)$ służących do obliczania rzędnych i odciętych a to różnic $y_2 - y_1$ i t. d.

Suma obliczonych Δy wynosi 775.39 m, podczas gdy współrzędne punktów stałych A i B podają tę wartość na 775.65 . Różnica $775.65 - 775.39 = d_1 = +0.26$ m powstała skutkiem błędów pomiarów długości. Błąd ten rozdzielimy proporcjonalnie do poszczególnych długości, mianowicie różnica 0.26 m podzielona przez $[a]$ t. j. przez 1454.13 m daje błąd jednostkowy, t. j. $26 : 1454 = 0.01788$ cm na 1 m. Ażeby otrzymać poprawkę dla y_1 — pomnożymy ten błąd jednostkowy przez długość boku t. j. $0.01788 \cdot 159.6 = 2.8$ cm czyli 3 cm, co też dodane jest do rzędnej y_1 . Tak samo postąpiliśmy z odciętymi. Wkońcu, postępując od punktu A ku B, obliczono współrzędne, a to rzędne według wzoru: $y_1 = y_0 + a \cdot \sin(\alpha)$ i t. d.; odcięte według wzoru: $x_1 = x_0 + a \cdot \cos(\alpha)$ — z uwzględnieniem znaków.

Błąd pomiaru długości całego wieloboku wyraża się wartością: $d[a] = \sqrt{(d_y)^2 + (d_x)^2} = 0.48$ m. Ponieważ $[a] = 1454.13$ m. przeto błąd 46 cm znajduje się w dozwolonych granicach. Wkońcu, na podstawie poprawionych y i x można obliczyć wyrównane długości $a_1 a_2 \dots$ gdyby tego zaszła potrzeba.

WIELOBOK ZAMKNIĘTY SAM W SOBIE.

§ 6. Poprzednio mieliśmy wielobok nawiązany do dwóch punktów stałych i dwóch kierunków. Był on również zamkniętym, bo dwa stałe punkty, początkowy i końcowy, dają także określony

kierunek, gdyby drugiego kierunku nie było, tylko sam stały punkt. Lecz takie nawiązanie, dawało nam możliwość ścisłej kontroli, wyrównania błędów i uzgodnienia wszystkich pomiarów z istniejącą tryangulacją.

Wielobok nie nawiązany do stałych punktów, lecz tylko zamknięty sam w sobie, t. j. wychodzący z pewnego punktu i wracający doń, da się również wyrównać, lecz bez przerachowania i późniejszego nawiązania go do punktów stałych i wyrównania błędów ponownie, nie może być włączony w mapy.

Po wytyczeniu takiego wieloboku n. p. według rys. 67 — pomierzmy jego boki i kąty wewnętrzne lub zewnętrzne.

Suma kątów zewnętrznych w wieloboku zamkniętym wynosi:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = (n + 2) \cdot 180^\circ \quad . \quad . \quad . \quad 54$$

podobnie, suma kątów wewnętrznych

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n = (n - 2) \cdot 180^\circ \quad . \quad . \quad . \quad 55$$

Jeden lub drugi warunek, stanowi kontrolę pomiaru kątów. Niezgodność, powstała wskutek błędów pomiarów kątów, rozdzielamy równo na wszystkie kąty, jeżeli warunki pracy były jednakowe, albo też rozdzielamy według równ. 38. Przedtem jednakże należy sprawdzić, czy nie jest przekroczona dozwolona granica błędów t. j. w $\leq 75'' \sqrt{V_n}$.

Po zmierzeniu boków i kątów, przystąpimy do obliczenia azymutów i współrzędnych punktów wierzchołkowych. W tym wypadku kąty zostały wyrównane zaraz po ukończeniu pomiarów i już nie będą wymagały poprawek.

Przypuśćmy, że mamy dany azymut boku a , zapomocą kąta α ; możemy też przyjąć kierunek boku a_1 za oś x , a w którymkolwiek punkcie na tej osi, n. p. w wierzchołku (1) początek układu, jeżeli wogóle nie nawiązujemy pomiarów do istniejącej sieci punktów stałych. W razie potrzeby, można będzie wielobok nawiązać i współrzędne przerachować. Mamy więc:

$$(a_1) = \alpha_1$$

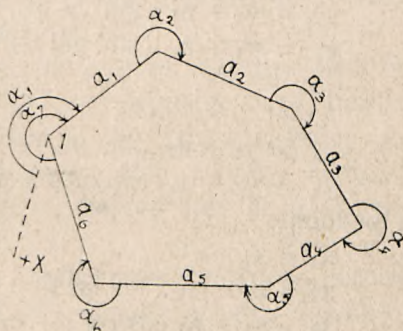
w znany sposób otrzymamy

$$(a_2) = (a_1) \pm 180^\circ + \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \pm 180^\circ$$

$$(a_3) = \quad \quad \quad = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \pm 2 \cdot 180^\circ$$

.

.



Rys. 67.

wreszcie (a_1) jako (a_7)

$$(a_6) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + a_6 \pm 5 \cdot 180^0$$

$$(a_7) - (a_1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_7 \pm 6 \cdot 180^0.$$

Jako różnicę ostatniego i pierwszego równania dostaniemy:

$$(a_7) - (a_1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_7 \pm 6 \cdot 180^0 - \alpha_1 \quad 55$$

a ponieważ $(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_7) = [\alpha]$ t. j. sumie pomierzonych kątów, zatem $(a_7) - (a_1) = 0 = [\alpha] \pm 6 \cdot 80^0 \pm 2 \cdot 180^0$ — bo dodanie lub objęcie $2 \cdot 180^0$ nie zmienia azymutu. Ogólnie:

$$(a_7) - (a_1) = 0 = [\alpha] + n \cdot 180^0 + 2 \cdot 180^0 = [\alpha] + (n + 2) \cdot 180^0$$

czyli $[\alpha] = (n + 2) \cdot 180 \quad 56$

ujemne kąty nie miałyby tutaj znaczenia, więc znak (—) opuszczamy. Gdy kąty są wyrównane, to (a_7) musi się zgodzić z (a_1) — powyżej mamy więc tylko kontrolę rachunku.

Obliczenie współrzędnych.

Przyjmijmy współrzędne punktu (1) ... y_1 i x_1 — natenczas:

$$y_1 = y_1$$

$$y_2 = y_1 + a_1 \cdot \sin(a_1)$$

$$y_3 = y_1 + a_1 \cdot \sin(a_1) + a_2 \sin(a_2)$$

.

$$y_6 = y_1 + a_1 \cdot \sin(a_1) + a_2 \sin(a_2) + \dots + a_5 \sin(a_5)$$

$$y_n = y_1 + a_1 \cdot \sin(a_1) + a_2 \sin(a_2) + \dots + a_{(n-1)} \cdot \sin(a_{n-1}) \quad 57$$

I podobnie:

$$x_1 = x_1$$

$$x_2 = x_1 + a_1 \cdot \cos(a_1)$$

$$x_3 = x_1 + a_1 \cos(a_1) + a_2 \cos(a_2)$$

.

$$x_6 = x_1 + a_1 \cos(a_1) + a_2 \cdot \cos(a_2) + \dots + a_5 \cos(a_5) \quad \text{ogólnie:}$$

$$x_n = x_1 + a_1 \cos(a_1) + a_2 \cdot \cos(a_2) + \dots + a_{(n-1)} \cos(a_{n-1}) \quad 58$$

Obliczając powtórnie, współrzędne pierwszego punktu, jako ostatniego, otrzymamy stąd warunek

$$y_1 - y_7 = y_1 - y_1 = 0 = [a \cdot \sin(a)]$$

$$\text{i } x_1 - x_7 = x_1 - x_1 = 0 = [a \cdot \cos(a)] \quad 59$$

Jeżeli obliczenie wykaże, że warunek 59 — nie jest dochowany, to powodem były błędy pomiaru długości boków.

Otrzymamy zwykle w praktyce

$$[a \cdot \sin(a)] = dy \quad \text{oraz} \quad [a \cos(a)] = dx \quad 60$$

stąd zaś błąd długości wieloboku $\Delta a = \sqrt{dy^2 + dx^2}$ 61

Δa nie powinno przekraczać dozwolonej granicy.

III. dla niekorzystnego terenu

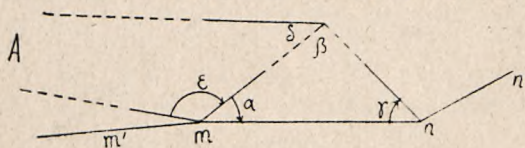
$$d[a] = 0.01 \sqrt{8[a] + 0.0100[a]^2}$$

Granice określone przez tę instrukcję, są dość szerokie, tak, że przy jakiej takiej już staranności, łatwe są do osiągnięcia. W praktyce osiąga się znacznie większą dokładność.

Zdjęcia wielobokowe powinno się w szczegółach obliczać na milimetry, poczem dopiero, rezultat zaokrąglać na całe cm.

Wieloboki łączą zwykle punkty trygonometryczne. Prócz tych, głównych wieloboków, wypada nieraz potrzeba zakładać wieloboki drugorzędne, łączące poszczególne punkty wieloboków głównych. Pierwsze powinny być prowadzone ile możliwości najkrótszą drogą między punktami trygonometrycznymi, boki powinny być także ile możliwości prawie równe, od 100 do 300 m, nie dłuższe, ani nie krótsze. Punkty wierzchołkowe należy tak zakładać, by połączenie dwóch wieloboków ułatwić.

§ 8. Przyjmijmy, że wielobok $m' m n n'$ rys. 68 — przechodzi w pobliżu wieży, której szczyt przyjęto jako punkt trygonometryczny



Rys. 68.

i obliczono jego współrzędne, co w praktyce zdarza się bardzo często, to należałoby wielobok nawiązać do tegoż punktu. Zachodzi tu jednak trudność, po-

miaru kąta i wogóle wytyczenia kierunku $m C$. —

Często jednak z punktu m , może być widzialny jakiś inny punkt A , już ustalony i mający obliczone współrzędne. Przyjmijmy ten wypadek, że punkt A jest z „ m “ widoczny, jakoteż następujący przykład:

Punkt C

$$y_c = -7.773 \cdot 87 \text{ m} \quad x_c = +46.101 \cdot 76 \text{ m} \quad y_a - y_c = -4.66 \cdot 75 \text{ m}$$

Punkt A

$$y_a = -8.240 \cdot 62 \text{ m} \quad x_a = +46.014 \cdot 26 \text{ m} \quad x_a - x_c = -87 \cdot 50 \text{ m}$$

Zmierzmy kąty: $\epsilon = 122^{\circ}51'30''$ $\alpha = 29^{\circ}28'20''$ $\gamma = 50^{\circ}49'40''$
oraz bok $mn = 125 \cdot 16 \text{ m}$.

Z trójkąta $m C n$ i kątów α i γ obliczy się $\beta = 99^{\circ}42'00''$

następnie $Cm = \frac{mn}{\sin \beta} \cdot \sin \gamma = 88 \cdot 438 \text{ m}$.

Z danych współrzędnych punktów A i C obliczymy:

kierunek $(CA) = 259^{\circ}22'56''$ i długość $CA = 474 \cdot 881 \text{ m}$.

W trójkącie $A C m$ dane są teraz boki CA i Cm , oraz kąt ϵ z nich obliczymy kąt wierzchołkowy A :

$$\sin A = \frac{mC}{AC} \cdot \sin \varepsilon \quad \text{zatem} \quad A = 10^{\circ}1'40''$$

a wkońcu $\delta = 180^{\circ} - (A + \varepsilon) = 47^{\circ}6'50''$.

Na podstawie znanych: Cm i δ , obliczymy kierunek

$$(Cm) = (CA) - \delta = 212^{\circ}16'6''$$

a stąd $y_m = y_c + Cm \sin (Cm)$ i $x_m = x_c + Cm \cos (Cm)$
ostatecznie $y_m = 7.826.425 \text{ m}$ $x_m = 46.018.525 \text{ m}$.

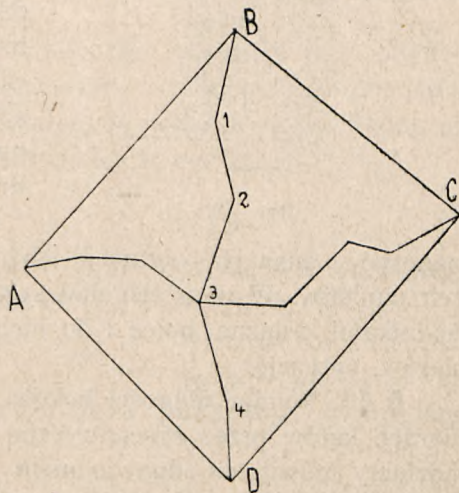
Zapomocą zatem punktu C i A , obliczono współrzędne punktu m , tak, jak gdyby ten punkt był punktem stałym.

Jednakowoż musiano tu bezpośrednio zmierzyć kąt α i ε — nie mierzono tylko długości Cm , co mogłoby sprawiać znaczne trudności, jeżeli n. p. gromochron lub krzyż na wieży obrany był jako punkt trygonometryczny. Gdyby jednak nie było w pobliżu punktu A (najlepiej gdyby to był punkt trygonometryczny) — to nawiązanie wieloboku mogłoby się uskutecznić w ten sposób, że pomiar długości mC trzebaby wykonać zapomocą pomocniczego trójkąta, poczem zmierzyć kąt $m' m C$ — i wielobok nawiązać do punktu C t. j. tylko do współrzędnych tego punktu, nie zaś do jakiegoś ustalonego już kierunku z punktu C wychodzącego, bo punkt C jest niedostępny.

Punkty węzłowe.

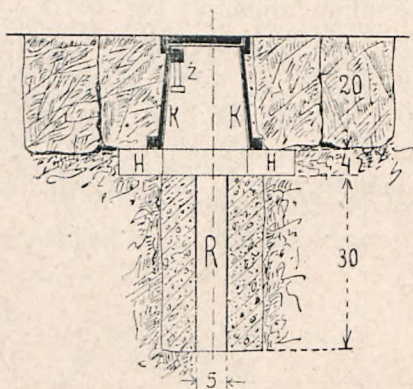
§ 9. W niektórych wypadkach, zwłaszcza dogodnych, nie łączy się wielobokiem dwóch punktów trygonometrycznych, lecz z kilku takich punktów zdąża się za pośrednictwem wieloboków, do jednego wspólnego punktu. Taki wypadek przedstawia rys. 69, gdzie cztery wieloboki schodzą się w jednym punkcie.

W punkcie (3) otrzymamy tedy współrzędne 4 razy, z czterech punktów trygon. wychodząc. Jeżeli długości wszystkich tych wieloboków nie zbyt różnią się między sobą, a właśnie takie punkty wybiera się na węzły, to średnia arytmetyczna obliczonych współrzędnych jest najprawdopodobniejszą wartością i na jej podstawie wyrównamy błędy pomiarów.



Rys. 69.

§ 10. Wierzchołki wieloboków należy w polu oznaczyć i utrwalić tak, by je w razie potrzeby można było łatwo odnaleźć i jako podstawę do zdjęć szczegółowych, czy to celem podziału gruntów, czy odnalezienia i sprawdzenia granicy i t. p. użyć. W wielu krajach istnieje też ustawa, dająca rządowi prawo osadzania kamieni na oznaczenie tych punktów, na gruntach prywatnych. Kamień taki, przynajmniej 60 cm głęboko wkopany w ziemię ma u góry ściętą gładko małą powierzchnię i na niej wryte dwie linje krzyżujące się. Punkt przecięcia jest wierzchołkiem. Ażeby w takim punkcie ustawić tyczkę, używa się specjalnych trójnogów do przytrzymywania jej.



Rys. 70.

W miastach zakłada się wierzchołki wieloboków pod chodnikami rys. 70. Osadza się mianowicie rurkę żelazną R — oblewając ją najlepiej zaprawą cementową w otworze ziemnym. Nad nią osadza się zwykłą pokrywę hydrantową K K — mającą wieko obracalne około sworznia z. Pokrywa spoczywa na krążku drewnianym H. Jest to urządzenie dosyć drogie, ale utrzymuje się doskonale.

Punkty wierzchołkowe należy oznaczyć w planach i sytuację ich naszkicować i nawiązać do trwałych punktów. W miastach umieszcza się specjalnie w murach, nad chodnikami, żelazne bolce i do nich nawiązuje się zapomocą pomiarów, sytuację.

§ 11. Pomiar długości boków. O błędach powodowanych w pomiarach kątów przez ekscentryczne ustawienie teodolitu i sygnałów, będziemy mówili w odpowiednim miejscu przy opisie tego przyrządu. Teraz dodamy jeszcze parę uwag o mierzeniu długości boków.

Pomiar długości najlepiej wykonywać łątami po 5 m dług. Łaty powinny być często sprawdzane na komparatorze, zwłaszcza przy zmianach wilgotności powietrza. Ażeby być całkiem spokojnym o wyniki pomiaru, wypadałoby łaty sprawdzać codziennie, co też często się robi.

Łaty układa się zwykle wprost po pochyłości terenu, mierząc kąt nachylenia śródwagą, lub specjalnymi przyrządami, albo też zapomocą niwelacji. Jakże stąd wypadać mogą różnice, do pokazania tego posłuży nast. przykład:

Zmierzono długości minimalne $l' = 142\cdot579$ m o pochyleniu $108'$ —

Łata Nr 1 . . . długość $5\cdot00$ m + $4\cdot20$ mm

„ Nr 2 . . . „ $5\cdot00$ m + $2\cdot17$ „

W tem było 14 łał Nr. 1 i 14 łał Nr 2 — Osobno odmierzono na łał Nr 1 ... $2\cdot579$ m dodając do tej długości $2\cdot167$ mm błędu.

Uwzględniając rzeczywiste długości łał, otrzymamy długość:

$$l_1 = 14 \cdot 5\cdot00420 + 14 \cdot 5\cdot00217 + 0\cdot00258 = 140\cdot670 \text{ m}$$

wreszcie $l = l_1 \cos 108' = 140\cdot656$ m.

Każdy bok mierzy się dwa razy, tam i z powrotem.

ŚREDNIE BŁĘDY POMIARU KĄTÓW.

§ 12 Wieloboki nawiązujemy zawsze do dwóch kierunków, podanych przez sieć tryangulacyjną. Pierwszy kierunek służy nam do wyjścia, drugi, t. j. ostatni bok zarazem, do kontroli pomiarów. Mieć tu więc będziemy także jakiś średni błąd pomiaru kątów wierzchołkowych.

Przyjmijmy n wierzchołków wieloboku, wliczając w to obydwie stałe punkty, oraz, że błąd w azymucie, z porównania pomiarów z azymutem trygonometrycznie ustalonym, wypada — w. Natenczas średni błąd pomiaru kątów wierzchołkowych będzie:

$$m = \frac{w}{|n|} \dots \dots \dots 66$$

Jeżeli mamy więcej wieloboków obejmujących dany obszar, to każdy z tych wieloboków ma swój średni błąd według 66:

$$m_1^2 = \frac{W_1^2}{n_1} \quad m_2^2 = \frac{W_2^2}{n_2} \quad m_3^2 = \frac{W_3^2}{n_3} \dots \dots$$

to dla całości, złożonej z „r” wieloboków otrzymamy średni błąd pomiaru kątów:

$$m = \sqrt{\frac{1}{r} \left(\frac{W_1^2}{n_1} + \frac{W_2^2}{n_2} + \dots + \frac{W_r^2}{n_r} \right)} \dots \dots \dots 67$$

W praktyce, przy pomiarach miast, przy użyciu specjalnych przyrządów do centrycznego ustawiania teodolitu i t. p. błąd powyższy waha się między 10 a 15". W polu, gdzie nie używa się nadzwyczajnych ostrożności, dochodzi do 30".

Na tem zakończymy sprawę o pomiarach wielobokowych, dodając uwagę, że opis tych pomiarów podano z rozmysłem przed opisem tryangulacji dlatego, że więcej tu było sposobności do poznania metody obliczania kierunków i współrzędnych, jakoteż poznania różnego rodzaju błędów pomiarów. Teraz przejdziemy do opisu

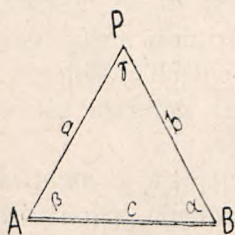
tryangulacji 3-cio i 4-to rzędnej, z jakimi będziemy mieli dość często do czynienia

TRYANGULACJA.

§ 13. Gdy w trójkącie ABP (rys. 71) dany jest jeden bok, n. p. $AB = c$ i kąty $\alpha \beta \gamma$ a przynajmniej dwa z nich, to pozostałe boki dadzą się obliczyć:

$$a = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha \quad \text{i} \quad b = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta \quad \dots \quad 68$$

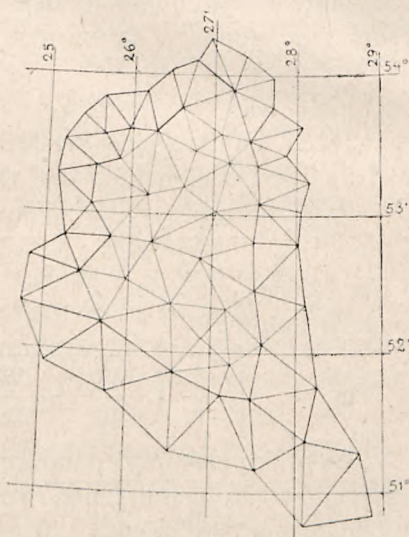
Przypuśćmy, że ten trójkąt graniczy z drugim, mając z nim wspólny bok — pomierzmy kąty w tym drugim trójkącie, to obliczyć będziemy mogli dwa inne boki i t. d. w ten sposób rozwiążemy cały szereg trójkątów, pokrywających bardzo wielki obszar.



Rys. 71.

zemy obliczyć wszystkie inne długości, oraz powierzchnie. System ten, dający szkielet dla zdjęć szczegółowych, opierających się na sieci punktów ustalonych tak co do położenia jak i względem przyjętego układu współrzędnych, nazywa się tryangulacją. Rozróżnia się 4 stopnie tryangulacji: 1) I-go rzędu o bokach 20 do 50 km dług., II-go rzędu 10 do 20 km, są to t. z. główne tryangulacje, wreszcie III-cio i IV-to rzędna o bokach 3 do 10 i 1 do 3 km t. z. tryangulacje pomocnicze.

System trójkątów, pokrywających n. p. kraj, z których każde dwa sąsiednie trójkąty mają jeden wspólny bok, pozwala na to, że zapomocą pomiaru jednego tylko boku w jednym trójkącie, czyli t. zw. podstawy, i pomiaru wszystkich kątów w trójkątach, mo-



Rys. 72.

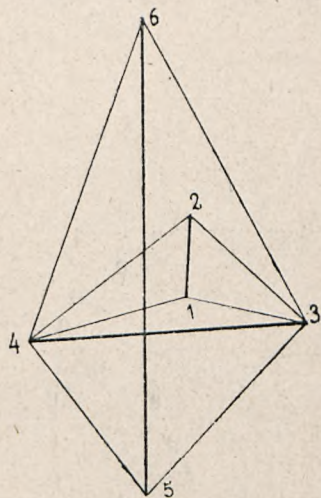
Na rys. 72 podajemy przykład tryangulacji hannowerskiej, według Jordana, wykonanej w latach 1880 do 82.

Podstawę obrano pod Göttingą — dług. 5193 m. Pomiar jej trwał 3 tygodnie, dokładności pomiaru na 1 cm. Już z tego widać wielką korzyść tryangulacji, w porównaniu z pomiarami długości.

Tutaj bowiem zapomocą pomiaru kątów pomiar długości postępuje bez porównania szybciej.

Pomiar podstawy jest trudny i kosztowny. Gdyby więc przyszło do pomiaru długości boku trójkąta I-rzędnego, to jak wyżej wskazano, praca trwałaby bardzo długo — biorąc miarę z czasu trwania pomiaru linii 5193 m długiej, wypada, że bok 50 km długi mierzyłoby się około 30 tygodni. Radzimy więc sobie w ten sposób, że obiera się podstawę krótką, jak n. p. powyżej, 5193 m na terenie dogodnym, równym.

Na rys. 73 podstawa ta oznaczona jest linią podwójną między punktami (1) — (2). Następnie obieramy punkty (3) i (4) a mając podstawę (1) (2) i pomierzone kąty w trójkątach (1)(3)(2) i (1)(4)(2) rozwiążemy te trójkąty, obliczymy współrzędne punktów (3) i (4) a za ich pomocą odległość (3)—(4). W ten sam sposób, tę drugą podstawę przeniesiono na podstawę (5)—(6) o długości 57507 m, czyli pierwotną podstawę powiększono 11 razy. Na rys. 73 widzimy trzy podstawy. Dwie ostatnie, przeniesione z boków trójkątów I-szorzędnych, na podstawę krótką, odwrotnem postępowaniem, jak w pierwszej podstawie, zostały pomierzone celem kontroli pomiarów, wzgl. obliczeń. Zewnętrzny pas trójkątów, uwidoczniiony grubszymi linjami (rys. 72) został zdjęty przedewszystkiem i obejmował na obwodzie całą prowincję. Następnie pomierzono sieć wewnętrzną, cieńszymi linjami wykreśloną.



Rys. 73.

Z tryangulacją I i II rzędną, prócz nawiązania się do jej punktów prawie, że nie będziemy mieli nic do czynienia. Sieć taka, raz w państwie założona, pozostaje niezmieniona. Instytut geograficzny wydaje na żądanie daty poszczególnych punktów trygonometrycznych, mianowicie ich współrzędne, potrzebne do różnych zdjęć w polu.

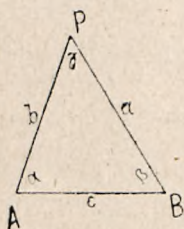
Przejsć więc możemy do III-cio i IV-to rzędnej tryangulacji, z którymi dość często będziemy się spotykali. Te tryangulacje traktujemy jako płaskie, t. j. mamy do czynienia z trójkątami płaskimi oraz prostokątnym układem współrzędnych na płaszczyźnie.

ZASADY OBLICZEŃ.

§ 14. Przedewszystkiem należy poznać dobrze przyrządy służące do pomiaru kątów, zwłaszcza teodolit, którego opis znajduje się,

w rozdz. I, w dalszym ciągu bowiem powoływać się musimy na szczegóły, które tutaj uważać należy jako już znane.

Przyjmijmy na podstawie rys. 74 że dane są punkty A i B zapomocą współrzędnych, oraz, że w przyległym do linii AB — trójkącie APB — pomierzono kąty α β i γ . Zadaniem naszym jest obliczyć współrzędne punktu P. O ile były pomierzone wszystkie trzy kąty, to przypuszczamy, że błąd pomiaru, jaki istnieć musiał, został rozdzielony na wszystkie kąty, tak że suma ich równa się już 180°.



Rys. 74.

Zatem dane są: y_a x_a oraz y_b x_b punktów A i B, z których obliczymy azymut (AB):

$$\operatorname{tg} (AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 69$$

$$\text{następnie } AB = c = \frac{y_b - y_a}{\sin (AB)} = \frac{x_b - x_a}{\cos (AB)} \quad . \quad . \quad 70$$

$$\text{oraz } AP = b = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta$$

$$\text{i } BP = a = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 71$$

Zapomocą azymutu podstawy, t. j. (AB) i kątów α i β znajdziemy azymuty pozostałych boków, mianowicie:

Azymut (AP) obliczymy, gdy kierunek (AB) obrócimy około punktu A w kierunku ruchu wskazówek na zegarze, zatem o kąt $(360^\circ - \alpha)$ a więc $(AP) = (AB) + (360^\circ - \alpha) = (AB) - \alpha + 360^\circ$ a ponieważ 360° nie zmienia kierunku, przeto

$$(AP) = (AB) - \alpha \quad . \quad . \quad . \quad 72$$

Podobnie azymut (BP) dostaniemy, gdy kierunek (BA) = (AB) \pm 180° obrócimy około punktu B o kąt β — zatem

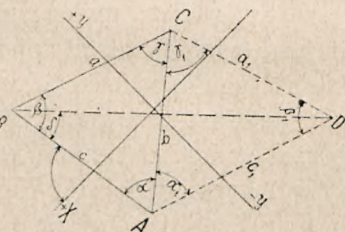
$$(BP) = (AB) + \beta \pm 180^\circ \quad . \quad 73$$

Wkońcu współrzędne punktu P:

$$y_p = y_a + AP \cdot \sin (AP), \quad x_p = x_a + AP \cdot \cos (AP) \quad . \quad 74$$

$$\text{albo } y_p = y_b + BP \cdot \sin (BP), \quad x_p = x_b + BP \cdot \cos (BP) \quad . \quad 75$$

a) Przykład rys. 75.



Rys. 75.

Z pomiarów: $\alpha = 58^\circ 29' 30''$

$$\beta = 64^\circ 12' 20''$$

$$\gamma = 57^\circ 17' 25''$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 179^\circ 59' 15''$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ = -45'' = w$$

$$\text{stąd } \frac{w}{3} = + 15''$$

Wyrównane kąty: $\alpha = 58^\circ 26' 45''$

$$\beta = 64^\circ 12' 35''$$

$$\gamma = 57^\circ 17' 40''$$

$$[\alpha] = 180^\circ 00' 00''$$

$$\log \sin \alpha = 9.93075$$

$$\log \sin \beta = 9.95443$$

$$\log \sin \gamma = 9.92504$$

$$\text{Dane: } y_a = -359\cdot20 \text{ m} \quad x_a = +315\cdot35 \text{ m} \quad y_b = +1020\cdot35 \text{ m}$$

$$x_b = 410\cdot62 \text{ m} \quad \text{tg} (AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{1020\cdot35 + 359\cdot20}{410\cdot62 - 315\cdot35} = \frac{1379\cdot55}{95\cdot27}$$

$$\begin{array}{ll} \log 1379\cdot55 = 3\cdot13974 & (BC) = (BA) + 360^\circ - \beta = \\ - \log 95\cdot27 = 1\cdot97896 & = 86^\circ 2' 58'' \pm 180^\circ + 360 - 64^\circ 12' 20'' = \\ \log \text{tg} (AB) = 1\cdot16078 & (BC) = 201^\circ 50' 38'' \\ \underline{(AB) = 86^\circ 2' 58''} & (AC) = (AB) + \alpha = 144^\circ 32' 28'' \end{array}$$

Długość boków:

$$c = \frac{y_b - y_a}{\sin (AB)} = \frac{1379\cdot55}{\sin (AB)}$$

Następnie

$$a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = 1401\cdot31 \text{ m}$$

$$b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = 1480\cdot00 \text{ m}$$

Wkońcu

$$y_c = y_b + a \cdot \sin (BC) =$$

$$= +1020\cdot35 - 521\cdot40 = +498\cdot95 \text{ m}$$

$$i \quad x_c = x_b + a \cdot \cos (BC) =$$

$$= 410\cdot62 - 1187\cdot90 = -777\cdot28 \text{ m}$$

y_e i x_e można jeszcze celem kontroli obliczyć zapomocą y_a x_a b i (b).

$$\begin{array}{ll} \log 1379\cdot55 & = 3\cdot13974 \\ \log \sin (AB) & = 9\cdot99891 \\ \log c & = 3\cdot14083 \\ \log \sin \alpha & = 9\cdot93075 \\ \log (c \cdot \sin \alpha) & = 13\cdot07158 \\ \log \sin \gamma & = -9\cdot92504 \\ \log a & = 3\cdot14654 \\ \log c & = 3\cdot14083 \\ \log \sin \beta & = 9\cdot95443 \\ \log (c \cdot \sin \beta) & = 13\cdot09526 \\ \log \sin \gamma & = -9\cdot92504 \\ \log b & = 3\cdot17022 \\ \log a & = 3\cdot14654 \\ \log \sin 201^\circ 50' 38'' & = 9\cdot57064 \\ \log (a \cdot \sin (BC)) & = 12\cdot71718 \\ a \cdot \sin (BC) & = -521\cdot40 \\ \log a & = 3\cdot14654 \\ \log \cos (BC) & = 9\cdot92823 \\ \log a \cdot \cos BC & = 3\cdot07477 \\ a \cdot \cos BC & = -1187\cdot90 \end{array}$$

b) Przyjmijmy, że do trójkąta ABC, przytyka drugi trójkąt ADC, w którym pomierzono wszystkie kąty α_1 β_1 γ_1 — wówczas z pomocą boku b, obliczymy boki a_1 i c_1 — a zapomocą azymutu (AC) — obliczymy azymuty (a_1) i (c_1) tudzież współrzędne punktu D (y_d x_d).

Współrzędne y_b x_b y_d x_d posłużą nam do obliczenia kierunku (BD) i długości BD, gdyby zaszła tego potrzeba.

$$\text{Zatem } \text{tg} (BD) = \frac{y_d - y_b}{x_d - x_b}, \quad BD = \frac{y_d - y_b}{\sin (BD)}$$

Zapomocą kierunków obliczymy kąt δ — mianowicie:

$$\delta = (BA) - (BD) \text{ i t. p.}$$

POMIAR KĄTÓW.

§ 15. Używa się tu dwóch metod:

1. Metoda repetycyjna.

Po dokładnem ustawieniu przyrządu nad wierzchołkiem kąta i ustawieniu go w poziomie, nastawiamy alhidadę względem limbusem tak, by noniusz wskazywał $0^{\circ}0'$ i sprzęgamy je silnie ze sobą. Następnie zwalniamy sprzęg limbusem ze spodarką i obracamy limbus po spodarce, kierując lunetę ku lewemu celowi. Ponieważ alhidada jest sprzęgnięta z limbusem, więc równocześnie obróciła się razem z limbusem, a noniusz wskazuje zawsze $0^{\circ}0'$. — Po nakierowaniu lunety na cel, sprzęgamy limbus ze spodarką, poczem patrząc przez lunetę, nastawiamy dokładnie nitkę pionową siatki, na środek sygnału, jakim może być: tyczka, sygnał świetlny, ostre zakończenie dachu wieży i t. p., zapomocą śruby do ruchu leniwego. Po dokładnem nastawieniu siatki, kontrolujemy noniusz, czy nie poruszył się i wskazuje na $0^{\circ}0'$ — następnie odczytujemy drugi noniusz, który powinien wskazywać na $180^{\circ}0'$ — lecz z powodu błędów w przyrządzie, może wskazywać pewną odchyłkę — wreszcie odczytujemy trzeci i czwarty noniusz, jeżeli rozchodzi się o bardzo dokładny pomiar i w tym celu użyliśmy przyrządu z czterema noniuszami, bo często używa się tylko dwóch. Po ukończeniu tych odczytów na noniuszach przy celowej lewego ramienia, pozostawiamy limbus sprzęgnięty ze spodarką, natomiast zwalniamy alhidadę i obracamy ją po limbusem, kierując lunetę do prawego ramienia. Po skierowaniu lunety, sprzęgamy alhidadę z limbusem i znowu nastawiamy nitkę pionową, dokładnie na środek sygnału zapomocą śruby do ruchu leniwego, poczem odczytujemy noniusze w tym samym porządku jak przy lewym ramieniu.

Ponieważ noniusz I. przy celu do lewego ramienia, wskazywał $0^{\circ}0'$ — więc odczyt na prawem. ramieniu dał wielkość kąta; co zapisaliśmy w protokole.

Teraz, pozostawiając alhidadę nadal sprzęgniętą z limbusem, zwalniamy sprzęg limbusem ze spodarką i obracamy limbus po spodarce kierując lunetę znowu do lewego ramienia, poczem sprzęgamy limbus i nastawiamy dokładnie celową. Teraz kontrolujemy I noniusz czy wypadkiem nie został poruszony, zwalniamy alhidadę i powtórnie celujemy do prawego ramienia. Po tym powtórnym pomiarze, mamy na limbusem kąt 2α wskazany przez zero noniusza — kąta jednak nie odczytujemy, zaznaczamy tylko w protokole Nr pomiaru i powtarzamy go trzeci raz i t. d. Pomiar powtarzamy najmniej 4 razy, zwykle 6 lub 8 i dopiero ostatni n-krotny pomiar odczytujemy i za-

pisujemy. W protokole mamy więc zanotowaną n-krotną wartość kąta, przyczem pierwszy odczyt na prawem ramieniu, zapisany w protokole służy jako kontrola. Przy n-krotnym bowiem pomiarze, zero noniusza przejdzie niewątpliwie niejednokrotnie przez $0^{\circ}0'0''$ czyli $360^{\circ}0'0''$ limbusa — tyleż razy po 360° trzeba też będzie dodać do ostatniego odczytu.

Po n-krotnym pomiarze w stronę od lewej ku prawej, t. j. w kierunku ruchu wskazówek na zegarze, pozostawiamy, przy ostatniej celowej limbus sprzągnięty ze spodarką, natomiast zwalniamy alhidadę, obracamy ją po limbusie o 180° i przerzucamy lunetę, kierując celową do prawego ramienia, sprzęgamy alhidadę i odczytujemy noniusze. W ten sam sposób jak poprzednio, idąc tylko w odwrotnym kierunku, mierzymy n-krotnie kąt, zapisując pierwszy i ostatni odczyt.

Przyпускаjąc, że przyrząd posiadał dwa noniusze, otrzymamy po n-krotnym pomiarze w jedną i drugą stronę, 4 n-krotną wartość kąta, zatem

$$\alpha = \frac{n\alpha_1 + n\alpha_2 + n\alpha_3 + n\alpha_4}{4n} = \frac{[n\alpha]}{4n} \dots \dots \dots 76$$

Metodę repetycyjną stosuje się do pomiaru jednego kąta, zatem zwykle przy pomiarach wielobokowych. W tryangulacji w jednym punkcie schodzi się zwykle dwa lub więcej kątów — tam więc zastosujemy inną metodę.

Przykład pomiaru kąta metodą repetycyjną:

KĄT	Powtórzenie Nr	I Położenie lunety		II położenie lunety		UWAGA	
		I noniusz	II noniusz	I noniusz	II noniusz		
1	2	3	4	5	6	7	
(1)1(2)	0	0 ⁰⁰ 0'00"	179 ⁰⁵ 9'50"	180 ⁰⁰ 1'10"	0 ⁰⁰ 0'10"		
	1	120 ⁰³ 2'20"	—	—	—		
	2	—	—	—	—		
	3	—	—	—	—		
	4	—	—	—	—		
	5	242 ⁰⁴ 1'40"	62 ⁰⁴ 1'50"	62 ⁰⁴ 1'40"	242 ⁰⁴ 1'30"	n = 5	
		360 ⁰⁰ 0'00"	540 ⁰⁰ 0'00"	540 ⁰⁰ 0'00"	360 ⁰⁰ 0'00"	+	
	$n\alpha =$	602 ⁰⁴ 1'40"	602 ⁰⁴ 1'50"	602 ⁰⁴ 1'40"	602 ⁰⁴ 1'30"		
	$[n\alpha] =$	2408 ⁰ 164'160"					
	$\frac{[n\alpha]}{4n} = \frac{[n\alpha]}{20} =$	120 ⁰³ 2'20"					

UWAGI: Pierwszy odczyt oznaczamy Nr 0, bo właściwie jest to wycelowanie lunety na pierwszy sygnał, a nie pomiar kąta. Dopiero odczyt na prawem ramieniu, oznaczony Nr 1, daje pierwszy pomiar kąta. Pierwszy odczyt $120^{\circ}32'20''$ daje nam w przybliżeniu wartość kąta, a że pomiar powtórzyliśmy 5-krotnie, więc ostatni odczyt mieć powinien wartość $120^{\circ}32' \cdot 5 =$ około $602^{\circ}40'$ na I noniuszu, tymczasem mamy odczyt $232^{\circ}41'40''$ — wnosimy więc, że podczas pomiarów, zero noniusza przeszło przez 360 na limbusie. Należy przeto dodać 360° do I noniusza w I położeniu lunety i do II noniusza w II położeniu. Na drugim noniuszu odczyty różnią się o 180° dlatego dodano $360 + 180 = 540^{\circ}$ Teraz otrzymaliśmy cztery n-krotne (5-krotne) wartości kąta z pomiarów. Średnia arytmetyczna, t. j. $\frac{[n \alpha]}{4 \cdot n}$ da więc najprawdopodobniejszą wartość kąta t. j. $120^{\circ} 32' 20''$. Metody tej używamy także przy trygonometrycznym pomiarze wysokości.

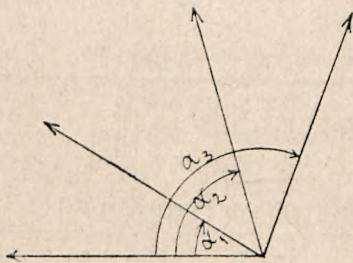
2. Metoda pomiaru serjami.

Do pomiaru kilku kątów o wspólnym wierzchołku, co zwykle ma miejsce przy tryangulacji, stosujemy metodę serjami.

Przypuśćmy, że mamy pomierzyć cztery kąty $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ mające wspólny wierzchołek w punkcie I rys 76.

W tym celu, ustawiamy teodolit dokładnie nad wierzchołkiem, poczem sprzęgamy alhidadę z limbusem, nastawiając noniusz I

na $0^{\circ}0'0''$ i celową na lewe ramie t. j. ku (1). Następnie, pozostawiając limbus sprzęgnięty ze spodarką, zwalniamy alhidadę celujemy do prawego ramienia, sprzęgamy alhidadę, nastawiamy siatkę dokładnie na sygnał i odczytujemy noniusze, zapisując wynik w protokole. Potem zwalniamy znowu alhidadę, nastawiamy celową na następne ramie — sprzęgamy alhi-



Rys. 76.

dadę i odczytujemy noniusze, notując odczyty — tak samo do ramienia 4. W ten sposób, mamy raz pomierzone kąty w I położeniu lunety, w kierunku od lewej do prawej. Po ostatnim odczycie (tutaj do ramienia 4) zwalniamy alhidadę i powtórnie celujemy do punktu (1) — odczytując noniusze, a to celem kontroli. W razie, gdyby okazała się różnica większa jak $5''$ to oznaczyłoby, że limbus się poruszył po spodarce i cały pomiar należałoby powtórzyć. Dotąd mamy limbus sprzęgnięty ze spodarką. Teraz przerzucamy lunetę,

zwalniamy alhidadę i obracamy ją o 180° — mając ciągle limbus sprzągnięty ze spodarką. Celujemy do ramienia (4) — odczytujemy noniusze, potem do (3), (2) wkońcu do (1), czyli powtarzamy poprzedni pomiar, idąc w przeciwnym kierunku.

Taki, podw. pomiar kilkunastu kątów w obu kierunkach nazywa się serją.

Po ukończeniu pierwszej serji, nastawiamy alhidadę na $45^{\circ}0'0''$ albo $60^{\circ}0'0''$ lub $90^{\circ}0'0''$ — zależnie od tego, czy chcemy mierzyć 8 razy czy 6, czy 4 razy dane kąty. Rozchodzi się w tej metodzie o to, by kąty mierzyć kilka razy, ale różnymi łukami limbusu. Limbus bowiem ma zawsze błędy w samym wykonaniu podziałki. Na jednej części są one mniejsze, na drugiej większe — jest to błąd fabrykacji. Mierząc więc różnymi łukami i obliczając średnią, zmniejszamy błąd pomiaru. Po nowem nastawieniu alhidady na pewien kąt na limbusie, powtarzamy w ten sam sposób cały pomiar. Takich serji, jak już powiedziano, stosujemy od 4 do 8.

Następujący przykład pomiaru serjami najlepiej wyjaśni tę metodę. Zastosowano tam tylko dwie serje z różnicą 100° . W ten sam sposób jednak mierzy się i większą ilością serji.

W kolumnie 6 zesumowano tylko minuty i sekundy, bo w stopniach nie może być różnic. W kolumnie 7 oblicza się ze wszystkich odczytów średnią. W kolumnie 8 drugą serję redukuje się na $0^{\circ}0'0''$, przyjmując odczyt przy ramieniu (1) $0^{\circ}0'00''$ zamiast $100^{\circ}00'5''$ — t. j. od wszystkich innych odczytów odejmuje się $100^{\circ}00'05''$. — Tak samo w I serji odjęto $10''$.

Obie serje jak widać z tabeli, wykazują pewne różnice w pomiarze kątów. Z obu więc obliczamy średnią i przyjmujemy ją jako najlepszą wartość, co wykonano w drugiej tabeli.

PRZYKŁAD POMIARU KĄTÓW SERJAMI.

Cel do punktu	I położenie lunety		II położenie lunety		Suma	Średnia	Redukcja na $0^{\circ}0'0''$	
	noniusz I	noniusz II	noniusz I	noniusz II				
1	2	3	4	5	6	7	8	
SERJA I	(1)	$00^{\circ}0'0''$	$180000'20''$	$180000'10''$	$0000'00''$	$00'40''$	$0000'10''$	$0000'00''$
	(2)	$31010'10''$	$211010'30''$	$211010'40''$	$31010'20''$	$40'100''$	$31010'25''$	$31010'15''$
	(3)	$72005'20''$	$252005'40''$	$252005'50''$	$72005'10''$	$20'120''$	$72005'30''$	$72005'20''$
	(4)	$108036'00''$	$288036'10''$	$288036'20''$	$108036'20''$	$144'50''$	$108036'12'5''$	$108036'02'5''$
SERJA II	(1)	$100000'00''$	$280000'10''$	$280000'00''$	$100000'10''$	$00'20''$	$100000'05''$	$0000'00''$
	(2)	$131010'20''$	$311010'20''$	$311010'20''$	$131010'30''$	$40'90''$	$131010'22'5''$	$31010'17'5''$
	(3)	$172005'10''$	$352005'50''$	$352005'40''$	$172005'10''$	$20'110''$	$172005'27'5''$	$72005'22'5''$
	(4)	$208036'20''$	$28036'20''$	$28036'30''$	$208036'30''$	$144'100''$	$208036'25''$	$108036'20''$
		$102'80''$	$102'200''$	$102'210''$	$102'140''$	$408'630''$	$102'157'5''$	

$$(102'157'5'') \cdot 4 = 408'630''$$

WYRÓWNANIE:

CEL	SERJA I	SERJA II	SUMA	ŚREDNIA
(1)	0° 00' 00"	0° 00' 00"	00"	0° 00' 00"
(2)	31° 10' 15"	31° 10' 17.5"	32.5"	31° 10' 16"
(3)	72° 05' 20"	72° 05' 22.5"	42.5"	72° 05' 21"
(4)	108° 36' 02.5"	108° 36' 20"	22.5"	108° 36' 11"
	37.5"	60"	97.5"	
	97.5"			

Poszczególne kąty obliczy się jako różnice celów, n. p. kąt między ramionami (3)—(4) = $108^{\circ} 36' 11'' - 72^{\circ} 05' 21'' = 36^{\circ} 30' 50''$.

Pomiary kątów wykonywać się powinno podczas pogody i przy czystym powietrzu. Pomiary w czasie upału, gdy wibracja powietrza robi cel niepewnym, muszą być błędne.

BŁĘDY POMIARÓW KĄTÓW METODĄ REPETYCYJNĄ I SERJAMI.

§ 15 a. Do pomiaru jednego kąta, zastować możemy obie metody. Na błąd pomiaru składają się: błąd w ustawieniu celowej, t. j. niedokładne ustawienie nitki pionowej na środek sygnału, oraz błąd w odczycie noniuszów. Pierwszy nazwijmy przez α drugi przez β . Ponieważ mamy tu dwie celowe: do lewego i prawego ramienia, przy każdej zaś celowej odczytujemy przynajmniej dwa noniusze i obliczamy z nich średnią, więc każdy z tych błędów popełniamy dwa razy. Zatem średni błąd kąta wyrazi się równaniem:

$$M_1 = \pm \sqrt{2 (\alpha^2 + \beta^2)} \quad 77$$

Przy metodzie repetycyjnej powtarzamy pomiar n razy, mamy zatem $2n$ celowych a tylko dwa odczyty: pierwszy i ostatni.

W tym wypadku, błąd pomiaru, uważanego jako jedno spostrzeżenie wynosi:

$$M' = \pm \sqrt{2n \alpha^2 + 2\beta^2} \quad 78$$

Ponieważ zaś różnicę obu odczytów dzielimy przez ilość spostrzeżeń, t. j. przez n ażeby otrzymać pojedynczą wartość kąta, więc dzielimy przytem przez n i błąd M' . Skutkiem tego średni błąd pojedynczego pomiaru wyniesie:

$$M_{\text{rep}} = \pm \frac{M'}{n} = \pm \sqrt{\frac{2n \alpha^2 + 2\beta^2}{n^2}} = \pm \sqrt{\frac{2}{n} (\alpha^2 + \frac{\beta^2}{n})} \quad . 79$$

Przy metodzie serjami, mierzymy kąt w każdej serji niezależnie, sprzęgając limbus na 0^0 lub $60^0 \dots 90^0$ i t. p. W tym wypadku średni błąd pomiaru jednego kąta wynosi według równ. 77, M_1 mając zaś n takich spostrzeżeń niezależnych, obliczymy błąd średniej arytmetycznej z równania:

$$M_{\text{ser.}} = \pm \frac{M_1}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{2}{n} (\alpha^2 + \beta^2)} \dots \dots \dots 80$$

Porównawszy rezultaty 79 i 80 — widzimy, że błąd pomiaru metodą repetycyjną jest mniejszy — nadto metoda ta, wymagająca mniej odczytów na noniuszach, jest łatwiejszą i szybszą.

Na podstawie doświadczeń, możemy przyjąć następujące wartości cyfrowe błędów α i β :

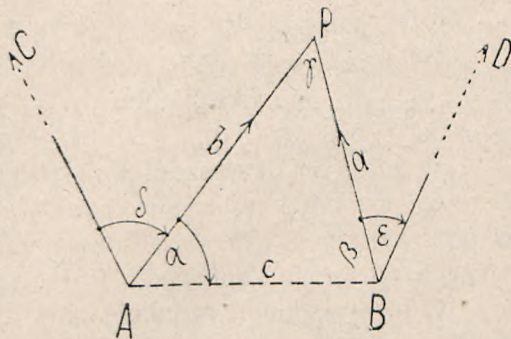
$\alpha = \pm 1''$ $\beta = \pm 5''$ a z równań 79 i 80 po wstawieniu wartości, otrzymamy:

Ilość pomiarów n	$M_{\text{ser.}} = \pm \sqrt{\frac{52}{n}}$	$M_{\text{rep.}} = \pm \sqrt{\frac{2}{n} \left(1 + \frac{25}{n}\right)}$
1	$\pm 7.2''$	$\pm 7.3''$
5	$\pm 3.2''$	$\pm 1.5''$
10	$\pm 2.3''$	$\pm 0.8''$

Metoda repetycyjna daje zatem bezwarunkowo większą dokładność, a do pomiarów nadaje się zwłaszcza wtedy gdy mamy teodolit o większej różnicy noniuszowej.

WCINANIE WPRZÓD.

§ 16. Dane są zapomocą współrzędnych punkty A i B — rys. 77 zatem możemy łatwo obliczyć kierunek (A—B). Punkty te również dane są w polu, z punktu A jednak nie widać punktu B. Nadto dane są zapomocą współrzędnych punkty C i D jakoteż oznaczone są w polu i widome.



Rys. 77.

Zadaniem jest, widoczny w polu punkt P określić co do położenia, tak, by go można było dokładnie oznaczyć w planie.

Jest to najprostsze zadanie.

Obliczmy przedewszystkiem kierunek (AB) i odległość AB z danych współrzędnych y_a, y_b, x_a, x_b .

$$\operatorname{tg}(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \text{ tudzież } AB = \frac{y_b - y_a}{\sin(AB)} \quad . \quad . \quad . \quad 81$$

Za pomocą teodolitu ustawionego w punkcie A, zmierzmy kąt δ — a że kierunek (AC) jest dany, względnie obliczymy go z równania:

$$\operatorname{tg}(AC) = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a} \text{ więc kierunek (AP)} = (AC) + \delta \quad . \quad . \quad 82$$

Kąt α nie można zmierzyć, lecz obliczymy go z równania:

$$(AB) = (AP) + \alpha \text{ czyli } \alpha = (AB) - (AP) \quad . \quad . \quad . \quad 83$$

wstawmy za (AP) wartość z równ. 82 to otrzymamy:

$$\alpha = (AB) - (AC) - \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 84$$

kąt α wyrażony tu jest przez dane kierunki (AB) i (AC) tudzież zmierzonym kątem δ .

$$\text{Podobnie: } \operatorname{tg}(BD) = \frac{y_d - y_b}{x_d - x_b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 85$$

zmierzmy kąt ε a otrzymamy:

$$(BP) = (BD) - \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 86$$

następnie z równania: $(BP) = (BA) + \beta$ dostaniemy $\beta = (BP) - (BA)$ a po wstawieniu za BP wartości z równania 86 i uwzględniając, że $(BA) = (AB) \pm 180^\circ$ dostaniemy:

$$\beta = (BD) - \varepsilon - (AB) \mp 180^\circ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 87$$

Gdy odległość $AB = c$ jest znana oraz kąty α, β i $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$ to obliczenie boków a i b nie przedstawia żadnych trudności, bo

$$a = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha \quad \text{i} \quad b = \frac{c}{\sin \gamma} \cdot \sin \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 88$$

Wkońcu współrzędne punktu P:

$$\begin{aligned} y_p &= y_a + b \cdot \sin(AP) \quad \text{albo} \quad y_p = y_b + a \cdot \sin(BP) \\ x_p &= x_a + b \cdot \cos(AP) \quad \text{„} \quad x_p = x_b + a \cdot \cos(BP) \quad . \quad . \quad . \quad 89 \end{aligned}$$

W praktyce, zwłaszcza wojskowej może zajść nast. przypadek: Dane są w polu i na mapie punkty A i B — nadto widoczne są w polu punkty C i D, oznaczone również na mapie. Wyznaczyć zaś wypada na mapie stanowisko P dane w polu.

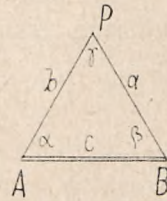
Całe to zadanie redukuje się do tego, że pomierzmy kąt δ i ε — Kąt δ o wierzchołku w A odetniemy od kierunku (AC) — taksamo kąt ε o wierzchołku w B, odetniemy od kierunku (BD). — Oba kierunki (AP) i (BP) przetną się w punkcie P — który tem samem będzie oznaczony na mapie. Naturalnie, nie rozchodzi się w tym wypadku o obliczenie współrzędnych, ani też dla danych

punktów A B C i D — współrzędnych tych nie mamy skąd wziąć w polu.

Porządek obliczania wyjaśni następujący przykład:

Dane: punkt A i B rys. 78. oraz (AP) i (BP) wyznaczyć na planie położenie punktu P t. j. obliczyć jego współrzędne.

Wskazany porządek obliczeń najlepiej zachować, jako wypróbowany w praktyce.



Rys. 78.

$$A. \quad y_a = -16145.08 \text{ m} \quad x_a = +92808.70$$

$$B. \quad y_b = -15356.15 \quad x_b = +92012.06$$

$$y_b - y_a = +788.93 \quad x_b - x_a = -796.62$$

$$\log(y_b - y_a) = 2.897038 \quad y_b - y_a \quad 2.897038 \quad x_b - x_a \quad 2.901251$$

$$\log(x_b - x_a) = 2.901251 \quad \sin(AB) \quad 9.847368 \quad \cos(AB) \quad 9.851581$$

$$\log \operatorname{tg}(AB) \quad 9.995787 \quad AB \quad 3.049670 \quad AB \quad 3.049670$$

$$(AB) \quad 135^{\circ}16'40.5'' \quad \log AB = \log c = 3.040670.$$

$$(AB) = 165^{\circ}16'40.5'' \quad (AP) = 94^{\circ}49'56'' \quad (BP) = 13^{\circ}0'22''$$

$$(AP) = 94^{\circ}49'56'' \quad (BP) = 13^{\circ}0'22'' \quad (BA) = 315^{\circ}16'40''$$

$$\alpha = 40^{\circ}26'44'' \quad \gamma = 81^{\circ}49'34'' \quad \beta = 57^{\circ}43'42''$$

$$\log c \quad 3.049670$$

$$\log \sin \gamma \quad 9.995565$$

$$\log(c \cdot \sin \gamma) \quad 3.054105 \quad \log(c \cdot \sin \gamma) \quad 3.054105$$

$$\log \sin \beta \quad 9.927127 \quad \log \sin \alpha \quad 9.812061$$

$$\log b \quad 2.581232 \quad \log a \quad 2.866166 \quad 180^{\circ}00'00''$$

$$\log b \quad 2.981232$$

$$\sin(AP) \quad 9.998454$$

$$\log b \quad 2.981232$$

$$\cos(AP) \quad 8.925509$$

$$\log \Delta y_a \quad 2.79686$$

$$A \quad y_a = -16145.08$$

$$\Delta y_a = +954.30$$

$$P: \quad y_p = -15190.78$$

$$\Delta x_a \quad 1.906741 \text{ m}$$

$$x_a = +92808.70$$

$$\Delta x_a = -80.68$$

$$x_p = +92728.02$$

$$\log a \quad 2.866166$$

$$\sin(BP) \quad 9.352288$$

$$\log a \quad 2.866166$$

$$\cos(BP) \quad 9.988713$$

$$2.218454$$

$$2.854879$$

$$B: \quad y_b = -15356.15$$

$$\Delta y_b = +165.37$$

$$x_b = +92012.08$$

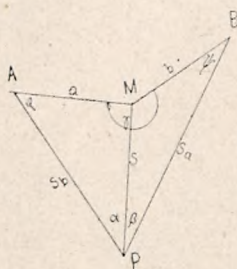
$$\Delta x_b = +715.94$$

$$\text{Wynik:} \quad y_p = -15190.78 \text{ m} \quad x_p = +92728.02.$$

WCINANIE WSTECZ.

§ 17. Dane są 3 punkty A, M, B w polu i w planie, położenie których względem siebie określają odległości a i b oraz kąt γ (rys, 79).

Nadto, dany jest w polu punkt P, z którego poprzednie punkty są widoczne. Zadanie: określić położenie punktu P względem punktów A M B, tak, by go można było w plan wrysować.



Rys. 79.

Kąty α i β można pomierzyć — obliczyć należy odległości s, s_a i s_b oraz kąty φ i ψ o ile będą potrzebne.

Z czworoboku A M B P otrzymamy:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 360^\circ$$

$$\text{stad} \quad \frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{360 - (\alpha + \beta + \gamma)}{2} \quad . \quad . \quad 90$$

$$\text{z obu znów trójkątów: } s = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \varphi = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \psi \quad . \quad . \quad 91$$

$$\text{a stad} \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{b}{\sin \beta} : \frac{a}{\sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 92$$

Z równań 90 i 92 trzeba by obliczyć niewiadome φ i ψ .

W tym celu oznaczymy w równ. 92 — cały iloraz z prawej strony, przez tg kąta pomocniczego μ — zatem

$$\frac{b}{\sin \beta} : \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{1}{\text{tg } \mu} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 93$$

Ponieważ α i β są znane, jak również a i b, więc i $\text{tg } \mu$ jest znany. —

$$\text{Następnie z relacji} \quad \frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{1 - \text{tg } \mu}{1 + \text{tg } \mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 94$$

jakoteż ze znanych wzorów goniometrycznych

$$\sin \varphi - \sin \psi = 2 \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 95$$

$$\text{i } \sin \varphi + \sin \psi = 2 \cos \frac{\varphi - \psi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 96$$

oraz $\frac{1 - \text{tg } \mu}{1 + \text{tg } \mu} = \text{cotg } (\mu + 45^\circ)$ otrzymamy mianowicie z r. 95 i 96:

$$\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \text{tg } \frac{\varphi - \psi}{2} \cdot \text{cotg } \frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{1 - \text{tg } \mu}{1 + \text{tg } \mu} \quad \text{z równania } 94$$

$$\text{następnie } \text{tg } \frac{\varphi - \psi}{2} = \text{tg } \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \text{cotg } (\mu + 45^\circ) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 97$$

a że $(\varphi + \psi)$ jest ilością znaną, jak również i $\text{tg } \mu$, przeto z równ. 97

obliczymy łatwo $(\varphi - \Psi)$. Mając zaś $(\varphi + \Psi)$ i $(\varphi - \Psi)$ znamy zarazem φ i Ψ . Z równ. 91 znów obliczy się „s“ — a wkońcu

$$s_a = \frac{a}{\sin \alpha} \sin(\varphi + \alpha) \text{ tudzież } s_b = \frac{b}{\sin \beta} \sin(\Psi + \beta) \quad . \quad 98$$

Jak więc widzimy, mając dane 3 punkty A, M i B, n. p. za pomocą współrzędnych, zatem odległości ich i kąt wierzchołkowy γ , możemy ściśle określić położenie punktu P, za pomocą jedynie pomiaru kątów α i β w punkcie P.

W praktyce może zająć następujący wypadek:

Dane są, względnie z pewnego stanowiska P są widoczne trzy punkty A, M i B — natomiast punktu P, na którym właśnie stoimy, nie możemy narazie wyznaczyć na mapie, nie mając w okolicy żadnego punktu do nawiązania się — wyznaczenie zaś tego punktu jest koniecznie potrzebne. Zadanie to rozwiążemy tedy za pomocą wcinania wstecz, mierząc kąty α i β — obliczymy potem odległości s_a i s_b i dla kontroli s. — Wkońcu, skonstruujemy na mapie trójkąt A P B — zakreślając z punktu A i B — długościami s_a i s_b łuki. Punkt przecięcia obu łuków jest żądanym punktem P na mapie. Łuk zakreślony długością s z punktu M powinien przeciąć się z obu łukami w punkcie P.

Przykład:

Dane: $a = 920.00$ m $b = 1360.00$ m.

$\log a = 2.96379$		$\gamma = 168^\circ 30' 00''$
$\log \sin \alpha = 9.62562$		$\alpha = 24^\circ 58' 67''$
		$\beta = 41^\circ 2' 58''$
$\log \frac{a}{\sin \alpha} = 3.33817$		$\gamma + \alpha + \beta = 234^\circ 31' 45''$
$\log b = 3.13354$	$360^\circ - (\gamma + \alpha + \beta) = \varphi + \Psi = 125^\circ 28' 15''$	
$\log \sin \beta = 9.81737$		$360^\circ 00' 00''$
$\log \frac{b}{\sin \beta} = 3.31617$		$\frac{\varphi + \Psi}{2} = 62^\circ 44' 7.5''$

$\log \operatorname{tg} \mu = \log \frac{a : \sin \alpha}{b : \sin \beta} = \log \frac{\sin \varphi}{\sin \Psi} = \frac{3.33817}{3.31617} - \frac{9.62562}{9.81737} = 0.02200$	$\mu = 46^\circ 27' 00''$
	$\mu + 45^\circ = 91^\circ 27' 00''$

$\log \operatorname{cotg}(\mu + 45^\circ) = 8.40334_n$	$\log \frac{\varphi + \Psi}{2} = 10.28788$
$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi + \Psi}{2} = 10.28788$	$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi - \Psi}{2} = \log \frac{\varphi + \Psi}{2} = 10.28788$
	$+ \log \operatorname{cotg}(\mu + 45^\circ) = 8.40334$
	8.69122

Wkońcu $s_a = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin(\varphi + \alpha)$ i $s_b = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin(\Psi + \beta)$.

$$\frac{\varphi - \Psi}{2} = 20^{\circ} 48' 40''$$

$$\frac{\varphi + \Psi}{2} = 62^{\circ} 44' 7''$$

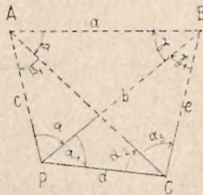
$$\varphi = 65^{\circ} 32' 47''$$

$$\Psi = 59^{\circ} 55' 27''$$

	$\log a = 2.96379$		$\log b = 3.13354$
	$-\log \sin \alpha = 9.62562$		$\log \sin \beta = -9.91737$
$\log s_a$	3.36717	$\log s_b$	3.31617
	$\log \sin(\varphi + \alpha) = 9.99998$		$\lg \sin(\Psi + \beta) = 9.99199$
	3.36815		3.30816
	$s_a = 2178.45 \text{ m.}$		$s_b = 2033.04 \text{ m.}$

§ 18. Drugiem, podobnym do poprzedniego, jest następujące zagadnienie:

Dane są w polu dwa punkty A i B co do wzajemnego położenia, zatem zapomocą współrzędnych, lub też, jak się często w praktyce trafia, widoczne są z trzeciego punktu P, i oznaczone na mapie. Wyznaczyć mamy położenie trzeciego punktu P, jako stanowiska, na którym stoimy, tak, by go dokładnie w mapie można było wrysować (Rys. 80)



Rys. 80.

