



**Stefan Bednarczyk**

# Przepływy nieustalone w kanałach i rurociągach siłowni wodnych



PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ  
*Dariusz Mikielewicz*

RECENZENT  
*Wojciech Majewski*

REDAKCJA JĘZYKOWA  
*Agnieszka Frankiewicz*

SKŁAD I PROJEKT OKŁADKI  
*Ireneusz Jelonek*

Wydano za zgodą  
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem  
<https://www.sklep.pg.edu.pl>

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie  
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej,  
Gdańsk 2020

ISBN 978-83-7348-799-4

# Spis treści

WYKAZ PODSTAWOWYCH OZNACZEŃ .....	7
WPROWADZENIE .....	11
1. POWSTAWANIE I ROZPRZESTRZENIANIE SIĘ PRZEPŁYWU NIEUSTALONEGO WYWOŁANEGO PRZEZ URZĄDZENIA HYDROMECHANICZNE SIŁOWNI WODNYCH .....	13
1.1. Urządzenia hydromechaniczne siłowni wodnej wywołujące przepływy nieustalone .....	13
1.2. Mechanizm powstawania i rozprzestrzeniania się przepływu nieustalonego .....	17
1.3. Rodzaje uderzenia hydraulicznego .....	18
1.4. Rodzaje fal translacyjnych .....	20
1.5. Masowy przepływ oscylacyjny .....	23
1.6. Obszar występowania przepływów nieustalonych .....	23
1.7. Rodzaje zmian obciążenia maszyn siłowni wodnej wywołujące ekstremalne przepływy nieustalone .....	25
1.7.1. Ekstremalne zdarzenia w siłowniach wodnych wywołujące stany nieustalone .....	25
1.7.2. Rozruch maszyny hydraulicznej do pracy roboczej .....	26
1.7.3. Stany nieustalone wywołane przez nagłe i całkowite zatrzymanie pracy turbinowej .....	27
1.7.4. Stany nieustalone wywołane przez nagłe i całkowite zatrzymanie pracy pompowej .....	28
1.8. Sterowanie procesem powstawania przepływu nieustalonego .....	29
2. PRAWA I ZASADY STOSOWANE DO OPISU MATEMATYCZNEGO PRZEPŁYWU NIEUSTALONEGO JEDNOKIERUNKOWEGO .....	31
2.1. Rodzaje praw stosowanych do opisu przepływu nieustalonego w korytach otwartych i rurociągach ciśnieniowych .....	31
2.2. Równanie zachowania ciągłości przepływu .....	32
2.3. Dynamiczne równanie przepływu wolnozmiennego .....	36
2.3.1. Dynamiczne równanie przepływu wyprowadzone z drugiej zasady dynamiki Newtona .....	36
2.3.2. Dynamiczne równanie przepływu wolnozmiennego wyprowadzone z zasady zachowania energii .....	40
2.4. Równania przepływu sfalowanego .....	41
3. MODELE MATEMATYCZNE PRZEPŁYWU NIEUSTALONEGO WOLNOZMIENNEGO W KANAŁACH OTWARTYCH .....	45
3.1. Przepływ nieustalony wolnozmienny opisany matematycznie przez de Saint-Venanta .....	45
3.1.1. Wprowadzenie .....	45
3.1.2. Podstawowe założenia modelu de Saint-Venanta .....	45
3.1.3. Równania de Saint-Venanta .....	46

3.2. Metoda stanów chwilowych .....	47
3.3. Metoda objętości skończonych .....	48
3.4. Metoda różnic skończonych .....	50
3.5. Metoda elementów skończonych .....	52
3.6. Metoda charakterystyk .....	53
3.6.1. Podstawy metody charakterystyk .....	53
3.6.2. Równania zmian głębokości i prędkości przepływu na drodze rozprzestrzeniania się zaburzenia .....	54
3.6.3. Szczególne formuły opisujące przepływ nieustalony na drodze rozprzestrzeniania się zaburzeń .....	58
3.6.4. Zasady prowadzenia obliczeń przepływu nieustalonego wolnozmiennego w kanałach otwartych.....	60
4. KSZTAŁT I WIELKOŚĆ FAL TRANSLACYJNYCH .....	63
4.1. Podstawowe modele fal translacyjnych .....	63
4.2. Podstawowe założenia i zakres opisu matematycznego dodatnich fal translacyjnych .....	64
4.3. Wpływ strat hydraulicznych na kształt i charakterystyczne wielkości oscylacji w kanale przekroju prostokątnego .....	66
4.3.1. Równanie profilu oscylacji falowych .....	66
4.3.2. Charakterystyczne wysokości oscylacji .....	69
4.3.3. Prędkość propagacji fali z wykształconymi oscylacjami .....	72
4.3.4. Ocena uzyskanych wyników rozważań teoretycznych .....	74
4.4. Charakterystyczne wielkości czoła dodatniej fali translacyjnej z oscylacjami w kanale o przekroju trapezowym .....	75
4.4.1. Równanie profilu czoła fali .....	75
4.4.2. Stabilność oscylacji .....	80
4.4.3. Maksymalna i średnia wysokość pierwszej oscylacji .....	85
4.4.4. Prędkość propagacji fali z wykształconymi oscylacjami .....	89
4.5. Charakterystyczne wielkości czoła dodatniej fali translacyjnej z oscylacjami w kanale o przekroju parabolicznym .....	90
4.5.1. Równanie profilu czoła fali .....	90
4.5.2. Granica stabilności czoła fali translacyjnej w kanałach o przekroju parabolicznym .....	94
4.5.3. Charakterystyczne wielkości czoła stabilnej fali .....	96
4.6. Fale dodatnie bez oscylacji .....	98
4.6.1. Podstawowe przypadki powstawania i rozprzestrzeniania się dodatnich fal bez oscylacji .....	98
4.6.2. Prędkość propagacji dodatnich fal bez oscylacji w kanałach o przekroju trapezowym .....	99
4.6.3. Prędkość propagacji dodatnich fal bez oscylacji w korytach o przekroju parabolicznym .....	101
4.7. Wielkości i kształt fal ujemnych .....	102
4.7.1. Podstawowe założenia opisu matematycznego fal ujemnych .....	102
4.7.2. Zmiana natężenia przepływu w funkcji wysokości fali w kanale o przekroju parabolicznym .....	103
4.8. Zmiana natężenia przepływu i wysokości fali na długości kanału .....	104



5. UDERZENIA HYDRAULICZNE WYWOŁYWANE PRZEZ TURBINY, POMPY I ZAMKNIĘCIA .....	107
5.1. Rys historyczny powstawania modeli matematycznych uderzenia hydraulicznego w przewodach ciśnieniowych .....	107
5.2. Opis matematyczny przepływu nieustalonego w przewodach ciśnieniowych metodą charakterystyk .....	110
5.2.1. Równania pochodnych lokalnych prędkości przepływu i ciśnienia w miejscu zaistnienia zaburzenia .....	110
5.2.2. Równania różniczkowe zmiany ciśnienia i natężenia przepływu na drodze rozprzestrzeniającego się zaburzenia .....	113
5.3. Prędkość propagacji zaburzeń przepływu w rurociągach i sztolniach energetycznych .....	115
5.3.1. Założenia i uproszczenia .....	115
5.3.2. Ogólna formuła opisująca prędkość propagacji zaburzeń przepływu .....	116
5.3.3. Prędkość głosu w wodzie .....	116
5.3.4. Prędkość propagacji zaburzeń w rurociągu stalowym o powłoce cienkościennej .....	117
5.3.5. Prędkość propagacji zaburzeń w rurociągu żelbetowym .....	120
5.3.6. Prędkość propagacji zaburzeń w sztolni o przekroju okrągłym o obudowie betonowej żelbetowej i opancerzonej .....	121
5.4. Wyznaczanie uderzenia hydraulicznego i biegu nieustalonego maszyny hydroenergetycznej metodą charakterystyk .....	123
5.4.1. Podstawowe zasady obliczeń metodą charakterystyk .....	123
5.4.2. Charakterystyka uniwersalna jako podstawa wyznaczania wielkości uderzenia hydraulicznego i prędkości rozbiegowej maszyny hydroenergetycznej .....	124
5.4.3. Obliczeniowa siatka charakterystyk .....	128
5.4.4. Zasady wyznaczania uderzenia hydraulicznego i zmian prędkości obrotowej maszyny hydroenergetycznej .....	131
5.4.5. Zasady wyznaczania natężenia przepływu i uderzenia hydraulicznego w pośrednich złączach segmentów rurociągu .....	133
5.4.6. Równania przepływu nieustalonego na połączeniu rurociągu ze zbiornikiem .....	135
5.5. Uderzenia hydrauliczne w przesyłowych instalacjach pompowych .....	135
5.5.1. Typowe instalacje pompowe dalekiego zasięgu .....	135
5.5.2. Charakterystyki eksploatacyjne pomp wirowych .....	136
5.5.3. Proste uderzenie hydrauliczne w instalacji przesyłowej dalekiego zasięgu .....	139
5.5.4. Uderzenie hydrauliczne w pompowej instalacji przesyłowej o ograniczonej długości rurociągu .....	141
5.6. Zmiana wielkości uderzenia hydraulicznego na długości rurociągu przesyłowego .....	144
5.6.1. Powstawanie fal uderzenia hydraulicznego .....	144
5.6.2. Hipotezy .....	144
5.6.3. Równania przepływu nieustalonego na czole fali uderzenia hydraulicznego .....	145

5.6.4. Równania przepływu nieustalonego występującego bezpośrednio za czołem fali uderzenia hydraulicznego .....	147
<b>6. MASOWY PRZEPŁYW OSCYLACYJNY W KOMORACH WYRÓWNAWCZYCH .....</b>	<b>150</b>
6.1. Podstawowe funkcje komory wyrównawczej .....	150
6.2. Konstrukcje komór wyrównawczych .....	151
6.3. Podstawowe hipotezy dotyczące obliczeń stanów nieustalonych w komorze wyrównawczej .....	152
6.4. Podstawowe prawa przepływu nieustalonego pomiędzy derywacją a komorą wyrównawczą oraz zakres ich zastosowań .....	152
6.5. Ekstremalne zmiany poziomów wody w prostej komorze wyrównawczej .....	154
6.6. Ekstremalne poziomy wody w dławkowej komorze wyrównawczej .....	157
6.6.1. Nagłe i całkowite zatrzymanie przepływu przechodzącego przez maszynę hydrauliczną .....	157
6.6.2. Nagły wzrost natężenia przepływu z wartości $Q_r$ do wartości $Q$ .....	158
6.7. Ekstremalne poziomy wody w komorze różnicowej .....	159
6.7.1. Nagłe i całkowite zatrzymanie przepływu przechodzącego przez maszynę hydrauliczną .....	159
6.7.2. Nagłe zwiększenie natężenia przepływu z wartości $Q_r$ do $Q$ .....	161
6.8. Potrzebna powierzchnia przekroju poprzecznego komory wyrównawczej przy pracy elektrowni na sieć wydzieloną .....	162
<b>7. UZUPEŁNIENIA .....</b>	<b>164</b>
7.1. Opory tarcia hydraulicznego w kanałach i rurociągach .....	164
7.1.1. Straty hydrauliczne wywołane przez opory tarcia .....	164
7.1.2. Czynniki decydujące o wielkości współczynnika tarcia .....	164
7.1.3. Opory tarcia w korytach otwartych .....	166
7.1.4. Opór tarcia burzliwego w rurociągach ciśnieniowych .....	168
7.2. Hydrauliczne opory tarcia przepływu nieustalonego .....	171
7.2.1. Wprowadzenie .....	171
7.2.2. Formuły empiryczne opisujące współczynnik oporów tarcia przepływu nieustalonego .....	172
7.3. Lokalne straty hydrauliczne .....	173
7.4. Dobór optymalnego kształtu trapezowego przekroju poprzecznego kanału otwartego .....	178
7.4.1. Cel i zakres metody .....	178
7.4.2. Wpływ kształtu na wielkość czynnego trapezowego przekroju poprzecznego kanału .....	179
7.5. Transformacja przekroju trapezowego w przekrój paraboliczny .....	180
<b>LITERATURA .....</b>	<b>183</b>
<b>O AUTORZE .....</b>	<b>187</b>

## WYKAZ PODSTAWOWYCH OZNACZEŃ

<i>A</i>	– powierzchnia czynnego przekroju poprzecznego kanału, rurociągu, sztolni, galerii [ $m^2$ ]
<i>B</i>	– szerokość zwierciadła wody w przekroju poprzecznym kanału [ $m$ ]
<i>B<sub>o</sub></i>	– szerokość w dnie przekroju poprzecznego kanału [ $m$ ]
<i>C</i>	– stała całkowania [–]
<i>C<sub>h</sub></i>	– współczynnik prędkości przepływu ze wzoru Chezy’ego [ $m^{0,5}/s$ ]
<i>D</i>	– średnica wlotowa wirnika turbiny [ $m$ ]
<i>E</i>	– energia [ $J = kgm^2/s^2$ ]
<i>E<sub>k</sub></i>	– energia kinetyczna [ $J = kgm^2/s^2$ ]
<i>F</i>	– siła [ $N = kgm/s^2$ ]
<i>Fr</i>	– liczba Froude’a [–]
<i>G</i>	– siła ciężkości [ $N = kgm/s^2$ ]
<i>H</i>	– spadek, głębokość wody w kanale, wysokość linii energii [ $m$ ]
<i>I<sub>o</sub></i>	– spadek dna kanału (–) albo spadek linii ciśnień w rurociągu (–)
<i>I<sub>s</sub></i>	– spadek linii strat hydraulicznych (–)
<i>J</i>	– moment bezwładności mas wirujących [ $kgm^2$ ]
<i>K<sub>o</sub></i>	– moduł sprężystości materiału powłoki rurociągu, sztolni [ $Pa = kg/ms^2$ ]
<i>L</i>	– długość całkowita przewodu prowadzącego wodę [ $m$ ]
<i>M</i>	– moment bezwładności [ $kgm^2/s^2$ ]
<i>M<sub>h</sub></i>	– moment hydrauliczny [ $kgm^2/s^2$ ]
<i>M<sub>n</sub></i>	– moment napędu [ $kgm^2/s^2$ ]
<i>M<sub>o</sub></i>	– moment obrotowy maszyny [ $kgm^2/s^2$ ]
<i>O</i>	– obwód zwilżony [ $m$ ]
<i>P</i>	– moc [ $W = kgm^2/s^3$ ]
<i>Q</i>	– natężenie przepływu [ $m^3/s$ ]
<i>R</i>	– siła oporów przepływu [ $N = kgm/s^2$ ]
<i>Re</i>	– liczba Reynoldsa [–]
<i>R<sub>h</sub></i>	– promień hydrauliczny [ $m$ ]
<i>Ri</i>	– niezmiennik Riemanna [ $m$ ]
<i>T</i>	– okres przebiegu zaburzeń, fal [ $s$ ]
<i>T<sub>m</sub></i>	– czas pełnego manewru otwarcia, zamknięcia urządzenia sterującego przepływem (kierownicy) [ $s$ ]

---

$T_i$	– stała czasowa inercji wody zawartej w przewodzie [s]
$U$	– funkcja zmiennej $\zeta, z$
$W$	– względne natężenie przepływu [ $\text{m}^3/\text{s}$ ], masy płynnej (wydatek masowy) [ $\text{kg}/\text{s}$ ]
$V$	– objętość [ $\text{m}^3$ ]
$a$	– przeswit pomiędzy łopatkami kierownicy, miara otwarcia kierownicy [mm]
$b$	– grubość laminarnej warstwy przyściennej [m]
$c$	– prędkość rozprzestrzeniania się zaburzenia fali [ $\text{m}/\text{s}$ ]
$d$	– średnica przewodu ciśnieniowego (rurociągu, sztolni, galerii) [m]
$e$	– szorstkość bezwzględna [m, mm]
$e_o$	– grubość powłoki przewodu [m]
$f$	– funkcja
$g$	– przyspieszenie grawitacyjne [ $\text{m}/\text{s}^2$ ]
$h$	– przyrost głębokości, wysokość fali, wielkość uderzenia hydraulicznego [m]
$h_s$	– strata hydrauliczna [m]
$i$	– liczba porządkowa charakterystyki prostej [–]
$j$	– liczba porządkowa charakterystyki wstecznej [–]
$k$	– kolejny numer, współczynnik [–]
$l$	– długość odcinka przewodu [m]
$m$	– masa [kg] lub
$m$	– współczynnik pochylenia skarpy kanału [–]
$n$	– prędkość obrotowa maszyny [obr/min]
$1/n$	– współczynnik prędkości do wzoru Manninga [ $\text{m}^{1/3}/\text{s}$ ]
$n_s$	– wyróżnik szybkobieżności [obr/min]
$r$	– promień okręgu [m]
$u$	– prędkość przepływu [ $\text{m}/\text{s}$ ]
$w$	– prędkość względna przepływu [ $\text{m}/\text{s}$ ]
$z$	– współczynnik kształtu kanału trapezowego [–]
$\Theta$	– funkcja $H = f(Q)$ – charakterystyka pompy
$K$	– stała Karmana [–]
$\Sigma$	– suma
$M$	– ilość ruchu [ $\text{m}^3$ ]
$\Phi$	– liczba przepływu falowego [–]
$\Omega$	– natężenie przepływu względnego [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
$\alpha$	– współczynnik energii kinetycznej (de Saint-Venanta) [–]
$\beta$	– wskaźnik szerokości kanału przekroju parabolicznego [–]



---

$\gamma$	– ciężar właściwy [ $\text{N}/\text{m}^3$ ]
$\delta$	– współczynnik odkształcenia powłoki rurociągu [–]
$\varepsilon = H_{sr}/H$	– współczynnik kształtu przekroju parabolicznego [–]
$\varepsilon = e/d$	– szorstkość względna [–]
$\zeta$	– głębokość względna [–]
$\eta$	– współczynnik sprawności maszyny hydraulicznej [–]
$\varkappa$	– względna współrzędna długości przewodu, kanału [–]
$\mu$	– współczynnik wydatku przelewu, otworu [–]
$\mu_z$	– wskaźnik zbrojenia rurociągu żelbetowego, sztolni [–]
$\nu$	– kinematyczny współczynnik lepkości [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]
$\nu_z, \nu_b, \nu_s$	– liczby Poissona, odpowiednio: stali, betonu, górotworu [–]
$\xi$	– współczynnik strat hydraulicznych [–]
$\rho$	– masa właściwa (gęstość) [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
$\varphi$	– współczynnik prędkości przepływu [–]
$\omega$	– prędkość kątowna [ $1/\text{s}$ ]

**Uwaga:** opisy sporadycznych oznaczeń lokalnych znajdują się bezpośrednio w tekście.



# WPROWADZENIE

Wśród wielu zjawisk hydraulicznych występujących w budownictwie wodnym, a w szczególności w siłowniach wodnych, szczególnie istotne są niustalone przepływy wód wywołane przez urządzenia mechaniczne i maszyny hydrauliczne. Powstają w korycie otwartym lub w zamkniętym przewodzie ciśnieniowym, w którym natężenie przepływu  $Q$  zmienia się w czasie i na długości. Bywają spowodowane zewnętrznymi czynnikami naturalnymi albo celowym działaniem, polegającym na sterowaniu mocą lub przepływem.

Zależnie od szybkości zmian natężenia przepływu oraz rodzaju przewodu może powstać przepływ falowy lub niustalony wolnozmienny albo oba te zjawiska równocześnie. Fala powoduje zawsze niejaką skokową zmianę natężenia przepływu, a przepływ wolnozmienny – zmianę ciągłą i relatywnie powolną, ale znacznie szybszą niż tempo zasadniczego przepływu wód. Opory ruchu oraz wszelkiego rodzaju przeszkody powodują, że fale oddalające się od źródła generacji zmniejszają swe rozmiary, a za falą powstaje przepływ niustalony wolnozmienny. W kanale otwartym rozprzestrzeniająca się fala nosi nazwę translacyjnej (rozdział pierwszy). Są cztery rodzaje takich fal. Każdy przepływ niustalony wywołujący gwałtowny wzrost lub spadek ciśnienia rozprzestrzeniającego się w przewodzie ciśnieniowym nosi nazwę uderzenia hydraulicznego. Uderzenie proste wywołuje falę ciśnienia, a złożone – przepływ niustalony wolnozmienny. Zjawiska te niekiedy zbyt intensywnie oddziałują na maszynę hydrauliczną i urządzenie sterujące, a przed wszystkim na przewód (kanał, rurociąg) prowadzący wodę roboczą. Te okoliczności skłoniły autora do matematycznego opisanie w niniejszym podręczniku wyżej wymienionych rodzajów przepływów niustalonych wywołanych przez maszyny hydrauliczne i opracowania modeli matematycznych pozwalających względnie dokładnie i właściwie wyznaczyć wartości powstającego przepływu niustalowanego. Podręcznik ten jest przeznaczony przede wszystkim dla studentów i słuchaczy studiów podyplomowych i doktoranckich, obeznanym już z podstawowymi prawami hydrauliki. Może też być pomocny inżynierom zajmującym się projektowaniem i eksploatacją obiektów hydroenergetycznych, oddzielnych urządzeń i budowli hydrotechnicznych.

Przedstawione w podręczniku opisy mają głównie charakter teoretycznych rozważań, wywodów i analiz umożliwiających tworzenie racjonalnych modeli obliczeniowych. Bazą prezentowanych modeli matematycznych są podstawowe równania jednorodnej płynnej masy wody, energii i ilości ruchu oraz fundamentalne prawa przepływu podane przez Eulera (rozdział drugi).

W rozdziale trzecim, w p. 3.6, przedstawiono teorię charakterystyk zaadaptowaną do przepływu niustalowanego wolnozmiennego. Ta matematyczna teoria, mająca szerokie zastosowanie w odniesieniu do zjawisk fizycznych, została opracowana i upubliczniona przez znamienitych matematyków (patrz wykaz literatury). Jej istotną cechą jest to, że zachodzące zmiany natężenia przepływu  $Q$  i jego pochodnych  $u$ ,  $H$  są opisywane

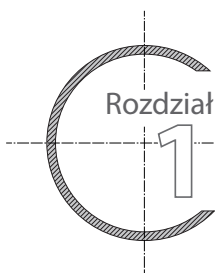
matematycznie na drodze rozprzestrzeniania się każdego dowolnie wybranego naturalnego lub wirtualnego zaburzenia. W celu wykazania wyjątkowych zalet i możliwości szerokiego zastosowania tej teorii w p. 3.2, 3.3, 3.4 i 3.5 przedstawiono inne metody wyznaczania wartości przepływu niustalonego wolnozmiennego, opisanego przez de Saint-Venanta.

W rozdziale czwartym omówiono kształt i wielkość dodatniej i ujemnej fali translacyjnej w przekroju poprzecznym prostokątnym, trapezowym i parabolicznym kanału otwartego. Falę dodatnią opisuje się w ruchomym układzie współrzędnych  $x, z$  poruszającym się z prędkością bezwzględną  $c$ . Wielkości tej fali są funkcją liczby względnego przepływu falowego  $\Phi_0$ .

Rozdział piąty omawia charakterystyczne uderzenia hydrauliczne, jakie wywołuje urządzenie sterujące i bieg niustalony maszyny hydroenergetycznej oraz pompa przesyłowa. Prezentowane metody obliczeń uderzenia hydraulicznego zmiennego w czasie i na długości rurociągu  $h = f(x, t)$  oraz biegu niustalonego maszyny hydraulicznej  $n = f(t)$  uwzględniają dość powszechnie spotykane właściwości konstrukcyjne rurociągu i ruchowe maszyn w postaci charakterystyk uniwersalnych.

W rozdziale szóstym opisano masowy przepływ oscylacyjny w komorach wyrównawczych. Rozpatruje się tu trzy typy komór wyrównawczych: prostą, dławikową i różnicową. Zmiany poziomu wody w komorze prostej zostały opisane na bazie drugiej zasady dynamiki Newtona, natomiast ekstremalne stany w komorze dławikowej i różnicowej – za pomocą formuł empirycznych.

Istotną cechą zawartych w podręczniku modeli opisujących zmiany wielkości hydraulicznych w przewodach prowadzących wodę roboczą i biegu niustalonego maszyn hydraulicznych jest to, że uwzględniają one czynnik opisujący straty hydrauliczne na tarcie i zmiany prędkości przepływu powstające w przepływie niustalonym. Formuły opisujące te straty przedstawiono w rozdziale siódmym, uzupełniającym prezentowane modele matematyczne.

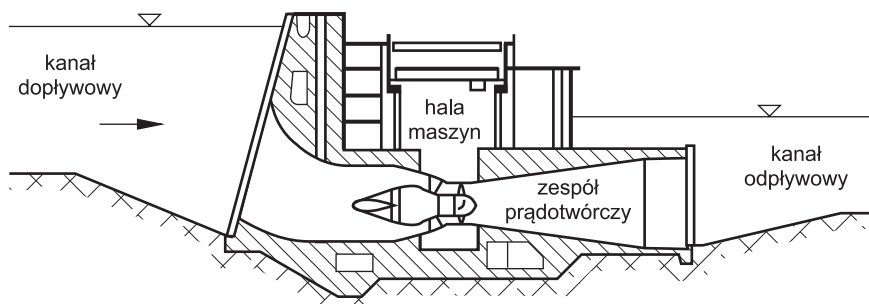


# POWSTAWANIE I ROZPRZESTRZENIANIE SIĘ PRZEŁYWU NIEUSTALONEGO WYWOŁANEGO PRZEZ URZĄDZENIA HYDROMECHANICZNE SIŁOWNI WODNYCH

## 1.1. Urządzenia hydromechaniczne siłowni wodnej wywołujące przepływy nieustalone

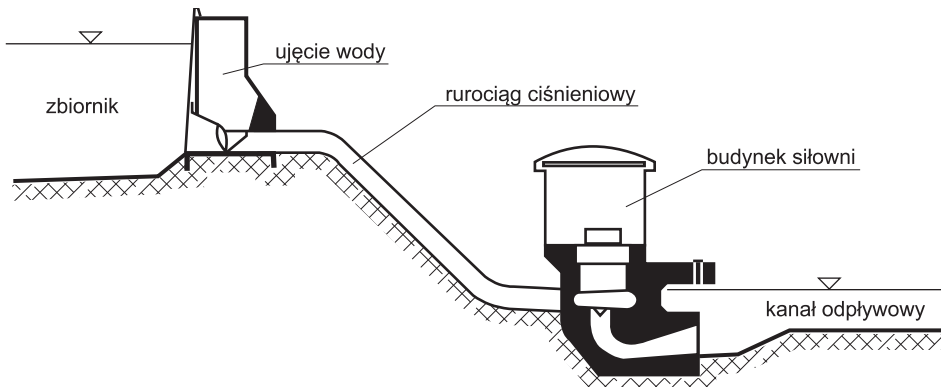
Pod pojęciem siłowni wodnej rozumie się elektrownię bądź inny obiekt hydroenergetyczny (młyn, tartak), którego maszyny hydrauliczne przetwarzają energię potencjalną i kinetyczną wody w użytkową energię mechaniczną zwykle ruchu obrotowego. Siłownią jest też pompownia przetwarzająca energię mechaniczną w energię kinetyczną wody roboczej, tłocząc ją na wyższy poziom. W elektrowniach akumulacyjnych, zwanych szczytowo-pompowymi, obie te funkcje są realizowane przemienne.

W celu pozyskania energii użytecznej wodę roboczą do i od maszyny przetwórczej prowadzi pojedynczy lub zespołowy system urządzeń (budowli) hydrotechnicznych. W najprostszym rozwiązaniu stanowi go koryto spiętrzonej rzeki. W systemie derywacyjnym woda jest prowadzona kanałem otwartym (rys. 1.1) albo rurociągiem ciśnieniowym (rys. 1.2), względnie obydwoma urządzeniami równocześnie. W elektrowniach podziemnych rurociąg zastępuje się sztolnią (rys. 1.3).

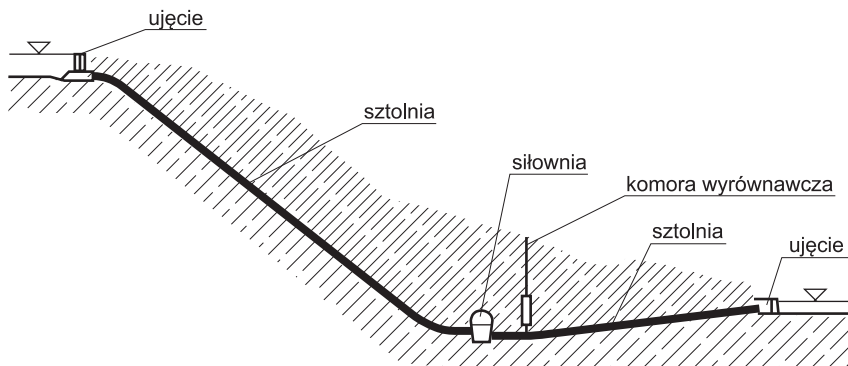


Rys. 1.1. Współczesna siłownia wodna niskiego spadku



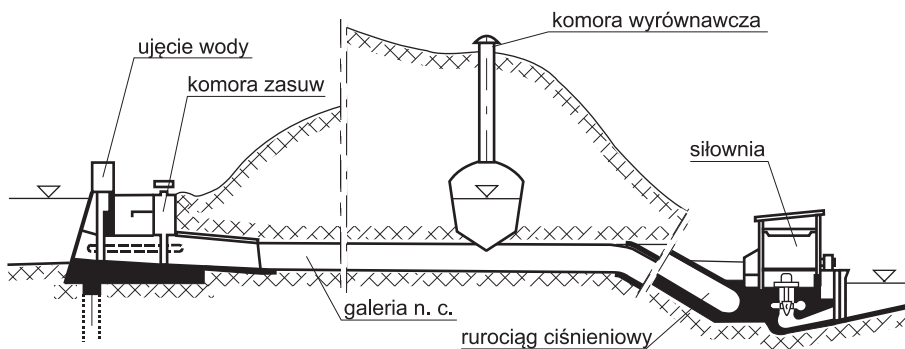


Rys. 1.2. Klasyczna siłownia wodna wysokiego spadku



Rys. 1.3. Siłownia wodna podziemna wysokiego spadku

Bardziej złożony system derywacyjny jest wyposażony dodatkowo w galerię dopływową niskiego ciśnienia (rys. 1.4), a niekiedy też w kanał dopływowy lub odpływowy, względnie w obydwa równocześnie. W celu złagodzenia zjawiska uderzenia hydraulicznego, powstającego w złożonym systemie ciśnieniowym, zaopatruje się go w komorę wyrównawczą.



Rys. 1.4. Siłownia wodna wysokiego spadku w złożonym układzie derywacyjnym (galeria n.c. – galeria niskiego ciśnienia)

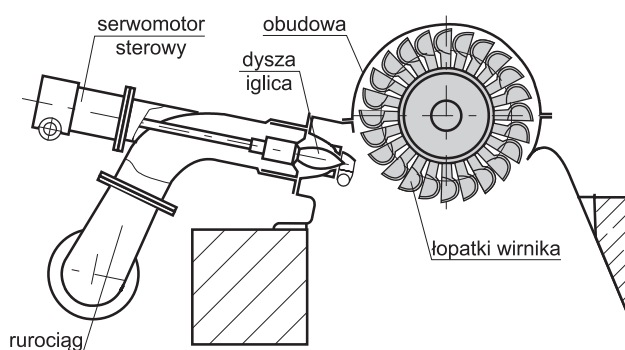
Do przetwarzania energii wody służą głównie wirowe maszyny hydrauliczne, których rodzaj i wielkość dobiera się zależnie od istniejących warunków hydrotechnicznych, takich jak przede wszystkim: dysponowany spód  $H$ , instalowany przełyk maszyn  $Q$  oraz synchroniczna prędkość obrotowa  $n$ . Parametrem charakteryzującym rodzaj zastosowanych maszyn jest wyróżnik szybkobieżności, w przypadku turbin opisany formułą:

$$n_s = 1,166 \cdot n \frac{P^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{5}{4}}} \quad (1.1)$$

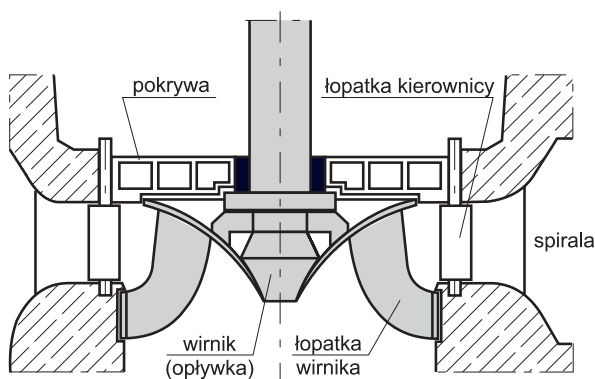
gdzie:  $P$  – moc instalowana maszyny [kW].

We współczesnych dużych elektrowniach wodnych mają zastosowanie następujące rodzaje turbin: Peltona ( $n_s = 5 \div 80$ ), Francisa ( $n_s = 75 \div 450$ ), Kapłana ( $n_s = 450 \div 1200$ ), Deriaza ( $n_s = 300 \div 900$ ) (rys. 1.5–1.8).

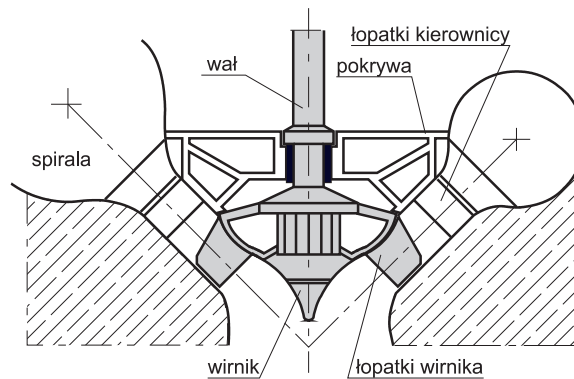
Turbina Peltona jest maszyną strumieniową wolnobieżną, której bieg jest sterowany za pomocą dyszy. Pozostałe turbiny są maszynami ciśnieniowymi (reakcyjnymi).



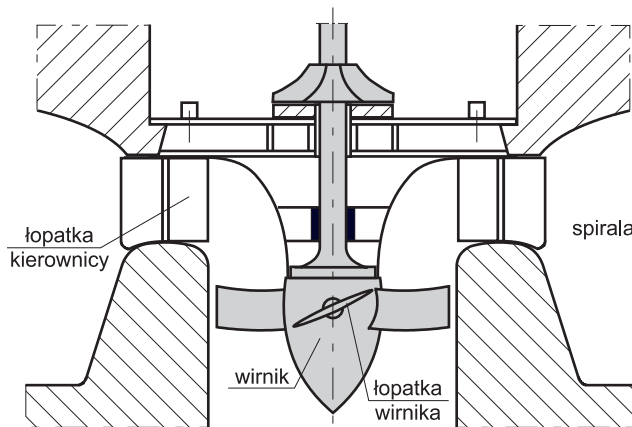
Rys. 1.5. Jednodyszowa turbina Peltona



Rys. 1.6. Turbina Francisa,  $n_s \approx 120$



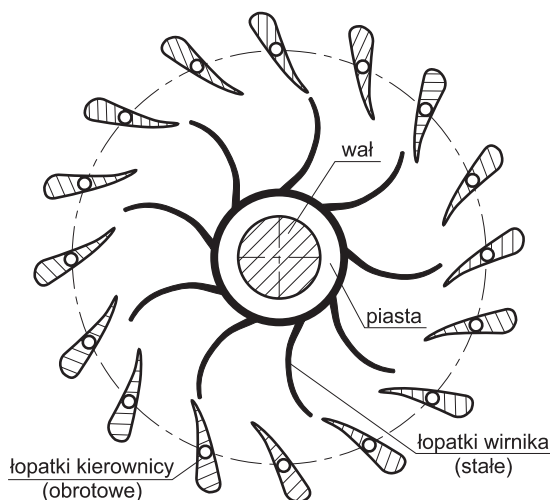
Rys. 1.7. Turbina Deriaza



Rys. 1.8. Turbina Kaplana

Wielkością natężenia przepływu wchodzącego na wirnik tych maszyn steruje kierownica (rys. 1.9) składająca się z łopatek naprowadzających. Natomiast w klasycznych pompach przepływ jest sterowany zasuwą, zaworem motylowym lub kulowym. W prostych instalacjach pompowych może to być tylko kłapa zwrotna.

W elektrowni wodnej zasuwa lub zawór, instalowane na wejściu wody do kierownicy, stanowią bardzo często zamknięcie awaryjno-remontowe. Są też zabezpieczeniem przed nadmiernym rozbiegiem maszyn w szczególnej sytuacji awaryjnej (blokada kierownicy). Każda maszyna reakcyjna może pełnić funkcję turbiny lub pompy, zależnie od kierunku obrotów. Po odpowiednim wykształceniu łopatek staje się maszyną odwracalną, zwaną pompoturbiną. Klasycznym przykładem tego typu maszyn są pompoturbiny z wirnikiem Francisa lub Deriaza ze zmodernizowanym wirnikiem Kaplana. We współczesnych elektrowniach akumulacyjnych, zwanych szczytowo-pompowymi, maszyny z wirnikiem Francisa instalowane są na spady nawet do  $500 \div 600$  m.



Rys. 1.9. Kierownica z wirnikiem Francisa

## 1.2. Mechanizm powstawania i rozprzestrzeniania się przepływu nieustalonego

Każdy przypadkowy lub zamierzony manewr urządzenia sterującego modyfikuje natężenie przepływu przechodzącego przez wirnik maszyny hydraulicznej. Jest ono zmienne w czasie trwania manewru:

$$Q = Q(t) \quad (1.2)$$

Przy ustalonym spadzie  $H$  natężenie przepływu strumienia padającego na łopatki wirnika turbiny Peltona zależy tylko i wyłącznie od wielkości otwarcia dyszy. Natomiast natężenie przepływu przechodzącego przez wirnik maszyny reakcyjnej jest funkcją wielkości otwarcia łopatek kierownicy  $a$  i prędkości obrotowej wirnika  $n$ :

$$Q = Q(a, n) \quad 1,3$$

Funkcja ta w postaci zredukowanych wartości ruchowych jest zwykle ustalana na drodze badań laboratoryjnych, a niekiedy również „in situ”. Stanowi charakterystykę uniwersalną określonej serii maszyn, daną w postaci graficznej.

Zmienne natężenie przepływu na wirniku maszyny przenosi się do przewodów prowadzących wody (rurociągów, kanałów), gdzie ulega dalszej modyfikacji. Rozprzestrzeniając się na całej długości przewodów dopływowego i odpływowego, trwa nie tylko w czasie manewru urządzenia sterującego, ale również po jego zakończeniu i całkowitym zamknięciu urządzenia. Natężenie przepływu nieustalonego jest w tym wypadku funkcją dwóch zmiennych niezależnych: współrzędnej długości przewodu  $x$  i czasu trwania  $t$ :

$$Q = Q(x, t) \quad (1.4)$$

Siłą rzeczy w przewodzie powstaje zmiana w czasie i na długości natężenia przepływu  $Q$  i poziomu zwierciadła wody w korycie otwartym  $z$ , względnie ciśnienia  $p$  w przewodzie zamkniętym. Zmiana tych parametrów przepływu może zachodzić powoli lub gwałtownie, oddziałując znacząco na przewód i maszynę hydrauliczną, a w szczególności jej bieg. Gwałtowna zmiana natężenia przepływu, wywołana zwykle przez nagłe i całkowite wyłączenie zespołu hydroenergetycznego, powoduje powstanie uderzenia hydraulicznego (*water hammer, coup de bélier, Druckstosse, gidravličeski udar*) w przewodzie ciśnieniowym, a w kanale – fali translacyjnej (*wave water, onde de translation, translation Welle, volna translationnâ*).

Z reguły maszyny hydroenergetyczne wywołują przepływ nieustalony wolnozmienny, a mimo to powodujący znaczącą zmianę ciśnienia na urządzeniu sterowniczym i w przewodzie. Stąd między innymi również takie zjawisko traktuje się jak uderzenie hydrauliczne. Zjawisko nagłej zmiany ciśnienia, a zatem powstanie skoku ciśnienia wywołującego rozprzestrzenianie się fali uderzenia hydraulicznego, może powstać tylko przy gwałtownej zmianie natężenia przepływu (patrz p. 1.3), powodowanej np. przez zasuwy samoopadowe. Tymczasem fala translacyjna powstaje niemal zawsze, gdy siłownia jest zbudowana na kanale derywacyjnym.

Wskutek oddziaływania strat hydraulicznych i ewentualnych przeszkód każda fala w miarę oddalania się od siłowni zmniejsza swe wielkości hydrauliczne, a w szczególności niesione natężenie przepływu i wysokość. Za falą rozprzestrzenia się przepływ nieustalony wolnozmienny, co sprawia, że występuje dalsza modyfikacja przepływu, wytwarzana przez urządzenie nim sterujące.

W trakcie manewru urządzenia sterującego następują więc wzajemne oddziaływania przepływu w przewodzie i przepływu przechodzącego przez wirnik maszyny hydraulicznej, a w pewnych przypadkach jej prędkości obrotowej. Ma to miejsce wówczas, gdy zespół hydroenergetyczny zostanie odłączony od sieci energetycznej zasilającej lub odbierającej prąd elektryczny. W takim przypadku zespół silnik–pompa lub prądnica–turbina wchodzi w stan nieustalony. Następuje zmiana w czasie momentu obrotowego, co wywołuje zmianę prędkości obrotowej, a następnie zmianę natężenia przepływu, jeżeli urządzenie sterujące jest jeszcze niezamknięte.

### 1.3. Rodzaje uderzenia hydraulicznego

O rodzaju powstałego przepływu nieustalonego w danym przewodzie prowadzącym wodę roboczą decydują czas zmiany natężenia przepływu przechodzącego przez maszynę hydrauliczną  $T_m$  oraz długość przewodu  $L$  i prędkość rozchodzenia się zaburzeń  $c$ . Przyjmuje się, że istotną rolę odgrywa tu stosunek czasu trwania  $T_m$  pełnego manewru urządzenia sterującego przepływem do okresu  $T$  przebiegu zaburzenia przez przewód (tam i z powrotem). Jeżeli czas manewru jest dłuższy od okresu przebiegu pierwotnego zaburzenia:

$$T_m > \frac{2L}{c} = T \quad (1.5)$$



to powstały przepływ niestabilny jest wolnozmienny. Jeśli zaś czas manewru jest krótszy od okresu przebiegu zaburzenia, to generuje się klasyczne uderzenie hydrauliczne w postaci fali ciśnienia, biegnącej do zbiornika i powracającej do urządzenia sterującego przepływem, ale już nieco zmodyfikowanej:

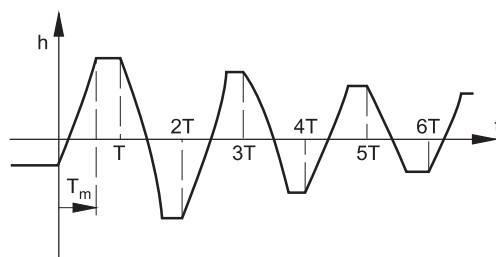
$$T_m < \frac{2L}{c} = T \quad (1.6)$$

W przepływie wolnozmiennym natężenie przepływu zmienia się w sposób ciągły, a w przepływie falowym – w sposób skokowy. W konsekwencji sposób opisu matematycznego tych dwóch zjawisk zasadniczo się różni.

Przedstawiony wyżej sposób rozróżniania przepływów niestabilnych nie zawsze jest jednak jednoznaczny. Zdarza się, że mimo iż czas trwania manewru  $T_m$  jest dłuższy od okresu przebiegu zaburzeń  $T$ , to zasadnicza zmiana natężenia przepływu jest krótsza od czasu trwania pełnego manewru i w przewodzie może powstać typowa fala. Może to nastąpić wskutek rozbiegu wirnika maszyny albo też równoczesnego zablokowania kierownicy w pozycji otwartej. Zjawiska te są szczególnie wyraziste w sytuacji, gdy wystąpi awaria w pracy pompowej.

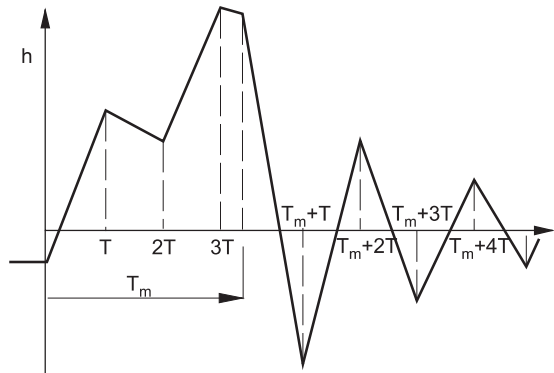
W przewodzie ciśnieniowym (rurociągu, sztolni) każdy przepływ niestabilny wywołany przez awaryjny zrzut obciążenia powoduje stosunkowo gwałtowny wzrost ciśnienia na wirniku i w przewodzie. Zjawisko to zwyczajowo nazywa się uderzeniem hydraulicznym.

Jeżeli czas manewru  $T_m$  jest krótszy od okresu przebiegu fali  $T$ , to powstanie uderzenie hydrauliczne zwane prostym (rys. 1.10). Zwykle występuje ono w rurociągach przesyłowych dalekiego zasięgu, gdzie urządzeniami sterującymi przepływem są zasuwki szybkodziałające (samoopadowe). Maksymalna wartość ciśnienia powstaje już w pierwszej fazie trwania stanu niestabilnego.

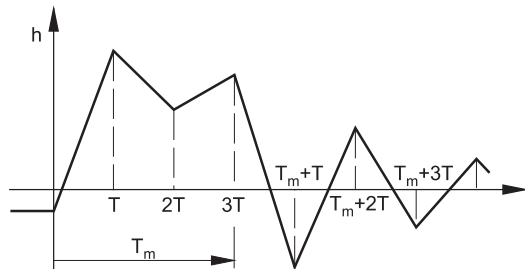


Rys. 1.10. Schemat przebiegu w czasie prostego uderzenia hydraulicznego na kierownicy

Jeżeli czas manewru jest zdecydowanie dłuższy od czasu przebiegu zaburzeń, to powstanie uderzenie hydrauliczne zwane złożonym. Jest ono efektem superpozycji zaburzeń pierwotnych wytworzonych na wirniku maszyny i zaburzeń powrotnych odbitych od zbiornika. Zależnie od wytworzonej zmiany natężenia przepływu na wirniku maszyny może powstać uderzenie rosnące lub malejące w czasie trwania manewru urządzenia sterującego (rys. 1.11, 1.12). Tego rodzaju uderzenie hydrauliczne jest wywołane z reguły przez turbiny i pompy siłowni wodnej.



Rys. 1.11. Schemat przebiegu w czasie rosnącego uderzenia hydraulicznego



Rys. 1.12. Schemat przebiegu w czasie malejącego uderzenia hydraulicznego

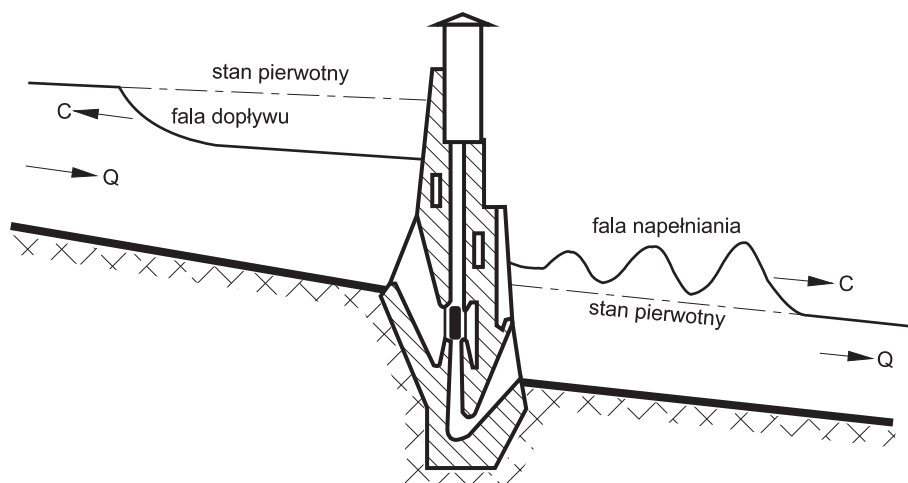
Prawie zawsze po zakończeniu manewru urządzenia sterującego w przewodzie ciśnieniowym powstaje brak równowagi dynamicznej przepływu. Towarzyszy temu pulsacja ciśnienia, która po pewnym czasie zanika wskutek strat hydraulicznych, a w przypadku uruchomienia przepływu – wskutek odpływu mas wody poddanej nierównowadze dynamicznej.

Podobnie przebiega zmiana poziomów zwierciadła wody na siłowni, gdy jest ona zasilana przez kanał lub koryto rzeki. Proces ten zachodzi jednak o wiele wolniej. Wynika to stąd, że prędkość rozprzestrzeniania się zaburzeń (fali) jest wielokrotnie (jak 1:100) mniejsza w kanale niż w rurociągu. Natomiast szybkie zmiany poziomów wody towarzyszą czołu każdej fali translacyjnej.

#### 1.4. Rodzaje fal translacyjnych

Fale translacyjne można sklasyfikować na dwa sposoby. Ze względu na zmianę poziomu zwierciadła wody powstałej za czołem fali rozróżnia się:

- fale dodatnie – powodujące wzrost poziomu zwierciadła wody;
- fale ujemne – prowadzące do obniżenia poziomu zwierciadła wody za rozprzestrzeniającą się falą.



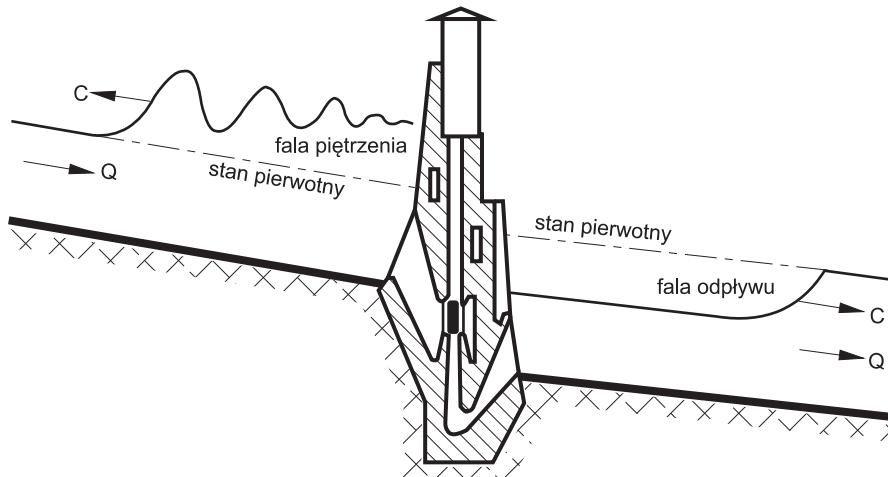
Rys. 1.13. Fale translacyjne powstałe wskutek nagłego wzrostu przepływu w kanale derywacyjnym

Zależnie od zmiany natężenia przepływu i kierunku rozprzestrzeniania się fali w stosunku do naturalnego przepływu wody rozróżnia się falę prostą i wsteczną. Rozpatrując łącznie obydwie podziały, można wyróżnić cztery rodzaje fal:

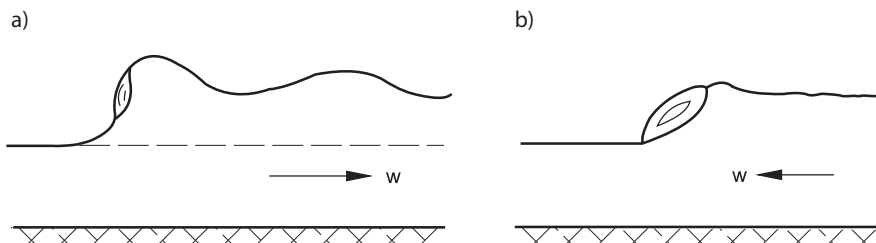
- a) fala napełniania (*filling wave, onde positive d'aval, Füllschwall, volna napolnenâ*) – fala dodatnia prosta, która powstaje w kanale odpływowym wskutek nagłego wzrostu natężenia przepływu (rys. 1.13);
- b) fala piętrzenia (*downstream shutoff wave, onde positive d'aval, Stauschwall, volna podpora*) – fala dodatnia wsteczna, która powstaje w kanale dopływowym przy gwałtownym zmniejszeniu natężenia przepływu (rys. 1.14);
- c) fala dopływu (opróżnienia) (*downstream release wave, onde négative d'aval, Entnahmensunk, volna podpora*) – fala ujemna wsteczna, którą wywołuje na kanale dopływowym szybki wzrost natężenia przepływu przy obniżeniu stanu wody na dopływie (rys. 1.13);
- d) fala odpływu (obniżenia) (*upstream shutoff wave, onde négative d'aval, Absperr-sunk volna izliwu*) – ujemna fala prosta powstająca w kanale (korycie rzeki) wskutek nagłego zmniejszenia natężenia przepływu przez maszyny hydrauliczne. Za falą rozpoczyna się odpływ wody od siłowni (rys. 1.14).

Czoło każdej fali translacyjnej przyjmuje charakterystyczny kształt (rys. 1.15a, b). Czoło fali ujemnej wydłuża się sukcesywnie w miarę pokonywanej drogi i zmniejsza swoją wysokość. Czoło fali dodatniej formuje się na pewnej niewielkiej odległości od siłowni. Początkowo nieuformowana, w postaci ruchomego progu wodnego przemieszcza się z prędkością znacznie większą od prędkości przepływu. Na czole fali dodatniej dobrze ukształtowanej powstają oscylacje, jeżeli fala rozprzestrzenia się w regularnym kanale. Jeżeli jednak fala dodatnia rozprzestrzenia się w korycie rzeki, w którym została zbudowana siłownia wodna obok stopnia piętrzącego, to oscylacje mogą nie powstać.

W miarę oddalania się od siłowni fala zachowuje jednak charakterystyczny kształt, zmniejszając swoją wielkość.



Rys. 1.14. Fala translacyjna powstała wskutek nagłego zatrzymania przepływu w kanale derywacyjnym



Rys. 1.15. Typowe kształty załamanej fali: a) napelnienia; b) piętrzenia

Przy nadmiernej zmianie natężenia przepływu w stosunkowo płytkim kanale czoło dodatniej fali translacyjnej może ulec załamaniu. Powstaje wówczas swego rodzaju ruchomy odskok hydrauliczny, ewentualnie z niewielkimi oscylacjami. Zmniejszanie wysokości fali i przenoszonego natężenia przepływu na długości kanału jest spowodowane przez straty hydrauliczne.

Konsekwencją tego stanowi powstanie i rozwój przepływu nieustalonego wolnozmiennego za czołem fali. Poziom wód przy siłowni rośnie aż do chwili powrotu fali odbitej, gdy została wygenerowana fala dodatnia, a maleje, gdy została wygenerowana fala ujemna. Każda fala się odbija, osiągnąwszy przeciwległy koniec kanału. Jeżeli jest to odpowiedni zbiornik wodny, to fala zmienia znak na przeciwny: dodatnia staje się ujemną, a ujemna – dodatnią, ale bez oscylacji. Poziom wody na zbiorniku pozostaje niezmienny, choć niekiedy zaburzony. Dzieje się tak, gdy zbiornik jest stosunkowo mały i płytki. Wówczas odbita fala zanika, przekształcając się w przepływ nieustalony wolnozmienny.

Fala odbita od budowli hydrotechnicznej (jazu, zapory) nie zmienia znacząco swego kształtu, ale zmienia znak przenoszonego natężenia przepływu. W stosunku do pierwotnego stanu poziom zwierciadła wody wzrasta średnio o dwukrotną wysokość fali dodatniej i obniża się o dwukrotną wysokość fali ujemnej. W obu przypadkach suma algebraiczna natężeń przepływu niesionego przez fale pierwotną i odbitą jest równa zeru.

### 1.5. Masowy przepływ oscylacyjny

Szczególnym rodzajem przepływu nieustalonego wolnozmiennego jest masowy przepływ oscylacyjny. Pojawia się on w galerii niskiego ciśnienia, łączącej zwykle zbiornik retencyjny z komorą wyrównawczą. Rzadziej występuje w kanale otwartym, jako pochodna zanikającego przepływu falowego.

Po gwałtownym zatrzymaniu przepływu przechodzącego przez maszynę hydrauliczną część masy wody zgromadzonej w galerii przepływa do komory wyrównawczej. Przy rozruchu maszyny hydraulicznej woda jest chwilowo pobierana z komory wyrównawczej. Oba te zjawiska wywołują przez pewien czas wymianę wód pomiędzy galerią a komorą wyrównawczą. Powstaje w ten sposób masowy przepływ oscylacyjny. Polega on na tym, że cała masa wody przemieszcza się w galerii ruchem wahadłowym. Podobnie dzieje się w komorze wyrównawczej. Tu występują również oscylacje poziomu zwierciadła wody.

### 1.6. Obszar występowania przepływów nieustalonych

W układzie współrzędnych długości przewodu  $x$  prowadzącego wodę roboczą i czasu trwania  $t$  przepływu nieustalonego drogę  $x$  przebiegu dowolnego zaburzenia przepływu wyznacza krzywa o równaniu:

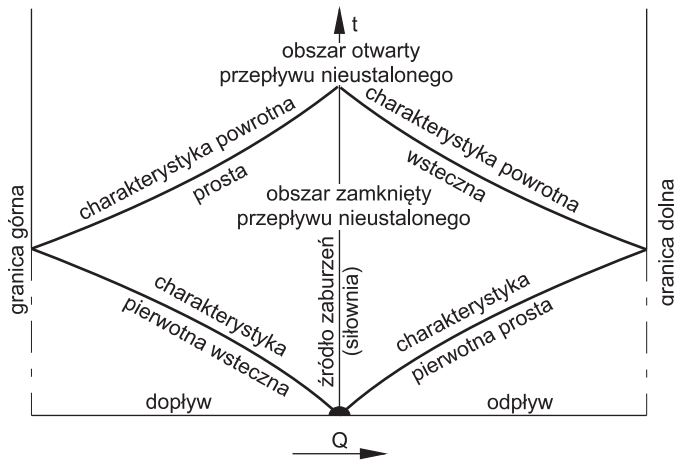
$$dx = cdt \quad (1.7)$$

Nosi ona nazwę charakterystyki.

Fala ciśnienia powstała w wyniku prostego uderzenia hydraulicznego  $T_m < T$ , względnie fala translacyjna, tworzy w tym układzie pierwotną charakterystykę, wzdłuż której występuje skokowa zmiana natężenia przepływu. Po dojściu do końca kanału i odbiciu od zbiornika lub budowli hydrotechnicznej fala wyznacza charakterystykę powrotną. W przewodzie hydraulicznie długim (rurociągu przesyłowym, korycie rzeki) hipotetyczną granicą „odbicia” fali będzie punkt (na płaszczyźnie  $x, t$ ), w którym fala zanika. Powstałe tu zaburzenie powrotne wyznacza charakterystykę powrotną. W obu przypadkach powstają dwa obszary przepływu nieustalonego wolnozmiennego, w pewnym sensie niezależne od siebie. Zamknięty obszar wewnętrzny jest ograniczony charakterystykami pierwotną i powrotną. Zewnętrzny obszar otwarty na kierunku czasu jest ograniczony od dołu charakterystyką powrotną. Wartość natężenia przepływu i stanu lub ciśnienia za falą pierwotną i przed falą powrotną będą stanowiły warunki graniczne przepływu obszaru wewnętrznego, a wartości natężenia przepływu i stanu lub głębokości za



falą powrotną wyznaczą wzdłuż jej charakterystyki warunki graniczne obszaru otwartego w czasie (rys. 1.16).