W punkcie P możemy zmierzyć kąt α — znany wprowadzicie odległość $AB = a$, lecz danych tych jest za mało, by można było znaleźć odległości b i c , zapomocą których znowu możnaby było obliczyć kąty β i γ , oraz kierunki i współrzędne, lub też zapomocą boków b i c skonstruować trójkąt APB, a temsamem wyznaczyć na mapie punkt P.

Ażeby dojść do rozwiązania zadania, obierzmy w pewnej odległości od P, punkt C i zmierzmy $PC = d$, oraz kąty $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$

Z trójkąta P C B i danych kątów α_1 i $(\alpha_2 + \alpha_3)$ oraz a , obliczymy:

$$d : b = \sin \gamma_1 : \sin (\alpha_2 + \alpha_3) \text{ gdzie } \gamma_1 = 180 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$$

$$\text{a stąd } b = \frac{d}{\sin \gamma_1} \cdot \sin (\alpha_2 + \alpha_3) \dots \dots \dots 99$$

i podobnie z trójkąta A P B:

$$d : c = \sin \beta_1 : \sin \alpha_2 \text{ gdzie } \beta_1 = 180 - (\alpha + \alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\text{wkońcu } c = \frac{d}{\sin \beta_1} \cdot \sin \alpha_2 \dots \dots \dots 100$$

gdzie p jest odległością punktu P od kierunku $A M$, zaś q takąż odległością punktu P od $B M$. Jeżeli ($\varphi + \Psi = 180^\circ$) to $M = \infty$ a ma to miejsce wtedy, gdy wszystkie cztery punkty znajdują się na obwodzie koła.

W rozwiązywaniu zagadnienia wcinania wstecz, mogą zachodzić następujące przypadki:

1. Kąty α i β są mniejsze od 180° . Nadmieniamy, że pomiar kątów odbywa się zawsze w kierunku od lewego ramienia do prawego t. j. w kierunku ruchu wskazówek na zegarze.

Powołując się na § 17. powtarzamy:

$$\varphi + \Psi = 360 - (\alpha + \beta + \gamma)$$

$$i \cotg \mu = \frac{b}{\sin \beta} : \frac{a}{\sin \alpha} \quad \dots \quad 101 a$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \Psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \Psi}{2} \cdot \cotg (\mu + 45^\circ) \quad \dots \quad 102 a$$

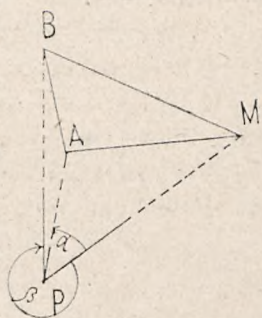
Kąt pomocniczy μ jest równaniem 101 *a* — dwuznacznie określony, bo prócz kąta μ spełnia równanie także kąt $\mu \pm 180^\circ$ — nie mówiąc już o $\pm n \cdot 360^\circ$. Prawa strona równ. 102 *a* jednak nie przynosi wątpliwości, bo $(\mu \pm 180^\circ + 45^\circ) = \cotg (\mu + 45^\circ)$. Ponieważ zaś przyjęliśmy, że α i β są mniejsze jak 180° więc $\sin \alpha$ i $\sin \beta$ są dodatnie, a że odległości $A M$ i $B M$ są zawsze dodatnie, więc równ. 101 *a* może na $\cotg \mu$ dać tylko dodatnią wartość. Wszelkiej więc wątpliwości co do μ unikamy w ten sposób, że przyjmujemy jego wartość zawsze jako kąt ostry. Natomiast równ. 102 *a* — daje znowu dwuznaczność, bo równanie to sprawdza się tak dla $\frac{\varphi - \Psi}{2}$ jak i dla $\frac{\varphi - \Psi}{2} \pm 180^\circ$. Ponieważ jednak φ i Ψ są kątami w trójkącie, czyli muszą być mniejsze niż 180° , więc stąd wynika, że $\frac{\varphi}{2}$ i $\frac{\Psi}{2}$ każdy z nich musi być mniejszy niż 90° — zatem $\frac{\varphi - \Psi}{2}$ musi mieć wartość dodatniego lub ujemnego kąta ostrego, zatem leżeć w I. lub IV. ćwiartce.

Stąd wynika, że z równania 101 *a* bierzemy dla μ zawsze wartość dodatniego kąta ostrego, zaś z równ. 102 *a* $\frac{\varphi - \Psi}{2}$ jako dodatnią lub ujemną wartość kąta ostrego, zależnie od tego, czy φ czy Ψ jest większy.

2. Kąt α lub β jest większy od 180° .

Na rys. 81 — α jest mniejszy od 180° , natomiast $\beta > 180^\circ$. Gdyby $B P A = \alpha$ i $A P M = \beta$, to oba kąty byłyby razem mniejsze

niż 180° — nawet α byłyby bardzo małe, skutkiem czego $\frac{a}{\sin \alpha}$ byłyby bardzo wielkie — a wówczas wartość μ wypada bardzo mała, blisko 0° lub 90° , zatem $\mu + 45^\circ$ zbliża się bardzo do 45° lub 135° . Lecz gdy $B P A = \alpha$ jest bardzo mały, to $P B A = \varphi$ jest także bardzo mały; a stąd $\log \sin \varphi$ jest niedokładny o ile kąta φ nie obliczamy bardzo dokładnie na $0'01''$, ażeby otrzymać rezultat na sekundy dokładny. Dwuznaczność co do μ będzie tu, podobnie jak poprzednio nieszkodliwą. Natomiast w równaniu $\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{ctg} (\mu + 45^\circ)$, jest $\frac{\varphi - \psi}{2}$

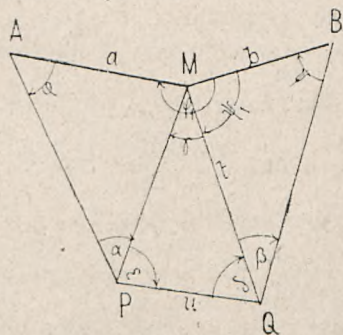


Rys. 81

dwuznaczne i φ lub ψ może być większe jak 180° . Jednak odległość $A P$, $M P$, $B P$ muszą być zawsze dodatnie i w tem należy szukać rozstrzygnięcia. Dlatego oblicza się $\frac{\varphi - \psi}{2}$ z dwuznacznością φ i ψ tak długo, aż dojdziemy do obliczenia odległości, a wówczas odszukamy tę parę φ i ψ , która daje ujemne wartości.

§ 21. Weinanie wstecz z dwóch punktów rys. 82.

Dane są trzy punkty A , M i B za pomocą współrzędnych — natomiast z punktów P i Q , względnie z pobliskich im, nie można równocześnie widzieć wszystkich trzech punktów A , M , P , zatem nie możnaby pomierzyć kątów. Z punktu P widać jest punkt Q , oraz punkty A i M , zaś z Q widać P i punkty M i B , tak, że dadzą się pomierzyć kąty α , ε , δ i β .



Rys. 82

Ze współrzędnych obliczymy :

$$\operatorname{tg} (M A) = \frac{y_m - y_a}{x_m - x_a} \quad a = \frac{y_m - y_a}{\sin (M A)} = \frac{x_m - x_a}{\cos (M A)} \quad 103 a$$

$$\operatorname{tg} (M B) = \frac{y_m - y_b}{x_m - x_b} \quad b = \frac{y_m - y_b}{\sin (M B)} = \frac{x_m - x_b}{\cos (M B)}$$

$$\gamma = (M A) - (M B)$$

$$\text{Następnie } \varphi + \psi = 540 - (\gamma + \alpha + \delta + \varepsilon + \beta) \quad 104 a$$

$$\text{oraz } s = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \varphi \quad \text{i} \quad t = \frac{b}{\sin \beta} \cdot \sin \psi \quad 105 a$$

$$i \quad \frac{s}{t} = \frac{\sin \delta}{\sin \epsilon} \quad . \quad . \quad . \quad 106 a$$

wstawmy: $\frac{\sin \varphi}{\sin \Psi} = \frac{b \cdot \sin \alpha \cdot \sin \delta}{a \cdot \sin \beta \cdot \sin \epsilon} = \cotg \mu \quad . \quad . \quad . \quad 107$

Stąd, jak w zwykłym weinaniu wstecz

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \Psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \Psi}{2} \cdot \cotg (\mu + 45^\circ) \quad . \quad . \quad . \quad 108$$

wkońcu obliczymy φ i Ψ z równ. 104 i 108

a następnie s i t z równania 105 a. Jako próbę mamy:

$$\mu = \frac{s}{\sin \delta} \cdot \sin (\delta + \epsilon) = \frac{t}{\sin \epsilon} \sin (\delta + \epsilon) \quad . \quad . \quad . \quad 109$$

Możemy również obliczyć wszystkie kąty przy M:

$$\varphi' = 180^\circ - (\alpha + \beta) \quad \Psi' = 180^\circ - (\beta + \Psi) \quad . \quad . \quad . \quad 110$$

jak również i azymuty i współrzędne:

$$(MP) = (MA) - \varphi' \quad (MQ) = (MB) + \Psi' \quad . \quad . \quad . \quad 111$$

$$(PQ) = (PM) + \epsilon \quad (QP) = (QM) - \delta$$

$$y_p = y_m + s \cdot \sin (MP) \quad y_q = y_m + t \cdot \sin (MQ) \quad . \quad . \quad . \quad 112$$

$$x_p = x_m + s \cdot \cos (MP) \quad x_q = x_m + t \cdot \cos (MQ)$$

$$y_q = y_p + u \cdot \sin (PQ) \quad x_q = x_p + u \cdot \cos (PQ)$$

Przykład:

$$M \dots y_m = - 43432 \cdot 68 \quad \dots x_m = + 74370 \cdot 20$$

$$A \dots y_a = - 46703 \cdot 92 \quad \dots x_a = + 75273 \cdot 97$$

$$B \dots y_b = - 31062 \cdot 82 \quad \dots x_b = + 75002 \cdot 83$$

$$y_m - y_a = + 3271 \cdot 24 \quad y_m - y_b = - 2369 \cdot 86$$

$$x_m - x_a = - 903 \cdot 71 \quad x_m - x_b = + 632 \cdot 56$$

$$\log a = 3 \cdot 53068 \quad (AM) = 105^\circ 26' 36''$$

$$(BM) = 255^\circ 3' 18'' \quad \log b = 3 \cdot 38967$$

$$\gamma = 210^\circ 23' 18''$$

Pomierzono:

$$\alpha = 58^\circ 16' 40'' \quad \beta = 37^\circ 16' 47''$$

$$\epsilon = 81^\circ 2' 34'' \quad \delta = 62^\circ 12' 13''$$

$$\alpha + \epsilon = 139^\circ 20' 14'' \quad \beta + \delta = 99^\circ 29' 00''$$

$$\epsilon + \delta = 143^\circ 14' 47''$$

$$\gamma + \alpha + \delta + \beta + \epsilon = 449^\circ 12' 32''$$

$$\varphi + \Psi = 90^\circ 47' 28''$$

z równ. 107 i 108:

$$\mu = 47^\circ 43' 34'' \quad \frac{\varphi - \Psi}{2} = - 2^\circ 45' 50''$$

$$\varphi = 42^\circ 37' 54'' \quad \Psi = 48^\circ 9' 34''$$

$$\log s = 3 \cdot 43165 \quad \log u = 3 \cdot 26187 \quad \log t = 2 \cdot 47956$$

$$y_p = - 44632 \cdot 69 \quad x_p = + 71949 \cdot 63 \quad y_q = - 42888 \cdot 89 \quad x_q = + 71402 \cdot 75$$

W praktyce miałyby powyższe zagadnienie wówczas zastosowanie, gdyby były widzialne z punktu P dwa punkty A i M, natomiast nie dałoby się w pewnej odległości znaleźć takiego punktu Q, z którego obydwie te punkty także byłyby widzialne, natomiast z punktu Q byłby widzialny trzeci punkt B i punkt M. W takim wypadku nie zastosujemy rozwiązania według § 18 — lecz powyższe. Po obliczeniu odległości AP, MP, MQ i BQ, skonstruujemy zapomocą długości tych boków, dwa trójkąty APM i MQB — i otrzymamy na mapie punkty P i Q. Jako kontrola służy tu znana, bo zmierzona odległość $u = PQ$.

O PRYZRZĄDACH DO POMIARU WYSOKOŚCI

ROZDZIAŁ VII.

a) LUNETY

§ 1. Zanim przejdziemy do opisu wymienionych w tytule przyrządów, zastanowimy się nieco nad okiem, tym przyrządem człowieka, który we wszystkich spostrzeżeniach udział bierze.

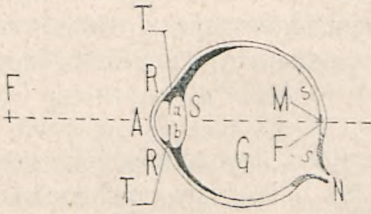
Normalne oko widzi przedmioty najwyraźniej z odległości 20 do 25 cm. Odległość tą nazywamy odległością wyraźnego widzenia. Skoro odległość przedmiotu się zwiększa, to mimo to oko go widzi, dostosowując się do odległości, co znów nazywamy akomodacją oka, lecz coraz to niewyraźniej. Z codziennego doświadczenia wiemy, że oko widzi nawet przedmioty niemal że w nieskończenie wielkiej odległości się znajdujące, n. p. gwiazdy, lecz nie widzi ich już wyraźnie. Natomiast, gdy odległość przedmiotu jest mniejsza, niż odległość wyraźnego widzenia, to oko go widzi, ale bardzo niewyraźnie. Bywają też oczy anormalne, n. p. krótkowidzące, dla których odległość normalna wynosi 10 cm., a nawet mniej, lub dalekowidzące do odległości normalnej 50 cm. Zapomocą tz. okularów pomaga się tym oczom do usunięcia anormalności tak, że używając szkieł, stają się normalnymi.

Oko patrząc równocześnie na dwa przedmioty w różnych odległościach się znajdujące, widzi tylko jeden z nich wyraźnie, nie może bowiem równocześnie akomodować się do różnych odległości. Dlatego też przyrządy takie, jak węgelnice, nużą oko i nie mogą dawać dokładnych rezultatów, bo oko patrzeć tam jest zmuszone, równocześnie i na nitkę odległą o 20 cm. i na tyczkę w znacznej odległości ustawioną.

Ponieważ oko bierze udział w spostrzeżeniach, przeto i ono ma wpływ na ich dokładność. Doświadczenia dowodzą, że nieuzbrojone oko robi znaczne błędy. Tak n. p. w wyznaczeniu celowych zapomocą dioptra, błędy dochodzą do 1' na odległość 20 m, chociaż i tu dużo znaczy wprawa. Dokładność ta powiększa się skutkiem użycia

lunety, a to przeciętnie tyle razy, ile wynosi powiększenie lunety. Wreszcie musimy przyjąć, że każdy spostrzegacz mieć musi jakąś wprawę, a ta powiększa dokładność do tego stopnia, że w praktyce okazuje się, że dokładność celowania przy użyciu lunety 25 razy popowiększającej, wynosi 1".

Rys. 83 przedstawia przekrój poziomy oka. Za rogówką R-R — którą tworzy silna błona przeźroczysta i wypukła, znajduje się ko-



Rys. 83.

mora wypełniona płynem wodnistym. Tylną jej ścianę tworzy tęczówka T-T, różnie zabarwiona i mająca mały otwór a-b, t. z. źrenicę, zwężającą się pod silnym działaniem światła. Do niej przytyka soczewka S z przeźroczystej, chrząstkowatej materji, mająca przednią ścianę słabiej, tylną silniej wypukłą. Białko zajmuje miejsce, ciemno

na rysunku oznaczone. Wnętrze G gałki ocznej, poza soczewką, zajmuje gęsta, galaretowata masa. Tylną ścianę gałki ocznej wyściela siatkówka s-s pozostająca w związku z nerwem ocznym N. Najczulszą na światło jest część siatkówki M, t. z. żółta plamka, naprzeciw źrenicy.

Obrazy przedmiotów tworzą się na siatkówce, pomniejszone i odwrócone. Warunkiem wyraźnego widzenia jest, ażeby obrazy były dostatecznie oświetlone, niezbyt małe, tudzież, by tworzyły się na żółtej plamce. Wskutek silnej aberacji sferycznej, tylko środkowa część pola widzenia wytworzona przez promienie środkowe, jest wyraźna. Oko jednak radzi sobie zapomocą ruchów gałki ocznej, kierując się ku rozmaitym punktom oglądanych przedmiotów. Oko jest przyrządem optycznym. Pierwsze ognisko F, oka patrzącego w dal, znajduje się około 14 mm przed wierzchołkiem A rogówki, drugie na siatkówce, w odległości około 23 mm od A. Punkty główne znajdują się o 1.7 i 2 mm od A, węzły o 7 i 7.3 mm. Położenie tych punktów, o których mówić będziemy jeszcze przy opisie soczewek, nie jest stałe i zmienia się, zależnie od odległości przedmiotów, co nazywamy akomodacją oka. Patrząc n. p. w dal, oko nie widzi bliższych przedmiotów, albo widzi je niewyraźnie, bo obrazy ich tworzą się za siatkówką. Przy patrzeniu na bliskie przedmioty, mięśnie oczne działają w ten sposób, że wypuklają bardziej soczewkę i wysuwają ją nieco ku przodowi. Ta akomodacja jednak ma pewne granice, bo n. p. oko zdrowe i normalne nie zdoła już skupić wzroku na przedmiotach bliższych jak 8 cm, jest to t. z. punkt bliski.

Badania dowodzą, że jeżeli przedmiot liniorny, długi $1 \mu = 0.001 \text{ mm}$ znajduje się w odległości 206 mm od oka, to na siatkówce powstaje obraz wielkości $1 \mu \cdot \frac{15}{206} = 0.073 \mu \dots \dots \dots 1$

stąd kąt widzenia dla tej wielkości 1μ wynosi:

$$\frac{1 \mu}{206 \text{ mm}} \cdot \rho'' = \frac{0.001 \text{ mm}}{206 \text{ mm}} \cdot 206.265'' = 1'' \dots \dots 2$$

Eksperymentalnie przekonano się, że oko widzi osobno dwie linie lub punkty dopiero wtedy, gdy odstęp obrazów ich na siatkówce wynosi 4.4μ . Opis innych doświadczeń opuszczamy, jako nie będący w ścisłym związku z przedmiotem.

§ 2. Soczewka wypukła, czyli zbierająca. Jest to kawałek szkła czystego, oszlifowany w ten sposób, że obie jego powierzchnie są powierzchniami kulistymi.

W przyrządach geodezyjnych mieć będziemy do czynienia tylko z tego rodzaju soczewkami, czasami z płasko wypukłymi, gdzie jedna powierzchnia jest płaską, druga kulistą.



Rys. 84.

Na rys. 84 widzimy przekrój takiej soczewki. Działanie jej polega na załamaniu promieni świetlnych.

Linia łącząca środki kul, ograniczających soczewki t.j. linia $A A'$ nazywa się osią soczewki. Na osi soczewki leżą jeszcze dwa punkty, t. z. ogniska F i F' w równej odległości od środka soczewki, tak, że $OF = OF' = f$. Odległość ogniskową f określa się w optyce równaniem:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \dots \dots \dots 3$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania dla szkła. Promień światła wychodzący z punktu A , dochodzi do soczewki, załamuje się na obu jej powierzchniach i znowu przecina się z osią w punkcie A' .

Dla odstępów D i d , punktów A i A' od środka soczewki, daje optyka nast. równanie: $\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \dots \dots \dots 4$

Równanie to wyraża prawo, że wszystkie promienie wychodzące z A schodzą się muszą w A' . Punkty A i A' nazywamy sprzężonymi.

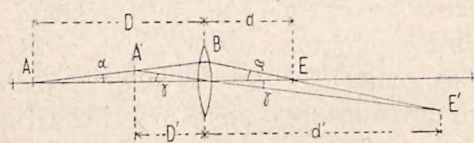
Wogóle działanie soczewek polega na tym fakcie, że fale świetlne biegną w szkle wolniej niż w powietrzu. Jeżeli więc w punkcie A na osi soczewki znajduje się punkt świetlny, to część fali świetlnej, po-

ruszająca się po osi soczewki, przeniknie przez soczewkę w jej środku, tam gdzie grubość szkła jest największą, poczem wytworzy falę w powietrzu i dojdzie do punktu A' . Równocześnie z punktu A wychodzi fala cząstkowa, która biegnie po skrajnym promieniu i ta trafia soczewkę w miejscu, gdzie ona jest cieńszą. Fala ta ma wprawdzie dłuższą drogą do przebycia niż poprzednia biegnąca po osi, ale znów doznaje mniejszego opóźnienia w szkłe, bo jakżeśmy powiedzieli, w tem miejscu soczewka jest cieńszą, wyszedłszy więc z soczewki, może równocześnie z poprzednią spotkać się w A' . Fale te istotnie spotykają się w A' w zgodnych fazach, co jest warunkiem utworzenia się w A' ogniska o ile także wszystkie inne fale przenikające soczewkę przyłączają się do tanych w zgodnej fazie. To zgodne spotkanie się ma rzeczywiście miejsce, o ile tylko soczewka nie jest zbyt wypukłą. W ten sposób otrzymać można obrazy punktów, nie leżących w osi soczewki lecz z boku, jeżeli tylko punkt ten leży w pobliżu osi, niezbyt od niej odległy. Płaszczyzny prostopadłe do osi, przechodzące przez punkty sprzężone, nazywamy płaszczyznami sprzężonemi. Punkty leżące na jednej z nich, blisko osi, dają obrazy na drugiej. Punktów sprzężonych jest bardzo wiele. Na osi soczewki jednak znajduje się punkt F , z którego wychodząca fala kulista, po przejściu przez soczewkę, nie będzie ani wypukłą ani wklęsłą, lecz płaską, a odpowiadające jej promienie utworzą wiązkę równoległą. Ten punkt F nazywa się ogniskiem soczewki. Gdybyśmy odwrócili bieg promieni, czyli rzucili na soczewkę wiązkę promieni równoległych n. p. słonecznych, to po przejściu przez soczewkę, zeszyłyby się w F i wywołałyby silne ogrzewanie, jak w ognisku. Własności takie ma nie tylko punkt F , lecz cała płaszczyzna ogniskowa, prostopadła do osi soczewki i przechodząca przez F . Wiązka promieni jednak, wychodząca z któregośkolwiek punktu tej płaszczyzny, nie będzie po przejściu przez soczewkę, równoległą do jej osi, lecz do osi bocznej, łączącej ten punkt, ze środkiem soczewki. Gdyby punkt świecący znajdował się między F a soczewką, to wskutek znacznych różnic długości dróg promieni środkowych i brzeżnych, fale świetlne opuszczają soczewkę w różnych fazach, fala wypadkowa będzie mniej wypukłą niż w pierwszym wypadku, a wiązka promieni opuści soczewkę rozbieżnie, tak jakby wychodziła z punktu leżącego na osi soczewki, lecz po drugiej stronie punktu F , a po tej samej stronie soczewki. Punkt ten będzie t. z. obrazem pozornym. Jeżeli poprzednio obrazy można było rzucić poza soczewkę na białą tablicę lub szybę matową, to pozornego nie można. Obraz pozorny można widzieć okiem.

Jeżeli jest więcej punktów świecących, jednakowo odległych od

powierzchni kulistej soczewki, zatem, przypuszczamy, że one leżą również na takiej powierzchni, to każdy z nich utworzy swój osobny obraz, na własnej osi. Ponieważ ograniczać się będziemy do promieni środkowych, czyli punktów leżących blisko osi soczewki, przeto obie cząstki tych powierzchni kulistych są tak małe, że uważać je możemy za cząstki równoległych do siebie płaszczyzn. Są to płaszczyzny sprzężone. Każdy promień przechodzący przez jeden z punktów sprzężonych, przejdzie po załamaniu przez drugi. Wogóle każdy rysunek na jednej z płaszczyzn sprzężonych, daje swój obraz na drugiej. Obraz i rysunek są do siebie geometrycznie podobne.

Punkt, leżący w obrębie soczewki, przez który przechodzą wszystkie promienie wychodzące od przedmiotów, nazywamy środkiem optycznym soczewki, częściej środkiem projektywności.



Rys. 85.

Powróćmy teraz do równania 4.

Jeżeli (rys. 85) punkty A i E są punktami sprzężonymi, zaś A' i E' również punktami sprzężonymi, w innym wypadku to

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \text{ oraz } \frac{1}{D'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \quad 5$$

Na podstawie oznaczeń na rysunku, otrzymamy:

$$\frac{D}{D'} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha} \quad \frac{d}{d'} = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin \beta}$$

lub, ponieważ kąty są bardzo małe, możemy napisać:

$$\frac{1}{D'} = \frac{1}{D} \frac{\alpha + \gamma}{\alpha} \quad \frac{1}{d'} = \frac{1}{d} \frac{\beta + \gamma}{\beta}$$

$$\frac{1}{D'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{D} + \frac{1}{d} + \gamma \left(\frac{1}{D \alpha} - \frac{1}{d \beta} \right) \quad 6$$

a ponieważ $D \alpha = d \beta$ przeto odpada ostatni wyraz w równ. 6 i otrzymujemy równ. 5.

Rozpatrzmy teraz równie możliwe wypadki z równ. 5:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$$

1. dla $D = \infty$ $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f}$ czyli $d = f$

2. $\infty > D > 2f$ będzie $d > f$

3. $D = d$ $\frac{2}{d} = \frac{1}{f}$ czyli $d = 2f$

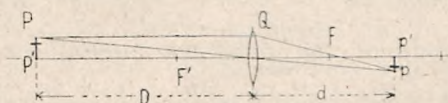
4. $D = f$ $\frac{1}{f} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f}$ $d = \infty$

$$5. D = f - x \quad \frac{1}{f-x} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \quad d \text{ jest ujemne (lupa)}$$

Wypadek pod 1 i 2 mamy przy lunetach, wypadek pod 5 przy okularze lunety lub lupie. Jeżeli stosownie do 1. przedmiot znajduje się w nieskończenie wielkiej odległości, to obraz tworzy się w ognisku, po drugiej stronie soczewki. Z nieskończenie wielkiej odległości idące promienie, uważamy za równoległe i nazywamy je promieniami głównymi.

O środku optycznym soczewki, czyli t. z. środka projektywności, mówiliśmy już wyżej. Jest to punkt w obrębie soczewki, przez który przechodzą wszystkie promienie. Leży on na osi soczewki, w środku jej, jeżeli krzywizny są jednakowe, lub też dzieli grubość soczewki w stosunku promieni krzywizny, zatem znajduje się bliżej większej wypukłości.

Możemy teraz, poznawszy właściwości soczewki, skonstruować obraz danego przedmiotu PP' , według rys. 86 za pomocą promieni



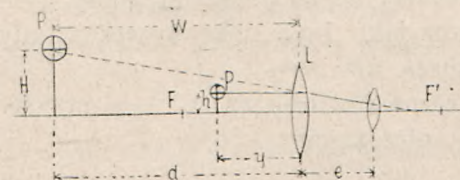
Rys. 86.

głównych, mianowicie: promienia równoległego PQ do osi i promienia przechodzącego przez środek optyczny soczewki t. j. $P O p$.

Promień PQ , wychodzący z punktu P równoległe do osi, przechodzi po załamaniu się w soczewce, przez ognisko F — promień zaś PO — przechodzi bez załamania i przecina się z poprzednim w p . Otrzymamy więc obraz $p'p'$ pomniejszony w stosunku do PP' i odwrócony.

LUPA.

§ 3. Jest to dwuwypukła soczewka o małej odległości ogniskowej, a służy do tworzenia powiększonych obrazów bliskich przedmiotów (rys. 87).



Rys. 87

Przedmiot P znajduje się między soczewką L a ogniskiem F tejże. Promień główny, równoległy do osi, wychodzący z punktu P , przechodzi przez soczewkę i po załamaniu się, przez ognisko

F' po drugiej stronie. Drugi promień przechodzi przez środek optyczny. Obydwa te promienie, przedłużone, przecinają się w P' po tej samej stronie co przedmiot i tworzą obraz P' powiększony w sto-

sunku do przedmiotu i odsunięty na odległość wyraźnego widzenia. Stosunki między y , d i f określa równanie

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7$$

czyli:
$$\frac{1}{y} = \frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{d+f}{d \cdot f} \quad y = \frac{d \cdot f}{d+f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8$$

Przyjmijmy, że oko znajduje się w odległości e od soczewki. Oko widzi obraz powiększony, o wysokości H — przedmiotu mającego wymiar h . Ażeby oko widziało dokładnie obraz, powinno znajdować się w odległości „ w ” wyraźnego widzenia t. j.

$$w = d + e \quad \text{czyli} \quad d = w - e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9$$

skutkiem tego i odstęp y będzie określony, mianowicie:

$$y = \frac{(w-e) \cdot f}{w-e+f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10$$

Gdyby przedmiot P miał być bezpośrednio widziany dokładnie, musiałby być przeniesiony na odległość „ w ” od oka — wówczas oko widziałyby go pod kątem $\frac{h}{w}$. Przedmiot ten oglądany przez lupę, widzi się o pozornym wymiarze H w odległości „ w ” zatem pod kątem widzenia $\frac{H}{w}$ stąd powiększenie v :

$$v = \frac{H}{w} : \frac{h}{w} = \frac{H}{h} = \frac{d}{f} \quad \text{lub}$$

$$v = \frac{w-e+f}{f} = \frac{w}{f} + 1 - \frac{e}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11$$

U krótkowidzów „ w ” jest mniejsze niż u dalekowidzów, czyli pierwsi mają mniejsze powiększenie niż drudzy — ale że krótkowidz przysuwa oko bliżej przedmiotu, więc przez to powiększa sobie kąt widzenia. Używając lupy, jedni i drudzy widzą obraz tej samej wielkości. Soczewka może być używana jako lupa tylko wówczas, gdy jej odległość ogniskowa jest mniejszą niż „ w ”.

Wprowadzając w równ. 11, różne wartości za „ e ” t. j. przysuwając lub odsuwając oko od lupy, otrzymamy:

$$\text{dla } e = 0 \quad . \quad . \quad . \quad v_{\max.} = \frac{w}{f} + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12$$

$$\text{dla } e = f \quad v_{\min.} = \frac{w}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13$$

z czego widzimy, że zmiany odległości oka od lupy, mają mały wpływ na powiększenie.

Z równ. 10. $y = \frac{(w - e) \cdot f}{w - e + f} = f \frac{1 - \frac{e}{w}}{1 + \frac{f - e}{w}}$ po rozwinięciu otrzymamy:

$$y = f \left(1 - \frac{e}{w} \right) \left(1 - \frac{f - e}{w} \right) + \left(\frac{f - e}{w} \right)^2 + \dots$$

$$y = f \left(1 - \frac{f}{w} + \frac{f}{w} \frac{f - e}{w} + \dots \right) \quad \dots \quad 14$$

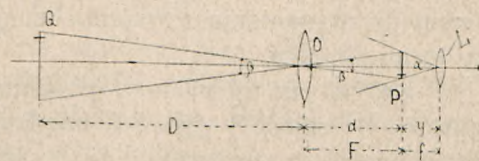
Jeżeli teraz wstawimy $e = 0$ lub $e = f$, to otrzymamy na y wartości różniące się o $\frac{f^3}{w^2}$. Dla $w = 25$ cm i $f = 1$ cm otrzymamy tę różnicę wynoszącą tylko 0.0016 mm co jest zupełnie nieznaczne. Zrózniczkujemy równ. 14 według „ w “:

$$y = f - \frac{f^2}{w} + \dots \quad dy = + \frac{f^2}{w^2} \cdot dw \text{ według równ.}$$

13 możemy wstawić $dy = \frac{dw}{v^2}$. Dla powiększenia $v = 20$ i odległości wyraźnego widzenia, $dw = 20$ cm otrzymamy $dy = 0.5$ mm. Stąd wynika, że krótkowidz o powyższej odległości wyraźnego widzenia będzie lupe trzymał bliżej oka o 0.5 mm niż dalekowidz.

LUNETA POJEDYNCZA.

§ 4 Na rys. 88 przedstawiona jest szematycznie luneta, złożona z soczewki przedmiotowej O czyli t. z. obiektywu i lupy L czyli okularu. Zapomocą promieni głównych, przechodzących przez środek optyczny obiektywu, a wychodzących ze skrajnych punktów przedmiotu Q , skonstruowany jest obraz P , będący znów przedmiotem dla lupy, jak to wykazano w poprzednim §.



Rys. 88.

Według oznaczeń na rysunku i na podstawie poprzednich wywodów, otrzymujemy:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F} \quad \text{a stąd} \quad d = F \frac{D}{D - F}$$

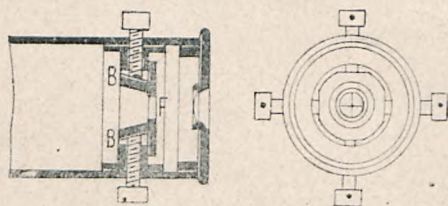
Ponieważ D w porównaniu z F jest bardzo wielkie, więc d zbliża się do wartości F , bo $\frac{D}{D - F}$ jest prawie $= 1$. Podobnie y zbliża się bardzo do wartości f — co wynika już z poprzednich obliczeń, gdzie $y - f = - \frac{f^2}{w}$ — wstawiwszy bowiem $f = 1$ cm $w = 20$ cm otrzymamy $y - f = - 0.05$ mm. Można zatem przyjąć że $y = f$.

Poprzednio wykazaliśmy, że przez środek optyczny przechodzą wszystkie promienie, odbite od przedmiotu. Mamy więc jeden punkt stały w lunecie, raczej w obiektywie. Przez ten punkt przechodzi zatem nieskończenie wiele celowych.

Urządźmy teraz w płaszczyźnie obrazu utworzonego przez okular siatkę z cieniutkich nitek pajęczych, złożoną z jednej pionowej i jednej poziomej nitki. Obie nitki w punkcie przecięcia wyznaczają stały punkt, który przykrywa pewien punkt obrazu. Punkt ten jest sprzężony z odpowiednim punktem przedmiotu, a odpowiedni promień będzie stałą celową lunety. Promień ten zatem, łączący środek optyczny ze środkiem siatki, nazywamy osią celową, podobnie jak oś geometryczną walca lunety, nazywamy krótko osią geometryczną.

Przy tej sposobności wypada nadmienić, że pożądanym jest by obie te osie były identyczne, t. j. schodziły się w jednej.

Urządzenie okulara wraz z siatką, wskazane jest na rys. 89. Okular składa się z walca, dającego się zapomocą śruby, t. zw. wyciągu, wsuwać lub wysuwać z walca lunety.



Rys. 89

Lupa, znajduje się w oprawie, dającej się wyśrubować, zatem i ognisko lupy w ten sposób daje się względem obiektywu, przysuwać doń lub odsuwać. W pierścieniu B B — dającym się przesuwac w kierunku pionowym jak i poziomym zapomocą śrubek, jak to jest łatwym do zrozumienia z rysunku, znajduje się w płaszczyźnie F siatka, w formie krzyża.

Siatka, jak mówiliśmy, powinna znajdować się w płaszczyźnie obrazu. Odległość y (rys 88) między siatką a lupą należy zapomocą przesunięcia oprawy wraz z soczewką, tak uregulować, by siatka była bardzo wyraźnie widoczną. Cały okular, wraz z siatką, należy tak względem obiektywu uregulować zapomocą wyciągu okularowego, ażeby obraz przedmiotu był zupełnie wyraźny. Po tem uregulowaniu będziemy mogli używać lunety.

Jeżeli obraz przedmiotu i siatka nie leżą w jednej płaszczyźnie, wtedy powstaje t. zw. paralaksa siatki. Paralaksę łatwo spostrzedz, bo gdy poruszamy okiem nieco w górę i w dół, wówczas wydaje się, jakby obraz względem siatki również się poruszał. W takim wypadku potrzeba lupę nieco wykręcić, lub odwrotnie wkręcić w wyciąg okularowy, dopóki te ruchy nie ustaną.

Pierścień w którym urządzona jest siatka, służy równocześnie

do przepuszczania tylko promieni środkowych przez otwór, resztę zatrzymuje ścianka pierścienia, t. zw. diafragma.

Powiększenie lunety: jest to stosunek kąta widzenia obrazu do kąta widzenia przedmiotu tegoż obrazu. Jeżeli przedmiot jest dość daleko, to kąt jego widzenia jest według rys. 88 β , podczas gdy kąt widzenia obrazu jest α , a że w przybliżeniu $d = F$ i $y = f$ przeto na powiększenie mamy wyrażenie:

$$v = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{d}{y} = \frac{F}{f} \quad \dots \quad 15$$

Pole widzenia lunety, jest to idealny stożek, który można objąć wzrokiem patrząc przez lunetę. Z rys. 90 wynika, że stożek ten ma wierzchołek w środku optycznym obiektywu, a podstawę tworzy otwór diafragmy, o średnicy „a”

Przedłużmy ten stożek na drugą stronę obiektywu, to da on nam pole widzenia. Dalej z rysunku wynika:



Rys. 90

$$\alpha = \frac{a}{F} \cdot \rho \quad \dots \quad 16$$

Zwykle średnica $a = 0.5 f$ — natenczas:

$$\alpha = 0.5 \frac{f}{F} \cdot \rho = 0.5 \frac{\rho}{v} \text{ lub okrągło } \alpha = \frac{30}{v} \text{ w stopniach} \quad 17$$

Dla powiększenia $v = 10 \quad 20 \quad 30 \quad 40$

pole widzenia $\alpha = 3^\circ \quad 1^\circ 30' \quad 1^\circ 0' \quad 0 \quad 45'$

Im silniejsze powiększenie, tem mniejsze pole widzenia.

Jasność lunety. Stosunek ilości światła wysyłanego przez świecący przedmiot do powierzchni na siatkówce oka, która tą ilość światła odbiera, określa jasność danego przedmiotu.

$$H = \frac{L}{N^2} \quad \dots \quad 18$$

Jeżeli na ten sam przedmiot patrzymy przez lunetę, to $H' = \frac{L'}{N'^2}$

Pod jasnością lunety rozumiemy stosunek:

$$h = \frac{H'}{H} = \frac{L'}{L} \cdot \frac{N^2}{N'^2} \quad \dots \quad 19$$

Opuszczając wywód matematyczny, jako niezbyt tu potrzebny, przytaczamy jako wynik:

$$\text{jasność } h = \frac{A^2}{O^2 v^2} \quad \dots \quad 20$$

gdzie A jest średnicą obiektywu, O źrenicy oka — v powiększeniem lunety. Nazwijmy przez „ o ” średnicę otworu diafragmy i przyjmijmy że $O = o$

$$\text{to } h_{\max} = \frac{A^2}{o^2 v^2} = \frac{F^2}{f^2} \cdot \frac{1}{v^2} = v^2 \cdot \frac{1}{v^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad 21$$

t. zn. że największa możliwa do osiągnięcia jasność lunety, jest naturalną jasnością przedmiotu. Takiej jasności w lunecie nie da się osiągnąć, bo już same straty światła skutkiem przejścia przez soczewki, wynoszą 20 do 30%. Odwrotnie się ma sprawa przy obserwacji gwiazd. Tam obraz jest w lunecie jaśniejszy niż przy widzeniu swobodnym okiem, bo gwiazdy są świecącymi punktami i odpada powiększenie $v = N' : N$. Wiemy, że powierzchnia źrenicy oka nie jest stałą — źrenica bowiem pod wpływem światła zwęża się.

Przeciętnie jednak można przyjąć $O^2 = 5$ a wówczas jasność

$$\text{lunety } h = \frac{1}{5} \frac{(A \text{ mm})^2}{v^2}$$

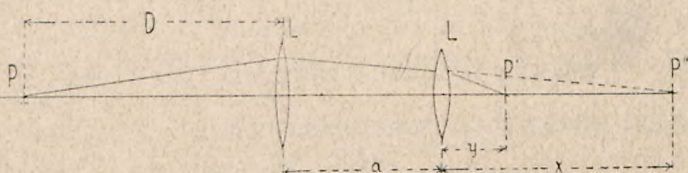
Przyrządy geodezyjne mają zwykle średnicę obiektywu 30 do 40 mm i powiększenie $v = 20$ do 30. Stąd wynika zestawienie:

średnica obiektywu $A = 30$ mm	30	40	40	mm
powiększenie $v = 20$	30	20	30	
jasność lunety $h = 0.45$	0.20	0.80	0.36	

Zestawienie to dowodzi, że nie ma racji urządzać lunetę o średn. obiektywu 30 mm na 30-krotne powiększenie, bo na tem traci jasność.

Pojedynczą lunetę wynalazł w r. 1611 Kepler — jakkolwiek w r. 1608 znana była podobna luneta, t. zw. Galileusza wynaleziona przez Hansa Lippershey'a, używana jedynie jako luneta polowa, ponieważ nie miała siatki. Siatkę zastosował i wynalazł Anglik Wiliam Gascoigne w r. 1640.

§ 5. Luneta złożona z systemu soczewek.



Rys. 91

Zbadajmy teraz współdziałanie dwóch soczewek wypukłych, na jednej osi leżącej (rys. 91).

Przyjmijmy, że z punktu świecącego P, na osi pada promień

na pierwszą soczewkę L. Po załamaniu i wyjściu ze soczewki, promień ten doszedłby znowu do osi w punkcie P'' — przedtem jednak natrafia on na drugą soczewkę L', załamuje się powtórnie i skutkiem tego przecina się z osią w P'. Ponieważ punkty P i P'' oraz P' i P'' są sprzężone, przeto ważną jest dla nich następująca relacja:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{a+x} = \frac{1}{f} \quad -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f'} \quad \dots \quad 22$$

f i f' są to odległości ogniskowe obu soczewek.

Z równania 22 otrzymamy:

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} = \frac{D-f}{Df} \quad \text{i} \quad -\frac{1}{x} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{y} = \frac{y-f'}{yf'}$$

$$a+x = \frac{Df}{D-f} \quad \quad \quad -x = -\frac{f'y}{f'-y}$$

Przez dodanie obu ostatnich równań dostaniemy:

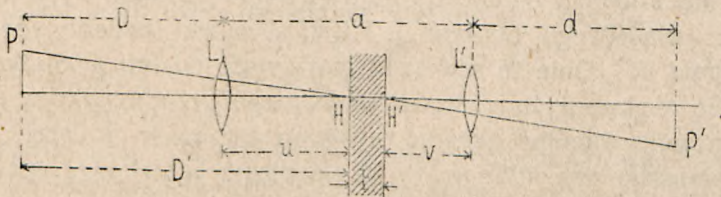
$$a = \frac{Df}{D-f} - \frac{f'y}{f'-y} \quad \dots \quad 23$$

Równanie 23 wyrażające związek między a i y, możemy też napisać w formie:

$$\frac{1}{D+u} + \frac{1}{y+v} = \frac{1}{f''} \quad \dots \quad 24$$

gdzie $u = \frac{af}{f+f'-a}$ $v = \frac{af'}{f+f'-a}$ $f'' = \frac{f \cdot f'}{f+f'-a}$ 25

wartość f'' (z równ. 25) nazwiemy wypadkową odległością ogniskową dwóch soczewek o odległ. ogniskowej f i f' w odstępach a. Równ. 24 powiada, że istnieją dwa stałe punkty H i H' (rys. 92) w odstępach



Rys. 92.

u i v od obu soczewek. Punkty te nazywamy punktami głównymi, zaś płaszczyzny prostopadłe do osi, przechodzące przez nie, płaszczyznami głównymi systemu soczewek.

Nazwawszy w równ. 24 $D+u = D'$ i $y+v = d'$ otrzymamy równ. w znanej postaci $\frac{1}{D'} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f''}$ 26

Jeżeli $D = \infty$ to z powyższych równań dostaniemy:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{y+v} = \frac{1}{f''} \quad \text{zatem} \quad y+v = f'' \quad \dots \quad 27$$

$$v = \frac{a \cdot f'}{f + f' - a} \quad f'' = \frac{f \cdot f'}{f + f' - a} \quad 28$$

$$y = \frac{f' (f - a)}{f + f' - a} \quad 29$$

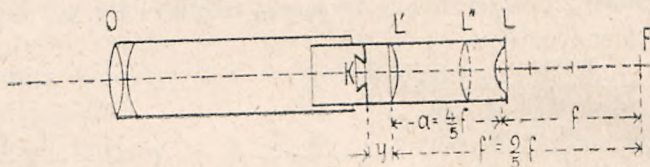
Stąd wynika, że ogniska soczewek wyznaczy się na osi, jeżeli z punktów głównych H i H' odległość ogniskową wypadkową f'' na osi odetniemy.

To samo co do dwóch soczewek, odnosi się i więcej ich.

System soczewek, jak widać z rys. 91 skraca odległość obrazu od obiektywu, a temsamem i lunetę.

a) LUNETA RAMSDENA.

§ 6. Pojedyncza luneta Keplera daje dobre obrazy tylko przy słabym powiększeniu i małym polu widzenia. Ażeby usunąć chromatyczne i sferyczne oddziaływanie soczewki, składa się ją z dwóch soczewek, z Kronglasu i Flintglasu, jak na rys. 93 przedstawiono



Rys. 93.

obiektyw. Tak złożony obiektyw działa jako całość. Okular natomiast składa się z dwóch oddzielnie umieszczonych płasko wypukłych soczewek: właściwego okularu L i t. z. soczewki kolektywnej, czyli kolektywu L'. Obie te soczewki mają stały odstęp a. Siatkę umieści się w płaszczyźnie obrazu tworzonego przez obiektyw. Na rys. 93 oznaczono wspólne ognisko systemu soczewek okularu.

Odnosząc wszystkie miary do odległości ogniskowej właściwego okularu, otrzymujemy:

$$\text{Soczewka L z odległością ogniskową } f = \frac{5}{5} f$$

$$\text{„ L' „ „ „ } f' = \frac{9}{5} f$$

$$\text{odstęp L L' = a = } \frac{4}{5} f \quad f - a = \frac{1}{5} f$$

$$\text{Wypadkowa odległość ogn. } f'' = \frac{f f'}{f + f' - a} = \frac{9}{10} f \quad 30$$

$$\text{i wkońcu } y = \frac{f' (f - a)}{f + f' - a} = \frac{9}{10} f = \frac{1}{10} f' \quad 31$$

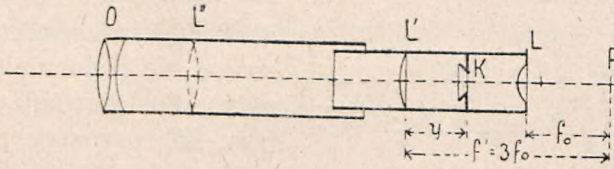
Siatka znajduje się bardzo blisko soczewki L' .

	powiększenie	pole widzenia	jasność	
Pojedyncza luneta	$v = \frac{F}{f}$	$\alpha = \frac{30}{v}$	$h = \frac{1}{5} \frac{A^2}{v^2}$	32

Luneta Ramsdena	$v' = \frac{F}{f''} = \frac{10}{9} v$	$\alpha' = \frac{9}{10} \alpha$	$h' = \frac{81}{100} h$	33
-----------------	---------------------------------------	---------------------------------	-------------------------	----

b) LUNETA HUYGHENSA (rys 94).

Ma okular podobnie jak u Ramsdena urządzony, złożony z dwóch soczewek w stałej odległości, o wspólnym ognisku po prawej stronie



Rys. 94.

w F . Obraz przez obiektyw tworzony jest jednak między obu soczewkami w K — i tam też umieszczona jest siatka. Analogicznie do poprzednich, mają dla tej lunety ważność następujące relacje:

$$F'' = \frac{F \cdot f'}{F + f' - a} \quad y'' = \frac{f' (F - a)}{F + f' - a} \quad 34$$

$$f' - y = \frac{f'^2}{F + f' - a} \quad F'' = \frac{F}{f'} (f' - y) \quad 35$$

$$f' = 3 f_0 \quad 36$$

gdzie f_0 jest odległością ogniskową właściwego okularu

$$y = f' - 2 f_0 \text{ lub } y = f_0 \quad 37$$

$$\text{oraz } F'' = \frac{2}{3} F \quad 38$$

Według równ. 37 — siatka powinna się znajdować w środku, między kolektywem, a właściwym okularzem.

Porównanie z lunetą pojedynczą, daje następujące wyniki:

	powiększenie	pole widzenia	jasność	
Pojedyncza luneta	$v = \frac{F}{f}$	$\alpha = \frac{30}{v}$	$h = \frac{1}{5} \frac{A^2}{v^2}$	39

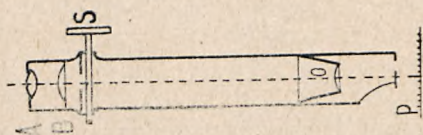
Luneta Huyghensa	$v' = \frac{F''}{f_0} = \frac{2}{3} v$	$\alpha = \frac{3}{2} \alpha$	$h' = \frac{9}{4} h$	40
------------------	--	-------------------------------	----------------------	----

Jak widzimy, kolektyw zmniejsza powiększenie, natomiast zwiększa pole widzenia i jasności.

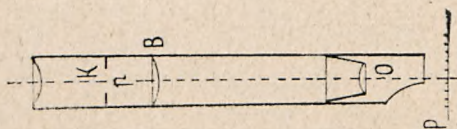
MIKROSKOP.

§ 7. Używa się do powiększenia obrazów blisko leżących przed-

miotów, w przyrządach zaś geodezyjnych do odczytywania bardzo drobnych podziałek, zwłaszcza noniuszów przy pomiarach kątów. Na rys. 95 mamy szematycznie przedstawiony mikroskop z okularum Ramsdena, na rys. 96 z okularum Huyghensa.



Rys. 95.

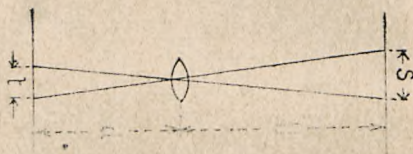


Rys. 96.

Mikroskop składa się z obiektywu O i okularu, zwykle z dwóch soczewek A i B skonstruowanego. Podwójna nitka napięta w otworze diafragmy ma takie samo znaczenie jak siatka w lunecie.

Powiększenie mikroskopu wyznacza się podobnie jak dla lunety. Zastosowanie śruby S (rys. 95) poznamy przy opisie noniuszów mikroskopowych w teodolitach.

Mikroskopy geodezyjne, mają w polu widzenia (rys. 97) napięte dwie nitki w odstępem s , który to odstęp pozostaje w związku z jednostką podziałki t na noniuszu. Odstęp ten s równy jest mianowicie przesunięciu się śruby podczas jednego obrotu, czyli skokowi śruby. Dzielic otwór tarczy śruby np. na 100 części będziemy mogli zmierzyć $\frac{1}{100}$ części jednostki podziałki na noniuszu.



Rys. 97.

Na rys. 97 mamy przedstawiony obiektyw mikroskopu; odległość ogniskowa soczewki = f — odstępem d i D naznaczone są na rys. Do tego obiektywu ma ważność znane prawo optyczne:

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \quad \text{i} \quad \frac{s}{D} = \frac{t}{d} \quad \dots \quad 41$$

$$\text{skąd} \quad D = f + \frac{sf}{t} \quad d = f + \frac{tf}{s} \quad \dots \quad 42$$

Równ. 41 i 42 odpowiadają takiemu urządzeniu mikroskopu, dla którego s ma żadaną wartość, n. p. równe jest skokowi śruby. Przypuścimy teraz, że mamy inne D' d' i s' , które to s' jest albo za wielkie, albo za małe w porównaniu do poprzednich. Wówczas ustawimy równanie:

$$D' = f + \frac{s'f}{t} \quad \text{i} \quad d' = f + \frac{tf}{s'} \quad \dots \quad 43$$

Z równ. 42 i 43 otrzymamy:

$$D - D' = \frac{fs}{t} \left(1 - \frac{s'}{s} \right) \quad d - d' = - \frac{ft}{s'} \left(1 - \frac{s'}{s} \right) \quad 44$$

Z równ. 41: $f = \frac{D d}{D + d}$ i $\frac{s}{t} = \frac{D}{d}$

Przyjmijmy, że w przybliżeniu $D = d$ i $s = s' = t$ a równocześnie wstawmy w równ. 44 wartości za f to otrzymamy:

Z równ. 44:

$$D - D' = \frac{D^2}{D + d} \left(1 - \frac{s'}{s} \right) \quad i \quad d - d' = \frac{D^2}{D + d} \left(1 - \frac{s'}{s} \right) \quad 45$$

pod warunkiem, że przybliżone te wartości wstawiamy tylko przed nawiasami:

$$\text{wkońcu } (D + d) - (D' + d') = (D - d) \left(1 - \frac{s'}{s} \right) \quad 46$$

Równ. 45 i 46 możemy stosować bezpośrednio do mikroskopu, który ma albo pojedynczy okular, albo konstrukcję według rys. 95.

Ażeby uwydatnić znaczenie równ. 45 i 46, przyjmijmy, że noniusz ma podziałkę $5'$ natomiast jeden obrót śruby mikroskopowej przesuwa nitki o $5' 9''$ — natenczas:

$$\frac{s'}{s} = \frac{5' 9''}{5' 0''} = \frac{309''}{300''} = 1.030 \quad 1 - \frac{s'}{s} = - 0.030$$

Zmierzone odstępki D i d niech wynoszą:

$$D = 85 \text{ mm} \quad d = 48 \text{ mm} \quad D + d = 183 \quad D - d = 37$$

Wówczas z równ. 45 i 46:

$$D - D' = - 1.63 \text{ mm} \quad d - d' = + 0.52 \text{ mm.}$$

Należałoby więc zrektyfikować mikroskop, przesuając obiektyw w górę o 0.52 mm, oraz siatkę razem z okulem o 1.63 mm przesunąć nadół w rurze obiektywowej.

To ostatnie przesunięcie reguluje się samo stosownie do wyraźnego widzenia. Zastosowanie mikroskopu widzieć będziemy przy teodolicie.

b) PRYZRZĄDY DO NIWELACJI CZYLI POMIARU WYSOKOŚCI.

LIBELA.

§ 3. Jest głównym składnikiem każdego z optycznych przyrządów geodezyjnych i służy do wyznaczania płaszczyzny poziomej, równoległej do poziomu pozornego, który jak już wiemy, jest płaszczyzną styczną do geoidy ziemskiej,

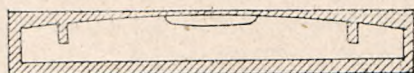
Kształt libeli powstaje przez obrót łuku około osi podłużnej A B (rys 98). Jest to więc rodzaj rurki szklanej, wypukłej, zawierającej wewnątrz płyn, zwykle alkohol lub eter, ale nie zupełnie wy-

pełnionej. Część przestrzeni wewnątrz, zajmuje para danego płynu, t. z. bańka. Oba końce tej rurki są zatopione. Mamy też różne konstrukcje libeli, n. p. rys. 99



Rys. 98.

w przekroju na rysunku. Ażeby regulować długość bańki, która się wraz z temperaturą zmienia, urządza się w większych libelach ściankę przedziałową, pozwalającą na taki rozdział płynu we właściwej libeli i komórce, że bańka może być zawsze utrzymana w odpowiednich granicach. Zależnie od celu, do jakiego libela ma być przeznaczona, ma też stosowną oprawę. Przy opisie różnych typów przyrządów, poznamy różne rodzaje oprawy. W tem miejscu zajmiemy się t. zw. libelą stolikową, rys. 100. Część szklanna, t. j. właściwa



Rys. 99.

libela oprawiona jest w rurkę mosiężną, ta zaś umieszczona na płytce, pp w ten sposób, że końce oprawy umieszczone są w ramionach r i r_1 . Jeden koniec



Rys. 100.

oprawy w ramieniu r , umieszczony jest przegibnie, tak że libela da się około tego przegubu obracać w płaszczyźnie pionowej, drugi koniec spoczywa w ramieniu r_1 za pośrednictwem śrubki „i” która pozwala na podnoszenie lub opuszczanie tegoż końca.

Jest to potrzebne do takiego uregulowania libeli, by jej oś była równoległą do podstawy.

Bańka, jako najlżejsza, zajmuje zawsze najwyższe położenie. Jeżeli oś libeli jest pozioma, to środek bańki schodzi się z t. zw. kołem wielkiem, czyli zerowem, t. j. przekrojem libeli o największej średnicy. Po obu stronach, w pewnym odstępnie od koła zerowego, po lewej i prawej stronie, urządzona jest podziałka na szkle w milimetrach lub linjach paryskich. Skoro jeden koniec libeli podniesiemy o jakiś kąt, to bańka przesuwa się natychmiast ku wyższemu końcowi. Znając wartość kąta, jaki odpowiada przesunięciu się środka bańki o jedną przedziałkę, który to kąt nazywamy przewagą libeli, moglibyśmy zapomocą libeli mierzyć małe kąty nachylenia płaszczyzn

do poziomu. Musimy więc znać przewagę libeli, a zarazem umieć odczytać wielkość przesunięcia się środka bańki, który nie ma i nie może mieć żadnego znaku, jakiby ułatwiał nam odczytanie. Natomiast widoczne są końce bańki i podziałka na szkle, w ich okolicach urządzone. Nazwijmy położenie środka bańki przez s , położenie zaś lewego i prawego jej końca odpowiednio przez l i p , przyczem podziałkę z lewej strony uważamy za ujemną z prawej za dodatnią, to położenie środka bańki określa równanie

$$s = \frac{(l) + (p)}{2} \dots \dots \dots 1$$

przy (l) i (p) uwzględnia się odpowiednie znaki n. p.

$$l = (-5) \quad p = (+2) \quad \dots \quad s = \frac{-5 + 2}{2} = -\frac{3}{2} = -1.5 \text{ t. z.}$$

że środek bańki wychylony jest na lewo o 1.5 przedziałki.

Przypuścimy, że libela spoczywa na płaszczyźnie poziomej, lecz mimo to środek bańki wychylony jest z punktu zerowego, n. p. o $s = +2$. To położenie środka bańki w tym wypadku t. j. gdy libela leży na płaszczyźnie poziomej, nazywamy punktem normalnym. Jeżeli tą samą libelę położymy na innej płaszczyźnie i odczytamy, że środek bańki ma położenie $s_1 = -3$ to już widzimy, że płaszczyzna ta nie jest poziomą. Znając więc punkt normalny, możemy wyznaczyć linię, względnie płaszczyznę poziomą. Ze względu jednak na wygodę, możemy libelę zrektyfikować zapomocą śrubki „i“ t. j. sprowadzić punkt normalny do punktu zerowego.

Libela odpowiadać powinna następującym warunkom:

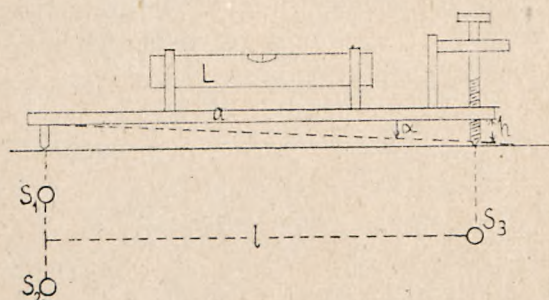
a) Powinna być czułą t. zn. nachylenie jej o bardzo mały kąt, zaznaczyć się powinno zaraz wychyleniem się środka bańki.

b) Równym kątom nachylenia osi libeli, odpowiadać winny równe wychylenia środka bańki.

c) Długość bańki, przy różnych wychyleniach, a przy niezmięnionej temperaturze nie powinna się zmieniać. Zależy tu od dokładnie urządzonej podziałki.

Zwykle podziałka urządzona jest w liniach paryskich, t. j. odstęp kresek wynosi 2.26 mm. Wartość kąta o jaki wychylić potrzeba osi libeli, ażeby środek bańki przesunął się o jedną przedziałkę oznaczamy przez „w“ i nazywamy przewagą libeli. Zapomocą przyrządu przedstawionego na rys. 101 możemy wyznaczyć przewagę libeli oraz sprawdzić ją i przekonać się czy libela odpowiada wymaganym warunkom. Przyrząd ten składa się z płytki „a“ na której umieszcza się libela. Płyta spoczywa na trzech nóżkach, z których dwie, t. j. s_1 i s_2 są stałe, trzecia s_3 jest śrubą, mającą wlot w płytce, opatrzona

zaś jest u góry krążkiem i wskazówką. Skokowi śruby, odpowiada jeden obrót krążka, który, ponieważ ma dość dużą średnicę, łatwo jest



Rys. 101.

podzielić na 120 części, tak, że z łatwością odczytać możemy $\frac{1}{120}$ część

kroku śruby. Podzieliwszy długość nagwintowaną, przez ilość gwintów n , otrzymamy wysokość kroku śruby i nazwijmy go przez h długość — l również jest znaną, Po-

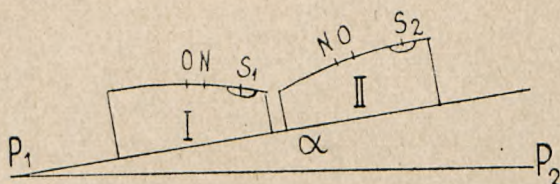
dnieśmy koniec płytki o jeden skręt śruby, to odpowiedni kąt będzie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l}$$

Jeżeli podziałka na krążku wynosi 120, to kąt odpowiadający wychyleniu płytki o jedną przedziałkę wynosi $\frac{\alpha}{120}$. W ten sposób zbadanie wartości przewagi libeli, nie przedstawia żadnej trudności. Doświadczenie to powtórzyć należy przynajmniej 20 razy i obliczyć średnią. Równocześnie należy zbadać, czy równym kątom nachylenia, odpowiadają równe wychylenia środka bańki. Dobre libele, używane do przyrządów geodezyjnych powinny mieć przewagę do 5" na jedną linię paryską t. j. 2.26 mm.

Znając wartość w , możemy zapomocą libeli znaleźć kąt nachylenia płaszczyzny PP_1 rys. 102 — do poziomu PP_2 t. j. α . Ustawmy

w tym celu libelę w pozycji I i przypuśćmy, że znamy położenie punktu normalnego N . Gdyby libela spoczywała na płaszczyźnie poziomej, to środek bańki zgadzałaby się



Rys. 102.

z punktem normalnym N , ponieważ jednak płaszczyzna jest nachylona, więc środek bańki znajduje się w punkcie S_1 którego położenie

$$\text{określi równanie: } s_1 = OS_1 = \frac{l_1 + p_1}{2} \dots \dots \dots 2$$

Kąt α obliczymy mnożąc długość przesunięcia środka bańki, wyrażoną w jednostkach podziałki przez wartość w :

$$\alpha = NS_1 \cdot w'' = (OS_1 - ON) \cdot w'' \dots \dots \dots 3$$

Przerzucmy teraz libelę o 180^0 w tem samym miejscu, t. zn., że gdy poprzednio śrubka „i“ była po prawej stronie, to teraz znajduje się po lewej. W tej II pozycji, punkt O (zerowy) nie zmieni swego położenia, natomiast punkt normalny N znajduje się teraz po lewej stronie, zaś środek bańki przesunie się do S_2 .

$$s_2 = OS_2 = \frac{l_2 + p_2}{2} \quad \dots \quad 4$$

i podobnie jak poprzednio obliczymy:

$$\alpha'' = NS_2 \cdot w'' = (OS_2 + ON) \cdot w'' \quad \dots \quad 5$$

dołączmy równania 2 i 3:

$$2 \alpha'' = w'' (NS_1 + NS_2) = (OS_1 + OS_2) \cdot w'' \text{ czyli}$$

$$\alpha'' = \frac{s_1 + s_2}{2} \cdot w'' \quad \dots \quad 6$$

Kąt nachylenia płaszczyzny, możemy zatem w powyższy sposób znaleźć, nie znając wcale położenia punktu normalnego, t. j. nie wiedząc czy oś libeli jest równoległą do podstawy.