Rys. 1.16. Obszary badanego przepływu nieustalonego w hydraulicznie długim przewodzie

Nieco inaczej kształtuje się obszar przepływu nieustalonego wolnozmiennego generowanego przez siłownię wodną. W tym wypadku początkową granicę obszaru stanowi droga, jaką na płaszczyźnie  $x, t$  pokonuje pierwsze elementarne zaburzenie. Granicami obszaru o skończonej i określonej długości przewodu  $L$  prowadzącego wodę roboczą jest z jednej strony siłownia wodna generująca przepływ nieustalony, a z drugiej zwykle zbiornik wody lub budowla hydrotechniczna. Każdy z tych obiektów tworzy odmienne warunki brzegowe przepływu. Siłownia wodna zmienia natężenie przepływu w czasie trwania manewru urządzenia sterującego, a budowla dokonuje zmian poziomu zwierciadła wody  $z$  w czasie trwania przepływu nieustalonego:

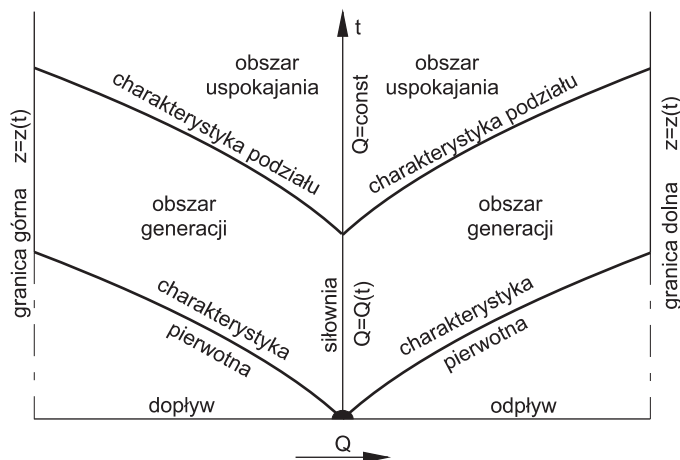
$$z = z(t) \quad (1.8)$$

W całym obszarze trwającego przepływu nieustalonego (rys. 1.17) wyróżnia się dwa podobszary: generacyjny i uspokajający. Ich granice tworzy charakterystyka o równaniu:

$$dx = c_m dt \quad (1.9)$$

gdzie:  $c_m$  – prędkość rozchodzenia się zaburzenia powstałego na siłowni w czasie  $T_m$  zakończenia manewru urządzenia sterującego.

W przewodzie o nieskończonej hydraulicznie długości (rurociągu dalekiego zasięgu, korycie rzeki) granicę przeciwną źródła generacji zaburzeń (siłowni wodnej) stanowi miejsce (przekrój), w którym przepływ nieustalony przechodzi w stan ustalony. Zanika tam każda fala translacyjna wraz z niesionym przez nią przepływem wskutek uprzednio występujących strat hydraulicznych. Powstałe w tym miejscu zaburzenie powrotne stanowi praktyczną granicę przepływu nieustalonego wolnozmiennego.



Rys. 1.17. Obszary badanego przepływu nieustalonego w hydraulicznie krótkim przewodzie

## 1.7. Rodzaje zmian obciążenia maszyn siłowni wodnej wywołujące ekstremalne przepływy nieustalone

### 1.7.1. Ekstremalne zdarzenia w siłowniach wodnych wywołujące stany nieustalone

Podstawową przyczyną powstawania i rozprzestrzeniania się przepływu nieustalonego w przewodach prowadzących wodę roboczą jest zmiana obciążenia maszyn hydraulicznych siłowni wodnej. Prowadzi to do bezpośredniej zmiany ciśnienia (spadu) na samej maszynie i w przewodzie ciśnieniowym, a w korycie otwartym wywołuje znaczącą zmianę poziomu wody. Niektóre tego typu zdarzenia wywołują poważny wzrost obciążenia instalacji hydraulicznych, a inne tylko istotne perturbacje w ich funkcjonowaniu. Szczególnie niepożądane są nagłe i pełne zmiany obciążenia, gdyż w przewodach ciśnieniowych wywołują one uderzenia hydrauliczne, a w korytach otwartych propagacje fal translacyjnych. Powstają w sposób zamierzony lub przypadkowy wskutek zakłóceń bądź to po stronie mechanicznej, bądź elektrycznej, a niekiedy zachodzących jednocześnie. Zakłócenia elektryczne powodujące odłączenie obciążonego agregatu od sieci energetycznej wywołują bieg nieustalony wirników turbiny oraz generatora i ewentualnie silnika rozruchowego, zależnie od rodzaju pracy. Może się to okazać groźne dla konstrukcji i bezpieczeństwa zespołu maszyn hydroenergetycznych.

Podstawowe zdarzenia wymagające szczególnej analizy i oceny skutków ich działania obejmują:

- a) rozruch maszyny do pracy wytwórczej (roboczej);
- b) pełne odciążenie i zatrzymanie maszyny, w szczególności wskutek:
  - zakłócenia prowadzącego do zatrzymania zespołu (turbiny, pompy) przez urządzenie sterujące przy agregacie włączonym do sieci energetycznej,

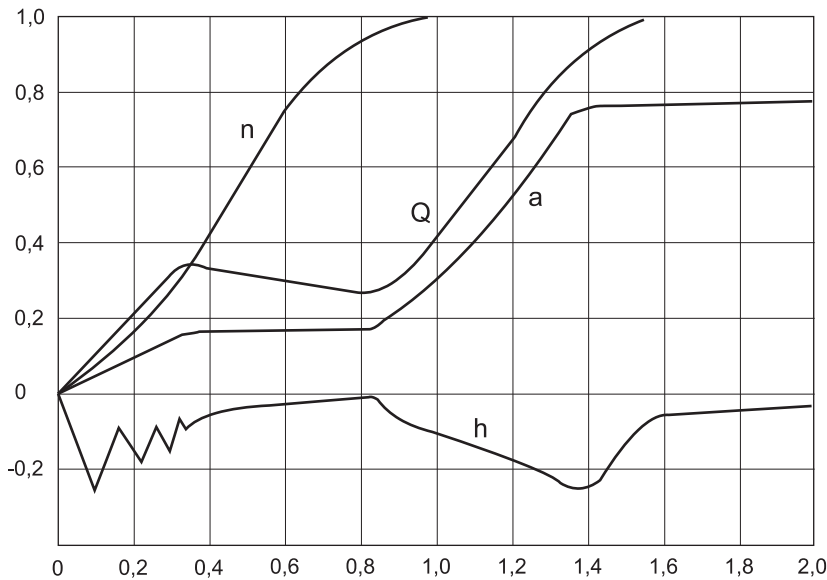
- zakłócenia po stronie elektrycznej prowadzącego do wyłączenia agregatu z sieci (prądnicy, silnika) przy normalnie funkcjonującym urządzeniu sterującym,
- zakłócenia po stronie mechanicznej i elektrycznej polegające na blokadzie urządzenia sterującego w pozycji otwartej z wyłączeniem agregatu z sieci energetycznej.

### 1.7.2. Rozruch maszyny hydraulicznej do pracy roboczej

Rozruch zespołu prądotwórczego odbywa się w trzech etapach:

- częściowe otwarcie kierownicy do uzyskania synchronicznej prędkości obrotowej;
- synchronizacja prądnicy z siecią energetyczną;
- obciążenie do pracy znamionowej.

Rozruch charakteryzuje się spadkiem ciśnienia (rys. 1.18) na wlocie do turbiny tylko w trakcie wzrostu natężenia przepływu. Jest to tzw. ujemne uderzenie hydrauliczne w rurociągu ciśnieniowym. W kanale doprowadzającym wodę generuje powstanie fali ujemnej, a na odpływie – dodatniej.



Rys. 1.18. Przykład zmian przebiegu w czasie  $Q$  – natężenia przepływu,  $n$  – prędkości obrotowej,  $a$  – wielkości otwarcia kierownicy,  $h$  – spadku ciśnienia w trakcie rozruchu do pracy generacyjnej

Zdarza się, że w trakcie synchronizacji powstaje pulsacja częstotliwości prądu wytwarzanego przez prądnicę. Utrudnia to jej podłączenie do sieci energetycznej. To niepożądane zjawisko tłumaczy się nadmierną bezwładnością wody znajdującej się w rurociągu zasilającym turbinę, która reprezentuje czas uruchomienia przepływu roboczego:

$$T_u = \frac{Lu_0}{gH_0} \quad (1.10)$$

Rozruch do pracy pompowej odbywa się zwykle przy zablokowanym dopływie wody na wirnik przez urządzenie sterujące. Po osiągnięciu prędkości nominalnej  $u_0$  i ciśnienia wody na wirniku odpowiadającego spadowi  $H_0$  następuje sukcesywne otwarcie urządzenia sterującego. Istotną kwestię stanowi tu spadek ciśnienia, względnie poziomu wody na dopływie do pompy. Ten problem jest przedmiotem szczególnego zainteresowania w przypadku rurociągu przepompowni dalekiego zasięgu.

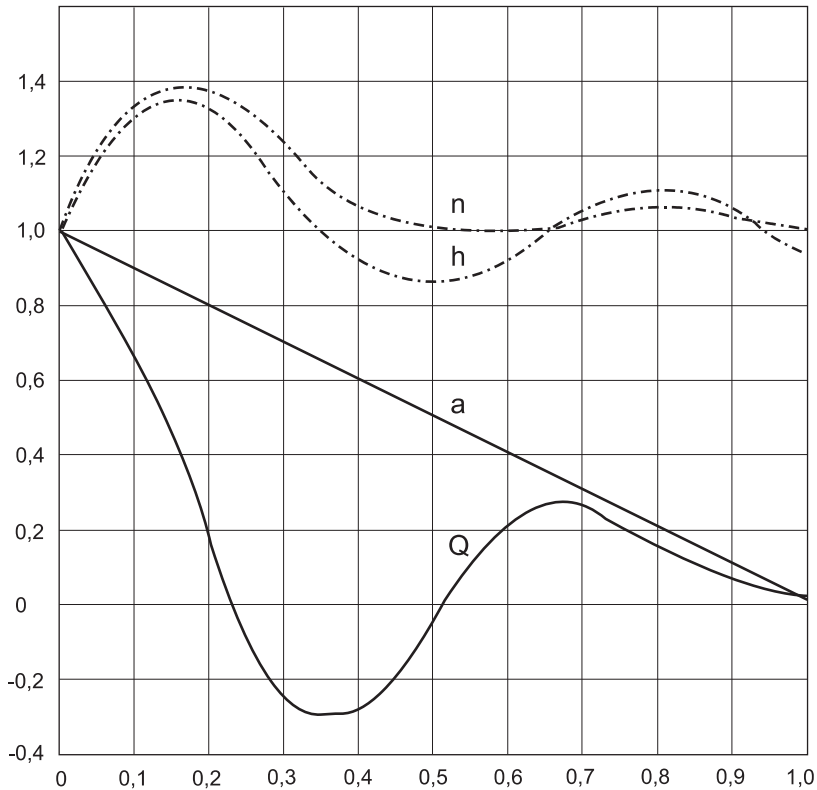
W instalacjach pompowych, w których kłapa zwrotna spełnia funkcję urządzenia sterującego przepływem, wzrost natężenia przepływu odbywa się z reguły bardziej sukcesywnie w miarę wzrostu prędkości obrotowej wirnika pompy napędzanego silnikiem asynchronicznym.

### 1.7.3. Stany nieustalone wywołane przez nagłe i całkowite zatrzymanie pracy turbinowej

Celowe lub przypadkowe zakłócenie pracy turbinowej wywołuje zwykle standardowy manewr kierownicy, która sukcesywnie i zgodnie z zadanym programem (zwanym prawem zamykania) odcina dopływ wody od wirnika. Prądnica jest podłączona do sieci energetycznej aż do momentu, gdy stan otwarcia kierownicy osiągnie wartość ok. 25%. Wówczas prądnica zostaje odłączona od sieci w celu wyhamowania zespołu. Jest to standardowy zrzut obciążenia wykluczający niekorzystny rozbieg zespołu prądotwórczego.

Awaryjny zrzut obciążenia wywołany przez odłączenie prądnicy z sieci energetycznej z zasady prowadzi do zatrzymania przepływu przez kierownicę turbiny. Zanim to nastąpi, wirnik turbiny wraz z wirnikiem prądnicy wchodzi w stan podwyższonej prędkości obrotowej (rozbieganie), hamując przepływ wody. Zmiana natężenia przepływu następuje pod wpływem zamykania kierownicy i zmiany prędkości obrotowej wirnika. Występuje ze znacznie większym nasileniem w instalacjach z turbiną Kaplana niż z turbiną Francisa. Skutkuje to wielkością uderzenia hydraulicznego lub kształtem czoła fali translacyjnej. W rozbieganej turbinie łatwo może dojść do niemal całkowitego zatrzymania przepływu (pompoturbina), zanim kierownica całkowicie się zamknie. To zdarzenie wywoła znaczne uderzenie hydrauliczne jeszcze przed zamknięciem kierownicy, gdyż przepływ zostanie całkowicie lub prawie całkowicie szybko zatrzymany, a maszyna wejdzie w rozbieg (rys. 1.19).

Stan katastrofalny wystąpi wówczas, gdy dojdzie do poważnego zakłócenia po stronie mechanicznej i elektrycznej. Kierownica zostanie zablokowana w pozycji otwartej, przy równoczesnym odłączeniu prądnicy z sieci energetycznej. Jest to tak zwane uderzenie hydrauliczne naturalne. Zespół wirujący uzyskuje prędkość superrozbiegową. W przypadku braku zadziałania zabezpieczeń wystąpi pulsacja prędkości i natężenia przepływu wokół punktu leżącego na krzywej otwarcia  $a_k$ , gdzie moment obrotowy jest równy zeru (równowaga momentu tworzonych przez przepływającą wodę i oporów ruchu). Zakres zmian natężenia przepływu i prędkości obrotowej jest znacznie większy w maszynie odwracalnej siłowni pompowej niż w zwykłej klasycznej. Stanowi to skutek większego momentu bezwładności tej maszyny.



Rys. 1.19. Przykład zmian  $Q$  – natężenia przepływu,  $n$  – prędkości obrotowej wirnika i  $h$  – uderzenia hydraulicznego w czasie  $a$  – liniowego zamykania kierownicy

W siłowni akumulacyjnej z maszynami odwracalnymi może dojść do tego, że pompoturbina znacznie chwilowo tłoczyć wodę, mając stale nieustalone obroty na kierunku turbinowym. Tego rodzaju ewentualne zdarzenie jest eliminowane przez urządzenie awaryjne, którym jest zasuwka lub zawór. W siłowni z turbinami klasycznymi nie występuje zjawisko przepływu powrotnego, nawet wówczas gdyby powstał katastrofalny zrzut obciążenia. Awaryjny i katastrofalny zrzuty obciążenia wywołują mocno niepożądane powstawanie prędkości rozbiegowych. Zespoły prądotwórcze z turbinami Francis'a osiągają 1,5–2,0-krotność, a Kaplana 2,5–3,3-krotność normalnej prędkości instalacyjnej.

#### 1.7.4. Stany nieustalone wywołane przez nagłe i całkowite zatrzymanie pracy pompowej

W elektrowni szczytowo-pompowej zamierzone lub przypadkowe zaburzenie pracy pompowej po stronie mechanicznej powoduje zamykanie kierownicy przy silniku włączonym do sieci energetycznej. Wywołuje to stosunkowo szybko zmniejszenie tłoczonego przepływu. Po zamknięciu około 2/3 powierzchni otworu przelotowego kierownicy silnik zostaje automatycznie odłączony od sieci energetycznej w celu szybkiego



wyhamowania. Proces przebiega podobnie w klasycznych stacjach pompowych, gdzie urządzeniem sterowniczym jest zwykle zasuw. W szczególnych przypadkach może dojść do pełnego zatrzymania tłoczenia przy silniku włączonym do sieci.

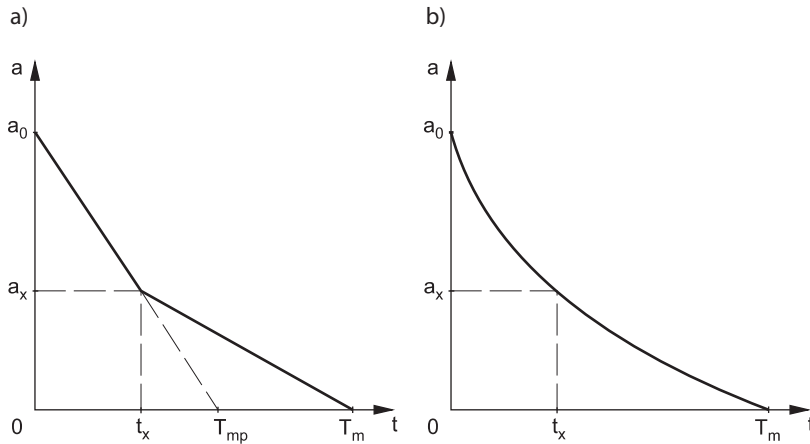
Awaryjne przerwanie pracy pompowej maszyny elektrowni szczytowo-pompowej zaistnieje wówczas, gdy silnik zostanie wyłączony z sieci energetycznej. Zamykająca się kierownica i zwalniająca obroty pompoturbina ostro hamują tłoczenie wody. Powstaje przepływ powrotny na kierunku turbinowym, który wyhamowuje bieg maszyny. Do powstania przepływu powrotnego dochodzi w niektórych klasycznych dużych pompowniach wody, w tym w pompowniach wyposażonych w klapy zwrotne służące jako urządzenia sterownicze. Tylko w pompowniach wyposażonych w urządzenia sterownicze szybkiego działania (zasuw samoopadowe) zwykle nie dochodzi do zaistnienia przepływu powrotnego.

Podobnie jak w przypadku pracy turbinowej, stan katastrofalny pracy pompowej zaistniałby wówczas, gdyby kierownica została zablokowana, a silnik zostałby wyłączony z sieci energetycznej. Nastąpiłaby wówczas szybka zmiana prędkości obrotowej maszyny z pracy pompowej na turbinową. Równocześnie doszłoby do zmian natężenia i kierunku przepływu. Ze strefy pracy pompowej przepływ przeszedłby w strefę turbinową przy niezmienionym kierunku obrotów. Wystąpiłoby silne hamowanie prędkości obrotowej i maszyna zaczęłaby funkcjonować jak turbina, zwiększając natężenie przepływu i prędkość obrotową aż do rozbiegania. W przypadku klasycznej pompy wirowej z wirnikiem typu Francisa powstałoby zjawisko opisane wyżej. Obroty maszyny odwracalnej o znacznym momencie bezwładności osiągnęłyby prędkość superrozbiegową, przy której wystąpiłoby chwilowe pompowanie wody. Gdyby w dalszym ciągu nie zadziałał system zabezpieczeń, to nastąpiłaby pulsacja przepływu wokół wartości, przy której moment obrotowy jest równy zero.

## 1.8. Sterowanie procesem powstawania przepływu nieustalonego

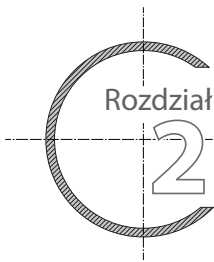
W projektowaniu i budowie siłowni wodnej istotną kwestię stanowi ograniczenie ekstremalnych wartości uderzenia hydraulicznego, stanów wody w korytach otwartych oraz prędkości rozbiegowej maszyny hydroenergetycznej. Parametrem wyjściowym wszelkich dociekań prowadzących do osiągnięcia korzystnych i zadowalających efektów jest z reguły przebieg zdarzenia w czasie manewru urządzenia sterującego przepływem. Wynika to bezpośrednio z właściwości urządzeń mechanicznych (serwomotorów) tworzących układ sterowniczy. Przy liniowym przebiegu urządzenia sterującego samym wydłużeniem czasu trwania manewru zwykle odnosi się niewielkie korzyści. Można też uzyskać skutek całkiem przeciwny do oczekiwanego. Wydłużając czas manewru, wytwarza się możliwość bardziej łagodnej zmiany natężenia przepływu, ale równocześnie powiększa się prędkość rozbiegową maszyny i czas jej trwania. Bardziej właściwy i dość powszechnie stosowany jest system dwustopniowego lub parabolicznego zatrzymania przepływu turbiny. Początkowo zamykanie kierownicy jest bardzo szybkie, a od pewnego momentu  $t_x$  powolne, aż do samego końca. Jeżeli stwierdzi się, że przy szybkim zatrzymaniu przepływu, którego czas pełnego manewru jest równy  $T_m$ , występuje

uderzenie hydrauliczne rosnące, to czas zmiany prędkości zamykania przepływu  $t_x$  przyjmuje tę wartość, przy której uderzenie hydrauliczne  $h_x$  i prędkość rozbiegu maszyny  $n_x$  są do zaakceptowania. Dobór całkowitego czasu  $T_m$  zamknięcia przepływu przez wirnik turbiny (pompoturbiny) musi być dokonany tak, aby wartości  $h_x$  i  $n_x$  nie zostały przekroczone w stosunku do wartości dopuszczalnych.



Rys. 1.20. Projektowany (a) i eksploatacyjny (b) przebieg manewru zamykania kierownicy  $a = f(t)$

Dobierając podstawowe parametry ruchu kierownicy, można się kierować tymi przesłankami, ale konstrukcja urządzeń sterowniczych powinna zapewniać płynną zmianę szybkości zamykania (rys. 1.20). Ponadto prawo zamykania powinno być tak dobrane, aby powstały przebieg uderzenia hydraulicznego, a w szczególności jego wartość maksymalna pokrywały się z analogicznymi wartościami powstałymi w przypadku zaistnienia naturalnego uderzenia hydraulicznego będącego skutkiem blokady kierownicy.



## PRAWA I ZASADY STOSOWANE DO OPISU MATEMATYCZNEGO PRZEPŁYWU NIEUSTALONEGO JEDNOKIERUNKOWEGO

---

### 2.1. Rodzaje praw stosowanych do opisu przepływu nieustalonego w korytach otwartych i rurociągach ciśnieniowych

Zawarte w tym podręczniku opisy matematyczne poszczególnych rodzajów przepływu nieustalonego bazują na zasadach powszechnie obowiązujących w mechanice. Są to:

- zasada zachowania masy;
- druga zasada dynamiki Newtona;
- zasada zachowania energii;
- zasada zachowania ilości ruchu.

Z zasady zachowania masy zawartej w określonej objętości  $V$ , opisanej równaniem:

$$m = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \text{const} \quad (2.1)$$

wynika zasada zachowania masy płynnej wody, zajmującej określoną, ruchomą objętość. Stąd wyprowadza się równanie ciągłości przepływu.

Z drugiej zasady dynamiki Newtona:

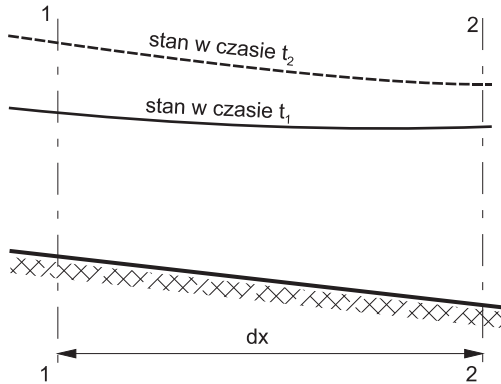
$$\frac{d}{dt}(mu) = F \quad (2.2)$$

wywodzi się też zasada (prawo) zachowania ilości ruchu masy płynnej zawartej w danej objętości. Służy ona między innymi do wyprowadzenia dynamicznego równania przepływu nieustalonego w korycie otwartym i przewodzie ciśnieniowym. Z zasady tej wyprowadza się też równanie opisujące profil dodatniej fali translacyjnej.

Zasada zachowania energii w ujęciu Daniela Bernoulliego stanowi podstawę do opisu kształtu dodatniej fali translacyjnej, na którą oddziałują straty hydrauliczne, powstałe głównie wskutek gwałtownych zmian prędkości przepływu.

## 2.2. Równanie zachowania ciągłości przepływu

Podstawą ustanowienia równania zachowania ciągłości przepływu jest zasada zachowania masy płynnej cieczy. W tym celu rozpatruje się przepływ wody w zamkniętym i otwartym korycie prostoliniowym o dowolnym czynnym przekroju poprzecznym.



Rys. 2.1. Stany wody w przekroju 1-1 i 2-2 w czasie  $t_1$  i  $t_2$

Niech w czasie  $t_1$  przez przekrój koryta 1-1 (rys. 2.1) przepływa woda o wydatku masowym:

$$W_{1,1} = \rho Q \quad (2.3)$$

a przez przekrój 2-2 woda o wydatku masowym:

$$W_{2,1} = \rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial x} dx \quad (2.4)$$

Gęstość jednostkowa wody wynosi odpowiednio:

— w przekroju 1-1:

$$\Pi_{1,1} = \rho A \quad (2.5)$$

— w przekroju 2-2:

$$\Pi_{2,1} = \rho A + \frac{\partial \rho A}{\partial x} dx \quad (2.6)$$

Niech teraz w czasie  $t_2 = t_1 + dt$  wartości przepływu masowego  $W$  i gęstości  $\Pi$  ulegną zmianie, a ich wartości wyniosą odpowiednio:

— w przekroju 1-1:

$$W_{1,2} = \rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial t} dt \quad (\text{kg/s}) \quad (2.7)$$

$$\Pi_{1,2} = \rho A + \frac{\partial \rho A}{\partial t} dt \quad (\text{kg/m}) \quad (2.8)$$

— w przekroju 2-2:

$$W_{2,2} = \rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho Q}{\partial t} dt + \frac{\partial^2 \rho Q}{\partial x \partial t} dx dt \quad (2.9)$$

$$\Pi_{2,2} = \rho A + \frac{\partial \rho A}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho A}{\partial t} dt + \frac{\partial^2 \rho A}{\partial x \partial t} dx dt \quad (2.10)$$

Aby wyznaczyć masę wody, która przepływa kolejno przez przekroje 1-1 i 2-2 w czasie  $dt$ , w pierwszym rzędzie wyznacza się wartości średnie tych przepływów masowych:

— w przekroju 1-1:

$$\overline{W}_1 = 0,5(W_{1,1} + W_{1,2}) \quad (2.11a)$$

tj.:

$$\overline{W}_1 = \rho Q + 0,5 \frac{\partial \rho Q}{\partial t} dt \quad (2.11b)$$

— w przekroju 2-2:

$$\overline{W}_2 = 0,5(W_{2,1} + W_{2,2}) \quad (2.12a)$$

a po pominięciu wyrażenia drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 \rho Q}{\partial x \partial t} dx dt$$

jako bardzo małego w stosunku do pozostałych składników wyrażenia (2.9) mamy:

$$\overline{W}_2 = \rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial x} dx + 0,5 \frac{\partial \rho Q}{\partial t} dt \quad (2.12b)$$

Zmiana płynnej masy wody  $m$  w korycie na długości  $dx$  jest różnicą średnich wartości przepływu masowego w przekroju 2-2 i 1-1:

$$dm = (\overline{W}_2 - \overline{W}_1) dt \quad (2.13a)$$

Po wstawieniu formuł (2.11b) i (2.12b) otrzymamy:

$$dm = \frac{\partial \rho Q}{\partial x} dx dt \quad (2.13b)$$

Zmiana przepływu płynnej masy wody na odcinku koryta o długości  $dx$  i w czasie  $dt$  spowoduje zmianę jej gęstości o wartość:

— w przekroju 1-1:

$$d\Pi_1 = \Pi_{1,2} - \Pi_{1,1} = \frac{\partial \rho A}{\partial t} dt \quad (2.14)$$

— w przekroju 2-2:

$$d\Pi_2 = \Pi_{2,2} - \Pi_{2,1} = \frac{\partial \rho A}{\partial t} dt \quad (2.15)$$

Pomijając wyrażenie:

$$\frac{\partial^2 \rho A}{\partial x \partial t} dx dt$$

jako bardzo małe, uzyskuje się formułę określającą wartość zmian masy płynnej wody na rozpatrywanym odcinku  $dx$  w czasie  $dt$ :

$$dm = \frac{\partial \rho A}{\partial t} dx dt \quad (2.16)$$

Jeżeli wystąpi zwiększenie przepływu masowego wody w czasie i na długości, to siłą rzeczy musi wystąpić zmniejszenie jej gęstości – i odwrotnie. Wobec tego jeżeli jedno z wyrażeń określających  $dm$  będzie miało wartość dodatnią, to drugie musi mieć wartość ujemną, a ich suma musi być równa zero.

Z tego twierdzenia wynika następujące równanie ciągłości przepływu w przewodzie ciśnieniowym podlegającym odkształceniom powłoki:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0 \quad (2.17)$$

Zmiana natężenia przepływu w czasie i na długości rurociągu pod wpływem zmiennego ciśnienia wywołuje zmiany gęstości – najczęściej niewielkie, ale istotne. Dotyczy to głównie zjawiska zwanego uderzeniem hydraulicznym, wywoływanego między innymi przez gwałtowne zmiany manewrów maszyn hydroenergetycznych lub zamknięć awaryjnych.

Praktycznie rzecz biorąc, można przyjąć, że przepływy o swobodnym zwierciadle wody nie podlegają temu zjawisku, chociaż i w tym wypadku mogą występować gwałtowne zmiany przepływu wywołane przez analogiczne urządzenia. Z całą pewnością można też przyjąć, że woda przepływająca kanałem otwartym nie zmieni swojej gęstości w panującej temperaturze. Wobec tego prawo zachowania masy opisane wzorem (2.17) staje się prawem ciągłości przepływu o równaniu:

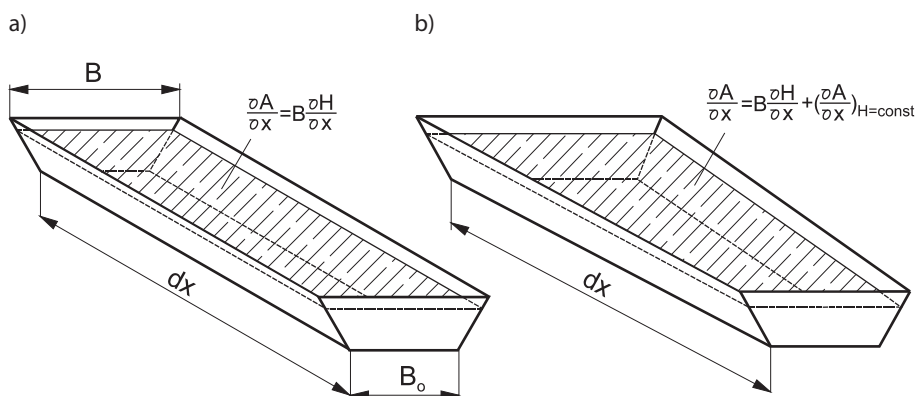
$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (2.18)$$

Gdyby jednak zdarzyło się tak, że przepływ kanałem otwartym będzie zasilany przez ciągły dopływ boczny o wartości  $q$  [ $\text{m}^3/\text{s}/\text{mb}$ ], to wówczas równanie ciągłości przepływu przyjmuje postać:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q(x) \quad (2.19)$$

Z reguły przypadek ten nie dotyczy kanałów energetycznych, w których co najwyżej może być wprowadzony punktowo przepływ boczny. Wówczas trzeba by rozpatrywać oddzielnie każdy odcinek kanału.

Obliczenia przepływu nieustalonego w kanałach energetycznych nie jest wygodnie prowadzić w oparciu o formułę (2.18), względnie (2.19). Jeżeli celem jest wyznaczenie rozkładu prędkości przepływu  $u$  i głębokości  $H$  w czasie  $t$  i w przestrzeni  $x$ , to formułę (2.18) dobrze jest odpowiednio przekształcić, przystosowując ją dla potrzeb obliczeń w kanałach niepryzmatycznych (rys. 2.2). Kanały tego typu posiadają zmienne wymiary przekroju poprzecznego na długości, sprowadzające się do zmiany szerokości  $B$ , pochylenia skarp  $m$ , względnie spadku dna  $I_0$ .



Rys. 2.2. Zmiana czynnej powierzchni przekroju poprzecznego w kanale: a) przyzmatycznym; b) nieprzyzmatycznym

Jeżeli w tym celu natężenie przepływu zapiszemy za pomocą powszechnie znanej formuły:

$$Q = Au \quad (2.20)$$

to jego pochodna cząstkowa względem zmiennej  $x$  będzie równa:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = A \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.21)$$

Dla kształtu nieprzyzmatycznego pochodna  $\partial A/\partial x$  jest równa:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = B \frac{\partial H}{\partial x} + \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{H=\text{const}} \quad (2.22)$$

Pierwszy wyraz tego równania opisuje zmianę powierzchni przekroju tylko od zmiany głębokości (kanał przyzmatyczny), a drugi – zmianę powierzchni przekroju przy stałej głębokości:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = B \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.23)$$



Wobec tego równanie (2.18) ciągłości przepływu przyjmuje postać:

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \left( \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} \right) + u \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{H=\text{const}} = 0 \quad (2.24)$$

Dzieląc przez A, otrzymuje się:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{B}{A} \left( \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} \right) + u \left( \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{H=\text{const}} = 0 \quad (2.25)$$

Ponieważ stosunek powierzchni przekroju do szerokości zwierciadła wody:

$$\frac{A}{B} = H_{\text{sr}} \quad (2.26)$$

jest głębokością średnią w przekroju kanału, a:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial \ln A}{\partial x} \quad (2.27)$$

to równanie ciągłości przepływu w kanale niepryzmatycznym ma postać:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{H_{\text{sr}}} \left( \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} \right) + u \left( \frac{\partial \ln A}{\partial x} \right)_{H=\text{const}} = 0 \quad (2.28)$$

Wyrażenie  $\partial \ln A / \partial x$  jest swego rodzaju wskaźnikiem zmian powierzchni przekroju poprzecznego kanału na jego długości przy stałej głębokości czy też przy ustalonym poziomie zwierciadła wody. Określa liczbowo względną zmianę powierzchni przekroju na długości jednego metra bieżącego kanału.

## 2.3. Dynamiczne równanie przepływu wolnozmiennego

Dynamiczne równanie przepływu wolnozmiennego, bądź to o swobodnym zwierciadle wody, bądź to w przewodzie pod ciśnieniem, może zostać wyznaczone na bazie drugiej zasady dynamiki Newtona albo przy zastosowaniu równania zachowania energii, opisanego przez formułę Bernoulliego. W obu przypadkach uzyskuje się analogiczne równanie przepływu wody, jednak nie w pełni identyczne. Zależnie od warunków przepływu oraz zastosowania metody obliczeń celowe jest korzystanie z właściwej postaci równania, o czym będzie mowa w dalszej części podręcznika.

### 2.3.1. Dynamiczne równanie przepływu wyprowadzone z drugiej zasady dynamiki Newtona

W mechanice teoretycznej drugą zasadę dynamiki Newtona w odniesieniu do ciała materialnego definiuje się następująco: zmiana pędu układu punktów materialnych w czasie jest równa sumie sił wywołujących tę zmianę:

$$\frac{d}{dt} \sum_i^n m_i u_i = \sum_{j=1}^k F_j \quad (2.29)$$

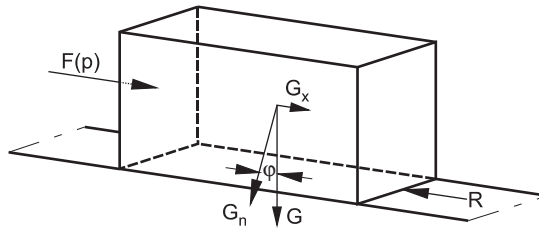
W hydromechanice układ punktów materialnych jest tożsamy z układem elementarnych mas tworzących objętość płynną. Wobec tego możemy drugą zasadę dynamiki Newtona opisać równaniem:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u dV = \sum_{j=1}^k F_j = F \quad (2.30)$$

gdzie:  $\rho dV$  – masa elementarnej objętości płynnej [kg].

Przepływ (ruch) dowolnie wybranej objętości płynnej w przewodzie otwartym lub zamkniętym odbywa się pod działaniem następujących sił (rys. 2.3):

- składowej od ciężaru wody równoległej do dna przewodu;
- siły parcia wody na powierzchnię objętości płynnej;
- siły oporów ruchu wywołanej przez tarcie o powierzchnię koryta i nierównomierny rozkład strug wody.



Rys. 2.3. Układ sił działających na wybraną elementarną objętość płynu

Poszczególne siły działające na wybraną objętość płynną  $V$  [m<sup>3</sup>] przemieszczającą się z prędkością  $u$  [m/s] i posiadającą gęstość  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] są opisane przez poniższe równania.

Składowa  $G_x$  od ciężaru wody stymulująca ruch objętości płynnej jest równa:

$$G_x = \rho g \int_V \partial V \sin \varphi \quad (2.31)$$

gdzie:  $\varphi$  – kąt nachylenia przewodu do poziomu.

Efektywna siła  $F$  parcia wody na wybrany element płynny jest równa całce z iloczynu zmiany ciśnienia  $p$  i powierzchni  $A$  jego przekroju poprzecznego:

$$F(p) = \int_A \frac{\partial p}{\partial x} dx \partial A \quad (2.32)$$

Ponieważ całka z iloczynu  $dx\partial A$  jest równa objętości  $V$  elementu płynnego:

$$V = \int_A dx\partial A \quad (2.33)$$

to siła parcia jest równa:

$$F(p) = \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (2.34)$$

Siła oporów przepływu  $R$  jest równa iloczynowi straty ciśnienia  $p_s$  i całkowitej powierzchni przekroju rozpatrywanego elementu płynnego  $A$ :

$$R = \int_A p_s \partial A \quad (2.35)$$

Stratę ciśnienia odzwierciedla strata linii energii  $h_s$ , której stosunek do długości elementarnej objętości płynnej jest spadkiem hydraulicznym:

$$I_s = \frac{dh_s}{dx} \quad (2.36)$$

Siła oporów opisana formułą (2.35) przyjmie więc postać:

$$R = \rho g \int_V dV \quad (2.37)$$

Przy uwzględnieniu kierunków działania wyżej prezentowanych sił, działających na element objętości płynnej, dynamiczne równanie przepływu jednokierunkowego wprowadzone z drugiej zasady Newtona przyjmie postać:

$$\rho \frac{d}{dt} \int_V u dV = \rho g \sin \varphi \int_V dV - \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV - \rho g I_s \int_V dV \quad (2.38)$$

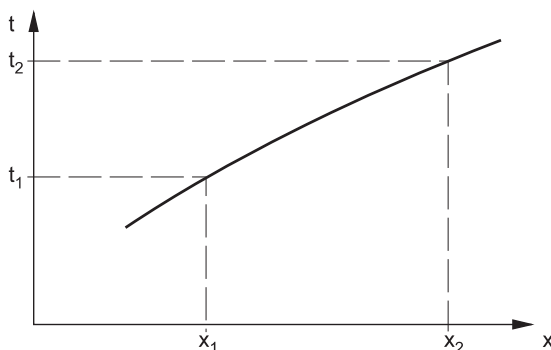
a stąd po podzieleniu przez  $\rho \int_V dV$ :

$$\frac{du}{dt} = g(\sin \varphi - I_s) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.39)$$

Zmiana pędu masy płynnej następuje w drodze rozprzestrzeniania się zaburzenia przepływu wzdłuż przewodu. Jeżeli w przekroju o współrzędnej  $x$  w czasie  $t$  wystąpi zmiana pędu wybranej masy płynnej, to w przekroju o współrzędnej  $x + dx$  ta zmiana zaistnieje dopiero po czasie  $dt$ , czyli będzie rozprzestrzeniać się z prędkością:

$$c = \frac{dx}{dt} \quad (2.40)$$

znacznie większą od prędkości przepływu  $u$ . W układzie współrzędnych  $x, t$  przebieg zaburzenia, z którym związana jest zmiana pędu masy płynnej wody, przedstawia sobą pewną linię zwaną charakterystyką (rys. 2.4).



Rys. 2.4. Charakterystyka – droga przebiegu zaburzenia

Ta okoliczność wyraźnie wskazuje, że prowadzenie obliczeń zmian prędkości przepływu, ciśnienia lub stanu powinno się odbywać wzdłuż charakterystyk odzwierciedlających drogę przebiegu zaburzenia przepływu wody na płaszczyźnie  $x, t$ . Równanie (2.39) stanowi szczególną postać równania Eulera, odnoszącego się do przepływu jednokierunkowego. Wyrażenie  $g(\sin \varphi - I_s)$  jest przyspieszeniem (opóźnieniem) wywołanym przez siły masowe działające przeciwnie do kierunku przemieszczania się badanego elementu płynnego.

W przepływie ustalonym jednokierunkowym odbywającym się z prędkością  $u$  przyspieszenie jest równe:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.41)$$

Dynamiczne równanie przepływu przyjmuje ogólną postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g(\sin \varphi - I_s) \quad (2.42)$$

mającą zastosowanie w przepływach nieustalonych w korytach otwartych i przewodach zamkniętych ciśnieniowych.

W kanałach otwartych podstawową zmienną jest głębokość wody  $H$ , a zmianę ciśnienia tworzy jej ciężar właściwy:

$$\partial p = \rho g \partial H \quad (2.43)$$

Sinus kąta  $\varphi$ , jaki tworzy składowa normalna z siłą ciężkości ze spadkiem dna kanału, wynosi:

$$\sin \varphi = I_0 \quad (2.44)$$

stąd równanie (2.42) w postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g(I_0 - I_s) \quad (2.45)$$

ma bezpośrednie zastosowanie do obliczeń przepływu nieustalonego wolnozmiennego.

### 2.3.2. Dynamiczne równanie przepływu wolnozmiennego wyprowadzone z zasady zachowania energii

Znana w mechanice teoretycznej zasada zachowania energii została wykorzystana przez Daniela Bernoulliego do opisu stanu przepływu cieczy pomiędzy dwoma stanowiskami (przekrojami) o współrzędnych  $x$  i  $x + dx$ . W odróżnieniu od przepływu ustalonego, przy opisie przepływu nieustalonego za pomocą równania konieczne staje się uwzględnienie występującej siły bezwładności obok innych sił normalnie działających na wybranej drodze  $dx$ .

W stosunku do dowolnie obranego poziomu porównawczego wartość całkowitej wysokości energii wynosi:

— w przekroju  $x$ :

$$E(x) = z + H(x) + \frac{\alpha u^2}{2g} \quad (2.46)$$

— w przekroju  $x + dx$ :

$$E(x + dx) = z - \frac{\partial z}{\partial x} dx + H(x) + \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\alpha u^2}{2g} + \frac{\alpha u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} dx + I_s dx \quad (2.47)$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii mamy:

$$E(x) = E(x + dx) \quad (2.48)$$

Po podstawieniu wyrażeń (2.46) i (2.47) otrzymuje się:

$$-\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\alpha u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + I_s = 0 \quad (2.49)$$

Ponieważ  $\partial z / \partial x$  jest spadkiem podłużnym dna, to równanie (2.49) przyjmuje postać:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\alpha u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} = I_0 - I_s \quad (2.50a)$$

albo:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2g} \right) + \frac{\partial H}{\partial x} = I_0 - I_s \quad (2.50b)$$

Poszczególne wyrażenia równań (2.50a) i (2.50b) przedstawiają sobą jednostkowe wartości energii:

$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t}$  — bezwładności;

$\frac{\alpha \partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2g} \right)$  — kinetycznej;

$\frac{\partial H}{\partial x}$  — potencjalnej względem dna;

$I_s$  — straconej na tarcie;

$I_0$  — potencjalnej, wynikającej z pochylenia dna kanału.

Stąd wynika, że stosując zasadę zachowania energii w ujęciu Bernoulliego, otrzymuje się stosunkowo łatwo i prosto dynamiczne równanie ruchu, które określa związek pomiędzy prędkością przepływu i ciśnieniem piezometrycznym na długości kanału. Różni się ono mało istotnie od równania wyprowadzonego z drugiej zasady Newtona.

## 2.4. Równania przepływu sfalowanego

Rozpatrzmy przepływ jednokierunkowy krzywoliniowy w korycie otwartym, powstający w postaci rozprzestrzeniającej się dodatniej fali translacyjnej.

W dowolnym przekroju poprzecznym otwartego kanału płynąca woda posiada energię i siłę działania, która jest sumą siły strumienia (prądu) i siły parcia (ciśnienia). W odniesieniu do jednostkowej powierzchni przekroju poprzecznego jej wielkość opisana jest równaniem [31]:

$$F_s = p + \rho \frac{Q}{A} u \quad (2.51)$$

gdzie:  $\rho Q$  – natężenie przepływu masy płynnej, tj. masy wody przepływającej przez dany przekrój kanału w jednostce czasu [kg/s].

Wartość siły działającej w całym przekroju jest zatem równa:

$$F = \iint_A (p + \rho u^2) \partial A \quad (2.52)$$

W odniesieniu do jednostkowego ciężaru wody przepływającej przez przekrój poprzeczny koryta równanie (2.52) przyjmuje postać:

$$M_x = \iint_A \left( \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{g} \right) \partial A \quad (2.53)$$

Nosi ono nazwę równania ilości ruchu [31, 70, 73].

Zgodnie z prawem Daniela Bernoulliego energia przepływu na jednostkowej szerokości koryta kanału jest równa:

$$E = \frac{1}{A} \iint_A \left( z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u_x^2 + u_z^2}{2g} \right) \partial A \quad (2.54)$$

Równania (2.53) i (2.54) mogą obejmować przepływ falowy, jeżeli się uwzględni, że ciśnienie wody  $p$  jest funkcją zmiennych  $x$  i  $z$ . Można je wówczas opisać odpowiednią formułą przy wykorzystaniu równania Eulera [31]:

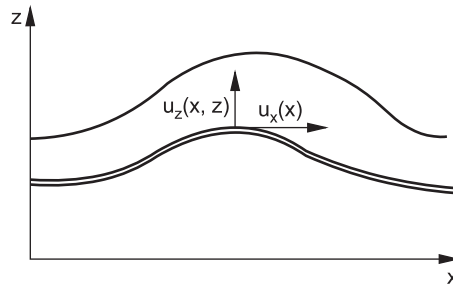
$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \vec{f} = 0 \quad (2.55)$$

Jego forma analityczna w dowolnym przekroju pionowym (wzdłuż osi  $z$ ) ma postać:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (2.56)$$

gdzie pochodna prędkości względem czasu jest równa sumie pochodnych składowych prędkości  $u_x$  i  $u_z$  (rys. 2.5):

$$\frac{du}{dt} = u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.57)$$



Rys. 2.5. Składowe prędkości przepływu krzywoliniowego w układzie współrzędnych  $x, z$

Uwzględniając równanie (2.57), rozkład ciśnienia w odniesieniu do jednostkowego ciężaru masy płynnej można zapisać w postaci równania:

$$\frac{\partial p}{\rho g} = - \left( 1 + \frac{u_x}{g} \frac{u_z}{\partial z} + \frac{u_z}{g} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \partial z \quad (2.58)$$

Składowe prędkości przepływu falowego i ich pochodne są opisane następującą formułą:

$$u_x = \frac{Q}{A} \quad (2.59)$$

Jej pochodna cząstkowa względem zmiennej  $x$  jest równa:



$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{Q}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.60)$$

Zgodnie z równaniem zachowania ciągłości ruchu:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2.61)$$

otrzymuje się:

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{Q}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.62)$$

a stąd po scałkowaniu od zera do z:

$$u_z = \frac{Q}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} z \quad (2.63)$$

i

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{Qz}{A^3} \left[ A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - z \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.64)$$

Podstawiając wzory (2.59)–(2.64) do równania Eulera i przeprowadzając całkowanie, otrzymuje się:

$$\frac{p}{\rho g} = -z - \frac{Q^2}{2gA^4} \left[ A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right] z^2 + C_1 \quad (2.65)$$

Stałą całkowania wyznacza się z warunków brzegowych dla  $z = H$  i  $p = 0$ , stąd:

$$C_1 = \frac{Q^2}{2gA^4} \left[ A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right] H^2 + H \quad (2.66)$$

i ostatecznie otrzymuje się następującą formułę na rozkład ciśnienia w dowolnym przekroju przepływu sfalowanego, odniesionego do jednostki ciężaru masy płynnej:

$$\frac{p}{\rho g} = H - z + (H^2 - z^2) \frac{Q^2}{2gA^4} \left[ A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.67)$$

W dowolnym przekroju przepływu sfalowanego ilość ruchu  $M_x$  i energia  $E$  są opisane równaniami:

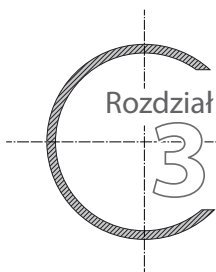
$$M_x = \iint_A \left\{ H - z + (H^2 - z^2) \frac{Q^2}{2gA^4} \left[ A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{Q^2}{gA^2} \right\} \partial A \quad (2.68)$$

$$E = \frac{1}{A} \iint_A \left\{ H + \frac{Q^2 H^2}{2gA^4} \left[ A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{Q^2 z^2}{2gA^4} \left[ A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2 \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{Q^2}{2gA^2} \right\} \partial A \quad (2.69)$$

Powyższe równania służą przede wszystkim do wyznaczenia profilu fali translacyjnej z pełni wykształconymi oscylacjami w kanale otwartym.

Równanie ilości ruchu (2.68) ma zastosowanie, gdy nie uwzględnia się strat energii. Może więc służyć do wyznaczenia tylko profilu czoła takiej fali, gdzie straty mogą być pomijane, to znaczy do wyznaczenia maksymalnej wysokości pierwszej oscylacji falowej.

Równanie energii (2.69) pozwala wyznaczyć profil całej fali z oscylacjami, przy uwzględnieniu strat energii wywołanych pulsacją prędkości i tarcieniem hydraulicznym. W obu przypadkach konieczne jest skorzystanie z prawa zachowania ciągłości przepływu.



## MODELE MATEMATYCZNE PRZEPŁYWU NIEUSTALONEGO WOLNOZMIENNEGO W KANAŁACH OTWARTYCH

---

### 3.1. Przepływ nieustalony wolnozmienny opisany matematycznie przez de Saint-Venanta

#### 3.1.1. Wprowadzenie

W 1870 roku Adh mar Jean Claude Barré de Saint-Venant [6] opublikowa  pierwszy naukowy opis przepływu nieustalonego wolnozmiennego w kanałach otwartych. Zastosowa  do tego podstawowe zasady i prawa hydromechaniki. Równania matematyczne opisujące ten przepływ zostały wyprowadzone przy przyjęciu pewnych założeń uogólniających i upraszczających. Są to równania typu hiperbolicznego, niemające rozwiązania analitycznego. Do tej pory nie udało się opisać tego przepływu bardziej precyzyjnie, równania de Saint-Venanta są więc w dalszym ciągu bazą kilku racjonalnych modeli opisujących sposób wyznaczania wartości parametrów przepływu nieustalonego wolnozmiennego w korytach otwartych. Niektóre z tych modeli zostały skutecznie przystosowane do obliczeń przepływu nieustalonego występującego w ciśnieniowych przewodach zamkniętych, w których uwzględnia się ściśliwość wody i odkształcenia obudowy przewodu. Do najbardziej uniwersalnych należy metoda charakterystyk, mająca zastosowanie w korytach otwartych i przewodach zamkniętych.

#### 3.1.2. Podstawowe założenia modelu de Saint-Venanta

Prezentowany przez de Saint-Venanta opis matematyczny przepływu nieustalonego wolnozmiennego opiera się na następujących podstawowych założeniach:

1. Przepływ wody w korycie otwartym ulega powolnej zmianie zarówno w czasie, jak i na jego długości. Korytem tym może być otwarty kanał lub koryto dowolnego cieku (rzeki) naturalnego.
2. Krzywizny prądu są nieznaczne i mogą być utożsamiane z liniami prostymi na określonym krótkim odcinku cieku. To założenie odstaje nieco od rzeczywistości, gdyż przepływ wody z reguły odbywa się w korycie otwartym łagodnym ruchem spiralnym, szczególnie wówczas, gdy w planie występują łuki.

3. Pomija się składowe prostopadłe do zasadniczego kierunku przepływu, nawet w sytuacji gdy koryto zmienia swe poprzeczne wymiary zarówno na szerokości, jak i na głębokości. To założenie można uznać za dostatecznie słuszne dla prostego odcinka ciekłu.
4. Nie uwzględnia się lokalnego przyspieszenia przepływu i towarzyszących mu sił bezwładności, przyjmując, że są one bardzo małe i nie oddziałują na zmianę parametrów ogólnego ruchu wody.
5. Przyjmuje się, że poszczególne elementy (strugi) wody poruszają się z tą samą prędkością, równą prędkości przepływu i tożsamą z prędkością średnią w danym przekroju poprzecznym. To założenie jest kontrowersyjne, gdyż w rzeczywistości zmiany prędkości są dość znaczne zarówno w pionie, jak i w poziomie. Ten fakt skutkuje tym, że do obliczeń pędu i energii kinetycznej wyznaczanych na podstawie prędkości średniej wprowadza się niekiedy współczynniki poprawkowe ( $\beta$  i  $\alpha$ ). Wobec tego dynamiczne równania ruchu otrzymane z dwóch oddzielnych zasad nie są w pełni tożsame.
6. Ruch wydzielonej masy płynnej wody zawartej w przekroju poprzecznym jest opisany wzdłuż osi kanału. Jego podstawowymi parametrami są prędkość lub natężenie przepływu oraz głębokość, względnie poziom zwierciadła wody, zmienne na długości kanału  $x$  i w czasie trwania przepływu  $t$ .
7. Siła tarcia i oporów ruchu nieustalonego są opisane tymi samymi formułami co analogiczne siły w przepływie ustalonym. W szczególnych przypadkach współczynnik strat hydraulicznych w przepływie nieustalonym osiąga jednak większe wartości niż w przepływie ustalonym.

### 3.1.3. Równania de Saint-Venanta

Wychodząc z zasady zachowania masy i drugiej zasady dynamiki Newtona, de Saint-Venant wyprowadził równania opisujące przepływ nieustalony wolnozmienny. Są to równania pochodnych cząstkowych opisujących stan i natężenie (prędkość) przepływu w funkcji drogi  $x$  i czasu  $t$ .

a) Równanie ciągłości przepływu:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

b) Dynamiczne równanie przepływu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g(I_0 - I_s) \quad (3.2)$$

Ten układ równań hiperbolicznych quasi-liniowych nie ma ścisłego rozwiązania analitycznego. Wyznaczenie parametrów przepływu odbywa się numerycznie w układzie współrzędnych długości koryta  $x$  i czasu  $t$  trwania przepływu. Są to zmienne

niezależne. Zmiennymi zależnymi są główne parametry przepływu i stanu wody. Zależnie od potrzeb dobiera się pary zmiennych zależnych, którymi zwykle są:

- a) natężenie przepływu  $Q(x,t)$  i poziom zwierciadła wody  $z(x,t)$ ;
- b) natężenie przepływu  $Q(x,t)$  i głębokość wody  $H(x,t)$ ;
- c) prędkość przepływu  $u(x,t)$  i poziom zwierciadła wody  $z(x,t)$ ;
- d) prędkość przepływu  $u(x,t)$  i głębokość wody  $H(x,t)$ .

Parametry przepływu nieustalonego są wyznaczone tylko w obszarze występowania tego ruchu, który jest ograniczony charakterystyką początkową i granicami (przekrojami) górną i dolną (patrz p. 1.6). Na charakterystyce początkowej są znane wszystkie parametry przepływu, a na granicach – funkcje definiujące bądź ruch, bądź stan. Jeżeli na jednej z granic jest znany rozkład natężenia lub prędkości przepływu w czasie, to na drugiej przeciwległej granicy musi być znana funkcja zmiennych w czasie poziomu zwierciadła wody lub głębokości. Funkcje te z reguły są w postaci jawnej, ale zdarza się, że występują również w postaci niejawnej. Może to być krzywa konsumcyjna, przedstawiona graficznie lub opisana równaniem typu:

$$Q = aH^2 + bH + c \quad (3.3a),$$

$$\text{lub} \quad Q = aH^n \quad (3.3b)$$

gdzie:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $n$  – współczynniki stałe.

Każda siłownia wodna tworzy warunek brzegowy w postaci zmiany w czasie natężenia, względnie prędkości przepływu, poprzez bieg nieustalony turbiny, pompy lub zamknięcia.

Do wyznaczenia parametrów przepływu nieustalonego w obszarze jego występowania stosuje się następujące metody (modele) obliczeniowe:

- a) metoda stanów chwilowych;
- b) metoda objętości skończonych;
- c) metoda różnic skończonych;
- d) metoda elementów skończonych;
- e) metoda charakterystyk.

Metoda charakterystyk w sposób najbardziej właściwy odzwierciedla zjawisko przepływu nieustalonego, wywołanego w kanale otwartym i rurociągu ciśnieniowym siłowni wodnej przez zmianę mocy maszyn energetycznych. Z tego względu tylko ta metoda zostanie opisana bardziej szczegółowo.

### 3.2. Metoda stanów chwilowych

Metoda stanów chwilowych była w przeszłości stosowana do obliczeń głównie przepływu wielkich wód w rzekach. Pozwala ona wyznaczyć poziom zwierciadła wody w dowolnie wybranym przekroju koryta otwartego przy ustalonej zmianie natężenia przepływu. Opisał ją szczegółowo między innymi Arhangielski [4], Egiazarov [30] oraz Biernadski, Haerens, Kleitz, Mastycy, Oltein. W obliczeniach praktycznych pomijano

człon bezwładności równań de Saint-Venanta, który w przepływach wezbrania jest bardzo mały.

Równanie zachowania przepływu zastępowano równaniami bilansu wód w każdym dowolnie wybranym przekroju w odstępach czasu  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Natomiast w dynamicznym równaniu przepływu pomijano człon bezwładnościowy, sprowadzając go do zależności:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -I_s \quad (3.4)$$

### 3.3. Metoda objętości skończonych

W latach 30. ubiegłego wieku metoda objętości skończonych znalazła szerokie zastosowanie nie tylko do obliczeń stanów wód powodziowych, ale również do obliczeń stanów wód w kanałach energetycznych. Bardzo szczegółowo opracował ją między innymi Rahmanov [68]. Podstawą tej metody jest równanie zachowania ciągłości przepływu zapisane w postaci całek:

$$B_{sr} \left[ \int_x^{x+\Delta x} H(t + \Delta t) dx - \int_x^{x+\Delta x} H(t) dx \right] = - \left[ \int_t^{t+\Delta t} Q(x + \Delta x) dt - \int_t^{t+\Delta t} Q(x) dt \right] \quad (3.5a)$$

albo w postaci różnicowej z wartości uśrednionych:

$$B_{sr} \Delta H_{sr}(t) \Delta x = -\Delta Q_{sr}(x) \Delta t \quad (3.5b)$$

gdzie:  $\Delta x$  – krok obliczeniowy na długości koryta [m],

$\Delta t$  – krok obliczeniowy po czasie [s],

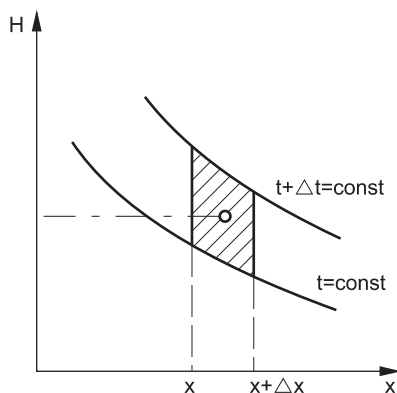
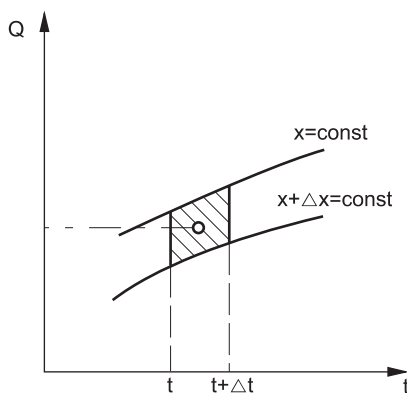
$B_{sr}$  – szerokość średnia koryta na odcinku  $x \div x + \Delta x$ ,

$\Delta H_{sr}$  – średni przyrost głębokości w czasie  $t \div t + \Delta t$ ,

$\Delta Q_{sr}$  – średni przyrost natężenia przepływu na długości koryta  $x \div x + \Delta x$ .