Odejmując teraz równanie 3 od 5

$$\alpha'' - \alpha' = 0 = w'' (OS_2 - OS_1 + 2 ON) \text{ czyli}$$

$$w'' (s_2 - s_1) + w'' \cdot 2 ON = 0 \text{ więc } ON = - \frac{s_2 - s_1}{2} \quad 7$$

Równ. 7 określa położenie punktu normalnego N, możemy zatem libelę zrektyfikować t. j. zapomocą śrubki „i“ sprowadzić punkt N do punktu zerowego.

W praktyce rektyfikuje się zwykle libele w następujący sposób: Ustawiamy libelę na jakiegokolwiek płaszczyźnie, której położenie następnie tak uregulujemy, że środek bańki znajduje się w punkcie zerowym. W jakim nachyleniu znajduje się płaszczyzna do poziomu, tego nie wiemy i wiedzieć nie potrzebujemy. Po ustaleniu się bańki przerzucimy libelę o 180^0 w tem samym miejscu i odczytamy położenie środka bańki, który wychyli się o n przedziałek. Teraz zapomocą śrubki „i“ przesuniemy środek bańki o $\frac{n}{2}$ przedziałek a dru-

gie zaś $\frac{n}{2}$ poprawimy nachylenie płaszczyzny. Po parokrotnem powtórzeniu doświadczenia, środek bańki nie będzie się wychylał po przerzuceniu libeli, czyli libela będzie zrektyfikowana. Długość bańki zmienia się wraz temperaturą i to przy niższej temperaturze długość znacznie się zwiększa. Jordan podaje n. p. nast. spostrzeżenia:

temperatura $t^0 = 0^0 \quad 5^0 \quad 10^0 \quad 15^0 \quad 20^0 \quad 25^0 \text{ C.}$

długość bańki $l = 26\cdot5, 24\cdot5, 22\cdot5, 20\cdot5, 18\cdot5, 16\cdot5$ przedziałek na 1^0 C wypadła zmiana o $0\cdot4$. Znając dokładnie daną libelę, możnaby

ją używać jako termometr. W polu należy libelę bezwarunkowo chronić przed słońcem zapomocą parasola. Również wpływy chemiczne działają z czasem na libelę czyniąc ją nieraz po latach nieużyteczną. Przyczyną tego jest fabrykacja szkła łatwo topliwego i mało wytrzymałego na wpływy zewnętrzne.

a) PRYZRZĄD NIWELACYJNY.

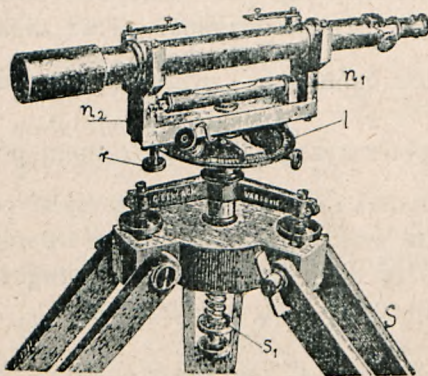
§ 9. Zasadą przyrządu niwelacyjnego, jest połączenie lunety z libelą, których osie powinny być do siebie równoległe. Jeżeli przyrząd tak urządzimy, że luneta wraz z libelą da się w poziomie, zatem około osi pionowej obracać, to oś celowa, o której przy opisie lunety mówiliśmy, wyznacza nam podczas obrotu, płaszczyznę poziomą, równoległą do horyzontu pozornego tego punktu na którym przyrząd stoi. Mierząc odstęp tej płaszczyzny w kierunku pionowym, od poszczególnych punktów terenu, otrzymamy ich położenie względem płaszczyzny, a równocześnie ich wzajemne położenie wysokościowe, czyli względne wysokości.

Konstrukcji tych przyrządów mamy wiele, lecz można je podzielić na trzy typy:

1. Libela jest stale złączona z lunetą.
2. Libela stale złączona z alhidadą, natomiast luneta da się zdejmować, przekładać i obracać około osi poziomej.
3. Libela i luneta dadzą się zdejmować i przekładać. Pierwszy typ stanowi najmniej dokładne przyrządy i używany też jest do mało ważnych pomiarów.

b) CZĘŚCI SKŁADOWE PRYZRZĄDÓW NIWELACYJNYCH.

1. Statyw czyli trójnog. Na nim, jak na stoliku umieszcza się przyrząd niwelacyjny. Na rys. 103, widzimy najpraktyczniejszy rodzaj



Rys. 103.

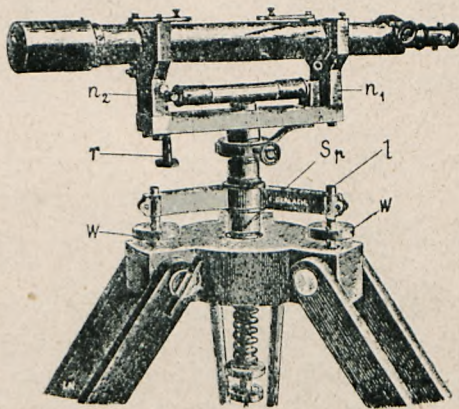
statywu. Połączenie krążka z nogami widoczne jest na rysunku i nie potrzebuje wyjaśnienia. Na krążku zawieszona jest śruba *s*, służąca do umocowania przyrządu na statywie. Odbywa się to w ten sposób, że śrubę *s*, której nagwintowany koniec wystaje nad krążkiem, wkręcamy w dolną część przyrządu niwelacyjnego t. zw. spodarkę. Wtedy jednak utwierdzenie jest jeszcze luźne. Do mocniejszego ściągnięcia służy

krażek s_1 poruszający się po śrubie s jako mutra. Na tym krażku opiera się spiralna sprężyna jednym końcem, drugim zaś o dalszą część krażka statywu. Jeżeli więc krażek s_1 nakręcamy po śrubie s ku górze, to ściska on sprężynę, która znów opierając się o statyw, odpycha całą śrubę w dół, przyciągając temsamem przyrząd silnie do statywu.

Tego rodzaju statywy, z małemi odmianami, używane są powszechnie. Bywają też statywy czopowe, gdzie przyrząd niwelacyjny nasadza się na czop trójnoga. Dolna część przyrządu, spodarka, musi być wówczas urządzona jako tulejka. Tych statywów używa się tylko do małych przyrządów typu I. lub węgielnic. Są one za lekkie i każdy wiatr działa na nie.

2. Spodarka. Jest to dolna część przyrządu, służąca do połączenia go ze statywem. Na rys. 103 — spodarka ma kształt walca w który wkręca się śrubę s .

3. Limbus. znajduje się nad spodarką i nanim obraca się górna część przyrządu wraz z lunetą i libelą. W przyrządach niwelacyjnych może być dość dowolne rozgraniczenie tych części. Często spodarka i limbus uważane być winny jako jedna część przyrządu n. p. na rys. 104. Uważając bowiem tutaj walec Sp jako spodarkę, uważać byśmy musieli podstawę „ l ” wraz ze śrubami wstawowemi w , jako limbus. Obie te części są stale ze sobą złączone i właściwie stanowią jedno. Na rys. 103, który przedstawia przyrząd niwelacyjny urządzone równocześnie do pomiaru kątów poziomych, limbus l jest krażkiem, mającym na obwodzie podział na stopnie. Spoczywa on na dolnej części, t. j. spodarce mającej śruby wstawowe. Podobnie urządzone jest przyrząd na rys. 105.

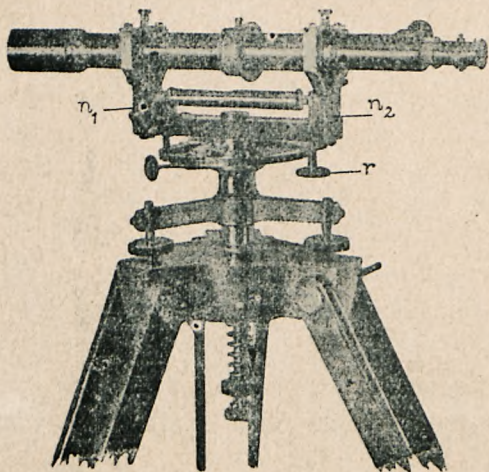


Rys. 104.

Natomiast na rys. 104 widzimy inne urządzenie limbusu. Nad dolną częścią ze śrubami wstawowemi, czyli spodarką Sp , wznosi się walec, który jest właściwie limbusem, bo po nim obraca się górna część przyrządu, nasadzona nań. Śruba S_1 służy do ściągnięcia obu tych części, tak, że wówczas luneta nie może obracać się w płaszczyźnie poziomej, może jednak mieć małe ruchy zapomocą śruby S_2 t. zn. śruby do ruchu leniwego, która przy obrocie, wkręcając się

w mutrę stale z limbusem złączoną, opiera się końcem o występ części górnej przyrządu, t. zw. alhidady i odpycha ją, przewyciężając tarcie, jakie wywołała śruba s_1 .

Spodarka i limbus najwyraźniej występują w teodolitach. Tam bowiem limbus obraca się po spodarce, po nim zaś alhidada.



Rys. 105.

4. Alhidada. Jest to górna część przyrządu, zawsze obracalna po limbusie, unosząca na sobie lunetę i libelę. Rysunki 103 do 105 przedstawiają II typ, w którym libela jest stale złączona z alhidadą i umieszczona zwykle wzdłuż pod lunetą. Libela zawsze opatrzona jest śrubką „i” celem rektyfikacji.

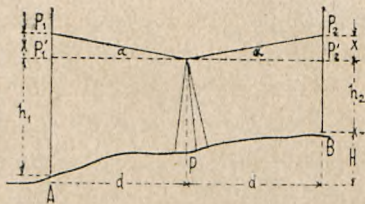
Luneta spoczywa na ramionach n_1 i n_2 , z których jedno n_1 ma wysokość niezmienną

i złączone jest z alhidadą przegibnie, drugie zaś n_2 , spoczywa na t. zw. śrubie elewacyjnej, umożliwiającej skrócenie lub przedłużenie tego ramienia. Na rys. 103 nie ma śruby elewacyjnej.

Niekiedy dodaje się nad libelą zwierciadło zapomocą którego można obserwować libelę, nie podnosząc głowy od okularu.

Typ III różni się tem od poprzedniego, że libela nie jest stale, zwykle pod lunetą umieszczona, lecz t. zw. nasadkowa, daje się nasadzać na lunetę, zdejmować i przerzucać.

Trudno jest wszystkie szczegóły podawać w rysunkach — zresztą nie jest to potrzebne. Z rysunków bowiem nikt nie nabierze doświadczenia i wprawy w pracach geodezyjnych. Przyrządy musi się poznać praktycznie doskonale. W dodatku mamy wiele typów przyrządów, różniących się w niektórych szczegółach, że trudno je wszystkie opisać. Doświadczony inżynier na pierwszy rzut oka, choćby dany przyrząd miał pierwszy raz w ręku, pozna się na urządzeniu. Np. na rys. 103 do 105 nie ma śrub elewacyjnych, natomiast są śruby r pod libelami, do ich rektyfikacji, zamiast śrubek „i”. — Jest to właściwość fabryki.



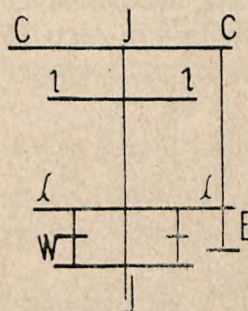
Rys. 106.

SPRAWDZANIE I REKTYFIKACJA PRZYRZĄDÓW NIWELACYJNYCH

§ 10. Typ I. Jest to najniewdzięczniejszy przyrząd ze wszystkich. Przy pracy należy postępować ostrożnie, bo trudno go rektyfikować. Na szczęście używane są one rzadko, do pomiarów nie wymagających dokładności. Z rektyfikacją jego załatwimy się prędko i przejdziemy do dalszych typów, które dadzą się rektyfikować precyzyjnie.

W typie tym luneta i libela są stale z alhidadą połączone.

Przedewszystkiem należy sprawdzić, czy nie ma paralaksy siatki. W tym celu zwracamy lunetę albo na jakiś daleki punkt, widoczny wyraźnie, albo na łąkę ustawioną w odległości około 80 m od stanowiska przyrządu, nastawiamy okular tak, by dany przedmiot był wyraźny, następnie patrząc w lunetę, poruszamy głową w kierunku pionowym. Jeżeli przy tem widzimy ruchy łąki względem siatki, to paralaksa istnieje. Usuwamy ją, wykręcając lub wkręcając lupę, dopóki pozorne ruchy nie ustaną. Ustawmy teraz przyrząd w punkcie P. (rys. 106) i zastanówmy się nad warunkami, jakim przyrząd niwelacyjny odpowiadać powinien, mianowicie:



Rys. 107.

1. Oś geometryczna lunety, t. j. oś walca metalowego lunety, powinna być identyczną z osią celową, łączącą środek optyczny obiektywu ze środkiem siatki, a gdyby to była niemożliwe ze względów konstrukcyjnych lunety, to osie te powinny być przynajmniej równoległe do siebie.

2. Oś libeli II powinna być równoległą do osi celowej CC (rys. 107). Jeżeli te dwa warunki są spełnione, to przyrząd jest zdalny do pracy.

3. Jeżeli płaszczyzna limbusu $\lambda\lambda$ jest równoległą do osi libeli, to oś pionowa przyrządu, I I będzie jako prostopadła do limbusu, rzeczywiście pionową, a limbus obracać się będzie w płaszczyźnie poziomej. Tem samym i oś celowa zakreśli podczas obrotu płaszczyznę poziomą, czyli horyzont pozorny. Warunek 3 nie jest koniecznym, lecz ze względu na wygodę i oszczędność czasu, staramy się go zawsze zachować. Inaczej bowiem musielibyśmy po każdym ruchu lunety, sprowadzać środek bańki do punktu zerowego.

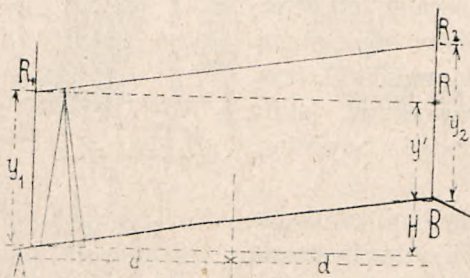
Wróćmy teraz do rys. 106. W odległościach d równych od przyrządu wprzód i wstecz, wyznaczamy dwa punkty A i B zabijając tam paliki. Sprowadźmy teraz środek bańki do punktu zerowego, to oś libeli będzie poziomą, natomiast oś celowa, przypuśćmy, tworzy kąt α z poziomem. Na łące ustawionej w punkcie A natrafi celowa

punkt P_1 — podczas gdy trafiłaby punkt P_1' gdyby była pozioma. Teraz obróćmy alhidadę o 180° i wycelujmy lunetę na łąkę ustawioną w B. Sprowadzimy znowu środek bańki do punktu zerowego i odczytajmy łąkę. Ponieważ położenie osi celowej względem osi libeli nie zmieniło się i tworzą one nadal ten sam kąt α ze sobą, przeto celowa natrafi teraz punkt P_2 zamiast P_2' . Ponieważ odległości d i d są równe, kąt d pozostał niezmienny, więc oczywista, że $P_1 P_1' = P_2 P_2' = x$.

Nazwijmy odcinki na łące, między terenem a horyzontem poziomym, $A P_1' = h_1$ i $B P_2' = h_2$ — to różnica wysokości punktu A względem B — wyniesie: $H = h_1 - h_2$ 8

Tymczasem na łące otrzymaliśmy inne odczyty: $A P_1 = h_1 + x$ i $B P_2 = h_2 + x$, których różnica:

$$A P_1 - B P_2 = (h_1 + x) - (h_2 + x) = h_1 - h_2 = H$$



Rys. 108.

jest, jak widzimy równą różnicy wysokości punktów A i B.

Stąd wynika, że zapomocą przyrządu niezrekryfikowanego, możemy pomierzyć dobrze różnicę wysokości jeżeli tylko przyrząd ustawimy w środku odległości obu punktów.

Gdyśmy otrzymali rzeczywistą różnicę wysokości

obu punktów, to przenieśmy teraz przyrząd do punktu A (rys. 108) i ustawmy go tuż przy łące, tak, by się jej dotykał obiektywem. Sprowadzimy środek bańki do punktu zerowego i odczytajmy łąkę w A. Ponieważ łąka stoi za blisko, więc odczyt zrobimy w ten sposób, że zaznaczymy na łące punkt najwyższy i najniższy koła obiektywu, potem zaś odczytamy okiem punkt pośredni. Dostaniemy tedy na łące punkt R_1 czyli odcinek y_1 . Obróćmy teraz lunetę na punkt B, sprowadzimy środek bańki do punktu zerowego, poczem odczytajmy łąkę, na której dostaniemy odczyt y_2 . Różnica wysokości obu punktów wyniesie: $H_1 = y_1 - y_2$ 9

Otrzymany z równ. 9 spadek między obu punktami, będzie wogóle inny, niż z równ. 8, a że pierwszy był dobrym, więc różnica $H - H_1$ jest błędem, a pochodzi stąd, że obie osie nie są równoległe.

Ponieważ odczyt na łące w A uważać trzeba za dobry, bo łąka była przy samym przyrządzie ustawiona i nierównoległość osi celowej nie mogła odegrać roli, gdy nadto znamy z równ. 8 różnicę wysokości obu punktów, więc będziemy mogli obliczyć, jaki powinien być

odczyt na łacie B_1 przyjąwszy y_1 jako dobry. Powinno bowiem być: $H = y_1 - y$ gdzie H i y_1 są znane, a stąd: $y = y_1 - H$. . . 10

Wiedząc z równ. 10 jaki powinien być odczyt na łacie B_1 nastawimy środek siatki na odpowiedni punkt na łacie w ten sposób, że patrząc przez lunetę na łatę, śrubą wstawową regulujemy położenie jej więc i osi celowej, aż trafimy żądany punkt. Ale skutek tego ruchu lunety, libela z nią złączona wyszła z równowagi. Teraz więc sprowadzimy środek bańki do punktu zerowego zapomocą śrubki „i“ i będziemy mieli oś celową i oś libeli równoległe. Doświadczenie to powtórzyć wypadnie parę razy z obu stanowisk A i B. Czy oś geometryczna jest identyczną z osią celową, tego sprawdzić nie można bez odejmowania lunety, co znów dałoby za wiele pracy.

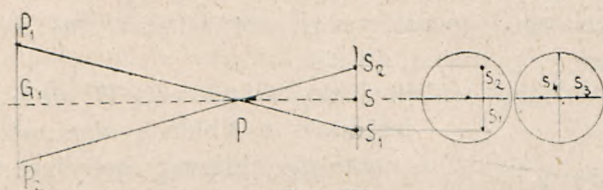
Rektyfikacja wyżej opisana, zajmuje wiele czasu, a przyrząd ten, mimo rektyfikacji należy używać ostrożnie, ustawiając go w środku między dwoma punktami.

REKTYFIKACJA PRZYRZĄDU NIWELACYJNEGO TYPU II.

1. Paralaksę siatki usuwamy tak, jak przy typie I.

2. Równoległość osi celowej do osi geometrycznej sprawdzimy w następujący sposób:

Przypuśćmy, (rys. 109) że oś geometryczna przecina się w lunecie z osią celową w punkcie P zaś środek siatki, który znajduje

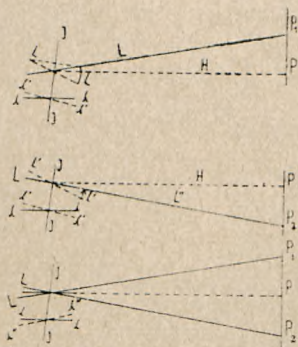


Rys. 109.

się powinien w punkcie s , jest przesunięty i leży w punkcie s_1 . Ustawmy w jakimkolwiek miejscu przyrząd i skierujmy lunetę na łatę odległą około 100 m, najlepiej tak, by środek siatki padał na granicę między białym a czarnym przedziałem cm. Przytem nie potrzeba wcale regulować libeli. Teraz obróćmy lunetę w łożyskach, około jej osi podłużnej, tak, że jeżeli poprzednio wyciąg okularowy był po prawej stronie, to teraz znajduje się po lewej, czyli obróćmy lunetę o 180° . Łatwo zrozumieć, że gdy w pierwszym położeniu punkt s_1 znajdował się na dole, z boku pod s , to teraz znajdzie się u góry, po tej samej stronie. Jak widzimy, w tym wypadku środek siatki znajduje się wogóle na boku. Trzeba go zatem przesunąć tak w kierunku pionowym, jak i poziomym. Po pierwszym obrocie zauważyliśmy, że środek siatki wskazuje na łacie punkt o n mm. wyżej.

Przesuniemy więc całą siatkę zapomocą śrubek ją utrzymujących, na dół (rys. 109) o $\frac{n}{2}$ mm i znowu doświadczenie sprawdzimy. W ten sam sposób przesuniemy siatkę w kierunku poziomym. Ponieważ oś geometryczna schodziła się jak przypuszczaliśmy w środku optycznym, z osią celową, więc teraz, gdy środek siatki leży także na osi geometrycznej obie osie schodzą się. Lecz jest możliwość, że obiektyw jest osadzony ekscentrycznie i mimo poprzedniej rektyfikacji, przecież osie te się nie schodzą. O tem przekonamy się po ukończeniu rektyfikacji siatki, w ten sposób, że łąkę przesuniemy bliżej lub dalej. Jeżeli przy takim samym obrocie lunety w łożyskach około osi podłużnej, dostaniemy różnicę odczytów, to jest znakiem, że teraz obiektyw jest ekscentryczny. Jeżeli niema osobnego urządzenia do przesuwania obiektywu, to usunąć błędu nie możemy. W takim razie poprzednią rektyfikację trzeba powtórzyć zapomocą jak najdalej leżącego punktu. Uważać wówczas będziemy mogli obie osie jako równoległe, bo schodzą się w bardzo dalekim punkcie, lecz przy niwelacji luneta musi pozostawać zawsze w tem samym położeniu, t. j. wyciąg okularowy ma być zawsze po prawej, lub zawsze po lewej stronie. Oś celowa bowiem leży w tym razie albo pod osią geometryczną, albo nad nią, zatem obracać lunety w łożyskach, podczas niwelacji nie można. Usunąwszy paralaksę siatki i przyprowadziwszy do porządku oś celową i geometryczną, sprawdzimy, czy zachodzi 3-ci warunek.

3. Równoległość osi libeli do osi celowej. W typie tym, libela jest stale z alhidadą złączona. Siatki już ruszać nie możemy, bobyśmy popsuli poprzednią pracę.



Rys. 110.

Postawmy łąkę w odległości około 100 m i sprowadźmy środek bańki do punktu zerowego. Przypuśćmy zarazem, że gdy libela jest już ustawiona poziomo i zajęła położenie $\lambda\lambda$, (rys. 110) to oś celowa LL nie jest do niej równoległą i daje na łące odczyt P_1 . — Obróćmy teraz alhidadę, a więc i lunetę o 180° t. zn. obiektywem w przeciwną stronę, wyjmmy ją z łożysk i przełożmy napowrót obiektywem ku łące, to luneta i libela obróca się o 180° około osi pionowej przyrządu, prostopadłej do płaszczyzny limbosa. Oś libeli zajmie położenie $\lambda'\lambda'$ (na rys. 110) zaś celowa $L'L'$. Sprawdzimy znowu śrubą wstawową środek

bańki do punktu zerowego, wówczas libela zajmie położenie $\lambda \lambda$ (rys. b) oś celowa zaś położenie $L' L'$ i da odczyt P_2 na łacie. Oba położenia osi celowej $L L$ i $L' L'$ przedstawiono na rys. 110 c. — Widać stąd, że oś celowa musiałaby trafić łatę pośrodku w punkcie P , gdyby była pozioma. Ponieważ siatki już ruszać nie możemy, więc podniesiemy celową wraz z lunetą, zapomocą śruby wstawowej, by dawała odczyt P . Patrząc przez lunetę, obracamy wolno śrubę wstawową dopóty, aż środek siatki wskaże odczyt P . Ale wskutek tego wyszła znów bańka z równowagi, bo oś libeli zajęła położenie $\lambda'' \lambda''$. Sprowadźmy ją przeto do punktu zerowego zapomocą śrubki „i“. — Połowę przeto błędu usunęliśmy przez odpowiednią poprawkę położenia osi celowej, połowę przez poprawkę osi libeli śrubką „i“.

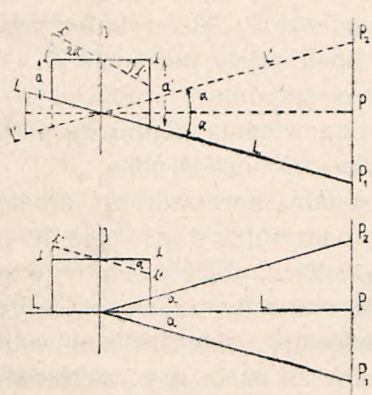
Przykład: Skierowawszy lunetę na łatę, sprowadzamy środek bańki do punktu zerowego, następnie odczytujemy na łacie n. p. 2186 mm. Teraz przekładamy lunetę w łożyskach, obiektywem w przeciwną stronę i obracamy alhidadę o 180° zwracając znowu obiektyw na łatę. Środek bańki sprowadzamy powtórnie, także śrubami wstawowymi do punktu zerowego i odczytujemy na łacie n. p. 2024 mm. Gdyby celowa była równoległą do osi libeli i poziomą, to wskazywałyby odczyt pośredni t. j. $(2156 + 2024) : 2 = 2105$ mm. Nastawiamy więc śrubą wstawową lunetę, a raczej oś celową na ten odczyt. Tymczasem, wskutek pochylenia limbusu śrubą wstawową, musiał środek bańki wychylić się, więc sprowadzamy go do punktu zerowego zapomocą śrubki „i“. Doświadczenie to powtórzymy jeszcze drugi i trzeci raz, aż dostaniemy zupełną zgodność odczytów i rektyfikacja jest skończoną.

REKTYFIKACJA PRZYRZĄDU NIWELACYJNEGO TYPU III. t. j. TAK LUNETĄ JAK LIBELĄ DO PRZEKŁADANIA.

1. Paralakse siatki usuwamy jak poprzednio.
2. Oś celową i geometryczną sprowadzamy do identyczności względnie do równoległości, jak poprzednio.
3. Wkońcu sprowadzamy oś geometryczną lunety, do równoległości z osią libeli, a że oś geometryczna jest identyczną z osią celową, więc tem samem oś libeli będzie równoległą do osi celowej.

W tym celu skierujemy lunetę na łatę i sprowadzimy środek bańki do punktu zerowego, poczem odczytamy łatę. Przyjmijmy, że gdy oś libeli $\lambda \lambda$ (rys. 111) jest poziomą, to oś celowa zajmuje położenie $L L$ i trafia łatę w punkcie P_1 . Powodem tego jest, że ramiona libeli a i a' nie są równe, więc gdy oś libeli jest poziomą, to luneta, względnie oś geometryczna i oś celowa, nie mogła być do niej równoległą. Nie ruszając lunety, zdejmujemy libelę i przekła-

damy ją o 180° , tak, że gdy pierwiej śrubka „i“ znajdowała się po prawej stronie, to teraz znajduje się po lewej. Z rysunku widzimy, że teraz oś libeli będzie nachyloną do poziomu o kąt α . Sprowadzimy ją przeto zapomocą śruby wstawowej do poziomu, skutkiem czego znów oś celowa zajmie położenie $L L'$ i trafi łąkę w punkcie P_2 . Nie trudno wywnioskować, że celowa powinna dać odczyt P gdyby była pozioma. Na ten więc punkt łąty nastavimy celową zapomocą śruby



Rys. 111.

wstawowej, a odchyłkę libeli z poziomu, poprawimy śrubką „i“ i będziemy mieli obie te osie równoległe.

Raz jeszcze powtarzamy: do rektyfikacji osi celowej względem osi geometrycznej, t. j. przy sprowadzeniu ich do identyczności, używamy śrubek, utrzymujących siatkę. Później, śrubek tych już ruszać nie wolno. Do sprowadzenia środka bańki do punktu zerowego używamy zawsze śrub wstawowych, a dopiero ostatnią poprawkę osi libeli wykonywamy śrubką „i“.

Przyrząd typu III. możemy też zrektyfikować i bez odczytywania łąty, pod warunkiem jednak, że pierścienie, na których spoczywa luneta, mają zupełnie równe średnice, tudzież oś poprzednio już sprowadzono oś geometryczną do identyczności z osią celową.

Ustawimy libelę, ułożoną na lunecie do poziomu, zapomocą śrub wstawowych. Następnie libelę zdejmujemy i przełożymy o 180° . Jeżeli osie nie są równoległe, to środek bańki, jakośmy to poprzednio widzieli wychylił się o kąt 2α . N. p. odczytamy położenie środka

bańki, które wynosi $s = \frac{+16 - 6}{2} = +5$ t. j. o 5 przedziałek

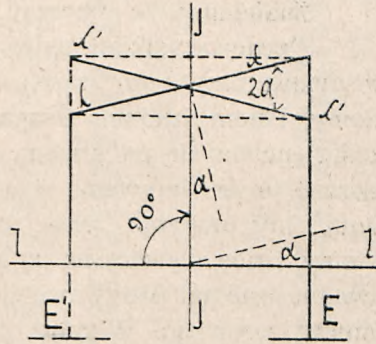
przesunięty jest na prawo. Śrubką „i“ przesuniemy tedy środek bańki o α , t. j. o 2,5 przedziałek na lewo, resztę zaś błędu usuniemy, podnosząc lunetę wraz z libelą o 2,5 przedziałki śrubą wstawową.

Z powyższych opisów wynika, że najtrudniejszą jest rektyfikacja przyrządu typu I. — zabiera najwięcej czasu i nie można jej zbyt ufać. Najłatwiejszą zaś jest dla typu III. i da się wykonać precyzyjnie.

Tak zrektyfikowanym przyrządem możemy teraz niwelować. Przed każdym jednak odczytem trzeba sprowadzić środek bańki do punktu zerowego, bo limbus zwykle nie będzie ustawiony poziomo.

Byłoby to niewygodnie — dlatego przy rektyfikacji sprowadzamy i limbus do równoległości z osią libeli w następujący sposób:

Ustawiamy statyw wraz z przyrządem tak, by limbus był mniej więcej poziomy. Następnie ustawia się lunetę wraz z libelą równolegle do linii przechodzącej przez dwie śruby wstawowe i sprowadzamy środek bańki do punktu zerowego. Wzajemne położenie osi przedstawia rys. 112. Jeżeli oś libeli $\lambda \lambda$ jest poziomą, to płaszczyzna limbusu $l l$ jest nachylona do poziomu pod kątem α , a temsamem i oś pionowa przyrządu $I I$, zawsze prostopadła do $I I$ będzie nachylona do pionu pod kątem α . Teraz obrócimy alhidadę po limbusie o 180° — to położenie limbusu zupełnie się nie zmieni. Śrubka elewacyjna E przejdzie z prawej strony na lewą do E' , oś libeli zajmie położenie $\lambda \lambda'$ nachylone do poziomu o kąt α . Przyczyną tego jest to, że gdy jedno ramię, na którym spoczywa luneta, ma stałą długość, to drugie oparte na śrubie elewacyjnej



Rys. 112.

E , jest zmienne, da się skracać i przedłużać, czyli odległość od libeli da się od płaszczyzny limbusu zmieniać, a stąd powstaje nierównoległość osi libeli do płaszczyzny limbusu. Z rysunku łatwo wywnioskować, że jeżeli teraz odpowiednią stronę limbusu podniesiemy śrubą wstawową o kąt α , to limbus będzie poziomy, a oś $I I$ pionową równocześnie zaś o ten sam kąt wychyli się oś libeli. Nie będzie ona jednak jeszcze poziomą, bo odchyliła się od niego o 2α . Śrubki „i” już ruszać nie możemy, bo zepsulibyśmy równoległość osi geometrycznej do osi celowej, śruby wstawowej również nie, bo limbus wychyliłby się z poziomu. Pozostaje więc tylko śruba elewacyjna, którą też libelę wraz z lunetą podnosimy jednym końcem o kąt α . Po parokrotnym powtórzeniu, nastąpi zupełna zgodność, t. j. oś libeli będzie równoległą do linii limbusa przechodzącej ponad dwoma śrubami wstawowymi.

Śruba elewacyjna opatrzona jest podziałką w kierunku pionowym. Po skończeniu rektyfikacji zapisujemy stan wskazówki na tej podziałce. Prócz tego krążek śruby E , którego jeden obrót odpowiada wysokości kroku śruby, podzielony jest zwykle na 100 części, wskazuje zatem setne części wartości podziałki pionowej. Zapisujemy więc i stan wskazówki przy krążku, czyli całkowity stan t. zn. marki śruby elewacyjnej i przy ustawieniu przyrządu, nastawiamy śrubę zawsze „na markę“.

Dotychczas doprowadziliśmy do równoległości jedną linję limbusu z osią libeli. Obróćmy teraz alhidadę o 90° tak, że stanie prostopadle do poprzedniej linji i sprowadzimy srodek bańki śrubą wstawową do punktu zerowego. Będziemy mieli wtedy i drugą linję płaszczyny limbusu poziomą. Alhidadę możemy teraz dowolnie obracać po limbusie, a srodek bańki pozostawać będzie zawsze w jednym punkcie. Jest to t. zw. ustawienie przyrządu do poziomu.

Powtórzmy tu krótko opis ustawiania przyrządu:

Zakładamy, że przyrząd został poprzednio zrektyfikowany.

Przedewszystkiem ustawia się statyw, wbijając jego nogi mocno w ziemię, przyczem krążek statywu powinien być mniej więcej poziomy. Potem śrubami ściągamy silnie nogi. Przyrząd wyjęty z pudełka stawia się na krążku statywu i wkręca się spodarkę śrubą łączącą je ze statywem, ściągając następnie śrubą zewnętrzną sprężynę. Gdy przyrząd został w ten sposób silnie umocowany, nastawiamy śrubę elewacyjną na markę. Następnie ustawiamy lunetę nad dwoma śrubami wstawowymi i niemi sprowadzamy srodek bańki do punktu zerowego. Wkońcu obracamy alhidadę o 90° tak, że luneta zajmie teraz kierunek prostopadły do poprzedniego i trzecią śrubą wstawową sprowadzamy srodek bańki do punktu zerowego. Czynność tą powtórzmy jeszcze drugi i trzeci raz, usuwając drobne niedokładności ustawienia i przyrząd mamy gotowy do pomiarów.

Podczas pracy w polu należy przyrząd ochronić zapomocą parasola przed działaniem słońca, które wpływa szkodliwie tak na bańkę, jak i na części metalowe, ogrzewając je nierównomiernie.

ŁATA NIWELACYJNA.

§ 11. Na rys. 113 widzimy przekroje trzech, najczęściej używanych rodzajów łąt. Najlepszy jest przekrój skrzynkowy.



Rys. 113.

Łata niwelacyjna, zwykle 4 m długa z jednej części, lub też składana na zawiasach, lub wreszcie wysuwana, z suchego jodłowego drzewa, zabezpieczona olejną farbą od wilgoci, jest podzielona na metry, decymetry i cm, jak wskazuje rys. 114 — najczęściej używany. Decymetry są ponu-

merowane czarno, metry czerwono, wszystko w dm w sposób bieżący. Co 5 cm jest krótką kreską dla orientacji. Milimetry się szacuje. Precyzyjne łąty muszą mieć podział dokładny, wykonany maszynowo. Używa się podziału według rys. 115. Ten sposób podziału jest dobrym z tego względu, że przy jasnym oświetleniu, białe pola wydają się

większe, a że tutaj naprzeciw czarnych mamy białe i odwrotnie, przeto łatwo jest i odczytywać i szacować mm bez złudzenia optycznego.

Ponieważ luneta daje obraz odwrócony, przeto często numery na łącie urządzi się odwrotnie, wskutek czego widzimy je nie odwrócone. Niekiedy mają łąty dwa podziały obok siebie i dwa numerowania tak urządzone, że suma ich lub różnica jest ilością stałą. Urządzenie to służy do uniknięcia błędów w odczytach, względnie łatwego odnalezienia błędu. Specjalnych łąt z oświetleniem używa się w górnictwie i budowie tuneli.

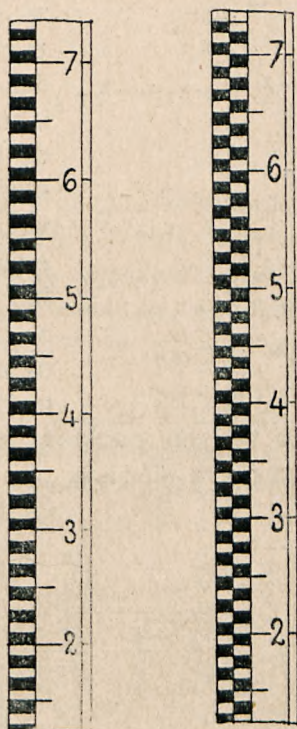
Łąt, zwłaszcza na przestawieniach, t. j. łąt odczytywanych „wprzód“ lub „wstecz“ celem nawiązania, nie powinno się nigdy stawiać na ziemi. Do tego celu służą podstawki żelazne, z których jedną wskazuje rys. 116.

Drzewo rozszerza się pod wpływem ciepła, mając współczynnik rozszerzalności 0,000004 (dla drzewa jodłowego) i 1° C.

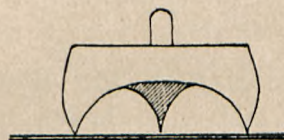
t. j. około $\frac{1}{3}$ wsp. dla żelaza. Jeszcze więcej działa na drzewo wilgoć, do tego stopnia, że gdy wskutek zmiany temperatury o $+10^{\circ}$ Cels. łąta 3 m długa wydłuża się o 0,1 mm, to w drugim razie aż o 0,9 mm. Ścisła niwelacja wymaga więc uwzględnienie temperatury, jakoteż częstego sprawdzania łąty z miarą normalną, podobnie jak przy miarach długości.

Wkońcu należy wspomnieć o t. zw. znakach wysokości. Czy to zdjęcie kraju, czy inne prace geodezyjne, trasa kolei lub kanału spławnego i t. p. wymagają utrwalenia w polu punktów, które zniwelowane, mają swe stałe wysokości i służą do nawiązywania się przy różnych pomiarach do różnych celów służących. Są to t. zw. stałe punkty wysokości.

Rys. 117 — przedstawia urządzenie takiego stałego punktu. Jest to słup kamienny, $0,25 \times 0,25$ m w przekroju wystający nad teren

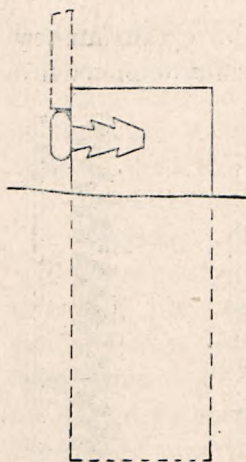


Rys. 114 i 115.



Rys. 116.

około 30 cm i osadzony 1.0 m głęboko w ziemi na szerszym fundamencie. W jedną ścianę tego słupa, osadzony jest na cemencie



Rys. 117.

typy stałych punktów, urządzanych przy budkach kolejowych i na wszystkich stacjach.

bolec żelazny, na którym stawia się łątę. Do tego celu wykorzystywa się także monumentalne budynki, kościoły i kapliczki, wmurowywując w ściany bolce. Podobnie urządza się stałe punkty w miastach. Przy trasowaniu kolei, urządza się stałe punkty korzystając z kapliczek i budynków murowanych, względnie używa się do tego pali dębowych 1·20 m długości i 15 cm średnicy z gwoździem o półkulistej głowie na wierzchu. Te jednak słupy nie są pewne, bo często działa na nie mróz, wysadzając je mniej lub więcej z ziemi. Lepsze są żelazne pale z zakończeniem u dołu takim, jakie mają świdry ziemne. Pal taki, wkręcony w ziemię zachowa się dobrze długi czas. Kolej ma swoje

Następnie pomierzmy:

$H' = h'_1 - h_2$ $H'' = h'_2 - h_3$ i t. d. Dodając wszystkie spady H' H'' H''' do siebie, z uwzględnieniem ich znaków, dostaniemy spad między punktem 0 a ostatnim, zatem spad sumaryczny

$H_s = h_0 - h_1 + h'_1 - h_2 + h'_2 - h_3 + \dots \dots \dots 2$
 h_0 h'_1 h'_2 h'_3 są to odczyty wstecz, czyli jak mówimy łąty wstecz, zaś h_1 h_2 h_3 łąty wprzód. Uporządkujmy równ. 2 według znaków, to otrzymamy:

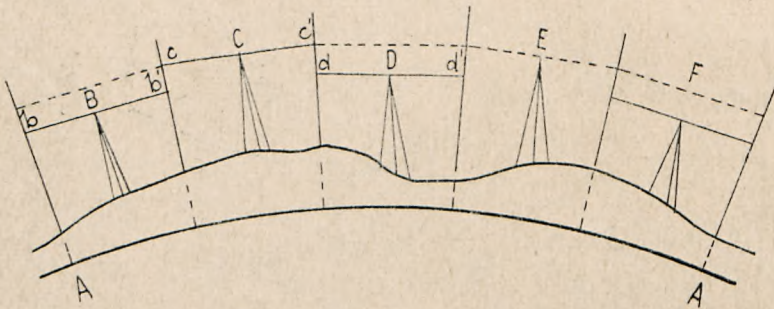
$H_s = h_0 + h'_1 + h'_2 + \dots - h_1 - h_2 - h_3 - \dots$ czyli

$H_s = (h_0 + h'_1 + h'_2 + \dots) - (h_1 + h_2 + h_3 + \dots) \dots 3$

Równ. 3 powiada: Spad między pierwszym, a ostatnim punktem, równy jest sumie łąt wstecz, mniej sumie łąt wprzód.

Gdybyśmy zatem wyszli z punktu A. i po dojściu do punktu B, napowrót powrócili do A tą samą, lub inną drogą, to spad musiałby być równy zeru, czyli $0 = H_s = [h_1] - [h] \dots \dots \dots 4$ i, to stanowi kontrolę. Wskutek różnych błędów, nie osiągniemy wprawdzie w praktyce warunku 4, ale zbliżymy się doń, nie przekraczając pewnych, dozwolonych granic, jeżeli niwelacja ma być dobrą.

Niwelować możemy wielkie odległości na ziemi nie uwzględniając specjalnie kształtu ziemi. Sam już bowiem sposób niwelacji, niejako automatycznie uwzględnia kształt ziemi, bo jak n. p. 119 rys.

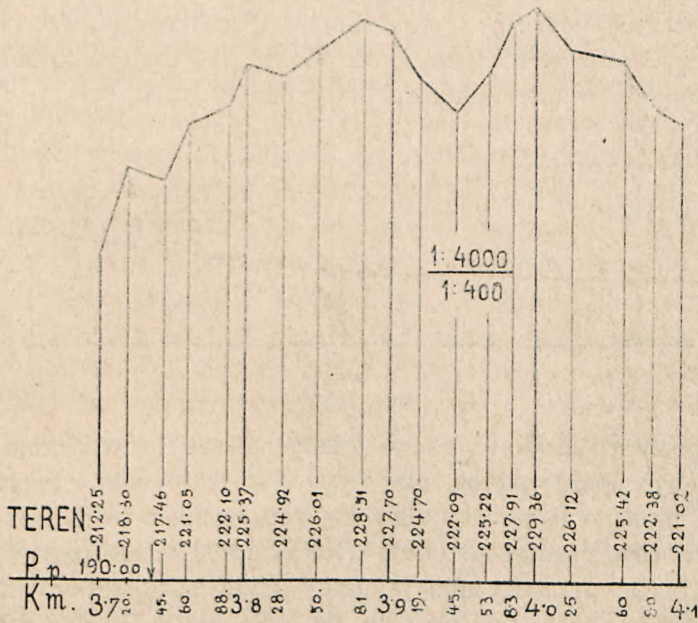


Rys. 119.

dowodzi, celowe, o stosunkowo drobnej długości, tworzą tu wielobok, który uważać można za równoległy do niwelowanego przekroju ziemi.

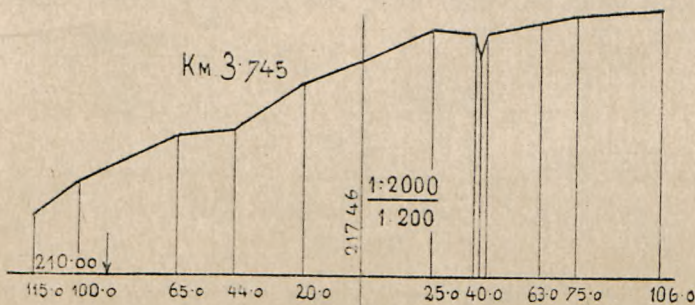
§ 2. W praktyce stosuje się niwelację, zależnie od celu, albo do niwelowania linii, t. zw. przekrojów (profile), albo niweluje się całe powierzchnie. Niwelacja danego przekroju składa się z pomiaru wysokości poszczególnych punktów, charakteryzujących dany przekrój, zatem wszystkich załomów terenu, wgłębień, przekrojów potoków i rzek. Ponieważ taki przekrój przedstawia się na rysunku, przeto

muszą w nim być podane wszelkie daty będące właściwością terenu i charakteryzujące go, oraz odległości poszczególnych punktów. Zwykle długości mierzymy w sposób bieżący jak to przedstawia rys. 120. Skalę długości przyjmujemy zazwyczaj 1:1000, 1:2000, 1:2500 i 1:5000



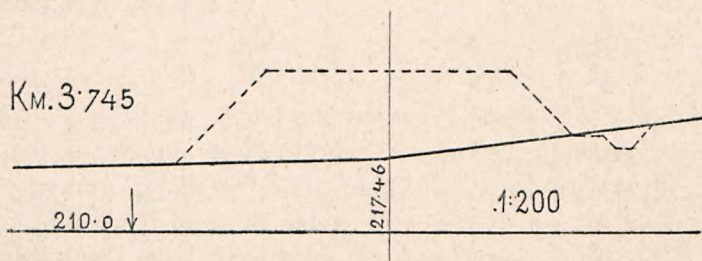
Rys. 120.

W przekrojach generalnych, gdzie tylko najbardziej charakterystyczne punkty się podaje, używamy skali 1:1000.000. Skala wysokości jest prawie zawsze 10 razy większa, wskutek czego charakter terenu bardziej się uwidatnia. Dla projektów n. p. kanalizacji miast wykonywa się przekroje podłużne ulic, uwidoczniając w nich nie tylko wysokości terenu, ale i głębokości piwnic, stan wody gruntowej w studniach i sondach, sondy terenu i t. p.



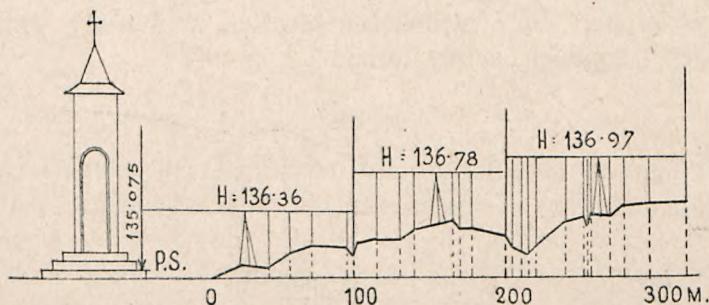
Rys. 121

O ile potrzebny nam jest nie tylko przekrój podłużny danej linii, lecz chcemy mieć i przekroje terenu do pewnej szerokości wzdłuż przekroju głównego, który w tym wypadku nazywamy podłużnym, to zdejmujemy t. zw. przekroje poprzeczne na tych punktach, które podaje przekrój podłużny (rys. 121). — Przekroje poprzeczne wykonywa się zwykle w większej skali, służyć zaś mające do obliczania robót ziemnych, w skali długości i wysokości 1:200.



Rys. 122.

Na profilach podłużnych podajemy zawsze bezwzględne wysokości. Ażeby więc rysunek nie wypadł zbyt wysoki i to zupełnie bezpotrzebnie, bo n. p. mając punkty o wysokości od 220.00 m do 300.00 trzebamy, rysując przekrój w skali 1:200, mieć papier o szerokości 1.50 m przeszło, przyjmujemy jakiś poziom porównawczy, n. p. 190.00 m n. p. m. (metrów nad poziom morza) i rysujemy rzędne punktów, w skali, ale tylko ponad wysokość 190.00. Jeżeli teren idzie ciągle w górę tak, że rysunek sięga już poza papier, to przerywamy go w pewnym punkcie i przyjmujemy inny, wyższy poziom porównawczy, lub odwrotnie przy terenie spadającym. Tak samo zaznaczamy zawsze poziom porówn. na przekrojach poprzecznych.



Rys. 123.

Przychodzimy teraz do wykonania zdjęcia profilu podłużnego w polu. Na rys. 123 mamy wytyczoną linię z szeregu punktów. Nadto podany jest punkt stały P. S. o wysokości n. p. 135.075, do którego

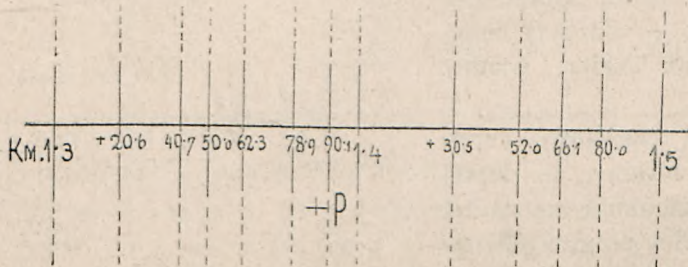
mamy się nawiązać. Ustawmy przyrząd w dogodnym punkcie, w pobliżu linii niwelowanej około 50 do 70 m od punktu P. S. Pod ustawieniem przyrządu rozumie się, że zrektyfikowany i w poziomie będący przyrząd, gotowy jest do pracy. Do niwelacji używa się dwóch łąt. Jedną ustawia pomocnik na punkcie P. S. i jest to „łata wstecz“ bo do tego punktu się nawiązujemy. Przypuśćmy, że odczyt na tej łącie wynosi 1285 mm. Dodajmy ten odczyt do wysokości, czyli znamienia punktu P. S. t. j. do 135·075 m, to otrzymamy wysokość horyzontu pozornego, jaki zakreśla oś celowa, czyli krótko „Horyzont“ lub „wysokość przyrządu“ $H = 135·075 + 1·285 = 136·360$ m n. p. m. Teraz obrócimy lunetę na łątę wprzód i odczytamy n. p. 1965 mm. Odejmując ten odczyt od „Horyzontu“ otrzymamy znamię punktu, na którym łąta „wprzód“ stała, t. j.: $136·360 - 1965 = 134·395$. Pierwszy pomocnik tymczasem idzie wzdłuż linii i stawia łątę na punktach pośrednich, których odczyty zapisujemy w protokole.

Zwykle porządek pracy jest następujący: Pierwszy pomocnik z łątą staje na punkcie do którego się nawiązujemy, po odczytaniu zaś łąty, idzie wprost na punkt ostatni t. j. na odczyt wprzód i pozostaje tam dotąd, aż przyrząd przeniesiemy na nowe stanowisko i znów nawiążemy się do tegoż punktu. Drugi znów pomocnik idzie wzdłuż linii i staje na punktach pośrednich.

Skoro skończyliśmy odczyty na punktach między łątą wstecz a łątą wprzód, przenosimy się na II stanowisko i ustawiamy przyrząd. Teraz, poprzednia łąta wprzód, staje się łątą wstecz. Przypuśćmy, że dostaniemy odczyt n. p. 2385 mm. Odczyt ten dodamy do znamienia punktu, daje „Horyzont“ naszego stanowiska, zatem $134·395 + 2·385 = 136·780$ m n. p. m. Następnie odczytujemy łątę wprzód i punkty pośrednie.

Poniżej podajemy zwykle używany wzór protokołu niwelacyjnego.

Przekroje poprzeczne zdejmuje się albo przyrządem niwelacyjnym jeżeli teren jest dogodny, albo łątami i libelą wtedy, gdy teren jest stromy.



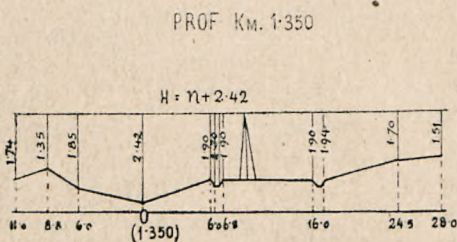
Rys. 124.

Praca ta może odbywać się bardzo szybko, jeżeli się ją dobrze zorganizuje. W zwykłych stosunkach, n. p. dla trasy kolei, zdejmuje się profile na szerokości 30 do 50 m z każdej strony. Sposób pomiarów wskażemy najlepiej na szkicu, rys. 124.

Dwóch pomocników używamy do tyczenia i mierzenia, jednego lub dwóch do łąt. W danym punkcie wytyczonej linii, ustawia pomocnik węgielnicę bębrenkową i wytycza prostopadłą, którą zaznacza drugi pomocnik tyczką. Tyczka i węgielnica wskazują więc kierunek przekroju poprzecznego. Ci dwaj pomocnicy wyciągają następnie w wytyczonym kierunku taśmę, zaczynając od osi, czyli przekroju podłużnego, najpierw na prawo, potem na lewo. Trzeci pomocnik z łątą, staje najpierw na danym punkcie w osi, potem stawia łątę na wszystkich załamaniach gruntu, podając niwelującemu odległości od osi, które odczytuje na taśmie. Jeżeli nie mamy dość inteligentnych robotników, to do odczytywania taśmy i tyczenia, dodać potrzeba technika. Stanowisko przyrządu znajduje się w „P” (rys. 124).

Z tego stanowiska można objąć cały obszar na długości 100 m i szerokości 80 m, a nawet do 100, jeżeli teren jest dogodny.

Przez odczytanie łąty w osi, na punkcie, którego wysokość jest już z niwelacji przekroju podłużnego znaną

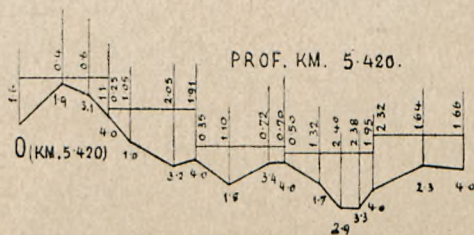


Rys. 125.

i przez dodanie odczytu do tej wysokości, otrzymamy wysokość horyzontu. Odejmując wszystkie inne odczyty od H — otrzymamy bezwzględną wysokość tych punktów. Jeżeli z jednego stanowiska zdejmujemy więcej przekrojów poprzecznych, to wystarczy nawiązać się do jednego tylko punktu. Dla wszystkich tych profili, będzie wtedy horyzont wspólny.

Niwelujący robi sobie szkic w notatce, taki jaki podajemy na rys. 125. Jako horyzont zapisuje odczyt na osi — notuje się punkt, na którym profil poprzeczny jest zdjęty — odczyty zapisuje się na szkicu, wzdłuż rzędnych.

Jeżeli częściowo teren ma stoki strome, to lepiej i prędzej zdejmuje się na tej części profile poprzeczne za pomocą łąty i libeli. Do tego



Rys. 126.

używa się łąty 4 m długiej podzielonej na decymetry, oraz 2 do 3 metrowej cienkiej łąty do mierzenia rzędnych, podzielonej na cm. Sposób postępowania i szkicowanie, zrozumiałe jest z rys. 126. Zawsze nawiązujemy się do punktu w osi, jako mającego znaną wysokość.

Pod narysowanym na oko przekrojem terenu, wypisujemy odległości odczytane na każdej łącie z osobna, na rzędnych zmierzone wysokości. Według szkicu, w ten sam sposób wykonywa się i rysunki przekrojów, w skali.

WZÓR PROTOKOŁU NIWELACYJNEGO.

Niwelacja prof. podł. od km do km Dnia

Stanowisko	Nazwa punktu niwel.	Odległość od początku w km	Odczyt			Horyzont m. n. p. m.	Znamię m. n. p. m.	UWAGA	
			wstecz m m	pośredni m m	wprzód m m				
I.	P. s.	0,000	1·285	1·926 1·992		136.360	135·075		
		0,018·90		2·435					
		0,035·60		2·365					
		0,051·30		2·539					
		0,068·50		1·932					
		0,089·25			1·065				
		0,100·00							
		0,100·00	2·385				136.780	134·395	nawiązanie
		0,111·52		1·625					
		0,123·80		1·500					
		0,149·20		0·925					
		0,161·30		1·456					
		0,177·40		1·225					
		0,181·90		2·356					
		0,184·20		0·755					
		0,191·70		0·325					
		0,200·00		0·785					
0,210·00		0·455							
0,221·50		0·300							
0,234·40		0·925	5·925			135·855			

§ 3. Niwelacja powierzchni (obszarów).

Bardzo często, n. p. do projektów nawodnień, drenaży, w zdjęciach rzek i t. p. wypadnie nam niwelować większe lub mniejsze obszary. Wprawdzie mamy inne sposoby do zdjęć sytuacyjnych, jak

tachymetrja, o czem później mówić będziemy, ale zdarzyć się może, że wypadnie zdjąć pewien obszar, a do dyspozycji mamy tylko przyrząd niwelacyjny.

W takim razie nic innego zrobić nie możemy, jak to, że punkty charakterystyczne, jakie trzeba zniwelować, oznaczymy w polu, ponumerujemy, następnie położenie ich zdejmujemy w znany nam sposób, a potem dopiero je zniwelujemy.

§ 4. Dokładność niwelacji, jak zresztą wszystkich pomiarów, ma pewne granice. Im więcej poświęcamy nakładu pracy, a więc czasu i kosztów, tem i wyniki będą dokładniejsze. Nie zawsze jednak potrzebna jest nadzwyczajna dokładność. Przypuśćmy n. p. że trasując kolej 50 km długości, dopuściliśmy większy o 10 mm błąd na 1 km, niż przy niwelacji ścisłej. Na całej tedy długości, mielibyśmy niepewność o 1·0 m w najgorszym razie, gdyby błędy się sumowały. Taki błąd nie wpłynie wcale ani na zwiększenie spadków, ani na późniejsze utrudnienie ruchu, czyli tego rodzaju niwelacja, jest dla danego celu wystarczająca i nie opłacało by się poświęcać kosztów kilka razy wyższych, do osiągnięcia nadzwyczajnej dokładności, nie wpływającej wcale na dobroć samej budowy. Ale też i koszt niwelacji trasy kolei będą niższe, niż n. p. trasy kanału spławnego, gdzie potrzebna jest większa dokładność. Wogóle do każdego celu, stosować będziemy odpowiednią dokładność i to jest rzeczą zupełnie racjonalną. N. p. na niwelację ścisłą sieci trygonometrycznej, poświęci się i odpowiednie koszty, jakich nie poświęciłoby się na niwelację do innego celu służącą.

Zawsze staramy się pracę ułatwić i uprościć. Tak n. p. dużo czasu zabiera zawsze przed odczytem uregulowanie libeli. Bańka libeli potrzebuje dłuższego czasu do uzyskania równowagi. Jeżeli chcemy niwelację wykonać dokładnie, a zarazem nie tracić czasu na regulowanie libeli, to postąpimy według sposobu poniżej podanego, pod warunkiem, że później poświęcimy czas na wprowadzenie poprawek rachunkowych. W polu jednak czas jest droższy niż w biurze, bo tam czas traci równocześnie kilku ludzi, w biurze tylko jeden.

Używać tu będziemy libeli mającej podział bieżący od zera do 50 — przyczem libelę tak umieszczamy, że zero znajduje się zawsze po stronie obiektywu. Środek bańki powinien więc znajdować się na kresce 25 — znajdziemy go, odczytując położenie obu końców bańki i biorąc z nich średnią. N. p. $\frac{1 + p}{2} = s_1 = \frac{10 + 34}{2} = 22$

t. zn. że środek bańki znajduje się na 22 kresce, czyli jest przesunięty o 3 przedziałki w stronę obiektywu, czyli oś celowa mierzy za

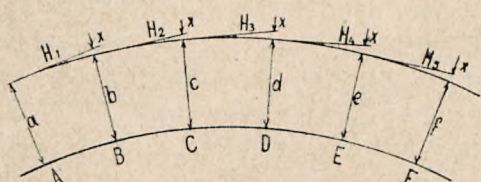
pola pod i nad nitką, podczas gdy w innych wypadkach dokładność jest mniejsza i równa się $\frac{3}{4}$ tamtej. Dlatego używa się sposobu nastawiania nitki poziomej na środek pola tego cmtra, który siatka trafia, zapomocą śruby elewacyjnej, poczem postępujemy tak, jak powyżej, t. j. odczytujemy odchyłkę środka bańki i obliczamy poprawkę według równania 8.

Sposób ten daje dobre rezultaty, wymaga jednak nieco więcej czasu (do nastawiania celowej), niż poprzedni. Doświadczenia dowiodły, że dokładność tego sposobu niwelacji, do sposobu zwykłego szacowania mm ma się jak 4:3.

§ 5. Błędy niwelacji i wyrównanie ich.

W niwelacji posługujemy się poziomem pozornym, jak o tem już poprzednio mówiliśmy, mierząc pionowe odstępy między nim, a poszczególnymi punktami. Tutaj tkwi pierwszy błąd, który może wiele zaważyć, jeżeli nie zastosujemy odpowiedniej metody, która go zanuluje.

Przyjmijmy kulisty kształt ziemi, którego przekrój A B.....F z płaszczyzną pionową, przedstawia rys. 127. Łuk ŁŁ w odstępnie „a”



Rys. 127.

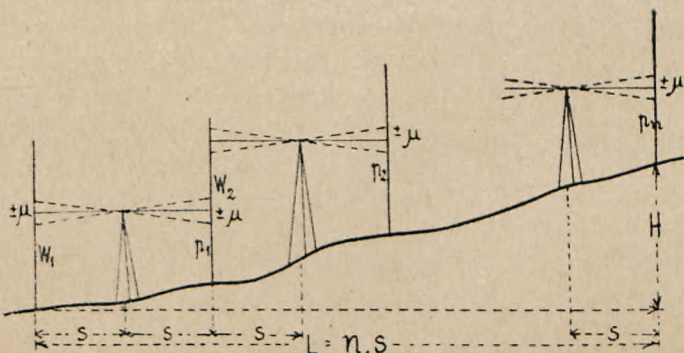
od przekroju A.....F, w półśrodkowy z pierwszym, jest więc poziomem rzeczywistym na wysokości „a”. Ustawmy w punkcie A przyrząd niwelacyjny, zaś w punkcie B łątę, to poziom pozorny H_1 jaki wyznacza pozioma oś celowa

przecina łątę w punkcie B', w wysokości $(a + x)$ od kuli ziemskiej, podczas gdy poziom rzeczywisty przecinałby ją w wysokości „a”. Różnica: $a + x - a = x$ przedstawia błąd, o wartości „x” jaki popełniamy przyjmując poziom pozorny, zamiast rzeczywistego. Nadto różnica ta „x” wskazuje, że punkt B leży o „x” niżej od punktu A, podczas gdy wszystkie punkty A B C.....F, leżące na kuli, leżą w tym samym poziomie. Ustawmy teraz przyrząd w punkcie B, to gdy $AB = BC = CD.....$ otrzymamy, zapomocą poziomu pozornego H_2 rezultat taki sam co do punktu C, jak poprzednio, t. j. że punkt C leży o x niżej niż punkt B, zatem o 2 x niżej od punktu A. Niwelując w ten sposób dalej, powiększamy błąd coraz bardziej.