Obie strony równania (3.5) przedstawiają sobą tę samą skończoną objętość wody, co zaprezentowano na rys. 3.1 i 3.2.

Przy wzroście poziomu wody (głębokości) w czasie  $\Delta t$  zostaje zakumulowana pewna objętość wody, równa różnicy natężenia przepływu w czasie  $\Delta t$  na dopływie i odpływie z badanego odcinka o długości  $\Delta x$ . Jest to pierwszy podstawowy warunek, który musi być spełniony, aby spełnione zostało prawo zachowania ciągłości przepływu. Drugi warunek stanowi spełnienie dynamicznego równania przepływu przy zaistniałym spadku hydraulicznym.

Rys. 3.1. Wykresy funkcji  $H(t)$  i  $H(t + \Delta t)$ Rys. 3.2. Wykresy funkcji  $Q(x)$  i  $Q(x + \Delta x)$ 

W nowszych sposobach wyznaczania poszukiwanych wartości przepływu i głębokości metodą objętości skończonych, przedstawionych między innymi przez Szydłowskiego [76], zastosowanie mają równania:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g(I_0 - I) = 0 \quad (3.7)$$

do bezpośrednich obliczeń zapisywane w postaci macierzowej:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{S} = 0 \quad (3.8)$$

gdzie:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} H \\ uH \end{pmatrix} \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{F} = \left( \frac{uh}{u^2h} + 0,5gh^2 \right) \quad (3.9b)$$

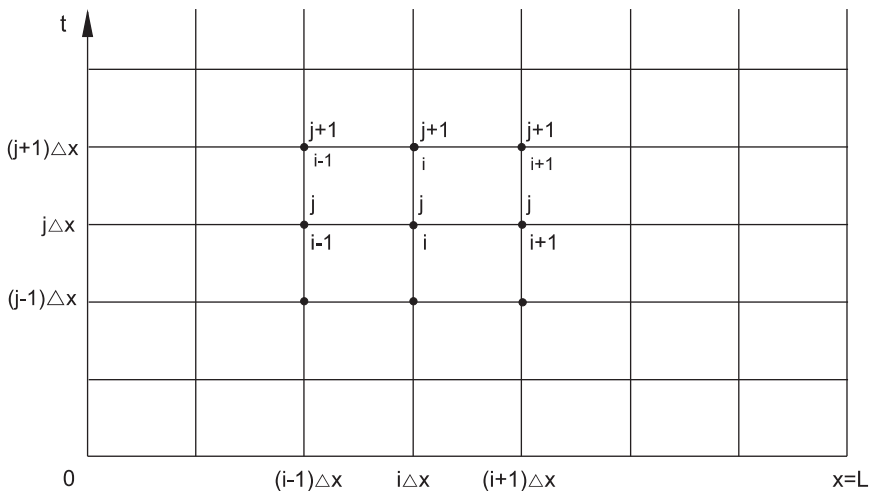
$$\mathbf{S} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -gH(I_0 - I) \end{array} \right\} \quad (3.9c)$$

przy czym  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{S}$  są odpowiednio wektorami zmiennych zachowawczych strumienia i członów źródłowych, przy uwzględnieniu warunku początkowego, opisującego wartości  $u(x,0)$ . Bardziej szczegółowo opisał tę metodę Szydłowski w zastosowaniu do przepływu szybkozmiennego z nieciągłościami [76].

### 3.4. Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych jest powszechnie stosowana do rozwiązywania numerycznego równań pochodnych cząstkowych typu hiperbolicznego. Sprowadza się do tego, że układ równań pochodnych cząstkowych jest zastępowany przybliżonym układem różnic skończonych.

Poszukiwanie badanej funkcji  $\varphi(x,t)$  odbywa się poprzez obliczanie jej przyrostów na osiach  $x$  i  $t$  w ściśle określonych punktach wcześniej sporządzonej siatki obliczeniowej (rys. 3.3) o przyjętym rozstawie  $\Delta x$  i  $\Delta t$ .



Rys. 3.3. Siatka obliczeniowa metody różnic skończonych

W równaniach przepływu nieustalonego badanymi funkcjami są zwykle prędkość przepływu  $u$  i głębokość  $H$  albo natężenie przepływu  $Q$  i poziom zwierciadła wody  $z$ . Obliczenia prowadzi się kolejno w węzłach leżących na prostej  $t_1 = 1\Delta t$ ,  $t_2 = 2\Delta t$ , ...,  $t_j = j\Delta t$ ,  $t_{j+t} = (j+t)\Delta t$ , każdorazowo poczynając od węzła o odciętej  $x = x_0 = 0$  i kończąc na odciętej  $x = x_k$ . W ogólnym przypadku przyrosty funkcji  $\varphi(x)$  i  $\varphi(t)$  liczy się ze wzorów: 3.10, 3.11 [82]



$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ (1 - a_3) [a_1(\varphi_{i+1}^j - \varphi_i^j) + (1 - a_1)(\varphi_i^j - \varphi_{i-1}^j)] + a_3 [a_2(\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}) + (1 - a_2)(\varphi_i^{j+1} - \varphi_{i-1}^{j+1})] \right\} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} [b(\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j) + (1 - b)(\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_{i+1}^j)] \quad (3.11)$$

Do obliczeń przepływu nieustalonego wolnoziemnego znalazły zastosowanie głównie następujące schematy:

- jawny, dla którego  $a_3 = 0$
- niejawny, gdzie  $a_3 = 1$

oraz następujący tok postępowania:

- progresywny, gdy  $a_1 = a_2 = 1$
- centrowy, gdy  $a_1 = a_2 = 0$ .

Wartość współczynnika  $b$  przyjmuje się jako 0,5.

Ze szczególnym zainteresowaniem spotkał się schemat niejawny progresywny opisany przez Preissmana [64], który przedstawił szczegółowo rozwiązania równań de Saint-Venanta w postaci:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (3.12)$$

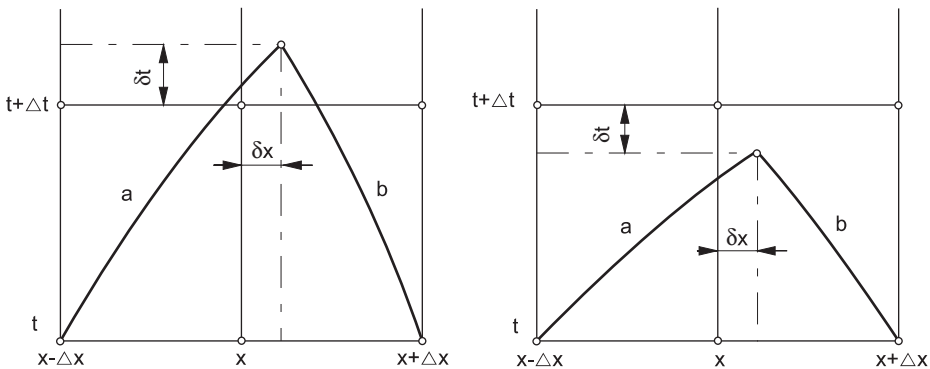
$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{Q}{A} \right)^2 + gh \right] = g(I_o - I_s) \quad (3.13)$$

Metoda różnic skończonych w zastosowaniu do równań de Saint-Venanta została dość obszernie opisana w polskich publikacjach przez Piweckiego, Szydłowskiego [76], Szymkiewicza [77, 78] i innych [38, 79, 81]. Jej niedostatkim jest to, że nie odzwierciedla przebiegu przepływu nieustalonego, co powoduje, że z reguły powstaje pewien błąd obliczeniowy, a w pewnych przypadkach dochodzi nawet do destabilizacji prowadzonych obliczeń. Aby można było zapobiec takiej sytuacji, stosując schemat jawny, każdorazowo musi być spełniony warunek Couranta:

$$\Delta t \leq \frac{1}{c} \Delta x \quad (3.14)$$

który zapewnia, że obliczenia prowadzone na poziomie  $t + \Delta t$  w oparciu o znane wartości na poziomie  $t$  siatki znajdują się w strefie zaistniałego przepływu nieustalonego. Strefę tę wyznaczają charakterystyki prosta i wsteczna, będące odzwierciedleniem przebiegu zaburzeń przepływu.

Niezależnie od przyjętego schematu obliczeniowego powstaje jednak pewien błąd, gdyż z reguły dowolny punkt siatki o rzędnej  $t + \Delta t$  i odciętej  $x$ , w którym liczona jest wartość przepływu, nie pokrywa się z punktem intersekcji charakterystyk wychodzących z punktów o odciętych odpowiednio  $x - \Delta x$  i  $x + \Delta x$  i o rzędnej  $t$  o rzeczywistych wartościach przepływu (rys. 3.4).



Rys. 3.4. Obrazy graficzne warunków powstawania błędu w obliczeniach metodą różnic skończonych

Mogą tu zaistnieć dwa charakterystyczne przypadki generujące błąd obliczeniowy. Jeżeli punkt intersekcji charakterystyk znajdzie się wewnątrz pola siatki, to obliczenia zachowują stabilność. Jeżeli jednak ten punkt znajdzie się poza polem siatki, to przy zastosowaniu schematu jawnego wystąpi destabilizacja obliczeń, której można uniknąć, stosując schemat niejawny, co obecnie jest powszechnie przyjętym postępowaniem. W każdym jednak przypadku powstały błąd lokalny się sumuje. Można go ograniczyć, zagęszczając siatkę obliczeniową.

Niezależnie od tego może powstać innego rodzaju błąd obliczeniowy, ponieważ siłą rzeczy przyjmuje się warunki początkowe wzdłuż osi  $t = 0$  zamiast wzdłuż charakterystyki początkowej. Błąd aproksymacji, zaistniały w obszarze pomiędzy charakterystyką początkową a początkową osią współrzędnych  $t = 0$ , będzie się wówczas przenosił na dalszy ciąg obliczeń rzeczywistego przepływu nieustalonego.

Metoda różnic skończonych cechuje się ograniczonymi możliwościami zastosowania do obliczeń przepływu nieustalonego w kanałach energetycznych, gdyż zasadniczym problemem jest tu obliczenie wielkości fal translacyjnych powstających wskutek szybkich manewrów maszyn. Do obliczeń przepływu powstającego za rozprzestrzeniającymi się falami bardziej właściwa jest metoda charakterystyk, opisana w p. 3.6. Natomiast zastosowanie metody różnic skończonych do obliczeń fal wezbrania powstałych w rzekach i kanałach wskutek zjawisk hydrometeorologicznych albo wytworzonych przez budowle piętrzące może być bardzo efektywne.

### 3.5. Metoda elementów skończonych

W latach 70. XX wieku O. Zienkiewicz opracował efektywną metodę elementów skończonych rozwiązywania złożonych równań różniczkowych z dziedziny mechaniki. Podjęto liczne próby jej wykorzystania do rozwiązywania równań de Saint-Venanta, między innymi przeprowadzono studia porównawcze metod różnic skończonych i elementów skończonych zrealizowane przez Kontarowicza i Łysenkę oraz przez Granatowicza i Szymkiewicza [39, 77]. Studia te wykazały, że wyniki obliczeń przy użyciu

obydwu metod są porównywalne, przy czym lepszą efektywność uzyskuje się, stosując metodę różnic skończonych. Choć metoda różnic skończonych stosunkowo słabo odwzorowuje zjawisko przepływu nieustalonego, to metoda elementów skończonych czyni to znacznie gorzej.

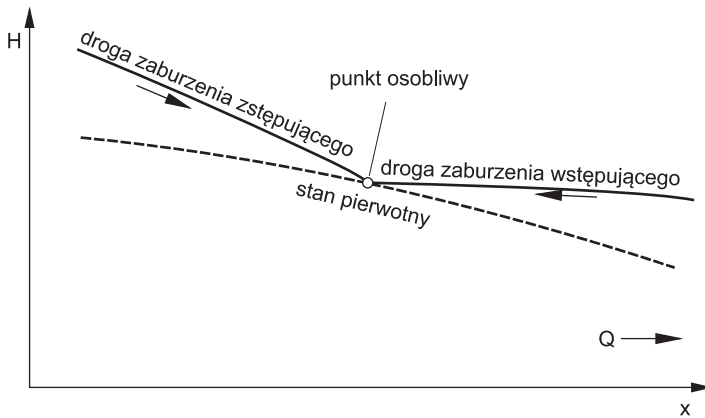
### 3.6. Metoda charakterystyk

#### 3.6.1. Podstawy metody charakterystyk

Podstawy teoretyczne metody charakterystyk zostały opracowane przez znakomych matematyków, spośród których największe zasługi położyli Monge i Riemann [69]. Metoda ta jest wykorzystywana głównie do rozwiązywania analitycznego równań różniczkowych typu hiperbolicznego, opisujących zmienne wielkości przemieszczającego się ośrodka materialnego. Równania pochodnych cząstkowych są sprowadzone do równań quasi-liniowych opisujących zmienne wartości badanych parametrów na drodze rozprzestrzeniających się zaburzeń. Wartości liczbowe parametrów tego ośrodka są wyznaczane w miejscu spotkania dwóch przeciwstawnych zaburzeń. Miejsca takie noszą nazwę punktów osobliwych Riemanna. Trasę (drogę), którą przemieszcza się określone zaburzenie, wywołując zmianę parametrów ośrodka, nazywa się charakterystyką.

Pierwszymi autorami adaptacji matematycznej teorii charakterystyk do rozwiązywania równań de Saint-Venanta, opisujących jednokierunkowe przepływy wolnozmienne, byli: Bergeron [16], który zastosował metodę charakterystyk do graficznego wyznaczenia rozkładu uderzeń hydraulicznych wywołanych przez pompy, oraz Hristianovič [41] i Vodernikov [87], którzy wykorzystali metodę charakterystyk do wyznaczenia rozkładu prędkości i stanów w czasie i na długości koryt otwartych. Pewnym mankamentem tych prac było to, że nie uwzględniały w dostatecznym stopniu warunków brzegowych wytworzonych przez maszyny hydrauliczne. Dalsze udoskonalenia metody były przedmiotem licznych późniejszych prac.

Adaptując teorię charakterystyk do jednokierunkowych przepływów nieustalonych, przyjmuje się, że w badanym ośrodku płynnym czynnik zewnętrzny wywołuje szereg elementarnych zaburzeń zmieniających sukcesywnie natężenie przepływu i w konsekwencji inne jego parametry. Zaburzenia rozprzestrzeniające się w przewodzie wyznaczają na płaszczyźnie drogi  $x$  i czasu  $t$  charakterystyki, wzdłuż których powstają dalsze zmiany natężenia przepływu. Zaburzenia wytworzone przez źródło ich generacji, osiągnąwszy granicę przewodu, odbijają się od niej, tworząc zaburzenia wtórne. Miejskami spotkania zaburzeń wtórnych z wcześniej wytworzonymi zaburzeniami pierwotnymi są punkty osobliwe, w których wyznacza się chwilowe natężenie przepływu przez rozwiązanie układu równań liniowych (rys. 3.5).



Rys. 3.5. Punkt osobliwy – miejsce spotkania dwóch przeciwnoobnych zaburzeń przepływu

Trasy wyznaczone przez zaburzenia pierwotne i wtórne tworzą na płaszczyźnie  $x, t$  siatkę obliczeniową charakterystyk. Jest to układ dowolnie wybranych zaburzeń rzeczywistych lub wirtualnych. Rezultatem obliczeń są chwilowe wartości natężenia przepływu w punktach siatki wytworzonej przez charakterystyki, tj. linie odzwierciedlające drogę przebiegu wybranych zaburzeń w płaszczyźnie  $x, t$ .

### 3.6.2. Równania zmian głębokości i prędkości przepływu na drodze rozprzestrzeniania się zaburzenia

Każde zaburzenie przepływu rozprzestrzeniające się wzdłuż kanału wywołuje w czasie i na długości zmianę głębokości i prędkości. Jest to stan nieustalony przepływu, który można opisać funkcjami:

$$H = H(x, t)$$

$$u = u(x, t)$$

W celu wyznaczenia tych funkcji należy się odwołać do podstawowych praw przepływu:

- zasady zachowania ciągłości przepływu (2.28);
- dynamicznego równania przepływu (2.45).

Prawa te określają związek matematyczny pomiędzy głębokością a prędkością przepływu w cieku:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{H_{sr}} \left( \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} \right) + u \frac{\partial \ln A}{\partial x} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} - g(I_o - I_s) = 0 \quad (3.16)$$

Ten układ równań zawiera cztery niewiadome, będące pochodnymi lokalnymi (cząstkowymi) drogi i czasu. Są to pochodne prędkości  $\partial u/\partial x$  i  $\partial u/\partial t$  oraz pochodne głębokości  $\partial H/\partial x$  i  $\partial H/\partial t$ .

Można je wyznaczyć, uwzględniając dwa dodatkowe równania, opisujące przyrosty (różniczki) prędkości  $du$  i głębokości  $dH$ :

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (3.17)$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial x} dx \quad (3.18)$$

Z prostego przekształcenia otrzymuje się pochodne lokalne prędkości i głębokości względem czasu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt} - \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.20)$$

Wyrażenie  $dx/dt$  jest tu prędkością bezwzględną (absolutną) rozprzestrzeniania się zaburzenia przepływu rzeczywistego lub wirtualnego.

Wstawiając wyrażenia (3.19) i (3.20) do równań opisujących przepływ nieustalony (3.15) i (3.16), otrzymuje się odpowiednio równania zmian lokalnych głębokości i prędkości przepływu:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \left(u - \frac{dx}{dt}\right) \frac{\partial H}{\partial x} + H_{sr} \frac{\partial u}{\partial x} + H_{sr} u \frac{\partial \ln A}{\partial x} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u - \frac{dx}{dt}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} - g(I_o - I_s) = 0 \quad (3.22)$$

jako funkcji przebytej drogi i czasu.

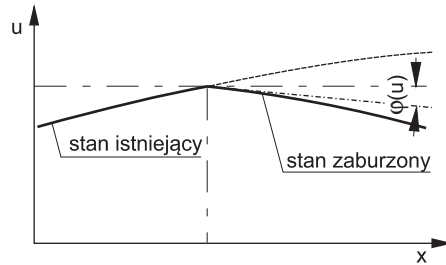
Ten układ równań pozwala wyznaczyć dwie poszukiwane pochodne lokalne obrazujące zmianę prędkości i głębokości przepływu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{g \frac{dH}{dt} - \left(u - \frac{dx}{dt}\right) \frac{du}{dt} + g \left(u - \frac{dx}{dt}\right) (I_o - I_s) + g H_{sr} u \frac{\partial \ln A}{\partial x}}{\left(u - \frac{dx}{dt}\right)^2 - g H_{sr}} \quad (3.23)$$

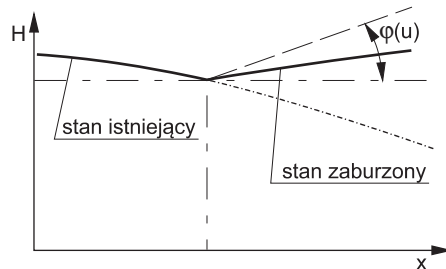
$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{-\left(u - \frac{dx}{dt}\right) \frac{dH}{dt} + H_{sr} \frac{du}{dt} - g H_{sr} (I_o - I_s) - H_{sr} \left(u - \frac{dx}{dt}\right) u \frac{\partial \ln A}{\partial x}}{\left(u - \frac{dx}{dt}\right)^2 - g H_{sr}} \quad (3.24)$$

Równania te opisują odpowiednio wartości tangensa kąta pochylenia krzywej (charakterystyki) zmian prędkości  $u$  lub głębokości  $H$  na drodze powstałego przepływu

nieustalonego w punkcie osobliwym, gdzie występuje nieciągłość przepływu spowodowana przez pojawienie się zaburzenia (rys. 3.6, 3.7).



Rys. 3.6. Przebieg wytworzonej przez zaburzenie wstępujące funkcji  $H(x)$  w czasie  $t = \text{const}$



Rys. 3.7 Przebieg wytworzonej przez zaburzenie wstępujące funkcji  $u(x)$  w czasie  $t = \text{const}$

Mianowniki równań (3.23) i (3.24) przyjmują wartość równą zero, a stąd powstaje zależność:

$$u - \frac{dx}{dt} = \mp \sqrt{gH_{sr}} \quad (3.25)$$

Wyrażenie  $\sqrt{gH_{sr}}$  nosi nazwę prędkości właściwej, z którą zaburzenie rozprzestrzenia się na stojącej wodzie:

$$c = \sqrt{gH_{sr}} \quad (3.26)$$

Z przekształcenia formuły (3.25) wynika, że prędkość bezwzględna zaburzenia odniesiona do nieruchomej osi  $x$  biegnącej wzdłuż kanału:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{gH_{sr}} \quad (3.27)$$

jest sumą algebraiczną prędkości przepływu i prędkości właściwej zaburzenia przepływu:

$$a = \frac{dx}{dt} = u + c \quad (3.28)$$

Jeżeli zaburzenie rozprzestrzenia się zgodnie z kierunkiem przepływu (wzdłuż osi  $x$ ), to prędkość bezwzględna przyjmuje wartości dodatnie. Jeżeli przeciwnie, to prędkość bezwzględna:

$$w = \frac{dx}{dt} = u - c \quad (3.29)$$

przyjmuje wartość ujemną w przepływie, jaki występuje normalnie w każdym kanale energetycznym, o ile oś współrzędnych długości  $x$  jest zgodna ze spadkiem kanału i zasadniczym kierunkiem przepływu wody. W bystrotokach, gdzie przepływ jest rwący, prędkość  $w$  może przyjmować wartości dodatnie.

Pomiędzy bezwzględnymi wartościami prędkości zaburzenia wstępującego i zstępującego zachodzi prosta zależność:

$$a + w = 2u \quad (3.30)$$

Formułę (3.27) można również zapisać w postaci:

$$dx = (u \pm \sqrt{gH_{sr}})dt \quad (3.31)$$

Jest to równanie drogi, jaką pokonują zaburzenia zstępujące (znak plus) i wstępujące (znak minus). W układzie współrzędnych drogi  $x$  i czasu  $t$  równanie (3.31) opisuje linie, wzdłuż których rozprzestrzeniają się zaburzenia przepływu i wzdłuż których prowadzi się obliczenia na podstawie niżej wyprowadzonych równań przepływu nieustalonego. Ponieważ głębokość średnia  $H_{sr}$  ulega pewnej modyfikacji na drodze rozprzestrzeniania zaburzenia, to linie te posiadają z reguły nieznaczące krzywizny. W obliczeniach praktycznych zastępuje się je liniami prostymi.

W miejscu zaistnienia zaburzenia pochodne lokalne  $\partial u/\partial x$  i  $\partial H/\partial x$  posiadają pewne wielkości. Ich wartość może być określona, jeżeli liczniki równań (3.23) i (3.24) przyrówna się do zera, podobnie jak mianowniki:

$$g \frac{dH}{dt} - \left(u - \frac{dx}{dt}\right) \frac{du}{dt} + g \left(u - \frac{dx}{dt}\right) (I_o - I_s) + gH_{sr}u \frac{\partial \ln A}{\partial x} = 0 \quad (3.32)$$

$$-\left(u - \frac{dx}{dt}\right) \frac{dH}{dt} + H_{sr} \frac{du}{dt} - gH_{sr}(I_o - I_s) - H_{sr} \left(u - \frac{dx}{dt}\right) u \frac{\partial \ln A}{\partial x} = 0 \quad (3.33)$$

Jeżeli równanie (3.32) podzieli się przez  $-(u - dx/dt)$ , a następnie w nowo powstałe wyrażenie wprowadzi się wzór (3.25), równanie (3.33) podzieli się zaś przez  $H$ , to w obu przypadkach otrzyma się jedną i tę samą formułę:

$$\frac{du}{dt} \pm \frac{1}{H_e} \sqrt{gH_{sr}} \frac{dH}{dt} - g(I_o - I_s) \pm \sqrt{gH_{sr}} \frac{\partial \ln A}{\partial x} = 0 \quad (3.34)$$

albo po wprowadzeniu zależności (3.26):

$$du \pm c \frac{dH}{H_{sr}} - g(I_o - I_s)dt \pm cu \frac{\partial \ln A}{\partial x} dt = 0 \quad (3.35)$$

Przedstawia ona związek pomiędzy prędkością przepływu  $u$  a głębokością wody w kanale  $H$ , zachodzący wzdłuż charakterystyki prostej (znak plus) albo wzdłuż charakterystyki wstecznej (znak minus).

Formułę (3.35) można nieco uprościć, nie czyniąc istotnego błędu, jeżeli przyjmie się, że  $\partial x/\partial t = dx/dt = \pm c$ , zależnie od kierunku rozprzestrzeniania się zaburzenia. Wówczas przyjmuje ona postać:

$$du \pm c \frac{dH}{H_{sr}} - g(I_o - I_s)dt + u\partial \ln A = 0 \quad (3.36)$$

gdzie:  $\partial \ln A$  – wskaźnik zmian powierzchni przekroju poprzecznego kanału niepryzmatycznego.

### 3.6.3. Szczególne formuły opisujące przepływ nieustalony na drodze rozprzestrzeniania się zaburzeń

W kanale przyzmatycznym równanie przepływu występującego na drodze rozprzestrzeniania się dowolnego zaburzenia przyjmuje formę:

$$du \pm c \frac{dH}{H_{sr}} - g(I_o - I_s)dt = 0 \quad (3.37)$$

Równanie (3.37) po wstawieniu formuły (3.26) przyjmuje postać:

$$du \pm \sqrt{\frac{g}{H_{sr}}} dH - g(I_o - I_s)dt = 0 \quad (3.38)$$

która w wielu przypadkach znajduje zastosowanie do obliczeń w praktyce inżynierskiej.

Wyrażenie z równania (3.37):

$$du \pm c \frac{dH}{H_{sr}} \sqrt{\frac{g}{H_{sr}}} dH = Ri \quad (3.39)$$

nosi nazwę niezmiennika Riemanna. Przyjmuje on odpowiednio znak plus lub minus, zależnie od kierunku rozprzestrzeniania się zaburzenia. W kanale przyzmatycznym o dnie horyzontalnym, gdy straty hydrauliczne przepływu są pomijalne,  $Ri$  przyjmuje wartość zero.

Równanie (3.38) można też zapisać w nieco innej postaci, w której poszukiwanymi zmiennymi są natężenie przepływu  $Q$  i głębokości wody w kanale  $H$  albo też poziom zwierciadła wody w kanale  $z$ . W pierwszym przypadku otrzyma się równanie opisujące związek pomiędzy zmianą natężenia przepływu a zmianą głębokości wody w kanale, mnożąc wyrażenie (3.37) przez powierzchnię przekroju  $A$ :

$$Adu \pm c dA - gA(I_o - I_s)dt = 0 \quad (3.40)$$

Ponieważ:

$$dQ = d(uA) = Adu + u dA \quad (3.41)$$



to kolejno podstawiając do równania (3.40):

$$Adu = dQ - udA \quad (3.42)$$

$$dA = BdH \quad (3.43)$$

otrzymuje się podstawowe równanie przepływu nieustalonego:

$$\frac{dQ}{B} - (u \mp c)dH - gH_{sr}(I_o - I_s)dt = 0 \quad (3.44)$$

Zmiana głębokości wody w kanale jest więc funkcją zmiany natężenia przepływu:

$$dH = \frac{dQ}{B(u \mp c)} - \frac{gH_{sr}}{(u \mp c)} \quad (3.45)$$

którą się uprości, podstawiając kolejno:

$$dt = \frac{dx}{u \pm c} \quad (3.46)$$

$$dH = \frac{dQ}{B(u \mp c)} - \frac{I_o - I_s}{\frac{u^2 - c^2}{gH_{sr}}} dx \quad (3.47)$$

i dalej:

$$F_r = \frac{u^2}{gH_{sr}} \quad (3.48)$$

$$dH = \frac{dQ}{B(u \mp c)} + \frac{I_o - I_s}{1 - F_r} dx \quad (3.49)$$

Jeżeli teraz uwzględni się formuły (3.25) i (3.26), opisujące prędkość rozchodzenia się zaburzeń, to funkcja zmian głębokości przyjmuje postać:

a) wzdłuż charakterystyki prostej, tj. drogi rozprzestrzeniania się zaburzenia zstępującego:

$$dH = \frac{dQ}{Bw} + \frac{I_o - I_s}{1 - Fr} dx \quad (3.50)$$

b) wzdłuż charakterystyki wstecznej, tj. drogi rozprzestrzeniania się zaburzeń wstępujących:

$$dH = \frac{dQ}{Ba} + \frac{I_o - I_s}{1 - Fr} dx \quad (3.51)$$

W bardzo wielu przypadkach liczba Froude'a  $Fr$  przepływu jest bardzo mała i zawiera się w granicach 0,01–0,05. Wówczas w obliczeniach praktycznych można ją całkowicie pominąć, wiedząc, że wartość strat hydraulicznych  $h_s = I_s dx$  na badanym odcinku określa się zwykle w przybliżeniu i wówczas błąd powstały z pominięcia liczby

Froude'a nie odgrywa istotnej roli dla dokładności obliczeń. W szczególności dotyczy to koryt naturalnych.

Jeżeli podstawowym celem obliczeń jest wyznaczenie poziomu zwierciadła wody w korycie, to wówczas zastosowanie może mieć równanie:

$$dz = \frac{dQ}{B(u \mp \sqrt{gH_{sr}})} + dh_s \quad (3.52)$$

przy dostatecznie małej i pomijalnej liczbie Froude'a.

Wartość strat hydraulicznych  $h_s$  na długości  $dx$  jest równa:

$$dh_s = I_s dx \quad (3.53)$$

Równanie (3.52) znajduje zastosowanie w szczególności do obliczania zmian wysokości fali na długości kanału.

### 3.6.4. Zasady prowadzenia obliczeń przepływu nieustalonego wolnozmiennego w kanałach otwartych

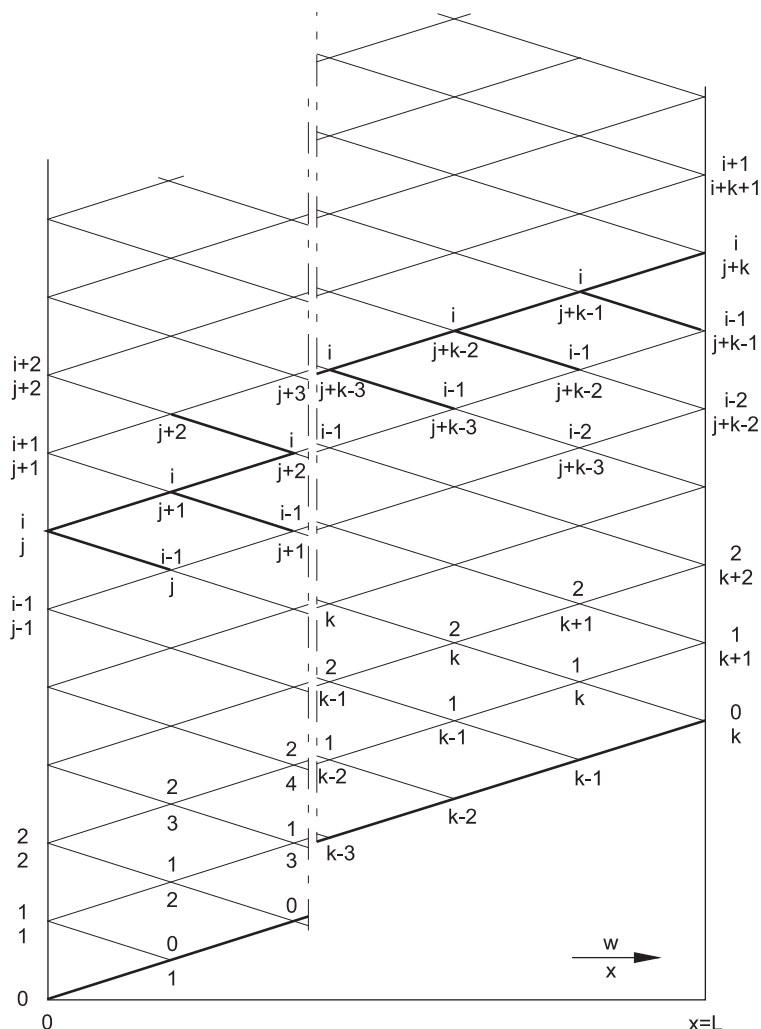
Warunkiem koniecznym i wystarczającym prowadzenia obliczeń przepływu nieustalonego wolnozmiennego jest znajomość:

- natężenia przepływu  $Q$  i stanu  $z$  oraz innych parametrów z nimi związanych na charakterystyce początkowej (0). Charakterystyka ta odzwierciedla przebieg w płaszczyźnie  $x, t$  pierwszego elementarnego zaburzenia przepływu wytwarzanego przez źródło (siłownię) generacji przepływu nieustalonego;
- funkcji zmian w czasie natężenia przepływu w postaci  $Q = Q(t)$  na jednym z końców kanału, gdzie powstają zaburzenia przepływu nieustalonego;
- funkcji zmian w czasie stanu  $z$ , względnie głębokości  $H$  wody na przeciwnym końcu kanału w postaci  $z = z(t)$  lub  $H = H(t)$ . Tam następuje odbicie pierwotnych zaburzeń.

Funkcje te mogą być dane w postaci jawnej lub niejawnej typu:

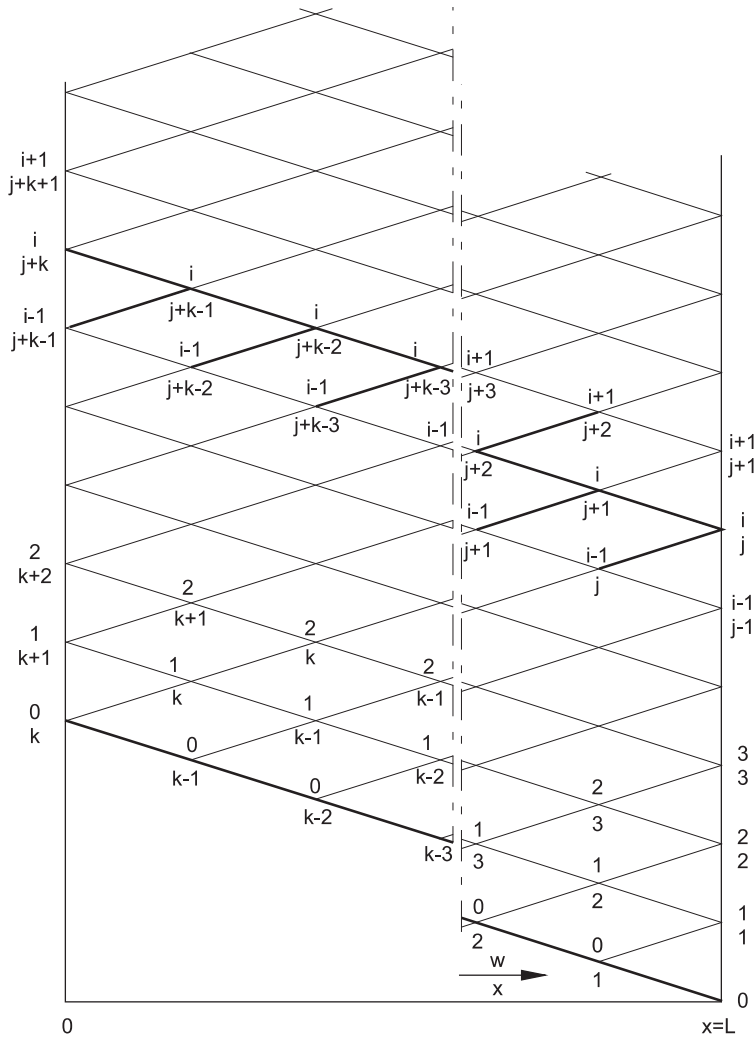
$$Q = Q(z) \quad \text{lub} \quad Q = Q(H)$$

Wyznaczenie wartości wybranych zmiennych przepływu nieustalonego odbywa się w odniesieniu do siatki tworzonej sukcesywnie przez charakterystyki proste i wsteczne, które są obrazem graficznym przemieszczania się powstałych zaburzeń. Zaburzenia te mogą występować realnie albo też być czysto wirtualne. Obliczenia prowadzi się wzdłuż charakterystyk obrazujących przebieg zaburzeń wytworzonych przez źródło generacji, wyznaczając wartości poszukiwanych parametrów przepływu w punktach intersekcji z charakterystykami zaburzeń powrotnych. W układzie współrzędnych długości  $x$  i czasu  $t$  punkty te jednoznacznie określają położenie (współrzędne) odpowiedniego przekroju kanału  $x$  i czas  $t$ , w którym rozpatrywane zaburzenie się pojawia.



Rys. 3.8. Siatka obliczeniowa charakterystyk zaburzeń przepływu powstających na początku kanału

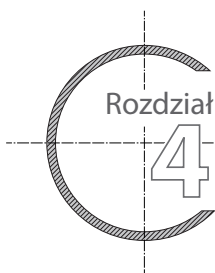
Wykonywanie obliczeń rozpoczyna się od wyznaczenia wartości przepływu dla stanu początkowego i charakterystyki „0” w wybranych przekrojach przewodu  $x = 0, \dots, x = x_k$ . Właściwe obliczenia przepływu nieustalonego są prowadzone wzdłuż kolejnych charakterystyk pierwotnych, w kolejnych punktach intersekcji z charakterystykami wstecznymi. Jeżeli wcześniej wyznaczono położenie punktów intersekcji na charakterystyce  $i-1$  (rys. 3.8, 3.9) i odpowiadające im wartości badanych parametrów przepływu, to wówczas w następnym kroku prowadzi się obliczenia kolejno w punktach intersekcji z charakterystykami wstecznymi znajdującymi się na charakterystyce  $i$  ( $i-1, 2, \dots, k$ ). W punkcie o współrzędnej  $i, j$ , gdzie znane są wartość funkcji  $Q(t)$  i współrzędna  $x_i$ , liczy się czas  $t_i$  wytworzenia zaburzenia  $i$  oraz poszukuje się stanu zwierciadła wody ( $z_i$  lub  $H_i$ ) z układu równań na charakterystyce zaburzenia powrotnego  $j$ , w granicach od  $i-1, j$  do  $i, j$ .



Rys. 3.9. Siatka obliczeniowa charakterystyk zaburzeń przepływu powstających na końcu kanału

Następnie oblicza się położenie i parametry przepływu kolejno w punktach leżących na charakterystyce  $i$ , tj. w punktach  $i, j+1$ ;  $i, j+2$ ; ...;  $i, j+k$ , gdzie  $k$  jest liczbą wybranych charakterystyk wstecznych. W punktach tych nieznanne są wartości położenia  $x$  i  $t$  oraz przepływu ( $Q$  lub  $u$  oraz  $z$  lub  $H$ ). Wyznacza się je z układu równań przebiegu zaburzenia wzdłuż charakterystyki  $i$  oraz kolejno charakterystyk powrotnych  $i, i+1, \dots, j+k-1$ .

Po obliczeniu współrzędnych punktu  $i, j+k-1$  można przystąpić do wyznaczenia czasu i natężenia przepływu w punkcie symbolizującym dopływ zaburzenia  $i$  do przeciwległego końca kanału o znanej współrzędnej długości  $x_L$  i znanej funkcji zmian poziomu zwierciadła wody  $z(t)$  lub  $h(t)$ . Poszukiwane wartości wyznaczy się, rozwiązując odpowiednie równania przebiegu zaburzenia  $i$  przepływu nieustalonego wzdłuż charakterystyki  $i$  od punktu  $i, j+k-1$  do punktu  $i, j+k$ .



## KSZTAŁT I WIELKOŚĆ FAL TRANSLACYJNYCH

---

### 4.1. Podstawowe modele fal translacyjnych

W rozdziale pierwszym (p. 1.4) wykazano, że fale translacyjne mogą posiadać odmienne kształty, a co za tym idzie – odmienne wymiary i odmienne prędkości przemieszczania się wzdłuż kanału, nawet przy tej samej zmianie natężenia przepływu. Mają na to wpływ przede wszystkim kształt i wielkość przekroju poprzecznego oraz charakter i zakres zmiany natężenia przepływu. Te okoliczności wymagają, aby każdy typowy kształt czoła fali został opisany matematycznie we właściwy sposób. Zaprezentowane niżej modele matematyczne poszczególnych typów fal będą się więc różnić.

Bardzo wielu badaczy zajmowało się badaniem i tworzeniem modeli matematycznych głównie dodatnich fal translacyjnych w kanałach otwartych. Były to studia teoretyczne i eksperymentalne, prowadzone głównie w laboratoryjnych kanałach przekroju prostokątnego. Studia teoretyczne koncentrowały się na wyznaczaniu formuł matematycznych opisujących prędkość oraz maksymalną i średnią wysokość fali. Wiązało się to z zapotrzebowaniem uwarunkowanym przez hydrotechnikę. Formuły, raczej o charakterze historycznym, tworzyli znani uczeni: Bazin [8], Boussinesq [20], Forcheimer [34], Lemoine [49], Favre [33], Benjamin i Lighthill [14]. Najbardziej znaną z tej serii i najpowszechniej stosowaną formułę na prędkość propagacji fali opublikował Barré de Saint-Venant [6]:

$$c = u_0 \pm \sqrt{gH_0 \left[ 1 \pm \frac{2}{3} \frac{h}{H_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{H_0} \right)^2 \right]} \quad (4.1)$$

gdzie znak plus odnosi się do fali dodatniej, a znak minus do fali ujemnej.

Formuła została wyprowadzona na drodze analizy teoretycznej fali o pionowym czole bez oscylacji w warunkach poziomego dna i poziomego zwierciadła wody przed i za czołem fali. Znalazła zastosowanie do wyznaczania wysokości dodatniej i ujemnej fali nie tylko w kanale o przekroju prostokątnym. Ze szczególnym zainteresowaniem badaczy spotkały się fale dodatnie z oscylacjami. Favre [33] na drodze badań laboratoryjnych wyznaczył związek pomiędzy średnią a maksymalną wysokością oscylacji falowych w kanale o przekroju prostokątnym.

Model de Saint-Venanta–Favre’a był z dużym powodzeniem wykorzystywany w procesie projektowania kanałów energetycznych. Dopiero w drugiej połowie XX w. podjęto próby matematycznego opisu oscylacji falowych na podstawie równań hydromechanicznych podanych przez Eulera. Do bardziej teoretycznie zaawansowanych należy model Serre’a [73], uwzględniający składową pionową oraz rozkład ciśnień dynamicznych opisanych przez Eulera. Ten model jest w stanie opisać z pewną dokładnością profil podłużny oscylacji falowych rozprzestrzeniających się za czołem fali. Serre zastosował go po raz pierwszy do wyznaczenia sfalowanego przepływu odbywającego się przez próg jazowy o szerokiej koronie. Na bazie propozycji podanych przez Serre’a powstały studia teoretyczne i doświadczalne, których wyniki były publikowane przez Sandovera i Taylora [70], Taylora [80], Puzanova [65, 66] i [innych] [9, 10, 13]. Istotną nowością w stosunku do właściwego modelu Serre’a jest to, że rozważania matematyczne są prowadzone w ruchomym układzie współrzędnych przemieszczających się wraz z czołem fali. Ten układ współrzędnych pozwala względnie dokładnie opisać kształt i wielkość oscylacji falowych w korytach kanału o dowolnym kształcie.

Fale ujemne mają wielokrotnie skromniejsze opisy literaturowe [11], choć mogą również niekorzystnie oddziaływać na kanał i maszyny hydrauliczne. Opis matematyczny ujemnej fali translacyjnej o kształcie stale wydłużającej się paraboli opiera się na założeniu, że każdy jej element rozprzestrzenia się z inną prędkością. Prędkość ta jest funkcją głębokości wody danej strugi.

## 4.2. Podstawowe założenia i zakres opisu matematycznego dodatnich fal translacyjnych

Fale translacyjne występujące w kanałach i rzekach zabudowanych stopniami energetycznymi opisuje się matematycznie osobno w przypadku, gdy towarzyszą im oscylacje lub gdy ich nie ma. Zastosowane modele matematyczne mają wspólny „mianownik”, którym jest ruchomy układ współrzędnych  $x, z$  związany z czołem fali i poruszający się wraz z nią. Pozioma oś  $x$  biegnie po dnie kanału, a oś  $z$ , wzdłuż której występuje zmiana głębokości, jest do niej prostopadła. Obserwator umieszczony w tym układzie współrzędnych będzie mógł zarejestrować prędkość przemieszczania się brzegów kanału równą prędkości bezwzględnej fali  $c$ , a względną prędkość przepływu  $w$  jako równą:

$$w = u - c \quad (4.2)$$

gdzie:  $c > 0$  dla fali napelnienia,  
 $c < 0$  dla fali piętrzenia.

W dowolnym przekroju kanału względne natężenie przepływu będzie więc równe:

$$\Omega = Aw \quad (4.3)$$

Opisując daną falę translacyjną w określonym, dowolnie wybranym przekroju kanału, można bez znaczącej szkody pominąć nieistotną ewentualną zmianę prędkości przemieszczania się fali oraz przyjąć, że dno jest horyzontalne. Przy tych założeniach

i w tym układzie współrzędnych natężenie przepływu względnego  $\Omega$  może być traktowane jako chwilowo ustalone. Dalej przyjmuje się, że szorstkość dna i skarpy kanału nie oddziałuje na powstały kształt i wielkość czoła fali. To założenie może być uważane za dostatecznie właściwe tylko w odniesieniu do szerokiego kanału przekroju prostokątnego. W kanałach przekroju trapezowego oscylacje nabiegają bowiem na skarpy, modyfikując nieco swe wielkości w głównym korycie. Jak wykazał Taylor [80], wielkość nabiegania zależy od pochylenia skarp i rośnie wraz z głębokością i natężeniem przepływu. Wskutek znaczących trudności w opisie teoretycznym profilu podłużnego oscylacji falowej w kanałach przekroju trapezowego i parabolicznego to nabieganie się pomija, tym bardziej że znacząco oddziałuje w ten sposób właściwie tylko pierwsza oscylacja.

Dalszym uproszczeniem tworzonego modelu matematycznego oscylacji falowych jest przyjęcie, że rozkład prędkości przepływu w pionie w każdym dowolnym przekroju poprzecznym kanału jest równomierny i zgodny z przemieszczającą się falą. Tak w rzeczywistości nie jest. Rozkład składowej poziomej (równoległej do dna) jest bardziej złożony, i to nie tylko w przepływie nieustalonym. Stosunkowo szybkie zmiany prędkości przepływu występują pomiędzy szczytem a doliną oscylacji. Zmiany te dotyczą zarówno wielkości, jak i kierunków lokalnych przepływu. Generuje to dodatkowe straty hydrauliczne oprócz tych, które powstają wskutek pulsacji poziomów zwierciadła wody, a zatem wskutek zmian prędkości przepływu. Sandover i Taylor [70] podjęli próbę opisanie ich określoną formułą w przypadku rozprzestrzeniania się fali napełnienia, gdzie przepływ oscylacyjny jest bardziej ustabilizowany, gdyż fala ta rozprzestrzenia się zgodnie z kierunkiem przepływu początkowego. W miarę oddalania się od czoła fali straty hydrauliczne dodatkowo narastają wskutek pulsacji prędkości przepływu. Efektem powstałych strat jest amortyzacja i w końcu zanik oscylacji. Powstaje swego rodzaju stabilizacja przepływu nieustalonego wolnozmiennego powstałego za falą. Przyjmuje się, że miarą wielkości narastających strat, począwszy od czoła fali, jest ich jednostkowa wartość wyrażająca się współczynnikiem  $\zeta$ . Całkowitą wartość strat w dowolnym przekroju stanowi iloczyn współczynnika  $\zeta$  i energii kinetycznej w dowolnie wybranym przekroju koryta kanału.

Podobnie jak w przewodach pod ciśnieniem, współczynnik strat jest sumą współczynnika tarcia o ściany kanału i współczynnika tarcia hydraulicznego wywołanego przez nagłe zmiany prędkości przepływu oscylacyjnego. Wielkość tego współczynnika jest z pewnością funkcją pochodnych prędkości przepływu, co zostało wykazane w p. 7.3.

Opisując profil podłużny oscylacji powstających w kanałach przekroju prostokątnego, uwzględnia się straty hydrauliczne powstałe wskutek gwałtownych zmian prędkości przepływu. Pomija się je natomiast w kanałach o przekrojach trapezowym i parabolicznym. Przyjmuje się, że ustanowione formuły opisujące profil fali w tych kanałach mają zastosowanie do wyznaczenia kształtu i wielkości czoła dodatniej fali translacyjnej. W celu uproszczenia zapisu, a zwłaszcza uogólnienia wyników rozważań teoretycznych, wzory i formuły przedstawia się w postaci bezwymiarowej. Liczba przepływu falowego  $\Phi_0$  charakteryzuje wielkość fali, a zatem i natężenia przepływu falowego, podobnie jak liczba Froude'a przepływu ustalonego.

### 4.3. Wpływ strat hydraulicznych na kształt i charakterystyczne wielkości oscylacji w kanale przekroju prostokątnego

#### 4.3.1. Równanie profilu oscylacji falowych

W celu uwidocznienia wpływu strat hydraulicznych na wielkość oscylacji falowych w kanale przekroju prostokątnego stosuje się zasadę zachowania energii. Rozpatrzmy zmiany energii potencjalnej i kinetycznej przepływającej fali, notowane w układzie współrzędnych przemieszczających się wraz z tą falą (rys. 4.1). W dowolnym przekroju kanału prostokątnego równanie (2.69) energii przepływu krzywoliniowego przyjmuje następującą formę:

$$E = \frac{1}{H} \int_0^H \left\{ H + (H^2 - z^2) \frac{\Omega^2}{2gB^2H^2} \left[ H \frac{d^2H}{dx^2} - \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 \right] + \frac{\Omega^2}{2gB^2H^2} \right\} dH \quad (4.4)$$

Po scałkowaniu otrzymuje się funkcję określającą wartość energii:

$$E = H + \frac{\Omega^2}{6gB^2H^2} \left[ 2H \frac{d^2H}{dx^2} - \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 \right] + \frac{\Omega^2}{2gB^2H^2} \quad (4.5)$$

Zmiennymi są tu głębokość wody  $H(x)$  i względna prędkość przepływu  $w(x)$ , natomiast względne natężenie przepływu  $\Omega$  zachowuje stałą wartość.

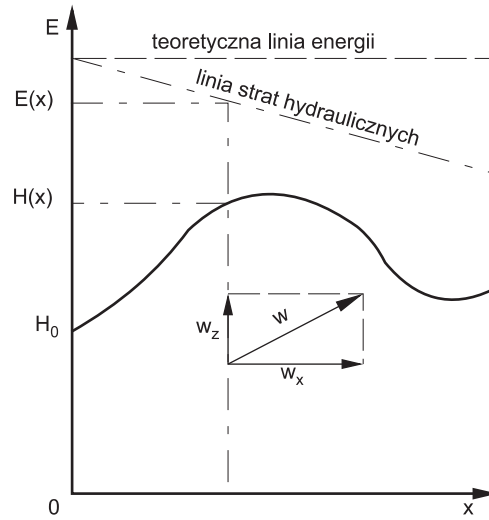
W przekroju początkowym bezpośrednio przed czołem fali, we względnym układzie współrzędnych  $x, z$  woda posiada energię o wartości:

$$E_o = H_o + \frac{\Omega^2}{2gB^2H_o^2} \quad (4.6)$$

W miarę oddalania się od czoła fali energia sukcesywnie maleje pod wpływem występujących strat hydraulicznych. Straty te sumują się na długości fali. Maksymalną sumaryczną wartość osiągają z chwilą zaniku oscylacji, tj. ustabilizowania się przepływu nieustalonego wolnozmiennego występującego już za falą. Jeżeli ich jednostkowa wartość w tym przekroju jest równa  $\xi$ , to ich wartość całkowita wyniesie:

$$\Delta E = \xi \frac{\Omega^2}{2gB^2H^2} \quad (4.7)$$





Rys. 4.1. Składowe prędkości względnego przepływu w ruchomym układzie współrzędnych

Zasadę zachowania energii opisuje w tym przypadku następujące równanie różniczkowe:

$$H - H_0 + \frac{\Omega^2}{6gB^2H^2} \left[ 2H \frac{d^2H}{dx^2} - \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 \right] + \frac{\Omega^2}{2gB^2H^2} + \xi \frac{\Omega^2}{2gB^2H^2} - \frac{\Omega^2}{2gB^2H_0^2} = 0 \quad (4.8)$$

Jeżeli teraz to równanie zostanie pomnożone przez  $H^2/H_0^3$  oraz dokona się podstawienia:

$$\frac{\Omega^2}{gB^2H_0^3} = \Phi_0^2; \quad \frac{H}{H_0} = \zeta; \quad \frac{x}{H_0} = \kappa \quad (4.9 \text{ a,b,c})$$

a także uwzględni się, że:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d\zeta}{d\kappa} \quad (4.10a)$$

oraz:

$$\frac{d^2H}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{d^2\zeta}{d\kappa^2} \quad (4.10b)$$

to otrzyma się równanie różniczkowe profilu fali wyrażone w jednostkach bezwymiarowych:

$$2\zeta \frac{d^2\zeta}{d\kappa^2} - \left( \frac{d\zeta}{d\kappa} \right)^2 + \frac{6}{\Phi_0^2} \zeta^3 - 3 \left( \frac{2}{\Phi_0^2} + 1 \right) \zeta^2 + 3(1 + \xi) = 0 \quad (4.11)$$

Jest to równanie nieliniowe drugiego rzędu, które może zostać sprowadzone do prostej postaci. Jeżeli dokona się podstawienia:

$$\left(\frac{d\zeta}{d\chi}\right)^2 = U(\zeta) \quad (4.12)$$

natomiast:

$$2\frac{d^2\zeta}{d\chi^2} = \frac{dU}{d\zeta} \quad (4.13)$$

to równanie (4.11) przyjmie postać:

$$\zeta \frac{dU}{d\zeta} - U(\zeta) = -\frac{6}{\phi_0^2} \zeta^3 + 3\left(\frac{2}{\phi_0^2} + 1\right) \zeta^2 - 3(1 + \xi) \quad (4.14)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja  $U(\zeta)$ , którą można przedstawić w postaci rozwiniętej w serię wyrażen o zmiennej  $\zeta$  rosnącej w potęgę od zera do  $n$ :

$$U(\zeta) = C_0 + C_1\zeta + C_2\zeta^2 + C_3\zeta^3 + \dots + C_n\zeta^n \quad (4.15)$$

Stałe  $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$  można wyznaczyć na drodze identyfikacji ze współczynnikami z równania (4.14). W tym celu wyznacza się pochodną funkcji  $U(\zeta)$ , ograniczając wyrazy do zmiennej będącej w potęgę trzeciej:

$$\frac{dU}{d\zeta} = C_1 + 2C_2\zeta + 3C_3\zeta^2 \quad (4.16)$$

Jeżeli funkcje (4.15) i (4.16) podstawimy do równania (4.14) i dokona się przekształceń algebraicznych, to otrzyma się następujące równanie:

$$2C_3\zeta^3 + C_2\zeta^2 - C_0 = -\frac{6}{\phi_0^2} \zeta^3 + 3\left(\frac{2}{\phi_0^2} + 1\right) \zeta^2 - 3(1 + \xi) \quad (4.17)$$

Z porównania współczynników przy odpowiednich zmiennych otrzyma się:

$$C_0 = 3(1 + \xi) \quad (4.18a)$$

$$C_2 = 3\left(\frac{2}{\phi_0^2} + 1\right) \quad (4.18b)$$

$$C_3 = -\frac{3}{\phi_0^2} \quad (4.18c)$$

Podstawiając je do równania (4.17), otrzyma się następującą funkcję:

$$\left(\frac{d\zeta}{d\chi}\right)^2 = -\frac{3}{\phi_0^2} \zeta^3 + 3\left(\frac{2}{\phi_0^2} - 1\right) \zeta^2 + C_1\zeta + (1 + \xi) \quad (4.19)$$

Stałą  $C_1$  wyznacza się z warunków początkowych dla  $H = H_o$ ,  $\zeta = 1$ , a  $d\zeta/dx = 0$ , stąd:

$$C_1 = -3 \left( \frac{1}{\Phi_o^2} + 2 + \xi \right) \quad (4.20)$$

Ostatecznie równanie różniczkowe zwierciadła sfalowanej wody w postaci wielkości zredukowanej przy uwzględnieniu strat hydraulicznych zapisujemy jako:

$$\left( \frac{d\zeta}{dx} \right)^2 = \frac{3}{\Phi_o^2} \{ -\zeta^3 + (2 + \Phi_o^2)\zeta^2 - [1 + \Phi_o^2(2 + \xi)]\zeta + \Phi_o^2(1 + \xi) \} \quad (4.21)$$

albo w wielkościach bezwzględnych:

$$\frac{dH}{dx} = \left( \frac{3}{\Phi_o^2} \right)^{0,5} \left\{ -\left( \frac{H}{H_o} \right)^3 + (2 + \Phi_o^2) \left( \frac{H}{H_o} \right)^2 - \left[ 1 + \Phi_o^2(2 + \xi) \frac{H}{H_o} \right] + \Phi_o^2(1 + \xi) \right\}^{0,5} dx \quad (4.22)$$

Równanie to może być całkowane numerycznie krok po kroku, w warunkach znajomości rozkładu strat hydraulicznych. Jest ono ważne w obszarze występowania oscylacji, tj. do granicznej wielkości sumarycznych strat hydraulicznych. Napotyka to jednak istotną trudność, gdyż straty hydrauliczne są funkcją zmian głębokości, a zatem i zmiennych prędkości przepływu. Ich wielkość nie jest też gruntownie zbadana i określona.

Gdyby w równaniu (4.22) pominąć czynnik opisujący straty hydrauliczne, to okazałoby się, że stanowi ono równanie klasycznej pojedynczej (samotnej) fali:

$$\frac{x}{H_o} = \pm 2 \sqrt{\frac{\Phi_o^2}{3(\Phi_o^2 - 1)}} \operatorname{arc\,tan} h \sqrt{\frac{\Phi_o^2 - \frac{H}{H_o}}{\Phi^2 - 1}} \quad (4.23)$$

Profil podłużny tej fali przedstawia sobą krzywa typu konoidalnego. Krzywa ta jest bardzo zbliżona do czoła fali translacyjnej, której profil rozpoczyna się w ściśle określonym miejscu, a nie w nieskończoności, jak to przedstawia równanie (4.23). Maksymalna wysokość pierwszej oscylacji falowej może być utożsamiana z maksymalną wysokością fali samotnej wyznaczonej z równania (4.23). Taka hipoteza jest w pełni uzasadniona w rozważaniach technicznych potrzebnych w praktyce inżynierskiej.