Postąpmy teraz w inny sposób, ustawiając przyrząd w punkcie B, zaś łątę w A, a potem w C. Wówczas na łącie w A, otrzymamy odczyt $(a + x)$ i takież sam $(a + x)$ w punkcie C. Stąd różnica wyso-

kości między A i C wyniesie: $h = (a + x) - (a + x) = 0$. Czyli ustawiając przyrząd w środku, między dwoma punktami, eliminujemy zupełnie błąd wywołany przez przyjęcie poziomu pozornego zamiast rzeczywistego. Stąd wypływa zasada, by przy niwelacji punktów podstawowych, przyjmować zawsze długości celowych: wstecz i wprzód, równe co do długości. Wprawdzie błąd x , jest bardzo mały, o ile celowa nie jest dłuższą od 100 m, lecz przy niwelacji linii długiej na kilkadziesiąt km. może być już znacznym, gdybyśmy niwelowali w pierwszy sposób. Jeżeli obierać będziemy stanowiska między punktami, lecz tak, że celowe nie są równej długości, to im większa będzie różnica ich długości, tem wyraźniejszy będzie wpływ błędu „ x “. Niwelację, jak każdy pomiar, wykonywa się przynajmniej dwa razy: w jedną stronę od A do B i z powrotem od B do A. Przyjmijmy, zgodnie z rys. 127, że zniwelowano znaczną długość od A do E — i to w sposób pierwszy, że było n przestawień przyrządu i że punkt E skutkiem metody niwelacji, okazał się pozornie o $n \cdot x$ niższym od punktu A, jakkolwiek leży na kuli, zatem w równym z A poziomie. Niwelujemy teraz od E ku A w ten sam sposób, tą samą drogą. Wówczas punkt A okaże się o $n \cdot x$ niższym od E, a że E było o $n \cdot x$ niższe od A, więc ostatecznie kontrola niwelacji wykaże, że punkt A, będzie o $2 \cdot n \cdot x$ niższy od siebie samego, czyli, że popełniono błąd o wartości $v = 2 \cdot n \cdot x$. Tymczasem błędu tego nie byłoby, gdybyśmy brali celowe przód i wstecz równe.

Prócz powyższego źródła błędów, mamy jeszcze inne, jak: z powodu nierównoległości osi celowej do osi libeli, niedokładnego ustawienia libeli i wogóle przyrządu, z powodów błędów przy odczytach, nie pionowego trzymania łąty i t. p. Są to wszystko błędy nieregularne, podobne do błędów w pomiarach długości.



Rys. 128.

Przypuśćmy, że niwelacja wykonaną była na pewnej długości L (rys. 128) przyczem zachowano wszelkie ostrożności, mianowicie: ustawiano zawsze przyrząd w środku między dwoma punktami, biorąc celowe równe o długości s , tak że cała długość $L = n \cdot s$. . . 9

Ilość stanowisk, a więc i przestawień przyrządu będzie w tym wypadku $\frac{n}{2}$. Bezwątpienia, popełnimy w każdym odczycie jakiś błąd $\pm \mu$, na który składa się błąd celowej i libeli, jeżeli opuścimy wszelkie inne wpływy, n. p. wibracji powietrza, mgły, nie pionowego trzymania łąty, niedokładności podziału łąty i t. p. Dwa pierwsze wpływy: celowej i libeli działają razem i możemy słusznie przyjąć, że powodują błąd $\pm \mu$ proporcjonalny do długości s , tak, że

$$\pm \mu = k \cdot s \quad \dots \dots \dots 10$$

Nazwijmy odczyty wstecz przez $w_1 w_2 \dots w_n$ oraz odczyty wprzód przez $p_1 p_2 \dots p_n$ — to obliczymy różnicę wysokości między początkowym i końcowym punktem, odejmując od sumy odczytów wstecz, sumę łąt wprzód, zatem:

$$H = (w_1 + w_2 + \dots + w_n) - (p_1 + p_2 + \dots + p_n)$$

Ponieważ każdemu odczytowi, czy to wstecz, czy wprzód, przypisujemy błąd $\pm \mu$ zatem błąd ΔH całej różnicy wysokości H , będzie wynosił: $\Delta H = \pm \mu \pm \mu \pm \mu \pm \dots \pm \mu$ zaś średni błąd wartości H_1 według poznanych praw, wyniesie:

$$M = \sqrt{\mu^2 + \mu^2 + \dots + \mu^2} = \sqrt{n \cdot \mu^2} = \mu \cdot \sqrt{n} \quad \dots \dots 11$$

$$\text{a że } L = n \cdot s \text{ czyli } n = \frac{L}{s} \text{ zatem } M = \sqrt{\frac{L}{s}} \cdot \mu \quad \dots \dots 12$$

$$\text{wstawmy zaś } \mu = k \cdot s \text{ to } M = k \cdot \sqrt{L \cdot s} \quad \dots \dots 13$$

Stąd wniosek: dla tegoż samego przyrządu i tych samych warunków pomiaru, średni błąd niwelacji rośnie proporcjonalnie do drugiego pierwiastka niwelowanej długości linii L .

Równocześnie: dla tych samych warunków jak wyżej, bez względu na L , rośnie błąd niwelacji proporcjonalnie do drugiego pierwiastka z długości celowej s .

W równ. 13, które możemy napisać w kształcie:

$M = k \cdot \sqrt{L} \cdot \sqrt{s}$ — mamy k i L — dla tych samych warunków stałe, natomiast s może być zmienne, zależnie od nas. Im większe jest s , tem większy będzie błąd M — stąd więc wynika, że korzystniej jest dla dokładności pomiaru, jeżeli s będziemy przyjmowali małe, czyli, że dokładniejszą będzie niwelacja o wielu przestawieniach przyrządu, a krótkich celowych, niż niwelacja o małej ilości przestawieniach a długich celowych.

Jako normalną długość celowej, możemy przyjąć 50 m.

Przyjawszy s jako stałe, otrzymamy z równ. 13, że M jest proporcjonalne do \sqrt{L} — zatem wagi różnych niwelacji, (przy stałym s) muszą być odwrotnie proporcjonalne do L , zatem

$$p : p' = \frac{1}{L} : \frac{1}{L'} \quad \dots \dots \dots \quad 14$$

Ażeby dojść teoretycznie do określenia granic dokładności niwelacji, rozpatrzmy się w stosunkach, jakie zachodzą między czułością libeli i powiększeniem lunety, a to z tego powodu, że zależnie od celu pracy, używamy różnych typów przyrządów — im dokładniejszą ma być praca, tem czulszą przyrząd posiada libelę i zarazem tem większe powiększenie lunety.

Zazwyczaj używa się przyrządów o	czułości libeli	i powiększeniu:
a) dla mniej ważnych prac	15 do 30"	15 do 25
b) dla przekrojów podłużnych	10 „ 15"	25 „ 30
c) do niwelacji ścisłej	3 „ 6"	35 „ 45

Teraz obliczymy według równ. 13 tabelę, przyjmawszy $k = \frac{\epsilon}{\rho}$ gdzie ϵ wyraża się w sekundach i oznacza błąd w celowaniu, t. j. nastawianiu celowej lunety, lub libeli, przyczem zaznaczamy, że dobre przyrządy pozwalają na zmniejszenie ϵ poniżej 1". zatem

$$M = \frac{\epsilon}{\rho} \sqrt{L \cdot s} \quad \dots \dots \dots \quad 15$$

Przyjmijmy $L = 1$ km oraz różne wartości na s . to $M =$

dla ϵ	$s = 20$ m	40	50	75	100	150	200	300 m
$\epsilon = \pm 1''$	$M = \pm 0.7$ mm	± 1.0 mm	± 1.1	± 1.3	± 1.5	± 1.9	± 2.2	± 2.7 mm
$\epsilon = \pm 2''$	1.4	1.9	2.2	2.7	3.1	3.8	4.3	5.3
$\epsilon = \pm 5''$	3.4	4.8	5.4	6.6	7.7	9.4	10.8	13.3

t. j. otrzymaliśmy teoretyczne błędy M dla powyższych przyrządów. Najlepsze przyrządy mogą dać dokładność od 0.7 mm błędu na km przy 20 m celowych, aż do ± 2.7 mm na 1 km przy celowych 300 m długich, a że używa się celowych zwykle około 50 do 70 m długich, więc granica błędu wynosi około ± 1.2 mm na 1 km.

Ponieważ nie uwzględniono tu błędów pochodzących z innych jeszcze źródeł, przeto tabela powyższa ma tylko teoretyczne znaczenie, jest jednak cenną wskazówką dla dalszych dociekań.

Przyjmijmy, że pewna linja, składa się z pojedynczych odcinków różnej długości, które to odcinki niwelujemy, w jedną i drugą stronę, każdy z osobna. Każdy z odcinków „s“ będzie miał jakąś różnicę „d“, która okaże się, gdy wynik niwelacji w jednym kierunku, porównamy z wynikiem jej w kierunku powrotnym, t. j. gdy powrócimy do punktu wyjścia. Wówczas bowiem spadek między punktem początkowym a końcowym, którym jest tenże sam punkt wyjścia, powinien być = 0 — tymczasem będzie się różnił o „d“.

Przyjmijmy zatem, że na długość s_1 spadek $h_1 - h'_1 = d_1$
 podobnie na s_2 „ $h_2 - h'_2 = d_2$
 „ s_n „ $h_n - h'_n = d_n$

Na podstawie znanej nam z poprzednich rozdziałów teorii błędów, średnia różnica D dla długości odcinka $s = 1$ km wyniesie:

$$D = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2} + \frac{d_3^2}{s_3} + \dots + \frac{d_n^2}{s_n} \right)} = \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \quad 16$$

zaś średni błąd pojedynczej niwelacji (pojedynczego pomiaru) na 1 km:

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \quad 17$$

i średni błąd średniej arytmetycznej obu niwelacji (w obu kierunkach) na 1 km długości linii:

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{d^2}{s} \right]} \quad 18$$

W niwelacji wyraża się zwykle d w mm, zaś s w km. Rezultat powyższych równań otrzymamy wtedy w mm.

Wyrównanie błędu podwójnej niwelacji danego odcinka wykonywa się w ten sposób, że obliczamy średnie arytmetyczne obliczonych wysokości, wszystkich niwelowanych punktów. Jeżeli niwelowany był zamknięty wielobok, tak, że punkt wyjścia był zarazem punktem końcowym, wówczas różnicę rozdzielamy na wszystkie punkty proporcjonalnie do ich odległości.

Stosując do niwelacji poznaną już przy podwójnych pomiarach długości teorię błędów, przyjmiemy:

$$m = \frac{w}{\sqrt{L}} \quad 19$$

$$\text{oraz } M = \frac{m}{\sqrt{p_1 + p_2}} = \frac{w}{L} \sqrt{l'l'} \quad 20$$

t. j. Jeżeli ciąg niwelacyjny, zamknięty lub mieszczący się między dwoma punktami stałymi okazał różnicę „w“ to średni błąd na długi.

1 km m = $\frac{w}{V L}$ oraz: średni błąd „w” wysokości punktu pośredniego na linii, w odległościach l i l' od obu jej końców, po wyrównaniu powyżej opisanem (niwelacje podwójne) wyraża równ. 20. Błąd ten będzie największy dla l = l' = $\frac{L}{2}$ i wówczas $M \max \frac{w}{2}$. . . 21

§ 6. Dokładność niwelacji.

Błędy niwelacji pochodzą, jak już mówiliśmy z różnych źródeł optycznej i technicznej natury.

Badania Reinhertza, w których wziął w rachubę wszelkie możliwe wpływy, dały następujący rezultat:

powiększenie lunety v =	20	30	40	50
błąd niwelacji na 1 km: M ₁ =	3.6 mm	2.9	2.5	2.3 mm

Następnie sprawę tę badał wyczerpująco Kummer.

Nazwijmy l = długości celowej

φ = błąd odczytania na łacie, t. j. niedokładności w odczytaniu, względnie szacowaniu, to stosunek między φ i l na podstawie doświadczeń, wyraża Kummer wzorem

$$\varphi^2 = \alpha^2 + \beta^2 l + \gamma^2 l^2 \quad 22$$

Przeciętnie można przyjąć

dla l =	25 m	50	75	100	i	125 m
φ =	0.30 mm	42	54	0.67	0.79	mm
lub w kątach φ = ϵ''	2.5''	1.7''	1.5''	1.4''	1.3''	

ostatecznie, dochodzi Kummer do rezultatu podobnego jak Hertz.

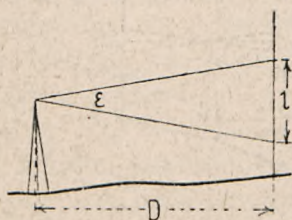
Mówiąc o pracach dokładnych, jak niwelacja profili podłużnych kolei, kanałów spławnych i t. p. możemy na podstawie bardzo licznych doświadczeń i przykładów z praktyki przyjąć, że niwelacja nie powinna przekraczać granicy $\sqrt{10} = 3.2$ mm na 1 km i że granica ta nie jest trudną do osiągnięcia.

Jednym z bardzo ważnych czynników, wpływających na błędy niwelacji, jest podział łaty. Na nią więc należy zwrócić baczną uwagę i łatę najtroskliwiej zbadać przed użyciem jej do pracy.

ROZDZIAŁ IX.

TACHYMETRJA.

§ 1. Zaliczamy tu wszystkie sposoby, używające specjalnych przyrządów, a mające na celu ułatwienie pracy zdjęć w polu, zwłaszcza pomiarów odległości i wysokości. Wyobraźmy sobie, jakiby to był ogrom pracy, gdyby trzeba było wiele km^2 powierzchni zdjęć tak, by zdjęcie to służyło do narysowania planu sytuacyjnego. Każde zagłębienie lub wzniesienie trzeba by zapomocą niwelacji licznych punktów pomierzyć — lecz wzajemne położenie tych punktów musiałoby się zdjęć zapomocą tryangulacji i wieloboków, osi pomocniczych i bardzo licznych, czas zabierających pomiarów długości. Byłyby to pomiary bardzo kosztowne, bo długotrwałe. Natomiast przypuścimy, że mamy sposób, zapomocą którego, z jednego stanowiska zdjęć możemy przyrządem teren w promieniu 300 m, odczytując jedynie kąty i łaty, których użyć można równocześnie kilka, stawiane na tych punktach, które charakteryzują teren lub ograniczają drogi, potoki i t. p. objekty. Pozostanie tylko zdjęć położenie stanowisk, co już jest rzeczą nie trudną. Nadto zdjęcie takie, będzie miało zupełnie wystarczającą dokładność, opierając się na szeregu punktów stałych. Takim właśnie sposobem jest tachymetrja, która zgodnie ze swą nazwą, umożliwi szybkie zdjęcia. Podobnie chcąc poznać odległość jakiegoś oddalonego często nawet nieprzystępnego punktu, możemy użyć różnych sposobów poprzednio przedstawionych. Zawsze



Rys. 129.

jednak potrzeba pomierzyć w tym celu pewną ilość kątów i długość pomocniczą, następnie żadaną odległość obliczyć. Mamy jednak t. zw. odległościomierze, zapomocą których zmierzyć daną odległość możemy bardzo szybko, wprowadzając nie z teoretyczną dokładnością, lecz w każdym razie z dokładnością bardzo często wystarczającą.

Zasadę odległościomierza przedstawia rys. 129.

Odległość D da się oznaczyć z trójkąta o kącie wierzchołkowym

ϵ , oraz podstawy tego trójkąta l , naprzeciw kąta wierzchołkowego. Zazwyczaj kąt ϵ jest bardzo mały.

$$\text{Zatem } D = \frac{l}{\epsilon} \text{ czyli } D = \frac{l}{\epsilon''} \cdot \rho'' \dots \dots \dots 1$$

Możnaby tu mieć dwa wypadki:

1. Kąt ϵ jest stały, zaś podstawa l (odcinek na łącie) zmienny przyczem często urządza się tak, że $l:D = 1:100$ lub $\epsilon'':\rho = 1:100$ t. j. $\epsilon'' = 2063'' = 34'23''$.

2. Lub l jest stałe, natomiast ϵ zmienne.

W pierwszym wypadku błąd odległości, rośnie w prostym stosunku do odległości — w drugim błąd ten rośnie proporcjonalnie do kwadratu tejże odległości, a odwrotnie proporcjonalnie do l .

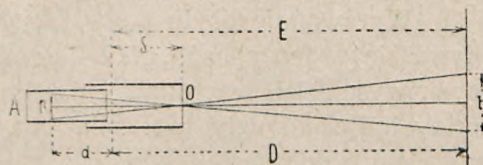
Odległościomierze, przy których nie używa się łąty, mają podstawę urządzoną w samym przyrządzie zazwyczaj. Służą one przeważnie tylko do celów wojskowych i polegają na zasadzie tryangulacji.

§. 2. Ze wszystkich odległościomierzy, najważniejszą jest luneta, mająca siatkę z dwóch poziomych nitek urządzoną. Obraz łąty, tworzący się na płaszczyźnie siatki odczytuje się zapomocą tych nitek, zatem odczytuje się odcinek łąty, zawarty między obu nitkami. Zazwyczaj mamy trzy nitki poziome, z których średnia odpowiada nitce przyrządu niwelacyjnego — dwie skrajne służą do pomiaru odległości. Nadto urządza się zawsze nitkę pionową, jak to wskazano na rys. 130.

Na rys. 131 widzimy pojedynczą lunetę. Obiektyw oznaczono tam literą O, okular literą A. Odstęp nitek skrajnych na siatce = p , l = odcinek na łącie, D = odstęp łąty od obiektywu, d = odstęp obrazu względnie siatki od obiektywu.



Rys. 130.



Rys. 131.

Na podstawie rysunku, ustawić możemy następujące równ.:

$$\frac{p}{d} = \frac{l}{D} \dots \dots \dots 2$$

A ponieważ p i l są sprzężonymi obrazami, to dla odległości ogniskowej f obiektywu O ma ważność prawo:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{D} = \frac{1}{f} \dots \dots \dots 3$$

Z równ. 2 otrzymamy: $\frac{1}{d} = \frac{1}{Dp}$ zaś z r. 3: $\frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{D} = \frac{D-f}{Df}$

stąd zaś: $\frac{1}{Dp} = \frac{D-f}{Df}$ a wreszcie $D-f = \frac{f}{p} \cdot l$ 4

Równ. 4 powiada, że $(D-f)$ jest proporcjonalnie do odcinka na łacie „l“ — $(D-f)$ jest odległością łąty od obiektywu, zmniejszoną o odległość ogniskową „f“, czyli odległością łąty od pierwszego ogniska obiektywu. Nam jednak rozchodzi się o odległość łąty od punktu nad którym stoi przyrząd, czyli od środka przyrządu M — wówczas odległość ta

$$E = D + \delta = (f + \delta) + \frac{f}{p} \cdot l \quad 5$$

lub $E = C + kl$, gdzie $C = f + \delta$ zas $k = \frac{f}{p}$ 6

Stała C wynosi zwykle tylko około 0.5 m — natomiast stały współczynnik k wynosi zazwyczaj 100 — zależy to od odległości nitek, którą odpowiednio w fabryce urządzić można.

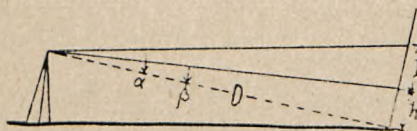
Równ. 5 ma ważność nie tylko dla pojedynczej lunety, lecz także dla lunety Ramsdena. Natomiast wyżej wyprowadzona teoria nie nadaje się do lunety Huyghena.

Optyczny odległościomierz wynaleziony został w r. 1778 — przez angielskiego optyka Williama Greena w Londynie, zastosowany zaś przez oficera inż. franc. Wlissingena w r. 1812. W r. 1816 zdejmowali nim francuscy oficerowie pas graniczny między Savoyen i Francją.

§ 3. Odległość mierzyć można także teodolitem, zapomocą pomiaru kątów pionowych (rys. 132).

Z rysunku wynika, że $h = D \cdot \operatorname{tg} \beta$ $h + l = D \cdot \operatorname{tg} \alpha$
 stąd zaś $D = \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$ albo $D = \frac{l \cdot \cos \alpha \cos \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$ 7

podobnie wysokości $h = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$ $h + l = \frac{l \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$ 8



Rys. 132.

W ten sposób można bardzo szybko mierzyć, zwłaszcza w pustyniach i górach, odległości i wysokości. Sposób ten był już stosowany w takich wypadkach. Rzecz prosta, że dokładność takich pomiarów będzie mniejsza niż pomiarów łątami lub taśmą albo niwelacją, lecz bardzo często wystarczy najzupełniej.

Mały kąt $(\alpha - \beta)$ starano się mierzyć zapomocą różnych urządzeń, przyczem odcinek „l“ na łacie miał stałą wielkość. Sposoby te jednak mało są używane.

Mały kąt $(\alpha - \beta)$ starano się mierzyć zapomocą różnych urządzeń, przyczem odcinek „l“ na łacie miał stałą wielkość. Sposoby te jednak mało są używane.

§ 4. Odległościomierz o stałej podstawie z dwoma lunetami. Można go krócej nazwać: odległościomierz prostokątny. Zasadę tego przyrządu objaśnia rys. 133.

Podstawa $AB = b$ — ma stałą długość. Na obu jej końcach znajdują się lunety. Przypuśćmy, że chcemy zmierzyć odległość, od stanowiska przyrządu, do odległego punktu P . Celujemy tedy lunetą B — w kierunku BB' t. j. do punktu P . Następnie zwracamy lunetę A — na punkt P i odczytamy kąt ε — między kierunkiem AA'' równoległym do BB' , a kierunkiem AP .

Z rysunku wynika, że $b = E \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$

$$\text{czyli } E = \frac{b}{\operatorname{tg} \varepsilon} \quad \dots \dots \dots 8$$

Ponieważ ε jest zwykle bardzo małym kątem, więc $\operatorname{tg} \varepsilon$, a odnośny łuk koła nie będą się w długości różniły, przeto zamiast $\operatorname{tg} \varepsilon$ wstawimy $\varepsilon'' \cdot 0.000004848$ — gdzie 0.000004848 jest łukiem o promieniu $r = 1.0$ m, ε zaś wyrazimy w sekundach.

Stąd zamiast równ. 9 mamy:

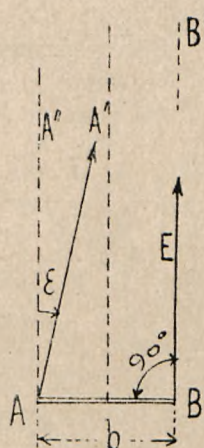
$$b = E \cdot \operatorname{tg} \varepsilon = E \cdot \varepsilon'' \cdot 0.000004848, \text{ a stąd}$$

$$E = \frac{b}{\varepsilon'' \cdot 0.000004848} = \frac{b}{\varepsilon''} \cdot \rho \quad \dots \dots 10$$

Wyrażenie na określenie błędu, otrzymamy z równania 9 przez różniczkowanie:

$$d E = \frac{E^2}{b} \cdot d \varepsilon \text{ wzgl. } d E = \frac{E^2 d \varepsilon}{b \cdot \rho} \quad \dots \dots 11$$

Przyjawszy: $b = 1.0$ m oraz granicę $d \varepsilon = 1''$ otrzymamy:



Rys. 133.

Odległość E m	Paralaksa $\varepsilon = \frac{b}{E} \cdot \rho$	średni błąd	
		$d E$	$100 \frac{d E}{E}$
500	412''	1.20 m	0.24 ‰
1.000	206''	4.80 "	0.48 "
2.500	82''	30.00 "	1.20 "
5.000	41''	121.00 "	2.42 "
10.000	20.6''	485.00 "	4.85 "

Z powyższej tabeli okazuje się, że kąt ϵ powinien być zmierzony z wielką dokładnością, którą da się osiągnąć zapomocą teodolitu. Ponieważ taki przyrząd jak odległościomierz, nie może dać dokładności większej, jak $10''$ więc i błędy będą znacznie większe. Jest to dawny już przyrząd, znany w r. 1770.

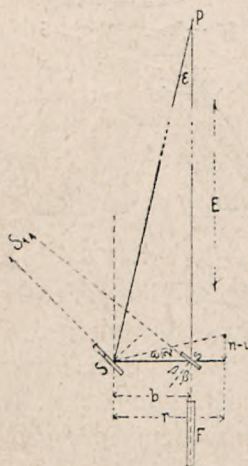
W nowszych czasach wyrabiane tego rodzaju przyrządy, mają dłuższą podstawę, n. p. firma Starcke wyrabia o podstawie 1.518 m, lunety zaś mają urządzenie mikrometryczne do pomiaru kątów. Odległościomierz firmy Starcke daje następujące dokładności:

E =	1000 m	2000	3000	4000	5000 m
Δ E =	± 8 m	± 31 m	± 69 m	± 123 m	± 192 m.

Dotychczas nie osiągnięto większej dokładności jak $2'5''$ w pomiarze kąta ϵ zapomocą odległościomierzy.

Niemcy używali przy obronie wybrzeży, odległościomierzy na powyższej zasadzie zbudowanych, o stałej podstawie 3'0 m długiej, z lunetami 1'05 m dług. (przyrząd mjra Kämpera). Kąty można było mierzyć z dokładnością $1''$.

§ 5. Odległościomierz refleksyjny. Polega on na nast. zasadzie: Promień świetlny, dochodzi od dalekiego punktu P; do lunety F — równocześnie (rys. 134) drugi promień od tegoż punktu P — dochodzi



Rys. 134.

do ruchomego zwierciadła S_1 odbija się, dochodzi do drugiego zwierciadła stałego s , odbija się po raz drugi i przychodzi do lunety. W luncie więc widać punkt P i obraz jego w zwierciadle. Kąty padania i odbicia α i β naznaczone są na rysunku. Zwierciadło S_1 umieszczone jest na ramieniu, czyli alhidadzie, które reguluje się tak, by oba obrazy padały na siebie. Wówczas podobnie jak poznaliśmy w węgielnicy zwierciadlanej, oba zwierciadła tworzą ze sobą kąt $\frac{\epsilon}{2}$ tj.

połowę paralaksy ϵ . Odstęp między osią obrotu zwierciadła S (równocześnie alhidady), a osią lunety, t. j. b jest stałą podstawą trójkąta S s P. Na alhidadzie, po ustawieniu zwierciadła S_1 odczytamy kąt $(n-i)$ podobnie jak na sekstansie.

Nazwijmy: b = długość podstawy, r = dług. promienia alhidady, $(n-i)$ = odczyt na alhidadzie E = odległość punktu P
to $b = E \cdot \epsilon$ (ϵ jak w równ. 9 zamiast $\text{tg } \epsilon$ długości łuku dla $1''$ i promienia = 1).

$$(n-i) = r \frac{\varepsilon}{2} \text{ zatem } E = \frac{b \cdot r}{2(n-i)} \quad \dots \quad 12$$

Na tej podstawie zbudowano kilka typów odległościomierzy, jak angielski o podstawie pionowej, lub Adie & Christie, Barr & Strond i t. p.

Dla geodezji przedstawiają one bardzo mały interes, jako nie dające koniecznej dokładności. Używane są natomiast w artylerji. Są to przyrządy łatwe do poznania, lecz jak widzieliśmy dają bardzo małe dokładności, a raczej są niedokładne, tem bardziej gdy punkt którego odległość mamy znaleźć, nie jest dość wyraźny lub nawet ruchomy.

§ 6. Jako odległościomierz starano się użyć wyciąg okularowy lunety. W tym celu musiały być wyciąg opatrzone dokładną podziałką, albowiem między odległością przedmiotu od obiektywu, a odległością obrazu obiektywu, t. j. między odległościami sprzężonemi, zachodzi stały stosunek — z drugiej znów strony, im obraz tworzy się w lunecie dalej od obiektywu, czyli bliżej lupy, tem bardziej musimy wysuwać okular, ażeby lupę tak ustawić, by obraz będący dla niej przedmiotem, znalazł się w jej ognisku. Stąd wynika, że między położeniem przedmiotu w stosunku do obiektywu, a lupą, także w stosunku do obiektywu, zachodzi także stały stosunek.

N. p. patrząc na łatę w odległości 10 m ustawioną, możemy okular wysunąć 3 mm — w odległ. 20 m już 15·9 mm — 30 m — 20·2 mm — następnie wysuwanie postępuje coraz wolniej, tak, że gdy n. p. dla odległości 100 m — potrzeba okular wysunąć 26 mm, to dla 300 m tylko 27·5, a dla odległości bardzo wielkiej, 28·3 mm. Pomiar więc wysuwania wyciągu, natrafiać musi na coraz to większe trudności i z natury rzeczy stawiać się musi coraz to niedokładniejszym. Powtóre oświetlenie odgrywa tu również rolę. Ostatecznie okazuje się, że błędy jakie w najlepszym razie przy tej metodzie są do oczekiwania, wynoszą:

dla odległości D =	5 m	10 m	50	100	200	300	400
średni błąd δD =	0·025 m	0·1 m	0·25 m	10 m	40 m	90 m	160 m.

Sposób ten możnaby zatem zastosować tylko do małych odległości, do 50·0 m — dla większych bowiem błędy są wprost niesłychane.

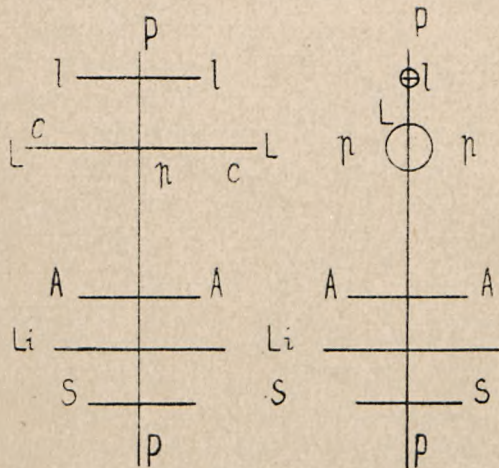
Prócz powyższych, mamy jeszcze odległościomierz Bauerfeinda, używany w niemieckiej armji. Jest to pryzmat kształtu $\frac{1}{4}$ części umiarowego ośmioboku w przekroju poziomym, zapomocą którego wyznacza się stałe kąty, nieco mniejsze niż 90° na obu końcach niedługiej podstawy trójkąta wynoszącej $\frac{1}{50}$ część długości boku większego, czyli odległości danego punktu. Odwrotnie przyrządem

tym wyznacza się długość podstawy, a mnożąc ją przez 50, otrzymamy żadaną odległość.

Jednym z najlepszych odległościomierzy, jest stereoskopowy przyrząd Zeissa. Opis jednak opuszczamy, gdyż jak poprzednio mówiliśmy, przyrządy te zbudowane są na tych samych zasadach i łatwe do poznania, do geodezyjnych prac jednak się nie nadają z powodu niedokładności. Zdaje się, że w tym kierunku już dalszych ulepszeń być nie może.

§ 7. Przyrząd do zdjęć tachymetrycznych, czyli t. zw. Tachymeter. Jest to przyrząd, który prócz urządzenia do pomiaru kątów poziomych i pionowych, posiada urządzenia do pomiaru odległości, t. j. odpowiednią siatkę w lunecie. Zwykle dodaje się doń jeszcze i kompas. Przyrząd ten nadaje się również do niwelacji. Dlatego nazywamy go zwykle przyrządem uniwersalnym. Do niwelacji używa się osobnej, nasadkowej dokładnej libeli.

Typów tego przyrządu jest wiele. Poznawszy jeden, znać już będziemy i inne, różnią się bowiem tylko w niektórych szczegółach konstrukcyjnych. Tachymeter różni się od teodolitu, którego opis



Rys. 135.

PP jest osią pionową przyrządu. Ta oś powinna być prostopadłą do płaszczyzny limbusu, oraz do osi obrotu lunety pp, dalej powinna przechodzić przez środek limbusu i przecinać się tak z osią geometryczną, jak i celową lunety i osią libeli.

Oś geometryczna lunety LL powinna schodzić się z osią celową CC (na rys. oś CC przecina się z osią LL).

Oś libeli ll powinna być równoległą do osi geom. LL i osi celowej CC.

podamy w następnym rozdz., tylko mniej precyzyjnym urządzeniem. Wystarcza tu bowiem podział koła poziomego i pionowego pozwalający na odczyty z dokładnością 1' — natomiast powinien być zbudowany silnie.

Zanim przystąpimy do opisu, podamy układ osi tego przyrządu, oraz warunki jakim on odpowiadać powinien, ażeby mógł spełnić swoje zadanie. Rys. 135 podaje te warunki, mianowicie:

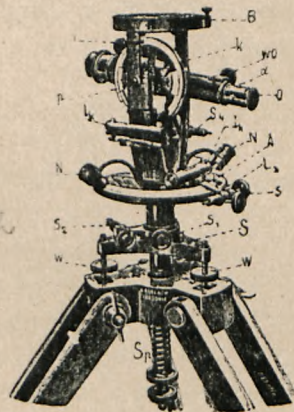
Oś obrotu pp powinna przecinać się z osią CC i LL oraz być równoległą do płaszczyzny limbusu.

Jeżeli te warunki będą spełnione, to przyrząd będzie zdatnym do pracy, a więc przed użyciem, należy go sprawdzić i ewentualnie zrektyfikować.

Najwygodniejszymi przyrządami, są te, w których limbus da się obracać na spodarce, a więc alhidada da się zsprzęgać z limbusem na $0^{\circ} 0' 0''$, tudzież w których luneta da się około osi poziomej pp obracać tak, że po obrocie libela znajdzie się pod lunetą. W takim razie libela, która zwykle jest stałe do lunety przytwierdzona, ma odkryte szkło u góry i u dołu oraz górną i dolną podziałkę — jest to t. zw. libela rewersyjna. Gdy limbus jest obracalny po spodarce, to przyrząd taki nazywa się repetycyjnym. Prócz stałej libeli, ma przyrząd jeszcze drugą, nasadkową libelę, a nadto na alhidadzie dwie libelki mniej czułe, t. zw. krzyżowe, umieszczone w kierunkach do siebie prostopadłych.

Rys. 136 przedstawia typ tachymetru względnie przyrządu niwelacyjnego z busolą nasadzoną na oś poziomą lunety.

Spodarka S spoczywa na statywie za pośrednictwem trzech śrub wstawowych „w” — sprężnięta z nim śrubą Sp jaką poznaliśmy już przy opisie przyrządów niwelacyjnych. Po spodarce obraca się limbus Li, dający się śrubką S₁ wywołującą silne tarcie, zsprzęgać się ze spodarką — małe zaś ruchy limbusu, uskutecznić można za-



Rys. 136.

pomocą śruby s₂, t. zw. śruby do ruchu powolnego. Na limbusie obraca się około osi pionowej alhidada A mająca na swym obwodzie podział na stopnie i zwykle drobniejszy co 20' oraz nonjusz NN zwykle dwa, co pozwala eliminować błąd ekscentryczności nonjuszów. Dalej dwie libele krzyżowe l_p. Alhidada daje się z limbusem zsprzęgać podobnie jak limbus ze spodarką. Na rysunku widoczną jest śruba s₃ do ruchu powolnego alhidady po limbusie.

W dwu ramionach na alhidadzie, umieszczona jest luneta, obracająca się na osi „p” w płaszczyźnie pionowej. Na lunecie widzimy libelę rewersyjną „l”, wyciąg okularowy „wo”, okular „o” oraz śrubki α do regulowania siatki. Wkońcu koło pionowe k z dwoma nonjuszami. Luneta obracając się około osi „p” da się umocować zapomocą sprzęgła, niewidocznego na rys. w każdej pozycji — śruba

s_4 służy do ruchu powolnego lunety w płaszczyźnie pionowej. Wkońcu busola B — albo nasadzana na oś „p” albo też stale do alhidady przymocowana.

REKTYFIKACJA.

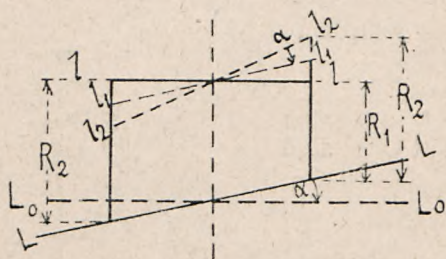
§ 8. Warunek 1 i 2: oś celowa powinna być identyczną z osią lunety i równoległą do libeli.

Zależnie od typu przyrządu, zachodzić tu mogą dwa wypadki:

1. Luneta daje się zdejmować i przekładać, libela jest nasadkowa. W takim razie rektyfikację osi przeprowadzimy tak, jak w przyrządzie niwelacyjnym typu III.

2. Luneta stale osadzona na osi poziomej, libela jedna nasadkowa, druga stale do lunety przytwierdzona.

Sprawdzimy najpierw oś libeli do równoległości z osią lunety i to używając libeli nasadkowej. W tym celu ułożymy libelę na lunecie, sprzęgniemy oś „p” i za pomocą śrubki s_4 sprowadzimy środek bańki do punktu zerowego. Wówczas oś libeli zajmie położenie $l_1 l_1$ poziome (rys. 137), zaś oś lunety położenie $L L$.



Rvs 137.

Nierównoległość obu tych osi pochodzi stąd, że ramiona libeli, za pośrednictwem których spoczywa ona na lunecie, nie są

równe. Teraz zdejmujemy libelę i przetrzucimy ją o 180° — tak, że śrubka „i” przejdzie na przeciwną stronę.

Jeżeli oś libeli nie jest równoległą do osi lunety, to środek bańki wyjdzie z punktu zerowego, bo oś libeli zajmie teraz położenie $l_2 l_2$. Pochodzi to stąd, że ramiona R_1 i R_2 za pośrednictwem których libela spoczywa na lunecie, nie są równe, jak to uwidoczniło na rysunku. Położenie środka bańki odczytamy i określimy w znany sposób i przypuścimy, że przesunął się o n przedziałek — to teraz, za pomocą śrubki „i” przesuniemy go w przeciwną stronę o $\frac{n}{2}$ przedziałek, czyli o kąt α — a oś libeli zajmie położenie $l_1 l_1$ równoległe do osi lunety $L L$.

Gdy teraz za pomocą śruby wstawowej obrócimy tak oś libeli, jak i oś lunety o kąt α , to oś libeli $l_1 l_1$ będzie pozioma, a oś lunety zajmie położenie $L_0 L_0$ także poziome, bo poprzednio sprowadziliśmy ją do równoległości z $l_1 l_1$. Po parokrotnym powtórzeniu doświadczenia, sprowadzimy obie osie do takiej zgodności, że

po przereźnięciu libeli, nie będzie już żadnej odchyłki. Po tej rektyfikacji, już śrubki „i“ ruszać nie wolno. Lecz powyższą rektyfikację wykonaliśmy przy pomocy libeli nasadkowej, nie ruszając wcale libeli rewersyjnej, umocowanej na lunecie. Jeżeli po rektyfikacji, ta libela nie jest zgodną z libelą nasadkową, to uzgodnimy je zapomocą śrubki „i“.

Teraz przychodzi kolej na sprawdzenie, czy oś celowa jest identyczną z osią lunety. W tym celu sprowadzimy środek bańki do punktu zerowego śrubą s_4 i odczytamy na łacie ustawionej w odległości około 100 m — n. p. p_1 — następnie obrócimy lunetę około osi pp tak, że obiektyw znajdzie się po stronie przeciwnej i obrócimy alhidadę o 180° kierując lunetę na łatę. Sprowadzimy znowu środek bańki do punktu zerowego i odczytamy na łacie p_2 . Ponieważ oba odczyty p_1 i p_2 są różne, to jest znakiem, że oś celowa i geom. nie schodzą się. Potrzeba więc poprawić położenie osi celowej, tak by wskazywała odczyt pośredni $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$ nie możemy tego zro-

bić ani zapomocą śruby wstawowej s_4 , bo wówczas libela, już zrektifikowana względem osi lunety, wyszłaby z równowagi. Pozostaje tylko odpowiednie przesunięcie siatki, a tem samem i jednego punktu osi celowej — drugi punkt tej osi, t. j. środek optyczny, pozostanie niezmieniony. Do przesunięcia siatki służą śrubki α . W tym wypadku siatkę przesuniemy w kierunku pionowym, n. p. na dół, odkręcając śrubkę α u dołu wyciągu okularowego, a górną wkręcając, lub przeciwnie, jeżeli wypadnie przesunąć siatkę w górę. Doświadczenie należy powtórzyć, dopóki nie uzyska się zupełnej zgodności. Mimo tej rektyfikacji, nie wiemy jeszcze, czy oś celowa jest teraz identyczną z osią lunety, czy też obie te osie schodzą się w jednym punkcie, mianowicie na ostatnim odczycie na łacie. Ażeby o tem się przekonać, przesuniemy łatę o drugie 100 kroków dalej i powtórzmy poprzednie sprawdzenie. Jeżeli w obu położeniach lunety odczyty są te same, to jest znakiem, że osie schodzą się w jednej linii. Jeżeli otrzymamy różne odczyty, to oś celowa wogóle nie przecina się z osią lunety, lecz leży wyżej lub niżej od niej. W tym razie możemy obie osie sprowadzić w przybliżeniu tylko do równoległości w nast. sposób: skierujemy lunetę na odległy, a wyraźny punkt przy równoczesnem sprowadzeniu bańki libeli do punktu zerowego, potem lunetę przereźnimy i skierujemy na ten sam punkt — wreszcie sprowadzimy bańkę do punktu zerowego. Jeżeli po uregulowaniu libeli środek siatki zejdzie z danego punktu, to zapomocą śrubek α poprawimy celową, nastawiając ją na punkt pośredni. Ponieważ punkt ten jest daleki, więc obie osie są w przybliżeniu równoległe. Ale pamiętać musimy, że przy niwe-

lowaniu, nie można lunety przerzucać, lecz musi ona pozostawać zawsze w tem samym położeniu, t. j. wyciąg okularowy zawsze po prawej, lub zawsze po lewej stronie.

W ten sposób mamy już sprowadzone, względnie dopełnione dwa pierwsze warunki.

3. Płaszczyzna limbusa powinna być równoległą do osi celowej, a tem samem i do osi libeli. Wówczas oś pionowa przyrządu, zawsze prostopadła do płaszczyzny limbusu, będzie rzeczywiście ustawioną w pionie.

Celem sprawdzenia tego warunku, ustawiamy lunetę wraz z libelą nad dwoma śrubami wstawowemi i sprowadzamy środek bańki do punktu zerowego. Następnie obracamy alhidadę o 180° . Jeżeli teraz bańka zesła z pierwotnego położenia, to jest znakiem, że oś libeli, (a tem samem i celowa) nie jest równoległą do płaszczyzny limbusu. Ponieważ już ani śrubki „i“ ani śrubek „c“, po poprzedniej rektyfikacji ruszać nie można, więc poprawimy położenie osi libeli, zapomocą śruby s_4 przesuając środek bańki w przeciwną stronę o połowę wychylenia, o drugą zaś połowę przesuniemy go poprawiając położenie limbusa śrubą wstawową. Po dwu lub trzykrotnem powtórzeniu tej operacji, będziemy mieli jedną linię limbusu, nad dwoma śrubami wstawowemi, równoległą do osi libeli. Ustawmy teraz lunetę w kierunku prostopadłym do poprzedniego, obracając alhidadę o 90° — i sprowadzimy środek bańki do punktu zerowego zapomocą trzeciej śruby wstawowej. Teraz będziemy mieli dwie linie przecinające się na płaszczyźnie limbusu, równoległe do osi libeli, a więc i cała ta płaszczyzna będzie do osi libeli równoległą. Lunetę z libelą obracać możemy w koło, a środek bańki nie wyjdzie z punktu zerowego.

Na alhidadzie mamy jeszcze dwie libele t. zw. krzyżowe „ l_p “. Po tej ostatniej rektyfikacji, poprawimy położenie osi obu tych libelek, zapomocą śrubek „i“ uzgadniając je z libelą główną.

Wskutek poprawek uskuteczionych zapomocą śruby s_4 przesunie się koło pionowe i punkt zerowy podziału na tem kole nie będzie zgodnym z zerem nonjusza. Nonjusz jednak można zapomocą śrubek przesunąć i uzgodnić wskazówki.

Pierścienie na lunecie, służące do umieszczenia libeli nasadkowej, powinny być równe i tak już wyjść mają z fabryki. Ażeby się o tem przekonać, wyjmujemy lunetę z łożysk i ustawiamy na stole, na specjalnych dźwigarkach. Następnie nakładamy libelę i odczytujemy położenie środka bańki = s_1 . Potem przekładamy libelę o 180° i znowu odczytujemy położenie środka bańki s_2 .

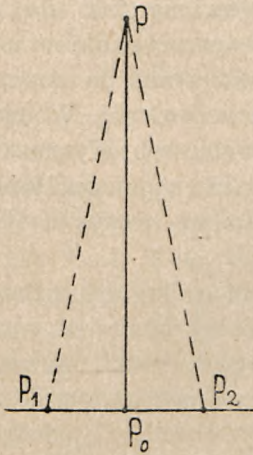
Wkońcu przekładamy libelę w dźwigarkach o 180° i tak samo odczytujemy środek bańki w dwu położeniach, t. j. s_3 i s_4 . Jeżeli pierścienie są równe, to $s_1 + s_2 = s_3 + s_4$. W przeciwnym razie, naprawa jest bardzo trudna, bo podlepianie cienkich papierków nie jest trwałe; najlepiej posłać wówczas lunetę do fabryki celem otoczenia pierścieni.

4. Oś celowa ma się przecinać z osią pionową przyrządu. Warunek ten będzie spełniony wówczas, gdy oś celowa jest identyczną z osią lunety, oraz gdy luneta jest centrycznie osadzoną.

O ekscentryczności lunety, mówić będziemy przy jednym z następujących warunków.

5. Oś pozioma lunety, t. j. oś obrotu „pp” powinna być równoległą do limbusu. Ażeby o tem się przekonać, postępujemy w następujący sposób: Ustawiamy limbus poziomo, a w odległości około 150 m od przyrządu, zawieszamy na drzewie lub wysokim budynku długi sznur, obciążony u dołu ciężarem, czyli pionem.

Środek siatki nastawiamy dokładnie na górny koniec sznura, a następnie opuszczamy powoli lunetę obserwując względne położenie środka siatki i sznura. Jeżeli środek siatki zejdzie

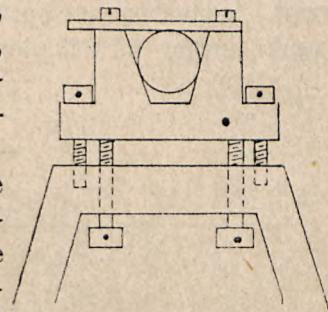


Rys. 139.

z sznura, to świadczy, że oś obrotu „pp” nie jest poziomą, zatem nie jest równoległą do limbusu, a tem samym płaszczyzna jaką wówczas oś celowa zakresliła nie jest pionową.

Należy więc jeden koniec osi „pp” podnieść lub opuścić, co jest możliwe zapomocą odpowiednich śrubek (rys. 138) pod łożyskiem osi. Odkręcając n. p. śrubki dolne, a przykręcając górne — obniżymy łożysko i odwrotnie. Zamiast wspomnianego piona, posłużyć się możemy odbiciem jakiegoś przedmiotu wysokiego w zwierciadle wody. Przedmiot bowiem i obraz znajdują się na jednym pionie.

Inny sposób: Ustawiamy limbus w poziomie i wycelujemy lunetę na jakiś wysoki przedmiot, nastawiając środek siatki na wyraźnie zaznaczony punkt P (rys. 139) — następnie opuszczamy lunetę i odczytujemy na łacie, ułożonej na ziemi, równoległe do osi „pp” —



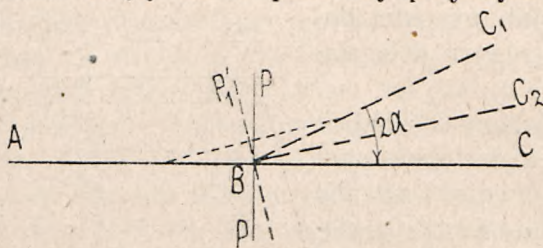
Rys. 138.

odpowiedni punkt P_1 . Obróćmy teraz alhid. o 180° i lunetę około osi „pp“ skierujmy środek siatki powtórnie na punkt P i opuściwszy lunetę odczytamy nowy punkt P_2 na łacie. Łatwo zrozumieć, że gdyby płaszczyzna zakreślona przez oś celową była pionową, to otrzymalibyśmy odczyt pośredni P_0 . — Uregulujemy więc oś „pp“ podnosząc lub obniżając jeden jej koniec, aż środek siatki padnie na P_0 .

6. Oś celowa powinna być prostopadłą do osi obrotu lunety „pp“ — w przeciwnym razie powstaje t. zw. błąd kolimacyjny.

Warunek ten sprawdzimy, względnie przeprowadzimy rektyfikację w następujący sposób:

W dogodnym równym terenie, n. p. na brzegu prostej, około 500 m długiej drogi, wytyczymy prostą zapomocą trzech punktów. Jeden z tych punktów obierzemy w ten sposób, że ustawivszy przyrząd, zawiesimy na sprzęgle statywu pion. Ostrze pionu wyznaczy punkt leżący na osi pionowej przyrządu. W tym miejscu wbijemy



Rys. 140.

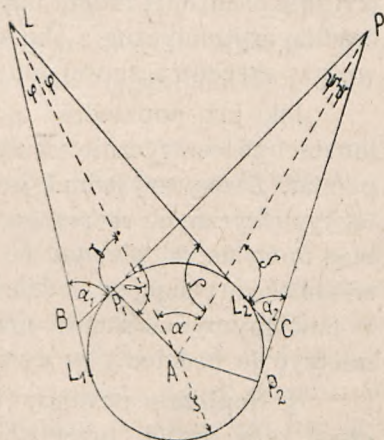
palik i zaznaczymy punkt małym gwoździkiem. Drugi punkt obierzemy dowolnie w odległości 500 lub więcej m, zaznaczając go tak samo. Przyrząd ustawiony jest do poziomu nad punktem pierwszym t. j. A (rys. 140) — skierujemy środek siatki na punkt C nastawiając go dokładnie na ostrze tyczki tam ustawionej. W takim razie, oba punkty A i C znajdować się muszą na celowej. Wyznamy wreszcie punkt B — w środku między A i C, także zapomocą lunety kierując tyczkę dokładnie w linię A C. Niewątpliwie wszystkie trzy punkty leżą teraz na jednej prostej.

Przenieśmy przyrząd na punkt B i ustawmy go tak do poziomu, jak i dokładnie nad punktem B, poczem skierujemy lunetę na punkt A i nastawimy dokładnie środek siatki na ostrze tyczki. Wreszcie obróćmy lunetę około osi „pp“ i skierujmy ją w stronę punktu C. Jeżeli pozioma oś obrotu lunety ma względem linii A C położenie p'_1 t. j. nie jest prostopadłą do celowej, to po obrocie środek siatki nie padnie na punkt C, lecz na punkt C_1 . Z konstrukcji łatwo poznać, że jeżeli oś „ p'_1 “, odchyłona jest o kąt α od właściwego kierunku „pp“, to celowa BC odchyła się o kąt 2α . Celem poprawienia osi celowej, zmierzmy odstęp punktów $C C_1$ — i ustawimy w środku, t. j. w C_2 tyczkę. Zapomocą osi śrubek α przesuniemy siatkę w kierunku poziomym, aż jej środek padnie na punkt C_2 — o drugi zaś

kąt α obrócimy alhidadę zapomocą śruby do ruchu powolnego, aż środek siatki padnie na punkt C. Powtórzywszy tą operację, usuniemy zupełnie błąd kolimacyjny.

7. Oś pionowa przyrządu powinna przechodzić przez środek limbusa. Nie jest to warunek konieczny, bo jak przekonamy się błąd ekscentryczności, powodujący błąd w pomiarze kątów, da się rachunkowo wyeliminować zapomocą odczytów dwóch nonjuszów w dwóch położeniach lunety i obliczenie średniej, ale w tachymetrze, gdzie rozchodzi się o szybkość i gdzie mamy zwykle tylko jeden nonjusz, albo jeden tylko odczytujemy, błąd ten nie powinien istnieć. Tutaj oś pionowa, oś pozioma obrotu lunety, oraz oś celowa wraz z identyczną z nią osią lunety, powinny przecinać się w jednym punkcie na osi pionowej, przechodzącej przez środek limbusu.

Przypuśćmy, że punkt A (rys. 141) jest środkiem limbusu, natomiast linja pionowa, przechodząca przez skrzyżowanie osi celowej z osią poziomą obrotu lunety, nie przechodzi przez środek limbusu, czyli nie schodzi się z pionową osią przyrządu lecz w odległości ζ od niej — zatem podczas obrotu alhidady, punkt skrzyżowania obu tych osi, zakreśla koło o promieniu ζ , który też jest miarą ekscentryczności osadzenia lunety. Celowa w każdym swem położeniu, jest więc styczną do koła ekscentryczności.



Rys. 141.

Jeżeli przy pomiarze kąta, ustawimy środek limbusu nad wierzchołkiem kąta, to oś celowa nie będzie się znajdowała dokładnie w kierunku ramienia tegoż kąta. Niech linje AL i AP będą ramionami kąta $LAP = \alpha$, zaś koło o promieniu ζ ekscentrycznością lunety. Mierząc kąt α , kierujemy lunetę do lewego ramienia, zatem celowa L_1L będzie jednym ramieniem kąta, potem do prawego, t. j. P_1P będzie prawym ramieniem. Przedłużmy obie te celowe do punktu przecięcia ich, t. j. do B_1 otrzymamy pomierzony kąt α_1 gdy tymczasem, w rzeczywistości powinien być kąt α . Przerzucimy teraz lunetę, t. j. obróćmy ją około osi poziomej, następnie obrócimy alhidadę o 180° i skierujemy lunetę na punkt L, następnie na P. Podobnie jak poprzednio będą tu celowe L_2L i P_2P jakoteż kąt α_2 . Mierząc zatem kąt α w dwu położeniach lunety, otrzymamy nań dwie wartości α_1 i α_2 .

Z trójkąta L B D otrzymamy:

$$\alpha_1 + \varphi + \gamma = 180^\circ$$

podobnie z trójkąta P C E $\alpha_2 + \psi + \delta = 180^\circ$

Dodajmy oba równ. $\alpha_1 + \alpha_2 + \varphi + \gamma + \psi + \delta = 360^\circ$ czyli

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 360^\circ - (\varphi + \gamma + \psi + \delta) \quad 13$$

Z trójkąta L A E $\varphi + \alpha + \delta = 180^\circ$

i z trójkąta P A D $\psi + \alpha + \gamma = 180^\circ$ czyli

$$2\alpha + \varphi + \psi + \delta + \gamma = 360^\circ \text{ lub}$$

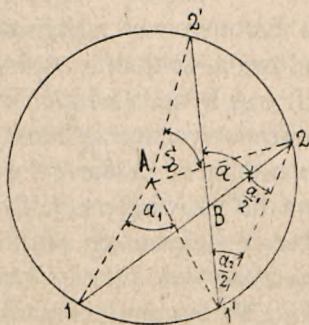
$$2\alpha = 360^\circ - (\varphi + \psi + \delta + \gamma) \quad 14$$

Z rów. 13 i 14 wynika, że $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha$ a więc $\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad 15$

Równ. 15 dowodzi, że z obu pomiarów kąta zapomocą ekscentrycznie osadzonej lunety otrzymamy rzeczywistą wartość kąta, biorąc średnią arytmetyczną z obu spostrzeżeń. Możemy więc wyeliminować wpływ ekscentryczności lunety, mierząc kąt w dwu położeniach jej.

Jak już poprzednio powiedzieliśmy, w tachymetrze powinna luneta być centrycznie osadzoną, bo nie mamy czasu na podwójny pomiar. Zazwyczaj jednak jest to drobny błąd, tak, że przy zdjęciach tachymetrycznych można go pominąć. Sprawdzić jednak musimy ten błąd tachymetru, dlatego, że przyrządem tym będziemy mierzyli kąty wieloboków będących podstawą zdjęć tachymetrycznych, a że pomiary te powinny być dokładne, przeto wiedząc, że luneta jest ekscentryczną mierzyć je będziemy w dwu położeniach.

8. Nonjuse powinny być osadzone centrycznie, t. j. linia łącząca zera dwóch przeciwległych nonjuszów, powinna przechodzić przez środek limbusu, czyli odczyty na nonjuszach różnić się powinny o 180° .



Rys. 142.

Przypuśćmy, że alhidada jest ekscentryczna, a tem samym i nonjuse na niej osadzone — że linia 1—2 (rys. 142) łącząca zera przeciwległych nonjuszów, nie przechodzi przez środek limbusu A. Po obrocie alhidady o pewien kąt, linia 1—2 zajmie położenie 1'—2' i będzie styczną do koła ekscentryczności alhidady. Odczytując na na limbusie łuk 1—1' dostaniemy kąt α_1 — z łuku zaś 2—2' kąt α_2 . Połączmy punkt

1' z punktem 2 to z rysunku widzimy, że:

Kąt środkowy α_1 wspiera się na łuku 1—1', na którym równocześnie wspiera się kąt obwodowy 1—2—1', czyli że kąt ten jest

połową odpowiedniego kąta środkowego α_1 . Podobnie kąt środkowy α_2 i kąt obwodowy $2' - 1' - 2$ mają wspólny łuk.

Z trójkąta $1' A 2$, z uwagi, że kąt α jest kątem zewnętrznym, otrzymamy $\alpha = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ 16

t. j. błąd ekscentryczności alhidady wyeliminuje się zapomocą odczytu kąta na dwóch nonjuszach i obliczenia z nich średniej arytmetycznej.

Gdy przyrząd ma jeden tylko nonjusz, to kąt mierzyć byśmy musieli w dwu położeniach lunety, odczytując zatem nonjusz dwa razy i biorąc z obu odczytów średnią.

9. Podział limbusu powinien być dokładny. Błąd podziału powstaje wskutek niejednakowych odstępów między kreskami podziałki. Badanie podziałki odbywa się w ten sposób, że zapomocą nonjusza badamy odstępki kresek, lub też jeden i ten sam kąt mierzymy różnymi częściami limbusu, metodą repetycyjną. Błąd ten usunąć się nie da, możnaby jednak błędy pomiaru zmniejszyć, mierząc kąty serjami lub metodą repetycyjną, o czym już poprzednio była mowa.

§ 8. Nonjusz. Koło limbusowe podzielone jest na 360^0 — każdy zaś stopień, zależnie od wielkości średnicy limbusu, na 3—6 części, czyli najdrobniejsza podziałka limbusu wynosi od $10' - 20'$. Jeżeli limbus miałby średnicę około 344 mm zatem bardzo wielką, to podziałka na $10'$ przedstawiałaby 0.5 mm odstępki. Na oko możnaby szacować połowę podziałki czyli $5'$ a najwyżej $2'30''$. Odczyty zatem na limbusie, a temsamem i pomiar kątów, byłyby zbyt niedokładne. Zaradzono temu zapomocą zastosowania nonjusza, który pozwala na odczyty z dokładnością $10''$, zatem 30 razy większą niż bez tego urządzenia.

Podziałka nonjusza jest nieco mniejsza od podziałki na limbusie, mianowicie $(n - 1)$ części limbusu, podzielone są na n części na nonjusz. Nazwijmy jednostkę podziałki limbusu przez L , na nonjusz zaś przez N , to ze względu że oba łuki są równe, możemy ustawić następujące równanie:

$$(n - 1) \cdot L = n \cdot N \text{ czyli } n \cdot L - L = n \cdot N$$

$$\text{a stąd } n(L - N) = L \text{ lub } L - N = \frac{L}{n} = a \text{ 17}$$

gdzie „a“ nazywa się wartością nonjusza.

N. p. $9L = 10N$, t. j. 9 przedziałek na limbusie, podzielono na 10 części na nonjusz — zatem $L - N = \frac{L}{10} = a$. Przypuśćmy, że stopień na limbusie podzielony jest na 4 części, czyli jedna przedziałka na łuku odpowiada $15'$ czyli $L = 15'$ — oraz, że 29 części

$$L = 20' \quad n = 20 \quad a = \frac{L}{n} = \frac{20'}{20} = \frac{1200''}{20} = 60''$$

na limbusie, podzielono na 30 części na nonjuszku, t. j. $n = 30$ — w takim razie

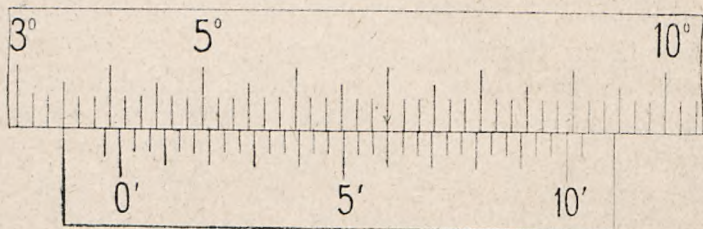
$$a = \frac{L}{n} = \frac{10'}{20} = \frac{1'}{2} = 30'' \text{ i t. d.}$$

Gdy wartość nonjusza = a — zaś zero nonjusza przesunięte jest o długość odpowiadającą ilości „ a ” od poprzedniej kreski limbusu, to pierwsza już kreska nonjusza, zgadza się z następną kreską limbusu. Jeżeli zero nonjusza przesunięte jest o $2a$ od poprzedniej kreski limbusu, to druga kreska nonjusza zgadza się z następną na limbusie i t. d. Znając wartość „ a ” obliczymy łatwo odpowiedni kąt:

Przykład: Limbus ma podział na $10'$ czyli $L = 10'$ — zaś 29 podziałek limbusu, odpowiada 30-tu podziałkom nonjusza, czyli $n = 30$.

Wówczas $a = \frac{L}{n} = \frac{10'}{30} = \frac{600''}{30} = 20''$ — przypuśćmy, że 18-ta

kreska nonjusza zgadza się dokładnie z jedną z kreszek limbusu — to odpowiedni kąt wynosi $x^{\circ} + y' + 18 \cdot 20'' = x^{\circ} + y' + 360 = x^{\circ} + (y + 6)' + 0''$. Minuty odczytuje się wprost na nonjuszku, bo jeżeli $a = 20''$ to co trzecia kreska jest dłuższa i oznacza minutę.



Rys. 143.

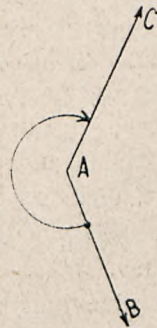
Na rys. 143 — przedstawiono szematycznie urządzenie nonjusza, odpowiednie do powyższego przykładu. Przed zerem i przy końcu nonjusza znajduje się po jednej kresce. Służą one do dokładnego ustawienia zera nonjusza na kąty, odpowiadające całym odstępom kreszek na limbusie. Prócz bowiem kreski zerowej nonjusza, która ma się zgadzać z odpowiednią kreską na limbusie, mamy obok dwie kreski, które będą symetrycznie nieco przesunięte względem sąsiednich kreszek limbusu, co ułatwia dokładne ustawienie zera nonjusza.

Jeżeli, co się niekiedy zdarza, właściwie żadna kreska nonjusza nie zgadza się dokładnie z którąkolwiek z kreszek na limbusie, wtedy przyjmujemy dwie sąsiednie najwięcej zgodne i obliczamy z nich średnią.

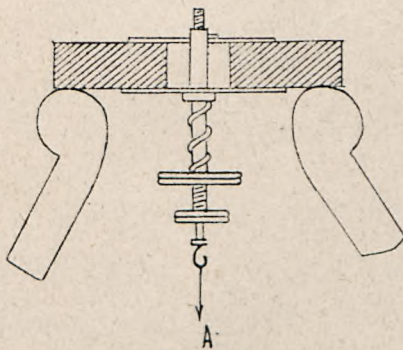
Do pomiaru kąta, należy przedewszystkiem ustawić przyrząd nad wierzchołkiem A (rys. 144). Najlepsze postępowanie jest na-

stępujące: Ustawiamy statyw (rys. 145) na oko nad wierzchołkiem, następnie na haczyku, zawieszamy pion A, krążek zaś statywu, przez odpowiednie zagłębienie nóg statywu, ustawiamy do poziomu zapomocą libeli stolikowej.