#### 4.3.2. Charakterystyczne wysokości oscylacji

Dla z góry założonego rozkładu strat hydraulicznych równanie (4.21) pozwala wyznaczyć wartości ekstremalnych głębokości w szczytach i dolinach oscylacji oraz wartość głębokości średniej przepływu, a także średnią wysokość fali. W tym celu równanie (4.21) sprowadza się do postaci:

$$\left( \frac{d\zeta}{dx} \right)^2 = \frac{3}{\Phi_o^2} (1 - \zeta) [\zeta^2 - (1 + \Phi_o^2)\zeta + \Phi_o^2(1 + \xi)] \quad (4.24)$$

Dla wartości ekstremalnych  $\zeta$  spełniony jest warunek:

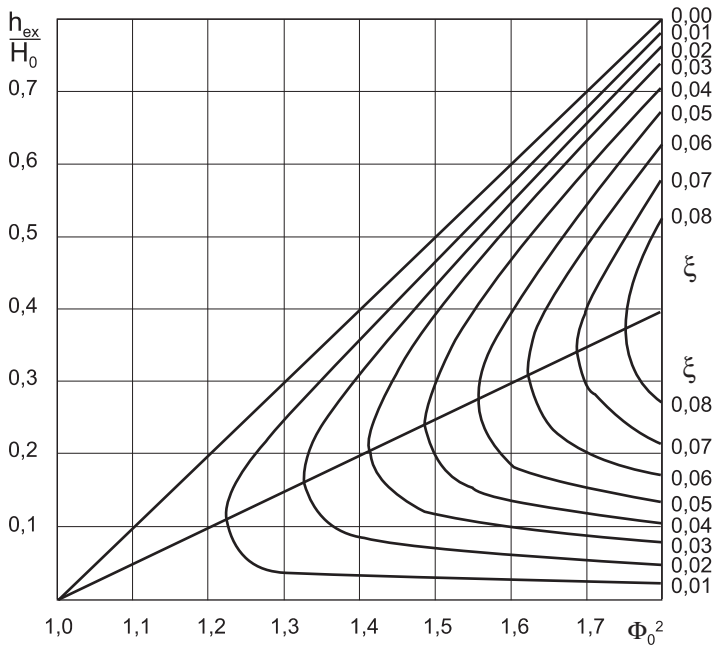
$$\frac{d\zeta}{d\kappa} = 0$$

Wówczas mamy równanie drugiego stopnia zmiennej  $\zeta$ :

$$\zeta_{ex}^2 - (1 + \Phi_o^2)\zeta_{ex} + \Phi_o^2(1 + \xi) = 0 \quad (4.25)$$

z parametryczną wartością współczynnika  $\xi$ .

Dla stałej wartości  $\xi \geq 0$  względna głębokość w miejscu powstania oscylacji jest funkcją tylko liczby przepływu falowego  $\Phi_o$ . Jej obraz graficzny stanowi parabola drugiego stopnia, którą przedstawiono jako funkcję  $h_{ex}/H_o = f(\Phi_o^2)$  (rys. 4.2).



Rys. 4.2. Ekstremalne wartości wysokości fali z oscylacjami w funkcji liczby przepływu falowego  $h_{ex}/H_o = f(\Phi_o^2)$  przy stałej wartości współczynnika strat  $\xi = \text{const}$

Górna część rysunku przedstawia wykres maksymalnej zmienności (szczytów), a dolna – minimalnej wysokości (dolin) oscylacji falowej w funkcji  $\Phi_o$  dla wybranych wartości  $\xi$ .

Z rozwiązania równania (4.25) wynika, że wartości ekstremalne są opisane wzorem:

$$\zeta_{ex} = 0,5[(\Phi_o^2 + 1) \pm \sqrt{\Delta}] \quad (4.26)$$

gdzie:

$$\Delta = (\Phi_o^2 + 1)^2 - 4\Phi_o^2(1 + \xi) \quad (4.27)$$

Jeśli straty hydrauliczne mogą zostać pominięte ( $\zeta = 0$ ), co może dotyczyć tylko pierwszej oscylacji, wówczas mamy:

$$\Delta = (\Phi_o^2 - 1)^2 \quad (4.28)$$

stąd:

$$\zeta_{ex} = \zeta_{\max} = \Phi_o^2 \quad (4.29)$$

Oznacza to, że maksymalna wysokość oscylacji będzie równa:

$$h_{\max} = (\Phi_o^2 - 1)H_o \quad (4.30)$$

Jej wartość rośnie liniowo wraz ze wzrostem  $\Phi_o$ , ale tylko do pewnej granicy. Przy  $\Phi_o \approx 1,342$  czoło oscylacji się załamuje (dowód – patrz tabl. 4.2 dla  $z_o = 0$ ). Wraz z dalszym wzrostem  $\Phi_o$  fala przechodzi w ruchomy odskok hydrauliczny, którego ruch podlega oddzielnym prawom.

Równanie (4.25) posiada dwa pierwiastki wówczas, gdy  $\Phi_o > 1$  i spełniony jest warunek:

$$\xi \leq \frac{(\Phi_o^2 - 1)^2}{4\Phi_o^2} \quad (4.31)$$

Gdyby na czole fali powstały takie straty hydrauliczne (fala o załamującym i przelewającym się czole), przy których współczynnik strat byłby równy:

$$\xi_{gr} = \frac{(\Phi_o^2 - 1)^2}{4\Phi_o^2} \quad (4.31a)$$

to wówczas równanie (4.26) określałoby wartość średnią fali. Równanie (4.27) sprowadzone do postaci:

$$\Phi_o^4 - 2(1 + 2\xi)\Phi^2 + 1 = 0 \quad (4.32)$$

ma akceptowalny pierwiastek, będący funkcją współczynnika strat:

$$\Phi^2 = 1 + 2\xi + \sqrt{(1 + 2\xi)^2 - 1} \quad (4.33)$$

Wartości tego pierwiastka wyznaczają równocześnie wartości wysokości średniej fali (tabl. 4.1):

$$h_{sr} = 0,5(\Phi_o^2 - 1)H_o \quad (4.34)$$

Jak wykazują badania eksperymentalne, w miarę oddalania się od czoła fali oscylacje sukcesywnie zmniejszają odległości pomiędzy szczytami. Świadczy to o tym, że wzrasta prędkość ich przemieszczania. Równolegle występuje wzrost głębokości, aż do wartości, przy której zanikają oscylacje. Jest to głębokość stabilizująca falę, dająca początek powstaniu przepływu nieustalonego wolnozmiennego, rozprzestrzeniającego się za falą. Można przyjąć potwierdzoną w badaniach doświadczalnych hipotezę, że

zanik oscylacji w tym przypadku jest spowodowany przez wzrost strat hydraulicznych do wartości, przy których współczynnik strat osiąga wartość graniczną (rys. 4.3), określoną przez wzór (4.31a). Głębokość tę opisuje formuła:

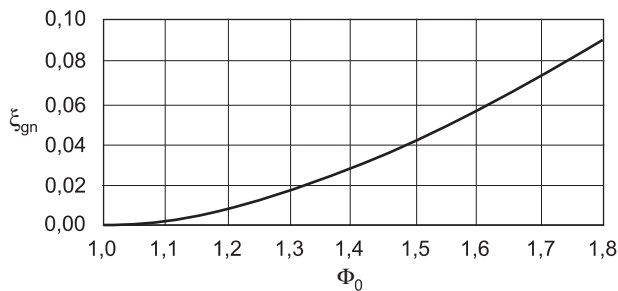
$$H_{zn} = H_0 + h_{sr} + \xi_{gr} \frac{w_{zn}^2}{2g} \quad (4.35)$$

gdzie:  $w_{zn}$  – prędkość względna rozchodzenia się zaburzeń przepływu nieustalonego przy głębokości  $H_{zn}$  (patrz (3.27)).

**Tablica 4.1**

Współrzędne wierzchołków krzywych  $\zeta = \text{const}$  we współrzędnych  $\Phi_0, h_s$

$\zeta$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
$\Phi_0^2$	1,221	1,326	1,412	1,488	1,558	1,624	1,687	1,748	1,806
$h_{sr}/H_0$	0,110	0,163	0,206	0,244	0,279	0,312	0,344	0,374	0,403



Rys. 4.3. Graniczne wartości strat hydraulicznych w funkcji liczby przepływu falowego  $\xi_{gr} = f(\Phi_0^2)$

### 4.3.3. Prędkość propagacji fali z wykształconymi oscylacjami

Przeprowadzone wyżej rozważania teoretyczne dają podstawę do stwierdzenia, że nieważkie straty hydrauliczne występujące wzdłuż czoła fali nie mają wpływu na średnią wysokość oscylacji, a stąd – na wielkość prędkości propagacji całej fali. Tę hipotezę potwierdzają w pełni wyniki badań doświadczalnych. Można więc przyjąć, że prędkość propagacji fali z wykształconymi oscylacjami może być opisana wzorem:

$$c = u_0 \pm \sqrt{gH_0 \left(1 + \frac{h_{\max}}{H_0}\right)} \quad (4.36)$$

albo:

$$c = u_0 \pm \sqrt{gH_0 \left(1 + \frac{2h_{sr}}{H_0}\right)} \quad (4.37)$$

Dają one wielkości większe niż klasyczny wzór (4.1) de Saint-Venanta. Różnica wynosi kilka procent i narasta wraz z wysokością oscylacji, tj.  $\Phi_o$ .

Porównanie formuły (4.36) lub (4.37) z formułą (4.9a), definiującą liczbę przepływu falowego, prowadzi do zależności:

$$\Phi_o = \sqrt{1 + \frac{h_{\max}}{H_o}} \quad (4.38)$$

lub:

$$\Phi_o = \sqrt{1 + 2 \frac{h_{sr}}{H_o}} \quad (4.39)$$

Liczba  $\Phi_o$  przyjmuje funkcję współczynnika prędkości propagacji fali. Jest funkcją wysokości maksymalnej dodatniej fali, niezależnie od kształtu jej czoła. Elementarne zaburzenia przepływu charakteryzują się tym, że  $\Phi_o = 1,0$ :

$$c = u_o \pm \Phi_o \sqrt{gH_o} \quad (4.40)$$

Modyfikując nieco formułę (4.39) i sprowadzając ją do postaci:

$$c = u_o \left( 1 \pm \Phi_o \sqrt{\frac{gH_o}{u_o^2}} \right) \quad (4.41)$$

prędkość propagacji fali można opisać za pomocą liczby Froude'a przepływu pierwotnego:

$$c = u_o \left( 1 \pm \frac{\Phi_o}{Fr_o} \right) \quad (4.42)$$

Wyrażenie  $\sqrt{gH_o}$  jest prędkością krytyczną  $u_{cr}$  odnoszącą się do przepływu pierwotnego. Wobec tego prędkość propagacji fali  $c$  może być opisana również formułą:

$$c = u_o \pm \Phi_o u_{cr} \quad (4.43)$$

Przy uwzględnieniu nierównomiernego rozkładu prędkości przepływu przed falą formuła opisująca propagację fali w kanale o dowolnym przekroju przyjąłaby następującą postać:

$$c = u_o \pm \Phi_o \sqrt{\frac{gH_o \text{ } sr}{\alpha}} \quad (4.44)$$

Współczynnik nierównomiernego rozkładu prędkości w przekroju poprzecznym, zwany współczynnikiem de Saint-Venanta lub Coriolisa, jest zależny od współczynnika

oporów tarcia, co wykazały liczne badania. Według oceny autora najbardziej właściwą formułą opisującą wielkość współczynnika  $\alpha$  jest formuła Grišanina:

$$\alpha = 1 + \frac{u_k}{\kappa^2 u_o} \quad (4.45)$$

Jest to funkcja stosunku prędkości dynamicznej do średniej prędkości przepływu. Po wprowadzeniu wzorów opisujących te prędkości formuła (4.45) przyjmuje postać:

$$\alpha = 1 + \frac{\sqrt{g}}{\kappa^2 C_h} \quad (4.46)$$

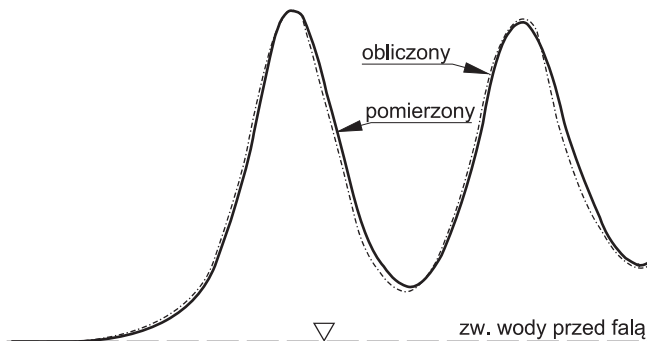
lub:

$$\alpha = 1 + 0,345 \frac{\sqrt{\lambda}}{\kappa^2} \quad (4.47)$$

Wartość stałej Kármána  $\kappa$  jest przyjmowana jako  $\kappa = 0,4$  dla wody czystej i  $\kappa = 0,5$  dla wody rzecznej zabrudzonej.

#### 4.3.4. Ocena uzyskanych wyników rozważań teoretycznych

Badania eksperymentalne przeprowadzone w oszklonym kanale laboratoryjnym o wymiarach  $B = 0,60$  m,  $L = 21,30$  m i  $H = 0,10-0,30$  m wykazały, że dla przepływów o  $\Phi_o \geq 1,07-1,08$  uzyskano bardzo dobrą zgodność wyników doświadczalnych z wynikami otrzymanymi przy użyciu prezentowanych wzorów teoretycznych (rys. 4.4). Dla  $\Phi_o = 1,0-1,05$  badania wykazały, że fale w tym obszarze były słabo rozwinięte, a ich wysokości uzyskane drogą eksperymentalną znacząco przekraczały wyniki uzyskane ze wzorów teoretycznych. W obszarze  $\Phi_o = 1,05-1,07$  doświadczone wysokości maksymalne fal sukcesywnie osiągały wartości porównywalne z teoretycznymi.



Rys. 4.4. Pomierzony i obliczony profil czołowych oscylacji w kanale doświadczalnym przy  $\Phi_o^2 = 1,60$

Pozytywna ocena przedstawionej metody badawczej powstawania i rozprzestrzeniania się fal dodatnich z oscylacjami daje podstawę do wyprowadzenia wzorów



pozwalających na wyznaczanie maksymalnej i średniej wysokości fali oraz prędkości propagacji w kanałach o przekroju trapezowym i parabolicznym z pominięciem strat hydraulicznych.

#### 4.4. Charakterystyczne wielkości czoła dodatniej fali translacyjnej z oscylacjami w kanale o przekroju trapezowym

##### 4.4.1. Równanie profilu czoła fali

Aby opisać równaniem profil podłużny czoła oscylacji falowej w kanale o przekroju trapezowym z pominięciem strat hydraulicznych, stosuje się zasadę zachowania ilości ruchu na długości kanału. Ilość ruchu w dowolnym przekroju kanału odniesiona do jednostkowej masy płynnej wody jest równa (patrz (2.68)):

$$M_x = \iint_A \left\{ H - z + (H^2 - z^2) \frac{\Omega^2}{2gA^4} \left[ A \frac{d^2 A}{dx^2} - \left( \frac{dA}{dx} \right)^2 \right] + \frac{\Omega^2}{gA^2} \right\} dA \quad (4.48)$$

W kanale o przekroju trapezowym powierzchnia przekroju poprzecznego jest równa:

$$A = H(B_o + mH) \quad (4.49)$$

Stąd pochodne powierzchni względem osi  $x$  wynoszą:

$$\frac{dA}{dx} = (B_o + 2mH) \frac{dH}{dx} \quad (4.50)$$

$$\frac{d^2 A}{dx^2} = (B_o + 2mH) \frac{d^2 H}{dx^2} + 2m \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 \quad (4.51)$$

Podstawiając je do równania (4.37) i całkując równanie (4.40) w granicach:

$$0 < z \leq H; \quad -\left( \frac{B_o}{2} + mz \right) \leq y_1 \leq \left( \frac{B_o}{2} + mz \right)$$

otrzymuje się równanie określające całkowitą ilość ruchu w dowolnym miejscu kanału o przekroju trapezowym, gdzie zmienną zależną od odciętej  $x$  jest głębokość  $H$ .

$$\begin{aligned} M_x = & \frac{\Omega^2(4B_o + 3mH)}{12g(B_o + mH)^3} (B_o + 2mH) \frac{d^2 H}{dx^2} + \\ & - \frac{\Omega^2(4B_o + 3mH)}{12g(B_o + mH)^4} (B_o^2 + 2B_o mH + 2m^2 H^2) \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 + \\ & + \frac{H^2}{6} (3B_o + 2mH) + \frac{\Omega^2}{gH(B_o + mH)} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Stosując zasadę zachowania ilości ruchu, porównuje się ilość ruchu w dowolnym przekroju poprzecznym powierzchni falowej  $M_x$  z ilością ruchu w przekroju bezpośrednio przed falą  $M_o$ . Dla:

$$H = H_o; \quad \frac{dH}{dx} = 0; \quad \frac{d^2H}{dx^2} = 0 \quad (4.53)$$

$$M_o = \frac{H_o^2}{6} (3B_o + 2mH_o) + \frac{\Omega^2}{gH_o(B_o + mH)}$$

otrzymuje się równanie:

$$\frac{\Omega^2(4B_o + 3mH)}{12g(B_o + mH)^3} (B_o + 2mH) \frac{d^2H}{dx^2} + \frac{\Omega^2(4B_o + 3mH)}{12g(B_o mH)^4} (B_o^2 + 2B_o mH + 2m^2 H^2) \left(\frac{dH}{dx}\right)^2 + \frac{H^2}{6} (3B_o + 2mH) + \frac{\Omega^2}{gH(B_o + mH)} - \frac{H_o^2}{6} (3B_o + 2mH_o) - \frac{\Omega^2}{gH_o(B_o + mH_o)} = 0 \quad (4.54)$$

Mnożąc powyższe równanie przez wyrażenie:

$$\frac{H^2 (B_o + 2mH_o)^2}{B_o^3 (B_o + mH_o)^3}$$

oraz podstawiając kolejno:

$$\Phi_o^2 = \frac{\Omega^2(B_o + 2mH_o)}{gH_o^3(B_o + mH)^3} \quad (4.55)$$

$$z_o = \frac{mH_o}{B_o}; \quad z = \frac{mH}{B_o}; \quad \frac{dH}{dx} = \frac{B_o}{m} \frac{dz}{dx}; \quad \frac{d^2H}{dx^2} = \frac{B_o}{m} \frac{d^2z}{dx^2} \quad (4.56 \text{ a, b, c, d})$$

a następnie mnożąc przez  $12/\Phi_o^2$ , otrzymuje się równanie opisujące zwierciadło wody sfalowanej w wielkościach bezwymiarowych:

$$2z \frac{d^2z}{dx^2} \left(\frac{B_o}{m}\right)^2 \cdot \frac{(1 + 2z_o) \left(\frac{4}{3} + z\right) \left(\frac{1}{2} + z\right)}{(1 + z)^3} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \left(\frac{B_o}{m}\right)^2 \frac{(1 + 2z_o) \left(\frac{4}{3} + z\right) (1 + 2z + 2z^2)}{(1 + z)^4} + \frac{4}{3} \frac{z^3 (1 + 2z_o)^2 \left(\frac{3}{2} + z\right)}{\Phi_o^2 z_o^3 (1 + z_o)^3} + \frac{4(1 + 2z_o)z}{z_o(1 + z_o)} \left[ 1 + \frac{\left(1 + \frac{2}{3}z_o\right) (1 + 2z_o)}{2\Phi_o^2(1 + z_o)^2} \right] + 4 \frac{1 + 2z_o}{1 + z} = 0 \quad (4.57)$$

Jest to równanie różniczkowe nieliniowe drugiego stopnia, które może być sprowadzone do prostszej postaci, jeżeli dokonamy podstawienia:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = U(z) \quad (4.58)$$

$$2 \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dU}{dz} \quad (4.59)$$

$$z \frac{dU}{dz} - UN_1(z) + N_2(z) - N_3(z) + N_4(z) = 0 \quad (4.60)$$

gdzie funkcje  $N$  są dane przez wyrażenia:

$$N(z) = \frac{1 + 2z + 2z^2}{(1+z)\left(\frac{1}{2} + z\right)} \quad (4.61)$$

$$N_1(z) = \left(\frac{m}{B_o}\right)^2 \frac{z^3(1+2z_o)\left(\frac{3}{2} + z\right)(1+z)}{\Phi_o^2 z_o^3 (1+z_o)^3 \left(\frac{4}{3} + z\right)\left(\frac{1}{2} + z\right)} \quad (4.62)$$

$$N_2(z) = 4 \left(\frac{m}{B_o}\right)^2 \frac{1}{z_o(1+z_o)} \left[ 1 + \frac{\left(1 + \frac{2}{3}z_o\right)(1+2z_o)}{2\Phi_o^2(1+z_o)^2} \right] \frac{z(1+z_o)^3}{\left(\frac{4}{3} + z\right)\left(\frac{1}{2} + z\right)} \quad (4.63)$$

$$N_3(z) = 4 \left(\frac{m}{B_o}\right)^2 \frac{(1+z)^2}{\left(\frac{4}{3} + z\right)\left(\frac{1}{2} + z\right)} \quad (4.64)$$

Równanie (4.60) może być rozwiązane metodą wariacji stałej całkowania w funkcji  $U$ :

$$U = C_i \int e^{N(z)\frac{dz}{z}} \quad (4.65)$$

gdzie:  $e$  – podstawa logarytmów naturalnych.

$$C_i(z) = \int [N_1(z) + N_2(z) - N_3(z)] e^{-\int N_2(z) dz/z} dz + C \quad (4.66)$$

Ponieważ:

$$e^{\int N(z) dz/z} = \frac{\left(\frac{1}{2} + z\right)^2}{z^2(1+z)^2} \quad (4.67)$$

to:

$$C_i(z) = \int [-N_1(z) + N_2(z) - N_3(z)] \frac{\left(\frac{1}{2} + z\right)^2}{z^2(1+z)^2} dz + C \quad (4.68)$$

Po wyznaczeniu całek funkcji  $N_1(z)$ ,  $N_2(z)$  i  $N_3(z)$  oraz stałej całkowania dla warunków  $z = z_o$ ,  $dz/dx = 0$  równanie różniczkowe profilu fali w kanale o przekroju trapezowym w przyjętych wielkościach zredukowanych może zostać zapisane następująco:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \left(\frac{B_o}{m}\right)^2 = \\ & = \frac{(1+z)^2}{\left(\frac{1}{2}+z\right)^2} \left\{ -\frac{4}{3} \frac{1+2z_o}{\Phi^2(1+z_o)^3} \left[ \frac{1}{3} z_o^2 \left( \frac{z^5}{z_o^5} - \frac{z^2}{z_o^2} \right) + \frac{5}{6} z_o \left( \frac{z^4}{z_o^4} - \frac{z^2}{z_o^2} \right) + \frac{19}{36} \left( \frac{z^3}{z_o^3} - \frac{z^2}{z_o^3} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{5}{108} \frac{z^2}{z_o^2} \ln \frac{z + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{4}{1+z_o} \left[ 1 + \frac{\left(1 + \frac{2}{3} z_o\right)(1+2z)}{2\Phi^2(1+z_o)^2} \right] \left[ \frac{27}{32} z_o \frac{z^2}{z_o^2} \ln \frac{z}{z_o} + \frac{5}{32} z_o \frac{z^2}{z_o^2} \ln \frac{z + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{8} \left( \frac{z}{z_o} - \frac{z^2}{z_o^2} \right) \right] + 4 \left[ \frac{15}{32} z_o \left( \frac{z^4}{z_o^4} - \frac{z^2}{z_o^2} \right) + \frac{3}{16} \left( 1 - \frac{z^2}{z_o^2} \right) + \frac{45}{128} z_o^2 \frac{z^2}{z_o^2} \ln \frac{z}{z_o} \frac{z_o + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Aby zapisać je w bardziej rzeczywistej postaci, wprowadza się pojęcie względnej głębokości wody i względnej długości kanału zajętej przez oscylację:

$$\zeta = \frac{H}{H_o}$$

$$\kappa = \frac{x}{H_o}$$

stąd:

$$\frac{d\zeta}{d\kappa} = \frac{dH}{dx} \quad (4.70 \text{ a,b,c})$$

Jeśli uwzględni się uprzednio przyjęte wielkości zredukowane (4.56a, b):

$$\frac{m}{B_o} = \frac{z_o}{H_o} = \frac{z}{H}$$

oraz:

$$\frac{z}{z_o} = \frac{H}{H_o}$$

równanie profilu czoła dodatniej fali translacyjnej w kanale przekroju trapezowego przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} = & \\ = & \frac{z_o \zeta + 1}{z_o \zeta + 0,5} \left\{ \frac{1 + 2z_o}{9\Phi_o^2(1 + z_o)^3} \times \right. \\ & \times \left[ 4z_o^2(\zeta^2 - \zeta^5) + 10z_o(\zeta^2 - \zeta^4) + \frac{19}{3}(\zeta^2 - \zeta^3) - \frac{5}{9z_o} \zeta^2 \ln \frac{z_o \zeta + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} \right] + \\ & + \frac{1}{8(z_o + 1)} \left[ 1 + \frac{\left(1 + \frac{2}{3}z_o\right)(1 + 2z_o)}{2\Phi_o^2(1 + z_o)^2} \right] \left[ 27z_o \zeta^2 \ln \zeta + 5z_o \zeta^2 \ln \frac{z_o \zeta + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} + -12(\zeta - \zeta^2) \right] + \\ & \left. + \frac{15}{8} \left[ z_o(\zeta - \zeta^2) + \frac{2}{5}(1 - \zeta^2) + \frac{3}{4}z_o^2 \zeta^2 \ln \zeta \frac{z_o + \frac{4}{3}}{z_o \zeta + \frac{4}{3}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (4.71)$$

To równanie różniczkowe opisuje profil pojedynczej oscylacji falowej bez strat hydraulicznych. Jego kształt i wielkość są funkcją liczby przepływu falowego  $\Phi_o$  i bezwymiarowego współczynnika kształtu kanału, danego w postaci  $z_o = mH_o/B_o$ . Równanie może służyć do wyznaczania wielkości i kształtu tylko pierwszej oscylacji, ponieważ w rzeczywistości dalsze oscylacje szybko zanikają wskutek intensywnych strat hydraulicznych oraz nabiegania fali na skarpy kanału.

Podstawiając w równaniu (4.71)  $z_o = 0$ , przy którym zachodzi równość:

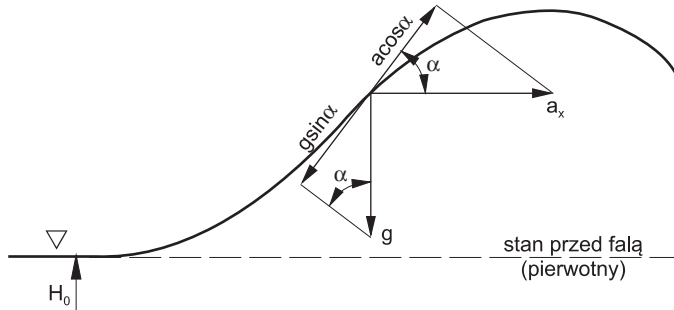
$$\frac{5}{9} \zeta^2 \ln \frac{z_o \zeta + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} = \frac{5}{12} (\zeta^3 - \zeta^2) \quad (4.72)$$

można je sprowadzić do równania różniczkowego profilu fali w kanale przekroju prostokątnego bez strat hydraulicznych ( $\zeta = 0$ ):

$$\frac{d\zeta}{d\kappa} = \frac{dH}{dx} = \sqrt{3} \cdot \left[ -\frac{1}{\Phi_o^2} \zeta^3 + \left(1 + \frac{2}{\Phi_o^2}\right) \zeta^2 - \left(2 + \frac{1}{\Phi_o^2}\right) \zeta + 1 \right]^{0,5} \quad (4.73)$$

#### 4.4.2. Stabilność oscylacji

Czoło pierwszej oscylacji falowej po osiągnięciu pewnej granicznej wysokości załamuje się niezależnie od kształtu przekroju kanału. Potwierdzają to liczne obserwacje w naturze i badania laboratoryjne. Fala dodatnia rozprzestrzenia się wówczas w postaci wzburzonego wału z przelewającą się wodą. Załamanie następuje w momencie, gdy czoło fali osiągnie maksymalne pochylenie. Następuje to na głębokości  $H_i$ , przy której zwierciadło wody tworzące profil czoła fali uzyskuje przegięcie (rys. 4.5).



Rys. 4.5. Stan równowagi sił od ciężaru i ciśnienia hydrodynamicznego na przełęczu oscylacji falowej

Wyznaczenie warunków granicznych stabilności sprowadza się do określenia maksymalnej wartości liczby przepływu falowego  $\Phi_o$ , a zatem i maksymalnej wysokości oscylacji, przy których rozpoczyna się załamywanie zwierciadła wody.

Stan granicznej równowagi dynamicznej zachodzi wówczas, gdy siła unoszenia wywołana przez przyspieszenie jeszcze równoważy ciężar wody  $G$  na powierzchni oscylacji w miejscu największego pochylenia jej zwierciadła. W odniesieniu do jednostkowego elementu płynnego znajdującego się na powierzchni wody to twierdzenie zapisuje się równaniem:

$$a_x \cos \alpha = g \sin \alpha \quad (4.74)$$

gdzie:  $a_x$  – składowa horyzontalna przyspieszenia elementu powierzchniowego wody.

Ponieważ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial H}{\partial x}$$

to:

$$a_x = g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial p}{\rho \partial x} \quad (4.75)$$

Jeżeli przyspieszenie  $a_x$  zostanie opisane równaniem Eulera, to równanie stanu granicznego przyjmie następującą postać:

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 \quad (4.76)$$

W przekroju kanału, w którym występuje przegięcie, poszczególne składowe prędkości i ich pochodne są równe:

$$w_x = \frac{\Omega}{H_i(B_o + mH_i)} \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = -\frac{\Omega(B_o + 2mH_i)}{H_i^2(B_o + mH_i)^2} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.78)$$

$$w_z = \frac{\Omega}{H_i(B_o mH_i)} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} = -\frac{\Omega(B_o + 2mH_i)}{H_i^2(B_o + mH_i)^2} \quad (4.80)$$

Zastępując w równaniu (4.75) wyrażenie  $\frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial z}$  formułą Eulera i uwzględniając składowe prędkości i ich pochodne, opisane przez wzory (4.77)–(4.80), otrzymuje się następujące równanie granicznej równowagi sił działających na czoło uformowanej już oscylacji:

$$1 - \frac{2}{g} \frac{\Omega^2(B + 2H_i)}{H_i^2(B_o mH_i)^3} = 0 \quad (4.81)$$

Po podzieleniu przez  $B_o$  i wprowadzeniu wyrażenia (4.55), opisującego przepływ falowy  $\Phi_o$ , oraz po podstawieniu:

$$\frac{mH_o}{B_o} = z_o$$

$$\frac{H_i}{H_o} = \zeta_i$$

otrzymuje się w wielkościach bezwymiarowych równanie stanu granicznego sił zapewniających jeszcze stabilność oscylacji:

$$\Phi_o^2 = \frac{1}{2} \frac{1 + 2z_o}{(1 + z_o)^3} \frac{\zeta_i^3 (1 + z_o \zeta_i)^3}{1 + 2z_o \zeta_i} \quad (4.82)$$

Miejsce przegięcia krzywej profilu oscylacji opisane za pomocą głębokości  $H_i$  (względnie  $\zeta_i$ ) zostanie określone, jeżeli znajdziemy drugą pochodną głębokości względem zmiennej  $x$ . W tym celu równanie profilu czoła fali zostaje zapisane w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dx} = & \\ = \frac{z_0\zeta + 1}{z_0\zeta + 0,5} & \left\{ -\frac{1 - 2z_0}{9\Phi_0^2(1 + z_0)} M_1(\zeta) + \frac{M_2(\zeta)}{8(1 + z_0)} \left[ 1 + \frac{\left(1 + \frac{2}{3}z_0\right)(1 + 2z_0)}{2\Phi_0^2(1 + z_0)^2} \right] - \frac{15}{8} M_3(\zeta) \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.83)$$

gdzie:

$$M_1(\zeta) = 4z_0(\zeta^5 - \zeta^2) + 10z_0(\zeta^4 - \zeta^2) + \frac{19}{3}(\zeta^3 - \zeta^2) + \frac{5\zeta^2}{9z_0} \ln \frac{z_0\zeta + \frac{4}{3}}{z_0 + \frac{4}{3}} \quad (4.84)$$

$$M_2(\zeta) = 27z_0\zeta^2 \ln \zeta + 5z_0\zeta^2 \ln \frac{z_0\zeta + \frac{4}{3}}{z_0 + \frac{4}{3}} + 12(\zeta^2 - \zeta) \quad (4.85)$$

$$M_3(\zeta) = z_0(\zeta^2 - \zeta) + \frac{2}{5}(\zeta^2 - 1) + \frac{3}{4}z_0^2\zeta^2 \ln \frac{1}{\zeta} \frac{z_0\zeta + \frac{4}{3}}{z_0 + \frac{4}{3}} \quad (4.86)$$

Równanie różniczkowe drugiego stopnia ma wobec tego postać:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = & \\ = \frac{z_0\zeta + 1}{(z_0 + 0,5)^2} & \left\{ \frac{z_0(1 + 2z_0)M_1(\zeta)}{9\Phi_0^2(1 + z_0)^3(z_0\zeta + 0,5)} + \right. \\ - \frac{z_0M_2(\zeta)}{8(1 + z_0)(z_0 + 0,5)} & \left[ 1 + \frac{\left(1 + \frac{2}{3}z_0\right)(1 + 2z_0)}{2\Phi_0^2(1 + z_0)^2} \right] + \frac{15z_0M_3(\zeta)}{8(z_0\zeta + 0,5)} + \\ - \frac{(1 + 2z_0)(z_0\zeta + 1)}{9\Phi_0^2(1 + \zeta)^3} & M_1'(\zeta) + \frac{(z_0\zeta + 1)M_2'(\zeta)}{8(z_0 + 1)} \left[ 1 + \frac{\left(1 + \frac{2}{3}z_0\right)(1 + 2z_0)}{2\Phi_0^2(1 + \zeta)^3} \right] + \\ - \frac{15}{8} & (z_0\zeta + 1)M_3'(\zeta) \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Pochodne funkcji  $M_{1,2,3}(\zeta)$  są opisane przez wyrażenia:



$$M_1'(\zeta) = 4z_o^2(5\zeta^4 - 2\zeta) + 10z_o(4\zeta^3 - 2\zeta) + \frac{19}{3}(3\zeta^2 - 2\zeta) + \frac{10}{9} \frac{\zeta}{z_o} \ln \frac{z_o\zeta + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} \quad (4.88)$$

$$M_2'(\zeta) = 54z_o\zeta \ln \zeta + 27z_o\zeta + 10z_o\zeta \ln \frac{z_o\zeta + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} + 5 \frac{z_o^2\zeta^2}{z_o\zeta + \frac{4}{3}} + 12(2\zeta - 1) \quad (4.89)$$

$$M_3'(\zeta) = \frac{4}{5}\zeta + \frac{3}{2}z_o^2\zeta \ln \frac{1}{\zeta} \frac{z_o\zeta + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} - \frac{z_o^2\zeta}{z_o\zeta + \frac{4}{3}} + z_o(2\zeta - 1) \quad (4.90)$$

W punkcie przegięcia profilu czołowej oscylacji zachodzi następująca zależność:

$$\frac{d^2H}{dx^2} = \frac{1}{H_o} \frac{d^2\zeta_i}{dx^2} = 0 \quad (4.91)$$

Wobec tego z formuły (4.87) otrzymuje się równanie:

$$\frac{1 + 2z_o}{9\Phi_o^2(1 + z_o)} [K_1(\zeta_i) - K_4(\zeta_i)] + \frac{K_2(\zeta_i) - K_5(\zeta_i)}{8(1 + z_o)} \left[ 1 + \frac{\left(1 + \frac{2}{3}z_o\right)(1 + 2z_o)}{2\Phi_o^2(1 + z_o)^2} \right] + \frac{15}{8} [K_3(\zeta_i) - K_6(\zeta_i)] = 0 \quad (4.92)$$

z którego wyprowadza się zależność opisującą związek pomiędzy głębokością przegięcia  $\zeta_i$  profilu czoła fali a liczbą przepływu falowego:

$$\Phi_o^2 = \frac{1 + 2z_o \frac{8}{9} [K_1(\zeta_i) - K_4(\zeta_i)] + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}z_o [K_5(\zeta_i) - K_2(\zeta_i)]}{(1 + z_o)^2 K_2(\zeta_i) - K_4(\zeta_i) + 15(1 + z_o) [K_6(\zeta_i) - K_3(\zeta_i)]} \quad (4.93)$$

gdzie:

$$K_1(\zeta_i) = \frac{z_o}{z_o\zeta_i + 0,5} \left[ 4z_o^2(\zeta_i^5 - \zeta_i^2) + 10z_o(\zeta_i^4 - \zeta_i^2) + \frac{19}{3}(\zeta_i^3 + -\zeta_i^2) + \frac{5}{9} \frac{\zeta_i^2}{z_o} \ln \frac{z_o\zeta_i + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} \right] \quad (4.94)$$

$$K_2(\zeta_i) = \frac{z_o}{z_o\zeta_i + 0,5} \left[ 27z_o\zeta_i^2 \ln \zeta_i + 5z_o\zeta_i^2 \ln \frac{z_o\zeta_i + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} + 12(\zeta_i^2 - \zeta_i) \right] \quad (4.95)$$

$$K_3(\zeta_i) = \frac{z_o}{z_o\zeta_i + 0,5} \left[ z_o(\zeta_i^2 - \zeta_i) + \frac{2}{5}(\zeta_i^2 - 1) + \frac{3}{4}z_o^2\zeta_i^2 \ln \frac{1}{\zeta_i} \frac{z_o\zeta_i + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} \right] \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} K_4(\zeta_i) = & \\ = (z_o\zeta_i + 1) & \left[ 4z_o^2(5\zeta_i^4 - 2\zeta_i) + 10z_o(4\zeta_i^3 - 2\zeta_i) + \frac{19}{3}(3\zeta_i^2 - 2\zeta_i) + \right. \\ & \left. + \frac{10}{9} \frac{\zeta_i}{z_o} \ln \frac{z_o\zeta_i + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} + \frac{5}{9} \frac{\zeta_i^2}{z_o\zeta_i + \frac{4}{3}} \right] \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$K_5(\zeta_i) = (z_o\zeta_i + 1) \left[ 54z_o\zeta_i \ln \zeta_i + 27z_o\zeta_i + 10z_o\zeta_i \ln \frac{z_o\zeta_i + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} + 5 \frac{z_o^2\zeta_i^2}{z_o\zeta_i + \frac{4}{3}} + 12(\zeta_i - 1) \right] \quad (4.98)$$

$$K_6(\zeta_i) = (z_o\zeta_i + 1) \left[ z_o(2\zeta_i - 1) + \frac{4}{5}\zeta_i + \frac{3}{2}z_o^2\zeta_i \ln \frac{1}{\zeta_i} \frac{z_o\zeta_i + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} + - \frac{z_o^2\zeta_i}{z_o\zeta_i + \frac{4}{3}} \right] \quad (4.99)$$

Mamy zatem układ dwóch równań z dwiema poszukiwanymi wielkościami  $\Phi_o$  i  $\zeta_i$ . W pierwszej kolejności wyznacza się  $\zeta_i$  jako funkcję współczynnika kształtu  $z_o$ , a w drugiej  $\Phi_o$  jako funkcję dwóch pierwszych poszukiwanych wartości.

Z porównania równań (4.82) i (4.93) otrzymuje się równanie zmiennej  $\zeta_i(z_o)$ :

$$\begin{aligned} \frac{8}{9} [K_1(\zeta_i) - K_4(\zeta_i)] + \left( \frac{1}{2} + \frac{z_o}{3} \right) [K_5(\zeta_i) - K_2(\zeta_i)] + \frac{1}{4} [R_1(\zeta_i) + -R_2(\zeta_i)] + \\ + \frac{15}{4} [R_3(\zeta_i) - R_4(\zeta_i)] = 0 \end{aligned} \quad (4.100)$$

gdzie:  $K_1(\zeta_i)$ ,  $K_2(\zeta_i)$ ,  $K_4(\zeta_i)$  i  $K_5(\zeta_i)$  to funkcje opisane zależnościami (4.94)–(4.98),  
a  $R_1(\zeta_i)$ ,  $R_2(\zeta_i)$ ,  $R_3(\zeta_i)$  i  $R_4(\zeta_i)$  – następującymi formułami:

$$\begin{aligned} R_1(\zeta_i) = & \\ = \frac{\zeta_i^3(z_o\zeta_i + 1)^4}{(1 + z_o)(z_o\zeta_i + 0,5)} & \left[ 54z_o\zeta_i \ln \zeta_i + 27z_o\zeta_i + 10z_o\zeta_i \ln \frac{z_o\zeta_i + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} + 5 \frac{z_o^2 + \zeta_i^2}{z_o\zeta_i + \frac{4}{3}} + \right. \\ & \left. + 12(2\zeta_i - 1) \right] \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$R_2(\zeta_i) = \frac{z_o \zeta_i^3 (z_o \zeta_i + 1)^3}{(1 + z_o)(z_o \zeta_i + 0,5)^2} \left[ 27z_o \zeta_i^2 \ln \zeta_i + 5z_o \zeta_i^2 \ln \frac{z_o \zeta_i + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} + 12(\zeta_i^2 - \zeta_i) \right] \quad (4.102)$$

$$R_3(\zeta_i) = \frac{z_o \zeta_i^3 (z_o \zeta_i + 1)^3}{(z_o \zeta_i + 0,5)^2} \left[ z_o (\zeta_i^2 - \zeta_i) + \frac{2}{5} (\zeta_i^2 - 1) + \frac{3}{4} z_o^2 \zeta_i^2 \ln \frac{1}{\zeta_i} \frac{z_o \zeta_i + \frac{3}{4}}{z_o + \frac{4}{3}} \right] \quad (4.103)$$

$$R_4(\zeta_i) = \frac{\zeta_i^3 (z_o \zeta_i + 1)^2}{z_o \zeta_i + 0,5} \left[ z_o (2\zeta_i - 1) + \frac{4}{5} \zeta_i + \frac{3}{2} z_o^2 \zeta_i \ln \frac{1}{\zeta_i} \frac{z_o \zeta_i + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} - \frac{z_o^2 \zeta_i}{z_o \zeta_i + \frac{4}{3}} \right] \quad (4.104)$$

Dla zadanego współczynnika  $z_o = mH_o/B_o$  równanie (4.100) posiada tylko jeden pierwiastek, którego wartość jest większa od jedności, a mniejsza od wartości granicznej podanej w tabelicy 4.2, przy której zachodzi załamanie oscylacji. Wyznaczone z równania (4.100)  $\zeta_i = f(z_o)$  pozwala następnie określić graniczne wartości liczby  $\Phi_o^2$ , a stąd graniczne wartości natężenia przepływu niesionego przez falę.

**Tabela 4.2**

Graniczne wartości parametrów przepływu falowego zapewniające stabilność oscylacji dla wybranych współczynników kształtu przekroju kanału  $z_o$

$z_o = \frac{mH_o}{B_o}$	0	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00	5,00	10,00
$\zeta_i = \frac{H_i}{H_o}$	1,533	1,482	1,443	1,400	1,376	1,362	1,349	1,330	1,317
$\Phi_o^2$	1,801	1,847	1,863	1,871	1,872	1,874	1,074	1,874	1,875
$\zeta_{\max} = \frac{H_{\max}}{H_o}$	1,800	1,720	1,658	1,590	1,555	1,535	1,506	1,483	1,463

#### 4.4.3. Maksymalna i średnia wysokość pierwszej oscylacji

Jak wynika z licznych pomiarów i obserwacji, w kanałach o przekroju trapezowym powstałe oscylacje stosunkowo szybko zmniejszają swoją wysokość wskutek strat hydraulicznych i rozplywu na skarpy. Jedynie pierwsza oscylacja zachowuje znaczną wysokość, tylko minimalnie różniącą się od wysokości uzyskanej z obliczeń teoretycznych przy zastosowaniu powyższego modelu. Obserwacja ta dotyczy oczywiście centralnej partii przekroju, gdzie oscylacja falowa osiągnie maksymalną wysokość, gdy spełniony zostanie następujący warunek:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d\zeta}{d\kappa} = 0 \quad (4.105)$$

Wówczas z formuły (4.71) otrzymamy  $\Phi_o$  jako funkcję  $z_o$  i maksymalnej wysokości oscylacji wyrażonych w wielkościach względnych:

$$\Phi_o^2 = \frac{1 + 2z_o \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3}z_o \right) M_2(\zeta_{\max}) - \frac{8}{9} M_1(\zeta_{\max})}{(1 + z_o)^2 \left[ 15(1 + z_o) M_3(\zeta_{\max}) - M_2(\zeta_{\max}) \right]} \quad (4.106)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} M_1(\zeta_{\max}) &= \\ &= 4z_o^2(\zeta_{\max}^5 - \zeta_{\max}^2) + 10z_o(\zeta_{\max}^4 - \zeta_{\max}^2) + \frac{19}{3}(\zeta_{\max}^3 - \zeta_{\max}^2) + \\ &+ \frac{5}{9z_o} \zeta_{\max}^2 \ln \frac{z_o \zeta_{\max} + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} \end{aligned} \quad (4.107)$$

$$M_2(\zeta_{\max}) = 27z_o \zeta_{\max}^2 \ln \zeta_{\max}^2 (\zeta_{\max}^2 - \zeta_{\max}) + 5z_o \zeta_{\max}^2 \ln \frac{z_o \zeta_{\max} + \frac{4}{3}}{z_o + \frac{4}{3}} \quad (4.108)$$

$$M_3(\zeta_{\max}) = z_o(\zeta_{\max}^2 - \zeta_{\max}) + \frac{2}{5}(\zeta_{\max}^2 - 1) + \frac{3}{4} z_o^2 \zeta_{\max}^2 \ln \frac{z_o \zeta_{\max} + \frac{4}{3}}{\zeta_{\max} \left( z_o + \frac{4}{3} \right)} \quad (4.109)$$

Formuła (4.106) przedstawia zależność liczby  $\Phi_o$  od względnej wartości maksymalnej głębokości czoła oscylacji, podczas gdy w praktyce inżynierskiej poszukuje się wartości maksymalnej wysokości fali  $h_{\max} = H_o(\zeta_{\max} - 1)$  zależnie od wartości liczby  $\Phi_o^2$ . Utrudnia to prowadzenie obliczeń metodą analityczną. Prościej i skuteczniej będzie wyznaczyć wartość  $(\zeta_{\max} - 1)$  z podanego wykresu (rys. 4.7), stanowiącego graficzną ilustrację wymienionych równań, albo skorzystać z tablicy 4.3.

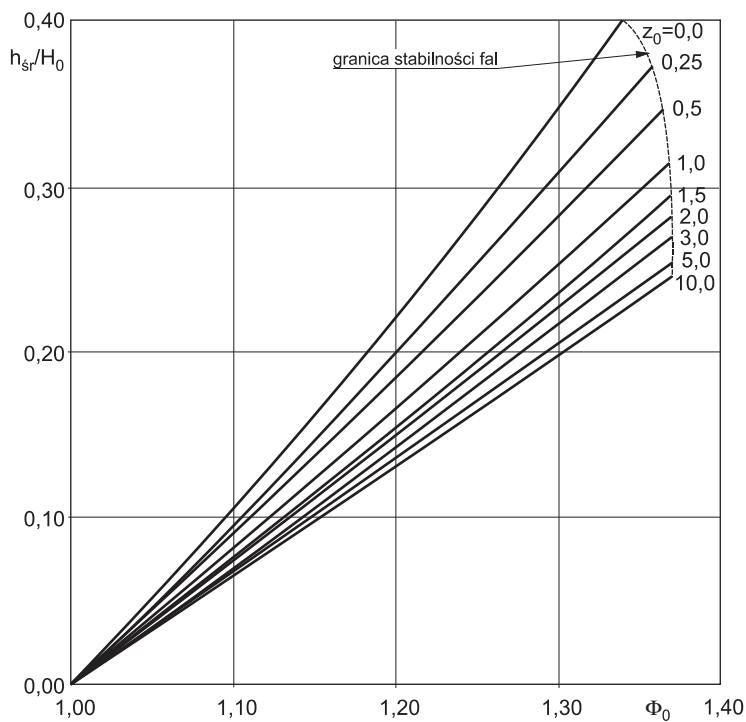
Średnią wysokość dodatniej fali translacyjnej, niosącej określoną zmianę natężenia przepływu, utożsamia się z wysokością czołowej oscylacji falowej, gdzie nie powstają jeszcze znaczące straty hydrauliczne. Na podstawie badań przeprowadzonych głównie w kanałach o przekroju prostokątnym można przyjąć, że od góry ogranicza ją położenie środka ciężkości powierzchni zajętej przez czołową oscylację. W kanale o przekroju trapezowym środek ten znajduje się na wysokości fali:

$$h_{sr} = \frac{h_{\max}}{6} \frac{3B_o + 6mH_o + 4mh_{\max}}{B_o + 2mH_o + mh_{\max}} \quad (4.110)$$

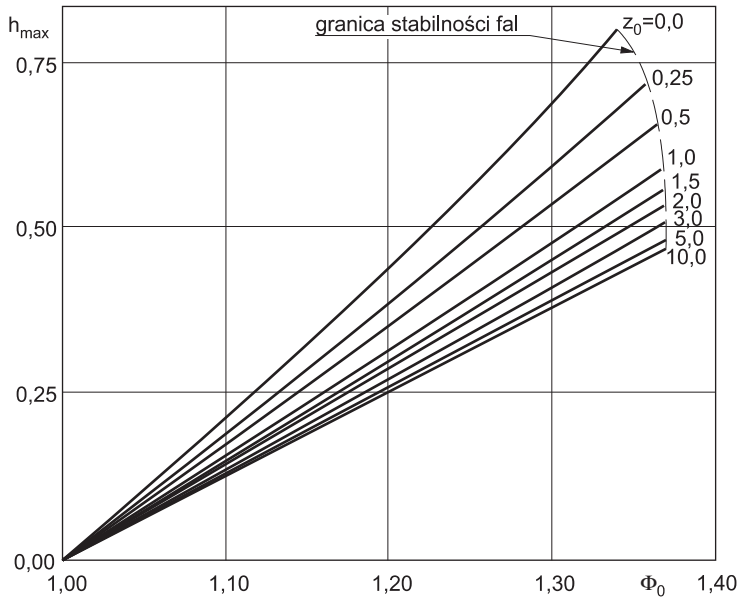
W zapisie bezwymiarowym formuła ta przyjmuje postać:

$$\zeta_{sr} - 1 = \frac{1}{6}(\zeta_{\max} - 1) \frac{3 + 6z_o + 4z_o(\zeta_{\max} - 1)}{1 + 2z_o + z_o(\zeta_{\max} - 1)} \quad (4.111)$$

Dla wybranych wartości  $z_o$  i  $\zeta_{\max} - 1 = h_{\max}/H_o$  tablica 4.3 podaje wartości  $\zeta_{sr} - 1 = h_{sr}/H_o$  i  $\Phi_o^2$ . Natomiast rysunki 4.6 i 4.7 prezentują wykresy i  $\zeta_{sr} - 1 = f(\Phi_o)$  i  $\zeta_{\max} - 1 = f(\Phi_o)$ . Zawarte tam informacje uwidaczniają, jak bardzo współczynnik kształtu wpływa na wysokość średnią (rys. 4.6) i maksymalną (rys. 4.7) fali, a także pośrednio na prędkość propagacji fali.



Rys. 4.6. Średnia wysokość fali w kanale przekroju trapezowego przy  $z_o = \text{const}$

Rys. 4.7. Maksymalna wysokość fali w kanale przekroju trapezowego przy  $z_0 = \text{const}$ 

Tablica 4.3

Wartości  $\zeta_{sr} - 1$  i  $\Phi_0^2$  dla wybranych  $\zeta_{\max} - 1$  i  $z_0$ 

$\zeta_{\max} - 1$	$\zeta_{sr} - 1$	$z_0$									
	$\Phi_0^2$	0,00	0,25	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00	4,00	5,00	10,00
0,05	$\zeta_{sr} - 1$	0,0250	0,0251	0,0251	0,0252	0,0252	0,0252	0,0252	0,0252	0,0252	0,0252
	$\Phi_0^2$	1,0500	1,0550	1,0590	1,0650	1,0690	1,0710	1,0750	1,0770	1,0790	1,0810
0,10	$\zeta_{sr} - 1$	0,0500	0,0503	0,0504	0,0505	0,0506	0,0506	0,0507	0,0507	0,0507	0,0508
	$\Phi_0^2$	1,1000	1,1110	1,1190	1,1300	1,1380	1,1450	1,1510	1,1550	1,1560	1,1660
0,15	$\zeta_{sr} - 1$	0,0750	0,0756	0,0759	0,0762	0,0763	0,0764	0,0765	0,0766	0,0766	0,0767
	$\Phi_0^2$	1,1500	1,1660	1,1790	1,1990	1,2120	1,2320	1,2390	1,2430	1,2440	1,2520
0,20	$\zeta_{sr} - 1$	0,1000	0,1011	0,1016	0,1021	0,1023	0,1025	0,1026	0,1027	0,1028	0,1029
	$\Phi_0^2$	1,2000	1,2230	1,2410	1,2670	1,2860	1,2970	1,3130	1,3220	1,3290	1,3430
0,25	$\zeta_{sr} - 1$	0,1250	0,1267	0,1275	0,1282	0,1288	0,1289	0,1292	0,1293	0,1293	0,1294
	$\Phi_0^2$	1,2500	1,2790	1,3040	1,3410	1,3620	1,3780	1,3970	1,4110	1,4180	1,4380

0,30	$\zeta_{sr} - 1$	0,1500	0,1524	0,1535	0,1545	0,1551	0,1554	0,1556	0,1558	0,1560	0,1562
	$\Phi_o^2$	1,3000	1,3390	1,3690	1,4070	1,4400	1,4620	1,4860	1,5010	1,5100	1,5350
0,35	$\zeta_{sr} - 1$	0,1750	0,1782	0,1797	0,1810	0,1818	0,1822	0,1826	0,1828	0,1830	0,1833
	$\Phi_o^2$	1,3500	1,3970	1,4350	1,4880	1,5230	1,5450	1,5750	1,5950	1,6080	1,6360
0,40	$\zeta_{sr} - 1$	0,2000	0,2042	0,2061	0,2078	0,2087	0,2092	0,2098	0,2101	0,2103	0,2107
	$\Phi_o^2$	1,4000	1,4540	1,5000	1,5650	1,6050	1,6330	1,6690	1,6900	1,7060	1,7400
0,45	$\zeta_{sr} - 1$	0,2250	0,2302	0,2326	0,2348	0,2358	0,2364	0,2371	0,2375	0,2377	0,2382
	$\Phi_o^2$	1,4500	1,5150	1,5670	1,6430	1,6900	1,7240	1,7660	1,7900	1,8090	1,8500
0,50	$\zeta_{sr} - 1$	0,2500	0,2564	0,2593	0,2619	0,2632	0,2639	0,2647			
	$\Phi_o^2$	1,5000	1,5750	1,6380	1,7210	1,7770	1,8140	1,8630			
0,55	$\zeta_{sr} - 1$	0,2750	0,2826	0,2861	0,2892	0,2907					
	$\Phi_o^2$	1,5500	1,6360	1,7080	1,8040	1,8660					
0,60	$\zeta_{sr} - 1$	0,3000	0,3091	0,3130							
	$\Phi_o^2$	1,6000	1,6980	1,7800							
0,65	$\zeta_{sr} - 1$	0,3250	0,3356	0,3401							
	$\Phi_o^2$	1,6500	1,7610	1,8500							
0,70	$\zeta_{sr} - 1$	0,3500	0,3622								
	$\Phi_o^2$	1,7000	1,8250								
0,80	$\zeta_{sr} - 1$	0,4000									
	$\Phi_o^2$	1,8000									

#### 4.4.4. Prędkość propagacji fali z wykształconymi oscylacjami

Z formuły (4.44) definiującej liczbę przepływu falowego  $\Phi_o$ , wynika, że prędkość propagacji fali jest funkcją liczby  $\Phi_o$ , a ta z kolei jest funkcją maksymalnej wysokości fali  $h_{\max}$  i głębokości średniej przed falą. W kanale o przekroju trapezowym tę funkcję prezentuje formuła (4.95). Uwzględniając te zależności, wyprowadza się formułę na prędkość propagacji fali w postaci:

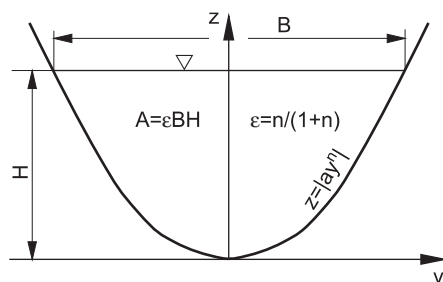
$$c = u_o \pm \Phi_o \sqrt{\frac{1 + z_o}{1 + 2z_o}} gH_o \quad (4.112)$$

gdzie wyrażenie  $\frac{1+z_o}{1+2z_o} H_o$  jest głębokością średnią przepływu początkowego bezpośrednio przed czołem fali.

## 4.5. Charakterystyczne wielkości czoła dodatniej fali translacyjnej z oscylacjami w kanale o przekroju parabolicznym

### 4.5.1. Równanie profilu czoła fali

Chociaż kanały o przekroju parabolicznym należą do rzadkości, to opisy teoretyczne wielkości fal translacyjnych w tym przypadku są celowe, ponieważ ten typ przekroju do pewnego stopnia ma charakter uniwersalny, można bowiem sprowadzić do niego wiele naturalnych kształtów przekroju koryta, oraz przekroje prostokątne i trapezowe. Wyprowadzone w tym podrozdziale wzory opisujące wielkość i kształt fal dotyczą również kanałów o przekrojach prostokątnym i trapezowym, z zachowaniem podobieństwa geometrycznego i hydraulicznego (patrz p. 7.5).



Rys. 4.8. Wielkości hydrotechniczne kanału o przekroju parabolicznym

W układzie współrzędnych  $z, y$  (rys. 4.8) prawy dodatni brzeg kanału jest opisany funkcją:

$$z = ay^n \quad (4.113)$$

Charakterystyczną cechą tego przekroju stanowi to, że stosunek głębokości średniej do głębokości mierzonej w osi  $z$  jest stały:

$$\varepsilon = \frac{H_{\text{sr}}}{H} \quad (4.114)$$

przy czym współczynnik kształtu  $\varepsilon$  jest równocześnie funkcją wykładnika potęgi równania paraboli:

$$\varepsilon = \frac{n}{1+n} \quad (4.115)$$

i nie zależy od napełnienia kanału.

Szerokość zwierciadła wody jest funkcją głębokości:

$$B = 2a \frac{1}{n} H^{\frac{1}{n}} \quad (4.116)$$



albo:

$$B = \beta H^{\frac{1}{n}} \quad (4.117)$$

przy czym współczynnik szerokości  $\beta$  jest również stały dla danej paraboli.

Dla tak opisanych współczynników  $\varepsilon$  i  $\beta$  powierzchnia przekroju poprzecznego kanału jest tylko funkcją głębokości:

$$A = \varepsilon \beta H^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad (4.118)$$

Stąd pochodne powierzchni poprzecznej względem osi  $x$  są opisane formułami:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} A H^{-1} \frac{dH}{dx} \quad (4.119)$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon} A \left[ \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} H^{-2} \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 + H^{-1} \frac{d^2H}{dx^2} \right] \quad (4.120)$$

Wprowadzając powyższe zależności do równania jednostkowej ilości ruchu ((2.68) lub (4.48)) masy płynnej wzdłuż osi  $x$ , a następnie przeprowadzając całkowanie w granicach:

$$0 \leq z \leq H \quad \text{i} \quad -0,5B \leq y \leq 0,5B$$

otrzymuje się równania ilości ruchu przepływu jako funkcji zmiennej  $x$ :

$$M_x = \frac{1}{1+2\varepsilon} \frac{\Omega^2}{gA} H \frac{d^2H}{dx^2} - \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon - 1}{(1+2\varepsilon)\varepsilon} \frac{\Omega^2}{gA} \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{\Omega^2}{gA} \quad (4.121)$$

W przekroju początkowym kanału ( $x=0$ ) ilość ruchu jest równa:

$$M_o = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} A_o H_o + \frac{\Omega^2}{gA_o} \quad (4.122)$$

Nie uwzględniając ewentualnych strat hydraulicznych i stosując zasadę zachowania ilości ruchu, można wyznaczyć równanie różniczkowe profilu fali z oscylacjami ze zmienną  $H(x)$  w granicach od  $H_o$  do  $H_{\max}$ :

$$\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} \frac{\Omega^2 H}{gA} \frac{d^2H}{dx^2} - \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon - 1}{\varepsilon(1+2\varepsilon)} \frac{\Omega^2}{gA} \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} A H + \frac{\Omega^2}{gA} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} A_o H_o - \frac{\Omega^2}{gA_o} = 0 \quad (4.123)$$

Równanie profilu czoła fali w wielkościach względnych odniesionych do głębokości początkowej  $H_o$  uzyska się, wprowadzając do równania (4.111) liczbę przepływu falowego:

$$\phi_0^2 = \frac{\Omega^2}{g\varepsilon H_o A_o^2} \quad (4.124)$$

albo:

$$\phi_0^2 = \frac{w_0^2}{g\varepsilon H_0} \quad (4.125)$$

oraz wielkości względne (bezwymiarowe) opisane przez formuły (4.9b, c) i ich pochodne opisane przez (4.10a, b):

$$\frac{dH}{dx} = \frac{d\zeta}{d\kappa}$$

$$\frac{d^2H}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{d^2\zeta}{d\kappa^2}$$

Po pomnożeniu przez  $A/A_oH_o$  i podstawieniu wielkości względnych równanie (4.123) przyjmuje postać:

$$2\zeta \frac{d^2\zeta}{d\kappa^2} - \frac{2(\varepsilon^2 + \varepsilon - 1)}{\varepsilon} \left(\frac{d\zeta}{d\kappa}\right)^2 + \frac{2(1 + 2\varepsilon)}{(1 + \varepsilon)\phi_0^2} \zeta^{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}} - \frac{2(1 + 2\varepsilon)}{\phi_0^2} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} + \phi_0^2\right) \zeta^{\frac{1}{\varepsilon}} + 2(1 + 2\varepsilon) = 0 \quad (4.126)$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadza się oznaczenia:

$$\alpha_\varepsilon = \frac{2(\varepsilon^2 + \varepsilon - 1)}{\varepsilon} \quad (4.127)$$

$$\beta_\varepsilon = \frac{2(1 + 2\varepsilon)}{(1 + \varepsilon)\phi_0^2} \quad (4.128)$$

$$\gamma_\varepsilon = \frac{2(1 + 2\varepsilon)}{\phi_0^2} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} + \phi_0^2\right) \quad (4.129)$$

$$\delta_\varepsilon = 2(1 + 2\varepsilon) \quad (4.130)$$

Otrzymane równanie różniczkowe drugiego stopnia:

$$2\zeta \frac{d^2\zeta}{d\kappa^2} - \alpha_\varepsilon \left(\frac{d\zeta}{d\kappa}\right)^2 + \beta_\varepsilon \zeta^{\frac{2}{\varepsilon}+1} - \gamma_\varepsilon \zeta^{\frac{1}{\varepsilon}} + \delta_\varepsilon = 0 \quad (4.131)$$

może być sprowadzone do równania pierwszego stopnia przez podstawienie:

$$\left(\frac{d\zeta}{d\kappa}\right)^2 = U(\zeta) \quad (4.132)$$

Stąd:

$$2 \frac{d^2\zeta}{d\kappa^2} = \frac{dU}{d\zeta} \quad (4.133)$$

$$\frac{dU}{d\zeta} - \alpha_\varepsilon U = -\beta_\varepsilon \zeta^{\frac{2}{\varepsilon}+1} + \gamma_\varepsilon \zeta^{\frac{1}{\varepsilon}} - \delta_\varepsilon \quad (4.134)$$

Ogólne rozwiązanie powyższego równania różniczkowego ma postać:

$$U(\zeta) = C(\zeta)\zeta^{\alpha_\varepsilon} \quad (4.135)$$

$C(\zeta)$  jest tu funkcją, którą wyznacza się na drodze niżej opisanego postępowania. Różniczkując równanie (4.135), otrzymuje się:

$$\frac{dU}{d\zeta} = \frac{C(\zeta)}{\zeta} \zeta^{\alpha_\varepsilon} + \alpha_\varepsilon \zeta^{\alpha_\varepsilon-1} \quad (4.136)$$

Podstawiając formuły (4.135) i (4.136) do równania (4.134), otrzymuje się:

$$\frac{dC}{d\zeta} \zeta^{\alpha_\varepsilon+1} = -\beta_\varepsilon \zeta^{\frac{2}{\varepsilon}+1} + \gamma_\varepsilon \zeta^{\frac{1}{\varepsilon}} - \delta_\varepsilon \quad (4.137)$$

Stąd:

$$C(\zeta) = -\beta_\varepsilon \int \zeta^{\frac{2}{\varepsilon}-\alpha_\varepsilon} d\zeta + \gamma_\varepsilon \int \zeta^{\frac{1}{\varepsilon}-\alpha_\varepsilon-1} d\zeta - \int \delta_\varepsilon \zeta^{1-\alpha_\varepsilon} d\zeta + C_1 \quad (4.138)$$

Po scałkowaniu:

$$C(\zeta) = -\frac{\beta_\varepsilon}{\frac{2}{\varepsilon} - \alpha_\varepsilon + 1} \zeta^{\frac{2}{\varepsilon}-\alpha_\varepsilon+1} + \frac{\gamma_\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon} - \alpha_\varepsilon} \zeta^{\frac{1}{\varepsilon}-\alpha_\varepsilon} - \frac{\delta_\varepsilon}{\alpha_\varepsilon} \zeta^{-\alpha_\varepsilon} + C_1 \quad (4.139)$$

otrzymamy wyrażenie opisujące zależność:

$$\left(\frac{d\zeta}{d\kappa}\right)^2 = -\frac{\beta_\varepsilon}{\frac{2}{\varepsilon} - \alpha_\varepsilon + 1} \zeta^{\frac{2}{\varepsilon}+1} + \frac{\gamma_\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon} - \alpha_\varepsilon} \zeta^{\frac{1}{\varepsilon}} - \frac{\delta_\varepsilon}{\alpha_\varepsilon} + C_1^{\alpha_\varepsilon} \quad (4.140)$$

Stałą całkowania  $C_1$  wyznacza się dla warunków początkowych, przy których dla  $H = H_0$ ,  $U = 0$ ,  $\zeta = 1$ ,  $d\zeta/d\kappa = 0$ :

$$C_1 = \frac{\beta_\varepsilon}{\frac{2}{\varepsilon} - \alpha_\varepsilon + 1} - \frac{\gamma_\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon} - \alpha_\varepsilon} - \frac{\delta_\varepsilon}{\alpha_\varepsilon} \quad (4.141)$$

Po podstawieniu do formuły (4.139) otrzymujemy równanie różniczkowe w postaci:

$$\left(\frac{d\zeta}{d\kappa}\right)^2 = \left[ \frac{\beta_\varepsilon}{\frac{2}{\varepsilon} - \alpha_\varepsilon + 1} - \frac{\gamma_\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon} - \alpha_\varepsilon} - \frac{\delta_\varepsilon}{\frac{1}{3}\alpha_\varepsilon} \right] \zeta^{\alpha_\varepsilon} - \frac{\beta_\varepsilon}{\frac{2}{\varepsilon} - \alpha_\varepsilon + 1} \zeta^{\frac{2}{\varepsilon}+1} + \frac{\gamma_\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon} - \alpha_\varepsilon} \zeta^{\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\delta_\varepsilon}{\alpha_\varepsilon} \quad (4.142)$$

Wstawiając do formuły (4.126) zależności (4.127)–(4.130), uzyskuje się równanie różniczkowe krzywej tworzącej profil oscylacji fali samotnej, który z dobrą dokładnością odzwierciedla czoło pierwszej oscylacji:

$$\frac{d\zeta}{d\kappa} = \sqrt{\theta_7} \left[ \left( \frac{\theta_1}{\phi_0^2} + \theta_2 \right) \zeta^{\alpha_\varepsilon} - \frac{\theta_3}{\phi_0^2} \zeta^{\varrho_\varepsilon} - \left( \frac{\theta_4}{\phi_0^2} + \theta_5 \right) \zeta^{\frac{1}{\varepsilon}} + \theta_6 \right]^{1/2} \quad (4.143)$$

gdzie poszczególne współczynniki równania są funkcjami tylko współczynników kształtu przekroju parabolicznego:

$$\theta_1 = \frac{2}{(-\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 4)(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 3)} \quad (4.144)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 3)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)} \quad (4.145)$$

$$\theta_3 = \frac{2}{(1 + \varepsilon)(-2\varepsilon^2 - \varepsilon - 4)} \quad (4.146)$$

$$\theta_4 = \frac{2}{(1 + \varepsilon)(2\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 2)} \quad (4.147)$$

$$\theta_5 = \frac{2}{2\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 3} \quad (4.148)$$

$$\theta_6 = \frac{1}{\varepsilon^2 + \varepsilon - 1} \quad (4.149)$$

$$\theta_7 = \varepsilon(1 + 2\varepsilon) \quad (4.150)$$

$$\varrho_\varepsilon = 1 + \frac{2}{\varepsilon} \quad (4.151)$$

W kanale o przekroju prostokątnym, będącym szczególnym przypadkiem kanału o przekroju parabolicznym, dla którego współczynnik kształtu  $\varepsilon = 1,0$ , wyżej wymienione współczynniki przyjmują wartości:  $\theta_1 = 2$ ;  $\theta_2 = 1$ ;  $\theta_3 = 1$ ;  $\theta_4 = 1$ ;  $\theta_5 = 2$ ;  $\theta_6 = 1$ ;  $\theta_7 = 3$ ;  $\alpha_\varepsilon = 2$ ;  $\rho_\varepsilon = 1$ ;  $1/\varepsilon = 1$ . Wówczas równanie (4.143) linii tworzącej czoło fali rozprzestrzeniającej się w kanale o przekroju parabolicznym w wielkościach zredukowanych, bezwymiarowych przyjmuje postać równania (4.73) lub równania (4.22), dotyczącego kanału o przekroju prostokątnym, gdzie  $\zeta = 0$ .

#### 4.5.2. Granica stabilności czoła fali translacyjnej w kanałach o przekroju parabolicznym

W kanałach o przekroju parabolicznym o pochyleniu czoła fali decyduje nie tylko liczba przepływu falowego  $\Phi_o$  ale również współczynnik jego kształtu  $\varepsilon$ . Graniczna wartość liczby  $\Phi_o$  dla zadanego współczynnika  $\varepsilon$ , przy którym wykształcona oscylacja

zachowuje stabilność. zostanie wyznaczona w odniesieniu do tych samych podstaw hydromechanicznych, które zostały zastosowane w kanałach o przekroju trapezowym i które są ważne w kanałach o przekroju prostokątnym.

W przekroju, w którym występuje przegięcie profilu czoła oscylacji, składowe prędkości względnej  $w$  i jej pochodne przedstawiają się następująco:

$$w_x = \frac{\Omega}{\beta \varepsilon H_i^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (4.152)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} = - \frac{\Omega}{\beta \varepsilon^2 H_i^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} \frac{dH}{dx} \quad (4.153)$$

$$w_z = \frac{\Omega}{\beta \varepsilon H_i^{\frac{1}{\varepsilon}}} \frac{dH}{dx} \quad (4.154)$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} = - \frac{\Omega}{\beta \varepsilon^2 H_i^{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}} \quad (4.155)$$

Wprowadzając do równania Eulera (4.65) tak opisane składowe prędkości  $w_x$  i  $w_z$  oraz ich pochodne, otrzymujemy równanie granicznej stabilności fali:

$$\frac{dH}{dx} \left( 1 - \frac{2\Omega^2}{\beta^2 \varepsilon^3 H_i^{1+\frac{2}{\varepsilon}}} \right) = 0 \quad (4.156)$$

Aby to równanie doprowadzić do postaci bezwymiarowej, wprowadzamy wzór opisujący liczbę przepływu falowego:

$$\phi_o^2 = \frac{\Omega^2}{\beta^2 \varepsilon^3 H_o^{1+\frac{2}{\varepsilon}}} \quad (4.157)$$

Otrzymujemy wówczas zależność:

$$\phi_o^2 = \frac{1}{2} \zeta_i^{1+\frac{2}{\varepsilon}} \quad (4.158)$$

Głębokość przegięcia  $H_i$  wyznacza się z drugiej pochodnej równania (4.143), opisującej kształt czoła fali:

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = \frac{1}{2} \theta_7 \left[ \alpha_\varepsilon \left( \frac{\theta_1}{\phi_o^2} + \theta_2 \right) \zeta^{\alpha_\varepsilon - 1} - \rho_\varepsilon \frac{\theta_3}{\phi_o^2} \zeta^{\rho_\varepsilon - 1} - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\theta_4}{\phi_o^2} + \theta_5 \right) \zeta^{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right] \quad (4.159)$$

gdzie:  $d^2 \zeta / dx^2 = 0$ .

Stąd względna głębokość przeięcia czoła fali  $\zeta_i$  spełnia równanie:

$$\phi_o^2 = \frac{\alpha_\varepsilon \theta_1 \zeta_i^{\alpha_\varepsilon - 1} - \rho_\varepsilon \theta_3 \zeta_i^{\frac{2}{\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon} \theta_4 \zeta_i^{\frac{1}{\varepsilon} - 1}}{\frac{1}{\varepsilon} \theta_5 \zeta_i^{\frac{1}{\varepsilon} - 1} - \alpha_\varepsilon \theta_2 \zeta_i^{\alpha_\varepsilon - 1}} \quad (4.160)$$

Porównując ze sobą formuły (4.158) i (4.160), otrzymuje się równanie opisujące graniczną wartość głębokości przeięcia profilu czoła fali w wielkościach względnych:

$$\alpha_\varepsilon \theta_1 \zeta_i^{\alpha_\varepsilon - 1} - \rho_\varepsilon \theta_3 \zeta_i^{\frac{2}{\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon} \theta_4 \zeta_i^{\frac{1}{\varepsilon} - 1} - \frac{1}{2\varepsilon} \theta_5 \zeta_i^{\frac{3}{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \alpha_\varepsilon \theta_2 \zeta_i^{2(\varepsilon + 1)} = 0 \quad (4.161)$$

Rzeczywisty pierwiastek równania (4.161) określa graniczną wartość głębokości  $\zeta_i$  dla danego współczynnika kształtu  $\varepsilon$ , stąd zaś, z równania (4.160), graniczną wartość liczby przepływu falowego  $\Phi_o$ , przy których oscylacje zachowują jeszcze stabilność (tabl. 4.4).

**Tablica 4.4**

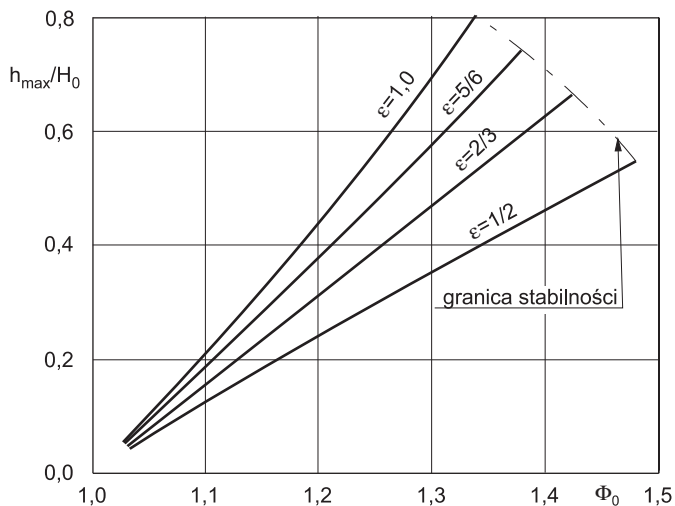
Graniczne wartości  $\zeta_i$ ,  $\zeta_{\max}$ ,  $\Phi_o$  stabilizujących oscylacje w kanale o przekroju parabolicznym

$\varepsilon$	1,0	5/6	2/3	1/2
$\zeta_i = \frac{H_i}{H_o}$	1,532	1,483	1,420	1,343
$\zeta_{\max} = \frac{H_{\max}}{H_o}$	1,800	1,725	1,630	1,512
$\Phi_o$	1,342	1,381	1,427	1,479

### 4.5.3. Charakterystyczne wielkości czoła stabilnej fali

Maksymalną wysokość fali (rys. 4.9), występującą w szczycie pierwszej oscylacji, wyznacza się z równania (4.143), po przekształceniach, przyjmując, że  $d\zeta/dx = 0$ :

$$\phi_o^2 = \frac{\theta_3 \zeta_{\max}^{\rho_\varepsilon} - \theta_1 \zeta_{\max}^{\alpha_\varepsilon} + \theta_4 \zeta_{\max}^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\theta_2 \zeta_{\max}^{\alpha_\varepsilon} - \theta_5 \zeta_{\max}^{\frac{1}{\varepsilon}} + \theta_6} \quad (4.162)$$



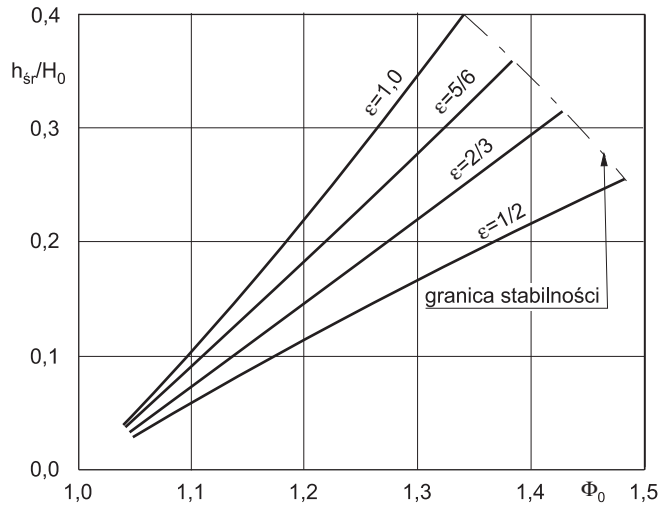
Rys. 4.9. Maksymalna wysokość fali w kanale przekroju parabolicznego,  $h_{\max}/H_0 = f(\Phi_0)$

Zgodnie z przyjętą hipotezą zakłada się, że środek ciężkości powierzchni zajętej przez czołową falę stanowi górną granicę głębokości średniej fali (rys. 4.10):

$$H_{sr} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{H_{\max}^{\frac{1}{\varepsilon}+1} - H_0^{\frac{1}{\varepsilon}+1}}{H_{\max}^{\frac{1}{\varepsilon}} - H_0^{\frac{1}{\varepsilon}}} \quad (4.163a)$$

albo:

$$\zeta_{sr} = 1 + \frac{h_{sr}}{H_0} = \frac{1}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{\zeta_{\max}^{\frac{1}{\varepsilon}+1} - 1}{\zeta_{\max}^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1} \quad (4.163b)$$



Rys. 4.10. Średnia wysokość fali w kanale przekroju parabolicznego,  $h_{sr}/H_o = f(\Phi_o)$

Z przekształcenia formuły (4.125) otrzymuje się wzór na prędkość fali:

$$c = u_o \pm \Phi_o \sqrt{g \varepsilon H_o} \quad (4.164)$$

gdzie liczba przepływu falowego  $\Phi_o$  jest opisana przez formułę (4.162).

W kanale o przekroju prostokątnym współczynnik kształtu  $\varepsilon = 1$ , a współczynnik prędkości ze zmodyfikowanego wzoru (4.162):

$$\Phi_o = \sqrt{\zeta_{max}} = \sqrt{1 + \frac{h_{max}}{H_o}}$$

## 4.6. Fale dodatnie bez oscylacji

### 4.6.1. Podstawowe przypadki powstawania i rozprzestrzeniania się dodatnich fal bez oscylacji

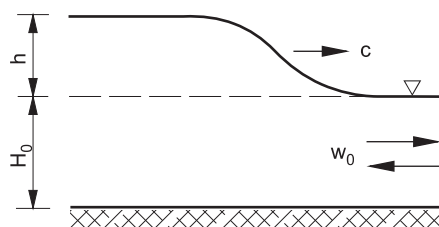
Dodatnie fale translacyjne bez oscylacji powstają i rozprzestrzeniają się w korytach otwartych głównie w następujących przypadkach:

- jeżeli nastąpi gwałtowna zmiana natężenia przepływu, wywołana przez maszyny lub urządzenia siłowni, to bezpośrednio w sąsiedztwie budowli hydrotechnicznej oscylacje nie powstają. Sukcesywnie kształtują się i osiągną właściwy kształt dopiero w pewnej odległości od budowli hydrotechnicznej, zależnie od wielkości zmian natężenia przepływu;
- jeżeli zmiana natężenia przepływu jest tak znaczna, że zostaną przekroczone warunki stabilnego wytworzenia się oscylacji (p. 4.4.3), to wówczas fala będzie



się rozprzestrzeniać w postaci wału wodnego, zwanego też ruchomym odskokiem hydraulicznym;

- c) z reguły oscylacje nie powstają w korytach rzek naturalnych spiętrzonych. Z pewnością dzieje się tak wskutek znacznych oporów ruchu i rozplywu bocznego czoła fali. Fale te mają charakterystyczny kształt (rys. 4.11), który na ogół zachowują na całej drodze przebiegu, zmniejszając swe rozmiary.



Rys. 4.11. Propagacja fali dodatniej bez oscylacji w kanale:  
← dopływowym; → odpływowym

Podobnie jak w przypadku fali z oscylacjami, prędkość propagacji fali bez oscylacji jest zależna od stosunku wysokości fali  $h$  do głębokości pierwotnej przed czołem fali  $H_0$ , oraz kształtu koryta kanału. W celu wyznaczenia związku pomiędzy prędkością propagacji fali a jej wysokością stosuje się zasadę zachowania ilości ruchu, jak to uczynił de Saint-Venant w odniesieniu do kanału przekroju prostokątnego o nieskończonej szerokości.

#### 4.6.2. Prędkość propagacji dodatnich fal bez oscylacji w kanałach o przekroju trapezowym

Propagację dodatniej fali translacyjnej bez oscylacji rozpatruje się w ruchomym układzie współrzędnych, przemieszczającym się wraz z czołem fali. Zależność prędkości propagacji fali od jej wysokości wyprowadza się z zasady zachowania ilości ruchu, opisanej w p. 4.1.1.

Jeśli pominie się człony zawierające pierwszą i drugą pochodną głębokości przepływu  $H$  względem współrzędnej długości  $x$ , równanie (4.52) przyjmuje postać:

$$\frac{H^2}{6}(3B_0 + 2mH) + \frac{\Omega^2}{gH(B_0 + mH)} - \frac{H_0^2}{6}(3B_0 + 2mH_0) - \frac{\Omega^2}{gH_0(B_0 + mH_0)} = 0 \quad (4.165)$$

W celu uzyskania postaci bezwymiarowej powyższe równanie przekształca się, kolejno mnożąc je przez:

$$\frac{H^2}{H_0^3} \frac{(B_0 + 2mH_0)^2}{(B_0 + mH_0)^3}$$

oraz wprowadzając liczbę przepływu falowego:

$$\Phi_o^2 = \frac{\Omega^2(B_o + 2mH_o)}{gH_o^3(B_o + mH_o)^3}$$

$$\frac{1}{6} \left( \frac{H}{H_o} \right)^3 \frac{(3B_o + 2mH)(B_o + 2mH_o)}{(B_o + mH)^3} - \frac{1}{6} \frac{H}{H_o} \frac{(3B_o + 2mH_o)(B_o + 2mH_o)}{(B_o + mH_o)^3} + \frac{\Phi_o^2}{(B_o + mH)} - \frac{H\Phi_o^2}{H_o(B_o + mH_o)} = 0$$
(4.166)

Licznik i mianownik tak uzyskanego równania dzieli się przez  $B_o^3$  oraz wprowadza się następujące wielkości bezwymiarowe, opisane przez formuły:

$$z_o = \frac{mH_o}{B_o}; \quad \zeta = \frac{H}{H_o}; \quad \zeta z_o = \frac{mH}{B_o}$$

Po przekształceniach otrzymuje się równanie:

$$\Phi_o^2 \left[ \zeta \frac{1 + 2z_o}{1 + z_o} - \frac{1 + 2z_o}{1 + \zeta z_o} \right] = \frac{\zeta^3(3 + 2\zeta z_o)(1 + 2z_o)^2 - \zeta(3 + 2z_o)(1 + 2z_o)^2}{6(1 + z_o)^3}$$
(4.167)

z którego można wyznaczyć poszukiwaną liczbę  $\Phi_o$ , będącą funkcją wysokości fali:

$$\Phi_o^2 = \frac{(1 + 2z_o)(1 + \zeta z_o)[\zeta^3(3 + 2\zeta z_o) - \zeta(3 + 2z_o)]}{6(1 + z_o)^2[\zeta(1 + \zeta z_o) - (1 + z_o)]}$$
(4.168)

Z przekształcenia formuły (4.55) opisującej liczbę  $\Phi_o$ :

$$\Phi_o^2 = \frac{(c - u_o)^2}{gH_o} \frac{1 + 2z_o}{1 + z_o}$$
(4.169)

otrzymuje się wyrażenie na prędkość propagacji fali w kanale o przekroju trapezowym, identyczne jak formuła (4.112), opisująca fale z wykształconymi oscylacjami:

$$c = u_o \pm \Phi_o \sqrt{gH_o \frac{1 + z_o}{1 + 2z_o}}$$
(4.170)

ale o różnych wartościach  $\Phi_o$ .

Formuły (4.168) i (4.170) dotyczą także kanału o przekroju prostokątnym, w którym współczynnik kształtu  $z_o$  jest równy zero. Liczba  $\Phi_o$  jest wówczas opisana przez formułę:

$$\Phi_o = \frac{2}{3} \frac{h}{H_o} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{H_o} \right)^2 \quad (4.171)$$

która staje się identyczna jak we wzorze de Saint-Venanta.

### 4.6.3. Prędkość propagacji dodatnich fal bez oscylacji w korytach o przekroju parabolicznym

W kanałach o przekroju parabolicznym związek pomiędzy prędkością fali a jej wysokością wyprowadza się z zasady zachowania ilości ruchu, opisaną równaniem (4.123). W przypadku powstania fali bez oscylacji pochodna  $dH/dx = 0$  i  $d^2H/dx^2 = 0$ , a wówczas zasada zachowania ilości ruchu przyjmuje następującą postać:

$$\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} (AH - A_o H_o) + \frac{\Omega^2}{g A_o} \left( \frac{A_o}{A} - 1 \right) = 0 \quad (4.172)$$

gdzie indeksem zero oznaczono parametry hydrauliczne przepływu czynnego w przekroju przed czołem fali. Po pomnożeniu przez  $\frac{1}{\varepsilon H_o A_o}$  i podstawieniu:

$$\frac{A}{A_o} = \left( \frac{H}{H_o} \right)^{1/2} \quad (4.173)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} + 1 = \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \quad (4.174)$$

otrzymuje się równanie względnej głębokości za czołem fali w postaci:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \left[ \left( \frac{H}{H_o} \right)^{1 + \varepsilon/\varepsilon} - 1 \right] - \Phi_o^2 \left[ 1 - \left( \frac{H_o}{H} \right)^{1/\varepsilon} \right] = 0 \quad (4.175)$$

Z rozwiązania równania (4.175) otrzymuje się formułę opisującą  $\Phi_o$  jako funkcję względnej głębokości za czołem fali:

$$\Phi_o^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{\left( \zeta^{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}} - 1 \right) \zeta^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\zeta^{\frac{1}{2}} - 1} \quad (4.176)$$

bądź też jako funkcję względnej wysokości fali bez oscylacji:

$$\Phi_o = \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{\left[ \left( 1 + \frac{h}{H_o} \right)^{\frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}} - 1 \right] \left( 1 + \frac{h}{H_o} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\left( 1 + \frac{h}{H_o} \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} - 1} \quad (4.177)$$

Z definicji liczby przepływu falowego w postaci zapisu:

$$\Phi_o^2 = -\frac{\Omega^2}{\varepsilon g H_o A_o^2} \quad (4.178)$$

wynika następująca formuła prędkości propagacji fali bez oscylacji w kanale przekroju parabolicznego:

$$c = u_o \pm \Phi_o \sqrt{\varepsilon g H_o} \quad (4.179)$$

Dotyczy ona również kanału o przekroju prostokątnym, którego współczynnik kształtu w tym przypadku jest równy jedności ( $\varepsilon = 1,0$ ). Liczba przepływu falowego, opisana przez wzór (4.177), będąca tu współczynnikiem prędkości, przyjmuje postać podaną przez de Saint-Venanta (4.1).

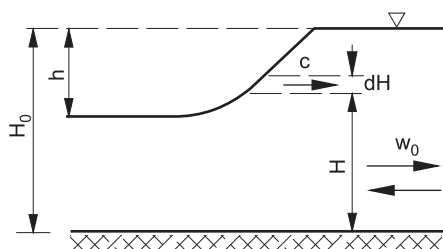
## 4.7. Wielkości i kształt fal ujemnych

### 4.7.1. Podstawowe założenia opisu matematycznego fal ujemnych

Podstawą opisu matematycznego wielkości i kształtu fali ujemnej (rys. 4.12) jest przyjęcie następujących warunków jej powstawania i rozprzestrzeniania się:

- Fala powstaje wskutek nagłej i znaczącej zmiany natężenia przepływu w czasie dostatecznie krótkim, równym  $T_m$ , wywołanej przez urządzenie sterujące (turbinę, pompę, zasuwę, zawór) zgodnie z jej właściwościami hydromechanicznymi.
- Przepływ wody w kanale, po którym rozprzestrzenia się fala, jest chwilowo ustalony i odbywa się ze stałą jednorodną prędkością  $u_o$ .
- W przekroju początkowym fala przyjmuje kształt odpowiadający powstałej zmianie natężenia przepływu. Z reguły tworzy go krzywa typu parabolicznego.
- Każdy wydzielony element czoła fali rozprzestrzenia się z prędkością, która jest funkcją jego położenia w odniesieniu do dna (głębokości) kanału.
- Fala przenosi określoną, uprzednio wyznaczoną, zmianę natężenia przepływu, stanowiącą różnicę pomiędzy natężeniem za i przed falą w rozpatrywanym przekroju poprzecznym kanału.
- Pomija się ewentualne straty hydrauliczne, jakie mogłyby powstać wzdłuż linii tworzącej czoło fali.
- Wskutek oporów tarcia za falą powstaje przepływ nieustalony wolnozmienny.

Celem przedstawionych niżej rozważań teoretycznych jest ustalenie związku pomiędzy natężeniem przepływu a głębokością występującą na czole fali w wybranym przekroju poprzecznym kanału. Stwarza to podstawę do wyznaczenia zmian wysokości fali w funkcji czasu  $h = h(t)$  oraz profilu podłużnego fali  $h = h(x)$ . Funkcje te ustala się w kanale o przekroju parabolicznym, opisanym wzorem (4.113), traktując go jako uniwersalny. Zawiera on bowiem prawie takie same właściwości hydrauliczne, jakie stwarza przekrój prostokątny lub trapezowy odpowiednio przekształcony, z zachowaniem identycznego pochylenia skarp (patrz rozdz. 7.5) w obrębie występowania fali.



Rys. 4.12. Propagacja fali ujemnej w kanale: ← dopływowym; → odpływowym

#### 4.7.2. Zmiana natężenia przepływu w funkcji wysokości fali w kanale o przekroju parabolicznym

Związek, jaki występuje pomiędzy zmianą natężenia przepływu a głębokością pod falą, opisuje się w odniesieniu do drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$\frac{d(mu)}{dt} = F \quad (4.180)$$

W rzucie na oś  $x$  biegnącą po dnie kanału zgodnie ze spadkiem lub przepływem ustalonym zmiana pędu jednostkowej masy płynnej wody na długości fali jest równa:

$$\frac{d(mu)}{dt} = H\rho(c \pm u)du \quad (4.181)$$

Znak minus odnosi się do fali napełniania, powstałej w kanale odpływowym, a znak plus – do fali piętrzenia, rozprzestrzeniającej się w kanale dopływowym do urządzenia sterującego.

Siła działająca na tę jednostkową masę wody jest równa różniczce parcia hydrostatycznego:

$$F = \rho g H dH \quad (4.182)$$

Po podstawieniu formuł (4.181) i (4.182) do równania (4.180) i uwzględnieniu formuły opisującej prędkość rozprzestrzeniania się zaburzeń:

$$c = u \pm \sqrt{gH} \quad (4.183)$$

otrzyma się wyrażenie opisujące zmianę prędkości przepływu:

$$du = \pm \sqrt{g} \frac{dH}{\sqrt{H}} \quad (4.184)$$

która w kanale przekroju parabolicznego przybiera postać:

$$du = \pm \sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} H^{-1/2} dH \quad (4.185)$$

Całkując równanie (4.185) w granicach od  $u_o$  do  $u$  i od  $H_o$  do  $H$ , otrzyma się:

$$u = u_o \pm \sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} (H^{1/2} - H_o^{1/2}) \quad (4.186)$$

Po podstawieniu wzoru (4.186) do wzoru (4.183) otrzymuje się formuły na prędkość fali ujemnej na głębokości  $H$ , propagującej w kanale dopływowym:

$$c = u_o - \left( \sqrt{g\varepsilon} + 2\sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} \right) \sqrt{H} + 2\sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} H_o \quad (4.187)$$

lub odpływowym:

$$c = u_o + \left( \sqrt{g\varepsilon} + 2\sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} \right) \sqrt{H} - 2\sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} H_o \quad (4.188)$$

Zmianę natężenia przepływu, będącą funkcją wysokości fali, uzyskuje się, mnożąc prędkość propagacji przez powierzchnię przekroju zajętego przez falę:

$$\Delta Q = Q - Q_o = \int_{H_o}^H BcdH \quad (4.189)$$

Po podstawieniu odpowiednich wzorów i przeprowadzeniu całkowania otrzymuje się dla fali wstępującej na kanale dopływowym:

$$Q - Q_o = \beta\varepsilon \left( u_o + 2\sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} H_o \right) \left( H^{\frac{1}{\varepsilon}} - H_o^{\frac{1}{\varepsilon}} \right) - \frac{2\beta\varepsilon}{2 + \varepsilon} \left( \sqrt{g\varepsilon} + 2\sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} \right) \left( H^{\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}} - H_o^{\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}} \right) \quad (4.190)$$

lub dla fali zstępującej na kanale odpływowym:

$$Q - Q_o = \beta\varepsilon \left( u_o - 2\sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} H_o \right) \left( H^{\frac{1}{\varepsilon}} - H_o^{\frac{1}{\varepsilon}} \right) + \frac{2\beta\varepsilon}{2 + \varepsilon} \left( \sqrt{g\varepsilon} + 2\sqrt{\frac{g}{\varepsilon}} \right) \left( H^{\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}} - H_o^{\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}} \right) \quad (4.191)$$

Natężenie przepływu  $Q$ , jakie powstaje na końcu fali, jest znane tylko w miejscu i w czasie powstawania. Tworzy ono warunek brzegowy kompleksowych obliczeń zmian hydraulicznych fali i przepływu nieustalonego za falą.

#### 4.8. Zmiana natężenia przepływu i wysokości fali na długości kanału

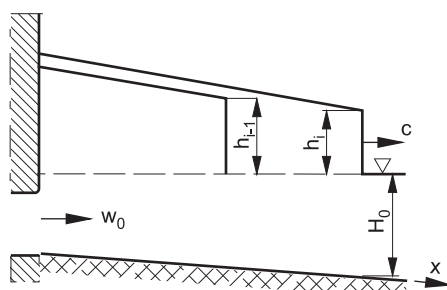
Bezpośrednią przyczyną zmian natężenia przepływu, wysokości fali i poziomów zwierciadła wody (rys. 4.13–4.15) są straty hydrauliczne. W rezultacie w miarę oddalania się od miejsca powstania za każdą falą translacyjną pojawia się przepływ nieustalony wolnozmienny, który zmienia niesione przez falę natężenie przepływu, jej wysokość oraz poziom zwierciadła wody na całej długości kanału za falą. Zjawisko to pojawia się nawet

wówczas, gdy zdarzy się całkowite zatrzymanie przepływu na urządzeniu sterującym przepływem. Oddalając się od miejsca powstania, każda fala zmniejsza swą bezwzględną wysokość i niesioną zmianę natężenia przepływu (wydatek fali) opisaną przez formułę:

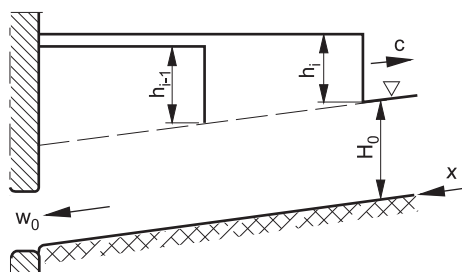
$$Q_w = \frac{dx}{dt} A_w \quad (4.192)$$

gdzie:  $A_w$  – powierzchnia przekroju poprzecznego kanału zajęta przez wysokość czoła fali (średnia, gdy fala posiada oscylacje).

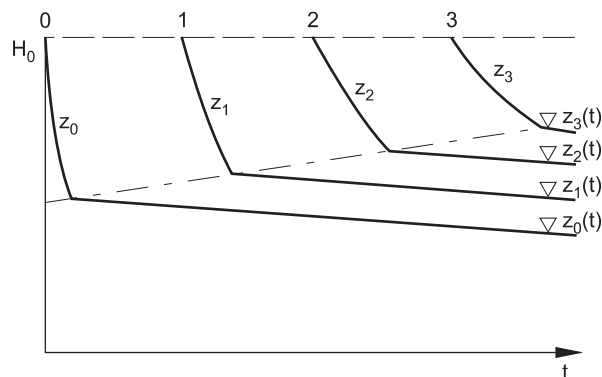
Natomiast za każdą falą dodatnią powstaje sukcesywnie wzrost, a za każdą falą ujemną – obniżenie poziomu wody na całej długości kanału.



Rys. 4.13. Zmiany wysokości fali napelnienia i głębokości w kanale odpływowym



Rys. 4.14. Zmiany wysokości fali piętrzenia i głębokości w kanale dopływowym



Rys. 4.15. Zmiany kształtu i wielkości fali ujemnej i poziomów wody w kolejnych przekrojach kanału

Bezpośrednie oddziaływanie przepływu nieustalonego na falę wymusza, aby wielkości hydrauliczne obu tych zjawisk były obliczane równocześnie. Stosowane opisy matematyczne są różne, ale elementem wspólnym są te same wartości bezwzględne głębokości i natężenia przepływu występujące za czołem fali. Tworzą one warunki graniczne przepływu nieustalonego za falą:

$$H = H_o \pm h_w \quad (4.193)$$

$$Q = Q_o \pm Q_w \quad (4.194)$$

gdzie:  $h_w$  – wysokość bezwzględna fali, przy czym dla fal dodatnich jest to wysokość, przy której następuje zanik oscylacji. Znak plus odnosi się do fal wywołujących wzrost, a znak minus wskazuje na sytuację, gdy następuje gwałtowny spadek natężenia przepływu.

Obliczenia wysokości fali i niesionej przez nią zmiany natężenia przepływu prowadzi się metodą kolejnych przybliżeń. Właściwe wielkości hydrauliczne przepływu niesionego przez falę uzyska się wówczas, gdy będzie spełnione równanie przepływu nieustalonego, występującego wzdłuż zaburzenia (charakterystyki) rozdzielającej obydwie te zjawiska.

Równanie to przyjmuje postać:

$$dQ = BwdH + g \frac{A}{a} (I_o - I_s) dx \quad (4.195)$$

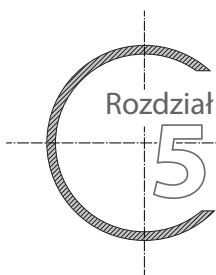
gdzie bieg fali odbywa się zgodnie z kierunkiem przepływu pierwotnego oraz:

$$dQ = BadH + g \frac{A}{w} (I_o - I_s) dx \quad (4.196)$$

gdzie bieg fali odbywa się w kierunku przeciwnym do przepływu pierwotnego.

We wzorach (4.195) i (4.196)  $a$  i  $w$  oznaczają prędkości rozchodzenia się zaburzenia rozdzielającego falę od przepływu nieustalonego wolnozmiennego, występującego za falą. W obliczeniach numerycznych wysokości fali i zmian głębokości oraz zmian natężenia przepływu równania różniczkowe są sprowadzane do postaci różnicowej, opisującej przepływ nieustalony pomiędzy dwoma kolejnymi przekrojami kanału. Wyznaczenie zmian w czasie głębokości w profilu fali ujemnej, tj. funkcji  $H(t)$ , w wybranym przekroju kanału wymaga opisu przebiegu poszczególnych elementów (strug), począwszy od momentu powstania fali, z zachowaniem stałego ( $H = \text{const}$ ) położenia wybranego elementu. Zapewnia to uzyskanie stałej wartości prędkości propagacji zaburzenia tego elementu, opisanej przez formuły (4.187) i (4.188), odpowiednio do kierunku przepływu.





## UDERZENIA HYDRAULICZNE WYWOŁYWANE PRZEZ TURBINY, POMPY I ZAMKNIĘCIA

### 5.1. Rys historyczny powstawania modeli matematycznych uderzenia hydraulicznego w przewodach ciśnieniowych

Problematyką opisu matematycznego uderzenia hydraulicznego w energetycznych przewodach ciśnieniowych zajmowało się bardzo wielu badaczy już od momentu pojawienia się elektrowni wodnych wyposażonych w zespoły prądotwórcze. Bezpośrednią przyczyną naukowego zainteresowania uderzeniem hydraulicznym jako zjawiskiem technicznym były poważne awarie rurociągów ciśnieniowych w pierwszych instalacjach hydroenergetycznych. Pierwsze modele obliczeniowe uwzględniały tylko czynniki wywierające niejako bezpośredni wpływ na wielkość uderzenia hydraulicznego. Dotyczyło to głównie czasu zatrzymania przepływu i wielkości zmian prędkości przepływu. Taki model mógł się sprawdzić tylko w instalacjach wyposażonych w turbiny akcyjne (Peltona i pokrewne) oraz klasyczne zamknięcia mechaniczne (zasuwy, zawory).

Pierwszy – mocno uproszczony – model powstał na przełomie wieków XIX i XX, kiedy to dwaj znakomici profesorowie, J. Michaud [56] i N.J. Żukowski [90], niezależnie zaprezentowali formuły opisujące najprostszyp przypadk powstania uderzenia hydraulicznego wywołanego przez nagłe i całkowite zatrzymanie przepływu wody w rurociągu ciśnieniowym. Michaud podał prostą formułę określającą wielkość maksymalnego uderzenia w postaci słupa wody:

$$h_{max} = \frac{2Lu_0}{gT_m} \quad (5.1)$$

Formuła ta wywołała uzasadnioną krytykę, gdyż wynikało z niej, że w czasie trwania manewru  $T_m$  zmierzającym do zera wartość wysokości ciśnienia zmierza do nieskończoności.

Tej wady nie zawiera wzór podany przez Żukowskiego, który został opublikowany w postaci:

$$p = c\rho\Delta u \quad (5.2)$$

Ma on charakter formuły bardziej ogólnej i znajdującej zastosowanie w pewnych prostych przypadkach, gdyż daje dostatecznie przybliżoną wartość uderzenia wywołanego przez nagłe i całkowite zatrzymanie przepływu ( $T_m \rightarrow 0$ ).

Bardziej właściwy model teoretyczny przepływu nieustalonego w przewodach ciśnieniowych stworzył Allievi [2]. Podstawą tego modelu są ogólne równania przepływu cieczy (idealnej) bez strat hydraulicznych:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} = g \frac{\partial H}{\partial x} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{g}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5.4)$$

gdzie:  $H$  – dynamiczna wysokość ciśnienia wody odniesiona do osi rurociągu [m].

Pomijając wyrażenie  $u\partial u/\partial x$  jako bardzo małe w stosunku do pozostałych składników, Allievi wyznaczył pochodne równań (5.3) i (5.4), otrzymując równania przepływu nieustalonego w przewodach zamkniętych typu hiperbolicznego drugiego rzędu:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.6)$$

Ogólna postać całek tego układu ma postać:

$$H - H_o = F\left(t - \frac{x}{c}\right) - f\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (5.7)$$

$$u - u_o = -\frac{g}{c} \left[ F\left(t - \frac{x}{c}\right) + f\left(t + \frac{x}{c}\right) \right] \quad (5.8)$$

gdzie:  $F$  i  $f$  – funkcje opisujące warunki graniczne zmiennych  $H$  i  $u$ .

W przekroju przewodu o współrzędnej  $x$  w dowolnym czasie  $t$  suma algebraiczna wartości funkcji  $F$  i  $f$  przedstawia stan ciśnienia i prędkości. Współzależność pomiędzy funkcjami  $F$  i  $f$  jest następująca:

$$F\left(t_i - \frac{x}{c}\right) = -f\left(t_i - \frac{x}{c} + T_m\right) \quad (5.9)$$

Przyjmując liniowy w czasie rozkład prędkości, Allievi sporządził nomogramy, zwane seriami Alliewiego, pozwalające wyznaczyć graficznie wartości:

$$u_i = u_o - \frac{g}{c} (F_{i-1} + F_i) \quad (5.10)$$

$$h_i + h_{i-1} - 2h_o = \frac{c}{g} (u_{i-1} + u_i) \quad (5.11)$$

Dalsze udoskonalenia i adaptacje teorii Allieiego do szczególnych przypadków zmian natężenia przepływu przez urządzenia sterujące oraz konstrukcji rurociągu przeprowadzili między innymi Jaeger [43], Schlag [71], Sparre [74], Schnyder [72] i Bergeron [16, 18]. Schnyder i Bergeron opracowali metodę graficzną rozwiązywania równań uderzenia hydraulicznego, wyprowadzonych z teorii Allieiego. Metoda ta uwzględnia straty hydrauliczne powstające na długości rurociągu. Równania opisują zmianę wysokości ciśnienia zachodzące na drodze rozprzestrzeniania fali ciśnienia. We wszystkich tych opracowaniach zmiana natężenia przepływu jest wywołana tylko i wyłącznie przez urządzenie sterujące.

Drogę przemieszczania się dowolnego zaburzenia przepływu w układzie współrzędnych  $x, t$  nazwano charakterystyką. Według Bergerona wzdłuż dowolnej charakterystyki funkcja  $F(t)$  opisuje związek pomiędzy wysokością ciśnienia hydrodynamicznego  $h$  a prędkością przepływu  $u$ , z uwzględnieniem strat hydraulicznych. Utworzony model obliczeniowy Bergeron nazwał modelem charakterystyk. Model Bergerona dość poprawnie odzwierciedla przebieg przepływu nieustalonego w samym rurociągu przy prostych warunkach brzegowych wytworzonych przez zwykły manewr zamknięcia (zasuw). Nie uwzględnia jednak zmienności natężenia przepływu wywołanej przez wirnik maszyny hydraulicznej.

Inni badacze, a w szczególności Krivčenko [36] i Kartvelišvili [44], wykorzystali równania Bergerona do opracowania metody analitycznej wyznaczania rozkładu uderzenia hydraulicznego powstałego wskutek manewru kierownicy. W tych modelach straty hydrauliczne zostały pominięte jako mało znaczące dla przebiegu uderzenia hydraulicznego. Nie uwzględniono wpływu prędkości obrotowej turbiny. Podano natomiast warunki powstawania poszczególnych rodzajów uderzenia hydraulicznego przy liniowej zmianie prędkości zamykania kierownicy oraz parabolicznej zmianie natężenia przepływu jako funkcji spad.

Zarówno metoda graficzna Bergerona, jak i analityczna Krivčenko mogą należycie odzwierciedlać przebieg zjawiska tylko wówczas, gdy natężenie przepływu jest modyfikowane przez zasuwę lub iglicę turbiny Peltona. Wpływ prędkości obrotowej wirnika reakcyjnej maszyny wirnikowej (turbiny Francisa, Deriaza, Kaplana, pompy) na rozkład w czasie natężenia przepływu jest nazbyt istotny, aby go pominąć. Nawet przy ustalonym biegu hydraulicznej maszyny reakcyjnej pod jej działaniem odbywa się przepływ przechodzący przez kierownicę. Nie można też pominąć strat hydraulicznych w trakcie trwania procesu zmian natężenia przepływu.

Warunki te uwzględnia metoda opisana w kolejnym podrozdziale, która pozwala wyznaczyć rozkład uderzeń hydraulicznych na urządzeniu sterującym i w wybranych przekrojach rurociągu oraz nieustalone prędkości obrotowe maszyny hydraulicznej. W pełni opiera się na teorii charakterystyk i opisuje rozkład natężenia przepływu i uderzenia hydraulicznego na drodze rozprzestrzeniania się rzeczywistego i wirtualnego zaburzenia przepływu.

## 5.2. Opis matematyczny przepływu nieustalonego w przewodach ciśnieniowych metodą charakterystyk

### 5.2.1. Równania pochodnych lokalnych prędkości przepływu i ciśnienia w miejscu zaistnienia zaburzenia

Każdy przepływ nieustalony w ciśnieniowym przewodzie zamkniętym można opisać dynamicznym równaniem przepływu, wyprowadzonym z drugiej zasady dynamiki Newtona, oraz równaniem zachowania ciągłości przepływu masy płynnej. Wykorzystuje się do tego celu metodę charakterystyk, przedstawioną w p. 3.6, która pozwala opisać zależność pomiędzy ciśnieniem wyrażonym wysokością słupa wody a natężeniem, względnie prędkością, przepływu w miejscach pojawienia się dowolnego zaburzenia wywołanego przez czynniki zewnętrzne, jakimi są między innymi urządzenia mechaniczne siłowni wodnych. Każde miejsce, w którym pojawi się zaburzenie, narusza pierwotnie istniejący stan przepływu, ale równocześnie przyczynia się do wytworzenia nowych warunków przepływu.

Zgodnie z rozważaniami zawartymi w rozdziale drugim (p. 2.2 i 2.3.1) równaniami wyjściowymi są:

a) dynamiczne równanie przepływu w przewodach zamkniętych:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g(\sin \varphi - I_s) \quad (5.12)$$

b) równanie zachowania ciągłości przepływu masy płynnej wody:

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial x} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0 \quad (5.13)$$

gdzie:  $\rho Q$  – natężenie przepływu masy płynnej,

$\rho A$  – masa płynna wody znajdującej się na jednostkowej długości przewodu.

Aby wyznaczyć poszukiwaną zależność pomiędzy wysokością ciśnienia dynamicznego (uderzenia hydraulicznego) a zmianą natężenia przepływu, równanie (5.13) poddano transformacji, dokonując podstawienia:

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial x} = \frac{\partial \rho A u}{\partial x} = \rho A \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{\partial A}{\partial x} + A u \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} = \rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.15)$$

Otrzymano równanie zachowania ciągłości masy płynnej w postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \frac{1}{A} \left( u \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.16)$$

W przewodzie o zmiennej powierzchni wewnętrznej i zmiennym ciśnieniu wody występującym na długości tego przewodu względna zmiana powierzchni przekroju jest równa:

$$\frac{\partial A}{A}(x, p) = \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{p=\text{const}} \partial x + \frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial p} \right)_{x=\text{const}} \partial p \quad (5.17)$$

Zmienną powierzchnię przekroju przewodu na jego długości można opisać następująco:

$$\frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{p=\text{const}} \partial x = \frac{d \ln A}{dx} dx \quad (5.18)$$

Zgodnie z przyjętymi ogólnymi założeniami w celu określenia względnej zmiany gęstości wody i powierzchni wewnętrznej przekroju przewodu poddanego ciśnieniu wody można zastosować prawo Hooke'a:

$$\frac{\partial \rho}{\rho} = k_\rho \partial p \quad (5.19)$$

$$\frac{1}{A} \left( \frac{\partial A}{\partial p} \right)_{x=\text{const}} \partial p = k_o \partial p \quad (5.20)$$

gdzie:  $k_\rho$  – współczynnik proporcjonalności pomiędzy względną zmianą gęstości a zmianą ciśnienia wody; jego odwrotnością jest moduł sprężystości wody;

$k_o$  – współczynnik proporcjonalności pomiędzy względną zmianą powierzchni wewnętrznej przekroju a zmianą ciśnienia wody wywieranego na przewód; jest zależny od modułu sprężystości powłoki i konstrukcji przewodu (patrz 5.3).

Poszczególne pochodne równania (5.17) można opisać formułami, w których ciśnienie wody jest zmienną w czasie i na długości przewodu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = k_\rho \rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = k_o A \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = k_\rho \rho \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = k_o A \frac{\partial p}{\partial x} + A \frac{d \ln A}{dx} dx \quad (5.24)$$

Podstawiając zależności (5.21)–(5.24) do równania (5.16), otrzyma się równania zachowania ciągłości masy płynnej wody znajdującej się w przewodzie pod zmiennym ciśnieniem  $p$  w postaci

$$\frac{\partial u}{\partial x} + k_\rho u \frac{\partial p}{\partial x} + k_o u \frac{\partial p}{\partial x} + k_\rho \frac{\partial p}{\partial t} + k_o \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{d \ln A}{dx} = 0 \quad (5.25)$$

albo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (k_\rho + k_o) \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + u \frac{d \ln A}{dx} = 0 \quad (5.26)$$

Dynamiczne równanie przepływu (5.12) i równanie ciągłości masy płynnej (5.26) zawierają cztery niewiadome. Są to pochodne cząstkowe:  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial t$ ,  $\partial p/\partial x$ ,  $\partial p/\partial t$ . Mogą one zostać wyznaczone, jeżeli uwzględni się, że przyrosty prędkości  $du$  i ciśnienia  $dp$  są funkcją drogi i czasu w postaci:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (5.27)$$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial t} dt \quad (5.28)$$

Układ czterech równań (5.25)–(5.28) pozwala w pierwszej kolejności wyeliminować pochodne cząstkowe prędkości i ciśnienia względem czasu, tj.  $\partial u/\partial t$ ,  $\partial p/\partial t$ , a następnie wyznaczyć dwie pozostałe niewiadome, tj.  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial p/\partial x$ , z następujących równań powstałych z podstawienia zależności (5.27) i (5.28) do równań (5.12) i (5.26):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + (k_\rho + k_o) \left[ \left( u - \frac{dx}{dt} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} \right] + u \frac{d \ln A}{dx} = 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left( u - \frac{dx}{dt} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{du}{dt} - g \left( \sin \varphi - \frac{dh_s}{dx} \right) = 0 \quad (5.30)$$

Z tego układu równań otrzymuje się następujące formuły poszukiwanych pochodnych  $\partial u/\partial x$  i  $\partial p/\partial x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(k_\rho + k_o) \left( u - \frac{dx}{dt} \right) \left[ \frac{du}{dt} - g \left( \sin \varphi - \frac{dh_s}{dx} \right) \right] - \frac{1}{\rho} \left[ u \frac{d \ln A}{dx} + (k_\rho + k_o) \frac{dp}{dt} \right]}{\frac{1}{\rho} - (k_\rho + k_o) \left( u - \frac{dx}{dt} \right)^2} \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\left[ u \frac{d \ln A}{dx} + (k_\rho + k_o) \frac{dp}{dt} \right] \left( u - \frac{dx}{dt} \right) + g \left( \sin \varphi - \frac{dh_s}{dx} \right) - \frac{du}{dt}}{\frac{1}{\rho} - (k_\rho + k_o) \left( u - \frac{dx}{dt} \right)^2} \quad (5.32)$$

Funkcja pochodnych lokalnych prędkości przepływu i ciśnienia w punkcie (przekroju) spotkania przeciwstawnych zaburzeń, względnie czoła zaburzenia, jest nieciągła. Skutkuje to tym, że mianowniki równań (5.31) i (5.32) przyjmują wartość zero:

$$\frac{1}{\rho} - (k_\rho + k_o) \left( u - \frac{dx}{dt} \right)^2 = 0 \quad (5.33)$$

Z przekształcenia tego równania wynika, że pochodna drogi względem czasu stanowi względną prędkość rozprzestrzeniania się dowolnego zaburzenia (punktu osobliwego). Jest to prędkość, z jaką rozprzestrzenia się zaburzenie w stosunku do powłoki rurociągu:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{\frac{1}{\rho(k_\rho + k_o)}} \quad (5.34)$$

Znak plus odnosi się do zaburzenia zstępującego, rozprzestrzeniającego się zgodnie z kierunkiem przepływu, a znak minus – do zaburzenia wstępującego przeciwnie do kierunku przepływu. Wyrażenie:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho(k_\rho + k_o)}} \quad (5.35)$$

jest definiowane jako bezwzględna prędkość propagacji zaburzeń, będąca funkcją gęstości wody i odkształcalności sprężystej przewodu ciśnieniowego. Jest ona nieporównywalnie większa od prędkości przepływu, co czyni ją wielkością obliczeniową propagacji zaburzeń i fal ciśnienia.

### 5.2.2. Równania różniczkowe zmiany ciśnienia i natężenia przepływu na drodze rozprzestrzeniającego się zaburzenia

Jeżeli mianowniki równań (5.31) i (5.32) są równe zero, to ich liczniki muszą też być równe zero, aby pochodne lokalne  $\partial u/\partial x$  i  $\partial p/\partial x$  posiadały określoną wartość w przekroju przewodu, gdzie występuje nieciągłość przepływu. Podstawiając do liczników równań (5.31) i (5.32) równanie (5.34) sprowadzone do postaci:

$$\rho(k_\rho + k_o) = \frac{1}{\left( u - \frac{dx}{dt} \right)^2} \quad (5.36)$$

otrzymuje się w obu przypadkach jedno i to samo równanie:

$$u\rho \frac{d \ln A}{dx} \left( u - \frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho \left[ g \left( \sin \varphi - \frac{dh_s}{dx} \right) - \frac{du}{dt} \right] \left( u - \frac{dx}{dt} \right) + \frac{dp}{dt} = 0 \quad (5.37)$$

Jeżeli teraz wprowadzi się do równania (5.37) wyrażenia opisujące prędkość względną (5.34) i bezwzględną (5.35), to otrzyma się równanie opisujące zmianę

ciśnienia i prędkości przepływu występujących na drodze propagującego się zaburzenia zstępującego (znak plus), względnie wstępującego (znak minus):

$$dp \pm \rho c du \pm \rho c g \left( \frac{dh_s}{dx} - \sin \varphi \right) dt + \rho c^2 u \frac{d \ln A}{dx} dt = 0 \quad (5.38)$$

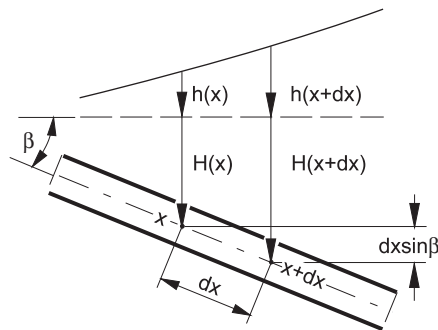
Ta postać równania opisującego przepływ nieustalony w przewodzie ciśnieniowym nie jest dogodna do prowadzenia obliczeń dla potrzeb hydrotechniki. Dlatego wygodniej jest nie wyznaczać wzrostu ciśnienia w odniesieniu do osi rurociągu, ale wyznaczyć przyrosty ciśnienia hydrodynamicznego w odniesieniu do wybranego poziomu hydrostatycznego.

Jeżeli poziom odniesienia znajdzie się na ustalonym poziomie zwierciadła wody w zbiorniku, to zmiana ciśnienia w osi przewodu na długości  $dx$  będzie równa:

$$dp = \rho g(dx \sin \beta + dh) \quad (5.39)$$

gdzie:  $\rho g dx \sin \beta$  – zmiana ciśnienia wynikająca z położenia wysokościowego przewodu,

$\rho g dh$  – zmiana poziomu piezometrycznego (rys. 5.1).