W krążku statywu jest otwór średnicy 8 cm, w którym umieszczona jest śrubka „z” zapomocą dwóch tarcz blaszanych r i k — śruba więc da się we wszystkich kierunkach, w granicach otworu przesuwać. Jeżeli więc pion nie zgadza się z punktem A, to śrubę można przesunąć wraz z pionem. Większe przesunięcia jak 4 cm — uskuteczniamy całym statywem. Gdy statyw jest już ustawiony, wówczas osadzamy przyrząd na krążku statywu, łączymy spodarkę ze statywem śrubką z i lekko przykręcamy mutrą „n”. W końcu ustawiamy przyrząd do poziomu, kontrolujemy położenie pionu, względnie cały przyrząd przesuwamy na krążku, aż pion stanie dokładnie nad wierzchołkiem a wtedy przykręcamy silnie mutrę „n” i przyrząd jest gotowy do pomiaru kąta.



Rys. 144.



Rys. 145.

Gdy przyrząd jest repetycyjny, to nastawiamy alhidadę na $0^{\circ} 0' 0''$ i siłnie łączymy ją z limbusem, zwalniając równocześnie sprzęg spodarki z limbusem. Teraz kierujemy lunetę na lewe ramię, do punktu C, sprzęgamy limbus ze spodarką, zaś nitkę pionową nastawiamy dokładnie na środek sygnału, zapomocą śruby do ruchu powolnego, obracając o mały kąt limbus po spodarce. Nastawiwszy oś celową dokładnie na lewe ramię kąta, zwalniamy alhidadę i obracamy ją po

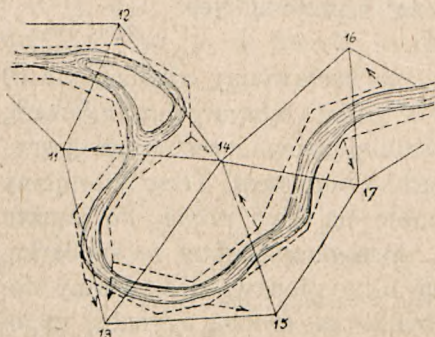
limbusie w kierunku ruchu wskazówek na zegarze ku prawemu ramieniu. Sprzęgamy teraz alhidadę z limbusem, a drobną poprawkę w dokładnem ustawieniu celowej, wykonamy śrubą do ruchu powolnego. Wreszcie odczytamy nonjusz I i II, notując odczyty w protokole. W zdjęciach tachymetrycznych odczytuje się tylko jeden nonjusz — jednak przy pomiarach kątów wieloboków, będących podstawą zdjęć tachymetrycznych, należy mierzyć kąt w dwu położeniach lunety odczytując dwa nonjusze w każdym położeniu.

Koło pionowe, umieszczone na poziomej osi obrotu lunety, ma nonjusz lub dwa nonjusze tak samo urządzone. Gdy luneta, raczej

oś libeli i oś celowa są poziome, zero na kole powinno zgadzać się z zerem nonjusza. W lewo od zera, idzie podział dodatni, t. j. kątów **ponad poziomem**, w prawo podział ujemny, t. j. kątów pod poziomem, nie zaś podział bieżący na stopnie, jak na limbusie.

ZDJĘCIA TACHYMETRYCZNE.

§ 9. Motoda ta, którąby po polsku można było nazwać sposobem szybkich pomiarów, usprawiedliwia rzeczywiście swoją nazwę. Używa się jej do zdjęć topograficznych, gdzie też, skutkiem szybkości jak i dokładności, oddaje ogromne usługi. Do tych zdjęć przygotować należy odpowiednią podstawę. Zatem, jeżeli rozchodzi się o zdjęcie pasa terenu wzdłuż trasy kolei czy kanału spławnego, to podstawą będzie wielobok idący w przybliżeniu w kierunku przyszłej trasy. Jeżeli rozchodzi się o zdjęcie rzeki celem opracowania planu regulacyjnego, to podstawą będzie zazwyczaj tryangulacja o bokach



Rys. 146.

trójkątów od 1'0 do 3 km i wieloboki między punktami tryangulacyjnymi, jak to zaznaczono na rys. 146. Podobnie zdejmuje się całe obszary, tworząc w pierw podstawę zdjęć.

W § 1. niniejszego rozdziału podaliśmy wzór 6.

$$E = c + kl \quad . \quad . \quad 6$$

gdzie $C = f + \delta$ zaś $k = \frac{f}{p}$

przyczem zwykle odstęp nitek

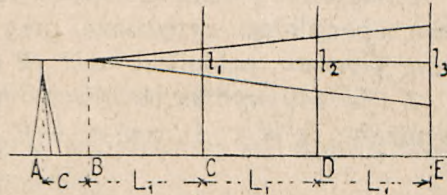
tak jest dobrany, że $k = 100$ — E jest odległością łaty od środka przyrządu, czyli od osi pionowej przyrządu.

Dla danej lunety stałą $C = f + \delta$ można łatwo wyznaczyć, zmierzwszy podziałką długość δ i odległość ogniskową f . Tę ostatnią zmierzmy, wykręciwszy obiektyw z lunety, zwracamy go ku słońcu, rzucając obraz słońca na papier. Obiektyw zbliżamy lub odsuwamy, aż obraz słońca będzie wyraźny i papier zacznie się tlić. Odległość f wówczas zmierzy się podziałką. Stała C wynosi zwykle około 0'5 m. Co do stałej k , to odpowiedni odstęp nitek urządzone być musi w fabryce. O tej stałej będziemy jeszcze w dalszym ciągu mówili, na razie przyjmujemy $k = 100$ i $C = 0'5$ m.

Nie znając lunety, trzeba zawsze sprawdzić stałą k , co wykonamy w następujący sposób, wyznaczywszy pierwej stałą C .

Ustawmy przyrząd w punkcie A (rys. 147) — odmierzymy długość $AB = C$; następnie od B począwszy, wyznaczmy punkty CDE w równych odległościach L_1 jeden od drugiego, zatem $BC = L_1$ — $BD = 2L_1 = L_2$ — $BE = 3L_1 = L_3$.

Ustawivszy po kolei łąkę na każdym punkcie, odczytamy l_1 l_2 i l_3 t. j. odcinki na łące między górną, a dolną nitką. Jeżeli h' jest odczytem górnej nitki, h'' zaś dolnej, to $l_1 = h' - h''$ i t. d. Mając C, l oraz L — ustawimy następujące równania:



Rys. 147.

$$L_1 + c = k_1 l_1 + C$$

czyli

$$k_1 = \frac{L_1}{l_1}$$

$$L_2 + c = k_2 l_2 + C$$

$$k_2 = \frac{L_2}{l_2}$$

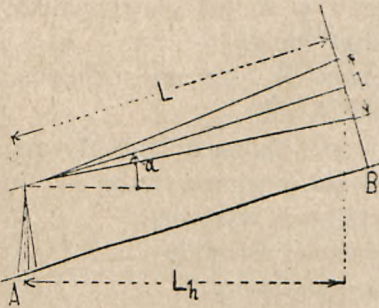
$$L_3 + c = k_3 l_3 + C$$

$$k_3 = \frac{L_3}{l_3}$$

z powyższych k_1 k_2 k_3 , które wogóle będą się między sobą nieco różniły z powodu błędów w odczytach, obliczymy średnią:

$$k = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_n}{n} \quad \dots \quad 18$$

wynik zaokrąglimy n. p., gdy wypadnie że $k = 99.8$, to przyjmiemy $k = 100$. Doświadczenie to wykonywa się przy głównej celowej poziomej. Celowe nazywamy: górną, średnią (główną) i dolną.



Rys. 148.

Jakąkolwiek odległość zmierzmy więc zapomocą tachymetru w ten sposób, że na jednym punkcie ustawimy przyrząd, w drugim zaś łąkę i przy głównej celowej poziomej, odczytamy na łące górną i dolną nitkę. Różnica odczytów = l — według zaś równ. 6.

odległość $E = C + k.l$ zwykle $E = 0.5 + 100.l$.

Częściej jednak przyjdzie nam zdejmować teren nie płaski, lecz połałdowany lub górzysty, a wówczas zdjęcia przy głównej celowej poziomej, byłyby już mniej szybkie i uciążliwe.

Przypuśćmy więc, że główna celowa, jest podczas odczytu łąty, nachylona do poziomu pod kątem α (rys. 148), tudzież że łąta ustawiona w punkcie B jest prostopadłą do głównej celowej. Mamy więc

zatem $s = I + \frac{1}{2} kl \sin 2\alpha + c \cdot \sin \alpha - l_s$ 24

Z uwagi, że c i $\sin \alpha$ są ilościami małymi i można je spuścić, otrzymamy prostszy wzór:

$s = I + \frac{1}{2} kl \sin 2\alpha - l_s$ 25

gdzie $\frac{1}{2} kl \sin 2\alpha = h$ zaś l_s jest odczytem średniej celowej.

Wzór 25 odnosi się do terenu wznoszącego się. Jeżeli teren spada, to według rys. 151 — otrzymamy:

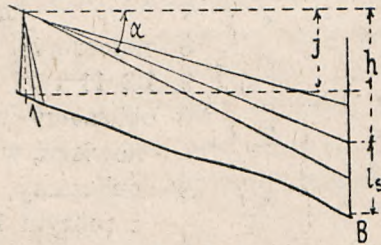
$s = - (h + l_s - I)$. 26

gdzie $h = \frac{1}{2} kl \sin 2\alpha$ jak poprzednio.

Wstawivszy wartość za h otrzymamy wzór:

$s = I - \left(\frac{1}{2} kl \sin 2\alpha + l_s \right)$ 27

Znając wysokość punktu A, dostaniemy wysokość punktu B, jeżeli do wysokości A dodamy wynik obliczenia równania 25 lub 27 zależnie od tego, czy teren się wznosi (+ α) czy opada (— α).



Rys. 151.

WZÓR PROTOKOŁU ZDJĘĆ TACHYMETRYCZNYCH.

K = 100 —00

Dnia

Stanowisko	Wysokość I	Cel do punkt.	Kąt poziomy	Odczyt górny średni dolny	Kąt pionowy		Odcinek I m	Lh = kl cos ² α m	h = 1/2 kl sin 2α m	+ —		Horyzont m	Cota m	UWA G A
					+	—				h — l _s m	h + l _s m			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
X.	1:45	40	1900 20'	3268 2250 1292	205'	—	1:976	197:20	7:17	4:89	—	205:00	209:89	orientacja X — XI 650 29'
XV.	1:45		1900 20'	3268 2280 1292		205'	1:976	197:20	7:17		9:45	205:00	195:55	

W powyższym przykładzie podano te same daty dla dwóch punktów, raz jednak dla terenu wznoszącego się, drugi raz dla spadającego.

W rubryce 1 zapisujemy punkt czyli stanowisko, na którym ustawiamy przyrząd. W planie sytuacyjnym, stanowisko to już jest

Z rów. 28 i 30 widać, że dla dokładności byłoby korzystniejsze, jeżeli k jest małe, czyli ϵ wielkie. Najczęściej używane $k = 100$ ($\epsilon = 0^{\circ} 34' 23''$) jest bardzo wygodne. Dla mniejszych jednak odległości wskazanem jest używać $k = 50$ ($\epsilon = 1^{\circ} 8' 45''$) co podwaja dokładność. Im mniejsze mamy k , tem dłuższej łąty musimy używać. N. p. dla $k = 100$ i $D = 300$ odcinek $l = 3.00$ m — natomiast dla $k = 50$ odcinek $l = 3.0$ m potrzebny jest już przy odległości 150 m, gdy znów dla $k = 200$, odcinek $l = 3.00$ m wystarczy dla 600 m. Ponieważ siatka w tachymetrze składa się z trzech nitek, więc stosować możemy zawsze albo samo k , n. p. $k = 100$ — gdy odczytujemy górną i dolną nitkę, lub też $k_1 = 2k$ n. p. $k_1 = 200$ gdy odczytujemy nitkę górną i średnią, lub średnią i dolną, opuszczając drugą skrajną. A że do obliczania wysokości potrzebna jest i średnia więc tę obliczymy z dwóch odczytów, jako ich średnią arytmetyczną.

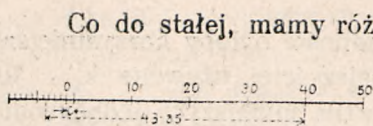
Wracając do równ. 30, możemy dokładność pomiarów określić, przyjmując n. p. $k = 100$ i $\delta = 1''$ t. j. $\delta = 1:206,265$ stąd otrzymamy

$$\frac{m(D)}{D} = \frac{100}{206,255} = 0.0005 \text{ czyli } 0.05\% 32$$

Jeżeli więc błąd odczytu δ uda się sprowadzić do granicy $1''$ — czyli jedną nitkę odczytywać z dokładnością $0.7''$, oraz gdy $k = 100$, to błąd pomiaru odległości możemy utrzymać w granicach 0.05% .

Taką dokładność można osiągnąć, jeżeli łątę trzyma się prostopadle do głównej celowej, oraz łąta zapomocą odpowiedniego podparcia jest w czasie odczytu rzeczywiście nieruchomą. Jest to, jak widzimy wielka dokładność, wynosząca na 100 m około 5—6 cm. Jest to rzeczywiście najwyższa osiągalna dokładność. Zachodzi jednak wątpliwość, czy w tachymetrycznych pomiarach potrzebna jest aż taka dokładność i czy opłaci się nakład czasu i pracy? Doświadczenia wykazały, że można przyjąć $\frac{m(D)}{D} = \pm 0.002$ czyli 0.2% co odpowiada błędowi odczytu odcinka l na łącie $\delta = 4''$ dla dwóch nitek czyli odczytów, zatem dla pojedynczego odczytu $\delta = 4 : \sqrt{2} = 2.8''$. Dla większych odległości, zwłaszcza dla większych kątów α , dokładność staje się mniejsza.

Ponieważ stała C wynosi zazwyczaj około 0.5 — najwyżej i to rzadko osiągać może wartości 1.0 m — przeto, bardzo często opuszcza się ją, a z reguły robimy to przy zdjęciach topograficznych w skali $1:25,000$ aż do $1:5,000$ — W większej skali mapach, wypada ją uwzględnić. W rysunku można bardzo łatwo uwzględnić stałą k przesuując odpowiednio zero podziałki, jak na rys. 152.



Rys. 152.

Co do stałej, mamy różne sposoby by wynosiła pewną okrągłą liczbę, n. p. 100, zależnie od konstrukcji lunety. Są to jednak rzadkie wypadki i daleko lepiej jest mieć stałą $k = 100$ lub 200 urządzoną już w fabryce przez odpowiedni odstęp nitek, najlepiej fotografowanych na szkłe i więcej tem zajmować się nie będziemy.

PORZĄDEK PRACY W POLU.

§ 11. Zdjęcia tachymetryczne stosuje się obecnie powszechnie. Każda inna metoda jest bez porównania droższą a większa dokładność nie przynosi istotnych korzyści w porównaniu do nakładu czasu i pracy. Opierają się one zawsze na sieci punktów, których położenie i wysokości zostały w inny sposób określone, n. p. zapomocą tryangulacji, wieloboków i t. p. W ten sposób poszczególne stanowiska tachymetryczne, z których zdejmować można krąg o promieniu do 500 m, a niekiedy i większy (stała k wówczas będzie większa n. p. 200) — zależnie od konfiguracji terenu, są od siebie zupełnie niezależne. Niedokładności na jednym stanowisku nie mają żadnego wpływu na błędy drugiego stanowiska. Stanowiska te jednak muszą być znane i określone.

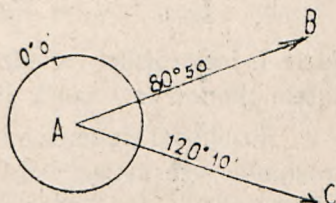
Samo odczytywanie łąt, których najczęściej używa się trzy równocześnie, oraz kątów poziomych i pionowych, nie stanowi istoty tych zdjęć. Równie ważnem jest wybór punktów, które należy zdjąć, ażeby oddać na planie wiernie charakter terenu, oraz szkice odręczne, które się równocześnie z wyborem punktów musi robić. To też do tej czynności przeznaczają się zawsze doświadczonego inżyniera, zostawiając odczytywanie jako pracę czysto mechaniczną, mniej doświadczonemu.

Podczas pracy polowej powinno się już mieć wzgląd na ułatwienie późniejszej pracy w biurze, zatem ile możności zdejmować punkty przy głównej osi celowej poziomej, skutkiem czego unika się mnożenia przez $\cos^2\alpha$ i $\sin 2\alpha$ — następnie, ile możności, przy tym samym kącie pionowym α — nie zaś tak, by każdy punkt miał inny kąt α .

Po ustawieniu przyrządu na danem stanowisku, należy się nawiązać do podstawowej sieci punktów. W tym celu kierujemy lunetę na sąsiednie stanowisko i odczytujemy kąt poziomy. Ponieważ podział limbusu jest zawsze w każdym przyrządzie urządzony tak samo, t. j. od zera w kierunku ruchu wskazówek na zegarze, więc odczytanie kąta wystarcza do nawiązania się do kierunku. Jeżeli

n. p. stoimy na stanowisku „A” (rys. 153) i zorjentujemy lunetę do stanowiska „B” przyczem odczytany kąt wynosi $80^{\circ} 50'$ — to na lewo od tegoż kierunku AB — mamy na limbusie $0^{\circ} 0' 0''$, w prawo zaś idzie dalszy podział. Gdy więc odczyt w kierunku jakiegokolwiek punktu, na którym ustawiono łątę, wynosi $120^{\circ} 10'$, to musi on znajdować się na prawo od kierunku AB — i innego położenia mieć nie może. Dwuznaczności tutaj niema i być nie może.

Na każdym stanowisku należy przede wszystkim, po ustawieniu przyrządu, zmierzyć wysokość tegoż, od wierzchu palika do środka lunety. Dodając tę wysokość I do wysokości stanowiska, otrzymamy horyzont H, co najlepiej obliczyć zaraz w polu, a czasu na to jest dosyć, bo i tak czeka się często na przeniesienie łąt.



Rys. 153.

Łątę powinno się trzymać podczas odczytu nie tylko pionowo, ale spokojnie — inaczej bowiem powstają błędy w odczytach, a że każdy cm na łącie pomnożony przez k (100) daje już wartość 1 m w długości, więc pod tym względem należy być ostrożnym. Następująca tabelka wskazuje błędy, jakie powoduje pochyłe trzymanie łąt

Pochylenie łąt	Kąt pionowy α					UWAGA
	0°	5°	10°	20°	30°	
1 : 100	$0^{\circ}/0$	$0.1^{\circ}/0$	$0.2^{\circ}/0$	$0.4^{\circ}/0$	$0.6^{\circ}/0$	w procentach odległości
1 : 50	$0^{\circ}/0$	0.2	0.4	0.7	1.2	
1 : 25	$0^{\circ}/0$	0.3	1.7	2.3	2.3	

Pochylenie 4 m dłuższej łąt o kąt 1 : 25 czyli o 16 cm w górnym jej końcu, jest bardzo możliwe, o ile nie zwraca się na to bacznej uwagi i łąta nie jest opatrzona pionem. W tym wypadku, gdy nadto oś celowa tworzy z poziomem kąt 20° , popełniamy błąd $1.5^{\circ}/0$ t. j. 4.5 m na odległości 300 m. Tem częstsze są mniejsze błędy.

odcinka AX odetniemy poszczególne $\operatorname{tg} \varphi$ — oznaczając je jednakże na rys. przez odpowiednie α . Rzędne odcinamy w skali, dla której długość $AX = 1$.

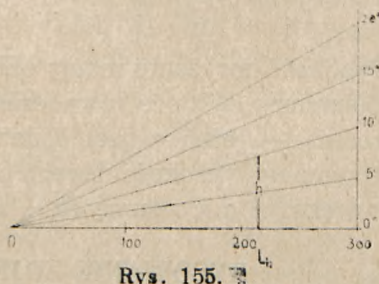
α	φ	$\operatorname{tg} \varphi$	α	φ	$\operatorname{tg} \varphi$	α	φ	$\operatorname{tg} \varphi$
0°	0'	0.0000	10°	14°06'	0.2513	20°	27°059'	0.5315
1°	1°25'	0.0247	11°	15°30'	0.2775	21°	29°021'	0.5625
2°	2°50'	0.0494	12°	16°55'	0.3040	22°	30°43'	0.5942
3°	4°14'	0.0742	13°	18°18'	0.3308	23°	32°05'	0.6267
4°	5°39'	0.0990	14°	19°42'	0.3581	24°	33°26'	0.6601
5°	7°04'	0.1240	15°	21°05'	0.3857	25°	34°47'	0.6944
6°	8°29'	0.1491	16°	22°29'	0.4138	26°	36°07'	0.7296
7°	9°53'	0.1743	17°	23°52'	0.4424	27°	37°27'	0.7659
8°	11°18'	0.1997	18°	25°15'	0.4715	28°	38°47'	0.8033
9°	12°42'	0.2254	19°	26°37'	0.5012	29°	40°06'	0.8420
10°	14°06'	0.2513	20°	27°59'	0.5315	30°	41°25'	0.8819

Na promieniu odpowiadających kątowi α — odcinamy $AB = k \cdot l$. Rzutując następnie punkt B na oś x — do B' otrzymamy żądany iloczyn $kl \cdot \cos^2 \alpha$, który przenosimy cyrklem wprost na rysunek. Powyżej podaliśmy tabelę i rysunek dla całych stopni α . Dla kątów pośrednich, wystarczy prosta interpolacja. Przy tej sposobności możemy też uwzględnić i stałą e oraz $C \cdot \cos \alpha$, przesuwając początek podziałki do A' o wartość $C \cdot \cos \alpha$, co uskuteczniło na rys. 154.

Podobnie możemy graficznie obliczać iloczyn $h = L_h \cdot \operatorname{tg} \alpha \dots L_h$ dane już jest z poprzedniego obliczenia, z uwzględnieniem stałej C .

Przykład urządzenia grafikonu, podany jest na rys. 155.

Odetniemy na osi OX w skali 1:1000 lub 1:500, odległości od 0.0 m do 300.00 m na rzędnej zaś w punkcie 300.00 m wartość $300 \cdot \operatorname{tg} \alpha$ — dla α od 8°0'0" do 20°0'0".



Rys. 155.

Z rysunku widać, że gdy od punktu 0 — odetniemy długość L_h do punktu A, oraz gdy $\alpha = 10^0$ — to rzędna $AB = L_h \cdot \operatorname{tg} 10^0$.

Grafikon ten urządzimy w ten sposób, że rzędne wykreślimy w większej skali niż odległości na osi ox . N. p. dla kątów α od 0^0 do 10^0 w skali 1:200 — dla większych w skali 1:500. Dokładność, z jaką na tym grafikonie potrafimy odczytać h , będzie dla mniejszych kątów ± 5 cm dla większych ± 10 cm — zależnie od skali. Im mniejsza skala, tem mniejsza będzie dokładność. Najdokładniejsze będą więc obliczenia zapomocą tablic podających $\sin 2\alpha$ oraz maszyny do rachowania, lecz zabierają znacznie więcej czasu niż graficzne. W następującej tabeli podajemy wartość dla $\operatorname{tg} \alpha$ i $300 \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Grafikon taki można sporządzić w różnych skalach i wielkości, zależnie od potrzeby.

α	$\operatorname{tg} \alpha$	$300 \cdot \operatorname{tg} \alpha$	α	$\operatorname{tg} \alpha$	$300 \cdot \operatorname{tg} \alpha$
$0^0 0'$	0·00000	0·00000	$10^0 0'$	0·17633	52·890
$0' 20'$	0·00582	1·746	$12^0 0'$	0·21256	63·750
$0' 40'$	0·01164	3·492	$14^0 0'$	0·24933	74·790
$1^0 0'$	0·01746	5·235	$16^0 0'$	0·28674	86·010
$1^0 30'$	0·02619	7·857	$18^0 0'$	0·32492	97·470
$2^0 0'$	0·03492	10·476	$20^0 0'$	0·36397	109·200
$2^0 30'$	0·04366	13·098			
$3^0 0'$	0·05241	15·723			
$4^0 0'$	0·06993	20·979			
$5^0 0'$	0·08749	26·247			
$6^0 0'$	0·10510	31·530			
$8^0 0'$	0·14054	42·150			
$10^0 0'$	0·17633	52·890			

Wysokość horyzontu mamy obliczoną w protokole zdjęć. Z grafikonu dostaniemy h , które równocześnie można zmniejszyć o l_s (t. j. odczyt średni) — jeżeli α jest dodatnie, a dodając ($h - l_s$) do horyzontu, otrzymamy wysokość danego punktu. Jeżeli teren spada, to h należy powiększyć o l_s i sumę ($h + l_s$) odjąć od wysokości horyzontu.

RYSOWANIE ZDJĘĆ TACHYMETRYCZNYCH.

§ 13. Podstawą sporządzenia planu sytuacyjnego, lub karty topograficznej jest wyrysowanie sieci punktów tak, jak ją zdjęto w polu.

O nawiązywaniu się do podstawy zdjęć, mówiliśmy poprzednio. W ten sam sposób postępować będziemy i przy rysowaniu, które ogranicza się do wyznaczania na papierze kierunków i odległości. Do tego celu służy kątomierz, czyli t. zw. transporter. Jest to pierścień z grubego papieru (rys. 156) lub cienkiej blachy mosiężnej, mający na wewnętrznym obwodzie podział na stopnie.

Przypuścimy, że podstawa zdjęć, t. j. tryangulacja, względnie wieloboki są już wyrysowane i przystępujemy do szczegółów. Niech będzie dany kierunek A—B, do którego nawiązując się, odczytaliśmy w polu kąt poziomy, $126^{\circ}20'$. Kątomierz musimy więc na rysunku ustawić tak samo jak ustawionym był limbus, zatem kierunek A B — przechodzić powinien przez środek pierścienia i kreskę wskazującą kąt $126^{\circ}20'$. Skoro kątomierz ustawimy, to już wyznaczenie wszelkich kierunków podanych w protokole zdjęć, nie przedstawia najmniejszej trudności, ani też nie może być żadnej



Rys. 156.

dwuznaczności dlatego właśnie, że podział łuku na kąty, idzie zawsze od lewej do prawej, czyli w kierunku ruchu wskazówek na zegarze. Ażeby kątomierz, t. j. pierścień nie mający zatem oznaczonego niczem środka, ustawić na kierunku A B, tak, by środek jego padł na punkt A, przedłużmy na rysunku kierunek A B w obie strony i wykreślmy doń w punkcie A, prostopadłą C D. Jeżeli w kierunku od A do B — mamy kąt $126^{\circ}20'$ — to kierunek przeciwny (B A) wynosi $126^{\circ}20' - 180^{\circ} \pm 360^{\circ} = 306^{\circ}20'$. Kierunek zaś prostopadły do A B, mianowicie (A C) = $126^{\circ}20' - 90^{\circ} = 36^{\circ}20'$ oraz (A D) = $126^{\circ}20' + 90^{\circ} = 216^{\circ}20'$. Połóżmy teraz kątomierz na kierunku A B tak, by linja D B przechodziła przez $306^{\circ}20'$ i $126^{\circ}20'$ i przesuвайmy go wzdłuż tej linii, aż prostopadła C D — wskaże $36^{\circ}20'$ i $216^{\circ}20'$. Wówczas bezwątpienia środek pierścienia znajduje się na wierzchołku A. Całe wnętrze pierścienia o promieniu 300 do 600 m w odpowiedniej skali, mamy teraz wolne. Pierścień utwierdza się cienkimi gwoździkami na papierze.

Przypuścimy, że wypada oznaczyć na rysunku takie punkty:

- | | | | | |
|-----------|------------------|----------|----------|------------------|
| (a) . . . | $130^{\circ}40'$ | wysokość | 320·56 m | $L_h = 205·60$ m |
| (b) . . . | $200^{\circ}00'$ | „ | 305·40 m | „ = 120·35 m |
| (c) . . . | $215^{\circ}20'$ | „ | 302·65 m | „ = 180·48 m |

Przykładamy podziałkę w kierunku A — $130^{\circ}40'$ — i według niej w odpowiedniej skali odcinamy 205·60 m zaznaczając kółeczkiem ten punkt, oraz wypisujemy przy nim wysokość 320·56 m i numer punktu

ołówkiem. Następnie w ten sam sposób wyznaczymy punkt (b), (c) i t. d. W ten sposób otrzymamy na rysunku sieć punktów, bądź to charakteryzujących teren, bądź to ograniczających drogi, potoki, rzeki, budynki i t. p. na terenie. Jak te punkty mamy ze sobą łączyć, ażeby wykreślić kształty różnych przedmiotów, to wskazuje szkic odrębny sporządzony na miejscu przez inżyniera, który dyrygował w polu ustawianiem łąt. Teraz łatwo zrozumieć, jak ważne zadanie miał ten inżynier i że pracę tę powierzać się powinno człowiekowi doświadczonemu i mającemu praktykę w zdjęciach tachymetrycznych.

Zapomocą wyżej opisanego kątomierza, osiągniemy na rysunku wystarczającą dokładność — średnica jego powinna być jednak odpowiednio duża, by wewnątrz pierścienia zmieściły się wszystkie mierzone długości, zatem zależnie od skali, mianowicie: dla 1:1000, średnica do 80 cm — 1:5000, średn. 24 cm. Jeżeli kątomierz ma średnice 343·94 mm, to na każdy stopień wypada 3 mm łuku — zatem na oko, bez nonjusza możemy wyznaczać kąty z dokładnością 5' bardzo łatwo. Dokładności większej nie potrzeba, tembardziej, że dla mniejszych odległości niż promień kątomierza, błędy się zmniejszają. Jeżeli n. p. na obwodzie kątomierza możemy wyznaczyć promienie z błędem $\pm 0\cdot1$ mm — to w połowie promienia, błąd ten zmniejszy się do $\pm 0\cdot05$ mm, a już sama grubość kreski nie pozwala na większą dokładność.

PLANY WARSTWICOWE.

§ 14. Przypuśćmy, że zadaniem naszym jest zdjęcie pasa terenu względnie większego obszaru celem wystudjowania, czy to trasy kolei, czy też planu regulacji rzeki i t. p. Będzie to pas od jednego, do paru km. szer., natomiast znacznej długości — następnie sporządzenie planu sytuacyjnego w skali 1:5000 — (lub innej). W instrukcjach, jakie każde państwo ustanawia, określona jest dokładność czyli błędy dozwolone, których przekraczać nie wolno. W celach wojskowych potrzebne są tego rodzaju zdjęcia n. p. do wypracowania projektu fortyfikacji jakiejś miejscowości, przyczem rozchodzi się nie tylko o linje i objekty fortyfikacyjne, ale nadto o projekty dróg i kolejek dojazdowych, o obmyślenie dalsze zakrytych podziemnych magazynów amunicji, stanowisk baterji, a wkońcu o zdjęcie nietylko bliższego przedpola, ale i dalszego obszaru dla potrzeb artylerji.

Dany obszar obejmujemy siecią tryangulacyjną, nawiązaną do punktów tryangulacyjnych II-go rzędu. Po wyrównaniu pomiarów i przekonaniu się, że pozostaliśmy w dozwolonych granicach błędów, będziemy pewni, że na przestrzeni objętej tryangulacją, można na

planie wykonywać wszelkie pomiary długości wzgl. powierzchni, we wszystkich kierunkach, z wystarczającą dokładnością.

Zniwelujemy wszystkie wierzchołki trójkątów, utrwalone w polu odpowiednimi blokami kamiennymi, to utworzymy sieć stałych punktów niwelacyjnych w niewielkich odległościach, do których możemy się teraz nawiązywać tak pod względem kierunków, jak wysokości. W powyższy sposób będzie utworzona podstawa do zdjęć szczegółowych.

Po stworzeniu podstawy, podzielimy dany obszar na odcinki, kilka lub kilkadziesiąt, zależnie od obszaru i czasu jaki mamy do dyspozycji i na każdym odcinku, równocześnie rozpoczną się zdjęcia szczegółowe. Pomiary tryangulacyjne wykonamy również odcinkami równocześnie, obrawszy poprzednio punkty wierzchołkowe.

Jeżeli rozchodzi się o oszczędność czasu, to po obraniu i utrwaleniu punktów tryangulacyjnych, można pomiary tryangulacyjne i szczegółowe rozpocząć równocześnie, co jednak wymaga większego personelu. Na wszystkie te prace pomiarowe, prócz obioru i utrwalenia punktów tryangulacyjnych, co zabiera więcej czasu, liczyć trzeba na 1 km² 6 dni w polu. Ażeby więc zdjąć obszar o średnicy 60 km czyli około 2700 km² powierzchni, w ciągu czterech miesięcy letnich, czyli potrącając odpoczynki i dni słotne, w ciągu okrągłych 80 dni, trzeba by podzielić ten obszar na x odcinków, mianowicie:

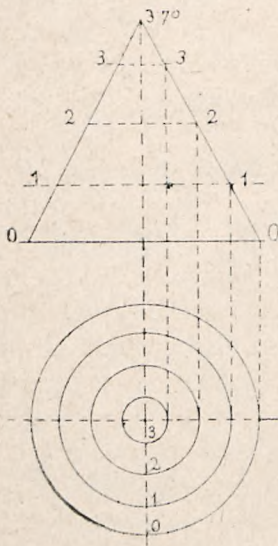
$$x \text{ odcinków przez } 80 \text{ dni} = 2700 \text{ km}^2 \text{ po } 6 \text{ dni.}$$

$$80 \cdot x = 2700 \cdot 6 \quad \text{stad } x = 202,5 \quad \text{czyli } 203 \text{ --}$$

czyli na każdy odcinek wypada 13,3 km², a wkońcu, licząc 6 dni na 1 km² — ukończymy pracę w ciągu 13,3 · 6 = 79,8 dni roboczych zgodnie z założeniem. Na prace biurowe liczyć trzeba 50% tego czasu, lecz odpadają tu dni słotne. Z tego przykładu już widać, jaki potrzebny jest personal dla 203 odcinków i jaki jest nakład pracy dla niezbyt zresztą wielkiego obszaru, obejmującego obóz warowny, jakkolwiek wykorzystane tutaj będą najnowsze przyrządy ułatwiające pracę i przyspieszające ją, t. j. tak tryangulację, jak zdjęcia tachymetryczne. Zato znów mieć będziemy plany sytuacyjne precyzyjnie wykonane, jakoteż zdjęcia mogą być wykorzystane dla kart topograficznych.

Po wrysowaniu zdjęć szczegółowych, mieć będziemy na planie wielką ilość punktów z wypisanymi obok wysokościami. Pomimo wrysowania, na podstawie szkiców, dróg, potoków i wogóle wszelkich szczegółów, nie będzie można orjentować się w wysokościach, bo cała karta pokrytą będzie liczbami, trudnymi nawet do chwilowego zapamiętania, zwłaszcza, że równocześnie trzeba by ich wiele i na znacznej

przestrzeni porównywać, w wyobraźni zaś kształtować według nich teren. Połączmy jednak punkty o równej wysokości krzywami ciągłymi i usuńmy liczby. Otrzymamy wówczas rysunek bardzo przejrzysty, zaś kształt krzywych i odstępy ich



Rys. 157.

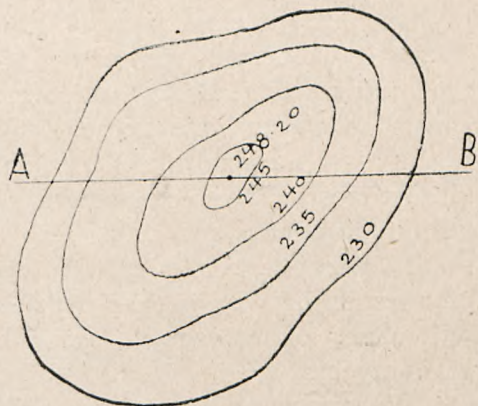
uwytatniają wyraźnie konfigurację terenu. Krzywe te, łączące punkty o równych wysokościach, nazywamy warstwicami. Zależnie od skali rysunku, kreślimy warstwice o 1, 5, 10 i 20 m, oznaczając je odpowiednimi liczbami, co pewien odstęp celem orientacji w wysokościach.

Konstrukcję warstwice można przejrzycie przedstawić zapomocą przekrojów stożka, płaszczyznami równoległymi do podstawy.

Na rys. 157 widzimy stożek w rzucie pionowym i poziomym, czyli w planie. Oś stożka jest pionową, płaszczyzna podstawy pozioma. Przyjmijmy wysokość podstawy jako zerową i przetnijmy stożek płaszczyznami poziomymi, w odstępach co 1 m.

W szczycie pionowym ślady tych płaszczyzn będą liniami 1—1, 2—2, 3—3 wierzchołek ma wysokość 3·70. W planie, linie przekrojów są kołami 1, 2, 3 — rzut wierzchołka jest punktem. Te właśnie rzuty linii przekrojów, nazywamy warstwicami, zaś liczby 1, 2, 3, oznaczają ich wysokości nad przyjętym zerem.

Podobnie rys. 158 przedstawia w planie pagórek. Poznajemy to z warstwice zamkniętych. Rys. 159 przedstawia przekrój tegoż pagórka płaszczyzną pionową w kierunku A B.



Rys. 158.

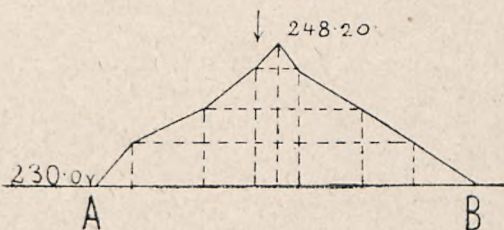
Na rys. 160 znowu, widzimy zapomocą warstwice przedstawiony wąwóz z płynącym na dnie potokiem. Obok narysowano dwa poprzeczne przekroje II i III.

Na rys. 161 przedstawiono plan warstwowy z krzywami co 5 m, Co 25 m warstwica jest oznaczona grubszą linią. Między warstwicami.

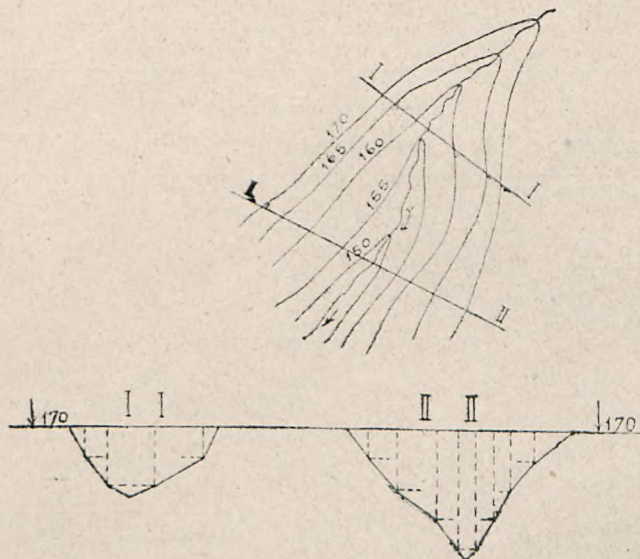
tam, gdzie pochyłość terenu się zmienia, na grzbietach, siodłach, kotłach i t. p. uwidoczniło odnośne wysokości punktów. W takich miejscach posługujemy się także szkicem odręcznym polowym, który niejednokrotnie okaże się potrzebnym do konstrukcji warstwic w trudnych miejscach.

Warstwice wykreślamy zawsze w odstępach całych metrów, jak już mówiliśmy, co 1, 5, 10 i t. p. m, nigdy zaś w odstępach niejednostajnych lub ułamkach metrów.

Jedynie tylko w terenie płaskim, gdzie odstępy warstwic wypadają duże, wykreślać je możemy, w razie



Rys. 159.



Rys. 160.

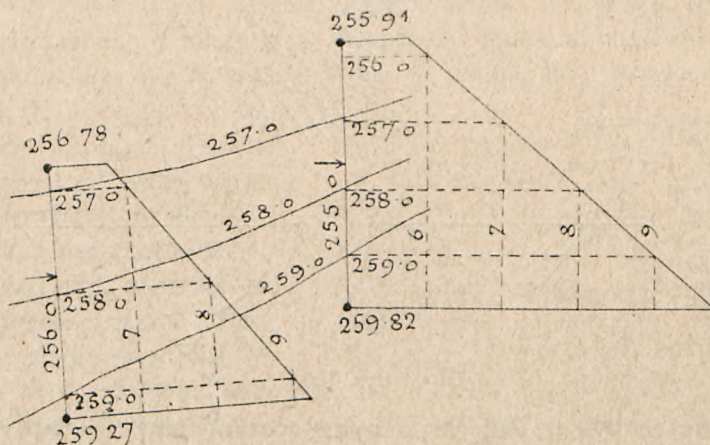
potrzeby co 0.5 m. Zdjęcie tachymetryczne jednak podaje sieć punktów o różnych wysokościach, n. p. 256.78 m, 259.57 m i t. p. nie zaś w całych metrach; 256.00, 259.00. W terenie zdejmujemy punkty charakterystyczne, na wszystkich załamaniach — między tymi punktami uważamy teren za jednostajnie pochyły i tak też jest w rzeczywistości. Na tej metodzie opieramy sposób wykreślenia warstwic o wysokościach w całych metrach. Na rys. 162 — wykreślono cztery punkty podając ich wysokości. Weźmy dwa punkty 256.78 i 259.27. Przyjmijmy, że linja łącząca te punkty wznosi się jednostajnie od

niższego do wyższego punktu. Przyjmijmy, w płaszczyźnie pionowej przez te punkty przechodzącej, poziom 256·00 m, to nad tym poziomem, na linii pionowej, jeden punkt leży 78 cm wyżej, drugi znów



Rys. 161.

o 3·27 m wyżej. Obróćmy całą tę figurę na poziom 256·00 m — to w planie otrzymamy trapez. Wykreślmy co 1 m w przyjętej skali



Rys. 162.

wysokości, (którą obieramy zawsze 10 razy większą od skali rysunku) — równoległe do AB, to przetną się one z linią terenu w punktach 7, 8 i 9, leżących na wysokościach 257·0, 258·0, 259·0. Wróćmy następnie z kładu na poziom, czyli odrzucmy te punkty na linię terenu AB — to punkty 7', 8', i 9' są punktami na terenie, o wysokościach 257·0, 258·0, 259·0 — leżącymi między 256·78 i 259·27.

Tak samo wyznaczmy punkty 256, 257, 258 i 259 (między drugimi dwoma punktami terenu E i E. Łącząc punkty o równych wysokościach linjami ciągłymi, otrzymamy warstwicę. Jest to najprostszy i najczęściej używany sposób, pomimo, że istnieją nawet różne przyrządy do interpolacji i wykreślenia warstwicy. Naturalnie, że wobec wielkiej ilości punktów, bo n. p. przeciętnie na 1 km² — zdejmuje się do 700 punktów, jest to robota dość żmudna, ale przy wprawie postępuje bardzo szybko.

W kartach topograficznych wykreśla się również warstwicę, lecz w znacznych odstępach, konfigurację terenu natomiast uwydatnia się zapomocą kreskowania, o czem mówić będziemy później.

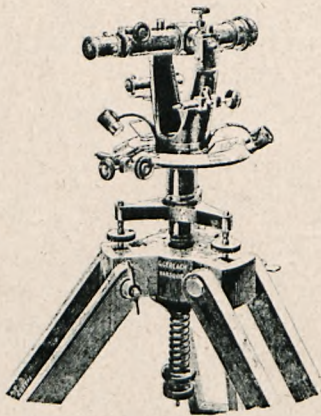
Na tem kończymy rozdział o tachymetrii, nie przytaczając opisów różnych innych przyrządów, mających na celu uproszczenie względnie przyspieszenie pracy. Są to przyrządy bardzo drogie i stosunkowo rzadko używane. Nadmienić jednak wypada, że dla większych stałych k t. j. 200, 250 do 500 — używa się specjalnych łań, podzielonych na metry i decymetry — cm można wówczas szacować. Używa się ich przy tachymetrowaniu na większe odległości, nawet do 1000 m jeżeli nie rozchodzi się o dokładność w tych granicach, jaką możemy osiągnąć dla $k = 100$ i L do 300 lub 400 m.

ROZDZIAŁ X.

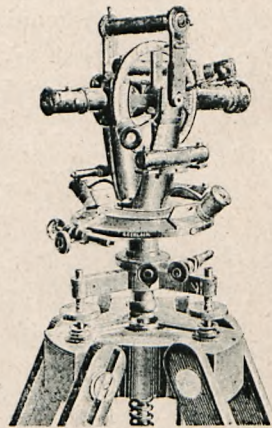
TEODOLIT.

§ 1. Teodolit, jest to przyrząd, przeznaczony do pomiarów kierunków, zatem kątów poziomych w pracach geodezyjnych, wymagających największej dokładności. Teodolity bywają też urządzone i do pomiarów kątów pionowych, n. p. celem trygonometrycznego pomiaru wysokości.

Teodolit, którego typy używane do 3-cio i 4-to rzędnej tryangulacji i zdjęć wielobokowych, widzimy na rys. 163 i 164 — z tą



Rys. 163.



Rys. 164.

jednak uwaga, że zamiast zwykłych nonjuszów, jak na rysunkach, dodaje się nonjusz mikroskopowe, zasadniczo, prawie że nie różni się od przyrządu uniwersalnego, jaki poznaliśmy w poprzednim rozdziale. Ponieważ teodolitu używa się do najważniejszych robót geodezyjnych, wymagających wielkiej dokładności, przeto i budowa jego musi być do tego zastosowaną.

Statyw używany do teodolitu, jest taki sam jak do przyrządu uniwersalnego. Limbus zawsze jest ruchomy i da się obracać na spód, czyli teodolit jest przyrządem repetycyjnym. Alhidada powinna być zawsze zaopatrzona w czułą libelę, do poziomego ustawienia

przyrządu, oraz co najmniej w dwa nonjusze i to bardzo często mikroskopowe.

Pozioma oś obrotu lunety, powinna dawać się rektyfikować, jak to zresztą poznaliśmy już poprzednio, a do poziomego jej ustawienia używa się t. zw. poprzecznej libeli nasadkowej, uwidocznionej na rys. 163. Koło pionowe ma zawsze dwa nonjusze. Luneta opatrzona jest, nie zawsze, lecz przeważnie, libelą, stale utwierdzoną, lub nasadkową, potrzebną przy pomiarze kątów pionowych.

Większe teodolity posiadają cztery nonjusze mikroskopowe. Do poziomego ustawienia przyrządu, wystarcza wprawdzie jedna libela, lecz najczęściej alhidada zaopatrzona jest w dwie libele, a często dodawana jest i trzecia, pudełkowa służąca do przybliżonego ustawienia przyrządu.

Siatka w lunecie musi być tak urządzoną, ażeby dawała się wraz z pierścieniem ją utrzymującym, przesuwać w kierunku pionowym i poziomym. Urządzenie takie poznaliśmy również w poprzednim rozdziale. Jest to konieczny warunek, celem nastawienia osi celowej prostopadle do poziomej osi obrotu.

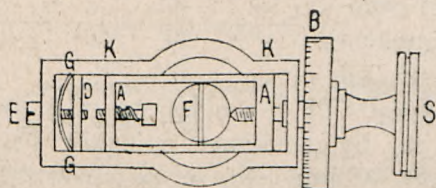
Luneta powinna dać się obracać w płaszczyźnie pionowej o 180°, zatem oba ramiona na których wspiera się pozioma oś obrotu, powinny być odpowiednio wysokie.

Zwykle nonjusze pozwalają na 10 sekundowe odczyty kątów na kole poziomem, na 20 sekundowe na pionowym. Cztery nonjusze dają odczyty 2 do 4 sekundowe. Zapomocą nonjuszów mikroskopowych, da się mierzyć kąty na 1", a więc dwa takie nonjusze i metoda serjami lub repetycyjna, pozwalają na bardzo dokładny pomiar kątów.

Zasady nonjusza poznaliśmy również w poprzednim rozdziale tutaj dodamy tylko, że do pomiarów tryangulacyjnych używa się nonjuszów mikroskopowych. Pobobnie do zdjęć wielobokowych w miastach. Do innych pomiarów wystarczą najzupełniej zwykłe nonjusze.

NONJUSZ MIKROSKOPOWY.

§ 2. W rozdziale VII § 7 opisaliśmy mikroskop. W ostatnich



Rys. 165.

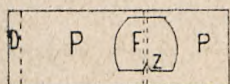
czasach zastosowano ten przyrząd do nonjuszów, celem jak najdokładniejszego odczytywania kąta.

Rys. 165 przedstawia urządzenie takiego mikroskopu po odjęciu pokrywy jego obudowy

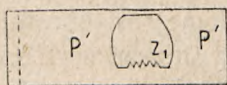
i okularu. W pudełku k zawierającym całe urządzenie mikroskopowe,

porusza się, przesuując się na lewo lub prawo, ramka A w której umocowane są dwie nitki F. Ramkę tę przesuwa śrubka S. Można zatem obie nitki wraz z ramką tak przesunąć, że kreska limbusu znajdzie się pomiędzy obu nitkami w polu widzenia. Długość przesunięcia nitek, jest proporcjonalna do ilości obrotów śruby S, którą można tak skonstruować, że jeden obrót śruby, a zarazem i bębena B, z podziałką na obwodzie, odpowiada przesunięciu nitek o jedną przedziałkę limbusu. Jeżeli obwód bębena B — podzielony jest na n części, to zmierzyć możemy $\frac{1}{n}$ tą część przedziałki limbusu obróciwszy śrubę o jedną tylko kreskę. Ażeby w polu widzenia zaznaczyć jakiś stały znak, jako normalne położenie nitek, dodana jest cieniutka blaszka P P (rys. 166) względnie P' P' (rys. 168), przymocowana do skrzynki K — na rys. 165 nie widać tej płytki.

Płytką tą ma w otworze, w polu widzenia ząbek Z (rys. 166) lub kilka ząbków Z_1 (rys. 167). Jeden taki wskaźnik Z potrzebny jest



Rys. 166.

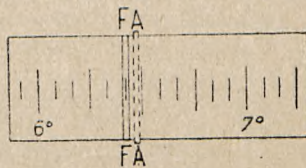


Rys. 167.

wtedy, gdy całemu obrotowi śruby S odpowiada przesunięcie nitek o jedną kreskę — jeżeli jednak do przesunięcia nitek potrzeba „r“ obrotów śruby, to musi być i „r“ wskaźników, ażeby poszczególne obroty śruby, można było policzyć. Środkowy wskaźnik jest zaznaczony jako główny.

Położenie płytki P względnie P', można regulować zapomocą śruby E tak, by normalnemu położeniu nitek, odpowiadał odczyt „0“ na bębenu B.

Przyjmijmy, że limbus teodolitu ma podział na $5'$ t.j. $\frac{1}{12}$ stopnia, oraz że jednemu obrotowi śruby S w mikroskopie, odpowiada przesunięcie nitek o jedną kreskę na limbusie. Następnie, że normalne położenie nitek znalazło się pomiędzy dwoma kreskami limbusu, w miejscu A A (rys. 168) przy czym bębenek wskazuje na zero w punkcie A — (rys. 169). Najbliższa kreska od lewej nitki wskazuje (na limbusie) kąt $6^{\circ}25'$ — najbliższa od prawej, kąt $6^{\circ}30'$. Rozchodzi się więc o to, by pomierzyć odległość środka odstępu obu nitek, od lewej kreski. W tym celu, zapomocą śruby S, przesuniemy ramkę A wraz z nitkami, z położenia A A, w położenie F F w ten sposób, że kreska limbusu, oznaczająca $6^{\circ}25'$ znajdzie się



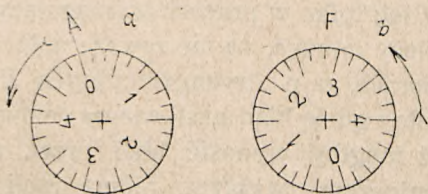
Rys. 168.

między obu nitkami w środku nich. Jak oznaczono znowu na rys. 169 b, obrócić śrubę S i bębenek B, podzielony na 30 części, t. j. na 5' każda zaś minuta na 6 części, po 10" o łuk odpowiadający 2' 27" i tyleż wynosi odstęp środka siatki AA od lewej kreski limbusu. Dodajmy do 6° 25' odczytane 2' 27" — to otrzymamy kąt na limbusie 6° 27' 27". Gdybyśmy w ten sam sposób zmierzili odstęp od prawej kreski limbusu, t. j. od 6° 30', to odczyt na bębenu B, należałoby odjąć od 6° 30'. Ponieważ bębenek B na stosunkowo duże

odstępy podziałki, więc $\frac{1}{10}$ część

odstępu, można bez trudu szacować.

Gdyby do tego samego podziału limbusu na 5' odstępu kresek, zastosowany był mikroskop, którego śrubą S trzeba by 5 razy obrócić, ażeby środek siatki przeszedł



Rys. 169.

jeden odstęp podziałki limbusu, to jednemu obrotowi, odpowiadałaby jedna minuta. Wskaźnik musiałby się składać z pięciu ząbków. Przesunęliśmy więc w powyższym przykładzie siatkę o 2 ząbki, czyli 2' poczem na bębenu odczytalibyśmy sekundy. Jeżeli bębenek podzielony by był na 60 części, to możnaby z łatwością odczytać nawet 0.2".

Odczyt na limbusie powinno się dokonywać dwa razy: raz pomierzyć odstęp od lewej kreski, drugi raz od prawej i z obu pomiarów, obliczyć średnią. Wówczas usuwa się błąd, jaki powstaje często w mikroskopie, wskutek niezupełnej zgodności podziału limbusu z obrotami śruby S.

W pomiarach kątów tryangulacji II i III rzędu, wystarcza odczytanie kąta przez przesuwanie siatki na lewą, a potem na prawą kreskę limbusu i obliczenie średniej. Natomiast w pomiarach I rzędu uwzględnić trzeba błąd niezgodności podziału limbusu z obrotem śruby S dokładnie, w następujący sposób:

Przypuśćmy, że podział limbusu ma wartość 5' — natomiast jeden obrót bębna B — daje nie $5 \cdot 60 = 300''$ lecz $300'' + \delta$ zatem

$$1 \text{ przedziałka bębna} = \left(1 - \frac{\delta}{t}\right)''$$

Przesuwając siatkę na lewą i prawą kreskę, otrzymamy odczyty l i p — natenczas

$$\text{poprawiony odczyt lewy ma wynosić} = l \left(1 - \frac{\delta}{t}\right) = l - \frac{l \delta}{t}$$

$$\text{popr. odczyt prawy ma wynosić} = t - (t - p) \left(1 - \frac{\delta}{t}\right) = p + \frac{t - p}{t} \cdot \delta$$

stąd średnia arytmetyczna $\frac{l+p}{2} + \left(\frac{t}{2} - \frac{l+p}{2} \right) \frac{\delta}{t}$ czyli $a + \Delta$

Do średniej arytm. „a“ obu odczytów dodać należy poprawkę

$$\Delta = \left(\frac{t}{2} - a \right) \frac{\delta}{t}$$

do obliczenia poprawek trzeba sporządzić tabelę.

Nonjuszki mikroskopowe dają większą dokładność niż zwykłe, lecz odczytywanie ich i rektyfikacja, zabiera więcej czasu. Używa się też ich tylko w pracach wymagających wielkiej dokładności, przyczem należy zważyć, że nie zawsze opłaca się stosować mikroskopy. W pomiarach n. p. tryangulacyjnych IV rzędu, gdzie długości boków są małe i gdzie błąd nastawienia celowej na środek sygnału jest większy, niż mógłby wynosić błąd przez mniej dokładne pomierzenie kąta nonjuszem zwykłym, niema racji stosować mikroskopów. Podobnie w pomiarach wieloboków w polu.

§ 3. Wszystkie uwagi odnoszące się do wzajemnego stosunku osi, przytoczone w poprzednim rozdziale w opisie przyrządu uniwersalnego, stosują się do teodolitu. Również rektyfikacja teodolitu jest takąż sama. Wpływ ekscentryczności lunety, powodującej błędy w pomiarze kątów, eliminuje się przez pomiar kąta w dwóch położeniach lunety, podobnie i wpływ ekscentryczności alhidady, przez odczyt dwóch nonjuszów. Wpływ błędów w podziale limbusu, redukuje się zapomocą odpowiedniej metody pomiarów, t. j. repetycyjnej lub serjami, o czem również już mówiliśmy.

Bardzo ważnem przy pomiarze kątów, jest centryczne ustawienie teodolitu, t. j. takie, by oś pionowa przechodziła przez wierzchołek kąta. Używany w tym celu pion na cienkim sznurku wystarcza, o ile powietrze jest spokojne. Podczas wiatru jednak, pion się waha i trudno jest ustawić teodolit centrycznie, względnie ustawienie to nie jest pewne. Dlatego obmyślono osobne przyrządy optyczne, które ustawia się na statywie, zapomocą śrub wstawowych do poziomu, a potem centruje się zapomocą małej lunetki w kierunku pionowym. Po ustawieniu podstawy na statywie, zdejmuje się z niej przyrząd, ustawia się teodolit, który tem samem będzie już scentrowany. Przyrządów tych specjalnie nie opisujemy, gdyż łatwe są do poznania i zastosowania, a wszystkie katalogi przyrządów geodezyjnych zawierają je.

Jeszcze ważniejszym jest dobre ustawienie sygnałów i dobre nastawienie na nie celowych, przy pomiarze kątów. Sygnał powinien być jak najdokładniej pionowo nad wierzchołkiem, względnie w kierunku ramienia kąta ustawiony, nie powinien być za cienki tak, by

go nitka pionowa zupełnie zakrywała, lub zbyt gruby. W obu tych wypadkach nastawienie celowej jest niepewne. Natomiast gdy grubość sygnału jest tak dobrana, że po obu stronach nitki widzimy wąskie paski, to już nie jest trudnem takie nastawienie celowej, że szerokość tych pasków jest jednakowa, lub też popełniony błąd będzie bardzo mały. Jeżeli odległości są duże n. p. przy tryangulacji, to stosuje się sygnały świetlne.

TRYGONOMETRYCZNY POMIAR WYSOKOŚCI

ROZDZIAŁ XI.

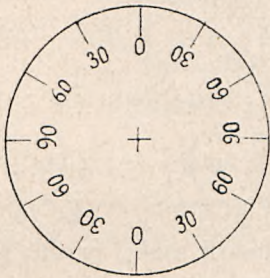
§ 1. Ta metoda pomiarów wysokości nie jest i nie może być tak dokładną jak niwelacja. Dlatego stosujemy ją w tych wypadkach, gdzie nakład pracy, a więc i kosztów niwelacji, nie wyrównywałby korzyściom, jakiebyśmy z wielkiej dokładności osiągnąć mogli. W takich razach, ze względów praktycznych, rezygnujemy z dokładności i stosujemy metodę tańszą, nie wychodząc rozumie się z pewnych granic koniecznej dokładności. Przypuśćmy n. p., że mamy sieć punktów stałych, szczegóły zdejmujemy tachymetrycznie. Teren jest górzysty. Wykonanie niwelacji wszystkich szczytów, siodeł, dolin byłoby bardzo kosztowne, a zdjęcia nie poniosą szkody, gdy błędy w wysokościach gór, trygonometrycznie pomierzonych, będą wynosiły nawet parę decymetrów, zwłaszcza że będą to błędy lokalne, nie wpływające wcale na pomiary sąsiednich obszarów.

Dla odległości większych od 400 m uwzględniać musimy rachunkiem kulistość ziemi co jest nietrudnem. Natomiast trudniejszym będzie uwzględnienie refrakcji promieni, zmieniającej się ustawicznie w ciągu dnia, zależnie od temperatury i gęstości powietrza. Promienie świetlne, przychodzące z miejsc wyższych, załamują się w coraz to gęstszym powietrzu w formie krzywych linii — wskutek tego, przedmiot wyżej położony widzimy w przedłużeniu ostatniego elementu tej krzywej, czyli w kierunku stycznej, wyżej, niż jest w rzeczywistości. Podobnie ma się rzecz z widzeniem przedmiotu niżej znacznie położonego. Wskutek tego, góry byłyby wyższe, doliny płytsze. Liczne jednak doświadczenia dają nam sposoby redukcji tych błędów, za pomocą współczynników refrakcji.

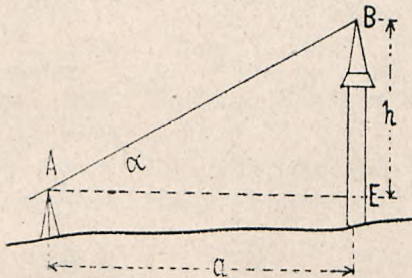
Tak samo zredukuje się znacznie możliwe błędy, wykonywując pomiar z kilku punktów i obliczając średnią wartość, z uwzględnieniem wagi pomiarów. Mamy więc sposoby redukcji błędów do minimum a temsamem metoda ta staje się użyteczną, oszczędzając wiele pracy i kosztów,

TEORJA TRYGON. POMIARÓW WYSOKOŚCI.

§ 2. Do pomiarów kątów pionowych, służy teodolit, lub przyrząd uniwersalny. Przed pomiarem należy przyrząd zrektyfikować. Teodolit powinien posiadać libelę nasadkową, celem wyznaczenia poziomu na stanowisku. Koło pionowe powinno być zaopatrzone w dwa nonjusze, zresztą pomiar kąta pionowego nie różni się od pomiaru kąta poziomego, zatem kąt mierzy się w dwóch położeniach lunety, odczytując zarazem w każdym położeniu oba nonjusze. Podziałka koła pionowego urządzona jest zwykle według rys. 170. Nonjusz po-



Rys. 170.



Rys. 171.

winien wskazywać $0^{\circ} 0' 0''$ jeżeli oś celowa jest poziomą. Małe błędy usuwa się przez odczytanie dwóch nonjuszów.

Najprostszy wypadek trygonometrycznego pomiaru wysokości, przedstawia rys. 171 pod warunkiem, że odległość $AE = a$ nie jest większa jak 500 m. Z trójkąta prostokątnego AEB — w którym znane są: kąt α i odległość $AE = a$

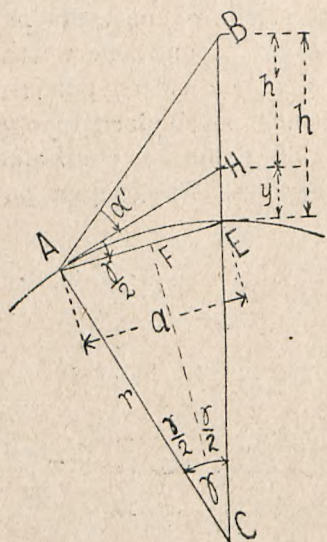
obliczymy: $h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$ 1

Dla długości nawet znacznych, długość łuku na kuli ziemskiej, a odpowiednia temuż kątowi środkowemu długość stycznej do tego łuku są prawie równe tak, że różnica mieści się w granicach błędów. Natomiast inaczej rzecz się ma, gdy rozchodzi się o pomiar wysokości — tutaj już dla łuku o dług. 500 m wypukłość ziemi odgrywa rolę. Z tego też powodu, proste obliczenie według równania 1. może być używane tylko dla niewielkich odległości. Tak samo, dla większych odległości załamanie promieni, t. j. refrakcja ma wpływ na pomiar podczas gdy w przytoczonym wypadku, można było jeszcze refrakcji nie uwzględniać.

WPLYW KULISTOŚCI ZIEMI.