Rys. 5.1. Składowe ciśnienia hydrodynamicznego na długości rurociągu biegnącego w pochyleniu  $\beta$

Uwzględniając powyższą zależność, równanie (5.38) można zapisać w następującej postaci:

$$\rho g dh \pm du \pm \rho g c \frac{dh_s}{dx} dt + \rho c^2 u \frac{d \ln A}{dx} dt = 0 \quad (5.40)$$

Podstawiając do równania (5.40):

$$dx = \pm c dt \quad (5.41)$$

otrzymuje się równania różniczkowe opisujące związek pomiędzy zmianą prędkości przepływu a przyrostem ciśnienia dynamicznego, zachodzące wzdłuż charakterystyki prostej:



$$dh + \frac{c}{g} du + dh_s + \rho cd \ln A = 0 \quad (5.42)$$

i charakterystyki wstecznej:

$$dh - \frac{c}{g} du + dh_s - \rho cd \ln A = 0 \quad (5.43)$$

Prowadząc obliczenia numeryczne uderzenia hydraulicznego w rurociągu ciśnieniowym i na wlocie do urządzenia hydraulicznego siłowni wodnej, korzystnie jest przyjmując natężenie przepływu jako zmienną niezależną. Wówczas równania (5.42) i (5.43) odpowiednio przyjmą następującą postać:

$$dh + \frac{c}{gA} dQ + dh_s + \rho cd \ln A = 0 \quad (5.44)$$

i

$$dh - \frac{c}{gA} dQ + dh_s - \rho cd \ln A = 0 \quad (5.45)$$

### 5.3. Prędkość propagacji zaburzeń przepływu w rurociągach i sztolniach energetycznych

#### 5.3.1. Założenia i uproszczenia

Formuły matematyczne opisujące prędkość propagacji zaburzeń przepływu w rurociągach i sztolniach są wyprowadzone z podstawowych zasad mechaniki, przy pewnych założeniach upraszczających. Przyjmuje się, że powłoki przewodu prowadzącego wodę pod zmiennym ciśnieniem odkształcają się sprężysto pod wpływem uderzenia hydraulicznego. Jest to założenie, które może być dostatecznie słuszne w odniesieniu do rurociągu zbudowanego z cienkich blach stalowych, pracujących w strefie odkształceń sprężystych. Staje się jednak dyskusyjne w strefie odkształceń sprężysto-plastycznych, nawet w przypadku takich rurociągów. Jest także mocno dyskusyjne w odniesieniu do rurociągów o konstrukcji żelbetowej i sztolni o obudowie betonowej i opancerzonej. Mimo to przyjmuje się, że także w nich związek pomiędzy naprężeniem a odkształceniem podlega prawu Hooke'a. Dalej przyjmuje się, że nie zachodzą zmiany objętości wody znajdującej się w przewodzie wskutek zmiany jej gęstości i odkształcenia przewodu. W wodzie nie ma nierozpuszczonego powietrza i nie wydziela się ono wskutek stosunkowo gwałtownej zmiany ciśnienia. W obliczeniach technicznych pomija się wpływ prędkości przepływu na prędkość rozchodzenia się zaburzeń jako wielkość bardzo małą, mieszczącą się w ogólnym błędzie powstałym w wyniku przyjętych uproszczeń.

Jak wykazują doświadczenia, powyższe założenia i uproszczenia nie mają istotnego wpływu na realne techniczne wartości poszukiwanych parametrów przepływu nieustalonego.

### 5.3.2. Ogólna formuła opisująca prędkość propagacji zaburzeń przepływu

Wzór (5.35) świadczy o tym, że prędkość propagacji zaburzenia przepływu jest zależna w decydującym stopniu od sprężystości wody i odkształcalności sprężystej powłoki rurociągu, która z kolei jest funkcją konstrukcji tegoż rurociągu. Badając wpływ tych czynników na prędkość propagacji zaburzeń, warto zastąpić współczynniki  $k_\rho$  i  $k_o$  modułami odpowiednio sprężystości wody  $K_w$  i sprężystości  $K_o$  materiału, z którego zbudowana jest powłoka, z uwzględnieniem konstrukcji rurociągu za pomocą współczynnika  $\delta$ .

Współczynnik  $k_\rho$  jest odwrotnością modułu sprężystości wody:

$$k_\rho = \frac{1}{K_w} \quad (5.46)$$

W ślad za formułą (5.20) przyjmuje się, że względna zmiana powierzchni wewnętrznej przekroju rurociągu jest równa:

$$\frac{dA}{A} = \delta k_o dp \quad (5.47)$$

Wobec tego współczynnik  $k_o$  będzie równy:

$$k_o = \frac{\delta}{K_o} \quad (5.48)$$

Wprowadzając do formuły (5.35) wyrażenia (5.46) i (5.48), otrzymuje się ogólny wzór na prędkość propagacji zaburzenia w rurociągu:

$$c = \frac{\sqrt{\frac{K_w}{\rho}}}{\sqrt{1 + \delta \frac{K_w}{K_o}}} \quad (5.49)$$

### 5.3.3. Prędkość głosu w wodzie

Licznik formuły (5.49):

$$\sqrt{\frac{K_w}{\rho}} = c_w \quad (5.50)$$

jest prędkością głosu w czystej, nienapowietrzanej wodzie. Na jej wielkość mają wpływ temperatura i ciśnienie wody wypełniającej rurociąg. Pod wpływem temperatury gęstość wody zmienia się tylko nieznacznie, co zwykle się pomija. Ciśnienie wody wpływa natomiast znacząco na jej moduł sprężystości  $K_w$  (tabl. 5.1):

$$K_w = 6,5(p + p_*) \quad (5.51)$$

gdzie:  $p_*$  – wytrzymałość wody na jej dekompozycję [52].

**Tablica 5.1**

Masa właściwa wody i jej ciśnienie dekompozycyjne w funkcji temperatury

$t$ [°C]	0	4	10	20	30	40	50
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	999,87	1000,00	999,75	998,26	995,76	992,35	988,20
$p_*$ [Mpa]	289	300	308	320	330	335	334

W literaturze [75] spotyka się też formułę, która podaje gotowy wzór empiryczny, określający wartość prędkości głosu w funkcji temperatury (tabl. 5.2):

$$c_w = 1410 + 4,20t - 0,036t^2 \quad (5.52)$$

**Tablica 5.2**

Wartości liczbowe prędkości głosu

$t$ [°C]	0	4	10	20	30	40	50
$c_w$ [m/s]	1410	1425	1448	1480	1504	1520	1530

### 5.3.4. Prędkość propagacji zaburzeń w rurociągu stalowym o powłoce cienkościennej

W rurociągu o sprężystej cienkościennej powłoce pod wpływem przyrostu ciśnienia o wartość  $dp$  powstają odkształcenia opisane wzorami Lamego:

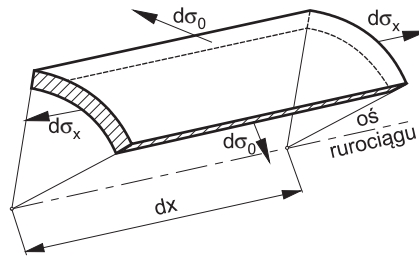
— radialne:

$$d\varepsilon_r = \frac{d\sigma_o - \nu_z d\sigma_x}{K_z} \quad (5.53)$$

— podłużne:

$$d\varepsilon_x = \frac{d\sigma_x - \nu_z d\sigma_o}{K_z} \quad (5.54)$$

które są wywołane przez jednoczesne działanie powstałych naprężeń obwodowych  $d\sigma_o$  i podłużnych  $d\sigma_x$ , równomiernie rozłożonych w przekroju powłoki (rys. 5.2).



Rys. 5.2. Składowe naprężenia w powłoce rurociągu powstałe od obciążenia wewnętrznego  $dp$

W wielkości powstałych odkształceń udział naprężeń obwodowych jest proporcjonalny do wielkości działającego przyrostu ciśnienia. Natomiast udział naprężeń podłużnych jest zależny między innymi od możliwości jednostronnego lub dwustronnego przemieszczania się rurociągu.

#### a) Rurociąg obustronnie utwierdzony

Rurociąg obustronnie utwierdzony nie ma możliwości wydłużania się ( $\varepsilon_x = 0$ ). W powłoce występują naprężenia na kierunku:

— radialnym:

$$d\sigma_o = \frac{r}{e_o} dp \quad (5.55)$$

— podłużnym:

$$d\sigma_x = \nu_z d\sigma_o \quad (5.56)$$

Pod wpływem działania przyrostu ciśnienia  $dp$  odkształcenia radialne charakteryzują się przyrostem promienia rurociągu, którego wielkość jest równa:

$$dr = (1 - \nu_z^2) \frac{r^2 dp}{e_o K_z} \quad (5.57)$$

Względny przyrost powierzchni przekroju poprzecznego pod działaniem ciśnienia  $dp$  wynosi więc:

$$\frac{dA}{A} = (1 - \nu_z^2) \frac{2r dp}{e_o K_z} \quad (5.58)$$

Z porównania wzorów (5.48) i (5.58) wynika, że współczynnik konstrukcji  $\delta$  jest opisany przez wzór:

$$\delta = (1 - \nu_z^2) \frac{2r}{e_o} \quad (5.59)$$

Występujący w powyższych wzorach współczynnik  $\nu_z$  charakteryzuje wielkość odkształceń poprzecznych, wywołanych przez odkształcenia podłużne powstałe pod

działaniem przyrostu ciśnienia  $dp$ . Nosi nazwę liczby Poissona. Dla stali jego wartość przyjmuje się jako 0,3, a moduł sprężystości  $K_z = 2,1 \times 10^5$  MPa.

### b) Rurociąg jednostronnie utwierdzony

Pod wpływem przyrostu ciśnienia o wartości  $dp$  w rurociągu jednostronnie utwierdzonym powstają naprężenia podłużne:

$$d\sigma_x = \frac{A}{A_o} dp \quad (5.60)$$

gdzie:  $A_o$  – powierzchnia przekroju poprzecznego powłoki rurociągu [ $m^2$ ].

W powłoce rurociągu o przekroju okrągłym naprężenia podłużne są równe:

$$d\sigma_x = \frac{r}{2e_o} dp \quad (5.61)$$

Podstawiając do wzoru (5.54) formuły (5.55), (5.56) i (5.61), otrzymuje się:

$$dr = (1 - 0,5\nu_z) \frac{r^2}{e_o K_z} dp \quad (5.62)$$

$$\frac{dA}{A} = (1 - 0,5\nu_z) \frac{d}{e_o K_z} dp \quad (5.63)$$

a stąd:

$$\delta = (1 - 0,5\nu_z) \frac{d}{e_o} dp \quad (5.64)$$

### c) Rurociąg swobodnie odkształcający się, zdylatowany

Rurociąg mogący swobodnie odkształcić się podłużnie z zasady składa się z odcinków (segmentów) połączonych ze sobą wodoszczelnymi elastycznymi uszczelnieniami, wskutek czego naprężenia podłużne  $\sigma_x$  nie powstają. Natomiast pod wpływem wzrostu ciśnienia wewnętrznego o wartości  $dp$  powstają odkształcenia:

— podłużne:

$$\varepsilon_x = -\nu_z \frac{r}{e_o K_z} dp \quad (5.65)$$

— poprzeczne:

$$\varepsilon_r = \frac{r}{e K_z} dp \quad (5.66)$$

Nie uczyni się istotnego błędu, przyjmując, że zmiana długości poszczególnych segmentów, a zatem zmiana objętości zawartej w rurociągu wody nie ma wpływu na

prędkość propagacji zaburzeń. Przy tym nieco upraszczającym założeniu przyrost promienia wewnętrznego rurociągu będzie równy:

$$dr = \frac{r^2 dp}{e_o K_z} \quad (5.67)$$

co sprawia, że przyrost względnej powierzchni przekroju może być opisany formułą:

$$\frac{dA}{A} = \frac{2r dp}{e_o K_z} \quad (5.68)$$

co stanowi z kolei, że współczynnik konstrukcji takiego rurociągu jest równy:

$$\delta = \frac{d}{e_o} \quad (5.69)$$

### 5.3.5. Prędkość propagacji zaburzeń w rurociągu żelbetowym

Rozpatrzmy odkształcenia w rurociągu żelbetowym składającym się z zespołu odcinków mogących swobodnie się odkształcać na kierunku podłużnym i poprzecznie. Wzór (5.49) będzie miał tu zastosowanie przy wyznaczeniu właściwego współczynnika konstrukcji  $\delta$ . Ciśnienie wewnętrzne w rurociągu żelbetowym jest przenoszone przez beton i zbrojenie obwodowe w proporcjach odpowiadających ich modułom sprężystości. Pozwala to przyjąć, że rzeczywista grubość  $e_b$  powłoki betonowej może zostać zastąpiona ekwiwalentną o grubości:

$$e_b^* = e_b \left( 1 + \frac{K_z}{K_b} \mu \right) \quad (5.70)$$

gdzie:  $K_b$  – moduł sprężystości betonu (tabl. 5.3),

$\mu$  – wskaźnik zbrojenia obwodowego powłoki rurociągu.

Przyrost powierzchni poprzecznej powłoki betonowej o grubości zastępczej jest równy:

$$\frac{dA}{A} = \frac{d dp}{e_b^* K_b} \quad (5.71)$$

Współczynnik konstrukcji  $\delta$  jest opisany formułą:

$$\delta = \frac{d}{e_b(1 + \mu K_b)} K_z \quad (5.72)$$

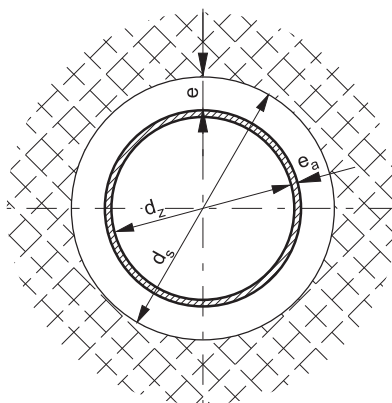
Tablica 5.3

Moduł sprężystości betonu  $K_b$  według PN-B-03264

Klasa betonu	B15	B20	B25	B30	B37	B45	B50	B55	B60	B65	B70
$K_b \times 10^3$ [Mpa]	26	27,5	29	30,5	32	33,5	35	36	37	38	39

### 5.3.6. Prędkość propagacji zaburzeń w sztolni o przekroju okrągłym o obudowie betonowej żelbetowej i opancerzonej

Rozpatrzmy przypadek rozprzestrzeniania się zaburzenia w opancerzonej sztolni o przekroju okrągłym, której obudowa jest trwale zakotwiona w podłożu skalnym (rys. 5.3).



Rys. 5.3. Przekrój poprzeczny sztolni z obudową stalową i żelbetową

Przyjmijmy, że wzrost ciśnienia  $dp$  jest przenoszony odpowiednio przez powłokę stalową  $dq_z$ , betonową  $dq_b$  i maszyn skalny  $dq_s$ :

$$dp = dq_z + dq_b + dq_s \quad (5.73)$$

Odształcenia radialne obudowy stalowej i betonowej mają tę samą wielkość co górotwór. Możemy je opisać za pomocą następujących wzorów:

– dla ośrodka skalnego:

$$dr = \frac{dq_s}{K_s} \quad (5.74)$$

gdzie:  $K_s$  – współczynnik podatności sprężystej górotworu – jest równy:

$$K_s = \frac{1}{(1 + \nu_s)} \frac{dq_s}{r_s} \quad (5.75)$$

— dla obudowy betonowej:

$$dr = (1 - \nu_b^2) \frac{r_z^2}{e_b} \frac{dq_b}{K_b} \quad (5.76)$$

— dla obudowy stalowej:

$$dr = (1 - \nu_z^2) \frac{r_z^2}{e_z} \frac{dq_z}{K_z} \quad (5.77)$$

Formuły (5.74) i (5.75) można zapisać w postaci:

$$dr = (1 - \nu_z^2) \frac{r_z^2}{e_z} \frac{dp - dq_b - dq_s}{K_z} \quad (5.78)$$

albo:

$$dr = (1 - \nu_b^2) \frac{r_b^2}{e_b} \frac{dp - dq_z - dq_s}{K_b} \quad (5.79)$$

Dokonując dalszych przekształceń formuł (5.78) i (5.79), otrzymuje się wzory opisujące zmianę promienia odkształceń sztolni jako funkcję współczynnika konstrukcji  $\delta$ :

a) obudowy stalowej

$$dr = \delta_z \frac{r_z}{K_z} \frac{dp}{2} \quad (5.80)$$

b) obudowy betonowej:

$$dr = \delta_b \frac{r_b}{K_b} \frac{dp}{2} \quad (5.81)$$

gdzie:

$$\delta_z = \frac{2}{\frac{e_z}{(1 - \nu_z^2)r_z} + \frac{K_b r_z}{K_z r_b} \frac{e_b}{(1 - \nu_b^2)r_b} + \frac{K_s}{K_z} (1 + \nu_s) \frac{r_z}{r_s}} \quad (5.82)$$

$$\delta_b = \frac{2}{\frac{K_z}{K_b} \frac{e_z}{(1 - \nu_z^2)} \frac{r_b}{r_z} + \frac{e_b}{(1 - \nu_b^2)r_b} + \frac{K_s}{K_b} (1 - \nu_s) \frac{r_b}{r_s}} \quad (5.83)$$

Względna zmiana powierzchni wewnętrznej sztolni wywołana przez przyrost ciśnienia wody o wartości  $dp$  jest równa:



$$\frac{dA}{A} = \delta_z \frac{dp}{K_z} \quad (5.84)$$

albo:

$$\frac{dA}{A} = \delta_b \frac{dp}{K_b} \quad (5.85)$$

Stąd prędkość propagacji zaburzeń w sztolni opancerzonej przy odkształcaniu sprężystym górotworu wynosi:

$$c = \frac{c_w}{\sqrt{1 + \delta_z \frac{K_w}{K_z}}} \quad (5.86)$$

lub:

$$c = \frac{c_w}{\sqrt{1 + \delta_b \frac{K_w}{K_b}}} \quad (5.87)$$

## 5.4. Wyznaczanie uderzenia hydraulicznego i biegu nieustalonego maszyny hydroenergetycznej metodą charakterystyk

### 5.4.1. Podstawowe zasady obliczeń metodą charakterystyk

Nagły zanik mocy odbieranej z siłowni hydroenergetycznej może wywołać znaczące, a nawet groźne stany nieustalone w następujących przypadkach:

- gdy zespół jest podłączony do sieci energetycznej i maszyna zachowuje stałą prędkość obrotową;
- gdy zespół znajdujący się w ruchu jest odłączony od sieci energetycznej, a wirnik maszyny obraca się ze zmienną prędkością.

W pierwszym przypadku uderzenie hydrauliczne jest wywołane tylko manewrem urządzenia sterującego przepływem, w drugim natomiast powstanie znaczącego uderzenia hydraulicznego powodują zwykle manewr kierownicy i bieg nieustalony wirnika maszyny hydraulicznej. Zdarza się, że powstanie uderzenia hydraulicznego powoduje tylko zmiana prędkości wirnika maszyny, co może wystąpić przy zablokowanej kierownicy.

Do prowadzenia obliczeń uderzenia hydraulicznego w samym rurociągu służą równania różniczkowe (5.41), (5.43) lub (5.44), (5.45) sprowadzone do postaci różnicowej, z uwzględnieniem warunków istniejących na początku i na końcu rurociągu, stwarzanych przez poziom zwierciadła wody w zbiorniku górnym i bieg maszyny hydraulicznej poddanej zmianie obciążenia, co wywołuje zmianę natężenia przepływu przechodzącego przez jej wirnik. Szczególne warunki przepływu przez maszynę powstają wówczas, gdy jej wirnik znajdzie się w stanie nieustalonym, powodującym zmianę prędkości obrotowej, opisaną formułą:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{30 M_h}{\pi J} \quad (5.88)$$

albo:

$$\frac{dn}{dt} = 9,549 \frac{M_h}{J} \quad (5.89)$$

Moment hydrauliczny  $M_h$  jest funkcją poszukiwanych wartości chwilowych natężenia przepływu przechodzącego przez wirnik maszyny  $Q$ , spadku hydraulicznego, względnie wysokości podnoszenia  $H$  oraz prędkości obrotowej  $n$ . Z reguły w trakcie prowadzenia obliczeń jest sukcesywnie wyznaczany za pomocą charakterystyki uniwersalnej maszyny. Niekiedy bywa też prezentowany przez producenta maszyny w postaci graficznej w wielkościach zredukowanych  $M_{11}$ , we współrzędnej  $n_{11}$ .

Do prowadzenia obliczeń numerycznych zmian ciśnienia, prędkości i natężenia przepływu oraz obrotów wirnika służy siatka charakterystyk, odzwierciedlająca drogi przebiegu zaburzeń rzeczywistych lub wirtualnych. Zaburzenia powstające w odstępach czasu równym krokowi obliczeń stanowią szlak, wzdłuż którego przebiega całkowanie równań opisujących przepływ nieustalony.

#### 5.4.2. Charakterystyka uniwersalna jako podstawa wyznaczania wielkości uderzenia hydraulicznego i prędkości rozbiegowej maszyny hydroenergetycznej

Maszyny hydroenergetyczne są produkowane w seriach, które charakteryzuje wyróżnik szybkobieżności. Poszczególne jednostki danej serii różnią się wielkością, a zatem przepływem  $Q$  oraz momentem obrotowym  $M$ , a w konsekwencji i mocą  $P$ . Posiadają jednak podobny kształt wirnika i podobne właściwości ruchowe. Są instalowane na zbliżone spadach (turbiny) lub wysokości tłoczenia (pompy). Te właściwości w postaci charakterystyki uniwersalnej (rys. 5.4, 5.5) danej serii są wyznaczane na drodze badań laboratoryjnych i z reguły prezentowane graficznie we współrzędnych zredukowanych prędkości obrotowej:

$$n_{11} = \frac{n}{D\sqrt{H}} \quad (5.90)$$

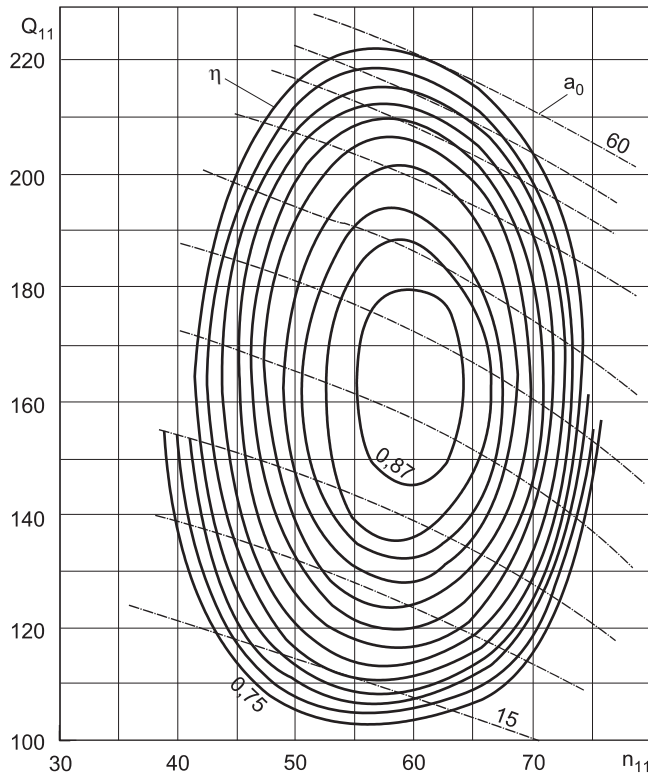
wydatku maszyny (rys. 5.6):

$$Q_{11} = \frac{Q}{D^2\sqrt{H}} \quad (5.91)$$

i jej momentu obrotowego (rys. 5.7):

$$M_{11} = \frac{M}{D^3\sqrt{H}} \quad (5.92)$$

odniesionych do maszyny standardowej o średnicy wirnika  $D = 1,0$  m, pracującej na spadzie  $H = 1,0$  m. Krzywe podporządkowane wielkości otwarcia kierownicy  $a = \text{const}$  przedstawiają funkcję  $Q_{11} = f(n_{11})$ . Krzywe sprawności maszyny standardowej  $\eta = \text{const}$  tworzą tak zwany pagórek sprawności.



Rys. 5.4. Charakterystyka uniwersalna turbiny Francis'a o  $n_s \approx 140$  [45]

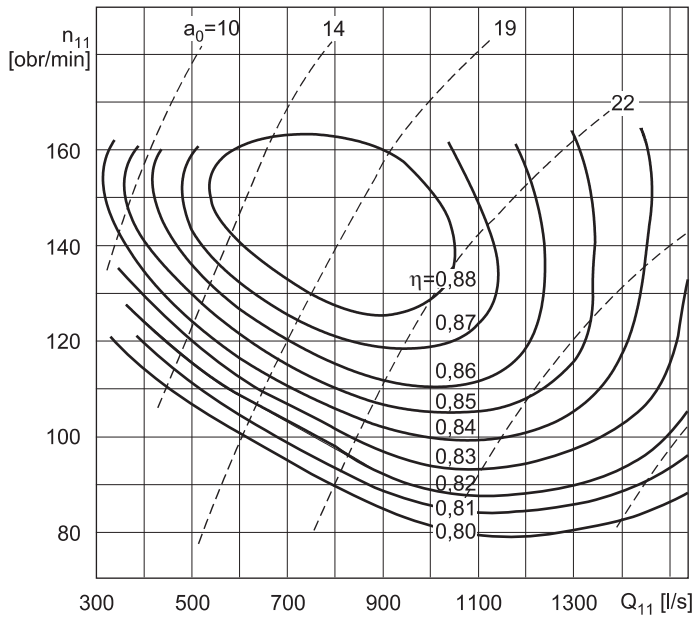
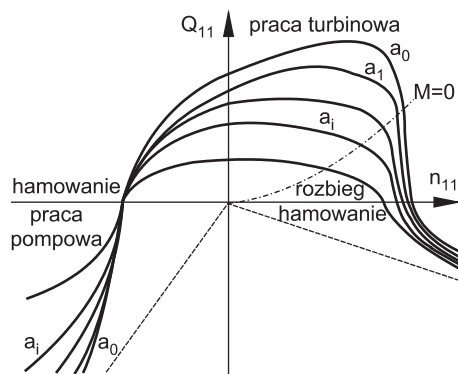
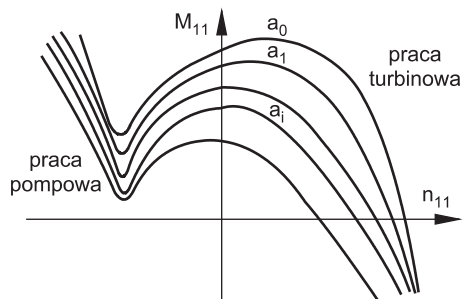
Liczne pomiary mocy zainstalowanych maszyn wykazały, że współczynnik sprawności maszyn przemysłowych jest wyższy od współczynnika maszyny modelowej. W obrębie wierzchołka sprawności różnicę tę opisuje empiryczne równanie:

— dla turbin:

$$\Delta\eta_{max} = (1 - D_m) \left[ 1 - \left( \frac{D_m}{D} \right)^{\frac{1}{5}} \right] \quad (5.93)$$

— dla pomp:

$$\Delta\eta_{max} = (1 - D_m) \left[ 1 - \left( \frac{D_m}{D} \right)^{\frac{2}{5}} \left( \frac{n_m}{n} \right)^{\frac{1}{6}} \right] \quad (5.94)$$

Rys. 5.5. Charakterystyka uniwersalna turbiny Kaplana o  $n_s \approx 660$  [44]Rys. 5.6. Charakterystyki  $Q_{11} = f(n_{11})$  pompoturbiny z wirnikiem Francisa o  $n_s \approx 200$ Rys. 5.7. Charakterystyki  $M_{11} = f(n_{11})$  pompoturbiny z wirnikiem Francisa o  $n_s \approx 200$

Różnica ta maleje w miarę oddalania się od wzgórka modelowego współczynnika sprawności  $\eta_m$ . Charakterystyka uniwersalna pozwala wyznaczyć jednostkowe i rzeczywiste wartości mocy  $P_{11}$  i  $P$ , przy dowolnie wybranej wielkości otwarcia kierownicy  $a$  i zadanej jednostkowej prędkości obrotowej  $n_{11}$  lub roboczej  $n$ , z uwzględnieniem sprawności modelowej lub roboczej:

— w pracy turbinowej

$$P = \rho g Q H \eta \quad (5.95)$$

— w pracy pompowej

$$P = \frac{1}{\eta} \rho g Q H \quad (5.96)$$

Jeżeli składniki wzorów (5.95) i (5.96) przyjmie się w jednostkach SI [kg, m, s], to moc zostanie wyliczona w watach. Jeśli przyjmie się gęstość właściwą wody w tonach, moc wyrażona będzie w kilowatach [kW], to jest w jednostkach technicznych dość powszechnie używanych w hydroenergetyce. Związek pomiędzy mocą maszyny roboczej i modelowej przedstawia się następująco:

$$P = P_{11} D^2 H^{\frac{3}{2}} \quad (5.97)$$

Znajomość mocy maszyny i jej prędkości obrotowej pozwala wyznaczyć hydrauliczny moment obrotowy:

$$M_h = \frac{P}{\omega} \quad (5.98)$$

albo:

$$M_h = 0,1047 \frac{P}{n} \quad (5.99)$$

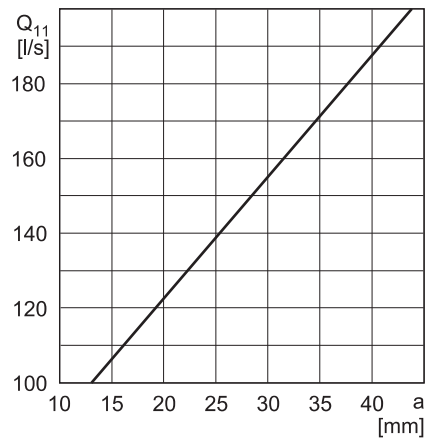
W obliczeniach uderzenia hydraulicznego i prędkości rozbiegowej zespołu hydroenergetycznego potrzebne funkcje  $Q_{11} = f(n_{11})$  i  $M_{11} = f(n_{11})$  (rys. 5.6 i 5.7) z zasady są prezentowane dla stałych wartości rozwarcia kierownicy  $a$ , spełniających warunek:

$$a = i \Delta t \quad (5.100)$$

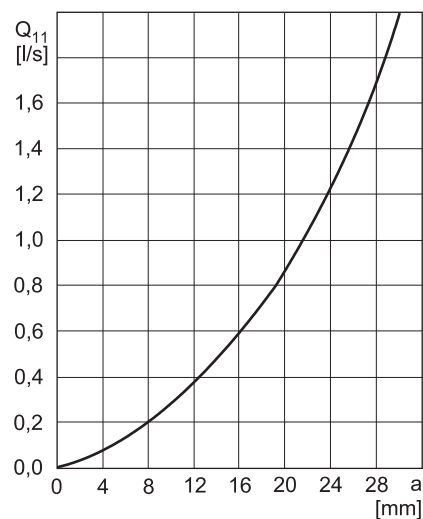
gdzie:  $i = 1, 2, 3, \dots$ , itd.

$\Delta t$  – krok całkowania równań różnicowych przepływu nieustalonego.

Niekiedy możliwe jest opisanie tych funkcji (rys. 5.8 i 5.9) równaniami matematycznymi, co ułatwia prowadzenie obliczeń.



Rys. 5.8. Zależność zredukowanego wydatku  $Q_{11}$  od rozwarcia łopat kierownicy  $a$  przy  $n = \text{const}$  w turbinie Francisa o  $n_s \approx 120$



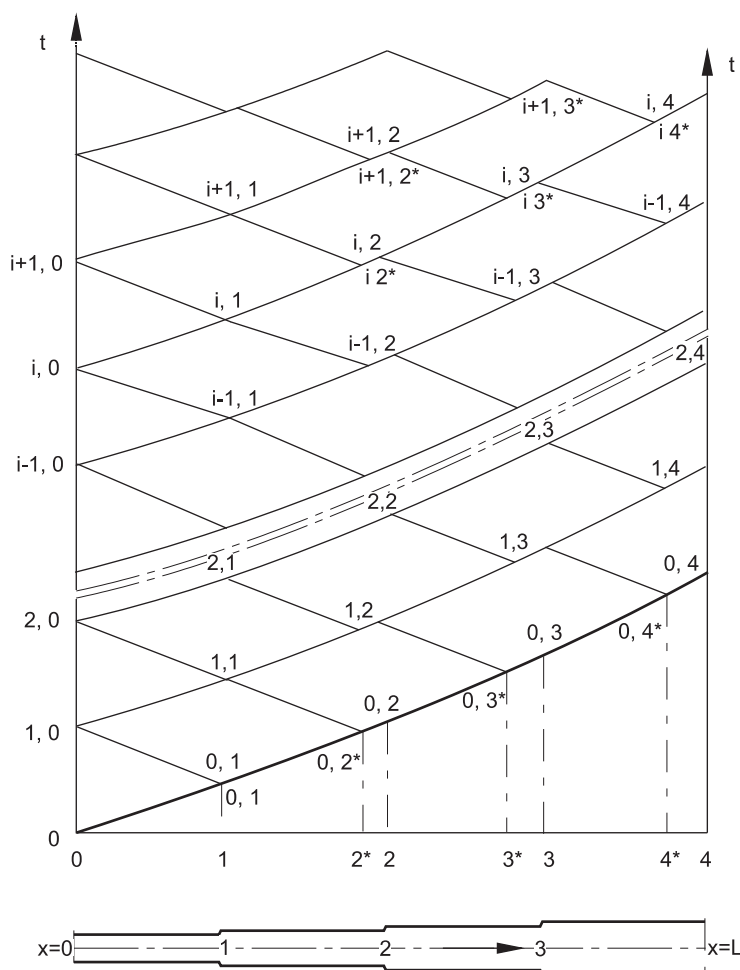
Rys. 5.9. Zależność zredukowanego wydatku  $Q_{11}$  od rozwarcia łopat kierownicy  $a$  przy  $n = \text{const}$  w turbinie Kaplana o  $n_s \approx 660$

### 5.4.3. Obliczeniowa siatka charakterystyk

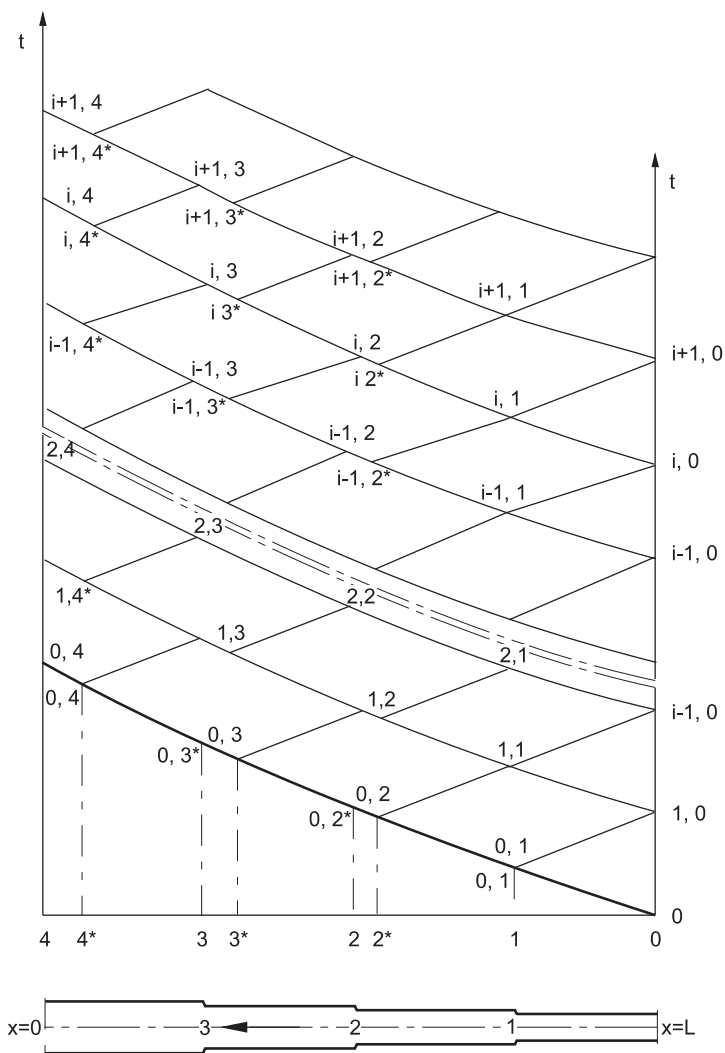
W instalacjach hydroenergetycznych, w których rurociąg jest jednolity, a czas manewru urządzenia sterującego znacząco przewyższa okres przebiegu zaburzeń ( $T_m \gg T$ ), tworzy się prostą siatkę charakterystyk obrazującą drogę przebiegu zaburzeń.

Obliczenia sprowadzają się do wyznaczenia zmian natężenia przepływu na połączeniu rurociągu ze zbiornikiem i natężenia przepływu przechodzącego przez wirnik maszyny oraz zmiany jej prędkości obrotowej.

Jeżeli rurociąg składa się z zestawu odcinków (segmentów) o różnych wymiarach geometrycznych i zachodzi potrzeba uzyskania dokładnych wyników obliczeń, wówczas znajduje zastosowanie złożona siatka charakterystyk. Taką siatkę przedstawiają rysunki 5.10 i 5.11, sporządzone na potrzeby obliczeń uderzenia hydraulicznego w rurociągu składającym się z czterech segmentów o różnych wymiarach.



Rys. 5.10. Siatka obliczeniowa uderzenia hydraulicznego w rurociągu prowadzącym wodę od siłowni do zbiornika



Rys. 5.11. Siatka obliczeniowa uderzenia hydraulicznego w rurociągu prowadzącym wodę do siłowni

Każda taka siatka służy między innymi do wyznaczenia rozkładu w czasie wartości przepływu nieustalonego i uderzenia hydraulicznego na styku dwóch sąsiednich segmentów oraz w przekrojach pośrednich, gdzie powstają elementarne (wirtualne) zaburzenia, będące wytworem przyjętego kroku całkowania równań przepływu nieustalonego. Położenie tych przekrojów określa wzór:

$$x_j = x_{j-1} \pm c_{j-1+j} \Delta t \quad (5.101)$$

gdzie:  $j$  – kolejna liczba przekroju pośredniego,

$c_{j-1+j}$  – prędkość propagacji zaburzeń pomiędzy przekrojami o liczbie  $j-1 \div j$ .



Jeżeli numeracja złącz podąża zgodnie z kierunkiem propagacji zaburzeń wytworzonych przez urządzenie sterujące, a te zgodnie z kierunkiem przepływu, to równanie (5.101) przyjmuje znak plus; jeśli kierunek propagacji zaburzeń jest przeciwny – znak minus. Pierwszy przypadek występuje w trakcie nagłej zmiany natężenia przepływu wywołanej przez pompę, a drugi – przez turbinę. W rurociągu o konstrukcji złożonej zaburzenia odbijają się częściowo od pierwszego złącza i powracają do urządzenia sterującego. Pełny czas przebiegu tych zaburzeń stanowi rozstawę charakterystyk głównych, wzdłuż których są prowadzone obliczenia natężenia przepływu i uderzenia hydraulicznego w kolejnych złączach. Jest to równocześnie krok całkowania równań przepływu nieustalonego. W celu utrzymania porządku obliczeniowego numerację charakterystyk głównych i złącz rurociągu rozpoczyna się, poczynając od urządzenia sterującego, niezależnie od kierunku przepływu wody. Charakterystykę numer zero tworzy zaburzenie rozprzestrzeniające się na bazie przepływu początkowego.

#### 5.4.4. Zasady wyznaczania uderzenia hydraulicznego i zmian prędkości obrotowej maszyny hydroenergetycznej

Na połączeniu rurociągu z urządzeniem sterującym (kierownicą) przepływem w kolejnym czasie  $t_i = i\Delta t$  wartości ekstremalne uderzenia hydraulicznego i prędkości obrotowej maszyny hydraulicznej oblicza się z:

1. układu równań opisujących przepływ nieustalony występujący wzdłuż charakterystyki powrotnej od węzła  $i-1, 1$  do węzła  $i, 0$  dla  $i = 1, 2, \dots$ , itd.;
2. warunków granicznych danych w postaci funkcji  $Q = f(H)$  wyprowadzonej z charakterystyki uniwersalnej, odnoszącej się do otwartego urządzenia sterującego (kierownicy) o wartości  $Q_i$  (dla  $i = 1, 2, \dots$ , itd.):
  - a) przy stałej prędkości obrotowej wirnika ( $n = \text{const}$ ),
  - b) przy zmiennej prędkości obrotowej, podległej prawu ruchu obrotowego.

Równanie przepływu nieustalonego przyjmuje następujące postaci:

- gdy urządzenie sterujące znajduje się na początku rurociągu (przypadek pracy pompy):

$$h_{i,0} - h_{i-1,1} - \frac{c_{0+1}}{gA_{0+1}}(Q_{i,0} - Q_{i-1,1}) - h_{s\ i,0 + i-1,1} = 0 \quad (5.102)$$

- gdy urządzenie sterujące znajduje się na końcu rurociągu (przypadek pracy turbiny):

$$h_{i,0} - h_{i-1,1} + \frac{c_{0+1}}{gA_{0+1}}(Q_{i,0} - Q_{i-1,1}) + h_{s\ i-1 + i,0} = 0 \quad (5.103)$$

Jeżeli urządzeniem sterującym jest zamknięcie mechaniczne, to natężenie przepływu jest równe:

$$Q_{i,0} = \mu A_{i,0} \sqrt{2g(H + h_{i,0})} \quad (5.104)$$

gdzie:  $A_{i,0}$  – czynna powierzchnia otworu zamknięcia w czasie  $t_i$ ,  
 $\mu$  – współczynnik wydatku:

$$\mu = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha + \sum \xi}} A_{i,0} \quad (5.105)$$

gdzie:  $\varepsilon$  – współczynnik dławienia bocznego.

Ten sposób prowadzenia obliczeń może być stosowany wówczas, gdy znana jest zależność wartości współczynnika strat hydraulicznych od wielkości otwarcia kierownicy  $\xi = f(a)$ , przy stałej prędkości obrotowej wirnika maszyny. Jeżeli prędkość obrotowa wirnika maszyny  $n$  jest stała przy otwartej kierownicy o rozwarciu  $a_i$ , to:

$$Q_{i,0} = Q_{11} D^2 \sqrt{H + h_{i,0}} \quad (5.106)$$

$Q_{11}$  jest odczytywane z charakterystyki uniwersalnej o wartości  $a_i$ , którego odcięta jest równa:

$$n_{11} = \frac{n}{D \sqrt{H + h_{i,0}}} \quad (5.107)$$

W obu przypadkach uzyskuje się prawidłowy wynik, jeżeli wartości natężenia przepływu wyliczone ze wzorów (5.104) i (5.106) są tożsame.

Jeżeli wirnik maszyny znajduje się w stanie nieustalonym, przy otwartej kierownicy o wartości rozwarcia  $a_i$ , to kolejność obliczeń poszukiwanych wartości  $h_{i,0}$ ,  $Q_{i,0}$  i  $n_{i,0}$  jest taka, jak przedstawiono poniżej.

Dla wstępnie przyjętego uderzenia hydraulicznego na wlocie do maszyny  $h_{i,0}$  ustala się lub wylicza kolejno:

1. natężenie przepływu  $Q_{i,0}$  odpowiednio ze wzoru (5.102) lub (5.103);
2. jednostkowe natężenie przepływu:

$$Q_{11} = \frac{Q_{i,0}}{D^2 h_{i,0}} \quad (5.108)$$

3. jednostkową prędkość obrotową  $n_{11}$  z charakterystyki uniwersalnej  $a_i$ , odczytaną dla uprzednio wyznaczonej wartości  $Q_{11}$ ;
4. prędkość obrotową:

$$n_{i,0} = n_{11} D \sqrt{H + h_{i,0}} \quad (5.109)$$

5. jednostkowy moment obrotowy  $M_{11}$  z charakterystyki uniwersalnej  $a_i$  opisanej przez funkcję  $M_{11} = f(n_{11})$ ;
6. moment obrotowy:

$$M_{i,0} = M_{11} D^3 \sqrt{H + h_{i,0}} \quad (5.110)$$

7. prędkość obrotową ze wzoru:

$$n_{i,0} = n_{i-1,0} + \frac{M_{i-1,0} + M_{i,0}}{2J} \Delta t \quad (5.111)$$

Wartość uderzenia hydraulicznego  $h_{i,0}$  będzie można uznać za właściwie dobraną, jeżeli z wzorów (5.109) i (5.111) otrzyma się te same wartości prędkości obrotowej  $n_{i,0}$ . Również w tym przypadku niejako automatycznie zostanie prawidłowo wyznaczone natężenie przepływu  $Q_{i,0}$  przechodzące przez wirnik maszyny.

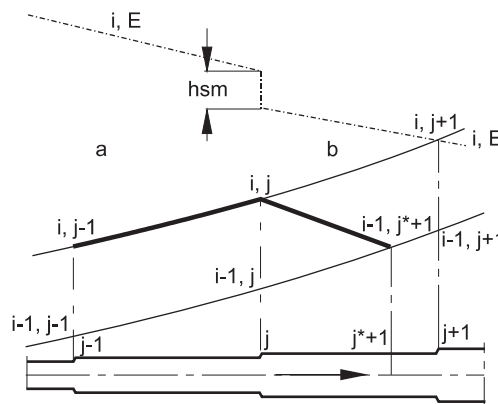
#### 5.4.5. Zasady wyznaczania natężenia przepływu i uderzenia hydraulicznego w pośrednich złączach segmentów rurociągu

Natężenie przepływu i uderzenie hydrauliczne w dowolnym złączu  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, k-1$ ) dwóch sąsiednich segmentów w czasie określonym przez charakterystykę  $i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) wyznacza się, rozwiązując układ równań opisujących przepływ nieustalony, jaki towarzyszy dwóm przeciwstawnym zaburzeniom spotykającym się w tym złączu. Respektuje się przy tym zasadę zachowania ciągłości przepływu i energii:

$$Q_{dp\ i,j} = Q_{op\ i,j} = Q_{i,j} \quad (5.112)$$

$$h_{dp\ i,j} = h_{op\ i,j} + h_{sm\ i,j} \quad (5.113)$$

gdzie: symbolem  $dp$  oznaczono dopływ, a  $op$  – odpływ.



Rys. 5.12. Charakterystyki obliczeniowe na złączu rurociągu odpływowego

W instalacji wyposażonej w urządzenie sterujące na początku rurociągu (rys. 5.12) do wyznaczania poszukiwanych wartości  $Q_{ij}$ ,  $h_{dp\ i,j}$  i  $h_{op\ i,j}$  w punkcie siatki  $i, j$  służy równanie przepływu nieustalonego wzdłuż charakterystyki zaburzenia zstępującego  $i$  od  $i, j-1$  do  $i, j$  od strony dopływu:

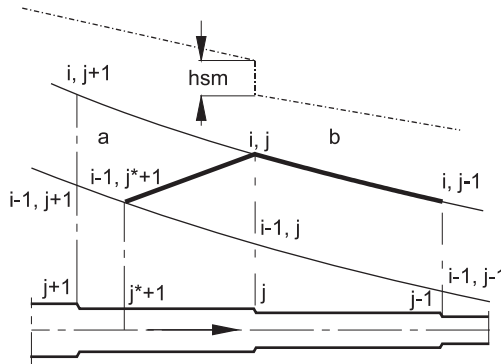
$$h_{dp\ i,j} - h_{op\ i,j-1} + \frac{c_{j-1+j}}{gA_{j-1+j}} (Q_{i,j} - Q_{i-1,j}) + h_{s\ i,j-1+i,j} = 0 \quad (5.114)$$

oraz wzdłuż charakterystyki zaburzenia wstępującego (powrotnego) od  $i-1, j^{*+1}$  do  $i, j$  od strony odpływu:

$$h_{op\ i,j} - h_{i-1,j^{*+1}} - \frac{c_{j^{*+1}}}{gA_{j^{*+1}}}(Q_{i,j} - Q_{i-1,j^{*+1}}) - h_{s\ i,j^{*+1} \div i-1,j^{*+1}} = 0 \quad (5.115)$$

gdzie:  $h_{s\ i,j^{*+1} \div i,j}$  – strata hydrauliczna wysokości ciśnienia w rurociągu pomiędzy złączami  $j-1$  a  $j$ ,

$h_{s\ i,j^{*+1} \div i-1,j^{*+1}}$  – strata hydrauliczna wysokości ciśnienia w rurociągu pomiędzy złączem  $i,j$  a przekrojem pomocniczym  $i-1, j^{*+1}$ .



Rys. 5.13. Charakterystyki obliczeniowe na złączu rurociągu dopływowego

Do wyznaczenia wartości natężenia przepływu i uderzenia hydraulicznego w złączu znajdującym się na rurociągu prowadzącym wodę do urządzenia sterującego służą równania:

— dopływu wzdłuż charakterystyki pomocniczej  $i-1, j^{*+1} \div i, j$  (rys. 5.13):

$$h_{dp\ i,j} - h_{i-1,j^{*+1}} + \frac{c_{j^{*+1}}}{gA_{j^{*+1}}}(Q_{i,j} - Q_{i-1,j^{*+1}}) + h_{s\ i-1,j^{*+1} \div i,j} = 0 \quad (5.116)$$

— odpływu wzdłuż charakterystyki  $i, j-1 \div i, j$ :

$$h_{od\ i,j} - h_{do\ i,j-1} - \frac{c_{j-1}}{gA_{j-1}}(Q_{i,j} - Q_{i,j-1}) + h_{s\ i,j \div i,j-1} = 0 \quad (5.117)$$

gdzie:  $h_{s\ i-1,j^{*+1} \div i,j}$  – strata hydrauliczna wysokości ciśnienia w rurociągu pomiędzy przekrojem pomocniczym  $j^{*+1}$  a złączem  $j$ ,

$h_{s\ i,j \div i,j-1}$  – strata hydrauliczna wysokości ciśnienia w rurociągu pomiędzy złączami  $j$  a  $j-1$ .

### 5.4.6. Równania przepływu nieustalonego na połączeniu rurociągu ze zbiornikiem

Ostatnim etapem obliczeń prowadzonych wzdłuż charakterystyki  $i$  jest wyznaczenie natężenia przepływu na połączeniu rurociągu ze zbiornikiem w czasie  $t_i = i\Delta t + 0,5T$ . Występująca tu różnica poziomu piezometrycznego w zbiorniku i w rurociągu jest funkcją poszukiwanego natężenia przepływu. Przy dopływie wody do zbiornika (praca pompowa) poziom piezometryczny w rurociągu jest wyższy o wartość energii kinetycznej:

$$\Delta h = \alpha \frac{u^2}{2g} \quad (5.118)$$

Natomiast przy wypływie ze zbiornika (praca turbinowa) jest niższy o wartość strat hydraulicznych:

$$h_{sm} = \xi \frac{u^2}{2g} \quad (5.119)$$

Wielkość współczynnika strat hydraulicznych jest w dużym stopniu zależna od kształtu budowli łączącej zbiornik z rurociągiem i zainstalowanych tam urządzeń pomocniczych (zasuwa, kraty, szandory). Natężenie przepływu dopływającego do zbiornika lub wypływającego z niego w badanym czasie wyznacza się z równania przepływu nieustalonego występującego wzdłuż charakterystyki  $i$  od złącza  $k-1$  do  $k$ , gdzie  $k$  jest numerem ostatniego złącza stanowiącego przyłącze rurociągu do zbiornika:

$$h_{i,k} - h_{i,k-1} \pm \frac{c_{k-1+k}}{gA_{k-1+k}} (Q_{i,k} - Q_{i,k-1}) \pm h_{s\ k-1+k} = 0 \quad (5.120)$$

gdzie: znak plus odnosi się do zaburzeń tworzących charakterystyki proste, a znak minus – do zaburzeń wyznaczających charakterystyki wsteczne;

$h_{s\ k-1+k}$  – strata hydrauliczna wysokości ciśnienia pomiędzy złączami  $k-1$  a  $k$ .

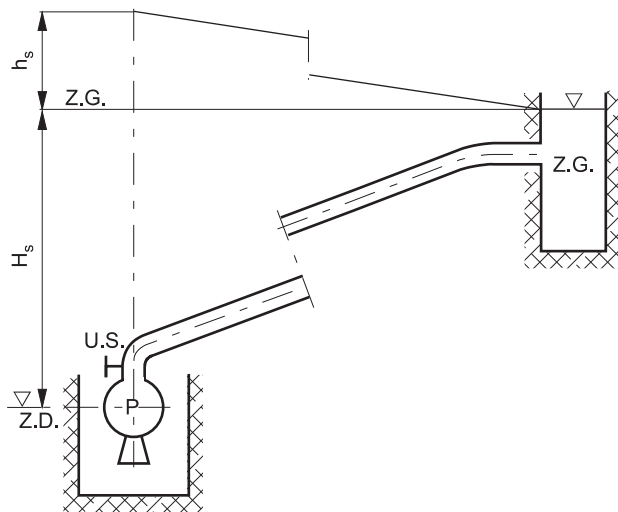
## 5.5. Uderzenia hydrauliczne w przesyłowych instalacjach pompowych

### 5.5.1. Typowe instalacje pompowe dalekiego zasięgu

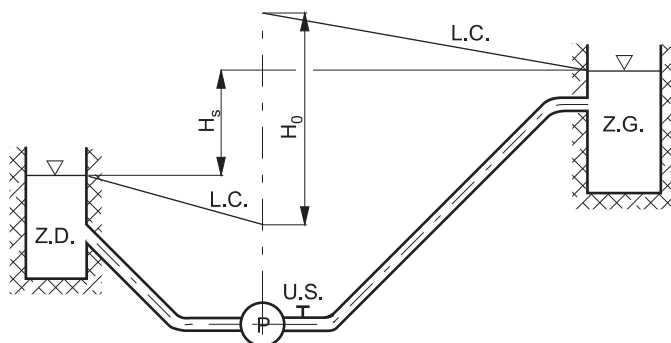
Do przesyłu wody za pośrednictwem rurociągów ciśnieniowych służą instalacje, które zapewniają:

1. tłoczenie wody bezpośrednio ze zbiornika dolnego do górnego (rys. 5.14);
2. przepompowywanie wody na rurociągu dalekiego zasięgu (rys. 5.15);

W tych instalacjach urządzeniami wywołującymi przepływ wody są pompy, zwykle wirowe, napędzane silnikami elektrycznymi. Urządzeniami sterującymi natężeniem przepływu są zasuwy, zawory oraz kierownice stosowane prawie wyłącznie w siłowniach akumulacyjnych (szczytowo-pompowych). Na rurociągu tłocznym często instaluje się klapę zwrotną w celu zatrzymania przepływu powrotnego. Niekiedy instaluje się też zamknięcie awaryjno-remontowe.



Rys. 5.14. Typowe instalacje tłoczące wodę



Rys. 5.15. Typowe instalacje przepompowywania wody

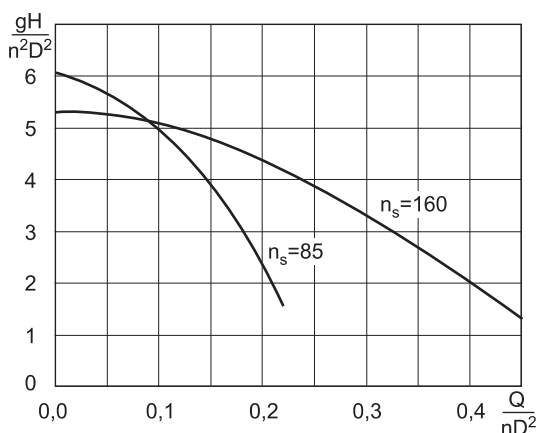
### 5.5.2. Charakterystyki eksploatacyjne pomp wirowych

Rodzaj i wielkość instalowanej pompy wirowej są podporządkowane istniejącym warunkom hydraulicznym, tj. wysokości tłoczenia  $H_w$ , stratom hydraulicznym  $h_s$ , i potrzebnemu wydatkowi  $Q_o$ . Te parametry określają wartość wyróżnika szybkoobrotowości instalowanej pompy:

$$n_s = \frac{nQ}{\sqrt[4]{H^3}} \quad (5.121)$$

gdzie  $H$  jest wysokością podnoszenia wody, będącą sumą różnicy poziomów wody w zbiorniku górnym ZG i dolnym ZD oraz strat hydraulicznych  $h_s$ , powstających w urządzeniach przesyłowych, przy instalowanym wydatku pompy  $Q$  mierzonym w  $m^3/s$ .

Małą wartość  $n_s$  mają pompy stosowane na wysokie ciśnienia i małe wydatki, natomiast duże wartości  $n_s$  mają maszyny na niskie ciśnienia i relatywnie wysokie wydatki;  $n_s$  oddziałuje również na właściwości ruchowe i charakterystyki pompy. Znacząco różnią się też ich charakterystyki uniwersalne (rys. 5.16). Pochodną wyróżnika szybkobieżności jest wielkość instalacji pompowej, a co za tym idzie – wielkość momentu bezwładności  $J$  oraz wielkość uderzenia hydraulicznego.



Rys. 5.16. Charakterystyki pomp przesyłowych o  $n_s = 85$  i  $160$  we współrzędnych zredukowanych

Tłoczona woda otrzymuje moc, jaką wywiera na nią pompa:

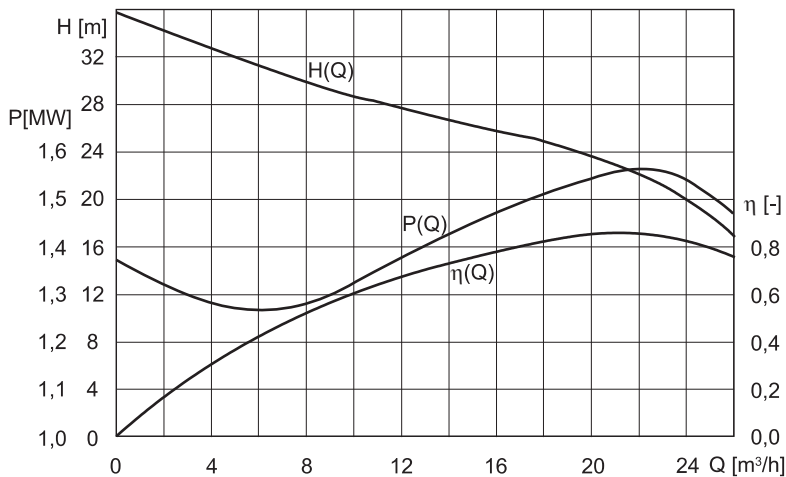
$$P_h = \rho g Q H \quad (5.122a)$$

albo:

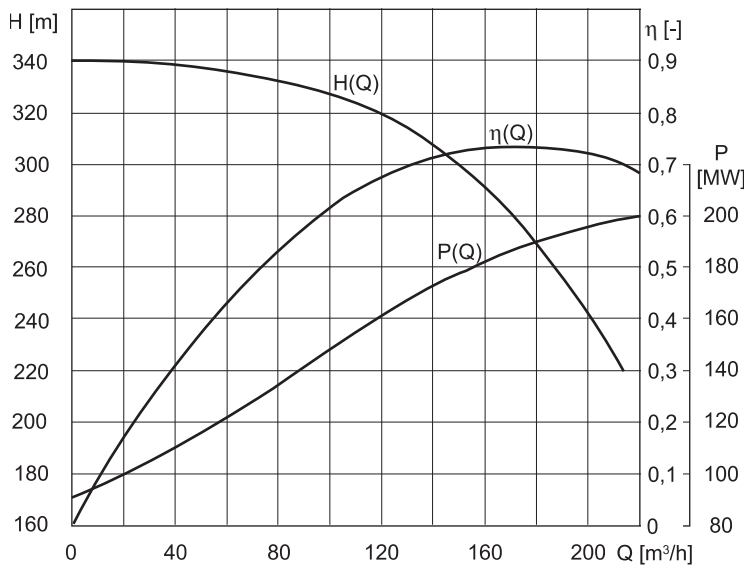
$$P_h = 9,81 Q H \quad (5.122b)$$

Moc pobierana przez zespół silnik–pompa (motopompa) jest większa od mocy hydraulicznej, ponieważ w systemie mechanicznym powstają straty. Wytwórcy pompoturbin dla danej serii maszyn, mających odpowiednią wartość  $n_s$ , podają z zasady charakterystyki uniwersalne we współrzędnych zredukowanych  $n_{11}$  i  $Q_{11}$  (patrz rys. 5.6 i 5.7), w obszarze pracy turbinowej i pompowej. Ułatwia to znacznie prowadzenie obliczeń uderzenia hydraulicznego i zmian prędkości obrotowej wirników zespołu, powstałych po awaryjnym zrzucie obciążenia.

Producenci klasycznych pomp z reguły przedstawiają tylko charakterystyki eksploatacyjne w postaci krzywych obrazujących zmianę wysokości podnoszenia  $H = f(Q)$ , mocy  $P = f(Q)$  i współczynnika sprawności  $\eta = f(Q)$  od instalowanego wydatku pompy (rys. 5.17 i 5.18).



Rys. 5.17. Charakterystyki  $H(Q)$ ,  $P(Q)$  i  $\eta(Q)$  pompy 160-30-8 o  $n = 3650$  obr/min



Rys. 5.18. Charakterystyki  $H(Q)$ ,  $P(Q)$  i  $\eta(Q)$  pompy GNG-10xy o  $n = 2950$  obr/min

W ustalonych warunkach pracy dana pompa o zadanym wydatku instalowanym  $Q_o$  tłoczy wodę na określoną wysokość  $H_o$ , wyznaczając w ten sposób określony punkt funkcjonowania na charakterystyce. Gdy zmienia się wysokość podnoszenia, zmieniają się jej przełyk oraz moc pobierana, względnie prędkość obrotowa w pewnym zakresie, gdy motorem jest silnik asynchroniczny. Wraz ze zmianą wysokości tłoczenia zmianie ulega natężenie przepływu, zgodnie z charakterystyką. Zmiana prędkości obrotowej wywołuje powstanie nowej charakterystyki pompy.



Dla każdego chwilowego stanu pompa posiada określoną energię kinetyczną, będącą funkcją momentu bezwładności mas wirujących  $J$  i prędkości obrotowej  $\omega$ :

$$E_k = 0,5J\omega^2 \quad (5.123a)$$

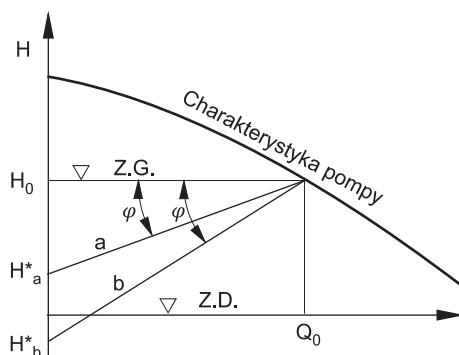
albo:

$$E_k = 0,00548Jn^2 \quad (5.123b)$$

Jej wielkość będzie decydowała o zmianach zanikającego wydatku i uderzenia hydraulicznego w przypadku nagłego braku napędu pompy.

### 5.5.3. Proste uderzenie hydrauliczne w instalacji przesyłowej dalekiego zasięgu

Rozpatrzmy przypadek nagłego i całkowitego zaniku napędu pompy tłoczącej wodę do rurociągu dalekiego zasięgu. Pompa mająca znaczący moment bezwładności, zwalniając sukcesywnie prędkość obrotową, zmniejsza spręż do wartości  $H^*$ , przy której w czasie  $t^*$  następuje zanik tłoczenia wody ( $Q = 0$ ) i rozpoczyna się przepływ powrotny, jeszcze przy niezmienionym kierunku wirowania pompy  $n^*$ . Cała operacja wyznaczania poszukiwanych wartości  $H^*$ ,  $t^*$ ,  $n^*$  zostanie przeprowadzona metodą analityczno-graficzną.



Rys. 5.19. Wpływ przebiegu prostej Bergerona na charakter i wielkość uderzenia hydraulicznego

„Prosta Bergerona” [16] poprowadzona z charakterystyki pompy (rys. 5.19) od wartości początkowych wydatku  $Q_0$  i wysokości tłoczenia  $H_0$  przecina oś  $H$  na wysokości poszukiwanej wartości  $H^*$ , gdzie wydatek pompy spada do zera. Prosta ta biegnie pod kątem  $\varphi$  w stosunku do poziomu wody w zbiorniku górnym, którego tangens jest równy:

$$\tan \varphi = \frac{c}{gA} \quad (5.124)$$

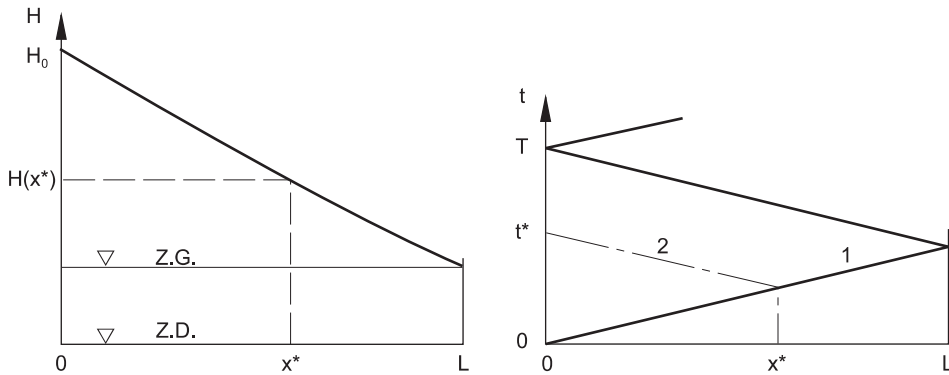
a wysokość poszukiwanego ciśnienia wynosi:

$$H^* = H_0 - \frac{c}{gA} Q_0 \quad (5.125)$$

przy prędkości obrotowej wirnika pompy:

$$n^* = n_o \sqrt{\frac{H^*}{H_o}} \quad (5.126)$$

Gdyby prosta Bergerona  $b$  przecięła oś  $H$  poniżej poziomu zwierciadła wody w zbiorniku dolnym, znaczyłoby to, że  $H^*$  przyjmuje wartości ujemne, a to świadczyłoby o tym, że w rurociągu powstałoby podciśnienie, a w szczególnym przypadku nawet kawitacja (rys. 5.19). Czas zmniejszenia prędkości obrotowej z  $n_o$  do  $n^*$  wyznacza się na drodze identyfikacji takiego zaburzenia powrotnego (wstecznego) powstałego w rurociągu o współrzędnej  $x^*$ , które dojdzie do pompy w chwili powstania ciśnienia  $H^*$ , tj. gdy natężenie przepływu spadnie do zera. Punkt o współrzędnych  $x^*$  i  $t^*(x^*)$  znajduje się na charakterystyce wyznaczającej drogę przebiegu zaburzenia rozprzestrzeniającego się na bazie początkowego przepływu ustalonego (rys. 5.20), gdzie natężenie przepływu jest równe  $Q_o$ , a ciśnienie  $H(x^*)$ .



Rys. 5.20. Graficzne wyznaczenie współrzędnych  $x^*$  i  $t^*$

Wzdłuż charakterystyki wstecznej utworzonej przez zaburzenie powstające w punkcie o współrzędnych  $x^*$  i  $t^*(x^*)$ , biegnącej do punktu o współrzędnych  $x = 0$  i  $t^*$ , gdzie  $Q = 0$ , spełnione jest równanie przepływu:

$$[H(x^*) - H^*] - \frac{c}{gA} (Q_o - Q) = 0 \quad (5.127)$$

Czas, w jakim prędkość obrotowa pompy spadnie z  $n_o$  do  $n^*$ , a wydatek zmniejszy się z wartości  $Q_o$  do 0, przy wytworzonym jeszcze ciśnieniu o wysokości  $H^*$ , jest równy:

$$t^* = \frac{2x^*}{c} \quad (5.128)$$

W chwili zaniku tłoczonego przepływu pompa posiada jeszcze pewien moment obrotowy  $M^*$ , będący funkcją momentu bezwładności  $J$  mas wirujących i chwilowej

prędkości obrotowej  $n^*$ . Wyznacza się go z równania ruchu obrotowego pompy pozbawionej napędu:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{M}{J} \quad (5.129)$$

Przyjmując, że moment obrotowy  $M$  zmienia się liniowo od  $M_o$  do  $M^*$ , równanie (5.129) można zapisać następująco:

$$\frac{\pi J}{15} \frac{n^* - n_o}{t^*} = -(M_o + M^*) \quad (5.130)$$

stąd:

$$M^* = \frac{\pi J}{15} \frac{n_o - n^*}{t^*} - M_o \quad (5.131)$$

W chwili powstania przepływu nieustalonego pompa posiada moment obrotowy  $M_o$ , który jest stosunkiem jej mocy do prędkości obrotowej:

$$M_o = \frac{P_o}{\omega_o} \quad (5.132a)$$

albo:

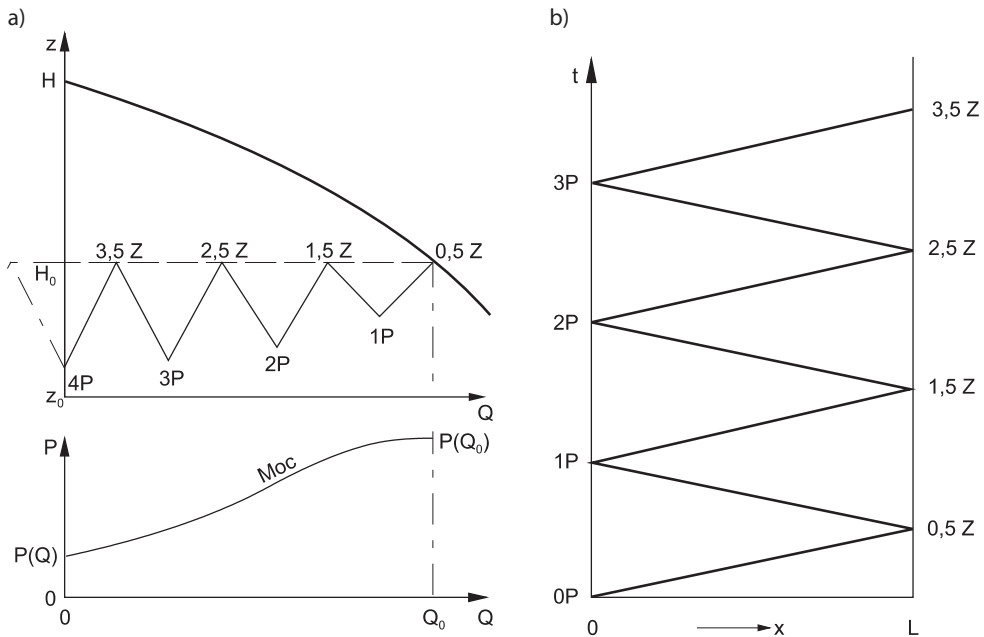
$$M_o = \frac{30}{\pi} \frac{P_o}{n_o} \quad (5.132b)$$

Wraz ze zmianą kierunku przepływu wody i sukcesywnym wzrostem natężenia przepływu wzrasta moment wywierany na wirnik maszyny przez przepływającą wodę. W efekcie pojawia się bardzo silna dyssypacja energii. W tej strefie funkcjonowania maszyna staje się pompoturbina. Wiruje jeszcze jak pompa, ale na przepływie turbinowym. Jeżeli wówczas skutecznie zadziała urządzenie sterujące przepływem wody, to maszyna wkrótce zatrzyma się całkowicie ( $n = 0$ ). Jeżeli urządzenie sterujące nie zatrzyma powrotnego przepływu wody, to maszyna zmieni kierunek wirowania, stając się turbiną, mimo braku przystosowania do tej funkcji. Do przeprowadzenia właściwych obliczeń uderzenia hydraulicznego i biegu nieustalonego wirnika wymagana jest w tym obszarze funkcjonowania maszyny znajomość zmian momentu obrotowego i natężenia przepływu (wydatku) w funkcji prędkości obrotowej maszyny.

#### 5.5.4. Uderzenie hydrauliczne w pompowej instalacji przesyłowej o ograniczonej długości rurociągu

Wskutek zaniku napędu pompy tłoczącej wodę do rurociągu o ograniczonej długości powstanie złożone ujemne uderzenie hydrauliczne, jeżeli czas pełnego zatrzymania obrotów pompy jest znacznie dłuższy od okresu przebiegu zaburzeń w rurociągu ( $T_m \gg 2L/c$ ). Do wyznaczania przebiegu uderzenia hydraulicznego w tym przypadku służą charakterystyki pompy w postaci zależności  $H = f(Q)$ ,  $P = f(Q)$  i  $\eta = f(Q)$ , zwykle

podane przez producenta. W przedstawionej niżej metodzie wyznaczania rozkładu ciśnień nieustalonych przyjmuje się, że w trakcie trwania stanu nieustalonego poziomy wód w zbiornikach nie ulegają zmianie, a pompa znajduje się na poziomie wód w zbiorniku dolnym. Przykładowy przebieg obliczeń przedstawiono na rys. 5.21, sporządzonym dla instalacji, w której wyhamowanie tłoczonego przepływu następuje w czasie  $T_m \approx 4T$ .



Rys. 5.21. Obraz przebiegu obliczeń  $H(t)$  i  $Q(t)$  złożonego uderzenia hydraulicznego wywołanego przez pompę:

a) przebieg na charakterystyce pompy; b) przebieg w płaszczyźnie  $x, t$

Aby otrzymać obraz przebiegu uderzenia hydraulicznego i zmiany prędkości obrotowej pompy, oblicza się kolejno natężenie przepływu  $Q_i$  i spręż  $H_i$  na pompie oraz jej prędkość obrotową  $n_i$ , a następnie natężenie przepływu wypływającego ze zbiornika  $Q_{i+0,5}$  dla  $i = 1T, 2T, 3T, \dots$ . Prowadzenie obliczeń rozpoczyna się od punktu funkcjonowania instalacji znajdującego się na charakterystyce eksploatacyjnej pompy  $H = f(Q)$  w czasie  $t = 0,5T$  wzdłuż prostej reprezentującej drogę przebiegu zaburzenia powrotnego, biegnącego od zbiornika (0,5Z) do pompy (1,0P) w czasie od  $t_{0,5}$  do  $t_1$ .

Wysokość ciśnienia na pompie (sprężu)  $H_i$  i wydatek pompy  $Q_i$  w czasie  $t_i = iT$  z jednej strony są podporządkowane przepływowi nieustalonomu w rurociągu, odbywającemu się wzdłuż zaburzenia powrotnego w czasie od  $t_{i-0,5}$  do  $t_i$ , a z drugiej strony prędkości obrotowej pompy, występującej w czasie  $t_i$ . Jednoczesne rozwiązanie równań opisujących oba te zjawiska pozwala wyznaczyć poszukiwane wartości  $H_i$  i  $Q_i$ .

Na drodze przebiegu  $i$ -tego zaburzenia równanie różnicowe przepływu nieustalonego ma postać:

$$H_i - H_{i-0,5} = \frac{c}{gA} (Q_i - Q_{i-0,5}) - h_{s\ i \div i-0,5} \quad (5.133)$$

gdzie:  $H_{i-0,5} = H_o$ .

Wysokość sprężu (ciśnienia na pompie) wytworzonego przez pompę jest funkcją jej aktualnej prędkości obrotowej. Wartość sprężu  $H_i$  w czasie  $t_i$  wyznacza się ze wzoru:

$$H_i = \left( \frac{n_i}{n_{i-1}} \right)^2 H_{i-1} \quad (5.134)$$

gdzie:  $n_{i-1}$  i  $H_{i-1}$  – wielkości wyznaczone uprzednio w czasie  $t_{i-1} = (i-1)T$ .

Prędkość obrotową  $n_i$  w czasie  $t_i = iT$  wyznacza się z równania biegu zmiennego mas wirujących pompy (wirników pompy, silnika, sprzęgła i wału):

$$n_i = n_{i-1} - \frac{30}{\pi} \frac{M_{i-1} + M_i}{2J} T \quad (5.135)$$

gdzie:

$$M_i = \frac{30 P_i}{\pi n_i} \quad (5.136)$$

Moc hydrauliczną  $P_i$  można wyznaczyć z dostatecznym przybliżeniem z zależności:

$$P_i = P_o(Q_i) \frac{H_i}{H_o(Q_i)} \quad (5.137)$$

Wartości  $P_o(Q_i)$  i  $H_o(Q_i)$  odnoszą się do charakterystyki eksploatacyjnej  $\Theta_o$ .

Jeżeli  $H_i$  posiada tę samą wartość wyliczoną ze wzorów (5.133) i (5.134) opisujących przepływ nieustalony w rurociągu i prędkość obrotową pompy  $n_i$  obliczoną ze wzoru (5.135) dla wybranego wstępnie wydatku  $Q_i$ , to uzyskane wyniki obliczeń są właściwe, co zwykle uzyskuje się metodą kolejnych przybliżeń.

Natężenie przepływu  $Q_{i+0,5}$  wpływającego do zbiornika wylicza się z formuły opisującej przepływ występujący na drodze przebiegu prostego zaburzenia wytworzonego przez maszynę:

$$H_{i+0,5} - H_i + \frac{c}{gA} (Q_{i+0,5} - Q_i) + h_{s\ i \div i+0,5} = 0 \quad (5.138)$$

gdzie:  $H_{i+0,5} = H_o$ .

## 5.6. Zmiana wielkości uderzenia hydraulicznego na długości rurociągu przesyłowego

### 5.6.1. Powstawanie fal uderzenia hydraulicznego

Proste uderzenie hydrauliczne rozprzestrzenia się w rurociągu przesyłowym w postaci fali ciśnienia. Zachodzi to zwykle wówczas, gdy nastąpi nagle zatrzymanie albo zwiększenie natężenia przepływu. Każda taka fala, oddalając się od miejsca powstania, modyfikuje swoją wysokość  $h$  i przenoszone natężenie przepływu  $Q$  oraz natężenie przepływu za falą. Dzieje się tak wskutek występujących strat hydraulicznych, towarzyszących przepływowi cieczy.

Opisane matematycznie wielkości hydrauliczne fali uderzenia i przepływu za falą zasługują na szczególną uwagę w następujących charakterystycznych zdarzeniach:

- gdy przepływ cieczy w rurociągu grawitacyjnym zostaje nagle zatrzymany przez urządzenia sterujące, powodując powstanie dodatniej fali uderzenia;
- gdy przepływ cieczy tłoczonej przez pompę zostaje nagle zatrzymany, powodując powstanie ujemnej fali uderzenia.

### 5.6.2. Hipotezy

Opis matematyczny powyższych zjawisk hydrodynamicznych jest realizowany w tym rozdziale przy następujących uwarunkowaniach i przyjętych hipotezach:

- znane są parametry hydrauliczne ustalonego przepływu początkowego, tj. natężenia przepływu w rurociągu;
- znana jest linia ciśnień (piezometryczna) na całej długości rurociągu;
- poziom cieczy w zbiornikach jest niezmienny w czasie rozprzestrzeniania się fali ciśnienia;
- poziom w zbiorniku górnym stanowi linię odniesienia dla określania wysokości ciśnienia i uderzenia hydraulicznego;
- ciśnienie hydrodynamiczne występujące w rurociągu tworzy wzniesienie linii piezometrycznej w stosunku do poziomu położenia rurociągu;
- pomija się straty hydrauliczne cieczy występujące na długości czoła uderzenia hydraulicznego jako bardzo małe i niemające istotnego wpływu na kształtowanie wielkości tego uderzenia;
- straty hydrauliczne przepływu za falą są podporządkowane temu samemu prawu (formule) co straty występujące w przepływie początkowym przed czołem fali; można je opisać następująco:

$$\frac{dh_s}{dx} = I_o \left( \frac{u}{u_o} \right)^2 \quad (5.139)$$

- fala uderzenia oraz pojedyncze zaburzenia rozchodzą się ze stałą prędkością na całej długości badanego odcinka rurociągu;
- przeszkoda, względnie nagła zmiana wymiarów geometrycznych, wywołuje zmianę prędkości propagacji fali oraz częściowe odbicie fali, co powoduje, że fala zmienia

- swoją wysokość, a przepływ nieustalony za przeszkodą ulega modyfikacji;
- pomija się długość rurociągu, na jakiej znajduje się czoło fali, przyjmując, że fala, mijając określony przekrój rurociągu o współrzędnej  $x$ , nie zmienia swoich wymiarów.

### 5.6.3. Równania przepływu nieustalonego na czole fali uderzenia hydraulicznego

Zgodnie z wymienionymi w poprzednim punkcie hipotezami przyjmuje się, że przepływ nieustalony wzdłuż czoła fali od jego początku do końca w dowolnym przekroju rurociągu o współrzędnej  $x$  jest opisany formułą:

$$dh \pm \frac{c}{g} du = 0 \quad (5.140)$$

Znak plus odnosi się do przepływu odbywającego się wzdłuż czoła fali dodatniej, powstającej na końcu rurociągu, a znak minus – do fali ujemnej, powstającej na początku rurociągu w wyniku nagłego zatrzymania przepływu. Po scałkowaniu równanie (5.140) przyjmuje postać:

$$h - h_o \pm \frac{c}{g} (u - u_o) = 0 \quad (5.141)$$

a stąd wynika zależność:

$$h \pm \frac{c}{g} u = h_o \pm \frac{c}{g} u_o \quad (5.142)$$

Wyrażenie  $h_o \pm \frac{c}{g} u_o$  definiuje warunek początkowy przepływu nieustalonego występującego wzdłuż czoła fali. Jego pochodna jest równa ujemnemu spadkowi linii ciśnień, jaki występuje bezpośrednio przed czołem fali dodatniej (znak plus) lub ujemnej (znak minus) [81]:

$$\frac{dh_o}{dx} \pm \frac{c}{g} \frac{du_o}{dx} = -I_o \quad (5.143)$$

Ponieważ w przepływie ustalonym bezpośrednio przed czołem fali prędkość  $u_o$  jest stała, to:

$$\frac{c}{g} \frac{du_o}{dx} = 0 \quad (5.144)$$

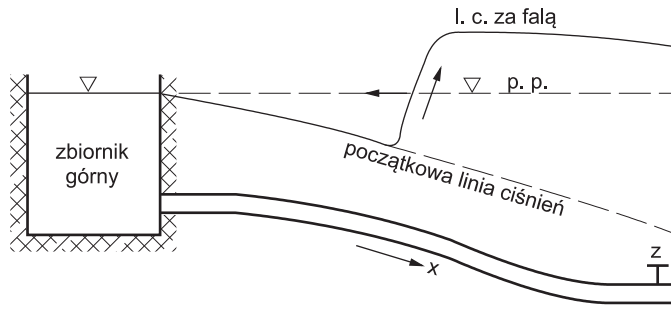
stąd:

$$\frac{dh_o}{dx} = -I_o \quad (5.145)$$

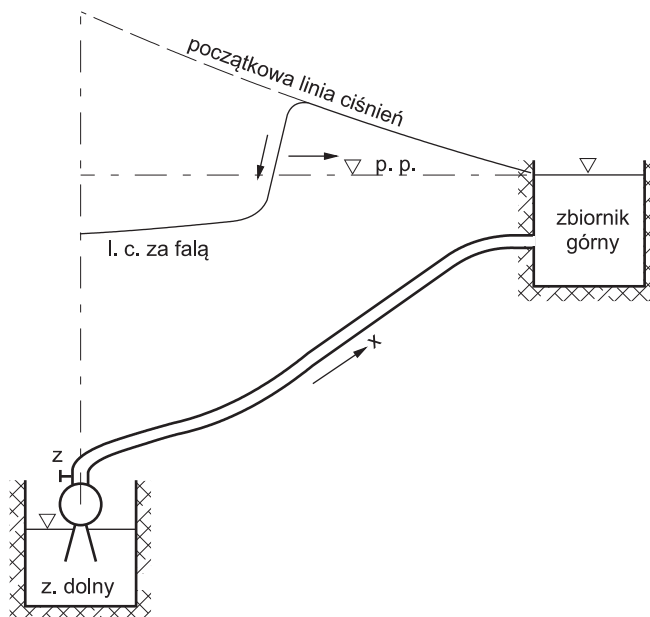
Spadek linii ciśnień  $I_o$  przyjmuje znak minus, ponieważ w każdym rozpatrywanym przypadku przepływu jego wartość jest ujemna (rys. 5.22 i 5.23). Przy uwzględnieniu powyższej zależności równanie (5.142) przyjmuje następującą postać:

$$\frac{dh}{dx} \pm \frac{c}{g} \frac{du}{dx} + I_o(x) = 0 \quad (5.146)$$

opisującą zmiany  $h$  i  $u$  na długości czoła fali.



Rys. 5.22. Rozprzestrzenianie się dodatniej fali ciśnienia w rurociągu grawitacyjnym (p.p. – poziom porównawczy, l.c. – linia ciśnień)



Rys. 5.23. Rozprzestrzenianie się ujemnej fali ciśnienia w rurociągu przesyłowym (p.p. – poziom porównawczy, l.c. – linia ciśnień)



#### 5.6.4. Równania przepływu nieustalonego występującego bezpośrednio za czołem fali uderzenia hydraulicznego

Przepływ nieustalony występujący na drodze, jaką pokonuje koniec fali uderzenia, jest opisany równaniem:

$$dh \mp \frac{c}{g} du + dh_s = 0 \quad (5.147)$$

Znak minus dotyczy przepływu za falą dodatnią (rys. 5.22), a znak plus – za falą ujemną (rys. 5.23). Jeżeli w miejsce  $dh_s$  zostanie podstawiona zależność (5.139), to równanie (5.147) może być zapisane następująco:

$$dh \mp \frac{c}{g} du + I_o \left( \frac{u}{u_o} \right)^2 dx = 0 \quad (5.148)$$

a stąd:

$$\frac{dh}{dx} \mp \frac{c}{g} \frac{du}{dx} + I_o \left( \frac{u}{u_o} \right)^2 = 0 \quad (5.149)$$

Przepływ odbywający się bezpośrednio za czołem fali jest równocześnie podporządkowany dwóm niezależnym prawom, opisanym przez formuły (5.146) i (5.149). Porównując je ze sobą, po uprzednim dostosowaniu znaków do rodzaju propagującej fali, otrzyma się formuły pozwalające wyznaczyć prędkość  $u(x)$  przepływu nieustalonego za falą i następnie wysokość  $h(x)$  fali.

##### a) Propagacja fali dodatniej

Jeżeli w rurociągu rozprzestrzenia się fala dodatnia, to z porównania równań (5.146) i (5.149) otrzymuje się:

$$\frac{dh}{dx} + \frac{c}{g} \frac{du}{dx} + I_o = \frac{dh}{dx} - \frac{c}{g} \frac{du}{dx} + I_o \left( \frac{u}{u_o} \right)^2 \quad (5.150)$$

a stąd po skróceniu i przekształceniach:

$$2 \frac{c}{g} \frac{du}{dx} = I_o \left[ \left( \frac{u}{u_o} \right)^2 - 1 \right] dx \quad (5.151)$$

albo:

$$\frac{\frac{u}{u_o}}{1 - \left( \frac{u}{u_o} \right)^2} = - \frac{g I_o}{2 c u_o} dx \quad (5.152)$$

Całkując równanie (5.152) w granicach od  $L$  do  $x$ , otrzymuje się:

$$\operatorname{artanh} \frac{u(x)}{u_o} = \frac{gI_o L}{2cu_o} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (5.153)$$

a stąd:

$$\frac{u(x)}{u_o} = \tanh \frac{gI_o L}{2cu_o} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (5.154)$$

Poznanie wartości prędkości przepływu nieustalonego bezpośrednio za czołem fali pozwala wyznaczyć całkowitą wysokość fali:

$$h(x) = \frac{c[u_o - u(x)]}{g} \quad (5.155)$$

oraz wzniesienia fali ponad poziom hydrostatyczny:

$$\Delta h(x) = h(x) - I_o x \quad (5.156)$$

Na końcu rurociągu uderzenie będzie równe:

$$h = \frac{cu_o}{g} \quad (5.157)$$

Należy zauważyć, że w miarę przybliżania się fali do zbiornika prędkość przepływu za falą rośnie, a uderzenie hydrauliczne maleje.

### b) Propagacja fali ujemnej

Porównanie równań (5.146) i (5.149) odnoszących się do przepływu na wysokości czoła fali i za falą ujemną prostą:

$$\frac{dh}{dx} - \frac{c}{g} \frac{du}{dx} + I_o = \frac{dh}{dx} + \frac{c}{g} \frac{du}{dx} + I_o \left(\frac{u}{u_o}\right)^2 \quad (5.158)$$

sprowadza się do równania:

$$2 \frac{c}{g} du = I_o \left[1 - \left(\frac{u}{u_o}\right)^2\right] dx \quad (5.159)$$

opisującego przepływ nieustalony na drodze, jaką wykonuje koniec czoła fali. Po uporządkowaniu zmiennej  $u/u_o$  równanie (5.159) przyjmuje postać:

$$\frac{\frac{du}{u_o}}{1 - \left(\frac{u}{u_o}\right)^2} = \frac{gI_o}{2cu_o} dx \quad (5.160)$$

Całkując to równanie w granicach od  $x = 0$  do  $x$ , otrzymujemy:

$$\operatorname{artanh} \frac{u(x)}{u_o} = \frac{gI_o}{2cu_o} x \quad (5.161)$$

a stąd:

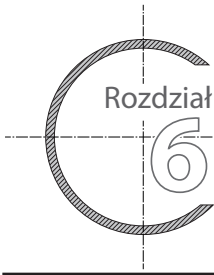
$$\frac{u(x)}{u_o} = \tanh \frac{gI_o}{2cu_o} x \quad (5.162)$$

Dla  $x = 0$ ,  $u = 0$  całkowita wysokość fali jest równa:

$$h = -\frac{cu_o}{g} \quad (5.163)$$

Natomiast w dowolnym przekroju rurociągu o współrzędnej  $x$  wysokość fali jest równa:

$$h(x) = \frac{c[u(x) - u_o]}{g} \quad (5.164)$$



## MASOWY PRZEPŁYW OSCYLACYJNY W KOMORACH WYRÓWNAWCZYCH

### 6.1. Podstawowe funkcje komory wyrównawczej

Komorę wyrównawczą z zasady instaluje się w systemie ciśnieniowym składającym się z derywacyjnej galerii niskiego ciśnienia, rurociągu ciśnieniowego lub sztolni prowadzących wodę do siłowni wodnej. Przy stosunkowo krótkiej derywacji pewnym wskaźnikiem celowości instalowania komory wyrównawczej może być stała czasowa inercji mas wody  $T_i$  znajdującej się w systemie:

$$T_i = \frac{\sum l_i u_i}{gH_o} \quad (6.1)$$

Przyjmuje się, że przy  $T_i > 5$  korzystne jest instalowanie komory wyrównawczej, która może ograniczyć uderzenie hydrauliczne do wartości:

$$\Delta h = k \frac{cu_o}{g} \quad (6.2)$$

w przypadku nagłego i pełnego zatrzymania natężenia przepływu instalowanego. Współczynnik  $k$  wyraża stosunek energii inercyjnej mas wody znajdującej się w galerii do tejszej energii znajdującej się w rurociągu ciśnieniowym; jej wielkość opisuje formuła:

$$E_i = \frac{Lu}{gT} \quad (6.3)$$

- Komora wyrównawcza wypełnia jeszcze inne poważne zadania, a mianowicie:
- uniemożliwia powstanie podciśnienia w przewodzie prowadzącym wodę;
  - zapewnia niezbędny dopływ wody na wirnik maszyny w trakcie rozruchu i szybkiego jej obciążenia;
  - ogranicza czas i wielkość pulsacji ciśnień w całej derywacji, przeciwdziałając możliwym trudnościami związanym z uruchomieniem maszyn do pracy generacyjnej lub pompowej.

Realizacja tych zadań ma szczególnie istotne znaczenie dla prawidłowego funkcjonowania i niezawodności pracy siłowni szczytowo-pompowej (akumulacyjnej),

zwłaszcza gdy pełni ona funkcje interwencyjne. W tym przypadku, aby elektrownia uzyskała odpowiednie natężenie przepływu dopływającej wody w pożądanym czasie, komora wyrównawcza powinna posiadać dostateczną pojemność. Poza kwestiami konstrukcyjnymi o rodzaju i wielkości komory wyrównawczej może decydować pożądana sprawność ruchowa elektrowni. Brak komory wyrównawczej może w pewnym stopniu wpływać niekorzystnie na wymiary przekroju poprzecznego galerii derywacyjnej i przewodu (rurociągu, sztolni) ciśnieniowego. Ponadto zwiększenie uderzenia hydraulicznego w takim przypadku z reguły powoduje konieczność zwiększenia grubości ścianek galerii i rurociągu czy też dodatkowego wzmocnienia sztolni ciśnieniowej.

## 6.2. Konstrukcje komór wyrównawczych

W ciśnieniowym systemie derywacyjnym prowadzącym wodę do siłowni wodnej znalazły zastosowanie następujące typy otwartych komór wyrównawczych: prosta, dławikowa i różnicowa. Każdy z tych trzech typów posiada niekiedy dodatkowe wyposażenie w postaci zbiornika (komory) górnego, dolnego lub przelewu. Zbiornik górny służy do chwilowego zmagazynowania wody napływającej w galerii po nagłym i całkowitym zatrzymaniu przepływu na siłowni wodnej. Instalowanie dodatkowo przelewu otwartego stanowi zabezpieczenie przed awaryjnym przepelnieniem zbiornika górnego. Zbiornik dolny pozostaje stale wypełniony wodą, zabezpieczając komorę przed całkowitym opróżnieniem, a rurociąg i galerię – przed napowietrzeniem w przypadku momentalnego i pełnego obciążenia elektrowni. Instalowanie zbiorników ma też na celu zmniejszenie objętości samej komory wyrównawczej. O potrzebie instalowania zbiorników decyduje nie tyle czas nagłej zmiany obciążenia maszyn siłowni, co wielkość instalowanego przepływu maszyn hydraulicznych.

**Komory wyrównawcze proste** otwarte od dołu są mało efektywne ekonomicznie, gdyż wymagają relatywnie dużej objętości. Są za to bardzo proste i skuteczne w działaniu. W niewielkim stopniu wywołują wzrost ciśnienia w rurociągu i w galerii.

**Komory wyrównawcze dławikowe** są bardziej ekonomiczne, gdyż posiadają zmniejszone rozmiary. Zainstalowany w dnie dławik, zwykle w postaci szeregu otworów, ogranicza ilość wody dopływającej do właściwej komory, a równocześnie wywołuje wzrost ciśnienia – w derywacji o ograniczonej i bezpiecznej wielkości. Dławik jest z reguły tak wykształcony, aby w pewnym stopniu ułatwiał dopływ wody do komory, a utrudniał odpływ, przy dopuszczalnym ciśnieniu i podciśnieniu w stosunku do poziomu hydrostatycznego. To drugie działanie dławika wymusza zwiększenie odpływu wody z galerii do przewodu ciśnieniowego.

**Komory wyrównawcze różnicowe**, zwane też dyferencyjnymi, a literaturze anglosaskiej komorami Johansona, są dalszym udoskonaleniem ekonomicznym komór dławikowych. W najprostszym typowym rozwiązaniu komora różnicowa składa się z dwóch koncentrycznych szybów pionowych o zdecydowanie różnej powierzchni przekroju poprzecznego. Zewnętrzny szyb jest właściwą komorą wyrównawczą typu dławikowego. Otwory dławika są tak wykształcone, że ułatwiają w pewnym stopniu wypływ wody z komory, a utrudniają dopływ. Dławik małego szybu funkcjonuje analogicznie.

Wskutek nagłego i znacznego zatrzymania przepływu przez maszyny hydrauliczne szyb ten prędko wypełnia się wodą. Ewentualny jej nadmiar przelewa się przez przelew zainstalowany na koronie szybu. Przy znaczącym i gwałtownym wzroście obciążenia przepływu szyb ten stosunkowo szybko się opróżnia. W każdym z tych manewrów maszyny powstaje różnica poziomów wód w szybie i w komorze. Szczególną cechą komory różnicowej jest to, że w trakcie zaistnienia przepływu nieustalonego powstają znaczne straty hydrauliczne na dławikach, wywołane przez wodę przelewającą się przez przelew. Powodują one amortyzację i stosunkowo szybki zanik oscylacji poziomów wody w komorze, ciśnień w całym systemie oraz przepływu nieustalonego w galerii derywacyjnej. Z tych względów powszechnie uważa się, że tego typu komory wyrównawcze są skuteczniejsze od dławikowych i bez porównania sprawniejsze niż komory otwarte.

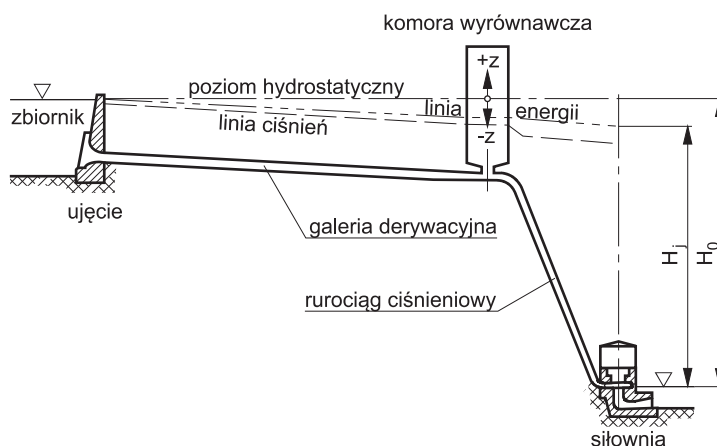
### **6.3. Podstawowe hipotezy dotyczące obliczeń stanów nieustalonych w komorze wyrównawczej**

W typowym derywacyjnym, ciśnieniowym systemie prowadzącym wodę do siłowni wodnej wyposażonej w komorę wyrównawczą pod wpływem zmiany jej mocy występuje wolnozmienny przepływ masowy, polegający na oscylacyjnej wymianie wody pomiędzy galerią a komorą, oraz zjawisko ograniczonego uderzenia hydraulicznego w rurociągu ciśnieniowym. Zjawiska te są oczywiście wywołane głównie przez nagłą i znaczną zmianę natężenia przepływu przechodzącego przez wirnik maszyny hydraulicznej. Przepływ wody pomiędzy komorą a przewodem ciśnieniowym (rurociągiem, sztolnią) jest tak mały, że w obliczeniach technicznych może być całkowicie pomijany. Ponieważ zmiany poziomów wody w komorze wyrównawczej i ciśnień w galerii derywacyjnej zachodzą relatywnie bardzo powoli, to przyjmuje się, że nie oddziałują na wielkość uderzenia hydraulicznego w przewodzie ciśnieniowym. Ewentualna korekta wielkości uderzenia hydraulicznego powinna się opierać na porównaniu przebiegu obydwu zjawisk w tym samym czasie. Pomija się straty hydrauliczne na tarcie o ściany komory oraz ich odkształcenia przy wypełnieniu wodą. Uwzględnia się natomiast straty hydrauliczne powstałe w galerii derywacyjnej i na dławikach komór wyrównawczych, gdyż wywierają one istotny wpływ na charakter, wielkość i czas trwania przepływu oscylacyjnego.

Podstawowa hipoteza przyjmuje, że masa wody biorąca udział w wymianie pomiędzy galerią derywacyjną a komorą wyrównawczą tworzącą przepływ oscylacyjny nie ulega zmianie.

### **6.4. Podstawowe prawa przepływu nieustalonego pomiędzy derywacją a komorą wyrównawczą oraz zakres ich zastosowań**

Rozpatrzmy pewien chwilowy stan nieustalony przepływu masy wody w derywacji, gdy poziom zwierciadła wody w komorze wyrównawczej znajduje się na rzędnej  $z$  odniesionej do poziomu hydrostatycznego (rys. 6.1).



Rys. 6.1. Elektrownia wodna wysokiego spadku z komorą wyrównawczą w ciśnieniowym układzie derywacyjnym

Ten chwilowy stan równowagi dynamicznej może być opisany przez dynamiczne równanie przepływu, wynikające z drugiej zasady dynamiki Newtona, z uwzględnieniem prawa zachowania ciągłości przepływu w węzle łączącym trzy zainstalowane obiekty: derywację, komorę wyrównawczą i przewód ciśnieniowy. Ponieważ zgodnie z przyjętymi hipotezami masa wody  $m$  w derywacji nie ulega zmianie w trakcie trwania przepływu nieustalonego, to drugą zasadę dynamiki Newtona można zapisać następująco:

$$m \frac{du}{dt} = F \quad (6.4)$$

Masa wody znajdującej się w derywacji jest równa:

$$m = \rho A_d L \quad (6.5)$$

natomiast siła parcia oddziałująca na przepływ w derywacji może być opisana następująco:

$$F = -\rho A_d L (h_{sd} + h_{sm} + z) \quad (6.6)$$

gdzie:  $A_d$  – powierzchnia przekroju poprzecznego derywacji [ $\text{m}^2$ ],

$h_{sd}$  – straty ciśnienia w derywacji [m],

$h_{sm}$  – straty hydrauliczne będące funkcją kierunku i natężenia przepływu przechodzącego przez dławik [m],

$z$  – wzniesienie poziomu wody w komorze odniesione do poziomu hydrostatycznego [m].

Po wstawieniu formuł (6.5) i (6.6) do formuły (6.4) równanie masowego przepływu oscylacyjnego przyjmie ono postać:

$$\frac{L}{g} \frac{du}{dt} + h_{sd} + h_{sm} + z = 0 \quad (6.7)$$

Straty ciśnienia  $h_{sd}$  w derywacji obejmują straty hydrauliczne na tarcie, straty wynikające ze zmiany prędkości przepływu co do wartości i kierunku oraz wartość energii kinetycznej wody płynącej w derywacji. Straty hydrauliczne  $h_{sm}$  na przepływie przez otwory w dnie komory przyjmują znak plus, gdy woda dopływa do wnętrza komory, i znak minus, gdy woda wypływa z komory. Jeżeli w dnie komory zainstalowany jest dławik, to z reguły wartości tych dwóch strat są różne. Pomija się straty hydrauliczne powstałe w samej komorze, traktując je jako mało znaczące. Nie dotyczy to jednak szybu komór różnicowych. Wyrażenie  $L/g \frac{du}{dt}$  przedstawia wartość inercyjnego parcia wód znajdujących się w derywacji, wyrażonego w metrach słupa wody. Przyjmuje ono znak plus, gdy przepływ przyspiesza, i znak minus przy samohamowaniu przepływu w derywacji.

Zasadę zachowania przepływu w węźle komory opisuje równanie:

$$uA_d = A_k(z) \frac{dz}{dt} + Q_c \quad (6.8)$$

gdzie:  $A_k$  – powierzchnia przekroju poprzecznego komory wyrównawczej, której wartość jest funkcją współrzędnej  $z$  [ $m^2$ ],

$Q_c$  – natężenie przepływu wchodzącego do przewodu ciśnieniowego [ $m^3/s$ ],

$dz/dt$  – prędkość przepływu w komorze wyrównawczej.

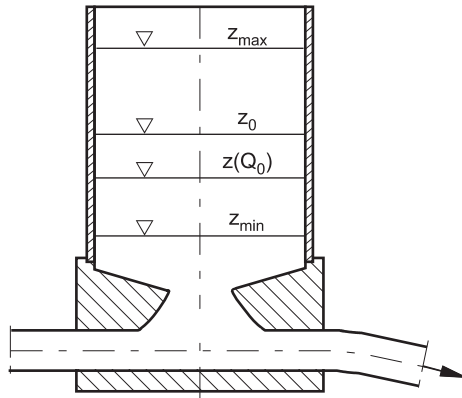
Układ równań (6.7) i (6.8), opisujący przede wszystkim wahania oscylacyjne poziomu wody w komorze wyrównawczej, nie ma rozwiązania algebraicznego. Do niedawna do rozwiązania tych równań powszechnie używano metod graficznych, które obecnie zostały zastąpione przez metody numeryczne wykorzystywane przy zastosowaniu maszyn cyfrowych, ale i tak występują pewne trudności przy pełnym wyznaczeniu funkcji  $z(t)$ . Jest to spowodowane problemami związanymi z dokładnym określeniem strat hydraulicznych i z rozpoznaniem zmian natężenia przepływu przechodzącego przez maszynę hydrauliczną. Wobec tego dość powszechnie uznano znalazły metody empiryczne, koncentrujące się na wyznaczeniu ekstremalnych stanów wód w komorach wyrównawczych oraz okresu powstałych oscylacji. Najprostsze i dające w pełni zadowalające wyniki dla praktyki inżynierskiej są te metody, które opisują ekstremalne wartości przepływu nieustalonego w prostych komorach wyrównawczych. Komory dławikowe i różnicowe wymagają bardziej złożonych metod obliczeń, do których należą metody opisane przez Ščeveleva [79].

## 6.5. Ekstremalne zmiany poziomów wody w prostej komorze wyrównawczej

W prostej komorze wyrównawczej (rys. 6.2) zainstalowanej dla celów hydroenergetycznych wyznacza się zwykle tylko zmiany poziomów zwierciadła wody dla warunku



nagłego i całkowitego zrzutu mocy przez maszynę hydrauliczną. Powstają wówczas ekstremalne stany



Rys. 6.2. Typowa prosta komora wyrównawcza

nieustalone wód w projektowanej komorze. Jeżeli pominię się straty hydrauliczne na derywacji i na wejściu do komory jako bardzo małe w stosunku do zmian poziomów wody w komorze oraz przyjmie się, że nie ma wymiany wody z rurociągiem ciśnieniowym ( $Q_c = 0$ ), to równania (6.7) i (6.8) przyjmą odpowiednio postać:

$$\frac{L}{g} \frac{du}{dt} + z = 0 \quad (6.9)$$

i

$$u = \frac{A_k}{A_d} \frac{dz}{dt} \quad (6.10)$$

Pochodna równania (6.10) względem czasu przedstawia sobą przyspieszenie przepływu w galerii:

$$\frac{du}{dt} = \frac{A_k}{A_d} \frac{d^2z}{dt^2} \quad (6.11)$$

ponieważ prędkość przepływu i poziom wody w komorze są zmienne w czasie. Po podstawieniu formuły (6.11) do równania (6.9) otrzymuje się wyrażenie:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{g A_k}{L A_d} z = 0 \quad (6.12)$$

które dla uproszczenia zapisuje się następująco:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k^2 z = 0 \quad (6.13)$$

gdzie:

$$k^2 = \frac{g A_k}{L A_d} \quad (6.14)$$

jest wartością stałą dla badanej instalacji.

Równanie (6.13) ma rozwiązanie w następującej ogólnej postaci:

$$z = a \cos kt + b \sin kt \quad (6.15)$$

Dla warunków początkowych, tj.  $t = 0$  i  $z = 0$ , współczynniki stałe  $a$  i  $b$  w danym przypadku są równe:

$$a = 0 \quad (6.16a)$$

$$b = u_o \sqrt{\frac{L A_d}{g A_k}} \quad (6.16b)$$

Zmiana poziomów wody w komorze jest opisana równaniem:

$$z = u_o \sqrt{\frac{L A_d}{g A_k}} \sin \sqrt{\frac{L A_d}{g A_k}} \cdot t \quad (6.17)$$

które reprezentuje sinusoidalny ruch oscylacyjny wody w komorze wyrównawczej o amplitudzie:

$$z = \pm u_o \sqrt{\frac{L A_d}{g A_k}} \quad (6.18)$$

i okresie wahań:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L A_k}{g A_d}} \quad (6.19)$$

Uwzględniając straty hydrauliczne na derywacji oraz wartość początkowej wysokości energii kinetycznej, można z dobrym przybliżeniem wyznaczyć ekstremalne stany wód w komorze dla warunku pełnej zmiany mocy maszyny. Są to:

— maksymalne wzniesienie poziomu wody w komorze:

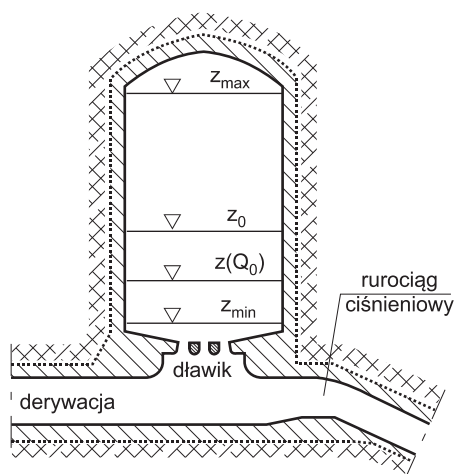
$$z = \frac{u_o}{A_k} \sqrt{\frac{(L A_d + h_{se} A_k) A_k}{g}} - h_{se} \quad (6.20)$$

— minimalne obniżenie zwierciadła wody w komorze:

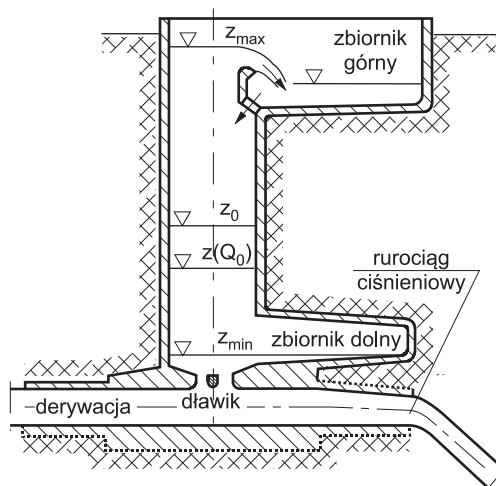
$$z = -\frac{u_o}{A_k} \sqrt{\frac{(LA_d + h_{se}A_k)A_k}{g}} - 2h_{se} \quad (6.21)$$

## 6.6. Ekstremalne poziomy wody w dławikowej komorze wyrównawczej

### 6.6.1. Nagłe i całkowite zatrzymanie przepływu przechodzącego przez maszynę hydrauliczną



Rys. 6.3. Typowa dławikowa komora wyrównawcza



Rys. 6.4. Komora dławikowa wyposażona w zbiorniki

Przy nagłym i całkowitym zatrzymaniu przepływu w komorze o stałym przekroju (rys. 6.3), maksymalny przyrost poziomu wody w komorze wylicza się ze wzoru: [79]

$$z_{\max} = a[1 - b_1(\varepsilon_k) - b_2(\varepsilon_k)\varepsilon_d + b_3(\varepsilon_k)\varepsilon_d^2] \quad (6.22)$$

gdzie:

$$b_1(\varepsilon_k) = 0,519\varepsilon_k - 0,151\varepsilon_k^2 \quad (6.23a)$$

$$b_2(\varepsilon_k) = 0,681 - 0,027\varepsilon_k^{\frac{2}{3}} \quad (6.23b)$$

$$b_3(\varepsilon_k) = 0,154 - 0,120\varepsilon_k^{\frac{2}{3}} \quad (6.23c)$$

przy czym:

$$a = Q \sqrt{\frac{L}{gA_d A_k}} \quad (6.24)$$

$$\varepsilon_k = \frac{h_{sk}}{a} \quad (6.25)$$

$$\varepsilon_d = \frac{h_{sd}}{a} \quad (6.26)$$

Natężenie przepływu  $Q$  i straty ciśnienia  $h_{sd}$  i  $h_{sk}$  przyjmują wartości stanu początkowego przepływu nieustalonego. Wzór (6.22) ma zastosowanie dla przypadku, gdy:

$$\varepsilon_d + 0,37\varepsilon_k^{\frac{1}{2}} \leq 1,2 \quad (6.27)$$

W przeciwnym razie maksymalną wartość wzniesienia poziomu wody w komorze w odniesieniu do poziomu hydrostatycznego liczy się ze wzoru:

$$z_{\max} = \frac{a}{2(\varepsilon_k + \varepsilon_d)} \quad (6.28)$$

Komory dławikowe wyposażone w zbiorniki i ewentualnie przelew (rys. 6.4) wymagają oddzielnego wymiarowania.

### 6.6.2. Nagły wzrost natężenia przepływu z wartości $Q_r$ do wartości $Q$

Gwałtowne obciążenie turbiny hydraulicznej, już zsynchronizowanej z systemem energetycznym, powoduje, że wzrasta natężenie przepływu w systemie z wartości  $Q_r$  do wartości instalowanej  $Q$ . Na wypływie z komory powstaje różnica wysokości ciśnienia  $h_o$ , równa stracie hydraulicznej, która w tym przypadku jest z reguły znacznie większa niż

przy dopływie do komory dla tego samego natężenia przepływu. Bezwzględna wartość obniżenia poziomu wody w komorze wyrównawczej można wyliczyć ze wzoru: [79]:

$$z_{\min} = a \left\{ 1 - b_5(\varepsilon_k) + \frac{1,94}{k_d^{1,3}} b_6(\varepsilon_k) + \frac{2,03}{k_d^{1,7}} (10\varepsilon_{rc})^{1,5} b_7(\varepsilon_k) \right. \\ \left. + \left[ 0,078 + \frac{3,16}{k_d^{2,3}} + b_8(\varepsilon_k) \right] \varepsilon_d (1 - \varepsilon_d) + \frac{36}{k_d^3} \varepsilon_d^2 \sqrt{10\varepsilon_{rc}} \right\} \quad (6.29)$$

gdzie:

$$b_5(\varepsilon_k) = 0,355\varepsilon_k^{0,68} \quad (6.30a)$$

$$b_6(\varepsilon_k) = 1 - 0,75\varepsilon_k^{0,68} \quad (6.30b)$$

$$b_7(\varepsilon_k) = 1 - 0,9\varepsilon_k^{0,75} \quad (6.30c)$$

$$b_8(\varepsilon_k) = 0,07\varepsilon_k \quad (6.30d)$$

W tym przypadku współczynniki  $a$ ,  $\varepsilon_k$ ,  $\varepsilon_{rc}$  i  $k_d$  odnoszą się do przepływu w pełni obciążonej maszyny hydraulicznej, przy czym współczynniki  $a$ ,  $\varepsilon_k$  liczy się odpowiednio ze wzorów (6.24) i (6.25), a współczynniki  $\varepsilon_{rc}$  i  $k_d$  – ze wzorów:

$$\varepsilon_{rc} = \frac{h_{src}}{a} \quad (6.31a)$$

$$k_d = \frac{H}{a} \quad (6.31b)$$

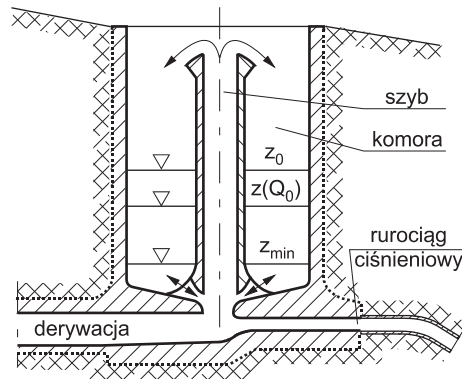
gdzie:  $h_{src}$  – strata ciśnienia w rurociągu ciśnieniowym oraz na wlocie i wylocie z maszyny,

$H$  – spad hydrostatyczny przy przepływie instalowanym  $Q$ .

## 6.7. Ekstremalne poziomy wody w komorze różnicowej

### 6.7.1. Nagłe i całkowite zatrzymanie przepływu przechodzącego przez maszynę hydrauliczną

Z chwilą zatrzymania przepływu na doprowadzeniu wody do siłowni w początkowym momencie cały przepływ z derywacji kieruje się do komory oraz do szybu (rys. 6.5).



Rys. 6.5. Typowa komora różnicowa

Szyb gwałtownie wypełnia się wodą przelewającą się do komory, osiągając maksymalny stan  $z_{\max}$  ponad poziom hydrostatyczny:

$$z_{\max} = z_p + h_p \quad (6.32)$$

gdzie:  $z_p$  – wzniesienie korony przelewu szybu ponad poziom hydrostatyczny,  
 $h_p$  – wysokość wody przelewającej się przez przelew.

Wydatek tego przelewu będzie równy:

$$Q_p = Mb(z_{\max} - z_p)^{\frac{3}{2}} \quad (6.33)$$

gdzie:  $M$  – współczynnik wydatku przelewu [ $\text{m}^{1/2}/\text{s}$ ]  
 $b$  – długość przelewu [m].

Równocześnie powstanie dopływ wody do komory przez zainstalowane otwory o natężeniu:

$$Q_o = \mu A \sqrt{2gh} \quad (6.34)$$

gdzie:  $\mu$  – współczynnik wydatku (zdolności przepustowej) otworów,  
 $h$  – różnica poziomów wody w komorze pomiędzy stanem hydrostatycznym a roboczym [m].

Jeżeli znane są współczynniki wydatku  $M$  i  $\mu$ , to wartość  $z_{\max}$  wyznaczy się dla takiego stanu, gdy będzie spełniony bilans natężenia przepływu:

$$Q = Q_o + Q_p \quad (6.35)$$

Jeżeli uprzednio pozna się wartość strat ciśnienia  $h_{sm}$  przy natężeniu przepływu przez otwory równym  $Q$ , to dla dowolnej wartości  $Q_o$  można wyznaczyć wartości strat  $h_{smo}$  z zależności:

$$h_{smo} = h_{sm} \left( \frac{Q_o}{Q} \right)^2 \quad (6.36)$$

Ponieważ przy funkcjonowaniu przelewów poziom wody w komorze głównej jest niższy od poziomu hydrostatycznego, w szybie zaś wyższy, to można zapisać, że:

$$z_{\max} + h = h_{sm} \left( \frac{Q_o}{Q} \right)^2 \quad (6.37)$$

albo:

$$\frac{Q_o}{Q} = \sqrt{\frac{z_{\max} + h}{h_{sm}}} \quad (6.38)$$

Po wstawieniu do równania (6.35) otrzymuje się wyrażenie:

$$Q = Mb(z_{\max} - z_p)^{\frac{3}{2}} - Q_o \sqrt{\frac{z_{\max} + h}{h_{sm}}} \quad (6.39)$$

Przyjmując dopuszczalną wartość  $z_{\max}$ , można z równania (6.32) wyznaczyć  $z_p$ , a stąd wzniesienie poziomu wody w komorze wyrównawczej ponad poziom hydrostatyczny. Możliwe jest też postępowanie odwrotne. Znajomość wartości  $z_{\max}$  pozwala wyznaczyć objętość komory  $V$ :

$$V = A_k(z_{\max} + h) \quad (6.40)$$

a stąd jej średnicę. Niezależnie od przyjętej drogi obliczeń  $z_{\max}$  zachodzi potrzeba stosowania rachunku aproksymacyjnego.