§ 3 Przyjmijmy, według rys. 172, że łuk AE o promieniu r przedstawia kulistość ziemi „ AH ” jest styczną do łuku w punkcie A ,

α' jest kątem pionowym, między horyzontem, a wyżej położonym punktem B, przyczem przyjęliśmy, że promień AB jest linią prostą (bez wpływu refrakcji) — „a” jest poziomą odległością punktów A i B



Rys. 172.

albowiem, z powodu małej wartości „a” w porównaniu do r, obojętnem jest, czy odległość AE zmierzmy po łuku, czy po stycznej lub cięciwie*). Kąt środkowy przy C naznaczymy przez γ , a w takim razie kąt H A E = $\frac{\gamma}{2}$ oraz, możemy obliczyć i β' mianowicie:

$$(\alpha' + 90^\circ) + \gamma + \beta' = 180^\circ$$

$$\text{zatem } \beta' = 90^\circ - (\alpha' + \gamma) \quad 2$$

Następnie z trójkąta ABE:

$$\frac{h}{a} = \frac{\sin\left(\alpha' + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin \beta'} = \frac{\sin\left(\alpha' + \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos(\alpha' + \gamma)}$$

a że γ jest ilością małą, przeto po rozwinięciu otrzymamy rezultat

$$\frac{h}{a} = \operatorname{tg} \alpha' + \frac{\gamma}{2} \text{ stąd}$$

$$h = a \operatorname{tg} \alpha' + a \frac{\gamma}{2} \text{ gdzie } \gamma = \frac{a}{r} \quad 3$$

$$\text{a wkońcu } h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha' + \frac{a^2}{2r} \quad 4$$

Powyższe obliczenie przeprowadzić można i w inny sposób, mianowicie; trójkąt AEH uważać można jako prostokątny, zatem

$$y = a \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \quad 5$$

Wykreślmy CF prostopadłą do cięciwy to z trójkąta FCE otrzymamy:

$$EF = \frac{a}{2} = r \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \text{ a stąd } \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{a}{2r} \quad 6$$

wstawmy tę wartość w równanie 5 — to

$$y = a \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = a \cdot \frac{a}{2r} = \frac{a^2}{2r} \quad 7$$

Tak samo i trójkąt AHB można uważać jako prostokątny,

$$\text{zatem } h' = AH \operatorname{tg} \alpha' = a \cdot \operatorname{tg} \alpha' \quad 8$$

*) N. p. dla kąta środkowego 15' i promienia kuli ziemskiej 6,370.300 m długości łuku na powierzchni ziemi wynosi 27,781.575 m, zaś długość stycznej 27,781.065 m — różnica zatem jest tak małą, że pomiarem skonstatować się nie da.

Łukowi 5000 m odpowiada kąt środkowy 2'41"73.

gdyż zamiast stycznej AH możemy przyjąć tak łuk AE, jak i cięciwę z powodu znikomej wprost różnicy — Wkońcu:

$$h = h' + y = a \cdot \operatorname{tg} \alpha' + \frac{a^2}{2r} \text{ zgodnie z równ. 4} \quad 9$$

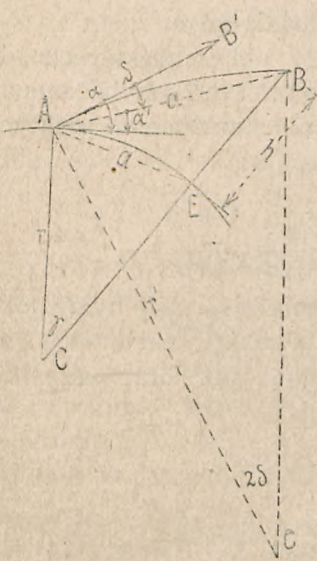
W równ. 9 — „y” przedstawia poprawkę z powodu kulistości ziemi. Dla $r = 6,370.300$ m i dla różnych „a” zestawiono nast. tabelę:

a	y	a	y	a	y	a	y	a	y
m	mm	m	mm	m	mm	m	mm	m	mm
100	0.7	400	12.5	700	38.2	1000	78.3	4000	1253.7
200	3.1	500	19.6	800	50.1	2000	313.4	5000	1958.8
300	7.0	600	28.2	900	63.4	3000	705.2	10000	7835.8

Tabela ta dowodzi, że już dla niewielkiej odległości „a” bo dla 400 m trzeba kulistość ziemi uwzględnić, ażeby nie popełniać świadomie za wielkie błędy.

WPLYW ZAŁAMYWANIA SIĘ PROMIENI ŚWIETLNYCH, CZYLI REFRAKCJI.

§ 4. Na rys. 172 przyjęliśmy, że promień BA, dochodzi z punktu



Rys. 173.

B do A w linii prostej. Tymczasem, promień ten idąc z warstwy wyższej, mającej rzadsze powietrze, przechodzi przez coraz to gęstsze, załamując się ustawicznie ku prostopadłej padania. Ponieważ zaś gęstość powietrza rośnie ciągle, więc i promień BA nie będzie jakąś linią łamaną, lecz krzywą ciągłą. W punkcie A, t. j. ze stanowiska, widzimy punkt B — na przedłużeniu ostatniego elementu krzywej BA, t. j. na stycznej, tak, że punkt B — ukazuje się nam wyżej, w kierunku AB'.

Przyjmijmy w przybliżeniu, że krzywa AB (rys. 173) jest płaskim łukiem kołowym o promieniu r' . Środek koła naznaczymy przez C' . Kąt środkowy $AC'B$ jest zatem dwa razy większy niż kąt zawarty między cięciwą AB, a styczną AB' — nazwijmy te kąty odpowiednio przez 2δ i δ . Promień r' jest ilością stałą (przy-

Przyjawszy, że $\delta = \delta'$ i uwzględniając równ. 11: $\delta = \frac{k}{2} \cdot \frac{a}{r}$
otrzymamy $2\delta = \delta + \delta' = \frac{ak}{r} = \gamma + \alpha - \beta$ a że $\gamma = \frac{a}{r}$ więc

$$k = 1 - \frac{r}{a} \left(\frac{\beta - \alpha}{\rho} \right) \quad \dots \quad 14$$

gdzie $\rho = 206,264 \cdot 8063$ jeżeli $(\beta - \alpha)$ wyrażone jest w sekundach. W ten sposób, zapomocą równoczesnego pomiaru obu kątów pionowych, wykonano wiele doświadczeń. Średnia wartość obliczona z różnych, tą drogą wyznaczonych k , w rozmaitych miejscowościach na ziemi, a wynoszących od $k = 0,1053$ do $k = 0,1370$ wynosi $k = 0,1329$. Na tej podstawie przyjmujemy jako średnią wartość

$$k = 0,13 \quad \dots \quad 15$$

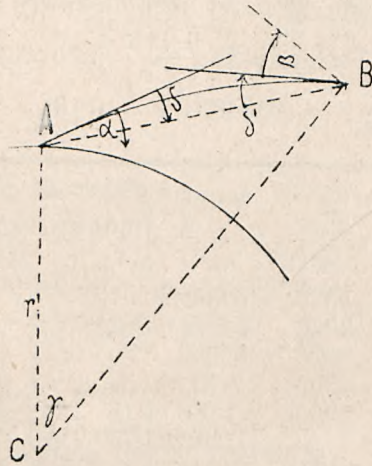
Przyznać należy, że wahania w wartości k okazywały się znaczne, jednakowoż największa ich ilość zbliżała się do $0,13$ z wahaniami 25% — tak że niepewność współczynnika da skreślić przez:

$$k = 0,13 (1 \pm 0,25) \quad \dots \quad 16$$

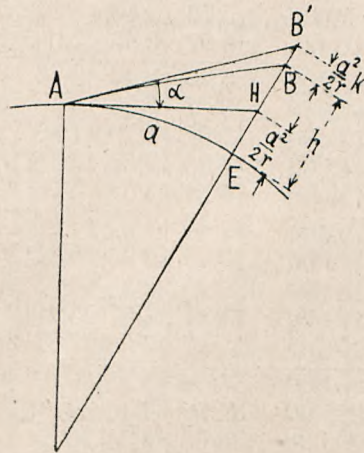
Ostatecznie na obliczenie h według równ. 12 — otrzymamy

$$h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{a^2}{2r} - \frac{a^2 k}{2r} \quad 17$$

co graficznie wskazano na rys. 175. AE jest kulistą powierzchnią ziemi, AH poziom czyli horyzont punktu A — AB krzywa według jakiej załamuje się promień świetlny wychodzący z punktu B — AB' styczna do krzywej AB w punkcie A . Następnie: odcinek $EH = \frac{a^2}{2r}$ przedstawia kulistość



Rys. 174.



Rys. 174.

ziemi, raczej poprawkę celem uwzgl. kulistości ziemi i $BB' = \frac{a^2 k'}{2r}$ refrakcja. Geometrycznie wysokość punktu B względem A , przedsta-

wia odcinek $EB = h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha = HB' + CH - BB'$ odpowiednio do równania 17. Uwaga: $h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$ jest wartością przybliżoną.

Następująca tabela podaje współczynniki potrzebne do trygonometrycznego obliczania wysokości. Kąt refrakcji δ służy do oceny dokładności. Jeżeli n. p. dla odległości 30 km $\delta = 1' 3''$ a że współczynnik k jest niepewny o 25%, to dla tej odległości przyjąć należy, że kąt pionowy jest niepewny o $\pm 63''$. $0.26 = \pm 16''$.

Poprawka $\frac{1-k}{2r}$ jako funkcje odległości $r = 6,381.000$ m
 $\log r = 6.80489$ $k = 0.13$.

a	+ 0	+100 m	+200 m	+300 m	+400 m	+500 m	+600 m	+700 m	+800 m	+900 m
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
1000	0.000	0.001	0.003	0.006	0.011	0.017	0.025	0.033	0.044	0.055
2000	0.068	0.082	0.098	0.115	0.134	0.153	0.175	0.197	0.221	0.246
3000	0.273	0.30	0.33	0.36	0.39	0.43	0.46	0.50	0.53	0.57
4000	0.61	0.66	0.70	0.74	0.79	0.84	0.88	0.93	0.98	1.04
5000	1.09	1.15	1.20	1.26	1.32	1.38	1.44	1.51	1.57	1.64
	1.70	1.77	1.84	1.91	1.99	2.06	2.14	2.21	2.29	2.37
6000	2.45	2.54	2.62	2.71	2.79	2.88	2.97	3.06	3.15	3.25
7000	3.34	3.44	3.53	3.63	3.73	3.83	3.94	4.04	4.15	4.25
8000	4.36	4.47	4.58	4.70	4.81	4.93	5.04	5.16	5.28	5.40
9000	5.52	5.65	5.77	5.90	6.02	6.15	6.28	6.41	6.55	6.68
10.000	6.82	6.95	7.09	7.23	7.37	7.52	7.66	7.80	7.95	8.10
11.000	8.25	8.40	8.55	8.70	8.86	9.02	9.17	9.33	9.49	9.65
12.000	9.82	9.98	10.15	10.31	10.48	10.65	10.82	10.99	11.17	11.34
13.000	11.52	11.70	11.88	12.06	12.24	12.42	12.61	12.79	12.98	13.17
14.000	13.36	13.55	13.75	13.94	14.14	14.33	14.53	14.73	14.93	15.13
15.000	15.34	15.54	15.75	15.96	16.17	16.38	16.59	16.80	17.02	17.23
16.000	17.45	17.67	17.89	18.11	18.34	18.56	18.78	19.01	19.24	19.47
17.000	19.70	19.93	20.17	20.40	20.64	20.88	21.12	21.36	21.60	21.84
18.000	22.09	22.33	22.58	22.83	23.08	23.33	23.58	24.84	24.09	24.35
19.000	24.61	24.87	25.13	25.39	25.66	25.92	26.19	26.46	26.73	27.00
20.000	27.27	27.54	27.82	28.09	28.37	28.65	28.93	29.21	29.49	29.78
21.000	30.06	30.35	30.64	30.93	31.22	31.51	31.81	32.10	32.40	32.69
22.000	32.99	33.30	33.60	33.90	34.20	34.51	34.82	35.13	35.44	35.75
23.000	36.06	36.38	36.69	37.01	37.33	37.65	37.97	38.29	38.61	38.94
24.000	39.27	39.59	39.92	40.25	40.59	40.92	41.25	41.59	41.93	42.27
25.000	42.61	42.95	43.29	43.64	43.98	44.33	44.68	45.03	45.38	45.73
26.000	46.08	46.44	46.79	47.15	47.51	47.87	48.23	48.60	48.96	49.33
27.000	49.70	50.06	50.44	50.81	51.18	51.55	51.91	52.31	52.68	53.06
28.000	53.45	53.83	54.21	54.60	54.98	55.37	55.76	56.15	56.54	56.94
29.000	57.33	57.73	58.12	58.52	58.92	59.33	59.73	60.13	60.54	60.94
30.000	61.35	61.76	62.17	62.59	63.00	63.42	63.83	64.25	64.67	65.09

KĄT REFRAKCJI δ :

a km	δ''	a km	δ''	a km	δ''	a km	δ''	a km	δ''	a km	δ''	a km	δ''
1	2"	6	13"	11	23"	16	34	21	44"	26	55"	30	63"
2	4	7	15	12	25	17	36	22	46	27	57	40	84
3	6	8	17	13	27	18	38	23	48	28	59	50	105
4	8	9	19	14	29	19	40	24	50	29	61	60	126
5	11	10	21	15	32	20	42	25	53	30	63	70	147

Przykład:

Wysokość punktu A, t. j. stanowiska teodolitu jest 200·92 m
 wysokość przyrządu I (jak przy tachymetrowaniu) I = 1·42 „
 Stąd horyzont: 200·92 + 1·42 = H . . . H = 202·34 „
 Odległość a = 7200 m a = 7200·00 „
 Pomierzono kilkakrotnie kąt α średnica wartości . $\alpha = 42' 20''$

$$\text{Z równ. 17: } h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2r} \cdot a^2$$

$$\log a = 3\cdot85733$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 8\cdot09040 - 10$$

$$\log (a \cdot \operatorname{tg} \alpha) = 1\cdot94773$$

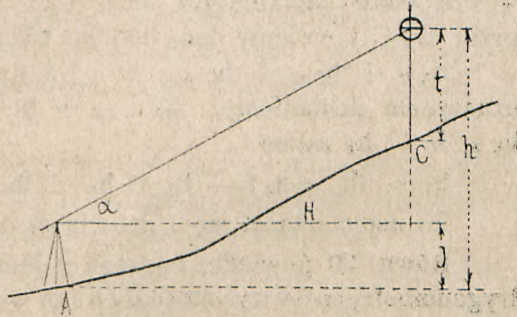
z tablic wyjęto dla a = 2700 m

odpowiednie $\frac{1-k}{2r} \cdot a^2 = 3\cdot53$

Stąd $a \cdot \operatorname{tg} \alpha = 88\cdot66$ m a wreszcie wysokość punktu

$$B : H_B = 202\cdot34 + 88\cdot66 + 3\cdot53 = 294\cdot53 \text{ m.}$$

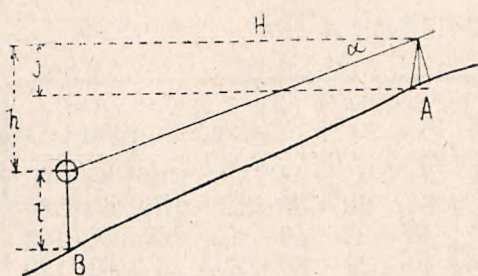
Kąt pionowy α mierzymy od horyzontu przyrządu do środka tarczy czyli sygnału. Jeżeli teren się wznosi od A do C — gdzie A jest stanowiskiem (rys. 176) na punkcie C zaś stoi sygnał, którego środek tarczy umieszczony jest w wysokości „t” nad punktem, to nazwawszy przez H horyzont przyrządu, przez A kąt punktu A, przez C kąt punktu C — otrzymamy na podstawie rysunku:



Rys. 176.

$$C = A + I + h - t \text{ czyli wstawiając za } h \text{ wartość}$$

$$\text{z równ. 17: } C = A + I + a \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2r} \cdot a^2 - t \quad \dots \quad 18$$

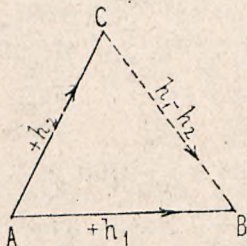


Rys. 177.

Jeżeli teren spada, to analogicznie do poprzedniego, według rys. 177 otrzymamy: $B = A + I + h - t$ czyli $B = A + I - a \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{1-k}{2r} a^2 - t$ lub . 19 $B = A + I - a \operatorname{tg} \alpha + \frac{a^2}{2r} + \frac{k a^2}{2r} - t$.

WYRÓWNANIE TRYGNOM. POMIARÓW WYSOKOŚCI

§ 6. Przypuśćmy, że ze stanowiska (rys. 178), którego wysokość i położenie jest dane, zdjęto trygonom. punkty B i C.



Rys. 178.

Różnica wysokości w kierunku A B wynosi $+h$, zaś w kierunku A C $+h_2$. Różnicę wysokości między B C znajdziemy w następujący sposób:

W kierunku C B... $h_3'' = (h_1 - h_2)$
w przeciwnym t. j. od B do C $h_3' = (h_2 - h_1)$
 $h_3' = -(h_1 - h_2)$

Wogóle, jeżeli różnica wysokości w jednym kierunku ma znak $+$ t. j. wzniesienie, to w kierunku przeciwnym ma znak $-$ t. j. spadek.

Uwzględniając powyższą uwagę, oraz warunek, że suma tych różnic w wieloboku zamkniętym musi być zerem, wyjdźmy z punktu A, przez B i C i wróćmy doń, dodając różnice wysokości, to otrzymamy:

$h_{AB} + h_{BC} + h_{CA} = 0$ — a wstawiając poprzednio przyjęte oznaczenia dostaniemy: $h_{AB} = +h_1$ $h_{BC} = h_3' = -(h_1 - h_2)$ $h_{CA} = -h_2$ zatem

$$h_1 - (h_1 - h_2) - h_2 = h_1 - h_1 + h_2 - h_2 = 0 \quad . \quad 20$$

To samo odnosi się i do więcej niż dwóch punktów.

Równ. 20 powiada, że jeżeli z jednego stanowiska pomierzmy trygonometrycznie wysokość dwu lub więcej punktów, to algebraiczna suma wzniesień między tymi punktami, obliczona na obwodzie zamkniętego wieloboku, będzie zawsze równa zeru.

Potwierdza to następujący przykład liczbowy.

Na rysunku 179 przyjęto, że z punktu A, pomierzono wysokości punktów B, C, D, E. Na promieniach AB, AC...AE wypisano wzniesienia $(+)$ względnie spady $(-)$.

Połączmy punkty BCD i E, to otrzymamy wielobok zamknięty ABC...A, obliczone zaś różnice wysokości, wynoszą:

$$h_1 = + 112\cdot40 \text{ m}$$

$$h_{BC} = h'_1 = h_2 - h_1 = + 130\cdot35 - 112\cdot40 = + 17\cdot95 \text{ m}$$

$$h_{CD} = h'_2 = h_3 - h_2 = - 120\cdot15 - 130\cdot35 = - 250\cdot50 \text{ m}$$

$$h_{DE} = h_4 - h_3 = + 176\cdot20 + 120\cdot15 = + 296\cdot35 \text{ m}$$

$$h_{EA} = - h_4 = - 176\cdot20 \text{ m.}$$

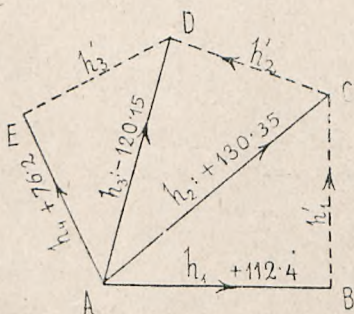
$$\text{Stąd } [h] = + 426\cdot70 - 426\cdot70 = 0.$$

Konsekwencją powyższego rozważania jest to, że jeżeli z jednego stanowiska pomierzmy wysokości szeregu punktów, to nie mamy sposobu wyrównania błędów pomiarów, jakkolwiek wiemy, że błędy te istnieć muszą; jest to zupełnie logicznem, bo niema wówczas kontroli, podobnie, jak niema kontroli gdy pomiar długości wykonamy tylko raz jeden.

Z tego jednak nie wynika, by pomiar taki miał być nieużytecznym. Trygonometryczny pomiar wysokości polega bowiem na pomiarze kąta pionowego, bo zresztą odległość punktów musi być dana, poprawki zaś z powodu kulistości ziemi i refrakcji promieni świetlnych, bierzemy z tablic i te zależą od odległości. Jeżeli więc pomiary kątów pionowych wykonamy starannie, odczytując dwa nonjusze w dwóch położeniach lunety i ewent. powtarzając ten pomiar kilkakrotnie, to możemy być pewni, że kąty są zmierzone możliwie dokładnie, a pomiar ten jest jedynym sposobem, bo reszta do obliczenia jest dana, zatem że obliczenie wysokości będzie dokładnem.

Taki wypadek pomiarów wysokości z jednego stanowiska, może często trafić się w górach, gdzie z danego punktu kilka innych jest widocznych, między sobą natomiast są one nie widoczne.

O ileby chodziło z innych względów o kontrolę, to należałoby wykonywać pomiary wysokości dla każdej z danych linii AB, AC, AD... z dwóch końcowych punktów, zatem dla linii AB z punktów A i B dla AD z A i D i t. d. Zauważyć tu jednak wypada, że pomiary te powinny być wykonane równocześnie ze względu na refrakcję, która w ciągu dnia zmienia się. Z takich dwóch pomiarów obliczy się średni spadek pomiędzy podstawowem stanowiskiem A, a każdym z danych punktów. Naturalnie, takie pomiary są już ko-



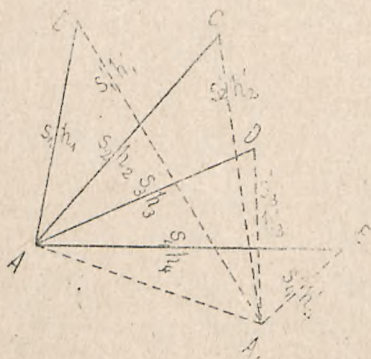
Rys. 179.

sztowniejsze i zabierają więcej czasu, nie przynoszą zazwyczaj równoważącej korzyści, co w każdym wypadku trzeba rozważyć.

Przypuśćmy teraz, że z punktu A pomierzono wysokości punktów B C D i E (rys. 180) — nadto te same punkty widoczne są także z punktu A₁ zatem i z tego punktu wysokości ich pomierzono.

Wysokości punktów A i A₁ są znane.

Oznaczmy odległości od punktu A przez $s_1 s_2 \dots s_4$ — od punktu A' przez $s'_1 s'_2 \dots s'_4$ i odpowiednio różnice wysokości danych punktów względem A przez $h_1 h_2 \dots h_4$ zaś względem A₁ przez $h'_1 h'_2 \dots h'_4$.



Rys. 180.

Znając bezwzględne wysokości punktów A i A' obliczymy bezwzględne wysokości wszystkich innych. Wogóle wysokości te, obliczone na podstawie pomiarów ze stanowiska A, a oznaczone przez $h_b h_c h_d h_e$, będą się różniły od obliczonych ze stanowiska A'... $h'_b h'_c h'_d h'_e$ — czyli, będą to niezależne spostrzeżenia dla każdego z punktów B...E.

Chcąc te pomiary wyrównać, musimy wziąć w rachubę wagi spostrzeżeń, zależnie od odległości $s_1 s_2 \dots s'_1 s'_2 \dots$ i od refrakcji, w której, jak z poprzedniej tabeli oraz równ. 17 wynika, najważniejszą rolę odgrywa odległość. Wpływ niepewności współczynnika k , rośnie wraz z odległością; możemy więc powiedzieć, że na błąd pomiaru wpływa w przybliżeniu głównie odległość, czyli że do niej jest błąd proporcjonalny, zatem, jak wiemy z teorii błędów, wagi będą

odwrotnie proporcjonalne do kwadratów odległości, t. j. $\frac{1}{s^2} = p$ gdzie „p“ oznacza wagę.

Dla punktu B, mamy więc dwa spostrzeżenia h_b i h'_b o wagach

$p = \frac{1}{s_1^2}$ i $\frac{1}{s'_1{}^2}$ stąd średnia arytmetyczna

$$h_b^0 = \frac{[p \cdot h]}{[p]} = \frac{\frac{1}{s_1^2} \cdot h_b + \frac{1}{s'_1{}^2} \cdot h'_b}{\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s'_1{}^2}} \quad \dots \quad 21$$

następnie: $v = h_b^0 - h_b$ i $v_1 = h_b^0 - h'_b$ 22
a stąd błąd pojedynczego spostrzeżenia

$$m = \sqrt{\frac{[p v^2]}{n-1}} \text{ gdzie } n = 2 \text{ więc } m = \pm \sqrt{[p v^2]} \quad 23$$

a wreszcie błąd średniej arytmetycznej

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{[p]}} \quad 24$$

Równanie 23 określa granice niepewności pomiaru wysokości punktu B.

W ten sam sposób obliczymy średnie arytmetyczne i błędy pomiarów dla innych punktów.

Przykład:

Dana wysokość punktu A = 206·30 m

" " " A₁ = 241·55 m.

Z pomiarów obliczono:

h₁ = + 42·63 m stąd h⁰_b = 206·30 + 42·63 = 248·93 m s₁ = 3·2 km

h₂ = + 58·82 " h⁰_c = 206·30 + 58·72 = 265·12 " s₂ = 4·3 "

h₃ = + 90·25 " h⁰_d = 206·30 + 90·25 = 296·55 " s₃ = 3·0 "

h₄ = + 88·72 " h⁰_e = 206·30 + 88·72 = 925·02 " s₄ = 5·2 "

Podobnie obliczono bezwzględne wysokości punktów na podstawie pomiarów z punktu A₁ — Wszelkie daty zestawione są w następującej tabeli na stronie 152.

Wyrównana wysokość punktu B = 248·85 ± 0·09 m.

" " " C = 265·42 ± 0·35 "

W ten sam sposób obliczy się wysokość dalszych punktów.

Ażeby zwiększyć dokładność rezultatów pomiarów, należy się starać by stanowisko, z którego mierzymy wysokość dwu lub więcej punktów, znajdowało się ile możności w środku, t. i. by odległości punktów mierzonych były mniej więcej równe. Nie zawsze się to udaje, ale przynajmniej znaczna część lub większość punktów danej grupy, może znaleźć w tych dogodnych warunkach. Korzyści w ten sposób wykonanych pomiarów wykażemy na dwóch punktach, przyjmując stanowisko w środku ich odległości.

Jeżeli pomiar wysokości dwóch punktów wykonany był równocześnie, co zawsze przyjąć można, bo jak wiemy, pomiar taki redukuje się do pomiaru kątów pionowych, nie zabierającego wiele czasu, to współczynnik refrakcji jest dla obu takiż sam, tak że wielkość błędu pomiaru redukuje się w tym względzie tylko do błędu samego współczynnika.

Według rów. 17 mamy:

$$h_1 = a_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + \frac{a_1^2}{2r} - \frac{a_1^2 k}{2r}$$

Punkt	h_x m	h'_x m	s km	$p = \frac{1}{s^2}$	$p \cdot h_x$	$h^0_x = \frac{[ph_x]}{[p]}$ Średnia aryt. [ph _x] [p]	$v = h^0_x - h_x$ m	v^2	$p \cdot v^2$	$m = \frac{m}{\sqrt{[p \cdot v^2]}}$ cm	$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}}$
B	248.72		2.2	0.095	23.65	248.85	- 0.08	0.0064	0.000608		
B		248.72	5.3	0.036	8.95		+ 0.13	0.0169	0.000608		
			[] =	0.131	32.60				0.001216	± 3.5	± 9
C	265.12		4.3	0.054	14.32		+ 0.30	0.09	0.0049		
C		265.82	4.9	0.042	11.16		- 0.40	0.16	0.0067	± 11	
			[] =	0.096	25.48	265.42			0.0116		± 35

gdzie h_1 jest różnicą wysokości stanowiska względem jednego punktu. Średni błąd Δh_1 jako funkcję średniego błędu kąta α_1 t. j.: $\Delta \alpha_1$ i średniego błędu Δk , współczynnika k , opuszczając błąd

odległości a_1 i uwzględniając to, że α_1 jest ilością bardzo małą, wyrazi się równaniem

$$\Delta h_1 = \sqrt{(a_1 \Delta \alpha_1)^2 + \left(\frac{a_1^2 \Delta k}{2r}\right)^2} \quad . \quad . \quad 25$$

Analogiczne wyrażenie Δh_2 otrzymany dla drugiego pomiaru, przyjmując Δk równe. Stąd, dla różnicy wysokości obu punktów t. j. dla $(h_1 - h_2)$ obliczy się średni błąd „m“:

$$m = \sqrt{(a_1 \Delta \alpha_1)^2 + (a_2 \Delta \alpha_2)^2 + \left(\frac{a_1^2 - a_2^2}{2r} \Delta k\right)^2} \quad . \quad 26$$

Przyjmijmy, że pomiary obu kątów $\alpha_1 \alpha_2$ mają średnie błędy $\Delta \alpha_1 = \Delta \alpha_2 = \pm 5''$ oraz że $\Delta k = 0.25 k = 0.0325$, o czym już poprzednio mówiliśmy to równ. 25 dla $r = 6370000$ m po wstawieniu tych wartości, da nast. wartość m:

$$m = \sqrt{0.0005876 (a_1^2 + a_2^2) + 0.000006485 (a_1^2 - a_2^2)^2} \quad . \quad 27$$

m otrzymamy w metrach, a_1 i a_2 wyrażone są w km. Wogóle błąd pomiaru redukuje się tutaj do 60%. Przyznać jednak należy, że redukcję błędu zawdzięcza się tu skróceniu odległości punktów o połowę. Ostatecznie bowiem, takie same warunki co do refrakcji byłyby, gdybyśmy wysokości obu punktów mierzyli z bocznego stanowiska tak obranego, że odległość jego od obu punktów byłaby równa — lecz, że odległość ma wpływ na błąd refrakcji i pomiaru wogóle, więc, ponieważ byłaby większa niż, gdyby stanowisko nasze leżało w środku linii między obu punktami, to i błąd będzie większy.

Wróćmy jeszcze do ostatniego przykładu. Gdyby wagi były równe co miałyby miejsce wówczas, gdyby długości punktów A i A₁ były jednakowe licząc do punktów B₁ C₁ ... lub gdyby mało się różniły, wówczas uważaćbyśmy mogli te pomiary, jako pomiary podwójne (parami). W takim razie najprawdopodobniejsze wartości tworzyłyby średnie arytmetyczne, których znów średnie błędy, byłyby równe połowie różnicy obu spostrzeżeń.

Nazwijmy $h_x - h'_x = d$ to:

$$\text{Dla punktu B: } h_b = \frac{248.93 + 248.72}{2} = 248.82 \text{ m}$$

$$\text{„ „ C: } h_c = \frac{265.12 + 265.82}{2} = 265.47 \text{ m}$$

$$d_1 = 248.93 - 248.72 = 0.21 \quad \text{stąd} \quad M_1 = \pm 0.10 \text{ m}$$

$$d_2 = 265.12 - 265.82 = 0.70 \quad \text{„} \quad M_2 = \pm 0.35 \text{ m}$$

Porównawszy te wyniki, z wynikami poprzednich obliczeń, widzimy, że różnice są bardzo małe, co pochodzi stąd, że odległości nie różnią się zbytnio między sobą, tak, że mogliśmy wobec

niepewności współczynnika „k“ przyjęć jeden lub drugi rezultat jako dobry.

Mając na uwadze cel i charakter trygonometrycznych pomiarów wysokości, które mają ułatwić i przyspieszyć pracę zastępując mozołną, zwłaszcza w górach niwelację, nie powinniśmy dążyć do stwarzania wielu warunków celem teoretycznego wyrównywania błędów pomiarów, bo w praktyce trudno znaleźć takie warunki, jakieby miały teorii odpowiadać, n. p. by z danego punktu można było pomierzyć wysokości reszty punktów danej grupy i t. p., natomiast dążyć powinniśmy do ulepszenia dokładności pomiarów i obliczenia. Pomiar redukuje się tylko do pomiaru kąta. Główną rolę odgrywają tu poprawki, zwłaszcza z powodu refrakcji, t. j. wyraz $-\frac{a^2 k}{2 r}$ — Tutaj

współczynnik $\frac{k}{2 r}$ wielokrotnie powiększony przez czynnik a^2 , mimo że powinien być zmienny, zależny od pory dnia, gęstość powietrza i t. p. jest stałym $i = 0.13$. Otóż przy większych pomiarach lepiej byłoby dla różnych warunków zdobyć doświadczalnie wartości „k“ i stosować w pomiarach, aniżeli przy stałym „k“ zbierać jaknajwięcej spostrzeżeń, co podraża prace i mija się z celem.

W tem miejscu wypada jednak na korzyść trygonometrycznych pomiarów wysokości zaznaczyć, że wspom. „k“ do odległości 5 km bardzo mało się zmienia i śmiało może być przyjęty na 0.13 — co podnosi wartość tej metody w granicach do 5 km. Dowodzi tego następująca tabela dla różnych „k“ i a do 5 km.

Bardzo również ważną rzeczą jest dokładny pomiar kąta pionowego, w tym celu używać się powinno precyzyjnych przyrządów, zwłaszcza nonjuszów mikroskopowych i stosować metody jakie się stosuje do pomiarów kierunków.

Tabela dla $\frac{1-k}{2 r} \cdot a^2$ przy różnych „k“.

a =	1000 m	2000 m	3000 m	4000 m	5000 m
k = 0	0.08 m	0.31 m	0.71 m	1.25 m	1.96
= 0.10	0.07	0.28	0.63	1.13	1.76
= 0.13	0.07	0.27	0.61	1.09	1.70
= 0.16	0.07	0.26	0.59	1.05	1.65
= 0.20	0.06	0.25	0.56	1.00	1.57

W ciągu dnia zmienia się k od 0·10 do 0·20 — cała więc poprawka $\frac{1-k}{2r} a^2$, największa dla $a = 5$ km także się zmienia od 1·76 m do 1·57 m czyli w granicach od 0 do 19 cm. Dla $a = 2$ km natomiast zmienia się tylko od 0 do 3 cm. Stąd wynika, że dla odległości do 5 km dokładność pomiarów może być znaczna a nawet stosunkowo bardzo wielka.

ROZDZIAŁ XII.

ZDJĘCIA KOMPASEM

§ 1. Kompas jest to przyrząd, zapomocą którego można bezpośrednio wyznaczyć kierunek południe – północ. Najważniejszą częścią składową kompasu jest igła magnetyczna, t. j. sztabka stalowa namagnesowana, ostro zakończona na obu końcach, pośrodku podparta, tak, że może obracać się w płaszczyźnie poziomej. Zwraca się ona zawsze czarnym swym końcem ku północy.

Urządzenie kompasu może być różne, zależnie od celu. Przyrządy uniwersalne bardzo często posiadają kompas. Jest to płaskie, walcowe pudełko o średnicy 10 do 15 cm — w środku umocowane jest w dnie pionowo ostrze, na którym podparta jest igła magnetyczna.

Wzdłuż obwodu pudełka umocowany jest płaski pierścień, podzielony na stopnie. Podział ten postępuje od prawej ku lewej, zatem w przeciwnym kierunku aniżeliśmy to widzieli w teodolicie. Igła dotyka swymi końcami podziałki i wskazuje stopnie. Celem oszczędzania ostrza, na którym wspiera się kompas ma zawsze urządzenie, zapomocą którego podnosi się igłę, gdy przyrząd nie jest używany.

Od góry pudełko zamknięte jest szybą szklaną. Przyrząd z kompasem połączony, nie może mieć żadnych żelaznych lub stalowych części.

Kompas powinien być czułym, t. zn. że igła wychylona jakimkolwiek sposobem z równowagi, powinna powracać w swe położenie z dokładnością 0.1° . Czułość kompasu próbuje się w ten sposób, że zbliżamy do niego kawałek żelaza. Igła natychmiast się wychyli — odrzucamy wówczas żelazo i obserwujemy wahanie się igły i położenie jej po powrocie do równowagi. Jeżeli igła nie powróci do swego dawniejszego położenia, to albo tarcie na ostrzu jest za wielkie, albo magnes za słaby — wówczas kompas trzeba oddać do naprawy.

Jeżeli kompas umocowany jest na alhidadzie tachymetru lub teodolitu, to sprawdzenie czułości igły jest łatwe. Obracamy wówczas alhidadę po limbusie od 10° do 10° t. j. od 0° do 10° , od 10° do 20° i t. d.

obserwując, czy igła wskazuje takie same kąty. Wskutek tarcia igły na ostrzu, wielkość kątów na limbusie i kompasie nie będzie zgodną. Ustawmy teodolit dokładnie poziomo i obracajmy go o kąty 10 lub 20° — to igła, mimo obrotu będzie spokojną. Po odczycie jednak na limbusie i kompasie, spostrzeżemy różnicę, jak to wykazuje następująca tabela z doświadczeń. Obracano mianowicie limbus od 0° do 360° po 20° — odczytując kompas — obrót odbywał się od lewej do prawej. W tabeli oznaczone są odpowiednie odczyty napisem: igła I — następnie, obracano limbus w przeciwnym kierunku, a odpowiednie odczyty na kompasie oznaczono: „igła II”. Różnica odczytów przy obrocie w jednym i drugim kierunku, wynosi 0°54' średnio. Stąd wynika, że stały błąd igły wynosi $\frac{0\cdot54}{2} = 0\cdot27'$ podczas gdy błąd odczytu nie może wynosić więcej, jak 0'10". Trzeba być zatem ostrożnym i w ważnych pomiarach odczytywać kompas dwa razy, w dwóch położeniach.

Limbus	igła I	igła II	II—I	Limbus	igła I	igła II	II—I
0°	14,3 ⁰	15,2 ⁰	+0,9 ⁰	180°	193,7 ⁰	194,1 ⁰	+0,4 ⁰
20	34,0	35,0	+1,0	200	213,8	214,2	+0,4
40	53,8	54,8	+1,0	220	233,9	234,5	+0,6
60	74,4	75,2	+0,8	240	253,9	254,9	+1,0
80	94,1	94,3	+0,2	260	273,8	274,5	+0,7
100	113,9	114,2	+0,3	280	294,1	294,2	+0,1
120	133,3	134,1	+0,8	300	314,3	314,5	+0,2
140	153,6	153,9	+0,3	320	333,2	333,7	+0,5
160	174,4	174,7	+0,3	340	353,7	354,1	+0,3
				średnio	3,91 ⁰	4,45 ⁰	+0,54 ⁰

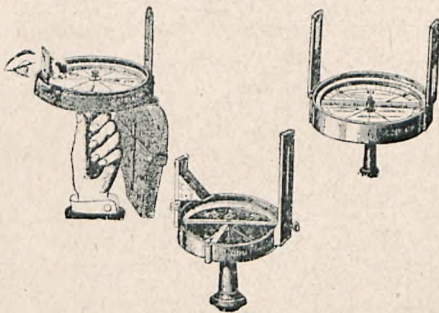
Ażeby uchronić się od stałego błędu igły wskutek tarcia na ostrzu, mamy jeszcze następujący sposób: Po wychyleniu się igły, nie może ona zaraz powrócić do równowagi, lecz waha się w jedną i drugą stronę. Wychylenia te odczytujemy i nazwijmy je: a_1 i b_1 — następnie a_2 i b_2 — a_3 i b_3 . Z tych wahań obliczymy położenie igły w równowadze, według wzoru:

$$x = \frac{a_1 + 2b_1 + a_2}{4} \text{ lub } x_1 = \frac{b_1 + 2a_2 + b_2}{4} \text{ i t. d.} \quad 1$$

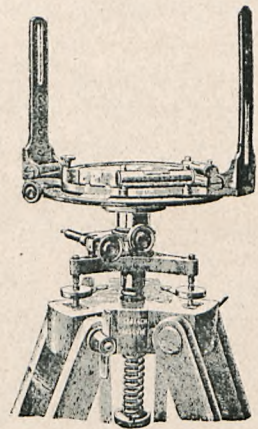
Gdzie a_1 i b_1 były to pierwsze wychylenia w lewo i prawo — a_2 jest następnem wychyleniem w lewo. Drugi wzór x_1 ma: b_1 pierwsze wychylenie w prawo, a_2 drugie w lewo, b_2 drugie w prawo.

Błąd wskutek ekscentrycznego osadzenia igły, usuwa się przez odczytanie kątów na obu końcach igły, tak jak w teodolicie przez odczytanie dwóch nonjuszów.

Rysunki 181 i 182 przedstawiają t. zw. dioptry czyli celownice kompasowe. Oś celową tworzy tu wąski otwór i naprzeciwko nacią-

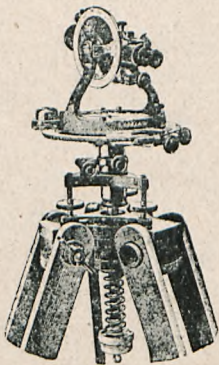


Rys. 181 i 185.

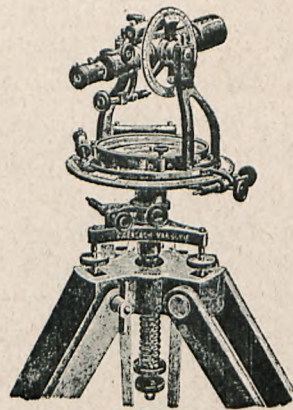


Rys. 182.

gnięty włos w szerszym otworze, podobnie jak w węgielnicach bębnowych. Kąty odczytuje się na kompasie. Pierwszy zaopatrzony jest libelą pudełkową, drugi stolikową do ustawiania w poziomie.



Rys. 183.



Rys. 184.

Na rys. 183 natomiast mamy kompas z lunetą. Przyrząd ten możnaby nazwać teodolitem kompasowym. Kąty poziome podaje kompas. Rys. 184 przedstawia mały teodolit z kompasem na alhidadzie.

się, przechodzi przez 0 — czyli wtedy jest zgodność między południkiem magnetycznym i astronomicznym, następnie wychyla się na wschód, dochodzi do maximum i znowu wraca. Okres ten między obu maximami, trwa 470 do 480 lat. W Rzymie obserwowano pierwsze zboczenia w r. 1508 ($\delta = -6^{\circ}8'$) w r. 1600 wynosiło ($\delta = -11^{\circ}20'$). W Paryżu zaczęto obserwacje w r. 1541, w Londynie w 1580, W Paryżu minimum deklinacji było w r. 1580, a maximum w okresie między 1810 a 1820 r. Następne minimum wypadnie prawdopodobnie w r. 2060. Maximum wynosiło w Paryżu $+24^{\circ}3'$, różnica więc między południkiem magnetycznym, a astronomicznym, była wówczas bardzo wielka.

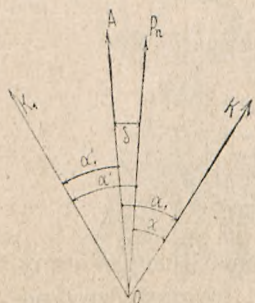
Igła magnetyczna ma również zboczenia w ciągu dnia się zmieniające. Największe zboczenie dzienne wynosi w lecie $9'$ w zimie $5'$ w porównaniu do średniej dziennej deklinacji. Nadto zdarzają się i zboczenia nieregularne, mające związek z zaburzeniami atmosferycznymi. Te jednak są małe, tak, że można je pominąć.

W różnych punktach ziemi, deklinacja jest różna. Linje, łączące punkty o tej samej deklinacji, nazywamy południkami magnetycznymi. Są one nierównomiernie rozłożone, a schodzą się na biegunach magnetycznych. Deklinację i roczną zmianę podają dla danych miejsc osobne tablice. Mając deklinację d_n z przed n lat, oraz roczną jej zmianę, obliczymy dzisiejszą „ d “, według równania

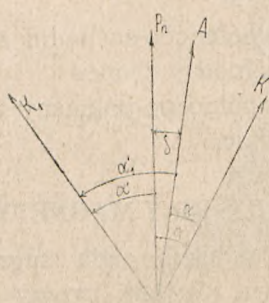
$$d = d_n - r \cdot n \quad \dots \quad 2$$

d = dzisiejsza deklinacja, n = ilość lat od dzisiejszego do n go, r = roczna zmiana deklinacji.

Bardzo często wypadnie potrzeba pomiaru kąta zapomocą busoli, zatem od kierunku południka magnetycznego (północnego) i wy-



Rys. 186 a.



Rys. 186 b.

kreślenia go w zorjentowanym do południka astronomicznego, planie lub mapie, t. j. wypadnie uwzględnić deklinację.

Na rys. 186 a, linja OA przedstawia południk astronomiczny — linja OP_n południk magnetyczny,

jeżeli deklinacja jest wschodnia. W polu zmierzmy kąt α między ramionami OP_n i OK . Uwzględniając deklinację powinniśmy zmierzyć kąt $AOK = \alpha + \delta$ (δ = deklinacja). Zatem do pomierzonego kąta

α dodać należy kąt deklinacji δ . Jeżeli teraz zmierzmy kąt po przeciwnej stronie południka magnetycznego — to pomierzmy kąt $P_n O K_1 = \alpha'$ zamiast kąta $A O K_1 = \alpha_1'$. Ponieważ zaś $\alpha_1' = \alpha' - \delta$, zatem od pomierzonego kąta odjąć należy δ , czyli dodać ($-\delta$).

Gdy deklinacja jest zachodnia (rys. 186 b) to mierząc kąt na wschód od południka magnetycznego zmierzmy kąt α zamiast mniejszego kąta $\alpha_1 = \alpha - \delta$ — czyli od zmierzonego kąta α odjąć należy deklinację — mierząc zaś kąt na zachód, t. j. kąt α' zamiast $\alpha_1' = \alpha' + \delta$ — musimy do kąta pomierzonego dodać deklinację.

ZDJĘCIA WIELOBOKOWE ZAPOMOCĄ KOMPASU.

§ 3. Z poprzedniego opisu kompasu możemy już wnioskować, że zdjęcie czyli pomiar kierunków tym przyrządem, nie jest i nie może być tak dokładnym, jak pomiar teodolitem. Mimo to, używamy dioptra z kompasem do pomiarów wieloboków, jako podstaw do zdjęć szczegółowych, zwłaszcza w lasach.

Przyjmijmy, że $A B C$ i D (rys. 187) są wierzchołkami wieloboku. Ustawmy przyrząd na wierzchołku A i zwróćmy celową w kierunku

$A B$, na sygnał B . Ponieważ podziałka kompasu postępuje od prawej do lewej, odwrotnie jak w teodolicie, przeto, po uspokojeniu się igły, odczytamy bezpośrednio wielkość kąta α_1 podobnie α_2 .

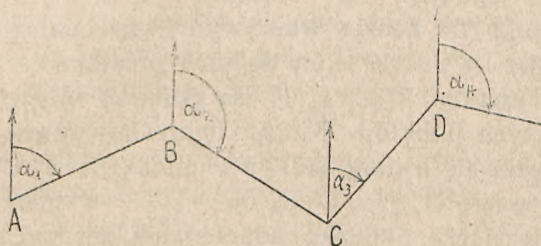
Będą to kąty zawarte

między kierunkami południków magnetycznych danych punktów, a kierunkami boków wieloboku. Uwzględnić jeszcze musimy deklinację (zachodnią $+$, wschodnią $-$), ażeby otrzymać kąty od południków astronomicznych liczone. Przyjmijmy, że deklinacja danego miejsca w danym dniu, wynosi „ δ ” to po dodaniu $+\delta$, otrzymamy właściwe wielkości kątów. Ponieważ zaś azymut mierzymy od kierunku południowego, przeto, chcąc obliczyć azymuty boków, dodać jeszcze należy do każdego kąta 180° — zatem

$$(A B) = (\alpha_1 + \delta) + 180^\circ \quad \text{a więc} \quad (B A) = (\alpha_1 + \delta) + 180^\circ \pm 180^\circ$$

$$(B C) = (\alpha_2 + \delta) + 180^\circ \quad (C B) = (\alpha_2 + \delta) + 180^\circ \pm 180^\circ \text{ i t. d. . . } 3$$

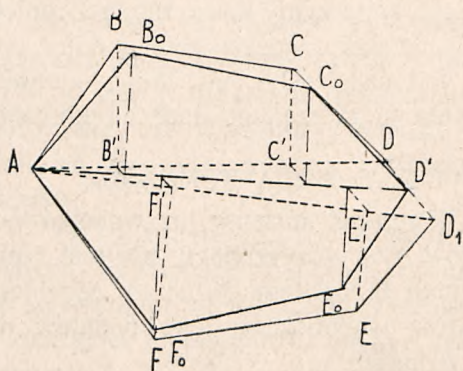
Pomierzmy jeszcze odległości boków, a będziemy mieli pomiar wieloboku skończony. Kąt odczytuje się zawsze na obu końcach igły i oblicza średnią. Obliczenie współrzędnych i wyrównanie pomiarów,



Rys. 187.

niczemu się nie różni od poznanych już poprzednio pomiarów teodolitem.

Ażeby można było wyrównać pomiary musimy nawiązać wielobok do dwóch stałych punktów określonych co do położenia innym sposobem. Z natury rzeczy wynika, że w tego rodzaju pomiarach, uwzględnić należy szersze granice dozwolonych błędów w pomiarze kątów.

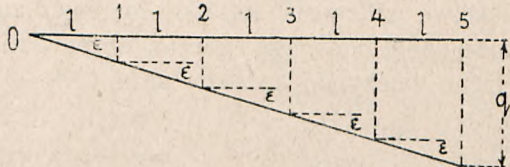


Rys. 188.

nie zamknął się. Połączmy D z D_1 i przepołowmy długość DD_1 , to punkt D' będzie właściwym wielobokiem. Teraz połączmy A z D i A z D_1 i wykreślmy do nich prostopadłe BB_1 , CC_1 , FF_1 i EE_1 — to punkty B' C' F' E' są rzutami wierzchołków na AD i AD_1 — z tych punktów B' ... E' nakreślmy równoległe do DD_1 aż do przecięcia się z linią AD' i w punktach B'' C'' D'' E'' wykreślmy prostopadłe $B''B_0$... $E''E_0$ do AD' — wkońcu na tychże prostopadłych odetniemy długości poprzednich rzędnych, tak, że $B''B_0 = BB_1$ i t. d. to otrzymamy nowe wieloboki $B_0 C_0$... wyrównanego wieloboku. Nie będzie to praca dokładna, lecz innego sposobu nie mamy, a w niektórych wypadkach pomiar taki będzie wystarczający.

DOKŁADNOŚĆ POMIARU KĄTÓW KOMPASEM.

§ 4. Przyjmijmy, że rys. 189 przedstawia wielobok (0), (1)... (5) — o różnych bokach długości „1“ każdy mało różniący się od linii prostej. W takim razie, wskutek równie starannego pomiaru wszystkich kątów, także i błędy pomiaru będą równe.



Rys. 189.

Błąd pomiaru kąta niech wynosi ϵ — długość boku = 1 — to błąd pomiaru, przedsta-

wić możemy jako przesunięcie następnego wierzchołka w kierunku poprzecznym o długości $g' = \varepsilon \cdot l$ 4

Całkowite zatem przesunięcie wierzchołka wieloboku, złożonego z n boków, wyniesie wskutek błędów pomiaru kątów, w myśl teorii błędów:

$$q = \pm \sqrt{(l\varepsilon)^2 + (l\varepsilon)^2 + \dots + (l\varepsilon)^2} + \sqrt{n \cdot (l\varepsilon)^2} = l \cdot \varepsilon \sqrt{n} \quad 5$$

a że $n \cdot l = L$ czyli $n = \frac{L}{l}$ przeto, wstawivszy tę wartość w równ. 5 otrzymamy:

$$q = \pm l \cdot \varepsilon \sqrt{\frac{L}{l}} = \pm \varepsilon \sqrt{L \cdot l} \quad 6$$

Przypuśćmy teraz, że dane są dwa wieloboki o różnych długościach L , natomiast pojedyncze boki w pierwszym mają długości l_1 — w drugim l_2 — Natenczas:

$$q_1 = \pm \varepsilon \sqrt{L} \cdot \sqrt{l_1} \text{ i } q_2 = \pm \varepsilon \sqrt{L} \cdot \sqrt{l_2} \text{ stąd otrzymamy:}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} \quad 7$$

Stosunek $\frac{l_1}{l_2}$ będzie tem większy, im większe jest l_1 w porównaniu do l_2 — przyjętego jako normalną długość boku w zdjęciach kompasem. Z tego wynika, że im dłuższe są boki, tem większy będzie błąd w pomiarze kątów. Jako normalną długość, wskazuje doświadczenie około 20 m.

Najdokładniejszy odczyt kąta na kompasie wynosi $0 \cdot 10$ czyli $6'$ — małym zaś teodolitem łatwo możemy odczytywać kąty $30''$ — stąd widzimy, że teodolit daje conajmniej 12 razy większą dokładność, zwykle znacznie większą, od 20 do 100 razy w pomiarze kątów.

Celem porównania dokładności zdjęć kompasem i teodolitem, wstawmy w równ. 6 $L = n \cdot l$, to otrzymamy:

$$q = \pm \varepsilon \sqrt{n l^2} \text{ czyli } q = \pm \varepsilon l \sqrt{n} \quad 8$$

W podobny sposób obliczono poprzeczne przesunięcie ostatniego wierzchołka wieloboku, w którym kąty pomierzono teodolitem, zatem w innych warunkach, bo gdy pomiar kompasem jednego kąta wcale nie wpływa na drugi kierunek, to błąd pomiaru teodolitem rozciąga się na następne, da rezultat:

$$q' = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{3}} \cdot L \cdot \sqrt{n'} \quad 9$$

gdzie q' jest wspomnianem przesunięciem, ε' błąd w kącie, n' ilość boków, l' jest długością pojedynczego boku — Stąd:

$$\frac{q}{q'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \cdot \frac{\sqrt{3}}{L} \sqrt{l \cdot l'} \text{ lub } \frac{q}{q'} = 1.732 \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \frac{\sqrt{l l'}}{L} \quad 10$$

Wstawmy tu $l = 20$ m, $\varepsilon' = 6'$, tudzież $l' = 200$ m, $\varepsilon' = 0.5'$. to dla różnych długości L wieloboków, dla obu sposobów pomiaru, otrzymamy:

$L =$	200,	500,	1000,	5000,	10,000,	15,000,	20,000 m
$q:q' =$	66,	26,	13,	2.6,	1.3,	0.88,	0.66 m
$q =$	66 q'	26 q'	13 q'	2.6 q'	1.3 q'	0.88 q'	0.66 q' m

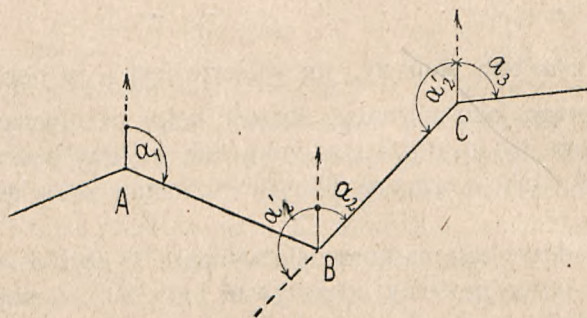
Wynika stąd, że w danych warunkach, błąd zdjęć kompasem będzie dla krótkich wieloboków znacznie większy niż błąd zdjęć teodolitem — lecz już dla $L = 13,000$ m błędy są równe, dla większych natomiast długości korzystniejsze są zdjęcia kompasem.

Kompas przeto nie jest tak złym przyrządem w porównaniu do teodolitu, jakby się to zdawać mogło i dlatego jest dotąd używany.

Na podstawie powyższych wyników, nasuwają się nast. uwagi:

W pomiarach kompasem, powinny być ramiona kątów, względnie boki wieloboku krótkie, do 20 m w przeciwieństwie do pomiarów

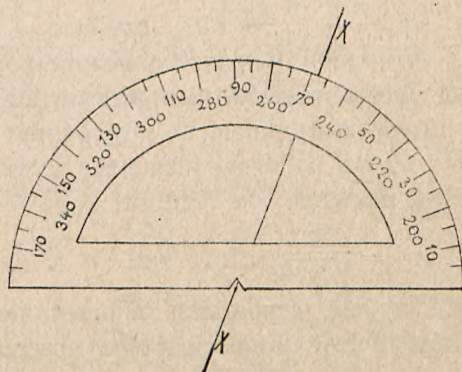
teodolitem. Kompas ma nadto tę zaletę, że błędy w pomiarze kątów są tylko lokalne, Dlatego n. p. błąd ekscentrycznego ustawienia przyrządu nad wierzchołkiem, jest tu prawie nieszkodliwy, podczas gdy dla teodolitu ma znacznie gorsze skutki.



Rys. 190.

W pomiarach kompasem możemy pracę ułatwić, opuszczając co drugi wierzchołek lecz mierząc zato dwa kąty na innych jak to wskazano na rys. 190 — mianowicie:

Na wierzchołku B wcale nie mierzymy kąta. Natomiast, na wierzchołku C pomierzemy kąty α_3 i α_1 . Jak widać z rysunku, kąt między ramieniem BP_n (kierunkiem półn.) a przedłużeniem CB równy jest kątowi α'_2 — zatem kąt $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha'_2$. . . 11



Rys. 191.

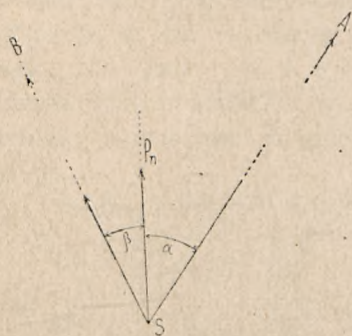
Ten sposób upraszcza i przyspiesza pracę, a równocześnie zupełnie eliminuje błąd ekscentrycznego ustawienia przyrządu.

Bardzo dobre usługi oddaje t. zw. teodolit kompasowy, w pomiarach lasu, zwłaszcza gdy długości boków odpowiadają całej taśmie stalowej, t. j. mają po 20·0 m. Taśmę należy układać poziomo, według reguł pomiaru długości, co jest łatwym, mając równocześnie do dyspozycji lunetę z libelą. Zarazem, o ile to jest potrzebne, możemy zniwelować cały wielobok przy minimalnym nakładzie pracy.

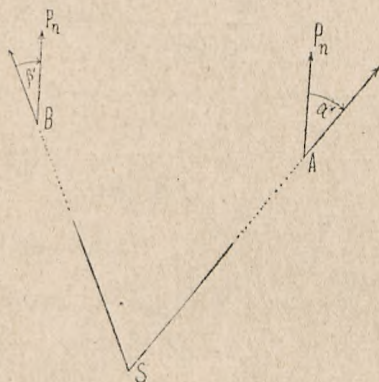
Do rysowania zdjęć używa się zwykłego kątomierza (rys. 191). Podziałka postępuje tu tak, jak na kompasie, od prawej do lewej. Kątomierz umocowuje się szpilką w środku koła C. Na rys. 191 — odcięto kąt n. p. $65^{\circ} 30'$ w ten sposób, że kątomierz przyłożono do linii północnej xx na rysunku tak, że przechodzi ona przez punkt C i $65^{\circ} 30'$ — drugie ramię wskazuje wtedy brzeg CB.

WYZNACZENIE STANOWISKA NA MAPIE.

§ 5. Przypuśćmy, że ze stanowiska S widzimy w oddali dwa punkty A i B n. p. dwie wieże oznaczone także na mapie. Bliższych natomiast punktów, któreby posłużyć nam mogły do zorientowania naszego stanowiska niema, chcemy zaś punkt na którym stoimy, oznaczyć na mapie. W tym celu, za pomocą przyrządu kompasowego zmierzmy kąty α i β (rys. 192) w polu.



Rys. 192.



Rys. 193.

Następnie uwzględniając deklinację, wykreślmy w punkcie A kąt $\alpha' = \alpha + \delta$ i w B kąt $\beta' = \beta + \delta$. Oba kierunki przedłużone wstecz, dadzą punkt S. Nie można tu spodziewać się dostatecznej dokładności, bo błąd w pomiarze kąta kompasem, zwłaszcza gdy ramiona kątów są długie, będzie stosunkowo duży, ale określenie położenia punktu S będzie przybliżone i służyć może jako pierwsza

orientacja. Lepiej punkt S wyznaczymy, mając 3 stałe punkty A B i C (rys. 193). Wówczas trzy kierunki nie przetną się w jednym punkcie, lecz utworzą krójką, którego środek ciężkości przyjmiemy jako przybliżony punkt S.

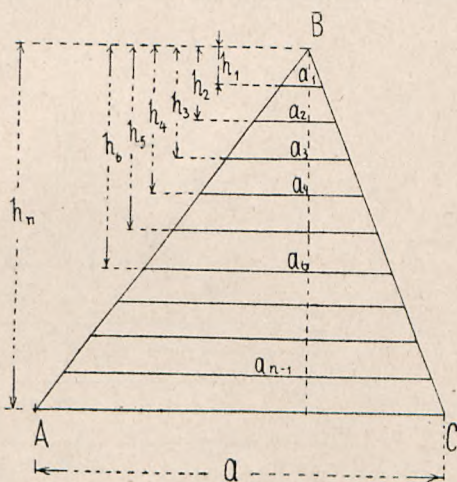
Do zastosowania kompasu w polu, powrócimy jeszcze w jednym z następnych rozdziałów.

ROZDZIAŁ XIII.

PODZIAŁ POWIERZCHNI I REGULACJI GRANIC.

§ 1. Zdjęcia wielobokowe oraz zapomocą rzędnych, umożliwiają teoretycznie dokładne dzielenie danych obszarów pod podanemi warunkami, jak również regulowanie granic. Sprawę tę omówimy w szeregu przykładów, nie zajmując się jednak przytem jakością i wartością dzielonych obszarów, co zresztą nie jest trudnem do uwzględnienia w praktyce.

Punktem wyjścia w tym sposobie podziału, jest trójkąt. Podzielmy trójkąt ABC (rys. 194) o wysokości h i podstawie a , linjami równoległymi do podstawy, na n części tak, że wysokości pasów są równe. W tym celu podzielimy albo wysokość h na n równych części, albo hak, *n. p.* AB — i przez punkty podziału, wykreślimy równoległe do podstawy.



Rys. 194.