### 6.7.2. Nagłe zwiększenie natężenia przepływu z wartości $Q_r$ do $Q$

W przypadku rozruchu i obciążenia turbiny do mocy znamionowej największe obniżenie w komorze wyrównawczej wystąpi w czasie przejścia ze stanu synchronizacji do stanu pełnego obciążenia, gdy przepływ przechodzący przez turbinę wzrośnie z  $Q_r$  do  $Q$ . Wówczas bardzo szybko, a nawet momentalnie, obniży się poziom wody w szybie, powodując wzrost dopływu wody z derywacji i z komory wskutek naruszenia stanu równowagi. Po pewnym czasie poziom wody w komorze i w szybie zrówna się przy najniższym obniżeniu zwierciadła wody, osiągając wartość  $z_{\min}$  w stosunku do poziomu hydrostatycznego. Komora wyrównawcza będzie najbardziej skutecznie funkcjonować wówczas, gdy ten najniższy poziom wody będzie odpowiadał poziomowi, jaki powstanie przy stratach ciśnienia wywołanych przez dławik. Wartość tych strat – według [79] – liczy się ze wzoru:

$$h_{sk} = \frac{\chi_{\min} - \varepsilon q_r^2}{(1 - q_r)^2} a_r \quad (6.41)$$

gdzie:

$$\chi_{\min} = \frac{z_{\min}}{a_r} \quad (6.42)$$

$$q_r = \frac{Q_r}{Q} \quad (6.43)$$

$$a_r = Q \sqrt{\frac{L}{gA_r A_k}} \quad (6.44)$$

Minimalną wartość obniżenia zwierciadła wody opisuje formuła:

$$\frac{z_{\min}}{h} = 1 + \left[ \sqrt{0,5 \frac{\lambda}{\alpha} - 0,275 \sqrt{q} + \frac{0,01a}{\lambda}} \right] (1 - q) \left[ 1 - \frac{q}{\left(0,5 \frac{\lambda}{\alpha}\right)^{0,62}} \right] \quad (6.45)$$

gdzie:

$$\lambda = \frac{LQ^2}{gA_s h^2 (A_s + A_k)} \quad (6.46)$$

$$\alpha = 1 - \frac{1,5A_s}{1 + 2q(A_s + A_k)} \quad (6.47)$$

gdzie:  $A_s$  – powierzchnia przekroju poprzecznego szybu [m<sup>2</sup>],

$A_r$  – powierzchnia przekroju poprzecznego rurociągu [m<sup>2</sup>],

$A_k$  – powierzchnia przekroju poprzecznego komory zewnętrznej okalającej szyb [m<sup>2</sup>],

$h$  – wartość bezwzględna obniżenia poziomu zwierciadła wody w stosunku do poziomu hydrostatycznego przy natężeniu przepływu  $Q$  [m].

## 6.8. Potrzebna powierzchnia przekroju poprzecznego komory wyrównawczej przy pracy elektrowni na sieć wydzieloną

Zdarza się, że elektrownia wodna pracuje na sieć wydzieloną, utrzymując moc zgodnie z zapotrzebowaniem. Jeżeli w takim przypadku wystąpi znacząca zmiana spad, np. wskutek zaistniałych oscylacji w komorze wyrównawczej, to może zaistnieć niestabilność pracy elektrowni, jeśli przekrój poprzeczny komory wyrównawczej jest zbyt mały. Polega to m.in. na tym, że z chwilą, gdy wzrasta spadek i wzrasta generowana moc, regulator obrotów przynymka dopływ wody, po to by utrzymać potrzebną moc i stałą prędkość obrotową. Powoduje to dalszy wzrost poziomu wody w komorze i intensyfikację



oscylacji, co z kolei wywołuje dalszą niestabilność pracy maszyn hydraulicznych. Aby zapobiec temu zjawisku, m. in. D. Thoma [85] ustalił, że komora wyrównawcza powinna posiadać pewną minimalną powierzchnię przekroju, po to by nastąpiło samowygazanie się oscylacji:

$$A_{\min} \geq \frac{u_o^2 L A_d}{2g H_o h_s} \quad (6.48)$$

wskutek występujących strat hydraulicznych  $h_s$  w całym systemie prowadzącym wodę. Formuła (6.48) nosi nazwę warunku Thoma.

## 7.1. Opory tarcia hydraulicznego w kanałach i rurociągach

### 7.1.1. Straty hydrauliczne wywołane przez opory tarcia

Pod pojęciem liniowych strat hydraulicznych rozumie się zmniejszanie poziomu wody w kanale otwartym, względnie zmniejszanie wysokości ciśnienia w przewodzie zamkniętym na określonej długości. Powszechnie przyjmuje się, że w przepływie burzliwym jednostkowe straty hydrauliczne są funkcją średniej prędkości przepływu podniesionej do kwadratu. Opisują je formuły:

— Chézy'ego w kanałach otwartych:

$$I_s = \frac{u^2}{C_h^2 R_h} \quad (7.1)$$

— Darcy'ego–Weisbacha w przewodach ciśnieniowych:

$$I_s = \frac{\lambda}{R_h} \frac{u^2}{8g} \quad (7.2)$$

Obydwa równania zostały wyprowadzone na podstawie tej samej hipotezy, co skutkuje tym, że pomiędzy współczynnikami oporów tarcia  $C_h$  i  $\lambda$  występuje zależność:

$$\lambda = \frac{8g}{C_h^2} \quad (7.3)$$

Ta okoliczność skłania niektórych badaczy do stosowania do obliczeń prędkości przepływu prowadzonego w korytach otwartych tylko formuły (7.2), tym bardziej że  $C_h$  jest wielkością mianowaną ( $\text{m}^{1/2}/\text{s}$ ). Jej kwadrat stanowi wartość jednostkową siły wywołującej określoną prędkość przepływu w danym kanale. Zatem wzory Chezy'ego i Darcy'ego–Weisbacha mogą być stosowane przemiennie.

### 7.1.2. Czynniki decydujące o wielkości współczynnika tarcia

Badania Nikuradsego [57] prowadzone w rurociągach ciśnieniowych i Zegždy [89] w kanałach otwartych wykazały, że na wielkość współczynników oporów tarcia  $\lambda$  ma

wpływ burzliwość przepływu opisana liczbą Reynoldsa  $Re$  i szorstkość ścian przewodu wyrażona w wielkościach względnych  $\varepsilon$ .

Ogólną formułę opisującą liczbę Reynoldsa:

$$Re = \frac{uR_h}{\nu} \quad (7.4)$$

przyjmowano dla rurociągów ciśnieniowych jako:

$$Re = \frac{ud}{\nu} \quad (7.5)$$

lub dla kanałów otwartych:

$$Re = \frac{uH}{\nu} \quad (7.6)$$

Stwierdzono, że działanie tak określonej burzliwości i szorstkości jest zależne od rodzaju i strefy przepływu. Na wielkość współczynnika  $\lambda$  wpływa tylko liczba Reynoldsa w przepływie laminarnym oraz po części w przepływie burzliwym w kanałach i rurociągach hydraulicznie gładkich i lekko szorstkich (tabl. 7.1). W przewodach szorstkich o wielkości współczynnika  $\lambda$  decyduje wyłącznie szorstkość względna ścian  $\varepsilon$ .

**Tablica 7.1**

Graniczne wartości liczby Reynoldsa dla poszczególnych rodzajów przepływu

Przewód	Przepływ laminarny	Przepływ burzliwy
Kanał otwarty	$\leq 800$	$> 1250$
Rurociąg ciśnieniowy	$\leq 2300$	$> 4000$

Podane granice, oddzielające przepływ burzliwy od laminarnego, nie ulegają znaczącej zmianie nawet wówczas, gdy znacząco zmienia się temperatura wody (tabl. 7.2).

**Tablica 7.2**

Wartości kinematycznego współczynnika lepkości  $\nu$  i gęstości wody  $\rho$  w funkcji temperatury  $t$

Temperatura $t$ [°C]	0	4	10	20	30	40	50	75	100
$\nu \cdot 10^{-6}$ [m <sup>2</sup> /s]	1,77	1,57	1,31	1,01	0,83	0,66	0,53	0,40	0,29
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	999,0	1000,0	999,7	998,2	995,7	992,2	989,1	974,0	958,4

### 7.1.3. Opory tarcia w korytach otwartych

Opory tarcia w korytach otwartych były przedmiotem bardzo licznych badań doświadczalnych. Największe uznanie znalazły wyniki uzyskane przez Manninga, który zaprezentował je w postaci następującego wzoru, opisującego prędkość przepływu w kanale otwartym:

$$u = \frac{1}{n} I_s^{\frac{1}{2}} R_h^{\frac{2}{3}} \quad (7.7)$$

Jest on tożsamy z formułą Chézy'ego dla:

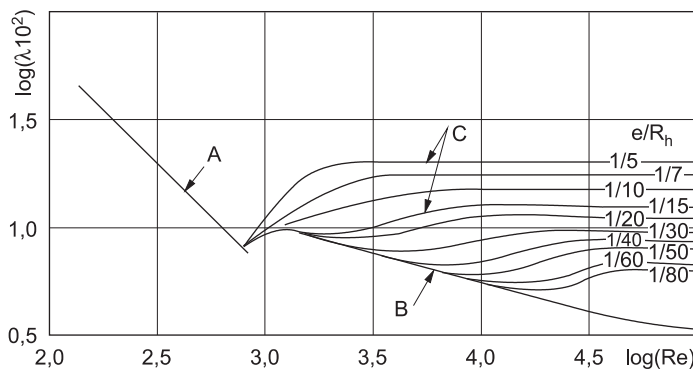
$$C_h = \frac{1}{n} R_h^{\frac{1}{6}} \quad (7.8)$$

Współczynnik  $n$ , mający wymiar  $s/m^{1/3}$ , nie przedstawia sobą jakiegokolwiek wielkości fizycznej. Dlatego wzór Manninga budzi istotną krytykę.

N.N. Pawłowski, badając gruntownie przepływy w kanałach i rzekach, ustalił, że wykładnik potęgi promienia hydraulicznego we wzorze (7.8) przyjmuje wartości opisane przez wzór:

$$y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R_h}(\sqrt{n} - 1) \quad (7.9)$$

W obliczeniach inżynierskich często przyjmuje się, że jest on równy:  $y = 1/5$  dla  $R_h \leq 1,0$  m oraz  $y = 1/6$  dla  $R_h > 1,0$  m. Badania przeprowadzone w dużych kanałach energetycznych wykazują, że dla  $H \geq 1,0$  m i wykładnika potęgi  $y = 1/6$  współczynnik  $n$  maleje wraz z głębokością w sposób paraboliczny. Inne liczne badania tego współczynnika, głównie w warunkach laboratoryjnych, nie dostarczają wartościowego materiału dla potrzeb obliczeń inżynierskich.



Rys. 7.1. Zależność  $\lambda$  od  $e/R_h$  w kanale o przekroju prostokątnym w funkcji  $\log(Re)$  według Zegždy [89]

Pewien interesujący wyjątek stanowią propozycje Zegždy [89], sprowadzające się do tego, aby w kanałach otwartych opory tarcia obliczać tak jak w przewodzie ciśnieniowym zamkniętym. Zegždy, wzorując się na badaniach Nikuradsego [57], wyznaczył

zależność współczynnika  $\lambda$  od liczby Reynoldsa i szorstkości względnej w postaci  $e/R_h$  (rys. 7.1) w kanale przekroju prostokątnego o wymiarach  $b = 0,25 \div 1,00$  m i  $e/R_h = 0,0125 \div 0,20$ . Zależności te odnoszą się do przepływów: A – laminarnego, B – kanału gładkiego i C – kanału szorstkiego, przy czym podane są równocześnie granice występowania poszczególnych rodzajów przepływu i szorstkości kanału. W świetle teorii Prandtla–von Kármána–Nikuradsego, opisującej prędkość przepływu w szorstkim korycie otwartym, współczynnik oporu jest równy:

$$C_h = \left( 5,65 \log \frac{H}{e} + 6,00 \right) \sqrt{g} \quad (7.10)$$

i

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,00 \log \frac{H}{e} + 2,12 \quad (7.11)$$

W kanałach energetycznych o ograniczonej szerokości przekroju głębokość  $H$  jest zastępowana promieniem hydraulicznym  $R_h$ . W tabelicy 7.3 przedstawiono praktyczne wartości współczynnika szorstkości  $n$  i szorstkości  $e$  dla typowych materiałów stanowiących okładzinę kanału.

**Tablica 7.3**

Wartości współczynnika  $n$  i szorstkość  $e$  w kanałach z okładziną

Okładzina kanału	$n$ [s/m <sup>1/3</sup> ]	$e$ [mm]
<b>1. Betonowa</b>		
– zatarta zaczynem cementowym	0,010	0,5
– gładka	0,012	0,8
– w średnim stanie	0,014	1,5
– stara z wżerami i nierównościami	0,017	4,0
<b>2. Asfaltobetonowa</b>		
– nowa, gładka	0,010	0,5
– stara, lekko chropowata	0,013	1,0
– stara, spękana	0,015	2,0
<b>3. Ceglana</b>		
– nowa	0,012	0,8
– stara, lekko zniszczona	0,015	2,0
– stara, mocno zniszczona	0,020	10,0
<b>4. Kamienna</b>		
– powierzchnia płaska ściśle ułożona	0,017	4,0
– w siatkach (gabiony)	0,020	10,0
– w formie luźnego narzutu	0,025	30,0

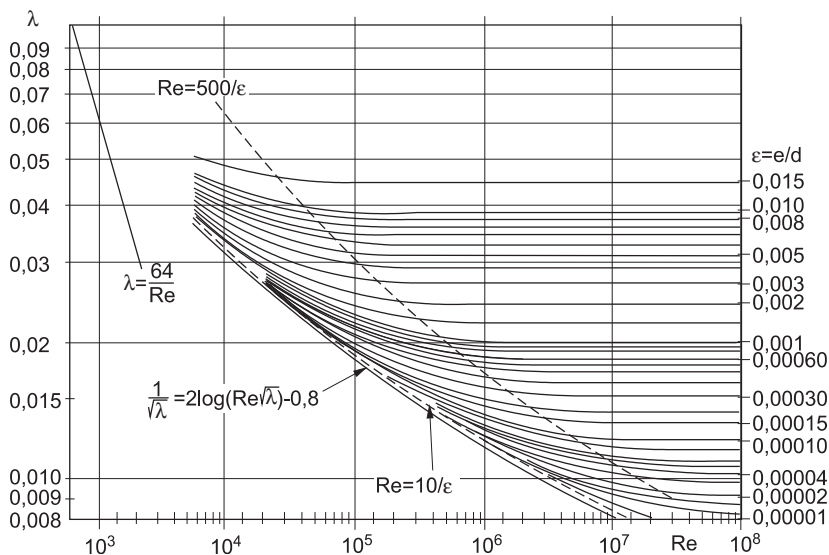
### 7.1.4. Opór tarcia burzliwego w rurociągach ciśnieniowych

Badania eksperymentalne, których efektem są liczne wzory opisujące liniowy współczynnik oporów tarcia  $\lambda$  z formuły Darcy'ego–Weisbacha, bazują na wynikach, jakie uzyskał Nikuradse, wykonując badania przepływu w rurach ze sztuczną chropowatością (warstwa wewnętrzna pokryta piaskiem).

Moody, wykorzystując wzór Colebrooka–White'a:

$$\lambda = \left[ -2 \log \left( \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3,71} \right) \right]^{-2} \quad (7.12)$$

sporządził nomogram, który zawiera między innymi strefy zależności współczynnika oporów liniowych  $\lambda$  od liczby Reynoldsa  $Re > 4000$  i szorstkości względnej  $\varepsilon = e/d$  (rys. 7.2).



Rys. 7.2. Nomogram Moody'ego zależności współczynnika  $\lambda$  od liczby Reynoldsa  $Re$  dla wybranych szorstkości względnych  $\varepsilon = e/d$

Rozróżnia się trzy rodzaje rur hydraulicznie: A – gładkich, B – lekko-szorstkich, C – szorstkich, zwanych też chropowatymi. Jeżeli w strefie przyściennej o grubości:

$$b = 11 \frac{\nu}{u_*} \quad (7.13)$$

gdzie:  $u_*$  jest prędkością dynamiczną

$$u_* = \sqrt{g R_h I} \quad (7.14)$$

spełniony jest warunek:

$$e < 0,25b = 2,75 \frac{\nu}{u_*} \quad (7.15)$$

to wówczas szorstkość rury nie wpływa na wielkość współczynnika oporów  $\lambda$ . Powstają tu bowiem przepływ laminarny i przepływu rzędu prędkości dynamicznej  $u_*$  [52]. Rurę natomiast nazywa się hydraulicznie gładką.

Graniczne wartości szorstkości względnej polska norma PN-76/M-36034 [59] zaleca wyznaczać z następujących wzorów:

— dla rur z równomierną szorstkością ze wzoru Filonienki–Altšuli:

$$\varepsilon_{gr} = \frac{18 \log Re - 16,4}{Re} \quad (7.16)$$

— dla rur z równomierną szorstkością przy  $Re < 10^5$  ze wzoru Blasiusa:

$$\varepsilon_{gr} = 17,85 Re^{-0,875} \quad (7.17)$$

— dla rur z szorstkością nierównomierną ze wzoru Altšuli–Ljačery:

$$\varepsilon_{gr} = \frac{23}{Re} \quad (7.18)$$

Strefę rur hydraulicznie gładkich ogranicza od dołu krzywa o równaniu Prandtla:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (7.19)$$

Współczynnik oporu  $\lambda$  dla  $Re > 4000$  może być wyznaczony z następujących wzorów:

— Prandtla–von Kármána:

$$\lambda = \left[ 2 \log \left( \frac{Re\sqrt{\lambda}}{2,51} \right) \right]^{-2} \quad (7.20)$$

— Blasiusa, dla  $Re \leq 10^5$ :

$$\lambda = 0,3164 Re^{-0,25} \quad (7.21)$$

— Lessa, dla  $Re > 10^5$ :

$$\lambda = 0,072 + 0,6104 Re^{-0,35} \quad (7.22)$$

W strefie przejściowej od rur hydraulicznie gładkich do rur hydraulicznie szorstkich stosunek szorstkości bezwzględnej  $e$  do grubości warstwy przyściennej  $b$  zawiera się w granicach [67]:

$$0,25 < \frac{e}{b} < 6,0 \quad (7.23)$$

Strefę przejściową ograniczają krzywe o równaniach:

— od dołu – Blasiusa, dla  $Re \leq 10^5$ :

$$Re = \frac{26,94}{\varepsilon^{1,143}} \quad (7.24)$$

— od góry:

$$Re = \frac{500}{\varepsilon} \quad (7.25)$$

Opory są tu wywołane zarówno przez lepkość cieczy, jak i przez szorstkość rury. Są więc funkcją zarówno liczby Reynoldsa, jak też szorstkości przewodu.

Współczynnik oporów  $\lambda$  opisują:

— wzór Nikuradsego:

$$\lambda = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3,71} \right) \right]^{-2} \quad (7.26)$$

— wzory Colebrooka–White’a (7.12) i Waldena:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{6,1}{Re^{0,915}} + 0,268\varepsilon \right) \quad (7.27)$$

— wzór Moody’ego:

$$\lambda = 0,0055 \left[ 1 + \left( 2000\varepsilon + \frac{10^6}{Re} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \quad (7.28)$$

które są stosowane również do przepływu występującego w strefie rur hydraulicznie szorstkich.

W strefie, w której przepływy odbywają się w rurach hydraulicznie szorstkich, współczynnik oporów tarcia zależy tylko od ich szorstkości względnej. Przyjmuje się, że opory tarcia są tu w rzeczywistości funkcją kwadratu prędkości średniej. Dlatego tę strefę przepływów nazywa się kwadratową.

Oprócz wzorów (7.26)–(7.28) stosowane są również wzory:

— Altšuli:

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{68}{Re} + \varepsilon \right)^{0,25} \quad (7.29)$$

— Łobajewa:

$$\lambda = \frac{142}{\log \left( \frac{Re}{\varepsilon} \right)^2} \quad (7.30)$$

— Citriniego:



$$\lambda = \frac{1 + \frac{8}{Re^\varepsilon}}{\left(2 \log 3,71 \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \quad (7.31)$$

ponieważ nie wymagają stosowania metod iteracyjnych do obliczeń współczynnika tarcia  $\lambda$ . W tablicy 7.4 przedstawiono praktyczne wartości szorstkości bezwzględnej  $e$  dla typowych rur.

**Tablica 7.4**

Wartości bezwzględnej szorstkości  $e$  w rurach stalowych, żeliwnych i betonowych

Material rury i stan jej wewnętrznej ścianki	$e$ [mm]
<b>1. Rury stalowe</b>	
– nierdzewne	0,015
– nowe, bez szwów, pokryte lakierem	0,05
– nowe, gładkie, bez szwów	0,10
– ocynkowane	0,15
– ze szwami	0,20 ÷ 0,30
– spawane z arkuszy blachy	0,33
– spawane, lekko zardzewiałe	0,50 ÷ 0,60
<b>2. Rury żeliwne</b>	0,26
<b>3. Rury betonowe</b>	
– gładkie, zatarte cementem	0,5 ÷ 1,0
– gładkie	1,0 ÷ 2,0
– lekko szorstkie	2,0 ÷ 3,0
– bardzo szorstkie	3,0 ÷ 6,0

## 7.2. Hydrauliczne opory tarcia przepływu nieustalonego

### 7.2.1. Wprowadzenie

Przepływowi nieustalonemu towarzyszą opory tarcia hydraulicznego znacznie różniące się wielkością od oporów powstających w przepływie ustalonym. Jest to skutek zmian natężenia przepływu, a zatem i prędkości na długości przewodu i w czasie trwania tegoż przepływu. Tak jak dla przepływu ustalonego, rozróżnia się hydrauliczne straty liniowe, spowodowane między innymi przez tarcie o ściany i wewnątrz masy płynącej wody, oraz straty lokalne, wywołane różnymi przeszkodami, takimi jak maszyny i urządzenia hydrauliczne oraz zamknięcia. Straty hydrauliczne powstają też wskutek odbicia fal uderzenia hydraulicznego od zbiorników wodnych oraz sztywnych budowli hydrotechnicznych, a nawet wskutek zmiany wymiarów wewnętrznych przewodu

ciśnieniowego. O ile badania nad powstającymi liniowymi stratami hydraulicznymi są mocno rozbudowane, to badania nad stratami lokalnymi, zwłaszcza powstałymi w trakcie odbicia fal, nie są autorowi dostatecznie znane. Dlatego w tym rozdziale przedstawiono tylko podstawowe formuły opisujące wartości współczynników oporów tarcia liniowego w przepływie nieustalonym.

### 7.2.2. Formuły empiryczne opisujące współczynnik oporów tarcia przepływu nieustalonego

Dość powszechnie przyjmuje się, że liniowe straty hydrauliczne w przepływie nieustalonym mają ten sam charakter co w przepływie ustalonym. Hipoteza ta nie ma należytego uzasadnienia naukowego. Niemniej jednak powstał model traktujący przepływ nieustalony jako przepływ quasi-ustalony [15, 26, 29, 45, 46, 50], w którym opory przepływu są opisane przez wzór Darcy'ego–Weisbacha, zawierający zmodyfikowany współczynnik tarcia  $\lambda_s$ :

$$I_s = \frac{\lambda_s u^2}{d 2g} \quad (7.32)$$

W modelu tym przyjmuje się, że współczynnik oporów tarcia  $\lambda_s$  jest sumą współczynnika oporów tarcia przepływu ustalonego i pochodnej uśrednionej prędkości przepływu nieustalonego albo posiada zmienioną wartość współczynnika tarcia przepływu ustalonego, powstałą wskutek zmiany prędkości w czasie i na długości przewodu.

Pierwszą hipotezę reprezentują:

— wzór Liïva [50]:

$$\lambda_s = \lambda + 1,28 \frac{d}{u^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.33)$$

wyznaczony eksperymentalnie dla:

$$-1,25 < \frac{d}{u^2} \frac{\partial u}{\partial t} < 1,25 \quad (7.34)$$

— wzór Ramusa, Covasa, Borga, Lourero [15]:

$$\lambda_s = \lambda + \frac{d}{u|u|} \left( k_1 \frac{\partial u}{\partial t} + k_2 c \operatorname{sign}(u) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \right) \quad (7.35)$$

gdzie:  $k_1 \approx 0,003$  i  $k_2 \approx 0,04$ .

Reprezentantami drugiego sposobu interpretacji współczynnika oporów tarcia przepływu nieustalonego są m.in. wzory:

— Denisova [29]:

$$\lambda_s = \lambda \left( e^{-20\alpha_1} + 20\alpha_1 \frac{1 + \alpha_2}{1 + \alpha_1} e^{\alpha_1+1} \right) \quad (7.36)$$

— Markova [51]:

$$\text{dla } \alpha_1 > 0 \quad \lambda_s = \lambda(1,43 - 0,43e^{-23\alpha_1}) \quad (7.37)$$

$$\text{dla } \alpha_1 < 0 \quad \lambda_s = \lambda e^{3,67\alpha_1}(11 - 1,38\alpha_1 + 12,76\alpha_1^2) \quad (7.38)$$

gdzie:

$$\alpha_1 = \frac{d}{u^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.39)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{u} \sqrt[3]{d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \quad (7.40)$$

Różnica w sposobie interpretacji współczynnika oporów tarcia w przepływie nieustalonym polega na tym, że w pierwszym modelu jego wartość jest sumą współczynnika tarcia występującego w przepływie ustalonym i zmian w czasie prędkości przepływu, natomiast w drugim przypadku jest iloczynem tych dwóch czynników. Przyjęcie, że współczynnik  $\lambda$  zachowuje stałą wartość, może być uprawnione, gdy przepływ nieustalony odbywa się w strefie kwadratowej, gdzie współczynnik ten jest zależny tylko od szorstkości przewodu.

Z przedstawionych wyżej wzorów wynika, że współczynnik oporów tarcia jest funkcją tylko współczynnika  $\lambda$  i prędkości przepływu (średniej) oraz jej pochodnych względem czasu i długości przewodu. Tymczasem istnieje też pogląd, że jest on funkcją również liczby Reynoldsa, która ulega zmianie w trakcie trwania przepływu nieustalonego. Ilustruje to wzór opublikowany przez Berganta, Simpsona i Vitkovsky'ego [15]:

$$\lambda_s = \lambda + \frac{kd}{u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + c \operatorname{sign}(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (7.41)$$

gdzie:

$$k = \frac{\sqrt{C^*}}{2} \quad (7.42)$$

$$C^* = \frac{7,41}{Re^{\log(14,3/Re^{0,05})}} \quad (7.43)$$

Wzór ten został opracowany na drodze badań laboratoryjnych.

### 7.3. Lokalne straty hydrauliczne

Lokalne straty hydrauliczne powstają zwykle na wlotach do rurociągów, połączeniach poszczególnych segmentów, cechujących się skokową zmianą powierzchni przekroju czynnego, na obudowie i niedomkniętych zamknięciach awaryjno-remontowych, takich jak szandory, zasuw lub zawory. Znaczący wpływ na wartość strat może mieć

kilka innych czynników w postaci kształtu budowli wlotowej, kierunku doprowadzenia wody czy też napowietrzenia. Wielkość powstałych strat opisuje powszechnie stosowany wzór:

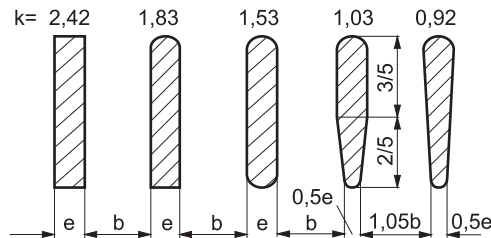
$$h_{sm} = \xi \frac{u^2}{2g} \quad (7.44)$$

Wielkość współczynnika strat  $\xi$  dla najbardziej istotnych przepływów przez przeszkody rurociągu przedstawia się w sposób opisany poniżej.

**Krata wlotowa** wywołuje straty o współczynniku, który jest funkcją stosunku grubości  $e$  prętów do ich odstępów w świetle  $b$ , pochylenia kraty do pionu  $\alpha$ , kształtu prętów i stosunku grubości do szerokości. Związek ten opisuje dość dobrze wzór Kirschmera [5]:

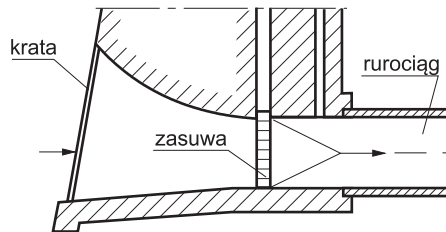
$$\xi = k \sin \alpha \left( \frac{b}{e} \right)^{4/3} \quad (7.45)$$

Wartości współczynnika kształtu prętów  $k$  przy stosunku grubości do szerokości  $e/b = 0,20 \div 0,25$  przedstawia rys. 7.3.



Rys. 7.3. Typowe kształty przekroju poprzecznego prętów krat wlotowych do rurociągu

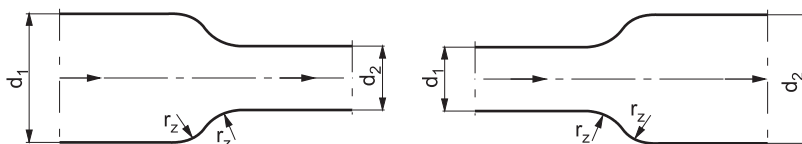
**Budowla wlotowa** prowadząca wodę do rurociągu ma z reguły prostokątny przekrój poprzeczny o powierzchni zmniejszającej się na długości (rys. 7.4).



Rys. 7.4. Przekrój pionowy typowego wlotu do rurociągu

Jeżeli na całej długości przekrój zachowuje kształt prostokątny, to współczynnik strat jest równy  $\xi = 0,20 \div 0,25$ . Jeżeli natomiast przed wlotem do rurociągu przyjmuje kształt kołowy o średnicy zbieżnej ze średnicą rurociągu, to  $\xi = 0,05 \div 0,10$ . Prędkością miarodajną do obliczeń wartości strat jest tu prędkość  $u = u_1$ , jaką woda posiada bezpośrednio przed wlotem do rurociągu.

**Połączenie dwóch rur** o różnej powierzchni przekroju wywołuje stratę hydrauliczną zależną od stosunku ich powierzchni oraz konstrukcji połączenia. Połączenie pozostawiające ostre krawędzie wywołuje maksymalne straty. Połączenie opływowe (rys. 7.5) znacząco je minimalizuje.



Rys. 7.5. Opływowy kształt połączenia rur o różnej wielkości średnic

Współczynnik strat można wyznaczyć ze wzorów:

$$\xi = k \left( 1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \quad (7.46)$$

przy przepływie z rury o większej powierzchni przekroju do mniejszej lub:

$$\xi = k \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \quad (7.47)$$

przy przepływie z rury o mniejszej powierzchni przekroju do większej.

Współczynnik  $k$  jest funkcją stosunku promienia złącza do średnicy rury za złączem. Jego wartości liczbowe podano w tabelicy 7.5.

**Tabela 7.5**

Wartości współczynnika  $k = f(r_z/d_2)$  we wzorach (7.46) i (7.47)

$r_z/d_2$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,2	1,6	>2,0
$d_2/d_1 \leq 1,0$	0,50	0,43	0,36	0,31	0,26	0,22	0,20	0,15	0,09	0,06	0,03
$d_2/d_1 > 1,0$	1,00	0,87	0,74	0,64	0,51	0,40	0,32	0,20	0,10	0,06	0,03

Do obliczeń strat hydraulicznych powstających na złączu przyjmuje się prędkość przepływu  $u = u_2$  za złączem.

**Zasuwę płaską** instaluje się zwykle na wlocie do kanału otwartego lub na wlocie do rurociągu, którego przekrój jest prostokątny. Współczynnik strat przepływu pod zasuwą jest w pewnym stopniu zależny od kształtu i rodzaju uszczelnienia samej zasuwy. Kształt ostrokrawędzisty spocznika zasuwy wywołuje zwiększenie współczynnika strat o około 10–15% w stosunku do współczynnika strat wywołanych przy spoczniku (belce)

o kształcie opływowym (tabl. 7.6) Wartość współczynnika strat odniesiona do prędkości za zasuwą jest funkcją stosunku uniesienia zasuwy  $e$  do wysokości zamykanego otworu  $h$ .

**Tablica 7.6**

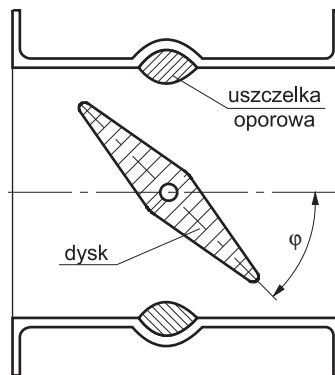
Wartości współczynnika strat przy przepływie wody pod zasuwą płaską w funkcji jej względnego uniesienia

$e/h$	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,15
$\xi$	0,06	0,20	1,28	2,40	5,21	9,00	21,0	61,0	1200

**Zamknięcie motylowe** (rys. 7.6), zwane też dyskiem, w pozycji w pełni otwartej wywołuje straty o współczynniku zależnym od jego grubości  $a$  w osi obrotu, równym:

$$\xi = \frac{a}{d} \quad (7.48)$$

W pozycji częściowo otwartej współczynnik strat jest zależny od kąta obrotu dysku  $\varphi$  (tabl. 7.7).



Rys. 7.6. Zamknięcie motylowe

**Tablica 7.7**

Współczynnik strat przy przepływie wody przez zamknięcie motylowe  $\xi = f(\varphi)$

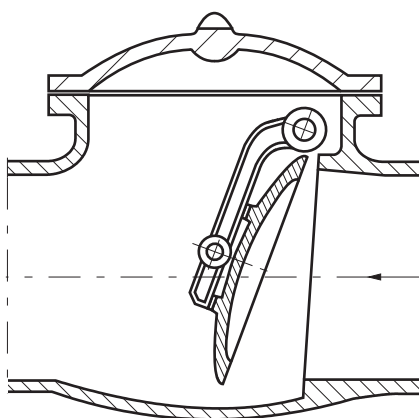
a) wg [42]

$\varphi$ (°)	5	10	20	30	40	50	60	70
$\xi$	0,24	0,52	1,54	3,91	10,8	32,6	118	751

b) wg [88]

$\varphi$ (%)	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
$\xi$	0,31	0,36	0,77	2,15	5,40	11,9	27,7	39,0	278	2500

**Kłapa zwrotna** (rys. 7.7) działa samoczynnie na zasadzie równowagi momentu od ciężaru kłapy  $M_g$  i momentu hydraulicznego, wywołanego przez różnicę ciśnienia wytworzonego przez pompę i ciśnienia hydrostatycznego panującego za kłapą  $M_h$ .



Rys. 7.7. Kłapa zwrotna

Przy zmiennym ciśnieniu ruch obrotowy kłapy podlega prawu opisanemu formułą:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{M_h - M_g}{J_k} \quad (7.49)$$

Kłapa wywołuje straty hydrauliczne, których współczynnik strat jest sumą współczynnika strat powstałego przy pełnym otwarciu kłapy  $\xi_o$  i współczynnika występującego przy częściowym uchyleniu kłapy  $\xi_\varphi$  (tabl. 7.8). W pierwszym przypadku jest on zależny głównie od średnicy kłapy  $d$  (tabl. 7.9).

**Tablica 7.8**

Wartości współczynnika strat w funkcji kąta uchylenia kłapy  $\xi_\varphi = f(\varphi)$  wg [42]

$\varphi$ (°)	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
$\xi_\varphi$	1,7	2,3	3,2	4,6	6,6	9,5	14	20	30	42	62	90

Tablica 7.9

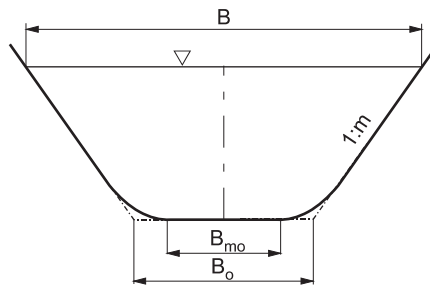
Wartości współczynnika strat w funkcji średnicy kłapy  $\xi_o = f(d)$  wg [42]

$d$ [mm]	1000	2000	3000	5000	8000
$\xi_o$	1,5	1,9	2,1	2,5	3,0

## 7.4. Dobór optymalnego kształtu trapezowego przekroju poprzecznego kanału otwartego

### 7.4.1. Cel i zakres metody

Kanały energetyczne posiadają głównie trapezowy przekrój poprzeczny, a wyjątkowo prostokątny. Aktualną tendencją jest stosowanie takiego zmodyfikowanego przekroju trapezowego, w którym połączenie skarpy z dnem stanowi krzywa typu parabolicznego (rys. 7.8).



Rys. 7.8. Zmodyfikowany przekrój trapezowy kanału z okładziną z betonu asfaltowego

To rozwiązanie bywa stosowane głównie wówczas, gdy okładzinę tworzy beton asfaltowy, zwany asfaltobetonem. Kształt czynnego przekroju poprzecznego znacząco wpływa na zdolność przepustową kanału oraz na wielkość i zakres robót hydrotechnicznych, a co za tym idzie – na koszt jego budowy. Podstawowe znaczenie ma tu stosunek szerokości w dnie  $B_o$  do głębokości  $H$  przepływu przy zadanym pochyleniu skarp, wynikającym z istniejących miejscowych warunków geohydrotechnicznych i wykonawczych. Z tego też względu podstawowe cele obejmują dobranie takich wymiarów przekroju poprzecznego kanału, które zapewniają najkorzystniejszy stosunek  $B_o/H$ , oraz uzyskanie jak najmniejszych strat hydraulicznych. Ten drugi cel uzyskuje się w pewnym stopniu przez połączenie dna i skarpy odpowiednią krzywą paraboliczną, której „ramiona” będą styczne do skarpy kanału przekroju trapezowego i będą względnie łagodnie spajały połączenie dna ze skarpami.



### 7.4.2. Wpływ kształtu na wielkość czynnego trapezowego przekroju poprzecznego kanału

Rozpatrzmy jak na sprawność hydrauliczną, a zatem i na wielkość powierzchni przekroju trapezowego kanału wpływa stosunek szerokości w dnie do głębokości w postaci:

$$\beta = \frac{B_o}{H} \quad (7.50)$$

oraz współczynnik pochylenia skarp:

$$m = \cot \alpha \quad (7.51)$$

Przy zadanym natężeniu przepływu (wydatku)  $Q = \text{const}$  charakterystyczne wielkości hydrauliczne przekroju poprzecznego będą więc funkcją współczynników  $\beta$  i  $m$ :

— powierzchnia czynna przekroju:

$$A = (\beta + m)H^2 \quad (7.52)$$

obwód zwilżony:

$$O = (\beta + 2\sqrt{1 + m^2})H \quad (7.53)$$

promień hydrauliczny:

$$R_h = \left( \frac{\beta + m}{\beta + 2\sqrt{1 + m^2}} \right) H \quad (7.54)$$

Wychodząc ze wzoru Manninga, otrzymuje się wyrażenia opisujące:

— natężenie przepływu:

$$Q = \frac{I^{1/2}(\beta + m)^{5/3} H^{8/3}}{n(\beta + 2\sqrt{1 + m^2})^{2/3}} \quad (7.55)$$

— powierzchnię przekroju czynnego:

$$A = \left( \frac{Qn}{I^{1/2}} \right)^{3/4} \frac{(\beta + 2\sqrt{1 + m^2})^{1/2}}{(\beta + m)^{1/4}} \quad (7.56)$$

Równanie (7.56) można też zapisać w postaci:

$$A = \chi \left( \frac{Qn}{I^{1/2}} \right)^{3/4} \quad (7.57)$$

gdzie:

$$\chi = \frac{(\beta + 2\sqrt{1 + m^2})^{1/2}}{(\beta + m)^{1/4}} \quad (7.58)$$

W tablicy 7.10 podano wartości liczbowe współczynnika  $\chi$  umożliwiające ocenę, w jaki sposób  $\beta$  i  $m$  wpływają na zmiany powierzchni przekroju trójkątnego, prostokątnego i trapezowego.

**Tablica 7.10**

Wartości współczynnika  $\chi$  w funkcji wybranych wartości współczynników  $\beta$  i  $m$

$\beta \backslash m$	$0^*$	0,577	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
$0^{**}$		1,743	1,682	1,778	1,910	2,031	2,136
1,154	1,713	1,622	1,647	1,780	1,916	2,034	2,139
2,0	1,682	1,639	1,669	1,799	1,921	2,046	2,147
3,0	1,700	1,677	1,707	1,828	1,952	2,062	2,160
4,0	1,732	1,718	1,747	1,859	1,976	2,082	2,175
5,0	1,769	1,759	1,787	1,892	2,001	2,101	2,192

Podane w tablicy 7.10 wyniki obliczeń współczynnika  $\chi$  odnoszą się do kanałów o przekroju trapezowym i do kanałów o przekroju:

- \* prostokątnym –  $m = 0$ ;
- \*\* trójkątnym –  $\beta = 0$ .

Najmniejsze powierzchnie przekroju poprzecznego występują w kanale o przekroju:

- trójkątnym dla  $m = 1,0$  i  $\chi = 1,682$ ;
- prostokątnym dla  $\beta = B_o/H = 2,0$  i  $\chi = 1,682$ ;
- trapezowym przy  $m = 0,577$ ,  $\beta = 1,154$  i  $\chi = 1,622$ .

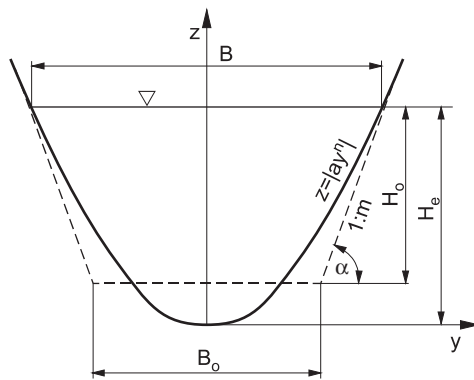
## 7.5. Transformacja przekroju trapezowego w przekrój paraboliczny

Poprzeczny trapezowy przekrój kanału może być zastąpiony przekrojem parabolicznym przy spełnieniu następujących warunków:

- zastępczy przekrój paraboliczny posiada tę samą powierzchnię przekroju co przekrój trapezowy;
- pochylenia skarp na poziomie zwierciadła wody pozostają te same w obu przekrojach.

Przyjmuje się, że powierzchnię przekroju parabolicznego tworzy parabola o równaniu (4.113), która obrócona wokół osi symetrii z tworzy przeciwległą skarpe. Styczna

do paraboli na poziomie zwierciadła wody ma pochylenie równe nachyleniu skarp przekroju trapezowego (7.51) (rys. 7.9).



Rys. 7.9. Transformacja przekroju trapezowego w przekrój paraboliczny

Z warunku pierwszego wynika, że będą spełnione następujące równania:

— powierzchnia przekroju:

$$A = (B_0 + mH)H = 2 \frac{n}{1+n} a^{-1/2} H_z^{1+n/n} \quad (7.59)$$

— szerokość kanału na poziomie zwierciadła wody:

$$B = B_0 + 2mH = 2 a^{-1/2} H_z^{1/2} \quad (7.60)$$

— głębokość „w nurcie” wzdłuż osi z:

$$H_z = \frac{1+n}{n} \frac{A}{B} \quad (7.61)$$

Z warunku (7.60) wynika, że pochodna szerokości  $B$  względem głębokości  $H$  jest równa:

— w kanale trapezowym:

$$\frac{dB}{dH} = 2m \quad (7.62)$$

— w kanale parabolicznym:

$$\frac{dB}{dH_z} = \frac{2}{n} a^{-1/n} H_z^{\frac{1}{n}-1} \quad (7.63)$$

Z porównania formuł (7.62) i (7.63) wynika, że zachodzi następująca tożsamość:

$$m = \frac{dB}{dH} = \frac{dB}{dH_z} \quad (7.64)$$

Po wprowadzeniu do równania (7.64) równań (7.62) i (7.63) i dokonaniu przekształceń algebraicznych otrzymamy:

$$m = \frac{1}{2n} \frac{B}{H_z} \quad (7.65)$$

a stąd poszukiwaną wartość  $H_z$ :

$$H_z = \frac{B}{2mn} \quad (7.66)$$

Z porównania równań (7.61) i (7.66) wywodzi się poszukiwany wykładnik potęgi:

$$n = \frac{B^2}{2mA} - 1 \quad (7.67)$$

i współczynnik liniowy  $a$ :

$$a = \frac{H_z}{(0,5B)^n} \quad (7.68)$$

albo:

$$a = \frac{B^{1-n}}{2 \cdot 0,5^n mn} \quad (7.69)$$

spełniający równanie opisujące kształt paraboli.

Przedstawione wyżej wzory, po algebraicznych przekształceniach, mogą też służyć do odwrotnego przekształcenia tj. transformacji przekroju parabolicznego w trapezowy.

## LITERATURA

1. Abbot M.B.: *An introduction to the method of characteristics*. New York 1966.
2. Allievi L.: *Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione*. Mediolan 1903.
3. Altšul A.D., Platnikov N.I.: *Isledovanie gidravličeskich soprotivleni pri nieustanovivšemsâ dviženii židkosti*, Č. I i II. VNIIG im. B.E. Vedeneeva 1973.
4. Arhangelskij V.A.: *Rasčety neustanovivšegosâ dviženii v otrzytyh vodotokah*, 1947.
5. Balcerski W. i in.: *Budownictwo betonowe*, t. XVII *Budowle wodne śródlądowe*. Warszawa, Arkady 1969.
6. Barré de Saint Venant A.J.C.: *Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde ou d'une intumescence dans un canal prismatique et remarques sur les propagations du son et de la lumière, les ressauts, ainsi que sur distinction des rivières et des torrents*. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, t. LXXIII, 1870.
7. Barré de Saint Venant A.J.C.: *Théorie du mouvement non permanent des eaux*. Paris 1871.
8. Bazin H.: *Recherches experimentales relatives aux remous et à la propagation des ondes*. Recherches hydrauliques de Darcy et Bazin, Paris, 1865.
9. Bednarczyk S.: *Contribution à l'étude des oscillations secondaires dans les canaux decouverts*, rozprawa doktorska. Université de Toulouse 1964.
10. Bednarczyk S.: *O kształcie i wielkościach fal translacyjnych wywołanych nagłą zmianą przepływu w kanałach otwartych*. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej nr 131, Budownictwo Wodne, z. XII, Gdańsk 1968.
11. Bednarczyk S.: *Propagation of a negative translation wave in an open channel*. International Symposium on Water Management and Hydraulic Engineering, Dubrovnik 1998.
12. Bednarczyk S.: *Ruch falowy w kanałach otwartych i metody wyznaczania jego wielkości hydraulicznych*. Archiwum Hydrauliki, t. XII, z. 14, 1965.
13. Bednarczyk S., Thirriot C.: *Etudes théoriques des oscillations secondaires dans les canaux rectangulaires compte tenu des pertes de charges*. Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, t. 259, 1964.
14. Benjamin T.B., Lightill L.J.: *On cnoidal waves and bores*. Proceedings of the Royal Society, Vol. 224, 1954.
15. Bergant A., Simpson A.R., Vitkovsky J.: *Developments on unsteady pipe flow modeling*. Journal of Hydraulic Research, Vol. 39, No 3, 2001.
16. Bergeron L.: *Complexité de phénomènes de coup de bélier dans les installations de pompage et essai de classification des solutions généraux pour y remédier*. La Houille Blanche, nr special B, 1949.
17. Bergeron L.: *Coup de bélier en hydraulique ou coup de foudre en electricité*. Dunod, Paris 1950.
18. Bergeron L.: *Etude des coups de bélier dans le conduites. Nouvel exposé de la méthode graphique*. La Technique Moderne, t. XXIII, nr 2, 1936 i nr 3, 1937.
19. Boris S.: *Influence des lois de manoeuvre sur l'évolution des fronts d'intumescence*, rozprawa doktorska, Université de Toulouse 1963.

20. Boussinesqu J.: *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans lits rectilignes à grande section*, a memoires. Paris 1897.
21. Burzyński K., Granatowicz J., Piwecki T., Szymkiewicz R.: *Metody numeryczne w hydrotechnice*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1991.
22. Cooley R.L., Moin S.A.: *Finité element solution of Saint Venant equations*. Journales Hydraulique, Division of the HYG, Vol. 102, 1976.
23. Courant R., Friedrichs K.A.: *Supersonic flow shockwaves*. New York 1948.
24. Courant R., Issacson E., Rees M.: *On the solution of the nonlinear differential equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. V, 1952.
25. Cunge J.A., Wegner M.: *Integration numérique des équations de Saint Venant par un schéma implicite de différences finies*. La Houille Blanche, nr 1, 1964.
26. Černyj I.A.: *Neustanovivšeesâ dviženje realnoj židkosti v trubach*, M. „Nedra” 1975.
27. Daily J.W., Deemer K.C.: *The unsteady flow-water tunnel at the Massachusetts Institute of Technology*. Transactions ASME (American Society of Mechanical Engineers) 1954.
28. Daily J.W., Hankey W.L., Olive R.W., Jordan J.M.: *Resistant coefficients for accelerated and decelerated flows through smooth tubes and orifices*. Transactions ASME (American Society of Mechanical Engineers), Vol. 78, 1956.
29. Denisov S.V.: *O koefficiente treniâ v nestacionarnyh tečeniâh*. Inžinerno-fizičeskij Žurnal, t. 18, nr 1, 1970.
30. Egiazarov I.V.: *Neustanovivšeesâ dviženje v dlinnyh befah*. Izvestiâ NIIG, t. XXI, 1937.
31. Euler L.: *Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluids*. Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin 1757.
32. Evangelisti G.: *Water hammer analysis by the method of characteristics*. Energia Electrica nr 9, 11, 12, 1969.
33. Favre H.: *Etude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux decouvertes*. Paris 1935.
34. Forchheimer P., *Wasserchwal und Wasserunk*, Wiedeń 1924.
35. Gariel M.: *Etude sur les maxima des surpressions dans les phénomènes de coup de bélier*. Revue Généralé de l'Electricité, t. IV, nr 12, 1918.
36. *Gidromechaničeske perehodnye procesy v gidroenergetičih ustanovkah*, Krivčenko (red.), Gosudarstvoe Izdatielstvo Energiâ, Leningrad 1975.
37. Glaister D.: *Approximate Riemann solution of the shallow water equation*. Journal of Hydraulic Research, Vol. 26, 1988.
38. Godunov S.K.: *A difference scheme for numerical computation of discontinuous solution of hydrodynamic equation*. Matematicheskii Sbornik, nr 47, 1956.
39. Granatowicz J., Szymkiewicz R.: *Porównanie efektywności rozwiązywania równań de Saint-Venanta metodą elementów skończonych i różnic skończonych*. Archiwum Hydrotechniki, t. XXXVI, z. 3–4, 1989.
40. Holmber E.L., Rouleau V.T.: *Vliânie vâzkogo trenia na rasprostranienie signalov v gidravličeskikh liniâh*. Teoretičkie osnovy inženernyh rasčetov, nr 3, 1964.
41. Hristianovič S.A.: *Neustanovivšeesâ dviženje v kanalah i rekah*, 1939.
42. Idelčik I.E.: *Spravočnik po gidravličeskim soprotivleniâh*. Gosudarstvennoe Energetičeskoe Izdatielstvo, Moskva–Leningrad 1960.
43. Jaeger Ch.: *Théorie generale du coup de bélier*. Dunod, Paris 1933.
44. Kartvelišvili N.A.: *Dinamika napornyh truboprovodov*. Energiâ, Leningrad 1979.

45. Kartvelišvili N.A.: *Neustanovivšešā režmy v silovyh uzlah gidrelektričeskikh stancii*. Gose-nergoistdat 1951.
46. Koppol T.A., Liŭ U.R.: *Gidravličeskie charakteristiki kasatielnogo naprāženā treni na stenke trubopravoda pri neustanovivšešā tečeni židkosti*. Novočerkask 1975.
47. Krzyżanowski W.: *Turbiny wodne. Konstrukcja i zasady regulacji*. WNT, Warszawa 1971.
48. Kubrak J.: *Modele numeryczne rozprzestrzeniania się fali wypływającej przez wyrwę w zapo-rze*. Rozprawy Naukowe i Monografie SGGW-AR, Warszawa 1989.
49. Lemoine R.: *Sur les ondes positives de translation dans les canaux at sur le ressau ondulé de faible amplitude*. La Houille Blanche, nr 2, 1948.
50. Liŭ U.R.: *O gidravliičeskikh zakonomernostāh pri uskorennom dviženii židkosti v napornom cilindričeskom truboprovode*. Trudy Talinskogo Politechnicheskogo Instituta nr 223, 1965.
51. Markov C.B.: *Eksperymentalnoe issladovanie skorostnoj struktury i gidravličeskikh soprotiv-lenij v neustanovivšihsā turbulentnyh potokah*. Izviestia AN SSSR, Ser. Mehanika Židkosti nr 2, 1973.
52. Faure J.: *Théorie des couches limites incompressibles*; Coulomb R., Prompsy J.J.: *Hydraulique urbaine*. [W:] *Mecanique des fluides appliquée*, Direction de Michel Hug, Eyrolles 1975.
53. Melešenko N.T.: *Primenene teorii dlennykh voln maloj amplitudy k voprosom sutočnovo regulirovanā*. Izviestia NIIG, t. 28, 1940.
54. Melešenko N.T., Akubov M.S.: *Metodika rasčetov neustanovivšešā dviženā židkosti v otkrytyh ruslakh po metodu C.A. Hristianoviča*. Izviestia NING, t. 38, 1948.
55. Meunier M.: *Les coups de bélier et la protection des reseaux d'eau sous la pression*. Ecole Nationale de Génie Rural des Eaux et des Forêts 1989.
56. Michaud J.: *Coup de bélier dans les conduites. Etude des moyens employés en atténuer*. Bul-letin de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes, nr 3 i 4, 1878.
57. Nikuradse J.: *Untersuchung über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen*, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Nr 181, Berlin 1926.
58. Phan Anh Tuan: *Obliczanie nieustalonych przepływów na przykładzie Rzeki Czerwonej i jej dopływów*. Gospodarka Wodna, 1993.
59. Polska Norma PN-76/M-34034: *Rurociągi. Zasady obliczeń strat ciśnienia*.
60. Pomianowski K., Wóycicki K.: *Uderzenia wodne w przewodach tłocznych zakładów wodo-ciągowych*. Prace Akademji Nauk Technicznych, z. 3, t. III, 1934.
61. Popov D.N.: *Ob obšenoje uravnene dla opredeleniā kasatelnyh naprāženij na stenke truby pri neustanovivšešā dviženii vāzkoī židkosti*. Izviestia Vuzov, Seria Mašinostroenie, nr 5, 1967.
62. Popov D.N., Kravčenko V.G.: *Issledovanie neustanovivšešā dviženā židkosti pri pierehodnyh procesah v karotki trube*. Vestnik mašinostroeniā nr 6, 1974.
63. Prandtl L.: *Dynamika przepływów*. PWN, Warszawa 1956.
64. Preissman A.: *Modèles pour le calcul de la propagation des crues*. La Houille Blanche, nr 3, 1971.
65. Puzanov A.: *Struktura vlnového proudění v otvorených korytach*. Rozprawy Cesko-Sloven-skej Akademii Vied, 1962.
66. Puzanov A., Eliáš V.: *Velocity and pressure distribution in plane positive surges*. Materiały Kongresu Association Internationale des Recherches Hydrauliques, Leningrad 1965.
67. Puzyrewski R., Sawicki J.: *Podstawy mechaniki płynów i hydrauliki*. PWN, Warszawa 1987.
68. Rachmanov A.N.: *O neustanovivšešā dviženii v nižnyh i verhnyh befah rečnyh gidrouzlov*. Izviestia VNIIG, t. XXX, 1941.

69. Riemann B.: *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite Abhandlungen*. Getinga 1860.
70. Sandoval J.A., Taylor C.: *Les ondes de translation et les ondulations de front d'onde*. La Houille Blanche, nr 3, 1963.
71. Schlag A.: *L'introduction des pertes de charge dans le calcul du coup de bélier*. Le Génie Civil, Février 1961.
72. Schnyder O.: *Druckstösse in Rohrleitungen*. Wasserkraft und Wasserwirtschaft nr 5 i 6, Zurich 1932.
73. Serre F.: *Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux*. La Houille Blanche, nr 3 i 6, 1953.
74. Sparre D.: *Etude générale du coup de bélier*. Société Hydrotechnique de France, Bulletin special, nr 1, 1945.
75. Streeter V.L.: *Water hammer analysis of pipelines*. Journal of the Hydraulic Division, Proceeding American Society of Civil Engineers 1964.
76. Szydłowski M.: *Numeryczna symulacja przepływu wody ze swobodną powierzchnią w warunkach ruchu szybkozmiennego z nieciągłościami*, Praca doktorska, Wydział Inżynierii Środowiska Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1998.
77. Szymkiewicz R.: *Finite-element method for the solution of the Saint-Venant equations in an open channel network*. Journal of Hydrology, vol. 122, 1991.
78. Szymkiewicz R.: *Modelowanie matematyczne przepływów w rzekach i kanałach*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.
79. Ščevelev D.S.: *Ispolzovanie vodnoj energii*. Energiã, Leningrad 1976.
80. Taylor C.: *Unular surge waves in prismoidal channels*, Praca doktorska, Uniwersytet Swansea, 1960.
81. Thirriot C.: *Methodes approchés de calcul des coups de bélier dans les conduites relativement longues*, La Houille Blanche, nr 2, 1967.
82. Thirriot C., Barthet H.: *Possible et limite de la dégénérescence en système différentiel mathématique des intumescences*. La Houille Blanche, nr 7, 1967.
83. Thirriot C., Bednarczyk S.: *Ondulations secondaires en front d'intumescences et ondes solitaires*, La Houille Blanche, nr 8, 1964.
84. Thirriot C., Gaudu R.: *Onde solitaire dans les canaux prismatiques à profils varies*. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 265, 1967.
85. Thoma D.: *Beiträge zur Theorie des Wasserschlosses bei Selbsttätig Geregelt Turbinenanlagen*, München 1910.
86. Ven Te Chow: *Open channel hydraulics*. Mc Graw-Hill Book Company 1959.
87. Vodernikov V.V.: *K rasčetu neustanovivšegosâ dviženâ v otkrytyh ruslah*, 1947.
88. Wylie E.B., Streeter V.L.: *Fluides transients*. Mac Graw-Hill Inc. 1978.
89. Zegžda A.P.: *Teoria podobijâ i metodika rasčeta gidrotehničeskikh modeli*. Leningrad 1938.
90. Žukovskij N.E.: *O gidravličeskom udare v vodoprovodnyh trubah*. Memoirs of the Imperial Academy of Sciences of Saint Petersburg, Vol. 9, nr 5, 1898.



## O AUTORZE

Prof. dr hab. inż. Stefan Bednarczyk jest absolwentem (1956) Wydziału Budownictwa Wodnego Politechniki Gdańskiej. Tam też się doktoryzował (1963) i habilitował (1968). Ponadto uzyskał stopień doktora hydrodynamiki na Wydziale Nauk Uniwersytetu w Tuluzie. Przez wiele lat pracował na Politechnice Gdańskiej, zajmując stanowiska od asystenta do profesora nadzwyczajnego w Katedrze Budownictwa Wodnego. Oprócz tego był zatrudniony na Politechnice Algierskiej (1981–1986) i na Uniwersytecie Nauk i Technologii w Oranie (1988–1991). W latach 1979–1981 był członkiem Centralnej Komisji ds. Kadr Naukowych. Obecnie przebywa na emeryturze z tytułem profesor emeritus PG.

Profesor Bednarczyk jest wyróżniającym się specjalistą w naukowo i zawodowo uprawianej dyscyplinie, jaką stanowi budownictwo wodne śródlądowe: w zakresie budowy i eksploatacji elektrowni wodnych, stateczności i bezpieczeństwa budowli piętrzących, ochrony przeciwpowodziowej, a w szczególności przepływów nieustalonych wywoływanych przez maszyny hydroenergetyczne. Opracował w tej dziedzinie kilka znaczących modeli matematycznych pozwalających przewidzieć wielkość fal translacyjnych w kanałach i uderzeń hydraulicznych w rurociągach.

Jest autorem i współautorem czterech monografii i dwóch podręczników akademickich w przedmiocie budownictwo wodne śródlądowe. Opublikował w polskich i zagranicznych czasopismach oraz w materiałach konferencji międzynarodowych około 80 rozpraw i artykułów naukowo-technicznych, w tym dwie rozprawy w Rocznikach Francuskiej Akademii Nauk. Wykonał też kilkadziesiąt ekspertyz i opinii technicznych oraz sądowych.

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

---

Wydanie I. Ark. wyd. 9,0, ark. druku 11,75, 1219/1077

---

Druk i oprawa: Volumina.pl Daniel Krzanowski  
ul. Księcia Witolda 7-9, 71-063 Szczecin, tel. 91 812 09 08