Według oznaczeń na rysunku, otrzymamy:

$$a_1 = \frac{a}{n} \quad a_2 = \frac{2a}{n} \quad a_3 = \frac{3a}{n} \quad \dots \quad a_n = \frac{n \cdot a}{n} = a \quad . \quad 1$$

$$h_1 = \frac{h}{n} \quad h_2 = \frac{2h}{n} \quad h_3 = \frac{3h}{n} \quad \dots \quad h_n = \frac{n \cdot h}{n} = h \quad . \quad 2$$

Powierzchnie poszczególnych trójkątów, o podstawach $a_1 a_2 \dots$ i wysokościach $h_1 h_2$ — wynoszą:

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{h}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot h}{n^2} = \frac{F}{n^2} \quad \text{jeżeli } F \text{ jest powierzchnią trójkąta } ABC$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{n} \cdot \frac{2h}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4ah}{n^2} = \frac{4F}{n^2} \quad \left(F = \frac{1}{2} \cdot ah \right)$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{n} \cdot \frac{3h}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9ah}{n^2} = \frac{9F}{n^2} \quad \text{wogóle}$$

$$F_n = \frac{n^2 F}{n^2} = F \quad \dots \dots \dots \quad 3$$

Ilości n i F są dla danego trójkąta ilościami stałymi, zatem —
 $\frac{F}{n^2} = C \quad \dots \dots \dots \quad 4$

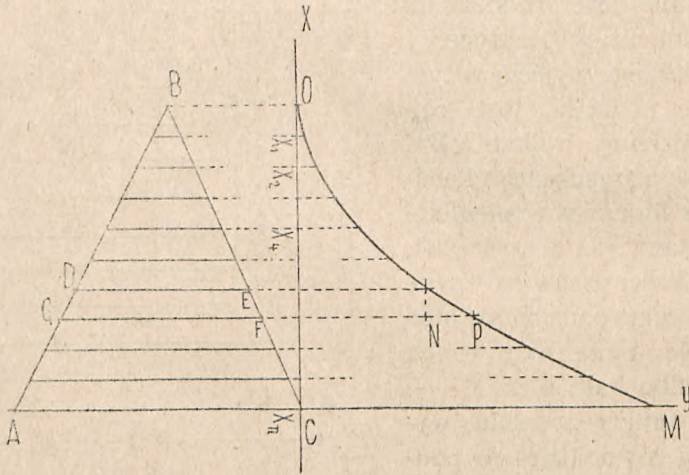
jest czynnikiem stałym — podstawmy tę wartość w szereg poprzednich równań to dostaniemy:

$$F_1 = 1^2 \cdot C, F_2 = 2^2 \cdot C, F_3 = 3^2 C \dots F_x = x^2 C, F_n = n^2 C \quad 5$$

Równanie 5 przedstawić możemy w kształcie:

$$y = x^2 C \quad \dots \dots \dots \quad 6$$

czyli jako linię krzywą*). W tym celu przyjmijmy, jak na rys. 195 — układ współrzędnych — oś y równoległą do podstawy przechodzi



Rys. 195.

przez wierzchołek B — oś x równoległą do wysokości przez punkt C . Odetnijmy na osi x , począwszy od punktu O , zgodnie z podziałem trójkąta liniami równoległymi do podstawy, odcinki: $x_1 = h_1$, $x_2 = h_2$ i t. p. na rzędnych zaś odefiniemy odpowiednie $y = x^2 C$, gdzie $C = \frac{F}{n^2}$. Dostaniemy zatem krzywą OM , mającą tę własność, że

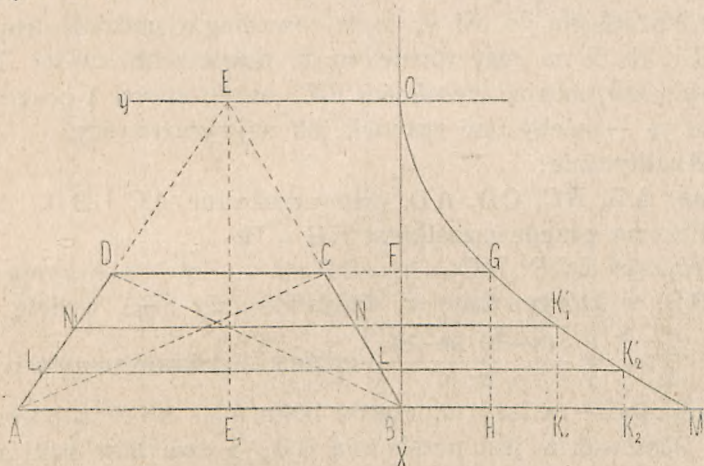
*) Podziałka dla odciętych (x) ma wartość $\frac{h}{n}$ — gdzie h jest wysokością trójkąta w metrach, n zaś przyjmujemy okrągło $n = 10$ albo 100 , lub 1000 — zależnie od długości h . Nazwijmy $\frac{h}{n} = m$ to m jest wartością podziałki. Ażeby x otrzymać w metrach, należy odcięte x_1 , x_2 pomnożyć przez m .

rzędne jej mają wartość powierzchni trójkąta o wysokości danego x — różnice zaś rzędnych, przedstawiają powierzchnie pasów, n . p. różnica NP przedstawia powierzchnię $DEFG$.

Dla x jakoteż y przyjmijmy odpowiednie podziałki, zwykle różne, i w tych podziałkach odczytujemy $h = x$ oraz $y_x = F_x$. W dalszym ciągu na przykładach, okaże się, że stosując geometrię analityczną celem obliczenia współrzędnych przecięcia się odnośnych linii, nie potrzebujemy wcale rysować krzywej OM .

§ 2. Na podstawie § 1 przystąpić możemy do rozwiązywania rozmaitych zagadnień, mianowicie:

1. Dany jest trapez $ABCD$ — Zadaniem jest podzielić jego powierzchnię liniami równoległymi do boku AB na trzy równe części (rys. 196).



Rys. 196.

Trapez zdejmuję się najdokładniej zapomocą pomiaru wszystkich boków i obu przekątni AC i DH .

Gdyby nie rozchodziło się o bardzo wielką dokładność, to zadanie to można w drodze graficznej łatwo rozwiązać. Przedłużmy obydwie boki AD i BC — do przecięcia się ich w E . Wysokość EE podzielimy na n równych części, n . p. $n = 10$, czyli odcinek osi odciętych OB podzielimy na 10 równych części i na rzędnych w punktach przedziału odetniemy wartości, według równ. 6 — $w = x^2 C$

gdzie $C = \frac{F^2}{n^2}$ zatem: $F = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot E \cdot E$, $n^2 = 100$

stąd: dla $x = 0$ $y = 0$

$$„ \quad x_1 = 1 \quad y_1 = 1 \cdot \frac{F^2}{100} = 0.01 F^2$$

$$\begin{aligned} \text{dla } x_2 = 2 & \quad y_2 = 4 \cdot \frac{F^2}{100} = 0.04 F^2 \\ \text{,, } x_3 = 3 & \quad y_3 = 9 \cdot \frac{F^2}{100} = 0.09 F^2 \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

Przedłużmy bok DC aż do przecięcia z krzywą OM, to rzędna FG podstawia w odpowiedniej skali powierzchnię trójkąta DEC, która w rachubę nie wchodzi, jako będąca poza trapezem. Natomiast różnica rzędnych: BM — FG = HM przedstawia powierzchnię trapezu ABCD. Podzielmy więc odcinek HM na trzy równe części HK₁ = K₁K₂ = K₂M = F₁ jeżeli przez F₁ nazwiemy powierzchnię trapezu ABCD.

Z punktów K₁ i K₂ wykreślmy równoległe do osi x aż do przecięcia się ich z krzywą OM w punktach K'₁ i K'₂ — z tych zaś punktów równoległe do osi y, to te równoległe podziela trapez liniami L₁L i N₁N na trzy równe co do powierzchni części. Na rys. 196 opuszczono podział wysokości EE, na 10 części i poszczególne rzędne y₁ y₂ — ażeby dać rysunek jak najwyraźniejszy.

2. Analitycznie:

Dane: AB, BC, CD, AD, oraz przekątnie AC i BD.

Obliczymy przedewszystkiem EG = H.

Z trójkąta HCF: HC = h = CF sin α. Kąt α obliczymy z trójkąta ABD w którym dane są wszystkie trzy boki, według wzoru:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b \cdot c}} \quad \text{gdzie } s = \text{połowie sumy wszystkich}$$

boków trójkąta — α leży naprzeciw boku a — b i c są pozostałymi bokami. Ponieważ a jest przekątnią BD, a dwa inne boki są również dane, przeto jest wszystko do obliczenia sin $\frac{\alpha}{2}$ zapomocą któ-

rego obliczy się $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ a następnie $\sin \alpha = 2 \sin$

$\frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. W takiż sam sposób obliczymy sin β z trójkąta ACB — w którym również dane są trzy boki — a wkońcu odcinek FB = FC cos α + BC · cos β.

Następnie z trójkątów: ABE i FBC =

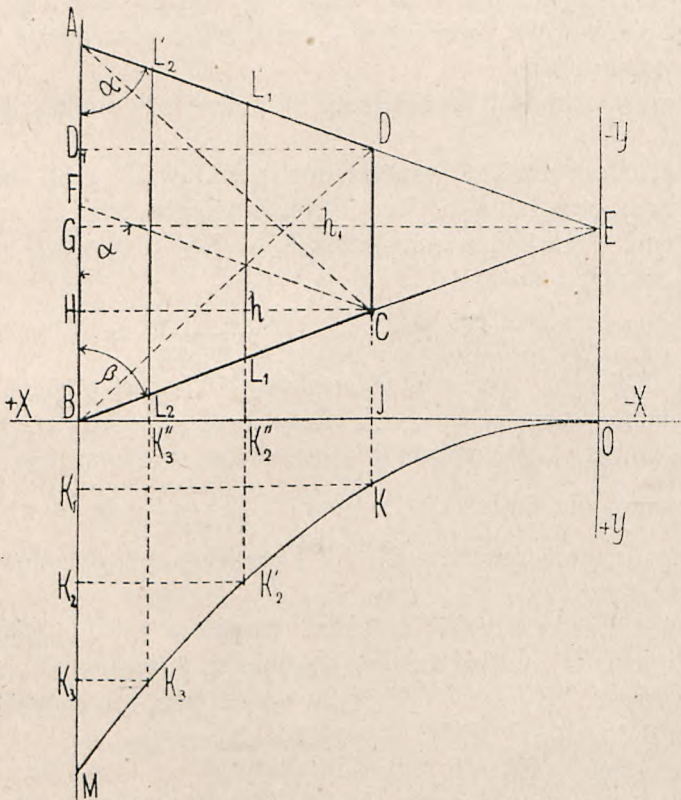
$$AB : AE = FB : FC \text{ obliczymy } AE = \frac{AB \cdot FC}{FB} \text{ jakoteż}$$

$$FE = h_1 = AE \cdot \sin \alpha$$

Mamy więc wysokość trójkąta AEB, a więc i powierzchnię tegoż trójkąta $P = \frac{1}{2} AB \cdot FE = AB \cdot \frac{h'}{2}$

Przyjmując układ osi współrzędnych w ten sposób, że wierzchołek E leży na osi y — zaś B na osi x — możemy łatwo obliczyć współrzędne trójkąta A E B, mianowicie:

punkt E	$x_e = 0$	$y_e = B G = B E \cdot \cos \beta$
„ A	$x_a = h_1$	$y_a = A B$
„ B	$x_b = h_1$	$y_b = 0$
„ C	$x_c = h_1 - h$	$y_c = B H = B E \cdot \cos \beta$
„ D	$x_d = h_1 - h$	$y_d = y_a - A D_1 = y_a - A D \cos \alpha$



Rys. 197.

Równanie krzywej O M $y = x^2 C$ a)

Krzywej nie potrzeba wykreślać — wystarczy ją naszkicować, jedynie celem orjentowania się w obliczeniu.

Równanie prostej D C równoległej do osi y $x = (h_1 - h) = h_2$ b)

punkt przecięcia I przedłużenia prostej D C z osią x $x_1 = + h_2$ $y_1 = 0$ c)

punkt przecięcia K tejże prostej z krzywą $O M$

$$y = x_2 C$$

$$x = h_2 \quad \text{stąd} \quad y = h_2 C \quad x = h_2 \quad . \quad d)$$

Odcinek $K_1 M$ przedstawia powierzchnię trapezu $A B C D$.

Ponieważ wartość rzędnej $B M = F$ jest znana, jak również $B K_1 = I K$ — przeto obliczymy

$$B K_2 = B K_1 + \frac{K_1 M}{3} \quad \text{podobnie} \quad B K_3 = B K_1 + \frac{2_1 K_1 M}{3} \quad . \quad e)$$

Równanie prostej $K_2 K_2$ równoległej do osi x

$$y_2 = B K_2 \quad (\text{za } B K_2 \text{ wstawimy wartość z r. e}) \quad . \quad f)$$

wstawiając y_2 w równ. krzywej $y = x_2 C$ za y otrzymamy wartość na x_2 dla punktu K'_2 —

W ten sam sposób znajdziemy współrzędne punktu K'_3 t. j. y_3 i x_3

Teraz należy znaleźć współrzędne punktów L_1 i L'_1 oraz L_2 i L'_2 w których przecinają się boki nierównoległe trapezu z liniami podziałowymi, Przechodzącymi przez K'_2 i K'_3 równoległe do podstawy a zarazem i do osi y .

$$\text{Równanie boku } B C \quad y - y_b = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} (x - x_b) \quad . \quad g)$$

równ. linii $K'_2 L'_1$ $x = O K''_2$ gdzie $O K''_2$ jest odciętą punktu K'_2 wstawiając wartości za y_b , y_c , x_b , x_c i za x w równ. g) otrzymamy z równ. g) y — podczas gdy x jest już wiadome i = $O K''_2$

Tak samo dla linii $A D$: $y - y_a = \frac{y_d - y_a}{x_d - x_a} (x - x_a)$ znajdziemy współrzędne punktów L'_1 i L'_2 a raczej tylko rzędne bo odcięte są już dane.

Wkońcu trzeba określić położenie punktów L_1 i L_2 i L'_1 i L'_2 na bokach trapezu, t. j. odległości ich do punktu B względnie A .

Z trójkąta: $C B J$ i $L_1 B K''_2$ jako podobnych, obliczymy:

$$B L_1 : B C = B K''_2 : B J \quad \text{stąd zaś } B L_1 —$$

Analogiczne położenie reszty punktów.

Dostaliśmy zatem punkty L_1 L'_1 i L_2 L'_2 określone co do położenia na bokach trapezu, zatem i linie podziałowe ściśle wyznaczone.

3. W zupełnie podobny sposób podzieli się n. p. nieregularny trapezoid (rys. 198) $A B C D$ na dowolną ilość części, czy to równych, czy stosunkowych, liniami równoległymi do któregośkolwiek boku. Podział sposobem graficznym, nie przedstawia najmniejszej trudności i wykona się analogicznie do poprzedniego przykładu.

Analitycznie:

Przypuścmy, że podzielić mamy dany trapezoid, zdjęty w polu

Równanie krzywej OM, której wogóle rysować nie potrzebujemy, naznaczając tylko jej kształty celem lepszej orientacji w obliczeniu:

$y = x^2 C$ gdzie $C = \frac{F_1}{n^2}$; n jest ilością pasów na jaką wysokość h_1 dzielimy — zwykle 10 — 20 i t. d. Przyjmijmy $n = 10^*$). Ustawiając $x = 1_1 2_1 \dots n = 10$ — otrzymamy z równ. $y = x^2 C$ odpowiednie y.

Powierzchnię trapezoidu ABCD = F obliczymy, jako sumę powierzchni dwu trójkątów: ABC i ACD — według wzoru $f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $s = \frac{a+b+c}{2}$ a, b, c są bokami.

Różnica $F_1 - F = F_2$ jest powierzchnią trójkąta BEC.

Odetnijmy wartość F_2 w skali przyjętej dla rzędnych krzywej OM — od punktu D do H, to $DH = F_2$ — wykreślmy stąd prostopadłą do przecięcia się jej z krzywą w punkcie K_1 i rzędną KK_1 to $KK_1 = DH = F_2$ — zatem odcinek HM przedstawia powierzchnię F trapezoidu. Odcinek ten HM podzielmy teraz w żądanym stosunku

$a:b:c$ — t. j. $HL = \frac{HM}{a+b+c} \cdot a$, $LN = \frac{HM}{a+b+c} \cdot b$ i $NM = \frac{HM}{a+b+c} \cdot c$ punkty L i N odrzućmy na krzywą do L_1 i N_1 a stąd wykreślmy równoległe do podstawy, to otrzymamy linje podziału $L_2 L_3$ i $N_2 N_3$ —

Ażeby położenie linii wyznaczyć analitycznie, znajdziemy najpierw punkty L_1 i N_1 . Punkt H określony jest warunkiem $DH = F_2$. Równanie linii LL_1 równoległej do osi v odpowiada warunkowi:

$$y = DH + HL = F_2 + f_1 \quad \dots \quad 5$$

wstawmy y z równ. 5 w równanie krzywej $y = x^2 C$ to otrzymamy $x_1 = OL'_1$. Tak samo znajdziemy $x_2 = ON'_1$ dla linii NN_1 z równania linii NN_1 ... $y = DL + f_2$ i równania krzywej OM.

Wkońcu należy określić położenie punktów $L_2 L_3$ i $N_2 N_3$ na bokach trapezoidu. W tym celu obliczmy:

$$ED = \frac{h_1}{\cos \varepsilon_2} \text{ gdzie } \varepsilon_2 = 90 - \beta \quad \dots \quad 6$$

$$\text{nast.: } EL_2 = \frac{x_1}{\cos \varepsilon_2} = \frac{OL'_1}{\cos \varepsilon_2}; \quad EL_3 = \frac{x_1}{\cos \varepsilon_1} = \frac{OL'_1}{\cos \varepsilon_1} \quad 7$$

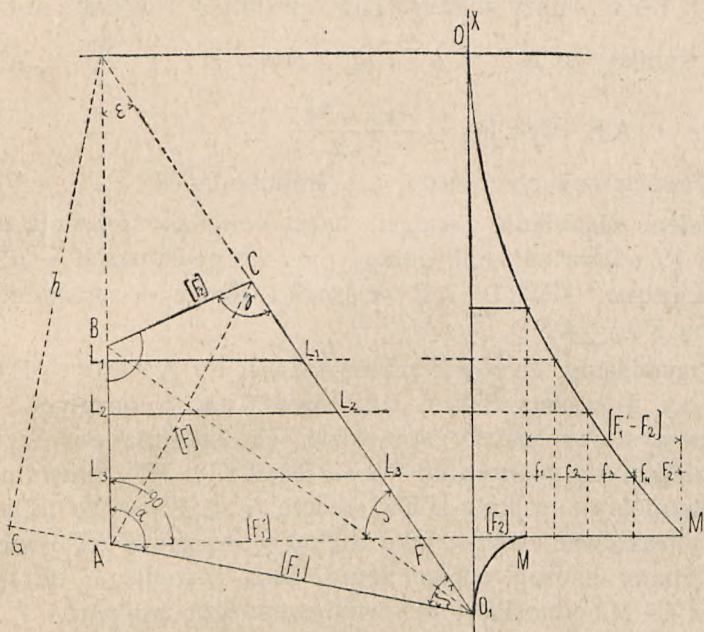
*) Pamiętać przytem należy, że przyjmując $n = 10, 100$ i t. p. przyjmujemy zarazem i temsamem podziałkę dla x odpowiednią do n — n. p. gdy $n = 10$ to jednostką podziałki dla x jest $\frac{h}{10} = m$. Ażeby więc x otrzymać w metrach, należy go pomnożyć przez m.

Ponieważ w polu nie mamy punktu E, więc nawiążemy się do punktu D i A, mianowicie:

$$DL_2 = ED - EL_2 \text{ i } AL_3 = EA - EL_3 \quad . \quad . \quad . \quad 8$$

W ten sam sposób określimy położenie punktów N_2 i N_3 .

§ 3. W poprzednich przykładach warunkiem był podział danej figury liniami równoległymi do jednego boku. Teraz rozpatrzmy wypadek, gdy dany jest trapezoid oraz warunek podziału linjami w pewnym, określonym kierunku, n. p. prostopadłe do boku AB — (rys. 199). Ażeby ten przykład sprowadzić na poprzedni wypadek,



Rys. 199.

wykreślmy linią AF prostopadłe do AB czyli w kierunku linii podziałowych. Otrzymamy wówczas z trapezoidu ABCD — dwie figury: trapezoid ABCF i trójkąt AFD. Teraz możemy trójkąt AEF dzielić w kierunku podstawy AF, uwzględniając resztę z trapezoidu, t. j. powierzchnię trójkąta ADF, oraz trójkąt BEC. Trapezoid ABCD zdjęty jest zapomocą pomiaru wszystkich boków i przekątni.

Powierzchnię jego obliczymy w znany sposób, rozkładając go na dwa trójkąty, których boki są co do długości, dane. Nazwijmy powierzchnię jego przez F. Również obliczenie kątów α β γ i δ z danych długości boków, nie przedstawia trudności. W trójkącie AED mamy więc dane kąty α i δ — Zatem $\varepsilon = 180 - (\alpha + \delta)$.

Weźmy teraz pod uwagę trójkąt prostokątny AEF. Kąt ε jest znany, zatem kąt $\delta_1 = (90 - \varepsilon)$.

Z trójkąta AED: AD jest dane — więc: $AD : DE = \sin \varepsilon : \sin \alpha$, stąd DE. Podobnie $AD : AE = \sin \varepsilon : \sin \delta$, a stąd obliczyć się AE.

Z trójkąta DGE w którym bok GE wykreślono, jako wysokość h, prostopadłe do podstawy otrzymamy: $h = EG = DE \cdot \sin \delta$. Stąd powierzchnia trójkąta AED = $F_1 = \frac{AD \cdot g}{2}$; a że powierzchnia trapezoidu ABCD = F, przeto powierzchnia trójkąta BEC = $F_1 - F = F_2$. Teraz należy obliczyć powierzchnię F'_1 trójkąta AEF. Z rysunku wynika, że $AF = AE \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$, zatem $F'_1 = \frac{h_1}{2} \cdot AE \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$ gdzie $h_1 = AE$ czyli $F'_1 = \frac{h^2_1 \cdot \operatorname{tg} \varepsilon}{2}$

Wkońcu powierz. reszty, t. j. trójkąta AFD = $F_1 - F'_1 = F'_2$.

Celem ułatwienia pamięci, naznaczono powierzchnie trójkątów F_1 F'_1 i F_2 odpowiednimi literami przy ich podstawach — powierzchnia trapezoidu ABCD = F w środku figury — zapamiętać tylko potrzeba $F'_2 = AFD$.

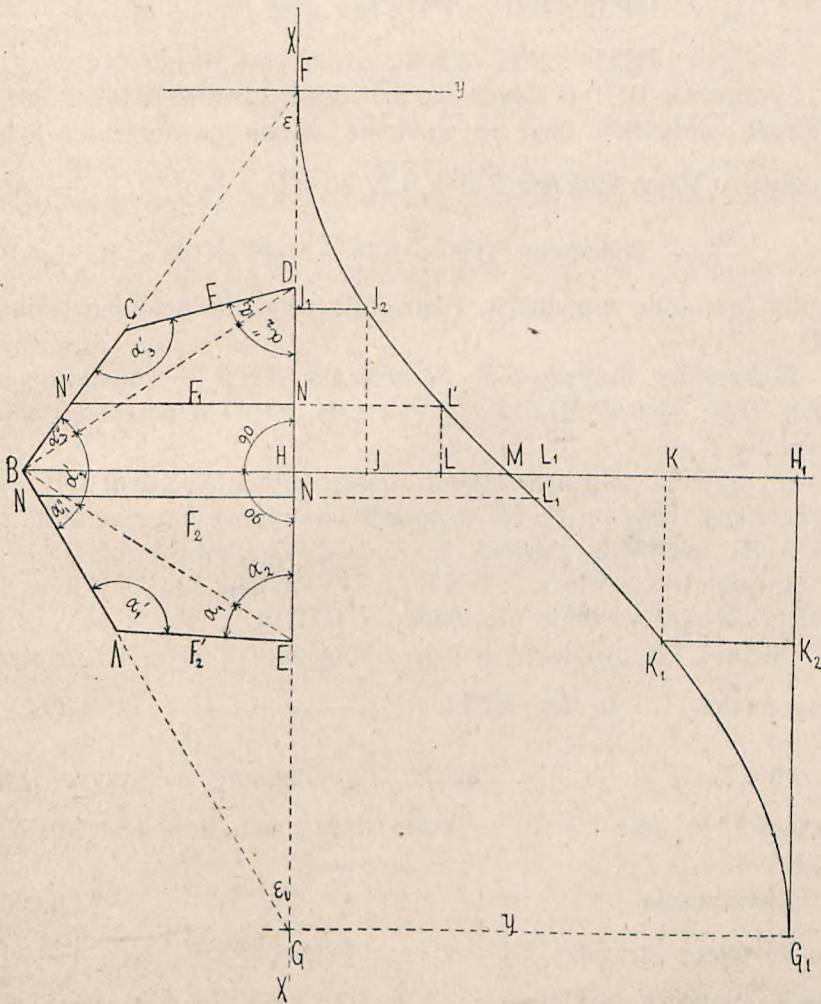
Przypuścimy, że powierzchnię trapezoidu ABCD = F podzielić mamy na 4 części: f_1 f_2 f_3 i f_4 równe, lub w pewnym stosunku. Przedewszystkiem należy sprawdzić, czy ostatnia powierzchnia f_4 jest mniejsza czy większa od F'_2 — jeżeli $f_4 > F'_2$ to ostatnia część, jaką odetniemy z trójkąta AEF, będzie $f_4 < F'_2$ — to trójkąt AFD musimy traktować osobno, jako trójkąt o podstawie AF i wierzchołku D i w znany sposób odciąć zeń f_4 linią równoległą do podstawy. Krzywa $O_1 M_1$ odnosiłaby się wtedy do tegoż trójkąta.

Trapezoid został więc podzielony na żadaną ilość części linjami w danym kierunku. Zwykle będzie to kierunek prostopadły do jednego z boków, wzdłuż którego n. p. prowadzi droga. Linje podziału oznaczono przez $L_1 L_1 - L_2 L_2 - L_3 L_3$. Naturalnie, w tego rodzaju podziale, mają zająć różne wypadki, zależnie od kształtu zasadniczej figury ABCD — zawsze jednak możemy sobie dać radę jak tego dowodzi powyższy przykład. Położenie linii podziałowych określać należy tylko analitycznie. Rysunek służy tylko do orientacji.

§ 4. Dany jest nieregularny wielobok (rys. 200) ABCDE, zdjęty jak widać z rysunku, zapomocą podzielenia go na trójkąty ABE, EBD i DBC — w których pomierzono wszystkie boki. Mamy więc

wszystkie dane, ażeby obliczyć powierzchnię F wieloboku jakoteż kąty: $\alpha_1 \alpha'_1 \alpha''_1 - \alpha_2 \alpha'_2 \alpha''_2 - \alpha_3 \alpha'_3 \alpha''_3 -$

Pięciobok ten mamy podzielić na n części w pewnym stosunku linjami prostopadłymi do boku DE . Na przykładzie przyjęto 3 części, w stosunku jak $2 : 2.5 : 3.5$.



Rys. 200.

Wykreślmy z punktu B prostą BH prostopadłą do DE i przedłużmy boki BC i BA do przecięcia z przedłużeniami boku DE . Dostaliśmy teraz dwa trójkąty BFH i BGH . Całe to zadanie sprowadza się do poprzedniego przykładu.

Obliczmy powierzchnię $BCDH = F_1$ i powierzchnię trójkąta $CFD = F'_1$ —

Zaznaczyć należy, że trójkąty BFH i BGH są prostokątne, oraz, że kąty przy H są proste.

Z trójkąta BHD : $BH = BD \cdot \sin \alpha''_2$

„ BFH : $\alpha_2 + \alpha''_3 + \varepsilon + \alpha_2 = 180^\circ$ stąd ε

„ BFH : $BH = FH \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$ stąd $FH = h_1 = \frac{BH}{\operatorname{tg} \varepsilon}$

„ BHD : $DH = BH \cdot \cos \alpha''_2$ —

Czworobok $BCDH$ składa się z dwóch trójkątów: BCD i BHD , w których wszystkie boki są wiadome, zatem powierzchnia F_1 da się obliczyć. Mając długości FH i BF , bo $FH = h_1 = \frac{BH}{\operatorname{tg} \varepsilon}$ zaś

$BF = \frac{h_1}{\cos \varepsilon}$ obliczymy $DF = FH - DH$ i $CF = BF - BC$ zaś CD jest dane z pomiaru. Stąd obliczymy powierzchnię trójkąta $CFD = F'_1$ —

Wykreślmy krzywą FM do trójkąta BHF — odetnijmy na prostej HM odcinek $HI = F'_1$ to reszta, t. j. IM przedstawia powierzchnię F_1 —

W zupełnie taki sam sposób postąpimy z trójkątem BHD — i wykreślmy krzywą G_1M w sposób wskazany na rys. 200. Od punktu H_1 odetniemy odcinek $H_1K = F'_2$ (trójkątowi $AE G$) — to MK przedstawia powierz. $ABHE = F_2$ — Suma $IM + MK = IK$ przedstawia powierzchnię pięcioboku $ABCDE = F$.

Odcinek IK podzielmy w danym stosunku $2 : 2.5 : 3.5$ to otrzymamy punkty L i L_1 tak, że $IL = \frac{F}{2 + 2.5 + 3.5} \cdot 2$, $LL_1 = \frac{F}{2} \cdot 2.5$ i $L_1K = \frac{F}{8} \cdot 3.5$. Punkty te odrzucimy na krzywe i wykreślmy $L'N'$ oraz $L'_1N'_1$ — które dadzą nam linje podziału NN' i $N_1N'_1$ —

Analitycznie:

Równanie krzywej FM : $y = x^2 C$ gdzie $C = \frac{F_1 + F'_1}{n^2}$. Po-

łożenie punktu I jest określone, bo $HI = F'_1$ stąd równanie linii IL_2 równoległej do osi x ... $y = F'_1$ — co wstawimy w rów. krzywej, zatem $F'_1 = x^2 C$, a stąd dostaniemy x , czyli punkt I_1 (punkt ten nie jest potrzebny — obliczenie przeprowadziliśmy jedynie jako przykład).

Położenie punktu L : $HL = F'_1 + f_1$ stąd równanie linii LL' : $y = F_1 + f_1$ — a wstawiwszy tę wartość za y w równaniu krzywej,

dostaniemy punkt L' czyli x t. j. punkt N, licząc od punktu F. Położenie punktu N od punktu D znajdziemy z równania

$$DN = x - FD = FN - FD.$$

Położenie punktu N' na linii FB znajdziemy z równania:

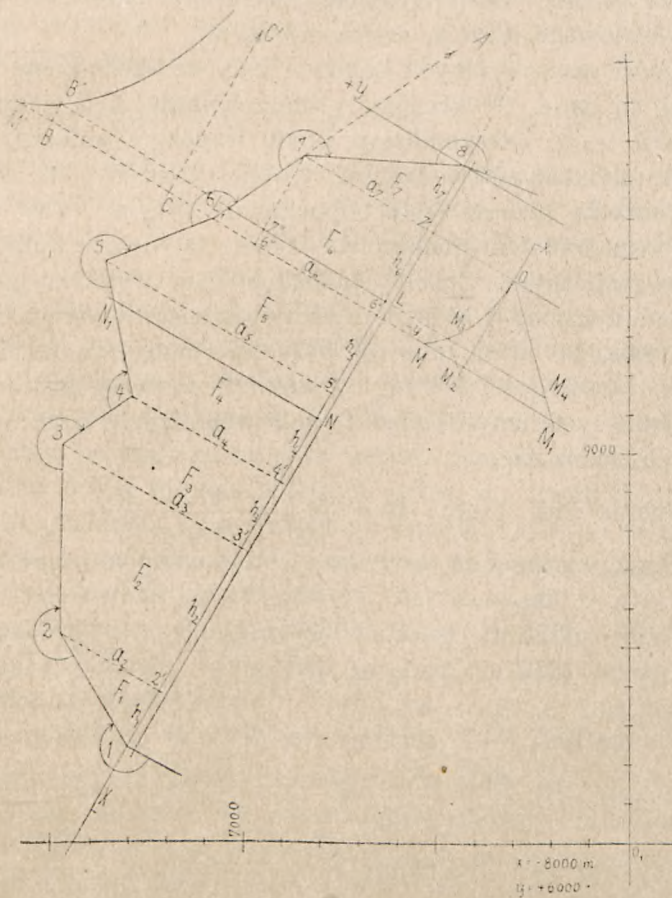
$$FN' = \frac{FN}{\cos \varepsilon} \text{ a że znana jest długość CF, więc położenie}$$

punktu N' na boku BC, licząc od wierzchołka C będzie:

$$CN' = FN' = CF.$$

Analogicznie znajdziemy punkty N_1 i N'_1 czyli obie linie podziałowe będą ściśle określone.

§ 5. Przypuśćmy, że większy obszar, n p. kilku tysięcy hektarów, ma być podzielony na drobne parcele. Obszar ten został zdjęty



Rys. 201.

zapomocą 4 rzędnej tryangulacji i wieloboków, następnie drogami zaprojektowanymi w odpowiednich kierunkach, podzielony na większe partje. Wkońcu przychodzi szczegółowy podział na parcele, o granicach zwykle prostopadłych do kierunku dróg. Partje położone między drogami łatwo jest podzielić, bo tam wypadają prawie wyłącznie regularne prostokąty. Natomiast partje przy granicach danego obszaru, są zwykle nieregularne. Taką partję przedstawia rys. 201.

Dany jest obszar, ograniczony z jednej strony drogą, z drugiej ma nieregularną granicę, zajętą jako wielobok 1, 2, 2... 8 — współrzędne tych punktów: $x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_7 y_8$ — są dane. Obszar ten podzielić mamy na n równych części linjami prostopadłymi do drogi, t. j. do kierunku 1—8. Współrzędne odnoszą się do krajowego układu osi, bo zdjęcie zostało nawiązane do punktów tryangulacyjnych. U dołu, na prawej stronie rysunku nakreślono układ osi, równoległych do krajowego układu, celem orientacji.

Długości poszczególnych boków i kąty wierzchołkowe 1, 2,... 8 wieloboku są dane. Wykreślmy z wierzchołków 1, 2... prostopadłe do kierunku 1—8. Otrzymaliśmy wtedy trapezy i trójkąty, których podział nie przedstawiałby żadnych trudności, gdyby, jak w poprzednich zadaniach, podane były odpowiednie długości boków i przekątni, z bezpośrednich pomiarów. Jeszcze łatwiejszy byłby podział sposobem graficznym. Chcemy jednak podział wykonać bardzo dokładnie, analitycznie, w którym to celu poświęcić trzeba więcej pracy. Przedewszystkiem mieć musimy wszystkie dane, do obliczenia powierzchni, t. j. długości boków i wysokości poszczególnych figur — do znalezienia tych danych, posłużą nam współrzędne punktów wierzchołkowych, mianowicie:

$$\text{Równanie linii 1—8... } (y - y_1) = \frac{y_8 - y_1}{x_8 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad 1$$

po wstawieniu wartości za $y_8 y_1 x_8 x_1$ otrzymamy równanie kształtu:

$$y = m x + b -$$

$$\text{n. p. } \begin{matrix} y_8 = - 3260 \text{ m} & y_1 = + 580 \text{ m} & y - y_1 = \frac{- 2680}{- 1440}(x - x_1) \\ x_8 = + 1250 \text{ m} & x_1 = + 2690 \text{ m} & \end{matrix}$$

$$y = 1.86 x - 4433.4.$$

Równanie linii 7—7' prostopadłej do 1—8 czyli:

$$(y - y_7) = - \left(\frac{x_8 - x_1}{y_8 - y_1} \right) (x - x_7) \quad 2$$

wstawiwszy wartości otrzymamy równ. kształtu $y = - \frac{1}{m} x + b_1$.

$$\text{n. p. } \begin{matrix} y_7 = - 2600 & y - y_7 = - \frac{1440}{2680}(x - x_7) & \text{czyli } y = - \frac{1}{1.86}x - 1169.9 \\ x_7 = 800 & \end{matrix}$$

Punkt przecięcia obu tych linii t. j. punkt 7' dostaniemy, wstawiając y z równ. 2 w równ. 1 — wtedy bowiem mieć będziemy jedno równanie o jednej niewiadomej x — którą też obliczymy, a gdy znowu x wyrażone przez y z równ. 2 wstawimy w równ. 1 to dostaniemy y — Obliczymy zatem $x_{7'}$ i $y_{7'}$ — W ten sam sposób obliczymy współrzędne punktów 2' 3'... 6'.

Długość odcinków $7 - 7' = a_7$ oraz $7' - 8 = h_7$ obliczymy

$$\text{z równań: } a_7 = \sqrt{(y_7 - y_{7'})^2 + (x_7 - x_{7'})^2} \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

$$h_7 = \sqrt{(y_{7'} - y_8)^2 + (x_{7'} - x_8)^2} \quad . \quad . \quad . \quad 4$$

Długości te traktujemy zawsze jako dodatnie.

$$\text{Stąd obliczy się powierz. trójkąta } 7 7' 8 = F_7 = \frac{a_7 h_7}{2} \quad . \quad 5$$

W podobny sposób obliczymy $a_6 h_6 \dots a_1 h_1 \dots$

zatem i powierzchnie trapezów: $F_6 F_5 \dots$ i ostatniego trójkąta F_1 .

$$\text{Nazwijmy sumę: } F_1 + F_2 + \dots + F_7 = F \quad . \quad . \quad . \quad 6$$

oraz $\frac{F}{n} = F_0$ to porównując powierzchnię $F_7 = F_0$ od razu zobaczymy

czy cała ta powierzchnia przejdzie do odciać się mającej części i jeszcze z trapezu F_6 trzeba będzie części dodać, czy też F_7 trzeba podzielić. Jeżeli $F_0 > F_7$ — to trójkąt $7 7' 8$ wcale ruszać nie będziemy, natomiast z trapezu F_6 odetniemy część $F_0 - F_7$ przyłączając je do trójkąta F_7 jako jedną nową parcelę. To samo odnosi się do dalszych figur. Podział skuteczny według § 2, przyjmując nowy układ współrzędnych, mianowicie linię 1 — 8 jako oś x, punkt 8 jako początek układu, zaś prostopadłą do osi x jako oś y.

Dla tego naszego układu, są odcinki $8 - 7'$, $8 - 6'$ i t. d. odciętemi punktów 7, 6... zaś obliczone już $a_7 a_6 \dots$ rzędnymi tych punktów. Linje podziału oraz położenie punktów $L L_1 \dots$ wyznaczmy analitycznie zapomocą równań tych linii i punktów przecięcia ich z linjami granicznymi, co nie przedstawia trudności.

Poprzestając na niniejszej dokładności, możemy taki podział skutecznie graficznie, wykreślając krzywe $y = x^2$ C — bardzo łatwo i w krótkim czasie. Im skala rysunku jest większą, tem większa będzie dokładność.

Następujący przykład liczbowy odnoszący się do rys. 201 — przedstawi tak obliczeń, przyczem wprowadzamy ułatwienie w ten sposób, że każdy trójkąt względnie trapez $F_1 E_2 \dots F_7$ traktuje się osobno, przyjmując dla każdego z nich inny początek układu współrzędnych. Przytem jednak należy zwrócić uwagę na to, że ani krzywych, ani układów wykreślać nie potrzeba. Szkicujemy je od ręki

tylko w tym celu, że szkic taki ułatwia przegląd i postępowanie obliczenia, nie nużąc umysłu i pamięci.

Przykład (rys. 201).

Dane:

$$\begin{aligned} y_1 &= + 1304 \text{ m} & x_1 &= - 245 \text{ m} & y_5 &= + 1360 \text{ m} & x_5 &= - 1494 \text{ m} \\ y_2 &= + 1480 \text{ „} & x_2 &= - 532 \text{ „} & y_6 &= + 1075 \text{ „} & x_6 &= - 1602 \text{ „} \\ y_3 &= + 1475 \text{ „} & x_3 &= - 1020 \text{ „} & y_7 &= + 843 \text{ „} & x_7 &= - 1763 \text{ „} \\ y_4 &= + 1305 \text{ „} & x_4 &= - 1145 \text{ „} & y_8 &= + 455 \text{ „} & x_8 &= - 1637 \text{ „} \end{aligned}$$

Na rysunku wykreślono układ, którego początek O_1 ma współrzędne $x = - 8000 \cdot 0 \text{ m}$ $y = + 6000 \text{ m}$. Rzędne $y_1 y_2 \dots y_8$ są zatem zmniejszone o 6000 m — podobnie odcięte o 8000 m .

Równanie linii 1 — 8: $y - y_1 = \frac{y_8 - y_1}{x_8 - x_1} (x - x_1)$ po wstawieniu wartości za $y_8 \dots x_8 \dots$ otrzymamy:

$$y = 0 \cdot 61 x + 1453 \cdot 45 \quad \dots \quad 7$$

sprawdzenie: dla $x = 0 \dots y = + 1453 \cdot 45 \text{ m}$

dla $y = 0 \quad x = - 2382 \cdot 6 \text{ m}$ co zgadza się z rysunkiem.

Następnie: równanie linii 7 — 7' prostopadłej do 1 — 8:

$$y - y_7 = - \frac{1}{0 \cdot 62} (x - x_7) \quad \text{czyli } y = - 1 \cdot 64 x - 2048 \cdot 3 \quad \dots \quad 8$$

dla $x = 0 \dots y = - 2048 \cdot 5$ dla $y = 0 \dots x = - 1250$

również zgodnie z rysunkiem, z tą uwagą, że z powodu skrócenia rzędnych o 6000 m — rzędne y na prawo od O_1 — muszą wypadać ujemnie. Z równań 7 i 8 otrzymamy punkt przecięcia obu tych prostych t. j. — 7' wstawiając za y w równ. 7 wartość y z równ. 8.

Zatem $- 1 \cdot 64 x - 2048 \cdot 3 = 0 \cdot 61 x + 1453 \cdot 45$

stąd $x = - 1611 \cdot 88 \text{ m} = x_{7'}$

oraz $y = + 531 \cdot 21 \text{ m} = y_{7'}$ —

Teraz znajdziemy długość a_7 i h_7 z równań 3 i 3':

$$a_7 = \sqrt{(y_7 - y_{7'})^2 + (x_7 - x_{7'})^2} = 400 \cdot 3 \text{ m}$$

$$h_7 = \sqrt{(y_{7'} - y_8)^2 + (x_{7'} - x_8)^2} = 146 \cdot 9 \text{ m}$$

$$\text{stąd } F_7 = \frac{a_7 \cdot h_7}{2} = 29402 \cdot 03 \text{ m}^2.$$

Przejdziemy teraz do trapezu F_6 .

Równanie linii 6 6' także prostopadłej do 1 — 8:

$$y - y_7 = - \frac{1}{0 \cdot 61} (x - x_6) \quad \text{stąd } y = - 1 \cdot 64 x - 1552 \cdot 39 \quad \dots \quad 9$$

Punkt przecięcia 6' z równań 7 i 9: $x = - 1335 \cdot 8 \text{ m} = x_{6'}$

$y = + 638 \cdot 4 \text{ m} = y_{6'}$

Wkońcu a_6 i h_6 —

$$a_6 = \sqrt{(y_6 - y_{6'})^2 + (x_6 - x_{6'})^2} = 511.5 \text{ m.}$$

$$h_6 = \sqrt{(y_6 - y_{7'})^2 + (x_{6'} - x_{7'})^2} = 206.0 \text{ m.}$$

$$\text{Zatem } F_6 = \frac{a_7 + a_6}{2} \cdot 206 = 93915 \text{ m}^2.$$

Przypuśćmy, że pierwsza parcela, jaką mamy odciąć, wynosić ma $f_1 = 100,000 \text{ m}^2$. Do tej parceli zatem przypadnie cały trójkąt F_7 a nadto z trapezu F_6 trzeba odciąć resztę, t. j. $100,000 - 29404 = 70598 \text{ m}^2$.

Postąpimy tu w następujący sposób:

Wykreślmy prostą $7-6''$ prostopadłą do $6-6'$ to trapez podzieli się na prostokąt o powierzchni $F' = a_8 \cdot h_6 = 82462 \text{ m}^2$

$$\text{i trójkąt o powierzchni } F'' = (a_6 - a_7) \cdot \frac{h_6}{2} = 11453 \text{ m}^2.$$

Przyjmijmy w punkcie O na przedłużeniu linii $7-7'$ początek układu, mianowicie: Oś x równoległą do linii $1-8$ — oś y prostopadłą do niej. Odetnijmy $P M_1 = F'$, z lewej zaś strony wykreślmy krzywą OM dla trójkąta $7-6''-6$ — w znany sposób. Wówczas odcinek $MM_1 = F' + F''$. Rzędne, zawarte między prostą OM , i krzywą OM , przedstawiają powierzchnię trapezów o wysokościach odpowiadających odciętym x . Równanie linii OM : Podzielmy prostokąt F' liniami równoległymi do podstawy na n części o różnych wysokościach, podobnie jak dzielimy trójkąt. Wysokość odetnijmy na osi x a na odpowiednich rzędnych odetnijmy powierzchnie prostokątów o podstawie „ a ” i wysokościach: $1 h_1 \ 2 h_2 \ 3 h_3 \ \dots \ n h_n$ to rzędne przedstawiają powierzchnie, zatem

$$y_1 = f_1 = a \cdot h_1 = a \cdot x_1 \ \dots \ y_2 = 2 f_1 = 2 a h_1 = 2 a x_1 = a \cdot x_2$$

$$\text{wreszcie } y_n = F' = n \cdot a h_1 = a \cdot h = a \cdot x$$

Stąd równanie prostej $OM_1 \dots y = a \cdot x \dots 10$ jako prostej, przechodzącej przez początek układu O .

Przypuśćmy, że z trapezu $6-7-7'-6'$ — mamy odciąć powierzchnię F'' , linią równoległą do podstawy $6-6'$. W tym celu odetniemy długość $M_1 M_2 = F''$ w skali i z punktu M_2 wykreślmy równoległą $M_2 M_3$ do OM_1 — otrzymamy punkt M_3 i sumę rzędnych $M_3 M_4$ między krzywą, a prostą OM_1 — która, jak widać z rysunku, jest równa $= F''$ t. j. $M_3 M_4 = M_2 M_1 = F''$. Z punktu M_3 wykreślona równoległa do podstawy, przetnie boki trapezu w punktach L i L_1 dając linię graniczną LL_1 .

Analitycznie:

Postąpimy w ten sam sposób jak w § 2. Przedłużmy bok $6-7$ aż do przecięcia się z linią $1-8$ w punkcie A — z punktu 7 wy-

kreślmy 7—6'' prostopadle do 6—6'. Z trójkątów podobnych 6 6'' 7 i 6 6' A — obliczymy:

$$6-6'' : 6-6' = 7-6'' : 6' A, \text{ gdzie niewiadomą jest tylko } 6' A.$$

$$6-6'' = a_6 - a_7 = 511.5 - 400.3 = 111.2 \text{ m.}$$

$$6-6' = a_6 = 511.5$$

$$7-6'' = h_6 = 206.0 \text{ stąd: } 111.2 : 511.5 = 206 : 6' A.$$

$$\text{Wkońcu } 6' A = h_0 = \frac{206 \cdot 511.5}{111.2} = 947.6 \text{ m} \quad \dots \quad 11$$

$$\text{Powierzchnia trójkąta } 6 A 6' = F_0 = a_6 \cdot \frac{h_0}{2} = 511.5 \cdot \frac{947.6}{2} = 242348.7 \text{ m}^2.$$

$$\text{Powierzchnia trójkąta } 7 A 7' = F_0' = F_0 - F_6 = 148,433.7 \text{ m}^2.$$

Z trójkąta 6 A 6' mamy odciąć powierzchnię: $F_0' + 70598 \text{ m}^2$ t. j. razem $F_0'' = 219,031.7 \text{ m}^2$.

Na lewej stronie naszkicowana jest krzywa OM' dla trójkąta 6 A 6' równanie jej: $y = C x^2$ gdzie $C = \frac{F_0}{n^2}$ dla $n = 100$ to jest $y = 24.23 \cdot x^2$.

Odetnijmy $CB = F_0'' = 219,031.7 \text{ m}^2$ w skali — odrzućmy punkt B do B' a stąd równolegle do podstawy, da linię graniczną. Przyjmując C' C jako oś x — znajdziemy punkt B' jako punkt przecięcia krzywej z prostą BB' równoległą do osi x.

Równanie linii BB' ... $y_b = BC \dots y_6 = F_0'' \dots \dots \dots 12$ wstawmy y_b za y w równanie krzywej, to otrzymamy:

$$24.23 x^2 = F_0'' \text{ czyli } 24.23 x^2 = 219,031.7$$

stąd $x = 95 \dots$ Jest to jednak odcięta, liczona od punktu A w jednostkach $\frac{h_0}{100} = \frac{947.6}{100} = 9.476 \text{ m}$. Jeżeli więc dla x jednostką jest 9.476 m, zatem gdy $183 x = 95$ takich jednostek, to x wyrażone w metrach wyniesie:

$$x = 95 \cdot 9.476 \text{ m} = 902.4 \text{ m} = AL.$$

A ponieważ A 6' według równania 11 wynosi 947.6 m przeto odległość punktu L od punktu 6' wyniesie $947.6 - 902.4 = 45.2 \text{ m}$.

Położenie punktu L' względem punktu 7:

$$\text{Długość boku } 6' 7 \text{ jest znana i wynosi } a = 234.1 \text{ m}$$

$$\text{długość } 6-6'' = b = 111.2 \text{ ,,}$$

$$\text{Stąd: } h_6 = a \cdot \cos \varepsilon \text{ czyli } \cos \varepsilon = \frac{h_6}{a} = \frac{206}{234.1} = 0.88$$

$$\text{zatem } AL_1 = \frac{AL}{\cos \varepsilon} = \frac{902.4}{0.88} = 1025.4 \text{ m.}$$

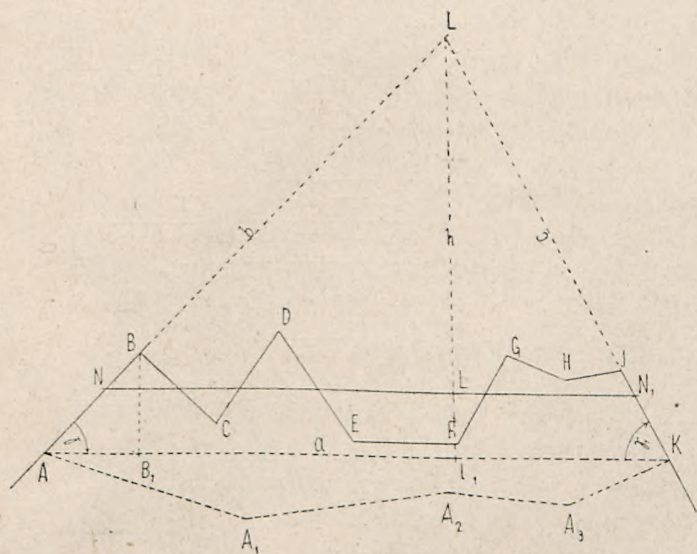
Możemy więc powyżej wskazanym sposobem, analitycznie zatem z wielką dokładnością wykonać podział obszarów mających nie-

regularne granice. Wymaga to trochę pracy biurowej, lecz w zamian daje pewność i dokładność, która znów jest konieczną w wypadkach sporów lub podziale gruntów drogich, jakkolwiek w każdym wypadku dążyć powinniśmy do osiągnięcia możliwej dokładności, zwłaszcza, gdy nakład pracy nie jest kosztowny.

REGULACJE GRANICY (rys. 202).

§ 6. Przyjmujemy, że nieregularną granicę $A B C \dots I K$ — mamy wyrównać w jedną linię prostą, w ten sposób, ażeby powierzchnia obszaru nie została ani zmniejszoną, ani zwiększoną, t. zn. część gruntów, jaką przytem potrzeba będzie zabrać sąsiadowi, ma być wyrównana taką samą powierzchnią, jemu oddaną z danego obszaru.

Jeżeli długość nieregularnej granicy jest znaczna, to najlepiej zająć ją zapomocą wieloboku i albo nawiązać do sieci tryangulacyjnej, albo, gdyby to nie było potrzebne, to przyjąć dowolny jakis układ i wielobok do niego zorjentować.



Rys. 202.

Zanim jednak potrzebne będą kierunki $(A B)$ i $(K I)$ i współrzędne tych punktów. Te zaś możemy odjąć zapomocą dowolnego wieloboku $B A A_1 A_2 \dots K I$, natomiast samą granicę odjąć w jakikolwiek sposób, tak, by ją w planie można było dokładnie narysować. Mając współrzędne punktów A i K , znajdziemy kierunek $(A K)$ i długości $A K$. — Gdyby zaś granica była zdjęta metodą wielobokową, to wówczas można powierzchnię F_1 między granicą a linią

Obliczone x_2 odetnijmy na rysunku na wysokości trójkąta, t. j. od L do L_2 — i przez L_2 poprowadźmy linię równoległą do AK — a otrzymamy nową granicę prostą NN_1 odpowiadającą postawionym warunkom.

$$\text{Długość } LN = \frac{x_2}{\sin \gamma} \text{ podobnie } LN_1 = \frac{x_2}{\sin \gamma_1} \quad . \quad . \quad . \quad 9$$

gdzie $\gamma_1 = (KL) - (KA)$ 10

Możemy też obliczyć: $\sin \gamma = BB_1 : AB$ — gdzie długość AB jest dana, zaś BB_1 znajdziemy z równań: linii AK i prostopadłej do niej BB_1 — dostaniemy wówczas współrzędne punkta przecięcia obu linii, t. j. punkt B_1 — a więc zapomocą współrzędnych punktów B i B_1 , obliczymy długość BB_1 .

Wkońcu położenie punktu N względem A :

$$AN = AN - LN \text{ i podobnie } KN_1 = KL - LN_1 \quad . \quad . \quad . \quad 11$$

Na tem ukończy się zadanie z matematyczną dokładnością wykonane.

§ 7. Granicą AB ukośną do drogi, zamienić na inną, prostopadłą do kierunku drogi z warunkiem, by obie sąsiadujące parcele pozostały co do powierzchni niezmiennione (rys. 203).

Wykreślmy AC i DC prostopadle do kierunku AD . Otrzymamy wtedy trapez $ACBD$ w którym pomierzmy boki i przekątnie, n. p. AB i kąty α i β — Zmierzywszy bowiem przekątnie AB i kąt β , którego wierzchołek B i kierunki ramion są w polu dane, obliczymy na miejscu:

$$AD = AB \cdot \cos \beta \quad . \quad . \quad . \quad 1$$

Odmierzmy więc A i D

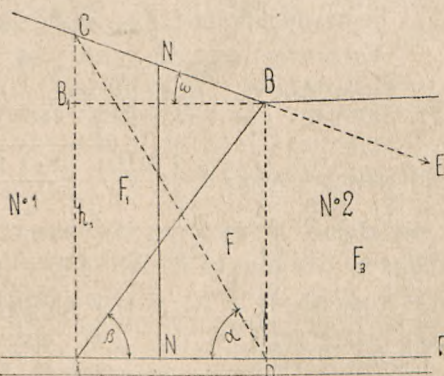
i mając punkt D zmierzmy kąt α . Resztę pracy wykona się już w biurze.

$$\text{Pozostaje do obliczenia: } BD = AB \cdot \sin \beta = h_1 \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

$$\text{oraz } AC = AD \cdot \operatorname{tg} \alpha = h_2 \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

$$\text{Stąd } F_1 = AD \cdot \frac{h_1}{2} \text{ i } F_2 = AD \cdot h_2 \quad . \quad . \quad . \quad 4$$

Trapez $ACBD$ należy teraz podzielić linią równoległą do AC tak, by przy pacaeli Nr. 1 pozostała powierzchnia F_1 ($F_1 = CAD$ — zaś przy parceli Nr. 2 powierzchnia $F_2 = ADB$).



Rys. 203.

ROZDZIAŁ XIV.

MAPY TOPOGRAFICZNE.

§ 1. Pod nazwą „topografja“ rozumiemy przedstawienie powierzchni ziemi na rysunku w małej skali, począwszy od 1:25000 i mniejszych, a to nie tylko wszelkich naturalnych i sztucznych przedmiotów w rzucie poziomym czyli w planie, ale także konfigurację terenu co do wysokości. Mapy takie sporządza się albo zapomocą bezpośrednich zdjęć, albo też zapomocą pomniejszenia planów katastralnych i zdjęć sytuacyjnych w większej skali i uzupełnienia rysunku co do konfiguracji terenu.

Dzisiaj wszystkie kulturalne kraje mają mapy topograficzne, ustawicznie uzupełniane w miarę zmian, jakie z czasem powstają, n. p. nowe drogi, koleje, kanały, przez wzrost wszelkich osad ludzkich, regulację rzek i t. p. W tem miejscu wypada zwrócić uwagę Czytelników na dzieło p. t. „Polska kartografja wojskowa“ zarys historyczny, napisane przez Bolesława Olszewicza, na podstawie sumiennie zebranych dat.

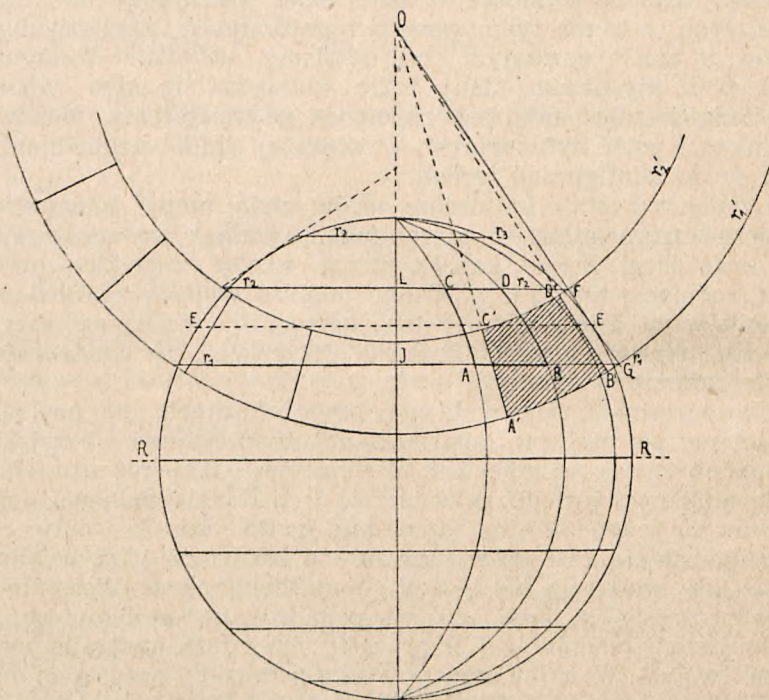
Nowoczesnych, własnych map topograficznych, nie posiadamy. Posługujemy się mapami austriackimi, niemieckimi i rosyjskimi. Mapy te oparte są na zdjęciach stolikowych i takimiż uzupełniane. Metoda stolikowa jest już przestarzałą i co do dokładności, nie da się porównać z teodolitową, która daje nadto wszelkie daty cyfrowe, na podstawie których zawsze da się odtworzyć plan oryginalny, podczas gdy stolikowa nie jest w stanie dostarczyć. Wszystkie też państwa europejskie, mimo posiadanych już zdjęć stolikowych, przeszły do metody teodolitowej. W pracach tych jednak nastąpiła przerwa wskutek wojny. W najbliższej przyszłości musimy przystąpić do wykonania zdjęć katastralnych, bez których gospodarstwo krajowe obejść się nie może, a przytem i do nowych map topograficznych. Na razie, instytut geograficzny wojskowy, zajmuje się uzupełnieniem map i przerabianiem ich. Dotychczas opracowano znaki topograficzne map polskich w skali 1:100000. Taktyczna mapa 1:100000 ma być trójbarwna, mianowicie: rzeki i wody kolorem błękitnym, warstwie kolorem brunatnym, pozostałą zaś sytuację kolorem czarnym. Pionowy układ terenu, będzie zatem przedstawiony zapomocą warstwie, co jest i lepszem pod każdym względem od sposobu kreślowania.

Przedewszystkiem wykonywa się mapę podstawową w skali 1:25000 a z tej, zapomocą pomniejszenia, mapy topograficzne w mniejszej skali. Sporządzanie tych map, należy do kartografji.

Reprodukcję map skuteczniejszą się zapomocą miedziorytów i jest to najlepszy, lecz najdroższy sposób, litografji i wkońcu cynkografji t. j. klisz fotograficznych, przeniesionych na płytę cynkową. Ten ostatni sposób jest najłatwiejszy.

SIATKA MAPY TOPOGRAFICZNEJ,

§ 2. W opisie prostokątnego układu współrzędnych mówiliśmy, że nawet znaczne powierzchnie ziemi można na planach przedstawić jako płaskie, bo różnice długości łuków na ziemi, a rzutów ich na poziom pozorny są tak małe, że pomiarami skonstantować się nie dadzą, czyli znajdują się w granicach błędów dozwolonych —



Rys. 204.

n. p.: kątowni środkowemu kuli ziemskiej 15 minut, odpowiada długość łuku 27781·575m. podczas gdy długość stycznej wynosi 27781·65m. czyli różnica 7·5cm. na takiej długości jest nic nie znacząca. Dla planów katastralnych przeto najzupełniej wystarczy prostokątny układ współrzędnych i traktowanie znacznych powierzchni jako płaskich. Tak n. p. dla Małopolski przyjęto jeden układ współrzędnych prostokątnych, mający początek na Kopcu Unji Lubelskiej. Mapy topograficzne, jednak sporządzone są w małej skali tak, że jedna karta obejmuje zależnie od skali powierzchnię 40 do 120 razy większą, niż te same wielkości karta katastralna i uwzględnić tu już musimy

współrzędne geograficzne, czyli kształt ziemi. Kulisty, wzgl. elipsoidalny lub geoidalny kształt ziemi, nie da się przedstawić na płaszczyźnie rysunku. Musimy przeto trudność tą ominąć, a poradzono sobie w następujący sposób:

Rys 204 przedstawia w rzucie kulę ziemską — Linje $RR_1 r_1 r_1 r_2 r_2 \dots$ są równoleżnikami ($RR\dots$ równikiem) — południki zaś są łukami. Na rys. 204. podzielono ćwiartkę jednej półkuli na 4 części zapomocą równoleżników i południków. Zauważmy na tym rysunku wycinek powierzchni kuli $ABCD$ — wykreślmy w punkcie E między równoleżnikami r_1 i r_2 styczną aż do przecięcia z osią ziemską w punkcie O — i obróćmy tę styczną około tejże osi. Wówczas styczna zakreśli powierzchnię stożka, którą płaszczyzny równoleżników r_1 i r_2 przetną w dwóch kołach współśrodkowych, t. j. mających środek w O . Rozwińmy teraz powierzchnię stożka na płaszczyźnie rysunku, to otrzymamy płaski pas, ograniczony dwoma łukami, powstałymi z przecięcia płaszczyzn obu równoleżników z powierzchnią stożka. Pas ten będzie płaszczyzną horyzontu pozornego, styczną do kuli wzdłuż równoleżnika E . W taki sam sposób opisać możemy stożek na następnym pasie między r_2 i r_3 i rozwinąć odpowiedni pas horyzontu pozornego na płaszczyźnie rysunku. Z rysunku już wynika, że po rozwinięciu, równoleżniki będą łukami, natomiast południki, linjami prostymi. Wycinek kulisty $ABCD$, przedstawia się po rozwinięciu jako wycinek płaski $A'B'C'D'$, w rodzaju trapeza, w którym dwa boki są równoległymi:

Równoleżnik EE jest wspólny tak kuli, jak i stożkowi — zatem i długości geogr. na nim będą w rzeczywistości i na rysunku zgodne. Natomiast równoleżniki i południki inne, będą na rys. dłuższe niż na kuli, a różnica będzie tem większą, im szersze i wyższe będą pasy. Przyjąwszy jednostopniowe pasy, otoczmy kulę, wzgl. elipsoidę ziemską wielościanem, którego powierzchnie ścian, będą się bardzo mało różniły w powierzchni wycinków kulistych. Ścisłe biorąc, różnice w kierunkach będą i dadzą się obliczyć — praktycznie jednak, będą one znikome. Na tem polega urządzenie siatki map topograficznych.

Specjalna karta topogr. austriacka, w skali 1:75000 oparta jest na siatce trapezowej o 15' szerokości i 30' dług. geogr. Na tej długości, są więc równoleżniki linjami prostymi, mianowicie, cięciwami łuków, o których powyżej mówiliśmy. Różnica długości boków równoległych jest tak małą, że okiem zauważyć jej nie można.

MAPY TOPOGRAFICZNE WOJSKOWE.

1. Mapy polskie.

§ 3. W § 1. wspomniane dzieło p. B. Olszewicza daje wyczerpujący obraz rozwoju naszej topo- i kartografji.

2. Mapy austriackie.

W ostatnim 10 leciu ub. wieku ukończono zdjęcia topogr. całego państwa. Mapy zasadnicze, w skali 1:25000 wykonano na pod-

stawie istniejących planów katastralnych, biorąc z nich potrzebne szczegóły, a opuszczając niepotrzebne, jak granice pojedynczych parcel i t. p. Plany te zmniejszono tak, by szczegóły pomieściły się i zgodziły w granicach stałych punktów, t. j. tryangulacyjnych, następnie uzupełniono je zdjęciami topograficznymi punktów, tak co do położenia ich w sytuacji jak i pomiarami wysokości. Wysokości mierzone metodą barometryczną wzgl. trygonometryczną, mając jako kontrolę i podstawę do wyrównania błędów sieć punktów stałych i ściśłą ich niwelację. W ostatnich latach używano do zdjęć również fotogrametrii.

Z tego, oryginalnego zdjęcia, zapomocą pomniejszenia, wykonano:

- a) Mapę szczegółową czyli specjalną w skali 1:75000.
- b) Mapę ogólną czyli generalną w skali 1:200000.
- c) Mapę pochodową w skali 1:300000.
- d) Mapę przeglądową w skali 1:750000.

Karta mapy szczegółowej, jak wspomniano w poprzednim § — jest trapezem, o szerok. 15' i dług. 30' — górny brzeg karty, czyli równoległy bok trapezu, jest krótszy o niespełna 1 mm od dolnego. Oba te boki są cięciwami rozwiniętego ze stożka łuku równoleżnika. Obszar całego państwa pokryto siecią trapezów powstałych z rozwinięcia odpowiednich pasów stożków opisujących odnośną część kuli ziemskiej, jak to wynika z § 1. Pasy oznaczono numerami arabskimi, idąc od północy do południa, kolumny między południkami zaś, cyframi rzymskimi od zachodu na wschód

Każda z kart, oznaczona jest liczbą pasa i kolumny, a nadto zatytułowana nazwą głównej miejscowości.

Brzegi karty mają obwódkę z podziałem na minuty dług. i szer. geogr. Każda karta ma wykreśloną podziałkę w km i tysiącach kroków po 75 cm krok.

Szkielec map, t. j. plan sytuacyjny, przedstawia wszystkie przedmioty w rzucie poziomym, zatem drogi, wody i ich brzegi, pola i ich kulturę, lasy i granice ich są wyrysowane wiernie w skali.

Inne przedmioty, ważne jako punkty orientacyjne, oznaczone są zapomocą przyjętych znaków, lecz nie są zgodne z ich rzutami.

Klucz przyjętych znaków, podany jest zawsze na karcie — ostatni klucz pochodzi z r. 1904/5.

Konfiguracja terenu, t. j. ukształtowanie w kierunku pionowym, przedstawione jest na mapach zapomocą kresek i po części warstw. Napisy mają kierunek równoległy do północnego brzegu mapy i umieszczone są tak, by nie zakrywały ważniejszych miejsc terenu. Nazwy rzek biegną wzdłuż nich, podobnie nazwy łańcuchów gór. Oznaczone są również obszary wzgl. kultury, odpowiednimi nazwami, na środku tychże.

Różne rodzaje pisma, podobnie jak znaki, mają określone znaczenie. Z nich odczytuje się i poznaje wielkości osad, miast i miasteczek, ilość mieszkańców — umieszcza się też przy nich liczbę domów. Wzorów tych napisów nie przytaczamy, natomiast podamy

w dalszym ciągu napisy i znaki przyjęte w polskich mapach a bardzo podobne do tamtych.

Jeżeli pod nazwą pewnej miejscowości umieszczona jest liczba w takim charakterze, w jakim oznaczone są wysokości, to odnosi się ona do wysokości progu głównych drzwi kościoła. Jeżeli kościołów jest więcej, to odnośny kościół oznaczony jest czarnym punktem w środku kołka. Jeżeli kościół oznaczony jest trójkątem z krzyżem, to oznacza, że środek podstawy wieży jest punktem tryangulacyjnym. Podobne liczby przy mostach, oznaczają wysokość pomostu, przy wodach, normalny poziom, przy kolei wierzch szyny, wszędzie indziej, do powierzchni ziemi.

Miejscowości: miasta, miasteczka, wsie i t. d. przedstawione są na mapie z uwzględnieniem sieci ulic i grup domów. Szerokość ulic przedstawiona jest zawsze ponad podziałkę, mianowicie: ulica mierząca na mapie 0,5 mm jest zdadną do przejazdów zaprzęgów wojskowych — inne, 0,25 mm szer. tylko dla pieszych.

Poczta, telegraf wzgl. telefon w danej miejscowości zawsze jest na mapie zaznaczony.

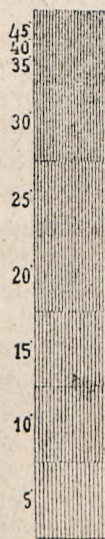
Drogi, zależnie od ich rodzaju, oznaczone są podwójniami lub pojedynczemi linjami. — Rowy zaznacza się tylko wtedy, gdy szerokością swą stanowią przeszkodę dla przejścia. Nasypy wyższe od 1 m oznacza się — natomiast nie oznacza się wcale dróg wiodących do obiektów fortyfikacyjnych. Wykopy, nasypy, serpentyny, groble, rodzaje dróg, t. j. polne, leśne, dobrze utrzymane lub nie, szosy, oznaczone są zapomocą odpowiednich znaków na mapie, tak, że zawsze dadzą się wszelkie te szczegóły odczytać.

Ukształtowanie terenu w kierunku pionowym (orograficznie) oznaczają mapy austriackie zapomocą kreskowania czyli cieniowania. Płaszczyzna pozioma jest zupełnie jasną — im więcej się pochyla, tem jest ciemniejszą. Dlatego partje poziome zostawia się jako białe, inne, mniej lub więcej pochylone, kreskuje się odpowiednio cieńszymi lub grubszymi linjami, zależnie od stopnia pochylenia.

W najnowszych mapach skala cieniów ma 7 odmian jak na rys. 205 — w dawniejszych 10. Pochylenie od 45° uważa się już jako niedostępną ścianę.

Orientowanie się w cieniowaniu jest bardzo trudne nawet po dłuższem ćwiczeniu oka. Kreski mają zawsze kierunek prostopadły do warstwic, są zatem proste lub wygięte, dłuższe lub krótsze zależnie od warunków. Kierunek kresek jest kierunkiem największej pochyłości.

Mapa ogólna 1:200000. Karta szczegółowa tej mapy obejmuje obszar 1 dług. i 1⁰ szer. Zawiera ona mniej szczegółów niż poprzednie. Rysunek jest barwny — wody niebiesko, lasy zielono, inne szczegóły czarno. Koleje żel. grubszą linią czarną, z poprzecznymi kreskami. Granice powiatów grubemi kropkami — granice gmin



Rys. 205.

opuszczone. Mniejsze wsie oznaczone kółkami, uprawnych pól nie odróżnia się od łąk i pastwisk.

Nadzwyczaj dokładną jest mapa oryginalna 1:25000 z której, przez pomniejszenie wykonywa się mapy 1:200000.

3. Mapy wojskowe rosyjskie.

Długość geogr. na mapach wojsk. rosyjskich liczy się od obserwatorium Pułkowo koło Petersburga. Zero bezwzględnej wysokości przyjęto w poziomie morza Bałtyckiego koło Petersburga.

Podziałyki map rosyjskich są następująco:

- | | | |
|------------------------------------|-----------|-------------------|
| a) Mapa topogr. Rosji europejskiej | 1:126000 | 1 cal = 3 wiorsty |
| b) „ „ Król. polskiego | 1:126000 | 1 „ = 3 „ |
| c) „ „ Rosji europejskiej | 1:42000 | 1 „ = 1 wiorsta |
| d) Mapa specjalna Rosji europ. | 1:42000 | 1 „ = 10 wiorst |
| e) Mapa dróg wojskowych | 1:1050000 | 1 „ = 25 „ |

Prócz tych, istnieją karty dla większych miejscowości w skali 1:21000, 1:84000, oraz karty topogr. guberniji 1:42000 i 1:840000, dla pojedynczych guberniji.

Wreszcie istnieje strategiczna przeglądowa mapa w skali 1:1680000 p. t. „Carte hypsomatique de la partie occidental de la Russie“.

Orograf. ukształtowanie terenu przedstawione jest na mapie 1:126000 zapomocą kreszek charakteryzujących cieniami pochyłości od 0 do 45° w dziesięciu stopniach. Są to zbyt subtelne odcienie, które zwłaszcza w nieszczegółnej reprodukcji map, dają się tylko z wielką trudnością odróżnić.

Mapa topogr. Rosji europ. zaczęła się pojawiać w reprodukcji w r. 1846. — W latach 1865 do 1885 przeprowadzono rewizję i od-tąd stale jest uzupełniana. Jest to najlepsza rosyjska mapa wojskowa.

4. Mapy wojskowe niemieckie.

Zdjęcie oryginalne wykonano w całych Niemczech w skali 1:25000 — Prusy, Saksonja, Bawarja i Wirtembergja wykonały, każde dla siebie, samodzielnie zdjęcia — dla innych państw wykonały je Prusy. Rysunek i oblicze kart w każdym z wymienionych państw są odmienne.

Z oryginalnych zdjęć sporządzono następujące mapy:

- | | |
|--|----------|
| a) Mapa Państwa niemieckiego w skali | 1:100000 |
| b) Mapa topogr. przeglądowa Państwa niemieckiego | 1:200000 |
| c) Mapa topogr. Europy środkowej | 1:200000 |
| d) Mapa Państwa niemieckiego | 1:500000 |
| e) Mapa Europy środkowej | 1:300000 |

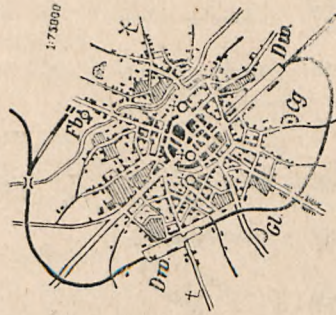
Długość geogr. w zasadzie liczy się na wschód od Ferro — zero poziomu przyjęto poziom 37·0 m pod wieżą astronomiczną w Berlinie; odpowiadający normalnemu poziomowi morza przy Amsterdamie.

Mapa Państwa niemieckiego 1:100000, składa się z 674 kart. Sekcja ma 10' dług. i 6' szer. geogr. zaś 15 sekcji składa się na dwie karty. Karta jest trapezem mającym 20' dług. i 15' szer. geogr. Brzeg karty otoczony jest obwódką podzieloną na minuty. Podziałyki

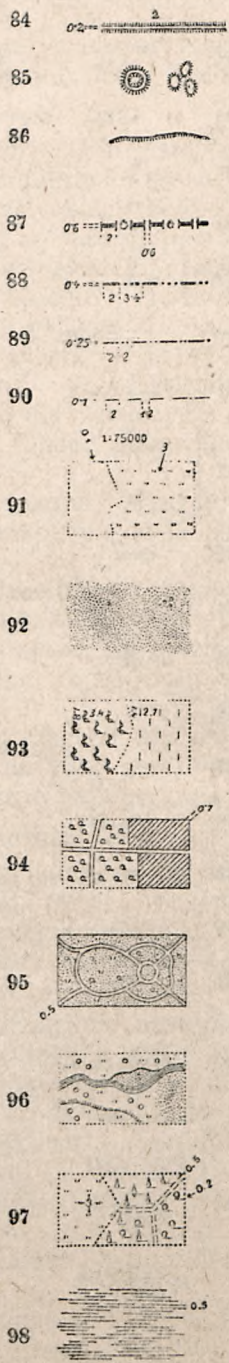
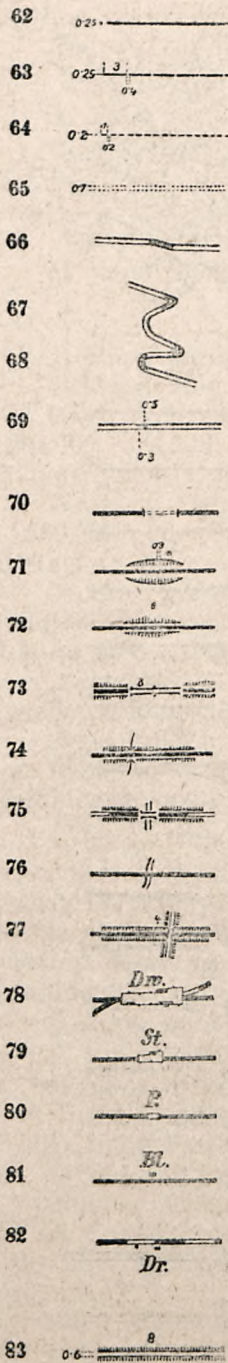
- 1:75,000
- 1 07
 - 2 08
 - 3 09
 - 4 10
 - 5 11
 - 6 12
 - 7 13
 - 8 14
 - 9 15
 - 10 16
 - 11 17
 - 12 18
 - 13 19
 - 14 20
 - 15 21
 - 16 22
 - 17 23
 - 18 24
 - 19 25
 - 20 26
 - 21 27
 - 22 28
 - 23 29
 - 24 30

- 25 Kr
- 26 Fb
- 27 S
- 28 15
- 29 16
- 30 Zbnaf.
- 31 Zbnaf.
- 32 14
- 33 16
- 34 Wf 20 St
- 35 02
- 36 06
- 37 6
- 38 Cg
- 39 Cl
- 40 6
- 41 07
- 42 07 do 04
- 43 Fb, Cg, Z, D, Kr, Frv

44



- 1:75,000
- 45 02 13
 - 46 do 06
 - 47 015 27
 - 48 015 2
 - 49 do 06
 - 50 01
 - 51 8
 - 52 03
 - 53 07
 - 54 07
 - 55 07
 - 56 04 2
 - 57 01 27
 - 58 01 4 07
 - 59 025 6 4 0 025
 - 60 02 07 07
 - 61 07 07



wyrażona jest w metrach, km i krokach, oraz w milach geogr. i znajduje się u dołu karty. Odbitki miedziorytowe, czarne. Rysunek sytuacyjny podobny jest do map austriackich, posiada jednak większą przejrzystość i mniej znaków.

Rysunek terenu wykonany kreskami (sposób Lehmana) bez warstwic. Wogóle mapa bardzo starannie i dokładnie, przejrzystość wykonana.

Mapa topograficzna przeglądowa Państwa niemieckiego w skali 1:200000 — jest najlepszą dotychczas ogólną mapą Europy środkowej. Wykonana barwnie — wody błękitne i zakreskowane, lasy kółkami. Rysunek terenu tylko warstwicami, rysunek sytuacyjny podobny do poprzedniej mapy.

5. Mapy wojskowe innych państw.

Francja posiada karty topograficzne w skali 1:50000, barwne, 1:80000, 1:100000, 1:200000 i 1:500000.

Anglja: mapy hrabstw 1:10560, 1:63360.

Belgia: Karty topogr. 1:20000, 1:40000 i 1:160000 barwne.

Włochy. Mapa król. włoskiego 1:75000 i 1:100000.

Wogóle wszystkie państwa posiadają swoje mapy topogr. w różnych skalach i w różnym wykonaniu.

ZNAKI PRZYJĘTE W MAPACH TOPOGRAFICZNYCH POLSKICH.

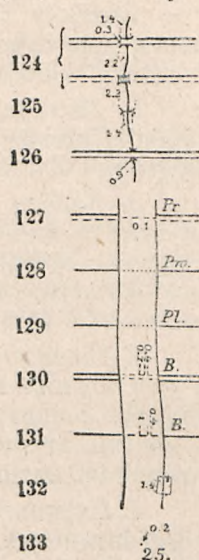
§ 4. W poprzednim § opisano pobieżnie zasady, na jakich oparte są rysunki map topogr. i wymieniono w krótkości skale w różnych państwach dla map przyjęte. Nie podajemy tu szczegółowych opisów ani przyjętych znaków, gdyż byłoby to ogromnym obciążeniem wydawnictwa. Natomiast podajemy znaki przyjęte dla map topogr. polskich w skali 1:75000, zatwierdzone przez Sztab. Gener. jak również i opis tych znaków. Znaków tych jest 133 — Dla map w skali 1:25000 istnieje dopiero projekt znaków i pism

Należy zaznaczyć, że w mapach: 1:100000, wszystkie wody są kolorowane niebiesko, tudzież że znaki te są odpowiednio mniejsze od podanych tu znaków w skali 1:75000 mianowicie w stosunku skal, zatem w stosunku $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

OPIS ZNAKÓW TOPOGRAFICZNYCH.

Podziałki 1:75000 do mapy taktycznej 1:100000.

1. *Kościóły.* Kościóły zasadniczo przedstawia się prostopadłe do dolnego brzegu mapy, tylko w wyjątkowych wypadkach pochylone, max. o 45°. Kościóły oznacza się kółkiem o średn. 1,3 mm



Rys. 206.

grub. linii 0·2 mm — równoramienny krzyż wysok. i szer. 1·3 mm. Końce krzyżujących się linii opatrzone punktami.

Kościoły z dwoma wieżami oznacza się dwoma krzyżami, u góry poprzeczne ramiona łączy się w jedną linię, odstęp krzyżów 0·7 mm. Z daleka widoczne: w środku kółka kropka 0·2 mm.

2. *Bóżnice*. Przedstawia się kółkiem jak kościoły, u góry prostopadła kreska wysok. 1 mm z poprzeczną u góry grubości 0·2 mm długości 1·0 mm.

3. *Kaplice*. Oznacza się wypełnionem kółeczkiem średn. 1 mm na niem równoramienny krzyż, wysok. i szer. 1 mm. Końce krzyżujących się linii opatrzone punktami. Jako kaplice należy przedstawiać świątynie mniejszych rozmiarów, które posiadają ołtarze, a więc gdzie może być odprawione nabożeństwo.

4. *Cmentarz chrześcijański*. Poziome szeregi stojących, ułożonych w szachownicę równoramiennych krzyżów, grubości kresek 0·1 mm długości 1 mm. Odstępy krzyżów od 1 do 1·4 mm. Znajdujące się w obrębie cmentarza budynki, kaplice i t. d. należy przedstawić odpowiednim znakiem.

5. *Cmentarz niechrześcijański*. Poziome szeregi ułożonych w szachownicę kresek z poprzeczką u góry długości do 1 mm odstępów jak w Nr. 4.

6. *Grób oddzielny*. Przedstawia się krzyżem o grubości kresek 0·1 mm. Poprzeczka 1 mm wysokości 1·8 mm. U podstawy grobu pozioma kreska długości 1·2 mm zaopatrzona u góry małym półkolem, przedstawiającym grób.

7. *Krzyż i figura*. Krzyże, figury religijne, przedstawiamy w miejscowościach tylko wówczas, o ile służą do orientacji. Wysokości znaku 1·8, poprzeczka 1·2 mm. Linje grubości 0·1 mm, końce krzyżujących się linii opatrzone punktami. U podstawy kreska pozioma w prawo długości 1·2 mm.

8. *Pomnik*. Oznacza się znakiem naśladowującym obelisk na podstawie. Ogólna wysokość 1·7 mm długość podstawy 1·6 mm — Wysokość fundamentu 0·7 mm wieży 1·0 mm — linje z prawej strony i podstawa grub. 0·2 mm — lewe 0·1 mm.

9. *Ruiny*. Kształt rzutu poziomego, linje przerywane grub 0·1 mm. Jeżeli rzut nie do się rozpoznać, a również ruiny mniejsze, należy przedstawić znakiem wysokości o szer. 1·6 mm linjami grub. 0·1 mm linja podstawowa i prawa grub. 0·2 mm.

10. *Wieża obserwacyjna*. Przedstawia się znakiem naśladowującym basztę, wysok. 1·6 mm. Linje boczne: lewa grub. 0·1 mm, prawa 0·2 mm, u góry poprzeczka 0·1 mm — w pośrodku jej i na końcach kreseczki 0·2 mm, skierowane do góry. U podstawy kreska długości 0·8 mm W środku kropka 0·2 mm, oznaczająca miejsce wieży w naturze.

11. *Wysoki komin z daleka widoczny*. Oznacza się kółeczkiem, średnicy 1·0 mm — w środku punkt 0·2 mm. Znak pierwszy: komin z przylegającymi budynkami.

12. *Młyn wodny*. Koło o 6 zębach na miejscu budynku. Średn. koła 1·0 mm — dług. zębów 0·4 mm. Młyn parowy oznacza się literą „P” wielkości 2 mm. Tartak literą „F” także 2 mm.

13. *Elektrownia*. Przedstawia się znakiem jak młyn wodny, ponadto z prawej strony strzałka długości 2 mm. Dopis „P” oznacza popęd parowy.

14. *Młyn na łożdach*. Przedstawia się znakiem jak młyn wodny, umieszczonym na znaku przedstawiającym czółno, długości 1·0 mm.

15. *Wiatrak*. Znak ogólnej wysok. 2·6 mm. Krzyż równoramienny 1·4 mm — pogrubiony na końcach, umieszczony skośnie środkiem na wierzchołku podstawy o wysok. 1·2 mm; ta ostatnia u dołu zgrubiona do 0·3 mm i zaopatrzona kreską poprzeczną skierowaną w prawo, długości 1·0 mm.

16. *Turbina powietrzna*. Przedstawia się ła tylko w tych wypadkach, o ile jest objektem orjentacyjnym i stoi oddzielnie. Kółko o 5 zębach średnicy 1 mm umieszczone na klinku wysok. 1·3 mm szerokości 0·4 mm. Od podstawy kreska w prawo grubości 0·2 mm długości 1 mm.

17. *Leśniczówka*. Oznacza się kółeczkiem średnicy 1 mm rogi jelenie o 3 odgałęzieniach długości 1 mm i 1·7 mm odstepu u góry, z dopisem litery L. Zabudowania umieszcza się we właściwym miejscu.

18. *Gajówka*. Znak jak poprzedni, tylko rogi jelenie o 2 odgałęzieniach i litera G.

19. *Pojedyncze drzewa i krzaki*. Kółeczko o średnicy 1 mm i mniejsze, z prawej strony pogrubione. U dołu ku prawej stronie, linja długości 0·5 mm. Drzewa wzdłuż szos i dróg i aleje należy przedstawiać odpowiednio do rzeczywistości naprzemianlegle więcej lub mniej gęsto ustawionymi znakami. Krzaki bez dolnych kresek.

20. *Drzewa z daleka widoczne*. Przedstawia się jako rysunek drzewa liściastego lub topoli, o wysokości do 2·1 mm dolna kreska 0·2 mm wysok. pnia 0·7 mm, konarów 1·4 mm. Jako takie, należy przedstawiać tylko oddzielnie stojące, służące do orjentowania się.

21. *Drzewa z tablicą lub obrazem religijnym*. Jest ważnym objektem orjentacyjnym zwłaszcza w lesie. Rysunek drzewa wynosi 2·3 mm wysokość pod konarami tabliczka szerokości 1 mm, wysokość 0·4 mm. Wysokość pnia 0·7 mm. Przy wsiach, osadach i miastach należy objekty tego rodzaju uwzględniać tylko w wypadkach, w których one niezbędnie są potrzebne do orjetowania się,

22. *Zamek*. Przedstawia się w rzucie poziomym z dopisem Z.

23. *Dwór*. Jako takie, rozumiemy zabudowania należące do większej własności ziemskiej. Dom mieszkalny, zamieszkały przez właściciela lub administratora uwydatnia się. Obok umieszcza się literę D bezpośrednio przed nazwą, o ile ją dwór posiada wyłącznie dla siebie.

24. *Folwark*. Jako takie, rozumiemy jedynie dom mieszkalny z większą ilością zabudowań mieszkalnych. Przedstawia się jak zabudowania z dopisem „Fw“.

25. *Karczma (Dom zajezdny)*. Uwzględnia się tylko oddzielnie stojące. Przedstawia się jak budynek w zarysie. Z prawej strony „chorągiewka długości 1·2 mm uzupełnia się napisem „Kr“.

26. *Fabryka*. Rysunek wykonywa się w rzucie poziomym. Uwzględnia się dokładnie miejsce kominów. Jeżeli fabryka lub zakład przemysłowy posiada kilka kominów, a wszystkie trudno jest przedstawić ze względu na drobną podziałkę, wtedy rysuje się tylko komin największy, lub oddzielnie stojący. Znak topogr. uzupełnia się napisem „Fb“.

27. *Schronisko w górach zagospodarowane*. Znak jak na karcznię z napisem S. Niezagospodarowane z tym samym napisem, bez chorągiewki.

28. *Osada pasterska na polanie górskiej*. Są to prymitywne zabudowania drewniane, zamieszkałe w okresie letnim. Przedstawia się kółeczkiem średnicy 1 mm, linja grubości 0·2 mm i wysokości 1 mm. Prawa i dolna linja trójkąta grub. 0·2 mm.

29. *Uzdrowisko (kąpielowe)*. Rysunek dzbanka: wysok. 1·8 mm szer. 1 mm. Umieszcza się pod nazwą miejscowości. Tym znakiem należy przedstawiać tylko publiczne, urzędowo koncesjonowane zakłady kuracyjne, a nie letniska.

30. *Zbiornik nafty*. Kółeczko wypełnione, średn. 1 mm. Uzupełniający dopis „Zb. naft“. Przy kilku zbiornikach w jednym miejscu, przedstawia się tylko jeden z nich.

31. *Źródło naftowe*. Wypełniony na czarno prostokąt, szerok. 1 mm wysok. 0·5 mm. Od środka podstawy w dół, linja wężykowata. Uzupełniający napis „Zr. naft.“

32. *Kopalnia czynna*. Skrzyżowane małe młotki kowalskie o grub. kresek 0·1 mm przy podstawie 2 mm. Wysok. 1·6 mm Znakiem tym przedstawiamy szyby, sztolnie i t. p. Do znaku topograficznego należy dodać ewentualnie nazwę szybu, n. p. „Szyb Stasi“, „Renard“ i t. p. Kopalnia nieczynna, jak wyżej, tylko młotki zwrócone na dół.

33. *Miejsce podkopane*. Posiada dla wojskowości, niewątpliwie wielkie znaczenie. Należy przeto jaknajdokładniej stwierdzić przestrzeń miejsc podkopanych. Przedstawia się równoległymi, pionowymi kreskami o grubości 0·1 mm z odstępem 0·6 mm.

34. *Województwa i Starostwa*. Przedstawia się elipsą o rozciągłości poziomej 4 mm, pionowej 2·8 mm Dolny łuk linji grubości 0·2 mm. Wewnątrz napis „Wj“ i „St“. Znak ten umieszcza się pod nazwą miejscowości.

35. *Poczta*. Znak listu szerokości 2 mm wysokości 1 mm. Prawa i dolna linja 0·2 mm. Krzyżujące się linje opatrzone punktem w miejscu skrzyżowania Umieszcza się pod nazwą miejscowości.

36. *Telegraf*. Przedstawia się kółkiem o średnicy 1 mm nad nim pionowa kreska, podtrzymująca linię węzową, zakończoną dwoma punktami. Wymiar całego znaku 1·8 mm. Umieszcza się pod nazwą miejscowości.

37. *Telefon*. Znak jak wyżej, tylko kółko wypełnione

38. *Cegielnia*. Prostopadle do linii, wskazującej miejsce wybranej gliny, kreśli się odpowiednio do wysokości, szereg kresek, oznaczających stronę krawędzi. Dodaje się rysunek budynków i uzupełniająco dopis „Cg”.

39. *Glinianka*. Jak wyżej, tylko bez domku, z dopisem „Gl”.

40. *Dół piaszczysty*. Jak wyżej, tylko przestrzeń pokryta gęsto punktami. Dół żwirowy, z dopisem „Z”.

41. *Kamieniołom*. Zarys w rzucie poziomym oznacza się linią grubości 0·2 mm. Spadek, jak stromą krawędź, odpowiednio do wysokości. W środku o prostych kątach daszek, długości 2·4 mm i szerokości 0·7 mm.

42. *Ulice*. Sieć dróg w miejscowościach gęsto zabudowanych, oznacza się w kształcie odpowiadającym ich rzutowi poziomemu. Drogi zdatne do przejazdu oznacza się dwoma linjami o świetle 0·7 mm, a drogi niezdatne do przejazdu oznacza się dwoma linjami o świetle 0·4 mm.

43. *Domy*. Rysuje się o kształtach odpowiadających rzeczywistości, rzędy domów oddzielonych wąskimi tylko przerwami, rysuje się jako zwartą całość. Domy z małymi ogrodami, przedstawia się kreskując całą powierzchnię linjami grub. 0·1 mm w odstępach 0·7 mm, biegnącymi pod kątem 45° od prawej górnej.

44. *Miasto*. Śródmieście wykreśla się kwartałami wypełnionymi tuszem. Krańce — pojedynczymi domami, których ilość zmniejsza się w miarę oddalenia od śródmieścia.

Większe objekty, należy przedstawiać znakami topograficznymi (n. p. kościół, wieża).

45. *Mur*. Przedstawia się linią grubości 0·2 mm z poprzeczkami kwadratowymi o bokach 0·2 mm umieszczonymi jedna od drugiej w odległościach 1·3 mm skierowanymi na zewnątrz lub wewnątrz.

46. *Mur układany z kamienia*. Uwzględnia się tylko wtedy, o ile jest znacznej długości i jeżeli kamienie ułożone są zwartą masą. Przedstawia się gęsto obok siebie nieregularnie ustawionymi kółeczkami i elipsami średnica do 0·6 mm.

47. *Parkan, sztachety i żerdzie*. Przedstawia się linią grubości 0·15 mm poprzeczki umieszcza się w odległości 1·35 mm naprzemian po jednej i drugiej stronie. Rozmiary poprzeczki, jak przy numerze.

48. *Płot z drutu*. Linja grubości 0·15 mm ze skośnymi krzyżkami w odległości 2 mm.

49. *Żywopłot*. Gęsto ustawione obok siebie kółeczka o średn. 0·6 mm i mniejsze.

50. *Rów mokry*. Uwzględniamy, jeżeli głębokość wynosi najmniej 1 m. Prosta linja grubości 0·1 mm, przedstawia się kolorem niebieskim

51. *Wąwóz parów i jar*. Rowy suche, naturalne, przedstawiamy w rzucie poziomym linjami grubości 0·1 mm. Wewnątrz spadek jak „Stroma krawędź“. Głębokość począwszy od 2 m oznacza się cyfrą ze znakiem minus — n. p. — 9. Cyfra kolorem czarnym. Wąwóz i kreski kolorem poziom nie (warstwie).

52. *Rów suchy*. Przedstawia się falistą linją grubości 0·1 mm wysokość fal 0·5 mm.

53. *Kolej dwu lub więcej torowa*. Przedstawia się linją grubości 0·7 mm.

54. *Kolej jednotorowa*. Oznacza się dwoma równoległymi linjami grubości 0·1 mm w świetle 0·5 mm pomiędzy nimi prostokąty dług. 4 mm wypełnione co drugi, czarno.

55. *Kolej w budowie lub projektowana*. Przedstawia się jako kolej jednotorowa, bez wypełnienia prostokątów.

56. *Kolej wąskotorowa*. Oznacza się dwoma równoległymi linjami grub. 0·1 mm w świetle 0·3 mm pomiędzy nimi prostokąty dług. 2 mm co drugi czarny.

57. *Tramwaje (kolejki gospodarcze i t. p.)*. Oznacza się linją grub. 0·1 mm z poprzeczkami w kształcie małych trójkątów, umieszczając je po stronie północnej względnie zachodniej w odstępach co 2·7 mm.

Tramwaje i kolejki gospodarcze, biegnące wzdłuż kolei normalnej, rysuje się obok tejże; biegnące szosą lub drogą przedstawiamy trójkątami umieszczonymi wewnątrz, zaś obok szosy, trójkątami zewnątrz na odpowiedniej linii.

Przy drogach przedstawionych znakiem jedno linjowym, oznacza się kolejkę obok znaku drogi.

58. *Kolej linowa*. Złożona z wagoników, lub skrzynkowa, biegnąca ponad ziemią po linach lub rusztowaniu, jak również kolejki sankowe przy tartakach i t. p. oznacza się jedną linją grubości 0·1 mm przerywaną w odstępach co 4 mm kółeczkami o średnicy 0·7 mm.

59. *Szosa pierwszej klasy*. Za taką uważamy szosę większej szerokości, o budowie bardzo solidnej, z małymi spadkami i łagodnymi zakrętami, silnymi mostami, nośnymi dla najcięższych ładunków drogowych. Szosy przedstawia się dwoma równoległymi linjami, grubości 0·25 mm, odległymi od siebie 0·7 mm. Drzewa obok szosy jako pojedyncze drzewa, oznacza się kółkami w odległości co 4 mm z obu stron lub z jednej, w zależności od tego, jak jest w terenie.

60. *Szosa drugiej klasy*. Za taką uważamy drogę szosowaną, mniej solidnej budowy od szosy 1. klasy. Przedstawia się dwoma równoległymi linjami, odległymi o 0·7 mm, z których północna, wzgl. zachodnia, jest 0·2 mm a druga 0·1 mm grube.

61. *Trakt*. Za taki uważamy drogę gruntową, stale utrzymaną, posiadającą obustronne rowy, o szerokości co najmniej dogodną do wyminięcia dwóch wozów. Przedstawia się dwoma równoległymi linjami, odległymi 0·7 mm o grub. 0·1 mm.

62. *Droga polna*. Za taką uważamy drogę gruntową, mniejszej szerokości i nieposiadającą rowów. Oznacza się jedną linią 0·25 mm.

63. *Drożyna*. Za taką uważamy drogę polną, gospodarczą, drogę leśną, przez błota, górską, przez którą wozami chłopskimi można jeszcze przejechać. Oznacza się linią przerywaną o grubości 0·25 mm. Kreski dług. 3 mm odstęp między nimi 0·4 mm.

64. *Ścieżka*. Za taką uważamy drogę dla pieszych lub konnych, dla wozów zaś nie do użycia. Oznacza się linią pojedynczą przerywaną, grub. 0·2 mm. Kreski dług. 1 mm w odstępach między nimi 0·2 mm.

65. *Droga zimowa*. Oznacza się zapomocą dwóch równoległych, kropkowanych linii w świetle 0·7 mm.

66. *Gwałtowna pochyłość drogi*. O ile spadek (wzniesienie) szos i dróg szosowanych przekracza 1:10, wtedy miejsce takie oznaczamy specjalnym znakiem, a mianowicie: poprzecznymi kreskami pionowymi, o grubości od 0·2 do 0·1 mm, których gęstość wzrasta ze spadkiem.

67. *Gwałtowny skręt, niebezpieczny dla samochodów*. Oznacza się linią grub. 0·1 mm w pośrodku skrętu.

68. *Serpentyny, skręty*. O ile serpentyny w rzucie poziomym zbliżyłyby się do siebie tak dalece, że ich całkowite przedstawienie stałoby się niemożliwym, wtedy należy wykreślić tylko najwyższą położoną, a niższe mniej lub więcej pokryte przez pierwszą. Skręty nie pozwalające na obrót zaprzęgu 6 konnego, oznaczamy kropkami gęsto obok siebie umieszczonymi na miejscu skrętu.

69. *Szerokość jezdni dwóch kolumn taborowych*. Oznacza się dwoma kreskami o grubości pierwsza 0·3 druga 0·5 mm.

70. *Tunel*. Oznacza się dwoma równoległymi, przerywanymi linjami o grub. 0·1 mm. Tuneli prowadzących pod miejscowościami, nie należy uwzględniać.

71. *Wykop*. Przedstawiamy przy wszelkich komunikacjach, począwszy od 1 m głębokości. Wykopy przedstawiają znaczną przeszkodę, głównie przy kolejach, gdzie wywagonowanie artylerji w polu, taborów i t. p. jest często uniemożliwione. Oznacza się wypukłymi linjami grub. 1 mm z kreskami tejże grubości prostopadłymi do znaku drogi w odstępach 0·3 mm nie dociągając do znaku. Głębokość począwszy od 2 m oznacza się arabskimi cyframi wysokości 1·5 mm.

72. *Nasyp*. Uwzględnia się począwszy od 1 m wysokości. Nasypy mają mniej więcej takie same znaczenie, jak wcięcia, jakkolwiek nieźbyt wysokie nasypy, od 1 do 2 m są drobną przeszkodą. Oznacza się jak wykop w odwrotnym kierunku. Od 2 m począwszy, wysokość oznacza się jak poprzednio.

73. *Wiadukt*. Jest to most większych rozmiarów, zbudowany nad doliną wcięciem, wąwozem i t. p., w których często prowadzą komunikacje. Budowa wiaduktów jest znacznie odmienna od budowy mostów nad rzekami. Oznacza się dwoma równoległymi linjami grubości 0·2 mm. Ilość filarów oznaczamy kresczkami, wystającymi po obu stronach dług. 0·3 mm. Wysokość wiaduktu oznacza się cyfrą.

74. *Przeput kolejowy*. Oznacza się małemi, otwartymi trójkątami, linje grubości 0·1 mm pochylone do siebie pod kątem 45°.

75. *Przejazd kolejowy nad drogą*. W miejscu przejazdu przerywa się znak linii kolejowej i rysuje dwie równoległe linje o grubości 0·2 mm w świetle 0·6 mm u końca załamane.

76. *Przejazd przez tor kolejowy*. W miejscu przejazdu rysuje się znak linii kolej. nie przerywając go.

77. *Przejazd drogowy nad koleją*. Oznacza się znakiem podobnym do znaku na przejazd kolejowy nad drogą. Wysokości oznacza się cyfrą.

78. *Dworzec kolejowy*. W obrębie dworców kolejowych należy oznaczyć należy tylko zarzys placu, zajętego przez tory i budynki, nie oznaczając jednakże poszczególnych torów. Przerwa znaku na kolei następuje od pierwszej do ostatniej zwrotnicy.

Skróty główne, używane przy oznaczaniu dworców kolejowych:

1. Jeżeli w pobliżu pewnej miejscowości leży tylko jeden dworzec, to bez względu na rodzaj kolei, oznacza się go dopisem „Dw“.

2. Jeżeli dworzec leży poza miejscowością, której nazwę nosi, dopisuje się tę nazwę, n. p. „Dw. Maniewicze“.

3. Jeżeli w jednej miejscowości znajduje się kilka dworców, dopisuje się bliższe określenie, n. p.:

„Dw. gł.“ (Dworzec główny)

„Dw. kol. poł.“ (Dworzec kolei południowej)

„Dw. kol. pstw.“ (Dworzec kolei państwowej)

79. *Stacja kolejowa*. Oznacza się jak dworce, z dopisem „St.“ Stacje bez zwrotnic i bocznych torów oznacza się jako przystanki.

80. *Przystanek*. Przedstawia się, przerywając znak kolei w miejscu budynku kolej. z dopisem „P“.

81. *Blok kolejowy*. Oznacza się znakiem budynku z dopisem „Bl“. Uwzględnia się bloki leżące tylko poza dworcami i stacjami.

82. *Dróżnik*. Dom dróżnika kolej. określa się dopisem „Dr.“

83. *Grobla i wał z jezdnią*. Oznacza się dwoma równoległymi linjami o grub. 0·1 mm, w świetle 0·6 mm zaopatrzonymi po obu stronach, na zewnątrz skierowanymi prostopadłymi kreskami, odległymi oddzielnie 0·3 mm. Groble takie przedstawiamy od 1 m wysokości począwszy. Wysokość od 2 m oznaczamy cyframi, jak przy nasypach.

84. *Grobla i wał bez jezdni*. Oznacza się, jak poprzednio, jednak linje równoległe w świetle 0·2 mm. Wysokość jak wyżej.

85. *Stare szanice, kopce i t. p.* Oznacza się w zarysie znakiem,

jak dla wału bez jezdni. Całkiem małe kopce oznacza się tylko jedną linią grubości 0·1 mm zaopatrzoną nazewną kreskami.

86. *Stromy brzeg*. Oznacza się linią grubości 0·1 mm odpowiadającą biegowi brzegu, zaopatrzoną kreskami z kierunku spadu. Kreski rozmaitej wielkości, zależnie od większego lub mniejszego spadu. Spad od 2 m począwszy, określa się cyfrą umieszczoną obok.

87. *Granica państwa*. Przedstawia się przerywanymi odcinkami linii grub. 0·1 mm i wysok. 1·0 mm. Odcinki dług. 2 mm oddalone od siebie 0·6 mm. Jeżeli na granicy znajdują się jakiegokolwiek znaki graniczne, to należy je oznaczyć, a mianowicie: kopiec jako punkt o średn. 1 mm u góry kreska — inne znaki, słupy kamienne i t. p. kółeczkiem o średn. 1 mm u góry kreska.

Liczby znajdujące się ewent. na znakach granicznych, przedstawia się cyframi o wysok. 1·5 mm.

Granica państwowa, oznacza się bez względu na inne objekty i znaki, odpowiednio do jej położenia. Gdzie granice stanowią drogi, rzeki, groble, rowy i t. p., które są wspólną własnością państw sąsiednich, dopuszczalnem jest, obok tych naturalnych granic, umieszczać tylko częściowo znak granicy państwa.

W każdym bądź razie należy we wszystkich wypadkach mieć na względzie, że umieszczenie znaku granicy państwa musi wykluczać jakiegokolwiek wątpliwości co do jej faktycznego położenia.

88. *Granica województwa*. Oznacza się odcinkami linii długości 2 mm grub. 0·4 mm w odległości 3·4 mm — między odcinkami po 3 punkty o średnicy 0·4 mm Uwzględnia się ogólne zasady, przytoczone wyżej.

89. *Granica powiatu*. Odcinki długości 2 mm grubości 0·25 mm oddalenie odcinków 2 mm — między odcinkami po 2 punkty o średn. 0·25 mm. Ogólne zasady rysowania granic, jak wyżej.

90. *Granica gminy*. Odcinki linii długości 2 mm grub. 0·1 mm odległe od siebie o 1·2 mm. Między odcinkami po 1 punkcie. Ogólne zasady, jak wyżej.

91. *Rola*. Odgraniczamy takową od innych kultur, kropkami gęsto obok siebie, grubości 0·1 mm.

Pastwisko i łąka. Oznacza się dwoma małymi kreseczkami, dług. 0·4 mm ustawionymi rzędami, wzajemnie pochyło i w szachownicę, odległymi od siebie w kierunku poz. i pion. 3 mm. Liczy się od środka jednego znaku, do środka drugiego.

92. *Piasek i żwir*. Całą powierzchnię wypełnia się kropkami różnej wielkości, ustawionymi nieregularnie. Granic nie uwzględnia się.

93. *Winnice*. Poziome rzędy prostopadłych kresiek, o grubości 0·1 mm przeciętych trzykrotnie wężykiem, wys. 1·8 mm. Znaki ustawione jedne pod drugimi w szachownicy, w odległości poz. 3·4 mm. U dołu kreski poziome w prawo długości 1 mm. O ile w winnicy znajdują się drzewa, uwzględnia się je przepisany znak.

Plantacje chmielu. Poziome rzędy ustawionych w szacho-

wnicę kresek, grub. 0·1 mm dług. 1·4 mm. Poziomy odstęp kresek 2·7 mm.

94. *Sad i ogród warzywny*. Sady, które nie mają osobnego ogrodu, odgranicza się linią z drobnych kropek, ogrody linią ciągłą. Całą powierzchnię sadów oznacza się znakami drzew. Średnica kółka 0·6 mm i mniejsza.

Powierzchnię ogrodów warzywnych, kreskuje się od prawej górnej ku lewej dolnej, liniami grub. 0·1 mm odstęp 0·7 mm nachyleni jak w 43. Ogrody warzywne większych rozmiarów, graniczące z polami, o ile nie są ogrodzone, należy przedstawić jako rolę.

95. *Park i ogród*. Całą powierzchnię przedstawia się jako łąkę, wypełnioną kropkami. Znaki poszczególnych grup drzew i krzewów, a również sieć dróg, rysuje się odpowiednio do natury. Szerokość dróg i ścieżek 0·5 mm grub. linii 0·1 mm.

96. *Łozina, krzaki i zarośla*. Przedstawia się małymi znakami podobnymi do znaków na pojedyncze drzewa, jednak więcej przedłużonemi w kierunku pionowym rozmaitej wielkości, lecz bez kresek, porozrzucanemi grupami. Jeśli zarośla są na łące, obok znaków drzew umieszcza się znaki łąki i mnóstwo drobnych punktów, jeżeli zarośla są na piasku.

97. *Lasy*. Oznacza się jako takie, o ile obszar jest $\frac{2}{3}$ zarośnięty drzewami, w przeciwnym zaś razie jako łąkę porośniętą drzewami. Liściasty kółeczkami — iglasty dwoma kreskami w kształcie ostrego kąta wysokości od 1·8 mm (lewa kreska 0·1, prawa 0·2 grubości) u dołu sześć kropek. Znaki tę umieszczają się nieregularnie, zależnie od charakteru lasu, gęściej lub rzadziej, ewent. grupami. Las mieszany przedstawiamy znakami drzew iglastych i liściastych.

Granice lasu, jeżeli nie są naturalne, oznaczamy szeregiem gęstych kropek średnicy 0·2 mm.

Duchty oznaczamy dwoma, przerywanemi, równoległemi linjami, o świetle 0·5 mm grub. 0·1 mm. Jeżeli duchty służą do stałej komunikacji, jako drogi jezdne, należy je przedstawiać według odpowiedniego znaku drogi.

W lasach należy dokładnie uwzględniać objekty służące do orientacji, jak i drzewa z tablicami, krzyże i t. p.

98. *Grunta podmokłe*. Są to miejsca stale wilgotne, lub też tylko na krótki czas wysychające. Grunta podmokłe często zmieniają swe granice, zależnie od pór roku — pozwalają one jednak przejść wszelkim gatunkom „broni z wyjątkiem ciężkiej artylerji i ciężarowych samochodów.

Dla artylerji polowej rekonesans danego obszaru jest często koniecznym.

Oznacza się je kreskami poziomemi grub. 0·1 mm naśladującym układem linje wodne. Odstęp pionowy 0·5 mm bez oznaczenia granic. Zachowuje się przy tem znak odnośnej kultury.

99. *Moczary porośnięte trzcina i sitowiem, oraz bagna nie do przejścia.* Przedstawia się podobnie jak grunty podmokłe, kreskami poziomymi długości 4 do 6 mm.

Trzcinę i sitowie oznacza się czterema pionowymi kreskami, z których środkowe są długie 0·6 mm boczne krótsze, odchyłone. Granice bagna oznacza się kropkami.

100. *Torfowisko.* Przedstawiamy prostokątami różnej długości boków, szerokości 0·6 mm pojedynczo rozrzuconymi, lub połączonymi dłuższymi bokami po 2 do 3 w ten sposób, że do połowy zachodzą za siebie.

Brzegi kopalni torfu, wykopane i ciągnące się na dłuższej przestrzeni, nie powinny być oznaczone jako „stromy brzeg“ — oznacza się tylko, jako torfowisko, prostokątami. Suszarnie znajdujące się wśród torfowisk, oznacza się jako domki.

Rzeczki, kanały, stawki, bagna, oznacza się przepisanyymi znakami.

Torfowiska przedstawiają poważną przeszkodę, komunikacja ogranicza się do istniejących tam dróg, ścieżek lub grobli.

101. *Źródło.* Jako takie, przedstawiamy źródła dające na minutę około 10 litrów wody. Oznacza się je jako owal wysok. 1 mm i szer. 0·7 mm u spodu wężyk 1·7 mm.

102. *Studnia.* Uwzględnia się, jeżeli się znajduje poza obrębem miejscowości zamieszkałych. Oznacza się czworobokiem dług. 1 mm szer. 0·5 mm linję grub. 0·1 mm. U dołu linja wężykowata długości 1·7 mm.

103. *Studnia z żurawiem* — jest objektem orientacyjnym. — Uwzględnia się tylko studnie poza obrębem zamieszkałych miejscowości. Oznacza się prostopadłą linją grub. 0·1 mm wysok. 1·7 mm, stojąca na skierowanej w prawo kresce podstawowej długiej 1 mm. U góry, na wysok. 1·2 mm kreska poprzeczna 1·7 mm dług, pod kątem 45° — mająca w górnym końcu nieco grubszą, w dół skierowaną poprzeczkę, dług. 0·7 mm.

104. *Strumyk lub potok do przejścia.* Oznacza się linją o wznoszącej grubości w dół biegu.

105. *Potok nie do przejścia.* Jako takie przedstawiamy potoki szersze niż 2 m. Rysuje się dwoma linjami grub. 0·1 mm. Kierunek prądu oznacza się małą strzałką równoległą do znaku. Środek wypełnia się jedną linją o grub. 0·1 mm.

106. *Kanał nie do przejścia.* Kanały najmniejszej głębokości 1 m, a szer. 3 m przedstawia się dwoma równoległymi linjami, grub. 0·1 mm. O ile kanał ma odpływ, oznacza się kierunek prądu małą strzałką równoległą do znaku.

107. *Rzeka.* Przedstawia się linjami równoległymi do linii brzegu, grub. 0·1 mm których odległość zwiększa się z oddaleniem od brzegów. Jako linję brzegu należy przedstawić tę linję, do której sięga przeciętny stan wody. Mielizn ukazujących się podczas najniższego stanu, uwzględniać nie należy.

108. *Stawy*, Linja brzegu grub. 0.1 mm ewentualnie kierunek odpływu oznacza się małą strzałką. Pokrywa się całą powierzchnię linjami równoległymi grub. 0.1 mm jak przy rzekach. Odstępy między linjami zwiększają się ku środkowi.

109. *Jezióra*. Przedstawia się jak stawy. Głębokość jeziora oznacza się liczbą umieszczoną pośrodku w nawiasie.

110. *Stawy sztuczne*. Służą do celów przemysłowych lub gospodarstwa rybnego. Zwykle są otoczone groblami lub wałami. Przedstawia się jak w 108.

111. *Znak na kierunek prądu*, umieszczamy przy większych rzekach pośrodku. Jest to strzałka rozmaitej wielkości, zależnie od szerokości rzeki.

112. *Wodospad* — przedstawia się dwoma linjami od brzegu do brzegu, o grub. 0.1 mm i świetle 0.4 mm. Przy potokach i strumieniach przedstawionych jedną linią, rysuje się wodospad dwoma równoległymi kreskami grub. 0.1 mm, długości 1.5 mm prostopadłymi do prądu.

113. *Sluza*. Oznacza się poprzeczną linią grub. 0.3 mm z kreską pośrodku, skierowaną przeciw prądowi.

114. *Jaz*. Linja łącząca oba brzegi, o grub. 0.2 mm z poprzecznymi kreskami. Kreski dług. 0.5 mm i grub. 0.1 mm oznaczają spadek i zwrócone są w dół rzeki.

115. *Grobla*. Oznacza się linią grub. 0.1 mm łączącą oba brzegi — obok szereg trójkątów wysok. 0.7 mm odległych wzajemnie 1.2 mm. Przy mostach oznacza się groble tylko trójkątami wzdłuż znaku mostu.

116. *Tamy* — służą do regulacji rzeki. Oznacza się je trzema kreskami grubości 0.2 mm, dług. 2 mm skierowanymi przeciw prądowi pod kątem 45°.

117. *Początek spławności rzeki*. Oznacza się dwoma równoległymi linjami, każda o grub. 0.2 mm, długości 1.5 mm w odstępie 0.5 mm, zaopatrzonemi na zewnątrz małemi, odstającymi kresczkami długości 0.4 mm.

118. *Oznaczenie regularnej żeglugi i przystani*. Oznacza się znakiem przedstawiającym czółno z dymiącym kominkiem — długość czółna 1.5 mm, wysokość znaku 1.3 mm. Przystań: znak w kształcie litery E z dopisem „P. Z.“.

119. *Ubezpieczenie brzegów i brzeg skalisty* — może być rozmaitego rodzaju, n. p. mur i t. p. Oznacza się znakiem przepisany w miejscu linii brzegu. Brzegi skaliste oznacza się znakiem przepisany na skały.

120. *Most żelazny*. Rysuje się dwoma linjami grubości 0.2 mm w świetle 0.7 mm, z końcami załamanymi pod kątem 45°. Nazewnątrz w odległości 0.2 mm linje równoległe grub. 0.1 mm. Przy mostach z filarami znaczy się je kreskami grub. 0.7 mm na linjach zewnętrznych.

121. *Most kamienny*. Oznacza się linjami grub. 0.2 mm światło 0.7 mm. Filary, jak wyżej.

122. *Most drewniany*. Oznacza się linjami grub. 0.2 mm. We-

wnątrz znaku kreśli się gęsto poprzeczne linje o grub. 0·1 mm. Przy mostach, filary i kozły przedstawia się kreskami jak poprzednio.

123. *Most pontonowy*. Oznacza się jak most drewniany, ponadto nazewnątrz znaku rysuje się półwale w formie czółna — odległość ich końców 1·6 mm.

124. *Mały most*, kamienny lub żelazny, rysuje się jak duży most z kamienia. Małe mosty z drzewa jak duże mosty drewniane bez zewnętrznych kresek.

125. *Kładki* — oznacza się linją grub. 0·2 mm opatrzoną na obu końcach małymi równoramiennymi kątami.

126. *Przepusty*. Uwzględnić należy tylko większe przepusty. Małe otwory w nasypach, nie mają znaczenia. Oznacza się dwoma przeciwległymi kątami prostymi. Linje grub. 0·1 mm, dług. 0·6 mm zwrócone wierzchołkami do kolei lub drogi.

127. *Prom*. Linja przerywana, 0·1 mm grub. długość kresek 1 mm, odstęp 0·4 mm z dopiskiem „Pr“.

128. *Przewóz dla wozów*. Kropkowana linja prosta, łącząca oba brzegi z dopisem „Pw“. Jeżeli przewóz jest parowy, dodaje się „p“.

129. *Przewóz dla ludzi*, oznacza się jak wyżej z dopisem „Pl“, o ile parowy, dodaje się „p“.

130. *Bród dla wozów*. Dwie równoległe kreskowane linje grub. 0·1 mm odległe wzajemnie o 0·4 mm z dopisem „B“.

131. *Bród dla pieszych*. Jak 127, tylko z napisem „B“.

132. *Łazienki rzeczne*. Przedstawia się odgraniczenie, o ile ono istnieje. Jeżeli odgraniczenie jest oznaczone tylko palikami, ewent. połączonych sznurami, rysuje się znak przepisany dla płotu. Na łądzie przedstawia się wszelkie zabudowania jak też i odgródzenia.

133. *Punkt topograficzny*. Wszelkie punkty wysokościowe oznaczamy kreską o średnicy 0·1 mm. Cyfra oznaczająca wysokość ma wymiar 2·4 mm.

Uwaga: W trójbarwnem wydaniu taktycznej mapy 1:100.000 przedstawia się rzeki i wody kolorem błękitnym, warstwiec brunatnym, pozostałą zaś sytuację kolorem czarnym.

ODCZYTYWANIE MAPY.

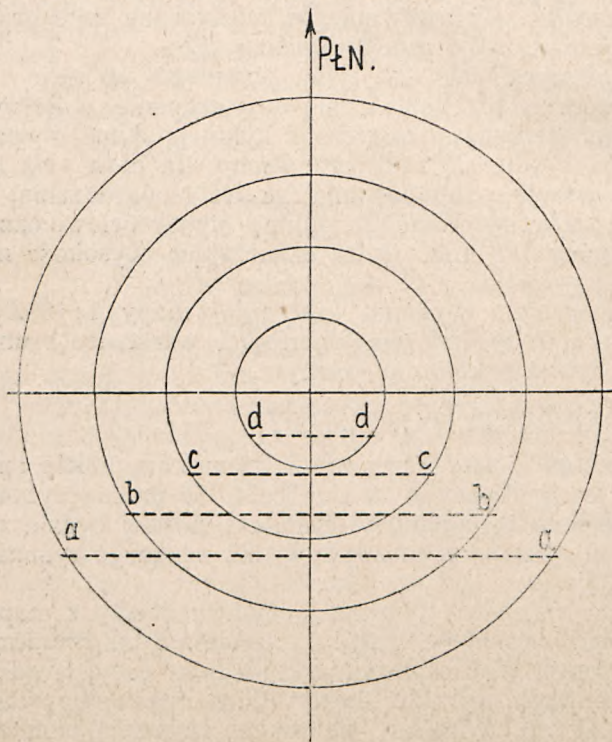
§ 5. W poprzednim § podaliśmy obok rysunków, także opis przyjętych znaków topograficznych w tym celu, że przez czytanie opisu, przy równoczesnem wglądaniu w rysunek, łatwiej będzie zapamiętać i nauczyć się wszelkich szczegółów, niż z samego rysunku w bardzo małej skali.

Mając w pamięci wszystkie te znaki, czytać możemy z mapy, jak z pisma i rozpoznać wszelkie szczegóły z terenu. Z mapy odczytamy, jaką drogą idziemy, widzieć będziemy gdzie są nasypy, gdzie wykopy, jak wysokie wzgl. głębokie, mosty, gdzie przecinamy lasy gdzie pola, moczary i t. p. Wkońcu, warstwiec wskazują pionowe ukształtowanie terenu: góry, pagórki, równiny i t. p. Możemy wykreślić przekroje terenu, określić dalekość widnokregu z danego punktu, wogóle, z pomocą mapy, czuć się będziemy w każdej okolicy, jak we własnym domu.

ORJENTACJA MAPY.

§ 6. Ażeby można było korzystać z mapy w danej okolicy, potrzeba ją najpierw zorjentować, t. j. ułożyć zgodnie ze stronami świata. Wówczas wszystkie kierunki na mapie, będą równoległe do kierunków w terenie.

W najprostszy sposób zorjentujemy mapę zapomocą busoli. Przykłada się w tym celu jeden bok kwadratowego pudełka busoli do brzegu mapy, który jak wiemy, jest południkiem geograficznym; następnie obracamy mapę wraz z busolą w płaszczyźnie poziomej dotąd, aż igła magnetyczna jednym końcem wskaże 0° na podziale busoli, czyli kierunek północny. Wówczas igła magnetyczna będzie równoległą do brzegu pudełka, a tem samem i do południka. Lecz południk geogr. nie jest identycznym z południkiem magnetycznym. Różnica tych kierunków równą jest kątowi deklinacji danego miejsca, która może być zachodnią lub wschodnią, a zmienia się ustawicznie. Znając deklinację danego miejsca, obróćmy następnie mapę z busolą o odpowiedni kąt, który odczytamy na busoli. Teraz mapa jest już dokładnie zorjentowana. Do tego potrzebne są tablice deklinacji, lub co najmniej znajomość przeciętnej rocznej deklinacji danej okolicy.



Rys. 207.

my szereg kół koncentrycznych (rys. 207). We wspólnym środku wbija się grubą szpilkę pionowo, obserwuje cień igły od wschodu do zachodu słońca i zaznacza się na kołach punkty, gdy cień igły,

Jeżeli nie znamy wartości deklinacji, to nie pozostaje nic innego jak zorjentować mapę w przybliżeniu zapomocą busoli i poprawek według punktów orientacyjnych istniejących tak na mapie, jak i w terenie, lub też wytyczyć w terenie kierunek południe północ i według niego zorjentować mapę.

Wytyczenie południka zapomocą słońca, sposobem Gnomana daje dokładność około $10'$, lecz zabiera cały dzień.

Polega on na tem, że na kawałku papieru wykreśla-

końcem swym dotyka kół. Otrzymamy wtedy punkty a, b, c, d... z lewej strony i także z prawej, czyli cięciwy kół aa, bb, cc i t. d. Dzieląc te cięciwy, każdą na 2 równe części, połączymy punkty podziału linią prostą, a otrzymamy kierunek SN_1 t. j. południk danego miejsca. Z powodu nieuniknionych błędów w oznaczaniu punktów a, b, c... także i kierunek SN_1 będzie miał pewien błąd. O ile jednak dokładność wynosi $10'$ to uznać należy sposób ten jako dobry.

Lepiej wyznaczymy kierunek południka, zapomoć gwiazdy polarnej, zatem w nocy. Gwiazdę polarną odszukamy w nast. sposób: Przedłużmy na niebie kierunek $S_1 S_2$ jaki wyznaczają dwie gwiazdy S_1 i S_2 (rys. 208) Wielkiej Niedźwiedzicy, to w odległości 5 razy większej od długości $S_1 S_2$ znajduje się gwiazda polarna. Teraz możemy w terenie wytyczyć kierunek od gwiazdy polarnej do naszego stanowiska, a otrzymamy linię północną, czyli kierunek połudn.

Jeżeli punkt na którym stoimy, mamy też dokładnie oznaczony na mapie, nadto z tegoż stanowiska widocznym jest jakiś punkt orientacyjny, n. p. wieża, kaplica i t. p. oznaczony także na mapie, to mapa da się wówczas łatwo zorjentować. Przyłożmy do tych dwóch punktów na mapie linijkę

kantem, następnie obracamy mapę w płaszczyźnie poziomej tak długo, aż celując po górnym brzegu linijki, natrafimy punkt orientacyjny. Obie te linje, w mapie i w terenie będą równoległe a właściwie leżąc będą w jednej płaszczyźnie pionowej, zatem i inne linje muszą być równoległe.

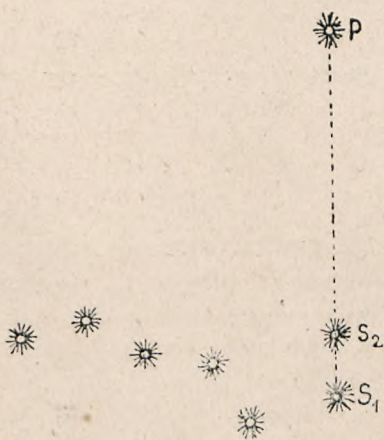
Najlepiej zorjentować mapę ze stanowiska na jakiejś linii, n. p. na drodze. Wówczas nie potrzebujemy nawet określić punktu, lecz ułożyć mapę tak, by kierunek drogi schodził się z kierunkiem jej rysunku, co skutecznymi podobnie jak poprzednio zapomoć celowania po linijce.

ODNAJDYWANIE STANOWISKA NA MAPIE.

§ 7. Często zachodzi potrzeba wyznaczenia punktu terenu na którym stoimy, na mapie.

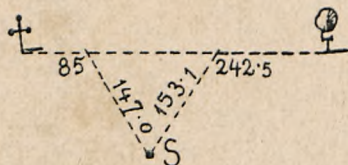
Jeżeli w pobliżu naszego stanowiska, znajdują się dwa punkty orientacyjne oznaczone także na mapie, to punkt stanowiska zdjęmiemy, w sposób poznany już w zdjęciach geodezyjnych. Zmierzymy odległości stanowiska od obu punktów orientacyjnych, mieć będziemy trzy boki trójkąta, zatem cały trójkąt da się skonstruować na mapie, a temsamem wyznaczy się i wierzchołek, będący stanowiskiem.

W okolicy, mającej rozliczne punkty orientacyjne oraz drogi, mosty i budynki, istniejące również w mapie, oznaczenie stanowiska na mapie, nie przedstawia żadnej trudności. Znajdziemy się wtedy



Rys. 208

wobec nast. zadania: dany jest w terenie punkt (t. j. stanowisko) — mamy zaś zdjąć położenie tego punktu w stosunku do istniejących punktów orientacyjnych. Dwa punkty orientacyjne, wyznaczają nam w terenie oś, podaną również na mapie. Położenie danego punktu określimy jak to poznaliśmy w geodezji, zapomocą pomiaru dwóch boków trójkąta, którego wierzchołkiem jest dany punkt (rys. 209). Trudniej przedstawia się ta sprawa w terenie nie mającym blisko żadnych punktów stałych lub orientacyjnych. W takim razie korzystać możemy tylko z dalekich punktów widocznych, n. p. kościołów,



Rys. 209.

budynków i kominów, oznaczonych również w mapie. Zastosujemy tu weinanie wstecz. Zadania tego rodzaju poznaliśmy także w poprzednich rozdziałach

Rozległość horyzontu, czyli widnokągu.

Przypuszcmy, że stoimy na terenie płaskim*) — tu okiem objąć będziemy mogli pewien horyzont, o rozległości zależnej od wysokości oka nad terenem. Promień widnokągu oblicza się według wzoru $r = \sqrt{2R \cdot h}$ gdzie r jest promieniem widnokr. $R =$ promień ziemi $\sqrt{2R} = 3568.3$ $h =$ wysokość oka nad terenem. Dla zwykłego wzrostu człowieka $h = 1.75$ m $\sqrt{h} = 1.32$ a promień horyzontu 4709 m.

Wogóle, dla	$h = 10$ m	$r = 11$ km
	50 "	25 "
	100 "	36 "
	200 "	50 "

Właściwie promień ten będzie większy około 50% a to wskutek załamania się promieni świetlnych, które pozwala nam widzieć przedmioty dalsze, już zakryte kulistością ziemi.

Jeżeli teren jest górzysty, to rozległość horyzontu będzie mniejsza.

Wykreślając z danego stanowiska we wszystkich kierunkach promienie na mapie i wykreślając przekroje terenu, oznaczymy dokładnie obszar terenu widzialny i dający się obserwować, miejsca martwe i t. p.



*) Pozornie płaskim -- w rzeczywistości na powierzchni kuli ziemskiej.



